ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Решмин Сергей Алекандрович

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ.

специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
академик РАН
Ф. Л. Черноусько

Москва – 2000

Содержание

Введение 3

Глава 1. Синтез управления в нелинейной Лагранжевой системе на основе декомпозиции. 15

1.1 Постановка задачи. 16

1.2 Декомпозиция системы. 18

1.3 Управление линейной подсистемой. 19

1.4 Нахождение допустимых параметров управления X_i. 22

1.5 Случай нулевых начальных скоростей. 24

1.6 Приложения к задачам управления манипуляционными роботами, приводы которых имеют большие коэффициенты передачи. 28

1.7 Численное моделирование движений трехзвенного робота-манипулятора. 33

Глава 2. Синтез управления двузвенным манипулятором с безредукторными приводами. 60

2.1 Описание системы. Постановка задачи. 61

2.2 Упрощающие предположения и декомпозиция системы. 63

2.3 Нахождение параметров управления X_1 и X_2. 63

2.4 Численное моделирование. 67

Глава 3. Задача динамического управления манипуляционными роботами с упругими элементами. 71

3.1 Уравнения движения с учетом упругости шарниров. 71

3.2 Постановка задачи и упрощающие предположения. 75

3.3 Асимптотической подход и декомпозиция движений. 76

3.4 Численное моделирование движений двузвенного робота-манипулятора. 79

Заключение 90

Литература 92

Введение.

Диссертация посвящена исследованию возможностей применения метода декомпозиции в задачах управления динамическими системами. Цель проведенных исследований заключается в приложении полученных результатов к решению задач управления манипуляционными роботами.

В диссертации рассматриваются системы, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями, имеющими лагранжеву форму [11]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i + Q_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{0.0.1}$$

где U_i — управляющие обобщенные силы (управления), Q_i — все прочие обобщенные силы, включая неконтролируемые возмущения, $T(q, \dot{q})$ — кинетическая энергия системы, заданная в виде положительно определенной квадратичной формы по обобщенным скоростям $\dot{q}_i$ с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат q:

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{0.0.2}$$

Основные проблемы, возникающие при решении задач управления рассматриваемой системой, связаны с тем, что она представляет собой существенно нелинейную динамическую систему высокого порядка. Для нее характерно наличие динамического взаимодействия между различными степенями свободы, которое характеризуется элементами $A_{ij}(q)$ матрицы кинетической энергии $A(q)$. Другим осложняющим фактором является дефицит управлений в системе (их число равно n в системе порядка $2n$).

Примером механических систем, описываемых уравнениями (0.0.1), могут служить манипуляционные роботы [35], которые являются важ-

нейшей составной частью автоматизированных производственных систем. Манипуляционные роботы обладают гибкостью перестройки на выполнение самых разнообразных технологических операций, а также широкими функциональными возможностями. В отличие от автоматов они способны воспроизводить или имитировать движения человека. Манипуляционный робот – это управляемая механическая система, которая содержит один или несколько манипуляторов (исполнительных органов), систему управления, приводы, захватные устройства (рабочие органы). Манипулятор – механическая система с программным управлением, доставляющая объекты в заданную область пространства внутри рабочей зоны. В конструкции манипуляционного робота используются различные виды приводов — электромеханические, пневматические, электрогидравлические. Наибольшее распространение получили электромеханические приводы [22, 36], состоящие обычно из электродвигателя и редуктора. Приводные двигатели могут быть расположены шарнирах, соединяющих звенья манипулятора, или в соседних звеньях с шарнирами.

Для манипуляционных роботов в качестве обобщенных координат q_i обычно выбираются относительные углы или смещения между звеньями. Интенсивность взаимовлияния между различными звеньями задается элементами матрицы $A(q)$. Если учитывается динамика приводов, то функции A_{ij} включают массо-инерционные параметры электродвигателей и редукторов. Уравнения движения манипуляционного робота (в форме Лагранжа) содержат составляющие обобщенных сил Q_i, обусловленные силами веса, сопротивления, которые бывают известны лишь в общих чертах и могут существенно изменяться в процессе эксплуатации манипулятора. Компоненты U_i имеют физический смысл сил или моментов сил, развиваемых исполнительными устройствами.

Часто возникает задача о переводе системы (0.0.1) из некоторого начального состояния в заданное терминальное состояние. При этом

предполагается, что обобщенные координаты $q_i(t)$ и скорости $\dot{q}_i(t)$ доступны измерению, а управления U_i подвержены некоторым ограничениям.

Для решения этой задачи могут быть использованы методы оптимального управления [23]. Они учитывают накладываемые ограничения на управление и позволяют привести систему в терминальное состояние за минимальное время. Тем не менее, нахождение оптимального закона управления для нелинейной системы — задача достаточно трудная. Точное решение задач оптимального управления возможно крайне редко и только для специального типа динамических систем.

Для решения задач управления в нелинейной постановке были предложены различные подходы в работах Дж. Лейтманна, М. Корлесса, А. Исидори, Х. Нимейера, А. ван дер Схафта, С. В. Емельянова, В. И. Уткина, Е. С. Пятницкого, Ф. Л. Черноусько и др. Можно выделить адаптивные подходы, основанные на методе функции Ляпунова [48, 40, 41], методы систем с переменной структурой [16, 55], методы, использующие идеи декомпозиции [24, 25, 20, 32, 33, 34, 38], и другие методы [46, 51].

Необходимость рассмотрения задач управления системой (0.0.1) именно в нелинейной постановке без перехода к упрощенному линеаризованному описанию связана с несколькими причинами. Классические методы автоматического управления, применяемые к линейным системам, представляют управление в виде линейного оператора текущего состояния системы. Таким образом, в окрестности терминального состояния управление оказывается малым. Следовательно, используются не все возможности управления, и время процесса управления бесконечно. Вдали от терминального состояния управление становится достаточно большим и может нарушить ограничения, которые обычно на него накладываются. Кроме того, область допустимых возмущений для систем управления, построенных на основе линейных моделей, ча-

сто не охватывает возмущений, которые встречаются в реальных эксплуатационных режимах. При изменении цели управления в системах, построенных на основе линейных моделей, изменяются как структура, так и параметры алгоритмов управления. Указанные причины затрудняют синтез универсальных систем управления.

В работах Ф. Л. Черноусько [32, 33, 34, 38] предложены методы, которые при определенных допущениях позволяют построить управление по обратной связи для системы (0.0.1). Эти методы явно учитывают наложенные геометрические ограничения на управление

$$|U_i| \leq U_i^0, \qquad i = 1, ..., n \tag{0.0.3}$$

и обеспечивают приведение системы (0.0.1) в заданное состояние q^1 с нулевыми скоростями за конечное время. Данные методы используют декомпозицию исходной нелинейной системы со многими степенями свободы на простые подсистемы с одной степенью свободы каждая, т. е. основаны на сведении исходной задачи управления нелинейной системой порядка $2n$ к задаче управления системой n простых независимых линейных уравнений второго порядка. Далее, для каждой подсистемы применяется подход теории оптимального управления и дифференциальных игр. В результате получено в явном виде управление по обратной связи для исходной нелинейной системы. Это управление близко к оптимальному (субоптимально), если величины возмущений и нелинейностей в системе оказываются малыми.

Наряду с задачами управления механическими системами вида (0.0.1), которые подвержены возмущениям, в диссертации исследуется задача динамического управления в лагранжевой системе, моделирующей динамику манипуляционных роботов с упругими шарнирами. Одной из важных технических характеристик манипуляторов является точность позиционирования схвата. Для того, чтобы добиться ее повышения, приходится производить анализ динамики механической

модели манипулятора с учетом его упругой податливости. Экспериментальные исследования [5, 12] показывают, что основной вклад в упругую податливость роботов, снабженных электромеханическими приводами с многоступенчатыми редукторами, вносит упругость шарниров. Упругость же звеньев во многих случаях может не учитываться ввиду их относительно небольшой длины и большой жесткости. Анализ упругих колебаний, возникающих в таких системах, может проводится с использованием асимптотического метода разделения движений на "быстрые" и "медленные" составляющие. Такой подход был впервые применен к системам с упругими элементами большой жесткости в работах [30, 31]. Члены, описывающие влияние упругой податливости, находятся в аналитическом виде, а полученные уравнения для медленных движений не содержат высокочастотных осциллирующих слагаемых и могут быть проинтегрированы численно с большим шагом. Таким образом, полуаналитический метод исследования позволяет уменьшить вычислительные затраты.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе диссертации рассматривается нелинейная управляемая динамическая система со многими степенями свободы, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода. Предполагается, что в уравнениях движения матрица кинетической энергии близка к некоторой постоянной диагональной матрице. Найдены достаточные условия, при которых возможна декомпозиция исходной нелинейной системы на независимые линейные подсистемы второго порядка (при этом нелинейности рассматриваются как ограниченные возмущения). Указан способ расчета субоптимального управления, переводящего систему за конечное время из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние с нулевыми скоростями. Построенное управление ограничено, имеет простую структуру, а также позволяет учесть огра-

ничения, накладываемые на фазовые координаты, и наличие возмущений. Рассмотрены приложения предложенного подхода к проблемам управления манипуляционными роботами, снабженными электроприводами. Найдено множество значений передаточных чисел редукторов, при которых осуществим предложенный способ управления. Полученные алгоритмы расчета управления иллюстрируются на примере трехзвенного антропоморфного робота-манипулятора.

Во второй главе диссертации рассматривается управляемая динамическая система заданной структуры, которая представляет собой упрощённую модель механического двузвенного манипуляционного робота с безредукторными приводами и абсолютно жёсткими элементами конструкции. Указаны ограничения на параметры системы и значения углов между звеньями при начальной и конечной конфигурациях, для которых осуществима ее декомпозиция. Полученные результаты имеют важное значение, поскольку позволяют полностью устранить динамическое взаимовлияние между звеньями манипулятора. Алгоритмы расчета управления иллюстрируются на примере системы двух тел, моделирующей движения руки манипуляционного робота в горизонтальной плоскости.

В третьей главе решена динамическая задача управления манипуляционными роботами, звенья которых соединены друг с другом при помощи шарниров, обладающих упругостью. Исследован случай, когда одновременно велики жесткость упругих элементов и передаточные числа редукторов электроприводов. При решении задачи используется полуаналитический подход [30, 31] основанный на методе осреднения [21, 29], позволяющий отделить динамику робота как целого от его упругих вибраций. В результате декомпозиции движений, интегрирование уравнений движения робота удается заменить интегрированием более простой системы с большим шагом, так как "быстрая" часть уравнений движения решена в аналитическом виде. Представлены ре-

зультаты численного моделирования движений двузвенного манипуляционного робота, подтверждающие эффективность метода.

Опишем более подробно подход, предложенный в [32], который используется в первых двух главах диссертации. При этом подходе система (0.0.1) с учетом (0.0.2) представляется в виде

$$A_1\ddot{q} = U + V(q, \dot{q}, t, U), \tag{0.0.4}$$

$$V = A_1 A^{-1}(q)Q' + A_1 A^{-1}(q)U - U,$$

Компоненты вектора Q' задаются выражениями

$$Q'_i = -\sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{ijk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k + Q_i, \quad \gamma_{ijk} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i}.$$

Затем при помощи замены переменных $A_1(q - q^1) = y$ система (0.0.4) приводится к виду

$$\ddot{y} = U + V \tag{0.0.5}$$

Исходная задача сводится к задаче о переводе за конечное время каждой из n линейных систем (0.0.5) в заданное терминальное состояние с нулевой скоростью и удержании их там. В (0.0.5) величины U_i рассматриваются как управляющие параметры одного игрока, а величины V_i - как противодействие второго игрока (противника). В [32] приведены условия, при которых ресурсы управляющего игрока оказываются выше ресурсов противника, и такая игровая задача имеет решение. Эти условия удовлетворяются, если $A(q)$ близко к A_1, а допустимые величины управляющих воздействий U достаточно велики, по сравнению с Q'. Однако, для того чтобы добиться выполнения этих условий, обычно приходится накладывать различные дополнительные ограничения (например, на параметры системы и область движения). Именно с этой проблемой связаны исследования, изложенные в диссертации.

В [33] предложен второй способ декомпозиции системы (0.0.1), основанный на игровом подходе. Сначала при помощи управления, направленного против вектора скорости, система приводится в область малых скоростей. Далее исходные уравнения представляются в виде, аналогичном (0.0.5)

$$\ddot{q} = u + v \tag{0.0.6}$$

где

$$u = A^{-1}(q)U, \quad v = A^{-1}(q)Q' \tag{0.0.7}$$

и строится управление на основе игрового подхода. При этом u выступает в роли управляющего вектора, а v рассматривается в качестве вектора возмущений. Как показано в [38], допущения описанного способа менее ограничительны, однако возникает необходимость накладывать жесткие ограничения на управление u, чтобы удовлетворить исходным ограничениям (0.0.3) на вектор U

$$|u_i| \leq u_i^0, \qquad u_i^0 = r_0 M^{-1} n^{-1/2},$$

$$r_0 = \min_i U_i^0, \qquad 1 \leq i \leq n$$

Здесь M — константа, ограничивающая сверху собственные значения матрицы $A(q)$. Это приводит к тому, что возможности управления U используются не полностью. Поэтому время управления по первому способу оказывается обычно меньше, чем по второму.

Изложенный метод декомпозиции использовался другими авторами в работах [13, 14, 15]. В [6] он обобщен на случай ненулевых терминальных скоростей.

Другой основанный на идее декомпозиции способ управления динамическими системами вида (0.0.1) с ограничениями на управление (0.0.3) предложен в [24, 25]. В указанных работах даны иные условия реализуемости метода декомпозиции, матрица кинетической энергии

предполагается неизвестной, время приведения системы в заданное состояние происходит за бесконечное время. Суть этого метода состоит в том, чтобы, во-первых, с помощью управления полностью устранить динамическое взаимовлияние между различными степенями свободы и, во-вторых, выбрать это устраняющее взаимодействие (управление) так, чтобы система совершала движение в соответствии с целью управления, т. е. осуществить координацию движения различных степеней свободы. В соответствии со схемой синтеза, для построения закона управления механической системой используется функция Ляпунова вида

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}(q) \left(\dot{q}_i - v_i(t)\right) \left(\dot{q}_k - v_k(t)\right)$$

Режим декомпозиции задается уравнениями

$$\dot{q}_i = v_i(q,t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{0.0.8}$$

на который система выводится через конечное время (при некоторых дополнительных предположениях) при помощи релейного управления

$$U_i = -U_i^0 \operatorname{sign}\left(\dot{q}_i - v_i(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

К работам [24, 25] примыкают работы [19, 20, 49].

В работе [19] допустимыми являются непрерывные законы управления. И речь по существу идет о решении задачи в классе непрерывных ограниченных законов управления при предположении, что внешние силы, действующие на систему, являются гладкими. Также предполагается, что гладкими являются коэффициенты матрицы кинетической энергии.

В [20] сделано обобщение метода декомпозиции для учета динамики приводов общего вида. Рассматриваемые режимы декомпозиции имеют существенное отличие от (0.0.8) и позволяют учитывать, например, инерционность приводов манипуляторов.

В [49] учитываются дополнительные идеальные дифференциальные ограничения, накладываемые на обобщенные координаты системы.

В [26] рассматривается совокупность (класс) управляемых динамических систем, описываемых уравнениями Лагранжа. Класс определяется заданием ограниченных областей, в которых могут принимать значения управления и обобщенные силы соответственно. Установлены необходимые и достаточные условия полной управляемости класса. Полученные результаты существенно упрощают решение проблемы управляемости конкретной системы в условиях неполной информации о действующих силах и параметрах. Показано, что для полной управляемости манипуляционного робота необходимо, чтобы максимальные значения управляющих моментов превосходили по абсолютной величине соответствующие моменты остальных сил.

Различные задачи о построении оптимального по быстродействию управления манипуляционными роботами рассмотрены в [35].

Работа [2] посвящена синтезу оптимальных (по быстродействию, энергозатратам) управлений транспортными движениями промышленных манипуляционных роботов антропоморфного типа с электромеханическими приводами. Анализируются возможные упрощения исходной математической модели, связанные с соотношением порядков физических параметров рассматриваемой электромеханической системы. Показывается, что во многих случаях при расчете законов управления можно пользоваться простой линейной моделью, не учитывающей взаимного влияния различных степеней свободы.

Двухточечная задача оптимального управления антропоморфным манипулятором с двумя степенями свободы, снабженным электроприводами, решается в [53]. Если передаточные числа редукторов, используемых в приводах, велики, то исходные нелинейные уравнения аппроксимируются линейными дифференциальными уравнениями с по-

стоянными коэффициентами. Аппроксимация основана на замене угловых переменных в нелинейных слагаемых их средними значениями. Продолжением работы [53] является [54], в которой учитывается упругая податливость шарниров.

В работе [3] излагаются эффективные аналитические методы малого параметра для приближенного решения широких классов задач оптимального управления, ориентированные на построение синтеза. Развитые подходы подтверждаются решением задач оптимального управления движением манипуляционных роботов и многих других механических систем.

В [4] методами теории сингулярных возмущений оценивается влияние упругой податливости манипуляторов на их движение. При этом учитываются характеристики электроприводов.

В работе [17] проведено компьютерное моделирование динамики манипуляторов с упругими шарнирами. При этом использовался математический аппарат, описанный в [30, 31].

В [7] рассматриваются вопросы использования первых интегралов движения в задачах оптимального управления динамическими системами. В [8] производится оптимизация передаточных коэффициентов редукторов манипулятора с упругими звеньями так, чтобы минимизировать максимальное значение мощности и энергозатраты.

В работах [9, 10] с использованием прямого метода Ляпунова предложены законы управления для стабилизации лагранжевой системы с упругими связями между свободными и управляемыми степенями свободы. Управляющие воздействия подвержены ограничениям. Такая система уравнений описывает, в частности, динамику робота-манипулятора с упругими сочленениями.

В [39, 50, 37] предложены другие различные способы управления механическими системами, конструкция которых обладает упругостью, сосредоточенной в шарнирах.

По теме диссертации опубликовано 6 статей в журналах Российской Академии наук [27, 28] и трудах международных конференций [42, 43, 44, 52].

Результаты диссертации докладывались на семинаре Института проблем механики РАН "Теория управления и динамика систем" (руководитель семинара — академик РАН Ф. Л. Черноусько), на международной конференции по информатике и управлению (International Conference on Informatics and Control, June 1-3, 1998, St.-Petersburg) [42], на четвертой конференции по нелинейным управляемым системам Международной Федерации по автоматическому управлению (4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, July 1-3, 1998, Нидерланды) [43], на четвертой конференции Европейского совета за мир и развитие по робототехнике, интеллектуальной автоматике и активным системам (Forth ECPD Conference on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems, 24-26 August, 1997, Moscow) [44], на второй международной конференции "Управление колебаниями и хаосом" (2nd International Conference "Control of Oscillations and Chaos" (COC'2000), July 5-7, 2000, St.-Petersburg) [52].

Исследования по теме диссертации выполнены в Институте проблем механики РАН.

Глава 1.

Синтез управления в нелинейной Лагранжевой системе на основе декомпозиции.

Введение.

В данной главе рассматривается нелинейная управляемая динамическая система со многими степенями свободы, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода. На величины управляющих воздействий наложены геометрические ограничения. Предполагается, что в уравнениях движения матрица кинетической энергии близка к некоторой постоянной диагональной матрице. К системе такого вида можно привести, например, уравнения движения роботов, приводы которых имеют большие коэффициенты передачи. Ставится задача о переводе системы за конечное время из заданного начального состояния в терминальное состояние с нулевыми скоростями. Для построения управления применяется метод декомпозиции [32]. Указываются достаточные условия, при которых максимальные значения нелинейных слагаемых в уравнениях движения не превосходят допустимых величин управляющих воздействий. При этом нелинейности рассматриваются как ограниченные возмущения и осуществляется декомпозиция системы на независимые линейные подсистемы второго порядка. Для этих подсистем задается управление по обратной связи, которое гарантирует приведение каждой из них в терминальное состояние при любых допустимых возмущениях. Предлагаемое управление имеет простую структуру. Рассмотрены приложения предложенного подхода к проблемам управления манипуляционными роботами.

1.1. Постановка задачи.

Рассматривается нелинейная управляемая динамическая система, имеющая n степеней свободы, движение которой описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i + Q_i \tag{1.1.1}$$

Здесь $q = (q_1, ..., q_n)$ – вектор обобщенных координат, $q \in D \subset R^n$; U_i – управляющие обобщенные силы, которые предстоит определить; Q_i – прочие обобщенные силы; T – кинетическая энергия системы, заданная в виде квадратичной формы

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{1.1.2}$$

где $A(q)$ – симметрическая положительно-определенная матрица с элементами $A_{jk}(q)$. Выше и всюду далее индексы i, j, k принимают значения $1, 2, ..., n$.

Область D, в которой могут происходить движения рассматриваемой системы, задана в виде независимых ограничений на координаты q_i

$$D = \{q : \ q_i^- \leq q_i \leq q_i^+\} \tag{1.1.3}$$

Ограничения наложены также на управляющие обобщенные силы

$$|U_i| \leq U_i^0 \tag{1.1.4}$$

Сделаем некоторые упрощающие предположения относительно кинетической энергии и обобщенных сил Q_i. Предполагаем, что матрица $A(q)$ из (1.1.2) представима в виде

$$A(q) = J + \tilde{A}(q), \quad J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_n), \quad J_i = \mathrm{const} > 0 \tag{1.1.5}$$

где $\tilde{A}(q)$ – симметрическая матрица, такая, что для любого n-мерного вектора z выполнено неравенство

$$|\tilde{A}(q)z| \leq \mu|z|, \qquad \mu > 0, \qquad \forall q \in D \tag{1.1.6}$$

Здесь μ – достаточно малый параметр, возможные значения которого указаны ниже.

Кроме того, предполагаем, что

$$|\partial A_{jk}/\partial q_i| \leq c, \qquad c = \text{const} > 0 \tag{1.1.7}$$

и что обобщенные силы Q_i представляются в виде

$$Q_i = G_i + F_i \tag{1.1.8}$$

Здесь $G_i(q, \dot{q}, t)$ – ограниченные силы, величины которых не превосходят допустимых значений управляющих сил, т. е.

$$|G_i| \leq G_i^0, \qquad G_i^0 < U_i^0 \tag{1.1.9}$$

где G_i^0 – заданные постоянные. Отметим, что если для некоторых i имеет место неравенство $G_i^0 > U_i^0$, обратное (1.1.9), то система может быть неуправляемой.

Через $F_i(q, \dot{q}, t)$ в (1.1.8) обозначены силы, которые достаточно малы при малых скоростях и удовлетворяют ограничениям

$$|F_i| \leq a|\dot{q}| + b|\dot{q}|^2 \tag{1.1.10}$$

где a, b – некоторые положительные постоянные. Точный вид функций $G_i(q, \dot{q}, t)$, $F_i(q, \dot{q}, t)$ в (1.1.8) может быть неизвестен.

Сформулируем задачу управления.

Задача 1.1. Определить управляющие функции $U_i(q_i, \dot{q}_i)$, которые удовлетворяют ограничениям (1.1.4) и обеспечивают перевод системы (1.1.1) из некоторого начального состояния

$$q(0) = q^0, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}^0, \qquad q^0 \in D \tag{1.1.11}$$

в заданное конечное состояние покоя

$$q(\tau) = q^1, \qquad \dot{q}(\tau) = 0, \qquad q^1 \in D \tag{1.1.12}$$

Время процесса управления τ конечно и не фиксируется. Без ограничения общности начальный момент времени принят равным нулю.

1.2. Декомпозиция системы.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом декомпозиции, который предложен в [32]. Подставим в (1.1.1) выражение (1.1.2) для кинетической энергии T и запишем уравнения движения в векторном виде

$$A(q)\ddot{q} = U + G + S(q, \dot{q}, t) \tag{1.2.1}$$

Здесь $U = (U_1, ..., U_n)$ – вектор управлений; $G = (G_1, ..., G_n)$ – вектор ограниченных сил (1.1.9); $S = (S_1, ..., S_n)$ – вектор-функция с компонентами

$$S_i(q, \dot{q}, t) = F_i(q, \dot{q}, t) + \sum_{j,k} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \tag{1.2.2}$$

Отметим, что величины S_i обращаются в нуль при $\dot{q} = 0$.

Умножим обе части уравнения (1.2.1) на JA^{-1} (матрица J была введена в (1.1.5)). Получим

$$J_i \ddot{q}_i = U_i + V_i \tag{1.2.3}$$

$$V_i = G_i + S_i - [\tilde{A} A^{-1} (U + G + S)]_i \tag{1.2.4}$$

Система (1.2.3), (1.2.4) эквивалентна исходному уравнению (1.2.1).

Предположим, что имеют место неравенства

$$|V_i| \leq \rho_i U_i^0, \qquad \rho_i < 1 \tag{1.2.5}$$

где ρ_i – некоторые постоянные. Функции V_i будем рассматривать в (1.2.3) как независимые ограниченные возмущения. При этом исходная нелинейная система распадается на n линейных подсистем, подверженных возмущениям, с одной степенью свободы каждая. Таким

образом, для решения задачи 1.1 достаточно решить n более простых задач управления для подсистем второго порядка (1.2.3).

В разд. 1.3 приводится закон управления для каждой из этих подсистем. В разд. 1.4 найдены условия, при которых неравенства (1.2.5) действительно выполняются.

1.3. Управление линейной подсистемой.

Скалярное управление U_i, переводящее i-ю подсистему (1.2.3) за конечное время из произвольного начального состояния $(q_i^0, \dot{q}_i^0)$ в конечное состояние $(q_i^1, 0)$ при любом допустимом возмущении V_i, удовлетворяющем (1.2.5), зададим, как это было сделано ранее [32], в форме синтеза

$$\begin{gathered} U_i(q_i, \dot{q}_i) = U_i^0 \operatorname{sign} \psi_i(q_i, \dot{q}_i), \qquad \psi_i \neq 0 \\ U_i(q_i, \dot{q}_i) = -U_i^0 \operatorname{sign} \dot{q}_i, \qquad \psi_i = 0 \\ \psi_i(q_i, \dot{q}_i) = q_i^1 - q_i - \dot{q}_i\, |\dot{q}_i| / (2X_i) \end{gathered} \tag{1.3.1}$$

Здесь X_i – положительный параметр управления, связанный с константой ρ_i из (1.2.5) соотношением

$$X_i = U_i^0 (1 - \rho_i) / J_i \tag{1.3.2}$$

Заметим, что значение X_i пока неизвестно, поскольку неизвестна постоянная ρ_i.

Указанное управление получено как оптимальное по быстродействию управление в игровой задаче, в которой U_i и V_i рассматриваются как управления двух игроков [18]. Это управление релейно и принимает свои предельно допустимые значения $U_i = \pm U_i^0$. Кривая переключений (КП) $\psi_i(q_i, \dot{q}_i) = 0$ состоит из двух параболических ветвей, которые симметричны относительно точки $(q_i^1, 0)$.

Зададим в двумерном фазовом пространстве i-й подсистемы множество Ω_i (рис. 1.3.1)

$$\Omega_i = \{(q_i, \dot{q}_i) : \; q_i^- \le q_i \le q_i^+, \quad f_i^- \le \dot{q}_i \le f_i^+\} \tag{1.3.3}$$

$$f_i^-(q_i) = -[2X_i(q_i - q_i^-)]^{1/2}, \qquad f_i^+(q_i) = [2X_i(q_i^+ - q_i)]^{1/2}$$

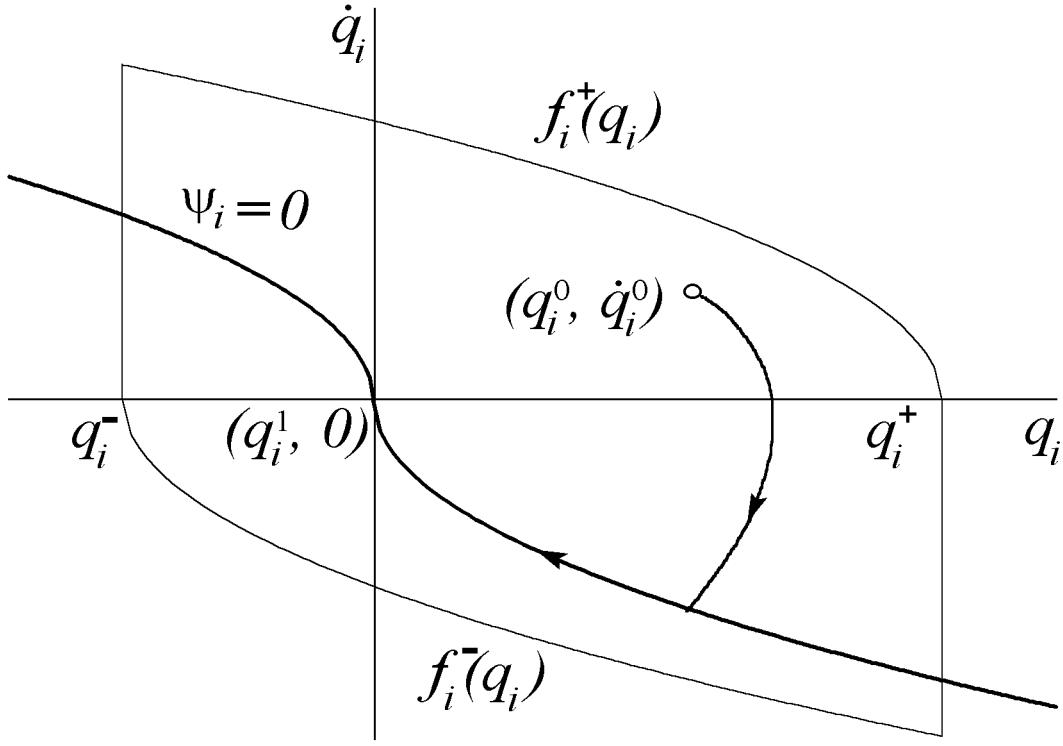

Рис. 1.3.1

Опишем характер движения подсистемы (1.2.3) в случае, когда управление задано в виде (1.3.1), (1.3.2), а начальная точка $(q_i^0, \dot{q}_i^0)$ лежит в Ω_i:

$$(q_i^0, \dot{q}_i^0) \in \Omega_i \tag{1.3.4}$$

Процесс управления разбивается на два основных этапа. На первом этапе движение совершается при постоянном управлении до тех пор, пока фазовая точка подсистемы не попадет на КП. При этом согласно

(1.2.3), (1.2.5), (1.3.1), (1.3.2) имеем (для определенности считаем, что $\psi_i(q_i^0, \dot{q}_i^0) < 0$)

$$\ddot{q}_i \leq -X_i \tag{1.3.5}$$

Из (1.3.5) следует, что величина $\dot{q}_i$ уменьшается, причем в силу (1.3.3), (1.3.4), (1.3.5) выполняются неравенства

$$\frac{d\dot{q}_i}{dq_i} \leq -\frac{X_i}{f_i^+(q_i)} = \frac{df_i^+(q_i)}{dq_i}, \quad \dot{q}_i > 0; \qquad \frac{d\dot{q}_i}{dq_i} > 0, \quad \dot{q}_i < 0$$

Поэтому при любых возмущениях фазовая траектория рассматриваемой подсистемы не выходит за пределы области Ω_i и попадает на одну из ветвей КП. При $\psi_i(q_i^0, \dot{q}_i^0) > 0$ этот факт доказывается аналогично.

Попав на КП, фазовая точка продолжает двигаться по ней в терминальное состояние. Параболические ветви КП совпадают с фазовыми траекториями подсистемы (1.2.3) при управлении U_i, выбранном согласно (1.3.1), (1.3.2), и при $V_i = -\rho_i U_i$. Если же $V_i \neq -\rho_i U_i$, то движение все равно происходит вдоль параболического участка, но в скользящем режиме. Управление U_i в этом случае принимает значения $\pm U_i^0$ с бесконечно частыми сменами знака, так что "в среднем" $\ddot{q}_i = X_i$ или $\ddot{q}_i = -X_i$ для соответствующих ветвей кривой переключений.

Таким образом, если в начальный момент времени условия (1.3.3), (1.3.4) выполнены для всех подсистем (1.2.3), то их фазовые траектории целиком лежат в соответствующих областях Ω_i. При этом выполняются ограничения (1.1.3), а также имеют место неравенства

$$|\dot{q}_i| \leq Y_i = (2d_i X_i)^{1/2}, \qquad d_i = q_i^+ - q_i^- \tag{1.3.6}$$

На рис. 1.3.1 изображена некоторая возможная фазовая траектория подсистемы (1.2.3). Стрелками указано направление роста времени t.

Было показано [32], что время движения i-ой подсистемы (1.2.3) максимально при "наихудшем" возмущении $V_i = -\rho_i U_i$ и равно

$$\tau_i^*(q_i^0, \dot{q}_i^0) = X_i^{-1}\{2[(\dot{q}_i^0)^2/2 - X_i(q_i^0 - q_i^1)\gamma_i]^{1/2} - \dot{q}_i^0\gamma_i\} \tag{1.3.7}$$

$$\gamma_i = \operatorname{sign} \psi_i(q_i^0, \dot{q}_i^0), \quad \psi_i \neq 0; \qquad \gamma_i = \pm 1, \quad \psi_i = 0$$

Поскольку время τ приведения системы (1.1.1) в терминальное состояние (1.1.12) определяется максимальным из времен управления для каждой из подсистем (1.2.3), то получаем оценку

$$\tau \leq \tau^* = \max_i(\tau_i^*) \tag{1.3.8}$$

1.4. Нахождение допустимых параметров управления X_i.

Применение управления (1.3.1) возможно только при выполнении неравенств (1.2.5) в течение всего процесса управления. Найдем такие параметры управления X_i, при которых указанные соотношения действительно выполняются.

Оценим сначала модули величин V_i. При $\mu < J_{\min}$, используя соотношения (1.1.4) – (1.1.6), (1.1.9), (1.2.4), получим

$$|V_i| \leq G_i^0 + \left(1 + \frac{\mu n^{1/2}}{J_{\min} - \mu}\right) S^0 + \frac{\mu}{J_{\min} - \mu} \left[\sum_j (U_j^0 + G_j^0)^2\right]^{1/2} \tag{1.4.1}$$

Здесь $J_{\min}$ – наименьшая из величин J_i; S^0 – постоянная, ограничивающая абсолютные значения функций $S_i(q, \dot{q}, t)$ из (1.2.2) при управлении (1.3.1) с параметрами X_i. При ограничениях (1.1.7), (1.1.10), (1.3.6) имеем

$$S^0(Y) = a\left(\sum_{j=1}^n Y_j^2\right)^{1/2} + b\sum_{j=1}^n Y_j^2 + \frac{3}{2}c\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)^2 \tag{1.4.2}$$

В неравенствах (1.2.5) выразим ρ_i через параметры управления X_i, используя (1.3.2), а вместо величин $|V_i|$ подставим их оценку из (1.4.1). Получим

$$J_i X_i + \left(1 + \frac{\mu n^{1/2}}{J_{\min} - \mu}\right) S^0(Y) \leq$$

$$\leq U_i^0 - G_i^0 - \frac{\mu}{J_{\min} - \mu} \left[\sum_j (U_j^0 + G_j^0)^2 \right]^{1/2} \tag{1.4.3}$$

Система неравенств (1.4.3) задает допустимые параметры управления X_i и является нелинейной, так как величины Y_i связаны с X_i при помощи равенства (1.3.6).

Если параметр μ достаточно мал, так что выполнено условие

$$\mu < \frac{\min_i (U_i^0 - G_i^0) J_{\min}}{\min_i (U_i^0 - G_i^0) + [\sum\limits_j (U_j^0 + G_j^0)^2]^{1/2}} \tag{1.4.4}$$

то выражения в правых частях неравенств (1.4.3) положительны. Поскольку $S^0(Y) \to 0$ при $X_i \to 0$, то всегда найдутся положительные значения X_i, при которых выполняются неравенства (1.4.3), а следовательно, и неравенства (1.2.5).

Подытожим полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.4. Пусть выполнено условие (1.4.4). Тогда синтез управления $U_i(q_i, \dot{q}_i)$, решающий задачу 1.1, задается соотношениями (1.3.1), в которых параметры X_i должны выбираться так, чтобы выполнялись неравенства (1.4.3). Это управление переводит систему (1.1.1) из начального состояния (1.1.11) в заданное терминальное состояние (1.1.12), если в начальный момент времени величины $\dot{q}_i^0$ удовлетворяют ограничениям $f_i^-(q_i^0) \leq \dot{q}_i^0 \leq f_i^+(q_i^0)$. При этом движение системы лежит в области D из (1.1.3), а время процесса управления τ не превосходит величины τ^*, определяемой выражениями (1.3.7), (1.3.8).

Укажем способ выбора допустимых значений X_i. Будем искать их в виде

$$X_i = Z^2 d_i \tag{1.4.5}$$

где величина Z пока неизвестна. Подставим (1.4.5) в неравенства (1.4.3) и, учитывая (1.3.6), (1.4.2), приведем их к виду

$$Z^2 + 2g_i Z \leq h_i \tag{1.4.6}$$

где g_i, h_i – положительные коэффициенты, явный вид которых непосредственно следует из (1.3.6), (1.4.2), (1.4.3). Решение системы неравенств (1.4.6) можно записать в виде

$$Z \leq \min_i[(g_i^2 + h_i)^{1/2} - g_i] \tag{1.4.7}$$

Выбрав максимальное значение Z, удовлетворяющее полученному неравенству, вычисляем по формулам (1.4.5) параметры управления X_i.

Условия (1.4.3), определяющие множество допустимых параметров X_i, и ограничение (1.4.4) на параметры системы (1.1.1) являются достаточными и далеки от необходимых. Для конкретных систем часто удается произвести более точные оценки возмущений в (1.4.1). Подставляя эти оценки в неравенство (1.2.5) вместо V_i и выражая затем ρ_i через X_i, можно получить более широкое множество допустимых параметров управления. Увеличение же значений X_i позволяет расширить области Ω_i, которые ограничивают выбор начальных скоростей для подсистем и существенно уменьшить время управления τ. Это позволяет также в ряде случаев ослабить ограничения на параметры системы.

Построенное управление достаточно просто и не требует точного знания нелинейных членов и возмущающих сил в уравнениях движения. Оно мало чувствительно к незначительным вариациям параметров системы и дополнительных возмущений: для того чтобы их учесть, достаточно уменьшить параметры X_i, создав некоторый запас в возможностях управлений соответствующих подсистем.

1.5. Случай нулевых начальных скоростей.

При построении решения задачи 1.1 предполагалось, что начальное состояние системы неизвестно. Рассмотрим частный, но важный случай нулевых начальных скоростей $\dot{q}^0 = 0$. Положим в (1.1.3)

$$q_i^- = \min_i(q_i^0, q_i^1), \qquad q_i^+ = \max_i(q_i^0, q_i^1) \tag{1.5.1}$$

для всех $i = 1, ..., n$. Подсчитав параметры X_i по формулам (1.4.5)-(1.4.7), построим управление (1.3.1). Тогда, в соответствии с (1.3.7), (1.3.8), имеем одинаковые значения оценки времен приведения подсистем (1.2.3) в терминальное состояние

$$\tau^* = \tau_i^* = 2/Z \tag{1.5.2}$$

Для одной из подсистем (1.2.3), оценка времени движения τ_i^* может быть уменьшена за счет увеличения величины соответствующего параметра управления X_i. Но тогда в силу (1.4.3) необходимо уменьшить величину S^0, задаваемую равенствами (1.4.2), (1.3.6). Этого можно добиться только за счет уменьшения параметра управления X_j хотя бы для какой-нибудь другой подсистемы $j \neq i$. В результате, оценка времени движения всей системы τ^*, определяемая (1.3.7), (1.3.8), увеличится.

Таким образом, величина τ^*, полученная в (1.5.2), минимальна при $\dot{q}^0 = 0$ и управлении (1.3.1). Тем не менее в случае, когда $\dot{q}^0 = 0$, закон управления (1.3.1) может быть незначительно модифицирован так, чтобы оценка времени управления была меньше, чем в (1.5.2). Для этого переопределим функции ψ_i в (1.3.1)

$$\psi_i(q_i, \dot{q}_i) = q_i^1 - q_i - \dot{q}_i|\dot{q}_i|/2X_i, \quad |q_i^1 - q_i| \leq d_i^*;$$

$$\psi_i(q_i, \dot{q}_i) = \dot{q}_i - Y_i \mathrm{sign}(q_i^1 - q_i), \; d_i^* < |q_i^1 - q_i| \leq d_i;$$

$$d_i^* = Y_i^2/2X_i, \quad d_i^* \leq d_i/2 \tag{1.5.3}$$

Здесь X_i, Y_i - положительные параметры нового закона управления. Кривая переключения $\psi_i(q_i, \dot{q}_i) = 0$ (см. рис. 1.5.1) состоит из ветви параболы (при $|q_i^1 - q_i| \leq d_i^*$) и прямолинейного участка (при $d_i^* < |q_i^1 - q_i| \leq d_i$).

Если во время движения выполняются соотношения (1.2.5), то управление (1.3.1), (1.5.3) гарантированно приводит систему в терминальное состояние. При этом скорости движения подсистем ограничены и

выполняются неравенства $|\dot{q}_i| \leq Y_i$, а следовательно верна и оценка (1.4.2) максимальных абсолютных значений возмущений $|V_i|$. Подставляя (1.4.2) в (1.2.5), получим неравенства, полностью совпадающие с (1.4.3). Следовательно, если X_i, Y_i выбраны согласно (1.4.3), то управление (1.3.1), (1.5.3) решает задачу 1.1.

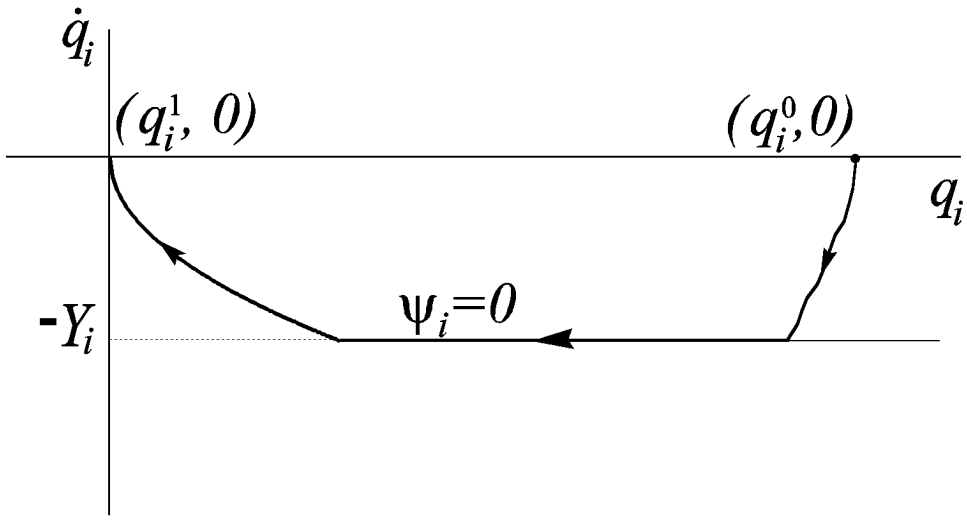

Рис. 1.5.1. Модифицированная кривая переключений.

Нетрудно доказать два утверждения:

1) При управлении (1.3.1), (1.5.3) с допустимыми параметрами X_i и Y_i, удовлетворяющими (1.4.3), оценки времен движения подсистем имеют вид

$$\tau_i \leq \tau_i^*, \quad \tau_i^* = d_i/Y_i + Y_i/X_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{1.5.4}$$

2) Если параметры X_i и Y_i таковы, что оценка времени движения всей системы τ^* минимальна, то величины τ_i^* в (1.5.4) одинаковы.

Опишем процедуру поиска указанных допустимым параметров X_i и Y_i. Положим

$$X_i = Y_i^2 (Y_i \tau^* - d_i)^{-1} \tag{1.5.5}$$

в системе (1.4.3). Получим

$$\frac{Y_i^2}{Y_i\tau^* - d_i} + \left(1 + \frac{\mu n^{1/2}}{J_{\min} - \mu}\right) J_i^{-1} S^0(Y) \le \Delta_i \tag{1.5.6}$$

$$\Delta_i = \left(U_i^0 - G_i^0 - \frac{\mu}{J_{\min} - \mu}\left[\sum_{j=1}^{n}(U_j^0 + G_j^0)^2\right]^{1/2}\right) J_i^{-1}$$

Присвоим некоторое начальное значение τ^* (например, то, которое было найденно в (1.5.2) с использованием алгоритма, описанного в предыдущем разделе) и найдем численно параметры Y_i, удовлетворяющие (1.5.6). Множество значений (Y_i^-, Y_i^+), $i = (1, ..., n)$, в которых можно производить этот поиск, легко получить, положив $S^0 = 0$ в неравенствах (1.5.6). В результате получим

$$Y_i^{\pm} = \tau^*\Delta_i/2 \pm \left((\tau^*\Delta_i/2)^2 - d_i\Delta_i\right)^{1/2}$$

Если решение найдено, то нужно присвоить другое (меньшее) значение τ^* и повторить поиск допустимых параметров Y_i, но уже при новом τ^*. Минимальное значение τ^* и соответствующие ему параметры Y_i и X_i, подсчитанные при помощи (1.5.5), определяют искомое решение.

Отметим, что управление (1.3.1) с модифицированной кривой (1.5.3) может быть использовано также и в случае, когда $\dot{q}^0 \neq 0$. Соответствующая область возможных начальных состояний для $i-$ой подсистемы Ω_i, изображенная на рис. 1.5.2, описывается соотношениями

$$\Omega_i = \{(q_i, \dot{q}_i) : \; q_i^- \le q_i \le q_i^+, \quad f_i^- \le \dot{q}_i \le f_i^+\} \tag{1.5.7}$$

$$f_i^{\pm}(q_i) = \pm(2X_i|q_i^{\pm} - q_i|)^{1/2}, \qquad |q_i^1 - q_i| \le d_i^*;$$

$$f_i^{\pm}(q_i) = \pm Y_i, \qquad d_i^* < |q_i^1 - q_i| \le d_i;$$

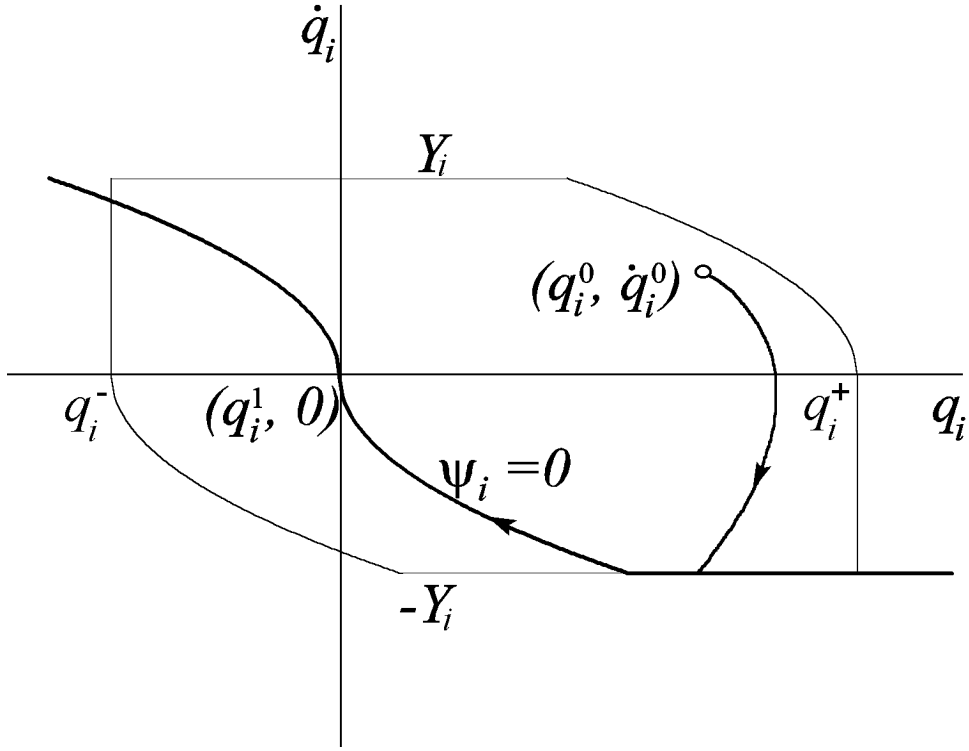

Рис. 1.5.2.

1.6. Приложения к задачам управления манипуляционными роботами, приводы которых имеют большие коэффициенты передачи.

Рассмотрим манипуляционный робот, состоящий из n абсолютно твердых звеньев, которые соединены между собой цилиндрическими или призматическими шарнирами. Положение звеньев робота в пространстве характеризуется их относительными углами поворотов (в случае цилиндрических шарниров) или относительными смещениями (в случае призматических шарниров). Примем эти углы и смещения в качестве обобщенных координат $q = (q_1, ..., q_n)$. Для большинства манипуляционных роботов величины допустимых углов и смещений между звеньями ограничены неравенствами вида (1.1.3). Эти ограничения обусловлены конструкцией манипулятора (например, наличием

жестких упоров). Если уравнения движения робота представить в виде (1.1.1), (1.1.2), то роль обобщенных сил будут играть моменты сил относительно осей цилиндрических шарниров и силы, действующие вдоль направлений смещений в призматических шарнирах. В этом случае U_i – это управляющие силы или моменты сил, создаваемые электромеханическими приводами робота, каждый из которых содержит электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и редуктор [36]. Q_i – все остальные внешние и внутренние силы и моменты, возникающие в результате действия сил тяжести, трения, различных возмущений и др. Далее будем полагать, что силы Q_i представимы в форме (1.1.8), (1.1.9), (1.1.10).

Кинетическая энергия робота T складывается из кинетической энергии движения звеньев $T^1(q, \dot{q})$ и кинетической энергии движения роторов электродвигателей $T^2(q, \dot{q}, N)$, здесь $N = (N_1, ..., N_n)$ – передаточные числа редукторов, рассматриваемые как параметры. Считаем, что $N_i \geq 1$, инерцией подвижных частей редукторов пренебрегаем. По теореме Кёнига [1] кинетическая энергия i-го ротора T_i^2 равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка массы, равной массе ротора, расположенная в его центре инерции, и кинетической энергии вращения ротора, т. е.

$$T_i^2(q, \dot{q}, N_i) = T_i^v(q, \dot{q}) + T_i^\omega(q, \dot{q}, N_i)$$

Пусть J_i, J_i' – моменты инерции i-го ротора, соответственно, относительно оси вращения и перпендикулярной к ней оси, проходящей через центр инерции. Тогда, если вектор угловой скорости статора i-го электродвигателя имеет проекцию на ось вращения ротора, равную ω_i, и перпендикулярную составляющую, равную ω_i', то

$$T_i^\omega(q, \dot{q}, N_i) = \frac{1}{2}\left[J_i(N_i\dot{q}_i + \omega_i)^2 + J_i'\omega_i'^2\right]$$

Угловые скорости ω_i, ω_i' – линейные комбинации обобщенных скоростей

$\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от q. Поэтому кинетическую энергию робота можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_j J_j(N_j\dot{q}_j)^2 + \frac{1}{2}N_{\max}(B\dot{q}, \dot{q}) \tag{1.6.1}$$

где $B(q, N)$ – ограниченная матрица, такая, что при произвольном векторе z выполняется неравенство

$$|B(q, N)z| \leq \lambda|z|, \qquad \lambda = \text{const} \tag{1.6.2}$$

Здесь и далее через $N_{\max}$, $N_{\min}$ обозначены, соответственно, наибольшее и наименьшее из передаточных чисел $N_1, ..., N_n$.

Подставим (1.6.1) в уравнения Лагранжа в форме (1.1.1). Получим

$$N_i^2 J_i\ddot{q}_i + N_{\max}[B(q, N)\ddot{q}]_i = U_i + G_i + S_i(q, \dot{q}, t, N) \tag{1.6.3}$$

Разделим i-е уравнение (1.6.3) на N_i и сделаем замену переменных

$$p_i = N_i q_i \tag{1.6.4}$$

В результате получим

$$J_i\ddot{p}_i + N_{\max}N_i^{-1}\sum_j B_{ij}N_j^{-1}\ddot{p}_j = N_i^{-1}(U_i + G_i + S_i) \tag{1.6.5}$$

Учитывая, что $N_i^{-1}U_i = M_i$, где M_i – электромагнитный момент, создаваемый электродвигателем, приведем систему (1.6.5) к виду

$$(J + \tilde{B})\ddot{p} = M + G^* + S^* \tag{1.6.6}$$

Здесь

$$J = \text{diag}(J_1, ..., J_n), \quad \tilde{B} = N_{\max}HBH, \quad M = (M_1, ..., M_n)$$

$$G^* = HG, \qquad S^* = HS, \qquad H = \text{diag}(N_1^{-1}, ..., N_n^{-1}) \tag{1.6.7}$$

Следовательно, уравнения движения с учетом замены (1.6.4) и обозначений (1.6.7) представлены в виде (1.1.5), (1.2.1), причем согласно (1.6.2) и (1.6.7) имеем неравенство

$$|\tilde{B}z| \leq \mu|z|, \quad \mu = N_{\max}N_{\min}^{-2}\lambda \tag{1.6.8}$$

аналогичное ограничению (1.1.6). Начальные и конечные условия представимы в форме (1.1.11), (1.1.12).

Рассмотрим различные варианты постановок задач управления.

1°. Пусть на создаваемые электродвигателями управляющие моменты сил M_i наложены ограничения

$$|M_i| \leq M_i^0 \tag{1.6.9}$$

В этом случае, для построения управления можно применить результаты, полученные в предыдущих разделах и подытоженные в теореме 1.4. Неравенство (1.4.4), переписанное в обозначениях системы (1.6.6), определяет допустимые значения параметра μ. Подставив в это неравенство вместо μ его значение из (1.6.8), получим ограничение на возможные величины передаточных чисел редукторов

$$\frac{N_{\min}^2}{N_{\max}} > \frac{\lambda}{J_{\min}}\left(1 + \frac{[\sum\limits_j (M_j^0 + G_j^{*0})^2]^{1/2}}{\min_i(M_i^0 - G_i^{*0})}\right) \tag{1.6.10}$$

Здесь G_i^{*0} – постоянная, ограничивающая абсолютные значения функций G_i^*; $J_{\min}$ – наименьший из моментов инерции роторов $J_1, ..., J_n$.

2°. Пусть роль управляющих воздействий играют электрические напряжения, подаваемые на обмотки роторов электродвигателей. Дополним уравнения движения (1.6.6) уравнениями баланса напряжений в цепях роторов и соотношениями, связывающими моменты M_i с токами [36]

$$L_i\frac{dj_i}{dt} + R_i j_i + k_i^E \dot{p}_i = u_i, \qquad M_i = k_i^M j_i \tag{1.6.11}$$

Здесь L_i – коэффициент индуктивности, R_i – электрическое сопротивление, k_i^E, k_i^M – постоянные коэффициенты, u_i – электрическое напряжение в цепи ротора i-го двигателя. Первый член в первом уравнении (1.6.11) обычно мал по сравнению с остальными, поэтому из (1.6.11) получим выражение

$$M_i = k_i^M R_i^{-1}(u_i - k_i^E \dot{p}_i)$$

подставляя которое в (1.6.6), получим

$$(J + \mu\tilde{B})\ddot{p} = U^* + G^* + S^{**} \tag{1.6.12}$$

$$S^{**} = S^* - \Lambda\dot{p}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(k_1^M k_1^E R_1^{-1}, ..., k_n^M k_n^E R_n^{-1})$$

$$U^* = (k_1^M R_1^{-1} u_1, ..., k_n^M R_n^{-1} u_n)$$

Пусть на управляющие напряжения наложены ограничения

$$|u_i| \leq u_i^0 \tag{1.6.13}$$

Ограничения (1.6.13) преобразуются в ограничения на компоненты вектора U^* из (1.6.12)

$$|U_i^*| \leq k_i^M R_i^{-1} u_i^0 \tag{1.6.14}$$

Уравнения движения (1.6.12) снова приведены к форме (1.1.5), (1.2.1).

Неравенства (1.6.14) имеют тот же вид, что и соотношения (1.1.4). Очевидно, что и в этом случае применим рассматриваемый способ управления. Согласно теореме 1.4 получим ограничение, аналогичное (1.6.10)

$$\frac{N_{\min}^2}{N_{\max}} > \frac{\lambda}{J_{\min}} \left(1 + \frac{[\sum_j (k_j^M R_j^{-1} u_j^0 + G_j^{*0})^2]^{1/2}}{\min_i (k_i^M R_i^{-1} u_i^0 - G_i^{*0})} \right) \tag{1.6.15}$$

Итак, если передаточные числа приводов и параметры робота таковы, что удовлетворяются неравенства (1.6.10), (1.6.15), то можно построить управление, переводящее рассматриваемую систему из начального состояния в заданное состояние за конечное время. Управление учитывает наличие возмущений и конструктивных ограничений.

Замечание. Полагая $\mu = N_{\max}\lambda$ непосредственно в системе (1.6.3) и переписывая в ее терминах условие (1.4.4), можно получить ограничения на параметры системы в другом виде. Имеем

$$\frac{\min_i(N_i^2 J_i)}{N_{\max}\lambda} > 1 + \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(N_j M_j^0 + G_j^0)^2\right]^{1/2}}{\min_i(N_i M_i^0 - G_i^0)}$$

для случая 1° ограниченных электромагнитных моментов и

$$\frac{\min_i(N_i^2 J_i)}{N_{\max}\lambda} > 1 + \frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(N_j k_j^M R_j^{-1} u_j^0 + G_j^0)^2\right]^{1/2}}{\min_i(N_i k_i^M R_i^{-1} u_i^0 - G_i^0)}$$

для случая 2° ограниченных электрических напряжений. Использование этих условий для проверки возможности применения метода декомпозиции кажется более целесообразным в случае, когда моменты инерции роторов J_i, $i = 1, ..., n$ сильно отличаются друг от друга, а эффективные моменты инерции $N_i^2 J_i$ отличаются не очень сильно.

1.7. Численное моделирование движений трехзвенного робота-манипулятора.

В качестве примера для расчета управления с использованием метода, который описан в первой главе, выбран трехзвенный механизм с заданными параметрами (рис. 1.7.1), который при соответствующих допущениях может описывать динамику руки робота-манипулятора. Рука манипулятора с вертикальным расположением плеча и предплечья крепится к вертикальной колонке, которая опирается на основание.

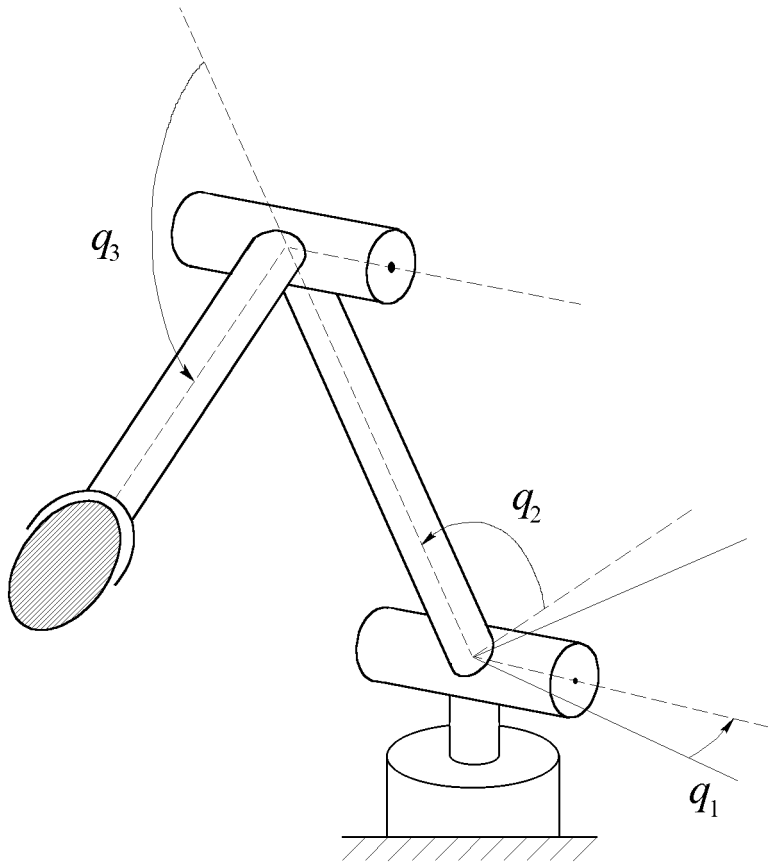

Рис. 1.7.1

Момент инерции вертикальной колонки относительно оси вращения равен I_1^Z. Звенья руки представляют собой длинные стержни массы m_2, m_3 и длины l_2, l_3. Центры масс плеча и предплечья расположены точно посередине между концами соответствующих звеньев. Главные центральные моменты инерции звеньев относительно осей, перпендикулярных стержням, и относительно продольных осей стержней соответственно равны

$$I_i^S, \quad I_i^N, \qquad i = 2, 3$$

Вертикальная колонка, плечо и предплечье имеют приводные электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением и редукторы. Считаем ради простоты, что ось и направление вращения ротора

в каждом электроприводе совпадают с осью и направлением вращения соответствующего шарнира. Инерцией вращающихся частей редукторов пренебрегаем.

При сделанных допущениях подсчитаем элементы матрицы кинетической энергии $A(q)$ из (1.1.2)

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = J_1 N_1^2 + J_2' + J_3' + I_1^Z +$$
$$+0.5\{(m_3 l_2^2 + I_2^S - I_2^N)\cos 2q_2 + (I_3^S - I_3^N)\cos 2(q2 + q3) +$$
$$+m_3 l_2 l_3 [\cos q_3 + \cos(q_3 + 2q_2)] + I_2^S + I_3^S + I_2^N + I_3^N + m_3 l_2^2\} +$$
$$+\{m_2 l_2^2 (1 + \cos 2q_2) + m_3 l_3^2 [\cos 2(q_2 + q_3) + 1]\}/8$$

$$a_{22} = J_2 N_2^2 + J_3 + I_2^S + I_3^S +$$
$$+l_2^2 (m_3^R + m_3 + 0.25 m_2) + m_3 l_3 (l_2 \cos q_3 + 0.25 l_3)$$

$$a_{23} = a_{32} = J_3 N_3 + I_3^S + 0.5 m_3 l_3 (l_2 \cos q_3 + 0.5 l_3)$$
$$a_{33} = J_3 N_3^2 + I_3^S + m_3 l_3^2/4$$

Здесь m_3^R – масса ротора третьего электродвигателя.

В качестве обобщенных сил Q_i в (1.1.1) будем рассматривать только моменты, создаваемые в шарнирах силой тяжести (силы вязкого и сухого трения не учитываем)

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = -9.81 l_2 (0.5 m_2 + m_3^R + m_3)\cos q_2 - 9.81 \cdot 0.5 m_3 l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

$$Q_3 = -9.81 \cdot 0.5 m_3 l_3 \cos(q_2 + q_3)$$

Будем рассматривать случай, когда ограничения накладываются на величины управляющих напряжений (см. разд. 1.6 задача 2°).

Ниже представлены четыре варианта расчетов (1, 2, 3, 4) управления для рассматриваемой системы. В каждом случае приведены исходные данные: параметры звеньев и редукторов, начальные и конечные условия, область возможных движений. Представлены результаты расчетов: значения параметров управления, оценки времени движения для каждой из трех подсистем, реальные значения времени движения, графики зависимости обобщенных скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ от времени, фазовые траектории подсистем. Для первого набора параметров робота-манипулятора дополнительно проведены три расчета (1а, 1б, 1в) при нулевых начальных угловых скоростях движения звеньев с использованием способа управления, описанного в разд. 1.5. При выполнении расчетов 1а, 1б, 1в была введена незначительная дискретизация по времени в определении состояния подсистем. В результате движение вдоль кривой переключения происходило с конечной частотой смены знака управления.

РАСЧЕТ 1

Таблица 1.7.1. Параметры звеньев

i	m_i, кг	l_i, м	l_{gi}, м	I_i^S, кг·м^2	I_i^N, кг·м^2	I_i^Z, кг·м^2
1	–	–	–	–	–	0.2
2	5	0.8	0.4	0.25	0.01	–
3	5	0.8	0.4	0.25	0.01	–

Таблица 1.7.2. Параметры электроприводов

i	k_i^E, Н·м/А	k_i^M, Н·м/А	R_i, Ом	u_i, В	m_i^R, кг	J_i, кг·м^2	J_i', кг·м^2	N_i
1	0.04	0.04	1	27	0.5	0.00079	0.00041	160
2	0.04	0.04	1	27	0.5	0.00079	0.00041	250
3	0.04	0.04	1	27	0.5	0.00079	0.00041	150

Таблица 1.7.3.

i	q_i^0	$\dot{q}_i^0$, с$^{-1}$	q_i^1	q_i^-	q_i^+	X_i, с$^{-2}$	τ_i^*, с	τ_i, с
1	-1	1	0	-1	0	1.060	1.413	1.382
2	-0.3	0	0	-0.35	0.05	0.424	1.682	1.263
3	-1	0	0	-1	0	1.060	1.942	1.467

РАСЧЕТ 1

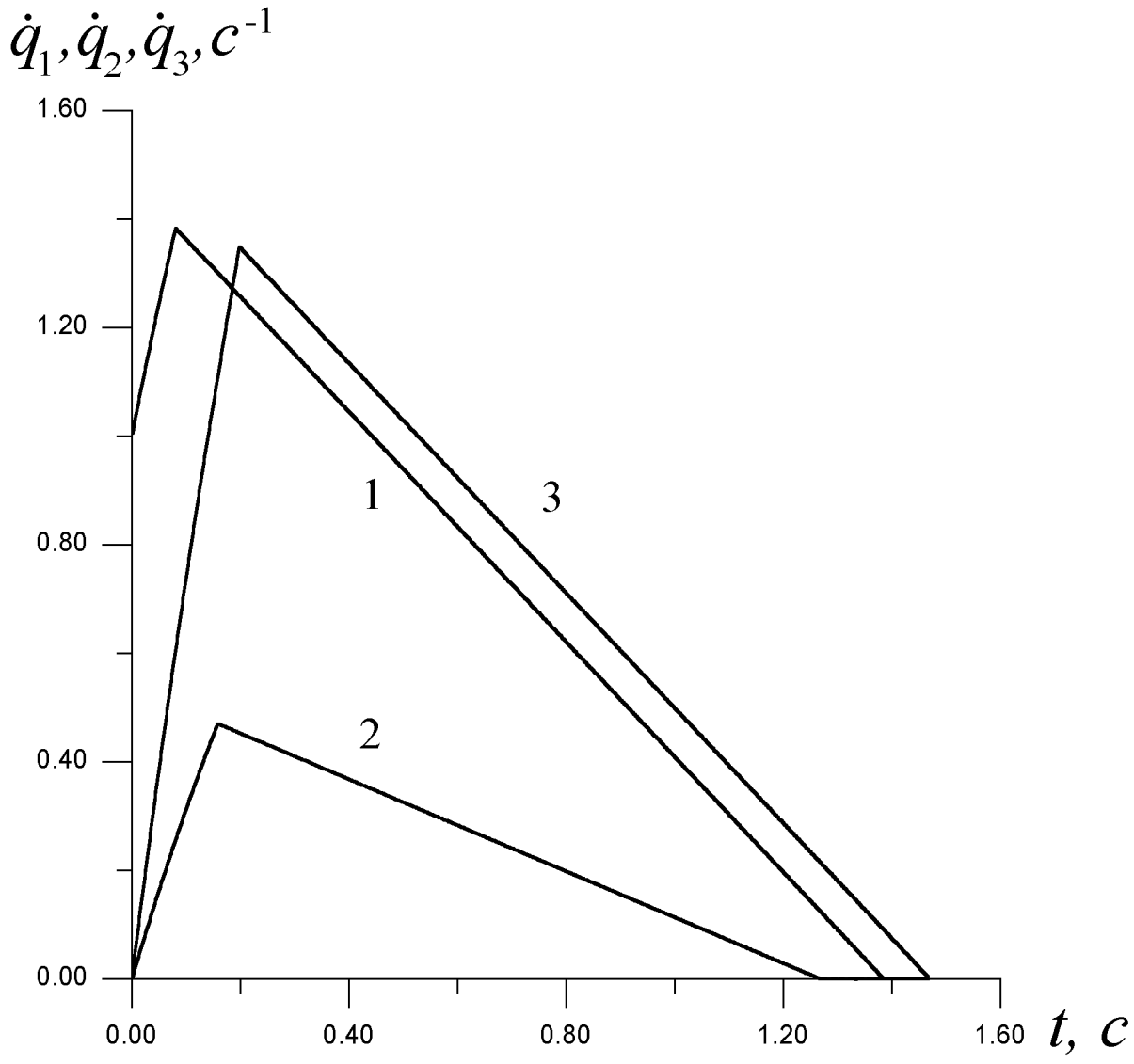

Рис. 1.7.2. Зависимость обобщенных скоростей от времени

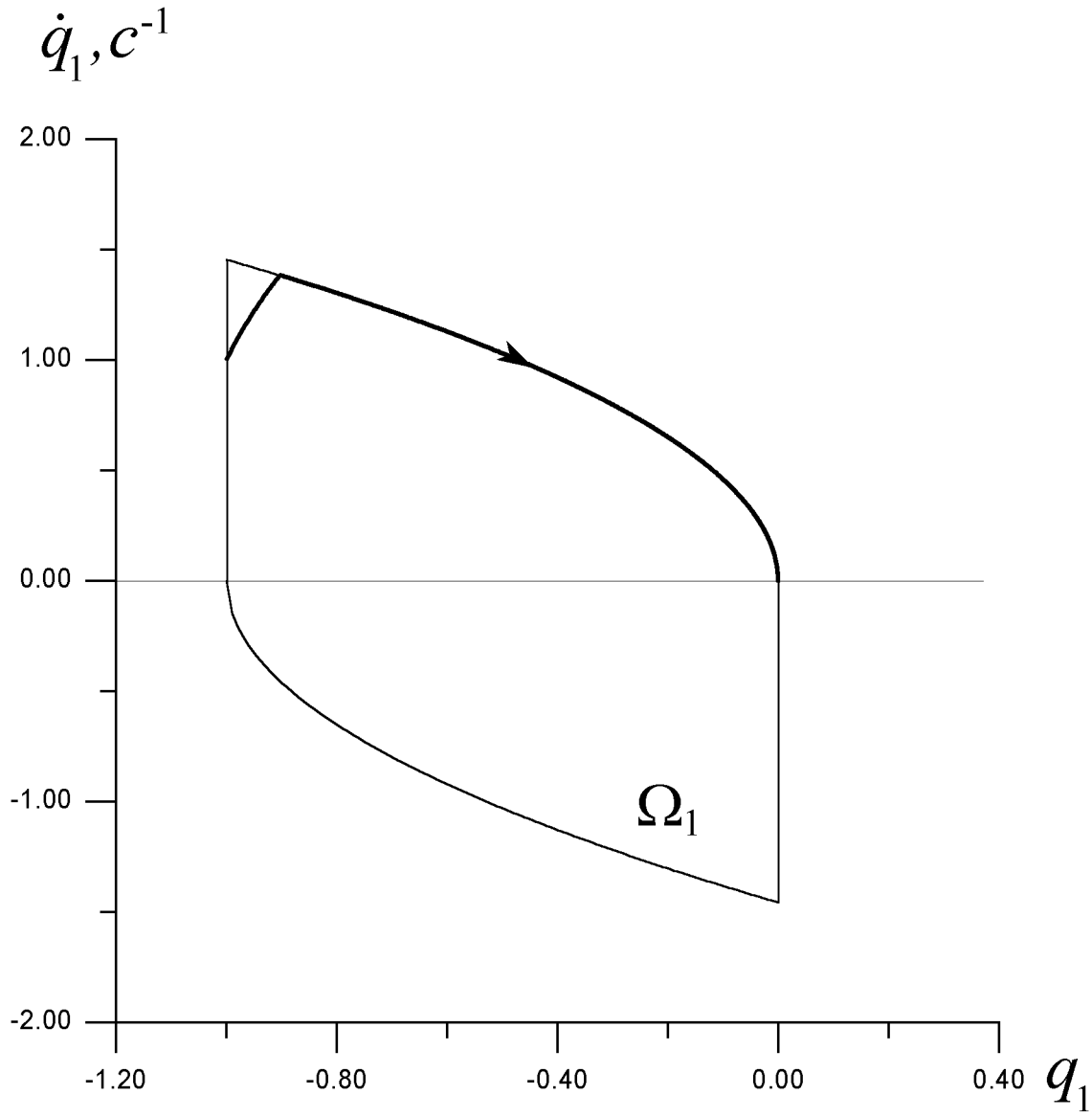

Рис. 1.7.3. Фазовая траектория подсистемы 1

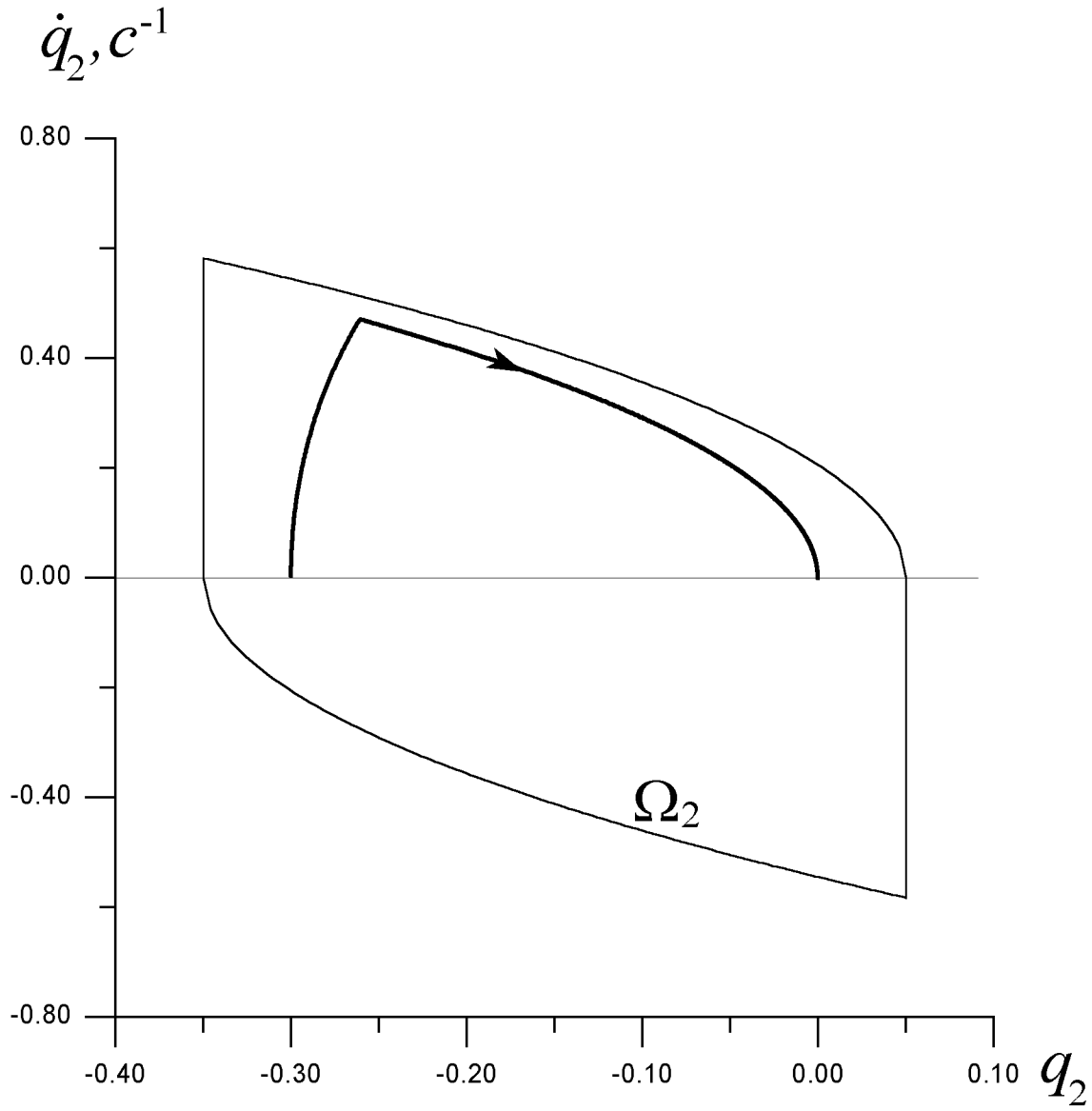

Рис. 1.7.4. Фазовая траектория подсистемы 2

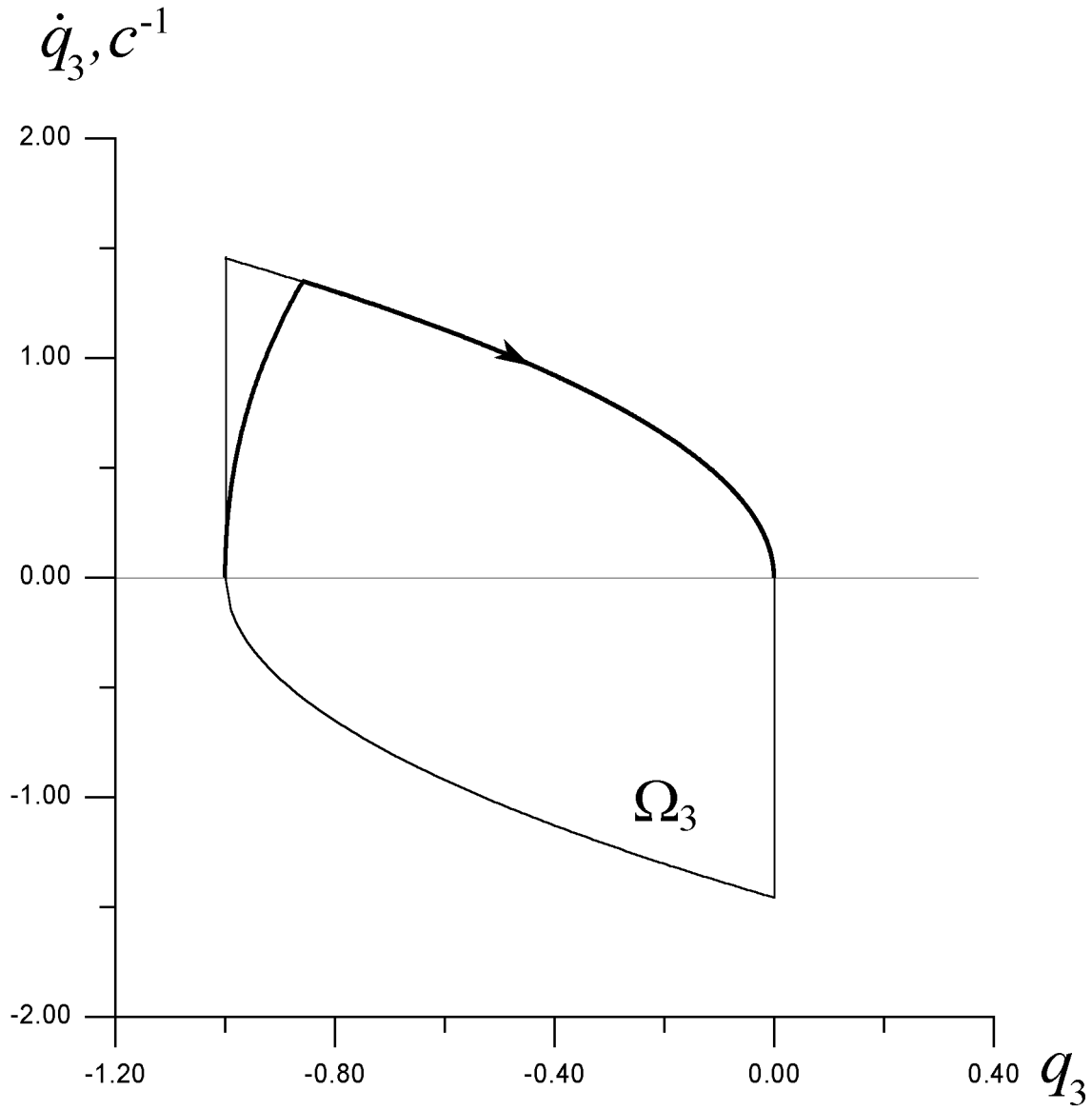

Рис. 1.7.5. Фазовая траектория подсистемы 3

РАСЧЕТ 1а

Таблица 1.7.4.

i	q^-	q^+	q^0	$\dot{q}^0$	q^1	τ
1	-1	0	-1	0	0	
2	-0.3	0	-0.3	0	0	1.4
3	-0.9	0	-0.9	0	0	

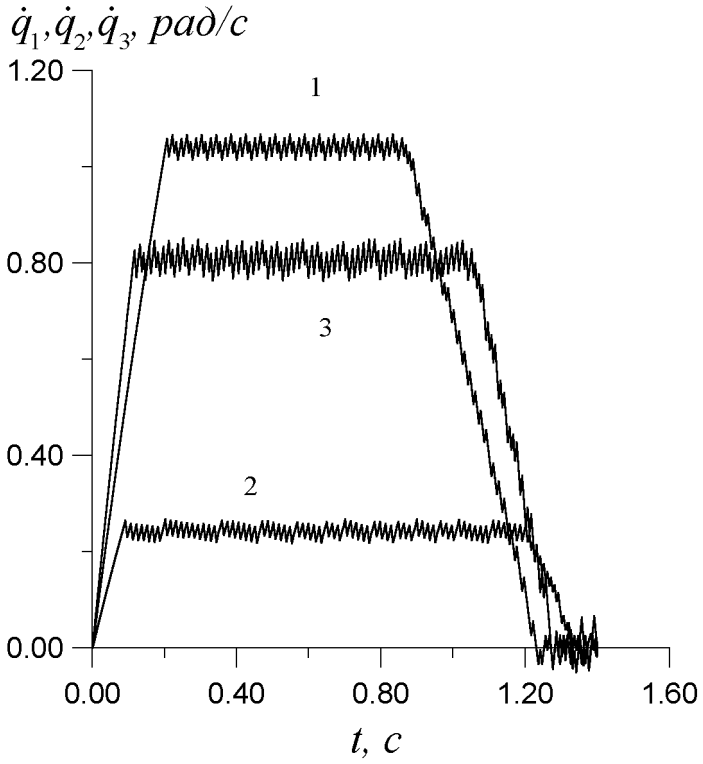

Рис. 1.7.6. Зависимость обобщенных скоростей от времени

РАСЧЕТ 1б

Таблица 1.7.5.

i	q^-	q^+	q^0	$\dot{q}^0$	q^1	τ
1	-1	0	-1	0.5	0	
2	-0.35	0.05	-0.3	0	0	1.3
3	-1	0	-1	0	0	

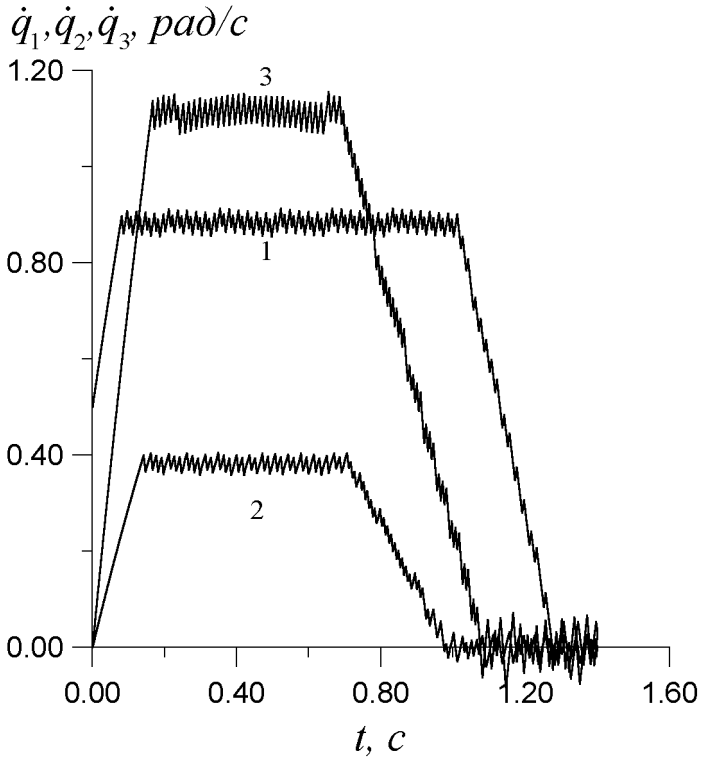

Рис. 1.7.7. Зависимость обобщенных скоростей от времени

РАСЧЕТ 1в

Таблица 1.7.6.

i	q^-	q^+	q^0	$\dot{q}^0$	q^1	τ
1	-1	0	-1	0.5	0	
2	-0.35	0.05	-0.3	0	0	1.2
3	-1	0	1	-0.3	-0.1	

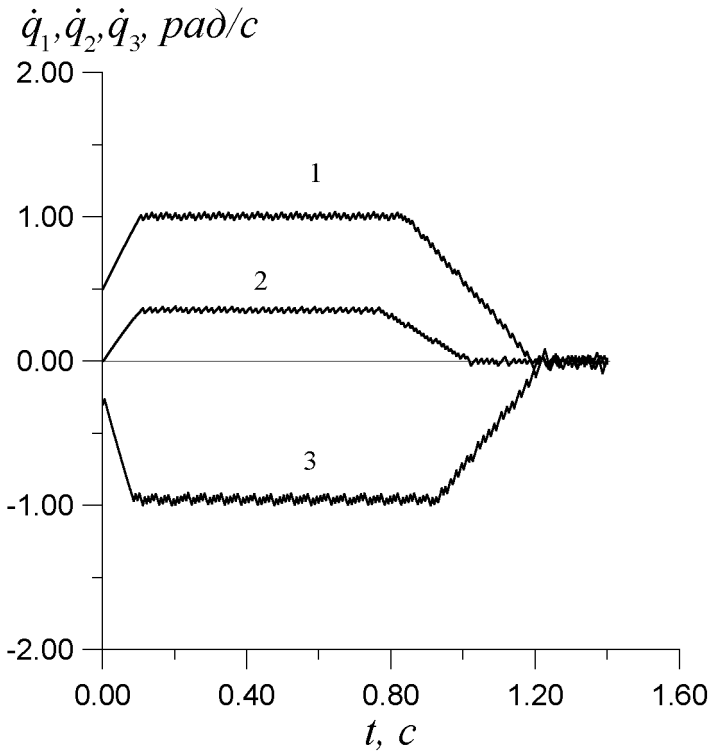

Рис. 1.7.8. Зависимость обобщенных скоростей от времени

Таблица 1.7.7. Параметры звеньев

i	m_i, кг	l_i, м	l_{gi}, м	I_i^S, кг·м^2	I_i^N, кг·м^2	I_i^Z, кг·м^2
1	–	–	–	–	–	0.2
2	5	0.8	0.4	0.25	0.01	–
3	4	0.64	0.32	0.20	0.01	–

Таблица 1.7.8. Параметры электроприводов

i	k_i^E, Н·м/А	k_i^M, Н·м/А	R_i, Ом	u_i, В	m_i^R, кг	J_i, кг·м^2	J_i', кг·м^2	N_i
1	0.04	0.04	0.7	27	0.4	0.00069	0.00036	120
2	0.04	0.04	0.6	27	0.25	0.00039	0.00022	180
3	0.04	0.04	0.6	27	0.25	0.00039	0.00022	150

Таблица 1.7.9.

i	q_i^0	$\dot{q}_i^0$, с$^{-1}$	q_i^1	q_i^-	q_i^+	X_i, с$^{-2}$	τ_i^*, с	τ_i, с
1	-0.8	1	0	-0.85	0.05	1.392	1.145	1.109
2	-0.3	-0.2	0	-0.35	0.05	0.619	1.788	1.023
3	-1	0	0	-1	0	1.547	1.607	1.172

РАСЧЕТ 2

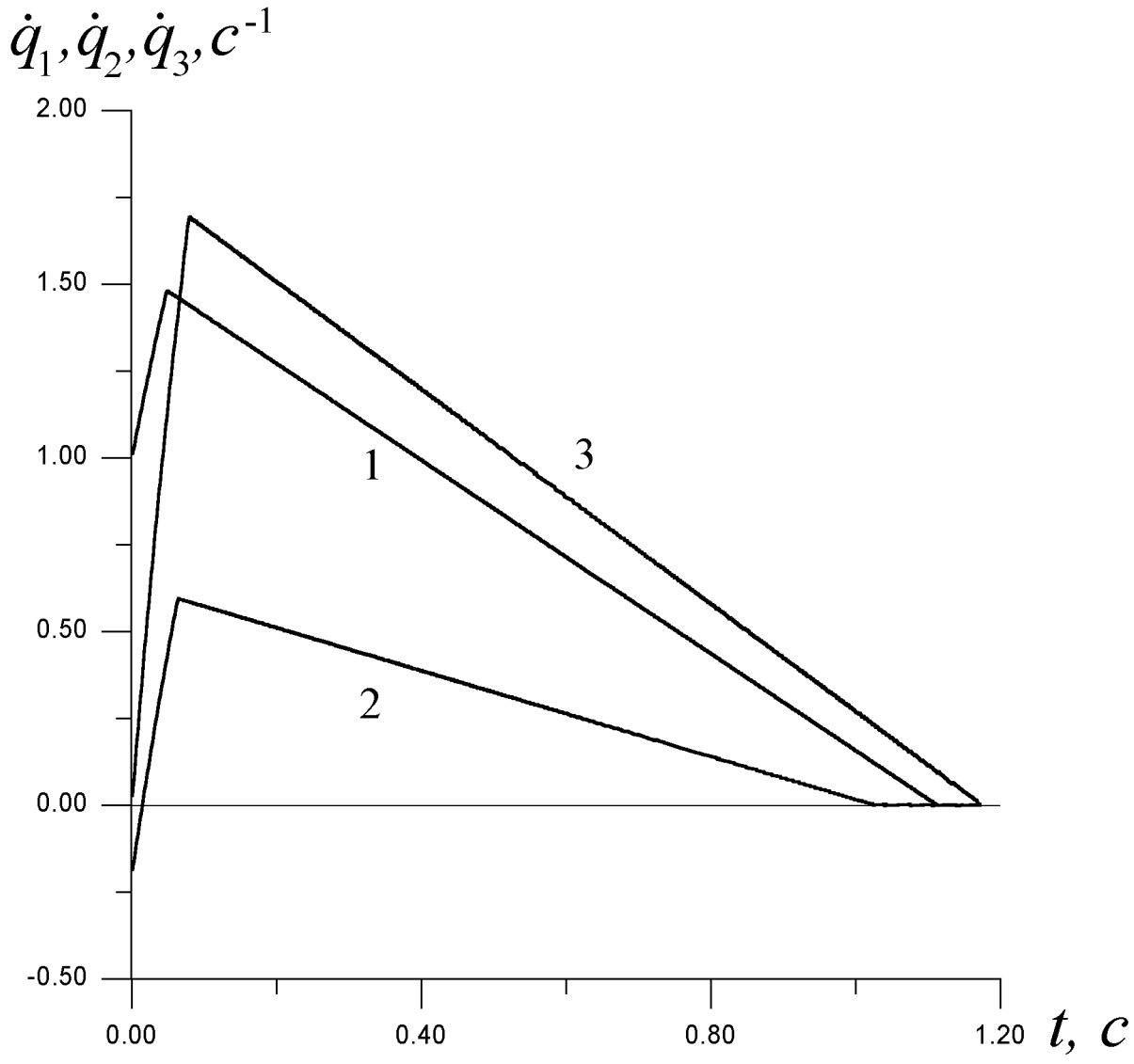

Рис. 1.7.9. Зависимость обобщенных скоростей от времени

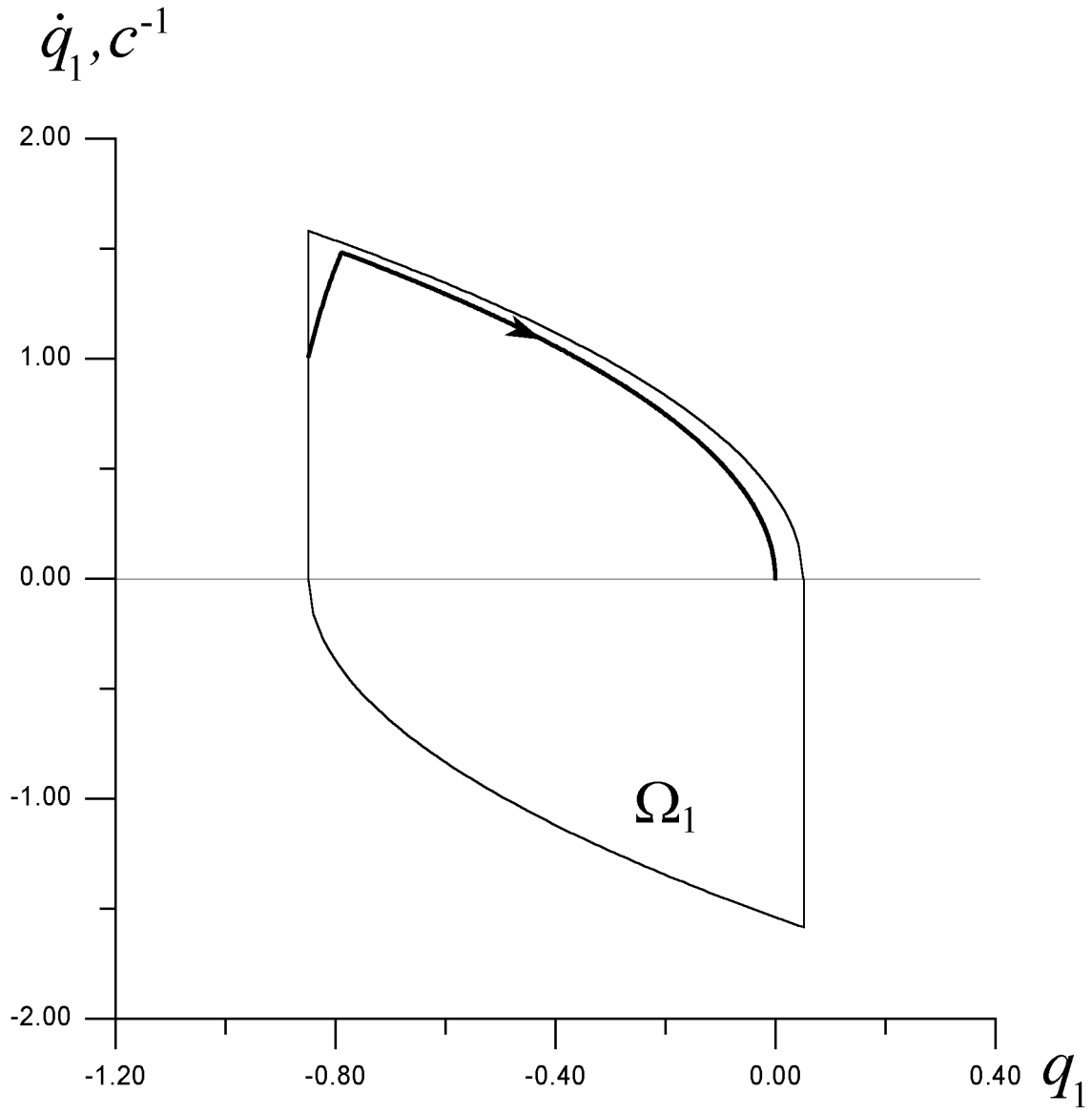

Рис. 1.7.10. Фазовая траектория подсистемы 1

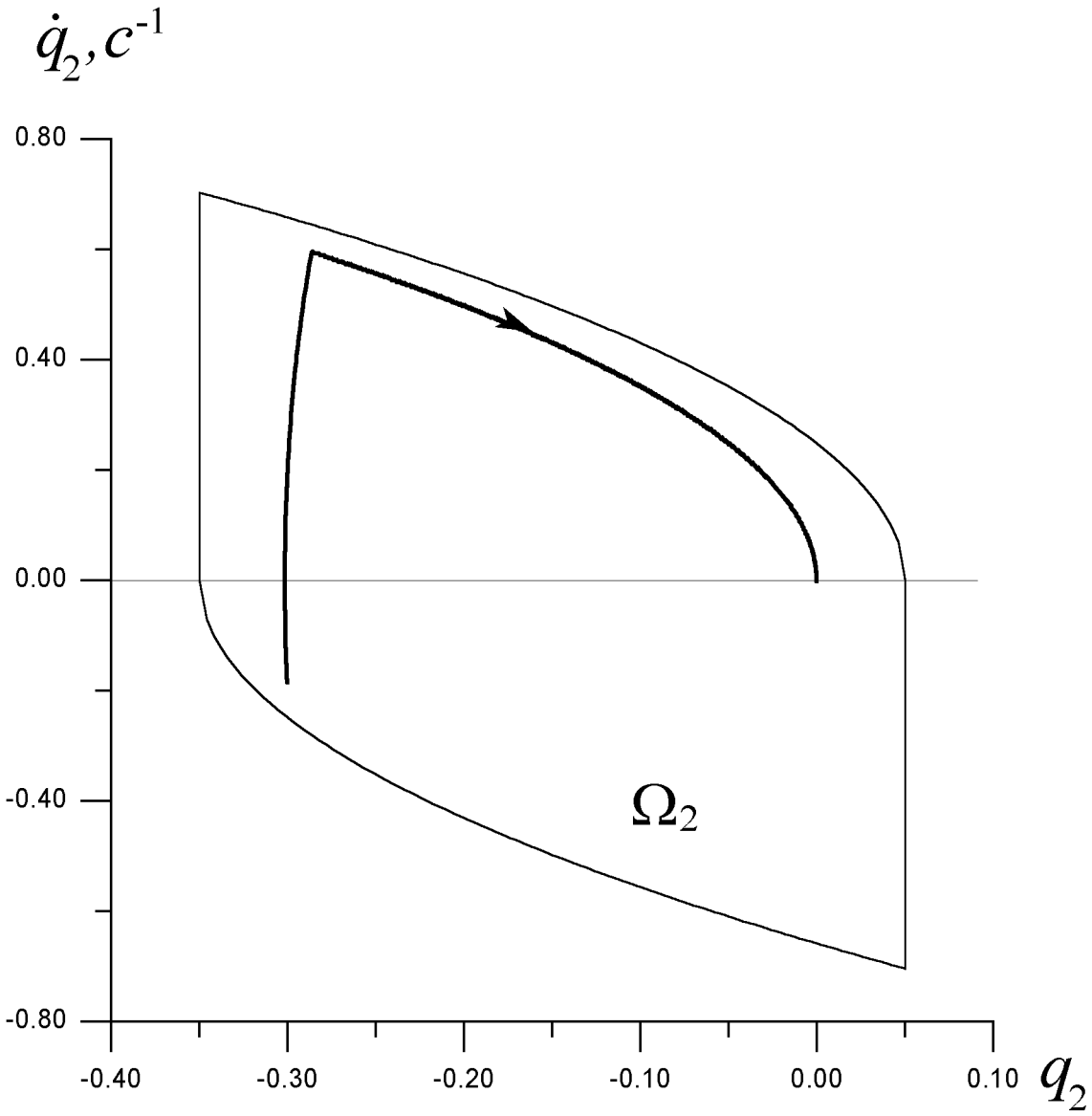

Рис. 1.7.8. Фазовая траектория подсистемы 2

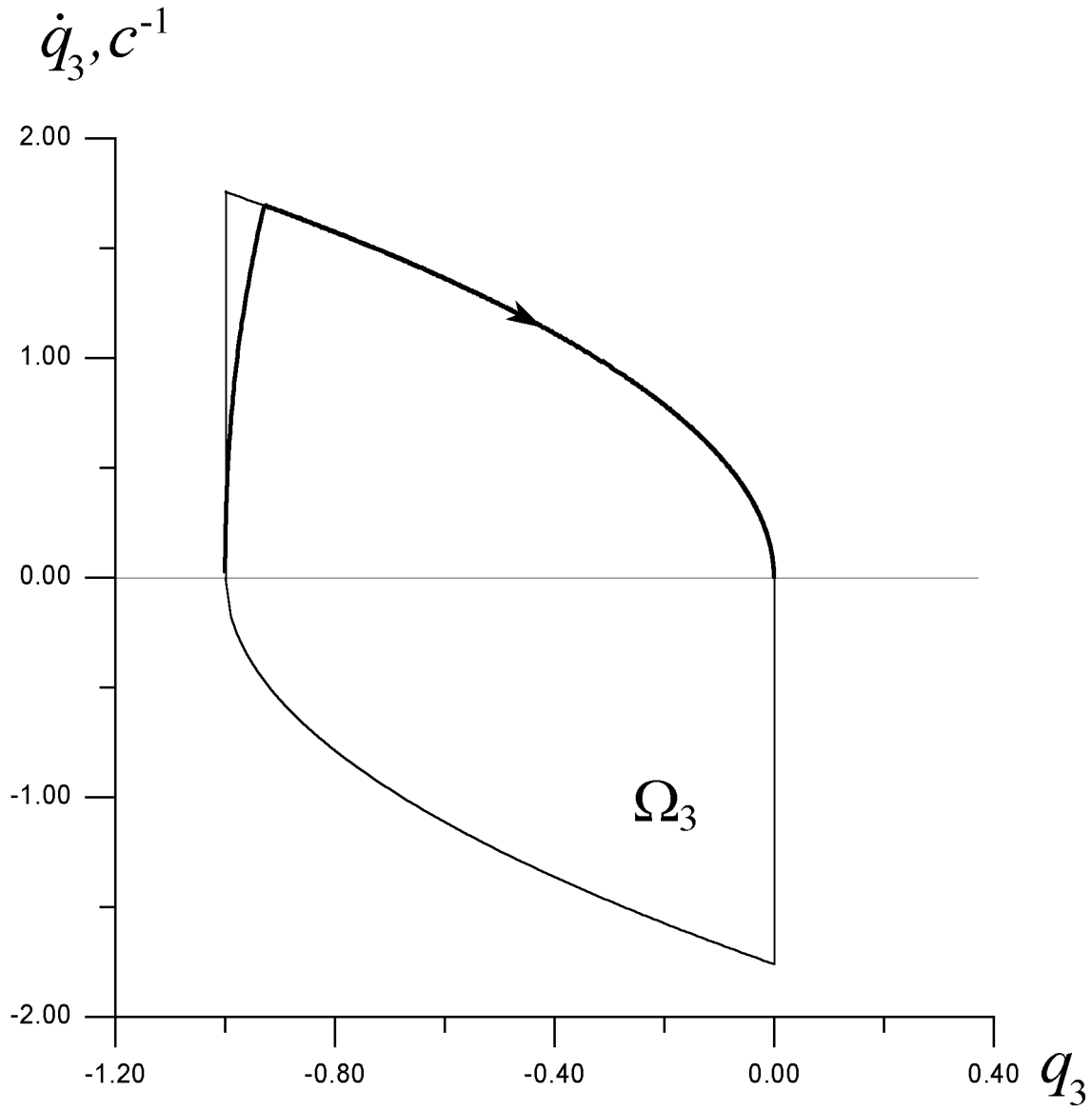

Рис. 1.7.11. Фазовая траектория подсистемы 3

Таблица 1.7.10. Параметры звеньев

i	m_i, кг	l_i, м	l_{gi}, м	I_i^S, кг·м^2	I_i^N, кг·м^2	I_i^Z, кг·м^2
1	–	–	–	–	–	0.2
2	5	0.8	0.4	0.25	0.01	–
3	4	0.64	0.32	0.17	0.086	–

Таблица 1.7.11. Параметры электроприводов

i	k_i^E, Н·м/А	k_i^M, Н·м/А	R_i, Ом	u_i, В	m_i^R, кг	J_i, кг·м^2	J_i', кг·м^2	N_i
1	0.113	0.109	0.7	42	0.4	0.00069	0.00036	150
2	0.1	0.09	0.6	36	0.25	0.00039	0.00022	250
3	0.1	0.09	0.6	36	0.25	0.00039	0.00022	200

Таблица 1.7.12.

i	q_i^0	$\dot{q}_i^0$, с$^{-1}$	q_i^1	q_i^-	q_i^+	X_i, с$^{-2}$	τ_i^*, с	τ_i, с
1	1	0	-0.2	-0.4	1.1	0.413	3.407	2.413
2	3	0	2	2	3	0.275	3.809	2.697
3	-0.25	0	0.3	-0.5	0.5	0.413	2.825	1.994

РАСЧЕТ 3

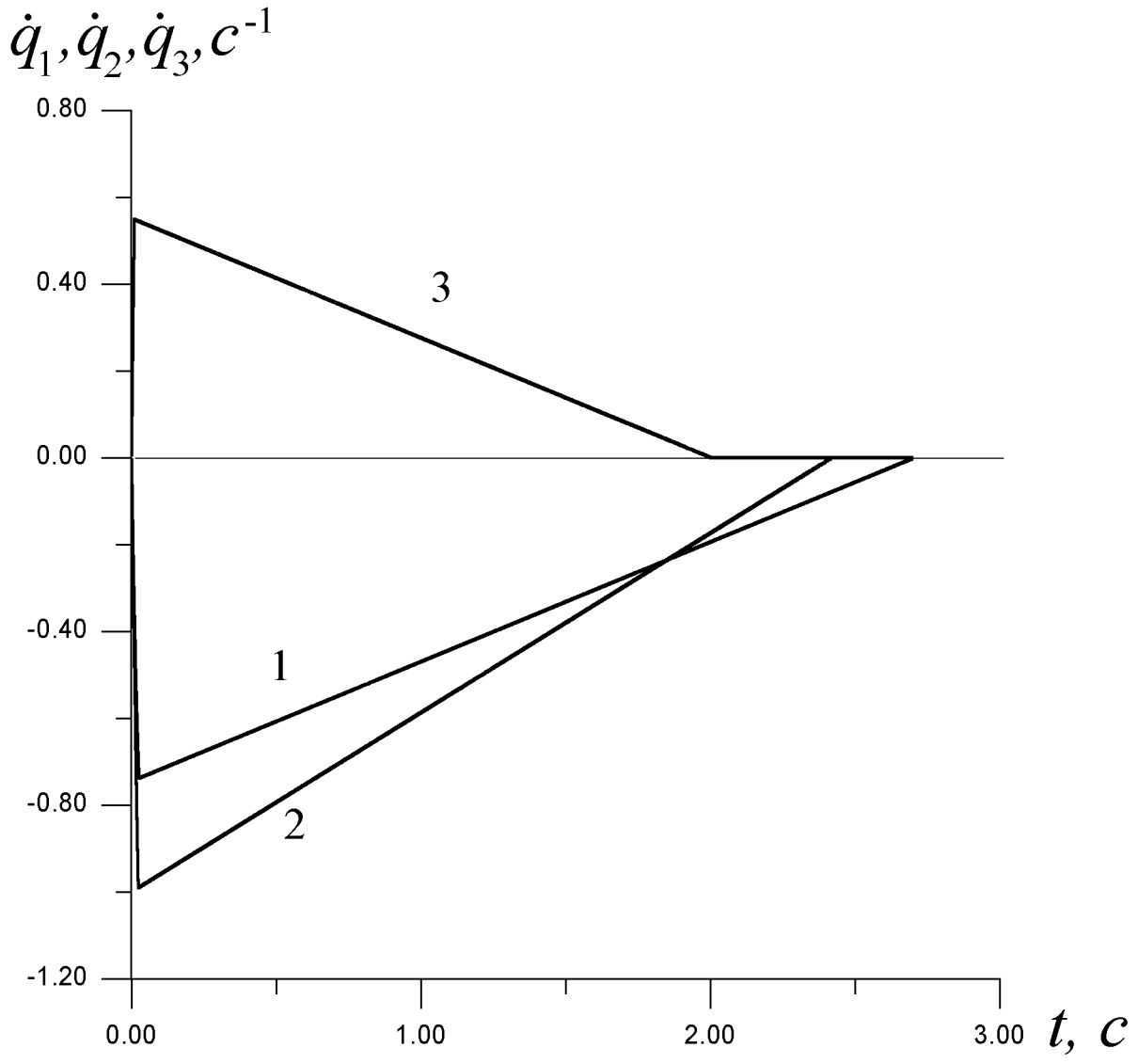

Рис. 1.7.12. Зависимость обобщенных скоростей от времени

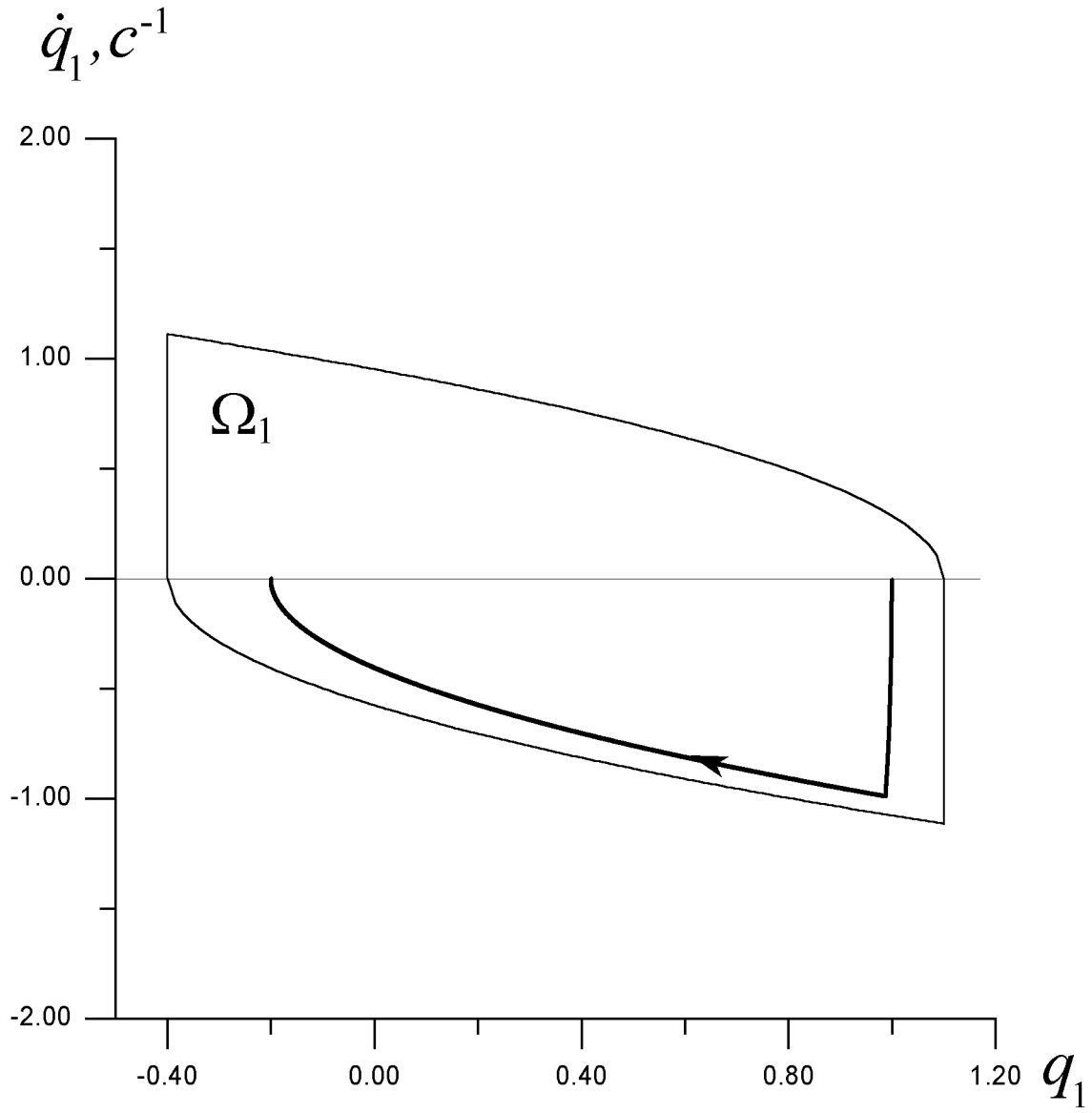

Рис. 1.7.13. Фазовая траектория подсистемы 1

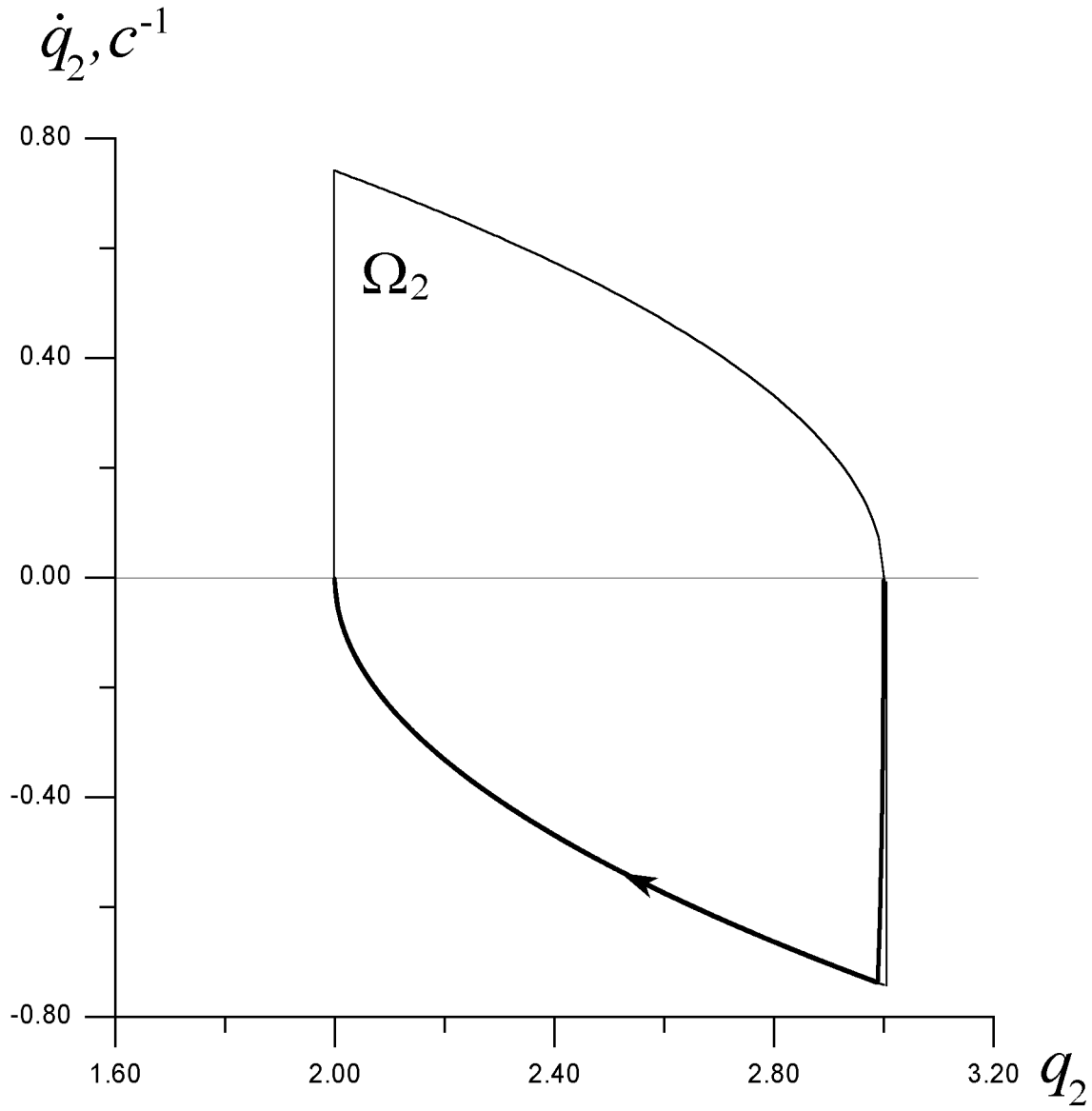

Рис. 1.7.14. Фазовая траектория подсистемы 2

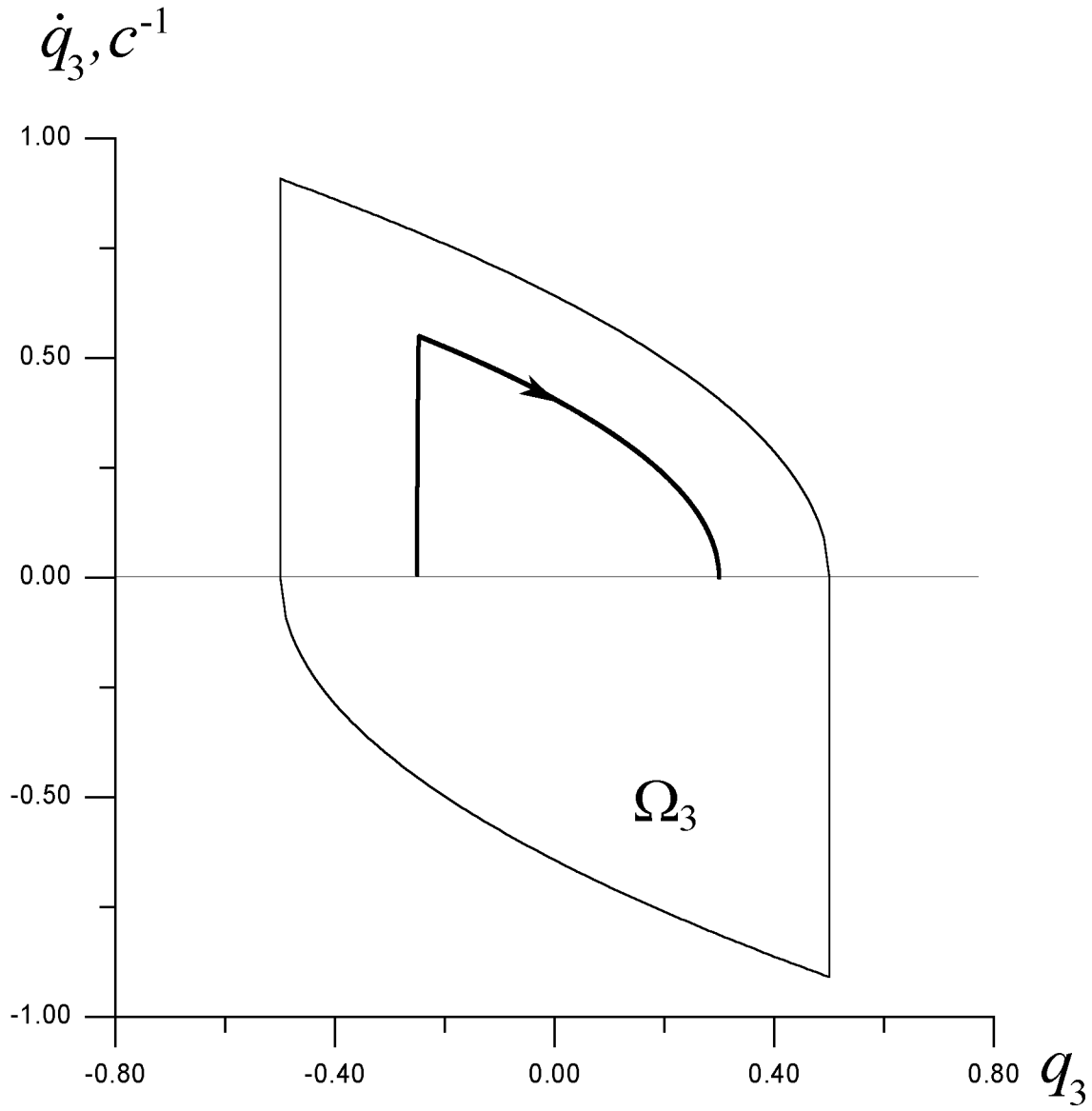

Рис. 1.7.15. Фазовая траектория подсистемы 3

Таблица 1.7.13. Параметры звеньев

i	m_i, кг	l_i, м	l_{gi}, м	I_i^S, кг·м^2	I_i^N, кг·м^2	I_i^Z, кг·м^2
1	–	–	–	–	–	0.2
2	5	0.8	0.4	0.25	0.01	–
3	4	0.74	0.37	0.18	0.009	–

Таблица 1.7.14. Параметры электроприводов

i	k_i^E, Н·м/А	k_i^M, Н·м/А	R_i, Ом	u_i, В	m_i^R, кг	J_i, кг·м^2	J_i', кг·м^2	N_i
1	0.08	0.07	0.7	27	0.4	0.00039	0.00022	120
2	0.06	0.06	0.6	27	0.25	0.00039	0.00022	180
3	0.06	0.05	0.6	27	0.25	0.00039	0.00022	150

Таблица 1.7.15.

i	q_i^0	$\dot{q}_i^0$, с$^{-1}$	q_i^1	q_i^-	q_i^+	X_i, с$^{-2}$	τ_i^*, с	τ_i, с
1	-1.5	0.7	-1	-1.6	-0.7	0.317	4.052	1.766
2	-0.3	-0.2	-0.2	-0.5	0	0.176	3.332	1.071
3	-0.5	0	-1	-1.3	-0.3	0.352	2.380	1.683

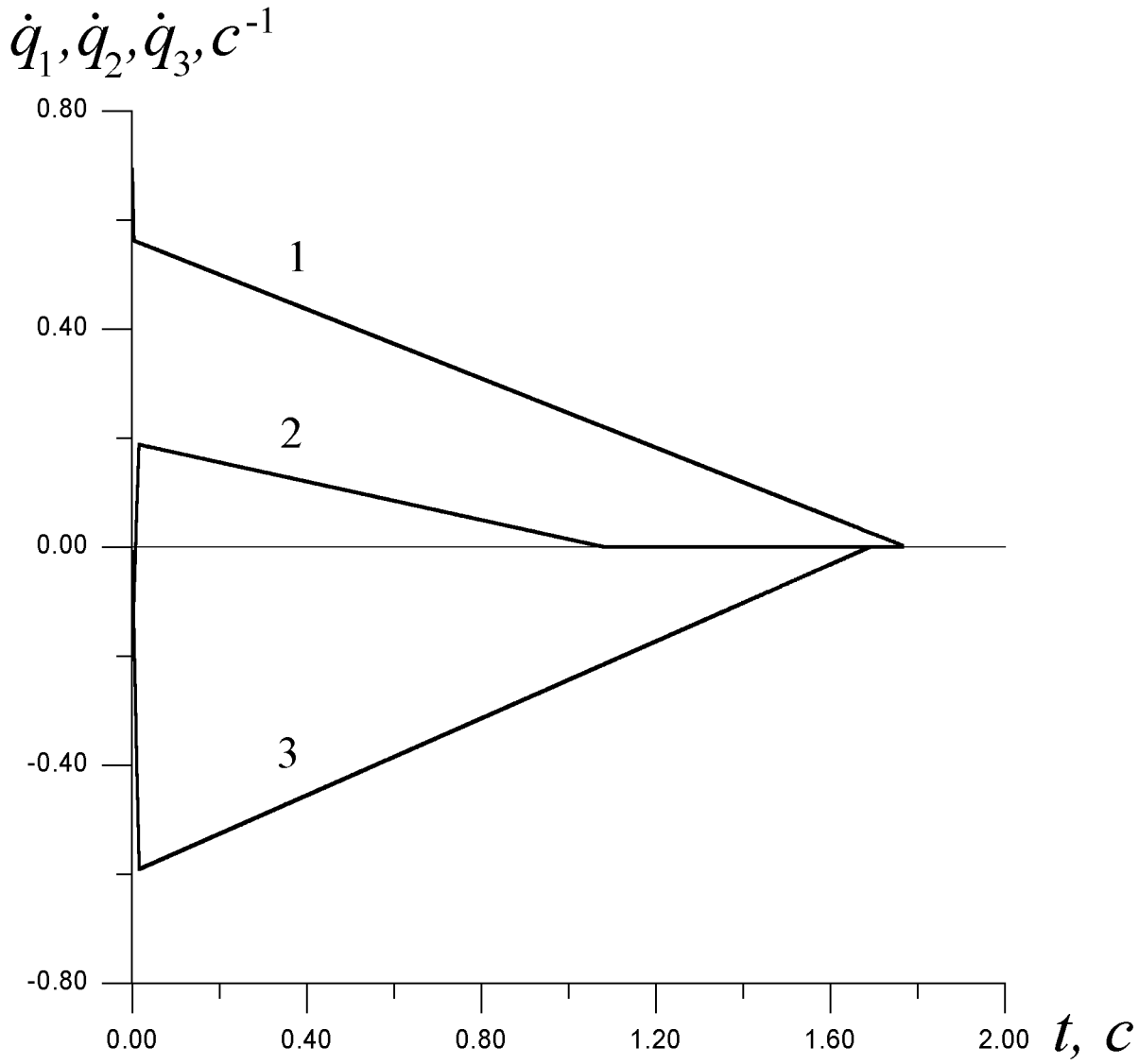

Рис. 1.7.16. Зависимость обобщенных скоростей от времени

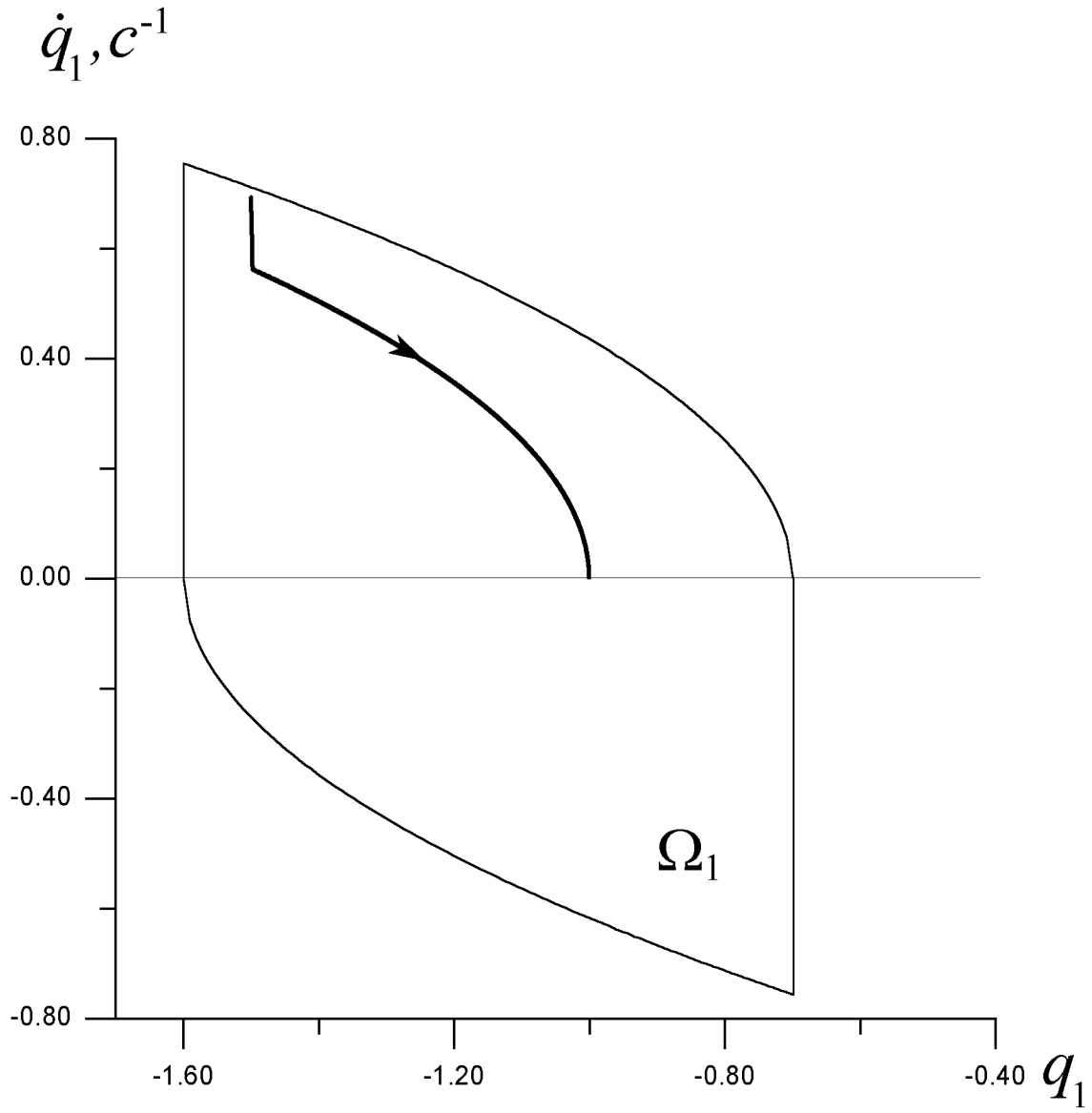

Рис. 1.7.17. Фазовая траектория подсистемы 1

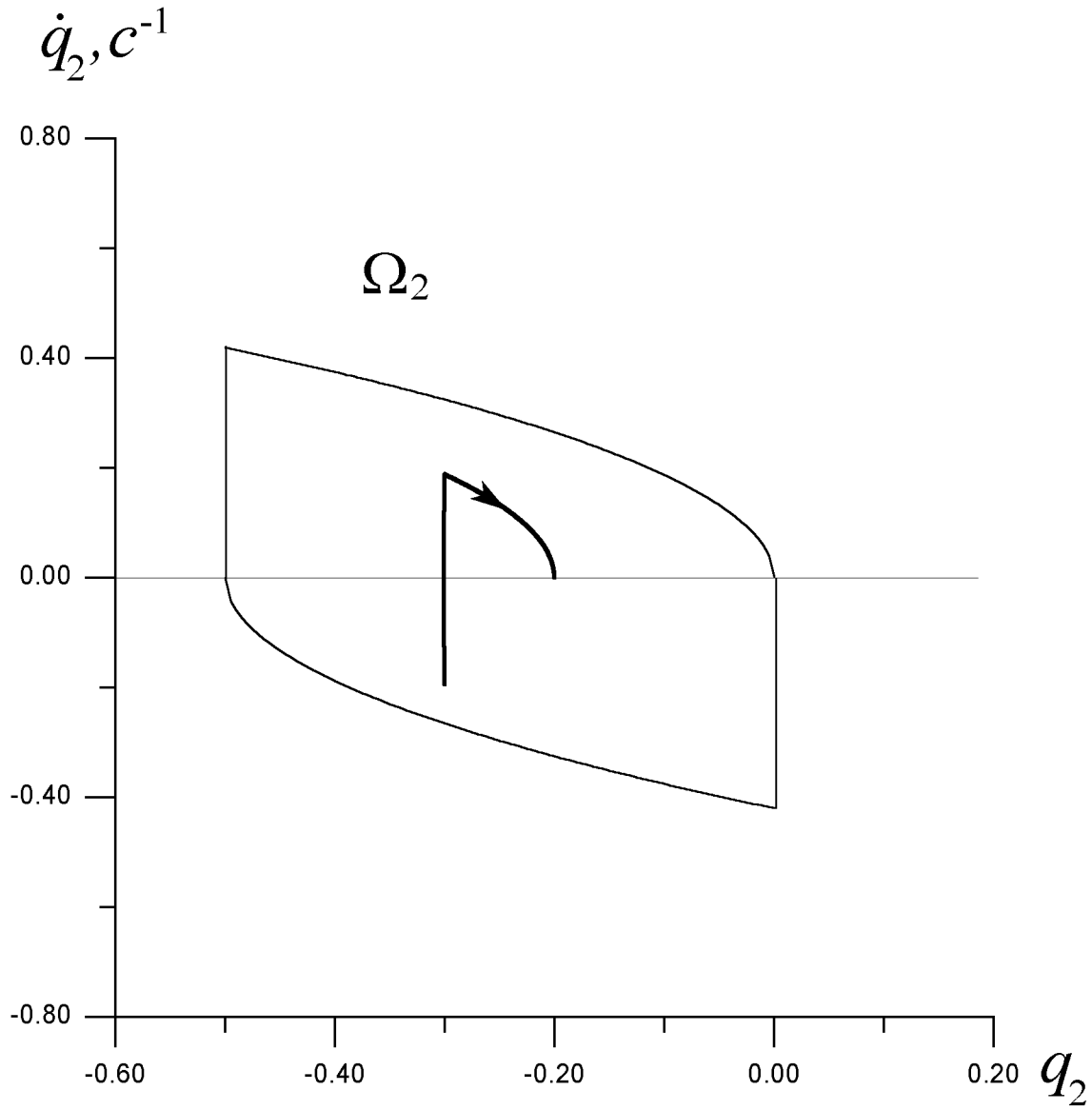

Рис. 1.7.18. Фазовая траектория подсистемы 2

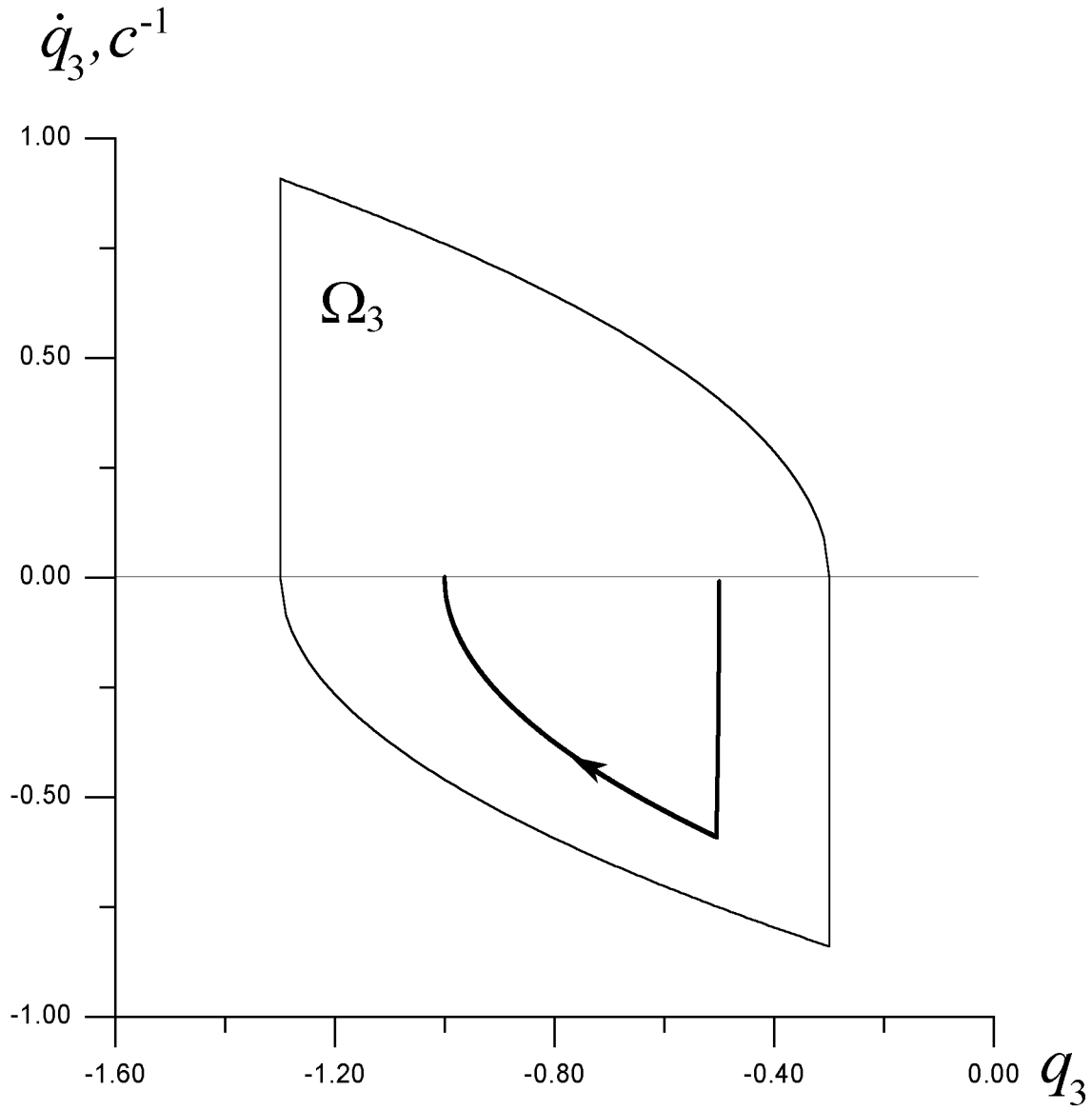

Рис. 1.7.19. Фазовая траектория подсистемы 3

Глава 2.

Синтез управления двузвенным манипулятором с безредукторными приводами.

Введение.

В данной главе рассматривается управляемая динамическая система заданной структуры, которая представляет собой упрощённую модель механического двузвенного манипуляционного робота с абсолютно жёсткими элементами конструкции. Двузвенник может совершать движения в горизонтальной плоскости и управляется моментами сил, которые создаются в его шарнирах. На величины управляющих моментов сил наложены геометрические ограничения. Строится ограниченное управление, переводящее систему за конечное время из заданного начального состояния в заданное конечное положение. Для построения управления применяется метод декомпозиции, описанный в [32]. Указываются достаточные условия, при которых исходную нелинейную систему удается разбить на подсистемы с одной степенью свободы каждая. Затем управление строится отдельно для каждой из подсистем. При этом алгоритм расчета управления по существу аналогичен тому, который приведен в первой главе, где накладываются ограничения на величины передаточных чисел редукторов. Главное отличие состоит в том, что система, рассматриваемая в данной главе, моделирует движение манипулятора с безредукторными приводами. Поэтому здесь накладываются ограничения на другие параметры системы.

2.1. Описание системы. Постановка задачи.

Рассмотрим механическую двузвенную систему (рис. 2.1.1), состоящую из неподвижного основания G_0 и двух абсолютно жёстких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в горизонтальной плоскости.

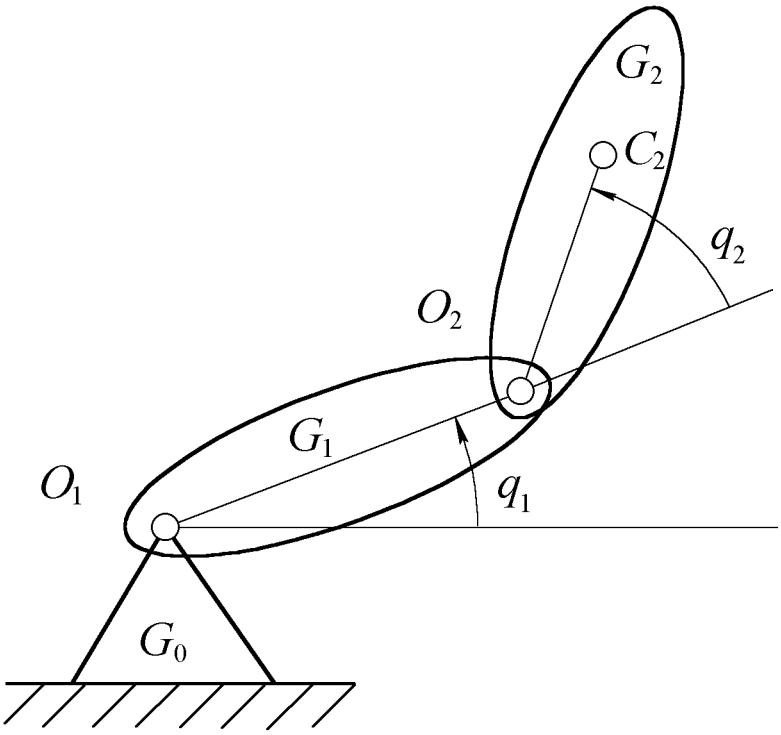

Рис. 2.1.1.

Уравнения Лагранжа (1.1.1), описывающие движение данной системы, получены в [35] и имеют вид

$$(m_2 l_1^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{g2} \cos q_2)\ \ddot{q}_1 + (I_2 + m_2 l_1 l_{g2} \cos q_2)\ \ddot{q}_2 -$$

$$-2m_2 l_1 l_{g2} \sin q_2\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{g2} \sin q_2\ \dot{q}_2^2 = M_1$$

$$(I_2 + m_2 l_1 l_{g2} \cos q_2)\ \ddot{q}_1 + I_2\ \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{g2} \sin q_2\ \dot{q}_1^2 = M_2 \qquad (2.1.1)$$

Здесь введены следующие обозначения: q_1–угол поворота звена G_1 относительно основания G_0; q_2–угол между прямыми O_1O_2 и O_2C_2, характеризующий положение звена G_2 относительно звена G_1 (C_2–центр масс звена G_2); l_1–длина отрезка O_1O_2; l_{g2}–длина отрезка O_2C_2; m_2–масса звена G_2; I_i–момент инерции i-го звена относительно оси шарнира O_i; M_i–момент сил, создаваемый в шарнире O_i, здесь и всюду далее $i = 1, 2$.

На управляющие моменты часто накладываются ограничения

$$|M_i| \leq M_i^0 \tag{2.1.2}$$

где M_i^0–заданные постоянные.

Перейдем к безразмерным переменным

$$t' = (M_2^0)^{1/2}(m_2 l_1 l_{g2})^{-1/2}\, t, \quad U_i = M_i/M_2^0, \quad U_i^0 = M_i^0/M_2^0$$

$$\alpha = \frac{I_1 + m_2 l_1^2}{m_2 l_1 l_{g2}}, \qquad \beta = \frac{I_2}{m_2 l_1 l_{g2}} \tag{2.1.3}$$

Если у новой переменной t' опустить штрих, то уравнения (2.1.1) примут вид

$$(\alpha + \beta + 2\cos q_2)\, \ddot{q}_1 + (\beta + \cos q_2)\, \ddot{q}_2 - (2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin q_2 = U_1$$

$$(\beta + \cos q_2)\, \ddot{q}_1 + \beta\, \ddot{q}_2 + \dot{q}_1^2 \sin q_2 = U_2 \tag{2.1.4}$$

а неравенства (2.1.2) перепишутся в форме (1.1.4). Заметим, что в силу введенных обозначений (2.1.3) выполняются соотношения $\alpha\beta > 1$, $U_2^0 = 1$.

Таким образом, мы можем рассматривать задачу 1.1 (см. гл. 1) применительно к системе (2.1.4) с ограничениями (1.1.4) на новые управления U_i, считая, что область возможных движений задается соотношениями вида (1.1.3).

2.2. Упрощающие предположения и декомпозиция системы.

Для решения рассматриваемой задачи управления манипулятором воспользуемся методом декомпозиции [32].

Выберем некоторые положительные константы J_i, возможные значения которых будут указаны ниже, и представим систему (2.1.4) в эквивалентном виде (1.2.3). Выражения для функций V_i в этом случае будут задаваться соотношениями

$$V_1 = U_1\left(J_1\frac{\beta}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}-1\right)-J_1U_2\frac{\beta+\cos q_2}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}+$$

$$+J_1\frac{\beta(\dot q_1+\dot q_2)^2\sin q_2+\dot q_2^2\sin q_2\cos q_2}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}$$

$$V_2 = U_2\left(J_2\frac{\alpha+\beta+2\cos q_2}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}-1\right)-J_2U_1\frac{\beta+\cos q_2}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}- \qquad (2.2.1)$$

$$-J_2\frac{(\beta+\cos q_2)(\dot q_1+\dot q_2)^2\sin q_2+(\alpha+\cos q_2)\dot q_1^2\sin q_2}{\alpha\beta-\cos^2 q_2}$$

Предположим, что имеют место неравенства (1.2.5). Если V_i рассматривать как независимые ограниченные возмущения, то исходная нелинейная система распадается на две линейные подсистемы с одной степенью свободы каждая.

Управление для каждой из этих подсистем можно задать соотношениями (1.3.1), (1.3.2). В разд. 2.3 показано, что условия (1.2.5) действительно выполняются при некоторых ограничениях на параметры системы и константы J_i.

2.3. Нахождение параметров управления X_1 и X_2.

Применение управления (1.3.1), (1.3.2) возможно только при выполнении в процессе управления соотношений (1.2.5).

Наложим на параметры системы (2.1.4) некоторые ограничения и покажем, что существуют такие X_i, входящие в закон управления

(1.3.1), при которых соотношения (1.2.5) действительно выполняются.

а) Будем предполагать, что имеет место неравенство

$$\beta < 1 \tag{2.3.1}$$

Например, если звено G_2 представляет собой тонкий стержень длины $l_2 < l_1$ с произвольным распределением плотности $\rho(x)$, то имеем

$$\beta = \frac{1}{m_2 l_1 l_{g2}} \int\limits_0^{l_2} \rho(x) x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{m_2 l_1 l_{g2}} \left(m_2 l_2 l_{g2} - \int\limits_0^{l_2} \int\limits_0^{x} \rho(y) y dy dx \right) < 1$$

б) Потребуем, чтобы величины q_2^-, q_2^+ в (1.1.3) были ограничены

$$-\arccos(-\beta) < q_2^-, \qquad q_2^+ < \arccos(-\beta) \tag{2.3.2}$$

Так как при управлении (1.3.1) выполняется ограничение $q_2^- < q_2 < q_2^+$ (см. разд. 1.3), то из (2.3.2) следует, что в течение всего процесса управления

$$\cos q_2 > -\beta \tag{2.3.3}$$

в) Будем считать, что величина U_1^0, ограничивающая управление U_1, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\beta + 1}{\beta} < U_1^0 < \frac{\alpha + \beta + 2}{\beta + 1} \tag{2.3.4}$$

Поскольку $(\alpha + \beta + 2)/(\beta + 1) - (\beta + 1)/\beta = (\alpha\beta - 1)/[\beta(\beta + 1)] > 0$, то выполнения соотношений (2.3.4) можно всегда добиться, накладывая более жёсткие ограничения на величину одного из моментов M_i в (2.1.2). Отметим, что в силу (2.3.1) и (2.3.4) $U_1^0 > 2$.

г) Константы J_i в системе (1.2.3) будем выбирать согласно неравенствам

$$J_1 \frac{\beta}{\alpha\beta - 1} < 1, \qquad J_2 \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha\beta - 1} < 1 \tag{2.3.5}$$

Используя сделанные допущения а)–г), оценим модуль величины V_1 из (2.2.1). Учитывая неравенства (1.1.4), (2.3.3), (2.3.5), получим

$$|V_1| \le U_1^0 \left| J_1 \frac{\beta}{\alpha\beta - \cos^2 q_2} - 1 \right| + J_1 U_2^0 \frac{|\beta + \cos q_2|}{\alpha\beta - \cos^2 q_2} +$$

$$+ J_1 \frac{\beta(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \dot{q}_2^2}{\alpha\beta - 1} = U_1^0 + J_1 \frac{\beta + \cos q_2 - U_1^0 \beta}{\alpha\beta - \cos^2 q_2} +$$

$$+ J_1 \frac{\beta(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \dot{q}_2^2}{\alpha\beta - 1}$$

Используя неравенства (1.3.6), (2.3.4), будем иметь

$$|V_1| \le U_1^0 + J_1 \frac{\beta + 1 - U_1^0 \beta}{\alpha\beta} + J_1 \frac{Y_2^2 + \beta \left(Y_1 + Y_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \tag{2.3.6}$$

Аналогично получим оценку для величины V_2

$$|V_2| \le 1 + J_2 \frac{\beta U_1^0 + (U_1^0 - 2)\cos q_2 - \alpha - \beta}{\alpha\beta - \cos^2 q_2} +$$

$$+ J_2 \frac{(\beta + 1)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (\alpha + 1)\dot{q}_1^2}{\alpha\beta - 1}$$

Далее, используя соотношения (1.3.6), (2.3.4) и $U_1^0 > 2$, получим

$$|V_2| \le 1 + J_2 \frac{U_1^0(\beta + 1) - \alpha - \beta - 2}{\alpha\beta} +$$

$$+ J_2 \frac{(\alpha + 1)Y_1^2 + (\beta + 1)\left(Y_1 + Y_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \tag{2.3.7}$$

Подставим в неравенства (1.2.5) вместо величин $|V_i|$ их оценки (2.3.6), (2.3.7). Получим

$$X_1 + \frac{Y_2^2 + \beta \left(Y_1 + Y_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \le \frac{U_1^0 \beta - \beta - 1}{\alpha\beta}, \tag{2.3.8}$$

$$X_2 + \frac{(\alpha + 1)Y_1^2 + (\beta + 1)\left(Y_1 + Y_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \le \frac{\alpha + \beta + 2 - U_1^0(\beta + 1)}{\alpha\beta}$$

В силу (2.3.4) выражения в правых частях неравенств (2.3.8) положительны. Согласно (1.3.6) $Y_i \to 0$ при $X_i \to 0$, поэтому всегда найдутся положительные X_1, X_2, удовлетворяющие неравенствам (2.3.8), а

следовательно, и неравенствам (1.2.5). Заметим, что константы J_i не входят непосредственно в ограничения (2.3.8), поэтому их конкретные значения нас не интересуют.

Подытожим полученные результаты.

Пусть выполнены условия (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4). Тогда синтез управления $U_i(q_i, \dot{q}_i)$, решающий задачу 1.1 применительно к системе (2.1.1), задается соотношениями (1.3.1), в которых параметры X_i должны выбираться так, чтобы выполнялись неравенства (2.3.8). Это управление переводит систему (2.1.1) из начального состояния (1.1.11) в заданное терминальное состояние (1.1.12), если в начальный момент времени величины $\dot{q}_i^0$ удовлетворяют ограничениям $f_i^-(q_i^0) \leq \dot{q}_i^0 \leq f_i^+(q_i^0)$. При этом движение системы лежит в области D из (1.1.3), а время процесса управления τ не превосходит величины τ^*, определяемой выражениями (1.3.7), (1.3.8).

Укажем способ выбора допустимых значений X_i. Будем искать их в виде (1.4.5). Неравенства (2.3.8) в этом случае принимают вид

$$Z \leq \frac{U_1^0\beta - \beta - 1}{\alpha\beta} \times \left(d_1 + 2\frac{d_2^2 + \beta\left(d_1 + d_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \right)^{-1}$$

$$Z \leq \frac{\alpha + \beta + 2 - U_1^0(\beta + 1)}{\alpha\beta} \times$$

$$\times \left(d_2 + 2\frac{(\alpha + 1)d_1^2 + (\beta + 1)\left(d_1 + d_2\right)^2}{\alpha\beta - 1} \right)^{-1}$$

Найдя максимальное значение Z, удовлетворяющее полученным неравенствам, вычисляем по формулам (1.4.5) параметры X_i.

Отметим, что множество возможных значений параметров управления X_i для рассматриваемой системы можно существенно расширить. Для этого следует получить более точные оценки величин $|V_i|$ в (2.3.6), (2.3.7).

2.4. Численное моделирование.

Расчёты проводились при следующих размерных характеристиках системы (см гл. 2):

$$l_1 = 1\,\text{м}, \quad l_{g2} = 0.5\,\text{м}, \quad I_1 = I_2 = 3.33\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$$

$$m_2 = 10\,\text{кг}, \quad M_1^0 = 2.9\,\text{Н}\cdot\text{м}, \quad M_2^0 = 1\,\text{Н}\cdot\text{м}$$

Начальные и конечные условия, а также величины $q_i^{\pm}$, задающие допустимую область движения, были взяты такие:

$$q_1^- = q_1^0 = -0.1\,\text{рад}, \quad q_2^- = q_2^0 = -0.05\,\text{рад}$$

$$\dot{q}_1^0 = \dot{q}_2^0 = q_1^1 = q_2^1 = q_1^+ = q_2^+ = 0$$

В этом случае $\alpha = 2.66$, $\beta = 0.66 < 1$, и неравенства (2.3.2), (2.3.4) принимают вид $-2.3 < q_2^-,\, q_2^+ < 2.3$, $2.5 < U_1^0 < 3.2$. Очевидно, параметры системы удовлетворяют этим ограничениям. Выберем безразмерные значения величин X_i, удовлетворяющие неравенствам (2.3.8). При $X_1 = 1.82\cdot 10^{-2}$, $X_2 = 9.13\cdot 10^{-3}$ получилась размерная оценка времени управления $\tau^* = 4.68$ с и реальное время процесса $\tau = 3.64$ с. На рис. 2.4.1 показана зависимость скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ от времени. На заключительном этапе скорости $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ меняются линейно, что соответствует движениям фазовых точек подсистем (1.2.3) вдоль параболических участков кривых переключения. На рис. 2.4.2, 2.4.3 показаны фазовые траектории подсистем. Прекращение движения по двум степеням свободы происходит в разное время.

РАСЧЕТ 5

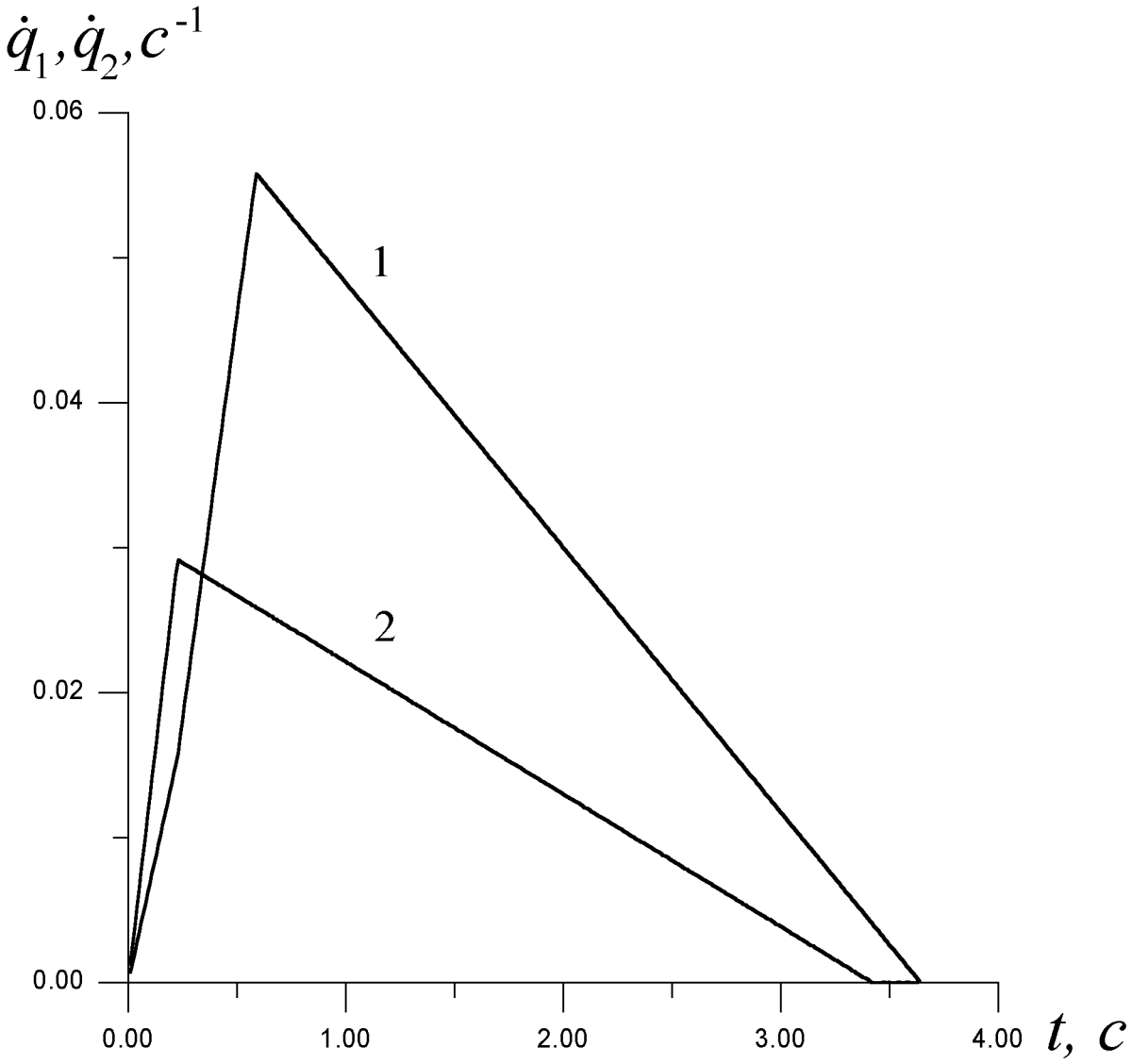

Рис. 2.4.1 Зависимость обобщенных скоростей от времени

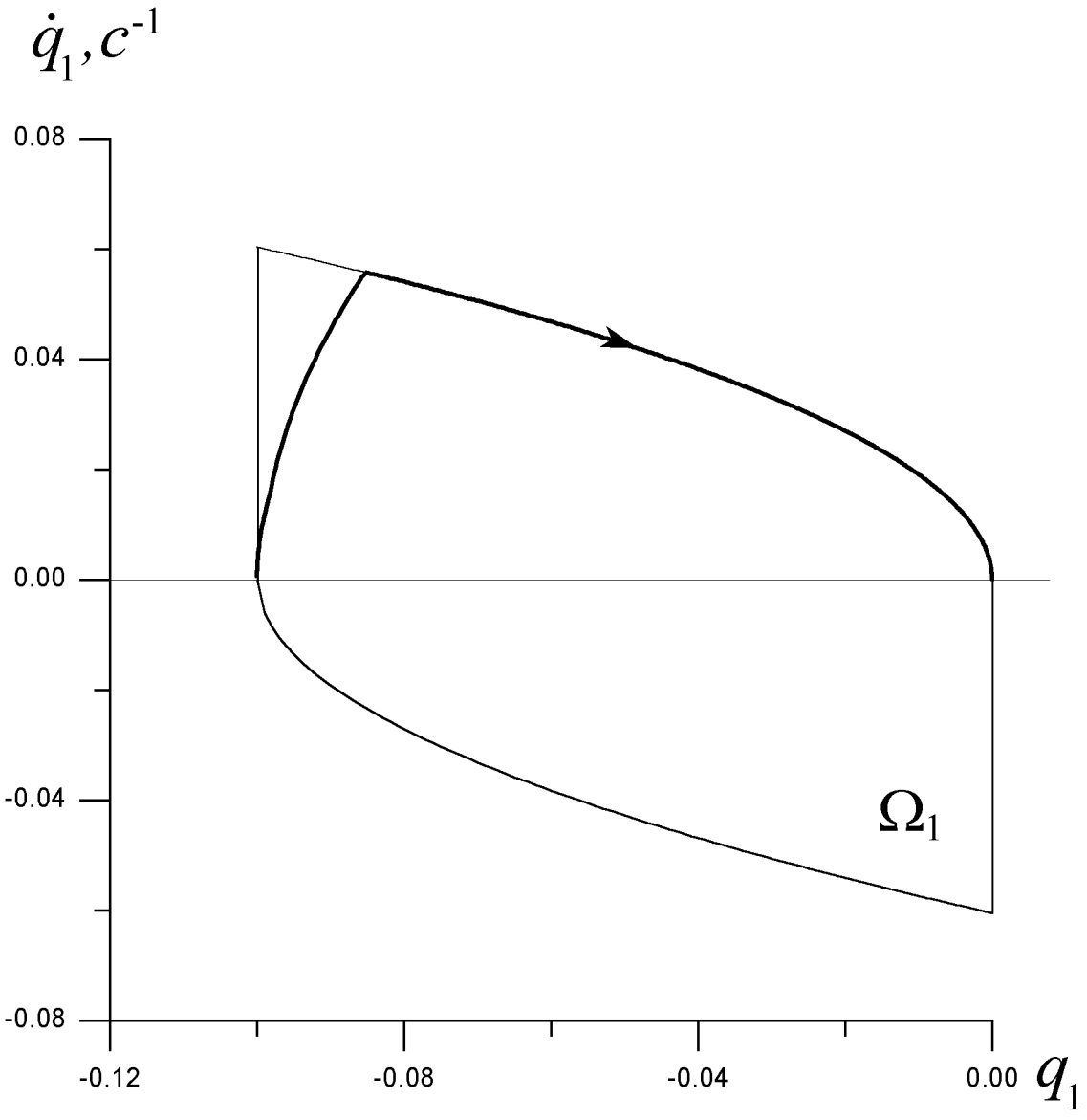

Рис. 2.4.2. Фазовая траектория подсистемы 1

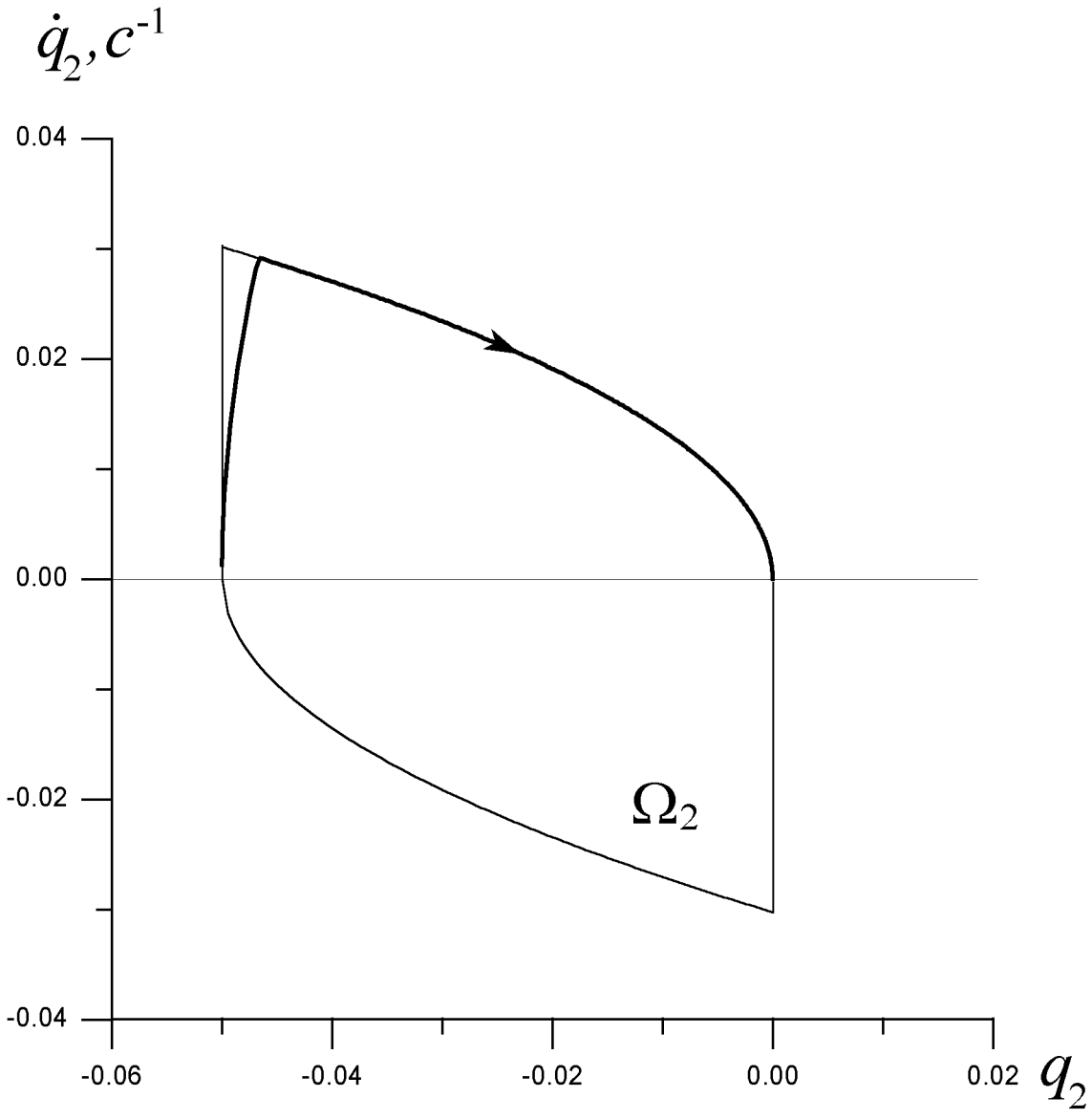

Рис. 2.4.3. Фазовая траектория подсистемы 2

Глава 3.

Задача динамического управления манипуляционными роботами с упругими элементами.

Введение.

Рассматривается динамическая задача управления манипуляционным роботом, который состоит из n твердых звеньев, соединенных друг с другом при помощи шарниров, обладающих упругостью. Звенья приводятся в движение при помощи n независимых электроприводов, снабженных электродвигателями постоянного тока. Существует множество публикаций по этому вопросу, но отличие содержания данной главы заключается в том, что в ней используется полуаналитический подход, основанный на методе осреднения (см. [21, 29]), позволяющий отделить динамику робота как целого от его упругих вибраций. Этот подход был применен ранее в [30, 31] для анализа движений роботов в случае, когда жесткость их упругих элементов велика. В данной главе предполагается, что передаточные числа редукторов электроприводов также достаточно велики. При использовании вышеупомянутого метода построена конструктивная процедура для моделирования движений робота. В результате, интегрирование уравнений движения робота удается заменить интегрированием более простой системы с большим шагом. Представлены результаты численного моделирования.

3.1. Уравнения движения с учетом упругости шарниров.

Рассматривается манипуляционный робот, состоящий из n звеньев, которые соединены между собой цилиндрическими шарнирами. Предполагается, что звенья абсолютно жесткие, а упругая податливость

сосредоточена в шарнирах (на рис. 3.1.1 заштрихован вал, обладающий крутильной упругостью). Далее при составлении уравнений движения будет учитываться также динамика роторов электродвигателей в шарнирах. Обозначим через N_i, $i = 1, ..., n$, передаточные числа редукторов. Введём обобщенные координаты $s = (s_1, ..., s_n)$ так, чтобы величины $s_i \cdot N_i$, $i = 1, ..., n$, были равны углам поворотов роторов электродвигателей в приводах. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ — дополнительные обобщённые координаты, обусловленные упругими элементами. Тогда положение звеньев робота в пространстве характеризуется их относительными углами поворотов $q = (q_1, ..., q_n)$, $q = s + x$.

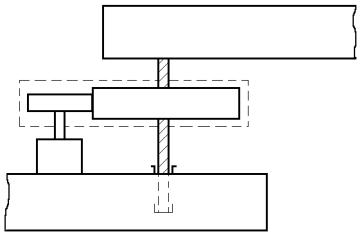

Рис. 3.1.1. Цилиндрический шарнир

В качестве управлений выступают электрические напряжения $u = (u_1, ..., u_n)$, подаваемые на обмотки роторов электродвигателей. На систему действуют внешние моменты $Q^q = (Q_1^q, ..., Q_n^q)$, возникающие в результате действия сил тяжести, трения и др. Кроме того, к ним добавляются силы, обусловленные упругой податливостью элементов в шарнирах и диссипацией энергии в них. Потенциальную энергию упругих элементов и диссипативную функцию Рэлея, описывающую диссипацию энергии в упругих элементах, зададим в виде квадратичных форм

$$\Pi = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} K x, \quad R = \frac{1}{2} \dot{x}^{\mathrm{T}} D \dot{x}.$$

Здесь K, D — диагональные $n \times n$-матрицы с положительными диагональными элементами.

Кинетическая энергия робота T складывается из кинетической энергии движения звеньев $T^1(q, \dot{q})$ и кинетической энергии движения роторов электродвигателей $T^2(q, \dot{q}, \dot{s})$ (инерцией подвижных частей редукторов пренебрегаем). По теореме Кёнига [1] кинетическая энергия i-го ротора T_i^2 равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка массы, равной массе ротора, расположенная в его центре инерции, и кинетической энергии вращения ротора, т. е.

$$T_i^2(q, \dot{q}, \dot{s}) = T_i^v(q, \dot{q}) + T_i^\omega(q, \dot{q}, \dot{s})$$

Пусть J_i, $J_i{}'$ – моменты инерции i-го ротора, соответственно, относительно оси вращения и перпендикулярной к ней оси, проходящей через центр инерции. Тогда, если вектор угловой скорости статора i-го электродвигателя имеет проекцию на ось вращения ротора, равную ω_i, и перпендикулярную составляющую, равную ω_i', то

$$T_i^\omega(q, \dot{q}, \dot{s}) = \frac{1}{2}\left[J_i(N_i\dot{s}_i + \omega_i)^2 + J_i{}'\omega_i'^2\right]$$

Угловые скорости ω_i, ω_i' – линейные комбинации обобщенных скоростей $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от q. Поэтому имеют место соотношения

$$\omega = B(q)\dot{q}, \quad \omega' = B'(q)\dot{q}$$

где $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, $\omega' = (\omega_1', ..., \omega_n')$, а $B(q)$, $B'(q)$ – некоторые матрицы. Пусть

$$T^1 + \sum_i T_i^v(q, \dot{q}) = (\dot{q}, A(q)\dot{q})$$

где $A(q)$ – симметрическая положительно-определенная матрица с элементами $A_{jk}(q)$. Тогда кинетическую энергию робота можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2}\left[(\dot{s}, NJN\dot{s}) + 2(\dot{s}, \tilde{B}(q)\dot{q}) + (\dot{q}, \tilde{A}(q)\dot{q})\right] \qquad (3.1.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{B} = NJB, \quad \tilde{A} = A + B^{\mathrm{T}}JB + B'^{\mathrm{T}}J'B',$$

$$N = \mathrm{diag}(N_1, ..., N_n), \ J = \mathrm{diag}(J_1, ..., J_n),$$

$$J' = \mathrm{diag}(J_1{}', ..., J_n{}')$$

Составим уравнения Лагранжа, принимая s, x за обобщённые координаты:

$$(NJN + \tilde{B} + \tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{A})\ddot{s} + (\tilde{B} + \tilde{A})\ddot{x} + H'(q, \dot{q}, \dot{s}) = \tag{3.1.2}$$

$$= Q^s(s, \dot{s}, t) + Q^q(q, \dot{q}, t),$$

$$(\tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{A})\ddot{s} + \tilde{A}\ddot{x} + H''(q, \dot{q}, \dot{s}) = Q^q(q, \dot{q}, t) - Kx - D\dot{x} \tag{3.1.3}$$

Здесь

$$Q^s(s, \dot{s}, t) = (Q_1^s, ..., Q_n^s), \quad Q_i^s = N_i(M_i - D_i^R\dot{s}_i),$$

$$H' = (H_1', ..., H_n'), \quad H'' = (H_1'', ..., H_n''),$$

$$H_k' = H_k'' + \sum_{ij}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{B}_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

$$H_k'' = \sum_{ij}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{A}_{ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{A}_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{ij}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{B}_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial \tilde{B}_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{s}_i \dot{q}_j$$

где M_i - электромагнитный момент, создаваемый обмоткой i-го электродвигателя, член $D_i^R\dot{s}_i$ представляет собой момент сил механического сопротивления, D_i^R - постоянный положительный коэффициент.

Пусть роль управляющих воздействий играют электрические напряжения, подаваемые на обмотки роторов электродвигателей. Дополним уравнения движения (3.1.2), (3.1.3) уравнениями баланса напряжений в цепях роторов и соотношениями, связывающими моменты M_i с токами [36]

$$L_i\frac{dj_i}{dt} + R_i j_i + k_i^E N_i \dot{s}_i = u_i, \qquad M_i = k_i^M j_i \tag{3.1.4}$$

Здесь L_i – коэффициент индуктивности, R_i – электрическое сопротивление, k_i^E, k_i^M – постоянные коэффициенты, u_i – электрическое напряжение в цепи ротора i-го двигателя. Первый член в первом уравнении (3.1.4) обычно мал по сравнению с остальными, поэтому из (3.1.4) получим выражение для компонент вектора Q^s

$$Q_i^s = N_i k_i^M R_i^{-1} u_i - N_i^2 (D_i^R + k_i^M k_i^E R_i^{-1}) \dot{s}_i. \tag{3.1.5}$$

Далее будем предполагать, что заданы управляющие напряжения в виде $u_1(s, \dot{s}, t), ..., u_n(s, \dot{s}, t)$ и будем рассматривать движения электромеханической системы, описываемой уравнениями (3.1.2), (3.1.3), (3.1.5).

3.2. Постановка задачи и упрощающие предположения.

Сделаем упрощающее предположение относительно параметров рассматриваемой системы. Далее будем предполагать, что существует достаточно малый положительный параметр ε такой, что выполнены соотношения

$$K = \varepsilon^{-2} \tilde{K}, \quad x(t) = \varepsilon^2 X(t) \tag{3.2.1}$$

$$D = O(1) \tag{3.2.2}$$

$$NJN = \varepsilon^{-1} \tilde{J}, \quad Q^s(s, \dot{s}, t) = \varepsilon^{-1} \tilde{Q}^s(s, \dot{s}, t) \tag{3.2.3}$$

где $\tilde{K}$, $X(t)$, $\tilde{J}$, $\tilde{Q}^s(s, \dot{s}, t)$ ограничены при $\varepsilon \to 0$. Условие (3.2.1) означает, что жесткость упругих элементов велика, а условие (3.2.2) - что диссипация в этих элементах невелика. Условие (3.2.3) выполняется в случае, когда передаточные числа редукторов N_i, $i = 1, ..., n$, достаточно велики.

Задача 3.2. Требуется определить движение системы (3.1.2), (3.1.3) в случае, когда выполнены условия (3.2.1)-(3.2.3) и задан вектор $Q^s(s, \dot{s}, t)$, определяемый выражением (3.1.5) (случай динамического управления).

Далее для решения поставленной задачи будем использовать методику, примененную ранее в [30, 31]. Учитывая сделанные допущения (3.2.1)-(3.2.3), перепишем уравнения движения (3.1.2), (3.1.3) в следующем виде

$$\tilde{J}\ddot{s} + \varepsilon(\tilde{B} + \tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{A})\ddot{s} + \varepsilon^3(\tilde{B} + \tilde{A})\ddot{X} + \varepsilon H'(q, \dot{q}, \dot{s}) = \tag{3.2.4}$$

$$= \tilde{Q}^s(s, \dot{s}, t) + \varepsilon Q^q(q, \dot{q}, t)$$

$$(\tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{A})\ddot{s} + \varepsilon^2\tilde{A}\ddot{X} + H''(q, \dot{q}, \dot{s}) = Q^q(q, \dot{q}, t) - \tilde{K}X - \varepsilon^2 D\dot{X} \tag{3.2.5}$$

3.3. Асимптотический подход и декомпозиция движений.

Решение системы (3.2.4)-(3.2.5) ищем в виде

$$s = s^0(t) + \varepsilon^3 u(\tau),$$

$$X = y^0(t) + z(\tau), \tag{3.3.1}$$

$$\tau = t/\varepsilon$$

Здесь τ - быстрое время. Положим в уравнении (3.2.4) $X \equiv 0$. Тогда получим систему дифференциальных уравнений для нахождения вектора $s^0(t)$ с погрешностью $O(\varepsilon^3)$

$$\tilde{J}\ddot{s}^0 + \varepsilon(\tilde{B} + \tilde{B}^{\mathrm{T}} + \tilde{A})^0\ddot{s}^0 + \varepsilon H'^0(t) = \tilde{Q}^{s0}(t) + \varepsilon Q^{q0}(t). \tag{3.3.2}$$

Здесь и всюду далее индекс ^{0} означает, что соответствующая функция вычисляется при $s = s^0(t)$, $q = s^0(t)$. Затем из (3.2.5), (3.3.2) получим выражение для квазистатических нормированных (деленных на ε^2) упругих смещений $y^0(t)$

$$y^0(t) = \tilde{K}^{-1}\left[Q^{q0}(t) - (\tilde{B}^{\mathrm{T}0} + \tilde{A}^0)\tilde{J}^{-1}\tilde{Q}^{s0}(t) - H''^0(t)\right] \tag{3.3.3}$$

Подставим соотношения (3.3.1) в уравнения (3.2.4), (3.2.5) и разложим обе части этих уравнений по ε, используя также равенства (3.3.2), (3.3.3).

$$\tilde{J}\frac{d^2u}{d\tau^2} + (\tilde{B}^0 + \tilde{A}^0)\frac{d^2z}{d\tau^2} = O(\varepsilon), \tag{3.3.4}$$

$$\varepsilon(\tilde{B}^0 + \tilde{A}^0)^{\mathrm{T}}\frac{d^2u}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau}\left[\tilde{A}^0(t)\frac{dz}{d\tau}\right] + \tilde{K}z = \varepsilon G(t)\frac{dz}{d\tau} + O(\varepsilon^2), \tag{3.3.5}$$

$$G(t) = G'(t) + G''(t),$$

$$G'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\tilde{A}_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial\tilde{A}_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial\tilde{B}_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial\tilde{B}_{ki}}{\partial q_j}\right)^0\frac{ds_k^0}{dt},$$

$$G''_{ij}(t) = \left(\frac{\partial Q_i^q}{\partial\dot{q}_j}\right)^0 - D_{ij}.$$

Разрешим уравнение (3.3.4) относительно $\frac{d^2u}{d\tau^2}$ и поставим в (3.3.5). После преобразования получим с точностью до членов $O(\varepsilon^2)$

$$\frac{d}{d\tau}\left[\tilde{A}^0(t)\frac{dz}{d\tau}\right] + \tilde{K}z = \varepsilon\left[G(t)\frac{dz}{d\tau} + F(t)z\right], \tag{3.3.6}$$

$$F(t) = -(\tilde{B}^0 + \tilde{A}^0)^{\mathrm{T}}\tilde{J}^{-1}(\tilde{B}^0 + \tilde{A}^0)(\tilde{A}^{-1})^0\tilde{K}$$

Система (3.3.6) представляет собой линейную однородную систему с медленно меняющимися коэффициентами. Её асимптотическое решение может быть получено с использованием метода, описанного в [21, 29]. Сначала решается задача на собственные значения

$$(\lambda\tilde{K} - \tilde{A}^0)\phi = 0$$

в результате чего находятся мгновенные (при фиксированном моменте времени t) частоты $\omega_k(t) = \lambda_k^{-1/2}(t)$ и соответствующие амплитудные векторы $\phi^k(t)$, $k = 1, ..., n$ собственных упругих колебаний манипулятора (далее предполагаем, что частоты $\omega_k(t)$ некратны). Затем, согласно [21, 29], асимптотическое решение первого приближения системы

(3.3.6) задается в виде разложения по нормальным колебаниям

$$z(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \phi^k a_k \cos\psi_k, \quad k = 1, ..., n. \tag{3.3.7}$$

Фазы $\psi_k(t)$ нормальных колебаний и их амплитуды $a_k(t)$ задаются соотношениями

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t^0}^{t}\left(\omega_k(t_1) - \frac{\varepsilon h_k(t_1)}{2\mu_k(t_1)\omega(t_1)}\right)dt_1 + \psi_{k0}, \quad k = 1, ..., n.$$

$$a_k(t) = a_{k0}\left[\frac{\mu_k(t^0)\omega_k(t^0)}{\mu_k(t)\omega_k(t)}\right]^{1/2} \exp\int_{t_0}^{t}\frac{\nu_k(t_1)dt_1}{2\mu_k(t_1)}, \quad k = 1, ..., n, \tag{3.3.8}$$

$$\mu_k(t) = (\psi^k)^T \tilde{A}^0 \psi^k, \qquad \nu_k(t) = (\psi^k)^T G'' \psi^k,$$

$$h_k(t) = (\psi^k)^T F \psi^k, \qquad k = 1, ..., n.$$

где ψ_{k0} и a_{k0} — произвольные постоянные, определяемые начальными значениями $s(0)$, $\dot{s}(0)$, $x(0)$, $\dot{x}(0)$.

В результате, согласно (3.2.1), (3.3.1), (3.3.7), (3.3.8), получим выражения для искомых вектор-функций $s(t)$, $x(t)$ и их производных

$$s = s^0 + O(\varepsilon^3),$$

$$\dot{s} = \dot{s}^0 + O(\varepsilon^2),$$

$$x = \varepsilon^2(y^0 + z) + O(\varepsilon^3),$$

$$\dot{x} = -\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\phi^k a_k \omega_k \sin\psi_k + O(\varepsilon^2). \tag{3.3.9}$$

Соотношения (3.3.9) справедливы на интервале времени $\Delta t = O(1)$ и определяют векторы $s(t)$ и $x(t)$ с одинаковой точностью. Быстрые слагаемые в формуле для упругих смещений x имеют тот же порядок, что и медленные. Скорость $\dot{x}$ определяется быстрыми слагаемыми.

Решение поставленной задачи построено. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ заданы значения $s_i(0)$, $\dot{s}_i(0)$, $x_i(0)$, $\dot{x}_i(0)$. Полагая $s^0(0) := s(0)$, $\dot{s}^0(0) := \dot{s}(0)$, нужно проинтегрировать систему (3.3.2) и найти функцию $s^0(t)$, а также квазистатическую составляющую $y^0(t)$ упругих смещений по формуле (3.3.3). По формулам (3.3.7), (3.3.8) вычисляется колебательная составляющая упругих смещений $z(t)$. При этом для вычисления значений постоянных a_{k0}, ψ_{k0}, $k = 1, ..., n$ из (3.3.8) используется система алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} \phi^k(0) a_{k0} \cos\psi_{k0} = \varepsilon^{-2} \left(x(0) - y^0(0) \right),$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \phi^k(0) a_{k0} \omega_k \sin\psi_{k0} = \varepsilon^{-1} \dot{x}(0). \qquad (3.3.10)$$

Отметим, что система дифференциальных уравнений (3.3.2) для нахождения $s^0(t)$ не содержит высокочастотных упругих осцилляций и может быть проинтегрирована с большим шагом. Кроме того, ее порядок в два раза меньше, чем порядок исходной системы (3.1.2), (3.1.3). Благодаря этому, применение асимптотического метода приводит к уменьшению времени, требуемого для решение задачи 3.2. Отметим также, что, применяя напрямую алгоритм, приведенный в работах [30, 31], мы определили бы вектор $s(t)$ и соответствующий вектор $q(t)$ с меньшей точностью, чем $x(t)$. В данной главе диссертации, благодаря дополнительному предположению (3.2.3), декомпозиция движений (3.3.1) осуществлена так, что удается определить $s(t)$ и $x(t)$ с одинаковой точностью.

3.4. Моделирование движения двузвенного робота-манипулятора.

Рассмотрим двузвенный манипулятор (рис. 3.4.1), состоящий из неподвижного основания G_0 и двух абсолютно жёстких звеньев G_1, G_2.

Элементы конструкции соединены между собой двумя цилиндрическими шарнирами O_1, O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Шарниры O_1, O_2 обладают крутильной упругостью. Привод D_1 управляет поворотом руки относительно основания. Статор электродвигателя этого привода закреплен на основании. Привод D_2 управляет поворотом звена G_2 относительно звена G_1. Статор электродвигателя этого привода закреплен на звене G_1, а ось вращения ротора совпадает с осью шарнира O_2. Инерционностью подвижных частей редуктора пренебрегаем. В схвате манипулятора закреплен груз (L – центр схвата).

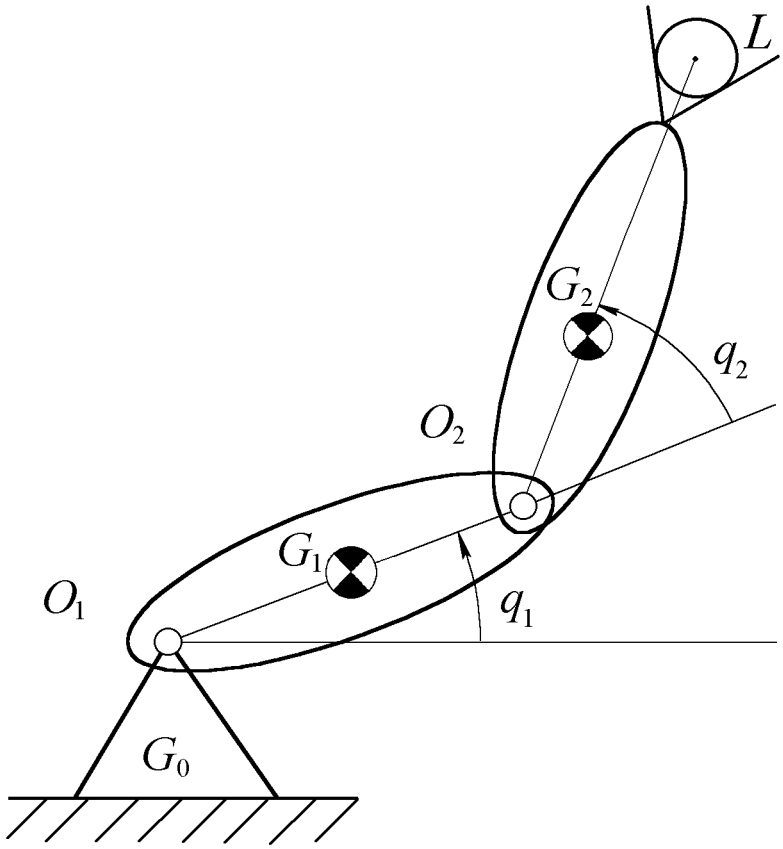

Рис. 3.4.1. Двузвенный манипулятор

Будем использовать следующие обозначения:

q_1–угол поворота звена G_1 относительно основания G_0;

q_2–угол между прямыми O_1O_2 и O_2L, характеризующий положение звена G_2 относительно звена G_1 (центр масс звена G_2 лежит на прямой O_2L);

l_1–длина отрезка O_1O_2; l_2–длина отрезка O_2L;

m_i – масса звена i; m_L – масса груза;

l_{gi}–расстояние от оси i-го шарнира до центра масс i-го звена;

I_i–момент инерции i-го звена относительно центра масс.

Уравнения Лагранжа (3.1.2), (3.1.3) рассматриваемого манипулятора имеют вид

$$(b_{11}\dot{s}_1 + b_{21}\ddot{s}_1 - u_1)/b_{31} + (c_1 + c_2 + 2c_3\cos q_2)\,\ddot{q}_1 + c_4\ddot{s}_2 +$$

$$+(c_2 + c_3\cos q_2)\ddot{q}_2 - c_3(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin q_2 +$$

$$+c_5\cos q_1 + c_6\cos(q_1 + q_2) = 0,$$

$$(b_{12}\dot{s}_2 + b_{22}\ddot{s}_2 - u_2)/b_{32} + (c_2 + c_4 + c_3\cos q_2)\,\ddot{q}_1 + c_2\,\ddot{q}_2 +$$

$$+c_3\sin q_2\;\dot{q}_1^2 + c_6\cos(q_1 + q_2) = 0,$$

$$(c_1 + c_2 + 2c_3\cos q_2)\,\ddot{q}_1 + c_4\ddot{s}_2 + (c_2 + c_3\cos q_2)\ddot{q}_2 -$$

$$-c_3(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)\sin q_2 + c_5\cos q_1 +$$

$$+c_6\cos(q_1 + q_2) = -K_1x_1 - D_1\dot{x}_1,$$

$$(c_2 + c_3\cos q_2)\,\ddot{q}_1 + c_2\,\ddot{q}_2 + c_3\,\dot{q}_1^2\sin q_2 +$$

$$+c_6\cos(q_1 + q_2) = -K_2x_2 - D_2\dot{x}_2.$$

Здесь моменты сил Q_i^s задаются соотношениями (3.1.5), и введены обозначения

$$b_{1i} = N_i\left(k_i^E + D_i^R\frac{R_i}{k_i^M}\right), \quad b_{2i} = N_iI_i^R\frac{R_i}{k_i^M}, \quad b_{3i} = \frac{1}{N_i}\frac{R_i}{k_i^M}.$$

$$c_1 = I_1 + m_1 l_{g1}^2 + (m_2 + m_L) l_1^2, \quad c_2 = I_2 + m_2 l_{g2}^2 + m_L l_2^2$$

$$c_3 = (m_2 l_{g2} + m_L l_2) l_1, \quad c_4 = I_2^R N_2,$$

$$c_5 = \{m_1 l_{g1} + (m_2 + m_L) l_1\} g, \quad c_6 = (m_2 l_{g2} + m_L l_2) g.$$

При расчетах использовались параметры экспериментальной модели робота манипулятора, исследованной в [53, 54]. В таблице 3.4.1 приведены начальные значения введенных ранее обобщенных координат и скоростей, а также заданы управляющие напряжения $u_i(t) = \text{const}$. В таблице 3.4.2 приведены параметры звеньев, шарниров, электроприводов и максимально допустимые значения $u_i^{\max}$ управляющих напряжений. Полагаем, что масса груза в схвате манипулятора $m_L = 0.1$ кг.

Таблица 3.4.1.

	$i = 1$	$i = 2$
$s_i(0)$, рад	0	0
$x_i(0)$, рад	0	0
$\dot{s}_i(0)$, рад/с	2.5	-3.0
$\dot{x}_i(0)$, рад/с	0	0
$u_i(t)$, В	24.0	-24.0

Таблица 3.4.2. Параметры манипулятора

	$i = 1$	$i = 2$
l_i, м	0.270	0.230
l_{gi}, м	0.1160	0.0485
m_i, кг	4.978	0.862
I_i, кг $\cdot$ м^2	0.126	0.075
K_i, Н $\cdot$ м/рад	2340	2390
D_i, Н $\cdot$ м $\cdot$ с/рад	0.6	0.6
N_i	100	100
$u_i^{\max}$, В	24.0	24.0
b_{1i}, В $\cdot$ с/рад	8.29	6.796
b_{2i}, В $\cdot$ с^2/рад	0.3486	0.408
b_{3i}, В/(Н $\cdot$ м)	0.073	0.1697

Перейдем к безразмерному времени, принимая за единицу измерения времени величину $T^* = b_{12}u_2^{-1} \approx 0.283$ с, равную времени поворота второго звена руки на угол в один радиан при движении с постоянной угловой скоростью $\dot{q}_2 = b_{12}^{-1}u_2 \approx 3.5$ рад/с. Уравнения движения с управляющими напряжениями и параметрами, приведенными в таблицах 3.4.1, 3.4.2, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
59.15\ddot{s}_1 - 326.53 + 398.31\dot{s}_1 + 0.30\ddot{s}_2 + 3.50\ddot{q}_1 \\
+0.43\ddot{q}_1\cos q_2 - 0.43\dot{q}_2\sin q_2\dot{q}_1 - 0.21\sin q_2\dot{q}_2^2 + 1.02\ddot{q}_2 \\
+0.21\ddot{q}_2\cos q_2 + 3.32\cos q_1 + 0.63\cos(q_1+q_2) = 0, \\
\\
29.98\ddot{s}_2 + 1.32\ddot{q}_1 + 141.42 + 141.42\dot{s}_2 + 0.21\ddot{q}_1\cos q_2 + \\
+1.02\ddot{q}_2 + 0.21\sin q_2\dot{q}_1^2 + 0.63\cos(q_1+q_2) = 0, \\
\\
0.30\ddot{s}_2 + 2.11\ddot{q}_1 + 0.43\ddot{q}_1\cos q_2 - 0.43\dot{q}_2\sin q_2\dot{q}_1 - \\
-0.21\sin q_2\dot{q}_2^2 + 1.02\ddot{q}_2 + 0.21\ddot{q}_2\cos q_2 + 2340.0(q_1 - s_1) + \\
+2.11(\dot{q}_1 - \dot{s}_1) + 3.32\cos q_1 + 0.63\cos(q_1+q_2) = 0, \\
\\
1.02\ddot{q}_1 + 0.21\ddot{q}_1\cos q_2 + 1.02\ddot{q}_2 + 0.21\sin q_2\dot{q}_1^2 + \\
+2390.0(q_2 - s_2) + 2.11(\dot{q}_2 - \dot{s}_2) + 0.63\cos(q_1+q_2) = 0.
\end{gathered}
\tag{3.4.1}
$$

Малый параметр ε, вводимый согласно (3.2.1), (3.2.3), составляет в рассматриваемом случае величину порядка 0.1. Уравнения движения (3.4.1) были проинтегрированы двумя способами: с использованием асимптотического метода, описанного в данной главе, и без его

использования. Точность интегрирования определялась в обоих случаях точностью используемого асимптотического метода, которая связана с величиной малого параметра ε. Для интегрирования применялась стандартная компьютерная процедура Рунге-Кутта-Фельберга (RKF45) (см. [45]) с автоматическим выбором шага и контролем точности. При интегрировании исходных уравнений движения (3.4.1) и соответствующих уравнений системы (3.3.2), описывающих "медленные" движения, допустимая погрешность была $\sim \varepsilon^3$. Расчеты показали, что время интегрирования уравнений при определении "медленных" движений значительно (примерно в два раза) меньше времени интегрирования полной системы. На рисунках (3.4.1)-(3.4.9) представлены:

1) функции $Q_i^s(\dot{s}_i^0(t))$, $s_i^0(t)$, $\dot{s}_i^0(t)$ и ненормированные функции $y_i^0(t)$, $z_i(t)$, $\dot{z}_i(t)$, полученные в результате применения асимптотического метода;

2) функции $Q_i^s(\dot{s}_i(t))$, $s_i(t)$, $\dot{s}_i(t)$, $x_i(t)$, $\dot{x}_i(t)$, полученные при интегрировании исходных уравнений (3.4.1);

3) функции $s_i(t) - s_i^0(t)$, $\dot{s}_i(t) - \dot{s}_i^0(t)$, $x_i(t) - y_i^0(t) - z_i(t)$, $\dot{x}_i(t) - \dot{z}_i(t)$, подтверждающие то, что погрешность используемого метода лежит в допустимых пределах.

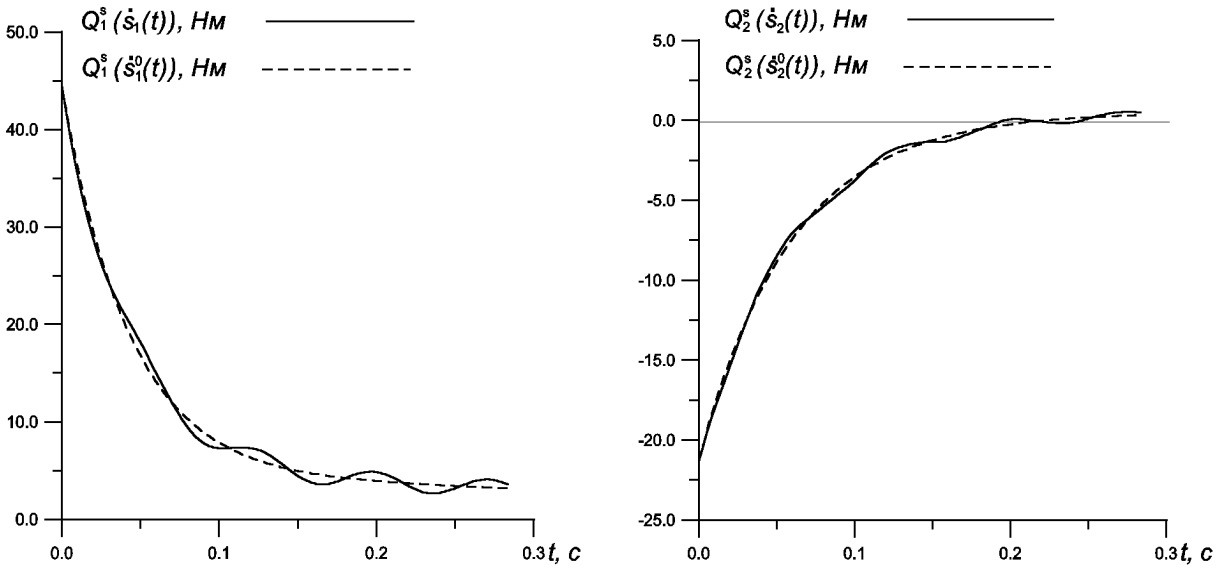

Рис. 3.4.1

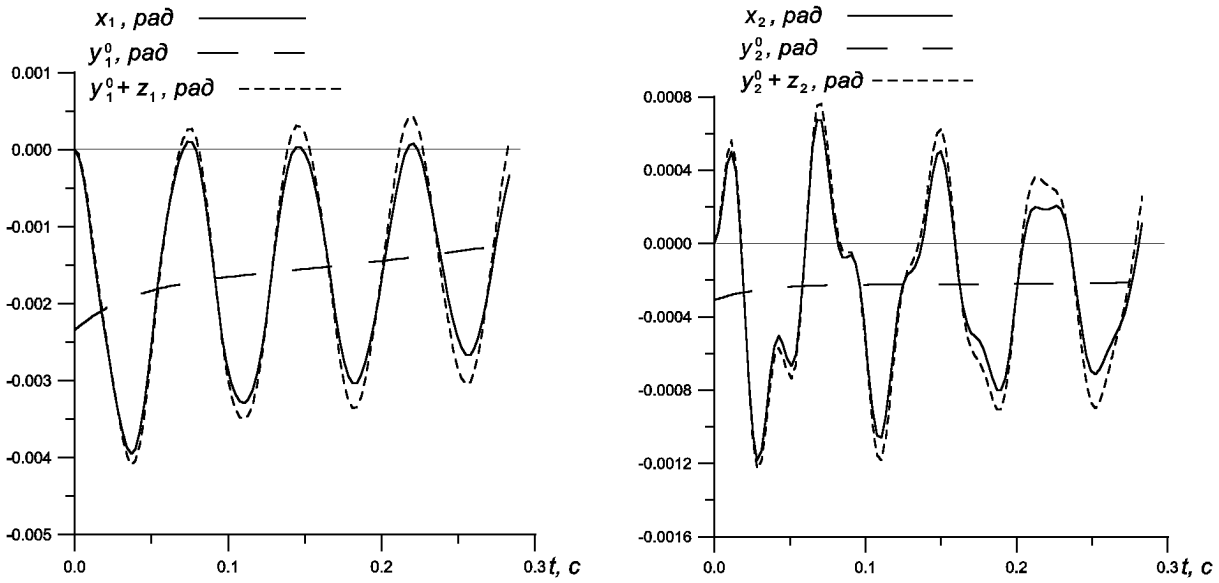

Рис. 3.4.2

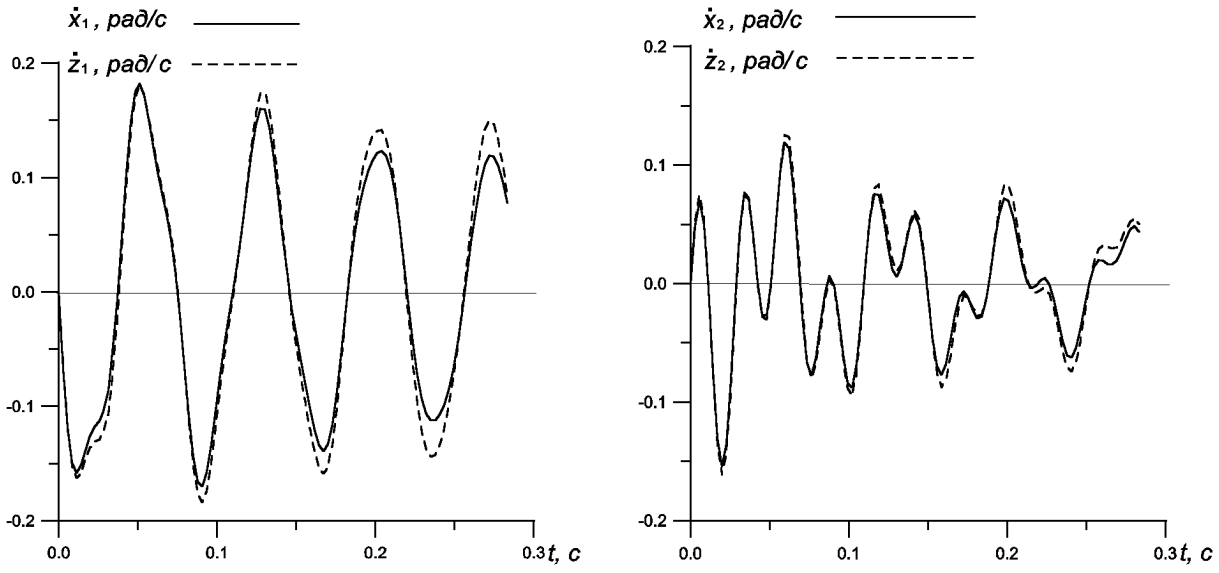

Рис. 3.4.3

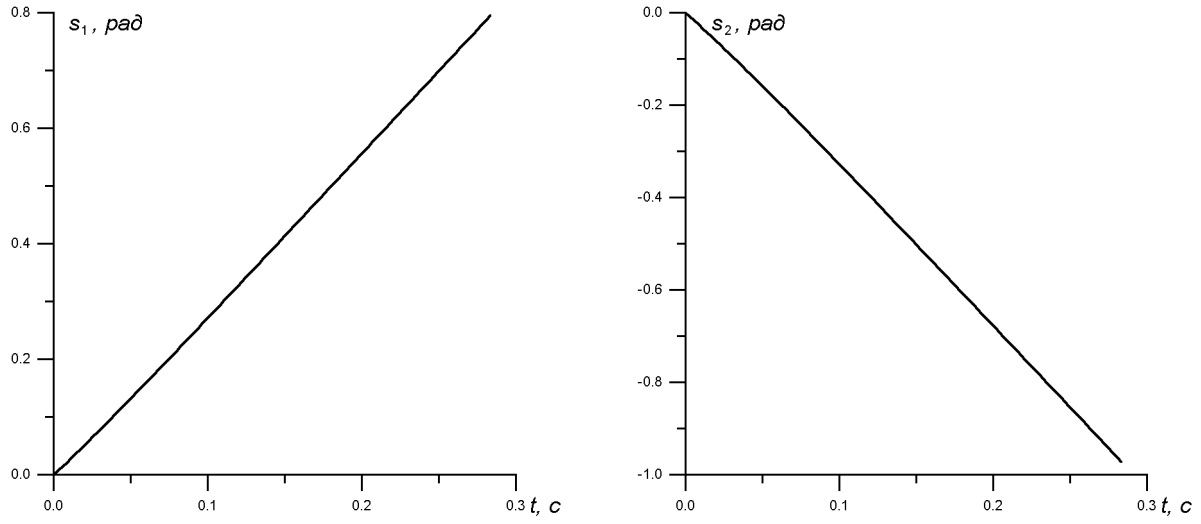

Рис. 3.4.4

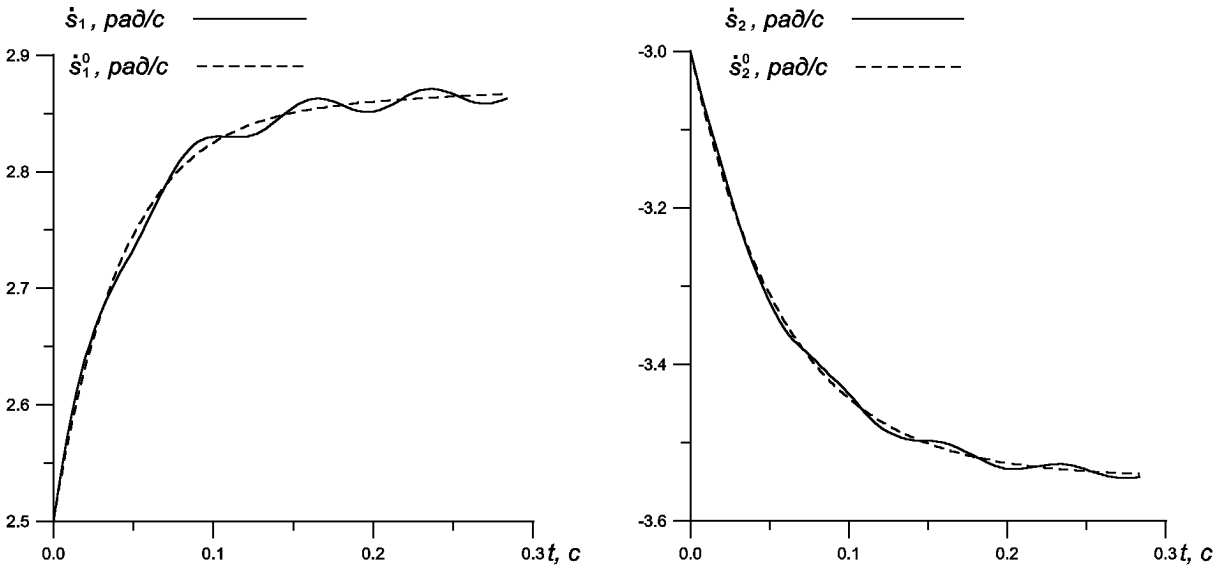

Рис. 3.4.5

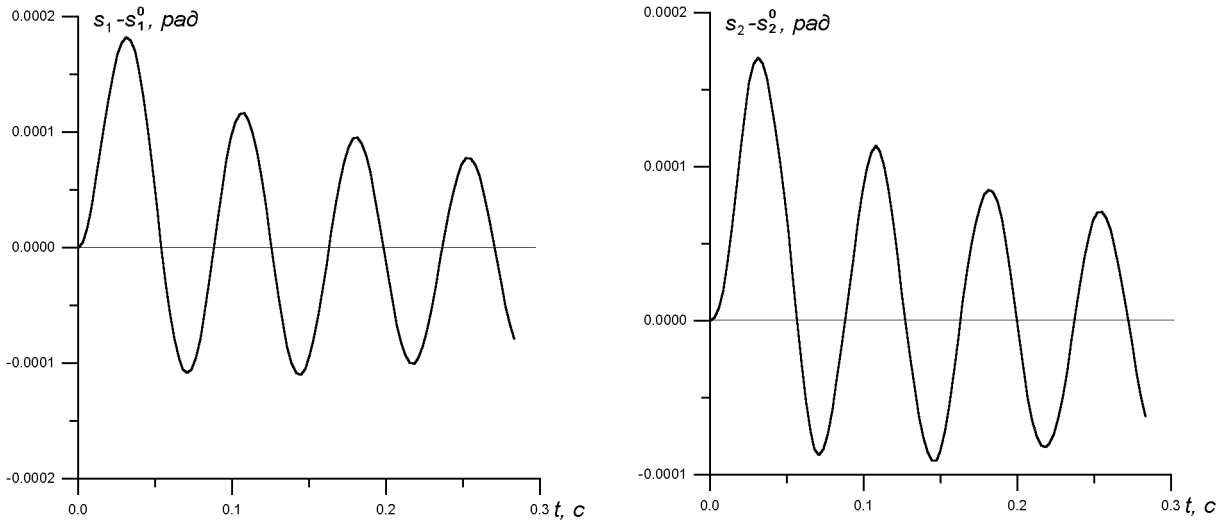

Рис. 3.4.6

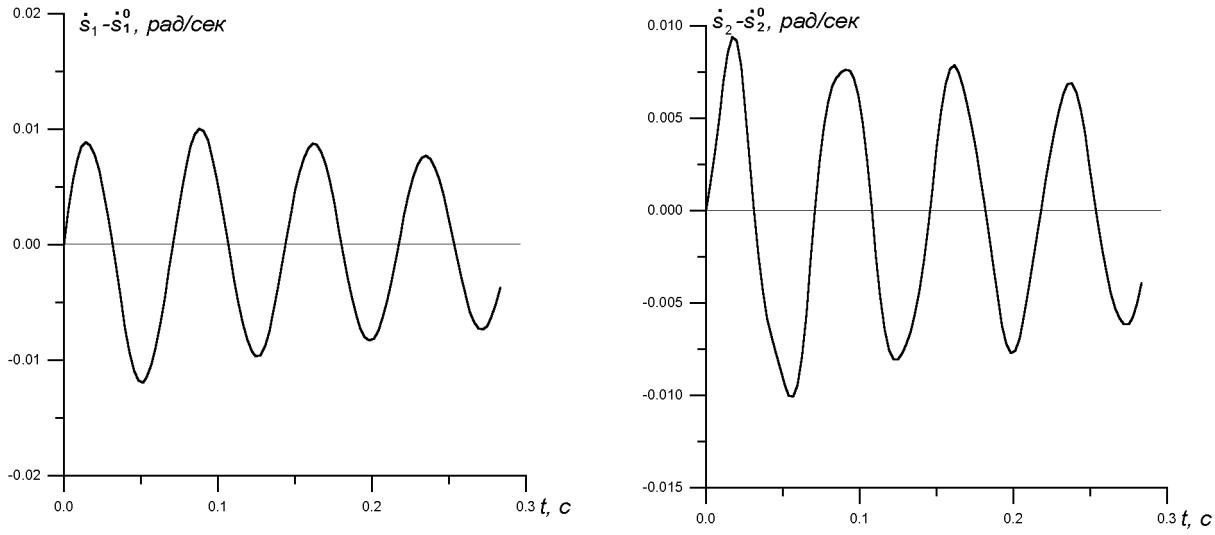

Рис. 3.4.7

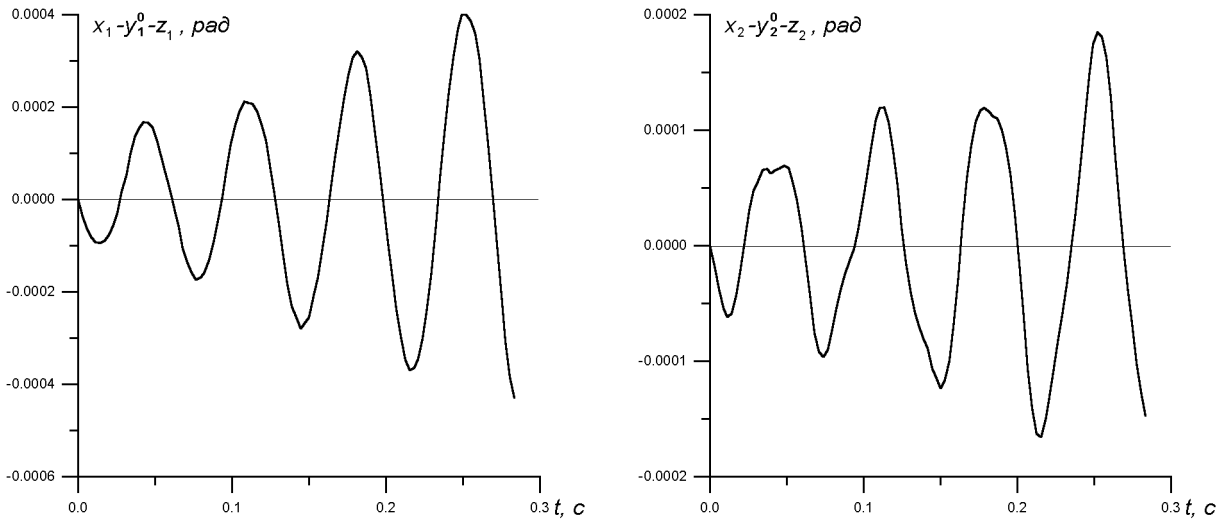

Рис. 3.4.8

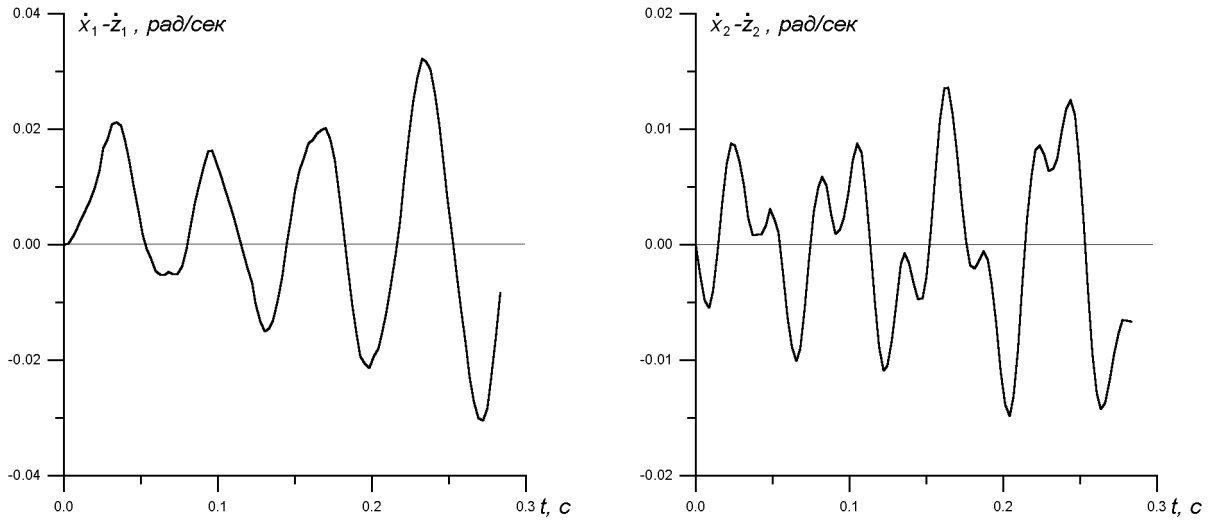
$\dot{x}_1$-$\dot{z}_1$, рад/сек
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
0.0
0.1
0.2
0.3
t, c
$\dot{x}_2$-$\dot{z}_2$, рад/сек
0.02
0.01
0.00
-0.01
-0.02
0.0
0.1
0.2
0.3
t, c

Рис. 3.4.9

Заключение.

В диссертации получены следующие основные результаты:

В первой главе дано развитие метода декомпозиции [32] для построения управления нелинейными динамическими системами. При предположении, что матрица кинетической энергии системы не сильно отличается от постоянной диагональной матрицы, построено эффективное управление, которое переводит систему в заданное терминальное состояние.

Предлагаемый закон управления может быть применен к манипуляционным роботам со многими степенями свободы.

- Управление применимо, если
  (1) число управлений равно числу степеней свободы;
  (2) конечные скорости равны нулю;
  (3) передаточные числа редукторов достаточно велики.
- Учитываются ограничения, наложенные на управление и фазовые координаты.
- Время движения конечно и оценивается заранее.
- Управление робастно и справляется с неизвестными возмущениями и вариациями параметров.

Во второй главе указаны условия, при которых метод декомпозиции, предложенный в [32], применим для построения субоптимального управления двузвенным манипулятором с безредукторными приводами. Для рассмотренной системы удается полностью устранить динамическое взаимовлияние между звеньями, что важно при конструировании систем управления.

В третьей главе асимптотический подход [30, 31] адаптирован для решения динамической задачи управления роботами со многими степенями свободы, шарниры которых обладают крутильной упругостью.

- Предложенный метод применим, если
  (1) жесткость упругих элементов в шарнирах велика;
  (2) диссипация в этих элементах невелика;
  (3) передаточные числа редукторов достаточно велики.

- Полуаналитический метод позволяет уменьшить время численного интегрирования уравнений движения роботов.

- Относительные углы поворотов звеньев и упругие смещения определяются с одинаковой точностью.

Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие использование предложенных в диссертации методов и подтверждающие их эффективность.

Литература

[1] *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974.

[2] *Аветисян В. В., Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов // Препринт ИПМ АН СССР, 1986, N283.

[3] *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.

[4] *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А.* Анализ уравнений динамики упругого манипулятора с электромеханическими приводами // Изв. АН СССР МТТ. 1988. N 1.

[5] *Ананьева Е. Г., Клебанова О. Н., Нахапетян Е. Г.* Динамические испытания промышленного робота второго поколения// Экспериментальное исследование и диагностирование роботов. М.: Наука, 1981.

[6] *Ананьевский И. М., Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л.* Метод декомпозиции в задаче управления динамической системой //Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. N 2.

[7] *Бербюк В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наук. думка, 1989.

[8] *Бербюк В. Е., Демидюк М. В., Ивах Г. Ф.* Задача оптимизации конструкций и законов управления движением электромеханических манипуляторов // Изв. АН СССР Техн. кибернетика. 1987. N 3.

[9] *Бурков И. В., Заремба А. Т.* Динамика упругого манипулятора с электроприводом// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 1.

[10] *Бурков И. В., Фрейдович Л. Б.* Стабилизация положения Лагранжевой системы с упругими элементами при ограничениях на управление с измерением и без измерения скорости// ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3.

[11] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

[12] *Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л.* О влиянии упругой податливости конструкций роботов на их динамику // Изв. АН СССР МТТ. 1985. N 3.

[13] *Добрынина И. С.* Моделирование динамики манипуляционных роботов с применением метода декомпозиции управления//Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1995. N 4.

[14] *Добрынина И. С., Карпов И. И., Черноусько Ф. Л.* Компьютерное моделирование управления движением системы связанных твердых тел // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. N 1.

[15] *Добрынина И. С., Черноусько Ф. Л.* Ограниченное управление линейной системой четвертого порядка. Изв.РАН. Техническая кибернетика. 1992. N 6.

[16] *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой, Москва, Наука, 1967.

[17] *Зак В. Л., Пирумов Г. У., Рогов Н. Н.* Моделирование динамики манипуляторов с упругими шарнирами // Изв. АН СССР МТТ. 1987. N 3.

[18] *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

[19] *Матюхин В. И.* Непрерывные универсальные законы управления манипуляционным роботом // АиТ. 1997. No 4.

[20] *Матюхин В. И., Пятницкий Е. С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // АиТ. 1989. No 9.

[21] *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964.

[22] *Москаленко В. В.* Автоматизированный электропривод. М.: Энергоатомиздат, 1986.

[23] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

[24] *Пятницкий Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. *N* 3. С. 92–99.

[25] *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. *N*2. С. 300–303.

[26] *Пятницкий Е. С.* Критерий полной управляемости классов механических систем с ограниченными управлениями// ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5.

[27] *Решмин С. А.* Синтез управления двузвенным манипулятором // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. N2. С. 146-150.

[28] *Решмин С. А., Черноусько Ф. Л.* Синтез управления в нелинейной динамической системе на основе декомпозиции // Прикладная математика и механика (ПММ). 1998. т. 62. N1. С. 121-128.

[29] *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1966.

[30] *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. N5.

[31] *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N4.

[32] *Черноусько Ф. Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.

[33] *Черноусько Ф. Л.* Синтез управления нелинейной динамической системой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.

[34] *Черноусько Ф. Л.* Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 457–472.

[35] *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 368 с.

[36] *Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С.* Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979.

[37] *Brogliato B., Ortega R., Lozano R.* Global Tracking Controllers for Flexible-joint Manipulators: a Comparative Study // Automatica, Vol. 31, N 7, 1995. P. 941–956.

[38] *Chernousko F. L.* The decomposition of controlled dynamic systems // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. /Ed. Kurzhanski A. B. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. P. 1–40.

[39] *Chen K. P., Fu L. C.* Nonlinear Adaptive Motion Control for a Manipulator with Flexible Joints // IEEE Int. Conf., 1989.

[40] *Corless M., Leitmann G.* Adaptive control of systems containing uncertain functions and unknown functions with uncertain bounds // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 42, No. 1. 1983. P. 155-168.

[41] *Corless M., Leitmann G.* Adaptive controllers for a class of uncertain systems // Annales Foundation de Broglie, 9, 1984. P. 65-95.

[42] *Chernousko F. L., Reshmin S. A.* Decomposition and Syn-thesis of Control in a Nonlinear Dynamic System // Proc. International Conference on Informatics and Control, June 1-3, 1998.

[43] *Chernousko F. L., Reshmin S. A.* Decomposition of Control for Nonlinear Lagrangian Systems // Preprints, 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'98), July 1-3, 1998.

[44] *Chernousko F. L., Reshmin S. A.* Decomposition of Control for Robotic Manipulators // Proc. 4th ECPD International Conference on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems, August 24-26, 1998.

[45] *Forsythe G. E., Malcolm M. A., and Moler C. B.* Computer Methods for Mathematical Computations.

[46] *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. Springer Verlag, New-York, third edition. 1995.

[47] *Khorasani K., Spong M. W.* Invariant Manifolds and their Application to Robot Manipulators with Flexible Joints // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1985.

[48] *Leightmann G.* Deterministic control of uncertain systems // Acta Astronautica 7, 1980. P. 1457-1461.

[49] *Matyukhin V. I.* Force / Motion Control of Manipulators with Incomplite Information // Proc. 4th ECPD International Conference on Advanced Robotics, Intelligent Automation and Active Systems, August 24-26, 1998.

[50] *Nicosia S., Tomei P.* A Method to Design Adaptive Controllers for Flexible Joints Robots // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1992.

[51] *Nijmejer H., van der Schaft A. J.* Nonlinear Dynamic Control Systems. Springer Verlag, New-York, 1990.

[52] *Reshmin S. A.* Control of Robots with Flexible Joints, Proc. 2nd International Conference "Control of Oscillations and Chaos" (COC'2000), July 5-7, 2000.

[53] *Sato O., Shimojima H., Kitamura Y.* Minimum-time control of a manipulator with two degrees of freedom // Bull. JSME. 1983. V.26. N218.

[54] *Sato O., Shimojima H., Kitamura Y., Yoinara H.* Minimum-time control of a manipulator with two degrees of freedom (Part 2, Dynamic characteristics of gear train and axes) // Bull. JSME. 1985. V.28. N239.

[55] *Utkin V. I.* Variable structure systems with sliding modes // IEEE, Trans. Automatic Control. 1977. Vol. 22. P. 212-222.