1 АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ И РЯДЫ

1.1 Асимптотические ряды

Как отмечает Дингл [1], теория асимптотических рядов, дремавшая в течении десятилетий, последние годы добилась больших успехов. Это обусловлено пониманием того факта, что успешное применение асимптотических рядов неразрывно связано с использованием определенного метода их суммирования. Ничего удивительного в этом нет: выписывая любой ряд, нужно отдавать себе отчет, как его суммировать. Очень редко наивная процедура сложения последовательных членов приводит к успеху. При вычислении даже сходящихся рядов часто приходится прибегать к различным ухищрениям, что уж говорить о расходящихся [2]! Чтобы прояснить ситуацию, выпишем достаточно общий вид асимптотического ряда, характерного для задач физики и механики [3,4]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n (n+a)!, \tag{1.1}$$

где a обычно целое число.

Величина ε_0 часто называется сингулантом, M_n − модифицирующим фактором. Последовательность M_n стремится к постоянной при $n \to \infty$ и дает информацию о медленно меняющейся части функции; постоянная ε_0 связана с первой особой точкой исходного интеграла или дифференциального уравнения, приводящих к ряду (1.1).

Приведем классическое определение: степенной ряд является асимптотическим рядом функции $f(\varepsilon)$, если для фиксированного N и достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left| f(\varepsilon) - \sum_{j=0}^{N} a_j \varepsilon^j \right| \sim \mathrm{O}\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

где символ $\mathrm{O}\left(\varepsilon^{N+1}\right)$ означает «порядка ε^{N+1}» (см. § 1.2).

Иными словами, речь идет о пределе $\varepsilon \to 0$, $N = N_0$.

Ряд (1.1) расходится при $\varepsilon \neq 0$, однако его первые члены при $\varepsilon << \varepsilon_0$ убывают экспоненциально быстро. В этом проявляется главная черта асимптотических рядов, обусловленная игрой убывающих по степенному закону членов и факториально возрастающих коэффициентов. Оптимальная точность достигается, если ограничиться в разложении наименьшим членом, при этом погрешность имеет обычно порядок $\exp(-\alpha/\varepsilon)$, где $\alpha > 0$ − постоянная, ε − «малый параметр» асимптотического разложения. Таким образом, обрывая асимптотический ряд на наименьшем члене, мы привносим экспоненциально малую по отношению к исходной задаче погрешность. В то же время учет таких экспоненциально малых членов часто важен с вычислительной точки зрения, поскольку повышает реальную точность асимптотического решения [5-8].

Рассмотрим для иллюстрации сказанного функцию Стильтьеса [4]:

$$S(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{1+\varepsilon t} dt . \tag{1.2}$$

Используя равенство

$$\frac{1}{1+\varepsilon t} = \sum_{j=0}^{N} (-\varepsilon t)^j + \frac{(-\varepsilon t)^{N+1}}{1+\varepsilon t}, \tag{1.3}$$

после подстановки выражения (1.3) в интеграл (1.2) имеем

$$S(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} (-\varepsilon^j) \int_0^\infty t^j \exp(-t) dt + E_N(\varepsilon), \tag{1.4}$$

где

$$E_N(\varepsilon) = \int_0^\infty \frac{\exp(-t)(-\varepsilon t)^{N+1}}{1+\varepsilon t} dt . \tag{1.5}$$

Вычисляя интегралы в (1.4) интегрированием по частям, находим

$$S(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j j! \varepsilon^j + E_N(\varepsilon) .$$

Если устремить N к бесконечности, то получим расходящийся ряд. Это и понятно: подынтегральная функция имеет в точке $t = -1/\varepsilon$ простой полюс, поэтому разложение (1.3) справедливо только при $|t| < 1/\varepsilon$. Использование же полученных результатов во всем диапазоне $0 \le t < \infty$ незаконно.

Оценим порядок расходящейся части, представив функцию $S(\varepsilon)$ в виде

$$S(\varepsilon) = S_1(\varepsilon) + S_2(\varepsilon) = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{\exp(-t)}{1+\varepsilon t} dt + \int_{1/\varepsilon}^\infty \frac{\exp(-t)}{1+\varepsilon t} dt .$$

Поскольку $1/(1+\varepsilon t) \le 1/2$ при $t > 1/\varepsilon$, получаем оценку $S_2(\varepsilon) < 0.5 \exp(-1/\varepsilon)$.

Таким образом, имеет место экспоненциальное убывание погрешности с уменьшением ε − типичная для асимптотических рядов ситуация.

Оценим оптимальное количество членов ряда. Для этого найдем, когда член $t^{N+1} \exp(-t)$ в формуле (1.4) будет минимальным. Нетрудно получить оценку $t = 1/(N+1)$. При $t \geq 1/\varepsilon$ имеем расходимость, поэтому оценка такова: $N = \left[1/\varepsilon\right]$, где $[\ldots]$ означает целую часть числа.

Оптимально оборванный асимптотический ряд называется суперасимптотикой (superasymptotics [7]). Гиперасимптотика (hyperasymptotics [8]) подразумевает преодоление барьера точности, возникающего при использовании асимптотического ряда. Действительно, после оптимального обрывания исходного асимптотического ряда для повышения точности решения нужны какие-то другие идеи. Как правило, речь идет о каком-либо методе суммирования расходящегося ряда [6].

Можно, например, перестроить отрезок ряда

$$S(\varepsilon) \approx \sum_{j=0}^{2N} (-1)^j \, j! \varepsilon^j \tag{1.6}$$

в аппроксиманту Паде, т.е. дробно-рациональную функцию вида

$$S(\varepsilon) \approx \frac{1 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varepsilon^j}{1 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i \varepsilon^i}, \tag{1.7}$$

где постоянные α_j, β_i подбираются из того условия, чтобы первые 2N+1 членов разложения функции (1.7) в ряд Маклорена совпадали с коэффициентами ряда (1.6). Показано [9], что последовательность аппроксимаций Паде (1.7) сходится, причем погрешность определения S(ε) уменьшается пропорционально $\exp\left(-4\sqrt{N/\varepsilon}\right)$.

Определение асимптотического ряда указывает путь к численной проверке асимптотичности разложений [10]. Пусть, например, есть основание предполагать, что решение $U_a(\varepsilon)$ является асимптотикой точного решения $U_T(\varepsilon)$, так что

$$E = U_T(\varepsilon) - U_a(\varepsilon) = K\varepsilon^{\alpha} .$$

В качестве U_T может выступить численное решение. Для определения α строятся графики зависимости ln$E$ от lnε для различных значений ε. Соответствующие зависимости должны быть близкими к линейным, а постоянную α можно определить, используя метод наименьших квадратов. Выбор ε достаточно тонок: при больших ε трудно заметить асимптотический характер решения, при малых – проблематично получить численное решение; однако, как правило, эту трудность удается преодолеть. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I(\varepsilon) = \varepsilon e^{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

для больших значений ε. Бесконечный ряд

$$I(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{\varepsilon^n}$$

расходится для всех значений ε, однако частные суммы

$$I_M(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{M} \frac{(-1)^n n!}{\varepsilon^n} \tag{1.8}$$

асимптотически точны по порядку $O\left(\varepsilon^{-M}\right)$ с погрешностью $O\left(\varepsilon^{-M-1}\right)$ при $x \to \infty$. На рис. 1.1 изображена зависимость $\lg E_M(\varepsilon)$ от $\lg \varepsilon$, где $E_M(\varepsilon) = I_{числ}(\varepsilon) - I_M(\varepsilon)$, кривым сверху вниз отвечают значения от M = 1 до M = 5.

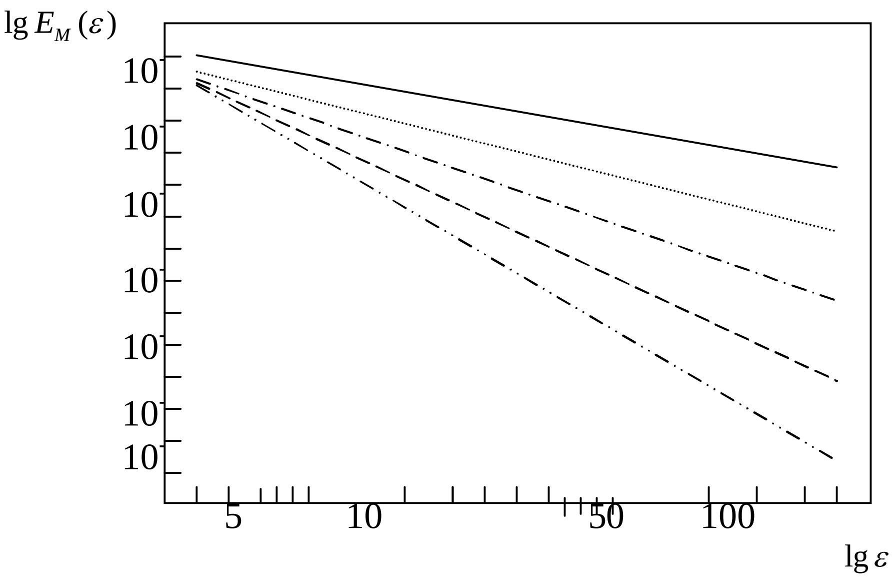

Рис. 1.1. Проверка асимптотического характера частных сумм (1.8).

Видно, что углы наклона кривых разнятся, однако приведенные в табл. 1.1 результаты применения метода наименьших квадратов показывают вполне удовлетворительную точность метода.

Таблица 1.1. Угловой коэффициент $\lg E_M(\varepsilon)$ как функции $\lg \varepsilon$, определенный методом наименьших квадратов *x*.

$E_M(\varepsilon)$	$\varepsilon \in [5, 50]$	$\varepsilon \in [50, 200]$	$\varepsilon \in [200, 500]$	наклон
1	-1.861	-1.972	-1.991	-2.0
2	-2.823	-2.963	-2.988	-3.0
3	-3.789	-3.954	-3.985	-4.0

4	-4.758	-4.945	-4.981	-5.0
5	-5.729	-5.937	-5.999	-6.0

Упомянем также метод определения асимптотических разложений по известным значениям функции в нескольких точках [11,с.120]. Пусть имеется численное решение при некоторых значениях параметра ε: $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$, $f(\varepsilon_3)$. Если априорно известно, что оно имеет асимптотический характер и известен его вид (например, разложение происходит только по целым степеням ε), то можно записать систему уравнений

$$f(\varepsilon_i) = \sum_{i=0}^{3} \varepsilon_i^i a_i$$

и определить коэффициенты a_i.

Такой прием можно применять в следующем случае. Часто численное решение трудно получить при малых значених параметра ε, но достаточно просто при значениях ε порядка 1. Далее, пусть из априорных соображений нам известно, что асимптотика при $\varepsilon \to 0$ существует и имеет степенной характер, однако определить ее аналитически невозможно или нецелесообразно. Тогда можно применить описанную выше асимптотическую экстраполяцию численного решения.

1.2 Асимптотические символы и действия над асимптотическими представлениями

Введем основные символы и понятия асимптотического анализа, рассматривая функцию $f(x)$ при $x \to x_0$. В асимптотическом методе интерес представляет поведение функции $f(x)$ при $x = x_0$. Цель заключается в том, чтобы найти другую, более простую функцию $\varphi(x)$, которая описывает $f(x)$ при $x \to x_0$ с возрастающей точностью. Количественные сравнения опираются при этом на понятие порядка переменной величины. Введем основные порядковые соотношения и соответствующие символы.

Будем говорить, что $f(x)$ есть величина порядка $\varphi(x)$ при $x \to x_0$,

записывая $f(x) = \mathrm{O}(\varphi(x))$ при $x \to x_0$,

если существует такое число A, что в некоторой окрестности Δ точки x_0 $|f(x)| \le A|\varphi(x)|$.

Кроме того, будем говорить, что $f(x)$ есть величина порядка меньше $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая

$$f(x) = \mathrm{o}(\varphi(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

если для любого ε > 0 найдется такая окрестность Δ точки x_0, в которой $|f(x)| \le \varepsilon|\varphi(x)|$.

В первом случае отношение $|f(x)|/|\varphi(x)|$ в области Δ ограничено, во втором оно стремится к нулю при $x \to x_0$. Например, $\sin x = \mathrm{O}(1)$ при $x \to \infty$; $\ln x = o(x^{\alpha})$ для любого $\alpha > 0$ при $x \to \infty$.

Символы O(…) и o(…) часто называют символами Эдмунда Ландау (об истории вопроса см. [12,т.1,§7]). Иногда целесообразно применять дополнительные символы, описывающие порядковые соотношения [12,т.1,§ 2.3]. А именно, если $f(x) = \mathrm{O}(\varphi(x))$, но $f(x) \neq \mathrm{o}(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то применяется обозначение

$$f(x) = \tilde{\mathrm{O}}(\varphi(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

при этом символ $\tilde{\mathrm{O}}(\varphi(x))$ называется символом точного порядка (отметим, что иногда используется символ $Oe(\varphi(x))$.

Если $f(x) = \mathrm{O}(\varphi(x))$, $\varphi(x) = \mathrm{O}(f(x))$ при $x \to x_0$, то будем говорить, что $f(x)$ асимптотически равна $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая

$f(x) \asymp \varphi(x)$ при $x \to x_0$.

Отметим, что иногда используется символ $\approx$.

Нетрудно видеть, что из асимптотического равенства следует существование таких чисел $a > 0$ и $A > 0$, что в некоторой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $a|\varphi(x)| \le |f(x)| \le A|\varphi(x)|$.

Символы $\tilde{\mathrm{O}}$ и $\asymp$ могут быть выражены через от O, o и применяются лишь для краткости записи.

Полезно различать следующие этапы асимптотического приближения. Сначала строятся верхние (или нижние) оценки типа $f(x) = \mathrm{O}(\varphi(x))$. Обычно такая оценка оказывается завышенной, т.е. фактически $f(x) = \mathrm{o}(\varphi(x))$. В ходе ее улучшения находится точный порядок $f(x) = \tilde{\mathrm{O}}(\varphi_0(x))$. Затем достигается асимптотическое равенство $f(x) \sim a_0\varphi_0(x)$. Завершив такой цикл, можно исследовать тем же путем остаток, получить асимптотическое равенство $f(x) - a_0\varphi_0(x) \sim a_1\varphi_1(x)$ и идти дальше.

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0,1,\ldots$ при $x \to x_0$ называется асимптотической, если $\varphi_{n+1}(x) = \mathrm{o}(\varphi_n(x))$. Например, асимптотической является последовательность $\{x^n\}$ при $x \to 0$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ с постоянными коэффициентами называется асимптотическим, если $\{\varphi_n(x)\}$ – асимптотическая последовательность.

Будем говорить, что $f(x)$ имеет асимптотическое разложение по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, записывая

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x), \quad N = 0,1,2,\ \ldots, \tag{2.1}$$

если

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m} a_n \varphi_n(x)+\mathrm{o}(\varphi_m(x)), \quad m = 0,1,2, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Исследуем единственность асимптотических разложений. Пусть $f(x)$ при $x \to x_0$ разлагается в ряд по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Тогда коэффициенты разложения a_n определяются единственным образом по формуле

$$a_n = \lim_{x\to x_0}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right] \varphi_n^{-1}(x).$$

Нужно иметь в виду, что эта же функция $f(x)$ может разлагаться по другой асимптотической последовательности $\{\chi_n(x)\}$, например:

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ при } \quad x \to 0; \qquad \frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)x^{2n} \text{ при } \quad x \to 0.$$

С другой стороны, одно и то же асимптотическое разложение может соответствовать нескольким функциям, например:

$$\frac{1+\mathrm{e}^{-1/x}}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ при } \quad x \to 0.$$

Иными словами, асимптотический ряд представляет не одну, а целый класс асимптотически эквивалентных функций. Этим свойством часто удается успешно воспользоваться.

Асимптотические разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$ по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$, можно складывать и умножать на постоянные:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)\varphi_n(x).$$

Перемножать асимптотические ряды, вообще говоря, нельзя, так как произведения $\{\varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)\}$ (m, n = 0,1, …) не всегда можно упорядочить в асимптотическую последовательность. Однако, если это удается сделать, например, в случае $\varphi_n(x) = x^n$, то почленное перемножение возможно. Степенные асимптотические ряды допускают деление, если $b_0 \neq 0$.

Логарифмирование асимптотик не вызывает особых трудностей, а при потенцировании необходимо особо заботиться о правильной оценке остатка. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = (\sqrt{x}\ln x + 2x)\,\mathrm{e}^x$, для которой верно представление

$$f(x)=[2x+\mathrm{o}(x)]\mathrm{e}^{x} \text{ при } x\to\infty. \tag{2.3}$$

Пусть $g(x)=\ln[f(x)]$, тогда, в соответствии с равенством (2.3),

$$g(x)=x+\ln[2x+\mathrm{o}(x)]=x+\ln x+\ln 2+\mathrm{o}(1)\sim x+\mathrm{o}(x) \text{ при } x\to\infty.$$

Потенцируя разложение для $g(x)$, находим $f(x) \sim \mathrm{e}^{x}$ при $x\to\infty$. При этом в главном члене потерян множитель $2x$. Дело в том, что при потенцировании в разложении $g(x)$ не учтены члены $\ln x$ и $\ln 2$, влияющие на главный член асимптотики $f(x)$, и только величины $\mathrm{o}(1)$ не изменяют коэффициент, так как $\exp\{\mathrm{o}(1)\}\sim 1$.

Степенное асимптотическое разложение

$$f(x)\sim\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{-n} \text{ при } x\to\infty,$$

можно интегрировать почленно.

Дифференцировать асимптотические разложения в общем случае нельзя. Например, функция

$$f(x)=\mathrm{e}^{-1/x}\sin\left(\mathrm{e}^{-1/x}\right)$$

имеет вырожденное степенное разложение

$$f(x)\sim 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^{2}+\ldots ,$$

в то же время производная функции $f(x)$ не допускает степенного разложения, хотя и существует. Если непрерывная при $x\geq d>0$ производная $f'(x)$ имеет, как и функция $f(x)$, степенное асимптотическое разложение при $x\to\infty$, то оно получается путем почленного дифференцирования разложения функции $f(x)$.

Подчеркну, что подавляющее число ошибок, при применении асимптотических методов связано с некорректным изменением порядка предельных переходов и дифференцирований. Будьте бдительны!

Приведу пример. Пусть для решения задач теории тонкостенных конструкций используется метод Бубнова-Галеркина. Сколько членов разложения N надлежит оставлять в решении? Этот параметр должен быть связан с параметром α, характеризующим тонкостенность конструкции ($L/\sqrt{F}$ для балки, R/h для оболочки, и т.д.). При этом, конечно,

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}(\ldots)\neq\lim_{\alpha\to 0}\lim_{N\to\infty}(\ldots).$$

Неучет этого факта может приводить к недоразумениям.

Дополнительную информацию об асимптотических разложениях и действиях над ними можно получить практически из любой книги по асимптотичеким методам, см., например, [12-17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Dingle R.B. Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation. New York, London: Academic Press, 1973. 521 p.
2.Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951. 504 с.
3.Boyd J.P. Weakly Nonlocal Solitary Waves and Beyond-All-Orders Asymptotics. Generalized Solutions and Hyperasymptotic Perturbation Theory. Dordrecht: Kluwer, 1998. 590 p.
4.Boyd J.P. The Devil's invention: asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series //Acta Applicandae Mathematicae, 1999, vol. 56, p. 1-98.
5.Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
6.Рамис Ж.-П. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. М.-Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2002. 80 с.
7.Berry M. V. Asymptotics, superasymptotics, hyperasymptotics // Proc. NATO Advanced Research Workshop on Asymptotics beyond All Orders. Eds. Segur H. et al. New York: Plenum Press, 1991, p. 1-14.
8.Berry M. V., Howls C. J. Hyperasymptotics // Proc. Royal Soc. London A, 1990, vol. 430, p. 653-668.
9.Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. 222с.
10.Bosley D.L. A technique for the numerical verification of asymptotic expansions // SIAM Rev., 1996, vol. 38, No 1, p. 128-135.
11.Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
11.Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне; т. 1, 1974, 390 с.; т. 2, 1977, 464 с.; т. 3, 1981, 370 с.
12.Брёйн Н.Г. де. Асимптотические методы в анализе. М.: Наука, 1961. 248 с.
13.Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
14.Копсон Э.Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.
15.Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
16.Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
17.Hinch E.J. Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p.