

2 РЕГУЛЯРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

2.1 Методы возмущений и итераций

Далее нам потребуются некоторые факты из линейной алгебры и теории дифференциальных уравнений. Матрица A называется самосопряженной, если она равна своей сопряженной A^* . Сопряженная матрица получается из исходной транспонированием с последующим комплексным сопряжением. Самосопряженные матрицы играют среди всех матриц роль, аналогичную роли действительных чисел среди всех комплексных, так как всякую матрицу можно представить в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 – самосопряженные матрицы, i – мнимая единица.

Если A – самосопряженная матрица, то для любых векторов x, y порядка n справедливо равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay), \quad (1.1)$$

где символ (\dots, \dots) означает скалярное произведение.

Самосопряженные матрицы имеют только действительные собственные значения. Равенство (1.1) служит основой для определения самосопряженности оператора. Пусть, например, задано обыкновенное дифференциальное уравнение (для дифференциальных уравнений в частных производных определение аналогично)

$$L(y) - \lambda M(y) = 0, \quad (1.2)$$

и однородные краевые условия

$$Q_i(y)|_{x=a_i} = 0, \quad i=1,2; \quad (1.3)$$

где $L(y) = [a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0]y$; $M(y) = [b_m \frac{d^m}{dx^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + b_0]y$;

$$Q_i(y) = [c_{n-1}^{(1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + c_{n-2}^{(1)} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + c_1^{(1)} \frac{d}{dx} + c_0^{(1)}]y.$$

Введем так называемую пробную функцию $u(x)$, удовлетворяющую заданным краевым условиям (1.3). Краевая задача (1.2),(1.3) называется самосопряженной, если

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = 0; \quad \int_a^b [uM(v) - vM(u)]dx = 0 \quad (1.4)$$

для любых пробных функций $u(x), v(x)$.

Самосопряженность линейного дифференциального оператора легко проверить интегрированием по частям. Например, докажем самосопряженность краевой задачи, описывающей потерю устойчивости сжатого шарнирно опертого стержня (рис. 1.1):

$$EIw_{xxxx} + Tw_{xx} = 0; \quad (1.5)$$

при $x=0, L \quad w = w_{xx} = 0,$

где E – модуль Юнга; I – момент инерции поперечного сечения стержня; T – сжимающее усилие.



Рис. 1.1. Сжатый шарнирно опертый стержень.

Нетрудно показать, что для данного случая:

$$\int_0^l \left(u \frac{d^4 v}{dx^4} - v \frac{d^4 u}{dx^4} \right) dx = 0.$$

Аналогично можно показать самосопряженность оператора d^2/dx^2 .

Перейдем к построению асимптотических решений. В качестве простейшей задачи рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$(A_0 + \varepsilon A_1) \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1.6)$$

где A_0, A_1 – матрицы $n \times n$; \mathbf{x}, \mathbf{b} – n -мерные векторы; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2 + \dots \quad (1.7)$$

Подставляя асимптотическое разложение (1.7) в исходное уравнение (1.6) и приравнявая члены при одинаковых степенях ε , имеем

$$A_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}; \quad (1.8)$$

$$A_0 \mathbf{x}_1 = -A_1 \mathbf{x}_0; \quad (1.9)$$

$$A_0 \mathbf{x}_2 = -A_1 \mathbf{x}_1; \quad (1.10)$$

.....

Уравнение (1.8) называется невозмущенным (порождающим, предельным, уравнением нулевого приближения). Дальнейшее построение существенно зависит от того, разрешимо ли уравнение (1.8). Если существует обратная матрица A_0^{-1} , то уравнения (1.8),(1.9),(1.10), ... решаются без труда

$$\mathbf{x}_0 = A_0^{-1} \mathbf{b}; \quad \mathbf{x}_1 = -A_0^{-1} A_1 \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}_2 = -A_0^{-1} A_1 \mathbf{x}_1; \quad \dots$$

Если же $\det A_0 = 0$, то предельное уравнение (1.8) разрешимо не для всякого \mathbf{x} . Тогда собственное значение $\lambda = 0$ является точкой спектра оператора A_0 [1,2] (говорят, что вырожденная задача лежит на спектре), и построение асимптотики изменяется. Рассмотрим случай, когда

$\lambda = 0$ является простым корнем характеристического уравнения. Тогда однородное уравнение

$$A_0 \mathbf{x}_0 = 0$$

имеет лишь одно, с точностью до числового множителя, ненулевое решение \mathbf{x}_{10} . Сопряженное однородное уравнение

$$A_0^* \mathbf{z} = 0$$

также имеет только одно решение \mathbf{z}_1 .

Разложение по ε решения уравнения (1.6) ищем в виде

$$\mathbf{x} = \frac{C_0 \mathbf{x}_{10}}{\varepsilon} + (\mathbf{x}_0 + C_1 \mathbf{x}_{10}) + \varepsilon(\mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_{10}) + \varepsilon^2(\mathbf{x}_2 + C_3 \mathbf{x}_{10}) + \dots \quad (1.11)$$

Подставляя разложение (1.11) в уравнение (1.6), получаем в первом приближении

$$A_0 \mathbf{x}_0 + C_0 A_1 \mathbf{x}_{10} = \mathbf{b}. \quad (1.12)$$

Умножая скалярно уравнение (1.12) на вектор \mathbf{z}_1 , получаем постоянную C_0

$$C_0 = \frac{(\mathbf{b}, \mathbf{z}_1)}{(A_1 \mathbf{x}_{10}, \mathbf{z}_1)}.$$

Далее процесс рекуррентно продолжается.

При n -кратном собственном значении $\lambda = 0$ необходимо сначала построить присоединенные собственные векторы. Напомним, что векторы $\mathbf{x}_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$ образуют цепочку Жордана длины n , если

$$\begin{aligned} A_0 \mathbf{x}_{10} &= 0, \\ A_0 \mathbf{x}_{i0} &= \mathbf{x}_{(i-1)0}, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

а уравнение

$$A_0 \mathbf{x} = \mathbf{x}_{n0}$$

неразрешимо. Вектор \mathbf{x}_{i0} называется присоединенным собственным вектором i -го порядка. После построения присоединенных векторов решение уравнения (1.6) ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \left(\frac{C_0 \mathbf{x}_{10}}{\varepsilon^n} + \frac{C_1 \mathbf{x}_{20} + C_0 \mathbf{x}_{10}}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{C_0 \mathbf{x}_{n0} + C_1 \mathbf{x}_{n-1,0} + \dots + C_{n-1} \mathbf{x}_{10}}{\varepsilon} \right) + \\ & + (\mathbf{x}_0 + C_1 \mathbf{x}_{n0} + C_2 \mathbf{x}_{n-1,0} + \dots + C_n \mathbf{x}_{10}) + \dots + \\ & + \varepsilon^{n-1} (\mathbf{x}_{n-1} + C_{n-1} \mathbf{x}_{n0} + C_n \mathbf{x}_{n-1,0} + \dots + C_{2n-1} \mathbf{x}_{10}) + \dots \end{aligned}$$

Построив решение сопряженного уравнения и найдя сопряженные присоединенные векторы, можно использовать описанную выше процедуру. В итоге для определения n неизвестных C_0, C_1, \dots, C_{n-1} получается разрешимая система n линейных алгебраических уравнений; далее процес рекуррентно продолжается.

Теперь рассмотрим продольную деформацию стержня переменной жесткости EF (рис.1.2), описываемую уравнением

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{du}{dx} \right) = q \quad (1.13)$$

и краевыми условиями

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (1.14)$$

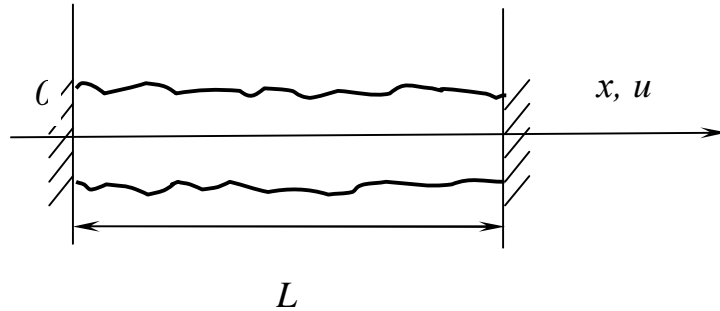


Рис. 1.2. Стержень переменной жесткости

Пусть $EF = E_0 F_0 + \varepsilon E_0 F_1(x)$, где $E_0, F_0 \equiv \text{const}$; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Представим решение краевой задачи (1.13), (1.14) в виде ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (1.15)$$

Подставляя ряд (1.15) в уравнение (1.13) и собирая члены при одинаковых степенях ε , получаем следующую рекуррентную систему уравнений и краевых условий:

$$E_0 F_0 \frac{d^2 u_0}{dx^2} = q; \quad (1.16)$$

$$F_0 \frac{d^2 u_1}{dx^2} = -\frac{d}{dx} \left(F_1 \frac{du_0}{dx} \right); \quad (1.17)$$

.....

При $x = 0, L$ имеем следующие краевые условия

$$u_0 = 0; \quad (1.18)$$

$$u_1 = 0; \quad \dots \quad (1.19)$$

Решения краевых задач (1.16), (1.18) и (1.17), (1.19) таковы

$$u_0 = \frac{qx}{2E_0 F_0} (x - L);$$

$$u_1 = -\frac{q}{2E_0 F_0^2} \left[\int_0^x F_1(2x - L) dx - \frac{x}{L} \int_0^L F_1(2x - L) dx \right]; \dots$$

Обобщение на дифференциальные уравнения в частных производных не представляет труда. Отметим лишь, что и этом случае существенно, лежит ли задача на спектре [1,2]. Рассмотрим для примера краевую задачу

$$Mu + \varepsilon Nu = f(x), \quad u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L, \quad (1.20)$$

где M, N – некоторые дифференциальные операторы второго порядка, при этом точке $\lambda=0$ отвечает только одна (с точностью до числового множителя) собственная функция u_{10} однородной краевой задачи

$$Mu = 0, \quad u = 0 \text{ при } x = 0, L.$$

Пусть теперь v_0 – собственная функция сопряженной однородной задачи

$$M^* v = 0, \quad v = 0 \text{ при } x = 0, L.$$

Решение краевой задачи (1.20) будем искать в виде

$$u = \frac{C_0 u_{10}}{\varepsilon} + (u_0 + C_1 u_{10}) + \varepsilon(u_1 + C_2 u_{10}) + \varepsilon^2(u_2 + C_3 u_{10}) + \dots$$

В первом приближении получаем

$$Mu_0 + C_0 Nu_{10} = f(x), \quad u_0 = 0 \text{ при } x = 0, L.$$

Умножая это уравнение на функцию v_0 , интегрируя в пределах от 0 до L и учитывая граничные условия, получаем постоянную C_0

$$C_0 = \frac{\int_0^L f(x)v_0 dx}{\int_0^L Nu_{10}v_0 dx}.$$

Далее процесс продолжается рекуррентно.

Обсудим связь между асимптотическими методами и методом последовательных приближений. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки, поэтому иногда их выгодно использовать совместно. В частности, при использовании итераций не нужно угадывать вид асимптотической последовательности, однако имеется проблема выбора начального приближения. Асимптотические методы дают лучшее представление о структуре искомой функции и, следовательно, лучше приспособлены для использования методов суммирования и интерполяции. Итерационные процедуры легко алгоритмизуемы и реализуемы численно.

2.2 Задачи на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения для системы линейных алгебраических уравнений, содержащей малый параметр ε :

$$(A_0 + \varepsilon A_1 - \lambda E)x = 0, \tag{2.1}$$

где E – единичная матрица.

Будем считать, что матрица A_0 – самосопряженная, самосопряженность матрицы $(A_0 + \varepsilon A_1)$ не обязательна. При решении задач на собственные значения наряду с разложением искомого собственного вектора x в ряд по ε раскладывается и собственное число λ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + \dots; \quad (2.2)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots \quad (2.3)$$

Пусть собственная задача не лежит на спектре. Тогда, подставив разложение (2.2),(2.3) в исходную систему (2.1), имеем после расщепления по ε

$$(A_0 - \lambda_0 E) \mathbf{x}_0 = 0, \quad (2.4)$$

$$(A_0 - \lambda_0 E) \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_0 - A_1 \mathbf{x}_0, \quad (2.5)$$

$$A_0 \mathbf{x}_2 - \lambda_0 \mathbf{x}_2 = -A_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_0, \quad (2.5a)$$

$$A_0 \mathbf{x}_3 - \lambda_0 \mathbf{x}_3 = -A_1 \mathbf{x}_2 + \lambda_1 \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{x}_1 + \lambda_3 \mathbf{x}_0, \quad (2.5b)$$

.

Невозмущенная задача имеет n собственных чисел λ_{0i} и столько же собственных векторов \mathbf{x}_{0i} . Пусть сначала все собственные числа различны. Попробуем найти поправку к собственному числу λ_{0i} . Поскольку $\det(A_0 - \lambda_0 E) = 0$, для того, чтобы неоднородное уравнение (2.5) имело решение, нужно, чтобы его правая часть была ортогональна собственным векторам левой части. Умножив все члены уравнения (2.5) скалярно на вектор \mathbf{x}_0 , получим

$$(\mathbf{x}_0, (A_0 - \lambda_0 E) \mathbf{x}_1) = \lambda_1 |\mathbf{x}_0|^2 - (A_1 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0). \quad (2.6)$$

В силу самосопряженности матрицы $(A_0 - \lambda_0 E)$ имеем

$$(\mathbf{x}_0, (A_0 - \lambda_0 E) \mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_1, (A_0 - \lambda_0 E) \mathbf{x}_0) = 0. \quad (2.7)$$

Тогда поправка к собственному значению λ_0 выражается следующим образом: $\lambda_1 = (A_1 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) / |\mathbf{x}_0|^2$. Вместо λ_0, \mathbf{x}_0 можно последовательно подставить $\lambda_{0i}, \mathbf{x}_{0i}$ и получить поправки ко всем собственным значениям.

Рассмотрим теперь краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$M_0(y) + \varepsilon M_1(y) = \lambda [N_0(y) + \varepsilon N_1(y)] \quad (2.8)$$

с граничными условиями (1.3).

Здесь M_0, M_1, N_0, N_1 – дифференциальные операторы, причем порядок операторов M_1, N_1 не выше порядка операторов M_0, N_0 . Кроме того, предполагаем, что невозмущенная краевая задача

$$M_0(y) = \lambda N_0(y) \quad (2.9)$$

с граничными условиями (1.3) самосопряжена (для возмущенной задачи самосопряженность не требуется). Собственное значение λ и соответствующую собственную функцию y представим в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots, \quad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \dots \quad (2.10)$$

Пусть сначала λ_0 – простое собственное число вырожденной задачи. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$M_0(y_0) = \lambda_0 N_0(y_0); \quad (2.11)$$

$$Q_i(y_0) = 0 \quad \text{при} \quad x = a_i, i = 1, 2 \quad (2.12)$$

$$M_0(y_1) - \lambda_0 N_0(y_1) = -M_1(y_0) + \lambda_1 N_1(y_0); \quad (2.13)$$

$$Q_i(y_1) = 0 \quad \text{при} \quad x = a_i, i = 1, 2 \quad (2.14)$$

.....

Как и для системы линейных алгебраических уравнений, используем самосопряженность невозмущенной задачи. Умножая уравнение (2.13) на y_0 и интегрируя по всей области и замечая, что

$$\int_a^b [M_0(y_1) - \lambda_0 N_0(y_1)] y_0 dx = 0, \quad (2.15)$$

получаем первую поправку к собственному числу λ_0 :

$$\lambda_1 = \frac{(M_1(y_0), y_0) - \lambda_0 (N_1(y_0), y_0)}{(N_0(y_0), y_0)}. \quad (2.16)$$

Далее легко найти первую поправку к собственной форме, затем λ_2, y_2 и т.д.

В качестве еще одного примера рассмотрим влияние собственной массы вертикально расположенного шарнирно опертого стержня на критические усилия осевого сжатия (рис. 2.1) [3].

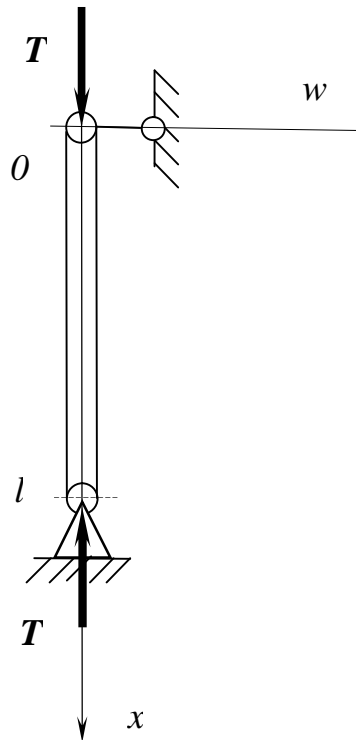


Рис. 2.1. Вертикально расположенный сжатый шарнирно опертый стержень.

Исходное уравнение:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho g F \frac{d}{dx} \left(x \frac{dw}{dx} \right) + T \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (2.17)$$

Граничные условия имеют вид (1.5). Перепишем уравнение (2.17) и краевые условия (1.5) в безразмерном виде

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + \varepsilon \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw}{d\xi} \right) + \bar{T} \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0; \quad (2.18)$$

$$w = \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \pi,$$

где $\xi = \frac{\pi x}{l}$; $\bar{T} = \frac{Tl^2}{EI\pi^2}$; $\varepsilon = \frac{\rho g Tl^3}{EI\pi^3}$.

Поскольку для реальных стержней $\varepsilon \ll 1$, разыскиваем решение поставленной задачи в виде

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots; \quad \bar{T} = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots$$

В первом приближении получаем задачу об эйлеровой устойчивости продольно сжатого шарнирно опертого стержня:

$$\frac{d^4 w_0}{d\xi^4} + T_0 \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} = 0;$$

$$w_0 = \frac{d^2 w_0}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \pi.$$

Первая критическая сила $T_0 = 1$ соответствует форме потери устойчивости

$$w_0 = A \sin \xi_0. \quad (2.19)$$

Из уравнения первого приближения

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + T_0 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = - \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dw_0}{d\xi} \right) + T_1 \frac{d^2 w_0}{d\xi^2}$$

определяем первую поправку к критической силе: $T_1 = -1/2\pi$.

Окончательно имеем следующее приближенное значение критической силы: $T \approx 1 - 0.5\varepsilon\pi$. Интересно, что использование в данном случае метода Галеркина с одночленной аппроксимацией прогиба (2.19) приводит к такому же результату [4,с.139]. Это является отражением отмеченного в [3,с.407,408] свойства: «Приближение метода возмущений, полученное при учете лишь линейного члена, во многих случаях совпадает с отношением Рэлея или находится в тесной связи с ним».

Перейдем теперь к более сложным случаям кратных собственных значений. Рассмотрим сначала систему линейных алгебраических уравнений. Пусть невозмущенная задача (2.4) имеет k -кратное собственное значение λ_0 и попарно ортогональные собственные векторы e_1, e_2, \dots, e_k , отвечающие этому собственному значению. Для возмущенной задачи, вообще говоря, произойдет «расщепление» k -кратного собственного значения. Действительно, пусть, например, $A_0 = E$, а A_1 – некоторая самосопряженная матрица с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Тогда невозмущенная задача имеет k -кратное

собственное значение, равное 1, а возмущенная – k различных собственных значений $1 + \lambda_1 \varepsilon, 1 + \lambda_2 \varepsilon, \dots, 1 + \lambda_k \varepsilon$.

Представим теперь возмущенные значения собственного числа и собственного вектора в виде (2.2),(2.3). Видно отличие от случая не кратных собственных значений: не ясно, что представляет собой вектор \mathbf{x}_0 . Он будет линейной комбинацией векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, однако эта комбинация заранее не известна, т.е. вектор \mathbf{x}_0 подлежит определению. Сравнивая, как и ранее, коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем в первом приближении уравнение (2.5).

Поскольку \mathbf{x}_0 – линейная комбинация собственных векторов \mathbf{e}_k , можно записать

$$\mathbf{x}_0 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_k \mathbf{e}_k. \quad (2.20)$$

Подставляя выражение (2.20) в уравнение (2.5) и умножая обе части полученного выражения скалярно на \mathbf{e}_r , получаем систему уравнений

$$(A_1 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_r) + (A_0 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_r) = \lambda_0 (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_r) + \lambda_1 (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_r), \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (2.21)$$

Поскольку

$$(A_0 \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_r) = (\mathbf{x}_0, A_1 \mathbf{x}_r) = \lambda_0 (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_r), \quad (2.22)$$

систему (2.21) можно записать так:

$$(A_1 \mathbf{x}_0, \mathbf{e}_r) = \lambda_1 (\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_r), \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (2.23)$$

Подставляя в левые части уравнений (2.23) вместо \mathbf{x}_0 его выражение (2.20) и учитывая, что $(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_r) = a_r$, получаем

$$\sum_{p=1}^k b_{rp} a_p = \lambda_1 a_r, \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad b_{rp} = (A_1 \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_r). \quad (2.24)$$

Если матрица $\|b_{rp}\|$ имеет k различных собственных значений $\lambda_1^{(i)}$, то они определяются из алгебраического уравнения k -й степени:

$$\det \|b_{ir} - \lambda_i^{(1)} \delta_{ik}\| = 0,$$

а соответствующие собственные векторы $\mathbf{x}_0^{(i)}$ задаются формулой (2.20), где коэффициенты a_i находятся из уравнений (2.24).

Для дифференциальных уравнений случай кратных собственных значений рассмотрим аналогично. Пусть невозмущенная самосопряженная краевая задача (2.11),(2.12) имеет k -кратное собственное значение λ_0 и k относящихся к нему собственных функций $\varphi_{01}; \varphi_{02}; \dots; \varphi_{0k}$. Полагаем, что собственные функции ортонормированы:

$$\int_a^b \varphi_{0r} N_0(\varphi_{0p}) dx = 0; \quad p \neq r, \quad \int_a^b \varphi_{0r} N_0(\varphi_{0r}) dx = 1, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (2.25)$$

Как и для системы линейных алгебраических уравнений, при внесении малого возмущения кратное собственное число расщепляется. Разложение собственного числа ищем в виде (2.3), а собственную функцию нулевого приближения – в виде

$$y_0 = \sum_{i=1}^k c_r \varphi_{0r}. \quad (2.26)$$

Подставляя выражение (2.26) в уравнение первого приближения (2.17), умножая его последовательно на φ_{0p} , $p = 1, 2, \dots, k$, используя самосопряженность невозмущенного оператора и свойства ортонормированности (2.25), получаем систему линейных алгебраических уравнений, позволяющую определить $\lambda_1^{(r)}$ и c_r (а, значит, и y_{0r}):

$$\int_a^b \left\{ M_1 \left(\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{0p} \right) \varphi_{0r} - \lambda_0 N_1 \left(\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{0p} \right) \varphi_{0r} - \lambda_1 N_0 \left(\sum_{p=1}^k c_p \varphi_{0p} \right) \varphi_{0r} \right\} dx = 0,$$

$r = 1, 2, \dots, k$.

Рассмотрим для примера устойчивость шарнирно опертого стержня на некотором упругом основании:

$$w^{IV} + (4 + \varepsilon)w + \lambda w'' = 0;$$

$$w(0) = w''(0) = w(\pi) = w''(\pi) = 0.$$

Наименьшее собственное значение $\lambda_0 = 5$ невозмущенной задачи двукратно вырождено – ему соответствуют функции $\sin x$ и $\sin 2x$.

В первом приближении получаем

$$w_1^{IV} + 4w_1 + \lambda_0 w_1'' + w_0 + \lambda_1 w_0'' = 0.$$

Представляя теперь собственную функцию нулевого приближения в виде

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x,$$

получаем для определения постоянных a_1, a_2, λ_1 систему

$$a_1(1 - \lambda_1) = 0; \quad a_2(1 - 4\lambda_1) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_1 = 1/4$, а соответствующие собственные функции сохраняются в виде $\sin x$ и $\sin 2x$.

В изложенном подходе на каждом этапе сначала определяются собственные числа, а затем – собственные векторы. Возможен и другой подход, когда из уравнения для собственного вектора исключается собственное значение [5]. Рассмотрим для иллюстрации продольные колебания стержня переменной жесткости и постоянного поперечного сечения

$$\frac{d}{dx} \left[(E_0 + \varepsilon E_1(x)) \frac{du}{dx} \right] + \rho \lambda u = 0, \quad E_0 = const \quad (2.27)$$

при граничных условиях (1.5).

В нулевом приближении имеем

$$M(u_0) = \left(E_0 \frac{d^2}{dx^2} + \rho \lambda_0 \right) u_0 = 0; \quad \text{при } x = 0, L \quad u_0 = 0.$$

Теперь преобразуем исходное уравнение (2.27), добавив и отняв член $\rho\lambda_0 u$:

$$E_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho\lambda_0 u + \varepsilon \frac{d}{dx} \left[E_1(x) \frac{du}{dx} \right] = -\rho(\lambda - \lambda_0)u. \quad (2.28)$$

Умножив теперь, как и ранее, обе части уравнения (2.28) на u_0 , интегрируя по x от нуля до L и учитывая самосопряженность оператора $M(u)$, получаем:

$$-\rho(\lambda - \lambda_0) = \varepsilon \int_0^L \frac{d}{dx} \left[E_1(x) \frac{du}{dx} \right] u_0 dx \left[\int_0^L u u_0 dx \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

Далее будем считать собственную функцию u нормированной таким образом, что $\int_0^L u u_0 dx = 1$. Из уравнения (2.28) исключаем собственное число λ при помощи выражения (2.29):

$$E_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - \rho\lambda_0 u + \varepsilon \frac{d}{dx} \left[E_1(x) \frac{du}{dx} \right] = \varepsilon u \int_0^L \frac{d}{dx} \left[E_1(x) \frac{du}{dx} \right] u_0 dx. \quad (2.30)$$

Это нелинейное уравнение с краевыми условиями (1.5) можно решать методом возмущений или последовательных приближений. Зная собственный вектор, по формуле (2.29) находим собственное число.

В качестве еще одного примера рассмотрим метод Ишлинского-Лейбензона исследования устойчивости конструкций со свободными краями. Суть его состоит в том, что в уравнениях равновесия отбрасываются параметрические члены при сохранении их только в краевых условиях [6,7]. Вопрос о физической стороне подобных упрощений до сих пор обсуждается в литературе, однако можно строить соответствующие упрощения формально, вводя в исходные уравнения при параметрических членах параметр ε и считая его малым, а в окончательном решении полагая $\varepsilon = 1$. Рассмотрим для примера устойчивость консольного стержня (рис.2.2). Исходное уравнение устойчивости имеет вид (1.5), а краевые условия таковы

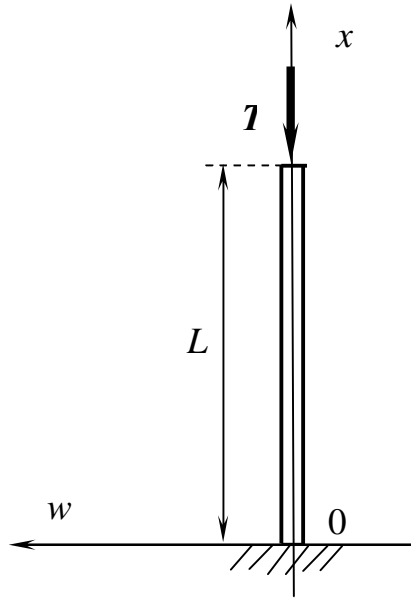


Рис. 2.2. Сжатый консольный стержень.

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad (2.31)$$

$$w''(L) = 0; EIw'''(L) + Tw'(L) = 0. \quad (2.32)$$

Введем теперь в уравнение (2.31) малый параметр ε следующим образом:

$$EIw_{xxxx} + \varepsilon Tw_{xx} = 0. \quad (2.33)$$

Решение Ишлинского-Лейбензона получится из краевой задачи (2.31) - (2.33) при $\varepsilon = 0$. Представим далее w и T таким образом:

$$w = w_0 + w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \dots; \quad T = T_0 + T_1\varepsilon + T_2\varepsilon^2 + \dots$$

Производя расщепление по ε , имеем:

$$EIw_{0xxxx} = 0; \quad (2.34)$$

$$w_0(0) = w_0'(0) = 0; \quad (2.35)$$

$$w_0''(L) = 0; \quad EIw_0'''(L) + T_0w_0'(L) = 0; \quad (2.36)$$

$$EIw_{1xxxx} + T_0w_{0xx} = 0; \quad (2.37)$$

$$w_1(0) = w_1'(0) = 0; \quad (2.38)$$

$$w_1''(L) = 0; \quad EIw_1'''(L) + T_0w_1'(L) + T_1w_0'(L) = 0; \quad (2.39)$$

$$EIw_{2xxxx} + T_0w_{1xx} + T_1w_{0xx} = 0; \quad (2.40)$$

$$w_2(0) = w_2'(0) = 0; \quad (2.41)$$

$$w_2''(L) = 0; \quad EIw_2'''(L) + T_0w_2'(L) + T_1w_1'(L) + T_2w_0'(L) = 0. \quad (2.42)$$

Из соотношений нулевого приближения (2.34)-(2.36) получаем

$$T_0 = \frac{2EI}{L^2}; \quad w_0 = Ax^2(x - 3L).$$

Краевая задача первого приближения (2.37)-(2.39) имеет решение

$$T_1 = \frac{EI}{3L^2}; \quad w_1 = -5ALx^2 + Ax^3 + \frac{A}{2L}x^4 - \frac{A}{10L^2}x^5.$$

Наконец, из уравнений и краевых условий второго приближения (2.40)-(2.42) находим

$$T_2 = \frac{4EI}{45L^2}.$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{EI}{L^2} \left(2 + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{4}{45}\varepsilon^2 + \dots \right). \quad (2.43)$$

Формула (2.43) для $\varepsilon = 1$ дает $T = 2.4020 EI/L^2$. Точное значение $T = 2.4674 EI/L^2$ отличается от найденного на 1.83%.

2.3 Метод сопряженных уравнений

При вычислении поправок к собственному числу обычно определяются последовательно собственные числа и собственные функции. Между тем, знание всех собственных функций вплоть до n -й позволяет определить $2n+1$ собственных значений [8]. Покажем это на примере линейного матричного уравнения (2.1).

Представив решение уравнения (2.1) в виде (2.2),(2.3), получаем рекуррентную систему уравнений (2.4)-(2.5б). Из уравнений (2.4), (2.5) определяем λ_0, λ_1 и $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$. Далее из уравнения (2.5а) можно определить λ_2 . Для этого скалярно умножаем обе части уравнения (2.5а) на \mathbf{x}_0 и учитываем самосопряженность невозмущенной задачи и уравнение (2.4). В результате имеем

$$\lambda_2 = \frac{((A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_0|^2}.$$

Теперь, умножив скалярно уравнение (2.5б) на \mathbf{x}_0 , находим

$$\lambda_3 = \frac{((A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0) - \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_0|^2}. \quad (3.1)$$

Поскольку вектор \mathbf{x}_2 неизвестен, преобразуем первое слагаемое числителя дроби (3.1) так:

$$((A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_0) = ((A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2).$$

Из уравнения (2.5) имеем

$$(A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_0 = -(A - \lambda_0)\mathbf{x}_1.$$

Отсюда

$$((A_1 - \lambda_1)\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2) = -((A - \lambda_0)\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -((A - \lambda_0)\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) =$$

$$= -((-A_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_1) = ((A_1 - \lambda_1) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1).$$

Окончательно находим

$$\lambda_3 = \frac{((A_1 - \lambda_1) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) - \lambda_2 (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_0|^2}. \quad (3.2)$$

Метод математической индукции позволяет распространить формулу (3.2) на следующие приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957, т. 12, № 5, с. 3-122.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН, 1960, т.15, № 3, с. 3-80.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Фридрихс К.О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969. 232 с.
6. Ишлинский А.Ю. Рассмотрение вопроса об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // УМЖ, 1954, т. 6, № 2, с. 140-146.
7. Лейбензон Л.С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферических и цилиндрических оболочек // Собр. трудов, т.1. М.: Изд-во АН СССР, 1951, с. 50-86.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах // Вычислительные процессы и системы, вып. 4. М.: Наука, 1986, с. 5-62.