

# 3 СИНГУЛЯРНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

## 3.1 Метод Гольденвейзера-Вишика-Люстерника

Дадим следующее определение: задача называется сингулярно возмущенной в некоторой норме, если невязка (разность точного решения и нулевого приближения асимптотического процесса) в какой-либо норме не стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [1]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| z(x, \varepsilon) - z(x, 0) \| \neq 0.$$

Подчеркнем, что одна и та же задача может быть сингулярно возмущенной в одной норме и регулярно возмущенной – в другой. Приведем пример [2]. Краевая задача

$$\varepsilon \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} = 0, 0 < x < 1;$$
$$z(0) = 0; z(1) = 1$$

имеет точное решение

$$z(x, \varepsilon) = \frac{1 - \exp(-x/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)}.$$

В норме

$$\| z(x, \varepsilon) \| = \max_{\Omega} |z|,$$

где  $\Omega = \{x, 0 \leq x \leq 1\}$ , приведенная задача является сингулярно возмущенной. В норме же

$$\| z(x, \varepsilon) \|^2 = \int_0^1 z^2 dx$$

имеем регулярно возмущенную задачу.

При определении сингулярно возмущенной задачи следует также четко указывать область, в которой она рассматривается. Например, приведенная задача в любой подобласти  $\Omega_0 = \{x, 0 < x < 1\}$  области  $\Omega$  является регулярно возмущенной, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\Omega_0} |z - 1| = 0.$$

Несколько слов о названии параграфа. Обычно применяемая далее техника называется методом пограничного слоя или Вишика-Люстерника. Нисколько не умаляя заслуг упомянутых математиков в развитии и математическом обосновании техники асимптотического интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных [3,4], отметим, что первоначально многие идеи были высказаны Гольденвейзером в связи с анализом уравнений теории оболочек [5,6].

Исследуем сначала простейшую задачу

$$\varepsilon z' + z = 1; \tag{1.1}$$

$$z(0) = 0, \tag{1.2}$$

точное решение которой имеет вид

$$z = 1 - \exp(-\varepsilon^{-1}x).$$

Решение вырожденного ( $\varepsilon = 0$ ) уравнения

$$z_0 = 1$$

не удовлетворяет заданному начальному условию (1.2). Ситуация, характерная для задач сингулярного возмущения, проиллюстрирована на рис. 1.1, где приведены графики точного и вырожденного решения задачи Коши (1.1), (1.2) (сплошная и штриховая линии соответственно). Существенная погрешность наблюдается лишь в окрестности точки  $x = 0$ , причем эта область, называемая пограничным слоем, будет тем уже, чем меньше  $\varepsilon$ . Ясно, что получить равномерно пригодное решение сингулярно возмущенной задачи, используя лишь разложение

$$\tilde{z} = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots, \quad (1.3)$$

невозможно. В этом случае необходимо достраивать решение типа погранслоя, которое, как следует из приведенного примера, должно быстро затухать с удалением от границы.

Явление пограничного слоя встречается в научной литературе под разными названиями. В теории упругости говорят о краевых эффектах, в физике – о скин-эффектах или (в физике высоких энергий) о скейлинге, в теории управления или вычислительной математике предпочитают говорить о жестких системах.

Особенности асимптотического интегрирования в сингулярном случае изучим на примере уравнения

$$\varepsilon z'' + z' + z = 0 \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$z(0) = 1; \quad z'(0) = 0. \quad (1.5)$$

Решение для области, удаленной от точки  $t = 0$ , ищем в виде ряда (1.3). Подставляя это решение в уравнение (1.4) и производя расщепление по  $\varepsilon$ , получаем

$$z'_0 + z_0 = 0; \quad (1.6)$$

$$z'_1 + z_1 = -z''_0; \quad \dots \quad (1.7)$$

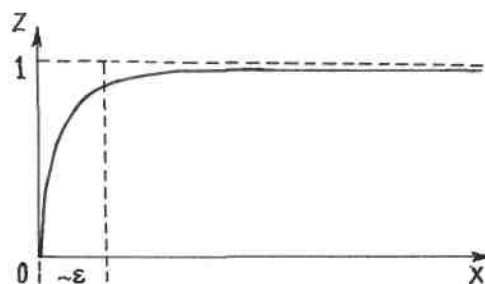


Рис. 1.1. Типичное поведение решения при наличии пограничного слоя.

По терминологии Вишика-Люстерника это первый итерационный процесс [3]. Очевидно, за счет решений каждого из уравнений (1.6),(1.7) можно удовлетворить лишь одному из начальных условий (1.5), поэтому для компенсации соответствующей невязки необходимо достраивать дополнительное решение - погранслою  $z_n$  (второй итерационный процесс по терминологии Вишика-Люстерника [3]). Это решение быстро изменяется по  $x$ , однако сама скорость изменения пока неизвестна.

Введем параметр изменчивости  $\alpha$  функции  $z_n(x)$  (эти очень удобные при асимптотическом исследовании параметры были предложены Гольденвейзером [5,6]) при помощи следующего соотношения:

$$z'_n \sim \varepsilon^{-\alpha} z, \alpha > 0.$$

В зависимости от величины параметра  $\alpha$  возникают три случая с различными предельными уравнениями, которым должны удовлетворять члены соответствующих разложений:

$$\alpha > 1, z''_n = 0; \tag{1.8}$$

$$\alpha = 1, \varepsilon z''_n + z'_n = 0; \tag{1.9}$$

$$\alpha < 1, z'_n = 0. \tag{1.10}$$

Поскольку уравнение (1.9) объединяет уравнения (1.8),(1.10), можно в дальнейшем ограничиться им, полагая  $\alpha = 1$ . Решение типа погранслоя представим в виде

$$z_n(x, \varepsilon) = \varepsilon^p [z_{n0}(x) + \varepsilon z_{n1}(x) + \dots]. \tag{1.11}$$

Параметр  $p$  остается пока неопределенным. Он зависит от порядка малости вырожденного решения, причем связь между функциями  $\tilde{z}$  и  $z_n$  осуществляется через граничные условия. Подставляя разложение  $z_n$  в исходное уравнение (1.4) и производя расщепление по  $\varepsilon$ , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon z''_{n0} + z'_{n0} &= 0; \\ \varepsilon z''_{n1} + z'_{n1} &= -z''_{n0}; \end{aligned} \tag{1.12}$$

. . . . .

Формально каждое из уравнений (1.12) имеет второй порядок. Однако, поскольку мы ищем быстро изменяющееся решение ( $z'_n \sim \varepsilon^{-1} z_n$ ), эти уравнения нужно заменить следующими:

$$\varepsilon z'_{n0} + z_{n0} = 0; \tag{1.13}$$

$$\varepsilon z'_{n1} + z_{n1} = -z'_{n0}; \tag{1.14}$$

. . . . .

Уравнения (1.13),(1.14) называются уравнениями погранслоя.

Сформулируем теперь граничные условия для уравнений (1.6),(1.7) и (1.13),(1.14). Представим решение исходной задачи (1.4) в виде

$$z = \tilde{z} + z_n = (z_0 + \varepsilon z_1 + \dots) + \varepsilon^p (z_{n0} + \varepsilon z_{n1} + \dots).$$

Подставляя это выражение в начальные условия (1.5), получаем

$$(z_0 + \varepsilon z_1 + \dots) + \varepsilon^p (z_{n0} + \varepsilon z_{n1} + \dots) = 1;$$

$$(z'_0 + \varepsilon z'_1 + \dots) + \varepsilon^p (z'_{n0} + \varepsilon z'_{n1} + \dots) = 0 \quad \text{при } x=0. \quad (1.15)$$

Поскольку  $z'_n \sim \varepsilon^{-1} z_n$ , второй член в граничном условии для  $z_n$  имеет порядок  $\varepsilon^{p-1}$ . Подберем теперь такое значение  $p$ , при котором краевые задачи для уравнений (1.6),(1.7) и (1.13),(1.14) имеют решение. Это означает, что для каждого уравнения из указанных рекуррентных последовательностей должно быть поставлено только одно граничное условие. Если  $p > 1$ , то оба граничных условия отходят к уравнениям (1.6),(1.7), при  $p < 1$ , - к уравнениям (1.13),(1.14). Отсюда единственное непротиворечивое значение  $p = 1$ . Таким образом оценивается порядок решения пограничного слоя через решение вырожденного уравнения. Принимая  $p = 1$ , группируя в условиях (1.15) члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и приравнивая их нулю, а также учитывая, что из уравнений (1.6) следует  $z'_0 = -z_0$ , получаем при  $x = 0$

$$z_0 = 1; \quad z_1 = -z_{n0}; \dots; \quad (1.16)$$

$$\varepsilon z'_{n0} = z_0; \quad \varepsilon z'_{n1} = z_1; \dots \quad (1.17)$$

Граничные условия (1.16),(1.17) задаются для уравнений (1.6),(1.7) и (1.13),(1.14) соответственно.

Расщепление граничных условий – операция, ведущая к наибольшей погрешности при решении конкретных задач. В связи с этим в [7] предложена асимптотически непоследовательная процедура, ведущая, однако, к повышению реальной точности решения. Покажем ее на описанном примере. Не будем расщеплять граничные условия, записав их в нулевом приближении в виде

$$z_0 + z_{n0} = 1; \\ z'_0 + z'_{n0} = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Решение уравнений пограничного слоя (1.13а) имеет вид

$$z_{n0} = C \exp(-\varepsilon^{-1}x).$$

Подстановка этого выражения в граничные условия приводит к системе

$$z_0 + C = 1; \\ z'_0 - \varepsilon^{-1}C = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Исключая постоянную  $C$ , получаем граничное условия для вырожденного уравнения (1.6)

$$z_0 + \varepsilon z'_0 = 1 \quad \text{при } x = 0.$$

Как уже отмечалось, это условие асимптотически непоследовательно, но повышает реальную точность решения.

Пограничный слой часто описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поскольку переменные коэффициенты в уравнениях пограничного слоя можно «замораживать». Суть этого метода поясним на примере маятника с малой переменной массой. Физически это может означать, что маятник находится в сильно сопротивляющейся среде [8, §17]. Исходное уравнение можно записать так:

$$\varepsilon \varphi(t) \ddot{x} + \dot{x} + x = 0; \quad x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (1.18)$$

где  $0 < \varphi(t) < 1$ ;  $\varphi(t) \sim \dot{\varphi}(t)$ .

Вырожденное уравнение имеет вид

$$\dot{x} + x = 0. \quad (1.19)$$

Уравнение погранслоя должно быть записано в виде

$$\varepsilon\varphi(t)\ddot{x}_n + \dot{x}_n = 0, \quad (1.20)$$

причем медленное решение уравнения (1.20) следует отбросить. Уравнение (1.20) содержит переменный по  $t$  коэффициент, однако на быстро затухающем решении типа погранслоя его можно считать постоянным, т.е. положить в первом приближении  $\varphi(t) = \varphi(0)$ . Тогда для определения погранслоя приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\varepsilon\varphi(0)\dot{x}_n + x_n = 0.$$

Отметим также следующий момент. Составляющие типа погранслоя имеют в данном случае, как видно из приведенного решения, порядок  $\varepsilon$  по сравнению с основным решением. Поэтому возникает вопрос о правомерности и целесообразности их удержания в нулевом приближении, когда не учитываются имеющие такой же порядок составляющие первого приближения основного состояния. Однако, хотя в нулевом приближении погранслоя действительно можно не учитывать при определении перемещения, так как  $x = x_0 + O(\varepsilon)$ , его нужно обязательно учесть при определении скорости  $\dot{x}$ , поскольку составляющая погранслоя увеличивается в  $\varepsilon^{-1}$  раз при дифференцировании и, следовательно,

$$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{x}_{0n} + O(\varepsilon).$$

Поскольку в механике производные определяют напряжения, без учета составляющих типа погранслоя невозможно правильное определение полной картины напряженно-деформированного состояния.

Важным условие применимости метода погранслоя является требование регулярности вырождения. Вырождение называется регулярным, если число корней с отрицательными действительными частями характеристического уравнения для уравнения погранслоя совпадает с числом граничных условий, выпадающих при переходе к вырожденной задаче [3].

Продemonстрируем теперь применение метода погранслоя к решению нелинейной задачи с малым параметром при старшей производной. Возьмем в качестве модельного уравнение маятника Ван дер Поля с малой массой:

$$\varepsilon\ddot{x} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0; \quad (1.21)$$

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad a = \text{const}. \quad (1.22)$$

При этом полагаем  $a < 1$  и  $a \sim 1$ , так что коэффициент при втором члене уравнения (1.21) не мал. При  $\varepsilon = 0$  получаем

$$(1 - x_0^2)\dot{x}_0 = -x_0; \quad \ln|x_0| = 0.5x_0^2 - t + C.$$

Построение погранслоя теперь существенно усложняется и неотделимо от анализа начальных условий. Кроме того, в нелинейных задачах нужно с осторожностью подходить к самому понятию изменяемости, введенному ранее. Дело в том, что это понятие существенно ориентировано на экспоненциальный

погранслоем, характерный для линейных задач. В нелинейных задачах, вообще говоря, возможны погранслои другого типа, например, степенные, поэтому каждая нелинейная задача требует внимательного анализа. В данном случае, ориентируясь на решение линеаризованной задачи, естественно принять следующую изменяемость решения погранслоя:

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} \sim \varepsilon^{-1} x_n. \quad (1.23)$$

Тогда  $x_n \sim \varepsilon x_0$ , а расчлененные начальные условия таковы

$$x_0(0) = a; \quad (1.24)$$

$$\dot{x}_n(0) = -\dot{x}_0(0). \quad (1.25)$$

Из соотношений (1.23)-(1.25) следует малость  $x_n$  по сравнению с  $x_0$ :

$$x_n \sim \varepsilon x_0. \quad (1.26)$$

Записав теперь решение исходной задачи в виде  $x = x_0 + x_n$ , подставив это выражение в уравнение (1.21) и учитывая соотношения (1.23),(1.26), относительно  $x_n$  получаем линейное уравнение с переменными коэффициентами

$$\varepsilon \ddot{x}_n + (1 - x_0^2) \dot{x}_n = 0.$$

Медленно переменный коэффициент  $x_0^2$  не успевает существенно измениться за время затухания пограничного слоя, поэтому его можно «заморозить» на границе, т.е. положить равным значению в нуле (см. условие (1.24)). Окончательно приходим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\varepsilon \ddot{x}_n + (1 - a^2) \dot{x}_n = 0. \quad (1.27)$$

Общее решение уравнения (1.27) таково

$$x_n = C_1 \exp[-(1 - a^2)\varepsilon^{-1}t].$$

Из граничных условий (1.24),(1.25) определяем постоянные  $C$  и  $C_1$ :

$$C = \ln|a| - \frac{a^2}{2}; \quad C_1 = -\frac{\varepsilon a}{(1 - a^2)^2}.$$

Понижение порядка исходного уравнения может привести не только к невозможности удовлетворить заданным краевым (начальным) условиям, но и к появлению разрывов решений (или их производных) внутри области. В этом случае появляются решения, локализованные в окрестностях точек или (в случае уравнений в частных производных) линий, носящие название внутренних пограничных слоев. Внутренние пограничные слои получили в последние годы название «контрастные структуры» [9,10]. Рассмотрим для примера краевую задачу [11,12]

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1, \quad (1.28)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (1.29)$$

Вырожденное уравнение

$$\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2 = 1$$

имеет решения  $y_0^{(1)} = -x + C_1$ ;  $y_0^{(2)} = x + C_2$ . Из граничных условий (1.29) находим  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -1$ ; поэтому предельное решение можно записать так

$$y_0 = -x[H(x) - H(x - 0.5)] + (x - 1)[H(x - 0.5) - H(x - 1)].$$

Перейдем к построению внутреннего пограничного слоя. Рассмотрим сначала решение в области  $0 \leq x \leq 0.5$ . Полагая

$$y_0 = y_0^{(1)} + y_n^{(1)}, \quad (1.30)$$

подставляя выражение (1.30) в уравнение (1.28) и ограничиваясь основными членами, находим

$$\varepsilon \frac{d^2 y_n^{(1)}}{dx^2} - 2 \frac{dy_n^{(1)}}{dx} = 0. \quad (1.31)$$

Решение уравнения (1.31) можно представить в виде

$$y_n^{(1)} = C_3 \exp(2\varepsilon^{-1}(x - 0.5)).$$

Постоянную  $C_3$  определим из условия

$$\frac{dy_n^{(1)}}{dx} + \frac{dy_0^{(1)}}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.5.$$

Отсюда  $C_3 = 0.5\varepsilon$  и  $y_n^{(1)} = 0.5\varepsilon \exp(2\varepsilon^{-1}(x - 0.5))$ . Аналогично при  $0.5 \leq x \leq 1$   $y_n^{(2)} = 0.5\varepsilon \exp(2\varepsilon^{-1}(0.5 - x))$ . Теперь решение  $y_0 = y_0^{(1)} + y_n^{(1)} + y_n^{(2)}$  равномерно пригодно во всей рассматриваемой области. Схематически ситуация изображена на рис. 1.2.

Решения внутреннего пограничного слоя вносят экспоненциально малые невязки в граничные условия (1.29), которые можно компенсировать в следующих линейных приближениях.

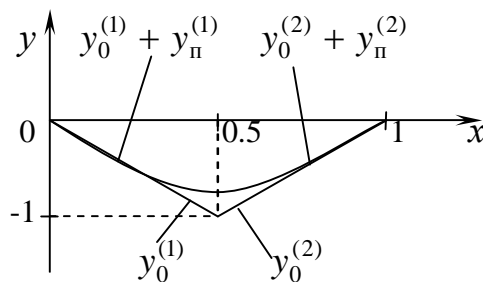


Рис. 1.2. Пример внутреннего пограничного слоя.

Отметим еще, что сингулярно возмущенные задачи могут иметь сложную асимптотику, что видно на примере краевой задачи

$$(\varepsilon + x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1, 0 \leq x \leq 1; 0 < \varepsilon \ll 1;$$

$$y(0) = 0; y(1) = 2,$$

имеющей точное решение

$$y(x, \varepsilon) = x - \frac{\ln(x + \varepsilon) - \ln \varepsilon}{\ln \varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)}.$$

Построение асимптотики в этом случае предоставляем читателю.

### 3.2 Многоугольник Ньютона и его обобщения

Пусть задана неявная функция

$$F(\varepsilon, x) = 0, \quad F(0, x_0) = 0,$$

и нужно определить явную зависимость  $x$  от  $\varepsilon$

$$x = x_0 + b_1 \varepsilon^{\beta_1} + b_2 \varepsilon^{\beta_2} + \dots, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots.$$

Определение показателей  $\beta_i$  - задача, решаемая при помощи многоугольника Ньютона (употребляются также термины диаграмма или полигон Ньютона) [13,14]. Следуя [11,12], рассмотрим пример, когда

$$F(\varepsilon, x) = \sum_{k=0}^n a_k(\varepsilon) x^k = 0, \quad (2.1)$$

где

$$a_k(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m_k} \alpha_k^{(j)} \varepsilon^{\alpha_k^{(j)}}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Асимптотическое разложение корней  $x_i$  уравнения (2.1) будем искать в виде

$$x_i \sim \sum_{j=0}^{\infty} x_i^{(j)} \varepsilon^{\beta_i^{(j)}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \beta_i^{(j+1)} > \beta_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

$$\text{т.е.} \quad x_i \sim y_i t^{\beta_i} + O(t^{\beta_i}), \quad (2.4)$$

где  $y_i = x_i^{(0)}$ ,  $\beta_i = \beta_i^{(0)}$ .

Для определения возможных значений  $y_i$  и  $\beta_i$  подставим соотношение (2.4) в (2.1), соберем члены с самой низкой степенью и приравняем нулю коэффициент при указанной степени. Пока значения  $\beta_i$  не определены, неизвестно, какие из членов имеют наименьший порядок по  $\varepsilon$ . Ясно только, что эти члены находятся среди следующих:

$$a_0^{(0)} \varepsilon^{\alpha_0^{(0)}}, \quad a_1^{(0)} y_i \varepsilon^{\alpha_1^{(0)} + \beta_i}, \quad a_2^{(0)} y_i^2 \varepsilon^{\alpha_2^{(0)} + 2\beta_i}, \quad \dots, \quad a_{2n}^{(0)} y_i^n \varepsilon^{\alpha_n^{(0)} + n\beta_i}.$$

Для взаимного уничтожения членов наименьшего порядка необходимо, чтобы два из показателей

$$\alpha_0^{(0)}, \quad \alpha_1^{(0)} + \beta_i, \quad \alpha_2^{(0)} + 2\beta_i, \quad \dots, \quad \alpha_n^{(0)} + n\beta_i.$$

совпали, а остальные были бы не меньше их. Приравнивая показатели, найдем все возможные значения  $\beta_i$ , а затем определим  $y_i$ . А именно, на плоскости  $(k, \alpha)$  построим  $n+1$  точку  $M_k = \{k, \alpha_k^{(0)}\}$  с целочисленными абсциссами (рис.2.1). Проведем отрезок  $M_0 M_1$ . Тангенс угла наклона отрезка к оси  $k$  равен значению  $\beta_i$ , при котором совпадают порядки первого и второго слагаемых. Нетрудно проверить, что точкам, лежащим выше прямой, проходящей через  $M_0$  и  $M_1$ , соответствуют слагаемые, имеющие более высокий порядок малости. Интерес представляют только главные члены, поэтому соединяем точки  $M_k$  отрезками прямой таким образом, чтобы точки, не лежащие на этих отрезках, находились выше полученной ломаной линии. Для построения указанной ломаной линии будем поворачивать против часовой стрелки луч, проведенный



вертикально вниз из точки  $M_0^* = M_0$ . Обозначим  $M_1^*$  первую из точек  $M_k$ , которую пересечет луч. Затем вертикальный луч из точки  $M_1^*$  будем поворачивать в том же направлении, пока он не пройдет через следующую точку  $M_2^*$ . Процесс продолжается до тех пор, пока очередной луч не пройдет через точку  $M_s^* = M_n$ . Если на луче оказывается несколько точек  $M_k$ , то в качестве  $M_s^*$  берется крайняя справа точка (с максимальным  $k$ ). Ломаная линия, соединяющая точки  $M_i^*$ , называется диаграммой Ньютона. Тангенс угла наклона отрезка  $M_i^* M_{i+1}^*$  к оси  $k$  дает порядок  $\beta_i$  корня  $x_i$ , длина проекции отрезка на ось  $k$  равна числу корней  $x_i$ , имеющих такой порядок, а число точек  $M_k$ , через которые проходит отрезок, равно числу членов уравнения для вычисления  $y_i$ .

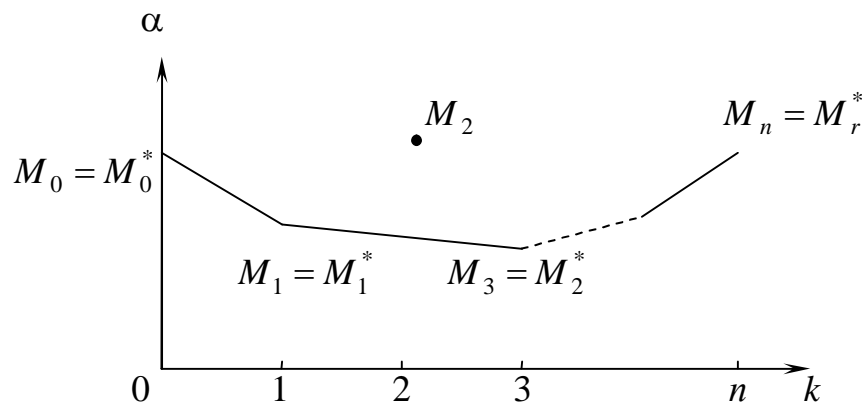


Рис. 2.1. Диаграмма Ньютона.

Рассмотрим для примера алгебраическое уравнение

$$\varepsilon^3 x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - \varepsilon = 0. \quad (2.5)$$

Построим график, по оси абсцисс которого будем откладывать степени членов уравнения, а по оси ординат – степени малого параметра при этих членах (рис. 2.2). Из рисунка нетрудно увидеть возможные предельные системы.

1. Равны первые два члена уравнения (2.5), отсюда  $x_1 = -\varepsilon^{-3} + \dots$ .
2. Равны второй, третий и четвертый члены уравнения (2.5), отсюда  $x_{2,3} = 1 + \dots$ .
3. Равны четвертый и пятый члены уравнения (2.5), отсюда  $x_{4,5} = \pm \varepsilon^{1/2} + \dots$ .

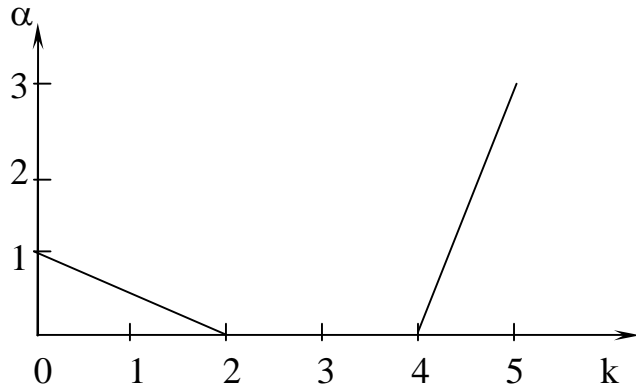


Рис. 2.2. Диаграмма Ньютона для уравнения (2.5).

Рассмотрим теперь обобщение диаграммы Ньютона на двумерный случай. Первый пример – деформация мембраны на упругом основании большой жесткости, описываемая уравнением

$$\varepsilon(w_{xx} + w_{yy}) - w = Q(x, y), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (2.6)$$

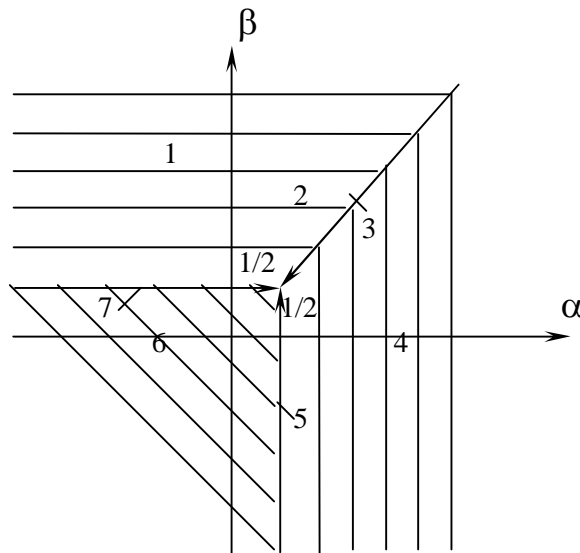


Рис. 2.3. Разбиение плоскости параметров изменяемости  $\alpha$ ,  $\beta$  для модельной задачи (2.6).

Предполагаем, что мембрана закреплена по контуру:

$$w = 0 \text{ при } x = 0; a, y = 0; b. \quad (2.7)$$

Изменяемость решения  $w$  зависит от изменяемости правой части уравнения (2.6). Чтобы учесть этот факт, введем параметры асимптотического интегрирования  $\alpha$  и  $\beta$  при помощи следующих соотношений:

$$w_x \sim \varepsilon^{-\alpha} w; \quad w_y \sim \varepsilon^{-\beta} w; \quad -\infty < \alpha, \beta < \infty. \quad (2.8)$$

Рассмотрим все возможные значения  $\alpha$  и  $\beta$ . Это позволит выявить различные упрощенные уравнения, которые, взаимно дополняя друг друга, позволяют в своей совокупности приближенно исследовать весь круг задач, описываемых исходным уравнением (2.6). Положим  $Q = 0$  и выпишем показатели степеней  $\varepsilon$  всех членов уравнения (2.6):

$$1 - 2\alpha; 1 - 2\beta; 0.$$

Рассмотрим плоскость  $\alpha\beta$  (рис.2.3) и построим на ней зоны, соответствующие наименьшим значениям показателей.

Показатель  $1 - 2\alpha$  будет наименьшим при выборе значений  $\alpha$  и  $\beta$  в зоне 4. Показатель  $1 - 2\beta$  наименьший в зоне 1, а показатель  $1 - 2\alpha$  наименьший в зоне 6 (области 1, 4, 6 рассматриваются как открытые, т.е. граничные прямые в них не включаются). При выборе параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в зонах 1,4,6 предельные уравнения принимают соответственно вид

$$w_{yy} = 0; \quad (2.9)$$

$$w_{xx} = 0; \quad (2.10)$$

$$w = 0. \quad (2.11)$$

Это максимально простые в данном случае уравнения, содержащие всего по одному члену. На граничных прямых (точка  $(1/2, 1/2)$  пока исключается из рассмотрения) лежат те значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых предельные уравнения содержат уже по два члена. Нетрудно убедиться, что для областей 3, 5, 7 они таковы:

$$w_{xx} + w_{yy} = 0; \quad (2.12)$$

$$\varepsilon w_{xx} - w = 0; \quad (2.13)$$

$$\varepsilon w_{yy} - w = 0. \quad (2.14)$$

Наконец, точка пересечения граничных прямых (зона 2) дает значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых в однородном уравнении (2.6) остаются все члены ( $\alpha = \beta = 1/2$ ):

$$\varepsilon(w_{xx} + w_{yy}) - w = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку теперь на плоскости  $\alpha\beta$  не осталось «белых пятен», других вариантов предельных систем, кроме (2.9)-(2.15), нет.

Рисунок, подобный рис. 2.2, удачно назван в статье [15] «асимптотическим портретом системы». Пример эффективного использования асимптотического портрета сложной системы приведен в § 3.3.

Описанный графический способ позволяет достаточно просто решить задачу подбора двух параметров асимптотического интегрирования. Процедура поиска бóльшего числа параметров асимптотического интегрирования может быть автоматизирована [16,17].

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение, описывающее напряженное состояние растянутой пластинки:

$$\varepsilon \nabla^4 w - \nabla^2 w = Q(x, y). \quad (2.16)$$

Предполагаем, что пластина закреплена по контуру:

$$\text{при } x = 0, a \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Для поиска различных предельных систем введем параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , характеризующие изменяемость искомой функции  $w$  по  $x$  и  $y$  соответственно,

при помощи формул (отметим отличие в знаке в показателях степеней от формул (2.8)):

$$w_x \sim \varepsilon^\alpha w, w_y \sim \varepsilon^\beta w.$$

На первом этапе будем считать  $Q=0$  и построим все возможные асимптотики однородного уравнения

$$\varepsilon w_{xxxx} + 2\varepsilon w_{xyyy} + \varepsilon w_{yyyy} - w_{xx} - w_{yy} = 0. \quad (2.17)$$

Оценим порядки всех входящих в уравнение (2.17) членов:

$$\varepsilon^{1+4\alpha}, \quad \varepsilon^{1+2\alpha+2\beta}, \quad \varepsilon^{1+4\beta}, \quad \varepsilon^{2\alpha}, \quad \varepsilon^{2\beta}. \quad (2.18)$$

Алгоритм поиска предельных систем и соответствующих показателей изменчивости описан ранее. Его можно упростить следующим образом: оставляя в уравнении (2.17) соответственно по одному члену, затем по два и т.д., подбирать значения показателей  $\alpha$  и  $\beta$ . Если таковых не существует, предельная система невозможна. При этом некоторые случаи сразу можно отбрасывать (например, в последовательности (2.18) не может оказаться самым большим второй член; невозможно, чтобы остались первый и третий член без второго, и т.д.). В результате вся плоскость параметров  $\alpha, \beta$  должна разбиться на некоторые классы эквивалентности (пары значений параметров  $(\alpha_1, \beta_1)$  и  $(\alpha_2, \beta_2)$  будем называть эквивалентными, если они приводят к одинаковым предельным системам). Этот алгоритм можно записать в виде систем неравенств. Так, условия существования предельной системы, содержащей только первый член уравнения (2.17), таковы:

$$1 + 4\alpha > 1 + 2\alpha + 2\beta, \quad 1 + 4\alpha > 1 + 4\beta, \quad 1 + 4\alpha > 2\alpha, \quad 1 + 4\alpha > 2\beta.$$

Условия существования предельной системы

$$\varepsilon w_{xxxx} - w_{yy} = 0$$

имеют вид  $1 + 4\beta = 2\alpha, \quad 2\alpha > 2\beta, \quad 2\alpha > 1 + 2\alpha + 2\beta,$  и т.д.

Таким образом, вместо анализа самих членов уравнения мы приходим к анализу показателей степеней порядков этих членов. Подобная методика получила название «степенная геометрия» [18]. Ее далеко идущее математическое обобщение называется идемпотентным анализом [19].

В данном случае можно воспользоваться симметрией системы относительно замены  $x$  на  $y$ , что существенно упростит выкладки. Итак, выпишем возможные предельные системы, соответствующие уравнению (2.17):

$$1) \varepsilon w_{xxxx} = 0; \quad 2) \varepsilon w_{yyyy} = 0; \quad 3) w_{xx} = 0; \quad 4) w_{yy} = 0; \quad 5) \varepsilon \nabla^4 w = 0;$$

$$6) \nabla^2 w = 0; \quad 7) \varepsilon w_{xxxx} - w_{xx} = 0; \quad 8) \varepsilon w_{yyyy} - w_{yy} = 0; \quad 9) \varepsilon \nabla^4 w - \nabla^2 w = 0.$$

При этом плоскость  $\alpha\beta$  разбивается на классы эквивалентности (рис. 2.4), среди которых одна точка  $(-1/2, -1/2)$ , четыре луча и четыре четвертьплоскости. Других предельных систем быть не может.

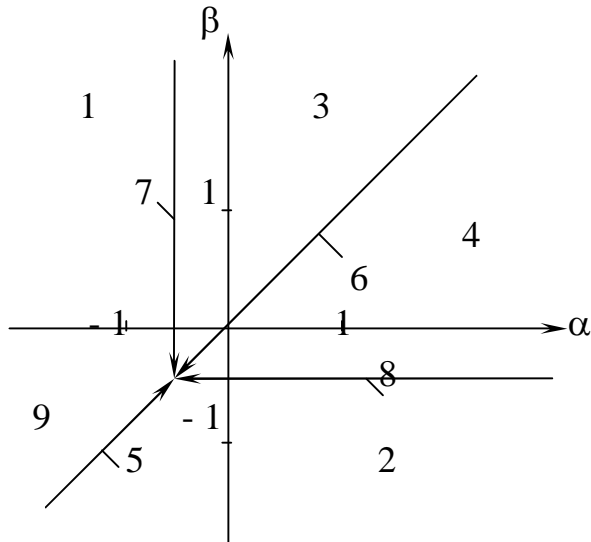


Рис. 2.4. Разбиение области параметров изменчивости  $\alpha$ ,  $\beta$  для задачи (2.17).

Найденные предельные системы можно расположить в иерархической последовательности в соответствии со степенью упрощения:

$$\varepsilon \nabla^4 w - \nabla^2 w = 0;$$

$$\nabla^2 w = 0; \quad \varepsilon \nabla^4 w = 0;$$

$$\varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0.$$

Опишем схему применения найденных приближенных соотношений. Пусть изменчивость правой части неоднородного уравнения (2.16) мала:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \sim Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} \sim Q.$$

Тогда в первом приближении следует использовать предельную систему

$$\nabla^2 w_0 = q. \quad (2.19)$$

Как и ранее, нужно произвести расчленение граничных условий. Нетрудно показать, что для уравнения (2.19) должны быть поставлены граничные условия

$$\text{при } x = 0, a \quad w_0 = 0;$$

$$\text{при } y = 0, b \quad w_0 = 0.$$

Невязки в остальных граничных условиях снимаются решениями типа пограничных слоев. На краях  $x = 0, a$  погранслоем описывается уравнением

$$\varepsilon \frac{\partial^2 w_{nl}}{\partial x^2} - w_{nl} = 0$$

с граничными условиями

$$w_{n1x} = -w_{0x} \quad \text{при } x = 0, a.$$

На краях  $y = 0, b$  погранслоем описывается уравнением

$$\varepsilon \frac{\partial^2 w_{n2}}{\partial y^2} - w_{n2} = 0,$$

а граничные условия при  $y = 0, b$  таковы:

$$w_{n2y} = -w_{0y}.$$

Построенные погранслои снимают невязки всюду, за исключением узких (протяженностью порядка  $\varepsilon$ ) зон в углах области. Здесь возникают так называемые угловые погранслои.

### 3.3 Пример асимптотического расщепления дифференциального уравнения в частных производных

В переменных  $\xi = x/R, \eta = y/R$  разрешающее уравнение равновесия изотропной круговой цилиндрической оболочки имеет вид [5,6]

$$\nabla^4 \nabla^4 \Phi + a^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + (8 - 2\nu^2) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} + 8 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \eta^6} + 4 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0, \quad (3.1)$$

где  $\Phi$  - разрешающая функция,  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}$ ;  $a^2 = h^2 / (12(1 - \nu^2)R^2)$ ;

$R, h$  - радиус оболочки и ее толщина;  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Введем параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , характеризующие изменчивость искомой функции  $\Phi$  по  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sim a^\alpha \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \sim a^\beta \Phi.$$

Опишем все возможные асимптотики уравнения (3.1):

а) предельные уравнения, содержащие по одному члену:

$$1) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} = 0; \quad (3.2)$$

$$2) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} = 0; \quad (3.3)$$

$$3) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (3.4)$$

$$4) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0; \quad (3.5)$$

б) предельные уравнения, содержащие по два члена:

$$5) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^8} + a^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad \text{отсюда} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + a^{-2} \Phi = 0; \quad (3.6a)$$

$$6) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \eta^8} + a^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (3.7)$$

в) предельные уравнения, содержащие три и более членов:

$$7) \nabla^8 \Phi = 0; \quad (3.8)$$

это уравнение распадается на следующие два

$$\nabla^4 \Phi = 0; \quad (3.8a)$$

$$\nabla^4 \Phi = 0; \quad (3.8б)$$

$$8) \nabla^8 \Phi + a^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (3.9)$$

$$9) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right)^2 \Phi + a^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (3.10)$$

$$10) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right)^2 \Phi = 0. \quad (3.11)$$

Все полученные предельные уравнения имеют физический смысл: уравнение (3.5) описывает безмоментную теорию, уравнения (3.7),(3.10) – полубезмоментную теорию (соответственно с большой и малой изменчивостью по  $\eta$ ). По терминологии Гольденвейзера [5], это уравнения основного состояния. Уравнение (3.6a) соответствует краевому эффекту, уравнение (3.9) – теории пологих оболочек (называемому иногда состоянием с большим показателем изменчивости или уравнением технической теории оболочек, а также уравнением Доннелла-Муштари). Уравнение (3.8) описывает изгибную деформацию кольца; уравнения (3.2) и (3.3) – изгибные и продольные деформации стержня в направлении осей  $\eta$  и  $\xi$  соответственно; уравнение (3.4) – продольную деформацию стержня в направлении оси  $\eta$ . Уравнения (3.8a) и (3.8б) описывают плоское напряженное состояние и изгиб пластины соответственно.

Нетрудно также определить значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующие каждому из предельных случаев:

$$1) \alpha < -\frac{1}{2}, \beta > \alpha; \quad 2) \beta < -\frac{1}{2}, \beta > \alpha \text{ и } -\frac{1}{2} < \beta < 0, \alpha < \frac{1}{2} + 2\beta;$$

$$3) \beta > \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \alpha > -\frac{1}{2}; \quad 4) 0 < \beta < \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}, \alpha > \frac{1}{2};$$

$$5) \beta > \alpha, \alpha = -\frac{1}{2}; \quad 6) \beta > -\frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2} + 2\beta;$$

$$7) \beta < -\frac{1}{2}, \alpha = \beta; \quad 8) \beta = \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$9) \beta = 0, \alpha = \frac{1}{2}; \quad 10) \beta = 0, \alpha > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вся плоскость параметров  $\alpha$  и  $\beta$  разбивается на ряд достаточно сложных областей (рис. 3.1). Среди них есть две точки, три луча,

четыре «куска плоскости» и одна область, состоящая из отрезка без крайних точек и луча. Интересно, что ни при каких значениях изменчивостей не получается исходное уравнение.

Самое общее из полученных уравнений – (3.9), оно включает в себя почти все предельные уравнения, за исключением (3.10) и (3.11). Уравнение безмоментной теории – вырожденное уравнение, лежащее на спектре. Уравнения полубезмоментной теории (3.7) и (3.10) – дополнительные для нее. Краевой эффект (3.6) позволяет удовлетворить граничным условиям.

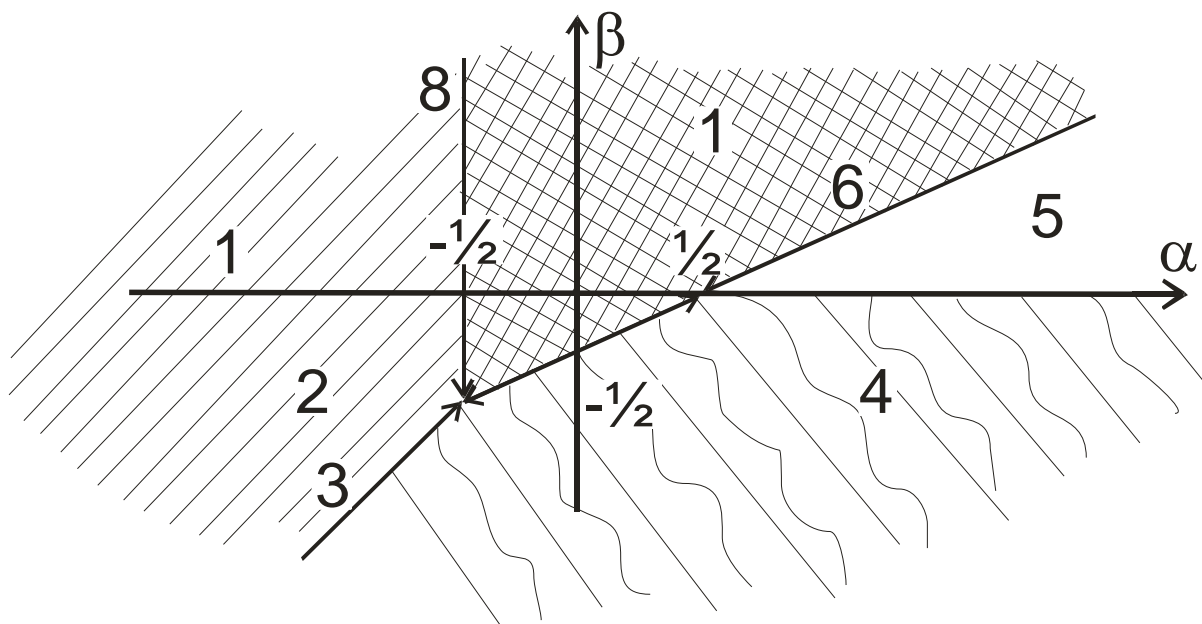


Рис. 3.1. Асимптотический портрет круговой цилиндрической оболочки.

### 3.4 Метод многих масштабов

Метод многих масштабов столь популярен, что его заново открывают почти каждые полгода.

Найфэ [20,с.249].

Еще один подход к исследованию сингулярно возмущенных краевых задач – метод двух (или нескольких) масштабов. Его идея проста и наглядна. Поясним ее на примере колебаний маятника с малой массой:

$$\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0; \quad (4.1)$$

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (4.2)$$

Вместо одной независимой переменной  $t$  введем две – «медленную», совпадающую с исходной ( $t_1 = t$ ), и «быструю»  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ . Первая используется при описании основного состояния, вторая – состояния типа погранслоя. Производная по времени по правилу полной производной запишется так:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (4.3)$$



Зависимая переменная  $x_0$  теперь функция двух аргументов:  $t_1$  и  $\tau$ . Подставляя выражение (4.3) в уравнение (4.1) и краевые условия (4.2), имеем:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t_1} + 1 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t_1} \right) x + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x}{\partial t_1^2} = 0; \quad (4.4)$$

$$x(0, 0) = a; \quad \left. \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t_1} \right) \right|_{\substack{\tau=0, \\ t_1=0}} = 0. \quad (4.5)$$

Вместо сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения мы формально приходим к дифференциальному уравнению в частных производных, но уже не содержащему малого параметра при старших производных. Такой прием регуляризации называется иногда подъемом в пространство высшего измерения [21]. Теперь решение можно разыскивать в виде одного асимптотического ряда

$$x = x_0(t_1, \tau) + \varepsilon x_1(t_1, \tau) + \dots \quad (4.6)$$

Подставляя выражение (4.6) в уравнение (4.4) и начальные условия (4.5), получаем

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau} = 0; \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} = -\frac{\partial x_0}{\partial t_1} - x_0 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t_1}; \quad (4.8)$$

..... ,

при  $t_1 = 0, \tau = 0$

$$x_0 = a; \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial \tau} = 0; \quad (4.10)$$

$$x_1 = 0; \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = \frac{\partial x_0}{\partial t_1}; \quad (4.12)$$

.....

Общее решение уравнения (4.7) имеет вид

$$x_0 = C(t_1) + C_1(t_1)e^{-\tau}. \quad (4.13)$$

Из начальных условий (4.9), (4.10) следует, что

$$C_1(0) = 0; \quad C(0) = a. \quad (4.14)$$

Функция  $C(t_1)$  пока остается неопределенной. Для ее нахождения рассмотрим уравнение (4.8):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t_1} = -\frac{\partial C}{\partial t_1} - C. \quad (4.15)$$

Если правая часть уравнения (4.15) не обращается в ноль, то решение  $x_1$  содержит секулярный член. Ставя условие отсутствия секулярностей, приходим к уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t_1} + C = 0.$$

Отсюда с учетом условия (4.14) имеем  $C = ae^{-t_1}$ . Общее решение уравнения (4.8) теперь можно представить так

$$x_1 = C^1(t_1) + C_1^1(t_1)e^{-t_1}.$$

Из начальных условий (4.11),(4.12) получаем

$$C^1(0) = -C_1^1(0), C_1^1(0) = a.$$

Функция  $C^1(t_1)$  должна определяться из условия отсутствия секулярностей в уравнениях второго приближения.

Существенным преимуществом метода двух масштабов является возможность применения его в случаях нерегулярного вырождения. Рассмотрим, например, уравнение

$$\varepsilon^2 y''' + y' + y = 0 \tag{4.16}$$

с начальными условиями

$$y(0) = a; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 0; \quad a = \text{const.} \tag{4.17}$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае условия регулярности вырождения не удовлетворяются, поскольку корни характеристического уравнения для уравнения

$$\varepsilon^2 y'' + y = 0$$

чисто мнимые. Следовательно, решение уравнения (4.16) нельзя разделить на основное состояние и пограничный слой. В то же время метод двух масштабов работает и в этом случае. Действительно, выбрав медленную и быструю переменные в виде  $x_1 = x$  и  $\xi = \varepsilon^{-1}x$  и представляя исходную функцию рядом

$$y = y_0(x_1, \xi) + \varepsilon y_1(x_1, \xi) + \dots,$$

получаем следующие рекуррентные последовательности уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^3} + \frac{\partial y_0}{\partial \xi} = 0; \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial y_0}{\partial x_1} - y_0 - 3\frac{\partial^3 y_0}{\partial \xi^2 \partial x_1}; \tag{4.19}$$

..... ;

$$y_0(0, 0) = a; \quad \frac{\partial y_0(0, 0)}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial^2 y_0(0, 0)}{\partial \xi^2} = 0; \tag{4.20}$$

$$y_1(0, 0) = 0; \quad \frac{\partial y_1(0, 0)}{\partial \xi} = -\frac{\partial y_0(0, 0)}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial^2 y_1(0, 0)}{\partial \xi^2} = 0; \tag{4.21}$$

.....

Из первого уравнения (4.18) с учетом начальных условий (4.20) имеем

$$y_0 = C(x_1); \quad C(0) = a,$$

а из условий отсутствия секулярных членов в решении уравнения (4.19)

находим

$$C(x_1) = ae^{-x_1}.$$

Наконец, быстрая часть решения уравнения (4.19) с учетом начальных условий (4.21) примет вид

$$y_1 = -a \sin \xi.$$

Таким образом, если метод погранслоя хорошо работает в случаях, когда некоторая часть решения локализуется в окрестностях точек или линий, то метод двух масштабов позволяет разделять решения с существенно различной изменяемостью и в тех случаях, когда локализации нет. Естественным обобщением метода двух масштабов является метод нескольких масштабов. Кроме того, иногда «быструю» переменную выгодно брать в более общем виде, а именно, в виде функции от медленной переменной и малого параметра (например,  $\tau = \varphi(t, \varepsilon)/\varepsilon$ ). Примеры выбора таких функций (называемых регуляризирующими), содержащих в себе всю нерегулярную зависимость от  $\varepsilon$ , приведены в [21].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 328 p.
2. Eckhaus W. Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations. Amsterdam: North-Holland, 1973. 145 p.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957, т. 12, № 5, с. 3-122.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН, 1960, т.15, № 3, с. 3-80.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. Вахромеев Ю.М., Корнев В.М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения, 1977, т. 13, № 7, с.1163–1170.
8. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1964. 336 с.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Наука, 1990. 208 с.
11. Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций/ Товстик П.Е., Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Филиппов С.Б. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1995. 188 с.

12. Асимптотические методы в механике твердого тела/ Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных иссл., 2007. 356 с.
13. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
14. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
15. Квасников Б.Н. Укороченные уравнения и асимптотический портрет в теории тонких оболочек // Асимпт. методы в мех. деф. тв. тела. СПб.: Изд-во СПб. ГУ, 2006, с. 36-59.
16. Шамровский А.Д. Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования // ПММ, 1979, т. 43, № 5, с. 859-868.
17. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. Запорожье: Изд-во Запорожской государственной инженерной академии, 1997. 170 с.
18. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, Физматлит, 1998. 288 с.
19. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Шпиз Г.Б. Линейные функционалы на идемпотентных пространствах. Алгебраический подход // ДАН РАН, 1998, т. 363, № 3, с. 298-300.
20. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
21. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.