

4 МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ И ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Несколько слов о терминологии. В англоязычной литературе принято различать *averaging* – осреднение в нелинейных задачах механики и *homogenization* – осреднение дифференциальных уравнений с быстро переменными коэффициентами. Поскольку каждая из этих областей имеет огромный арсенал специфических приемов, мне такое различие кажется естественным. Разумеется, в основе обоих подходов лежит одна и та же идея разделения быстрых и медленных составляющих решения (рис. 0.1).

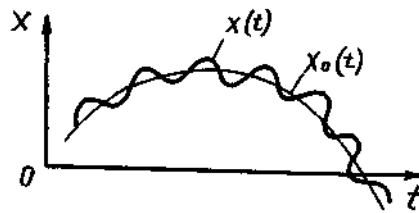


Рис. 0.1. Разложение исходного решения на сумму медленных (осредненных) и быстро изменяющихся частей.

4.1 Осреднение при помощи метода многих масштабов

Конкретная реализация метода осреднения может быть различной, например, можно применять метод медленных амплитуд Ван дер Поля [1,2] или преобразование Гильберта [3]. Однако при этом «Метод осреднения в своих основах окутан некоторым туманом. Нелегко точно объяснить, почему нужно применять операцию осреднения по быстрому времени и почему при этом нужно замораживать медленное время t и, соответственно, функции от t . Метод многомасштабных разложений развеивает эту мистику» [4,с.130].

Именно метод многих масштабов мы и будем использовать далее. Тем более, что «Все известные асимптотические методы приводят к одному и тому же уравнению. Возможно, первым обратил на это внимание Н.Н.Моисеев [5]. Метод многих масштабов дает наиболее регулярный подход к разысканию высших приближений. Немаловажен и тот факт, что иной раз метод многомасштабных разложений дает представление решения в виде *сходящегося* ряда» [4,с.144].

Начнем с уравнения Дюффинга с малой нелинейностью

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

Линейное уравнение ($\varepsilon = 0$) имеет следующее общее решение:

$$x_0 = A \cos t + B \sin t, \quad (1.2)$$

где $A, B = \text{const}$.

Естественно предположить, что при значениях $0 < \varepsilon \ll 1$ решение исходного уравнения (1.1) можно записать приближенно в виде (1.2), где A и B

- медленно меняющиеся функции t .

В соответствии с методом двух масштабов введем «медленное время» $\tau = \varepsilon t$, сохранив для «быстрого времени» обозначение t . Тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Представляя искомое решение x в виде

$$x = x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \dots,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + \dots; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

После расщепления по ε приходим к следующей рекуррентной последовательности:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + x_0 = 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial t} - x_0^3; \tag{1.4}$$

.....

Решение уравнения (1.3) можно записать так:

$$x_0 = A(\tau) \cos t + B(\tau) \sin t. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.4) тогда примет вид

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = P(t, \tau) = 2 \frac{dA}{d\tau} \sin t - 2 \frac{dB}{d\tau} \cos t - (A \cos t + B \sin t)^3. \tag{1.6}$$

Отсутствие секулярных членов в решении уравнения (1.6) обеспечено, если

$$\int_0^{2\pi} P(t, \tau) \cos t dt = 0; \quad \int_0^{2\pi} P(t, \tau) \sin t dt = 0. \tag{1.7}$$

Условия (1.7) образуют систему дифференциальных уравнений относительно функций $A(\tau)$, $B(\tau)$:

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{3}{8}(A^2 + B^2)B; \quad \frac{dB}{d\tau} = -\frac{3}{8}(A^2 + B^2)A.$$

Аналогично можно выписать систему осредненных уравнений, если решение порождающего уравнения (1.1) записать в виде

$$x = a(t) \cos(t + \theta(\tau)) \tag{1.8}$$

при условии

$$\frac{dx}{dt} = -a(t) \sin(t + \theta(\tau)). \tag{1.9}$$

Функции $a(t)$ и $\theta(t)$ имеют смысл амплитуды и фазы колебаний.

Дифференцирование выражения (1.8) по t дает

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin(t + \theta) + \frac{da}{dt} \cos(t + \theta) - \frac{d\theta}{dt} a \sin(t + \theta). \quad (1.10)$$

Подставив это соотношение в (1.1) и используя равенство (1.9), получим

$$\frac{da}{dt} \sin(t + \theta) + a \frac{d\theta}{dt} \cos(t + \theta) = \varepsilon a^3 \cos^3(t + \theta). \quad (1.11)$$

Разрешая уравнения (1.10) и (1.11) относительно $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$, имеем

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a^3 \cos^3(t + \theta) \sin(t + \theta); \quad (1.12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon a^2 \cos^4(t + \theta). \quad (1.13)$$

Так как a и θ – слабо меняющиеся функции времени (поскольку значение ε мало), то их изменение за время $T = 2\pi$, равное периоду правых частей, мало. Осредняя правые части уравнений (1.12) и (1.13) по интервалу $[t, t+T]$, в течение которого величины a и θ в правых частях этих уравнений могут считаться постоянными, получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^3(t + \theta) \sin(t + \theta) dt = 0; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4(t + \theta) dt = \frac{3}{8}.$$

Отсюда

$$\frac{da}{dt} = 0; \quad (1.14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{8} \varepsilon a^2. \quad (1.15)$$

Тогда из выражения (1.14) следует, что a – постоянная, а из соотношения (1.15) находим $\theta = \frac{3}{8} \varepsilon a_0^2 t + \theta_0$, поэтому в первом приближении имеем

$$u = a_0 \cos\left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon A_0^2\right) t + O(\varepsilon).$$

Разумеется, представления решения нулевого приближения в виде (1.5) и (1.9) эквивалентны.

Поправка к частоте колебаний совпадает с полученной ранее другими методами (например, методом Линдстедта-Пуанкаре).

Отметим, что в качестве нулевого приближения можно выбирать не только линейные уравнения. Например, в [7,8] используются в качестве исходных нелинейные уравнения, интегрируемые в эллиптических функциях. При этом выкладки существенно усложняются, но нелинейные эффекты учитываются с самого начала.

4.2 Дифференциальные уравнения с быстро переменными коэффициентами

Продemonстрируем метод гомогенизации на простой одномерной задаче [9-11]

решению $u_1|_0^1 = 0$ определяем постоянную $C(y)$

$$C = \hat{a} \frac{du_0}{dy}; \quad \hat{a} = \left[\int_0^1 a^{-1} d\eta \right]^{-1}.$$

Исключая функцию $\partial u_1 / \partial \eta$ из уравнения (4.7), получаем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} = q(y). \quad (2.11)$$

Теперь для выделения из уравнения (2.11) медленных составляющих естественно применить процедуру гомогенизации, подействовав на каждый член

уравнения оператором осреднения $\int_0^1 (...) d\eta$. Первые два слагаемые в результате

осреднения обращаются в нуль в силу периодичности, и окончательно из уравнения (2.11) имеем

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} = q(y). \quad (2.12)$$

Для уравнения (2.12) должно быть поставлено граничное условие

$$u_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, L. \quad (2.13)$$

Определим теперь функцию u_1 из соотношения (2.10)

$$u_1 = \frac{du_0}{dy} \left(\hat{a} \int_0^1 a^{-1} d\eta - \eta \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Далее функция u_1 периодически продолжается по координате η с периодом единица.

Найденное значение u_1 не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям (2.2), при этом соответствующие невязки имеют порядок ε . Для их компенсации приходим к задаче, которая в исходных переменных имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] = 0;$$

$$u|_{x=0} = A = u_1|_{y=\eta=0}; \quad u|_{x=L} = B = u_1|_{y=L, \eta=L/\varepsilon}.$$

Снова применяя к этой задаче метод гомогенизации, получим в первом приближении

$$\hat{a} \frac{d^2 u_{10}}{dy^2} = 0; \quad u_{10}|_{y=0} = A; \quad u_{10}|_{y=L} = B.$$

Это естественно приводит к мысли искать в дальнейшем решение задач рассматриваемого типа в виде разложения

$$u = u_0(y) + \varepsilon[u_{10}(y) + \varepsilon u_{20}(y) + \varepsilon^2 u_{30}(y) + \dots] +$$

$$+ \varepsilon[u_1(\eta, y) + \varepsilon u_2(\eta, y) + \varepsilon^2 u_3(\eta, y) + \dots]. \quad (2.14)$$

Здесь $u_i(\eta, y)$ – функции с нулевым средним по периоду.

Рассмотрим еще один модельный пример, относящийся уже к нелинейному

уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] + b \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u^3 = q(x); \quad (2.15)$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \quad (2.16)$$

Вводя, как и ранее, быструю и медленную переменные η и y и представляя функцию u в виде (2.4), получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] + \frac{da}{d\eta} \frac{du_0}{dy} = 0; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a(\eta) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + a(\eta) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \eta} + \\ & + a(\eta) \frac{d^2 u_0}{dy^2} + b(\eta) u_0^3 = q(y); \end{aligned} \quad (2.18)$$

..... ;

$$\begin{aligned} & u_0 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, l; \\ & u_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, l; \quad \eta = 0, L/\varepsilon; \end{aligned} \quad (2.19)$$

..... .

Уравнение (2.17) совпадает с уравнением (2.6) – «локальная задача» не меняется при добавлении в уравнение новых членов без изменения старших производных. Используя решение (2.10), находим осредненное уравнение

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \hat{b} u^3 = q(y), \quad \hat{b} = \int_0^1 b(\eta) d\eta. \quad (2.20)$$

Граничные условия для уравнения (2.20) имеют вид (2.19).

Обратим внимание на важный факт:

$$u = u_0 + O(\varepsilon), \quad \text{но} \quad \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dy} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + O(\varepsilon).$$

Иными словами, хотя решение гомогенизированного уравнения u_0 аппроксимирует функцию u с точностью до членов порядка ε , в выражении для производной нужно удерживать члены с u_1 , так как последние сильно возрастают при дифференцировании. Именно их наличие и осложняет процесс непосредственного численного решения.

Перейдем к физической трактовке коэффициентов гомогенизированного уравнения (2.20). Видно, что осредняются жесткость b и податливость $1/a$. Осреднение жесткостей часто называется осреднением по Фойгту, осреднение податливостей – осреднением по Рейссу. Эти оценки представляют собой среднее арифметическое и среднее гармоническое характеристик матрицы и включений для композитов. Для широкого класса задач известно, что истинные значения коэффициентов осредненных уравнений (2.20) \tilde{a}_{ij} находятся между значениями коэффициентов, осредненных по Фойгту (\bar{a}_{ij}) и Рейссу (\hat{a}_{ij}):

$$\hat{a}_{ij} \leq \tilde{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}. \quad (2.21)$$

Оценка (2.21) часто называется «вилкой Фойгта-Рейсса» или «вилкой

Хилла», хотя впервые она была получена, по-видимому, Винером [12]. К сожалению, интервал между указанными оценками часто слишком велик. Для примера на рис. 2.1 представлены результаты расчета осредненной проводимости композитного материала, состоящего из матрицы и квадратных включений. Исходная задача описывается уравнением Лапласа в периодически неоднородной среде. Ячейка периодичности представляет собой квадрат со стороной 1, включения расположены симметрично относительно центра этого квадрата и имеют сторону равную $1/3$, отношение проводимостей матрицы и включения обозначено буквой λ . Пунктирной кривой показана оценка Фойгта, точечной – оценка Рейсса. Сплошной линией показаны результаты гомогенизации при численном решении задачи на ячейке [10,13]. Рис. 2.1 дает

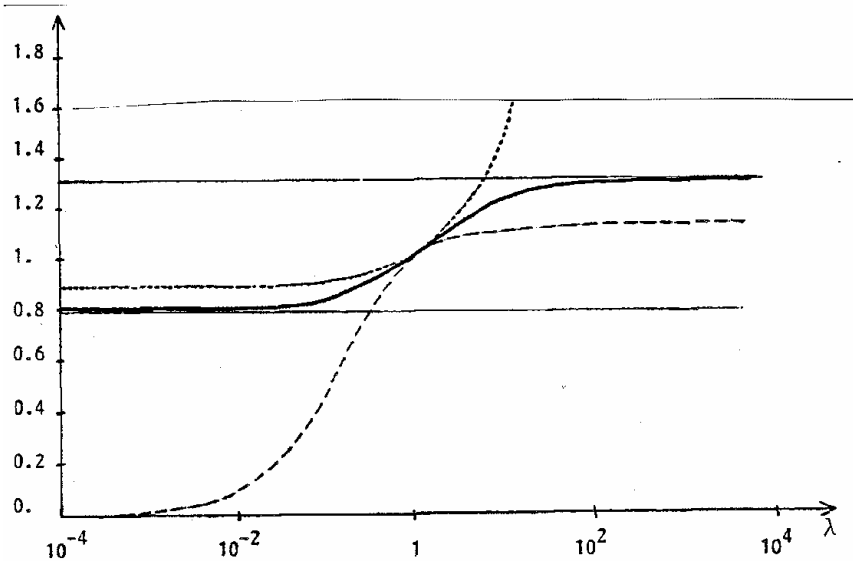


Рис. 2.1. Сравнение результатов гомогенизации уравнения Лапласа в периодически неоднородной среде с оценками Фойгта и Рейсса.

представление о применимости оценок (2.21) на практике.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения

$$\frac{d}{dx} \left[a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du}{dx} \right] + \lambda u = 0;$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L. \tag{2.22}$$

Искомую собственную форму представим в виде (2.14), а собственное число λ таким образом:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots \tag{2.23}$$

После подстановки разложений (2.14), (2.23) в исходную краевую задачу (2.22) и учета выражения для производной (2.3) получаем следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_0}{dy} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[a \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right] = 0; \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + a(\eta) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial \eta} + \\ & + \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_{10}}{dy} + a \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \lambda_0 u_0 = 0; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(a \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{du_{20}}{dy} + a \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial \eta} + \\ & + a \frac{d^2 u_{10}}{dy^2} + \lambda_1 u_0 + \lambda_0 (u_{10} + u_1) = 0; \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\dots \dots \dots \quad u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, L; \quad (2.27)$$

$$\dots \dots \dots \quad u_1 + u_{10} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, L/\varepsilon; \quad (2.28)$$

Определяя из уравнения (2.24) значение $\partial u_1 / \partial \eta$, подставляя его в уравнение (2.25) и граничные условия (2.27) и производя осреднение, приходим к краевой задаче для u_0, λ_0 :

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dy^2} + \lambda_0 u_0 = 0; \quad u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, L.$$

Теперь из уравнения (2.25) находим:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} = -\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{du_{10}}{dy} + \frac{C_1(y)}{a}.$$

Из условия периодичности функций u_2 по переменной η определяем

$$C_1 = \hat{a} \frac{du_{10}}{dy} + \hat{a} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial y}, \quad \text{где } \hat{u}_1 = \int_0^1 u_1 d\eta.$$

Подставляя найденные значения u_1, u_2 в уравнение (2.26) и производя осреднение, имеем

$$\hat{a} \frac{d^2 u_{10}}{dy^2} + \lambda_0 u_{10} + \hat{a} \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial y^2} + \lambda_0 \hat{u}_1 + \lambda_1 u_0 = 0. \quad (2.29)$$

Граничные условия для уравнения (2.29) получаются из условий (2.28) и имеют вид

$$u_{10} = -\hat{u}_1 \quad \text{при } y = 0, L. \quad (2.30)$$

Малая поправка к частоте колебаний λ_1 определяется как обычно в методе возмущений, после чего медленная поправка к осредненному решению u_{10} находится из решения краевой задачи (2.29), (2.30).

Изложенный выше подход позволяет определить решение в любом приближении по ε . Еще одна его привлекательная черта – общность. Действительно, если найдено решение локальной задачи, то без труда определяется решение как исходной задачи, так и задачи на собственные

значения. Если добавить в уравнения нелинейные члены (так, чтобы высшие производные не изменились), то построение осредненных соотношений снова не усложняется. Локальная задача остается точно такой же, как и в линейном случае, линейными будут и высшие приближения. Вся нелинейность содержится в осредненных краевых задачах с гладкими коэффициентами, которые удобно решать численно или вариационными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
3. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
4. Юдович В.И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики, 2006, № 3, ч. 1, с. 26-74; ч. 2, с. 75-129; ч. 3, с. 130-158.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 327 с.
7. Chen S.H., Cheung Y.K. An elliptic perturbation method for certain strongly nonlinear oscillators // J. Sound Vibr., 1996, vol. 192, No 2, p. 453-464.
8. Yuste B. S., Bejarano J. D. Improvement of a Krylov-Bogoliubov method that uses Jacobi elliptic functions // J. Sound Vibr., 1990, vol. 139, No 1, p. 151-163.
9. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam: North-Holland, 1978. 700 p.
10. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
11. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
12. Wiener O. Die Theorie des Mischkörpers für das Feld der stationären Strömung. Erste Abhandlung die Mittelwertsätze für Kraft, Polarisierung und Energie // Der Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1912, vol. 32, p. 509-604.
13. Bourgat J.F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients // Lecture Notes Math., 1979, vol. 704, p. 330-356.