

5 СУММИРОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

5.1 Анализ степенных рядов

Предположим, что получено следующее представление функции $f(\varepsilon)$:

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varepsilon^n \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Как известно [1], радиус сходимости ε_0 ряда (1.1) определяется расстоянием до ближайшей особенности функции $f(\varepsilon)$ на комплексной плоскости и может быть найден по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |C_n|^{1/n}.$$

Если ближайшая особенность лежит на положительной части действительной оси, то коэффициенты C_n имеют обычно один и тот же знак, например,

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \sim 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots$$

Если ближайшая особенность расположена на отрицательной части действительной оси, то знаки коэффициентов C_n чередуются, например,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \sim 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots$$

Период повторения знаков C_n обычно устанавливается довольно быстро. Если имеется несколько особенностей одного и того же радиуса, что может случиться для действительной функции, имеющей особенности в комплексно сопряженных точках, то правило чередования знаков может быть более сложным, например

$$\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \sim 1 + \varepsilon - \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 - \varepsilon^6 - \varepsilon^7 \dots$$

Здесь имеет место чередование знаков $++--$.

Для определения ε_0 может оказаться полезной диаграмма Домба-Сайкса [2,3,4-6]. Пусть функция f имеет одну ближайшую особенность в точке $\varepsilon = \pm \varepsilon_0$ с индексом α , т.е.

$$f(\varepsilon) \sim \begin{cases} (\varepsilon_0 \pm \varepsilon)^\alpha & \text{при } \alpha \neq 0, 1, 2, \dots, \\ (\varepsilon_0 \pm \varepsilon)^\alpha \ln(\varepsilon_0 \pm \varepsilon) & \text{при } \alpha = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} \sim \mp \frac{1}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1+\alpha}{n} \right).$$

Строя график зависимости C_n/C_{n-1} от $1/n$, получаем радиус сходимости (как величину, обратную отрезку, отсекаемому на оси C_n/C_{n-1}), а затем, зная тангенс угла наклона, искомую сингулярность. На рис. 1.1 представлены численные результаты для функции

$$f(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)^{-1/2} \sim \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^3 - \frac{3}{2}\varepsilon^4 + \frac{27}{8}\varepsilon^5 - \frac{51}{8}\varepsilon^6 + \frac{191}{16}\varepsilon^7 - \frac{359}{16}\varepsilon^8 + \dots \quad (1.2)$$

Начиная с $n = 7$ точки выстраиваются в линейную зависимость.

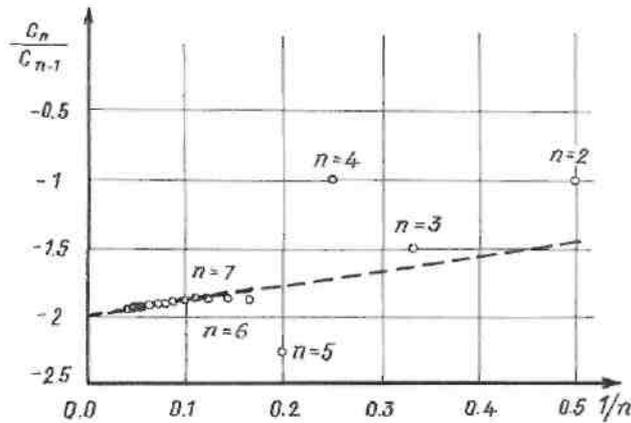


Рис. 1.1. Диаграмма Домба-Сайкса для функции $f(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)^{-1/2}$.

Если ε_0 или α известны из физических соображений, их можно использовать при построении диаграммы Домба-Сайкса. Если имеется несколько сингулярностей одного радиуса, так что знаки коэффициентов осциллируют, то можно попробовать построить зависимость от $1/n$ величины $(C_n/C_{n-2})^{1/2}$. Если радиус сходимости стремится к бесконечности и $C_n/C_{n-1} \sim k/n$, то анализируемая функция имеет множитель $\exp(k\varepsilon)$; при $C_n/C_{n-1} \sim k/n^{1/p}$ у нее есть множитель $\exp(\varepsilon^p)$. Если радиус сходимости стремится к нулю, то анализируемая функция имеет существенную особенность, при этом из соотношения $C_{n-1}/C_n \sim 1/(kn)$ следует, что $C_n \sim C k^n n!$ при $n \rightarrow \infty$, где C – некоторая постоянная.

Знание особенности решения позволяет устранить ее из ряда теории возмущений и тем самым существенно улучшить его сходимость. Опишем некоторые приемы устранения особенностей. Если особенность лежит на положительной действительной оси, то часто это означает, что функция $f(\varepsilon)$ многозначная, и есть максимально достижимая точка $\varepsilon = \varepsilon_0$. Тогда обратная к исходной функция $\varepsilon = \varepsilon(f)$ может быть однозначной. Рассмотрим в качестве примера функцию

$$f(\varepsilon) = \arcsin \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{3}{40}\varepsilon^5 + \frac{5}{112}\varepsilon^7 + \dots, \quad (1.3)$$

обратная к которой такова

$$\varepsilon \sim f - \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{120}f^5 - \frac{1}{5040}f^7 + \dots \quad (1.4)$$

Численные результаты приведены на рис. 1.2, где сплошной линией обозначена функция $\arcsin \varepsilon$, точками и пунктиром изображены n -членные разложения (1.3) и k -членные разложения (1.4) для различного числа членов.

Видно, что разложение (1.4) позволяет хорошо описать вторую ветвь исходной функции.

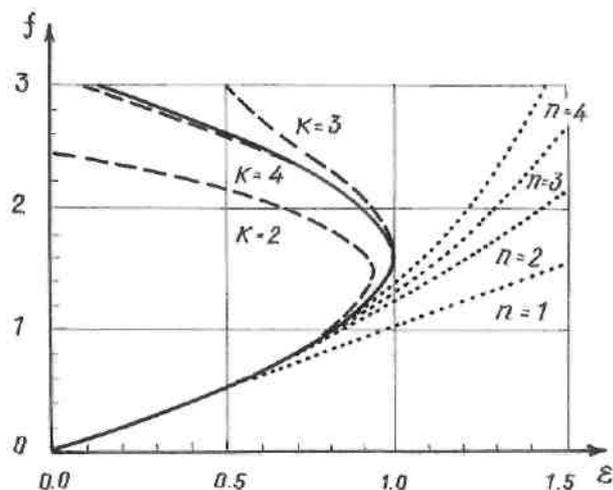


Рис. 1.2. Применение обращения степенного ряда.

Если

$$f \sim A(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\alpha \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то переход к функции $f^{1/\alpha}$ позволяет избавиться от сингулярности.

Рассмотрим еще один пример:

$$f(\varepsilon) = e^{-\varepsilon/2} \sqrt{1+2\varepsilon} \sim 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{7}{8}\varepsilon^2 + \frac{41}{48}\varepsilon^3 - \frac{367}{384}\varepsilon^4 + \frac{4849}{3840}\varepsilon^5 + \dots \quad (1.5)$$

Радиус сходимости этого разложения равен $1/2$, в то время как радиус сходимости функции

$$f^2 \sim 1 + \varepsilon - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{6}\varepsilon^3 - \frac{7}{24}\varepsilon^4 + \frac{3}{40}\varepsilon^5 + \dots \quad (1.6)$$

бесконечен.

Численные результаты приведены на рис. 1.3, где сплошной линией обозначена функция $f(\varepsilon) = e^{-\varepsilon/2} \sqrt{1+2\varepsilon}$, точками и пунктиром изображены n-членные разложения (1.5) и корни квадратные из k-членных разложений (1.6).

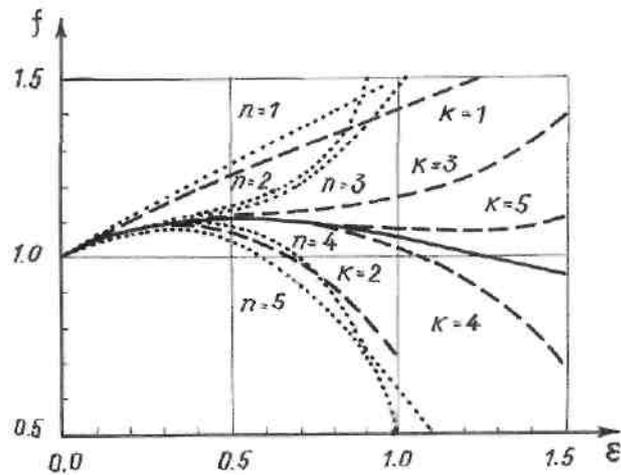


Рис. 1.3. Пример устранения корня.

Кроме того, зная особенность, можно добиться ее исключения переходом к новой функции $f_M(\varepsilon)$ (мультипликативное исключение особенности)

$$f(\varepsilon) = (\varepsilon_0 - \varepsilon)^\alpha f_M(\varepsilon)$$

или $f_A(\varepsilon)$ (аддитивное исключение особенности)

$$f(\varepsilon) = A(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\alpha + f_A(\varepsilon).$$

При этом функции $f_M(\varepsilon)$ и $f_A(\varepsilon)$ не должны содержать особенности в точке ε_0 .

Во многих случаях удается эффективно использовать конформные преобразования рядов, достаточно полный каталог которых приведен в [7]. В частности, иногда успешным оказывается преобразование Эйлера [8-11], основанного на введении новой переменной

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon/\varepsilon_0}.$$

Переразложив функцию f в ряд по $\tilde{\varepsilon}$:

$$f \sim \sum d_n \tilde{\varepsilon}^n,$$

тем самым переносим особенность в точку $\tilde{\varepsilon} = \infty$. Например, функция (1.2) имеет особенность в точке $\varepsilon = -1/2$, которую можно устранить преобразованием $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(1 + 2\varepsilon)$. Разложение функции (1.2) по $\tilde{\varepsilon}$ таково

$$f(\tilde{\varepsilon}) \sim 1 + \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{8}\tilde{\varepsilon}^2 - \frac{31}{48}\tilde{\varepsilon}^3 - \frac{895}{384}\tilde{\varepsilon}^4 - \frac{22591}{3840}\tilde{\varepsilon}^5 + \dots \quad (1.7)$$

Некоторые численные результаты приведены на рис. 1.4, где точками и пунктиром изображены n-членные разложения (1.2) и k-членные разложения (1.7).

Отсюда могут быть найдены коэффициенты b_i . Коэффициенты a_i находятся теперь из соотношений (2.3) сравнением коэффициентов при одинаковых степенях ε :

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0; \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0; \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= c_n + \sum_{i=1}^p b_i c_{n-i}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $p = \min(n, m)$.

Уравнения (2.4),(2.5) называются уравнениями Паде. В случае, когда система (2.4) разрешима, уравнения Паде определяют коэффициенты числителя и знаменателя АП. Функции $f_{[n/m]}(\varepsilon)$ при различных значениях n и m образуют набор, который принято записывать в виде таблицы, называемой таблицей Паде:

| | | | | |
|------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----|
| $n \backslash m$ | 0 | 1 | 2 | ... |
| 0 | $f_{[0/0]}(\varepsilon)$ | $f_{[1/0]}(\varepsilon)$ | $f_{[2/0]}(\varepsilon)$ | ... |
| 1 | $f_{[0/1]}(\varepsilon)$ | $f_{[1/1]}(\varepsilon)$ | $f_{[2/1]}(\varepsilon)$ | ... |
| 2 | $f_{[0/2]}(\varepsilon)$ | $f_{[1/2]}(\varepsilon)$ | $f_{[2/2]}(\varepsilon)$ | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... |

Члены первой строки таблицы Паде соответствуют конечным суммам ряда Маклорена. При равенстве степени числителя степени знаменателя ($n = m$) получаем диагональные АП, наиболее распространенные на практике. Отметим, что в таблице Паде могут быть пропуски для тех индексов n, m , при которых аппроксимаций Паде не существует.

Отметим некоторые свойства АП:

1. Если АП при выбранных m и n существует, то она единственна.
2. Если последовательность АП сходится к данной функции, то корни ее знаменателя стремятся к полюсам функции. Это позволяет при достаточно большом числе членов ряда определять полюса, а затем выполнять аналитическое продолжение.
3. АП осуществляет мероморфное продолжение заданной степенным рядом функции.
4. АП от обратной функции равна обращению АП самой функции. Это свойство называется двойственностью и более строго формулируется так. Пусть

$$q(\varepsilon) = f^{-1}(\varepsilon) \quad \text{и} \quad f(0) \neq 0, \quad \text{тогда} \quad q_{[n/m]}(\varepsilon) = f_{[n/m]}^{-1}(\varepsilon) \tag{2.6}$$

при условии, что одна из этих аппроксимаций существует.

5. Диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных преобразований аргумента. Пусть функция задана своим разложением (2.1).

Рассмотрим дробно-линейное преобразование, сохраняющее начало координат

$$W = \frac{a\varepsilon}{1+b\varepsilon},$$

и функцию $q(W) = f(\varepsilon)$. Тогда

$$q_{[n/n]}(W) = f_{[n/n]}(\varepsilon)$$

при условии, что одна из этих аппроксимаций существует. В частности, диагональные аппроксиманты Паде инвариантны относительно преобразования Эйлера (1.7).

6. Диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных преобразований функций. Пусть дана функция (2.1). Положим

$$q(\varepsilon) = \frac{a + bf(\varepsilon)}{c + df(\varepsilon)}.$$

Если $c + df(0) \neq 0$, то

$$q_{[n/n]}(\varepsilon) = \frac{a + bf_{[n/n]}(\varepsilon)}{c + df_{[n/n]}(\varepsilon)}$$

при условии, что $f_{[n/n]}(\varepsilon)$ существует. Благодаря этому свойству бесконечные значения АП можно рассматривать наравне с конечными.

7. АП позволяют получить верхнюю и нижнюю оценки функции. Для диагональной АП верна оценка

$$f_{[n/n-1]}(\varepsilon) \leq f_{[n/n]}(\varepsilon) \leq f_{[n/n+1]}(\varepsilon). \quad (2.7)$$

Как правило, эта оценка верна и для самой функции, т.е. $f_{[n/n]}(\varepsilon)$ в выражении (2.7) можно заменить на $f(\varepsilon)$.

8. Диагональные и близкие к ним последовательности АП часто обладают свойством автокоррекции [16-20]. Суть его заключается в следующем. Для определения коэффициентов числителя и знаменателя приходится решать системы линейных алгебраических уравнений. Это – некорректная операция, поэтому коэффициенты АП будут определяться с большими погрешностями. Однако эти погрешности в некотором смысле самосогласованны, поэтому точность АП при этом высока. В этом радикальное отличие АП от ряда Тейлора, при вычислении которого погрешность только нарастает с ростом числа членов.

Свойство автокоррекции численно проверено для целого ряда специальных функций. В то же время уже для эллиптических функций возникают так называемые дефекты или пары Froissart, состоящие из близко расположенных друг к другу (но различных и заведомо несократимых) нуля и полюса АП. Это явление носит не численный характер, как предполагается в [13], а обусловлено природой эллиптической функции [21,22]. Тем самым, в общем случае, не имея информации о расположении полюсов АП, а опираясь только на саму АП (вычисленную как угодно точно), мы не можем сказать, что нашли хорошее приближение для аппроксимируемой функции.

Для преодоления проблемы дефектов предложено несколько методов, в частности, метод сглаживания [23]. Суть его состоит в том, что вместо обычной диагональной аппроксимации Паде для комплексных функций

$$f_{[n/n]}(\varepsilon) = \frac{p_n(\varepsilon)}{q_n(\varepsilon)}$$

использовать выражение

$$f_{[n/n]}(\varepsilon) = \frac{\overline{q_n(\varepsilon)p_n(\varepsilon)} + \overline{q_{n-1}(\varepsilon)p_{n-1}(\varepsilon)}}{q_n(\varepsilon)q_n(\varepsilon) + q_{n-1}(\varepsilon)q_{n-1}(\varepsilon)}.$$

Теперь рассмотрим вопрос: в каком смысле имеющиеся математические результаты о сходимости АП позволяют повысить достоверность решения практических задач. Теорема Гончара [21,24,25] утверждает: если ни одна из диагональных АП $f_{[n/n]}(\varepsilon)$ не имеет полюсов в круге радиуса R , то последовательность $f_{[n/n]}(\varepsilon)$ равномерно сходится в этом круге к исходной функции $f(\varepsilon)$. Более того, из отсутствия полюсов последовательности $f_{[n/n]}(\varepsilon)$ в круге радиуса R следует и сходимость исходного ряда Тейлора в этом круге. Поскольку диагональные АП инвариантны относительно дробно-линейных отображений $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/(a\varepsilon + b)$, теорема верна для любого открытого круга, содержащего точку разложения, и для любой области, являющейся объединением этих кругов. Существенным недостатком для практики является необходимость проверки всех диагональных АП. Дело в том, что, если в круге радиуса R не имеет полюсов лишь некоторая подпоследовательность последовательности диагональных АП, то равномерная сходимость ее к исходной голоморфной в данном круге функции гарантирована лишь при $r < r_0$, где $0.583R < r_0 < 0.584R$ [26]. Как можно использовать эти результаты? Предположим, что имеется отрезок ряда теории возмущений и хотим оценить его радиус сходимости R . Рассмотрим интервал $[0, \varepsilon_0]$, на котором отрезок ряда и последняя диагональная АП разнятся не более, чем на 5% (принятая в технических расчетах точность). Если ни одна из предыдущих диагональных АП не имеет в круге радиуса ε_0 полюсов, то можно с высокой степенью достоверности утверждать, что $R \geq \varepsilon_0$.

Процедура построения АП значительно менее трудоемка, чем построение высших приближений теории возмущений. АП распространяется не только на степенные ряды, но и на ряды по ортогональным полиномам. АП – это локально наилучшие рациональные аппроксимации заданного степенного ряда. Они конструируются непосредственно по его коэффициентам и позволяют осуществлять эффективное аналитическое продолжение этого ряда за пределы его круга сходимости, а их полюсы в определенном смысле локализуют особые точки (в том числе полюсы и их кратности) продолженной функции в соответствующей области сходимости и на ее границе. Этим АП принципиально отличаются от рациональных аппроксимаций с (полностью или частично) фиксированными полюсами, в том числе от полиномиальных приближений, в случае которых все полюсы фиксированы в одной, бесконечно удаленной, точке. Именно указанное выше свойство АП – эффективно решать

задачу аналитического продолжения степенного ряда – и лежит в основе их многочисленных успешных применений в анализе и при исследовании прикладных задач. В настоящее время метод АП является одним из наиболее перспективных нелинейных методов суммирования степенного ряда и локализации его особых точек. В том числе и по этой причине теория АП превратилась во вполне самостоятельный раздел теории приближений, а сами эти аппроксимации нашли разнообразные применения как непосредственно в теории рациональных приближений, так и в теории возмущений.

Итак, основные преимущества АП по сравнению с рядами Тейлора таковы:

1. Как правило, скорость сходимости рациональных приближений значительно превышает скорость сходимости полиномиальных приближений. Например, функция e^z в круге сходимости аппроксимируется рациональными полиномами $P_n(\varepsilon)/Q_n(\varepsilon)$ в 4^n раз лучше, чем алгебраическим многочленом степени $2n$. Еще ощутимее это проявляется для функций ограниченной гладкости. Так, функцию $|\varepsilon|$ на отрезке $[-1,1]$ нельзя приблизить алгебраическими многочленами так, чтобы порядок приближения был лучше, чем $1/n$, где n – степень многочлена. АП дает скорость сходимости $\sim \exp(-\sqrt{2n})$ [27].

2. Обычно область сходимости рациональных приближений более широкая по сравнению со степенными рядами. Так, для функции $\operatorname{arctg} x$ многочлены Тейлора сходятся только при $|\varepsilon| \leq 1$, а АП – всюду в $C \setminus ((-\infty, -i] \cup [i, \infty))$.

3. АП позволяют установить положение особенностей функции.

Описанную АП иногда называют АП первого рода. АП второго рода (АП2) для функции $f(\varepsilon)$ называется рациональная функция $f_{[n/m]}(\varepsilon)$ вида (2.2) такая, что ее значения при $n+m+1$ значениях аргумента совпадают со значениями $f(\varepsilon)$ в тех же точках. Отсюда получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя АП2 [28].

Для построения АП необходимо уметь вычислять в одной точке производные аппроксимируемой функции высокого порядка. При табличном задании функции этот метод практически не применим, особенно если опорные значения имеют заметную погрешность. Именно поточечно, таблично заданные функции являются объектом АП2. Рациональную интерполяцию можно эффективно использовать для аппроксимации функций в тех случаях, когда ранг аппроксиманты меньше числа точек, в которых задана исходная функция, и выбор наилучшего приближения производится, например, при помощи метода наименьших квадратов. АП2 во многих случаях не только обеспечивает получение интерполяционных формул, гораздо более эффективных, чем, скажем, формулы полиномиальной интерполяции Лагранжа, но и позволяет экстраполировать значения функции, заданной на ограниченном интервале, за его пределы, чего практически никогда не позволяет сделать полиномиальное приближение. АП2 дает возможность довольно точно устанавливать положение действительных полюсов интерполируемой функции, лежащих за пределами интервала интерполяции.

Аналогичным методом АП является метод непрерывных (цепных) дробей

[71]. Существует несколько типов непрерывных дробей. Регулярная С-дробь имеет вид - это бесконечная последовательность, N -й член которой имеет вид

$$f_N(\varepsilon) = a + \frac{c_0}{1 + \frac{c_1\varepsilon}{1 + \frac{c_2\varepsilon}{1 + \frac{c_3\varepsilon}{\ddots \frac{c_{N-1}\varepsilon}{1 + c_N\varepsilon}}}}}. \quad (2.8)$$

Коэффициенты c_i получаются после разложения выражения (2.8) в ряд Маклорена с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε . При $a = 0$ получается дробь Стильтьеса или S-дробь. Для функции Стильтьеса

$$S(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t)}{1 + \varepsilon t} dt$$

коэффициенты разложения (2.8) имеют вид: $a = 0$, $c_0 = 1$, $c_{2n-1} = c_{2n} = n$, $n \geq 1$.

Описание так называемых J-, T-, P-, R-, g-дробей, алгоритмы их построения и области применимости детально описаны в [29].

Непрерывные дроби являются частным случаем непрерывных функциональных аппроксимаций [15]. Речь идет о последовательности, у которой $(n+1)$ -й член $c_n(\varepsilon)$ имеет вид n -й итерации некоторой функции $F(\varepsilon)$. Для ряда Тейлора $F(\varepsilon) = 1 + \varepsilon$, для непрерывной дроби $F(\varepsilon) = 1/(1 + \varepsilon)$. Если $F(\varepsilon) = \exp(\varepsilon)$, имеем непрерывную экспоненциальную аппроксимацию

$$c_n(\varepsilon) = a_0 \exp(a_1 \varepsilon \exp(a_2 \varepsilon \dots \exp a_n \varepsilon)),$$

при $F(\varepsilon) = \sqrt{1 + \varepsilon}$

$$c_n(\varepsilon) = a_0 \sqrt{1 + a_1 \varepsilon \sqrt{1 + a_2 \varepsilon \sqrt{1 + \dots a_{n-1} \varepsilon \sqrt{1 + a_n \varepsilon}}}},$$

при $F(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon)$

$$c_n(\varepsilon) = a_0 \ln(1 + a_1 \varepsilon \ln(1 + a_2 \varepsilon \dots \ln(1 + \varepsilon))).$$

В некоторых случаях подобные аппроксимации могут сходиться к искомой функции существенно быстрее степенных рядов.

В качестве примера укажем на приведенное в [30, §3.4.9] решение трансцендентного уравнения

$$x = \varepsilon \ln x \quad (2.9)$$

при больших значениях λ . Последовательные приближения решения уравнения (2.9) таковы:

$$x_0 = \varepsilon \ln \varepsilon; \quad x_1 = \varepsilon \ln(\varepsilon \ln \varepsilon); \quad x_2 = \varepsilon \ln(\varepsilon \ln \varepsilon (\ln \varepsilon)); \quad \dots$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. ТФКП. М.: Наука, 1974. 319 с.
2. Gaunt D.S., Guttman A.J. Series expansions: analysis of coefficients // Phase Transitions and Critical Phenomena, ed. Domb C. & Green M.S., New York: Academic Press, 1974, vol. 3, p. 181-243.
3. Hinch E.J. Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p.
4. Van Dyke M. Analysis and improvement of perturbation series // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1974, vol. 27, p. 423-450.
5. Van Dyke M. Computer extension of perturbation series in fluid mechanics // SIAM J. Appl. Math., 1975, vol. 28, p. 720-734.
6. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics Stanford, CA: The Parabolic Press, 1975. 271 p.
1. 7. Кублановская В.Н. Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе // Труды матем. инс-та им. В.А.Стеклова, т. LIII. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959, с. 145-185.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
9. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев: Наукова думка, 1980. 168 с.
10. Bellman R. Perturbation Techniques in Mathematics, Physics and Engineering. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 118 p.
11. Hinch E.J. Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p.
12. Апресян Л.А. Аппроксиманты Паде // Изв. Вузов. Радиофизика, 1979, т. 22, № 6, с. 653-674.
13. Бейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
14. Baker G. A. Essential of Padé Approximants. New York: Academic Press, 1975. 306 с.
15. Bender С.М., Orszag S.A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York: McGraw-Hill, 1978. 593 p.
16. Литвинов Г.Л. Приближённое построение рациональных аппроксимаций и эффект автокорреляции погрешности // Матем. моделирование, 1990, с. 99-141.
17. Litvinov G.L. Approximate construction of rational approximations and the effect of autocorrection error // Russian J. Math. Physics, 1994, vol. 1, No 3, p. 313-352.
18. Litvinov G.L. Error autocorrection in rational approximation and interval estimation // Central European J. Math., 2003, vol. 1, No 1, p. 1-33.
19. Luke Y.L. Computations of coefficients in the polynomials of Padé approximants by solving systems of linear equations // J. Comp. Appl. Math., 1980, vol. 6, No 3, p. 213-218.

20. Luke Y.L. A note on evaluation of coefficients in the polynomials of Padé approximants by solving systems of linear equations // J. Comp. Appl. Math., 1982, vol. 8, No 2, p. 93-99.
21. Суетин С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // УМН, 2002, т. 57, № 1, с. 45-140.
22. Суетин С.П. Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций // УМН, 2004, т. 59, № 4, с. 201-202.
23. Beckermann V., Kaliaguine V. The diagonal of the Padé table and the approximation of the Weyl function of the second-order difference operator // Constr. Approx., 1997, vol. 13, p. 481-510.
24. Гончар А.А. Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций // Матем. сб., 1981, т. 115(157), № 4, с. 590-613.
25. Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимант Паде // Матем. сб., 1982, т. 118(160), № 4(8), с. 535-556.
26. Вятчин А.В. О сходимости аппроксимант Паде // Вестник МГУ, серия матем. и механика, 1981, т. 4, № 3, с. 3-6.
27. Голуб А.П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. 222с.
28. Виноградов В.Н., Гай Е.В., Работнов Н.С. Аналитическая аппроксимация данных в ядерной и нейтронной физике. М.: Энергоатомиздат, 1987. 128 с.
29. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985. 414 с.
30. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике. СПб.: Политехника, 2004. 302 с.