

6 СРАЩИВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

6.1 Метод асимптотически эквивалентных функций

Указанный метод был первоначально предложен Слепяном и Яковлевым для обращения интегральных преобразований. Приведем описание этого метода, следуя [1].

Пусть задано преобразование Лапласа функции вещественной переменной $f(t)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} ds.$$

Чтобы получить приближенное представление об оригинале, необходимо выяснить поведение изображения в окрестностях точек $s = 0$ и $s = \infty$ и установить характер и расположение его особых точек, находящихся на точной границе области регулярности или вблизи нее. После этого изображение $F(s)$ заменяется функцией $F_0(s)$, допускающей точный переход к оригиналам и отвечающей следующим условиям:

1. Функции $F_0(s)$ и $F(s)$ асимптотически эквивалентны при $s \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow 0$, т.е.

$$F_0(s) \sim F(s) \text{ при } s \rightarrow 0 \text{ и } s \rightarrow \infty.$$

2. Особые точки функций $F_0(s)$ и $F(s)$, расположенные на точной границе области регулярности, совпадают.

Свободные параметры функции $F_0(s)$ выбираются так, чтобы удовлетворялись условия приближенной аппроксимации $F(s)$ в смысле минимальной относительной погрешности при всех вещественных значениях $s \geq 0$:

$$\max \left| \frac{F_0(s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}{F(s)} - 1 \right| = \min. \quad (1.1)$$

Условие (1.1) достигается вариацией свободных параметров α_i . Нередко выполнение равенств

$$\int_0^{\infty} F_0(s) ds = \int_0^{\infty} F(s) ds$$

или $F'_0(s) \sim F'(s)$ при $s \rightarrow 0$ приводит к достаточно точному выполнению требования (1.1).

Приведем пример построения асимптотически эквивалентной функции. Найдем оригинал изображения, заданного функцией Макдональда [2, гл. 9]:

$$K_0(s) = -\ln(s/2)I_0(s) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \psi(k+1), \quad (1.2)$$

где $\psi(z)$ – пси-функция Эйлера [2, гл. 6].

При чисто мнимых значениях аргумента s ($s = iy$; $0 < |y| < \infty$) функция $K_0(s)$ особых точек не имеет. Следовательно, можно ограничиться исследованием ее поведения при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$. Выпишем соответствующие асимптотические выражения [2, гл. 9]:

$$K_0(s) = -\left[\ln \frac{s}{2} + \gamma\right] + O(s), s \rightarrow 0,$$

$$K_0(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} e^{-s} \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right], s \rightarrow \infty,$$
(1.3)

где γ – постоянная Эйлера ($\gamma = 1.781\dots$) (отметим опечатку в первой из формул (1.3) в [1]).

Анализируемое изображение имеет точку ветвления логарифмического типа, точку ветвления алгебраического типа и существенно особую точку. Эти особые точки должны быть сохранены в структуре нулевого приближения. Наиболее простым путем такую структуру получим, объединив два асимптотических представления (1.3) так, чтобы они взаимно не искажали друг друга и содержали свободные параметры, которыми можно было бы распорядиться в дальнейшем. В результате приходим к нулевому приближению

$$F_0(s) = e^{-s} \left[\ln \frac{s + \alpha}{s} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{s + \beta}} \right],$$
(1.4)

где α и β - свободные параметры.

Нетрудно видеть, что выражение (1.4) имеет правильную асимптотику при $s \rightarrow \infty$. Свободные параметры определяются из условия равенства асимптотик $K_0(s)$ и $F_0(s)$ при $s \rightarrow 0$ и равенства интегралов

$$\int_0^{\infty} F_0(s) ds = \int_0^{\infty} K_0(s) ds.$$

В итоге вычислений приходим к системе трансцендентных уравнений

$$\ln \alpha + \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} = \ln 2 - \gamma;$$

$$\ln \alpha - e^{\alpha} Ei(-\alpha) + \gamma + \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\beta} [1 - erf(\sqrt{\beta})] = \frac{\pi}{2},$$

где $Ei(\dots)$ – интегральный синус [2, гл. 5], $erf(\dots)$ - интеграл вероятностей [2, гл. 7] (отметим опечатки в этих формулах в [1]).

Решая выписанную систему численно, находим $\alpha = 0.3192$, $\beta = 0.9927$.

Оригинал нулевого приближения находится без труда:

$$f_0(t) = \left\{ \frac{1 - \exp[-\alpha(t-1)]}{t-1} + \frac{\exp[-\beta(t-1)]}{\sqrt{2(t-1)}} \right\} H(t-1). \quad (1.5)$$

Точное выражение для оригинала имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} H(t-1). \quad (1.6)$$

Сравнение точного (1.6) (сплошная линия) и приближенного (1.5) (пунктир с кружочками) решений приведен на рис. 1.1. Как видно, удовлетворительный результат получается уже в нулевом приближении.

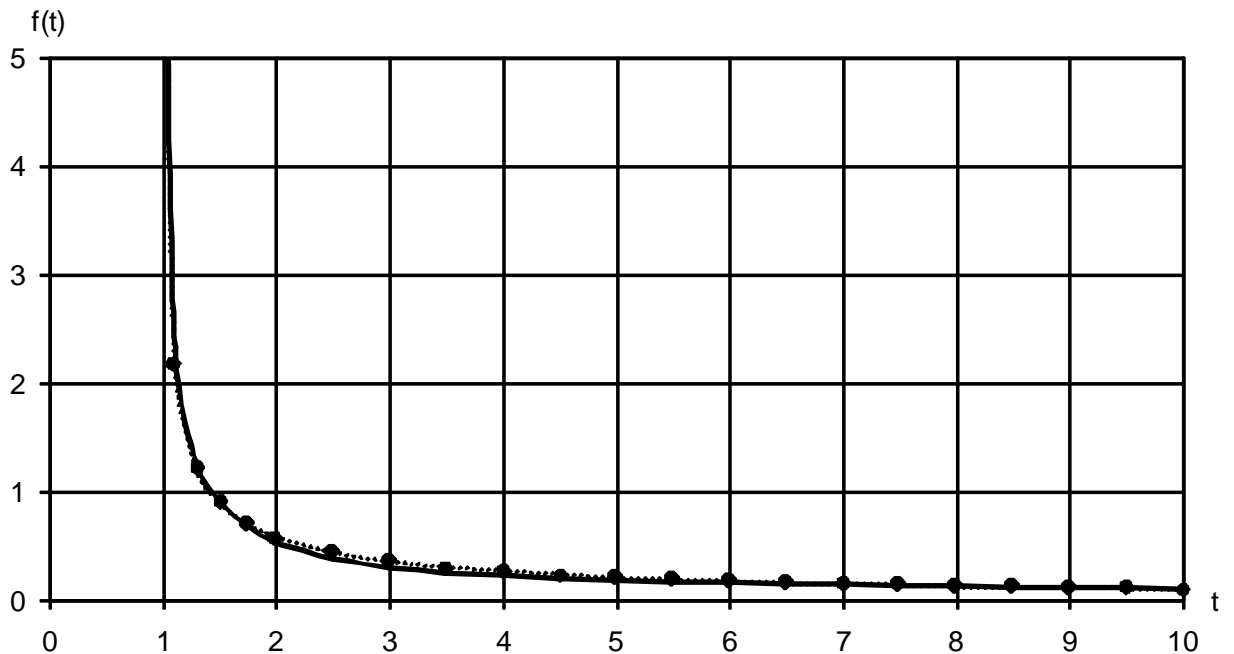


Рис. 1.1. Сравнение точного обращения преобразования Лапласа с обращением по методу асимптотически эквивалентных функций.

Аналогично могут быть построены асимптотически эквивалентные функции для синус и косинус преобразований Фурье, преобразований Ханкеля и других интегральных преобразований, асимптотики которых описаны в [3].

6.2 Двухточечные аппроксимации Паде

Анализ многочисленных примеров подтверждает, что, как правило, реализуется своеобразный «принцип дополнительности»: если при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно построить физически содержательную асимптотику, то существует нетривиальная асимптотика и при $\varepsilon \rightarrow \infty$. Наиболее трудным, с точки зрения асимптотического подхода, оказывается промежуточный случай $\varepsilon \sim 1$. Правда, в этой области обычно хорошо работают численные методы, однако, если стоит задача исследовать решение в зависимости от параметра ε , то неудобно пользоваться различными решениями в разных областях. Построение единого решения - нетривиальная задача, которую можно сформулировать следующим образом: известно поведение функции в зонах I и III (рис. 2.1), нужно достроить ее в зоне II. Для этой цели можно применить двухточечные АП (ДАП). Дадим их определение [4]. Пусть

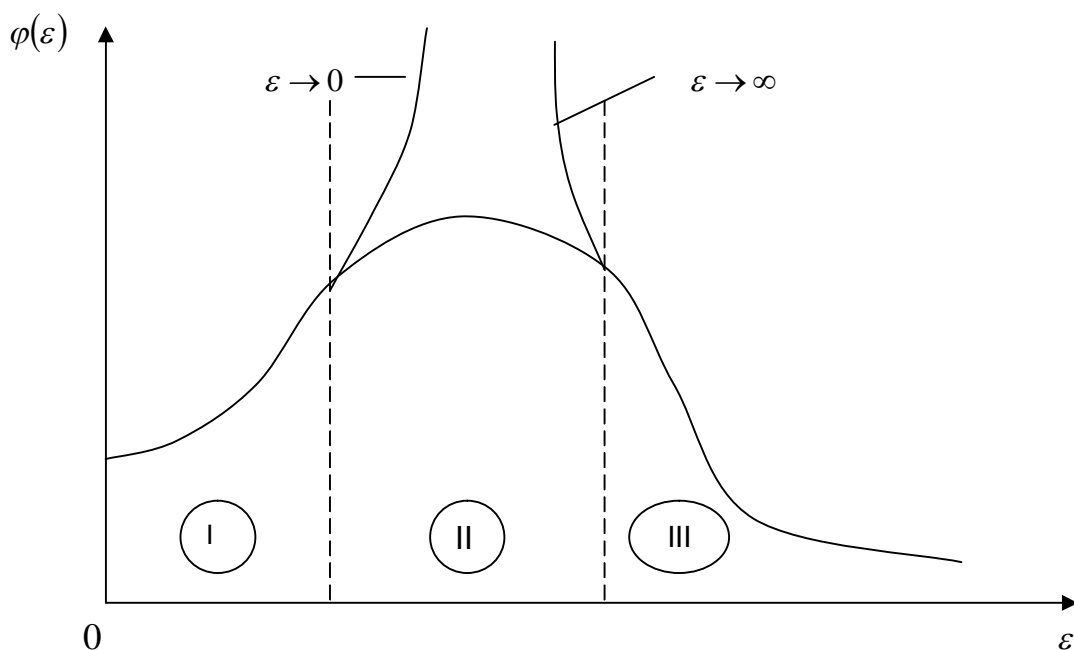


Рис. 2.1. Сращивание асимптотических решений.

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon^i \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

$$F(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \varepsilon^{-i} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

ДАП - это дробно-рациональная функция вида (7.2.2), k коэффициентов которой определяются из условия (7.2.3), а остальные коэффициенты из аналогичного условия для ε^{-1} .

В качестве примера рассмотрим решение уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(x^2 - 1) + x = 0.$$

Асимптотические выражения периода колебаний для малых и больших значений параметра ε таковы [5]

$$T = 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} - \frac{5\varepsilon^4}{3072} \right) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$T = \varepsilon(3 - 2 \ln 2) \text{ при } \varepsilon \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Построим ДАП, используя четыре условия при $\varepsilon \rightarrow 0$ и два условия при $\varepsilon \rightarrow \infty$

$$T(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon^3}{1 + b_1 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2}, \quad (2.5)$$

где

$$a_0 = 2\pi; \quad a_1 = \frac{\pi^2(3 - 2 \ln 2)}{4(3 - 2 \ln 2)^2 - \pi^2}; \quad a_2 = \frac{\pi(3 - 2 \ln 2)^2}{2(4(3 - 2 \ln 2)^2 - \pi^2)}; \quad a_3 = \frac{\pi^2(3 - 2 \ln 2)}{16(4(3 - 2 \ln 2)^2 - \pi^2)};$$

$$b_1 = \frac{\pi(3 - 2 \ln 2)}{2(4(3 - 2 \ln 2)^2 - \pi^2)}; \quad b_2 = \frac{\pi^2}{16(4(3 - 2 \ln 2)^2 - \pi^2)}.$$

В табл. 2.1 приведены результаты сравнения численных значений периода, приведенных в [6], с результатами расчета по формуле (2.5).

Таблица 2.1. Сравнение численных результатов и расчетов при помощи ДАП.

ε	T численное	T Паде
1	6.66	6.61
2	7.63	7.37
3	8.86	8.40
4	10.20	9.55
5	11.61	10.81
6	13.06	12.15
7	14.54	13.54
8	16.04	14.96
9	17.55	16.42
10	19.08	17.89
20	34.68	33.30
30	50.54	49.13
40	66.50	65.10
50	82.51	81.14
60	98.54	97.20
70	114.60	113.29
80	130.67	129.40
90	146.75	145.49
100	162.84	161.61

Рассмотрим еще обращение преобразования Лапласа при помощи ДАП. Пусть исходная функция такова:

$$f(t) = (1 + t^2)^{-0.5}. \quad (2.6)$$

Асимптотики оригинала таковы

$$f(t) \cong \begin{cases} 1 - 0.5t^2 + \dots & \text{при } t \rightarrow 0, \\ t^{-1} + \dots & \text{при } t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

ДАП дает в этом случае

$$f(t) = \frac{1 + 0.5t}{1 + 0.5t + 0.5t^2}. \quad (2.7)$$

Численные результаты приведены на рис. 2.2. Приближенное решение (2.7) (верхняя кривая) хорошо совпадает с оригиналом (2.6) (нижняя кривая) для любых значений аргумента.

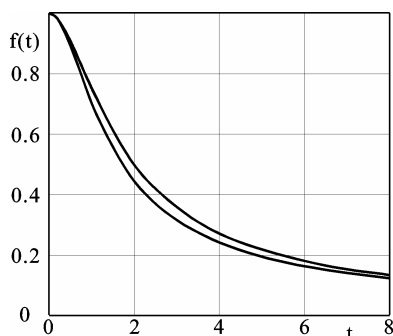


Рис. 2.2. Точное и приближенное обращения преобразования Лапласа.

Об эффективном применении ДАП в асимптотических задачах см. также [7-11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
2. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
3. Белов М.А., Цирулис Т.Т. Асимптотические методы обращения интегральных преобразований. Рига: Зинатне, 1985. 286 с.
4. Бейкер Г., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
5. Hinch E.J. Perturbation Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 160 p.
6. Andersen C.M., Geer J.F. Power series expansion for the frequency and period of the limit cycle of the Van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math., 1982, vol. 42, No 3, p. 678-693.
7. Беляева Н.П., Дмитриев М.Г. Построение приближенного решения начальных задач с параметром на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений // ЖВММФ, 2004, т. 44, №1, с. 128-140
8. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ, 1998, т. 62, № 5, с. 762-767.
9. Журавлев В.Ф., Киреев А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном

Кулоновом трении // МТТ, 2005, №2, с. 3-13.

10.Шатров А.В. Использование Паде-аппроксимаций при соединении асимптотических решений в гидродинамике // Математика. Компьютер. Образование. 1999, М.: Прогресс-Традиция, с. 305-312.

11.Frost P. A., Harper E. Y. Extended Padé procedure for constructing global approximations from asymptotic expansions: an explication with examples // SIAM Rev., 1976, vol. 18, No 1, p. 62-91.