

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ**

**БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ШАРИПОВ Р. А.**

**КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

Учебное пособие

УФА 1997

УДК 517.9

Шарипов Р. А. **Классическая электродинамика и теории относительности**: учебное пособие / Изд-е Башкирского ун-та. — Уфа, 1997. — 164 с. — ISBN 5-7477-0180-0.

Книга представляет собой учебное пособие по курсу электродинамики и теории относительности, адресованное студентам-математикам. Этим определяется стиль изложения материала: в ней активно используются элементы векторного и тензорного анализа, дифференциальной геометрии и теории обобщенных функций.

Подготовка книги к изданию выполнена методом компьютерной верстки на базе пакета  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$  от Американского Математического Общества. При этом были использованы кириллические шрифты семейства Lh, распространяемые Ассоциацией *CyriTUG* пользователей кириллического  $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$ 'а.

Книга печатается по решению методической комиссии математического факультета БашГУ.

Рецензенты: Кафедра алгебры и геометрии БГПИ,  
д. ф.-м. н., проф. Байков В. А. (УГАТУ).

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

ОГЛАВЛЕНИЕ. ....	3.
ПРЕДИСЛОВИЕ. ....	6.
ГЛАВА I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА. ....	8.
§ 1. Базовые экспериментальные факты и системы единиц. ....	8.
§ 2. Концепция близкодействия. ....	14.
§ 3. Принцип суперпозиции. ....	16.
§ 4. Сила Лоренца и закон Био-Савара-Лапласа. ....	19.
§ 5. Плотность тока. Закон сохранения заряда. ....	23.
§ 6. Электрический дипольный момент. ....	26.
§ 7. Магнитный момент. ....	28.
§ 8. Интегральные уравнения статического электромагнитного поля. ....	33.
§ 9. Дифференциальные уравнения статического электромагнитного поля. ....	42.
ГЛАВА II. КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. ....	44.
§ 1. Уравнения Максвелла. ....	44.
§ 2. Плотность и поток энергии электромагнитного поля. ....	47.
§ 3. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля. ....	54.
§ 4. Калибровочные преобразования и лоренцева калибровка. ....	57.
§ 5. Электромагнитные волны. ....	59.
§ 6. Излучение электромагнитных волн. ....	61.

### ГЛАВА III. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ....	69.
§ 1. Преобразования Галилея. ....	69.
§ 2. Преобразования Лоренца. ....	74.
§ 3. Пространство Минковского. ....	78.
§ 4. Кинематика относительного движения. ....	83.
§ 5. Релятивистский закон сложения скоростей. ....	91.
§ 6. Мировые линии и собственное время. ....	93.
§ 7. Динамика материальной точки. ....	96.
§ 8. Четырехмерная запись уравнений Максвелла. ....	102.
§ 9. Четырехмерный векторный потенциал. ....	109.
§ 10. Закон сохранения заряда. ....	114.
§ 11. Замечание о косоугольных и криволинейных координатах. ....	117.

### ГЛАВА IV. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ

В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ....	121.
§ 1. Принцип наименьшего действия для частиц и полей. ....	121.
§ 2. Движение частицы в электромагнитном поле. ....	126.
§ 3. Динамика пылевидной материи. ....	130.
§ 4. Действие для пылевидной материи. ....	135.
§ 5. Уравнения электромагнитного поля. ....	143.

### ГЛАВА V. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ....	147.
§ 1. Переход к неплоским метрикам и искривление пространства Минковского. ....	147.

§ 2. Действие для гравитационного поля. Уравнение Эйнштейна. ....	149.
§ 3. Закон сохранения четырехмерного импульса для полей. ....	155.
§ 4. Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля. ....	157.
§ 5. Тензор энергии-импульса для пылевидной материи. ....	159.
§ 6. Заключительные замечания. ....	163.
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. ....</b>	<b>164.</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

Теория относительности — это физическая дисциплина, которая возникла в начале XX-го века и существенно изменила традиционные представления об устройстве вселенной. Эффекты, предсказываемые этой теорией, становятся существенными лишь при описании процессов, идущих на очень больших скоростях, близких к скорости света  $c = 2.998 \cdot 10^5 \text{ км/сек}$ . В XIX-ом веке единственной теорией, имеющей дело с такими процессами, была теория электромагнетизма. Развитие теории электромагнетизма в XIX-ом веке как раз и стало предпосылкой возникновения теории относительности.

Изложение материала в данной книге соответствует этой исторической последовательности событий. В первой главе излагается электростатика и магнитостатика, начиная с описания первых опытов по взаимодействию зарядов и токов. Во второй главе излагается классическая электродинамика, основанная на уравнениях Максвелла.

Третья глава начинается с вывода преобразований Лоренца как преобразований, оставляющих неизменным вид уравнений Максвелла. Физическая интерпретация таких преобразований приводит к необходимости объединения пространства и времени в один четырехмерный континуум (пространство Минковского), в котором отсутствует абсолютное направление времени. После введения четырехмерного пространства-времени в третьей главе дается последовательное переизложение классической электродинамики в форме, инвариантной относительно преобразований Лоренца.

В четвертой главе рассматривается лагранжев вариационный подход к описанию электромагнитного поля и полей материи в специальной теории относительности. Использование

криволинейных координат в пространстве Минковского и применение соответствующего дифференциально-геометрического аппарата подготавливает почву для перехода к общей теории относительности.

В пятой главе излагается эйнштейновская теория гравитации (общая теория относительности), которая интерпретирует поле тяготения как искривление самого пространства-времени.

Книга адресована студентам-математикам, поэтому в ней уделяется большое внимание логической связности изложения. Ссылки на физическую интуицию сведены к минимуму: в тех местах, где приходится вводить дополнительные предположения, не вытекающие из предыдущего материала, дается подробный комментарий.

Автор надеется, что настойчивый и заинтересованный читатель с достаточной подготовкой (на уровне студентов 2-го или 3-го курса математического факультета) сможет преодолеть все сложности, связанные с выкладками, и, прочтя эту книгу, не только освоит предмет, но и получит эстетическое удовольствие от того, насколько гармонично устроена природа вещей.

Автор выражает признательность Н. Т. Ахтямову, Д. И. Борисову, Ю. П. Машенцевой и А. И. Утарбаеву за прочтение и редактирование рукописи книги.

Ноябрь, 1997 г.

Р. А. Шарипов.

## ГЛАВА I

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА

### § 1. Базовые экспериментальные факты и системы единиц.

Количественное описание любого физического явления сопряжено с необходимостью измерения. В механике вводятся три базовые единицы измерения: для массы, длины и времени.

Величина	Ед.изм. в СИ	Ед.изм. в СГС	Связь единиц
масса	<i>кг</i>	<i>г</i>	$1 \text{ кг} = 10^3 \text{ г}$
длина	<i>м</i>	<i>см</i>	$1 \text{ м} = 10^2 \text{ см}$
время	<i>сек</i>	<i>сек</i>	$1 \text{ сек} = 1 \text{ сек}$

Единицы измерения остальных величин являются производными. Так, например, для единицы измерения силы в системах СГС и СИ, согласно второму закону Ньютона, имеем:

- (1)  $n = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2}$  в системе СИ,
- (2)  $\text{дин} = \text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^{-2}$  в системе СГС.

Системы единиц СИ и СГС являются двумя наиболее популярными системами единиц в физике. Единицы измерения для механических величин (скорость, ускорение, сила, энергия, мощность) в этих системах определяются сходным образом.



Пропорции между единицами измерений для этих величин могут быть выведены из соотношений для базовых величин (см. таблицу выше). Однако, в выборе единиц для электрических и магнитных величин эти системы существенно различаются.

Выбор единицы измерения электрического заряда в системе СГС основывается на законе Кулона, описывающем взаимодействие точечных зарядов.

**Закон Кулона.** Два одноименных точечных заряда отталкиваются, а два разноименных заряда притягиваются с силой, прямо пропорциональной величинам этих зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:



$$(1.1) \quad F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Единица измерения заряда в системе СГС выбирается так, чтобы коэффициент в формуле (1.1) стал равным единице. Поэтому

Рис. 1.1

$$\text{ед. заряда СГС} = \text{дин}^{1/2} \cdot \text{см} = \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Сам закон Кулона при этом записывается в виде равенства

$$(1.2) \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Сила  $F$ , определяемая соотношением (1.2), очень велика. Однако, в повседневной жизни она практически не проявляется. Это связано с *эффектом экранирования*. Количество положительных и отрицательных зарядов в природе точно сбалансировано. Атомы и молекулы, из которых построена наблюдаемая нами материя, содержат одинаковое количество

положительного и отрицательного заряда, поэтому в целом оказываются электрически нейтральными. Силы (1.2) начинают проявляться только при сильном сближении атомов, что иногда проявляется в форме образования химической связи между ними.

Электрический ток возникает в результате перемещения зарядов. Обычно это происходит в металлическом проводнике, которому придают протяженную форму (форму проволоки). Ток в таком проводнике определяется *количеством заряда, протекающим по нему в единицу времени*. Поэтому для единицы силы тока имеем

$$\begin{aligned} \text{ед. тока СГС} &= \text{ед. заряда СГС} \cdot \text{сек}^{-1} = \\ &= \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{сек}^{-2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим прямолинейный проводник длины  $l$ . Возникновение тока в нем приводит к нарушению баланса зарядов на его концах. Заряды одного знака накапливаются на одном конце, а их недостаток на другом проявляется в форме заряда противоположного знака. Возникает сила Кулона (1.2), стремящаяся восстановить баланс зарядов. Поэтому ток в таком проводнике не может долго течь в одном направлении. Совсем другое дело — проводник кольцевой формы. Здесь возникновение тока не приводит к нарушению баланса зарядов, поэтому ток в кольцевом проводнике может течь неограниченно долго. При этом сам проводник будет оставаться электрически нейтральным и силы Кулона никак не проявятся.

Несмотря на отсутствие кулоновских сил, в эксперименте было обнаружено взаимодействие двух электрически нейтральных кольцевых проводников с током. Это взаимодействие имеет другую природу и осуществляется не электрическими, а магнитными силами. Величина магнитных сил существенно зависит от формы и взаимного расположения кольцевых проводников. Для установления количественных

закономерностей для магнитных сил необходимо максимально упростить геометрию кольцевых проводников. Для этого

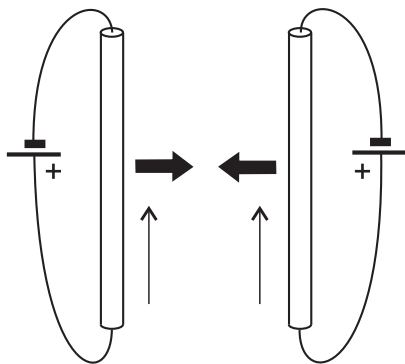


Рис. 1.2

их деформируют так, чтобы в каждом из них возник прямолинейный фрагмент достаточно большой длины  $l$ , и располагают эти фрагменты параллельно друг другу на расстоянии  $r$ . В пределе, когда  $l$  оказывается во много раз большим, чем  $r$ , такая конфигурация может рассматриваться как пара бесконечно длинных проводников. Экспериментально установлено, что такие проводники взаимодействуют согласно следующему закону.

**Закон Ампера.** Сила взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных проводников с током, приходящаяся на единицу их длины, прямо пропорциональна величинам токов в них и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$(1.3) \quad \frac{F}{l} \sim \frac{I_1 I_2}{r}.$$

При этом два сонаправленных тока притягиваются, а два противоположно направленных тока отталкиваются.

Единица измерения тока в системе СГС была уже определена выше. Поэтому коэффициент пропорциональности в формуле (1.3) является однозначно заданной экспериментально определяемой величиной. Размерность этого коэффициента —  $\text{сек}^2 \cdot \text{см}^{-2}$ . Она совпадает с размерностью обратного квадрата скорости, поэтому формулу (1.3) в СГС записывают так:

$$(1.4) \quad \frac{F}{l} = \frac{2}{c^2} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Константа  $c$  в формуле (1.4) определяется экспериментально и имеет размерность скорости:

$$(1.5) \quad c \approx 2.998 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

Как мы увидим позже, константа  $c$  в (1.5) в точности совпадает со скоростью света в вакууме. Коэффициент 2 в формуле (1.4) введен именно с целью достижения такого совпадения.

В системе СИ единица измерения тока  $1 \text{ а}$  (один ампер) является первичной. Она выбирается так, чтобы формула (1.3) записывалась в виде

$$(1.6) \quad \frac{F}{l} = \frac{2 \mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Здесь  $\pi = 3.14 \dots$  — точная (хотя и иррациональная) математическая константа, не имеющая размерности. Константа  $\mu_0$  называется диамагнитной восприимчивостью вакуума. Она имеет размерность:

$$(1.7) \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ н} \cdot \text{а}^{-2}.$$

Но, в отличие от константы  $c$  в (1.5), она является точной и не требует определения из эксперимента. Ее можно было бы положить равной единице, но именно такое значение (1.7) для этой константы было выбрано при формировании системы СИ. При этом ток величиной в 1 ампер оказывается лежащим в диапазоне тех значений токов, которые реально возникают в бытовых и промышленных электроприборах. Коэффициент  $4\pi$  в знаменателе (1.6) поставлен для упрощения некоторых других формул, чаще используемых при инженерных расчетах в электротехнике.

Будучи первичной в системе СИ, единица измерения тока *ампер* используется для определения единицы измерения заряда в 1 *кулон*:  $1 \text{ к} = 1 \text{ а} \cdot 1 \text{ сек.}$  При этом коэффициент

пропорциональности в законе Кулона (1.1) оказывается уже отличным от 1. В системе СИ закон Кулона имеет вид

$$(1.8) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Константа  $\epsilon_0$  называется диэлектрической проницаемостью вакуума. В отличие от константы  $\mu_0$  из (1.7), это физическая константа, определяемая из эксперимента:

$$(1.9) \quad \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ } \kappa^2 \cdot \text{н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Константы (1.5), (1.7) и (1.9) связаны соотношением

$$(1.10) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/сек.}$$

Из изложенного выше видим, что системы СГС и СИ различаются не только масштабом единиц измерения, но и видом формул для двух фундаментальных законов: закона Кулона и закона Ампера. Система СИ лучше предназначена для инженерных расчетов. Однако, проведение выкладок при выводе многих формул в ней оказывается более громоздким. Поэтому всюду далее в этой книге мы используем систему СГС.

Из сравнения закона Кулона с законом Ампера видим, что электрические и магнитные силы проявляются по разному. Однако, своим происхождением они обязаны одному — существованию электрических зарядов. Позже мы увидим, что взаимосвязь этих сил гораздо более тесная. Поэтому теорию электрических и магнитных явлений объединяют в одну теорию электромагнетизма. Теория электромагнетизма является теорией с одной фундаментальной размерной константой  $c$  — скоростью света. Классическая механика (без закона всемирного тяготения Ньютона) не имеет размерных констант. Ньютоновская теория тяготения содержит одну константу:

$$(1.11) \quad \gamma \approx 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

В основе этой теории лежит четвертый закон Ньютона, формулируемый так.

**Закон всемирного тяготения.** Два точечных тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Закон всемирного тяготения изображается одной формулой как в системе СИ, так и в системе СГС:

$$(1.12) \quad F = \gamma \frac{M_1 M_2}{r^2}.$$

Согласно современным представлениям, классическая механика и ньютоновская теория тяготения являются приближенными теориями. На смену им приходят специальная и общая теории относительности. Появление этих теорий исторически было обусловлено развитием теории электромагнетизма. Именно в такой последовательности эти теории излагаются в данной книге.

**Упражнение 1.1.** На базе изложенного выше определите количественное соотношение между единицами измерения заряда и тока в системах СИ и СГС.

## § 2. Концепция близкодействия.

Рассмотрим пару закрепленных заряженных тел и сделаем с ними следующий мысленный эксперимент: начнем удалять второе тело от первого. При этом расстояние  $r$  начнет увеличиваться и сила кулоновского взаимодействия (1.2) станет убывать. Возникает естественный вопрос: как скоро после начала движения второго тела этот факт отразится на величине силы Кулона, действующей на первое тело? Возможны два ответа на этот вопрос:

- (1) мгновенно;
- (2) с некоторым запаздыванием, зависящим от расстояния между телами.

Первый ответ на этот вопрос известен как *концепция дального действия*. В этом случае мы считаем формулу (1.2) абсолютно точной и применимой всегда (как для неподвижных зарядов, так и для движущихся).

Второй ответ базируется на *концепции близкодействия*. Согласно этой концепции, любое воздействие (и электрическое в том числе) может передаваться мгновенно лишь в соседнюю бесконечно-близкую точку пространства, а передача любого воздействия на расстояние происходит как некоторый процесс последовательной передачи этого воздействия от точки к точке. Этот процесс всегда приводит к некоторой конечной скорости передачи всякого воздействия. В рамках концепции близкодействия закон Кулона (1.2) трактуется как приближенный закон, в идеале применимый лишь к неподвижным зарядам, которые оставались неподвижными достаточно долго и процесс передачи взаимодействия успел завершиться.

Теория электромагнетизма содержит размерную константу  $c$  (скорость света (1.5)), которая является первым претендентом на роль скорости передачи электрического и магнитного взаимодействий. Этим она выгодно отличается от ньютоновской теории тяготения.

Но скорость  $c$  достаточно велика. Если производить эксперимент по измерению силы Кулона на расстояниях порядка  $r \approx 10$  см, мы получаем время передачи взаимодействия порядка  $t \approx 3 \cdot 10^{-10}$  сек. Экспериментальная техника XIX-го века не позволяла регистрировать столь короткие промежутки времени, поэтому вопрос о выборе концепции не мог быть решен экспериментально. Какое-то время он оставался спорным. Единственным возражением против концепции дального действия первоначально, по-видимому, была ее некоторая прямолинейность, законченность, и потому — скудность.

В настоящее время концепция близкодействия является общепринятой, против нее практически никто не возражает. Появилась также возможность ее экспериментальной провер-

ки для электромагнитных взаимодействий. Рассмотрим эту концепцию более внимательно. Согласно концепции близкодействия, процесс передачи взаимодействия на расстояние проявляет свойство инертности. Начавшись в одной точке, где находится перемещаемый заряд, он в течении какого-то времени оказывается вообще оторванным от зарядов и никак не проявляется. Для описания этой стадии развития процесса приходится ввести новое понятие — понятие *поля*.

*Поле* — это некоторая материальная сущность, способная заполнять все пространство и способная оказывать воздействие на другие материальные тела, осуществляя передачу взаимодействия между ними.

Число достоверно известных науке полей невелико и совпадает с числом известных типов взаимодействий — их четыре: *сильное, слабое, электромагнитное и поле тяготения (гравитационное поле)*. Сильное и слабое поля являются очень короткодействующими, они проявляются лишь в атомных ядрах, при столкновениях и распадах элементарных частиц, а также в астрономических объектах с очень высокой плотностью — нейтронных звездах. Эти типы полей в данной книге не рассматриваются.

Кроме того, имеется целый ряд терминов, использующих слово поле: *векторное поле, тензорное поле, поле спиноров, калибровочное поле и др.* Это математические понятия, отражающие определенные свойства физических полей.

### § 3. Принцип суперпозиции.

Применим концепцию близкодействия к закону Кулона для двух точечных зарядов. Наличие силы Кулона в рамках этой концепции можно интерпретировать так: первый заряд создает вокруг себя электрическое поле, которое воздействует на второй заряд. Результат такого воздействия проявляется в виде силы  $F$ , действующей на второй заряд. Сила — векторная величина. Обозначим через  $\mathbf{F}$  вектор силы и учтем направ-



ление этого вектора, определяемое словесной формулировкой закона Кулона. Это дает

$$(3.1) \quad \mathbf{F} = Q_1 Q_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Здесь  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — радиус-векторы точек, в которых расположены заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ . Рассмотрим вектор  $\mathbf{E}$ , определяемый как отношение  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_2$ . Для него из формулы (3.1) выводим

$$(3.2) \quad \mathbf{E} = Q_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Вектор  $\mathbf{E}$  зависит от местоположения первого заряда и от его величины. Он также зависит от местоположения второго заряда, но не зависит от величины этого заряда. Вектор  $\mathbf{E}$  можно принять за количественную характеристику электрического поля, созданного зарядом  $Q_1$  в точке  $\mathbf{r}_2$ , в которую помещен заряд  $Q_2$ . Величину  $\mathbf{E}$  можно вычислить по формуле (3.2) или же определить из опыта. Для этого в точку  $\mathbf{r}_2$  надо поместить пробный заряд  $q$  и измерить силу Кулона  $\mathbf{F}$ , действующую на этот заряд. После чего вектор  $\mathbf{E}$  определится как результат деления  $\mathbf{F}$  на величину заряда  $q$ :

$$(3.3) \quad \mathbf{E} = \mathbf{F}/q.$$

Рассмотрим более сложную ситуацию. Пусть в точках  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  расположены заряды  $Q_1, \dots, Q_n$ . Они создают вокруг себя электрическое поле, которое воздействует на пробный заряд  $q$ , помещенный в точке  $\mathbf{r}$ . Это воздействие проявляется в форме действия силы  $\mathbf{F}$  на заряд  $q$ . Мы вновь можем рассмотреть вектор  $\mathbf{E}$  вида (3.3) и принять его за количественную характеристику электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ . Он называется *вектором напряженности электрического поля* или просто *вектором электрического поля* в этой точке.

В данном случае, вообще говоря, нет никакой априорной уверенности в том, что вектор  $\mathbf{E}$  не зависит от величины

пробного заряда  $q$ . Однако, имеет место следующий экспериментальный факт.

**Принцип суперпозиции.** Электрическое поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое в точке  $\mathbf{r}$  системой точечных зарядов  $Q_1, \dots, Q_n$ , есть векторная сумма полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов  $Q_1, \dots, Q_n$ .

Принцип суперпозиции в сочетании с законом Кулона приводит к следующей формуле для напряженности электрического поля, созданного системой точечных зарядов в точке  $\mathbf{r}$ :

$$(3.4) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Принцип суперпозиции позволяет перейти от точечных зарядов к распределенным. Пусть число точечных зарядов  $n \rightarrow \infty$ . При таком предельном переходе сумма в формуле (3.4) заменится объемным интегралом:

$$(3.5) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Здесь  $\rho(\tilde{\mathbf{r}})$  — объемная плотность заряда в точке  $\tilde{\mathbf{r}}$ . Это усредненная характеристика, имеющая смысл заряда, приходящегося на единицу объема.

Для нахождения силы, действующей на пробный заряд  $q$ , мы должны обратить формулу (3.3):

$$(3.6) \quad \mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Сила, действующая на заряд  $q$  в электрическом поле равна произведению величины этого заряда на вектор напряженности поля в точке, где этот заряд находится. Но сам заряд  $q$  также создает поле. Воздействует ли на заряд  $q$  его собственное поле? Для точечных зарядов ответ на этот вопрос отрицателен. Этот факт следует рассматривать как дополнение

к принципу суперпозиции. Сила, действующая на распределенную систему зарядов в электрическом поле, определяется следующим интегралом:

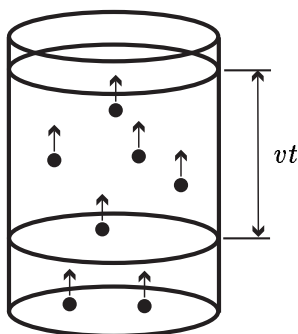
$$(3.7) \quad \mathbf{F} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в (3.7) — это внешнее поле, создаваемое внешними зарядами. Поле самих зарядов с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$  в  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  не включается.

Завершая это параграф, отметим, что формулы (3.4) и (3.5) справедливы только для системы неподвижных зарядов, которые оставались неподвижными достаточно долго, для того, чтобы процесс передачи взаимодействия дошел от зарядов до точки наблюдения  $\mathbf{r}$ . Поля, созданные такими системами зарядов называются *статическими*, а раздел теории электромагнетизма, изучающий такие поля, называется *электростатикой*.

#### § 4. Сила Лоренца и закон Био-Савара-Лапласа.

Аналогом закона Кулона в случае магнитного взаимодействия выступает закон взаимодействия параллельных проводников с током.



Согласно концепции близкого действия, сила  $F$  возникает в результате воздействия магнитного поля первого проводника на второй проводник. Однако, параллельные проводники не могут рассматриваться как точечные: формула (1.4) справедлива лишь при  $l \gg r$ . Для получения количественной характеристики магнитного поля в какой-либо точке  $\mathbf{r}$  рас-

Рис. 4.1

смотрим ток  $I_2$  в (1.4) как поток заряженных частиц заряда  $q$ , движущихся с одинаковой скоростью  $v$  вдоль второго проводника. Если через  $\nu$  обозначить число таких частиц на единице длины проводника, то на длину  $l$  придется  $N = \nu l$  частиц. За время  $t$  через любое фиксированное поперечное сечение проводника проходит  $n = \nu v t$  частиц, которые переносят заряд  $Q = q \nu v t$ . Поэтому ток  $I_2$  во втором проводнике может быть вычислен по формуле

$$I_2 = Q/t = q \nu v.$$

Вычислив силу, приходящуюся на фрагмент проводника длины  $l$ , по формуле (1.4), мы должны разделить ее на количество частиц в этом фрагменте  $N$ . Тогда для силы, приходящейся на одну частицу, получаем

$$(4.1) \quad F = \frac{2}{c^2} \frac{I_1 I_2 l}{r N} = \frac{2}{c^2} \frac{I_1 q v}{r}.$$

Формула (4.1) определяет качественный характер зависимости силы  $F$  от  $q$  и  $v$ : на частицу заряда  $q$ , которая движется в магнитном поле, действует сила, пропорциональная ее заряду и величине ее скорости:

$$(4.2) \quad F \sim q v.$$

Сила и скорость — векторные величины. Наиболее простой способ установить линейную связь двух векторных величин  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{v}$  состоит в рассмотрении векторного произведения  $\mathbf{v}$  с третьей векторной величиной  $\mathbf{H}$ :

$$(4.3) \quad \mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}(\mathbf{r})].$$

Здесь  $c$  — скорость света. Величина  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в (4.3) служит количественной характеристикой магнитного поля в точке  $\mathbf{r}$  и

называется *напряженностью магнитного поля* в этой точке. Коэффициент  $1/c$  в (4.3) введен для того, чтобы размерность напряженности магнитного поля совпадала с размерностью напряженности электрического поля. Сила  $\mathbf{F}$ , действующая на движущийся точечный заряд в магнитном поле, получила название *силы Лоренца*. Полная сила Лоренца, действующая на заряд в электромагнитном поле, есть сумма двух компонент — электрической и магнитной:

$$(4.4) \quad \mathbf{F} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Формула (4.4) обобщает формулу (3.6) на случай общего электромагнитного поля. Она верна не только для статических, но и для нестатических (переменных) электрических и магнитных полей. Разумеется, изложенный выше вывод является эмпирическим. Формулу (4.4) надо трактовать как экспериментальный факт, не противоречащий более раннему экспериментальному факту (1.4) в рамках развиваемой теории.

Вернемся обратно к проводникам с током. Формулу (4.3) можно перефразировать в терминах токов. На единицу длины проводника с током  $I$  в магнитном поле напряженности  $\mathbf{H}$  действует сила

$$(4.5) \quad \frac{\mathbf{F}}{l} = \frac{I}{c} [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{H}].$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор в направлении тока, касательный к проводнику. Полная сила, действующая на кольцевой проводник с током  $I$ , определяется контурным интегралом

$$(4.6) \quad \mathbf{F} = \oint \frac{I}{c} [\boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{H}(\mathbf{r}(s))] ds,$$

где  $s$  — натуральный параметр на кривой, задающей форму проводника, а вектор-функция  $\mathbf{r}(s)$  задает эту кривую в параметрической форме.

Рассмотрим случай двух бесконечных параллельных проводников. Силу  $\mathbf{F}$  теперь можно вычислить по формуле (4.5), считая, что первый проводник создает поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , которое воздействует на второй проводник. Дополнительный эксперимент показывает, что вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен плоскости проводников. Величина магнитного поля  $H = |\mathbf{H}|$  может быть найдена из (4.1):

$$(4.7) \quad H = \frac{2 I_1}{c r}.$$

Здесь  $r$  — расстояние от точки наблюдения до проводника, создающего поле.

Магнитное поле, создаваемое проводниками с током, удовлетворяет принципу суперпозиции. В частности, поле бесконечного прямолинейного проводника (4.7) складывается из полей, создаваемых отдельными фрагментами этого проводника. Поставить чистый эксперимент и измерить поле от отдельного фрагмента нельзя, ибо ток в таком фрагменте не может протекать достаточно долго. Однако, чисто теоретически, такой фрагмент бесконечно малой длины  $ds$  рассмотреть можно. Можно также записать формулу для магнитного поля, создаваемого таким фрагментом проводника с током  $I$ :

$$(4.8) \quad d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{[I \boldsymbol{\tau}, \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}]}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds.$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор, определяющий пространственную ориентацию фрагмента проводника. Он всегда берется направленным вдоль тока. На практике при вычислении магнитных полей, созданных кольцевыми проводниками с током, формула (4.8) используется в интегральной форме:

$$(4.9) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \oint \frac{1}{c} \frac{[I \boldsymbol{\tau}(s), \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}(s)]}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}(s)|^3} ds.$$

Здесь, как и в (4.6),  $s$  — натуральный параметр на кривой, задающей форму проводника, а  $\tilde{\mathbf{r}}(s)$  — векторно-параметрическое уравнение этой кривой, причем  $\boldsymbol{\tau}(s) = d\tilde{\mathbf{r}}(s)/ds$ . Соотношение (4.8) и его интегральная форма записи (4.9) выражают закон Био-Савара-Лапласа для кольцевых проводников с током.

Закон Био-Савара-Лапласа в форме (4.8) не может быть проверен экспериментально. Однако, в интегральной форме (4.9) для проводников конкретной формы он приводит к конкретному выражению  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , которое уже допускает экспериментальную проверку.

**Упражнение 4.1.** *Используя соотношения (4.6) и (4.9), выведите закон взаимодействия параллельных проводников с током в форме (1.4).*

**Упражнение 4.2.** *Найдите магнитное поле проводника с током, имеющего форму окружности радиуса  $a$ .*

## § 5. Плотность тока. Закон сохранения заряда.

Проводники с током, которые мы рассматривали ранее, являются некоторой идеализацией. Реальный проводник всегда обладает толщиной. Этот факт игнорируется при рассмотрении протяженных проводников, имеющих форму проволоки. Однако, в некоторых случаях толщиной проводника пренебрегать нельзя. Например, при рассмотрении тока в электролитической ванне или тока в разреженной плазме в верхних слоях атмосферы. Ток в объемных проводниках может распределяться неравномерно по толще проводника. Для описания такой ситуации лучше всего подходит понятие плотности тока  $\mathbf{j}$ .

Плотность тока — векторная величина, зависящая от точки проводящей среды:  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Направление вектора  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  указывает направление перемещения заряда в данной точке. Величина  $j = |\mathbf{j}|$  определяется количеством заряда, который

протекает в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно вектору  $\mathbf{j}$ .

Выделим мысленно некоторый ограниченный объем  $\Omega$  в толще проводящей среды. Его граница — некоторая гладкая замкнутая поверхность. В силу определения плотности тока, заряд  $J$ , вытекающий за пределы выделенного объема в единицу времени, определяется поверхностным интегралом по границе области, а величина заряда  $Q$ , заключенного внутри объема, — объемным интегралом:

$$(5.1) \quad Q = \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r}, \quad J = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial\Omega$ , ограничивающей объем  $\Omega$ .

Закон сохранения заряда является еще одним фундаментальным экспериментальным фактом, отражающим природу электромагнетизма. В классической формулировке он утверждает, что заряды не возникают и не исчезают, а могут только перемещаться. Современная физика внесла некоторые коррективы в эту формулировку: заряды могут исчезать и возникать в процессах аннигиляции и рождения пар, состоящих из частиц и античастиц. Но и при этих процессах полный баланс заряда сохраняется, ибо суммарный электрический заряд пары частица–античастица всегда равен нулю. Применительно к интегралам (5.1) закон сохранения заряда дает:  $Q = -J$ . Это соотношение означает, что уменьшение заряда в объеме  $\Omega$  всегда обусловлено его потерей за счет потока через границу, и наоборот, увеличение заряда в этом объеме есть результат его поступления через границу объема. Запишем закон сохранения заряда в следующей форме:

$$(5.2) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r} \right) + \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$



Плотность тока  $\mathbf{j}$  есть вектор, зависящий от точки проводящей среды. Такие объекты в дифференциальной геометрии называются векторными полями. Другой пример векторных полей — это электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$ . Поверхностный интеграл  $J$  из (5.1) называется *поток*ом векторного поля  $\mathbf{j}$  через поверхность  $\partial\Omega$ . Для гладких векторных полей поверхностный интеграл типа  $J$  может быть преобразован в объемный по формуле Остроградского–Гаусса. Для соотношения (5.2) это дает

$$(5.3) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Произвольность выбора ограниченного объема  $\Omega$  в (5.3) означает, что подинтегральное выражение в (5.3) равно нулю:

$$(5.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Соотношения (5.2) и (5.4) представляют собой интегральную и дифференциальную форму записи закона сохранения заряда. Соотношение (5.4) известно также как *уравнение неразрывности* для электрического заряда.

Применительно к объемным проводникам с распределенным по объему током с плотностью  $\mathbf{j}$  формула (4.6) переписывается в следующем виде:

$$(5.5) \quad \mathbf{F} = \int \frac{1}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}.$$

Закон Био-Савара-Лапласа для таких проводников также записывается через объемный интеграл:

$$(5.6) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}]}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Вывод формул (5.5) и (5.6) из (4.6) и (4.8) требует разбиения объемного проводника на совокупность линейных проводников,

использования принципа суперпозиции и предельного перехода по количеству линейных проводников  $n \rightarrow \infty$ .

### § 6. Электрический дипольный момент.

Рассмотрим некоторую распределенную конфигурацию зарядов с плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , целиком сосредоточенную внутри некоторого ограниченного объема  $\Omega$ . Пусть  $R$  — максимальный линейный размер области  $\Omega$ . Поместим начало координат внутрь области сосредоточения заряда  $\Omega$  и выберем точку наблюдения  $\mathbf{r}$ , достаточно далеко отстоящую от области сосредоточения заряда:  $|\mathbf{r}| \gg R$ . Для нахождения электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  используем формулу (3.5):

$$(6.1) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Ввиду ограниченности области интегрирования в (6.1) имеем  $|\tilde{\mathbf{r}}| \leq R$ . Используя это вместе с неравенством  $|\mathbf{r}| \gg R$ , мы можем рассмотреть тейлоровское разложение дроби в подинтегральном выражении (6.1) по степеням  $\tilde{\mathbf{r}}/|\mathbf{r}|$ :

$$(6.2) \quad \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \left( 3 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \left\langle \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} \right\rangle - \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|} \right) + \dots$$

Подставив (6.2) в (6.1), мы получим следующее выражение для вектора электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ :

$$(6.3) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = Q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3 \langle \mathbf{r}, \mathbf{D} \rangle \mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{D}}{|\mathbf{r}|^5} + \dots$$

Первое слагаемое в (6.3) — это кулоновское поле точечного заряда, расположенного в начале координат. Величина  $Q$  есть суммарный заряд, заключенный в объеме  $\Omega$ . Он задается интегралом (5.1).

Второе слагаемое в (6.3) известно как поле точечного диполя, расположенного в начале координат. Вектор  $\mathbf{D}$  — называется *дипольным моментом* системы зарядов, заключенных внутри  $\Omega$ . Он определяется интегралом

$$(6.4) \quad \mathbf{D} = \int_{\Omega} \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \tilde{\mathbf{r}} d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

Для системы из чисто точечных зарядов дипольный момент определяется суммой

$$(6.5) \quad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n Q_i \tilde{\mathbf{r}}_i.$$

Для электрически нейтральной в целом системы зарядов с  $Q = 0$ , сосредоточенной вблизи точки начала координат  $\mathbf{r} = 0$ , поле точечного диполя

$$(6.6) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3 \langle \mathbf{r}, \mathbf{D} \rangle \mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{D}}{|\mathbf{r}|^5}$$

является главным членом асимптотики при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  для электростатического поля (3.4) или (3.5). Отметим, что для системы с  $Q = 0$  дипольный момент  $\mathbf{D}$ , вычисляемый по формулам (6.4) и (6.5), является инвариантом системы. Он не меняется при перемещении системы зарядов без изменения их взаимного расположения:  $\tilde{\mathbf{r}} \rightarrow \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_0$ .

**Упражнение 6.1.** Понятие плотности заряда применимо и к зарядам, локализованным в точке. Однако, при этом  $\rho(\mathbf{r})$  становится уже обобщенной функцией. Так, например, точечный заряд  $Q$ , расположенный в точке  $\mathbf{r} = 0$ , задается плотностью  $\rho(\mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r})$ , где  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция Дирака. Рассмотрите плотность заряда

$$(6.7) \quad \rho(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{D}, \text{grad } \delta(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{i=1}^3 D^i \frac{\partial \delta(\mathbf{r})}{\partial r^i}.$$

По формуле (5.1) вычислите полный заряд  $Q$ , отвечающий плотности (6.7). Из (6.4) вычислите дипольный момент для системы зарядов (6.7) и найдите электрическое поле, создаваемое этой системой зарядов. Сравните полученное выражение для  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  с (6.6) и объясните, почему систему зарядов (6.7) называют точечным диполем.

**Упражнение 6.2.** Пользуясь формулой (3.7), найдите силу, действующую на точечный диполь во внешнем электрическом поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

## § 7. Магнитный момент.

Рассмотрим ситуацию, сходную с рассмотренной в предыдущем параграфе. Пусть в некоторой ограниченной области  $\Omega$ , содержащей в себе начало координат  $\mathbf{r} = 0$  и имеющей максимальный линейный размер  $R$ , сосредоточена некоторая распределенная система токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , то есть вектор-функция  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  может быть отлична от нуля лишь внутри области  $\Omega$ , она равна нулю на границе области  $\partial\Omega$  и всюду вне области. Систему токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  мы считаем стационарной ( $\mathbf{j}$  не зависит от времени) и не приводящей к нарушению баланса зарядов ( $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ). Закон сохранения заряда (5.4), примененный к данной ситуации, дает зануление дивергенции поля  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ :

$$(7.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Для вычисления магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  воспользуемся законом Био-Савара-Лапласа в форме (5.6):

$$(7.2) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}]}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

Полагая  $|\mathbf{r}| \gg R$ , воспользуемся разложением (6.2) для подстановки его в (7.2). В результате этого получим

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = & \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r}]}{c |\mathbf{r}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}} + \\ & + \int_{\Omega} \frac{3 \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r}] - |\mathbf{r}|^2 [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{r}}]}{c |\mathbf{r}|^5} d^3 \tilde{\mathbf{r}} + \dots \end{aligned}$$

**Лемма 7.1.** *Первый интеграл в формуле (7.3) равен нулю тождественно.*

Док-во. Обозначим этот интеграл через  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ . Выберем произвольный константный вектор  $\mathbf{e}$  и образуем скалярное произведение  $\mathbf{H}_1$  с вектором  $\mathbf{e}$ :

$$(7.4) \quad \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \frac{\langle \mathbf{e}, [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r}] \rangle}{c |\mathbf{r}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}} = \int_{\Omega} \frac{\langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), [\mathbf{r}, \mathbf{e}] \rangle}{c |\mathbf{r}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Рассмотрим вектор  $\mathbf{a}$  и функцию  $f(\tilde{\mathbf{r}})$ , определив их так:

$$\mathbf{a} = \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{e}]}{c |\mathbf{r}|^3}, \quad f(\tilde{\mathbf{r}}) = \langle \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle.$$

Вектор  $\mathbf{a}$  не зависит от  $\tilde{\mathbf{r}}$ , поэтому при вычислении интеграла (7.4) его можно считать константным вектором. Для него имеем  $\mathbf{a} = \text{grad } f$ . Подставив это в интеграл (7.4), получим

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{e} \rangle &= \int_{\Omega} \langle \mathbf{j}, \text{grad } f \rangle d^3 \tilde{\mathbf{r}} = \\ &= \int_{\Omega} \text{div}(f \mathbf{j}) d^3 \tilde{\mathbf{r}} - \int_{\Omega} f \text{div } \mathbf{j} d^3 \tilde{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл в (7.5) равен нулю в силу (7.1). Предшествующий ему интеграл преобразуется в поверхностный по формуле Остроградского–Гаусса. Он также равен нулю по причине зануления  $\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})$  на границе области  $\Omega$ . Отсюда

$$(7.6) \quad \langle \mathbf{H}_1, \mathbf{e} \rangle = \int_{\partial\Omega} f \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$

Теперь зануление вектора  $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$  следует из формулы (7.6) в силу произвольности вектора  $\mathbf{e}$ . Лемма доказана.  $\square$

Теперь преобразуем второй интеграл в (7.3). Обозначим его через  $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$  и, выбрав произвольный вектор  $\mathbf{e}$ , образуем скалярное произведение  $\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle$ . Это скалярное произведение можно преобразовать к виду

$$(7.7) \quad \langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{c|\mathbf{r}|^5} \int_{\Omega} \langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle d^3\tilde{\mathbf{r}},$$

где  $\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{r}}) = 3\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{r}, \mathbf{e}] - |\mathbf{r}|^2 [\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{e}]$ . Добавление к  $\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{r}})$  градиента произвольной функции  $f(\tilde{\mathbf{r}})$  не меняет величину интеграла в (7.7). Это видно на примере (7.5) и (7.6). Выберем конкретную функцию  $f(\tilde{\mathbf{r}})$ , определив ее так:

$$(7.8) \quad f(\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{3}{2} \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle \langle \tilde{\mathbf{r}}, [\mathbf{r}, \mathbf{e}] \rangle.$$

Для градиента функции (7.8) прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\tilde{\mathbf{r}}) &= -\frac{3}{2} \langle \tilde{\mathbf{r}}, [\mathbf{r}, \mathbf{e}] \rangle \mathbf{r} - \frac{3}{2} \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{r}, \mathbf{e}] = \\ &= -3 \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{r}, \mathbf{e}] - \frac{3}{2} (\mathbf{r} \langle \tilde{\mathbf{r}}, [\mathbf{r}, \mathbf{e}] \rangle - [\mathbf{r}, \mathbf{e}] \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle). \end{aligned}$$

Используем известную формулу  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

из векторной алгебры. Полагая  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{r}$  и  $\mathbf{c} = [\mathbf{r}, \mathbf{e}]$ , преобразуем выражение для  $\text{grad } f$  к следующему виду:

$$(7.9) \quad \text{grad } f(\tilde{\mathbf{r}}) = -3 \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{r}, \mathbf{e}] - \frac{3}{2} [\tilde{\mathbf{r}}, [\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \mathbf{e}]]].$$

Правая часть (7.9) содержит тройное векторное произведение. Для его преобразования вновь используем соотношение  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ , полагая  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{r}$  и  $\mathbf{c} = \mathbf{e}$ :

$$\text{grad } f(\tilde{\mathbf{r}}) = -3 \langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle [\mathbf{r}, \mathbf{e}] - \frac{3}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle [\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}] + \frac{3}{2} |\mathbf{r}|^2 [\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{e}].$$

Добавим полученное выражение для  $\text{grad } f$  к вектору  $\mathbf{b}(\tilde{\mathbf{r}})$ . Новое значение этого вектора дается следующим соотношением:

$$(7.10) \quad \mathbf{b}(\tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{3}{2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle [\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}] + \frac{1}{2} |\mathbf{r}|^2 [\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{e}].$$

Подставим (7.10) в формулу (7.7). Это дает

$$\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \frac{-3 \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{r}, [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{r}}] \rangle + |\mathbf{r}|^2 \langle \mathbf{e}, [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{r}}] \rangle}{2 c |\mathbf{r}|^5} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Заметим, что величины  $\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$  входят в формулу для  $\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle$  только в форме векторного произведения  $[\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{r}}]$ . Обозначим через  $\mathbf{M}$  следующий интеграл:

$$(7.11) \quad \mathbf{M} = \int_{\Omega} \frac{[\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})]}{2 c} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Вектор  $\mathbf{M}$ , определенный интегралом (7.11), называется *маг-*

нитным моментом системы токов  $\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})$ . В терминах  $\mathbf{M}$  полученное выше соотношение для  $\langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle$  записывается так:

$$(7.12) \quad \langle \mathbf{H}_2, \mathbf{e} \rangle = \frac{3 \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \rangle - |\mathbf{r}|^2 \langle \mathbf{e}, \mathbf{M} \rangle}{|\mathbf{r}|^5}.$$

Учитывая произвольность вектора  $\mathbf{e}$  в формуле (7.12), из (7.3) и леммы 7.1 можно сделать следующий вывод: поле точечного магнитного диполя

$$(7.13) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3 \langle \mathbf{r}, \mathbf{M} \rangle \mathbf{r} - |\mathbf{r}|^2 \mathbf{M}}{|\mathbf{r}|^5}$$

является главным членом асимптотики при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  для статического магнитного поля (4.9) и (5.6).

Подобно дипольному моменту  $\mathbf{D}$  системы зарядов с суммарным зарядом  $Q = 0$ , магнитный момент  $\mathbf{M}$  инвариантен относительно перемещений  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ , не меняющих конфигурации токов. Действительно, при таком перемещении интеграл (7.11) приобретает добавку

$$(7.14) \quad \Delta \mathbf{M} = \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{r}_0, \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})]}{2c} d^3 \tilde{\mathbf{r}} = 0.$$

Интеграл в (7.14) равен нулю в силу тех же соображений, что изложены при доказательстве леммы 7.1.

**Упражнение 7.1.** Рассмотрите локализованную систему токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  со следующей обобщенной плотностью:

$$(7.15) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -c [\mathbf{M}, \text{grad } \delta(\mathbf{r})].$$

Убедитесь в справедливости соотношения (7.1) для системы токов (7.15) и определите ее магнитный момент  $\mathbf{M}$ . Используя формулу (5.6), определите магнитное поле этой системы токов



и объясните, почему эту систему токов называют *точечным магнитным диполем*.

**Упражнение 7.2.** Пользуясь формулой (5.5), найдите силу, действующую на точечный магнитный диполь во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ .

**Упражнение 7.3.** Используя следующую формулу для момента сил:

$$\mathcal{M} = \int \frac{1}{c} [\mathbf{r}, [\mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{H}]] d^3\mathbf{r},$$

найдите вращательный момент сил  $\mathcal{M}$ , действующий на точечный магнитный диполь (7.15) в однородном магнитном поле  $\mathbf{H} = \text{const}$ .

## § 8. Интегральные уравнения статического электромагнитного поля.

Понятие потока векторного поля через поверхность возникло у нас при рассмотрении закона сохранения заряда (см. интеграл  $J$  из (5.1)). Аналогичным образом можно определить потоки и для векторных полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ :

$$(8.1) \quad \mathcal{E} = \int_S \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle dS, \quad \mathcal{H} = \int_S \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle dS.$$

Пусть  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем  $\Omega$ , т.е.  $S = \partial\Omega$ . Электростатическое поле  $\mathbf{E}$  определяется формулой (3.5). Подставим поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в форму (3.5) в первый интеграл (8.1) и произведем смену порядка интегрирования в получившемся повторном интеграле:

$$(8.2) \quad \mathcal{E} = \int \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \int_{\partial\Omega} \frac{\langle \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dS d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

Внутренний поверхностный интеграл в (8.2) берется от явно заданной функции. Он может быть вычислен явно:

$$(8.3) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\langle \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dS = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{\mathbf{r}} \notin \overline{\Omega}, \\ 4\pi, & \text{если } \tilde{\mathbf{r}} \in \Omega. \end{cases}$$

Здесь через  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  обозначено замыкание области  $\Omega$ .

Для доказательства соотношения (8.3) рассмотрим векторное поле  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  следующего вида:

$$(8.4) \quad \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3}.$$

Векторное поле  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  является гладким всюду, кроме одной особой точки  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$ . Всюду вне особой точки непосредственным вычислением находим  $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$ . При  $\tilde{\mathbf{r}} \notin \overline{\Omega}$  особая точка поля  $\mathbf{m}$  не попадает в  $\Omega$ , поэтому к (8.3) применима формула Остроградского–Гаусса:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{m} d^3\mathbf{r} = 0.$$

Это доказывает первую часть формулы (8.3). Для доказательства второй части этой формулы при  $\tilde{\mathbf{r}} \in \Omega$  применим тактический маневр. Рассмотрим сферическую  $\epsilon$ -окрестность  $O = O_\epsilon$  особой точки  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$ . При достаточно малом  $\epsilon$  окрестность  $O$  целиком лежит внутри  $\Omega$ . Тогда из условия  $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$  для поля (8.4) получаем

$$(8.5) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = \int_{\partial O} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = 4\pi.$$

Значение последнего интеграла по сфере  $\partial O$  в (8.5) находится в результате несложного непосредственного вычисления. Фор-

мула (8.3) доказана. Подстановка (8.3) в (8.2) приводит к следующему соотношению:

$$(8.6) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle dS = 4\pi \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}.$$

Соотношение (8.6) может быть сформулировано словесно в виде следующей теоремы.

**Теорема о потоке электрического поля.** *Поток вектора электрического поля через границу ограниченной области равен произведению  $4\pi$  на суммарный заряд в этой области.*

Рассмотрим теперь поток магнитного поля  $\mathcal{H}$  из (8.1). Статическое магнитное поле определяется формулой (5.6). Подставим поле  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в форму (5.6) во второй интеграл (8.1) и произведем смену порядка интегрирования в получившемся повторном интеграле:

$$(8.7) \quad \mathcal{H} = \int_{\partial\Omega} \int \frac{1}{c} \frac{\langle [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}], \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dS d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

При вычислении внутреннего интеграла по поверхности вектор  $\mathbf{j}$  можно считать константным. Рассмотрим поле

$$(8.8) \quad \mathbf{m}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}]}{c |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3}.$$

Подобно полю (8.4), поле (8.8) имеет ровно одну особую точку  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$ . Дивергенция этого поля равна нулю, что проверяется непосредственным вычислением. Наличие особой точки в этом случае, оказывается, не влияет на величину поверхностного интеграла в (8.7). Взамен (8.3) в данном случае мы имеем

$$(8.9) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{1}{c} \frac{\langle [\mathbf{j}, \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}], \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} dS = 0.$$

При  $\tilde{\mathbf{r}} \notin \overline{\Omega}$  соотношение (8.9) вытекает из  $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$  после применения формулы Остроградского–Гаусса. При  $\tilde{\mathbf{r}} \in \Omega$  имеет место соотношение, аналогичное соотношению (8.5):

$$(8.10) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = \int_{\partial O} \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$

Но значение интеграла по сфере в данном случае равно нулю, ибо вектор  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  ортогонален вектору нормали  $\mathbf{n}$  во всех точках сферы  $\partial O$ . В результате подстановки (8.9) в (8.7) получаем соотношение

$$(8.11) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle dS = 0,$$

которое формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема о потоке магнитного поля.** Поток вектора магнитного поля через границу всякой ограниченной области равен нулю.

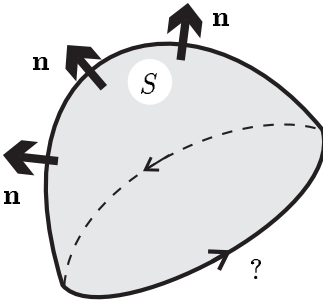


Рис. 8.1

Пусть  $\mathbf{r}(s)$  — векторно-параметрическое уравнение некоторой замкнутой пространственной кривой  $?$ , которая является краем некоторой незамкнутой поверхности  $S$ , т.е.  $? = \partial S$ . Незамкнутость поверхности  $S$  означает, что  $S$  и  $?$  не пересекаются. Через  $\overline{S}$  обозначим замыкание поверхности  $S$ . Тогда  $\overline{S} = S \cup ?$ . Считая  $s$  натуральным параметром на  $?$ , определим циркуляцию электрического и магнитного полей в виде следующих контурных интегралов:

$$(8.12) \quad \epsilon = \oint_{\Gamma} \langle \mathbf{E}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds, \quad \eta = \oint_{\Gamma} \langle \mathbf{H}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds.$$

Подстановка (3.5) в (8.12) и смена порядка интегрирования в получившемся повторном интеграле дает

$$(8.13) \quad \epsilon = \int \rho(\tilde{\mathbf{r}}) \oint_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}(s) \rangle}{|\mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds d^3\tilde{\mathbf{r}}.$$

Формула (8.12) приводит к необходимости рассмотрения векторного поля (8.4). При  $\tilde{\mathbf{r}} \notin ?$ , учитывая  $? = \partial S$  и используя формулу Стокса, контурный интеграл в (8.13) можно преобразовать в поверхностный интеграл:

$$(8.14) \quad \oint_{\Gamma} \frac{\langle \mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\tau}(s) \rangle}{|\mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds = \int_S \langle \text{rot } \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle dS = 0.$$

Значения интеграла (8.14) в точках  $\tilde{\mathbf{r}} \in ?$  никакой роли не играют, ибо при подстановке (8.14) в интеграл (8.13) такие точки составляют множество меры нуль.

Равенство нулю интеграла (8.14) при  $\tilde{\mathbf{r}} \notin ?$  вытекает из  $\text{rot } \mathbf{m} = 0$ , что проверяется непосредственным вычислением. Наличие особенности в точке  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}$  у поля (8.4) несущественно, ибо поверхность  $S$ , границей которой служит контур  $?$ , можно деформировать так, что  $\tilde{\mathbf{r}} \notin S$ . Результат подстановки (8.14) в (8.13) можно записать в виде уравнения:

$$(8.15) \quad \oint_{\partial S} \langle \mathbf{E}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 0.$$

**Теорема о циркуляции электрического поля.** *Циркуляция статического электрического поля вдоль границы любой пленки равна нулю.*

Формула типа (8.15) имеется и в случае магнитного поля:

$$(8.16) \quad \oint_{\partial S} \langle \mathbf{H}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = \frac{4\pi}{c} \int_S \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS.$$

Соответствующая теорема о циркуляции формулируется так.

**Теорема о циркуляции магнитного поля.** *Циркуляция статического магнитного поля вдоль границы любой пленки равна произведению  $4\pi/c$  на суммарный ток, протекающий сквозь пленку.*

Интеграл по поверхности  $S$  входит теперь в правую часть формулы (8.16) явно. Поэтому эта поверхность, натянутая на контур  $\gamma$ , фиксирована. Она не подлежит деформации, как это было при доказательстве теоремы о циркуляции электрического поля. Рассмотрим  $\varepsilon$ -раздутие этой поверхности  $S$ . Это область  $\Omega(\varepsilon)$ , являющаяся объединением всех  $\varepsilon$ -окрестностей всех точек  $\mathbf{r} \in S$ . Она содержит в себе поверхность  $S$  вместе с контуром  $\gamma$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  область  $\Omega(\varepsilon)$  стягивается к  $S$ .

Обозначим через  $D(\varepsilon) = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega(\varepsilon)$  внешность области  $\Omega(\varepsilon)$  и рассмотрим следующую модификацию формулы (5.6) для магнитного поля:

$$(8.17) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(\varepsilon)} \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}]}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^3} d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Подставим (8.17) в интеграл (8.12) для циркуляции магнитного поля и произведем смену порядка интегрирования в образовавшемся повторном интеграле. В результате этого получим

$$(8.18) \quad \eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(\varepsilon)} \oint_{\Gamma} \frac{1}{c} \frac{\langle [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}], \boldsymbol{\tau}(s) \rangle}{|\mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Во внутреннем интеграле в (8.18) мы имеем векторное поле (8.8). В отличие от поля (8.4), ротор поля (8.8) не равен нулю:

$$(8.19) \quad \text{rot } \mathbf{m} = \frac{3 \langle \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{j} \rangle (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) - |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^2 \mathbf{j}}{c |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^5}.$$

Использование формулы Стокса и (8.19) позволяет преобразовать контурный интеграл (8.18) в поверхностный:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{c} \frac{\langle [\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}], \boldsymbol{\tau}(s) \rangle}{|\mathbf{r}(s) - \tilde{\mathbf{r}}|^3} ds = \\ = \int_S \frac{3 \langle \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle \langle \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle - |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^2 \langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{c |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|^5} dS.$$

Обозначим через  $\tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}})$  векторное поле следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{3 \langle \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle (\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) - |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^2 \mathbf{n}(\mathbf{r})}{c |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^5}.$$

В терминах поля  $\tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}})$  формула для  $\mathfrak{h}$  записывается так:

$$\mathfrak{h} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(\varepsilon)} \int_S \langle \tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle dS d^3 \tilde{\mathbf{r}}.$$

Поле  $\tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}})$  в полученной формуле имеет кубическую особенность  $\sim |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^{-3}$  при  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ . Такая особенность не является интегрируемой в  $\mathbb{R}^3$  (при интегрировании по  $d^3 \tilde{\mathbf{r}}$ ). Именно этим объясняется введение вспомогательной области  $D(\varepsilon)$  и использование предельного перехода по  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Поменяем порядок интегрирования в полученном повторном интеграле для  $\mathfrak{h}$ . Это приводит к следующей формуле:

$$\int_S \int_{D(\varepsilon)} \langle \tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle d^3 \tilde{\mathbf{r}} dS = \int_S \int_{D(\varepsilon)} \langle \text{grad } f(\tilde{\mathbf{r}}), \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle d^3 \tilde{\mathbf{r}} dS,$$

поскольку поле  $\tilde{\mathbf{m}}(\tilde{\mathbf{r}})$  оказывается градиентом функции  $f(\tilde{\mathbf{r}})$ :

$$(8.20) \quad f(\tilde{\mathbf{r}}) = - \frac{\langle \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{c |\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^3}.$$

Функция  $f(\tilde{\mathbf{r}})$  стремится к нулю при  $\tilde{\mathbf{r}} \rightarrow \infty$ . Предположим, что плотность тока  $\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})$  также стремится к нулю при  $\tilde{\mathbf{r}} \rightarrow \infty$ . Тогда в силу рассуждений, изложенных при доказательстве леммы 7.1, с учетом формулы (7.1) объемный интеграл в полученной выше формуле можно преобразовать в поверхностный:

$$(8.21) \quad \mathfrak{h} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S \int_{\partial D(\varepsilon)} f(\tilde{\mathbf{r}}) \langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle d\tilde{S} dS.$$

Поменяем порядок интегрирования в (8.21) и учтем совпадение границ  $\partial D(\varepsilon) = \partial \Omega(\varepsilon)$ . Внешняя нормаль к  $\partial D(\varepsilon)$  совпадает с внутренней нормалью к  $\partial \Omega(\varepsilon)$ . Учет этого обстоятельства и подстановка явного вида функции (8.20) приводят к следующему выражению для  $\mathfrak{h}$ :

$$(8.22) \quad \mathfrak{h} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega(\varepsilon)} \frac{\langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle}{c} \int_S \frac{\langle \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^3} dS d\tilde{S}.$$

Обозначим через  $V(\tilde{\mathbf{r}})$  внутренний интеграл из формулы (8.22):

$$(8.23) \quad V(\tilde{\mathbf{r}}) = \int_S \frac{\langle \tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}, \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}|^3} dS.$$

Интеграл (8.23) хорошо известен в математической физике. Он называется *потенциалом двойного слоя*. Имеет место следующая лемма, доказательство которой мы не приводим (см. в книге [1]).

**Лемма 8.1.** *Потенциал двойного слоя (8.23) является ограниченной функцией в  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{S}$ . Для всякой внутренней точки  $\tilde{\mathbf{r}} \in S$  существуют односторонние пределы: внутренний предел  $V_-(\tilde{\mathbf{r}})$  при стремлении к точке  $\tilde{\mathbf{r}}$  вдоль вектора нормали  $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{r}})$  и внешний предел  $V_+(\tilde{\mathbf{r}})$  при стремлении к этой точке против*



вектора нормали. При этом  $V_+ - V_- = 4\pi$  для всех точек  $\tilde{\mathbf{r}} \in S$ .

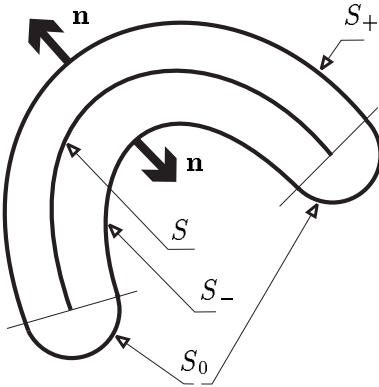


Рис. 8.2

Для вычисления предела в формуле (8.22) рассмотрим более детально геометрию  $\epsilon$ -раздутья поверхности  $S$ . На рисунке 8.2 изображен поперечный разрез области  $\Omega(\epsilon)$  для пленки  $S$ , изображенной на рисунке 8.1. При достаточно малых  $\epsilon$  граница области  $\Omega(\epsilon)$  состоит из трех фрагментов:

$$(8.24) \quad \partial\Omega(\epsilon) = S_0 \cup S_+ \cup S_-.$$

Фрагмент  $S_0$  является частью  $\epsilon$ -раздутья контура  $\gamma = \partial S$ . Площадь этого фрагмента поверхности  $\partial\Omega(\epsilon)$  удовлетворяет соотношению

$$(8.25) \quad S_0 \sim \epsilon\pi L \quad \text{при} \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

где  $L$  — длина контура  $\gamma$ . Фрагменты  $S_+$  и  $S_-$  получаются в результате нормального сдвига поверхности  $S$  на дистанцию  $\epsilon$  вдоль вектора нормали  $\mathbf{n}$  и на ту же дистанцию в противоположном направлении.

Подстановка (8.24) в формулу (8.22) приводит к разделению поверхностного интеграла по  $\partial\Omega(\epsilon)$  на три слагаемых. Для первого из них в силу (8.25) и в силу ограниченности потенциала двойного слоя и функции  $|\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}})|$  имеем

$$(8.26) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_0} V(\tilde{\mathbf{r}}) \frac{\langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle}{c} d\tilde{S} = 0.$$

Для двух оставшихся слагаемых соответствующие пределы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  также удается вычислить:

$$(8.27) \quad \int_{S_{\pm}} V(\tilde{\mathbf{r}}) \frac{\langle \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}), \tilde{\mathbf{n}}(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle}{c} d\tilde{S} \longrightarrow \pm \int_S V_{\pm}(\mathbf{r}) \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle}{c} dS.$$

Мы не намерены утомлять читателя доказательством формул (8.24), (8.25) и (8.27), которые достаточно очевидны. Суммируя (8.26) и (8.27) и учитывая при этом лемму 8.1, получаем

$$(8.28) \quad \mathfrak{h} = \frac{4\pi}{c} \int_S \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r}) \rangle dS.$$

Соотношение (8.28) завершает вывод формулы (8.16) и доказательство теоремы о циркуляции магнитного поля.

**Упражнение 8.1.** Проверьте соотношение  $\operatorname{div} \mathbf{m} = 0$  для векторных полей (8.4) и (8.8).

**Упражнение 8.2.** Проверьте соотношение (8.19) для векторного поля (8.8).

**Упражнение 8.3.** Вычислите  $\operatorname{grad} f$  для функции (8.20).

## § 9. Дифференциальные уравнения статического электромагнитного поля.

Резюмируем результаты предыдущего параграфа. В § 8 мы вывели четыре интегральных уравнения для электрического и магнитного полей. Их принято группировать в две пары. Первая пара уравнений имеет нулевые правые части:

$$(9.1) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle dS = 0, \quad \oint_{\partial S} \langle \mathbf{E}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds = 0.$$

Правые части уравнений во второй паре уже не равны нулю. Они определяются конфигурацией зарядов и токов:

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle dS &= 4\pi \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r}, \\ \oint_{\partial S} \langle \mathbf{H}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \frac{4\pi}{c} \int_S \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами Остроградского–Гаусса и Стокса, преобразуем поверхностные интегралы по  $\partial\Omega$  в объемные, а контурные интегралы по  $\partial S$  — в поверхностные. Тогда в силу произвольности  $\Omega$  и  $S$  интегральные уравнения (9.1) и (9.2) можно преобразовать в дифференциальную форму:

$$(9.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$(9.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Уравнения (9.3) и (9.4) следует дополнить условием стационарности распределения зарядов и токов:

$$(9.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0.$$

Следствием (9.5) и закона сохранения заряда является соотношение (7.1).

Система уравнений (9.3) и (9.4) есть полная система дифференциальных уравнений для описания статических электромагнитных полей. При их решении функции  $\rho(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  считаются заданными или же к системе дописываются дополнительные уравнения, связывающие  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Эти дополнительные уравнения обычно описывают состояние среды (например, сплошная токопроводящая среда с электропроводностью  $\sigma$  описывается уравнением  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ).

## ГЛАВА II

# КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

### § 1. Уравнения Максвелла.

Уравнения (9.3) и (9.4), выведенные в конце предыдущей главы, описывают поля, соответствующие статическим распределениям зарядов и токов. Они совершенно непригодны для описания процесса переноса взаимодействия. Отметим, что понятие поля было введено в рамках концепции близкодействия именно в качестве объекта, осуществляющего передачу взаимодействия между зарядами и токами. Для статических полей это свойство проявляется лишь в очень ограниченной форме, когда мы разделяем взаимодействие зарядов и токов на два процесса: создание поля зарядами и токами и воздействие этого поля на другие заряды и токи. Динамические свойства самого поля при этом оставались за кадром.

Более точные уравнения, описывающие процесс передачи электромагнитного взаимодействия в динамике, были предложены Максвеллом. Они имеют вид:

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Нетрудно заметить, что уравнения (1.1) и (1.2) являются обобщениями уравнений (9.3) и (9.4) из первой главы и получаются из последних небольшой модификацией правых частей.

Подобно уравнениям (9.3) и (9.4) из первой главы, уравнения Максвелла могут быть записаны в интегральной форме:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle dS &= 0, \\ \oint_{\partial S} \langle \mathbf{E}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \langle \mathbf{H}, \mathbf{n} \rangle dS, \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle dS &= 4\pi \int_{\Omega} \rho d^3\mathbf{r}, \\ \oint_{\partial S} \langle \mathbf{H}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds &= \frac{4\pi}{c} \int_S \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \langle \mathbf{E}, \mathbf{n} \rangle dS. \end{aligned}$$

Обратим внимание на контурный интеграл во втором уравнении (1.3). Точно такой же контурный интеграл содержится во втором уравнении (1.4). Но циркуляция электрического поля

$$(1.5) \quad \epsilon = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{E}, \boldsymbol{\tau} \rangle ds$$

обладает самостоятельным физическим смыслом (в отличие от циркуляции магнитного поля). Если абстрактный контур  $\partial S$  в пространстве заменить конкретным кольцевым проводником, то электрическое поле с ненулевой циркуляцией приведет к возникновению электрического тока в контуре. Величина  $\epsilon$  из (1.5) называется электродвижущей силой (э.д.с.) поля  $\mathbf{E}$  в контуре. Наличие э.д.с.  $\epsilon \neq 0$  в контуре имеет тот же эффект, что и включение источника тока (батарейки) с напряжением  $\epsilon$  в этот контур. В опыте это проявляется так: переменное магнитное поле приводит к возникновению электрического поля с ненулевой циркуляцией и наводит (индуцирует) электрический ток в кольцевом проводнике. Такое

явление называется *электромагнитной индукцией*. Оно было впервые обнаружено Фарадеем. Фарадей дал также количественное описание этого явления в виде следующего закона индукции.

**Закон электромагнитной индукции Фарадея.** *Э.д.с. индукции в кольцевом проводнике пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля, охватываемого данным контуром.*

Закон индукции Фарадея подсказал Максвеллу выбор правой части во втором уравнении (1.1). Однако, похожее слагаемое в правой части второго уравнения (1.2) было написано Максвеллом уже чисто по аналогии. Последующие эксперименты и дальнейшее развитие техники полностью подтвердили справедливость уравнений Максвелла.

Отметим, что закон сохранения заряда в форме соотношения (5.4) из предыдущей главы является следствием уравнений Максвелла. Действительно, надо вычислить дивергенцию обеих частей второго уравнения (1.2):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{E}}{\partial t},$$

после чего воспользоваться тождеством  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ . Совместно с первым уравнением (1.2) это в точности дает соотношение (5.4) из первой главы.

Система уравнений (1.1) и (1.2) есть полная система уравнений для описания произвольных электромагнитных полей. При их решении функции  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  следует считать заданными функциями или же определять их из уравнений, описывающих среду. Тогда любая задача электродинамики, по существу, сведется к некоторой краевой либо смешанной (начально-краевой) задаче для уравнений Максвелла (возможно, дополненных уравнениями среды). В данной главе мы рассмотрим лишь некоторые очень специальные виды та-

ких задач. Основная же наша цель — вывести некоторые важные математические следствия из уравнений Максвелла и истолковать их физическую природу.

## § 2. Плотность и поток энергии электромагнитного поля.

Пусть в объемном проводнике течет ток с плотностью  $\mathbf{j}$  и пусть этот ток вызван перемещением частиц с зарядом  $q$ . Если  $\nu$  — число таких частиц в единице объема, а  $\mathbf{v}$  — их скорость, то  $\mathbf{j} = q\nu\mathbf{v}$ . Напомним, что плотность тока — это заряд, протекающий в единицу времени через единичную площадку (см. § 5 главы I).

В электромагнитном поле на каждую частицу действует сила Лоренца, определяемая по формуле (4.4) из предыдущей главы. Работа этой силы, производимая в единицу времени равна  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{v} \rangle = q\langle \mathbf{E}, \mathbf{v} \rangle$ . Полная работа, производимая полем в единице объема, получается умножением этой величины на  $\nu$ , тогда  $w = q\nu\langle \mathbf{E}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{j} \rangle$ . Эта работа идет на увеличение кинетической энергии частиц (частицы разгоняются полем). Либо она идет на преодоление сил вязкого трения, которые препятствуют движению частиц. В любом случае, полная мощность, расходуемая электромагнитным полем в объеме  $\Omega$ , определяется следующим интегралом:

$$(2.1) \quad W = \int_{\Omega} \langle \mathbf{E}, \mathbf{j} \rangle d^3\mathbf{r}.$$

Преобразуем интеграл (2.1). Для этого выразим плотность тока  $\mathbf{j}$  через  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , используя второе уравнение из (1.2):

$$(2.2) \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Подстановка соотношения (2.2) в интеграл (2.1) дает

$$(2.3) \quad W = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega} \langle \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{H} \rangle d^3 \mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle d^3 \mathbf{r}.$$

Для дальнейшего преобразования формулы (2.3) используем известное тождество  $\operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \langle \mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle$ . Полагая  $\mathbf{a} = \mathbf{H}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{E}$ , для  $W$  получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega} \operatorname{div} [\mathbf{H}, \mathbf{E}] d^3 \mathbf{r} + \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega} \langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{E} \rangle d^3 \mathbf{r} - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r}.$$

Первый интеграл в этом выражении преобразуем в поверхностный по формуле Остроградского–Гаусса. Для  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  воспользуемся одним из уравнений Максвелла (1.1):

$$(2.4) \quad W + \int_{\partial\Omega} \frac{c}{4\pi} \langle [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \mathbf{n} \rangle dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{8\pi} d^3 \mathbf{r} = 0.$$

Обозначим через  $\mathbf{S}$  и  $\varepsilon$  векторное и скалярное поля вида

$$(2.5) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad \varepsilon = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{8\pi}.$$

Величина  $\varepsilon$  из (2.5) называется плотностью энергии электромагнитного поля. Вектор  $\mathbf{S}$  называется плотностью потока энергии. Он известен еще как вектор *Умова–Пойнтинга*. При такой интерпретации величин из (2.5) соотношение (2.4) можно трактовать как уравнение баланса энергии. Первое слагаемое называется мощностью рассеяния — это энергия, рассеиваемая в единицу времени за счет передачи ее движущимся зарядам. Второе слагаемое — это утечка энергии за пределы объема  $\Omega$ . Эти два вида потерь энергии компен-



сируются за счет уменьшения энергии, накопленной в самом электромагнитном поле в объеме  $\Omega$  (третье слагаемое).

Баланс энергии (2.4) можно переписать также и в дифференциальной форме, аналогичной формуле (5.4) из главы I:

$$(2.6) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + w = 0.$$

Здесь  $w = \langle \mathbf{E}, \mathbf{j} \rangle$  — плотность рассеиваемой энергии. Отметим, что в некоторых случаях величина  $w$  и интеграл (2.1) могут быть отрицательными. В этом случае происходит накачка энергии в электромагнитное поле. Эта энергия затем рассеивается через границы объема  $\Omega$ . Такой процесс приводит к излучению электромагнитных волн из объема  $\Omega$ . Он реализуется в антеннах радио и телевизионных передатчиков. Если исключить (или сильно ограничить) утечку энергии из объема  $\Omega$ , то мы получим устройство типа СВЧ-печи, где электромагнитное поле используется для передачи энергии от излучателя к бифштексу.

Электромагнитное поле может аккумулировать и передавать не только энергию, но и импульс. Для вывода уравнений баланса импульса рассмотрим вновь ток с плотностью  $\mathbf{j}$ , вызванный перемещением частиц заряда  $q$  со скоростью  $\mathbf{v}$ . Пусть  $\nu$  — концентрация этих частиц — число частиц, приходящееся на единицу объема. Тогда  $\mathbf{j} = q \nu \mathbf{v}$  и  $\rho = q \nu$ . Суммарная сила, действующая на все частицы в объеме  $\Omega$  дается интегралом

$$(2.7) \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{E} d^3 \mathbf{r} + \int_{\Omega} \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}] d^3 \mathbf{r}.$$

Для вывода (2.7) достаточно умножить силу Лоренца, действующую на отдельную частицу, на число частиц в единице объема  $\nu$  и проинтегрировать по объему  $\Omega$ .

Силой  $\mathbf{F}$  определяется количество импульса, передаваемое электромагнитным полем частицам в объеме  $\Omega$ . Интеграл

(2.7) есть векторная величина. Для дальнейших преобразований этого интеграла выберем некоторый константный единичный вектор  $\mathbf{e}$  и рассмотрим скалярное произведение

$$(2.8) \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \rho \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle d^3 \mathbf{r} + \int \frac{1}{c} \langle \mathbf{e}, [\mathbf{j}, \mathbf{H}] \rangle d^3 \mathbf{r}.$$

Подставим (2.2) в (2.8). Это дает

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle &= \int_{\Omega} \rho \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \langle \mathbf{e}, [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}] \rangle d^3 \mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \langle \mathbf{e}, [\partial \mathbf{E} / \partial t, \mathbf{H}] \rangle d^3 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством смешанного произведения, произведем циклическую перестановку сомножителей во втором интеграле в (2.9). Кроме того, воспользуемся очевидным тождеством  $[\partial \mathbf{E} / \partial t, \mathbf{H}] = \partial [\mathbf{E}, \mathbf{H}] / \partial t - [\mathbf{E}, \partial \mathbf{H} / \partial t]$ . Это дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle &= \int_{\Omega} \rho \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \langle \text{rot } \mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle d^3 \mathbf{r} - \\ &- \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \langle \mathbf{e}, [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \rangle d^3 \mathbf{r} + \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \langle \mathbf{e}, [\mathbf{E}, \partial \mathbf{H} / \partial t] \rangle d^3 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Воспользуемся вторым уравнением из системы (1.1) в форме  $\partial \mathbf{H} / \partial t = -c \text{rot } \mathbf{E}$ . Тогда

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle &+ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\langle \mathbf{e}, [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \rangle}{4\pi c} d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega} \rho \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle d^3 \mathbf{r} + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\langle \text{rot } \mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle + \langle \text{rot } \mathbf{E}, [\mathbf{E}, \mathbf{e}] \rangle}{4\pi} d^3 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Для преобразования последних двух интегралов в (2.10) воспользуемся следующими тремя тождествами, два из которых мы уже использовали ранее:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] &= \mathbf{b} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle - \mathbf{c} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \\
 (2.11) \quad \operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \langle \mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle, \\
 \operatorname{rot} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} - \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}.
 \end{aligned}$$

Здесь фигурными скобками обозначен коммутатор векторных полей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  (см. в [2]). Традиционно для этого используются квадратные скобки, но у нас они обозначают векторное произведение. Из второго тождества (2.11) выводим

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle = \operatorname{div} [\mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}]] + \langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle.$$

Для преобразования величины  $\operatorname{rot} [\mathbf{H}, \mathbf{e}]$  используем третье тождество (2.11):  $\operatorname{rot} [\mathbf{H}, \mathbf{e}] = -\mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{H} - \{\mathbf{H}, \mathbf{e}\}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{H}, \operatorname{rot} [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle &= -\langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle \operatorname{div} \mathbf{H} + \sum_{i=1}^3 H_i \sum_{j=1}^3 e^j \frac{\partial H^i}{\partial r^j} = \\
 &= -\langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle \operatorname{div} \mathbf{H} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{e}, \operatorname{grad} |\mathbf{H}|^2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Соединим два полученных соотношения и учтем первое тождество (2.11) для преобразования двойного векторного произведения  $[\mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}]]$  в первом из них. Это дает

$$\begin{aligned}
 \langle \operatorname{rot} \mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle &= \operatorname{div} (\mathbf{H} \langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle) - \operatorname{div} (\mathbf{e} |\mathbf{H}|^2) - \\
 &\quad - \langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle \operatorname{div} \mathbf{H} + \frac{1}{2} \langle \mathbf{e}, \operatorname{grad} |\mathbf{H}|^2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Но  $\operatorname{div}(\mathbf{e} |\mathbf{H}|^2) = \langle \mathbf{e}, \operatorname{grad} |\mathbf{H}|^2 \rangle$ , поэтому окончательно имеем

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \langle \operatorname{rot} \mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{e}] \rangle &= -\langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle \operatorname{div} \mathbf{H} + \\ &+ \operatorname{div} \left( \mathbf{H} \langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle - \frac{1}{2} \mathbf{e} |\mathbf{H}|^2 \right). \end{aligned}$$

Точно такое же тождество можно вывести и для поля  $\mathbf{E}$ :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \langle \operatorname{rot} \mathbf{E}, [\mathbf{E}, \mathbf{e}] \rangle &= -\langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle \operatorname{div} \mathbf{E} + \\ &+ \operatorname{div} \left( \mathbf{E} \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle - \frac{1}{2} \mathbf{e} |\mathbf{E}|^2 \right). \end{aligned}$$

Разница состоит лишь в том, что в силу уравнений Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , а дивергенция поля  $\mathbf{E}$  отлична от нуля:  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ .

Теперь, с учетом (2.12) и (2.13), формула (2.10) может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle - \int_{\partial\Omega} \frac{\langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{E} \rangle + \langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{H} \rangle}{4\pi} dS + \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle}{8\pi} dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{\langle \mathbf{e}, [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \rangle}{4\pi c} d^3\mathbf{r} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\sigma$  линейный оператор, действие которого на произвольный вектор  $\mathbf{e}$  определяется соотношением

$$(2.14) \quad \sigma \mathbf{e} = -\frac{\mathbf{E} \langle \mathbf{E}, \mathbf{e} \rangle + \mathbf{H} \langle \mathbf{H}, \mathbf{e} \rangle}{4\pi} + \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{8\pi} \mathbf{e}.$$

Соотношение (2.14) задает тензорное поле  $\sigma$  валентности  $(1, 1)$  с компонентами

$$(2.15) \quad \sigma_j^i = \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{8\pi} \delta_j^i - \frac{E^i E_j + H^i H_j}{4\pi}.$$

Тензор  $\sigma$  с компонентами (2.15) называется тензором *плотности потока импульса*. Его называют также *тензором Максвелла*. Теперь определим вектор плотности импульса  $\mathbf{p}$  следующим соотношением:

$$(2.16) \quad \mathbf{p} = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{4\pi c}.$$

С учетом сделанных обозначений (2.15) и (2.16) полученное выше соотношение для  $\langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle$  переписывается так:

$$(2.17) \quad \langle \mathbf{F}, \mathbf{e} \rangle + \int_{\partial\Omega} \langle \sigma \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \langle \mathbf{p}, \mathbf{e} \rangle d^3\mathbf{r} = 0.$$

Оператор плотности потока импульса  $\sigma$  симметричен, т.е. выполнено соотношение  $\langle \sigma \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{e}, \sigma \mathbf{n} \rangle$ . Это свойство и произвольность  $\mathbf{e}$  позволяют переписать (2.17) в векторном виде:

$$(2.18) \quad \mathbf{F} + \int_{\partial\Omega} \sigma \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{p} d^3\mathbf{r} = 0.$$

Уравнение (2.18) есть уравнение баланса импульса для электромагнитного поля. Сила  $\mathbf{F}$ , определяемая соотношением (2.7), — это рассеяние импульса поля за счет передачи его движущимся частицам. Второе слагаемое — расход импульса за счет его оттока через границы объема  $\Omega$ . Эти потери импульса компенсируются за счет импульса, накопленного самим полем. Соотношение (2.18) можно переписать и в дифференциальной форме. Для этого мы должны определить векторную дивергенцию тензорного поля  $\sigma$  типа  $(1, 1)$ . Пусть

$$(2.19) \quad \boldsymbol{\mu} = \operatorname{div} \sigma, \quad \text{где } \mu_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_j^i}{\partial r^i}.$$

Дифференциальная форма соотношения (2.18) имеет вид

$$(2.20) \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \sigma + \mathbf{f} = 0,$$

где  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{H}]/c$  — плотность силы Лоренца, а векторная дивергенция определена согласно (2.19).

Таким образом, электромагнитное поле способно аккумулировать в себе энергию и импульс:

$$(2.21) \quad \mathcal{E} = \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{8\pi} d^3\mathbf{r}, \quad \mathbf{P} = \int_{\Omega} \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{H}]}{4\pi c} d^3\mathbf{r},$$

а также передавать энергию и импульс материальным телам. Это еще раз подтверждает сделанное ранее утверждение о материальности электромагнитного поля. Электромагнитное поле не просто математическая абстракция, удобная для описания взаимодействия зарядов и токов, а реальный физический объект.

**Упражнение 2.1.** Убедитесь в справедливости соотношений (2.11). Проверьте вывод (2.12) и (2.13).

### § 3. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля.

В параграфе 2 мы вывели факт существования энергии и импульса электромагнитного поля (2.21), что является важным следствием уравнений Максвелла (1.1) и (1.2). Однако, мы еще не исследовали сами эти уравнения. Уравнения Максвелла — это система из четырех уравнений, два из которых скалярные, а два других — векторные. Общее число уравнений — восемь. Число неизвестных функций — шесть. Это три компоненты вектора  $\mathbf{E}$  и три компоненты вектора  $\mathbf{H}$ . Налицо некоторая избыточность уравнений.

Один из методов решения систем алгебраических уравнений состоит в следующем: используя одно из уравнений (наиболее простое), выражают одну из неизвестных через другие и подставляют полученное выражение в другие уравнения. Происходит исключение одной неизвестной и сокращение числа уравнений в системе. Иногда такой прием срабатывает и в случае систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Векторное поле с нулевой дивергенцией называется вихревым. Для вихревых полей справедлива следующая теорема (доказательство см. в книге [3]).

**Теорема о вихревом поле.** *Всякое вихревое векторное поле является ротором некоторого другого векторного поля.*

Запишем утверждение этой теоремы применительно к магнитному полю  $\mathbf{H}$ . Оно дается следующим соотношением:

$$(3.1) \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Векторное поле  $\mathbf{A}$ , существование которого гарантирует сформулированная выше теорема, называется векторным потенциалом электромагнитного поля.

Подставим поле  $\mathbf{H}$  в форме (3.1) во второе уравнение Максвелла (1.1). Это дает

$$(3.2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Векторное поле с нулевым ротором называется потенциальным. Именно таким является поле  $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{A} / \partial t) / c$  из (3.2). Потенциальные поля описываются следующей теоремой (доказательство см. в книге [3]).

**Теорема о потенциальном поле.** *Всякое потенциальное векторное поле является градиентом некоторого скалярного поля.*

Применив эту теорему к векторному полю из (3.2), мы получим соотношение, определяющее скалярный потенциал электромагнитного поля  $\varphi$ :

$$(3.3) \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi.$$

Объединив (3.1) и (3.3), мы можем выразить электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  через поля  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

При подстановке (3.4) первая пара уравнений Максвелла (1.1) оказывается выполненной. Подстановка (3.4) во вторую пару уравнений Максвелла дает

$$(3.5) \quad \begin{aligned} -\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} &= 4\pi \rho, \\ \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \end{aligned}$$

При выводе (3.5) мы воспользовались соотношениями

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{div grad } \varphi &= \Delta \varphi, \\ \text{rot rot } \mathbf{A} &= \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Дифференциальный оператор второго порядка  $\Delta$  — это *оператор Лапласа* (или *лапласиан*). В декартовой прямоугольной системе координат он определяется соотношением

$$(3.7) \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial r^i} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$



С целью некоторого упрощения вида уравнений (3.5) произведем перегруппировку слагаемых в них:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi &= 4 \pi \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right), \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} &= \frac{4 \pi \mathbf{j}}{c} - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right). \end{aligned}$$

Уравнения (3.8) представляют собой запись уравнений Максвелла в переменных  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Это система из двух уравнений, одно из которых скалярное, а другое — векторное. Как видим, число уравнений и число неизвестных функций теперь совпадает.

#### § 4. Калибровочные преобразования и лоренцева калибровка.

Векторный и скалярный потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  были введены в § 3 взамен электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Но поля  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  не являются физическими полями. Физические поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  выражаются через  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  согласно (3.4), но сами поля  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  определяются полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  неоднозначно. Действительно, рассмотрим преобразование

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned}$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция. Подставив (4.1) в формулу (3.4), мы получим

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}.$$

То есть физические поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , определяемые полями  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\varphi}$  и полями  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ , совпадают. Преобразование (4.1), не меня-

ющее физических полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , называется *калибровочным преобразованием*.

Воспользуемся калибровочным преобразованием (4.1) для упрощения уравнений Максвелла (3.8). Рассмотрим величину, фигурирующую в скобках в правой части уравнений (3.8):

$$(4.2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} + \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi \right).$$

Обозначим через  $\square$  следующий дифференциальный оператор:

$$(4.3) \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Оператор (4.3) называется *оператором Даламбера* или *волновым оператором*. Уравнение  $\square u = v$  называется уравнением Даламбера.

Пользуясь калибровочным произволом (4.1), добьемся выполнения следующего условия:

$$(4.4) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Для осуществления этого мы должны выбрать функцию  $\psi$ , решив уравнение Даламбера

$$\square \psi = - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} \right).$$

Известно, что уравнение Даламбера разрешимо при достаточно слабых ограничениях на его правую часть (см. книгу [1]). Следовательно, мы можем выполнить соотношение (4.4) практически всегда. Это соотношение называется *лоренцевой калибровкой*.

В случае выполнения условия лоренцевой калибровки (4.4) уравнения Максвелла (3.8) выглядят наиболее просто:

$$(4.5) \quad \square \varphi = 4 \pi \rho, \quad \square \mathbf{A} = \frac{4 \pi \mathbf{j}}{c}.$$

Они принимают вид пары уравнений Даламбера (4.5). Однако, нельзя считать, что переменные  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  в (4.5) полностью разделились. Само условие лоренцевой калибровки (4.4) является дополнительным уравнением, накладывающим требование согласованного выбора решений уравнений Даламбера (4.5).

Оператор даламбера (4.3) является скалярным оператором, (в (4.5) он действует отдельно на каждую компоненту вектора  $\mathbf{A}$ ). Поэтому оператор  $\square$  перестановочен с операцией вычисления ротора и с дифференцированием по времени. Отсюда на основе соотношений (3.4) выводим

$$(4.6) \quad \square \mathbf{E} = -4\pi \operatorname{grad} \rho - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad \square \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{j}.$$

Уравнения (4.6) не содержат потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ . Они записаны относительно реальных физических полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  и являются дифференциальными следствиями уравнений Максвелла (1.1) и (1.2), однако, обратно уравнения Максвелла из них не вытекают.

## § 5. Электромагнитные волны.

В предыдущей главе мы рассматривали статические электромагнитные поля. Такие поля однозначно определяются

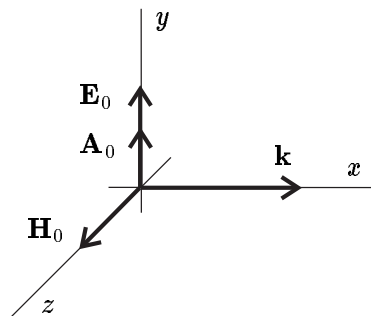


Рис. 5.1

статическим распределением зарядов и токов (см. формулы (3.5) и (5.6) из главы 1). Они не могут существовать при полном отсутствии зарядов и токов. Однако, как мы сейчас увидим, уравнения Максвелла имеют ненулевые решения и при тождественно нулевых зарядах и токах. Рассмотрим одно из таких решений. Выберем

правоориентированную прямоугольную декартову систему координат. Направим вектор  $\mathbf{k}$  вдоль оси  $OX$ , вектор  $\mathbf{A}_0$  — вдоль оси  $OY$  и рассмотрим следующие две функции:

$$(5.1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(kx - \omega t), \quad \varphi = 0.$$

Здесь  $k = |\mathbf{k}|$ . Положим  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ . После этого подстановка (5.1) в уравнение лоренцевой калибровки (4.4) и в уравнения Максвелла (4.5) дает

$$(5.2) \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 = \frac{\omega}{c}.$$

Условию (5.2) нетрудно удовлетворить. Соответствующие потенциалы (5.1) описывают плоскую электромагнитную волну,  $\omega$  — частота волны,  $\mathbf{k}$  — ее волновой вектор, определяющий направление распространения волны. Нетрудно найти также и скорость распространения волны. Переписав (5.1) в несколько видоизмененной форме

$$(5.3) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \sin(k(x - ct)),$$

видим, что скорость распространения электромагнитных волн совпадает с константой  $c$  (см. (1.5) из главы I).

Теперь подставим (5.1) в (3.4) и вычислим электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t), & \mathbf{E}_0 &= |\mathbf{k}| \mathbf{A}_0, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \cos(kx - \omega t), & \mathbf{H}_0 &= [\mathbf{k}, \mathbf{A}_0], \\ |\mathbf{E}_0| &= |\mathbf{H}_0| = |\mathbf{k}| |\mathbf{A}_0|. \end{aligned}$$

Векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  ортогональны друг другу и образуют правую тройку. Волна (5.4) с такими векторами называется *плоской линейно поляризованной электромагнитной волной*. Век-

тор  $\mathbf{E}_0$  принято считать *вектором поляризации* волны. Волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t) + \mathbf{H}_0 \sin(kx - \omega t),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(kx - \omega t) - \mathbf{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

называется *поляризованной по кругу*. Она есть суперпозиция двух линейно поляризованных волн. Естественный видимый свет есть также электромагнитная волна. Выделенного направления поляризации в нем нет, но его поляризацию нельзя считать круговой. Это суперпозиция большого количества плоских линейно поляризованных волн с хаотически разбросанными поляризациями.

### § 6. Излучение электромагнитных волн.

Неограниченная плоская волна (5.4), заполняющая все пространство, очевидно, является некоторой идеализацией. Реальные электромагнитные волны заполняют лишь определенную часть пространства. Кроме того, они не существуют неограниченно долго: имеются источники (излучатели) и поглотители электромагнитных волн. Формула (5.4) может описывать реальную электромагнитную волну лишь приближенно: в области пространства, удаленной от излучателей и при полном отсутствии поглощения.

В данном параграфе мы рассмотрим процесс генерации (излучения) электромагнитных волн. Излучатель — это обычно система зарядов и токов, которая уже не является статической. Зададим ее функциями  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  и рассмотрим уравнения Максвелла в форме (4.5). Это линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Их решения определены неоднозначно: к любому уже найденному решению можно добавить произвольное решение соответствующего однородного уравнения. Однако, если считать функции  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  убывающими при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  и наложить аналогичное условие на  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , то можно существенно ограничить произвол в выборе

решения уравнений (4.5). Для нахождения одного из таких решений нам потребуется фундаментальное решение оператора Даламбера. Это обобщенная функция вида

$$(6.1) \quad u(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi} \theta(t) \delta(c^2 t^2 - |\mathbf{r}|^2),$$

где  $\theta$  и  $\delta$  — это функция Хэвисайда и  $\delta$ -функция Дирака соответственно. Функция (6.1) удовлетворяет уравнению Даламбера с обобщенной правой частью:

$$\square u = \delta(t) \delta(\mathbf{r}).$$

В физике такие объекты часто называют функциями Грина. Зная фундаментальное решение (6.1) оператора Даламбера, мы можем выписать решение уравнений (4.5) в виде сверток:

$$(6.2) \quad \varphi = 4\pi u * \rho, \quad \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} u * \mathbf{j},$$

(см. [1]). В силу свойств свертки (см. там же) из условия сохранения заряда (формула (5.4) из главы I) вытекает условие лоренцевой калибровки (4.4) для потенциалов (6.2). Для гладких и достаточно быстро убывающих функций  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  свертки (6.2) сводятся к следующим интегралам:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau)}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} d^3 \tilde{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau)}{c |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} d^3 \tilde{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Здесь величина  $\tau = \tau(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}})$  называется *временем запаздывания* и определяется отношением  $\tau = |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|/c$ . Сами потенциалы (6.3) называются *запаздывающими потенциалами*.

Запаздывающие потенциалы (6.3) имеют прозрачную физическую интерпретацию. Скалярный потенциал  $\varphi$  в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  есть суперпозиция вкладов, порождаемых зарядами в различных точках пространства, причем вклад от точки  $\tilde{\mathbf{r}}$  определяется плотностью заряда не в момент времени  $t$ , а в предшествующий момент времени  $t - \tau$ . Временное запаздывание  $\tau$  в точности равно интервалу времени, за которое сигнал, распространяясь со скоростью света  $c$ , передается из точки  $\tilde{\mathbf{r}}$  в точку  $\mathbf{r}$ . Аналогичное запаздывание заложено и в формулу для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ .

Отметим, что фундаментальное решение уравнения Даламбера не единственно. Имеется, например, фундаментальное решение, отличающееся от (6.1) сменой  $\tau$  на  $-\tau$ . Такому фундаментальному решению соответствуют *опережающие потенциалы*. Однако, с точки зрения физики опережающие потенциалы не имеют смысла, ибо они нарушают принцип причинности.

Рассмотрим систему зарядов, сосредоточенную в некоторой малой окрестности  $\Omega$  начала координат. Пусть  $R$  максимальный линейный размер области  $\Omega$ . Пользуясь формулами (6.3) вычислим электромагнитное поле системы зарядов в точке  $\mathbf{r}$  на большом удалении от области  $\Omega$ , т.е.  $|\tilde{\mathbf{r}}| \leq R \ll |\mathbf{r}|$ . Тогда

$$(6.4) \quad \begin{aligned} |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}| &= |\mathbf{r}| - \frac{\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{r}|} + \dots, \\ t - \tau &= t - \frac{|\mathbf{r}|}{c} + \frac{\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{r}|c} + \dots \end{aligned}$$

Отношение  $|\mathbf{r}|/c$  в (6.4) определяет время распространения электромагнитного возмущения от области  $\Omega$  до точки наблюдения  $|\mathbf{r}|$ . Следующие слагаемые имеют порядок малости, оцениваемый величиной  $R/c$ . Это время распространения электромагнитного сигнала в пределах области  $\Omega$ .

Обозначим  $t' = t - |\mathbf{r}|/c$  и положим  $t - \tau = t' + \theta$ . Для величины  $\theta$  имеется оценка  $|\theta| \leq R/c$ . Рассмотрим следующие тейлоровские разложения:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau) &= \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t') + \frac{\partial \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \theta + \dots, \\ \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau) &= \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t') + \frac{\partial \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \theta + \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Условие  $R \ll |\mathbf{r}|$  не обеспечивает правомочности разложений (6.5). Использование разложений (6.5) для аппроксимации  $\rho(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau)$  и  $\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau)$  возможно только при некоторых дополнительных предположениях относительно этих функций. Обозначим через  $T$  характерное время, за которое происходит существенное изменение величин  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  в области  $\Omega$ . В случае, когда такое характерное время можно определить, следующие группы величин имеют одинаковый порядок малости:

$$\begin{aligned} \rho &\approx T \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \dots \approx T^n \frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}, \\ \mathbf{j} &\approx T \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \approx \dots \approx T^n \frac{\partial^n \mathbf{j}}{\partial t^n}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Теперь (6.5) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau) &= \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t') + T \frac{\partial \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \frac{\theta}{T} + \dots, \\ \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t - \tau) &= \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t') + T \frac{\partial \mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \frac{\theta}{T} + \dots \end{aligned} \quad (6.7)$$

Корректность использования разложений (6.7) или (6.5) можно обеспечить за счет дополнительного условия  $R/c \ll T$ . Это дает  $\theta/T \ll 1$ .

Условие  $R/c \ll T$  имеет простой физический смысл: величина  $\omega = 2\pi/T$  — это характерная частота излучаемых электромагнитных волн, а  $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$  — это характерная



длина таких волн. Условие  $R/c \ll T$  означает, что характерная длина излучаемых волн существенно больше размеров излучателя.

Пусть условия  $R \ll cT$  и  $R \ll |\mathbf{r}|$  выполнены. Вычислим векторный потенциал  $\mathbf{A}$  из (6.3), ограничившись первым слагаемым в разложении (6.5):

$$(6.8) \quad \mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{|\mathbf{r}|c} d^3\tilde{\mathbf{r}} + \dots$$

Для преобразования интеграла в (6.8) выберем произвольный константный вектор  $\mathbf{e}$  и рассмотрим скалярное произведение  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{e} \rangle$ . Определив вектор  $\mathbf{a}$  и функцию  $f(\tilde{\mathbf{r}})$  соотношениями

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}}{c|\mathbf{r}|} = \text{grad } f, \quad f(\tilde{\mathbf{r}}) = \langle \mathbf{a}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle,$$

проделаем следующие вычисления, аналогичные вычислениям (7.5) из первой главы:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \mathbf{j}, \text{grad } f \rangle d^3\tilde{\mathbf{r}} &= \int_{\Omega} \text{div}(f \mathbf{j}) d^3\tilde{\mathbf{r}} - \int_{\Omega} f \text{div } \mathbf{j} d^3\tilde{\mathbf{r}} = \\ &= \int_{\partial\Omega} f \langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle dS + \int_{\Omega} f \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \frac{\langle \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{r}|c} d^3\tilde{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , ввиду произвольности вектора  $\mathbf{e}$ , из соотношения (6.9) выводим следующую формулу:

$$(6.10) \quad \mathbf{A} = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|c} d^3\tilde{\mathbf{r}} + \dots = \frac{\dot{\mathbf{D}}}{|\mathbf{r}|c} + \dots$$

Здесь  $\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{D}}(t')$  — производная дипольного момента системы зарядов в момент времени  $t'$ .

Аналогичным образом, ограничившись лишь первыми слагаемыми в разложениях (6.4) и (6.5), для скалярного потенциала  $\varphi$  из (6.3) находим

$$(6.11) \quad \varphi = \int_{\Omega} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{|\mathbf{r}|} d^3 \tilde{\mathbf{r}} + \dots = \frac{Q}{|\mathbf{r}|} + \dots,$$

где  $Q$  — суммарный заряд в области  $\Omega$ . Он не зависит от времени, ибо область  $\Omega$  изолирована и ток вне ее отсутствует.

Сравним подинтегральные выражения в (6.10) и (6.11) и учтем шкалу масштабов (6.6). Это сравнение дает

$$|\mathbf{A}| \approx \frac{R}{cT} \varphi.$$

Оценка  $R/(cT) \ll 1$ , вытекающая из  $R \ll cT$ , означает, что векторный потенциал вычислен с большей точностью, чем скалярный. Значит, при вычислении  $\varphi$  необходимо учитывать слагаемые следующего порядка малости в разложениях (6.4) и (6.5). Сделав это, получаем

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \varphi = & \frac{Q}{|\mathbf{r}|} + \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{\partial t} \frac{\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{r}|^2 c} d^3 \tilde{\mathbf{r}} + \\ & + \int_{\Omega} \frac{\rho(\tilde{\mathbf{r}}, t')}{|\mathbf{r}|} \frac{\langle \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{r}|^2} d^3 \tilde{\mathbf{r}} + \dots \end{aligned}$$

Вычислив интегралы в формуле (6.12), преобразуем ее к следующему виду:

$$(6.13) \quad \varphi = \frac{Q}{|\mathbf{r}|} + \frac{\langle \dot{\mathbf{D}}, \mathbf{r} \rangle}{|\mathbf{r}|^2 c} + \frac{\langle \mathbf{D}, \mathbf{r} \rangle}{|\mathbf{r}|^3} + \dots$$

Потенциалы (6.10) и (6.13) — это запаздывающие потенциалы системы зарядов в *дипольном приближении*. Зависимость

$\rho$  и  $\mathbf{j}$  от времени проявляется в них лишь в виде зависимости дипольного момента  $\mathbf{D}$  от  $t'$ . Рассмотрим асимптотику этих потенциалов при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ . Последнее слагаемое в (6.13) при этом можно отбросить. Тогда

$$(6.14) \quad \varphi = \frac{Q}{|\mathbf{r}|} + \frac{\langle \dot{\mathbf{D}}, \mathbf{r} \rangle}{|\mathbf{r}|^2 c} + \dots, \quad \mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{D}}}{|\mathbf{r}| c} + \dots$$

Теперь из формул (3.4) и (6.14) найдем асимптотику электрического и магнитного полей на большом расстоянии от системы зарядов. При вычислении  $\text{rot } \mathbf{A}$  и  $\text{grad } \varphi$  учтем, что величина  $t' = t - |\mathbf{r}|/c$  в аргументе  $\dot{\mathbf{D}}(t')$  зависит от  $\mathbf{r}$ . Именно эта зависимость определяет главные члены в асимптотике  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$(6.15) \quad \mathbf{E} = \frac{[\mathbf{r}, [\mathbf{r}, \ddot{\mathbf{D}}]]}{|\mathbf{r}|^3 c^2} + \dots, \quad \mathbf{H} = -\frac{[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{D}}]}{|\mathbf{r}|^2 c^2} + \dots$$

Вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (точнее, главные члены в их асимптотике) перпендикулярны друг другу и перпендикулярны вектору  $\mathbf{r}$ . Это напоминает ситуацию в плоской волне. Однако, в данном случае мы имеем дело со сферической волной, исходящей из начала координат, где находится область  $\Omega$ . Напряженность полей  $|\mathbf{E}| \simeq |\mathbf{H}|$  убывает как  $1/|\mathbf{r}|$ , что значительно медленнее, чем в случае электростатического кулоновского поля. Из формулы (2.5) можно найти плотность потока энергии, переносимой волнами (6.15):

$$(6.16) \quad \mathbf{S} = \frac{|[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{D}}]|^2}{4\pi |\mathbf{r}|^5 c^3} \mathbf{r} + \dots$$

Для модуля вектора  $\mathbf{S}$  имеем  $|\mathbf{S}| \sim 1/|\mathbf{r}|^2$ . Это значит, что полный поток энергии через сферу сколь угодно большого радиуса отличен от нуля и мы имеем дело с реальным излучением электромагнитной энергии. Величина излучаемой энергии целиком определяется второй производной дипольно-

го момента. Поэтому рассмотренный выше случай принято называть дипольным приближением в теории излучения.

**Упражнение 6.1.** Пользуясь формулой (6.16), найдите угловое распределение интенсивности для дипольного излучения. Найдите также полную интенсивность дипольного излучения.

**Упражнение 6.2.** Частица заряда  $q$  движется неограниченно долго по окружности радиуса  $R$  с постоянной скоростью  $v = \omega R$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения). Найдите запаздывающие потенциалы и определите угловое распределение интенсивности электромагнитного излучения частицы. Вычислите полную интенсивность такого (циклотронного) излучения.

**Упражнение 6.3.** Пусть плотность заряда  $\rho$  равна нулю, а плотность тока  $\mathbf{j}$  задается следующей обобщенной функцией:

$$(6.17) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -c [\mathbf{M}(t), \text{grad } \delta(\mathbf{r})]$$

(сравните с (7.16) из первой главы). Найдите запаздывающие потенциалы (6.2) для (6.17). Найдите угловое распределение интенсивности и полную интенсивность для такого (магнитно-дипольного) излучения.

## ГЛАВА III

# СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### § 1. Преобразования Галилея.

Классическая электродинамика, основанная на уравнениях Максвелла, стала первой серьезной полевой теорией. Она прекрасно объяснила все наблюдаемые электромагнитные явления, предсказав существование электромагнитных волн, которые впоследствии были обнаружены и нашли повсеместное практическое применение. Однако, с развитием этой теории обнаружились и некоторые трудности. Оказалось, что она находится в серьезном конфликте с классическим принципом эквивалентности состояний покоя и равномерного прямолинейного движения. Этот принцип, формулировка которого восходит к Галилею и Ньютону, гласит, что две декартовы инерциальные системы координат, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, совершенно равноправны. Все физические процессы в них происходят идентичным образом и описываются одними и теми же законами.

Рассмотрим две такие инерциальные декартовы системы координат  $(\mathbf{r}, t)$  и  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ . Пусть вторая движется относительно первой со скоростью  $\mathbf{u}$ , причем координатные оси этих двух систем остаются параллельными в процессе движения. Связь радиус-векторов точек можно задать в виде следующих преобразований, известных как преобразования Галилея:

$$(1.1) \quad t = \tilde{t}, \quad \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{u}\tilde{t}.$$

Первое из соотношений (1.1) означает, что часы обеих систем координат синхронизированы и всегда идут синхронно. Пусть  $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t})$  траектория некоторой материальной точки в системе координат  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ . Во первой системе координат эта же траектория задается вектор-функцией  $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) + \mathbf{u}\tilde{t}$ . Дифференцируя это соотношение и учитывая  $\tilde{t} = t$  из (1.1), получим

$$(1.2) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{t}} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{u}.$$

Последнее соотношение из (1.2) известно как *классический закон сложения скоростей*. Дифференцируя (1.2) еще раз, найдем соотношение между ускорениями материальной точки в этих двух системах координат:

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{t}^2}, \quad \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}.$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки определяется силой  $\mathbf{F}$ , которая на нее действует, и ее массой:  $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ . Из (1.3) в силу принципа эквивалентности заключаем, что сила  $\mathbf{F}$  есть инвариант, не зависящий от выбора инерциальной системы координат. Более точно это изображается соотношением

$$(1.4) \quad \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{u}\tilde{t}, \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{u}) = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{v}}).$$

Рассмотрим теперь заряженную частицу с зарядом  $q$ , которая покоится в системе координат  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ . В этой системе координат она создает чисто кулоновское электростатическое поле. В системе координат  $(\mathbf{r}, t)$  эта же частица движется, следовательно, она должна создавать как электрическое, так и магнитное поле. Описанная ситуация указывает на то, что вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  не являются инвариантами преобразования Галилея (1.1). Даже если в одной системе координат мы

наблюдаем чисто электрическое поле, то в другой системе координат следует ожидать присутствия обоих полей. Аналог соотношений (1.4) будем искать в форме

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{u}\tilde{t}, \tilde{t}) &= \alpha(\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \mathbf{u}), \\ \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{u}\tilde{t}, \tilde{t}) &= \beta(\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \mathbf{u}). \end{aligned}$$

В силу принципа суперпозиции, который выполнен в обеих системах координат, функции  $\alpha$  и  $\beta$  линейны и однородны по  $\tilde{\mathbf{E}}$  и  $\tilde{\mathbf{H}}$ . Поэтому соотношение (1.5) перепишем в виде

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \alpha_1 \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) + \alpha_2 \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \beta_1 \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) + \beta_2 \tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}), \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — некоторые линейные операторы, которые зависят только от  $\mathbf{u}$ . Вектора  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяют действие электромагнитного поля на заряды, что проявляется в виде силы Лоренца (см. формулу (4.4) из главы I). Подстановка (1.6) в эту формулу и учет соотношений (1.2) и (1.4) дает

$$(1.7) \quad \begin{aligned} q\alpha_1 \tilde{\mathbf{E}} + q\alpha_2 \tilde{\mathbf{H}} + \frac{q}{c} [\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{u}, \beta_1 \tilde{\mathbf{E}}] + \\ + \frac{q}{c} [\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{u}, \beta_2 \tilde{\mathbf{H}}] = q\tilde{\mathbf{E}} + \frac{q}{c} [\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]. \end{aligned}$$

Соотношение (1.7) есть тождество с тремя произвольными параметрами:  $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ . Поэтому мы можем приравнять отдельно слагаемые, билинейные по  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\tilde{\mathbf{E}}$ . Это дает  $[\tilde{\mathbf{v}}, \beta_1 \tilde{\mathbf{E}}] = 0$ , откуда сразу же имеем  $\beta_1 = 0$ . Теперь приравняем слагаемые, билинейные по  $\tilde{\mathbf{v}}$  и  $\tilde{\mathbf{H}}$ , что дает  $[\tilde{\mathbf{v}}, \beta_2 \tilde{\mathbf{H}}] = [\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{H}}]$ . Отсюда имеем  $\beta_2 = 1$ . Остается рассмотреть слагаемые линейные по  $\tilde{\mathbf{H}}$  и  $\tilde{\mathbf{E}}$ . Для операторов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  это дает следующие формулы:

$$\alpha_2 \tilde{\mathbf{H}} = -\frac{1}{c} [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}], \quad \alpha_1 = 1.$$

Теперь, подставив полученные выражения для операторов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  в формулу (1.6), получаем соотношения

$$(1.8) \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}], \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}.$$

Соотношения (1.8) призваны дополнить преобразования Галилея (1.1) в электродинамике. Однако, как мы сейчас увидим, с этой миссией они не справляются. Для этого преобразуем уравнения Максвелла, записанные в форме уравнений (1.1) и (1.2) из главы II, в систему координат  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ . Для частных производных в силу преобразований (1.1) имеем

$$(1.9) \quad \frac{\partial}{\partial r^i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - \sum_{k=1}^3 u^k \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^k}.$$

Теперь, объединяя (1.8) и (1.9), выводим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \langle \mathbf{u}, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} \rangle,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \} - \frac{1}{c} \mathbf{u} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{t}} - \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \},$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{t}} - \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}} \} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \}] - \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \partial \tilde{\mathbf{H}} / \partial \tilde{t}].$$

Здесь фигурными скобками обозначен коммутатор векторных полей (см. [2]). При этом вектор  $\mathbf{u}$  рассматривается как константное векторное поле.



При подстановке полученных выше соотношений в уравнения Максвелла ограничимся случаем нулевых зарядов и токов  $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ . Это дает

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{H}} = 0,$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \langle \mathbf{u}, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = & \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{c} \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}} \} + \\ & + \frac{1}{c^2} [ \mathbf{u}, \{ \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \} ] - \frac{1}{c^2} [ \mathbf{u}, \partial \tilde{\mathbf{H}} / \partial \tilde{t} ], \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial \tilde{t}}.$$

Только два из выписанных уравнения совпадают с соответствующими уравнениями Максвелла. Остальные два уравнения содержат неустраняемое вхождение вектора  $\mathbf{u}$ .

Обнаруженное обстоятельство является весьма серьезным. В конце девятнадцатого века оно поставило физиков перед дилеммой, решение которой во многом определило дальнейшее развитие физики в XX-ом веке. Действительно, предстояло сделать выбор:

- (1) признать, что уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея и требуют существования некоторой выделенной инерциальной системы координат, в которой они имеют стандартный вид, приведенный в самом начале второй главы;
- (2) либо считать, что неверны сами формулы (1.1), а принцип эквивалентности всех инерциальных систем отсчета имеет иную реализацию.

Первый выбор привел к возникновению *теории эфира*. Согласно этой теории, выделенная инерциальная система коор-

динат связана с некоторой гипотетической материей — эфиром. Эта материя не имеет ни массы, ни цвета, ни запаха. Она заполняет все пространство и никак себя не проявляет. Единственным ее предназначением является перенос электромагнитного взаимодействия. Указанные свойства эфира представляются весьма необычными, что делает теорию эфира очень искусственной. В качестве компромиса эта теория просуществовала некоторое время, но была опровергнута опытами Майкельсона и Морли по измерению скорости Земли относительно гипотетического эфира (опыты по обнаружению эфирного ветра).

Второй выбор гораздо более радикальный. Действительно, отказ от формулы (1.1) означает, по существу, отказ от всей классической механики Ньютона. Несмотря на это, развитие науки пошло именно по второму пути.

## § 2. Преобразования Лоренца.

Отказавшись от формулы (1.1), ее следует чем-то заменить. Это было сделано Лоренцем. Следуя Лоренцу, заменим преобразования Галилея (1.1) линейными преобразованиями общего вида, связывающими  $(\mathbf{r}, t)$  с  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ :

$$(2.1) \quad ct = S_0^0 c\tilde{t} + \sum_{k=1}^3 S_k^0 \tilde{r}^k, \quad r^i = S_0^i c\tilde{t} + \sum_{k=1}^3 S_k^i \tilde{r}^k.$$

Множитель  $c$  при  $t$  и при  $\tilde{t}$  введен в (2.1) для согласования размерностей. После введения такого множителя все компоненты матрицы  $S$  оказываются безразмерными величинами. Величину  $ct$  удобно обозначить через  $r^0$  и считать ее дополнительной (четвертой) компонентой радиус-вектора:

$$(2.2) \quad r^0 = ct.$$

Тогда два соотношения (2.1) можно объединить в одно:

$$(2.3) \quad r^i = \sum_{k=0}^3 S_k^i \tilde{r}^k.$$

Для обратимости преобразований (2.3) естественно считать, что  $\det S \neq 0$ . Пусть  $T = S^{-1}$ . Тогда обратные преобразования для (2.3) имеют вид

$$(2.4) \quad \tilde{r}^i = \sum_{k=0}^3 T_k^i r^k.$$

По структуре преобразования (2.3) и (2.4) совпадают с преобразования координат четырехмерного вектора при замене базиса. Вскоре мы увидим, что такая интерпретация оказывается очень полезной.

Теперь задачу о выводе преобразований Лоренца можно сформулировать как задачу о нахождении компонент матрицы  $S$  в (2.3). Единственное требование, которое мы должны обеспечить — это инвариантность формы уравнений Максвелла относительно преобразований (2.3) после дополнения их преобразованиями для  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Для начала ограничимся случаем отсутствия зарядов и токов ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{j} = 0$ ), а вместо самих уравнений Максвелла рассмотрим их дифференциальные следствия в форме уравнений (4.6) из главы II:

$$(2.5) \quad \square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{H} = 0.$$

Инвариантность уравнений (2.5) относительно преобразований (2.3) и (2.4) является необходимым (но не достаточным) условием для инвариантности исходных уравнений Максвелла.

Для дальнейшего нам потребуется следующая форма записи оператора Даламбера, входящего в уравнения (2.5):

$$(2.6) \quad \square = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g^{ij} \frac{\partial}{\partial r^i} \frac{\partial}{\partial r^j}.$$

Здесь через  $g^{ij}$  обозначены компоненты следующей матрицы:

$$(2.7) \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что обратная матрица  $g_{ij}$  для (2.7) имеет точно такие же компоненты, т.е.  $g_{ij} = g^{ij}$ .

Из (2.3) и (2.4) вытекают следующие правила преобразования дифференциальных операторов первого порядка:

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial r^i} = \sum_{k=0}^3 T_i^k \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^k}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^i} = \sum_{k=0}^3 S_i^k \frac{\partial}{\partial r^k}.$$

Подстановка (2.8) в формулу (2.6) для оператора Даламбера приводит к соотношению

$$\square = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \tilde{g}^{pq} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^p} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}^q},$$

где связь между матрицами  $g^{ij}$  и  $\tilde{g}^{pq}$  определяется формулой

$$(2.9) \quad \tilde{g}^{pq} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_i^p T_j^q g^{ij}.$$

В терминах обратных матриц  $g_{pq}$  и  $\tilde{g}_{pq}$  соотношение (2.9) можно переписать так:

$$(2.10) \quad g_{ij} = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 T_i^p T_j^q \tilde{g}_{pq}.$$

**Теорема 2.1.** При любом выборе операторных коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$  в формулах (1.6) условие сохранения вида уравнений (2.5) при преобразованиях (2.3) и (2.4) эквивалентно пропорциональности матриц  $g$  и  $\tilde{g}$ :

$$(2.11) \quad \tilde{g}^{ij} = \lambda g^{ij}.$$

Числовой множитель в формуле (2.11) выбирают равным единице:  $\lambda = 1$ . В этом случае из (2.10) и (2.11) получаем

$$(2.12) \quad g_{ij} = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 T_i^p T_j^q g_{pq}.$$

В матричной форме соотношение (2.12) может быть переписано следующим образом:

$$(2.13) \quad T^t g T = g.$$

Здесь  $g$  — матрица вида (2.7), а через  $T^t$  обозначен результат транспонирования матрицы  $T$ .

**Определение 2.1.** Матрица  $T$ , удовлетворяющая соотношению (2.13), называется *лоренцевской матрицей*.

Нетрудно проверить, что совокупность лоренцевских матриц образует группу. Эту группу принято обозначать  $O(1, 3)$ . Она называется *матричной группой Лоренца*.

Из соотношения (2.13) для лоренцевской матрицы получаем  $(\det T)^2 = 1$ , следовательно,  $\det T = \pm 1$ . Лоренцевские мат-

рицы с единичным детерминантом образуют группу  $SO(1, 3)$ , которую называют *специальной группой Лоренца*.

При  $i = j = 0$  из соотношения (2.12) извлекается следующая формула для компонент матрицы  $T$ :

$$(2.14) \quad (T_0^0)^2 - (T_0^1)^2 - (T_0^2)^2 - (T_0^3)^2 = 1.$$

Немедленным следствием соотношения (2.14) является неравенство  $|T_0^0| \geq 1$ , следовательно,  $T_0^0 \geq 1$  или  $T_0^0 \leq -1$ . Лоренцевская матрица  $T$ , для которой  $T_0^0 \geq 1$ , называется *ортохронной*. Совокупность ортохронных лоренцевских матриц образует *ортохронную группу Лоренца*  $O^+(1, 3)$ . Пересечение  $SO^+(1, 3) = SO(1, 3) \cap O^+(1, 3)$  называется *специальной ортохронной группой Лоренца*.

**Упражнение 2.1.** Считая преобразование (1.6), заданное операторными коэффициентами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , обратимым, докажите теорему 2.1.

### § 3. Пространство Минковского.

В предыдущем параграфе мы показали, что всякая лоренцевская матрица из группы  $O(1, 3)$  определяет некоторое преобразование (2.1), сохраняющее вид уравнений электродинамики (2.5). При выводе этого факта мы сделали обозначение (2.2) и объединили пространство и время в единое четырехмерное «пространство-время». Обозначим его через  $M$ . Пространство  $M$  — основной объект в специальной теории относительности, его точки называются *событиями*. Пространство событий  $M$  оснащено квадратичной формой  $g$  сигнатуры  $(1, 3)$ , которая называется метрикой Минковского. При этом инерциальные системы отсчета интерпретируются как декартовы системы координат, в которых метрика Минковского имеет канонический вид (2.7).

**Принцип эквивалентности.** Все физические законы в любых двух инерциальных системах отсчета записываются одинаково.

Выберем некоторую инерциальную систему координат. Такой выбор определяет разделение пространства событий  $M$  на геометрическое пространство точек  $V$  и на время  $T$ :

$$(3.1) \quad M = T \oplus V.$$

Матрица метрики Минковского в выбранной системе координат имеет канонический вид (2.7). Поэтому геометрическое пространство  $V$  ортогонально оси времени относительно метрики Минковского  $g$ . Сужение этой метрики на  $V$  является отрицательно определенной квадратичной формой. После простой смены знака мы получаем положительно определенную квадратичную форму — это обычное евклидово скалярное произведение в пространстве  $V$ .

Теперь рассмотрим вторую инерциальную систему координат. Она определяет второе разложение  $M$  на пространство и время, аналогичное разложению (3.1):

$$(3.2) \quad M = \tilde{T} \oplus \tilde{V}.$$

Но оси времени  $T$  и  $\tilde{T}$  в разложениях (3.1) и (3.2) в общем случае не совпадают. Действительно, связь базисных векторов двух выбранных систем отсчета определяется соотношением

$$(3.3) \quad \tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=0}^3 S_i^j \mathbf{e}_j,$$

где  $S$  — лоренцевская матрица из (2.3). Для вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ , направленного вдоль оси времени  $\tilde{T}$ , из (3.3) имеем

$$(3.4) \quad \tilde{\mathbf{e}}_0 = S_0^0 \mathbf{e}_0 + S_0^1 \mathbf{e}_1 + S_0^2 \mathbf{e}_2 + S_0^3 \mathbf{e}_3.$$

В общем случае компоненты  $S_0^1$ ,  $S_0^2$  и  $S_0^3$  в лоренцевской матрице  $S$  отличны от нуля. Поэтому вектора  $\tilde{e}_0$  и  $e_0$  неколлинеарны, откуда  $T \neq \tilde{T}$ .

Из несовпадения осей времени  $T \neq \tilde{T}$  в двух инерциальных системах отсчета вытекает также и несовпадение геометрических пространств:  $V \neq \tilde{V}$ . Это обстоятельство приводит к весьма радикальному выводу с точки зрения его физической интерпретации: наблюдатели в двух таких системах координат наблюдают *два разных трехмерных геометрических пространства* и имеют *разный ход времени*. Однако, в нашей повседневной жизни эта разница крайне мала и никак не проявляется.

Выясним, насколько различается ход времени в двух инерциальных системах отсчета. Из формул (2.4) получаем

$$(3.5) \quad \tilde{t} = T_0^0 t + \sum_{k=1}^3 \frac{T_k^0}{c} r^k.$$

Пусть  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда, если лоренцевская матрица  $T$  ортохронна, то  $T_0^0 > 0$  и  $\tilde{t} \rightarrow +\infty$ . Если же матрица  $T$  не ортохронна, то из  $t \rightarrow +\infty$  вытекает  $\tilde{t} \rightarrow -\infty$ . Преобразования (2.4) с неортохронными матрицами  $T$  инвертируют ход времени, переставляя местами прошлое и будущее. Включить в теорию такую возможность было бы очень заманчиво. Однако, на данный момент при построении теории относительности используется более осторожный реалистический подход. Принято считать, что две реальные физические инерциальные системы отсчета могут быть связаны только ортохронными лоренцевскими матрицами из группы  $O^+(1, 3)$ .

Сужение группы допустимых лоренцевских матриц с  $O(1, 3)$  до  $O^+(1, 3)$ , связано с наличием в пространстве событий дополнительной структуры, называемой *поляризацией*. Выберем некоторую физическую инерциальную систему отсчета. Метрика Минковского в такой системе отсчета задается матрицей



канонического вида (2.7). Рассмотрим скалярный квадрат четырехмерного вектора  $\mathbf{x}$  в метрике Минковского:

$$(3.6) \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

В зависимости от значения  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  вектора пространства  $M$  разделяются на три множества:

- (1) *времениподобные вектора*, для которых величина их скалярного квадрата  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  положительна;
- (2) *световые вектора*, для которых  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ ;
- (3) *пространственноподобные вектора*, для которых величина  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  отрицательна;

Координаты световых векторов удовлетворяют следующему уравнению второго порядка:

$$(3.7) \quad (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0.$$

Нетрудно видеть, что (3.7) — это уравнение конуса в четырехмерном пространстве (см. классификацию квадрик в [4]). Конус (3.7) называется *световым конусом*.

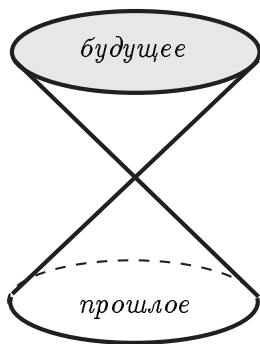


Рис. 3.1

Пространственноподобные вектора заполняют внешность светового конуса, а времениподобные вектора составляют его внутренность. Внутренность светового конуса состоит из двух половин: времениподобные вектора, для которых  $x^0 > 0$  направлены в будущее, а остальные (те, для которых  $x_0 < 0$ ) направлены в прошлое. Вектор, направленный в будущее, можно непрерывно деформировать в любой другой вектор,

направленный в будущее. Но его нельзя непрерывной

деформацией перевести в вектор, направленный в прошлое, ни разу не сделав пространственноподобным либо нулевым. Поэтому говорят, что множество времениподобных векторов состоит из двух связных компонент.

**Определение 3.1.** Геометрическая структура в пространстве  $M$  с метрикой Минковского, выделяющая одну из связных компонент в множестве времениподобных векторов, называется *поляризацией*. При этом говорят, что выделенная компонента указывает *направление в будущее*.

Пусть  $e_0, e_1, e_2, e_3$  — ортонормированный базис в метрике Минковского\*. В пространстве  $M$  с поляризацией из всех таких базисов мы можем рассмотреть лишь те, для которых вектор временной оси  $e_0$  направлен в будущее. Тогда переход из одного такого базиса в другой будет задаваться ортохронной матрицей из группы  $O^+(1, 3)$ .

**Определение 3.2.** Четырехмерное аффинное пространство  $M$ , оснащенное метрикой  $g$  сигнатуры  $(1, 3)$ , а также ориентацией\*\* и поляризацией, называется *пространством Минковского*.

Согласно специальной теории относительности, пространство Минковского, оснащенное ориентацией и поляризацией, как раз и есть правильная математическая модель для пространства реальных физических событий. Теперь мы можем дать строгое математическое определение инерциальной системы отсчета.

**Определение 3.3.** Ортонормированной правой инерциальной системой отсчета называется ортонормированная правая система координат в пространстве Минковского, базисный вектор времени которой направлен в будущее.

---

\* т.е. базис, в котором метрика Минковского имеет вид (2.7).

\*\* напомним, что ориентация — это геометрическая структура, разделяющая базисы на правые и левые (см. [4]).

Нетрудно проверить, что любые две инерциальные системы отсчета из определения 3.3, связаны преобразованием Лоренца с матрицей  $S$  из специальной ортохронной группы Лоренца  $SO^+(1, 3)$ . Выберем одну из таких систем отсчета и рассмотрим связанное с ней разложение (3.1). Ясно  $e_0 \in T$ , а линейная оболочка пространственных векторов  $e_1, e_2, e_3$  задает  $V$ . Выбрав ортонормированный базис  $e_1, e_2, e_3$  за эталон правого базиса в  $V$ , мы оснащаем это трехмерное пространство ориентацией. Это полностью согласуется с тем фактом, что геометрическое пространство, которое мы ежедневно наблюдаем вокруг себя, оснащено ориентацией, позволяющей различать левое и правое.

**Упражнение 3.1.** По аналогии с определением 3.3 дайте определение косоугольной инерциальной системы отсчета.

#### § 4. Кинематика относительного движения.

Преобразования Галилея используются в механике для описания физических процессов с точки зрения двух наблюдателей, связанных с двумя инерциальными системами отсчета. Преобразования Лоренца, которые мы вывели из условия инвариантности уравнений электродинамики (2.5), предназначены для того же самого. Однако, это трудно увидеть непосредственно из формул (2.3) и (2.4). Поэтому приведем их к виду, более удобному для изучения их физической природы.

Фиксируем две инерциальные системы отсчета, связанные преобразованием Лоренца (2.1). Первой соответствует ортонормированный правый базис  $e_0, e_1, e_2, e_3$  в пространстве Минковского и разложение (3.1), второй — базис  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ , и разложение (3.2). Если оси времени  $T$  и  $\tilde{T}$  параллельны, то  $e_0 = \tilde{e}_0$  и лоренцевская матрица  $S$  в (2.3) редуцируется к ортогональной матрице  $O \in SO(3)$ , связывающей два пространственных ортонормированных правых базиса  $e_1, e_2, e_3$  и

$\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ . Она имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$(4.1) \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & O_1^1 & O_2^1 & O_3^1 \\ 0 & O_1^2 & O_2^2 & O_3^2 \\ 0 & O_1^3 & O_2^3 & O_3^3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае  $T \parallel \tilde{T}$  две инерциальные системы отсчета отличаются лишь направлением пространственных осей и не совершают никакого относительного движения.

Перейдем к случаю, когда  $T \nparallel \tilde{T}$  и  $\mathbf{e}_0 \neq \tilde{\mathbf{e}}_0$ . Обозначим через  $H$  линейную оболочку векторов  $\mathbf{e}_0$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ , а через  $W$  обозначим пересечение подпространств  $V$  и  $\tilde{V}$  из (3.1) и (3.2):

$$(4.2) \quad H = \text{Span}(\mathbf{e}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0), \quad W = V \cap \tilde{V}.$$

**Лемма 4.1.** *Двумерные подпространства  $H$  и  $W$  из (4.2) ортогональны относительно метрики Минковского  $g$ . Они имеют нулевое пересечение:  $H \cap W = \{0\}$ , а их прямая сумма есть все пространство Минковского:  $H \oplus W = M$ .*

Док-во. Подпространство  $H$  двумерно как линейная оболочка двух неколлинеарных векторов. Каждое из подпространств  $V$  и  $\tilde{V}$  трехмерно, причем  $V \neq \tilde{V}$ . Поэтому их сумма  $V + \tilde{V}$  совпадает со всем пространством  $M$ , откуда  $\dim(V + \tilde{V}) = 4$ . Из теоремы о размерности суммы и пересечения подпространств (см. [4]) получаем

$$\dim(W) = \dim V + \dim \tilde{V} - \dim(V + \tilde{V}) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Для доказательства ортогональности подпространств  $H$  и  $W$  воспользуемся ортогональностью  $T$  и  $V$  в разложении (3.1) и ортогональностью  $\tilde{T}$  и  $\tilde{V}$  в (3.2). Пусть  $\mathbf{y}$  — произвольный вектор из подпространства  $W$ , тогда  $\mathbf{y} \in V$ , и из  $V \perp T$

получаем  $\mathbf{y} - \mathbf{e}_0$ . Аналогичным образом из  $\mathbf{y} \in \tilde{V}$  получаем  $\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{e}}_0$ . Теперь из перпендикулярности  $\mathbf{y}$  векторам  $\mathbf{e}_0$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_0$  вытекает перпендикулярность  $\mathbf{y}$  их линейной оболочке:  $\mathbf{y} \perp H$ . В силу произвольности  $\mathbf{y} \in W$  имеем  $W \perp H$ .

Теперь докажем  $H \cap W = \{0\}$ . Рассмотрим произвольный вектор  $\mathbf{x} \in H \cap W$ . Из  $\mathbf{x} \in H$  и  $\mathbf{x} \in W$  в силу уже доказанной перпендикулярности  $H$  и  $W$  получаем  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ . Но  $\mathbf{x} \in W \subset V$ , а сужение метрики Минковского на подпространство  $V$  является знакоопределенной квадратичной формой сигнатуры  $(0, 3)$ . Поэтому из  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  вытекает  $\mathbf{x} = 0$ . Утверждение  $H \cap W = \{0\}$  доказано.

Из зануления  $H \cap W = \{0\}$  заключаем, что сумма подпространств  $H$  и  $W$  прямая и  $\dim(H + W) = 2 + 2 = 4$ . Следовательно,  $H \oplus W = M$ . Лемма доказана.  $\square$

Вернемся теперь к рассмотрению двух инерциальных систем отсчета с базисами  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ . Для вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_0$  имеется разложение (3.4), которое запишем так:

$$(4.3) \quad \tilde{\mathbf{e}}_0 = S_0^0 \mathbf{e}_0 + \mathbf{v}.$$

Здесь  $\mathbf{v} = S_0^1 \mathbf{e}_1 + S_0^2 \mathbf{e}_2 + S_0^3 \mathbf{e}_3 \in V$ . Из ортохронности лоренцевской матрицы  $S$  и из  $\tilde{\mathbf{e}}_0 \neq \mathbf{e}_0$  имеем

$$(4.4) \quad S_0^0 > 1, \quad \mathbf{v} \neq 0.$$

Для всякого числа  $a > 1$  существует число  $\alpha > 0$ , такое, что  $a = \operatorname{ch}(\alpha)$ . Применим это к числу  $S_0^0$  в разложении (4.3):

$$(4.5) \quad S_0^0 = \operatorname{ch}(\alpha).$$

Из (4.3), из (4.5) и из ортогональности векторов  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{v}$  относительно метрики Минковского получаем

$$1 = g(\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0) = (S_0^0)^2 g(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) + g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \operatorname{ch}^2(\alpha) - |\mathbf{v}|^2.$$

Из выписанного равенства для евклидовой длины вектора  $\mathbf{v}$  из подпространства  $V$  находим

$$(4.6) \quad |\mathbf{v}| = \text{sh}(\alpha), \quad \text{где } \alpha > 0.$$

Заменим вектор  $\mathbf{v}$  вектором единичной длины  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  и перепишем соотношение (4.3) в виде

$$(4.7) \quad \tilde{\mathbf{e}}_0 = \text{ch}(\alpha) \mathbf{e}_0 + \text{sh}(\alpha) \mathbf{h}_1.$$

Из (4.7) видим, что  $\mathbf{h}_1$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{e}_0$  и  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ , т.е.  $\mathbf{h}_1 \in H$ . Но, кроме того,  $\mathbf{h}_1 \in V$ , поэтому  $\mathbf{h}_1 \in V \cap H$ . Вектора  $\mathbf{e}_0$  и  $\mathbf{h}_1$  ортогональны, они составляют ортонормированный базис в пространстве  $H$ :

$$(4.8) \quad g(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = 1, \quad g(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) = -1.$$

Из (4.8) немедленно следует, что сужение метрики Минковского на подпространство  $H$  имеет сигнатуру  $(1, 1)$ .

Рассмотрим еще один вектор из подпространства  $H$ . Определим его следующим соотношением:

$$(4.9) \quad \tilde{\mathbf{h}}_1 = \text{sh}(\alpha) \mathbf{e}_0 + \text{ch}(\alpha) \mathbf{h}_1.$$

Нетрудно проверить, что вектора  $\tilde{\mathbf{e}}_0$  и  $\tilde{\mathbf{h}}_1$  составляют еще один ортонормированный базис в подпространстве  $H$ . Матрица перехода, связывающая эти два базиса, имеет вид

$$(4.10) \quad S_{\pi} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) \\ \text{sh}(\alpha) & \text{ch}(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Матрица (4.10) называется матрицей *лоренцевского поворота* или *лоренцевского буста*.

Имеется четырехмерный вариант матрицы (4.10). Действительно, вектор  $\mathbf{h}_1 \in V$  перпендикулярен подпространству  $W \subset V$ , поэтому имеет место разложение

$$V = \text{Span}(\mathbf{h}_1) \oplus W.$$

Выберем вектора  $\mathbf{h}_2$  и  $\mathbf{h}_3$ , так, чтобы они образовывали ортонормированный базис в подпространстве  $W$  и дополняли вектор  $\mathbf{h}_1$  до ортонормированного правого базиса в  $V$ . Тогда четверка векторов  $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  составляет ортонормированный правый базис в  $M$  с вектором времени  $\mathbf{e}_0$ , направленным в будущее. Матрица, связывающая этот базис с базисом  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{h}}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ , имеет следующий вид:

$$(4.11) \quad S_\pi = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) & 0 & 0 \\ \text{sh}(\alpha) & \text{ch}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переход из базиса  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в базис  $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  осуществляется матрицей вида (4.1). Это вытекает из факта совпадения векторов времени  $\mathbf{e}_0 = \tilde{\mathbf{e}}_0$ . Точно так же переход из базиса  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{h}}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  в базис  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  задается матрицей вида (4.1). Полную же замену базиса  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  на базис  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$  можно выполнить в три этапа.

**Теорема 4.1.** *Всякая лоренцевская матрица  $S \in SO^+(1, 3)$  есть произведение трех матриц  $S = S_1 S_\pi S_2$ , одна из которых  $S_\pi$  — это матрица лоренцевского поворота (4.11), а две другие  $S_1$  и  $S_2$  — матрицы вида (4.1).*

Для выяснения физического смысла преобразований Лоренца рассмотрим сначала преобразование с матрицей вида (4.11). Пусть  $ct = r^0, r^1, r^2, r^3$  — координаты некоторого вектора

$\mathbf{r} \in M$  в базисе  $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ . Через  $c\tilde{t} = \tilde{r}^0, \tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$  обозначим координаты того же вектора в базисе  $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{h}}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ . Формула (2.3) в случае матрицы  $S$  вида (4.11) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad & t = \operatorname{ch}(\alpha) \tilde{t} + \frac{\operatorname{sh}(\alpha)}{c} \tilde{r}^1, \\
 & r^1 = \operatorname{sh}(\alpha) c \tilde{t} + \operatorname{ch}(\alpha) \tilde{r}^1, \\
 & r^2 = \tilde{r}^2, \\
 & r^3 = \tilde{r}^3.
 \end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$  — координаты радиус-вектора некоторой точки  $A$ , которая неподвижна в инерциальной системе отсчета с базисом  $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ . Тогда  $\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$  — это константы, не зависящие от времени  $\tilde{t}$  в этой системе отсчета. После пересчета координат точки  $A$  в другую инерциальную систему отсчета, ее координата  $r^1$  оказывается функцией параметра  $\tilde{t}$ . Используем первое соотношение (4.12) для того, чтобы выразить параметр  $\tilde{t}$  через параметр  $t$ :

$$(4.13) \quad \tilde{t} = \frac{t}{\operatorname{ch}(\alpha)} - \frac{\operatorname{th}(\alpha)}{c} \tilde{r}^1.$$

Подстановка (4.13) в оставшиеся три формулы (4.12) дает

$$\begin{aligned}
 (4.14) \quad & r^1 = r^1(t) = c \operatorname{th}(\alpha) t + \operatorname{const}, \\
 & r^2 = r^2(t) = \operatorname{const}, \\
 & r^3 = r^3(t) = \operatorname{const}.
 \end{aligned}$$

Из (4.14) видим, что в этой системе отсчета точка  $A$  движется с постоянной скоростью  $u = c \operatorname{th}(\alpha)$  в направлении первой координатной оси.



В отличие от параметра  $\alpha$  в матрице (4.11), параметр  $u$  имеет ясную физическую интерпретацию как величина относительной скорости одной системы координат относительно другой. Выразим компоненты матрицы (4.11) через  $u$ :

$$\operatorname{ch}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{sh}(\alpha) = \frac{u}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Подставив эти формулы в (4.12), получаем

$$(4.15) \quad \begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t} + \frac{u}{c^2} \tilde{r}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & r^1 &= \frac{u\tilde{t} + \tilde{r}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ r^2 &= \tilde{r}^2, & r^3 &= \tilde{r}^3. \end{aligned}$$

Обозначим на время через  $\mathbf{r}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$  следующие трехмерные вектора из подпространств  $V$  и  $\tilde{V}$ :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= r^1 \mathbf{h}_1 + r^2 \mathbf{h}_2 + r^3 \mathbf{h}_3, \\ \tilde{\mathbf{r}} &= \tilde{r}^1 \tilde{\mathbf{h}}_1 + \tilde{r}^2 \mathbf{h}_2 + \tilde{r}^3 \mathbf{h}_3. \end{aligned}$$

Определим также линейное отображение  $\theta : V \rightarrow \tilde{V}$ , задав его действие на базисные вектора:

$$\theta(\mathbf{h}_1) = \tilde{\mathbf{h}}_1, \quad \theta(\mathbf{h}_2) = \mathbf{h}_2, \quad \theta(\mathbf{h}_3) = \mathbf{h}_3.$$

Отображение  $\theta$  является изометрией, сохраняющей ориентацию, так как оно переводит ортонормированный правый базис

из  $V$  в такой же ортонормированный правый базис в пространстве  $\tilde{V}$ . Используя введенные обозначения формулы, преобразования (4.15) можно записать в векторном виде:

$$(4.17) \quad \begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t} + \frac{\langle \theta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \theta \mathbf{r} &= \frac{\theta \mathbf{u} \tilde{t} + \frac{\langle \theta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \theta \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{r}} - \frac{\langle \theta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \theta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{u} = u \mathbf{h}_1$  — вектор скорости второй системы отсчета относительно первой. Формулы (4.17) не чувствительны к выбору базисов в пространствах  $V$  и  $\tilde{V}$ . Поэтому они пригодны как для описания преобразований Лоренца со специальной матрицей (4.11), так и для описания произвольных преобразований Лоренца с матрицей  $S = S_1 S_n S_2$  (см. теорему 4.1).

Часто знак отображения  $\theta$ , осуществляющего изоморфизм подпространств  $V$  и  $\tilde{V}$ , в формулах (4.17) опускают:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} t &= \frac{\tilde{t} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{u} \tilde{t} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{r}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Формулы (4.18) соответствуют “условно трехмерному” пониманию преобразований Лоренца, когда вектора  $\mathbf{r}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$  счита-

ются принадлежащими одному и тому же трехмерному евклидовому пространству, а величины  $t$  и  $\tilde{t}$  трактуются как скалярные параметры. Однако, согласно утвердившимся на настоящий момент представлениям, четырехмерное пространство Минковского есть физическая реальность, а не просто математическая абстракция, удобная для сокращенной записи формул (ср. (2.3) и (4.17)). При записи (4.17) и (4.18) в компонентах мы должны раскладывать вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{u}$  по базису одной системы отсчета, а вектор  $\tilde{\mathbf{r}}$  — по базису другой системы отсчета. При этом разница в записи между этими формулами полностью исчезает.

**Упражнение 4.1.** *Используя разложения (4.16) для векторов  $\mathbf{r}$  и  $\tilde{\mathbf{r}}$ , выведите следующие формулы:*

$$\tilde{r}^1 = \frac{\langle \theta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|}, \quad \tilde{r}^2 \mathbf{h}_2 + \tilde{r}^3 \mathbf{h}_3 = \tilde{\mathbf{r}} - \frac{\langle \theta \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \theta \mathbf{u}.$$

*Соединив эти формулы с (4.15), выведите соотношения (4.17).*

## § 5. Релятивистский закон сложения скоростей.

Первым следствием, которое мы получили из преобразований Галилея, был *классический закон сложения скоростей*:

$$(5.1) \quad \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{u},$$

см. формулы (1.2). Заменяя преобразования Галилея преобразованиями Лоренца, мы должны теперь вывести новый *релятивистский закон сложения скоростей*. Термин “релятивистский” происходит от английского слова “relative”, что значит “относительный”. Им обычно обозначают все, что касается теории относительности.

Пусть вектор-функция  $\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t})$  описывает движение точки  $A$  в инерциальной системе отсчета  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$  и пусть эта система от-

счета движется со скоростью  $\mathbf{u}$  относительно другой инерциальной системы отсчета  $(\mathbf{r}, t)$ . Для перехода в систему отсчета  $(\mathbf{r}, t)$  выполним преобразование Лоренца, заданное формулами (4.18). Это определяет две функции:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} t(\tilde{t}) &= \frac{\tilde{t} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) \rangle}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{r}(\tilde{t}) &= \frac{\mathbf{u} \tilde{t} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t}) \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Вычислим производные функций (5.2):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\tilde{t}} &= \frac{1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}} &= \frac{\mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{v}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Здесь через  $\tilde{\mathbf{v}}$  обозначена скорость точки  $A$  в системе  $(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}}.$$

Аналогичным образом через  $\mathbf{v}$  обозначим вектор скорости этой

точки в системе  $(\mathbf{r}, t)$ . Для вычисления  $\mathbf{v}$  из (5.3) разделим одну производную на другую:

$$(5.4) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) = \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}} \right) / \left( \frac{dt}{d\tilde{t}} \right).$$

Подстановка (5.3) в (5.4) приводит к следующей формуле:

$$(5.5) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{c^2}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}.$$

Формула (5.5) и есть искомый релятивистский закон сложения скоростей. Он заметно сложнее классического закона, выраженного формулой (5.1). Но в пределе малых скоростей  $|\mathbf{u}| \ll c$  формула (5.5) переходит в (5.1).

**Упражнение 5.1.** Выведите релятивистский закон сложения скоростей из формулы (4.17). Объясните возникающее отличие от формулы (5.5).

## § 6. Мировые линии и собственное время.

Движение точечного материального объекта в произвольной инерциальной системе координат  $(\mathbf{r}, t)$  описывается векторной функцией  $\mathbf{r}(t)$ , где  $t$  — время, а  $\mathbf{r}$  — трехмерный радиус-вектор материальной точки. Четырехмерный радиус-вектор этой точки имеет следующие компоненты:

$$(6.1) \quad r^0(t) = ct, \quad r^1(t), \quad r^2(t), \quad r^3(t).$$

Он задает в параметрическом виде некоторую линию в про-

странстве  $M$ , которая называется *мировой линией* материальной точки. Задание мировой линии полностью определяет движение материальной точки. Продифференцировав четырехмерный радиус-вектор (6.1) по параметру  $t$ , мы получим четырехмерный касательный вектор мировой линии

$$(6.2) \quad \mathbf{K} = (c, \dot{r}^1, \dot{r}^2, \dot{r}^3) = (c, v^1, v^2, v^3).$$

Три последние компоненты этого вектора составляют трехмерный вектор скорости материальной точки. Скорость большинства материальных тел не превосходит скорости света  $|\mathbf{v}| < c$ . Применительно к вектору  $\mathbf{K}$  из (6.2) это означает, что касательный вектор мировой линии времениподобен:

$$(6.3) \quad g(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = c^2 - |\mathbf{v}|^2 > 0.$$

**Определение 6.1.** Гладкая кривая в пространстве Минковского называется *времениподобной*, если касательный вектор к этой кривой времениподобен в каждой ее точке.

Мировые линии большинства материальных тел времениподобны. Исключение составляют мировые линии фотонов (частиц света), а также мировые линии других частиц с нулевой массой. Для них  $|\mathbf{v}| = c$ , откуда получается  $g(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0$ .

Мировые линии не имеют особых точек. Действительно, даже в случае  $g(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0$  сам касательный вектор  $\mathbf{K}$  в (6.2) отличен от нуля, ибо  $K^0 = c \neq 0$ .

Рассмотрим мировую линию материальной точки ненулевой массы. Для нее выполнено условие (6.3), которое позволяет ввести натуральную параметризацию на такой линии:

$$(6.4) \quad s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{g(\mathbf{K}, \mathbf{K})} dt.$$

Интеграл (6.4) задает инвариантный способ параметризации мировых линий. Для любых двух точек  $A$  и  $B$  на заданной мировой линии величина  $s(B) - s(A)$  не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой вычисляется интеграл (6.4). Эта величина называется *интервальной длиной* отрезка  $AB$  на мировой линии. Имеет место следующий факт.

**Теорема 6.1.** *Отрезок, соединяющий концы гладкой времениподобной кривой времени подобен, причем его интервальная длина больше интервальной длины соответствующей дуги этой кривой.*

Пусть  $A$  и  $B$  два последовательных события в “жизни” материальной точки с ненулевой массой. Ответ на вопрос о том, какой промежуток времени разделяет эти два события зависит от выбора инерциальной системы отсчета, из которой мы наблюдаем за “жизнью” этой материальной точки. Такой ответ на вопрос относителен. Однако, имеется инвариантно определенная величина, определяющая дистанцию между двумя событиями на мировой линии:

$$(6.5) \quad \tau = \frac{s(B) - s(A)}{c}.$$

Величина  $\tau$  в (6.5) называется интервалом *собственного времени*, разделяющим два события на мировой линии.

Понятие собственного времени определяет *микролокальную* концепцию времени в теории относительности. Согласно этой концепции, каждая материальная точка живет по собственным часам и часы различных материальных точек синхронизированы лишь в самом грубом смысле — они отсчитывают время от прошлого к будущему. Такая грубая синхронизация определяется наличием поляризации в пространстве Минковского. Точная синхронизация часов возможна лишь при непосредственном соприкосновении материальных точек (когда их мировые линии пересекаются). Однако, даже после такой синхронизации при следующей встрече материальных точек их часы

будут показывать разное время, что связано с разницей в их “жизненном пути” в промежутке между встречами.

Понятие собственного времени наглядно иллюстрируется задачей о близнецах, широко известной из научно-фантастической литературы. Пусть один из близнецов садится в межзвездную ракету и отправляется в далекое путешествие, а другой остается на Земле. Который из них будет старше в момент встречи после окончания этого путешествия?

Ответ: тот, который остался на Земле. Это объясняется следующим рассуждением. Мировые линии близнецов пересекаются дважды: до начала путешествия и после его завершения. Оба пересечения происходят на Земле. Известно, что система отсчета, связанная с Землей с большой точностью может считаться инерциальной. Мировая линия близнеца, оставшегося на Земле в этой системе отсчета почти прямолинейна и совпадает с осью времени. Мировая линия путешествующего близнеца искривлена, сначала он ускоряется в момент набора скорости, достигает значительных скоростей, сравнимых с  $c$ , затем тормозится у цели путешествия, после чего вновь разгоняется и вновь тормозится на обратном пути. Согласно теореме 6.1, интервальная длина криволинейной мировой линии, соединяющей два события, короче интервальной длины прямолинейной мировой линии, соединяющей те же два события. Следовательно, близнец оставшийся на Земле будет старше.

**Упражнение 6.1.** Вспомните доказательство того, что евклидова длина кривой, соединяющей две точки  $A$  и  $B$ , больше длины отрезка  $AB$ . По аналогии с этим доказательством придумайте доказательство теоремы 6.1.

### § 7. Динамика материальной точки.

Движение материальной точки в теории относительности описывается ее мировой линией в пространстве Минковского.



Выберем натуральную параметризацию на мировой линии и рассмотрим четырехмерный касательный вектор

$$(7.1) \quad \mathbf{u}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds},$$

где  $\mathbf{r}(s)$  — четырехмерный радиус-вектор событий на мировой линии. Вектор  $\mathbf{u}$  в (7.1) называется *вектором 4-скорости*. Он времениподобен и является единичным вектором в метрике Минковского:  $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ . Выбрав инерциальную систему отсчета, мы можем выписать компоненты 4-скорости явно:

$$(7.2) \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2}} \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $v^1$ ,  $v^2$  и  $v^3$  — компоненты трехмерного вектора скорости  $\mathbf{v}$ . Отметим, что компоненты  $u^0$ ,  $u^1$ ,  $u^2$  и  $u^3$  вектора  $\mathbf{u}$  являются безразмерными величинами. Это легко видеть из (7.2). После умножения  $\mathbf{u}$  на скаляр  $mc$ , имеющий размерность импульса, мы получаем *вектор 4-импульса*

$$(7.3) \quad \mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

для материальной точки с массой  $m$ . Вектор  $\mathbf{p}$  играет важную в физике, ввиду того, что имеет место фундаментальный закон природы: *закон сохранения 4-импульса*.

**Закон сохранения импульса.** Вектор 4-импульса материальной точки, не испытывающей внешнего воздействия, остается неизменным.

В силу сформулированного закона для частицы, не испытывающей внешнего воздействия, имеем  $\mathbf{p} = \text{const}$ . Отсюда

$\mathbf{u} = \text{const.}$  Интегрируя уравнение (7.1), для  $\mathbf{r}(s)$  получаем

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} s.$$

Вывод: при отсутствии внешних воздействий, материальная точка движется равномерно и прямолинейно.

Внешние воздействия, приводящие к изменению, 4-импульса материальной точки подразделяются на две категории:

- (1) непрерывные;
- (2) дискретные.

Непрерывные воздействия оказываются на материальную частицу внешними полями (одним или несколькими). Они приводят к искривлению мировой линии. В этом случае  $\mathbf{p} \neq \text{const.}$  Производная 4-импульса по натуральному параметру  $s$  на мировой линии называется *вектором 4-силы*:

$$(7.4) \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{F}(s).$$

Вектор 4-силы в (7.4) является количественной характеристикой воздействия внешних полей на материальную частицу. Он определяется как параметрами самой частицы, так и характеристиками внешних полей в рассматриваемой точке мировой линии. Из единичности вектора 4-скорости вытекает  $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = m^2 c^2$ . Дифференцируя это соотношение по  $s$  и учитывая константность компонент матрицы (2.7), получаем

$$(7.5) \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{F}) = 0.$$

Соотношение (7.5) означает, что вектор 4-силы перпендикулярен вектору 4-скорости в метрике Минковского, т.е. вектор силы перпендикулярен мировой линии частицы.

Выбрав некоторую инерциальную систему отсчета, мы можем заменить натуральный параметр  $s$  в (7.5) на параметр  $t$ ,

имеющий смысл времени в выбранной системе отсчета. Тогда, при учете (7.3), из векторного уравнения (7.5) выводим

$$(7.6) \quad \frac{dp^i}{dt} = \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2} F^i, \quad \text{где } i = 1, 2, 3.$$

Если обозначить через  $\mathbf{f}$  трехмерный вектор с компонентами  $f^i = \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2} F^i$ , то для трехмерного вектора импульса частицы из (7.6) вытекает уравнение

$$(7.7) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}.$$

Уравнение (7.7) трактуется как релятивистский аналог второго закона Ньютона. Вместо классической формулы  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  для связи вектора импульса с вектором скорости здесь имеет место следующее соотношение:

$$(7.8) \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}.$$

Чтобы записать (7.8) в классическом виде, вводится величина

$$(7.9) \quad m_v = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}.$$

Константа  $m$  при этом называется *массой покоя*, а величина (7.9) называется *динамической массой* движущейся частицы. Теперь  $\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}$ , а второй закон Ньютона выглядит так:

$$(7.10) \quad (m_v \mathbf{v})'_t = \mathbf{f}.$$

Именно эти формулы (7.9) и (7.10) имеют в виду, когда говорят, что масса в теории относительности зависит от скорости.

Такая терминология представляется нам не очень удачной. В дальнейшем мы, в основном, будем пользоваться четырехмерным инвариантным уравнением (7.4) и, говоря о массе, будем понимать массу покоя.

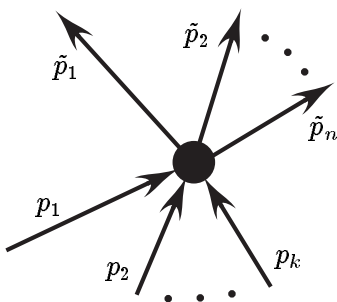


Рис. 7.1

К категории дискретных внешних воздействий на материальную частицу относят, ситуации, приводящие к резкому скачкообразному изменению ее 4-импульса. Такие ситуации возникают в процессах столкновения частиц, а также при слиянии частиц и при их распаде. Столкновению частиц соответствует точка пространства Минковского в которой сходятся мировые линии двух или

нескольких частиц. После столкновения частицы могут просто разлететься, но, если это молекулы реагирующих химических веществ, то после столкновения образуются новые молекулы продуктов химической реакции. Аналогичным образом, при столкновении атомных ядер и элементарных частиц могут происходить ядерные реакции и процессы возникновения новых элементарных частиц. Рассмотрим процесс столкновения  $k$  частиц. Обозначим через  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  их 4-импульсы на момент столкновения. Пусть в процессе взаимодействия вместо исходных возникает  $n$  новых частиц с 4-импульсами  $\tilde{\mathbf{p}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_n$ . Если  $k = 1$  то мы имеем процесс распада частицы, а в случае  $n = 1$  — процесс слияния частиц в одну.

**Закон сохранения импульса.** Суммарный 4-импульс частиц до взаимодействия равен суммарному 4-импульсу частиц после взаимодействия:

$$(7.11) \quad \sum_{i=1}^k \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{p}}_i.$$

В качестве примера рассмотрим процесс лобового столкновения двух одинаковых частиц массы  $m$ , приводящий к их слиянию в одну частицу массы  $M$ . Пусть скорости частиц равны по величине и направлены противоположно:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ -v^1 \\ -v^2 \\ -v^3 \end{pmatrix}.$$

Для 4-импульса образовавшейся частицы имеем

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \frac{M}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{w}|^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}.$$

Применив закон сохранения 4-импульса (7.11) к этой ситуации, получаем  $\mathbf{w} = 0$  и дополнительно

$$(7.12) \quad M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}.$$

Из (7.12) видим, что масса покоя образовавшейся составной частицы больше, чем сумма масс покоя отдельных ее компонент:  $M > m + m$ . Вывод: закон сохранения массы выполняется лишь приближенно в случае малых скоростей  $|\mathbf{v}| \ll c$ .

Умножим нулевую компоненту 4-импульса материальной частицы на  $c$ . Полученную величину, имеющую размерность энергии, обозначим через  $E$ :

$$(7.13) \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}}.$$

Величина (7.13) называется *кинетической энергией* движущейся частицы. Записав соотношение (7.11) для нулевых компонент 4-импульсов сталкивающихся частиц, мы получаем *закон сохранения энергии*:

$$(7.14) \quad \sum_{i=1}^k E_i = \sum_{i=1}^n \tilde{E}_i.$$

Таким образом, закон сохранения 4-импульса при столкновениях включает в себя одновременно закон сохранения трехмерного импульса и закон сохранения энергии (7.14).

Заметим, что при  $\mathbf{v} = 0$  величина (7.13) не обращается в ноль, а принимает значение

$$(7.15) \quad E = mc^2.$$

Эта величина называется *энергией покоя* материальной частицы. Формула (7.15) широко известна. Она отражает очень важный факт, отсутствующий в классической физике, — это взаимопревращаемость массы и энергии. Фактически, превращение энергии в массу реализуется при слиянии частиц (см.  $M > m + m$  в формуле (7.12)). Обратный процесс распада частиц приводит к дефекту (уменьшению массы). Потерянная масса реализуется в виде кинетической энергии частиц, которые образуются при распаде. Возможно также и полное превращение массы в энергию. Это происходит в процессе *аннигиляции* при столкновении частиц с античастицами. Выделяющаяся при аннигиляции очень большая энергия рассеивается в виде жесткого электромагнитного излучения.

## § 8. Четырехмерная запись уравнений Максвелла.

Стартуя с уравнений электродинамики  $\square \mathbf{E} = 0$  и  $\square \mathbf{H} = 0$ , в предыдущих параграфах мы построили и описали преобразования Лоренца, сохраняющие форму этих уравнений, дали

геометрическую и физическую интерпретацию преобразованиям Лоренца и даже описали динамику материальных точек на базе новых релятивистских представлений о пространстве и времени. Теперь настал момент для того, чтобы вспомнить, что уравнения  $\square \mathbf{E} = 0$  и  $\square \mathbf{H} = 0$  являются лишь следствиями уравнений Максвелла, и что для полноты картины необходимо включить сами уравнения Максвелла в рамки релятивистского формализма. Начнем со второй пары уравнений Максвелла, содержащей заряды и токи (см. уравнения (1.2) во второй главе). Слегка модифицируем их:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad -\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi \rho,$$

после чего перепишем эти уравнения в компонентах, используя символ Леви-Чивита для записи ротора (см. [3]):

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E^p}{\partial r^0} - \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{pqk} \frac{\partial H^k}{\partial r^q} &= -\frac{4\pi}{c} j^p, \\ -\sum_{q=1}^3 \frac{\partial E^q}{\partial r^q} &= -4\pi \rho. \end{aligned}$$

Здесь мы также использовали обозначение  $r^0 = ct$ , ассоциирующее время с нулевой компонентой радиус-вектора в пространстве Минковского.

Использование символа Леви-Чивита позволяет построить по компонентам вектора  $\mathbf{H}$  кососимметрическую матрицу  $3 \times 3$  со следующими компонентами:

$$(8.2) \quad F^{pq} = -\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{pqk} H^k.$$

Пользуясь (8.2), нетрудно выписать явный вид матрицы  $F$ :

$$(8.3) \quad F^{pq} = \begin{pmatrix} 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним матрицу (8.3) одним столбцом и одной строкой:

$$(8.4) \quad F^{pq} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добавленный столбец и добавленную строку в (8.4) условимся индексировать нулем, т.е.  $p$  и  $q$  пробегает значения от 0 до 3. Кроме того, дополним трехмерный вектор плотности тока еще одной компонентой

$$(8.5) \quad j^0 = \rho c.$$

Использование (8.4) и (8.5) позволяет переписать уравнения Максвелла (8.1) в очень компактной четырехмерной форме:

$$(8.6) \quad \sum_{q=0}^3 \frac{\partial F^{pq}}{\partial r^q} = -\frac{4\pi}{c} j^p.$$

Теперь рассмотрим первую пару уравнений Максвелла (см. уравнения (1.1) во второй главе). В компонентах они записываются следующим образом:

$$(8.7) \quad \frac{\partial H^p}{\partial r^0} + \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{pqk} \frac{\partial E^k}{\partial r^q} = 0, \quad \sum_{q=1}^3 \frac{\partial H^q}{\partial r^q} = 0.$$



По структуре уравнения (8.7) сходны с уравнениями (8.1). Однако, в них нет правых частей, имеется небольшое отличие в знаках, и самое главное отличие — компоненты векторов **Е** и **Н** в них поменялись местами. Для того, чтобы поменять местами компоненты векторов **Е** и **Н** в матрице (8.4), нам потребуется четырехмерный аналог символа Леви-Чивита

$$\varepsilon_{pqks} = \varepsilon^{pqks} = \begin{cases} 0, & \text{если среди чисел } p, q, k \text{ и } s \\ & \text{имеются совпадающие;} \\ 1, & \text{если числа } (p q k s) \text{ обра-} \\ & \text{зуют четную перестановку чисел } (0 1 2 3); \\ -1, & \text{если числа } (p q k s) \text{ обра-} \\ & \text{зуют нечетную перестановку чисел } (0 1 2 3). \end{cases}$$

Зададим матрицу  $G$ , определив ее компоненты формулой

$$(8.8) \quad G^{pq} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 \varepsilon^{pqks} g_{km} g_{sn} F^{mn}.$$

Здесь  $g$  — матрица (2.7), определяющая метрику Минковского. Матрицу  $G$  с компонентами (8.8) можно изобразить явно:

$$(8.9) \quad G^{pq} = \begin{pmatrix} 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3 \\ H^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ H^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ H^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Строение матрицы (8.9) позволяет записать оставшиеся урав-

нения Максвелла (8.7) в компактной четырехмерной форме:

$$(8.10) \quad \sum_{q=0}^3 \frac{\partial G^{pq}}{\partial r^q} = 0.$$

Использование сразу двух матриц  $F$  и  $G$  считается избыточным, поэтому уравнения (8.10) записывают в виде

$$(8.11) \quad \sum_{q=0}^3 \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 \varepsilon^{pqks} \frac{\partial F_{ks}}{\partial r^q} = 0.$$

Матрица  $F_{ks}$  получается из  $F^{mn}$  в результате стандартной процедуры опускания индексов при помощи матрицы (2.7):

$$(8.12) \quad F_{ks} = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 g_{km} g_{sn} F^{mn}.$$

Четырехмерная индексная форма записи уравнений Максвелла (8.6) и (8.11) подсказывает правильную геометрическую интерпретацию этих уравнений. Матрица (8.4) определяет тензор валентности  $(2,0)$  в пространстве Минковского. Этот тензор называется *тензором электромагнитного поля*. Тензорная интерпретация матрицы (8.4) сразу же дает недостающее правило преобразования компонент электрического и магнитного полей при преобразованиях Лоренца (2.3):

$$(8.13) \quad F^{pq} = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 S_m^p S_n^q \tilde{F}^{mn}.$$

Соотношения (8.13) определяют правила пересчета компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые раньше мы изображали в неопределенной форме соотношениями (1.6). Для лоренцевских матриц

специального вида (4.11) связь между компонентами векторов **E** и **H** в двух инерциальных системах отсчета имеет вид

$$\begin{aligned} E^1 &= \tilde{E}^1, & E^2 &= \frac{\tilde{E}^2 + \frac{u}{c} \tilde{H}^3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & E^3 &= \frac{\tilde{E}^3 - \frac{u}{c} \tilde{H}^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ H^1 &= \tilde{H}^1, & H^2 &= \frac{\tilde{H}^2 - \frac{u}{c} \tilde{E}^3}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & H^3 &= \frac{\tilde{H}^3 + \frac{u}{c} \tilde{E}^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 4.1, общая лоренцевская матрица есть произведение специальной лоренцевской матрицы вида (4.11) и двух матриц пространственного поворота. Влияние последних на запись преобразования Лоренца можно исключить, если перейти к “условно трехмерной” векторной форме записи:

$$\mathbf{E} = \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \frac{\tilde{\mathbf{E}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} - \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}}]}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \quad (8.14)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \frac{\tilde{\mathbf{H}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{H}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}]}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}.$$

Из (8.13) вытекает следующее правило преобразования для ковариантных компонент тензора электромагнитного поля:

$$F_{pq} = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 T_p^m T_q^n \tilde{F}_{mn}. \quad (8.15)$$

Соотношение (8.15) обеспечивает инвариантность формы уравнений Максвелла (8.11) относительно преобразований Лоренца (2.3). Для проверки этого достаточно использовать соотношения (2.8) для преобразования производных и вспомнить известное свойство символа  $\varepsilon^{pqks}$ :

$$(8.16) \quad \sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \sum_{c=0}^3 \sum_{d=0}^3 T_a^p T_b^q T_c^k T_d^s \varepsilon^{abcd} = \det T \varepsilon^{pqks}.$$

Условие инвариантности формы уравнений Максвелла (8.6) относительно преобразований Лоренца приводит к следующему правилу пересчета для величин  $j^0, j^1, j^2, j^3$ :

$$(8.17) \quad j^p = \sum_{m=0}^3 S_m^p \tilde{j}^m.$$

В формуле (8.17) легко узнается правило преобразования компонент четырехмерного вектора. В случае лоренцевской матрицы  $S$  специального вида (4.11), при учете (8.5), соотношения (8.17) можно записать следующим образом:

$$(8.18) \quad \begin{aligned} \rho &= \frac{\tilde{\rho} + \frac{u}{c^2} \tilde{j}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & j^1 &= \frac{u\tilde{\rho} + \tilde{j}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ j^2 &= \tilde{j}^2, & j^3 &= \tilde{j}^3. \end{aligned}$$

Напомним, что здесь  $u = c \operatorname{th}(\alpha)$  — величина относительной скорости движения одной инерциальной системы отсчета

относительно другой. В векторном виде формулы (8.18) записываются так:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\tilde{\rho} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{j}} \rangle}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{j} &= \frac{\mathbf{u} \tilde{\rho} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{j}} \rangle}{c^2} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{j}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{j}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

В таком виде они задают правило пересчета плотности заряда  $\rho$  и трехмерного вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  при преобразованиях Лоренца с произвольной лоренцевской матрицей.

**Упражнение 8.1.** Докажите соотношение (8.16), считая  $T$  произвольной матрицей размера  $4 \times 4$ .

**Упражнение 8.2.** Используя соотношение (2.12), выведите соотношение (8.15) из (8.12) и (8.13).

**Упражнение 8.3.** Пользуясь соотношениями (8.15), (8.16) и (2.8), пересчитайте уравнения Максвелла (8.11) из одной инерциальной системы отсчета в другую. Убедитесь в инвариантности формы этих уравнений.

**Упражнение 8.4.** Пользуясь соотношениями (8.13), (8.17) и (2.8), пересчитайте уравнения Максвелла (8.6) из одной инерциальной системы отсчета в другую. Убедитесь в инвариантности формы этих уравнений.

## § 9. Четырехмерный векторный потенциал.

Структура уравнений Максвелла позволяет ввести векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и скалярный потенциал  $\varphi$ . Это было сделано

в §3 второй главы. Соответствующие формулы для компонент полей **E** и **H** имеют вид

$$(9.1) \quad \begin{aligned} E^p &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r^p} - \frac{1}{c} \frac{\partial A^p}{\partial t}, \\ H^p &= \sum_{q=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon^{pqk} \frac{\partial A^k}{\partial r^q}, \end{aligned}$$

(см. формулы (3.4) во второй главе). Обозначим  $A^0 = \varphi$  и рассмотрим четырехмерный вектор **A** с компонентами  $A^0, A^1, A^2$  и  $A^3$ . Это *четырёхмерный векторный потенциал* электромагнитного поля. Применив процедуру опускания индекса, получим ковектор **A**:

$$(9.2) \quad A_p = \sum_{q=0}^3 g_{pq} A^q.$$

При учете соотношения (2.7) для компонент матрицы  $g_{pq}$  из формулы (9.2) выводим

$$(9.3) \quad \begin{aligned} A_0 &= A^0, & A_1 &= -A^1, \\ A_2 &= -A^2, & A_3 &= -A^3. \end{aligned}$$

Кроме того, выпишем в явном виде ковариантные компоненты тензора электромагнитного поля:

$$(9.4) \quad F_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ -E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ -E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование (9.3) и (9.4) позволяет записать первое из соотношений (9.1) в форме следующих равенств:

$$(9.5) \quad F_{0q} = \frac{\partial A_q}{\partial r^0} - \frac{\partial A_0}{\partial r^q}.$$

Для вычисления остальных компонент тензора  $F_{pq}$  воспользуемся соотношением (8.2) и вторым из соотношений (9.1). При этом учтем, что  $F_{pq} = F^{pq}$  и  $A_p = -A^p$  для  $p, q = 1, 2, 3$ :

$$(9.6) \quad F_{pq} = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{pqk} H^k = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \varepsilon_{pqk} \varepsilon^{kmn} \frac{\partial A_n}{\partial r^m}.$$

Для дальнейшего преобразования (9.6) используем одно из известных тождеств свертки для символа Леви-Чивита:

$$(9.7) \quad \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{pqk} \varepsilon^{kmn} = \delta_p^m \delta_q^n - \delta_q^m \delta_p^n.$$

Применение (9.7) к (9.6) дает

$$(9.8) \quad F_{pq} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (\delta_p^m \delta_q^n - \delta_q^m \delta_p^n) \frac{\partial A_n}{\partial r^m} = \frac{\partial A_q}{\partial r^p} - \frac{\partial A_p}{\partial r^q}.$$

Соединив (9.8) и (9.5), получаем следующую формулу для всех ковариантных компонент тензора электромагнитного поля:

$$(9.9) \quad F_{pq} = \frac{\partial A_q}{\partial r^p} - \frac{\partial A_p}{\partial r^q}.$$

Формула (9.9) есть, по существу, четырехмерная запись соотношений (9.1), которая позволяет объединить эти два соотношения в одно.

Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля определяются неоднозначно, с точностью до калибровочных преобразований (см. формулу (4.1) во второй главе). Этот произвол можно было бы включить и в правила преобразования компонент четырехмерного потенциала  $\mathbf{A}$ . Однако, если считать, что величины  $A^0$ ,  $A^1$ ,  $A^2$  и  $A^3$  преобразуются как компоненты четырехмерного вектора

$$(9.10) \quad A^p = \sum_{q=0}^3 S_q^p \tilde{A}^q,$$

а величины  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  получаются из них в результате процедуры опускания индекса (9.2), то величины  $F_{pq}$ , определяемые формулой (9.9), будут преобразовываться, как им и полагается, по формуле (8.15).

Из (9.10) легко получить явные формулы для пересчета скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент трехмерного векторного потенциала  $\mathbf{A}$ . При специальных преобразованиях Лоренца с матрицей лоренцевского поворота (4.11) они записываются следующим образом:

$$(9.11) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{\tilde{\varphi} + \frac{u}{c} \tilde{A}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, & A^1 &= \frac{\frac{u}{c} \tilde{\varphi} + \tilde{A}^1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \\ A^2 &= \tilde{A}^2, & A^3 &= \tilde{A}^3. \end{aligned}$$

Из (9.11) можно еще раз получить правила пересчета компонент электрического и магнитного полей при таких преобразованиях (см. в § 8 выше). В случае преобразований с про-



извольной лоренцевской матрицей соотношения (9.11) следует записывать в векторной форме:

$$(9.12) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{\tilde{\varphi} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{j}} \rangle}{c}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{A} &= \frac{\frac{\mathbf{u}}{c} \tilde{\varphi} + \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}} + \tilde{\mathbf{A}} - \frac{\langle \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{A}} \rangle}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

**Теорема 9.1.** *Всякое кососимметричное тензорное поле  $\mathbf{F}$  валентности  $(0, 2)$  в четырехмерном пространстве, удовлетворяющее уравнениям (8.11), определяется некоторым ковекторным полем  $\mathbf{A}$  по формуле (9.9).*

Док-во. Всякое кососимметричное тензорное поле  $\mathbf{F}$  валентности  $(0, 2)$  в пространстве четырех измерений можно отождествить с парой трехмерных векторнозначных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , зависящих от дополнительного параметра  $r^0 = ct$ . Для этого достаточно воспользоваться формулой (9.4). Теперь уравнения (8.11) можно записать в виде уже знакомых нам уравнений Максвелла для векторных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Дальнейшее построение ковекторного поля  $\mathbf{A}$  повторяет рассуждения из § 3 второй главы, где вводятся трехмерный векторный потенциал и скалярный потенциал для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Затем делается обозначение  $A^0 = \varphi$ , что превращает  $\mathbf{A}$  в четырехмерный вектор. Последняя процедура состоит в опускании индекса согласно формуле (9.2).  $\square$

Выбор поля  $\mathbf{A}$  в формуле (9.9), как мы уже отмечали выше, содержит калибровочный произвол. В четырехмерном формализме это изображается калибровочными преобразованиями

$$(9.13) \quad A_k \rightarrow A_k + \frac{\partial \psi}{\partial r^k},$$

где  $\psi$  — некоторое произвольное скалярное поле. Формула (9.13) есть просто четырехмерная запись калибровочных преобразований (4.1) из второй главы. Нетрудно убедиться в том, что калибровочные преобразования (9.13) не нарушают правил пересчета контравариантных компонент (9.10) для  $\mathbf{A}$ .

**Упражнение 9.1.** Докажите теорему 9.1 непосредственно в четырехмерном виде, не переходя обратно к трехмерным формулировкам и построениям.

## § 10. Закон сохранения заряда.

Ранее мы уже отмечали, что закон сохранения заряда может быть выведен непосредственно из уравнений Максвелла (см. § 1 во второй главе). Сделать это при четырехмерной форме записи уравнений Максвелла еще проще. Продифференцируем соотношение (8.6) по  $r^p$  и введем еще одно суммирование по индексу  $p$ :

$$(10.1) \quad \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \frac{\partial^2 F^{pq}}{\partial r^p \partial r^q} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{p=0}^3 \frac{\partial j^p}{\partial r^p}.$$

Операция взятия второй смешанной частной производной по  $r^p$  и  $r^q$  симметрична относительно перестановки индексов  $p$  и  $q$ , а тензор электромагнитного поля  $F^{pq}$ , наоборот, кососимметричен относительно перестановки этих индексов. Поэтому выражение под знаками суммирования в левой части (10.1)

кососимметрично по  $p$  и  $q$ , что ведет к занулению левой части в этой формуле. Отсюда

$$(10.2) \quad \sum_{p=0}^3 \frac{\partial j^p}{\partial r^p} = 0.$$

Выражение (10.2) есть четырехмерная форма записи закона сохранения заряда. При учете  $j^0 = c\rho$  и  $r^0 = ct$  эта формула полностью совпадает с формулой (5.4) из первой главы.

Законы сохранения скалярных величин (таких как заряд) в теории относительности изображаются подобно (10.2) в форме зануления четырехмерной дивергенции соответствующих четырехмерных векторов тока. Для векторных же величин токи являются тензорами. Так закон сохранения 4-импульса для для полей изображается формулой

$$(10.3) \quad \sum_{p=0}^3 \frac{\partial T^{qp}}{\partial r^p} = 0.$$

Тензор  $T^{qp}$  в (10.3), играющий роль тока для 4-импульса называется *тензором энергии-импульса*.

**Теорема 10.1.** *Для всякого векторного поля  $\mathbf{j}$  в  $n$ -мерном пространстве ( $n \geq 2$ ), имеющего нулевую дивергенцию*

$$(10.4) \quad \sum_{p=1}^n \frac{\partial j^p}{\partial r^p} = 0,$$

*существует кососимметричное тензорное поле  $\psi$  валентности  $(2, 0)$ , такое, что выполняются соотношения*

$$(10.5) \quad j^p = \sum_{q=1}^n \frac{\partial \psi^{pq}}{\partial r^q}.$$

Док-во. Матрицу  $\psi^{pq}$ , задающую тензорное поле  $\psi$  в некоторой декартовой системе координат, будем искать в виде

$$(10.6) \quad \psi^{pq} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \psi^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \psi^{n-1n} \\ -\psi^{1n} & \dots & -\psi^{n-1n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица (10.6) кососимметрична и имеет всего  $(n-1)$  независимую компоненту. Из (10.5) для этих компонент получаем следующие уравнения:

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi^{kn}}{\partial r^n} &= j^k, \quad \text{где } k = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \psi^{kn}}{\partial r^k} &= -j^n. \end{aligned}$$

Определим функции  $\psi^{kn}$  в (10.7) следующими интегралами:

$$(10.8) \quad \begin{aligned} \psi^{kn} &= \int_0^{r^n} j^k(r^1, \dots, r^{n-1}, y) dy + \\ &+ \frac{1}{n-1} \int_0^{r^k} j^n(r^1, \dots, y, \dots, r^{n-1}, 0) dy. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что функции (10.8) удовлетворяют первой серии уравнений (10.7). А при выполнении условия (10.4) они удовлетворяют и последнему уравнению (10.7). Тем самым, теорема доказана.  $\square$

Теорема 10.1 без труда обобщается на случай произвольных тензорных токов. Доказательство ее при этом не меняется.

**Теорема 10.2.** Для всякого тензорного поля  $\mathbf{T}$  валентности  $(m, s)$  в  $n$ -мерном пространстве размерности  $n \geq 2$ , имеющего нулевую дивергенцию

$$\sum_{p_m=1}^n \frac{\partial T_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_m}}{\partial r^{p_m}} = 0,$$

существует тензорное поле  $\psi$  валентности  $(m+1, s)$ , кососимметричное по последней паре верхних индексов, и такое, что

$$T_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_m} = \sum_{p_{m+1}=1}^n \frac{\partial \psi_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_m p_{m+1}}}{\partial r^{p_{m+1}}}.$$

**Упражнение 10.1.** Проверьте, что из (10.4) вытекает выполнение последнего уравнения (10.7) для функций (10.8).

**Упражнение 10.2.** Выясните связь между теоремой 10.1 и теоремой о вихревом поле в случае размерности  $n = 3$ .

## § 11. Замечание о косоугольных и криволинейных координатах.

В предыдущих двух параграфах нам удалось записать уравнения Максвелла, закон сохранения заряда, а также связь между полями  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и их потенциалами в четырехмерной форме. Полученные соотношения (8.6), (8.11), (9.9), (9.13) и (10.2) сохраняют свой вид при переходе из одной декартовой прямоугольной системы координат в пространстве Минковского в другую. Такие переходы интерпретируются как преобразования Лоренца и задаются лоренцевскими матрицами. Однако, перечисленные соотношения (8.6), (8.11), (9.9), (9.13) и (10.2) имеют прозрачный тензорный смысл. Поэтому они могут быть пересчитаны в произвольную косоугольную систему

координат. При этом пострадает лишь вид матрицы  $g$ , определяющей метрику Минковского и вместо  $\varepsilon^{pqks}$  в уравнениях (8.11) придется использовать тензор объема с компонентами

$$(11.1) \quad \omega^{pqks} = \pm \sqrt{-\det \hat{g}} \varepsilon^{pqks}.$$

Матрица  $g_{pq}$  в косоугольной системе координат уже не будет иметь вид (2.7) и будет некоторой произвольной симметричной матрицей, задающей квадратичную форму сигнатуры (1, 3). В силу этого уравнения  $\square \mathbf{E} = 0$  и  $\square \mathbf{H} = 0$ , с которых мы начинали, не будут иметь свой прежний вид. Они запишутся в форме  $\square F^{pq} = 0$ , где оператор Даламбера задан формулой (2.6) с недиагональной матрицей  $g^{ij}$ .

В произвольной косоугольной системе координат ни одна из осей не обязана иметь времениподобное направление, поэтому ни одну из координат нельзя выделять придавая ей смысл времени. Трехмерная форма записи уравнений электродинамики (даже если это будет сделано) в общем случае не будет иметь должной физической интерпретации. В частности, разделение компонент тензора  $F^{pq}$  на компоненты электрического и магнитного полей, даваемое формулой (8.4), не будет уже физически осмысленным.

Тензорный характер уравнений электродинамики в четырехмерной записи позволяет сделать еще один шаг в сторону увеличения произвола в выборе систем координат: от косоугольных можно перейти к криволинейным. Такой переход требует замены частных производных ковариантными:

$$(11.2) \quad \frac{\partial}{\partial r^p} \rightarrow \nabla_p$$

(см., например, в [3]). Компоненты связности, необходимые для осуществления перехода (11.2) определяются компонента-

ми метрического тензора, которые в криволинейной системе координат уже зависят от  $r^0, r^1, r^2, r^3$ :

$$(11.3) \quad ?_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^3 g^{ks} \left( \frac{\partial g_{sj}}{\partial r^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial r^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^s} \right).$$

В завершение сказанного приведем список всех полученных выше основных уравнений в ковариантной форме. Уравнения Максвелла записываются следующим образом:

$$(11.4) \quad \sum_{q=0}^3 \nabla_q F^{pq} = -\frac{4\pi}{c} j^p,$$

$$\sum_{q=0}^3 \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 \omega^{pqks} \nabla_q F_{ks} = 0.$$

Здесь величины  $\omega^{pqks}$  определяются соотношением (11.1). Тензор электромагнитного поля выражается через четырехмерный векторный потенциал по формуле

$$(11.5) \quad F_{pq} = \nabla_p A_q - \nabla_q A_p,$$

а калибровочный произвол в выборе самого векторного потенциала описывается соотношением

$$(11.6) \quad A_k \rightarrow A_k + \nabla_k \psi,$$

где  $\psi$  — произвольное скалярное поле. Закон сохранения заряда имеет вид

$$(11.7) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p j^p = 0,$$

а оператор Даламбера вместо (2.6) должен задаваться так:

$$(11.8) \quad \square = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g^{ij} \nabla_i \nabla_j.$$

Динамика материальных точек ненулевой массы  $m \neq 0$  описывается уравнениями ньютоновского типа:

$$(11.9) \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}, \quad \nabla_s \mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{mc}.$$

Здесь точка означает дифференцирование по натуральному параметру  $s$  на мировой линии, а  $\nabla_s$  — ковариантное дифференцирование по тому же параметру.

**Упражнение 11.1.** Пользуясь симметричностью символов Кристоффеля (11.3) по нижней паре индексов, покажите, что соотношение (11.5) приводится к виду (9.9) и в криволинейной системе координат тоже.



## ГЛАВА IV

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

### § 1. Принцип наименьшего действия для частиц и полей.

Динамика материальных точек в теории относительности описывается их мировыми линиями. Для частиц нену-

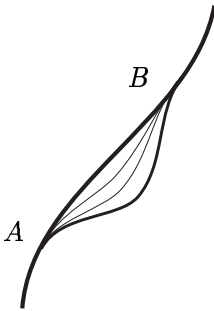


Рис. 1.1

левой массы это времениподобные линии в пространстве Минковского. Рассмотрим некоторую мировую линию, отвечающую реальному движению некоторой частицы под действием внешних полей. Фиксируем две достаточно близкие точки  $A$  и  $B$  на этой линии и рассмотрим небольшую деформацию мировой линии на участке  $AB$ . Пусть выбрана некоторая, вообще говоря, криволинейная система координат в пространстве Минковского. В

ней исходная мировая линия задается четырьмя функциями

$$(1.1) \quad r^0(s), \quad r^1(s), \quad r^2(s), \quad r^3(s),$$

где  $s$  — натуральный параметр. Тогда деформированную кривую можно задавать следующими функциями:

$$(1.2) \quad \hat{r}^i(s) = r^i(s) + h^i(\varepsilon, s), \quad i = 0, \dots, 3.$$

Здесь  $s$  — прежний натуральный параметр на исходной недеформированной мировой линии (1.1), а  $h^i(\varepsilon, s)$  — гладкие функции, отличные от нуля только на участке  $AB$ . Помимо  $s$  функции  $h^i(\varepsilon, s)$  гладко зависят еще от одного параметра  $\varepsilon$ , который мы будем считать малым и потребуем, чтобы

$$(1.3) \quad h^i(\varepsilon, s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тем самым, в (1.2) мы имеем целое семейство деформированных линий, которое называют *вариацией* мировой линии (1.1). В силу (1.3) мы можем рассмотреть тейлоровские разложения

$$(1.4) \quad h^i(\varepsilon, s) = \varepsilon h^i(s) + \dots$$

При замене одних криволинейных координат другими, величины  $h^i(s)$  преобразуются как компоненты вектора, который называют *вектором вариации* мировой линии, а величины

$$(1.5) \quad \delta r^i(s) = \varepsilon h^i(s)$$

называют *вариациями координат точек* мировой линии. Ясно, что они также преобразуются как компоненты некоторого вектора. В силу (1.4) и (1.5) исходные уравнения деформированных кривых записывают так:

$$(1.6) \quad \hat{r}^i(s) = r^i(s) + \delta r^i(s) + \dots$$

Этим подчеркивают, что слагаемые, отличные от линейных по  $\varepsilon$ , большой роли не играют.

Меняя функции  $h^i(\varepsilon, s)$  и значения параметра  $\varepsilon$  в них, мы можем окружить фрагмент  $AB$  исходной мировой линии целым роєм ее вариаций. Эти вариации, вообще говоря, не описывают никакой реальной динамики точек. Но они используются при формулировке *принципа наименьшего действия*.

В рамках лагранжевого формализма для описания динамики частиц вводится *функционал действия*  $S$ , который всякой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ , сопоставляет некоторое число.

**Принцип наименьшего действия.** *Мировая линия, соединяющая точки  $A$  и  $B$ , описывает реальную динамику материальной точки тогда и только тогда, когда функционал действия на ней достигает локального минимума среди всевозможных малых вариаций этой линии.*

Функционал действия  $S$ , сопоставляющий всякой линии число, должен зависеть только от этой линии (как геометрического места точек в  $M$ ), но не должен зависеть от выбора системы координат  $(r^0, r^1, r^2, r^3)$  в  $M$ . Это условие по традиции называется требованием *лоренцевской инвариантности*, хотя переход от одной криволинейной системы координат к другой составляет гораздо более широкий класс преобразований, чем преобразования Лоренца, связывающие две декартовы прямоугольные системы координат в пространстве Минковского.

Функционал действия обычно вбирают в виде интегрального функционала. Для одиночной частицы массы  $m$  в электромагнитном поле с потенциалом  $\mathbf{A}$  он записывается так:

$$(1.7) \quad S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds - \frac{q}{c} \int_{s_1}^{s_2} g(\mathbf{A}, \mathbf{u}) ds.$$

Здесь  $q$  — электрический заряд частицы, а  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s)$  — вектор 4-скорости (единичный касательный вектор к мировой линии). Первый интеграл в (1.7) — это действие для свободной частицы, а второй описывает взаимодействие частицы с электромагнитным полем.

Если мы рассматриваем систему из  $N$  частиц, то для каждой из них мы должны написать интегралы (1.7) и сложить

их. После чего, для получения действия для полной системы из частиц и поля, надо добавить интеграл действия для самого электромагнитного поля:

$$(1.8) \quad S = \sum_{i=1}^N \left( -m_i c \int_{s_1(i)}^{s_2(i)} ds - \frac{q_i}{c} \int_{s_1(i)}^{s_2(i)} g(\mathbf{A}, \mathbf{u}) ds \right) - \\ - \frac{1}{16\pi c} \int_{V_1}^{V_2} \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 F_{pq} F^{pq} \sqrt{-\det g} d^4 r.$$

Последний интеграл в (1.8) заслуживает отдельного рассмотрения. Это четырехмерный объемный интеграл по области,

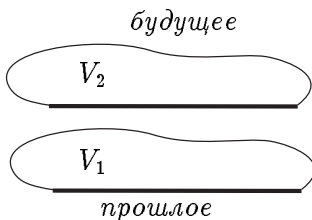


Рис. 1.2

заклученной между двумя трехмерными гиперповерхностями  $V_1$  и  $V_2$ . Гиперповерхности выбираются пространственноподобными (т.е. имеющими времениподобные вектора нормали). Они выделяют некоторую “щель” между прошлым и будущим, по которой и идет интегрирование. Изменение же полевых функций (компонент векторного

потенциала) при переходе от  $V_1$  к  $V_2$  символизирует эволюцию поля от прошлого к будущему.

Электромагнитное поле описывается полевыми функциями  $A^i(r^0, r^1, r^2, r^3)$ . Поэтому понятие вариации поля определяется иначе, чем для частиц. Пусть  $\Omega$  — некоторая ограниченная четырехмерная область, заключенная между  $V_1$  и  $V_2$ . Рассмотрим четыре гладкие функции  $h^i(\varepsilon, \mathbf{r}) = h^i(\varepsilon, r^0, r^1, r^2, r^3)$ , нулевые всюду вне области  $\Omega$  и обращающиеся в тождественный ноль при  $\varepsilon = 0$ . Положим

$$(1.9) \quad \hat{A}^i(\mathbf{r}) = A^i(\mathbf{r}) + h^i(\varepsilon, \mathbf{r}).$$

Рассмотрим тейлоровские разложения в точке  $\varepsilon = 0$  для  $h^i$ :

$$(1.10) \quad h^i(\varepsilon, \mathbf{r}) = \varepsilon h^i(\mathbf{r}) + \dots$$

*Вариацией полевых функций электромагнитного поля* назовем следующие функции, определенные линейной по  $\varepsilon$  частью тейлоровских разложений (1.10):

$$(1.11) \quad \delta A^i(\mathbf{r}) = \varepsilon h^i(\mathbf{r}).$$

Формулу для деформации векторного потенциала электромагнитного поля теперь можно записать так:

$$(1.12) \quad \hat{A}^i(\mathbf{r}) = A^i(\mathbf{r}) + \delta A^i(\mathbf{r}) + \dots$$

**Принцип наименьшего действия для полей.** Полевые функции определяют реальную конфигурацию физических полей в том и только в том случае, когда они реализуют локальный минимум функционала действия в классе всевозможных финитных вариаций.

Условие минимальности действия на реальной конфигурации полей и на реальных мировых линиях частиц, как правило, никак не используется. Для вывода уравнений динамики полей и частиц используется только условие экстремальности действия (это может быть и максимум, и точка условного экстремума). Поэтому принцип наименьшего действия часто формулируют как *принцип экстремального действия*.

**Упражнение 1.1.** Проверьте, что величины  $h^i(s)$  в разложениях (1.4) при заменах координат преобразуются как компоненты вектора.

**Упражнение 1.2.** Докажите, что при калибровочных преобразованиях вида (11.6) из третьей главы функционал действия (1.8) преобразуется по следующему правилу:

$$(1.13) \quad S \rightarrow S - \sum_{i=1}^N \left( \frac{q_i}{c} \psi(\mathbf{r}(s_2(i))) - \frac{q_i}{c} \psi(\mathbf{r}(s_1(i))) \right).$$

Объясните, почему величина добавки к функционалу действия в (1.13) не меняется при вариациях мировых линий (1.2).

## § 2. Движение частицы в электромагнитном поле.

Для нахождения мировой линии релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле применим принцип экстремального действия для частиц к функционалу действия (1.8). Выберем одну из  $N$  частиц в (1.8) и рассмотрим деформацию ее мировой линии (1.6). При подстановке деформированной мировой линии в (1.8) вместо недеформированной величина последнего объемного интеграла не изменится. А из суммы по  $i$  при этом изменится лишь одно слагаемое, отвечающее выбранной частице. Поэтому при исследовании (1.8) на экстремальность относительно деформаций мировых линий частиц мы можем ограничиться функционалом действия в форме (1.7). Значение (1.7) на деформированной мировой линии вычисляется так:

$$(2.1) \quad S_{\text{деф}} = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g(\mathbf{K}, \mathbf{K})} ds - \frac{q}{c} \int_{s_1}^{s_2} g(\mathbf{A}, \mathbf{K}) ds.$$

Внешнее отличие (2.1) от (1.7) обусловлено тем, что параметр  $s$  есть натуральный параметр на исходной линии, но он не яв-

ляется натуральным параметром на деформированной линии. Здесь касательный вектор

$$(2.2) \quad \mathbf{K}(s) = \frac{d\hat{\mathbf{r}}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s) + \varepsilon \frac{d\hat{\mathbf{h}}(s)}{ds} + \dots$$

уже не единичен. Поэтому первый интеграл в (1.7) переписывается в форме интеграла длины (см. (6.4) в третьей главе). Во втором интеграле (1.7) единичный касательный вектор  $\mathbf{u}$  заменяется на касательный вектор  $\mathbf{K}$ .

Запишем в компонентах подинтегральные выражения в интегралах (2.1), учитывая, что мы работаем в общей криволинейной системе координат в пространстве Минковского:

$$(2.3) \quad \sqrt{g(\mathbf{K}, \mathbf{K})} = \sqrt{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g_{ij}(\hat{\mathbf{r}}(s)) K^i(s) K^j(s)},$$

$$g(\mathbf{A}, \mathbf{K}) = \sum_{i=0}^3 A_i(\hat{\mathbf{r}}(s)) K^i(s).$$

Подставим разложение (2.2) в (2.3) и учтем соотношение (1.2) вместе с разложением (1.4). Для подинтегральных выражений в (2.1) получаются следующие разложения по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{g(\mathbf{K}, \mathbf{K})} &= \sqrt{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})}} \left( \sum_{i=0}^3 u_i(s) \frac{dh^i(s)}{ds} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} u^i(s) u^j(s) h^k(s) \right) + \dots, \\ g(\mathbf{A}, \mathbf{K}) &= g(\mathbf{A}, \mathbf{u}) + \varepsilon \sum_{i=0}^3 A_i(\mathbf{r}(s)) \frac{dh^i(s)}{ds} + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 \frac{\partial A_i}{\partial r^k} u^i(s) h^k(s) + \dots \end{aligned}$$

При подстановке этих разложений в (2.1) учтем единичность вектора  $\mathbf{u}$ . Тогда для  $S_{\text{деф}}$  получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{деф}} = & S - \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} \sum_{k=0}^3 \left( m c u_k(s) + \frac{q}{c} A_k(\mathbf{r}(s)) \right) \frac{dh^k(s)}{ds} ds - \\ & - \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} \sum_{k=0}^3 \left( \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 \frac{\partial A_i}{\partial r^k} u^i + \frac{mc}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} u^i u^j \right) h^k(s) ds + \dots \end{aligned}$$

Применим процедуру интегрирования по частям к первому из полученных интегралов. Это позволяет исключить дифференцирование функций  $h^k(s)$  и дает

$$\begin{aligned} S_{\text{деф}} = & S - \varepsilon \sum_{k=0}^3 \left( m c u_k(s) + \frac{q}{c} A_k(\mathbf{r}(s)) \right) h^k(s) \Big|_{s_1}^{s_2} + \\ & + \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} \sum_{k=0}^3 \frac{d}{ds} \left( m c u_k(s) + \frac{q}{c} A_k(\mathbf{r}(s)) \right) h^k(s) ds - \\ & - \varepsilon \int_{s_1}^{s_2} \sum_{k=0}^3 \left( \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 \frac{\partial A_i}{\partial r^k} u^i + \frac{mc}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} u^i u^j \right) h^k(s) ds + \dots \end{aligned}$$

Вспомним, что функции  $h^k(s)$  зануляются на концах отрезка интегрирования  $h^k(s_1) = h^k(s_2) = 0$  (см. § 1 выше). Это обеспечивает зануление внеинтегральных слагаемых в полученной формуле для  $S_{\text{деф}}$ .

Теперь для вывода уравнений, определяющих мировую линию материальной точки, применим условие экстремальности функционала  $S$ . Оно означает, что линейная по  $\varepsilon$  часть при-



ращения  $S_{\text{деф}} - S$  должна быть равна нулю при любом выборе функций  $h^k(s)$ . Отсюда

$$(2.4) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( m c u_k(s) + \frac{q}{c} A_k(\mathbf{r}(s)) \right) = \\ & = \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 \frac{\partial A_i}{\partial r^k} u^i + \frac{mc}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} u^i u^j. \end{aligned}$$

Выполним дифференцирование по  $s$  в левой части (2.4). После этого соберем слагаемые, содержащие множитель  $mc$  слева, а оставшиеся слагаемые с множителем  $q/c$  — справа:

$$mc \left( \frac{du_k}{ds} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} u^i u^j \right) = \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial A_i}{\partial r^k} - \frac{\partial A_k}{\partial r^i} \right) u^i.$$

Нетрудно заметить, что в правую часть этого уравнения тензор электромагнитного поля (см. формулу (9.9) из третьей главы). Для преобразования левой части уравнения используем формулу (11.3) из третьей главы. Тогда уравнение мировой линии примет следующий вид:

$$(2.5) \quad mc \left( \frac{du_k}{ds} - \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 ?_{kj}^i u^i u^j \right) = \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 F_{ki} u^i.$$

В левой части уравнений (2.5) обнаруживаем ковариантную производную по параметру  $s$  вдоль мировой линии:

$$(2.6) \quad mc \nabla_s u_k = \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 F_{ki} u^i.$$

Сравнение (2.6) с уравнениями (11.9) из третьей главы дает

формулу для вектора четырехмерной силы, которая действует на точечный заряд  $q$  в электромагнитном поле :

$$(2.7) \quad F_k = \frac{q}{c} \sum_{i=0}^3 F_{ki} u^i.$$

Пусть выбрана декартова прямоугольная система координат в пространстве Минковского. Тогда разделение  $F_i$  на временную и пространственные компоненты позволяет вычислить трехмерный вектор силы:  $f^i = \sqrt{c^2 - |\mathbf{v}|^2} F^i$  (см формулу (7.6) из третьей главы). После несложных вычислений с использованием формул (7.2) и (9.4) из третьей главы получаем

$$(2.8) \quad \mathbf{f} = q \mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}].$$

Формула (2.8) в точности совпадает с формулой для силы Лоренца (см. (4.4) в первой главе). Таким образом, формула (2.7) есть четырехмерное обобщение формулы для силы Лоренца. Условие ортогональности четырехмерной силы и четырехмерной скорости (см. (7.5) в третьей главе) для силы Лоренца (2.7) выполнено в силу кососимметричности тензора электромагнитного поля.

**Упражнение 2.1.** Докажите, что калибровочное преобразование (1.13) для функционала действия не меняет уравнений динамики материальной точки в электромагнитном поле (2.6).

**Упражнение 2.2.** Проверьте соотношение (7.5) из третьей главы для силы Лоренца.

### § 3. Динамика пылевидной материи.

Уравнение (2.6) описывает движение заряженных частиц в электромагнитном поле. Если число частиц невелико, то мы можем следить за динамикой каждой из них. При описании

динамики очень большого числа частиц принято переходить к континуальному пределу, заменяя частицы некоторой сплошной средой, моделирующей их коллективное поведение. Простейшей моделью, описывающей систему из большого числа не сталкивающихся друг с другом частиц, является *модель пы-*

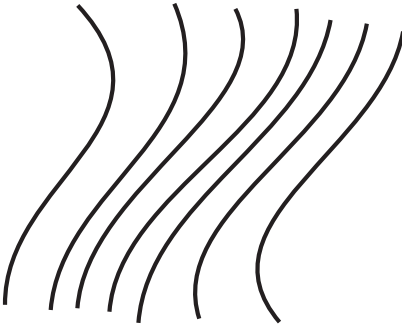


Рис. 3.1



Рис. 3.2

*левого облака.* В этой модели частицы, составляющие облако, совершают упорядоченное движение. Их мировые линии можно моделировать регулярным семейством линий, заполняющих все пространство (см. рис. 3.1).

Другой моделью является *модель идеального газа.* Здесь частицы также не сталкиваются друг с другом и их мировые линии не пересекаются. Однако, их движение является хаотическим (см. рис. 3.2). Поэтому, если их мировыми линиями заполнить все пространство, то они непременно начнут пересекаться.

Кроме рассмотренных двух моделей, имеются модели для описания жидкостей и твердых тел. С макроскопической точки зрения частицы жидкости и твердых тел движутся упорядоченным образом (как на рисунке 3.1). Однако, в этих средах существенным оказывается взаимодействие между частицами. Поэтому при описании таких сред надо либо применить детальный микроскопический анализ и получать макро-

скопические параметры среды в результате статистического усреднения, либо использовать какие-то эвристические соображения, основанные на эксперименте.

В данной книге мы ограничимся подробным рассмотрением лишь одной простейшей модели — модели пылевого облака. В этой модели пространство Минковского можно считать заполненным регулярным семейством мировых линий. Часть из них соответствует реальным пылинкам облака, а остальные получаются путем экстраполяции в континуальном пределе. Поэтому в каждой точке пространства  $M$  определен единичный вектор  $\mathbf{u}$  — касательный вектор к мировой линии, проходящей через данную точку. Это означает, что динамику частиц пылевого облака можно описывать векторным полем  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Кроме векторного поля  $\mathbf{u}$ , нам потребуется скалярный параметр  $\nu(\mathbf{r})$ , имеющий смысл густоты пылевого облака. Определим его так. Выберем некоторый малый фрагмент трехмерной гиперповерхности в  $M$ , ортогональный вектору  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  в некоторой точке  $\mathbf{r}$ . Число пылинок, мировые линии которых пересекают этот фрагмент гиперповерхности, пропорционально его объему:  $N \simeq \nu(\mathbf{r}) V$ , параметр  $\nu(\mathbf{r})$  — коэффициент пропорциональности. Параметр  $\nu(\mathbf{r})$  имеет размерность концентрации, его можно трактовать как концентрацию частиц в некотором малом фрагменте облака вокруг точки  $\mathbf{r}$ , измеренную в такой инерциальной системе отсчета, в которой частицы из этого фрагмента облака на момент измерения концентрации имеют нулевую скорость. Из  $\nu(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  составим вектор

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}) = c \nu(\mathbf{r}) \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Вектор (3.1) называется *четырёхмерной плотностью потока частиц* в облаке. Если выбрана декартова инерциальная система отсчета, то величина  $\eta^0/c$  имеет смысл концентрации частиц в облаке, а остальные три компоненты вектора  $\boldsymbol{\eta}$  формируют трехмерный вектор плотности потока частиц.

Пусть облако состоит из одинаковых частиц с массой  $m$  и электрическим зарядом  $q$ . Тогда четырехмерный вектор плотности электрического тока можно записать так:

$$(3.2) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = q \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}).$$

По аналогии с (3.2) определим *четырёхмерный вектор плотности потока массы*

$$(3.3) \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = m \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}).$$

Закон сохранения числа частиц приводит к следующему соотношению для компонент вектора  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$(3.4) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p \eta^p = 0.$$

Из (3.4) и (3.2) вытекает закон сохранения заряда в форме соотношения (11.7) из третьей главы. А при учете (3.3) получается закон сохранения массы покоя:

$$(3.5) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p \mu^p = 0.$$

Закон сохранения массы здесь выполнен в силу отсутствия столкновений, при которых из легких частиц могут образовываться более тяжелые (см. § 7 в третьей главе).

Рассмотрим динамику частиц, составляющих пылевое облако. Поскольку векторное поле  $\mathbf{u}$  состоит из касательных векторов к мировым линиям, сами эти мировые линии можно определять, решая следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(3.6) \quad \frac{dr^i}{ds} = u^i(\mathbf{r}(s)), \quad i = 0, \dots, 3.$$

Определив мировую линию частицы из уравнений (3.6), мы знаем ее вектор четырехмерной скорости  $\mathbf{u}(s)$ . Вычислим ковариантную производную вектора  $\mathbf{u}(s)$  по натуральному параметру вдоль мировой линии:

$$(3.7) \quad \nabla_s u^p = \frac{du^p(s)}{ds} + \sum_{k=0}^3 \sum_{n=0}^3 ?^p_{nk} u^k(s) u^n(s).$$

При вычислении производной  $du^p/ds$  в (3.7) учтем уравнения (3.6) и то, что  $\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(\mathbf{r}(s))$ . Это дает

$$(3.8) \quad \frac{du^p(s)}{ds} = \sum_{k=0}^3 u^k \frac{\partial u^p}{\partial r^k}.$$

Подстановка (3.8) в (3.7) приводит к соотношению

$$(3.9) \quad \nabla_s u^p = \sum_{k=0}^3 u^k \nabla_k u^p.$$

Правая часть (3.9) — это ковариантная производная векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  вдоль самого этого векторного поля (подробнее см. в [3]). Подстановка (3.9) в уравнения динамики материальной точки дает

$$(3.10) \quad \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{F}}{mc}.$$

Здесь  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  некоторое внешнее силовое поле, действующее на частицы пылевого облака. Например, в случае электромагнитного поля уравнения (3.10) имеют вид

$$(3.11) \quad \sum_{k=0}^3 u^k \nabla_k u_p = \frac{q}{mc^2} \sum_{k=0}^3 F_{pk} u^k.$$

В отличие от уравнений (11.9) из третьей главы, описывающих динамику отдельных частиц, уравнения (3.10) являются уравнениями в частных производных относительно компонент векторного поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Они описывают динамику пылевого облака к континуальному пределу. Уравнение на скалярное поле  $\nu(\mathbf{r})$  получается из закона сохранения числа частиц (3.4). Объединив эти два уравнения, получаем систему

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^3 u^k \nabla_k u_p &= \frac{F_p}{mc}, \\ \sum_{k=0}^3 u^k \nabla_k \nu &= -\nu \sum_{k=0}^3 \nabla_k u^k. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.12) дает полное описание динамики пылевого облака.

Модель пылевидной материи можно несколько обобщить, если включить в рассмотрение частицы разных сортов. Тогда для каждого сорта частиц определено свое единичное векторное поле  $\mathbf{u}(i, \mathbf{r})$  и свое поле концентрации  $\nu(i, \mathbf{r})$ . Формулы (3.2) и (3.3) обобщаются так:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q(i) \boldsymbol{\eta}(i, \mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n m(i) \boldsymbol{\eta}(i, \mathbf{r}).$$

Здесь  $\boldsymbol{\eta}(i, \mathbf{r}) = c \nu(i, \mathbf{r}) \mathbf{u}(i, \mathbf{r})$ . Каждая пара полей  $\mathbf{u}(i, \mathbf{r})$  и  $\nu(i, \mathbf{r})$  удовлетворяет уравнениям (3.12), из которых вытекает выполнение законов сохранения заряда и массы.

#### § 4. Действие для пылевидной материи.

Рассмотрим динамику пылевидной материи в электромагнитном поле с точки зрения лагранжевого формализма. Для

этого необходимо выполнить переход к континуальному пределу в действии (1.8). Для простоты рассмотрим пылевое облако, состоящее из частиц одного сорта. Опуская детали предельного перехода, выпишем функционал действия (1.8) в континуальном пределе:

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad S = & -m \int_{V_1}^{V_2} \sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})} \sqrt{-\det g} \, d^4 r - \\
 & - \frac{q}{c^2} \int_{V_1}^{V_2} g(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{A}) \sqrt{-\det g} \, d^4 r - \\
 & - \frac{1}{16\pi c} \int_{V_1}^{V_2} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F_{pk} F^{pk} \sqrt{-\det g} \, d^4 r.
 \end{aligned}$$

Вместо вывода (4.1) из (1.8) мы выполним косвенную проверку правильности предельного перехода. Для этого выведем уравнение (3.11) из принципа экстремального действия для функционала (4.1).

Для описания пылевидной материи в (4.1) мы выбрали векторное поле  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$  из (3.1). Поля  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  и  $\nu(\mathbf{r})$  могут быть выражены через векторное поле  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ :

$$(4.2) \quad c \nu = |\boldsymbol{\eta}| = \sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})}, \quad \mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{c \nu}.$$

При рассмотрении вариаций поля  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$  мы должны помнить, что компоненты этого поля не являются независимыми функциями. Они удовлетворяют уравнению (3.4). Для разрешения уравнения (3.4) воспользуемся слегка модифицированным вариантом теоремы 10.1 из третьей главы.



**Теорема 4.1.** Пусть  $M$  — некоторое  $n$ -мерное пространство ( $n \geq 2$ ), оснащенное метрикой  $g_{ij}$ . Для всякого векторного поля  $\eta$  в этом пространстве, имеющего нулевую дивергенцию относительно метрической связности

$$(4.3) \quad \sum_{p=1}^n \nabla_p \eta^p = 0,$$

существует кососимметричное тензорное поле  $\varphi$  валентности  $(2, 0)$ , такое, что выполняются соотношения

$$(4.4) \quad \eta^p = \sum_{q=1}^n \nabla_q \varphi^{pq}.$$

Док-во. При записи соотношения (4.3) воспользуемся известной формулой (11.3) из третьей главы для компонент метрической связности. Это дает

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \nabla_p \eta^p &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial \eta^p}{\partial r^p} + \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n \Gamma_{ps}^p \eta^s = \sum_{p=1}^n \frac{\partial \eta^p}{\partial r^p} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n g^{pk} \left( \frac{\partial g_{pk}}{\partial r^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial r^p} - \frac{\partial g_{ps}}{\partial r^k} \right) \eta^s. \end{aligned}$$

Заметим, что последние две производные метрического тензора в скобках сокращаются при суммировании по  $p$  и  $k$ . Это вытекает из симметричности  $g^{pk}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \sum_{p=1}^n \nabla_p \eta^p &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial \eta^p}{\partial r^p} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n g^{sk} \frac{\partial g_{ks}}{\partial r^p} \eta^p = \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial \eta^p}{\partial r^p} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \text{tr} \left( g^{-1} \frac{\partial g}{\partial r^p} \right) \eta^p. \end{aligned}$$

С целью дальнейшего преобразования полученного выражения (4.5) воспользуемся известной формулой для логарифмической производной детерминанта:

$$(4.6) \quad \frac{\partial \ln |\det g|}{\partial r^p} = \operatorname{tr} \left( g^{-1} \frac{\partial g}{\partial r^p} \right).$$

Подстановка (4.6) в (4.5) приводит (4.5) к следующему виду:

$$(4.7) \quad \sum_{p=1}^n \nabla_p \eta^p = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{p=1}^n \frac{\partial (\eta^p \sqrt{|\det g|})}{\partial r^p}.$$

Прделаем аналогичные вычисления для правой части (4.4), учитывая кососимметричность поля  $\varphi^{pq}$  и симметричность компонент связности  $\Gamma_{pq}^k$ . Они приводят к соотношению

$$(4.8) \quad \sum_{q=1}^n \nabla_q \varphi^{pq} = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{q=1}^n \frac{\partial (\varphi^{pq} \sqrt{|\det g|})}{\partial r^q}.$$

Обозначим  $j^p = \sqrt{|\det g|} \eta^p$  и  $\psi^{pq} = \sqrt{|\det g|} \varphi^{pq}$ . Теперь, исходя из соотношений (4.7) и (4.8), легко сообразить, что для доказательства теоремы 4.1 остается лишь применить теорему 10.1 из третьей главы.  $\square$

**Замечание.** Теорема 10.2, вообще говоря, не имеет прямого обобщения на случай пространств, оснащенных метрикой. Она обобщается только для метрик  $g_{ij}$ , имеющих нулевой тензор кривизны  $R_{kpq}^s = 0$ .

Определим деформацию поля  $\eta$  подобно тому как была определена деформация векторного потенциала  $\mathbf{A}$  в § 1:

$$(4.9) \quad \hat{\eta}^p(\mathbf{r}) = \eta^p(\mathbf{r}) + \varepsilon \zeta^p(\mathbf{r}) + \dots$$

Поля  $\hat{\eta}$  и  $\eta$  удовлетворяют уравнению (3.4). Следовательно,

этому уравнению удовлетворяет и поле  $\zeta$  в (4.9). Применим доказанную теорему 4.1 к векторному полю  $\zeta$ :

$$(4.10) \quad \zeta^p = \sum_{k=0}^3 \nabla_k \varphi^{pk}.$$

Поле  $\varphi^{pk}$  в (4.10) может быть произвольным. Однако, мы выберем его в специальной форме:

$$(4.11) \quad \varphi^{pk} = \eta^p h^k - h^p \eta^k.$$

Такой выбор может быть мотивирован следующей теоремой.

**Теорема 4.2.** *Для любых двух векторных полей  $\zeta$  и  $\eta \neq 0$ , удовлетворяющих уравнению (3.4), существует векторное поле  $h$ , такое, что выполнено соотношение*

$$\zeta^p = \sum_{k=0}^3 \nabla_k (\eta^p h^k - h^p \eta^k).$$

Выбор (4.11) приводит к следующему выражению для поля  $\hat{\eta}$ :

$$(4.12) \quad \hat{\eta}^p(\mathbf{r}) = \eta^p(\mathbf{r}) + \varepsilon \sum_{k=0}^3 \nabla_k (\eta^p h^k - h^p \eta^k) + \dots$$

Величины  $h^i(\mathbf{r})$  в (4.12) выбираются гладкими функциями, отличными от нуля лишь в пределах некоторой ограниченной области  $\Omega$  в пространстве Минковского.

При подстановке (4.12) в функционал действия (4.1) воспользуемся следующим разложением для  $\sqrt{g(\hat{\eta}, \hat{\eta})}$ :

$$\sqrt{g(\hat{\eta}, \hat{\eta})} = \sqrt{g(\eta, \eta)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g(\eta, \eta)}} \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \eta_p \nabla_k \varphi^{pk} + \dots$$

Аналогичное разложение имеется и для подинтегрального выражения во втором интеграле (4.1):

$$g(\hat{\boldsymbol{\eta}}, \mathbf{A}) = g(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{A}) + \varepsilon \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 A_p \nabla_k \varphi^{pk} + \dots$$

При подстановке этих разложений в (4.1) учтем соотношения (4.2). Для  $S_{\text{деф}}$  это дает

$$(4.13) \quad \begin{aligned} S_{\text{деф}} = & S - \varepsilon m \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 u_p \nabla_k \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r - \\ & - \frac{\varepsilon q}{c^2} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 A_p \nabla_k \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots \end{aligned}$$

С целью дальнейшего преобразования (4.13) воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. В пространстве, оснащенном метрикой, эта формула записывается так:

$$(4.14) \quad \int_{\Omega} \sum_{k=0}^3 \nabla_k z^k \sqrt{-\det g} d^4 r = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{z}, \mathbf{n}) dV.$$

Здесь  $z^0, z^1, z^2, z^3$  — компоненты гладкого векторного поля  $\mathbf{z}$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к границе области  $\Omega$ . Для преобразования первого интеграла в формуле (4.13) положим  $z^k = \sum_{p=0}^3 u_p \varphi^{pk}$ . Тогда в левой части (4.14) имеем

$$\sum_{k=0}^3 \nabla_k z^k = \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 u_p \nabla_k \varphi^{pk} + \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \nabla_k u_p \varphi^{pk}.$$

Правая часть (4.14) зануляется в силу зануления  $\varphi^{pk}$  на границе области  $\Omega$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 u_p \nabla_k \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r = \\ - \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \nabla_k u_p \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r. \end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется второй интеграл в (4.13). В целом же для  $S_{\text{деф}}$  получаем

$$\begin{aligned} (4.15) \quad S_{\text{деф}} = S + \varepsilon m \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \nabla_k u_p \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r + \\ + \frac{\varepsilon q}{c^2} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \nabla_k A_p \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots \end{aligned}$$

Экстремальность действия  $S$  означает, что линейная по  $\varepsilon$  часть в формуле (4.15) должна занулиться:

$$\int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left( m \nabla_k u_p + \frac{q}{c^2} \nabla_k A_p \right) \varphi^{pk} \sqrt{-\det g} d^4 r = 0.$$

Подставим выражение (4.11) для  $\varphi^{pk}$  в полученное равенство. Тогда оно преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left( m \nabla_k u_p + \frac{q}{c^2} \nabla_k A_p \right) \eta^p h^k \sqrt{-\det g} d^4 r = \\ = \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \left( m \nabla_k u_p + \frac{q}{c^2} \nabla_k A_p \right) \eta^k h^p \sqrt{-\det g} d^4 r. \end{aligned}$$

Поменяем местами индексы  $k$  и  $p$  во втором интеграле. После этого интегралы можно будет объединить в один интеграл:

$$(4.16) \quad \int_{\Omega} \sum_{k=0}^3 \sum_{p=0}^3 \left( m \nabla_k u_p - m \nabla_p u_k + \frac{q}{c^2} \nabla_k A_p - \right. \\ \left. - \frac{q}{c^2} \nabla_p A_k \right) \eta^p h^k \sqrt{-\det g} d^4 r = 0.$$

Теперь учтем, что  $h^k = h^k(\mathbf{r})$  в полученном равенстве — это произвольные гладкие функции, равные нулю на границе и всюду вне области  $\Omega$ . Поэтому из равенства нулю интеграла (4.16) следует зануление каждого слагаемого в сумме по  $k$  в подинтегральном выражении:

$$(4.17) \quad \sum_{p=0}^3 \left( m \nabla_k u_p - m \nabla_p u_k + \frac{q}{c^2} F_{kp} \right) \eta^p = 0.$$

Здесь мы учли соотношение (11.5) из третьей главы, связывающее тензор электромагнитного поля и четырехмерный векторный потенциал.

Для того, чтобы привести полученное уравнение (4.17) к окончательному виду, воспользуемся соотношениями (4.2), которые связывают векторное поле  $\boldsymbol{\eta}$  с единичным векторным полем  $\mathbf{u}$ :  $\eta^p = c \nu u^p$ . Из единичности  $\mathbf{u}$  имеем

$$(4.18) \quad \sum_{p=0}^3 u^p \nabla_k u_p = 0.$$

Учет (4.18) приводит уравнение (4.17) к виду

$$(4.19) \quad \sum_{p=0}^3 u^p \nabla_p u_k = \frac{q}{mc^2} \sum_{p=0}^3 F_{kp} u^p.$$

Нетрудно видеть, что (4.19) в точности совпадает с полученным ранее уравнением (3.11). Этот результат оправдывает

использование действия (4.1) для описания заряженной пылевидной материи в электромагнитном поле.

**Упражнение 4.1.** Докажите, что для любого кососимметричного тензорного поля  $\varphi^{pq}$ , векторное поле  $\boldsymbol{\eta}$ , определенное формулой (4.4), имеет нулевую дивергенцию, т.е. удовлетворяет уравнению (3.4).

**Упражнение 4.2.** Докажите, теорему 4.2. Для этого используйте следующий факт, который известен как теорема о спрямлении векторного поля.

**Теорема 4.3.** Для всякого векторного поля  $\boldsymbol{\eta} \neq 0$  существует такая криволинейная система координат  $r^0, r^1, r^2, r^3$ , в которой  $\eta^0 = 1, \eta^1 = 0, \eta^2 = 0, \eta^3 = 0$ .

**Упражнение 4.3.** Докажите теорему 4.3 о спрямлении векторного поля.

**Упражнение 4.4.** Выведите формулу Остроградского-Гаусса (4.14) для пространства с метрикой, исходя из следующего интегрального соотношения в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r^i} d^n r = \int_{\partial \Omega} f(\mathbf{r}) dr^1 \dots dr^{i-1} dr^{i+1} \dots dr^n.$$

## § 5. Уравнения электромагнитного поля.

В этом параграфе мы продолжим изучение функционала действия (4.1). Этот функционал описывает пылевое облако из частиц массы  $m$  и заряда  $q$  в электромагнитном поле. В предыдущем параграфе мы убедились в том, что применение принципа экстремального действия для  $S$  относительно поля  $\boldsymbol{\eta}$  дает уравнения динамики для поля скоростей частиц в пылевом облаке. Теперь применим принцип экстремального действия относительно векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , задающего

электромагнитное поле. Деформацию векторного потенциала определим в соответствии с (1.9), (1.10), (1.11) и (1.12):

$$(5.1) \quad \hat{A}_i(\mathbf{r}) = A_i(\mathbf{r}) + \varepsilon h_i(\mathbf{r}) + \dots$$

Для компонент тензора электромагнитного поля выводим

$$(5.2) \quad \hat{F}_{ij} = F_{ij} + \varepsilon (\nabla_i h_j - \nabla_j h_i) + \dots$$

При подстановке (5.2) в функционал действия (4.1) проделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \hat{F}_{pk} \hat{F}^{pk} &= \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \hat{F}_{pk} \hat{F}_{ij} g^{pi} g^{kj} = \\ &= \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F_{pk} F^{pk} + 2\varepsilon \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F^{pk} (\nabla_p h_k - \nabla_k h_p) + \dots \end{aligned}$$

С учетом кососимметричности  $F^{pk}$  полученное разложение можно еще более упростить и привести к виду

$$\sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 \hat{F}_{pk} \hat{F}^{pk} = \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F_{pk} F^{pk} + 4\varepsilon \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F^{pk} \nabla_p h_k + \dots$$

Аналогичные вычисления при подстановке (5.1) в (4.1) дают

$$g(\boldsymbol{\eta}, \hat{\mathbf{A}}) = g(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{A}) + \varepsilon \sum_{k=0}^3 \eta^k h_k + \dots$$

В итоге для деформации действия (4.1) получим разложение

$$S_{\text{деф}} = S - \frac{\varepsilon q}{c^2} \int_{\Omega} \sum_{k=0}^3 \eta^k h_k \sqrt{-\det g} \, d^4 r -$$



$$-\frac{\varepsilon}{4\pi c} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F^{pk} \nabla_p h_k \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Преобразуем второй интеграл в полученном разложении для  $S_{\text{деф}}$  при помощи формулы Остроградского-Гаусса (4.14). Для этого положим  $z^p = \sum_{k=0}^3 F^{pk} h_k$  и учтем зануление  $h_k$  на границе области  $\Omega$ . Тогда для величины  $S_{\text{деф}}$  имеем

$$S_{\text{деф}} = S + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{k=0}^3 \left( -\frac{q\eta^k}{c^2} + \sum_{p=0}^3 \frac{\nabla_p F^{pk}}{4\pi c} \right) h_k \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Из условия экстремальности действия получаем зануление линейной по  $\varepsilon$  части в разложении для  $S_{\text{деф}}$ . Учет произвольности функций  $h_k(\mathbf{r})$  в области  $\Omega$  и произвольности самой области  $\Omega$  приводит к следующим уравнениям для тензора электромагнитного поля:

$$(5.3) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p F^{pk} = \frac{4\pi q}{c} \eta^k.$$

Вспомним, что поле  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$  связано с плотностью тока соотношением (3.2). Тогда уравнения (5.3) можно переписать так:

$$(5.4) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p F^{kp} = -\frac{4\pi}{c} j^k.$$

Легко видеть, что это в точности уравнения Максвелла, записанные в четырехмерной форме (см. (11.4) в третьей главе). Еще одна пара уравнений Максвелла, имеющая вид

$$\sum_{q=0}^3 \sum_{k=0}^3 \sum_{s=0}^3 \omega^{pqks} \nabla_q F_{ks} = 0,$$

является следствием соотношения  $F_{pq} = \nabla_p A_q - \nabla_q A_p$ , связывающего тензор электромагнитного поля с векторным потенциалом (см. (11.5) в третьей главе).

**Упражнение 5.1.** *Как изменятся уравнения (5.3), если рассмотреть пылевое облако, состоящее из частиц нескольких сортов с массами  $m(1), \dots, m(N)$  и зарядами  $q(1), \dots, q(N)$ ? Изменятся ли при этом уравнения (5.4)?*

## ГЛАВА V

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

### § 1. Переход к неплоским метрикам и искривление пространства Минковского.

Переход от классической электродинамики к специальной теории относительности привел к последовательной геометризации многих базовых физических понятий. Обозначив  $r^0 = ct$  и объединив  $r^0$  с тремя другими компонентами радиус-вектора в инерциальной системе отсчета, мы получили четырехмерное пространство событий. Оно оказалось оснащенным метрикой сигнатуры  $(1, 3)$  — метрикой Минковского. При этом инерциальные системы отсчета стали интерпретироваться как декартовы системы координат с ортонормированным базисом в метрике Минковского.

Векторная запись уравнений динамики материальных точек и тензорная запись уравнений Максвелла позволила включить в рассмотрение косоугольные и даже криволинейные системы координат в пространстве Минковского. При этом в записи всех уравнений появились компоненты метрического тензора  $g_{ij}$ , компоненты метрической связности  $\Gamma_{ij}^k$  или ковариантные производные относительно этой метрической связности  $\nabla_i$ .

Следующий шаг состоит в том, чтобы, сохранив вид всех уравнений, перейти от плоской метрики Минковского к метрикам сигнатуры  $(1, 3)$  с ненулевым тензором кривизны:

$$(1.1) \quad R_{qij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jq}^k}{\partial r^i} - \frac{\partial \Gamma_{iq}^k}{\partial r^j} + \sum_{s=0}^3 \Gamma_{is}^k \Gamma_{jq}^s - \sum_{s=0}^3 \Gamma_{js}^k \Gamma_{iq}^s.$$

Этот шаг был сделан Эйнштейном. Созданная им теория получила название *эйнштейновской теории гравитации* или *общей теории относительности*.

**Определение 1.1.** Четырехмерное аффинное пространство, оснащенное метрикой сигнатуры  $(1, 3)$  с ненулевой кривизной (1.1), а также ориентацией и поляризацией, называется *искривленным пространством Минковского*.

В неплоском пространстве Минковского мы теряем часть структур, присущих плоскому пространству. В таком пространстве нет координат, в которых метрика Минковского задавалась бы матрицей (2.7) из третьей главы, т.е. здесь нет инерциальных систем отсчета. Это существенная потеря, но она не катастрофична, ибо уравнения динамики материальных точек и уравнения Максвелла, переписанные в векторном и в тензорном виде, не требуют привязки к инерциальным системам отсчета.

Геодезические линии в искривленном пространстве Минковского перестают совпадать с аффинными прямыми. Поэтому аффинная структура в  $M$  становится излишней. Оказывается, можно отказаться и от топологии плоского пространства. Уже на примере двумерных поверхностей мы знаем, что кроме деформированной (искривленной) плоскости, существуют поверхности с более сложной топологией — это сфера, тор, и различные сферы с ручками (см. [5]). В многомерном случае эти объекты обобщаются в понятии *гладкого многообразия* (подробности см. в [2], [5], и [6]).

Гладкое многообразие  $M$  размерности  $n$  — это топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность (*карту*), устроенную так же, как и окрестность точки в  $\mathbb{R}^n$ . То есть  $M$  покрывается семейством окрестностей  $U_\alpha$ , каждая из которых взаимно-однозначно отображается в некоторую окрестность  $V_\alpha$  из  $\mathbb{R}^n$ . Такие картирующие отображения задают криволинейные координаты в окрестностях  $U_\alpha$ , а в

тех местах, где карты перекрываются, возникают функции перехода из одних криволинейных координат в другие:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \tilde{r}^i &= \tilde{r}^i(r^1, \dots, r^n), \quad \text{где } i = 1, \dots, n, \\ r^i &= r^i(\tilde{r}^1, \dots, \tilde{r}^n), \quad \text{где } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Согласно определению гладкого многообразия, функции перехода (1.2) являются гладкими функциями (класса  $C^\infty$ ). По ним строятся матрицы перехода  $S$  и  $T$ :

$$(1.3) \quad T_j^i = \frac{\partial \tilde{r}^i}{\partial r^j}, \quad S_j^i = \frac{\partial r^i}{\partial \tilde{r}^j}.$$

Наличие матриц (1.3) позволяет построить полноценную теорию тензоров на многообразиях, которая почти дословно повторяет теорию тензоров в криволинейных координатах в  $\mathbb{R}^n$  (см. [3]). Единственное отличие состоит в невозможности введения декартовых координат. Это проистекает из того, что в общем случае нельзя построить взаимно-однозначного гладкого отображения из многообразия  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.1.** Четырехмерное гладкое многообразие, оснащенное метрикой сигнатуры  $(1, 3)$ , а также ориентацией и поляризацией, называется *обобщенным пространством Минковского* или *многообразием Минковского*.

## § 2. Действие для гравитационного поля. Уравнение Эйнштейна.

В качестве пространства событий в общей теории относительности выбирается некоторое многообразие Минковского  $M$ . Это обстоятельство определяет дополнительный произвол, который состоит в выборе многообразия  $M$  и в выборе метрики в нем. Наличие ненулевой кривизны, определяемой тензором (1.1), интерпретируется как *гравитационное поле*

или *поле тяготения*. Гравитационное поле воздействует на материальные тела и электромагнитное поле, заключенное в пространстве  $M$ . Такое воздействие проявляет себя через ковариантные производные, фигурирующие в уравнениях динамики. Величина самого гравитационного поля также должна определяться присутствием в пространстве какой-либо материи в форме вещества либо электромагнитного излучения. Таким образом, возникает обратная связь между геометрией пространства и его содержимым.

Для описания обратной связи между гравитационным полем и другими физическими полями и материей воспользуемся лагранжевым формализмом в сочетании с принципом экстремального действия. Начнем с функционала действия (4.1) из четвертой главы. Он представляет собой сумму трех интегральных функционалов:

$$(2.1) \quad S = S_{\text{вещ}} + S_{\text{вз}} + S_{\text{эл}}.$$

Первый функционал  $S_{\text{вещ}}$  отвечает за вещество в форме пылевого облака, второй функционал  $S_{\text{вз}}$  описывает взаимодействие вещества с электромагнитным полем, а третий — описывает само электромагнитное поле. Для описания гравитационного поля в сумму (2.1) добавляют еще одно слагаемое:

$$(2.2) \quad S = S_{\text{гр}} + S_{\text{вещ}} + S_{\text{вз}} + S_{\text{эл}}.$$

Это дополнительное слагаемое выбирают в следующем виде:

$$(2.3) \quad S_{\text{гр}} = -\frac{c^3}{16\pi\gamma} \int_{V_1}^{V_2} R \sqrt{-\det g} \, d^4 r.$$

Здесь  $\gamma$  — гравитационная постоянная, фигурирующая в законе всемирного тяготения Ньютона (см. (1.11) в первой главе).

Величина  $R$  в (2.3) — это *скалярная кривизна*, определяемая тензором кривизны по следующей формуле:

$$(2.4) \quad R = \sum_{q=0}^3 \sum_{k=0}^3 \sum_{j=0}^3 g^{qj} R_{qkj}^k.$$

Промежуточным объектом, связывающим тензор (1.1) со скаляром (2.4), является *тензор Риччи*

$$(2.5) \quad R_{qj} = \sum_{k=0}^3 R_{qkj}^k.$$

Тензор Риччи  $R_{qj}$  симметричен (см. [3]). Его полная свертка с метрическим тензором  $g^{qj}$  совпадает со скалярной кривизной  $R$ , что легко увидеть из сравнения (2.5) и (2.4).

Отметим, что иногда в действие для гравитационного поля (2.3) добавляют еще одну константу  $\Lambda$ :

$$S_{\text{гр}} = -\frac{c^3}{16\pi\gamma} \int_{V_1}^{V_2} (R + 2\Lambda) \sqrt{-\det g} \, d^4 r.$$

Ее называют *космологической константой*. Однако, согласно современным экспериментальным данным, значение ее исчезающе мало либо в точности равно нулю. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться действием  $S_{\text{гр}}$  в форме (2.3).

Отметим также, что метрический тензор, определяющий гравитационное поле, входит во все слагаемые в сумме (2.2). Поэтому нет необходимости добавлять слагаемые, описывающие взаимодействие гравитационного поля с веществом и с электромагнитным полем. Тем более, что такая добавка могла бы изменить вид уравнений динамики для вещества и вид уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Перейдем к выводу уравнений динамики для гравитационного поля. Для этого рассмотрим деформацию компонент метрического тензора, задав ее следующим соотношением:

$$(2.6) \quad \hat{g}^{ij}(\mathbf{r}) = g^{ij}(\mathbf{r}) + \varepsilon h^{ij}(\mathbf{r}) + \dots$$

Функции  $h^{ij}(\mathbf{r})$  в (2.6) считаются гладкими функциями, отличными от нуля только в пределах некоторой ограниченной области  $\Omega \subset M$ . Деформация матрицы  $g^{ij}$  приводит к деформации обратной матрицы  $g_{ij}$ . Для последней получаем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \hat{g}_{ij} &= g_{ij} - \varepsilon h_{ij} + \dots = \\ &= g_{ij} - \varepsilon \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 g_{ip} h^{pq} g_{qj} + \dots \end{aligned}$$

Продифференцируем соотношение (2.7) и выразим обычные производные через ковариантные:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial r^k} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} - \varepsilon \frac{\partial h_{ij}}{\partial r^k} + \dots = \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} - \varepsilon \nabla_k h_{ij} + \\ &+ \varepsilon \sum_{p=0}^3 ?_{ki}^p h_{pj} + \varepsilon \sum_{p=0}^3 ?_{kj}^p h_{ip} + \dots \end{aligned}$$

Здесь в (2.8) мы использовали компоненты связности, отвечающие недеформированной метрике  $g_{ij}$ . Теперь из (2.8) вычислим следующую комбинацию производных:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_{kj}}{\partial r^i} + \frac{\partial \hat{g}_{ik}}{\partial r^j} - \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial r^k} &= \frac{\partial g_{kj}}{\partial r^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial r^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial r^k} - \\ &- \varepsilon \left( \nabla_i h_{kj} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij} - 2 \sum_{p=0}^3 ?_{ij}^p h_{pk} \right) + \dots \end{aligned}$$



Используем соотношения (2.6) и (2.8) для вычисления деформации компонент связности. С этой целью воспользуемся известной формулой для  $\hat{?}_{ij}^p$  (см. (11.3) в третьей главе):

$$\hat{?}_{ij}^p = ?_{ij}^p + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^3 g^{pk} (\nabla_i h_{kj} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}) + \dots$$

Запишем полученное разложение  $\hat{?}_{ij}^p$  в сокращенной форме

$$(2.10) \quad \hat{?}_{ij}^p = ?_{ij}^p + \varepsilon Y_{ij}^p + \dots,$$

сделав следующее естественное обозначение:

$$(2.11) \quad Y_{ij}^p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 g^{pk} (\nabla_i h_{kj} + \nabla_j h_{ik} - \nabla_k h_{ij}).$$

Теперь подставим разложение (2.10) в формулу (1.1) для тензора кривизны. Это дает:

$$(2.12) \quad \hat{R}_{qij}^k = R_{qij}^k + \varepsilon (\nabla_i Y_{jq}^k - \nabla_j Y_{iq}^k) + \dots$$

Выполнив в (2.12) свертку по паре индексов, получим аналогичное разложение для деформации тензора Риччи:

$$(2.13) \quad \hat{R}_{qj} = R_{qj} + \varepsilon \sum_{k=0}^3 (\nabla_k Y_{jq}^k - \nabla_j Y_{kq}^k) + \dots$$

Теперь выполним полную свертку (2.13) с (2.6). Это дает разложение для деформации скалярной кривизны:

$$\hat{R} = R + \varepsilon \sum_{j=0}^3 \sum_{q=0}^3 \left( R_{qj} h^{qj} + \sum_{k=0}^3 g^{qj} (\nabla_k Y_{jq}^k - \nabla_j Y_{kq}^k) \right) + \dots$$

Рассмотрим векторное поле со следующими компонентами:

$$Z^k = \sum_{j=0}^3 \sum_{q=0}^3 \left( Y_{jq}^k g^{qj} - Y_{jq}^j g^{qk} \right).$$

Тогда разложение для деформации скалярной кривизны  $\hat{R}$  можно будет переписать так:

$$(2.14) \quad \hat{R} = R + \varepsilon \sum_{j=0}^3 \sum_{q=0}^3 R_{qj} h^{qj} + \varepsilon \sum_{k=0}^3 \nabla_k Z^k + \dots$$

При подстановке (2.14) в интеграл действия (2.3) учтем, что вторая сумма в (2.14) есть в точности ковариантная дивергенция векторного поля  $\mathbf{Z}$ , компоненты которого являются гладкими функциями, отличными от нуля только внутри области  $\Omega$ . Поэтому интеграл от такой суммы равен нулю:

$$\int_{\Omega} \sum_{k=0}^3 \nabla_k Z^k \sqrt{-\det g} d^4 r = \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{Z}, \mathbf{n}) dV = 0,$$

что, как видим, вытекает из формулы Остроградского-Гаусса (см. формулу (4.14) в четвертой главе). Отсюда для деформации действия  $S_{\text{гр}}$  получаем

$$S_{\text{деф}} = S_{\text{гр}} - \frac{\varepsilon c^3}{16\pi\gamma} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^3 \sum_{q=0}^3 \left( R_{qj} - \frac{R}{2} g_{qj} \right) h^{qj} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

При выводе этой формулы мы также учли следующее разложение для  $\sqrt{-\det \hat{g}}$ , вытекающее из (2.6):

$$(2.15) \quad \sqrt{-\det \hat{g}} = \sqrt{-\det g} \left( 1 - \varepsilon \sum_{j=0}^3 \sum_{q=0}^3 \frac{g_{qj} h^{qj}}{2} \right) + \dots$$

Деформации остальных трех слагаемых в сумме (2.2) мы пока в явной форме вычислять не будем, оставив это до § 4 и § 5. Однако, введем обозначение

$$(2.16) \quad S_{\text{мат}} = S_{\text{вещ}} + S_{\text{вз}} + S_{\text{эл}},$$

назвав эту сумму *действием для всех материальных полей*. Число слагаемых в этой сумме может быть гораздо больше трех, если мы рассмотрим более сложные модели для описания материи. Но в любом случае действие для гравитационного поля сюда не включается, ибо в общей теории относительности оно играет особую роль. Деформацию действия (2.16) запишем в следующем условном виде:

$$(2.17) \quad S_{\text{деф}} = S_{\text{мат}} + \frac{\varepsilon}{2c} \int_{\Omega} \sum_{q=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{qj} h^{qj} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Тогда условие экстремальности полного действия (2.2) запишется в виде уравнения

$$(2.18) \quad R_{qj} - \frac{R}{2} g_{qj} = \frac{8\pi\gamma}{c^4} T_{qj}.$$

Уравнение (2.18) известно как *уравнение Эйнштейна*. Оно является основным уравнением в общей теории относительности и описывает динамику метрического тензора  $g_{ij}$ .

**Упражнение 2.1.** Выведите соотношения (2.7) и (2.15) из разложения (2.6) для деформации тензора  $g^{ij}$ .

### § 3. Закон сохранения четырехмерного импульса для полей.

Тензор  $\mathbf{T}$ , компоненты которого фигурируют в правой части уравнения Эйнштейна (2.18), называется *тензором энергии-импульса для материальных полей*. Он определяется соотношением (2.17), и содержит в себе вклады от всех материальных полей и от их взаимодействий. В рассматриваемой

нами модели пылевидного вещества в электромагнитном поле тензор  $\mathbf{T}$  имеет три составляющие компоненты (см. (2.16)).

С тензором электромагнитного поля связан закон сохранения четырехмерного импульса для материальных полей. Для вывода этого воспользуемся тождеством Бьянки:

$$(3.1) \quad \nabla_k R^p_{sij} + \nabla_i R^p_{sjk} + \nabla_j R^p_{ski} = 0.$$

Подробнее относительно тождества (3.1) см. в [2] и [6]. Выполним свертку по индексам  $i$  и  $p$  в тождестве (3.1):

$$(3.2) \quad \nabla_k R_{sj} + \sum_{p=0}^3 \nabla_p R^p_{sjk} - \nabla_j R_{sk} = 0.$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью тензора кривизны по последней паре индексов (см. [3]). Теперь домножим полученное равенство (3.2) на  $g^{sj}$  и свернем по индексам  $s$  и  $j$ . После несложного преобразования, использующего кососимметричность  $R^{ps}_{ij} = -R^{sp}_{ji}$ , получаем

$$(3.3) \quad \sum_{s=0}^3 \nabla_s R^s_k - \frac{1}{2} \nabla_k R = 0.$$

Произведем поднятие индекса  $j$  в уравнении (2.18), затем применим ковариантную производную  $\nabla_j$  и свернем по  $j$ :

$$(3.4) \quad \sum_{j=0}^3 \nabla_j R^j_q - \frac{1}{2} \nabla_q R = \frac{8\pi\gamma}{c^4} \sum_{j=0}^3 \nabla_j T^j_q.$$

Сравнивая (3.3) и (3.4), получаем следующее уравнение для тензора энергии-импульса материальных полей:

$$(3.5) \quad \sum_{j=0}^3 \nabla_j T^j_q = 0.$$

Уравнение (3.5) выражает закон сохранения четырехмерного импульса для всей совокупности материальных полей. Это уравнение обычно записывают с поднятым индексом  $q$ :

$$(3.6) \quad \sum_{j=0}^3 \nabla_j T^{qj} = 0.$$

Тензор энергии импульса симметричен, поэтому порядок следования индексов  $q$  и  $j$  в (3.6) несущественен.

#### § 4. Тензор энергии-импульса для электромагнитного поля.

Тензор энергии-импульса для всей совокупности материальных полей определяется соотношением (2.17). По аналогии с этим определим тензор энергии импульса отдельно для электромагнитного поля следующим соотношением:

$$(4.1) \quad S_{\text{деф}} = S_{\text{эл}} + \frac{\varepsilon}{2c} \int_{\Omega} \sum_{q=0}^3 \sum_{j=0}^3 T_{qj} h^{qj} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Исходными полями в действии  $S_{\text{эл}}$  являются ковариантные компоненты векторного потенциала  $A_i(\mathbf{r})$ . Компоненты тензора электромагнитного поля определяются по формуле

$$(4.2) \quad F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i = \frac{\partial A_j}{\partial r^i} - \frac{\partial A_i}{\partial r^j}$$

(см. также формулу (11.5) в третьей главе). Окончательное выражение в правой части (4.2) не содержит компонент связности. Поэтому величины  $F_{ij}$  при деформации метрики (2.6) не меняются. После поднятия индексов

$$\hat{F}^{pk} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \hat{g}^{pi} \hat{g}^{kj} F_{ij}$$

для контравариантных компонент  $F^{pq}$  получаем разложение

$$(4.3) \quad \hat{F}^{pk} = F^{pk} + \varepsilon \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (h^{pi} g^{kj} + g^{pi} h^{kj}) F_{ij} + \dots$$

При подстановке разложения (4.3) в функционал действия для электромагнитного поля

$$S_{\text{деф}} = -\frac{1}{16\pi c} \int_{V_1}^{V_2} \sum_{p=0}^3 \sum_{k=0}^3 F_{pk} \hat{F}^{pk} \sqrt{-\det \hat{g}} d^4 r$$

учтем разложение (2.15) для корня из детерминанта. Это дает

$$\begin{aligned} S_{\text{деф}} = S_{\text{эл}} - \frac{\varepsilon}{16\pi c} \int_{\Omega} \sum_{q=0}^3 \sum_{j=0}^3 \left( \sum_{p=0}^3 \sum_{i=0}^3 2 F_{pq} g^{pi} F_{ij} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{p=0}^3 \sum_{i=0}^3 F_{pi} F^{pi} g_{qj} \right) h^{qj} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots \end{aligned}$$

Сравнив полученное разложение с ожидаемым разложением (4.1) для  $S_{\text{деф}}$ , находим компоненты  $T_{qj}$  тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$(4.4) \quad T_{qj} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^3 \sum_{i=0}^3 \left( F_{pq} g^{pi} F_{ij} - \frac{1}{4} F_{pi} F^{pi} g_{qj} \right).$$

Подняв индексы  $q$  и  $j$  в (4.4), для контравариантных компонент тензора  $\mathbf{T}$  получаем следующую формулу:

$$(4.5) \quad T^{qj} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{p=0}^3 \sum_{i=0}^3 \left( F^{pq} g_{pi} F^{ij} - \frac{1}{4} F_{pi} F^{pi} g^{qj} \right).$$

Формула (4.5) позволяет вычислить ковариантную дивергенцию для тензора энергии-импульса электромагнитного поля:

$$(4.6) \quad \sum_{s=0}^3 \nabla_s T^{ps} = -\frac{1}{c} \sum_{s=0}^3 F^{ps} j_s.$$

Формула (4.6) показывает, что закон сохранения импульса отдельно для электромагнитного поля не выполняется. Это связано с тем, что происходит обмен импульсом между электромагнитным полем и веществом.

**Упражнение 4.1.** Убедитесь в справедливости соотношения (4.6). Для этого воспользуйтесь соотношением

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) A_k = - \sum_{s=0}^3 R_{kij}^s A_s$$

и свойствами тензора кривизны (подробнее см. в [3]).

**Упражнение 4.2.** Вычислите компоненты тензора энергии-импульса (4.5) в инерциальной системе отсчета для плоской метрики Минковского (2.7) из третьей главы. Сравните их с компонентами тензора Максвелла (2.15) из второй главы, а также с плотностью энергии и вектором плотности потока энергии (см. формулы (2.5) во второй главе).

## § 5. Тензор энергии-импульса для пылевидной материи.

Рассмотрим тензор энергии-импульса, связанный с оставшимися двумя слагаемыми  $S_{\text{вещ}}$  и  $S_{\text{вз}}$  в действии (2.16). В них входит векторное поле  $\eta$ , компоненты которого связаны дифференциальным уравнением

$$(5.1) \quad \sum_{p=0}^3 \nabla_p \eta^p = 0,$$

см. уравнение (3.4) из четвертой главы. Этим компоненты поля  $\eta$  отличаются от компонент векторного потенциала электромагнитного поля  $\mathbf{A}$ . Метрический тензор  $g_{ij}$  входит в уравнение (5.1) через компоненты метрической связности  $\Gamma^k_{ij}$ , поэтому при деформации метрики  $g_{ij} \rightarrow \hat{g}_{ij}$  величины  $\eta^p$  нельзя считать не зависящими от  $g_{ij}$ .

Для преодоления возникшего препятствия воспользуемся формулой (4.7) из четвертой главы для ковариантной дивергенции и перепишем уравнение (5.1) в следующем виде:

$$\sum_{p=0}^3 \frac{\partial(\eta^p \sqrt{-\det \hat{g}})}{\partial r^p} = 0.$$

Введем обозначение  $\hat{\eta}^p = \eta^p \sqrt{-\det \hat{g}}$ . Величины  $\hat{\eta}^p$  можно считать не зависящими от  $g_{ij}$ , ибо дифференциальная связь (5.1) для них записывается в форме уравнения, не содержащего компонент метрического тензора:

$$(5.2) \quad \sum_{p=0}^3 \frac{\partial \hat{\eta}^p}{\partial r^p} = 0.$$

Выразив  $\eta^p$  через  $\hat{\eta}^p$ , для функционала действия  $S_{\text{вз}}$ , описывающего взаимодействие вещества с электромагнитным полем, получаем следующее выражение:

$$(5.3) \quad S_{\text{вз}} = -\frac{q}{c^2} \int_{V_1}^{V_2} \sum_{p=0}^3 \hat{\eta}^p A_p d^4 r.$$

Легко видеть, что интеграл в правой части (5.3) не зависит от величины метрического тензора. Поэтому действие  $S_{\text{вз}}$  не дает никакого вклада в суммарный тензор энергии-импульса.



Аналогичным образом выразим  $\eta^p$  через  $\hat{\eta}^p$  в функционале действия  $S_{\text{вещ}}$  для пылевидной материи. Это дает

$$(5.4) \quad S_{\text{вещ}} = -m \int_{V_1}^{V_2} \sqrt{\sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 g_{pq} \hat{\eta}^p \hat{\eta}^q} d^4 r.$$

Зависимость этого функционала от метрического тензора полностью определяется явным вхождением  $g_{pq}$  под знаком корня в правой части (5.4). Поэтому разложение для деформация  $S_{\text{вещ}}$  легко вычисляется на базе разложения (2.7):

$$S_{\text{деф}} = S_{\text{вещ}} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \frac{m \eta_p \eta_q}{\sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})}} \right) h^{pq} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Сравним это разложение с ожидаемым разложением для  $S_{\text{деф}}$ :

$$S_{\text{деф}} = S_{\text{вещ}} + \frac{\varepsilon}{2c} \int_{\Omega} \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 T_{pq} h^{pq} \sqrt{-\det g} d^4 r + \dots$$

Из такого сравнения находим компоненты тензора энергии-импульса для пылевидной материи:

$$(5.5) \quad T_{pq} = \frac{mc \eta_p \eta_q}{\sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})}} = mc \sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})} u_p u_q.$$

Контравариантные компоненты тензора энергии-импульса (5.5) получаются простым поднятием индексов  $p$  и  $q$ :

$$(5.6) \quad T^{pq} = \frac{mc \eta^p \eta^q}{\sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})}} = mc \sqrt{g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta})} u^p u^q.$$

Используя коллинеарность векторов  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  (см. формулу (3.1))

из четвертой главы) и учитывая единичность  $\mathbf{u}$ , преобразуем формулу (5.6) к следующему виду:

$$(5.7) \quad T^{pk} = mc \, u^p \, \eta^k.$$

Формула (5.7) удобна при вычислении ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса для пылевидной материи:

$$(5.8) \quad \sum_{s=0}^3 \nabla_s T^{ps} = \frac{q}{c} \sum_{s=0}^3 F^{ps} \eta_s.$$

Используя формулу (3.2) из четвертой главы, формулу (5.8) можно преобразовать так:

$$(5.9) \quad \sum_{s=0}^3 \nabla_s T^{ps} = \frac{1}{c} \sum_{s=0}^3 F^{ps} j_s.$$

Сравним формулу (5.9) с формулой (4.6) для тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Правые части этих формул отличаются только знаком. Этот факт имеет прозрачный смысл. Он означает, что в рассматриваемой нами модели суммарный тензор энергии-импульса для материи

$$\mathbf{T}_{\text{мат}} = \mathbf{T}_{\text{вещ}} + \mathbf{T}_{\text{эл}}$$

удовлетворяет уравнению (3.6) в полном соответствии с законом сохранения четырехмерного импульса.

Еще один важный вывод из (4.6) и (5.9) состоит в том, что закон сохранения четырехмерного импульса для полной совокупности материальных полей вытекает из уравнений динамики для этих полей. Поэтому он имеет место и в специальной теории относительности, где уравнение Эйнштейна (2.18) не рассматривается и где оно для плоской метрики Минковского в общем случае не выполнено.

**Упражнение 5.1.** Выведите соотношение (5.8) из уравнений (3.4) и (4.19) из четвертой главы.

## § 6. Заключительные замечания.

Пространством событий в общей теории относительности является некоторое многообразие Минковского  $M$  с метрикой сигнатуры  $(1, 3)$ . Величина метрики определяется параметрами материи, заполняющей пространство, в соответствии с уравнением Эйнштейна (2.18). А вот топология многообразия  $M$  может быть достаточно произвольной. Она может иметь локальные особенности в местах с очень большой концентрацией материи. Такие объекты получили название *черных дыр*. Кроме того, глобальная топология многообразия  $M$  также может быть нетривиальной (отличной от топологии  $\mathbb{R}^4$ ). В настоящее время общепринятыми являются модели вселенной (многообразия  $M$ ), включающие *большой взрыв*. Согласно этим моделям, в далеком прошлом вселенная имела исчезающе малые размеры, а плотность материи в ней была очень большой. В процессе последующей эволюции вселенная расширялась до настоящих размеров. Будет ли это расширение продолжаться неограниченно долго или же оно должно смениться сжатием? Этот вопрос еще окончательно не решен. Ответ на него зависит от оценок суммарного количества материи во вселенной.

Объем данной книги не позволяет рассмотреть здесь эти увлекательные разделы современной астрофизики и космологии. Однако, на наш взгляд, изложенный выше теоретический материал вполне достаточен, чтобы продолжить изучение этих вопросов по книгам [2], [7] и [8]. Хотелось бы также порекомендовать книгу научно-популярного жанра [9], где в увлекательной и доступной форме рисуется современная физическая картина мира.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. Изд-во «Наука», Москва, 1981.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия, т. I*. Изд-во «Наука», Москва, 1986.
3. Шарипов Р. А. *Курс дифференциальной геометрии*. Изд-е Башкирского университета, Уфа, 1996.
4. Шарипов Р. А. *Курс линейной алгебры и многомерной геометрии*. Изд-е Башкирского университета, Уфа, 1996.
5. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. *Введение в топологию*. Изд-во «Наука», Москва, 1995.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*. Изд-во «Наука», Москва, 1981.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. Изд-во «Наука», Москва, 1988.
8. Богоявленский О. И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. Изд-во «Наука», Москва, 1980.
9. Девис П. *Суперсила. Поиски единой теории природы*. Изд-во «Мир», Москва, 1989.

Шарипов Руслан Абдулович  
<http://www.geocities.com/r-sharipov>

# КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Лиц. № 0225 от 10.06.1997

Подписано в печать 21.11.97. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Отпечатано на ризографе. Компьютерный набор. Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 8,81. Тираж 100. Заказ 519

Отпечатано на множительном участке Башкирского государственного университета, 450074, Уфа, ул. Фрунзе, 32.