Пособие по векторной алгебре

Сергей Матвеев

Содержание

1 Введение

Цель этого пособия состоит в том, чтобы помочь студентам первого курса математического и физического факультетов при изучении раздела "Векторная алгебра" курсов "Аналитическая геометрия", "Геометрия", "Аналитическая геометрия и линейная алгебра". Вместе с предельно кратким изложением теоретического материала пособие содержит приемы решения типовых задач, знание которых является необходимым условием понимания курса. В стандартных учебниках этим приемам не уделяется должного внимания. Часть задач снабжена решениями, часть – ответами. В конце пособия приведен список типовых задач. Соответствующую теорию можно найти в любом учебнике по аналитической геометрии, см. [1, 2, 3, 4], а дополнительные задачи – в любом задачнике (например, в [5].

2 Векторы в декартовой системе координат

Декартова система координат на плоскости – это упорядоченная пара перпендикулярных прямых с выбранным на них одинаковым масштабом. Обычно рисуется так (см. рис. 1):

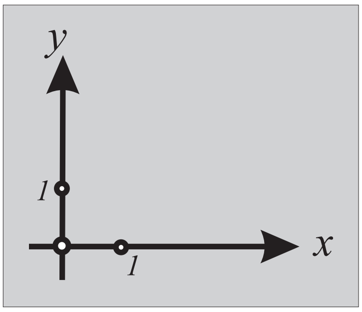

Рис. 1: Декартова система координат на плоскости

Если на плоскости фиксировать систему координат, то каждой точке A плоскости отвечают два числа – ее x-ая и y-ая координаты. Запись: $A = (x, y)$ или $A(x, y)$.

Расстояние между точками на (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой $d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Эта формула легко получается с помощью теоремы Пифагора.

Определение. *Вектором* называется упорядоченная пара точек.

Прокомментируем это определение. Обычно вектор представляют себе в виде стрелки. Однако, стрелку рисовать вовсе не обязательно. Достаточно знать две точки – начало вектора и его конец.

Определение. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, не лежащие на одной прямой, называются *равными*, если фигура $ABCD$ есть параллелограмм (т.е. прямая AB параллельна прямой DC, а прямая AD – прямой BC). См. рис. 2а. Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ лежат на одной прямой ℓ, то их равенство определяется с помощью третьего вектора MN, который не лежит на ℓ, рис. 2б.

Определение. Класс равных векторов называется *свободным вектором.*

Различие между векторами и свободными векторами не очень существенно. Очень часто (например, во фразе "любой вектор можно отложить от любой точки") под вектором понимается именно свободный вектор.

Следующее правило служит определением координат вектора:

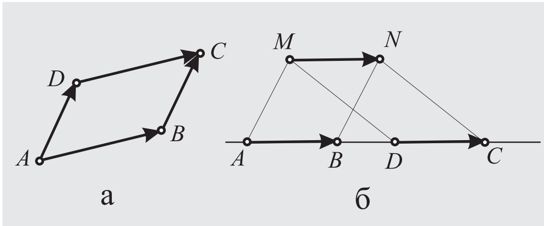

Рис. 2: Фигуры $ABCD, ABNM, DCNM$ должны быть параллелограммами

чтобы найти координаты вектора, *нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Другими словами, если $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Если вектор исходит из точки (0,0), то его координаты совпадают с координатами конца.

Из приведенного выше правила вытекает следующее:

– *Чтобы найти координаты конца, нужно к координатам начала прибавить координаты вектора.*

– *Чтобы найти координаты начала, нужно из координат конца вычесть координаты вектора.*

Сложение векторов определяется по *правилу параллелограмма*: вектор $\bar{a} + \bar{b}$ задается диагональю параллелограмма, стороны которого образованы векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, см. рис. 3. При сложении векторов их координаты складываются; при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

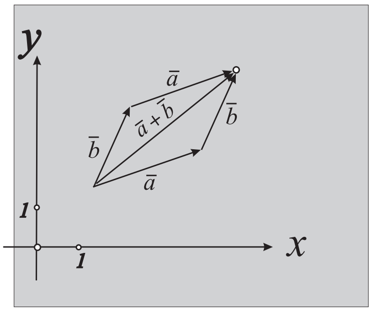

Рис. 3: Правило параллелограмма

3 Деление отрезка в данном отношении

Задача 1. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC : CB = 2 : 3$ (см. рис. 4)

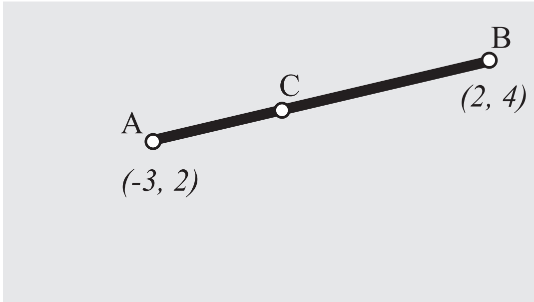

Рис. 4: Деление отрезка (пример)

Решение. Последовательно находим:

1. $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}$;

2. $\overline{AB} = (5, 2)$;

3. $\overline{AC} = \frac{2}{5}\overline{AB} = (2, \frac{4}{5})$;

4. $C = (-1, \frac{14}{5})$ (Ответ).

Нетрудно вывести и общую формулу для нахождения точки, делящей данный отрезок в данном отношении. Мы будем отождествлять каждую точку плоскости с вектором, идущим в нее из начала координат O, а формулу напишем в векторном виде, не расписывая ее по координатам.

Задача 2. Найти точку C, делящую отрезок AB в отношении $AC : CB = \mu : \lambda$.

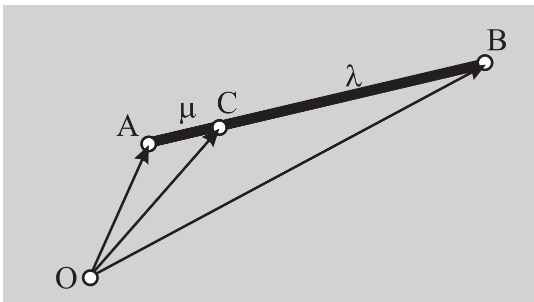

Рис. 5: Деление отрезка (общий случай)

Решение. Последовательно находим:

1. $\overline{AC} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\overline{AB} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}(B - A)$.

2. $C = A + \frac{\mu}{\mu+\lambda}(B - A) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}A + \frac{\mu}{\mu+\lambda}B$.

Таким образом, точку C можно найти по формуле

$$C = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}A + \frac{\mu}{\mu + \lambda}B$$

В случае $\mu = \lambda$, т.е. когда ищется середина отрезка, полученная формула становится особенно простой: *координаты середины отрезка есть полусуммы соответствующих координат его концов.* Полезно также иметь в виду *физический смысл* точки C: она совпадает с центром тяжести (правильнее, с центром масс) системы из двух точечных масс μ, λ, расположенных в точках B, A, соответственно.

Задача 3. Найти точку пересечения G медиан треугольника с вершинами $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$, $C = (-1, 0)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AH} = \overline{AB} + \overline{AC}, AG = \frac{1}{3}\overline{AH}$, затем $G = (1, 2)$. См. рис. 6.

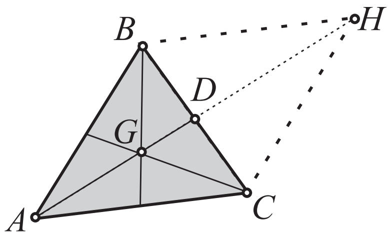

Рис. 6: Нахождение центра тяжести треугольника

4 Базисы на плоскости и в пространстве

Определение. Упорядочная пара непараллельных векторов на плоскости называется *базисом*. Прямые, на которых лежат эти векторы, называются *координатными осями*.

Напомним, что нулевой вектор $\overline{0}$ считается параллельным любому вектору, поэтому базисные векторы ненулевые).

Теорема 1. Пусть векторы $\overline{a}, \overline{b}$ образуют базис на плоскости. Тогда любой вектор $\overline{c}$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, где α, β – некоторые числа (называемые *координатами вектора* $\overline{c}$ в данном базисе). Более того, такое разложение единственно.

Доказательство. Отложим вектор $\overline{c}$ от начала координат O и проведем через его конец C прямые, параллельные векторам $\overline{b}$ и $\overline{a}$. Они пересекут (почему?) координатные оси в точках A и B, см. рис. 7. Из параллельности векторов и $\overline{OA}$ следует, что они пропорциональны. Поэтому найдется такое число α, что $\overline{OA} = \alpha\overline{a}$. Аналогично, $\overline{OB} = \alpha\overline{b}$. Поэтому $\overline{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

Докажем единственность разложения. Пусть имеются два: $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ и $\overline{c} = \alpha'\overline{a} + \beta'\overline{b}$. Вычитая одно равенство из другого, получим $(\alpha' - \alpha)\overline{a} = (\beta' - \beta)\overline{b}$. Так как базисные вектора не параллельны, то такое равенство возможно только при $\alpha = \alpha'$ и $\beta' = \beta$. $\square$

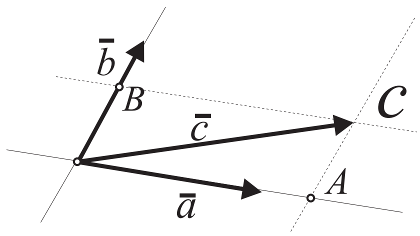

Рис. 7: Разложение вектора по базису

Задача 4. Разложить вектор $\overline{c} = (2, 4)$ по базису $\overline{a} = (2, 1), \overline{b} = (-1, 3)$.

Решение. Расписываем равенство $\overline{c} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ по координатам и решаем систему. Ответ: $= \frac{10}{7}\overline{a} + \frac{6}{7}\overline{b}$.

Отметим, что определитель этой системы отличен от 0, т.к. вектора $\overline{a}, \overline{b}$ не параллельны. Поэтому решение существует и единственно. Отсюда можно извлечь другое доказательство существования и единственности разложения вектора по базису.

Пространственный случай практически не отличается от плоского. Поэтому мы ограничимся кратким перечислением соответствующих определений и утверждений (утверждения нужно доказать самостоятельно).

1. Базис – это упорядоченная тройка некомпланарных (т.е. не параллельных одной плоскости) векторов;

2. Любой вектор $\bar{d}$ раскладывается по базису:

$$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}.$$

   При этом координаты (коэффициенты разложения) определены однозначно. См. рис. 8.

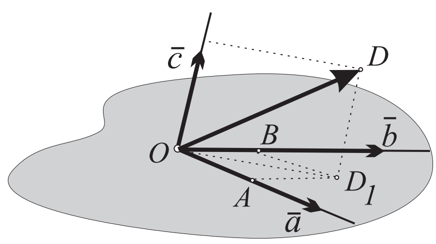

Рис. 8: Разложение пространственного вектора по базису

3. При практическом нахождении координат приходится решать систему 3-го порядка.

5 Скалярное произведение

Определение. Скалярное произведение двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними:
$(\overline{a}, \overline{b}) = \mid \overline{a} \mid\mid \overline{b} \mid \cos\varphi$.

Всего имеются 4 возможных угла, см. рис. 9. Так как их косинусы равны, то можно взять любой.

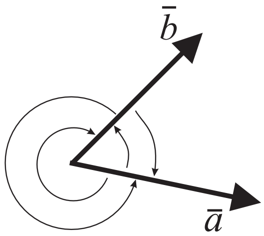

Рис. 9: Косинусы всех четырех углов равны

Выясним, как скалярное произведение записывается в координатах. Сначала мы сформулируем и докажем соответствующую теорему для плоского случая.

Теорема 2. Если $\overline{a} = (x_1, y_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2)$, то $(\overline{a}, \overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Доказательство. Найдем квадрат длины d отрезка AB (см. рис. 10) двумя способами.

1. По теореме Пифагора $d^2 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2$.

2. По теореме синусов $d^2 = \mid \overline{a} \mid^2 + \mid \overline{b} \mid^2 - 2 \mid \overline{a} \mid\mid \overline{b} \mid \cos\varphi$.

Расписывая $|a|, |b|$ в координатах, приравнивая полученные выражения и приводя подобные, получим требуемое. □

Словесно теорему 2 можно сформулировать так: скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений их координат. В такой формулировке она верна и для пространственного случая: если $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$,то $(\bar{a}, \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

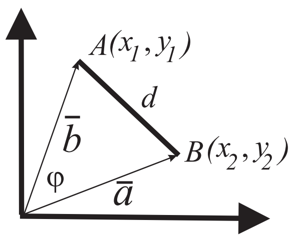

Рис. 10: Расстояние d можно найти двумя способами

Задача 5. Найти косинус угла между векторами (1,2) и (-3,1).

Решение. $\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-3+2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{50}}$.

Задача 6. Найти вектор, перпендикулярный вектору (x, y).

Решение. Подходит как вектор $(-y, x)$, так и вектор $(y, -x)$. Эти вектора перпендикулярны данному вектору (x, y), так как их скалярные произведения на него равны 0. Отсюда получается простое правило для нахождения вектора, перпендикулярного данному: *нужно переставить координаты и у одной сменить знак.* Разумеется, перпендикулярный вектор можно умножать на любое число. При этом перпендикулярность сохраняется.

Задача 7. Острый или тупой угол между векторами $\bar{a} = (1, 2, 2)$ и $\bar{b} = (-1, 2, -1)$?

Ответ. $(\bar{a}, \bar{b}) = 1 > 0$, поэтому угол острый.

Свойства скалярного произведения.

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2. $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;
3. $(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$;
4. $(a, a) \geq 0$, причем $(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

Свойства 1,3,4 можно доказать как исходя из определения, так и с помощью координатной записи (проделайте это). Свойство 2 из определения извлечь трудно. В координатах оно доказывается так: нужно записать левую и правую часть в координатах и увидеть,что получится равенство.

Доказательство 4-го свойства: $(\bar{a}, \bar{a}) =| \bar{a} |^2 \geq 0$.

Задача 8. Докажите, что для любых векторов $\bar{m}, \bar{n}$ справедливо равенство.
$(\bar{m} + \bar{n}, 2\bar{m} - \bar{n}) = 2 \mid \bar{m} \mid^2 + (\bar{m}, \bar{n}) - \mid \bar{n} \mid^2$.

6 Проекции.

Определение. *Проекцией точки на прямую* ℓ называется основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ℓ.

Напомним, что *ось* – это направленная прямая.

Определение. *Скалярной проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* ℓ называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком '+', если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением ℓ, и со знаком '-', если нет. (A_1, B_1 – проекции точекA, B).

Определение. *Векторной проекцией вектора* $\overline{AB}$ *на ось* ℓ называется вектор A_1B_1.

Теорема 3. Скалярная проекция вектора $\bar{a}$ на ось ℓ равна $(\bar{a}, \bar{s})$, где $\bar{s}$ – единичный вектор оси ℓ. Вектрная проекция вектора $\bar{a}$ на ось ℓ равна $(\bar{a}, \bar{s})s$.

Доказательство. $(\bar{a}, \bar{s}) = \mid \bar{a} \mid\mid \bar{s} \mid \cos\varphi = \mid \bar{a} \mid \cos\varphi = A_1B_1$, если $\cos\varphi \geq 0$. Если $\cos\varphi \leq 0$, то $(\bar{a}, \bar{s}) = -A_1B_1$, см. рис. 11a. Поэтому $(\bar{a}, \bar{s})$ есть скалярная проекция. Умножая ее на вектор $\bar{s}$, получаем векторную проекцию. $\square$

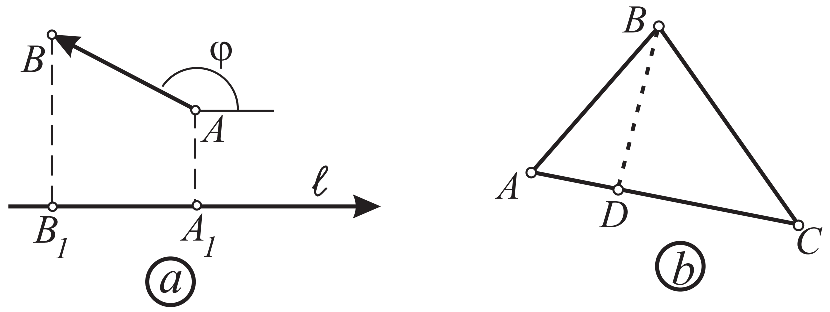

Рис. 11: a) Если угол φ тупой, то проекция отрицательна. b) Как находить проекцию на прямую.

Задача 9. Найти основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины B, см. рис. 11b. Известно, что $A = (1, -1), B = (1, 2), C = (-2, 3)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB}, \overline{AC}$, $\bar{s} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}, \overline{AD} = (\overline{AB}, \overline{s})\overline{s}$ и, наконец, $D = (-\frac{11}{25}, \frac{23}{25})$.

Определение. *Проекцией точки на плоскость* α называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

Определение. *Проекцией вектора* $\overline{BC}$ *на плоскость* α называется вектор $\overline{B'C'}$, где B', C' – проекции точек B, C, соответственно.

Полезно сопоставить определения различных проекций и четко понять, чем они отличаются. С. рис. 12.

7 Векторное произведение

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если с конца 3-го вектора вращение от 1-го ко 2-му кажется положительным (против часовой стрелки). См. рис. 13

Определение. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что:

1. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

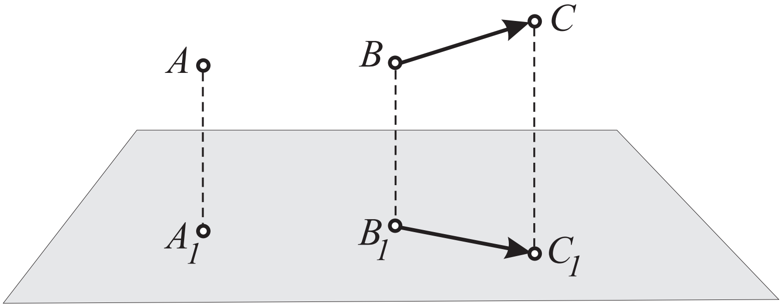

Рис. 12: Проекции точки и вектора на плоскость

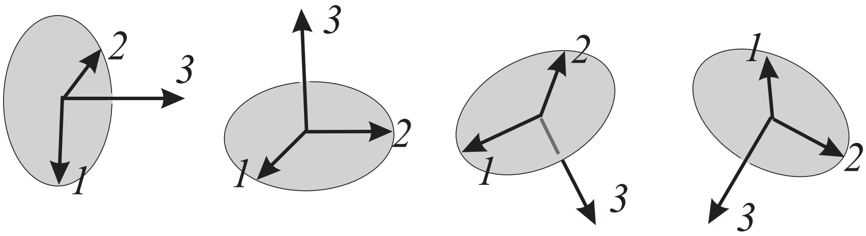

Рис. 13: Три правых и один левый базис в пространстве

2. Модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

3. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ обозначается $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Замечание. Приведенное выше определение нуждается в уточнении. Во-первых, чтобы условие 3 имело смысл, нужно все три вектора откладывать от одной точки. Во-вторых, как нам быть, если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ пропорциональны (когда не получается параллелограмма и понятие правой тройки не определено)? Выход таков: если $\bar{a}, \bar{b}$ пропорциональны, то мы по определению полагаем, что $[\bar{a}, \bar{b}]$ есть нулевой вектор.

Теорема 4. Векторное произведение любых двух векторов $\bar{a}, \bar{b}$ существует и единственно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда вектора $\bar{a}, \bar{b}$ не параллельны. Докажем, что вектор $\bar{c}$, удовлетворяющий условиям 1-3, существует и единственен. Будем считать, что вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ отложены от начала координат O.

Первое условие однозначно задает прямую, на которой обязан лежать вектор $\bar{c}$. Второе условие говорит о том, что конец вектора $\bar{c}$ может находиться в одной из двух точек, находящихся на расстоянии $|\ \bar{c}\ |$ от точки

O. Наконец, третье условие сообщает, какую из этих двух точек нужно выбрать. □

Выясним, как векторное произведение записывается в координатах.

Теорема 5. Если $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1), \bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Доказательство разобъем на три шага.

1. Проверим, что вектор $\bar{\Delta} = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)$ перпендикулярен вектору $\bar{a}$:

$$(\bar{\Delta}, \bar{a}) = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Точно так же $\bar{b} \perp \bar{\Delta}$.

2. Проверим, что $\mid \bar{\Delta} \mid$ равен $\mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid\mid \sin\varphi \mid$ (т.е. площади параллелограмма): $\mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid\mid \sin\varphi \mid = \mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \mid \bar{a} \mid\mid \bar{b} \mid \sqrt{1 - \frac{(\bar{a},\bar{b})^2}{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2}} = \sqrt{\mid \bar{a} \mid^2 \mid \bar{b} \mid^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2} = \sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2 + {\Delta_2}^3}$.

Последнее равенство проверить самим, расписав его по координатам.

3. Докажем, что вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\Delta}$ образуют правую тройку. Для этого мы используем искусственный прием.

Будем непрерывно менять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, чтобы они оставались не параллельными друг другу и в результате перешли в вектора $\bar{i} = (1, 0, 0), \bar{j} = (0, 1, 0)$, соответственно (объясните, как это можно сделать). Тогда вектор $\bar{\Delta}$ тоже будет меняться и в результате перейдет в вектор

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \bar{k}.$$

Так как тройка $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – правая, то и исходная тройка тоже правая. Действительно, при изменении векторов $\bar{a}, \bar{b}$ тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{\Delta}$ остается некомпланарной и вращение от $\bar{a}$ к $\bar{b}$, видимое с конца $\bar{\Delta}$, не меняет направления. □

Свойства векторного произведения.

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$;
2. $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$;
3. $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$;
4. $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны.

Свойства 1,3,4 можно доказать как исходя из определения, так и с помощью координатной записи (проделайте это). Свойство 2 из определения извлечь трудно. В координатах оно доказывается так: нужно записать левую и правую часть в координатах и увидеть,что получится равенство.

Полезно подчеркнуть, что площадь параллелограмма, построенного не двух векторах, равна модулю их векторного произведения. Это следует из определения.

Задача 10. Известно. что площадь параллелограмма,построенно на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна 1. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$.

Решение. $S = \mid [2\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-3\bar{b}] \mid = \mid -6[\bar{a},\bar{b}] + [\bar{b},\bar{a}] = \mid -7[\bar{a},\bar{b}] \mid = 7.$

Задача 11. Найти координаты вектора, который перпендикулярен плоскости, проходящей через точки $A=(1,2,-1)$, $B=(3,2,0)$ и $C=(0,1,-1)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB}, \overline{AC}, [\overline{AB}, \overline{AC}]$. Ответ: (1,-1,-2).

Задача 12. Найти площадь треугольника с вершинами $A=(-1,0,2)$, $B=(3,-1,0)$, $C=(2,1,1)$.

Решение. Последовательно находим: $\overline{AB}, \overline{AC}, [\overline{AB}, \overline{AC}], S = \frac{1}{2} \mid [\overline{AB}, \overline{AC}] \mid$. Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{62}$

Задача 13. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $a=(x_1,y_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2)$.

Решение. Добавим третью координату : $\bar{a}=(x_1,y_1,0), \bar{b}=(x_2,y_2,0), [\bar{a},\bar{b}] = \left(0,0,\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$. Поэтому $S=\frac{1}{2} \mid [\bar{a},\bar{b}] \mid = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$.

Таким образом, площадь плоского треугольника равна модулю определителя матрицы, составленной из их координат. Можно придать смысл и знаку определителя: определитель положителен тогда и только тогда, когда вращение вдоль наименьшего угла от первого вектора ко второму происходит в положительном направлении.

8 Смешанное произведение

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число $(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}])$. Обозначение:$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$

Выясним, как смешанное произведение записывается в координатах.

Теорема 6. Если $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1), \bar{b}=(x_2,y_2,z_2), \bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. Расписать в координатах векторное и скалярное произведения. ☐

Свойства смешанного произведения.

1. При перестановке любых двух векторов смешанное проиведение меняет знак.
2. $\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\rangle = \langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{d}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\rangle$;
3. $\langle \alpha\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = \alpha\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;
4. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны $\Longleftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$.

Первое свойство получается из соответствующего свойства определителя третьего порядка. Свойства 2 – 4 можно вывести как из свойств определителей, так и из определения смешанного произведения. Например, четвертое свойство можно доказать так.
$\Longrightarrow$ Дано: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лежат в плоскости α. Возможны 2 случая:
1. $\bar{b} \| \bar{c}$, тогда их координаты пропорциональны, $[\bar{b}, \bar{c}] = \bar{0}$ и $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$;
2. $\bar{b} \nparallel \bar{c}$, тогда $[\bar{b}, \bar{c}] \perp \alpha$ и $[\bar{b}, \bar{c}] \perp a$, откуда опять следует, что $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$.
$\Longleftarrow$ Дано: $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = 0$. Проведем плоскость α через $\bar{b}$ и $\bar{c}$.
Тогда $[\bar{b}, \bar{c}] \perp \alpha$ и, т.к. $a \perp [\bar{b}, \bar{c}]$, то $\bar{a}$ лежит в α.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 7. Модуль смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}$, и $\bar{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Доказательство. $\mid \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle \mid = \mid (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) \mid = \mid \bar{a} \mid\mid [\bar{b}, \bar{c}] \mid\mid \cos\varphi \mid = Sh = V$, т.к. $\mid [\bar{b}, \bar{c}] \mid = S$ и $\mid \bar{a} \mid\mid \cos\varphi \mid = h$. См. рис. 14. ☐

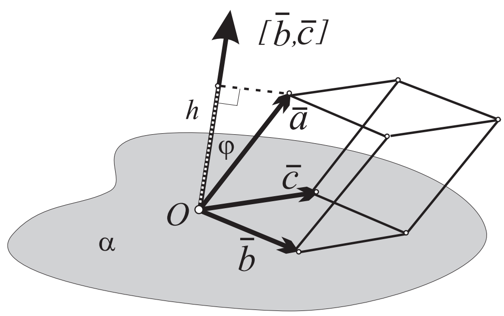

Рис. 14: Смешанное произведение равно объему

Отметим, что если $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, в противном случае – левая. Действительно, так как $(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) > 0$, то угол между векторами $\bar{a}$ и $[\bar{b}, \bar{c}]$ острый. Это означает, что вектор $\bar{a}$ смотрит в ту же сторону от плоскости α, что и вектор $[\bar{b}, \bar{c}]$.

Задача 14. Найти объем тетраэдра с вершинами $A = (1, 0, 1), B = (2, -1, 0)$, $C = (3, -1, 2)$ и $D = (0, -1, 1)$.

Решение. Находим $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, V = \frac{1}{6} \mid \langle \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \rangle \mid$. Ответ: $V = \frac{5}{6}$.

9 Координатные и параметрические уравнения кривых

Координатное уравнение кривой. Чтобы доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает кривую ℓ, нужно:

а) Доказать, что координаты любой точки на ℓ удовлетворяют уравнению;

б) Доказать, что координаты любой точки, не лежащей на ℓ не удовлетворяют уравнению.

(То же самое: если координаты точки удовлетворяют уравнению, то она лежит на ℓ).

Параметрические уравнения кривой.

Функции $\left\{ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right.$ задают кривую на плоскости следующим образом: фиксируем значение параметра t, получим два числа, или, что то же самое, точку на плоскости. Будем менять t. Тогда точка на плоскости будет двигаться и опишет некоторую кривую.

Задача 15. Постройте кривые $\left\{ \begin{array}{c} x = t + 1 \\ y = -t \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{c} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{c} x = \sin 2t \\ y = \cos 3t \end{array} \right.$.

Ответы: прямая, окружность, кривая Лиссажу, см. рис. 15.

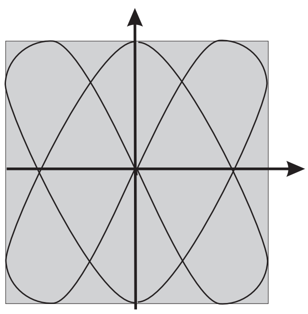

Рис. 15: Кривая Лиссажу

В пространстве одно координатное уравнение задает, как правило, поверхность, а параметрические уравнения – кривую. Например, уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ задает сферу, а уравнения $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ – винтовую линию.

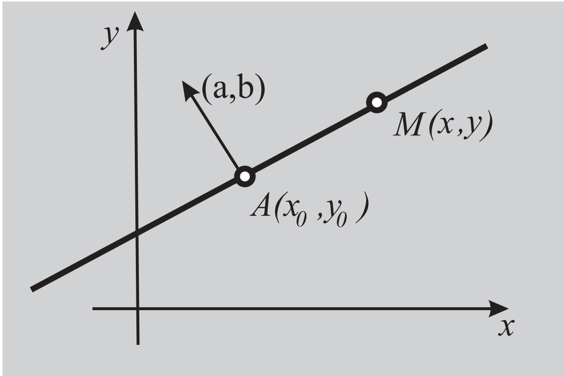

Рис. 16: Прямая ℓ проходит через точку A перпендикулярно вектору (a, b).

10 Уравнение прямой на плоскости и в пространстве

.

Теорема 8. Если числа a и b одновременно не равны 0, то уравнение $ax + by + c = 0$ задает на плоскости прямую.

Доказательство. Найдем точку $A = (x_0, y_0)$, удовлетворяющую этому уравнению. (Почему такая существует?). Тогда уравнение можно переписать в виде $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, т.к. $c = -ax_0 - by_0$.

Через точку (x_0, y_0) проводим прямую ℓ, перпендикулярную вектору $\bar{n} = (a, b)$. Утверждаем, что уравнение $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ задает прямую ℓ .

а) Пусть точка $M = (x, y)$ лежит на ℓ, см. рис. 16.

Тогда вектор $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ лежит на ℓ , поэтому $\overline{AM} \perp (a, b)$ и их скалярное произведение равно 0, т.е. $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

б) Пусть точка $M = (x, y)$ не лежит на ℓ , тогда $\overline{AM} \not\perp (a, b)$ и $a(x - x_0) + b(y - y_0) \neq 0$. □

Определение. Ненулевой вектор, перпендикулярный прямой ℓ , называется *нормальным*, ненулевой вектор, лежащий на ℓ , называется *направляющим.*

Следствие из доказательства. Вектор (a,b) нормален прямой $ax + by + c = 0$

Задача 16. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A = (1, 2)$ и $B = (-3, 1)$.

Решение. $\overline{AB} = (-4, -1)$, нормальный вектор $\bar{n} = (1, -4)$, уравнение: $(x - 1) - 4(y - 2) = 0$ или $x - 4y + 7 = 0$.

В пространстве все то же самое:

а) Уравнение $ax + by + cz + d = 0$ задает плоскость (доказать самим).

б) Вектор (a, b, c) нормален ей.

Задача 17. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A = (1, -1, 0), B = (2, 3, -1), C = (0, 2, 2)$,

Решение. $\overline{AB} = (1, 4, -1), \overline{AC} = (-1, 3, 2), \bar{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = (11, -1, 7)$, уравнение $11(x-1) - (y+1) + 7z = 0$, или $11x - y + 7z - 12 = 0$.

Теорема 9. Расстояние от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой $ax+by+c = 0$ задается формулой

$$d = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказательство. Возьмем на прямой точку $M = (x, y,)$. Тогда расстояние равно модулю проекции вектора $\overline{AM}$ на нормаль к прямой, т.е. $d =\mid (\overline{AM}, \bar{s}) \mid$, где $s = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$. Так как $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\bar{n} = (a, b)$, то

$$d = \left| \ \frac{a(x-x_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} \ \right| = \frac{\mid ax_0 + by_0 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\square$

Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $ax+by+cz+d = 0$ задается аналогичной формулой $\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (доказать самим).

Параметрические уравнения прямой.

Напомним, что радиус-вектор точки – это вектор, идущий в нее из начала координат. Координаты радиус-вектора совпадают с координатами его конца.

Пусть $\bar{r_0} = (x_0, y_0)$ – радиус-вектор фиксированной точки на прямой ℓ, $\bar{p} = (m, n)$ – ее направляющий вектор и $\bar{r} = (x, y)$ - радиус-вектор произвольной точки прямой. Тогда векторы $\bar{r} - \bar{r}_0$ и $\bar{p}$ параллельны. Поэтому $\bar{r} - \bar{r_0} = \bar{p}t$, т.е. $\bar{r} = \bar{r_0} + \bar{p}t$. Это - векторное уравнение прямой. Распишем его в координатах:

$x = x_0 + mt$

$y = y_0 + nt$

Это – параметрические уравнения прямой.

Задача 18. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A = (3, 1)$ и $B = (-1, 2)$.

Решение. $\bar{p} = \overline{AB} = (-4, 1)$. Уравнения:

$x = 3 - 4t$

$y = 1 + t$.

В пространстве то же самое: параметрические уравнения прямой имеют вид:

$x = x_0 + kt$

$y = y_0 + lt$
$z = z_0 + mt$,
где (x_0, y_0, z_0) – координаты любой точки на прямой, а (k, l, m) – координаты ее направляющего вектора.

Задача 19. Найти точку пересечения X прямой AB с плоскостью $2x - y + z - 4 = 0$, где $A = (1, 2, 0), B = (-3, 4, 1)$.

Решение. $\overline{AB} = (-4, 2, 1)$,
$x = 1 - 4t$
$y = 2 + 2t$
$z = t$
– параметрические уравнения прямой .
Подставляем: $2(1 - 4t) - (2 + 2t) + t - 4 = 0$ и находим t, а затем и x. Ответ: $X = (\frac{25}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{4}{9})$.

Задача 20. Написать параметрические уравнения прямой пересечения плоскостей $2x + y - z = 0$ и $3x + y + 2z - 1 = 0$.

Решение. Направляющий вектор $\bar{n} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$, где $\bar{n}_1 = (2, 1, -1)$ и $\bar{n} = (3, 1, 2)$. Чтобы найти какую-нибудь точку на прямой, полагаем $z = 0$ и находим x и y. Ответ:
$x = 1 + 3t$
$y = -2 - 7t$
$z = -t$

Координатные уравнения прямой в пространстве.

Теорема 10. Если числа k, l, m одновременно не обращаются в 0, то уравнения $\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m}$ задают в пространстве прямую с начальной точкой (x_0, y_0, z_0) и направляющим вектором (k, l, m).

Доказательство. Мы имеем систему из двух линейных уравнений, каждое из которых задает плоскость. Эти плоскости не параллельны (почему?), и поэтому пересекаются по прямой. Принадлежность точки (x_0, y_0, z_0) прямой проверяется подстановкой - получаются верные равенства $0 = 0 = 0$. Точка (x_0+k, y_0+l, z_0+m) также лежит на прямой (получаются равенства 1=1=1), поэтому соединяющий их вектор (k, l, m) является направляющим.

$\square$

Отметим, что уравнениям можно придать смысл и при обращении в 0 чисел k, l, m (но не одновременно).

В заключение заметим, что большинство задач по линейной части аналитической геометрии можно решить с помощью комбинаций рассмотренных приемов.

Например, как найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми? Сначала нужно найти направляющие векторы прямых и их векторное произведение. Оно служит нормалью к плоскости, которая проходит через одну прямую и параллельна второй прямой. Поэтому мы можем записать уравнение плоскости и затем найти расстояние до нее от какой-нибудь точки на первой прямой. Это число и будет ответом.

Другой пример. Как найти основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую в пространстве? Достаточно написать уравнение плоскости, которая проходит через данную точку и перпендикулярна данной прямой, а затем найти точку пересечения плоскости и прямой.

11 Сведения из линейной алгебры

В этом разделе очень кратко излагаются сведения из линейной алгебры, которые понадобятся в начале второго семестра.

1. Определение. Оператор: переводит вектора в вектора.

2. Определение. Линейный оператор: сумму переводит в сумму и произведение на число – в произведение на число.

3. Определение. Базис на плоскости: пара непараллельных векторов. В пространстве: тройка некомпланарных векторов.

Характеристическое свойство: любой вектор раскладывается по базису. Коэффициенты разложения (т.е. координаты вектора) определяются однозначно.

4. Определение. Матрица оператора пишется так: берем первый базисный вектор, применяем оператор, результат раскладываем по базису, координаты пишем в первый столбик, и.т.д.

Примеры.

5. Теорема: Действие оператора на вектор заключается в умножении матрицы оператора на столбец координат вектора, т.е. $\bar{y} = A\bar{x}$.

Доказательство. Для базисных векторов верно по определению матрицы оператора, для всех других следует из линейности.

Эта теорема объясняет, зачем нужны матрицы.

6. Проанализируем, что происходит при замене одного базиса на другой.

Определение. Матрица перехода P_{ef} от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{f}$ пишется так: раскладываем вектора базиса $\mathbf{f}$ по базису $\mathbf{e}$ и координаты пишем в соответствующие столбцы.

7. Теорема. Координаты $\bar{x}_e$ вектора $\bar{x}$ в базисе $\mathbf{e}$ и его же координаты $\bar{x}_f$ в базисе $\mathbf{f}$ связаны так: $\bar{x}_e = P_{ef}\bar{x}_f$.

Доказательство. Для векторов базиса $\mathbf{f}$ верно по определению матрицы перехода. Для всех других следует из линейности.

8. Теорема. Матрица A_e линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}$ связана с его же матрицей A_f в базисе $\mathbf{f}$ так:

$$A_f = P_{ef}^{-1} A_e P_{ef}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$. Тогда по вышеприведенным теоремам имеем:

$\bar{y}_e = P_{ef}\bar{y}_f, \bar{x}_e = P_{ef}\bar{x}_f, \bar{y}_e = A_f\bar{x}_e$. Это дает $\bar{y}_f = P_{ef}^{-1}A_eP_{ef}\bar{x}_f$. Сравним это равенство с равенством $\bar{y}_f = A_f\bar{x}_f$. Поскольку оба равенства справедливы для всех векторов $\bar{x}_f$, то $A_f = P_{ef}^{-1}A_eP_{ef}$.

9. Определение. Ненулевой вектор $\bar{x}$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, если $\mathcal{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

Примеры. Объяснить, почему хорошо иметь базис из собственных векторов.

10. Определение. Характеристический многочлен матрицы A есть определитель матрицы $A - \lambda E$.

Объяснить, почему это многочлен, и какой степени. Примеры.

11. Теорема. Характеристический многочлен не зависит от базиса.

Доказательство. $|A_f - \lambda E| = |P_{ef}^{-1}A_eP_{ef} - \lambda E| = |P_{ef}^{-1}A_eP_{ef} - \lambda P_{ef}^{-1}EP_{ef} = |P_{ef}^{-1}(A_e - \lambda E)P_{ef}| = |P_{ef}^{-1}||A_e - \lambda E||P_{ef}| = |A_e - \lambda E|$.

12. Следствие: Коэффициенты характеристического многочлена матрицы оператора не зависят от базиса.

13. Объяснить смысл коэффициентов (след, сумма диагональных миноров, определитель).

14. Теорема. λ есть собственное число некоторого собственного вектора оператора $\mathcal{A}$ тогда и только когда оно есть корень характеристического многочлена.

Доказательство. Если корень, то матрица системы $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$ вырождена, поэтому система имеет ненулевое решение. Обратно, если система имеет ненулевое решение, то определитель матрицы равен 0, т.е. λ есть корень.

12 Как решать аффинные задачи

Напомним, что аффинная система координат на плоскости задается началом и двумя независимыми векторами. Преобразование называется аффинным, если в некоторой аффинной система координат оно имеет вид $\bar{x} \to A\bar{x} + \bar{b}$, где $\bar{x}$ – столбец координат, A – невырожденная матрица порядка 2, а $\bar{b}$ – столбец свободных членов.

Свойства аффинных преобразований.

Любое аффинное преобразование

1. Переводит прямые в прямые;
2. Сохраняет параллельность прямых;
3. Сохраняет отношение, в котором точка делит отрезок;
4. Сохраняет отношение площадей.

Определение. Свойство фигуры называется аффинным, если оно сохраняется при аффинных преобразованиях. Например, свойство фигуры быть параллелограммом является аффинным, а свойство быть квадратом – нет.

Принцип решения аффинных задач. *Если задача про треугольник сформулирована в аффинных терминах, то ее достаточно решить для любого конкретного треугольника (например, прямоугольного или правильного).*

Список литературы

[1] Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // М., Наука, 1979.

[2] Беклемишев Л. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // М., Физматлит, 2000.

[3] Моденов П. С. Аналитическая геометрия // М., Наука, 1969.

[4] Постников М. М. Лекции по геометрии // Семестр I. М., Наука, 1983.

[5] Моденов П. С.,Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии // М., Наука, 1976.