Т. Г. НЕЗБАЙЛО

ТЕОРИЯ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(в символьном представлении)

Санкт-Петербург
КОРОНА-Век
2007

УДК 372.8 373 5
Н44

Условные обозначения:

hypergeom — гипергеометрическая функция;

C_n^k или $C(n, k)$ — биномиальная функция;

P — функция Похгаммера.

$$\sum_{k_{l\,l=1..m}=0}^{G(l)} f(k_1, k_2 .. k_m)$$ — означает вложение последовательных сумм с нижним индексом суммирования, меняющимся от $k_1 = 0$ до $k_m = 0$, и верхним значением от $G(1)$ до $G(m)$.

Например:

$$\sum_{k_{l\,l=1..4}=0}^{G(l)} f(k_1, k_2 .. k_4) = \sum_{k_1=0}^{G(1)} \sum_{k_2=0}^{G(2)} \sum_{k_3=0}^{G(3)} \sum_{k_4=0}^{G(4)} f(k_1, k_2 .. k_4)$$

и так далее.

$\delta(0) = 1,\ \delta(i) = 0,\ i = 1, 2, 3 .. N$ — символ Кронекера.

$\sinh(x)$ — гиперболическая функция;

$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ — обратная гиперболическая функция.

ISBN 978-5-903383-42-9

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Известно, что **основной теоремой алгебры** называется теорема, доказывающая, что заданное алгебраическое уравнение степени m имеет ровно m корней. Однако данная теорема **не определяет** формул для нахождения этих корней, поэтому задача нахождения корней алгебраического уравнения степени m является, по сути, **основной задачей алгебры** (во всяком случае, она являлась таковой с XVI по XIX век [1]). Так как все достижения в этом направлении, за более чем **пятьсот** лет интенсивного развития алгебры, характеризуются только тем, что получены (в радикалах) формулы для корней алгебраических уравнений не выше **четвертой** степени, то это означает, что данная проблема продолжает оставаться актуальной. Несмотря на то что Абель, а затем и Галуа доказали, что формул в радикалах для алгебраических уравнений степени выше чем четыре установить нельзя, тем не менее даже в аналитической форме в общем случае получить их не удалось. Безуспешные усилия в этом направлении привели к тому, что выдающимися математиками прошлого (Ньютон, Лейбниц, Коши, Эйлер, Лобачевский и др.) была решена более простая задача: построена теория **вычисления** корней алгебраических уравнений степени m [1], т. е. математики научились вычислять приближенно (с любой степенью точности) корни алгебраических уравнений, только в одной точке, т. е. при конкретных числовых значениях коэффициентов этого уравнения. Поскольку вычисления составляют основу арифметики, то теория **вычисления** корней алгебраических уравнений является, по сути, высшим достижением **арифметики**.

Задачей алгебры является **изучение символьных операций и преобразований**, поэтому тот факт, что задача нахождения корней алгебраических уравнений в символьной форме, так и **не решена** до настоящего времени, не позволяет считать эту науку совершенной.

Цель данной работы заключается в построении теории **нахождения формул для корней алгебраических уравнений степени m в символьной форме**. Формулы выписываются через гипергеометрические функции, поэтому, в силу того что эти функции представляют собой функциональные ряды, формулы для искомых корней определены только в строго установленной области изменения для коэффициентов исходного алебраического уравнения. При этом для решения данной проблемы потребовалось ввести новое математическое понятие — **уравнение *n*-образа**. Это уравнение является производным от исходного со степенью mn (т. е. намного больше чем степень исходного уравнения m). Однако уравнение n-образа, в отличие от исходного, уже содержит новый параметр n, являющийся произвольным натуральным числом. Затем, опираясь на достижения Ньютона, касающиеся особенностей преобразования его биномиальной формулы, посредством строго формальных алгебраических операций из уравнения n-образа генерируем m систем линейных алгебраических уравнений степени $m - 1$, каждая из которых содержит только один (отличный от других систем) корень исходного уравнения. Далее используя формулы Крамера находим в символьном представлении искомые формулы для корней исходного уравнения.

В работе приводятся не только общие формулы, но и примеры, доказывающие работоспособность излагаемой теории.

1. КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Как известно, способ решения квадратных уравнений был известен ученым Египетской и Вавилонской культур. Корни кубического уравнения впервые были в символьном виде установлены итальянским математиком Сципион дель Ферро в 1510 году, а в 1545 году тоже итальянский ученый Л. Феррари вывел формулы для вычисления в радикалах корней алгебраического уравнения четвертой степени. С тех пор научный мир сосредоточился на решении задачи нахождения в символьной форме корней уравнения пятой степени. Однако более чем трехсотлетние поиски ни к чему не привели. Максимально, что удалось только сделать, это преобразовать уравнение пятой степени

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \tag{1.1}$$

посредством равенства

$$y = \sum_{i=1}^{7} c_i x^i \tag{1.2}$$

к виду:

$$y^5 + b_1y + b_2 = 0. \tag{1.3}$$

Выполнил эту работу в 1763 году лорд Чирнгауз, именем которого теперь и называется подстановка (1.2).

В 1770 году основополагающими работами Лежандра и Вандермонда начинается новый этап развития теории решения алгебраических уравнений в радикалах. Лагранж, проведя тщательный математический анализ в этом направлении, обнаружил, что каждый из кубических радикалов в формуле дель Ферро можно представить в виде:

$$\frac{x_1 + \omega x_2 + \omega^3 x_3}{3},$$

где ω — любой корень кубический из единицы, x_k, $k = 1, 2, 3$ — корни кубического уравнения.

Он установил фундаментальный факт, заключающийся в том, что функция

$$z = (x_1 + \omega x_2 + \omega x_3)^3$$

может принять только два различных значения при любых перестановках его корней. Выполнив подобный анализ алгебраических уравнений четвертой степени, Лагранж пришел к функции

$$z = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

которая при любых перестановках x_k, $k = 1, \ldots, 4$ принимает только три различных значения, вследствие чего z является корнем алгебраического уравнения третьей степени, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты исходного уравнения четвертой степени. Руководствуясь приведенными результатами, Лагранж вводит понятие резольвенты исходного алгебраического уравнения в виде некоторой новой переменной

$$z_i = \sum_{k=1}^{m} \omega_i^k x_k, \; i = 1, \ldots, m,$$

где ω_i – i-й корень уравнения $\omega^m = 1$.

Из теории Лагранжа следовало, что если знать все z_i-чисел, то можно определить все корни исходного уравнения степени m. Лагранж доказывает, что если m простое число, то z_i является корнем уравнения степени $m - 1$, однако коэффициенты этого уравнения зависят от алгебраического уравнения степени $(m - 2)!$. Таким образом, для определения уравнения резольвенты при условии, что исходное алгебраическое уравнение является уравнением пятой степени, необходимо найти корни уравнения степени $3! = 6$, что делает эту задачу бессмысленной. Однако заслуга Лагранжа заключается в том, что этими работами он положил начало теории групп, опираясь на которую сначала Руффини, потом Абель и в конце Галуа доказали невозможность нахождения корней алгебраического уравнения выше степени четыре в радикалах.

Невозможность решения алгебраического уравнения в радикалах вызвала интенсивные поиски такого решения в форме аналитических функций. Наиболее серезных результатов, по нашему мнению, в этом направлении удалось добиться немецкому ученому Биркланду [6]. Он, изучая трехчленные алгебраические уравнения:

$$x^n = gx^s + \beta,$$

получил для их корней общие формулы в символьной форме, выраженные через гипергеометрические функции [3].

Из остальных можно отметить работы Эрмита, Ламберта, Лобачевского, Эйлера и (в частности) П. К. Лахтина, также разработавшего свой метод нахождения **корней** для определенных классов алгебраических уравнений через гипергеометрические функции [5].

2. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Несмотря на то что формулы для корней квадратного уравнения известны давно, изложим их нахождение, исходя из следующих соображений:

— излагаемый метод является общим и поэтому необходимо проверить его выполнение для случаев, когда искомый результат заведомо известен;

— представляет особый интерес установить известные формулы другим подходом;

— метод позволяет получить новые математические результаты, имеющие отношение к другим областям математики.

2.1. *n*-Образ квадратного уравнения

Пусть задано квадратное уравнение в приведенной форме:

$$x^2 = a_1 x + a_2, \tag{2.1}$$

где a_1, a_2 — произвольные, в общем случае комплексные числа. При этом $a_2 \neq 0$.

Ставится задача нахождения корней $x = \{x_1,\ x_2\}$ уравнения (2.1). С этой целью возведем обе части уравнения (2.1) в степень с натуральным числом n:

$$x^{(2n)} = (a_1 x + a_2)^n. \tag{2.2}$$

В соответствии с формулой бинома Ньютона:

$$(a_1 x + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^i a_1^k a_2^{(n-k)} x^k. \tag{2.3}$$

равенство (2.2) принимает вид:

$$x^{(2n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^i a_1^k a_2^{(n-k)} x^k. \tag{2.4}$$

Как видим, полученное выражение справа представляет собой полином степени n по x, в котором можно все значения x^2, x^3, x^4... x^n убрать, пользуясь формулой (2.1). Действительно, так как по определению имеет место формула (2.1), то умножая ее правую и левую часть на x, получим:

$$x^3 = a_1 x^2 + x a_2.$$

Подставляя в правую часть этого равенства значение (2.1), получим:

$$x^3 = (a_2 + a_1^2)x + a_1 a_2.$$

Совершенно аналогичным образом устанавливаем:

$$x^4 = a_1(2a_2 + a_1^2)x + a_2(a_2 + a_1^2),$$
$$x^5 = (3a_1^2 a_2 + a_2^2 + a_1^4)x + a_1 a_2(2a_2 + a_1^2)$$

и так далее.

Таким образом, подставляя полученные значения в (2.4), приводим его в общем случае к виду:

$$x^{(2n)} = A_1(n)x + A_2(n), \tag{2.5}$$

где $A_i(n)$, $i = 1, 2$ — многочлены коэффициентов a_i, $i = 1, 2$ степени $n + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. **Равенство (2.5) называется *n*-образом квадратного уравнения (2.1), а $A_i(n)$, $i = 1, 2$ — коэффициентами *n*-образа.**

2.2. Свойства *n*-образа

1) *n*-образ содержит все корни исходного уравнения. Действительно, с учетом (2.1) равенство (2.5) принимает вид:

$$(a_1 x + a_2)^n = A_1(n)x + A_2(n). \tag{2.6}$$

Отсюда с учетом формулы (2.3) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^i a_1^k a_2^{(n-k)} x^k = A_1(n)x + A_2(n).$$

Однако данное равенство тождественно выполняется для всех $x = \{x_1, x_2\}$ в силу определения коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2$.

2) Коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют начальным условиям:

$$A_1(0) = 0,\ A_2(0) = 1, \tag{2.7}$$
$$A_1(1) = a_1,\ A_2(1) = a_2. \tag{2.8}$$

Действительно, несмотря на то что n — натуральное число, равенство (2.2) выполняется также при $n = 0$, так как в этом случае оно превращается в тождество: $1 = 1$. Следовательно, уравнение n-образа (2.5) также должно выполняться. Принимая в этом равенстве $n = 0$, получаем:

$$1 = A_1(0)x + A_2(0).$$

Следовательно, выполнение этого равенства для всех $x = \{x_1, x_2\}$ и задает необходимость выполнения условий (2.7). Совершенно аналогичным образом принимая в (2.5) $n = 1$, получаем:

$$x^2 = A_1(1)x + A_2(1).$$

Так как полученное равенство должно быть равно по определению исходному (2.1), то отсюда следует необходимость выполнения условия (2.8).

3) Коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$A_1(n+1) = A_1(n)a_2 + A_1(n)a_1^2 + A_2(n)a_1, \tag{2.9}$$
$$A_2(n+1) = a_2(A_2(n) + A_1(n)a_1). \tag{2.10}$$

Доказательство: Принимая в (2.5) $n = n + 1$, получим:

$$x^{(2n+2)} = A_1(n+1)x + A_2(n+1).$$

Отсюда следует:

$$x^{(2n)}x^2 = A_1(n+1)x + A_2(n+1).$$

С учетом (2.5) имеем:

$$(A_1(n)x + A_2(n))x^2 = A_1(n+1)x + A_2(n+1).$$

Раскрывая скобки и учитывая (2.1), а также что

$$x^3 = (a_2 + a_1^2)x + a_1a_2,$$

в итоге получаем:

$$(A_1(n)a_2 + A_1(n)a_1^2 + A_2(n)a_1)x + a_2(A_2(n) + A_1(n)a_1) = A_1(n+1)x + A_2(n+1).$$

Так как данное равенство должно выполняться для всех $x = \{x_1, x_2\}$, то отсюда и следуют рекуррентные равенства (2.9), (2.10).

Примечание: Принимая в (2.9) и (2.10) $n = 0$, получим:

$$A_1(1) = A_1(0)a_2 + A_1(0)a_1^2 + A_2(0)a_1,$$
$$A_2(1) = a_2(A_2(0) + A_1(0)a_1).$$

Очевидно, эти равенства должны выполняться для условий (2.7), (2.8). Действительно, это имеет место, поскольку после их подстановки получаем тождества $a_1 = a_1$ и $a_2 = a_2$.

4) В том случае, если корни уравнения (2.1) известны, коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2$ определяются однозначно формулами:

$$A_1(n) = \frac{-x_1^{(2n)} + x_2^{(2n)}}{-x_1 + x_2}, \quad A_2(n) = \frac{-x_2^{(2n)}x_1 + x_2x_1^{(2n)}}{-x_1 + x_2}. \tag{2.11}$$

Действительно, в соответствии с свойством 1, оба корня уравнения (2.1) являются также корнями уравнения n-образа, поэтому принимая в уравнении n-образа (2.5) последовательно $x = x_1$, $x = x_2$, получим равенства:

$$x_1^{(2n)} = A_1(n)x_1 + A_2(n), \tag{2.12}$$

$$x_2^{(2n)} = A_1(n)x_2 + A_2(n). \tag{2.13}$$

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно $A_i(n)$, $i = 1, 2$, получим искомые формулы (2.11).

2.3. Определение явного вида коэффициентов *n*-образа

По сделанному предположению коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2$ представляют собой многочлены с очевидно биномиальными коэффициентами. В частности, используя начальные условия (2.7), (2.8) и рекуррентные соотношения (2.9), (2.10), получим:

$$A_1(1) = a_1,$$
$$A_1(2) = 2a_2a_1 + a_1^3,$$
$$A_1(3) = 3a_2^2a_1 + 4a_2a_1^3 + a_1^5,$$
$$A_1(4) = 4a_2^3a_1 + 10a_2^2a_1^3 + 6a_2a_1^5 + a_1^7,$$

$$A_2(1) = a_2,$$
$$A_2(2) = a_2(a_2 + a_1^2),$$
$$A_2(3) = a_2^3 + 3a_2^2a_1^2 + a_2a_1^4,$$
$$A_2(4) = a_2^4 + 6a_2^3a_1^2 + 5a_2^2a_1^4 + a_2a_1^6.$$

и так далее.

Изучение этих и других равенств позволяет установить следующие закономерности:

— для всех составляющих $a_1^s a_2^t$ показатели s, t удовлетворяют равенствам:

в формуле для $A_1(n)$ – $s + 2t = 2n - 1$;

в формуле для $A_2(n)$ – $s + 2t = 2n$.

При этом:

— в выражении для $A_1(n)$ степени у коэффициента a_2 уменьшаются с $n - 1$ до нуля через единицу, так что число слагаемых равно n. Степени у a_1 начинаются с единицы и увеличиваются до $2n - 1$ через 2;

— числовой коэффициент при $a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k-1)}$ определяется значением: C_{n+k}^{n-k-1};

— в выражении для $A_2(n)$ степени у коэффициента a_2 последовательно (через единицу) возрастают с единицы до n. Степени у a_1 последовательно убывают через 2 начиная с $2n - 2$ до нуля.

— числовой коэффициент при $a_1^{(2k)}a_2^{(n-k)}$ определяется значением: C_{n+k-1}^{n-k-1}.

Выявленных закономерностей достаточно, чтобы представить искомые значения коэффициентов n-образа в виде:

$$A_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1}\, a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k-1)} \quad (2.14)$$

$$A_2(n) = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{n-k-1}\, a_1^{(2k)}a_2^{(n-k)} \quad (2.15)$$

Докажем справедливость этих формул. Для начала убедимся, что выполняются начальные условия (2.7) и (2.8). Действительно:

$$A_1(0) := \sum_{k=0}^{-1} C_k^{-1-k}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(-1-k)} = 0 \qquad A_2(0) := \sum_{k=0}^{0} C_{-1+k}^{-1-k}\, a_1^{(2k)} a_2^{(-k)} = 1$$

$$A_1(1) := \sum_{k=0}^{0} C_{1+k}^{-k}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(-k)} = a_1 \qquad A_2(1) := \sum_{k=0}^{1} C_k^{-k}\, a_1^{(2k)} a_2^{(1-k)} = a_2$$

Таким образом, осталось доказать, что формулы (2.14), (2.15) выполняются для любых n. Для этой цели воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.9), (2.10).

Допустим, что формулы (2.14), (2.15) выполняются для любых n. Докажем, что они выполняются также для значения параметра $n + 1$. Благодаря (2.14), (2.15) имеем:

$$A_1(n+1) = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1+k}^{n-k}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k)} \quad (2.16) \qquad A_2(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+k}^{n-k}\, a_1^{(2k)} a_2^{(n+1-k)} \quad (2.17)$$

Подставляя эти значения в рекуррентные равенства (2.9), (2.10), мы должны получить тождество.

Действительно:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+k+1}^{n-k}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k)} = (a_2 + a_1^2) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k-1)} + \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{n-k-1}\, a_1^{(2k)} a_2^{(n-k)} \right) a_1, \qquad (2.18)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+k}^{n-k}\, a_1^{(2k)} a_2^{(n+1-k)} = a_2 \left(\sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{n-k-1}\, a_1^{(2k)} a_2^{(n-k)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1}\, a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k-1)} \right) a_1 \right).$$

Первое уравнение данной системы преобразуется к виду:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(C_{n+1+k}^{n-k} a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k)} - C_{n+k}^{n-k-1} a_1^{(2k+1)} a_2^{(n-k-1)} (a_2 + a_1^2) - C_{n+k-1}^{n-k-1} a_1^{(2k)} a_2^{(n-k)} a_1\right) \right) + a_1^{(2n+1)} = 0. \qquad (2.19)$$

Так как сумма ряда:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(C_{n+1+k}^{n-k}a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k)} - C_{n+k}^{n-k-1}a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k-1)}(a_2+a_1^2) - C_{n+k-1}^{n-k-1}a_1^{(2k)}a_2^{(n-k)}a_1)$$

равна $-a_1^{(2n+1)}$, то равенство (2.19) тождественно выполнено. Аналогично доказывается тождественность и второго равенства системы (2.18). Таким образом, формулы (2.14), (2.15) являются истинными. Следовательно в общем виде уравнение n-образа (2.5) можно записать в виде:

$$x^{(2n)} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1}a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k-1)}\right)x + \sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{n-k-1}a_1^{(2k)}a_2^{(n-k)}. \tag{2.20}$$

2.4. Определение общих формул для корней квадратного уравнения (2.1)

Вычисляя значения полученных выражений для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $l = 1,\ 2$ (2.14), (2.15), получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1}a_1^{(2k+1)}a_2^{(n-k-1)} = \frac{a_2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\sinh\left(2n\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{1+\frac{a_1^2}{4a_2}}}, \tag{2.21}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+k-1}^{n-k-1}a_1^{(2k)}a_2^{(n-k)} = a_2^n\left(\cosh\left(2n\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) - \frac{a_1\sinh\left(2n\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{4a_2+a_1^2}}\right). \tag{2.22}$$

Таким образом, уравнение n-образа (2.20) принимает вид: (2.23)

$$x^{(2n)} = \frac{a_2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) x}{\sqrt{1+\frac{a_1^2}{4a_2}}} + a_2^n \left(\cosh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) - \frac{a_1 \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{4a_2 + a_1^2}}\right).$$

Введем в рассмотрение некоторый параметр ω, являющийся корнем алгебраического уравнения

$$\omega^2 = 1 \qquad (2.24)$$

и принимающий значения: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$. Очевидно, что если имеет место равенство (2.24), то справедливы также и более общие равенства: $\omega_i^{(2n)} = 1$, $i = 1, 2$, где n — натуральное число. В этом случае равенство (2.23) формально можно записать следующим образом: (2.25)

$$(\omega_i x)^{(2n)} = \frac{a_2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) x}{\sqrt{1+\frac{a_1^2}{4a_2}}} + a_2^n \left(\cosh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) - \frac{a_1 \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{4a_2 + a_1^2}}\right),$$

$$i = 1,\ 2.$$

Поскольку каждому значению ω_i, $i = 1, 2$ можно сопоставить свое значение корня $x = \{x_1, x_2\}$, то (2.25) представим в виде: (2.26)

$$(\omega_i x_i)^{(2n)} = \frac{a_2^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) x}{\sqrt{1+\frac{a_1^2}{4a_2}}} + a_2^n \left(\cosh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) - \frac{a_1 \sinh\left(2n \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{4a_2 + a_1^2}}\right),$$

$$i = 1, 2.$$

В силу произвольности параметра n формально расширим его область определения на действительные числа, т. е. примем в этом уравнении: $n = \frac{1}{2}$. Тогда (2.26) станет равным:

$$\omega_i x_i = \frac{2\sinh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) x_i}{\sqrt{4+\frac{a_1^2}{a_2}}} + a_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\cosh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right) - \frac{a_1 \sinh\left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)\right)}{\sqrt{4a_2 + a_1^2}}\right), \quad i = 1, 2.$$

Как видим, появились два алгебраических уравнения первого порядка относительно искомых неизвестных значений $\{x_1, x_2\}$. Решая, получим:

$$x_i = \frac{2a_2}{\omega_i \cdot \sqrt{4a_2 + a_1^2} - a_1}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, с учетом равенств: $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, получаем искомые формулы:

$$x_1 = \frac{2a_2}{\sqrt{4a_2 + a_1^2} - a_1}, \quad x_2 = \frac{2a_2}{-\sqrt{4a_2 + a_1^2} - a_1}. \tag{2.27}$$

Непосредственная проверка показывает, что полученные значения являются корнями уравнения (2.1).

2.5. Приложения

Полученные математические результаты дают возможность установить еще один способ нахождения некоторых биномиальных конечных сумм. Действительно, пусть задано специальное квадратное уравнение:

$$(x - x_0)^2 = 0. \tag{2.28}$$

В раскрытой и соответствующей (2.1) форме оно принимает вид:

$$x^2 = 2xx_0 - x_0^2.$$

В этом случае:

$$a_1 = 2x_0, \;\; a_2 = -x_0^2. \tag{2.29}$$

Воспользуемся формулами (2.11):

$$A_1(n) = \frac{-x_1^{(2n)} + x_2^{(2n)}}{-x_1 + x_2}, \quad A_2(n) = \frac{-x_2^{(2n)}x_1 + x_2x_1^{(2n)}}{-x_1 + x_2}. \tag{2.30}$$

В силу определения (2.2) имеют место равенства:

$$x_1^{(2n)} = (a_1x_1 + a_2)^n, \quad x_2^{(2n)} = (a_1x_2 + a_2)^n.$$

Подставляя их в (2.30), получим:

$$A_1(n) = \frac{-(a_1x_1 + a_2)^n + (a_1x_2 + a_2)^n}{-x_1 + x_2}, \quad A_2(n) = \frac{-(a_1x_2 + a_2)^n x_1 + x_2(a_1x_1 + a_2)^n}{-x_1 + x_2}. \tag{2.31}$$

Поскольку уравнение (2.28) имеет два одинаковых корня $x_1 = x_2 = x_0$, то из (2.31) следуют очевидные равенства:

$$A_1(n) = \left[\lim_{x_2 \to x_1} \frac{-(a_1x_1 + a_2)^n + (a_1x_2 + a_2)^n}{-x_1 + x_2}\right]_{x_1 = x_0} = (a_1x_0 + a_2)^{(-1+n)} n a_1,$$

$$A_2(n) = \left[\lim_{x_2 \to x_1} \frac{-(a_1x_2 + a_2)^n x_1 + x_2(a_1x_1 + a_2)^n}{-x_1 + x_2}\right]_{x_1 = x_0} = \frac{(a_1x_0 + a_2)^n a_1x_0 + (a_1x_0 + a_2)^n a_2 - (a_1x_0 + a_2)^n a_1 n x_0}{a_1x_0 + a_2}.$$

Подставляя сюда значения (2.29), получим:

$$A_1(n) = 2x_0^{(2n-1)} n \quad A_2(n) = -x_0^{(2n)}(2n - 1). \tag{2.32}$$

Подставим значения (2.29) также и в значения рядов (2.14), (2.15). Тогда получим:

$$A_1(n) = 2(-1)^n x_0^{(-1+2n)} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1} (-1)^{(k+1)} 4^k,$$

$$A_2(n) = (-1)^n x_0^{(2n)} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+k-1}^{n-k-1} 4^k.$$

Сравнивая с (2.32), в итоге получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1} (-1)^{(k+1)} 4^k = (-1)^n n,$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+k-1}^{n-k-1} 4^k = (-1)^{(n+1)}(2n - 1).$$

Таким образом, полученные формулы дают еще один новый способ нахождения конечных сумм.

3. КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть задано кубическое уравнение в приведенной форме:

$$x^3 = a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad a_3 \neq 0, \tag{3.1}$$

где $a_i = 1, 2, 3$ — заданные действительные или комплексные числа.

Ставится задача нахождения всех корней $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ алгебраического уравнения (3.1).

Решение этой задачи производится классическим методом, изложенным в [1]. Наша задача заключается в получении аналогичных результатов совершенно новым подходом.

3.1. Преобразования

В связи с тем, что подстановки, упрощающие вид исходного алгебраического уравнения (3.1), также серьезно упрощают и его решение, то имеет смысл изучить вопрос определения таких подстановок.

a) Подстановка

$$x = \frac{a_1}{3} + y \tag{3.2}$$

приводит уравнение (3.1) к виду:

$$y^3 = b_1y + b_2, \tag{3.3}$$

где

$$b_1 = a_2 + \frac{a_1^3}{3} \quad b_2 = a_3 + \frac{a_1a_2}{3} + \frac{2a_1^3}{27}. \tag{3.4}$$

b) Преобразованием Чирнгауза

$$y = x^2 + Ax + B, \tag{3.5}$$

где параметр A является корнем алгебраического уравнения:

$$(3a_2 + a_1^2)\,A^2 + (9a_3 + 2a_1^3 + 7a_1a_2)\,A + a_1^4 + a_2^2 + 4a_1^2a_2 + 6a_1a_3 = 0, \tag{3.6}$$

а

$$B = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(a_1^2 + A\,a_1 + 2a_2), \tag{3.7}$$

исходное уравнение (3.1) преобразуется к виду:

$$y^3 = C, \tag{3.8}$$

$$C = a_3A^3 + 3a_1a_3A^2 + (3a_1^2a_3 + 3a_2a_3 + 6Ba_3)\,A + B^3 + 3Ba_1a_3 + a_3^2 + a_1^3a_3 + 2a_1a_2a_3. \tag{3.9}$$

Как видим, в данном случае фактически приведен аналог классического алгоритма к нахождению корней уравнения (3.1). Действительно, поскольку кубическое уравнение (3.8) имеет корни:

$$y_1 = C^{\left(\frac{1}{3}\right)},\quad y_2 = \frac{C^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{2(-1 + I\sqrt{3})},\quad y_3 = \frac{C^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{2(-1 - I\sqrt{3})}. \tag{3.10}$$

где I — мнимая единица, то подставляя последовательно эти значения в (3.5), получим три алгебраических квадратных уравнения:

$$y_i = x^2 + Ax + B,\ \ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.11}$$

Поскольку коэффициент A определяется тоже из алгебраического уравнения второго порядка, то в общем случае получим шесть алгебраических уравнений:

$$y_i = x^2 + A_jx + B_j,\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ j = 1,\ 2. \tag{3.12}$$

Эти уравнения позволяют определить 12 значений $x = \{x_1,\ x_2..x_{12}\}$, из которых отбираются только три значения, удовлетворяющие условиям теоремы Виета для кубического уравнения (3.1). Эти значения и будут являться искомыми корнями уравнения (3.1).

3.2. *n*-Образ кубического уравнения

Правую и левую части кубического уравнения (3.1) возведем в степень n:

$$x^{(3n)} = (a_1x^2 + a_2x + a_3)^n. \tag{3.13}$$

Алгебраическое уравнение (3.13) является уравнением степени $3n$ и заведомо содержит все корни исходного кубического уравнения (3.1). Правая часть этого уравнения при условии, что n — натуральное число, является алгебраическим уравнением степени $2n$ и принимает вид:

$$(a_1x^2 + a_2x + a_3)^n = \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{(n-i_1-i_2)} x^{(2i_1+i_2)}. \tag{3.14}$$

Следовательно, она может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{(n-i_1-i_2)} x^{(2i_1+i_2)} = \sum_{i=0}^{2n} p_i x^i. \tag{3.15}$$

Здесь p_i — функции коэффициентов a_1, a_2, a_3, определяемые путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x^i, $i = 0,\ 1,\ 2\ ..\ 2n$ правой и левой частей этого алгебраического уравнения.

С учетом исходного уравнения (3.1) можем получить:

$$x^3 = a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$x^4 = x^3x = (a_1x^2 + a_2x + a_3)\,x = a_1x^3 + a_2x^2 + xa_3 = a_1(a_1x^2 + a_2x + a_3) + a_2x^2 + xa_3 =$$
$$= (a_2 + a_1^2)\,x^2 + (a_3 + a_1a_2)\,x + a_1a_3.$$

Следовательно,

$$x^4 = (a_2 + a_1^2)\,x^2 + (a_3 + a_1a_2)\,x + a_1a_3. \tag{3.16}$$

Совершенно аналогичным образом получаем:

$$x^5 = (a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,x^2 + (a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)\,x + a_1^2a_3 + a_2a_3, \tag{3.17}$$

$$x^6 = (2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_2^2 + a_1^4)\,x^2 + (a_1^2a_3 + 2a_2a_3 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2)\,x + a_1^3a_3 + 2a_1a_2a_3 + a_3^2, \tag{3.18}$$

и так далее.

Таким образом, все значения x^3, x^4, x^5, x^6, ... и так далее могут быть соответственно заменены в правой части равенства (3.15) их значениями (3.1), (3.16), (3.17), (3.18), которая в этом случае может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{3n-1} p_i x^i = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3(a_1x^2 + a_2x + a_3) + p_4((a_2 + a_1^2)\,x^2 + (a_3 + a_1a_2)\,x + a_1a_3) +$$
$$+ p_5((a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,x^2 + (a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)\,x + a_1^2a_3 + a_2a_3) +$$
$$+ p_6((2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_2^2 + a_1^4)\,x^2 + (a_1^2a_3 + 2a_2a_3 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2)\,x + a_1^3a_3 + 2a_1a_2a_3 + a_3^2)\ldots$$

Следовательно, раскрывая скобки и производя перегруппировку коэффициентов при всех степенях x^k, $k = 0, 1, 2$, в общем случае получим:

$$\sum_{i=0}^{2n} p_i x^i = A_1(n)\,x^2 + A_2(n)\,x + A_3(n). \tag{3.19}$$

Здесь, с учетом определения p_i — как функций коэффициентов a_1, a_2, a_3, получаем, что $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ — также являются функциями коэффициентов a_1, a_2, a_3.

Так как левая часть равенства (3.19) определяется (3.15) и далее (3.14) и (3.13), то равенство (3.19) приводит к представлению:

$$x^{(3n)} = A_1(n)\,x^2 + A_2(n)\,x + A_3(n) \tag{3.20}$$

или к эквивалентному:

$$(a_1x^2 + a_1x + a_3)^n = A_1(n)\,x^2 + A_2(n)\,x + A_3(n). \tag{3.21}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. **Алгебраическое уравнение (3.20) (или эквивалентное ему (3.21)) называется n-образом кубического уравнения (3.1), а $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ называются коэффициентами n-образа.**

Вычисление коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $i = 1, 2, 3$ производится с использованием уравнений (3.20) (или (3.21)), с учетом исходного уравнения (3.1).

▶ **Пример:** Вычислить значения коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $i=1, 2, 3$ для случаев $n=1,2$.

Р е ш е н и е: Принимая в (3.21) $n = 1$, получим:

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = A_1(1)\,x^2 + A_2(1)\,x + A_3(1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2$, устанавливаем:

$$A_1(1) = a_1,\ A_2(1) = a_2,\ A_3(1) = a_3. \tag{3.22}$$

Снова принимая в (3.21) $n = 2$, получим:

$$(a_1x^2 + a_2x + a_3)^2 = A_1(2)\,x^2 + A_2(2)\,x + A_3(2).$$

Раскрывая скобки в левом выражении, получим:

$$a_1^2x^4 + 2a_1x^3a_2 + (2a_1a_3 + a_2^2)\,x^2 + 2a_2xa_3 + a_3^2 = A_1(2)\,x^2 + A_1(2)\,x + A_3(2). \tag{3.23}$$

Исходное уравнение (3.1), как ранее было установлено, позволяет выписать равенство (3.16), поэтому:

$$x^3 = a_1x^2 + a_2x + a_3,$$
$$x^4 = (a_2 + a_1^2)\,x^2 + (a_3 + a_1a_2)\,x + a_1a_3.$$

Подставляя эти равенства в (3.23), имеем:

$$(2a_1a_3 + a_2 + 3a_1^2a_2 + a_1^4)\,x^2 + (2a_2 + a_1^2)(a_1a_2 + a_3)\,x + a_3(a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2) = A_1(2)\,x^2 + A_2(2)\,x + A_3(2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2$, устанавливаем:

$$A_1(2) = 2a_1a_3 + a_2^2 + 3a_1^2a_2 + a_1^4, \tag{3.24}$$
$$A_2(2) = (2a_2 + a_1^2)(a_1a_2 + a_3),$$
$$A_2(3) = a_3(a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2).$$

Задача решена. Совершенно аналогичным образом можно получать значения коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $i = 1, 2, 3$ и для других значений параметра n.

3.3. Свойства *n*-образа

СВОЙСТВО 1. **Уравнение n-образа имеет степень $3n$ (или $2n$) и содержит все корни исходного уравнения (3.1).**

Данное свойство очевидно, так как уравнение n-образа (3.20) (или (3.21)) следует из уравнения (3.13), для которого это условие заведомо выполнено, без использования других условий на определение корней (3.1), кроме задаваемого исходным уравнением (3.1).

СВОЙСТВО 2. **Коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ определяются рекуррентными соотношениями:** (3.25)

$$\boldsymbol{A_1(n+1) = (a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)A_1(n) + (a_1^2 + a_2)A_2(n) + A_3(n)a_1,}$$
$$\boldsymbol{A_2(n+1) = (a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)A_1(n) + (a_1a_2 + a_3)A_2(n) + A_3(n)a_2,}$$
$$\boldsymbol{A_3(n+1) = a_3(a_1^2 + a_2)A_1(n) + A_2(n)a_1a_3 + A_3(n)a_3.}$$

Доказательство: Принимая в (3.20) $n = n + 1$, получаем:

$$x^{(3n+3)} = A_1(n+1)x^2 + A_2(n+1)x + A_3(n+1).$$

Тогда с учетом (3.20) и (3.1) отсюда следует:

$$(A_1(n)x^2 + A_2(n)x + A_3(n))(a_1x^2 + a_2x + a_3) = A_1(n+1)x^2 + A_2(n+1)x + A_3(n+1).$$

Раскрывая скобки в левой части этого равенства и далее приводя подобные члены, получим:

$$((a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)A_1(n) + (a_1^2 + a_2)A_2(n) + A_3(n)a_1)x^2 +$$
$$+((a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)A_1(n) + (a_1a_2 + a_3)A_2(n) + A_3(n)a_2)x + a_3(a_1^2 + a_1)A_1(n) + A_2(n)a_1a_2 + A_3(n)a_3 =$$
$$= A_1(n+1)x^2 + A_2(n+1)x + A_3(n+1).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2$, получаем формулы (3.25).

Эти формулы позволяют легко получать все значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ Действительно, принимая, например, в формулах (3.25) $n = 1$, получаем:

$$A_1(2) = (a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)A_1(1) + (a_1^2 + a_2)A_2(1) + A_3(1)a_1,$$
$$A_2(2) = (a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)A_1(1) + (a_1a_2 + a_3)A_2(1) + A_3(1)a_1,$$
$$A_3(2) = a_3(a_1^2 + a_2)A_1(1) + A_2(1)a_1a_3 + A_3(1)a_3.$$

С учетом (3.22) имеем:

$$A_1(2) = 2a_1a_3 + a_2^2 + 3a_1^2a_2 + a_1^4,$$
$$A_2(2) = (2a_2 + a_1^2)(a_1a_2 + a_3),$$
$$A_3(2) = a_3(a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2).$$

Сравнивая полученные значения с (3.24), устанавливаем, что они совпадают. Таким образом, на примере подтверждена справедливость формул (3.25).

СВОЙСТВО 3. **Существует строгая связь между коэффициентами n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ и корнями алгебраического уравнения (3.1), а именно: если известны три корня алгебраического уравнения (3.1) — $x = \{x_i, i = 1, 2, 3\}$, то коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ определяются однозначно.**

Действительно, в соответствии с свойством 1, корни исходного уравнения (3.1) заведомо являются также корнями уравнения n-образа. Следовательно,

$$x_i^{(3n)} = A_1(n)\,x_i^2 + A_2(n)\,x_i + A_3(n), \;\; i = 1,\, 2,\, 3.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, при условии что $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_3$, получим:

$$A_1(n) = \frac{(x_2 - x_3)\,x_1^{(3n)} + (x_3 - x_1)\,x_2^{(3n)} + (-x_2 + x_1)\,x_3^{(3n)}}{(x_2 - x_3)(-x_2 + x_1)(x_1 - x_3)}, \tag{3.26}$$

$$A_2(n) = \frac{-(x_2 - x_3)(x_2 + x_3)\,x_1^{(3n)} + (x_1 - x_3)(x_1 + x_3)\,x_2^{(3n)} - (-x_2 + x_1)(x_1 + x_2)\,x_3^{(3n)}}{(x_2 - x_3)(-x_2 + x_1)(x_1 - x_3)},$$

$$A_3(n) = \frac{x_2x_3(x_2 - x_3)\,x_1^{(3n)} - x_1x_3(x_1 - x_3)\,x_2^{(3n)} + x_1x_2(-x_2 + x_1)\,x_3^{(3n)}}{(x_2 - x_3)(-x_2 + x_1)(x_1 - x_3)}.$$

Полученные формулы и доказывают наличие строгой связи между значениями коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\, 2,\, 3$ и корнями $x = \{x_i,\; i = 1,\, 2,\, 3\}$ исходного алгебраического уравнения (3.1).

Подставляя полученные формулы (3.26) в рекуррентные соотношения (3.25), получим новые три соотношения между корнями алгебраического уравнения (3.1), отличные от определяемых теоремой Виета, так как они будут содержать произвольный параметр n. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $n = 1$ эти формулы совпадают с соотношениями, определяемыми теоремой Виета для кубического уравнения (3.1).

3.4. Определение общих формул для коэффициентов *n*-образа

Так как в соответствии с свойством 3 была доказана прямая связь между значениями коэффициентов n-образа и корнями исходного уравнения (3.1), то крайне важной является задача определения общих формул представления для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\, 2,\, 3$.

Вычислим, используя рекуррентные соотношения (3.25), значения для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

$A_1(1) = a_1,\ A_2(1) = a_2,\ A_3(1) = a_3.$

$A_1(2) = 2a_1a_3 + a_2^2 + 3a_1^2a_2 + a_1^4.$

$A_2(2) = 2a_2a_3 + a_1^2a_3 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2.$

$A_3(2) = a_3^2 + a_1^3a_3 + 2a_1a_2a_3.$

$A_1(3) = 3a_1a_3^2 + 3a_3a_2^2 + 12a_3a_1^2a_2 + 5a_3a_1^4 + 10a_1^3a_2^2 + 6a_1^5a_2 + a_1^7 + 4a_1a_2^3.$

$A_2(3) = 3a_1^2a_3^2 + 9a_1a_3a_2^2 + 8a_1^3a_3a_2 + a_1^5a_3 + 6a_1^2a_2^3 + 5a_1^4a_2^2 + a_1^6a_2 + a_2^4 + 3a_2a_3^2.$

$A_3(3) = 4a_1^3a_3^2 + 6a_3a_1^2a_2^2 + 5a_3a_1^4a_2 + a_3a_1^6 + 6a_1a_2a_3^2 + a_3a_2^3 + a_3^3.$

$A_1(4) = a_1^{10} + a_2^5 + 30a_3^2a_1^2a_2 + 60a_3a_1^3a_2^2 + 42a_3a_1^5a_2 + 20a_3a_1a_2^3 + 4a_1a_3^3 + 6a_3^2a_2^2 + 15a_3^2a_1^4 + 8a_3a_1^7 +$
$+ 28a_1^6a_2^2 + 9a_1^8a_2 + 35a_1^4a_2^3 + 15a_1^2a_2^4.$

$A_2(4) = 6a_1^2a_3^3 + a_1^8a_3 + 6a_1^5a_3^2 + 5a_2^5a_1 + 20a_1^3a_2^4 + 5a_2^4a_3 + 21a_1^5a_2^3 + a_1^9a_2 + 8a_1^7a_2^2 + 24a_1a_3^2a_2^2 +$
$+ 30a_1^3a_3^2a_2 + 45a_1^4a_3a_2^2 + 14a_1^6a_3a_2 + 40a_1^2a_3a_2^3 + 4a_2a_3^3.$

$A_3(4) = a_3^4 + 30a_3^2a_1^2a_2^2 + 30a_3^2a_1^4a_2 + 12a_1a_2a_3^3 + 21a_3a_1^5a_2^2 + 8a_3a_1^7a_2 + 20a_3a_1^3a_2^3 + 5a_3a_1a_2^4 +$
$+ 10a_1^3a_3^3 + 7a_3^2a_1^6 + a_3a_1^9 + 4a_3^2a_2^3.$

Анализируя вычисленные значения для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, устанавливаем, что в общей форме эти коэффициенты определяются суммой слагаемых вида $B(k_1, k_2, k_3)$ $a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}$, где $B(k_1, k_2, k_3)$ — некоторый числовой коэффициент, являющийся целым числом, а k_i, $i = 1, 2, 3$ показатели степени.

При этом выясняется следующая закономерность:
если ввести комбинированный параметр:

$$\mathrm{K}(n) = k_1 + 2k_2 + 3k_3, \tag{3.27}$$

то для всех слагаемых образующих коэффициент $A_1(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 3n - 2, \tag{3.28}$$

для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_2(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 3n - 1, \tag{3.29}$$

и для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_3(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 3n. \tag{3.30}$$

Таким образом, показатели слагаемых $a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}$ для коэффициента $A_1(n)$ удовлетворяют формуле:

$$3n - 2 = k_1 + 2k_2 + 3k_3.$$

Отсюда следует, что

$$k_1 = 3n - 2 - 2k_2 - 3k_3. \tag{3.31}$$

Поскольку параметр k_1, принимая значение, равное нулю, определяет при этом максимальное значение параметра $k_{2,\,\max}$, то из этого равенства получим:

$$0 = 3n - 2 - 2k_{2,\,\max} - 3k_3.$$

Таким образом,

$$k_{2,\,\max} = \left[\frac{3n - 2 - 3k_3}{2}\right]. \tag{3.32}$$

Здесь квадратные скобки означают выполнение операции антье, т. е. выделения целой части из дробного числа.

Совершенно аналогичным образом, используя формулы (3.27)—(3.30), получаем, что:

1) для коэффициента $A_2(n)$

$$k_1 = 3n - 1 - 2k_2 - 3k_3 \quad k_{2,\,\max} = \left[\frac{3n - 1 - 3k_3}{2}\right]. \tag{3.33}$$

2) для коэффициента $A_3(n)$

$$k_1 = 3n - 2k_2 - 3k_3 \quad k_{2,\,\max 1} = \left[\frac{3n - 3k_3}{2}\right]. \tag{3.34}$$

При этом поскольку $k_{2,\,\max}$ не может быть меньше единицы, то коэффициент k_3 определяется из формулы:

$$3n - 3k_3 = 2Z,$$

где Z — целое число и ноль. Таким образом, область изменения k_3 определяется интервалом от 1 до n.

Следовательно, общий вид искомых коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ с учетом приведенных рассуждений и опираясь на формулу (3.14) лучше всего искать в виде:

$$A_i(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{k_{2,\,\max}} B_i(n, k_2, k_3)\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} \quad i = 1, 2, \tag{3.35}$$

$$A_3(n) = \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_{2,\,\max 1}} B_3(n, k_2, k_3)\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3}.$$

Здесь

$$B_i(n,\ k_2,\ k_3) = C_{c_{i,0}n + \left(\sum\limits_{j=2}^{3} c_{i,j}\,k_j\right) + c_{i,4}}^{d_{i,0}n + \left(\sum\limits_{j=2}^{3} d_{i,j}\,k_j\right) + d_{i,4}} \cdot C_{e_{i,0}n + \left(\sum\limits_{j=2}^{3} e_{i,j}\,k_j\right) + e_{i,4}}^{q_{i,0}n + \left(\sum\limits_{j=2}^{3} q_{i,j}\,k_j\right) + q_{i,4}},$$

где $c_{i,\,0}$, $c_{i,\,j}$, $c_{i,\,4}$, $d_{i,\,0}$, $d_{i,\,j}$, $d_{i,\,4}$, $e_{i,\,0}$, $e_{i,\,j}$, $e_{i,\,4}$, $q_{i,\,0}$, $q_{i,\,j}$, $q_{i,\,4}$ — целые числа, которые требуется определить.

С учетом полученных формул (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) формулы для искомых коэффициентов (3.35) принимают вид:

$$A_1(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-2-3k_3}{2}\right]} B_1(n,\ k_2,\ k_3)\, a_1^{(3n-2-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}, \tag{3.36}$$

$$A_2(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-1-3k_3}{2}\right]} B_2(n,\ k_2,\ k_3)\, a_1^{(3n-1-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}, \tag{3.37}$$

$$A_3(n) = \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-3k_3}{2}\right]} B_3(n,\ k_2,\ k_3)\, a_1^{(3n-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}. \tag{3.38}$$

Таким образом, задача сводится к определению числовых коэффициентов $c_{i,\,0}$, $c_{i,\,j}$, $c_{i,\,4}$, $d_{i,\,0}$, $d_{i,\,j}$, $d_{i,\,4}$, $e_{i,\,0}$, $e_{i,\,j}$, $e_{i,\,4}$, $q_{i,\,0}$, $q_{i,\,j}$, $q_{i,\,4}$ — биномиальных коэффициентов.

Для нахождения коэффициентов $B_i(n,\ k_2,\ k_3)$ воспользуемся методом аналогии. С этой целью рассмотрим аналогичное представление коэффициентов для алгебраического уравнения второго порядка. В частности, для коэффициента $A_1(n)$ искомое значение $B_1(n, k_2)$ определяется формулой:

$$B_1(n, k_2) = C_{2n-k_2-1}^{k_2},$$

а для коэффициента $A_2(n)$ искомое значение $B_2(n, k_2)$ равно:

$$B_2(n, k_2) = C_{2n-k_2-2}^{k_2}.$$

Так как инвариант для слагаемых $B_1(n, k_2)a_1^{k_1}a_2^{k_2}$ коэффициента $A_1(n)$ равен:

$$k_1 + 2k_2 = 2n - 1,$$

а для слагаемых $B_2(n, k_2)a_1^{k_1}a_2^{k_2}$ коэффициента $A_2(n)$:

$$k_1 + 2k_2 = 2n - 2,$$

то по аналогии интуитивный анализ значения функции $B_1(n, k_2, k_3)$ показывает, что так же как и в случае с показателями слагаемых $B_i(n, k_2, k_3)a_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}$, используя закон симметрии, необходимо принять:

$$B_1(n, k_2, k_3) = C_{K_1}^{c_1k_2+c_2k_3+c_3}\, C_{c_1k_2+c_2k_3+c_3}^{k_2},$$

где c_1, c_2 — искомые целые числа, а параметр K_1 определяется формулой для k_1 из уравнения для инварианта, у которой коэффициенты при k_2 и k_3 меньше на единицу.

Таким образом, с учетом (3.31) получим, что

$$K_1 = 3n - 2 - k_2 - 2k_3.$$

Следовательно, для коэффициента $A_1(n)$ искомое значение $B_1(n, k_2, k_3)$, определяется формулой:

$$B_1(n, k_2, k_3) = C_{3n-2-k_2-2k_3}^{c_1k_2+c_2k_3+c_3}\, C_{c_1k_2+c_2k_3+c_3}^{k_2}. \qquad (3.39)$$

Соответственно для коэффициента $A_2(n)$:

$$B_2(n,\ k_2,\ k_3) = C_{3n-1-k_2-2k_3}^{b_1k_2+b_2k_3+b_3}\ C_{b_1k_2+b_2k_3+b_3}^{k_2} \tag{3.40}$$

и для коэффициента $A_3(n)$:

$$B_3(n,\ k_2,\ k_3) = C_{3n-k_2-2k_3}^{e_1k_2+e_2k_3+e_3}\ C_{e_1k_2+e_2k_3+e_3}^{k_2}. \tag{3.50}$$

Непосредственные проверки показывают, что интуитивная догадка оказалась правильной.

Действительно, принимая в (3.36) последовательно $n = 1,\ 2,\ 3$, получим:

$$A_1(1) = B_1(1,\ 0,\ 0)\,a_1, \tag{3.51}$$
$$A_1(2) = B_1(2,\ 0,\ 0)\,a_1^4 + B_1(2,\ 1,\ 0)\,a_1^2a_2 + B_1(2,\ 2,\ 0)\,a_2^2 + B_1(2,\ 0,\ 1)\,a_1a_3,$$
$$A_1(3) = \mathrm{B}_1(3,\ 0,\ 0)\,a_1^7 + B_1(3,\ 1,\ 0)\,a_1^5a_2 + B_1(3,\ 2,\ 0)\,a_1^3a_2^2 + B_1(3,\ 3,\ 0)\,a_1a_2^3 + B_1(3,\ 0,\ 1)\,a_1^4a_3 +$$
$$+ B_1(3,\ 1,\ 1)\,a_1^2a_2a_3 + B_1(3,\ 2,\ 1)\,a_2^2a_3 + B_1(3,\ 0,\ 2)\,a_1a_3^2.$$

В соответствии с ранее вычисленными значениями:

$$A_1(1) = a_1, \tag{3.52}$$
$$A_1(2) = 2a_1a_3 + a_2^2 + 3a_1^2a_2 + a_1^4,$$
$$A_1(3) = 3a_1a_3^2 + 3a_3a_2^2 + 12a_3a_1^2a_2 + 5a_3a_1^4 + 10a_1^3a_2^2 + 6a_1^5a_2 + a_1^7 + 4a_1a_2^3.$$

Анализируя полученные значения $B_1(n,\ k_2,\ k_3)$, устанавливаем, что $B_1(n,\ 0,\ 0) = 1$ для любых значений n.

Это означает, что для выполнения данного условия необходимо, чтобы $c_3 = 0$.

Для определения c_1, c_2 используем уравнения, следующие из сравнения (3.39) и (3.51):

$$B_1(2,\ 1,\ 0) = 3,$$
$$B_1(3,\ 1,\ 0) = 6,$$
$$B_1(2,\ 2,\ 0) = 1,$$
$$B_1(3,\ 2,\ 0) = 10.$$

Эти равенства эквивалентны (с учетом (3.39)) и условия $c_3 = 0$ системе равенств:

$$C_3^{c_1} c_1 = 3,$$
$$C_6^{c_1} c_1 = 6,$$
$$2C_2^{2c_1} c_1^2 - C_2^{2c_1} c_1 = 1,$$
$$2C_5^{2c_1} c_1^2 - C_5^{2c_1} c_1 = 10.$$

Данная система выполнима при условии $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.
Таким образом, искомое значение определяется формулой:

$$B_1(n,\ k_2,\ k_3) = C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3} C_{k_2+k_3}^{k_2}. \tag{3.53}$$

Совершенно аналогичным образом устанавливаем, что:

$$B_2(n,\ k_2,\ k_3) = C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3}^{k_2}, \tag{3.54}$$
$$B_3(n,\ k_2,\ k_3) = C_{3n-k_2-2k_3-1}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3-1}^{k_2}.$$

Подставляя полученные значения (3.53), (3.54) в (3.36), (3.37), (3.38), в итоге получаем искомые значения коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $i = 1,\ 2,\ 3$.

$$A_1(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-2-3k_3}{2}\right]} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3} C_{k_2+k_3}^{k_2} a_1^{(3n-2-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}, \tag{3.55}$$

$$A_2(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-1-3k_3}{2}\right]} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3}^{k_2} a_1^{(3n-1-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}. \tag{3.56}$$

$$A_3(n) = \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-3k_3}{2}\right]} C_{3n-k_2-2k_3-1}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3-1}^{k_2} a_1^{(3n-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}. \qquad (3.57)$$

Справедливость полученных формул доказывается методом математической индукции, аналогично тому, как это выполнено для случая квадратного уравнения.

3.5. Гипергеометрическая форма представления формул для коэффициентов *n*-образа

Преобразуем полученные формулы для коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $i = 1, 2, 3$ и докажем, что они являются гипергеометрическими функциями.

1) Преобразование к гипергеометрической форме представления коэффициента $A_1(n)$

Преобразование формул к гипергеометрическому представлению означает, что конечная сумма, которую представляет собой функция (3.55), представляется как сходящийся ряд. С этой целью произведем последовательно замену индексов суммирования по формулам:

$$k_2 = k_1,\ \ k_3 = n - k_2 - 1$$

и одновременно в качестве верхнего предела суммирования примем бесконечность. В этом случае получаем:

$$A_1(n) = a_1 a_3^{(n-1)} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} a_1^{(-2k_1+3k_2)} a_2^{k_1} a_3^{(-k_2)}. \qquad (3.58)$$

Преобразовывая выражение

$$C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1}$$

к факториальной форме представления, имеем:

$$C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{(n-k_1+2k_2)!}{(-2k_1+3k_2+1)!\, k_1!\,(n-1-k_2)!}. \tag{3.59}$$

Так как

$$(n-1-k_2)! = \mathrm{P}(n, -k_2)(n-1)!$$
$$(n-k_1+2k_2)! = \mathrm{P}(n, 2k_2-k_1+1)(n-1)!$$
$$(-2k_1+3k_2+1)! = \mathrm{P}(2, 3k_2-2k_1)$$
$$\mathrm{P}(1, k_2) = k_2!$$

то равенство (3.59) принимает вид:

$$C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2-k_1+1)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(2, 3k_2-2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\,k_1!\,k_2!}.$$

Подставляя его в (3.58) с учетом обозначений:

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2}, \quad z_2 = \frac{a_1^3}{a_3}, \tag{3.60}$$

получим

$$A_1(n) = a_1 a_3^{(n-1)} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2+1}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2-k_1+1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{\mathrm{P}(2, 3k_2-2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\,k_1!\,k_2!}. \tag{3.61}$$

Докажем, что полученный ряд

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2+1}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2-k_1+1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{\mathrm{P}(2, 3k_2-2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\,k_1!\,k_2!} \tag{3.62}$$

представляет собой гипергеометрическую функцию, и установим его область сходимости.

С этой целью воспользуемся горновским определением гипергеометрической функции [7]. В соответствии с ним, если составленные по заданному правилу соотношения:

$$f_1(k_1, k_2) = \frac{\mathrm{R}(k_1+1, k_2)}{\mathrm{R}(k_1, k_2)},$$

$$f_2(k_1, k_2) = \frac{\mathrm{R}(k_1, k_2+1)}{\mathrm{R}(k_1, k_2)},$$

где

$$\mathrm{R}(k_1, k_2) := \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\, k_1!\, k_2!},$$

будут представлять собой конечные функции, то ряд (3.62) сходится и имеет конечные радиусы сходимости.

В нашем случае:

$$f_1(k_1, k_2) = \frac{(-3k_2 + 2k_1)(-3k_2 + 2k_1 - 1)}{(k_1+1)(n - k_1 + 2k_2)},$$

$$f_2(k_1, k_2) = -\frac{(n - 1 - k_2)(2k_2 - k_1 + 1 + n)(2k_2 - k_1 + 2 + n)}{(2k_1 - 3k_2 - 2)(-3k_2 - 3 + 2k_1)(2k_1 - 3k_2 - 4)}.$$

Отсюда следует, что ряд (3.62) сходится и имеет конечную область сходимости.

Действуя по схеме Горна, установим эти радиусы. Для этого произведем замену индексов k_1, k_2 по формулам:

$$k_1 = tl_1, \;\; k_2 = tl_2,$$

где l_1, l_2 — новые индексы, определенные в интервале [0, 1], а t — параметр, который предполагается увеличивать до бесконечности.

В этом случае:

$$F_1(l_1, l_2) = \lim_{t\to\infty} f_1(tl_1, tl_2) = -\frac{(-3l_2 + 2l_1)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)},$$

$$F_2(l_1, l_2) = \lim_{t\to\infty} f_2(tl_1, tl_2) = \frac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(-3l_2 + 2l_1)^3}.$$

Таким образом, искомые радиусы сходимости определяются формулами:

$$r_1 = \frac{1}{[|F_1(l_1, l_2)|]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{\left[\left|\dfrac{(-3l_2 + 2l_1)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)}\right|\right]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{4},$$

$$r_2 = \frac{1}{[|F_2(l_1, l_2)|]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{1}{\left[\left|\dfrac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(-3l_2 + 2l_1)^3}\right|\right]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{27}{4}.$$

Следовательно, ряд (3.62) сходится, если переменные z_1, z_2 одновременно удовлетворяют условиям:

$$|z_1| < \frac{1}{4}, \quad |z_2| < \frac{27}{4}.$$

Или в раскрытой форме, с учетом (3.60):

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{a_1^3}{a_3}\right| < \frac{27}{4}. \qquad (3.63)$$

2) Преобразование к гипергеометрической форме представления коэффициента $A_2(n)$

Произведем в (3.56) замену индексов суммирования по формулам:

$$k_2 = k_1, \; k_2 = n - k_3 - 1$$

и одновременно в качестве верхнего предела суммирования примем бесконечность. В этом случае получаем:

$$A_2(n) = a_1^2 a_3^{(n-1)} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-2-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} \left(\frac{a_2}{a_1^2}\right)^{k_1} \left(\frac{a_1^3}{a_3}\right)^{k_2}. \tag{3.64}$$

Преобразовывая выражение $C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-2-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1}$ к факториальной форме представления, имеем:

$$C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-2-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{(n-k_1+2k_2)!\,(k_1+n-1-k_2)!}{(k_1+n-2-k_2)!\,(2-2k_1+3k_2)!\,k_1!\,(n-1-k_2)!}. \tag{3.65}$$

Так как

$$(k_1+n-1-k_2)! = \mathrm{P}(n,\, k_1-k_2)(n-1)!$$
$$(n-k_1+2k_2)! = \mathrm{P}(n,\, 2k_2-k_1+1)(n-1)!$$
$$(k_1+n-2-k_2)! = \mathrm{P}(n,\, k_1-k_2-1)(n-1)!$$
$$(-2k_1+3k_2+2)! = \mathrm{P}(2,\, 3k_2-2k_1+1)$$
$$(n-1-k_2)! = \mathrm{P}(n,\, -k_2)(n-1)!$$
$$\mathrm{P}(1,\, k_2) = k_2!$$

то равенство (3.65) принимает вид:

$$C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-2-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2-k_1+1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,\mathrm{P}(n, k_1-k_2)}{\mathrm{P}(n, k_1-k_2-1)\,\mathrm{P}(2, 3k_2-2k_1+1)\,k_1!\,\mathrm{P}(n, -k_2)\,k_2!}.$$

Подставляя его в (3.56) с учетом обозначений:

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2},\ \ z_2 = \frac{a_1^3}{a_3}, \tag{3.66}$$

получим

$$A_2(n) = a_1^2 a_3^{(n-1)} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,\mathrm{P}(n, k_1 - k_2)}{\mathrm{P}(n, k_1 - k_2 - 1)\,\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1 + 1)\; k_1!\,\mathrm{P}(n, -k_2)\; k_2!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \qquad (3.67)$$

Докажем, что полученный ряд

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,\mathrm{P}(n, k_1 - k_2)}{\mathrm{P}(n, k_1 - k_2 - 1)\,\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1 + 1)\; k_1!\,\mathrm{P}(n, -k_2)\; k_2!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \qquad (3.68)$$

представляет собой гипергеометрическую функцию, и установим его область сходимости.

Используя горновское определение гипергеометрической функции по заданному правилу (совершенно аналогичным образом, как это выполнено для случая определения гипергеометрической функции для коэффициента $A_1(n)$), получаем соотношения:

$$f_1(k_1, k_2) = \frac{1(k_1 + n - k_2)(1 - 2k_1 + 3k_2)(2 - 2k_1 + 3k_2)}{(k_1 + n - 1 - k_2)(k_1 + 1)(n - k_1 + 2k_2)},$$

$$f_2(k_1, k_2) = \frac{(k_1 + n - 2 - k_2)(n - 1 - k_2)(-k_1 + 2k_2 + 1 + n)(-k_1 + 2k_2 + 2 + n)}{(k_1 + n - 1 - k_2)(3 - 2k_1 + 3k_2)(4 - 2k_1 + 3k_2)(5 - 2k_1 + 3k_2)}.$$

Отсюда следует, что ряд (3.68) сходится и имеет конечную область сходимости.

Действуя по схеме Горна, установим эти радиусы. Для этого произведем замену индексов k_1, k_2 по формулам:

$$k_1 = tl_1,\;\; k_2 = tl_2,$$

здесь l_1, l_2 — новые индексы определенные в интервале [0, 1], а t — параметр, который предполагается увеличивать до бесконечности.

В этом случае:

$$F_1(l_1, l_2) = \lim_{t \to \infty} f_1(tl_1, tl_2) = -\frac{(2l_1 - 3l_2)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)},$$

$$F_2(l_1, l_2) = \lim_{t \to \infty} f_2(tl_1, tl_2) = \frac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(2l_1 - 3l_2)^3}.$$

Таким образом, искомые радиусы сходимости определяются формулами:

$$r_1 = \frac{1}{[|F_1(l_1, l_2)|]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{\left[\left|-\frac{(2l_1 - 3l_2)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)}\right|\right]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{4},$$

$$r_2 = \frac{1}{[|F_2(l_1, l_2)|]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{1}{\left[\left|\frac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(2l_1 - 3l_2)^3}\right|\right]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{27}{4}.$$

Таким образом, ряд (3.68) сходится, если переменные z_1, z_2 одновременно удовлетворяют условиям:

$$|z_1| < \frac{1}{4}, \qquad |z_2| < \frac{27}{4}.$$

Или в раскрытой форме, с учетом (3.66):

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_1^3}{a_3}\right| < \frac{27}{4}. \tag{3.69}$$

Как видим, область сходимости гипергеометрических функций для коэффициентов $A_1(n)$, $A_2(n)$ одна и та же.

3) Преобразование к гипергеометрической форме представления коэффициента $A_3(n)$

Так как суммирование в двукратной функции (3.57) производится по индексу k_3 от 0 до n, то учитывая, что гипергеометрическая функция задается в интервале от нуля до бесконечности, произведем в (3.57) замену индексов суммирования в два этапа: на первом этапе, используя подстановку,

$$k_3 = s + 1,$$

получим:

$$A_3(n) = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{3s}{2}-\frac{3}{2}\right]} C_{3n-k_2-2s-3}^{k_2+s} C_{k_2+s}^{k_2} a_1^{(3n-2k_2-3s-3)} a_2^{k_2} a_3^{(s+1)}\right). \qquad (3.70)$$

Теперь, последовательно используя равенства:

$$k_2 = k_1,\ \ k_2 = n - s - 1,$$

производим в (3.70) замену индексов суммирования и одновременно, исходя из предположения, что этот ряд сходится, в качестве верхнего предела суммирования примем бесконечность. В этом случае получаем:

$$A_3(n) = a_3^n \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2-1}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} \left(\frac{a_2}{a_1^2}\right)^{k_1}\left(\frac{a_1^3}{a_3}\right)^{k_2}. \qquad (3.71)$$

Преобразовывая выражение $C_{n-k_1+2k_2-1}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1}$ к факториальной форме представления, имеем:

$$C_{n-k_1+2k_2-1}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{(n-k_1+2k_2-1)!}{(-2k_1+3k_2)!\ k_1!\,(n-1-k_2)!}. \qquad (3.72)$$

Так как

$$(n-k_1+2k_2-1)! = \mathrm{P}(n, -k_1+2k_2)(n-1)!$$
$$(-2k_1+3k_2)! = \mathrm{P}(1,\ 3k_2-2k_1)$$
$$(n-1-k_2)! = \mathrm{P}(n, -k_2)\ (n-1)!$$
$$\mathrm{P}(1,\ k_2) = k_2!$$

то равенство (3.72) принимает вид:

$$C_{n-k_1+2k_2-1}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} = \frac{\mathrm{P}(n, -k_1+2k_2)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(1, 3k_2-2k_1)\; k_1!\; k_2!\,\mathrm{P}(n, -k_2)}.$$

Подставляя его в (3.71) с учетом обозначений:

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2},\ \ z_2 = \frac{a_1^3}{a_3}, \tag{3.73}$$

получим:

$$A_3(n) = a_3^n \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, -k_1+2k_2)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(1, 3k_2-2k_1)\; k_1!\; k_2!\,\mathrm{P}(n, -k_2)}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \tag{3.74}$$

Докажем, что полученный ряд

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, -k_1+2k_2)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(1, 3k_2-2k_1)\; k_1!\; k_2!\,\mathrm{P}(n, -k_2)}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \tag{3.75}$$

представляет собой гипергеометрическую функцию, и установим его область сходимости.

Используя горновское определение гипергеометрической функции, получаем соотношения:

$$f_1(k_1, k_2) = \frac{(3k_2-2k_1-1)(-2k_1+3k_2)}{(n-k_1+2k_2-1)(k_1+1)},$$

$$f_2(k_1, k_2) = \frac{(n-k_1+2k_2)(-k_1+2k_2+1+n)(n-1-k_2)}{(1-2k_1+3k_2)(2-2k_1+3k_2)(3-2k_1+3k_2)}.$$

Отсюда следует, что ряд (3.75) сходится и имеет конечную область сходимости.

Действуя по схеме Горна, установим эти радиусы. Для этого произведем замену индексов k_1, k_2 по формулам:

$$k_1 = tl_1,\ \ k_2 = tl_2,$$

здесь l_1, l_2 — новые индексы, определенные в интервале [0, 1], а t — параметр, который предполагается увеличивать до бесконечности.

В этом случае:

$$F_1(l_1, l_2) = \lim_{t \to \infty} f_1(tl_1, tl_2) = -\frac{(2l_1 - 3l_2)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)},$$

$$F_2(l_1, l_2) = \lim_{t \to \infty} f_2(tl_1, tl_2) = \frac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(2l_1 - 3l_2)^3}.$$

Таким образом, искомые радиусы сходимости определяются формулами:

$$r_1 = \frac{1}{[|F_1(l_1, l_2)|]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{\left[\left|-\dfrac{(2l_1 - 3l_2)^2}{l_1(l_1 - 2l_2)}\right|\right]_{l_1=1,\, l_2=0}} = \frac{1}{4},$$

$$r_2 = \frac{1}{[|F_2(l_1, l_2)|]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{1}{\left[\left|\dfrac{l_2(l_1 - 2l_2)^2}{(2l_1 - 3l_2)^3}\right|\right]_{l_1=0,\, l_2=1}} = \frac{27}{4}.$$

Следовательно, ряд (3.75) сходится, если переменные z_1, z_2 одновременно удовлетворяют условиям:

$$|z_1| < \frac{1}{4}, \quad |z_2| < \frac{27}{4}.$$

Или в раскрытой форме, с учетом (3.73):

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{a_1^3}{a_3}\right| < \frac{27}{4}.$$

Как видим, область сходимости гипергеометрических функций для всех коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $A_2(n)$, $A_3(n)$ одна и та же.

3.6. Вывод формулы для корней кубического уравнения

Докажем, что справедлива **ТЕОРЕМА 3.1:**

Корни кубического уравнения:

$$x^3 = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

где a_i, $i = 1, 2, 3$ его коэффициенты, удовлетворяющие условиям:

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_1^3}{a_3}\right| < \frac{27}{4},$$

определяются формулами:

$$x_i = \frac{\begin{bmatrix} a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \omega_i^2 a_1 B_1\left(\frac{2}{3}\right) & a_3\omega_i^2 B_3\left(\frac{2}{3}\right) \\ -\omega_i a_1 B_1\left(\frac{1}{3}\right) & a_3\omega_i B_3\left(\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \omega_i^2 a_1 B_1\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^2 a_1^2 B_2\left(\frac{2}{3}\right) \\ -\omega_i a_1 B_1\left(\frac{1}{3}\right) & a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} - \omega_i a_1^2 B_2\left(\frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.76}$$

Здесь

$$B_1(n) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2+1}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\, k_1!\, k_2!}, \tag{3.77}$$

$$\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{n}) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\,\mathrm{P}(n, k_1 - k_2)}{\mathrm{P}(n, k_1 - k_2 - 1)\,\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1 + 1)\,k_1!\,\mathrm{P}(n, -k_2)\,k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

$$\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{n}) = a_3^n \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, -k_1 + 2k_2)\,\mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(1, 3k_2 - 2k_1)\,k_1!\,k_2!\,\mathrm{P}(n, -k_2)} z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{a_1^3}{a_3},$$

ω_i **— корни кубического уравнения** $\omega^3 = 1$

$$\omega_i = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 - I\sqrt{3}}{2}. \qquad (3.78)$$

Доказательство: Полученные значения для коэффициентов n-образа $A_1(n)$, $A_2(n)$, $A_3(n)$ в форме (3.61), (3.67), (3.74) позволяют выписать уравнение n-образа для кубического уравнения (3.1) в общей форме:

$$x^{(3n)} = a_1 a_3^{(n-1)} B_1(n) x^2 + a_1^2 a_3^{(n-1)} B_2(n) x + a_3^n B_3(n), \qquad (3.79)$$

где $B_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ — определяются формулами (3.77). Каждый из представленных рядов является гипергеометрической функцией, и, как было показано выше, область сходимости этих функций определяется условиями теоремы 3.1. В соответствии с свойством 1 уравнение (3.79) заведомо содержит все корни исходного кубического уравнения (3.1). В силу того, что в данном уравнении параметр n может формально являться действительным числом, то принимая в (3.79) последовательно значения $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, получим два квадратных линейных алгебраических уравнения:

$$x a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} = a_1 B_1\left(\frac{1}{3}\right) x^2 + a_1^2 B_2\left(\frac{1}{3}\right) x + B_3\left(\frac{1}{3}\right) a_3, \tag{3.80}$$

$$x^2 a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} = a_1 B_1\left(\frac{2}{3}\right) x^2 + a_1^2 B_2\left(\frac{2}{3}\right) x + a_3 B_3\left(\frac{2}{3}\right).$$

Эти уравнения линейны относительно $\{x,\ x^2\}$, поэтому решая полученную систему, например методом Крамера, получим один из корней кубического уравнения (3.1) — $x = x_1$. Однако задача заключается в нахождении всех корней кубического уравнения (3.1).

С этой целью используем формальный прием, а именно: уравнение (3.79) представим в следующем виде:

$$\frac{x^{(3n)}}{a_3^n} = \frac{a_1 B_1(n)\, x^2 + a_1^2 B_2(n)\, x + B_3(n)\, a_3}{a_3}. \tag{3.81}$$

Введем параметр ω — удовлетворяющий условию: $\omega^3 = 1$. Таким образом, можно записать:

$$a_3^n = \omega^3 a_3^n = \left(\omega a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{(3n)}.$$

Решая кубическое уравнение: $\omega^3 = 1$, получаем его корни, определяемые формулами (3.78). Тогда сопоставляя i-му значению ω_i значение i-го корня x_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, уравнение (3.81) представим в виде:

$$\left(\frac{x_i}{\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}}\right)^{(3n)} = \frac{a_1 B_1(n)\, x_i^2 + a_1^2 B_2(n)\, x_i + B_3(n)\, a_3}{a_3},\ \ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Принимая в этом уравнении последовательно значения $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, получим три системы, состоящие каждая из двух алгебраических уравнений второй степени:

$$\frac{x_i}{\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}} = \frac{a_1 B_1\left(\frac{1}{3}\right) x_i^2 + a_1^2 B_2\left(\frac{1}{3}\right) x_i + B_3\left(\frac{1}{3}\right) a_3}{a_3} \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

$$\frac{x_i^2}{\omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{a_1 B_1\left(\frac{2}{3}\right) x_i^2 + a_1^2 B_2\left(\frac{2}{3}\right) x_i + a_3 B_3\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3}.$$

Общее решение этих трех систем методом Крамера определяется формулами (3.76), т. е. определяет искомые формулы для корней кубического уравнения. В частности, для $\omega_1 = 1$ получим отсюда систему (3.80). Теорема доказана.

Примечание: На практике знак «бесконечность = ∞» в значениях рядов (3.77) необходимо заменить некоторым натуральным числом N — достаточно большим, чтобы получить требуемую точность при практических вычислениях. В этом случае полученный корень $x_i = x_i(N)$, $i = 1$, 2, 3, уравнения (3.1) является функцией от параметра N.

Точность вычисления (или, что эквивалентно по смыслу — абсолютную относительную ошибку вычисления) x_i, $i = 1, 2, 3$, корня кубического уравнения (3.1) будем определять формулой:

$$\delta_i(N) = \left| \frac{x_i(N)^3 - a_1 x_i(N)^2 - a_2 x_i(N) - a_3}{a_3} \right|, \ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.82}$$

3.6.1. Примеры

Приведем примеры решения алгебраических уравнений, с учетом изложенной теории.

Последовательность нахождения корней кубического уравнения:

$$x^3 = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \tag{3.83}$$

будет определяться следующими действиями и формулами:

Действие 1. Задаются значения коэффициентов a_i, $i = 1, 2, 3$ уравнения (3.83).

Действие 2. Вычисляем значения:

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2}, \quad z_2 = \frac{a_1^3}{a_3}$$

и далее устанавливаем соответствие коэффициентов a_i, $i = 1, 2, 3$ условиям:

$$|z_1| < \frac{1}{4}, \qquad |z_2| < \frac{27}{4}. \tag{3.84}$$

В случае их выполнения искомые корни кубического уравнения (3.83) должны вычисляться с любой требуемой точностью.

Действие 3. Для $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, вычисляем значения $B_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, используя формулы:

$$B_1(n) = \sum_{k_2=0}^{N} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2+1}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{3.85}$$

$$B_2(n) = \sum_{k_2=0}^{N} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2}^{k_1+n-2-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{3.86}$$

$$B_3(n) = \sum_{k_2=0}^{N} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-k_1+2k_2-1}^{k_1+n-1-k_2} C_{k_1+n-1-k_2}^{k_1} z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \tag{3.87}$$

Здесь N — параметр, задающий точность определения $B_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, а в целом и точность вычисления корней (3.83). В данных формулах используются биномиальные коэффициенты, из-за того что они хорошо адаптированы к вычислениям на ЭВМ.

Действие 4. Вычисляем корни уравнения (3.83), пользуясь формулами:

$$x_i = \frac{\begin{bmatrix} a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \omega_i^2 a_1 B_1 \left(\dfrac{2}{3}\right) & a_3 \omega_i^2 B_3 \left(\dfrac{2}{3}\right) \\ -\omega_i a_1 B_1 \left(\dfrac{1}{3}\right) & a_3 \omega_i B_3 \left(\dfrac{1}{3}\right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \omega_i^2 a_1 B_1 \left(\dfrac{2}{3}\right) & -\omega_i^2 a_1^2 B_2 \left(\dfrac{2}{3}\right) \\ -\omega_i a_1 B_1 \left(\dfrac{1}{3}\right) & a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} - \omega_i a_1^2 B_2 \left(\dfrac{1}{3}\right) \end{bmatrix}}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.88}$$

Здесь

$$\omega_i = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 - I\sqrt{3}}{2}. \tag{3.89}$$

Действие 5. Вычисляем относительную ошибку найденных корней $x_i = x_i(N)$, $i = 1, 2, 3$ по формуле:

$$\delta_i(N) = \left| \frac{x_i(N)^3 - a_1 x_i(N)^2 - a_2 x_i(N) - a_3}{a_3} \right|, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.90}$$

▶ **Пример 1.** Вычислить корни кубического уравнения:

$$x^3 = -x^2 + \frac{x}{4} + 60. \tag{3.91}$$

Р е ш е н и е:

Действие 1. Выписываем значения коэффициентов уравнения (3.91):

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{4},\ a_3 = 60.$$

Действие 2. Устанавливаем значения:

$$z_1 = \frac{1}{4}, \quad z_2 = -\frac{1}{60}.$$

Действие 3. Проверяем условия (3.84):

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{60} < \frac{27}{4}.$$

Первое условие не выполняется, однако покажем, что корни уравнения (3.91) могут быть вычислены с высокой точностью.

Действие 4. Задаем значение параметра $N = 20$ и последовательно для $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ вычисляем значения:

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k_2=0}^{20} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}+\frac{1}{2}\right]} C_{\frac{1}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{2}{3}-k_2} \cdot C_{k_1-\frac{2}{3}-k_2}^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_1} \left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2} = .3345516562,$$

$$B_2\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k_2=0}^{20} \sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{\frac{1}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{5}{3}-k_2} \cdot C_{k_1-\frac{2}{3}-k_2}^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_1} \left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2} = -.2803753279\text{e-}1,$$

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k_2=0}^{20} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} C_{-\frac{2}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{2}{3}-k_2} \cdot C_{k_1-\frac{2}{3}-k_2}^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_1} \left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2} = 1.001756231,$$

$$B_1\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{k_2=0}^{20} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}+\frac{1}{2}\right]} C_{\frac{2}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{1}{3}-k_2} \cdot C_{k_1-\frac{1}{3}-k_2}^{k_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k_1} \left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2} = .6682462107,$$

$$B_2\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{k_2=0}^{20}\sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{\frac{2}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{4}{3}-k_2}\cdot C_{k_1-\frac{1}{3}-k_2}^{k_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_1}\left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2}=.5536307761\text{e-}1,$$

$$B_3\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{k_2=0}^{20}\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} C_{-\frac{1}{3}-k_1+2k_2}^{k_1-\frac{1}{3}-k_2}\cdot C_{k_1-\frac{1}{3}-k_2}^{k_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_1}\left(-\frac{1}{60}\right)^{k_2}=1.001962800.$$

Действие 5. Вычисляем корни уравнения (3.91), пользуясь формулами (3.88), (3.89):

$$x_1=\frac{\begin{bmatrix}60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107 & 60.11776800\\ .3345516562 & 60.10537386\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107 & -.5536307761\text{e-}1\\ .3345516562 & 60^{\left(\frac{2}{3}\right)}+.2803753279\text{e-}1\end{bmatrix}}=3.627816884,$$

$$x_2=\frac{\begin{bmatrix}60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107\left(-\frac{1}{2}+\frac{1I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 & 60.11776800\left(-\frac{1}{2}+\frac{1I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2\\ -.1672758281+.1672758281I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)} & -30.05268693+30.05268693I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107\left(-\frac{1}{2}+\frac{1I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 & -.5536307761\text{e-}1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2\\ -.1672758281+.1672758281I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)} & 60^{\left(\frac{2}{3}\right)}-.1401876640\text{e-}1+.1401876640\text{e-}1I\,3^{\left(\frac{1}{2}\right)}\end{bmatrix}}=$$

$$=-2.313908443+3.344353445\,I,$$

$$x_3=\frac{\begin{bmatrix} 60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107\left(-\frac{1}{2}-\frac{1 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 & 60.11776800\left(-\frac{1}{2}-\frac{1 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 \\ -.1672758281-.1672758281 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)} & -30.05268693-30.05268693 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 60^{\left(\frac{1}{3}\right)}+.6682462107\left(-\frac{1}{2}-\frac{1 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 & -.5536307761\text{e-}1\left(-\frac{1}{2}-\frac{1 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{2}\right)^2 \\ -.1672758281-.1672758281 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)} & 60^{\left(\frac{2}{3}\right)}-.1401876640\text{e-}1-.1401876640\text{e-}1 I\, 3^{\left(\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}}=$$

$$=-2.313908443-3.344353445\, I.$$

Действие 6. Вычисляем относительную ошибку найденных корней $x_i = x_i(N)$, $i = 1, 2, 3$ от точного значения по формуле (3.90):

$$\delta_1(20)=\left|\frac{3.627816884^3-(-1)\,3.627816884^2-\frac{1\,3.627816884}{4}-60}{60}\right|=|-.7\text{e-}9|,$$

$$\delta_2(20)=\left|\frac{(-2.313908443+3.344353445\, I)^3-(-1)(-2.313908443+3.344353445\, I)^2-\frac{1(-2.313908443+3.344353445\, I)}{4}-60}{60}\right|=$$

$$=|.790\text{e-}9-.22\text{e-}9\, I|,$$

$$\delta_3(20)=\left|\frac{(-2.313908443-3.344353445\,I)^3-(-1)(-2.313908443-3.344353445\,I)^2-\dfrac{1(-2.313908443-3.344353445\,I)}{4}-60}{60}\right|=$$

$$=\left|.790\text{e-}9+.22\text{e-}9\,I\right|.$$

Примечание: Точные значения корней кубического уравнения (3.90) равны:

$$x_1=3.627816886,\ x_2=-2.313908443-3.344353444\,I,\ x_3=-2.313908443+3.344353444\,I.$$

Как видим, уже при $N = 20$ получаем искомые корни с достаточно высокой точностью. При этом оказывается, что условия (3.84) не являются строгими, т. е. если даже нарушаются незначительно, все равно решение получается с высокой точностью.

▶ **Пример 2.** Вычислить корни кубического уравнения:

$$x^3 = x^2 + 6x + 60. \tag{3.92}$$

Решение:

Действие 1. $a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_3 = 60.$

Действие 2. $z_1 := 6 \quad z_2 := \dfrac{1}{60}.$

Действие 3. Проверяем выполнение условий соответствия (3.84):

$$6 \leqslant \frac{1}{4},\quad \frac{1}{60} < \frac{27}{4}.$$

Вывод: Первое условие не выполнено. Тем не менее, продолжая вычисление корней, получаем:

Действие 4. Вычисляем, пользуясь формулами (3.85)—(3.87), для $N = 20$:

$$B_2\left(\frac{1}{3}\right)=1.87770,\ B_1\left(\frac{1}{3}\right)=.256552,\ B_3\left(\frac{1}{3}\right)=.981606,$$

$$B_3\left(\frac{2}{3}\right)=.980705,\ B_2\left(\frac{2}{3}\right)=3.85506,\ B_1\left(\frac{2}{3}\right)=.586165.$$

Действие 5. Вычисляем, пользуясь формулами (3.88), (3.89), корни уравнения (3.92):

$$x_1 = 4.82320,\ x_2 = -1.91159 + 2.96407\,I,\ x_3 = -1.91159 - 2.96407\,I.$$

Действие 6. Вычисляем относительную ошибку вычислений:

$$\delta_1(20) = |.1\text{e-}4|,\ \delta_2(20) = |-.2\text{e-}5 + .1\text{e-}5\,I|,\ \delta_3(20) = |-.2\text{e-}5 - .1\text{e-}5|.$$

Как видим, точность вычисления корней для $N = 20$ оказалась достаточно высокой.

Примечание. Точные корни кубического уравнения (3.91):

$$x_1 = 4.82318,\ x_2 = -1.91159 + 2.96407\,I,\ x_3 = -1.91159 - 2.96407\,I.$$

▶ **Пример 3.** Вычислить корни кубического уравнения с комплексными коэффициентами:

$$x^3 = (1 - 3\,I)\,x^2 + (15 + 8\,I)\,x + 10 - 200\,I, \tag{3.93}$$

I — мнимая единица.

Решение:

Действие 1. $a_1 = 1 - 3\,I$, $a_2 = 15 + 8\,I$, $a_3 = 10 - 200\,I$.

Действие 2: $z_1 := -\dfrac{42}{25} + \dfrac{13\,I}{50}$, $\quad z_2 := -\dfrac{193}{2005} - \dfrac{251\,I}{2005}$.

Действие 3. Проверяем выполнение условий соответствия (3.84):

$$6. \leqslant .2500000000 \qquad .1666666667\text{e-}1 \leqslant 6.750000000.$$

Вывод: второе условие выполнено, первое — нет, однако продолжая, получаем:

Действие 4. Вычисляем, пользуясь формулами (3.85)—(3.87), для $N = 20$:

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) = .3471866228 + .1287381899\text{e-}2\,I,\quad B_3\left(\frac{1}{3}\right) = .9605430230 - .3487683863\text{e-}1\,I,$$

$$B_2\left(\frac{1}{3}\right) = -.6506103078 + .1023489643\,I,$$

$$B_1\left(\frac{2}{3}\right) = .6746140365 - .3363822392\text{e-}2\,I, \quad B_2\left(\frac{2}{3}\right) = -1.199622824 + .1951305610\,I,$$

$$B_3\left(\frac{2}{3}\right) = .9621348467 - .3226857471\text{e-}1\,I.$$

Действие 5. Вычисляем, пользуясь формулами (3.88), (3.89), корни уравнения (3.91):

$$x_1 = 6.047471416 - 3.185917770\,I,$$
$$x_2 = .4433713234 + 4.261321147\,I,$$
$$x_3 = -5.490842739 - 4.075403380\,I.$$

Точные корни кубического уравнения (3.91):

$$x_1 = -5.490842740 - 4.075403378\,I,$$
$$x_2 = .4433713238 + 4.261321147\,I,$$
$$x_3 = 6.047471416 - 3.185917770\,I.$$

Как видим, несмотря на то, что условия (3.84) не выполнены, корни уравнения получены с высокой точностью.

▶ **Пример 4.** Вычислить корни кубического уравнения:

$$x^3 = 10x^2 - 5x + 1. \tag{3.94}$$

Решение:

Действие 1. $a_1 = 10,\ a_2 = -5,\ a_3 = 1.$

Действие 2. Вычисляем:

$$z_1 = \frac{1}{20}, \quad z_2 = 1000.$$

Действие 3. Проверяем выполнение условий соответствия (3.84):

$$.5000000000\text{e-}1 \leqslant .2500000000 \qquad 1000. \leqslant 6.750000000.$$

Вывод: первое условие выполнено, второе — не выполнено (и достаточно существенно). Очевидно, что в данном случае используемый подход не может дать положительного результата. Действительно:

Действие 4. Вычисляем, пользуясь формулами (3.85)—(3.87), для $N = 20$:

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) = .8831503507\text{e}40,\ B_2\left(\frac{1}{3}\right) = -.3175397358\text{e}40,\ B_3\left(\frac{1}{3}\right) = .1389377130\text{e}41,$$

$$B_3\left(\frac{2}{3}\right) = .1828635986\text{e}41,\ B_1\left(\frac{2}{3}\right) = .1171137359\text{e}41,\ B_2\left(\frac{2}{3}\right) = -.4155454632\text{e}40.$$

Действие 5. Вычисляем, пользуясь формулами (3.88), (3.89), предполагаемые корни уравнения (3.94):

$$x_1 = .2491240672\text{e-}1,$$
$$x_2 = .2491240669\text{e-}1 - .5818899960\text{e-}11\,I,$$
$$x_3 = .2491240669\text{e-}1 + .5818899960\text{e-}11\,I.$$

Точные корни кубического уравнения (3.91):

$$x_1 = .2580453979 - .1971150029\,I,\ x_2 = .2580453979 + .1971150029\,I,\ x_3 = 9.483909204.$$

Как видим, условия (3.84) существенно не выполнены и следовательно, корни уравнения (3.94) вычислить невозможно, что и следовало ожидать.

3.7. Преобразование формул для корней кубического уравнения

Поскольку формулы для корней кубического уравнения (3.1) в форме (3.76) справедливы только при условиях (3.75), то возникает вопрос: **«Как поступать в том случае, если условия (3.75) не выполняются?»** Существует несколько способов решения этой проблемы. Самый простой и очевидный — это способ инверсии индексов суммирования.

3.7.0. Способ инверсии индексов суммирования

Он заключается в преобразовании индексов суммирования в формулах (3.55), (3.56), (3.57) в соответствии с равенствами:

$$s_2 = -k_2 + \left[\frac{3n - 2 - 3k_3}{2}\right],$$

$$s_3 = -k_3 + n - 1.$$

Тогда эти формулы принимают вид:

$$A_1(n) = \sum_{s_3=0}^{n-1} \sum_{s_2=0}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]} C_{n-\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]+s_2+2s_3}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3s_3}{2}\right]-s_2+n-1-s_3} \cdot C_{\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2+n-1-s_3}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2} a_1^{\left(1-2\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]+2s_2+3s_3\right)} a_2^{\left(\left[\frac{1}{2}+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2\right)} a_3^{(n-1-s_3)} \tag{3.95}$$

$$A_2(n) = \sum_{s_3=0}^{n-1} \sum_{s_2=0}^{\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]} C_{n-\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]+s_2+2s_3}^{\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2+n-2-s_3} \cdot C_{\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2+n-1-s_3}^{\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2} a_1^{\left(2-2\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]+2s_2+3s_3\right)} a_2^{\left(\left[1+\frac{3s_3}{2}\right]-s_2\right)} a_3^{(n-1-s_3)} \tag{3.96}$$

$$A_3(n) = \sum_{s_3=1}^{n} \sum_{s_2=0}^{\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]} C_{n-\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]+s_2+2s_3-3}^{\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]-s_2-s_3+n} \cdot C_{\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]-s_2-s_3+n}^{\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]-s_2} a_1^{\left(-2\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]+2s_2+3s_3-3\right)} a_2^{\left(\left[\frac{3s_3}{2}-\frac{3}{2}\right]-s_2\right)} a_3^{(-s_3+1+n)} \tag{3.97}$$

Это сделано с целью инверсии области определения гипергеометрических функций, порождаемых формулами (3.55), (3.56), (3.57).

Совершенно аналогичным способом, как это было сделано сделано ранее, доказывается **ТЕОРЕМА 3.2:**

Корни кубического уравнения (3.1) в области определения

$$|z_1| < 4, \quad |z_2| < \frac{4}{27}, \qquad z_1 = \frac{a_1^2}{a_2}, \quad z_2 = \frac{a_2^3}{a_3} \tag{3.98}$$

определяются формулами:

$$x_i = -\frac{\omega_i\left(\omega_i^2 B_3\left(\frac{2}{3}\right)B_1\left(\frac{1}{3}\right) + B_3\left(\frac{1}{3}\right) - B_3\left(\frac{1}{3}\right)\omega_i^2 B_1\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{-1 + \omega_i B_2\left(\frac{1}{3}\right) + \omega_i^2 B_1\left(\frac{2}{3}\right) - \omega_i^3 B_1\left(\frac{2}{3}\right)B_2\left(\frac{1}{3}\right) + \omega_i^3 B_2\left(\frac{2}{3}\right)B_1\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.99}$$

где

$$B_1(n) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]+k_1+2k_2}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-1-k_2} \cdot C_{\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-1-k_2}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1} a_1^{\left(1-2\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]+2k_1+3k_2\right)} a_2^{\left(\left[\frac{1}{2}+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1\right)} a_3^{(n-1-k_2)}, \tag{3.100}$$

$$B_2(n) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]+k_1+2k_2}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-2-k_2} \cdot C_{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-1-k_2}^{\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1} a_1^{\left(2-2\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]+2k_1+3k_2\right)} a_2^{\left(\left[1+\frac{3k_2}{2}\right]-k_1\right)} a_3^{(n-1-k_2)},$$

$$B_3(n) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} C_{n-\left[\frac{3k_2}{2}\right]+k_1+2k_2-1}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-k_2-1} \cdot C_{\left[\frac{3k_2}{2}\right]-k_1+n-k_2-1}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]-k_1} a_1^{\left(-2\left[\frac{3k_2}{2}\right]+2k_1+3k_2\right)} a_2^{\left(\left[\frac{3k_2}{2}\right]-k_1\right)} a_3^{(n-k_2)}.$$

▶ **Пример 1.** Вычислить корни кубического уравнения:

$$x^3 = x^2 + 2x + 90. \qquad (3.101)$$

Решение:
Действие 1. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 90.$
Действие 2. $z_1 := .5000000000, \quad z_2 := .8888888889\text{e-}1.$
Действие 3. Проверяем выполнение условий (3.98):

$$.5000000000 \leqslant 4, \quad .8888888889\text{e-}1 \leqslant .1481481481.$$

Вывод: Оба условия выполнены. Продолжая вычисление корней, получаем:
Действие 4. Вычисляем, пользуясь формулами (3.100), для $N = 20$:

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right) = 4.457407393,\ B_1\left(\frac{1}{3}\right) = .1617871908\text{e-}1,\ B_2\left(\frac{1}{3}\right) = .2762492618\text{e-}1.$$

$$B_1\left(\frac{2}{3}\right) = .1466725452{,}5,\ B_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2721399314,\ B_3\left(\frac{2}{3}\right) = 19.97248671.$$

Действие 5. Вычисляем, пользуясь формулами (3.99), корни уравнения (3.101):

$$x_1 = 5.000000001,$$
$$x_2 = -1.999999999 - 3.741657387\,I,$$
$$x_3 = -1.999999999 + 3.741657387\,I.$$

Действие 6. Вычисляем относительную ошибку вычислений:

$$\delta_1(20) = |.1\text{e-}4|,\ \delta_2(20) = |-.2\text{e-}5 + .1\text{e-}5\,I|,\ \delta_3(20) = |-.2\text{e-}5 - .1\text{e-}5\,I|.$$

Как видим, точность вычисления корней, даже при $N = 20$, оказалась достаточно высокой.

▶ **Пример 2.** Вычислить корни кубического уравнения:

$$x^3 = (1 - 2\,I)\,x^2 + (-1 + I)\,x + 40 - 80\,I. \qquad (3.102)$$

Р е ш е н и е:
Действие 1. $a_1 = 1 - 2I$, $a_2 = -(1 - I)$, $a_3 = 40 - 80I$.
Действие 2. $z_1 := -.5000000000 + 3.500000000I$, $z_2 := -.1000000000\text{e-}1 + .3000000000\text{e-}1I$.
Действие 3. Проверяем выполнение условий соответствия (3.98):

$$3.535533906 \leqslant 4, \qquad .3162277660\text{e-}1 \leqslant .1481481481.$$

Вывод: Оба условия выполнены. Продолжая вычисление корней, получаем:
Действие 4. Вычисляем, пользуясь формулами (3.100), для $N = 20$:

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right) = 4.209288948 - 1.631191757I, \quad B_1\left(\frac{1}{3}\right) = .3522568242\text{e-}1 - .1380854348\text{e-}1I,$$

$$B_2\left(\frac{1}{3}\right) = -.2630129616\text{e-}1 + .2922711330\text{e-}1I.$$

$$B_1\left(\frac{2}{3}\right) = .2487448532 - .2270875578I, \quad B_3\left(\frac{2}{3}\right) = 14.95665788 - 13.58852107I,$$

$$B_2\left(\frac{2}{3}\right) = -.1596599992 + .2072750275I.$$

Действие 5. Вычисляем, пользуясь формулами (3.100), корни уравнения (3.102):

$$x_1 = 4.354718830 - 2.348316974I,$$
$$x_2 = -.3548354202 + 3.883169792I,$$
$$x_3 = -2.999883408 - 3.534852823I.$$

Действие 6. Вычисляем относительную точность вычислений:

$$\delta_1(20) = |.1\text{e-}6|, \ \delta_2(20) = |-.2\text{e-}7|, \ \delta_3(20) = |-.4\text{e-}5 - .1\text{e-}5I|.$$

Как видим, и в этом случае точность вычисления корней, даже при $N = 20$, оказалась достаточно высокой.

Таким образом, Теорема 3.2 существенно расширяет область определения корней кубического уравнения (3.1). Действительно, в соответствии с Теоремой 3.1 корни кубического уравнения (3.1) определены, если его коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_1^3}{a_3}\right| < \frac{27}{4}.$$

в сответствии с Теоремой 3.2, а в соответствии с Теоремой 3.3, если выполнены условия:

$$\left|\frac{a_1^2}{a_2}\right| < 4, \qquad \left|\frac{a_2^3}{a_3}\right| < \frac{4}{27}.$$

Таким образом, область определения корней кубического уравнения (3.1) расширилась, если использовать условия теорем 3.1, 3.2.

3.7.1. Преобразование гипергеометрических функций

Идея заключается в том, что гипергеометрические представления коэффициентов $A_1(n)$, $i = 1, 2, 3$ принимают новую форму, в которой параметры z_1, z_2 — получают новое представление.

1) Представление коэффициента $A_1(n)$. Анализ показал, что коэффициент

$$A_1(n) = a_3^{(n-1)} a_1 \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2+1}{2}\right]} \frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\,\mathrm{P}(1, k_2)\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{\mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1)\,\mathrm{P}(n, -k_2)\, k_1!\, k_2!}, \quad z_1 := \frac{a_2}{a_1^2}, \quad z_2 := \frac{a_1^3}{a_3}, \tag{3.103}$$

может быть представлен также следующим образом: (3.104)

$$A_1(n) = a_3^{(n-2)} a_2^2 \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} + a_1 a_3 a_3^{(n-2)} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{3k_3} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3},$$

$$Z_2 := \frac{a_1^2}{a_2}, \quad Z_3 := \frac{a_2^3}{a_3^2}.$$

Докажем, что конечные суммы

$$\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3}, \tag{3.105}$$

$$\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{3k_3} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \tag{3.106}$$

представляют собой гипергеометрические функции, и установим их область определения.

Действительно, для коэффициентов из (3.105) имеем:

$$G_1(k_2, k_3) := C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2} \cdot C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2}.$$

Следовательно, так как

$$F_1(k_2, k_3) = \frac{G_1(k_2+1,\ k_3)}{G_1(k_2, k_3)} = \frac{(n+k_3+k_2+1)(3k_3-k_2+2)}{(2k_2+1)(2k_2+2)}, \tag{3.107}$$

$$F_2(k_2, k_3) = \frac{G_1(k_2,\ k_2+1)}{G_1(k_2, k_3)} = \frac{(n+k_3+k_2+1)(n-2k_3-3)(n-2k_3-2)}{(3k_3-k_2+3)(3k_3-k_2+4)(3k_3+5-k_2)}, \tag{3.108}$$

то поскольку правые части — ограниченные функции, то ряд

$$\sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \tag{3.109}$$

сходится и является гипергеометрической функцией.

Подстановкой

$$k_2 = tl_2,\ k_3 = tl_3, \tag{3.110}$$

где t — параметр, функции (3.107), (3.108) приводятся к виду:

$$\lim_{t\to\infty} F_1(tl_2, tl_3) = -\frac{(l_3+l_2)(-3l_3+l_2)}{l_2^2\,4} \tag{3.111}$$

$$\lim_{t\to\infty} F_2(tl_2, tl_3) = -\frac{4(l_3+l_2)l_3^2}{(-3l_3+l_2)^3} \tag{3.112}$$

Отсюда, принимая в (3.111) $l_2 = 1$, $l_3 = 0$, а в (3.112) $l_2 = 0$, $l_3 = 1$, получим искомые радиусы сходимости ряда (3.109):

$$\left|\frac{a_1^2}{a_2}\right| < \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_2^3}{a_3^2}\right| < \frac{4}{27}. \tag{3.113}$$

Совершенно аналогичным образом, для коэффициентов из (3.106) устанавливаем:

$$G_2(k_2, k_3) := C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} \cdot C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2}$$

Следовательно, так как

$$F_1(k_2, k_3) = \frac{G_1(k_2+1,\, k_3)}{G_1(k_2, k_3)} = \frac{(n+k_3+k_2+1)(3k_3-k_2)}{(2k_2+2)(2k_2+3)}, \tag{3.114}$$

$$F_2(k_2, k_3) = \frac{G_1(k_2,\, k_2+1)}{G_1(k_2, k_3)} = \frac{(n+k_3+k_2+1)(n-2k_3-2)(n-2k_3-1)}{(3k_3-k_2+1)(3k_3-k_2+2)(3k_3-k_2+3)}, \tag{3.115}$$

то поскольку правые части — ограниченные функции, то бесконечный ряд

$$\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \tag{3.116}$$

сходится. Таким образом, подстановкой (3.110) функции (3.114), (3.115) приводятся к виду:

$$\lim_{t \to \infty} F_1(tl_2, tl_3) = -\frac{(l_3 + l_2)(-3l_3 + l_2)}{l_2^2\, 4}, \tag{3.117}$$

$$\lim_{t \to \infty} F_1(tl_2, tl_3) = -\frac{4(l_3 + l_2)l_3^2}{(-3l_3 + l_2)^3}. \tag{3.118}$$

Отсюда, принимая в (3.117) $l_2 = 1$, $l_3 = 0$, а в (3.118) $l_2 = 0$, $l_3 = 1$, получим искомые радиусы сходимости:

$$\left|\frac{a_1^2}{a_2}\right| < \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_2^3}{a_3^2}\right| < \frac{4}{27}. \tag{3.119}$$

Следовательно, гипергеометрическая функция:

$$A_1(n) = a_3^{(n-2)} a_2^2 \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} + a_1 a_3 a_3^{(n-2)} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{3k_3} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3},$$

$$Z_2 := \frac{a_1^2}{a_2}, \quad Z_3 := \frac{a_2^3}{a_3^2} \tag{3.120}$$

имеет область определения, определяемую ограничениями (3.119).

2) Представление коэффициента $A_2(n)$. Коэффициент $A_2(n)$:

$$A_2(n) = a_1^2 a_3^{(n-1)} \left(\sum_{k_2=0}^{n-1} \left(\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}+1\right]} \left(\left(\frac{\mathrm{P}(n, 2k_2 - k_1 + 1)\, \mathrm{P}(1, k_2)\, \mathrm{P}(n, k_1 - k_2)}{\mathrm{P}(n, k_1 - k_2 - 1)\, \mathrm{P}(2, 3k_2 - 2k_1 + 1)\; k_1!\, \mathrm{P}(n, -k_2)\; k_2!} \right) \left(z_1^{k_1} \right) \right) z_2^{k_2} \right) \right) \tag{3.121}$$

представляется как: (3.122)

$$A_2(n) = a_3^{(n-2)} a_2 \left(a_1 a_2 \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} + a_3 \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{3k_3+1} C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+1} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \right).$$

Совершенно аналогичным образом, как это исполнено для коэффициента $A_1(n)$, устанавливаем, что ряд:

$$A_2(n) = a_3^{(n-2)} a_2 \left(a_1 a_2 \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} + a_3 \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{3k_3+1} C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+1} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \right) \quad (3.123)$$

является гипергеометрической функцией и его область определения характеризуется формулами (3.119).

3) Представление коэффициента $A_3(n)$. Коэффициент $A_3(n)$:

$$A_3(n) = a_3^n \left(\sum_{k_2=0}^{n-1} \left(\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3k_2}{2}\right]} \left(\left(\frac{\mathrm{P}(n, -k_1+2k_2)\, \mathrm{P}(1, k_2)}{\mathrm{P}(1, 3k_2-2k_1)\, k_1!\, k_2!\, \mathrm{P}(n, -k_2)} \right) \cdot \left(z_1^{k_1} \right) \right) z_2^{k_2} \right) \right) \quad (3.124)$$

представляется следующим образом: (3.125)

$$A_3(n) = a_3^{(n-1)} \left(a_2 a_1 \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n}{2}-1\right]} \sum_{k_2=0}^{3k_3+2} C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2+1} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} + a_3 \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{3k_3} C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1} C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2} Z_2^{k_2} Z_3^{k_3} \right).$$

Совершенно аналогичным образом, как это исполнено для коэффициента $A_1\,(n)$, устанавливаем, что ряд:

$$A_3(n)=a_3^{(n-1)}\left(a_2a_1\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3+2}C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2+1}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}+a_3\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3}C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}\right)\quad(3.126)$$

является гипергеометрической функцией и его область определения характеризуется формулами (3.119).

Таким образом, уравнение n-образа для кубического уравнения (3.1) принимает вид:

$$x^{(3n)}=a_3^{(n-2)}x^2B_1(n)+a_3^{(n-2)}xB_2(n)+a_3^{(n-1)}B_3(n),\qquad(3.127)$$

где коэффициенты $B_i(n)$, $i=1,\ 2,\ 3$ определяются формулами: (3.128)

$$B_1(n)=a_2^2\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3+2}C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2}C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}+a_1a_3\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3}C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3},$$

$$B_2(n)=a_2\left(a_1a_2\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3+2}C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+2}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}+a_3\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3+1}C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2}^{3k_3-k_2+1}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}\right),$$

$$B_3(n)=a_2a_1\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3+2}C_{n+k_3+k_2}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2+1}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}+a_3\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{3k_3}C_{n+k_3+k_2-1}^{n+k_3-k_2-1}C_{n+k_3-k_2-1}^{3k_3-k_2}Z_2^{k_2}Z_3^{k_3}.$$

Из (3.127) получаем эквивалентное представление:

$$x_i^{(3n)}=\left(\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{(3n)}\left(a_3^{(-2)}x_i^2B_1(n)+a_3^{(-2)}x_iB_2(n)+a_3^{(-1)}B_3(n)\right),\quad i=1,\ 2,\ 3,\qquad(3.129)$$

где x_i — корни кубического уравнения (3.1), а параметры ω_i — удовлетворяют условию:

$$\omega_i^3=1,\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Таким образом, из (3.120), принимая последовательно $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, получим три системы линейных относительно $\{x,\ x^2\}$ уравнений:

$$x_i = \omega_i\, a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\frac{x_i^2 B_1\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^2} + \frac{x_i B_2\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^2} + \frac{B_3\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3}\right), \qquad x_i^2 = \omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{x_i^2 B_1\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^2} + \frac{x_i B_2\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^2} + \frac{B_3\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3}\right).$$

Решения этой системы определяются формулами Крамера: (3.130)

$$x_i = \frac{\begin{bmatrix} \dfrac{\omega_i B_3\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)}} & -\dfrac{\omega_i B_1\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{5}{3}\right)}} \\ \dfrac{\omega_i^2 B_3\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}} & -\dfrac{\omega_i^2 B_1\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{4}{3}\right)}} + 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\dfrac{\omega_i B_2\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{5}{3}\right)}} + 1 & -\dfrac{\omega_i B_1\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{5}{3}\right)}} \\ -\dfrac{\omega_i^2 B_2\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{4}{3}\right)}} & -\dfrac{\omega_i^2 B_1\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{4}{3}\right)}} + 1 \end{bmatrix}}, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \quad \omega_i = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 - I\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, доказана **ТЕОРЕМА 3.3: Корни кубического уравнения (3.1), при условии, что его коэффициенты a_i, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям (3.119), определяются формулами (3.130), где коэффициенты $B_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ вычисляются формулами (3.128).**

Совершенно аналогично можно показать, что для коэффициентов l-образа $A_i(l)$, $l = 1, 2, 3$ уравнения

$$x^{(6l)} = A_1(2l)\,x^2 + A_2(2l)\,x + A_3(2l), \tag{3.131}$$

где l — натуральное число, справедливы формулы: (3.132)

$$A_1(2l) = a_2^{(3l-1)} \sum_{k_2=0}^{3l-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2k_2}{3}\right]} C_{3l-2k_3+k_2-1}^{3l+k_3-k_2-1} C_{3l+k_3-k_2-1}^{k_3} \left(\frac{a_1^2}{a_2}\right)^{k_2} \left(\frac{a_3}{a_1^3}\right)^{k_3},$$

$$A_2(2l) = a_1 a_2^{(3l-1)} \sum_{k_2=0}^{3l-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2k_2}{3}+\frac{1}{3}\right]} C_{3l-2k_3+k_2-1}^{3l+k_3-k_2-2} C_{3l+k_3-k_2-1}^{k_3} \left(\frac{a_1^2}{a_2}\right)^{k_2} \left(\frac{a_3}{a_1^3}\right)^{k_3},$$

$$A_3(2l) = a_1 a_3 a_2^{(3l-2)} \sum_{k_2=0}^{3l-2} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2k_2}{3}+\frac{1}{3}\right]} C_{3l-2k_3+k_2-1}^{3l+k_3-k_2-2} C_{3l+k_3-k_2-2}^{k_3} \left(\frac{a_1^2}{a_2}\right)^{k_2} \left(\frac{a_3}{a_1^3}\right)^{k_3}.$$

Используя аналогичные приведенным математические подходы, можно выписать формулы для корней кубического уравнения (3.1) в области определения:

$$\left|\frac{a_1^2}{a_2}\right| \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{27}{4}. \tag{3.133}$$

Таким образом, другое представление гипергеометрических функций приводит к новой области определения для коэффициентов кубического уравнения, что в свою очередь дает новые формулы для его корней в этой установленной области. Следовательно, в общем случае, количество формул для вычисления корней кубического уравнения определяется количеством условий, охватывающих все возможные значения его коэффициентов. Это имеет место и для уравнений более высокой степени. В данной работе будем рассматривать только один главный вариант, определяющий корни заданного уравнения и соответственно его область определения. Производные от него варианты можно получить за счет преобразования области определения коэффициентов главного варианта.

3.7.2. Способ преобразования уравнения (3.1) к виду, при котором коэффициент $a_1 = 0$

Другим способом упрощения вида коэффициентов n-образа является преобразование его к виду, при котором коэффициент $a_1 = 0$. Это преобразование определяется равенством (3.2). В этом случае кубическое уравнение (3.1) принимает вид:

$$x^3 = a_2 x + a_3. \tag{3.134}$$

Тем не менее уравнение n-образа для (3.134) имеет тот же стандартный вид:

$$x^{(3n)} = A_1(n)\, x^2 + A_2(n)\, x + A_3(n). \tag{3.135}$$

В этом случае коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ определяются формулами (3.55), (3.56), (3.57), в которых коэффициент $a_1 = 0$. Произведем последовательно преобразование всех коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ к виду, при котором учтено требование $a_1 = 0$.

Выполнение этой операции требует оставить под знаком суммы только те слагаемые, в которых степень коэффициента a_1 в каждом значении $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяет условию:

$$3n - 3 + i - 2k_1 - 3k_2 = 0.$$

3.7.2.1. Преобразование коэффициента $A_1(n)$

Задача заключается в преобразовании коэффициента

$$A_1(n) = \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3n}{2} - 1 - \frac{3k_2}{2}\right]} C_{3n-2-k_1-2k_2}^{k_1+k_2} C_{k_1+k_2}^{k_1} a_1^{(3n-2-2k_1-3k_2)} a_2^{k_1} a_3^{k_2} \tag{3.136}$$

к виду, при котором в новой формуле коэффициент a_1 будет отсутствовать. Для этого степень коэффициента a_1 должна быть равна нулю, то есть должно иметь место равенство:

$$3n - 2 - 2k_1 - 3k_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$k_1 = \frac{3(n - k_2) - 2}{2}.$$

Данное равенство можно представить следующим образом:

$$k_1 = n - k_2 - 1 + \frac{n - k_2}{2}. \tag{3.137}$$

Так как по определению индекс k_1 — натуральное число, то индекс k_2 определяется формулой:

$$k_2 = n - 2i,$$

где i — новый индекс суммирования.

В этом случае индекс k_1 равен:

$$k_1 = 3i - 1. \tag{3.138}$$

Подставляя эти значения в формулу (3.136), получаем:

$$A_1(n) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-1+i}^{3i-1} a_2^{(3i-1)} a_3^{(n-2i)}. \tag{3.139}$$

3.7.2.2. Преобразование коэффициента $A_2(n)$

Задача заключается в преобразовании коэффициента

$$A_2(n) = \sum_{k_2=0}^{n-1} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3k_2}{2}\right]} C_{3n-2-k_1-2k_2}^{k_1+k_2-1} C_{k_1+k_2}^{k_1} a_1^{(3n-1-2k_1-3k_2)} a_2^{k_1} a_3^{k_2} \tag{3.140}$$

к виду, при котором в новой формуле коэффициент a_1 будет отсутствовать. Для этого степень коэффициента a_1 должна быть равна нулю, то есть должно иметь место равенство:

$$3n - 1 - 2k_1 - 3k_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$k_1 = \frac{3(n - k_2) - 1}{2}.$$

Данное равенство можно представить следующим образом:

$$k_1 = n - k_2 + \frac{n - k_2 - 1}{2}. \tag{3.141}$$

Так как по определению индекс k_1 — натуральное число, то индекс k_2 определяется формулой:

$$k_2 = n - 2i - 1,$$

где i — новый индекс суммирования.

В этом случае индекс k_1 равен:

$$k_1 = 3i + 1.$$

Подставляя эти значения в формулу (3.140), получаем:

$$A_2(n) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n}^{3i+1} a_2^{(3i+1)} a_3^{(n-2i-1)}. \tag{3.142}$$

3.7.2.3. Преобразование коэффициента $A_3(n)$

Задача заключается в преобразовании коэффициента

$$A_3(n) = \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{3n}{2} - \frac{3k_2}{2}\right]} C_{3n-k_1-2k_2-1}^{k_1+k_2-1} C_{k_1+k_2-1}^{k_1} a_1^{(3n-2k_1-3k_2)} a_2^{k_1} a_3^{k_2} \qquad (3.143)$$

к виду, при котором в новой формуле коэффициент a_1 будет отсутствовать. Для этого степень коэффициента a_1 должна быть равна нулю, то есть должно иметь место равенство:

$$3n - 2k_1 - 3k_2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$k_1 = \frac{3(n - k_2)}{2}.$$

Данное равенство можно представить следующим образом:

$$k_1 = n - k_2 + \frac{n - k_2}{2}. \qquad (3.144)$$

Так как по определению индекс k_1 — натуральное число, то индекс k_2 определяется формулой:

$$k_2 = n - 2i,$$

где i — новый индекс суммирования.

В этом случае, в соответствии с (3.144), индекс k_1 равен:

$$k_1 = 3i.$$

Подставляя эти значения в формулу (3.143), получаем:

$$A_3(n) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n-1}^{3i} a_2^{(3i)} a_3^{(n-2i)}. \qquad (3.145)$$

Таким образом, подставляя найденные формулы в (3.135), получаем уравнение n-образа:

$$x^{(3n)} = \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-1+i}^{3i-1} a_2^{(3i-1)} a_3^{(n-2i)}\right) x^2 + \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n}^{3i+1} a_2^{(3i+1)} a_3^{(n-2i-1)}\right) x + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n-1}^{3i} a_2^{(3i)} a_3^{(n-2i)}.$$

Преобразуем его к виду:

$$x^{(3n)} = a_3^n \left(a_2^{(-1)} \left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_{n-1+i}^{3i-1} Z^i\right) x^2 + a_2 a_3^{(-1)} \left(\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n}^{3i+1} Z^i\right) x + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{i+n-1}^{3i} Z^i \right). \qquad (3.146)$$

$$Z = \frac{a_2^3}{a_3^2}. \qquad (3.147)$$

Очевидно, что при условии $|Z| < \frac{4}{27}$ справедливо следующее представление для уравнения n-образа (3.146):

$$x^{(3n)} = a_3^n (a_2^{(-1)} B_1(n) x^2 + a_2 a_3^{(-1)} B_2(n) x + B_3(n)), \qquad (3.148)$$

где

$$B_1(n) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n-1+i}^{3i-1} Z^i, \qquad (3.149)$$

$$B_2(n) := \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n}^{1+3i} Z^i = n \operatorname{hypergeom}\left(\left[n+1, -\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], \frac{4Z}{27}\right), \qquad (3.150)$$

$$B_3(n) := \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+n-1}^{3i} Z^i = \operatorname{hypergeom}\left(\left[n, -\frac{n}{2}+1, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \frac{4Z}{27}\right). \qquad (3.151)$$

В соответствии со схемой, которая ранее использовалась, уравнение (3.148) представим в виде:

$$x^{(3n)} = \left(\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{(3n)} \left(a_2^{(-1)} B_1(n) x^2 + a_2 a_3^{(-1)} B_2(n) x + B_3(n)\right), \tag{3.152}$$

где

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = \frac{-1 + I\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 = \frac{-1 - I\sqrt{3}}{2}. \tag{3.153}$$

Сопоставляя каждому ω_i соответствующее значение x_i, $i = 1, 2, 3$, равенство (3.152) представим следующим образом:

$$x_i^{(3n)} = \left(\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{(3n)} \left(a_2^{(-1)} B_1(n) x_i^2 + a_2 a_3^{(-1)} B_2(n) x_i + B_3(n)\right).$$

Принимая в данном равенстве последовательно $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, получим три системы линейных уравнений относительно неизвестных $\{x, x^2\}$:

$$x_i = \omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{B_1\left(\frac{1}{3}\right) x_i^2}{a_2} + \frac{a_2 B_2\left(\frac{1}{3}\right) x_i}{a_3} + B_3\left(\frac{1}{3}\right) \right), \tag{3.154}$$

$$x_i^2 = \omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{B_1\left(\frac{2}{3}\right) x_i^2}{a_2} + \frac{a_2 B_2\left(\frac{2}{3}\right) x_i}{a_3} + B_3\left(\frac{1}{3}\right) \right). \tag{3.155}$$

Так как

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-\frac{2}{3}+i}^{3i-1}\,Z^i=-\frac{Z\,2^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\sqrt{81-12Z}\left(1+\frac{\sqrt{81-12Z}}{9}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}},\tag{3.156}$$

$$B_1\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{-\frac{1}{3}+i}^{3i-1}\,Z^i=-\frac{Z\,2^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{(81-12Z)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{81-12Z}}{9}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}},\tag{3.157}$$

$$B_2\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+\frac{1}{3}}^{1+3i}\,Z^i=\frac{(108+12\sqrt{81-12Z})^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{2\sqrt{81-12Z}},\tag{3.158}$$

$$B_2\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i+\frac{2}{3}}^{1+3i}\,Z^i=-\frac{36(-\sqrt{81-12Z}-9+Z)}{(9+\sqrt{81-12Z})\sqrt{81-12Z}\,(108+12\sqrt{81-12Z})^{\left(\frac{1}{3}\right)}},\tag{3.159}$$

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i-\frac{2}{3}}^{3i}\,Z^i=\frac{3\,(108+12\sqrt{81-12Z})^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{2\sqrt{81-12Z}},\tag{3.160}$$

$$B_3\left(\frac{2}{3}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}C_{i-\frac{1}{3}}^{3i}\,Z^i=\frac{18^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left((9+\sqrt{81-12Z})^2\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{2\sqrt{81-12Z}},\tag{3.161}$$

то искомые корни кубического уравнения (3.134) определяются в явном виде методом Крамера из системы линейных уравнений (3.154), (3.155):

$$x_i = \frac{\begin{bmatrix} \omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} B_3\left(\frac{1}{3}\right) & -\dfrac{\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} B_1\left(\frac{1}{3}\right)}{a_2} \\ \omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} B_3\left(\frac{2}{3}\right) & 1-\dfrac{\omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} B_1\left(\frac{2}{3}\right)}{a_2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\dfrac{\omega_i a_2 B_2\left(\frac{1}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)}}+1 & -\dfrac{\omega_i a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)} B_1\left(\frac{1}{3}\right)}{a_2} \\ -\dfrac{\omega_i^2 a_2 B_2\left(\frac{2}{3}\right)}{a_3^{\left(\frac{1}{3}\right)}} & 1-\dfrac{\omega_i^2 a_3^{\left(\frac{2}{3}\right)} B_1\left(\frac{2}{3}\right)}{a_2} \end{bmatrix}} \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3.162}$$

Таким образом, получены в явном виде (т. е. через радикалы) все три корня кубического уравнения (3.134). При этом они справедливы для любых, т. е. и комплексных значений коэффициентов этого уравнения. Это стало возможным только при условии, что полученные одномерные ряды определяются через гипергеометрические функции и при заданных значениях параметра n выражаются в радикалах.

▶ **Пример 1.** Вычислить корни кубического уравнения

$$x^3 = 5x - 7. \tag{3.163}$$

Решение. Так как $a_2 = 5$, $a_3 = -7$, то

$$Z := \frac{125}{49},\ \omega_1 := 1,\quad \omega_2 := -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2},\quad \omega_3 := -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, благодаря формулам (3.156)—(3.161) получаем:

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) := -.3871483002,\ B_1\left(\frac{2}{3}\right) := -.3730047756,\ B_2\left(\frac{1}{3}\right) := .4071887641,\ B_2\left(\frac{2}{3}\right) := .7382857131,$$

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right) := 1.221566292,\ B_3\left(\frac{2}{3}\right) := 1.176939330.$$

Таким образом, из (3.162) получаем искомые корни уравнения (3.163):

$$x_1 = 1.373673271 + .8129789411\,I,\ x_2 = -2.747346541,\ x_3 = 1.373673270 - .8129789413\,I.$$

Задача решена.

Примечание. Точные решения уравнения (3.152)

$$x_2 = -2.747346540,\ x_3 = 1.373673270 - .8129789415\,I,\ x_1 = 1.373673270 + .8129789415\,I.$$

▶ **Пример 2.** Вычислить корни кубического уравнения (3.94)

$$x^3 = 10x^2 - 5x + 1. \tag{3.164}$$

Решение. Так как $a_1 = 10$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$, то подстановкой (3.2):

$$x = \frac{10}{3} + y \tag{3.165}$$

уравнение (3.124) приводится к виду:

$$y^3 = \frac{1577}{27} + \frac{85y}{3}. \tag{3.166}$$

Применительно к нашему случаю: $a_2 = \frac{85}{3}$, $a_3 = \frac{1577}{27}$, поэтому

$$Z := \frac{16581375}{2486929},\ \omega_1 := 1, \quad \omega_2 := -\frac{1}{2} + \frac{I\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3 := -\frac{1}{2} - \frac{I\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, благодаря формулам (3.156) — (3.161) получаем:

$$B_1\left(\frac{1}{3}\right) := -9.913193808,\ B_1\left(\frac{2}{3}\right) := -8.148131847,\ B_2\left(\frac{1}{3}\right) := 2.476914692,\ B_2\left(\frac{2}{3}\right) := 2.441436141,$$

$$B_3\left(\frac{1}{3}\right) := 7.430744076,\ B_3\left(\frac{2}{3}\right) := 6.107686748.$$

Таким образом, из (3.162) получаем искомые корни уравнения (3.166):

$$y_1 := 6.150575864,\ y_2 := -3.075287933 + .1971150053\,I,\ y_3 := -3.075287933 - .1971150053\,I.$$

Возвращаясь к подстановке (3.165), получим искомые корни уравнения (3.164):

$$x_1 = 9.483909197,\ x_2 = .258045400 + .1971150053\,I,\ x_3 = .258045400 - .1971150053\,I.$$

Задача решена.

Примечание. Точные решения уравнения (3.153):

$$x_1 = 9.483909204,\ x_2 = .2580453979 + .1971150029\,I,\ x_3 = .2580453979 - .1971150029\,I.$$

Как видим, посредством замены удалось решить кубическое уравнение (3.94), которое до этого не решалось.

3.8. Приложение

Используем изложенную теорию для вычисления конечных сумм двукратных рядов вида, определяемого гипергеометрическими представлениями: (3.167)

$$A_1(n)=\sum_{k_3=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-2-3k_3}{2}\right]} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3} C_{k_2+k_3}^{k_2} a_1^{(3n-2-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3},$$

$$A_2(n)=\sum_{k_3=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-1-3k_3}{2}\right]} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3}^{k_2} a_1^{(3n-1-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_3=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n-3k_3}{2}\right]} C_{3n-k_2-2k_3-1}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3-1}^{k_2} a_1^{(3n-2k_2-3k_3)} a_2^{k_2} a_3^{k_3}.$$

С этой целью воспользуемся специальным кубическим уравнением:

$$(x-x_0)^3=0,$$

корни которого все равны.

В этом случае, представляя его в приведенной форме, имеем:

$$x^3=3x^2x_0-3xx_0^2+x_0^3.$$

Отсюда следует

$$a_1:=3x_0,\ a_2:=-3x_0^2,\ a_3:=x_0^3.$$

Подставляя эти значения в формулы (3.167), будем иметь:

$$A_1(n) = \left(\frac{1}{9}\right) \cdot 3^{(3n)} x_0^{(3n-2)} \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2} - 1 - \frac{3k_3}{2}\right]} (-1)^{(-k_2)} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3} C_{k_2+k_3}^{k_2} 3^{(-3k_3-k_2)},$$

$$A_2(n) = 3^{(3n)} x_0^{(3n-1)} \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3k_3}{2}\right]} (-1)^{(-k_2)} 3^{(-1-k_2-3k_3)} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3}^{k_2},$$

$$A_3(n) = 3^{(3n)} x_0^{(3n)} \sum_{k_3=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2} - \frac{3k_3}{2}\right]} (-1)^{(-k_2)} C_{3n-k_2-2k_3-1}^{k_2+k_3-1} C_{k_2+k_3-1}^{k_2} 3^{(-3k_3-k_2)}.$$

С другой стороны, ранее были получены формулы для $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$ в форме (3.26). Тогда, поскольку все корни в этих равенствах равны, то, учитывая это, получаем:

$$\left[\lim_{x_2 \to x_3} \lim_{x_1 \to x_2} A_1(n)\right]_{x_3 = x_0} = \frac{3n x_0^{(3n-2)}(3n-1)}{2},$$

$$\left[\lim_{x_2 \to x_3} \lim_{x_1 \to x_2} A_2(n)\right]_{x_3 = x_0} = -3n x_0^{(3n-1)}(3n-2),$$

$$\left[\lim_{x_2 \to x_3} \lim_{x_1 \to x_2} A_3(n)\right]_{x_3 = x_0} = \frac{x_0^{(3n)}(3n-1)(3n-2)}{2}.$$

Приравнивая теперь полученные правые части этих равенств с аналогичными значениями (3.26), в итоге получаем искомые формулы:

$$\sum_{k_3=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2}-1-\frac{3k_3}{2}\right]}(-1)^{(-k_2)}C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3}C_{k_2+k_3}^{k_2}3^{(-3k_3-k_2)}=\frac{27^{(1-n)}n(3n-1)}{2},$$

$$\sum_{k_3=0}^{n-1}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}\right]}(-1)^{(-k_2)}3^{(-1-k_2-3k_3)}C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3-1}C_{k_2+k_3}^{k_2}=-3^{(1-3n)}n(3n-2),$$

$$\sum_{k_3=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{3k_3}{2}\right]}(-1)^{(-k_2)}C_{3n-k_2-2k_3-1}^{k_2+k_3-1}C_{k_2+k_3-1}^{k_2}3^{(-3k_3-k_2)}=\frac{27^{(-n)}(3n-1)(3n-2)}{2}.$$

Как видим, получены значения весьма сложных двукратных сумм, которые могут быть использованы в качестве как справочного материала, так и для апробации других новых методов вычисления сумм двукратных рядов.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Пусть задано алгебраическое уравнение четвертой степени в приведенной форме:

$$x^4 = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \quad a_4 \neq 0, \tag{4.1}$$

где a_i, $i = 1..4$ — заданные действительные или комплексные числа.

Ставится задача нахождения всех корней $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ алгебраического уравнения (4.1). Решение этой задачи производится методом, идентичным для кубического уравнения.

4.1. Преобразования

В связи с тем, что подстановки, упрощающие вид исходного алгебраического уравнения (4.1), также серьезно упрощают и определение его решения, то получаем следующие результаты:

а) Подстановка

$$x = \frac{a_1}{4} + y \tag{4.2}$$

приводит уравнение (4.1) к виду:

$$y^4 = \left(a_2 + \frac{3a_1^2}{8}\right)y^2 + \left(\frac{a_1^3}{8} + a_3 + \frac{a_2a_1}{2}\right)y + \frac{3a_1^4}{256} + \frac{a_3a_1}{4} + \frac{a_2a_1^2}{16} + a_4. \tag{4.3}$$

b) Преобразованием Чирнгауза

$$y = x^2 + Ax + B, \tag{4.4}$$

где параметр A является корнем алгебраического уравнения:

$$\left(\frac{a_2}{6} + \frac{a_1^2}{16}\right)A^2 + \left(\frac{a_1^3}{8} + \frac{a_3}{2} + \frac{5a_1a_2}{12}\right)A + \frac{a_1^2a_2}{4} + \frac{a_1^4}{16} + \frac{a_2^2}{12} + \frac{a_1a_3}{3} + \frac{a_4}{3} = 0, \tag{4.5}$$

а
$$B = -\frac{Aa_1}{4} - \frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{4}, \qquad (4.6)$$

исходное уравнение (4.1) преобразуется к новому алгебраическому уравнению четвертой степени более простой формы:
$$y^4 + c_1 y + c_2 = 0. \qquad (4.7)$$

$$c_1 = (-4Aa_1^2a_4 - 4Aa_1^3a_3 - a_1^3a_4 - 6A^2a_2a_3 - 12ABa_4 - 4a_1^2Ba_3 - 4A^3a_1a_3 - 2a_3a_4 - 2a_1a_3^2 - 6a_1^2A^2a_3 - 4Ba_2a_3 - 12A^2Ba_3 - 6a_1A^2a_4 - 2a_1a_2a_4 - 3a_1^2a_2a_3 - a_1^4a_3 - a_2^2a_3 - 4Aa_2a_4 - 4a_1Ba_4 - 12ABa_1a_3 - 8Aa_1a_2a_3 - 4Aa_3^2 - A^4a_3 - 4AB^3 - 4A^3a_4 - 6B^2a_3)/A.$$

$$c_2 = -B^4 - (-4Aa_1^2a_4 - 4Aa_1^3a_3 - a_1^3a_4 - 6A^2a_2a_3 - 12ABa_4 - 4a_1^2Ba_3 - 4A^3a_1a_3 - 2a_3a_4 - 2a_1a_3^2 - 6a_1^2A^2a_3 - 4Ba_2a_3 - 12A^2Ba_3 - 6a_1A^2a_4 - 2a_1a_2a_4 - 3a_1^2a_2a_3 - a_1^4a_3 - a_2^2a_3 - 4Aa_2a_4 - 4a_1Ba_4 - 12ABa_1a_3 - 8Aa_1a_2a_3 - 4Aa_3^2 - A^4a_3 - 4AB^3 - 4A^3a_4 - 6B^2a_3)B/A - 4A^3a_1a_4 - 4Aa_1^3a_4 - 8Aa_1a_2a_4 - a_1^4a_4 - 3a_1^2a_2a_4 - 4a_1^2Ba_4 - 6a_1^2A^2a_4 - 2a_1a_3a_4 - 4Ba_2a_4 - 6A^2a_2a_4 - a_2^2a_4 - 12ABa_1a_4 - 4Aa_3a_4 - 12A^2Ba_4 - a_4^2 - A^4a_4 - 6B^2a_4.$$

4.2. *n*-Образ алгебраического уравнения четвертой степени

Правую и левую части уравнения (4.1) возведем в степень n:
$$x^{(4n)} = (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)^n. \qquad (4.8)$$

Алгебраическое уравнение (4.8) является уравнением степени $4n$ и заведомо содержит все корни исходного уравнения (4.1). Правая часть этого уравнения при условии, что n — натуральное число, является алгебраическим уравнением степени $3n$ и принимает вид:
$$(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)^n = \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \sum_{i_3=0}^{n-i_1-i_2} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} C_{n-i_1-i_2}^{i_3} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} a_4^{(n-i_1-i_2-i_3)} x^{(3i_1+2i_2+i_3)}. \qquad (4.9)$$

Способом, совершенно аналогичным, как это сделано для кубических уравнений, приходим к представлению уравнения (4.9) в виде:

$$x^{(4n)} = A_1(n)\,x^3 + A_2(n)\,x^2 + A_3(n)\,x + A_4(n) \qquad (4.10)$$

или к эквивалентному представлению:

$$(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4)^n = A_1(n)\,x^3 + A_2(n)\,x^2 + A_3(n)\,x + A_4(n), \qquad (4.11)$$

где $A_i(n)$, $i = 1..4$ — многочлен коэффициентов a_1, a_2 .. a_4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. **Алгебраическое уравнение (4.10) (или эквивалентное ему (4.11)) называется n-образом алгебраического уравнения (4.1), а $A_i(n)$, $i = 1$ .. 4 называются коэффициентами n-образа.**

Вычисление коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1$ .. 4 производится с использованием уравнений (4.9), (4.10) (или (4.11)), с учетом исходного уравнения (4.1).

▶ **Пример:** Вычислить значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1$ .. 4 для случаев $n = 1, 2$:

Решение. Принимая в (4.11) $n = 1$, получим:

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = A_1(1)\,x^3 + A_2(1)\,x^2 + A_3(1)\,x + A_4(1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2, 3$, устанавливаем:

$$A_1(1) = a_1,\ A_2(1) = a_2,\ A_3(1) = a_3,\ A_4(1) = a_4. \qquad (4.12)$$

Снова принимая в (4.11) $n = 2$, получим:

$$(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) = A_1(2)\,x^3 + A_2(2)\,x^2 + A_3(2)\,x + A_4(2).$$

Раскрывая скобки в левом выражении, получим:

$$a_1^2x^6 + 2a_1x^5a_2 + (a_2^2 + 2a_3a_1)\,x^4 + (2a_2a_3 + 2a_1a_4)\,x^3 + (2a_2a_4 + a_3^2)\,x^2 + 2a_3xa_4 + a_4^2 = \qquad (4.13)$$
$$= A_1(2)\,x^3 + A_2(2)\,x^2 + A_3(2)\,x + A_4(2).$$

Исходное уравнение (4.1) дает равенства:

$$x^4 = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$
$$x^5 = (a_2 + a_1^2)\,x^3 + (a_3 + a_1a_2)\,x^2 + (a_4 + a_3a_1)\,x + a_1a_4,$$
$$x^6 = (a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,x^3 + (a_4 + a_3a_1 + a_2a_1^2 + a_2^2)\,x^2 + (a_1a_4 + a_1^2a_3 + a_2a_3)\,x + a_4\,(a_2 + a_1^2).$$

Подставляя эти равенства в (4.13), имеем:

$$(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + 4a_1^3a_2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + a_1^5)\,x^3 + (a_1^2a_4 + a_1^3a_3 + a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + 3a_2^2a_1^2 + a_2^3 + a_3^2 + 4a_1a_2a_3)\,x^2 +$$
$$+ (a_1^3a_4 + 2a_1a_2a_4 + a_1^4a_3 + 2a_3a_4 + 3a_2a_1^2a_3 + a_2^2a_3 + 2a_3^2a_1)\,x + a_4(a_4 + 3a_2a_1^2 + a_2^2 + a_1^4 + 2a_3a_1) =$$
$$= A_1(2)\,x^3 + A_2(2)\,x + A_3(2)\,x + A_4(2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2, 3$, устанавливаем:

$$A_1(2) = 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + 4a_1^3a_2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + a_1^5, \tag{4.14}$$
$$A_2(2) = a_1^2a_4 + a_1^3a_3 + a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + 3a_2^2a_1^2 + a_2^3 + a_3^2 + 4a_1a_2a_3,$$
$$A_3(2) = a_1^3a_4 + 2a_1a_2a_4 + a_1^4a_3 + 2a_3a_4 + 3a_2a_1^2a_3 + a_2^2a_3 + 2a_3^2a_1,$$
$$A_4(2) = a_4(a_4 + 3a_2a_1^2 + a_2^2 + a_1^4 + 2a_3a_1).$$

Задача решена.

Совершенно аналогичным образом можно получать значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 4$ и для любых других значений параметра n.

4.3. Свойства *n*-образа

СВОЙСТВО 1. **Уравнение n-образа имеет степень $3n$ (или $2n$) и содержит все корни исходного уравнения (4.1).**

Данное свойство очевидно, так как уравнение n-образа (4.10) (или (4.11)) следует из уравнения (4.1), для которого это условие заведомо выполнено.

СВОЙСТВО 2. Коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ определяются рекуррентными соотношениями: (4.15)

$$\begin{aligned}
&A_1(n+1) = (a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_1^4 + 3a_1^2a_2)\,A_1(n) + (a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)\,A_2(n) + (a_2 + a_1^2)\,A_3(n) + A_4(n)\,a_1,\\
&A_2(n+1) = (a_1a_4 + a_1^2a_3 + 2a_1a_2^2 + 2a_2a_3 + a_1^3a_2)\,A_1(n) + (a_4 + a_2^2 + a_1^2a_2 + a_1a_3)\,A_2(n) + (a_3 + a_1a_2)\,A_3(n) + A_4(n)\,a_2,\\
&A_3(n+1) = (a_1^3a_3 + a_1^2a_4 + a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 + a_3^2)\,A_1(n) + (a_1^2a_3 + a_1a_4 + a_2a_3)\,A_2(n) + (a_4 + a_1a_3)\,A_3(n) + A_4(n)\,a_3,\\
&A_4(n+1) = a_4(a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)\,A_1(n) + a_4(a_2 + a_1^2)\,A_2(n) + A_3(n)\,a_1a_4 + A_4(n)\,a_4.
\end{aligned}$$

Доказательство. Принимая в (4.10) $n = n + 1$, получаем:

$$x^{(4n+4)} = A_1(n+1)\,x^3 + A_2(n+1)\,x^2 + A_3(n+1)\,x + A_4(n+1).$$

Тогда с учетом (4.10) и (4.1) отсюда следует:

$$\begin{gathered}
(A_1(n)\,x^3 + A_2(n)\,x^2 + A_3(n)\,x + A_4(n))(a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) =\\
= A_1(n+1)\,x^3 + A_2(n+1)\,x^2 + A_3(n+1)\,x + A_4(n+1)
\end{gathered}$$

Раскрывая скобки в левой части этого равенства и далее приводя подобные члены, получим:

$$\begin{gathered}
(A_1(n)\,a_4 + A_2(n)\,a_3 + A_3(n)\,a_2 + A_4(a)\,a_1 + 2A_1(n)\,a_1a_3 + 3A_1(n)a_1^2a_2 + 2A_2(n)\,a_1a_2 + A_1(n)a_2^2 +\\
+ A_1(n)a_1^4 + A_2(n)a_1^3 + A_3(n)a_1^2)\,x^3 + (A_2(n)\,a_4 + A_4(n)\,a_2 + A_3(n)\,a_3 + A_1(n)\,a_1a_4 + A_1(n)a_1^2a_3 +\\
+ A_2(n)\,a_1a_3 + 2A_1(n)\,a_2a_3 + A_1(n)a_1^3a_2 + A_2(n)a_1^2a_2 + 2A_1(n)a_1a_2^2 + A_3(n)\,a_1a_2 + A_2(n)a_2^2)\,x^2 +\\
+ (A_3(n)\,a_4 + A_4(n)\,a_3 + A_1(n)a_1^2a_4 + A_2(n)\,a_1a_4 + A_1(n)\,a_2a_4 + A_1(n)a_1^3a_3 + A_2(n)a_1^2a_3 + A_3(n)\,a_1a_3 +\\
+ A_2(n)\,a_2a_3 + 2A_1(n)\,a_1a_2a_3 + A_1(n)a_3^2)\,x + a_4(A_2(n)\,a_2 + A_4(n) + A_3(n)\,a_1 + 2A_1(n)\,a_1a_2 +\\
+ A_1(n)a_1^3 + A_2(n)a_1^2 + A_1(n)\,a_3) = A_1(n+1)\,x^3 + A_2(n+1)\,x^2 + A_3(n+1)\,x + A_4(n+1)
\end{gathered}$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2$, получаем формулы (4.15).

Эти формулы позволяют легко получать все значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Действительно, принимая, например, в формулах (4.15) $n = 1$, получаем:

$$\begin{aligned}
&A_1(2) = (a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_1^4 + 3a_1^2a_2)\,A_1(1) + (a_3 + a_1^3 + 2a_1a_2)\,A_2(1) + (a_2 + a_1^2)\,A_3(1) + A_4(1)\,a_1,\\
&A_2(2) = (a_1a_4 + a_1^2a_3 + 2a_1a_2^2 + 2a_2a_3 + a_1^3a_2)\,A_1(1) + (a_4 + a_2^2 + a_1^2a_2 + a_1a_3)\,A_2(1) + (a_3 + a_1a_2)\,A_3(1) + A_4(1)\,a_2,
\end{aligned}$$

$$A_3(2) = (a_1^3 a_3 + a_1^2 a_4 + a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 + a_3^2)\,A_1(1) + (a_1^2 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3)\,A_2(1) + (a_4 + a_1 a_3)\,A_3(1) + A_4(1)\,a_3,$$
$$A_4(2) = a_4(a_3 + a_1^3 + 2a_1 a_2)\,A_1(1) + a_4(a_2 + a_1^2)\,A_2(1) + A_3(1)\,a_1 a_4 + A_4(1)\,a_4.$$

С учетом (4.12) имеем:

$$A_1(2) = 2a_1 a_4 + 3a_1^2 a_3 + 3a_1 a_2^2 + a_1^5 + 4a_1^3 a_2 + 2a_2 a_3,$$
$$A_2(2) = a_1^2 a_4 + a_1^3 a_3 + 3a_1^2 a_2^2 + 4a_1 a_2 a_3 + a_1^4 a_2 + 2a_2 a_4 + a_2^3 + a_3^2,$$
$$A_3(2) = a_1^4 a_3 + a_1^3 a_4 + 2a_1 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_2 a_3 + 2a_1 a_3^2 + a_2^2 a_3 + 2a_3 a_4,$$
$$A_4(2) = 2a_3 a_1 a_4 + a_1^4 a_4 + 3a_1^2 a_4 a_2 + a_2^2 a_4 + a_4^2.$$

Сравнивая полученные значения с (4.14), устанавливаем, что они совпадают. Таким образом, пользуясь формулами (4.15), последовательно находим $A_i(n)$, $i = 1\,..\,4$, $n = 3, 4, 5, \ldots$.

СВОЙСТВО 3. **Существует строгая связь между коэффициентами n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ и корнями алгебраического уравнения (4.1), а именно: если известны различные корни алгебраического уравнения (4.1) — $x = \{x_i,\ i = 1, 2, 3, 4\}$, то коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, определяются однозначно формулами:** (4.16)

$$A_1(n) = \frac{x_1^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} - \frac{x_2^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \frac{x_3^{(4n)}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(-x_4 + x_3)} - \frac{x_4^{(4n)}}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(-x_4 + x_3)}$$

$$A_2(n) = \frac{(x_2 + x_4 + x_3)\,x_1^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \frac{(x_1 + x_4 + x_3)\,x_2^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} - \frac{(x_1 + x_4 + x_2)\,x_3^{(4n)}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(-x_4 + x_3)} + \frac{(x_1 + x_3 + x_2)\,x_4^{(4n)}}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(-x_4 + x_3)}$$

$$A_3(n) = \frac{(x_3 x_2 + x_4 x_2 + x_3 x_4)\,x_1^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} - \frac{(x_3 x_1 + x_4 x_1 + x_3 x_4)\,x_2^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + \frac{(x_2 x_1 + x_4 x_1 + x_4 x_2)\,x_3^{(4n)}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(-x_4 + x_3)} - \frac{(x_2 x_1 + x_3 x_1 + x_3 x_2)\,x_4^{(4n)}}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(-x_4 + x_3)}$$

$$A_4(n) = -\frac{x_4 x_2 x_3 x_1^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \frac{x_4 x_1 x_3 x_2^{(4n)}}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} - \frac{x_4 x_2 x_1 x_3^{(4n)}}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(-x_4 + x_3)} + \frac{x_2 x_1 x_3 x_4^{(4n)}}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(-x_4 + x_3)}$$

Доказательство. Действительно, в соответствии со свойством 1, корни исходного уравнения (4.1) заведомо являются также корнями уравнения n-образа (4.10).

Следовательно,

$$x_i^{(4n)} = A_1(n)x_i^3 + A_2(n)x_i^2 + A_3(n)x_i + A_4(n), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получим формулы (4.16). Свойство 3 доказано.

Подставляя формулы (4.16) в рекуррентные соотношения (4.15), получим новые четыре соотношения между корнями алгебраического уравнения (4.1), отличные от определяемых теоремой Виета, в силу наличия произвольного параметра n. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $n = 1$ эти формулы совпадают с соотношениями, определяемыми теоремой Виета для уравнения четвертой степени.

4.4. Определение общих формул для коэффициентов *n*-образа

Так как в соответствии со свойством 3 была доказана прямая связь между значениями коэффициентов n-образа и корнями исходного уравнения (4.1), то крайне важной является задача определения общих формул представления для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Вычислим, используя рекуррентные соотношения (4.15), значения для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ при $n = 1,\ 2,\ 3$.

$A_1(1) = a_1,\ \ A_2(1) = a_2,\ \ A_3(1) = a_3,\ \ A_4(1) = a_4.$

$A_1(2) = 2a_1a_4 + 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 4a_1^3a_2 + 2a_2a_3.$
$A_2(2) = a_1^2a_4 + a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 + 4a_1a_2a_3 + a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + a_2^3 + a_3^2.$
$A_3(2) = a_1^4a_3 + a_1^3a_4 + 2a_1a_2a_4 + 3a_1^2a_2a_3 + 2a_1a_3^2 + a_2^2a_3 + 2a_3a_4.$
$A_4(2) = 2a_3a_1a_4 + a_1^4a_4 + 3a_1^2a_4a_2 + a_2^2a_4 + a_4^2.$

$$A_1(3) = 3a_1a_4^2 + 6a_4a_1^5 + 10a_1^3a_3^2 + 7a_1^6a_3 + 5a_2^4a_1 + 30a_1^2a_3a_2^2 + 30a_1^4a_3a_2 + 12a_1a_3^2a_2 + 12a_4a_1^2a_3 +$$
$$+ 12a_4a_1a_2^2 + 20a_4a_1^3a_2 + 6a_4a_2a_3 + a_1^9 + a_3^3 + 21a_2^2a_1^5 + 20a_2^3a_1^3 + 4a_2^3a_3 + 8a_1^7a_2.$$

$$A_2(3) = 18a_1a_4a_2a_3 + 3a_1^2a_4^2 + a_1^6a_4 + 5a_1^4a_3^2 + a_1^7a_3 + 10a_1^2a_2^4 + 7a_1^6a_2^2 + 15a_1^4a_2^3 + 6a_2^2a_3^2 + a_1^8a_2 + 3a_2a_4^2 +$$
$$+ 4a_4a_2^3 + 8a_1^3a_4a_3 + 18a_1^2a_4a_2^2 + 10a_1^4a_4a_2 + 30a_1^3a_3a_2^2 + 12a_1^5a_3a_2 + 18a_1^2a_3^2a_2 + 16a_1a_2^3a_3 + a_2^5 + 3a_4a_3^2 + 3a_1a_3^3.$$

$$A_3(3) = 24a_1^2a_4a_2a_3 + 10a_1^4a_3a_4 + 15a_1^4a_3a_2^2 + 7a_1^6a_3a_2 + 20a_1^3a_3^2a_2 + 10a_1^3a_4a_2^2 + 6a_1^5a_4a_2 + 6a_2a_4^2a_1 +$$
$$+ 4a_2^3a_4a_1 + 6a_2^2a_4a_3 + 10a_1^2a_2^3a_3 + 12a_1a_2^2a_3^2 + 9a_3^2a_1a_4 + 6a_1^5a_3^2 + a_1^8a_3 + 4a_1^3a_4^2 + a_1^7a_4 + 6a_3^3a_1^2 + 3a_3^3a_2 +$$
$$+ a_2^4a_3 + 3a_3a_4^2.$$

$$A_4(3) = a_4(10a_1^2a_2^3 + 6a_1^2a_3^2 + 6a_3a_1a_4 + 12a_3a_1a_2^2 + 20a_3a_1^3a_2 + a_4^2 + 12a_1^2a_4a_2 + 6a_3a_1^5 + 3a_2a_3^2 + 15a_1^4a_2^2 +$$
$$+ 7a_1^6a_2 + 5a_1^4a_4 + a_1^8 + 3a_2^2a_4 + a_2^4).$$

Анализируя вычисленные значения для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, устанавливаем, что в общей форме эти коэффициенты определяются суммой слагаемых вида $B(k_1, k_2, k_3, k_4)\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}$, где $B(k_1, k_2, k_3, k_4)$ — некоторый числовой коэффициент, являющийся целым числом, а k_i, $i = 1, 2, 3, 4$ показатели степени. При этом выясняется следующая закономерность: **если установить комбинированный параметр:**

$$\mathrm{K}(n) = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4, \tag{4.17}$$

то для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_1(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n - 3. \tag{4.18}$$

Действительно, возьмем, например, первое слагаемое в $A_1(3)$: $3a_1a_4^2$. Тогда сумма степеней, в соответствии с (4.17), для него равна: $-1 + 2(0) + 3(0) + 4(2) = 9$. В то же время в соответствии с формулой (4.18) имеем: $4(3) - 3 = 9$. Как видим, результаты совпали.

Для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_2(n)$, параметр (4.17) принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n - 2,$$

и для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_3(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n - 1,$$

для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_4(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n.$$

Таким образом, общая формула для всех степеней слагаемых многочленов, образующих коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$, определяется формулой:

$$4n - 4 + i = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4, \quad i = 1 \,..\, 4. \tag{4.19}$$

4.4.1. Вывод общих формул для коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$

Показатели слагаемых $a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, a_3^{k_3}, a_4^{k_4}$ многочлена для коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ удовлетворяют формуле (4.19).

Отсюда следует, что

$$k_1 = 4n - 4 + i - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4.$$

Таким образом, слагаемые многочлена, определяющего вид коэффициента $A_i(n)$, определяются видом:

$$a_1^{(4n - 4 + i - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}. \tag{4.20}$$

Поскольку параметр k_1, принимая значение, равное нулю, определяет при этом максимальное значение парметра $k_{2,\,\max}$, то из этого равенства получим:

$$0 = 4n - 3 - 2k_{2,\,\max} - 3k_3 - 4k_4.$$

Таким образом,

$$k_{2,\,\max} = \left[\frac{4n - 4 + i - 3k_3 - 4k_4}{2} \right]. \tag{4.21}$$

Здесь квадратные скобки означают выполнение операции округления дроби до наименьшего целого числа вниз.

Снова принимая в (4.21) $k_{2,\,\max} = 0$, получаем равенство:

$$4n - 4 + i - 3k_{3,\,\max} - 4k_4 = 0.$$

Отсюда имеем:

$$k_{3,\,\max} = \left[\frac{4n - 4 + i - 4k_4}{3} \right]. \tag{4.22}$$

Таким образом, с учетом (4.20), (4.21), (4.22) формула для нахождения коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$ может быть записана следующим образом:

$$A_i(n) = \sum_{k_4 = 0}^{n-1} \sum_{k_3 = 0}^{\left[\frac{4n-4+i-4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2 = 0}^{\left[\frac{4n-4+i-3k_3-4k_4}{2}\right]} B_i(k_1, k_2, k_3, k_4, n)\, a_1^{(4n-4+i-2k_2-3k_3-4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}. \tag{4.23}$$

Очевидно, что нахождение коэффициентов $B_i(k_1, k_2, k_3, k_4, n)$ необходимо производить по формуле:

$$B_i(k_1, k_2, k_3, k_4, n) = \prod_{j=1}^{3} C_{\left(\sum\limits_{s=2}^{4} c_{s,j}^{i} k_i\right) + b_{i,j} n + k_{i,j}}^{\left(\sum\limits_{s=2}^{4} b_{s,j}^{i} k_i\right) + r_{i,j} n + m_{i,j}}.$$

Это следует из вида формул для квадратного и кубического уравнений.

Для нахождения коэффициентов $B_i(k_1, k_2, k_3, k_4, n)$ воспользуемся методом аналогии. С этой целью расмотрим аналогичное представление коэффициентов для алгебраического уравнения второго и третьего порядков. В частности, для коэффициента $A_1(n)$ искомое значение $B_1(k_1, k_2, k_3, k_4, n)$ определяется формулой:

для уравнения второго порядка: $C_{2n-k_2-1}^{k_2}$,

для уравнения третьего порядка: $C_{3n-2-k_1-2k_2}^{k_1+k_2} C_{k_1+k_2}^{k_1}$.

Следовательно, для уравнения четвертой степени необходимо принять:

$$B_1(k_1, k_2, k_3, k_4, n) = C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3k_4} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3}.$$

Проверка показывает, что выбор сделан правильно. Действительно, возьмем, например, первое слагаемое в $A_1(3)$: $3a_1a_4^2$. Здесь $k_2 = 0$, $k_3 = 0$, $k_4 = 2$. Следовательно, в соответствии с формулой (4.24) имеем:

$$C_{4(3)-3-0-2(0)-3(2)}^{0+0+2} C_{0+0+2}^{0} C_{2+0}^{0} = 3,$$

что совпадает с полученным значением.

Совершенно аналогичным образом устанавливаем значение $B_2(k_1, k_2, k_3, k_4, n)$ для коэффициента $A_2(n)$:

$$B_2(k_1, k_2, k_3, k_4, n) = C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3},$$

для коэффициента $A_3(n)$:

$$B_3(k_1, k_2, k_3, k_4, n) = C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3},$$

для коэффициента $A_4(n)$:

$$B_4(k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4,\, n) = C^{k_2 + k_3 + k_4 - 1}_{4n - 1 - k_2 - 2k_3 - 3k_4}\, C^{k_2}_{k_2 + k_3 + k_4 - 1} C^{k_3}_{k_4 + k_3 - 1}.$$

Подставляя полученные значения $B_i(k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4,\, n)$, $i = 1,\, 2\, ..\, 4$ в (4.23), в итоге получаем искомые значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$. (4.25)

$$A_1(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3} - 1 - \frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n - \frac{3}{2} - \frac{3k_3}{2} - 2k_4\right]} C^{k_2 + k_3 + k_4}_{4n - 3 - k_2 - 2k_3 - 3k_4}\, C^{k_2}_{k_2 + k_3 + k_4}\, C^{k_3}_{k_4 + k_3}\, a_1^{(4n - 3 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}.$$

$$A_2(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3} - \frac{2}{3} - \frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n - 1 - \frac{3k_3}{2} - 2k_4\right]} C^{k_2 + k_3 + k_4 - 1}_{4n - 3 - k_2 - 2k_3 - 3k_4}\, C^{k_2}_{k_2 + k_3 + k_4}\, C^{k_3}_{k_4 + k_3}\, a_1^{(4n - 2 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}.$$

$$A_3(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n - \frac{1}{2} - \frac{3k_3}{2} - 2k_4\right]} C^{k_2 + k_3 + k_4 - 1}_{4n - 2 - k_2 - 2k_3 - 3k_4}\, C^{k_2}_{k_2 + k_3 + k_4 - 1} C^{k_3}_{k_4 + k_3}\, a_1^{(4n - 1 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}.$$

$$A_4(n) = \sum_{k_4=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3} - \frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n - \frac{3k_3}{2} - 2k_4\right]} C^{k_2 + k_3 + k_4 - 1}_{4n - 1 - k_2 - 2k_3 - 3k_4}\, C^{k_2}_{k_2 + k_3 + k_4 - 1} C^{k_3}_{k_4 + k_3 - 1}\, a_1^{(4n - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}.$$

Справедливость полученных формул доказывается методом математической индукции, аналогично тому, как это выполнено для случая квадратного уравнения.

4.4.2. Гипергеометрическая форма представления коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1 .. 4$

Полученные конечные суммы для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\ 2\ ..\ 4$ определены для любых целых натуральных значений n. Вводя новые переменные:

$$z_1 = \frac{a_2}{a_1^2},\ z_2 = \frac{a_3}{a_1^3},\ z_3 = \frac{a_4}{a_1^4}, \tag{4.26}$$

представим формулы (4.25) следующим образом: (4.27)

$$A_1(n) = a_1^{(4n-3)} \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-1-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

$$A_2(n) = a_1^{(4n-2)} \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-\frac{2}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-1-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

$$A_3(n) = a_1^{(4n-1)} \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

$$A_4(n) = a_1^{(4n)} \sum_{k_4=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-1-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-1}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4}.$$

Будем считать, что коэффициенты a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 4$ уравнения (4.1) выбраны таким образом, что правые части при заданном значении n из поля действительных чисел представляют собой сходящиеся ряды. В этом случае справедлива **ТЕОРЕМА 4.1: Коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2 .. 4$, определяемые формулами (4.27), представляют собой трехмерные гипергеометрические функции** (4.28)

$$A_1(n) = a_1^{(4n-3)}\left(\sum_{k_4=0}^{\infty}\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P(3-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{P(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!k_3!k_4!}\right)\right)\right),$$

$$A_2(n) = \left(\frac{a_1^{(4n-2)}}{2(2n-1)}\right)\cdot\left(\sum_{k_4=0}^{\infty}\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P(2-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)(k_2+k_3+k_4)\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{P(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!k_3!k_4!}\right)\right)\right),$$

$$A_3(n) = \left(\frac{a_1^{(4n-1)}}{4n-1}\right)\cdot\left(\sum_{k_4=0}^{\infty}\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P(1-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)(k_4+k_3)\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{P(2-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!k_3!k_4!}\right)\right)\right),$$

$$A_4(n) = \left(\frac{a_1^{(4n)}}{4n}\right)\cdot\left(\sum_{k_4=0}^{\infty}\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{P(-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)\,k_4\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{k_4!\,P(1-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_3!k_2!}\right)\right)\right),$$

где

$$r_1 = \frac{a_2}{a_1^2},\quad r_2 = \frac{a_3}{a_1^3},\quad r_3 = \frac{a_4}{a_1^4} \tag{4.29}$$

с областью определения:

$$|r_3| < \frac{27}{256},\quad |r_2| < \frac{4}{27},\quad |r_1| < \frac{1}{4}. \tag{4.30}$$

Доказательство. Докажем Теорему 4.1 для коэффициента $A_1(n)$, так как для других она доказывается аналогично.

Вводя обозначение:

$$F(k_2, k_3, k_4) = C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4}\,C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\,C_{k_3+k_4}^{k_3}$$

и следуя горновскому определению, составим соотношения: (4.31)

$$f_1(k_2, k_3, k_4) := \frac{F(k_2+1, k_3, k_4)}{F(k_2, k_3, k_4)} = \frac{(4n-4-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)}{(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)(k_2+1)},$$

$$f_2(k_2, k_3, k_4) := \frac{F(k_2, k_3+1, k_4)}{F(k_2, k_3, k_4)} = \frac{(4n-5-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-4-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)}{(4n-4-k_2-2k_3-3k_4)(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)(k_3+1)},$$

$$f_3(k_2, k_3, k_4) := \frac{F(k_2, k_3, k_4+1)}{F(k_2, k_3, k_4)} =$$

$$= \frac{(4n-6-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-5-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-4-2k_2-3k_3-4k_4)(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)}{(4n-5-k_2-2k_3-3k_4)(4n-4-k_2-2k_3-3k_4)(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)(k_4+1)}.$$

Так как порядки полиномов числителей и знаменателей во всех формулах равны, то отсюда следует, что соответствующие бесконечные ряды сходятся условно и имеют конечные радиусы сходимости. Действуя по схеме Горна, вычислим эти радиусы. Для этого в формулах (4.31) введем преобразования:

$$k_2 = sl_2,\ \ k_3 = sl_3,\ \ k_4 = sl_4,$$

где l_2, l_3, l_4 — параметры, принимающие значение в интервале [0, 1], а параметр s принимает значение в интервале $[0, \infty)$.

Тогда получим:

$$f_1(sl_2, sl_3, sl_4) := \frac{(4n-4-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-3-2sl_2-3sl_3-4sl_4)}{(4n-3-sl_2-2sl_3-3sl_4)(sl_2+1)},$$

$$f_2(sl_2, sl_3, sl_4) := \frac{(4n-5-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-4-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-3-2sl_2-3sl_3-4sl_4)}{(4n-4-sl_2-2sl_3-3sl_4)(4n-3-sl_2-2sl_3-3sl_4)(sl_3+1)},$$

$$f_3(sl_2,\, sl_3,\, sl_4) :=$$
$$= \frac{(4n-6-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-5-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-4-2sl_2-3sl_3-4sl_4)(4n-3-2sl_2-3sl_3-4sl_4)}{(4n-5-sl_2-2sl_3-3sl_4)(4n-4-sl_2-2sl_3-3sl_4)(4n-3-sl_2-2sl_3-3sl_4)(sl_4+1)}.$$

Отсюда получим равенства:

$$R_1(l_2,\, l_3,\, l_4) := \lim_{s\to\infty} f_1(sl_2,\, sl_3,\, sl_4) = -\frac{(2l_2+3l_3+4l_4)^2}{(l_2+2l_3+3l_4)\,l_2},$$

$$R_2(l_2,\, l_3,\, l_4) := \lim_{s\to\infty} f_2(sl_2,\, sl_3,\, sl_4) = -\frac{(2l_2+3l_3+4l_4)^3}{(l_2+2l_3+3l_4)^2\,l_3},$$

$$R_3(l_2,\, l_3,\, l_4) := \lim_{s\to\infty} f_3(sl_2,\, sl_3,\, sl_4) = -\frac{(2l_2+3l_3+4l_4)^4}{(l_2+2l_3+3l_4)^3\,l_4}.$$

Таким образом, в соответствии со схемой Горна искомые радиусы сходимости равны:

$$p_1 := \frac{1}{|R_1(1,0,0)|} = \frac{1}{4}, \quad p_2 := \frac{1}{|R_2(0,1,0)|} = \frac{4}{27}, \quad p_3 := \frac{1}{|R_3(0,0,1)|} = \frac{27}{256}.$$

Следовательно, тройной ряд, определяющий гипергеометрическую функцию $A_1(n)$, сходится при условии, что имеют место неравенства (4.30). Изложенного достаточно, чтобы сделать вывод о соответствии тройного степенного ряда, из (4.27), определяющего значение коэффициента $A_1(n)$, гипергеометрической функции:

$$A_1(n) = a_1^{(4n-3)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4}\, C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\, C_{k_4+k_3}^{k_3}\, z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4}. \tag{4.32}$$

Совершенно аналогичным образом доказывается, что $A_i(n)$, $i = 2\ ..\ 4$. (4.33)

$$A_2(n) = a_1^{(4n-2)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

$$A_3(n) = a_1^{(4n-1)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

$$A_4(n) = a_1^{(4n)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-1-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-1}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4},$$

также являются трехмерными гипергеометрическими функциями, имеющими область определения (4.30).

4.4.3. Преобразование к стандартному гипергеометрическому представлению коэффициента $A_1(n)$

Преобразуем формулу, определяющую значение коэффициента $A_1(n)$ в форме (4.32), к Похгаммеровскому представлению.

Так как

$$C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)!}{(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)!\,k_2!\,k_3!\,k_4!} \tag{4.34}$$

то в соответствии с формулой:

$$(l+k-1)! = \mathrm{P}(l, k)(l-1)!$$

имеем:

$$(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)! = \mathrm{P}(4n-2,\,-k_2-2k_3-3k_4)\,(4n-3)! \tag{4.35}$$
$$(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)! = \mathrm{P}(4n-2,\,-2k_2-3k_3-4k_4)\,(4n-3)!$$

Так как индексы суммирования входят в эти формулы с отрицательными знаками, то воспользуемся формулой:

$$\mathrm{P}(a,\,-k) = \frac{(-1)^k}{\mathrm{P}(1-a,\,k)}.$$

В этом случае формулы (4.35) примут вид:

$$(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)! = \frac{(-1)^{(k_2+2k_3+3k_4)}(4n-3)!}{\mathrm{P}(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)},$$

$$(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)! = \frac{(-1)^{(2k_2+3k_3+4k_4)}(4n-3)!}{\mathrm{P}(3-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)}.$$

Подставляя эти значения в (4.35) и далее в (4.34), получаем:

$$C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4}\,C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\,C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(-1)^{(-k_2-k_3-k_4)}\,\mathrm{P}(3-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)!}{\mathrm{P}(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!\,k_3!\,k_4!}.$$

Таким образом, (4.32) в итоге принимает вид:

$$A_1(n) = a_1^{(4n-3)}\left(\sum_{k_4=0}^{\infty}\left(\sum_{k_3=0}^{\infty}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\mathrm{P}(3-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{\mathrm{P}(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!\,k_3!\,k_4!}\right)\right)\right), \tag{4.36}$$

где

$$r_1 = -z_1,\ r_2 = -z_2,\ r_3 = -z_3. \tag{4.37}$$

4.4.4. Преобразование к стандартному гипергеометрическому представлению коэффициента $A_2(n)$

Преобразуем формулу

$$A_2(n) = a_1^{(4n-2)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4}$$

к Похгаммеровскому представлению.

Так как

$$C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)!\,(k_2+k_3+k_4)}{(4n-2-2k_2-3k_3-4k_4)!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}, \tag{4.38}$$

то в соответствии с формулой:

$$(l+k-1)! = \mathrm{P}(l, k)(l-1)!$$

имеем:

$$(4n-2-2k_2-3k_3-4k_4)! = \mathrm{P}(4n-1, -2k_2-3k_3-4k_4)(4n-2)! \tag{4.39}$$
$$(4n-3-k_2-2k_3-3k_4)! = \mathrm{P}(4n-2, -k_2-2k_3-3k_4)(4n-3)!$$

Так как индексы суммирования входят в эти формулы с отрицательными знаками, то воспользуемся равенством:

$$\mathrm{P}(a, -k) = \frac{(-1)^k}{\mathrm{P}(1-a, k)}.$$

В этом случае получим:

$$\mathrm{P}(4n-1, -2k_2-3k_3-4k_4) = \frac{(-1)^{(2k_2+3k_3+4k_4)}}{\mathrm{P}(2-4n, 2k_2+3k_3+4k_4)},$$

$$\mathrm{P}(4n-2, -k_2-3k_3-3k_4) = \frac{(-1)^{(k_2+2k_3+3k_4)}}{\mathrm{P}(3-4n, k_2+2k_3+3k_4)}.$$

Подставляя эти формулы в (4.39) и далее в (4.38), имеем:

$$C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1}\,C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\,C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4)}\,\mathrm{P}(2-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)(k_2+k_3+k_4)}{2\mathrm{P}(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)(2n-1)\,k_2!\,k_3!\,k_4!}.$$

Таким образом, коэффициент $A_2(n)$ принимает искомое представление:

$$A_2(n) = \frac{a_1^{(4n-2)}}{2(2n-1)}\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} = \frac{\mathrm{P}(2-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)(k_2+k_3+k_4)\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{\mathrm{P}(3-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_2!\,k_3!\,k_4!}. \qquad (4.40)$$

4.4.5. Преобразование к стандартному гипергеометрическому представлению коэффициента $A_3(n)$

Преобразуем формулу

$$A_3(n) = a_1^{(4n-1)}\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1}\,C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2}\,C_{k_4+k_3}^{k_3}\,z_1^{k_2}z_2^{k_3}z_3^{k_4} \qquad (4.41)$$

к Похгаммеровскому представлению.

Так как

$$C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1}\,C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2}\,C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(4n-2-k_2-2k_3-3k_4)!\,(k_4+k_3)!}{(4n-1-2k_2-3k_3-4k_4)!\,k_2!\,(k_4+k_3-1)!\,k_3!\,k_4!}, \qquad (4.42)$$

то в соответствии с формулой:

$$(l+k-1)! = \mathrm{P}(l,\,k)(l-1)!$$

имеем:

$$(4n-2-k_2-2k_3-3k_4)! = \mathrm{P}(4n-1,\, -k_2-2k_3-3k_4)(4n-2)! \tag{4.43}$$

$$(4n-1-2k_2-3k_3-4k_4)! = \mathrm{P}(4n,\, -2k_2-3k_3-4k_4)(4n-1)! \tag{4.44}$$

Так как индексы суммирования входят в эти формулы с отрицательными знаками, то воспользуемся формулой:

$$\mathrm{P}(a, -k) = \frac{(-1)^k}{\mathrm{P}(1-a, k)}.$$

В этом случае получим:

$$\mathrm{P}(4n-1,\, -k_2-2k_3-3k_4) = \frac{(-1)^{(k_2+2k_3+3k_4)}}{\mathrm{P}(2-4n,\, k_2+2k_3+3k_4)},$$

$$\mathrm{P}(4n,\, -2k_2-3k_3-4k_4) = \frac{(-1)^{(2k_2+3k_3+4k_4)}}{\mathrm{P}(1-4n,\, 2k_2+3k_3+4k_4)}.$$

Подставляя эти формулы в (4.43), (4.44) и далее в (4.42), имеем:

$$C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1}\, C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2}\, C_{k_4+k_3}^{k_3} = \frac{(-1)^{(-k_2-k_3-k_4)}\,\mathrm{P}(1-4n,\, 2k_2+3k_3+4k_4)(k_4+k_3)}{\mathrm{P}(2-4n,\, k_2+2k_3+3k_4)(4n-1)\, k_2!\, k_3!\, k_4!}.$$

Таким образом, искомое представление коэффициента $A_3(n)$ (4.41) принимает вид:

$$A_3(n) = \frac{a_1^{(4n-1)}}{4n-1}\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} = \frac{\mathrm{P}(1-4n,\, 2k_2+3k_3+4k_4)(k_4+k_3)\, r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4}}{\mathrm{P}(2-4n,\, k_2+2k_3+3k_4)\, k_2!\, k_3!\, k_4!}. \tag{4.45}$$

4.4.6. Преобразование к стандартному гипергеометрическому представлению коэффициента $A_4(n)$

Преобразуем формулу

$$A_4(n) = a_1^{(4n)} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} C_{4n-k_2-2k_3-3k_4-1}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-1}^{k_3} z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4} \tag{4.46}$$

к Похгаммеровскому представлению.

Так как

$$C_{4n-k_2-2k_3-3k_4-1}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-1}^{k_3} = \frac{(4n-k_2-2k_3-3k_4-1)!}{(4n-2k_2-3k_3-4k_4)!\,k_2!\,k_3!\,(k_4-1)!}, \tag{4.47}$$

то в соответствии с формулой:

$$(l+k-1)! = \mathrm{P}(l, k)(l-1)!$$

имеем:

$$(4n-k_2-2k_3-3k_4-1)! = \mathrm{P}(4n, -k_2-2k_3-3k_4)(4n-1)! \tag{4.48}$$

$$(4n-2k_2-3k_3-4k_4)! = \mathrm{P}(4n+1, -2k_2-3k_3-4k_4)(4n)! \tag{4.49}$$

Так как индексы суммирования входят в эти формулы с отрицательными знаками, то воспользуемся формулой:

$$\mathrm{P}(a, -k) = \frac{(-1)^k}{\mathrm{P}(1-a, k)}.$$

В этом случае получим:

$$\mathrm{P}(4n+1, -2k_2-3k_3-4k_4) = \frac{(-1)^{(2k_2+3k_3+4k_4)}}{\mathrm{P}(-4n, 2k_2+3k_3+4k_4)},$$

$$\mathrm{P}(4n, -k_2-2k_3-3k_4) = \frac{(-1)^{(k_2+2k_3+3k_4)}}{\mathrm{P}(1-4n, k_2+2k_3+3k_4)}.$$

Подставляя эти формулы в (4.48), (4,49) и далее в (4.47), имеем:

$$C_{4n-k_2-2k_3-3k_4-1}^{k_2+k_3+k_4-1}\,C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2}\,C_{k_4+k_3-1}^{k_3}=\frac{(-1)^{(-k_2-k_3-k_4)}\,\mathrm{P}(-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)}{\mathrm{P}(1-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,n\,k_2!\,k_3!\,(k_4-1)!\,4}.$$

Таким образом, искомая форма коэффициента $A_4\,(n)$ (4.46) принимает вид:

$$A_4\,(n)=\frac{a_1^{(4n)}}{4n}\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}=\frac{\mathrm{P}(-4n,\,2k_2+3k_3+4k_4)\,k_4\,r_1^{k_2}r_2^{k_3}r_3^{k_4}}{k_4!\,\mathrm{P}(1-4n,\,k_2+2k_3+3k_4)\,k_3!\,k_2!}. \qquad (4.50)$$

Теорема доказана.

4.5. Формула для корней уравнения четвертой степени

Докажем, что справедлива **ТЕОРЕМА 4.2. Корни алгебраического уравнения четвертой степени (4.1), где a_i, $i = 1, 2\,..\,4$ коэффициенты, удовлетворяющие условиям (4.30), а $A_i\,(n)$, $i = 1, 2\,..\,4$ — определяются (4.36), (4.40), (4.45), (4.50), находятся в соответствии с формулами:**

$$\boldsymbol{x_i=\frac{R_i}{G_i},\ \ i=1,2\,..\,4,} \qquad (4.51)$$

где

$$\boldsymbol{R_i}=\begin{bmatrix}\omega_i\boldsymbol{A_4}\left(\frac{1}{4}\right) & -\omega_i\boldsymbol{A_2}\left(\frac{1}{4}\right) & -\omega_i\boldsymbol{A_1}\left(\frac{1}{4}\right)\\ \omega_i^2\boldsymbol{A_4}\left(\frac{1}{2}\right) & 1-\omega_i^2\boldsymbol{A_2}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^2\boldsymbol{A_1}\left(\frac{1}{2}\right)\\ \omega_i^3\boldsymbol{A_4}\left(\frac{3}{4}\right) & -\omega_i^3\boldsymbol{A_2}\left(\frac{3}{4}\right) & 1-\omega_i^3\boldsymbol{A_1}\left(\frac{3}{4}\right)\end{bmatrix}, \qquad (4.52)$$

$$\boldsymbol{G}_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \boldsymbol{A}_3\left(\frac{1}{4}\right)+\mathbf{1} & -\omega_i \boldsymbol{A}_2\left(\frac{1}{4}\right) & -\omega_i \boldsymbol{A}_1\left(\frac{1}{4}\right) \\ -\omega_i^2 \boldsymbol{A}_3\left(\frac{1}{2}\right) & \mathbf{1}-\omega_i^2 \boldsymbol{A}_2\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^2 \boldsymbol{A}_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\omega_i^3 \boldsymbol{A}_3\left(\frac{3}{4}\right) & -\omega_i^3 \boldsymbol{A}_2\left(\frac{3}{4}\right) & \mathbf{1}-\omega_i^3 \boldsymbol{A}_1\left(\frac{3}{4}\right) \end{bmatrix},$$

$$\omega_1 = -1,\ \omega_2 = 1,\ \omega_3 = I,\ \omega_4 = -I. \qquad (4.53)$$

***I* — мнимая единица.**
ω_i **— корни алгебраического уравнения**

$$\omega^4 = \mathbf{1}. \qquad (4.54)$$

Доказательство: Так как n-образ для алгебраического уравнения (4.1) представляется равенством:

$$x^{(4n)} = A_1(n)\,x^3 + A_2(n)\,x^2 + A_3(n)\,x + A_4(n), \qquad (4.55)$$

где $A_i(n)$, $i = 1,\ 2\ ..\ 4$ — определяются формулами (4.36), (4.40), (4.45), (4.50), то введем параметр ω, удовлетворяющий условию (4.54). Очевидно, что в этом случае также выполняется равенство:

$$\omega^{(4n)} = 1,$$

где n — произвольное натуральное число.

Следовательно, формально уравнение (4.55) можно записать следующим образом:

$$x^{(4n)} = \omega^{(4n)}(A_1(n)\,x^3 + A_2(n)\,x^2 + A_3(n)\,x + A_4(n)). \qquad (4.56)$$

Так как коэффициенты исходного уравнения (4.1) a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 4$ удовлетворяют условиям (4.30), то это позволяет формально расширить область определения параметра n и на множество действительных чисел. Поэтому задавая ему формально значения: $n = \frac{i}{4}$, $i = 1, 2, 3$, равенство (4.56) образует систему алгебраических уравнений:

$$x^i = \omega^i\left(A_1\left(\frac{i}{4}\right)x^3 + A_2\left(\frac{i}{4}\right)x^2 + A_3\left(\frac{i}{4}\right)x + A_4\left(\frac{i}{4}\right)\right), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.57}$$

Так как параметр ω принимает в соответствии с (4.53) четыре разных значения: $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, то сопоставим каждому из них соответствующее искомое значение $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Следовательно, образуются четыре системы алгебраических уравнений вида (4.57),

$$x_k^i = \omega_k^i\left(A_1\left(\frac{i}{4}\right)x_k^3 + A_2\left(\frac{i}{4}\right)x_k^2 + A_3\left(\frac{i}{4}\right)x_k + A_4\left(\frac{i}{4}\right)\right), \quad i = 1, 2, 3,\ k = 1, 2 \,..\, 4. \tag{4.58}$$

каждое из которых содержит только один различный корень уравнения (4.1):

Решая последовательно системы алгебраических уравнений (4.58), в итоге получаем методом Крамера значения корней (4.51). Теорема 4.2 доказана.

Отметим, что для вычисления корней алгебраического уравнения (4.1), используя Теорему 4.2, необходимо вычислять суммы рядов (4.30), т. е. уметь вычислять тройные бесконечные ряды вида:

$$\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} A(k_1, k_2, k_3).$$

В общем случае для вычисления суммы этого бесконечного тройного ряда недостаточно указать вид функции $A(k_1, k_2, k_3)$, необходимо также задать последовательность частичных сумм, пределом которых по определению и будет сумма указанного ряда. Например, суммой по кубу называется:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k_3=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{N}\sum_{k_1=0}^{N} A(k_1, k_2, k_3),$$

а суммой по треугольным призмам:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k_3=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_3-k_2}A(k_1,\,k_2,\,k_3-k_2-k_1) \tag{4.59}$$

с использованием рекуррентных соотношений, обходящих случаи, когда (вместе или раздельно) $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при верхнем пределе по k_3, равном N, сумма (4.59) включает в себя все целые точки $\{k_1, k_2, k_3\}$, которые принадлежат призме в положительном квадрантном пространстве, отсекающем оси в точках $\{[N, 0, 0], [0, N, 0], [0, 0, N]\}$, т. е. здесь частичные суммы отвечают суммированию по призмам.

Выделяя последовательно нулевые значения индексов из (4.59), получим:

$$\sum_{k_3=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_3-k_2}A(k_1,\,k_2,\,k_3-k_2-k_1) = \tag{4.60}$$

$$=\sum_{k_3=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{k_3}\sum_{k_1=1}^{k_3-k_2}A(k_1,\,k_2,\,k_3-k_2-k_1)+\sum_{k_3=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{k_3}A(0,\,k_2,\,k_3-k_2)+\sum_{k_3=1}^{N}\sum_{k_1=1}^{k_3}A(k_1,\,0,\,k_3-k_1)+A(0,\,0,\,0).$$

Данная формула определяет структуру вложенных циклов алгоритма вычисления, а алгоритм обладает достаточно хорошей эффективностью.

Так как полученные корни $x_i = x_i(N)$, $i = 1, 2 .. 4$ уравнения (4.1) являются функцией от параметра N, то относительная ошибка вычисления x_i, $i = 1, 2 .. 4$ будет определяться формулой:

$$\delta_i(N) = \left|\frac{x_i(N)^4 - a_1x_i(N)^3 - a_2x_i(N)^2 - a_3x_i(N) - a_4}{a_4}\right|, \quad i = 1,\, 2\, ..\, 4. \tag{4.61}$$

4.6. Преобразование гипергеометрических функций

4.6.1. Новые представления для гипергеометрических функций

Поскольку формулы для корней алгебраического уравнения (4.1) в форме Теоремы 4.2 требуют особых преобразований для использования в качестве вычислительного алгоритма, то рассмотрим и другие представления для гипергеометрических функций (4.30), лишенные этого недостатка. В частности, производя замену индекса k_4 на $-k_4 + n - 1$ в первых трех представлениях (4.25) и замену индекса суммирования k_4 на $-k_4 + n$ в четвертом представлении, получим: (4.62)

$$A_1(n)=\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1}C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2}C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,a_1^{(1-2k_2-3k_3+4k_4)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_2(n)=\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2}C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2}C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,a_1^{(2-2k_2-3k_3+4k_4)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[1+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n+1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2}\,C_{k_2+k_3-k_4+n-2}^{k_2}C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,a_1^{(3-2k_2-3k_3+4k_4)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_4(n)=\sum_{k_4=0}^{n}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1}\,C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2}C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,a_1^{(-2k_2-3k_3+4k_4)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{(-k_4+n)}.$$

Как видим, в этих формулах параметр n находится только в верхнем пределе суммирования последней суммы, поэтому данные формулы легко применимы для непосредственного вычисления корней уравнения (4.1), в форме: (4.63)

$$A_1(n)=\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\, a_1^{(1-2k_2-3k_3+4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_2(n)=\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\, a_1^{(2-2k_2-3k_3+4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\left[1+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n+1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2} C_{k_2+k_3-k_4+n-2}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\, a_1^{(3-2k_2-3k_3+4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{(-k_4+n-1)},$$

$$A_4(n)=\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\, a_1^{(-2k_2-3k_3+4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{(-k_4+n)}.$$

Область определения этих гипергеометрических функций определяется методом, аналогичным ранее изложенным:

$$\left|\frac{a_1^4}{a_4}\right| < \frac{256}{27}, \quad \left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{4}{27}. \qquad (4.64)$$

Таким образом, доказана **ТЕОРЕМА 4.3. Корни уравнения (4.1) при условии, что его коэффициенты удовлетворяют условию (4.64), определяются формулами (4.51), (4.52), где коэффициенты n-образа задаются (4.63).**

▶ **Пример 1.** Вычислить корни уравнения

$$x^4 = 16 + x^3 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{8} \tag{4.65}$$

при условии, что для его вычислений используются только первые одиннадцать слагаемых в рядах (4.63).

Решение: Проверяем, удовлетворяют ли условиям (4.64) коэффициенты уравнения (4.63), т. е. выполняются ли условия:

$$\left|\frac{a_1^4}{a_4}\right| < \frac{256}{27}, \quad \left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{4}{27}.$$

В данном случае имеем:

$$\frac{1}{16} < \frac{256}{27}, \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} < \frac{4}{27}.$$

Как видим, условия выполнены, поэтому вычисляем по формулам (4.63) для $N = 10$ (т. е. в этих формулах заменяем бесконечность на данное значение) коэффициенты n-образа:

$$A_3\left(\frac{1}{4}\right) = .1960340501\text{e-}2,\ A_1\left(\frac{1}{4}\right) = .3111925206\text{e-}1,\ A_2\left(\frac{1}{4}\right) = -.1558710980\text{e-}1,\ A_4\left(\frac{1}{4}\right) = 1.995992480,$$

$$A_2\left(\frac{1}{2}\right) = -.4675562884\text{e-}1,\ A_3\left(\frac{1}{2}\right) = .7828556656\text{e-}2,\ A_1\left(\frac{1}{2}\right) = .1245299440,\ A_4\left(\frac{1}{2}\right) = 3.987861261,$$

$$A_2\left(\frac{3}{4}\right) = -9355482320\text{e-}1,\ A_1\left(\frac{3}{4}\right) = .3740822495,\ A_4\left(\frac{3}{4}\right) = 7.979122396,\ A_3\left(\frac{3}{4}\right) = .3126218834\text{e-}1.$$

Таким образом, искомые корни уравнения (4.65) будут равны:

$$x_1 = –1.770834452,\ x_2 = 2.294234895,\ x_3 = .2382997775 + 1.970144916\,I,$$
$$x_4 = .2382997775 - 1.970144916\,I.$$

Точность вычислений равна:

$$\delta(x_1) = .1656250000\text{e-}8,\ \delta(x_2) = .2050000000\text{e-}8,\ \delta(x_3) = .3245796561\text{e-}9,\ \delta(x_3) = .3245796561\text{e-}9.$$

Задача решена.

Примечание: Как видим, уже при $N = 10$ точность вычислений очень высока.

▶ **Пример 2.** Вычислить корни уравнения

$$x^4 = 6656 + 12Ix^3 - 5x^2 + 12x$$

при условии, что для его вычислений используются только первые одиннадцать слагаемых в рядах (4.63).

Решение: Проверяем удовлетворяют ли условиям (4.64) коэффициенты исходного уравнения:

$$\frac{81}{26} < \frac{256}{27},\quad \frac{5}{144} < \frac{1}{4},\quad \frac{1}{144} < \frac{4}{27}.$$

Как видим, условия выполнены, поэтому вычисляем по формулам (4.63) для $N = 10$ (т. е. в этих формулах заменяем бесконечность на данное значение) коэффициенты n-образа:

$$A_4\left(\frac{1}{4}\right) = 8.452956812 - .2404695652\text{e-}1\,I,\ A_1\left(\frac{1}{4}\right) = .2716265991\text{e-}4 + .3384788391\text{e-}2\,I,$$

$$A_3\left(\frac{1}{4}\right) = .4638348567\text{e-}2 + .8721800263\text{e-}1\,I,\ A_2\left(\frac{1}{4}\right) = .1436183731\text{e-}1 - .7244676238\text{e-}4\,I,$$

$$A_1\left(\frac{1}{2}\right) = .3722689581\text{e-}3 + .6180627305\text{e-}1\,I,\;\; A_4\left(\frac{1}{2}\right) = 72.49285758 - .2607383740\,I,$$
$$A_3\left(\frac{1}{2}\right) = .7825671676\text{e-}1 + 1.206616985\,I,\;\; A_2\left(\frac{1}{2}\right) = .1581668036 - .4748277136\text{e-}3\,I,$$

$$A_4\left(\frac{3}{4}\right) = 658.6605575 - 1.622577438\,I,\;\; A_1\left(\frac{3}{4}\right) = .2868060183\text{e-}2 + .8871199474\,I,$$
$$A_2\left(\frac{3}{4}\right) = .8461261820 + .3782047542\text{e-}3\,I,\;\; A_3\left(\frac{3}{4}\right) = 1.002179927 + 9.286071117\,I.$$

Таким образом, искомые корни исходного алгебраического уравнения будут равны:

$$x_1 = -7.652720199 + 2.287364335\,I,\;\; x_2 = 7.718056290 + 2.316048873\,I,$$
$$x_3 = -.3870111780\text{e-}1 + 14.51932115\,I,\;\; x_4 = -.2670358121\text{e-}1 - 7.122598340\,I.$$

Относительная ошибка вычислений равна:

$$\delta(x_1) = .5855773306\text{e-}5,\;\; \delta(x_2) = .6068250876\text{e-}5,\;\; \delta(x_3) = .8720401906\text{e-}4,\;\; \delta(x_4) = .2694017773\text{e-}5.$$

Задача решена с высокой точностью.

4.7. Формулы для корней при $a_1 = 0$, $a_2 = 0$

Исследование алгебраического уравнения (4.1) в общем случае представляет довольно сложную задачу из-за наличия трехкратных рядов в гипергеометрических функциях коэффициентов n-образа. Теория сходимости таких рядов представляет собой слабо исследованную область современной математики. Обойти это препятствие можно применением ранее введенных преобразований (4.2), (4.3), которые приводят исходное уравнение (4.1) к более простому виду.

Таким образом, если только:

1) $a_1 = 0$ — трехмерные ряды для коэффициентов n-образа переходят в двухмерные.

2) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ — трехмерные ряды для коэффициентов n-образа переходят в одномерные.

3) $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ — трехмерные ряды для коэффициентов n-образа переходят в одномерные.

Самыми интересными, с точки зрения конечного результата, являются второй и третий случаи. При этом третий случай фактически повторяет второй. Действительно, в этом случае алгебраическое уравнение (4.1) принимает вид:

$$x^4 = a_1 x^3 + a_4. \tag{4.66}$$

Выполняя подстановку:

$$x = \frac{1}{z}, \tag{4.67}$$

получим:

$$\frac{1}{z^4} = \frac{a_1}{z^3} + a_4.$$

Выполняя умножение обеих частей этого равенства на z^4 и выделяя старшую степень по z, получим:

$$z^4 = \frac{1}{a_4} - \frac{z a_1}{a_4}. \tag{4.68}$$

Таким образом, получен второй вариант, поэтому только его и будем рассматривать. В этом случае уравнение (4.1) принимает вид:

$$x^4 = a_3 x + a_4. \tag{4.69}$$

Воспользуемся для преобразований гипергеометрическими представлениями вида (4.52).

4.7.1. Преобразование коэффициента $A_1(n)$

Он определяется формулой:

$$A_1(n)=\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-1-\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4}\,C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\,C_{k_4+k_3}^{k_3}\,a_1^{(4n-3-2k_2-3k_3-4k_4)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}. \quad (4.70)$$

Очевидно, что если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то во всех трех суммах останутся только те члены, в которых показатель степени равен нулю. Отсюда следует:

$$4n - 3 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 = 0,\ \ k_2 = 0.$$

Отсюда из первого равенства следует:

$$k_3 = \frac{4n}{3} - 1 - \frac{2k_2}{3} - \frac{4k_4}{3}.$$

Представим его в виде:

$$k_3 = n - k_4 - 1 + \left[\frac{n-k_4}{3}\right].$$

Последнее равенство (в скобках) может быть выполнено только тогда, когда

$$n - k_4 = 3i,\ \ i \text{ — новый индекс суммирования.}$$

Диапазон его изменения определяется диапазоном изменения k_4.

При $k_4 = 0$, $n = 3i$, $i = \left[\frac{n}{3}\right]$

$k_4 = n - 1$, $1 = 3i$,
$k_4 = n - 2$, $2 = 3i$,
$k_4 = n - 3$, $3 = 3i$.

В итоге

$$k_4 = n - 3i,\ k_э = 3i - 1 + \frac{3i}{3} = 4i - 1.$$

Тройная сумма в (4.70) переходит в простую сумму по индексу i вида:

$$A_1(n) = a_4^n a_3^{(-1)} \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} C_{n+i-1}^{4i-1} \left(\frac{a_3^4}{a_4^3}\right)^i.$$

Переходя стандартным образом к суммированию начиная с нуля, получим в итоге:

$$A_1(n) = a_4^{(n-3)} a_3^3 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]-1} C_{n+i}^{4i+3} \left(\frac{a_3^4}{a_4^3}\right)^i. \qquad (4.71)$$

Переходя к гипергеометрическому представлению, имеем:

$$A_1(n) = a_4^{(n-3)} a_3^3\, C_n^3 \operatorname{hypergeom}\left(\left[n+1,\ -\frac{1n}{3}+1,\ -\frac{1n}{3}+\frac{5}{3},\ -\frac{1n}{3}+\frac{4}{3}\right],\ \left[\frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4}\right],\ \frac{27a_3^4}{256a_4^3}\right). \qquad (4.72)$$

4.7.2. Преобразование коэффициента $A_2(n)$

Он определяется формулой:

$$A_2(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-\frac{2}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-1-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1}\, C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\, C_{k_4+k_3}^{k_3}\, a_1^{(4n-2-2k_2-3k_3-4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}. \qquad (4.73)$$

Очевидно, что если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то во всех трех суммах останутся только те члены, в которых показатель степени равен нулю. Отсюда следует:

$$4n - 2 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 = 0,\ \ k_2 = 0.$$

Отсюда из первого равенства следует:

$$k_3 = \frac{4n}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2k_2}{3} - \frac{4k_4}{3}.$$

Представим его в виде:

$$k_3 = n - k_4 + \left[\frac{n - k_4 - 2}{3}\right].$$

Последнее равенство (в скобках) может быть выполнено только тогда, когда

$$n - k_4 - 2 = 3i,$$

i — новый индекс суммирования.

Диапазон его изменения определяется диапазоном изменения k_4.

При $k_4 = 0$, $i = \left[\frac{n-2}{3}\right]$

$k_4 = n - 1$, $-1 = 3i$,

$k_4 = n - 2$, $0 = 3i$.

Следовательно, $i = 0$. Это означает, что изменение индекса i определяется границами $\left[0, \frac{n-2}{3}\right]$.

В итоге

$$k_4 = n - 2 - 3i,\ \ k_3 = 3i + 2 + i = 4i + 2.$$

Тройная сумма в (4.73) переходит в простую сумму по индексу i вида:

$$A_2(n) = a_4^{(n-2)} a_3^2 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} C_{n+i}^{4i+2} \left(\frac{a_3^4}{a_4^3}\right)^i. \qquad (4.74)$$

Переходя к гипергеометрическому представлению, имеем:

$$A_2(n) = a_4^{(n-2)} a_3^2\, C_n^2 \operatorname{hypergeom}\left(\left[n+1,\ -\frac{1n}{3}+1,\ -\frac{1n}{3}+\frac{4}{3},\ -\frac{1n}{3}+\frac{2}{3}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right], -\frac{27a_3^4}{256a_4^3}\right). \qquad (4.75)$$

4.7.3. Преобразование коэффициента $A_3(n)$

Он определяется формулой:

$$A_3(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-\frac{1}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4\right]} C_{4n-2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3} a_1^{(4n-1-2k_2-3k_3-4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}. \qquad (4.76)$$

Очевидно, что если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то во всех трех суммах останутся только те члены, в которых показатель степени равен нулю. Отсюда следует:

$$4n - 1 - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 = 0,\ \ k_2 = 0.$$

Отсюда из первого равенства следует:

$$k_3 = \frac{4n}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2k_2}{3} - \frac{4k_4}{3}.$$

Представим его в виде:

$$k_3 = n - k_4 + \left[\frac{n - k_4 - 1}{3}\right].$$

Последнее равенство (в скобках) может быть выполнено только тогда, когда

$$n - k_4 - 1 = 3i,$$

i — новый индекс суммирования.

Диапазон его изменения определяется диапазоном изменения k_4.

При $k_4 = 0,\ i = \left[\frac{n-1}{3}\right]$

$k_4 = n - 1,\ 0 = 3i.$

Следовательно, $i = 0$. Это означает, что изменение индекса i определяется границами $\left[0, \frac{n-1}{3}\right]$.

В итоге

$$k_4 = n - 1 - 3i,\ \ k_3 = 3i + 1 + i = 4i + 1$$

Тройная сумма в (4.76) переходит в простую сумму по индексу i вида:

$$A_3(n) = a_4^{(n-1)} a_3 \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_{n+i}^{4i+1} \left(\frac{a_3^4}{a_4^3}\right)^i. \qquad (4.77)$$

Переходя к гипергеометрическому представлению, имеем:

$$A_3(n) = a_4^{(n-1)} a_3 n \,\text{hypergeom}\left(\left[n+1, -\frac{1n}{3}+1, -\frac{1n}{3}+\frac{1}{3}, -\frac{1n}{3}+\frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], -\frac{27a_3^4}{256a_4^3}\right). \qquad (4.78)$$

4.7.4. Преобразование коэффициента $A_4(n)$

Он определяется формулой:

$$A_4(n) = \sum_{k_4=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3} - \frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n - \frac{3k_3}{2} - 2k_4\right]} C_{4n-1-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4-1} C_{k_2+k_3+k_4-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-1}^{k_3} a_1^{(4n-2k_2-3k_3-4k_4)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4}. \qquad (4.79)$$

Очевидно, что если $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то во всех трех суммах останутся только те члены, в которых показатель степени равен нулю. Поэтому:

$$4n - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 = 0, \; k_2 = 0.$$

Отсюда из первого равенства следует:

$$k_3 = \frac{4n}{3} - \frac{4k_4}{3}.$$

Представим его в виде:

$$k_3 = n - k_4 + \left[\frac{n - k_4}{3}\right].$$

Последнее равенство (в скобках) может быть выполнено только тогда, когда

$$n - k_4 = 3i, \quad i \text{— новый индекс суммирования.}$$

Диапазон его изменения определяется диапазоном изменения k_4.

При $k_4 = 0$, $i = \left[\frac{n-1}{3}\right]$

$k_4 = n - 1 - 3i$, $k_3 = 4i$.

В итоге

$$k_4 = n - 1 - 3i, \; k_3 = 3i + 1 = 4i.$$

Тройная сумма в (4.79) переходит в простую сумму по индексу i вида:

$$A_4(n) = a_4^n \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_{n+i-1}^{4i} \left(\frac{a_3^4}{a_4^3}\right)^i. \tag{4.80}$$

Переходя к гипергеометрическому представлению, имеем:

$$A_4(n) = a_4^n \operatorname{hypergeom}\left(\left[n, -\frac{1n}{3}+1, -\frac{1n}{3}+\frac{1}{3}, -\frac{1n}{3}+\frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], -\frac{27a_3^4}{256a_4^3}\right). \tag{4.81}$$

Таким образом, установлены искомые формулы для гипергеометрических функций коэффициентов n-образа.

Очевидно, что область сходимости их определяется неравенством:

$$\left|\frac{27a_3^4}{256a_4^3}\right| < 1. \tag{4.82}$$

Следовательно, доказана **ТЕОРЕМА 4.4. Алгебраическое уравнение (4.69), коэффициенты которого удовлетворяют условию (4.82), имеет корни, определяемые формулами (4.51), (4.52), где коэффициенты n-образа характеризуются равенствами (4.72), (4.75), (4.78), (4.81).**

▶ **Пример 1.**

Вычислить корни алгебраического уравнения:

$$x^4 = 12x + 6656. \tag{4.83}$$

Р е ш е н и е: Проверяем выполнение условия (4.82).

$$\frac{2187}{294876348416} < 1.$$

Так как условие выполнено, то вычисляем, используя формулы (4.72), (4.75), (4.78), (4.81), коэффициенты n-образа.

$$A_3\left(\frac{1}{4}\right) = -4071095297\text{e-}2,\ A_4\left(\frac{1}{4}\right) = 9.032403434,\ A_1\left(\frac{1}{4}\right) = .2894644236\text{e-}8,\ A_2\left(\frac{1}{4}\right) = -.2752393150\text{e-}5,$$

$$A_3\left(\frac{1}{2}\right) = .7354355056\text{e-}1,\ A_4\left(\frac{1}{2}\right) = 81.58431200,\ A_1\left(\frac{1}{2}\right) = .2988067956\text{e-}7,\ A_2\left(\frac{1}{2}\right) = -.3314763389\text{e-}4,$$

$$A_3\left(\frac{3}{4}\right) = .9964125317,\ A_4\left(\frac{3}{4}\right) = 736.9024226,\ A_1\left(\frac{3}{4}\right) = .1686839709\text{e-}6,\ A_2\left(\frac{3}{4}\right) = -.2245521024\text{e-}3.$$

Теперь используя формулы (4.51), (4.52), вычисляем искомые корни уравнения (4.83).

$$x_1 = -8.995556844,\ x_2 = 9.069100384,\ x_3 = -.3677177532\text{e-}1 + 9.032478310\,I,$$
$$x_4 = -.3677177532\text{e-}1 - 9.032478310\,I.$$

Искомые значения корней получены с высокой точностью, на что указывают относительные ошибки:

$$\delta(x_1) = .4507211538\text{e-}8,\ \delta(x_2) = .1502403846\text{e-}9,\ \delta(x_3) = .1045973558\text{e-}9,$$
$$\delta(x_4) = .1045973558\text{e-}9.$$

Задача решена.

Покажем, что даже при значительно большем невыполнении условия (4.82) метод позволяет хорошо вычислять искомые корни.

▶ **Пример 2.**

Вычислить корни алгебраического уравнения:

$$x^4 = 30Ix - 2 - 6I. \tag{4.84}$$

Р е ш е н и е: Проверяем выполнение условия (4.82).

$$\frac{54675\sqrt{10}}{512} < 1.$$

Условие не выполнено, однако продолжаем вычислять, используя формулы (4.72), (4.75), (4.78), (4.81), коэффициенты n-образа.

$$A_3\left(\frac{1}{4}\right) = -.3405304538 - .1774123305\text{e-}2\,I,\ \ A_4\left(\frac{1}{4}\right) = .2728974626 - .8938882241\text{e-}1\,I,$$

$$A_1\left(\frac{1}{4}\right) = -.4417936174\text{e-}1 - .7255271468\text{e-}1\,I,\ \ A_2\left(\frac{1}{4}\right) = -.7672152255\text{e-}1 - .4642755573\text{e-}1\,I,$$

$$A_2\left(\frac{1}{2}\right) = -.3461781026 - .2100631669\text{e-}2\,I,\ \ A_3\left(\frac{1}{2}\right) = -1.795658158 + 1.036050455\,I,$$

$$A_1\left(\frac{1}{2}\right) = -.1773163389 - .9917081313\text{e-}1\,I,\ \ A_4\left(\frac{1}{2}\right) = .3395198877 - .3635475427\,I,$$

$$A_3\left(\frac{3}{4}\right) = -4.360458038 + 7.574499601\,I,\ \ A_1\left(\frac{3}{4}\right) = -.3122652461 + .4583316058\text{e-}2\,I,$$

$$A_2\left(\frac{3}{4}\right) = -.6535683183 + .3787924540\,I,\ \ A_4\left(\frac{3}{4}\right) = .3867822446 - 1.846213961\,I.$$

Теперь, используя формулы (4.51), (4.52), получаем искомые корни уравнения (4.84).

$$x_1 = -2.754672776 + 1.575443911\,I,\ x_2 = .1999368419 - .6668503914\text{e-}1\,I,$$
$$x_3 = 2.623152412 + 1.578982870\,I,\ x_4 = -.6841649841\text{e-}1 - 3.087741719\,I.$$

Искомые значения корней получены с высокой точностью, на что указывают относительные ошибки:

$$\delta(x_1) = .4013010092\text{e-}6,\ \delta(x_2) = .1581138830\text{e-}9,\ \delta(x_3) = .1526106156\text{e-}6,$$
$$\delta(x_4) = .6009346886\text{e-}7.$$

Задача решена.

4.8. Приложения

Известно, что нахождение даже частных примеров вычисления сумм тройных конечных рядов представляет собой определенный математический результат. Формулы служат своеобразным критерием других методов вычисления сумм рядов. Полученные результаты позволяют вычислить специальные суммы тройных конечных рядов, возникающих в качестве частных случаев.

Пусть все корни уравнения (4.1) равны x_0. Тогда справедливо равенство:

$$(x - x_0)^4 = 0. \tag{4.85}$$

Следовательно, отсюда следует приведенное равенство:

$$x^4 = 4x^3x_0 - 6x^2x_0^2 + 4xx_0^3 - x_0^4.$$

Таким образом, по определению:

$$a_1 = 4x_0,\ a_2 = -6x_0^2,\ a_3 = 4x_0^3,\ a_4 = -x_0^4.$$

Подставляя эти значения в формулы (4.63), получим: (4.86)

$$A_1(n) = (-1)^{(1+n)} 4x_0^{(-3+4n)} \times$$

$$\times \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4},$$

$$A_2(n) = (-1)^{(1+n)} 2^4 x_0^{(-2+4n)} \times$$

$$\times \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4},$$

$$A_3(n) = (-1)^{(1+n)} 2^6 x_0^{(-1+4n)} \times$$

$$\times \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[1+\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n+1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2} C_{k_2+k_3-k_4+n-2}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4},$$

$$A_4(n) = (-1)^n x_0^{(4n)} \times$$

$$\times \sum_{k_4=0}^{n} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4}.$$

В соответствии с формулами установлены зависимости коэффициентов n-образа от значения корней уравнения (4.1). Так как в нашем случае эти корни все одинаковы и равны x_0, то принимаем последовательно в каждой формуле для соответствующего значения $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 4$ условие равенства корней. Это дает следующие равенства:

$$\left[\lim_{x_3\to x_4}\lim_{x_2\to x_3}\lim_{x_1\to x_2} A_1(n)\right]_{x_4=x_0} = \frac{4x_0^{(-3+4n)}n(-1+4n)(-1+2n)}{3},$$

$$\left[\lim_{x_3\to x_4}\lim_{x_2\to x_3}\lim_{x_1\to x_2} A_2(n)\right]_{x_4=x_0} = -2x_0^{(4n-2)}n(-1+4n)(-3+4n),$$

$$\left[\lim_{x_3\to x_4}\lim_{x_2\to x_3}\lim_{x_1\to x_2} A_3(n)\right]_{x_4=x_0} = 4x_0^{(-1+4n)}n(-1+2n)(-3+4n),$$

$$\left[\lim_{x_3\to x_4}\lim_{x_2\to x_3}\lim_{x_1\to x_2} A_4(n)\right]_{x_4=x_0} = -\frac{x_0^{(4n)}(-3+4n)(-1+2n)(-1+4n)}{3}.$$

Приравнивая последовательно правые части соответствующих равенств, получим итоговые формулы:

$$\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4} =$$
$$= \frac{(-1)^{(1+n)}n(-1+4n)(-1+2n)}{3},$$

$$\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2} C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2} C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3} (-1)^{(-k_2-k_4)} 2^{(-4k_3)} \left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4} =$$
$$= -2^{(-3)}(-1)^{(1+n)}n(-1+4n)(-3+4n),$$

$$\sum_{k_4=0}^{n-1}\sum_{k_3=0}^{\left[1+\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n+1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-2}\, C_{k_2+k_3-k_4+n-2}^{k_2}\, C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,(-1)^{(-k_2-k_4)}\,2^{(-4k_3)}\left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4} =$$

$$= -2^{(-4)}(-1)^{(1+n)}\,n(-1+2n)(-3+4n),$$

$$\sum_{k_4=0}^{n}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4k_4}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}+2k_4\right]} C_{n-1-k_2-2k_3+3k_4}^{k_2+k_3-k_4+n-1}\, C_{k_2+k_3-k_4+n-1}^{k_2}\, C_{-k_4+n-1+k_3}^{k_3}\,(-1)^{(-k_2-k_4)}\,2^{(-4k_3)}\left(\frac{3}{8}\right)^{k_2} 256^{k_4} =$$

$$= -\frac{(-1)^n(-3+4n)(-1+2n)(-1+4n)}{3}.$$

Проверка подтверждает правильность расчетов. Как видим, формулы достаточно сложные и существующими методами суммы этих конечных тройных биномиальных рядов вычислить не просто.

5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Пусть задано алгебраическое уравнение пятой степени в приведенной форме:

$$x^5 = a_1x^4 + a_2x + a_3x^2 + a_4x + a_5, \tag{5.1}$$

где a_i, $i = 1\ ..\ 5$ — заданные действительные или комплексные числа.

Ставится задача нахождения всех корней $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ алгебраического уравнения (5.1).

Решение этой задачи производится методом, идентичным для квадратного, кубического и уравнения четвертой степени.

5.1. Преобразования

В связи с тем, что подстановки, упрощающие вид исходного алгебраического уравнения (5.1), также серьезно упрощают и определение его решения, то получаем следующие результаты:

а) Подстановка

$$x = \frac{a_1}{5} + y \tag{5.2}$$

приводит уравнение (5.1) к виду:

$$y^5 = \left(\frac{2a_1^2}{5} + a_2\right)y^3 + \left(\frac{4a_1^3}{25} + \frac{3a_2a_1}{5} + a_3\right)y^2 + \left(\frac{3a_1^4}{125} + \frac{3a_2a_1^2}{25} + a_4 + \frac{2a_3a_1}{5}\right)y + \frac{4a_1^5}{3125} + a_5 + \tag{5.3}$$

$$+ \frac{1a_4a_1}{5} + \frac{1a_2a_1^3}{125} + \frac{1a_3a_1^2}{25}.$$

Преобразование уравнения (5.1) к трехчленному виду:

$$y^5 = a_4y + a_5 \tag{5.4}$$

является крайне сложной (и громоздкой по объему вычислений) задачей. После введения Чирнгаузом преобразований:

$$y = \sum_{i=1}^{m} c_i x^i, \tag{5.5}$$

где c_i — искомые значения, при заданном m, в 1786 году математику Брингу удалось, используя их, привести уравнение (5.1) к виду (5.4). Однако позже они были утеряны, и только Джерард в 1893 году восстановил их вновь. Предварительные оценки показывают, что объем результатов вычислений составляет от 150 до 200 страниц.

5.2. *n*-Образ алгебраического уравнения пятой степени

Правую и левую части уравнения (5.1) возведем в степень с натуральным числом n:

$$x^{(5n)} = (a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5)^n. \tag{5.6}$$

Алгебраическое уравнение (5.6) является уравнением степени $5n$ и заведомо содержит все корни исходного уравнения (5.1). Правая часть (5.6) является алгебраическим уравнением степени $4n$ и, в соответствии с формулой Ньютона, принимает вид:

$$(a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5)^n = \tag{5.7}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{n-i_1} \sum_{i_3=0}^{n-i_1-i_2} \sum_{i_4=0}^{n-i_1-i_2-i_3} C_n^{i_1} C_{n-i_1}^{i_2} C_{n-i_1-i_2}^{i_3} C_{n-i_1-i_2-i_3}^{i_4} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} a_4^{i_4} a_5^{(n-i_1-i_2-i_3-i_4)} x^{(4i_1+3i_2+2i_3+i_4)}.$$

Способом, совершенно аналогичным, как это сделано для уравнений низших степеней, приходим к представлению уравнения (5.6) в виде:

$$x^{(5n)} = A_1(n)\,x^4 + A_2(n)\,x^3 + A_3(n)\,x^4 + A_4(n)\,x + A_5(n) \tag{5.7}$$

или к эквивалентному представлению:

$$(a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5)^n = A_1(n)\,x^4 + A_2(n)\,x^3 + A_3(n)\,x^2 + A_4(n)\,x + A_5(n), \qquad (5.8)$$

где $A_i(n)$, $i = 1 \,..\, 5$ — многочлен коэффициентов a_1, $a_2 \,..\, a_5$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1: Алгебраическое уравнение (5.7) (или эквивалентное ему (5.8)) называется n-образом алгебраического уравнения (5.1), а $A_i(n)$, $i = 1 \,..\, 5$ — называются коэффициентами n-образа.

Вычисление коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1 \,..\, 5$ производится с использованием уравнений (5.7), (5.8) с учетом исходного (5.1).

▶ **Пример:** Вычислить значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1 \,..\, 5$ для случаев $n = 1, 2$:

Решение: Принимая в (5.8) $n = 1$, получим:

$$a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = A_1(1)\,x^4 + A_2(1)\,x^3 + A_3(1)\,x^2 + A_4(1)\,x + A_5(1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, устанавливаем:

$$A_1(1) = a_1,\ A_2(1) = a_2,\ A_3(1) = a_3,\ A_4(1) = a_4,\ A_5(1) = a_5. \qquad (5.9)$$

Снова принимая в (5.8) $n = 2$, получим:

$$(a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5)^2 = A_1(2)\,x^4 + A_2(2)\,x^3 + A_3(2)\,x^2 + A_4(2)\,x + A_5(2).$$

Раскрывая скобки в левом выражении, имеем: (5.10)

$$a_1^2x^8 + 2a_1x^7a_2 + (2a_1a_3 + a_2^2)\,x^6 + (2a_1a_4 + 2a_2a_3)\,x^5 + (2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2)\,x^4 + (2a_2a_5 + 2a_3a_4)\,x^3 +$$
$$+ (a_4^2 + 2a_3a_5)\,x^2 + 2a_4xa_5 + a_5^2 = A_1(2)\,x^4 + A_2(2)\,x^3 + A_3(2)\,x^2 + A_4(2)\,x + A_5(2).$$

Исходное уравнение (5.1) дает:

$$x^5 = a_1x^4 + a_3x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5.$$
$$x^6 = (a_2 + a_1^2)\,x^4 + (a_3 + a_1a_2)\,x^3 + (a_4 + a_1a_3)\,x^2 + (a_5 + a_1a_4)\,x + a_1a_5.$$

$$x^7 = (a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,x^4 + (a_4 + a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)\,x^3 + (a_5 + a_1a_4 + a_1^2a_3 + a_2a_3)\,x^2 +$$
$$+ (a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4)\,x + a_5(a_2 + a_1^2).$$

$$x^8 = (2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4 + a_2^2 + a_1^4)\,x^4 + (a_1a_4 + a_1^2a_3 + 2a_2a_3 + a_5 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2)\,x^3 +$$
$$+(2a_1a_2a_3 + a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4 + a_3^2 + a_1^3a_3)\,x^2 + (a_2a_5 + 2a_1a_2a_4 + a_1^2a_5 + a_1^3a_4 + a_3a_4)\,x + a_5(a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3).$$

Подставляя эти равенства в (5.10), получаем:

$$(6a_1a_2a_3 + 2a_1a_5 + 6a_1^2a_2^2 + a_3^2 + 5a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + a_1^6 + 4a_1^3a_3 + a_2^3 + 3a_1^2a_4)\,x^4 +$$
$$+ (a_1^3a_4 + 3a_2^2a_3 + 2a_3a_4 + 4a_1a_2a_4 + 2a_1a_3^2 + a_1^4a_3 + a_1^2a_5 + 4a_1^3a_2^2 + 3a_1a_2^3 + a_1^5a_2 + 2a_2a_5 + 6a_1^2a_2a_3)\,x^3 +$$
$$+(a_2^2a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + 2a_2a_3^2 + 4a_1a_3a_4 + 2a_1a_2a_5 + 2a_3a_5 + a_1^4a_4 + 4a_1^3a_2a_3 + a_1^3a_5 + a_4^2 + 3a_1a_2^2a_3 + 3a_1^2a_3^2 + a_1^5a_3)\,x^2 +$$
$$+(3a_1^2a_3a_4 + a_2^2a_5 + 2a_4a_5 + 2a_1a_4^2 + a_1^5a_4 + 4a_1^3a_2a_4 + 2a_2a_3a_4 + 2a_1a_3a_5 + 3a_1a_2^2a_4 + a_1^4a_5 + 3a_1^2a_2a_5)\,x +$$
$$+ a_5(a_5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 3a_1^2a_3) = A_1(2)\,x^4 + A_2(2)\,x^3 + A_3(2)\,x^2 + A_4(2)\,x + A_5(2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых значениях степеней x^k, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, устанавливаем, что: (5.11)

$$A_1(2) = 6a_1a_2a_3 + 2a_1a_5 + 6a_1^2a_2^2 + a_3^2 + 5a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + a_1^6 + 4a_1^3a_3 + a_2^3 + 3a_1^2a_4.$$
$$A_2(2) = a_1^3a_4 + 3a_2^2a_3 + 2a_3a_4 + 4a_1a_2a_4 + 2a_1a_3^2 + a_1^4a_3 + a_1^2a_5 + 4a_1^3a_2^2 + 3a_1a_2^3 + a_1^5a_2 + 2a_2a_5 + 6a_1^2a_2a_3.$$
$$A_3(2) = a_2^2a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + 2a_2a_3^2 + 4a_1a_3a_4 + 2a_1a_2a_5 + 2a_3a_5 + a_1^4a_4 + 4a_1^3a_2a_3 + a_1^3a_5 + a_4^2 + 3a_1a_2^2a_3 +$$
$$+ 3a_1^2a_3^2 + a_1^5a_3.$$
$$A_4(2) = 3a_1^2a_3a_4 + a_2^2a_5 + 2a_4a_5 + 2a_1a_4^2 + a_1^5a_4 + 4a_1^3a_2a_4 + 2a_2a_3a_4 + 2a_1a_3a_5 + 3a_1a_2^2a_4 + a_1^4a_5 + 3a_1^2a_2a_5.$$
$$A_5(2) = a_5(a_5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 3a_1^2a_3).$$

Задача решена.

Совершенно аналогичным образом можно получать значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$ и для любых других значений параметра n.

5.3. Свойства n-образа

СВОЙСТВО 1. **Уравнение n-образа имеет степень $5n$ (или $4n$) и содержит все корни исходного уравнения (5.1).**

Данное свойство очевидно, так как уравнение n-образа (5.7) (или (5.8)) следует из уравнения (5.1), для которого это условие заведомо выполнено.

СВОЙСТВО 2. **Коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1\,..\,5$ определяются рекуррентными соотношениями:** (5.12)

$$A_1(n+1) = (a_5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 3a_1^2a_3)\,A_1(n) +$$
$$+ (2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4 + a_2^2 + a_1^4)\,A_2(n) + (a_3 + 2a_1a_2{}^2 + a_1^3)\,A_3(n) + (a_2 + a_1^2)\,A_4(n) + A_5(n)\,a_1,$$

$$A_2(n+1) = (a_1a_5 + a_1^4a_2 + a_1^2a_4 + a_3^2 + 4a_1a_2a_3 + 3a_1^2a_2^2 + 2a_2a_4 + a_1^3a_3 + a_2^3)\,A_1(n) +$$
$$+(a_1a_4 + a_1^2a_3 + 2a_2a_3 + a_5 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2)\,A_2(n) + (a_4 + a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)\,A_3(n) + (a_3 + a_1a_2)\,A_4(n) + A_5(n)\,a_2,$$

$$A_3(n+1) = (a_1^2a_5 + 2a_3a_4 + a_1^4a_3 + a_2a_5 + 2a_1a_2a_4 + a_1^3a_4 + 2a_1a_3^2 + 3a_1^2a_2a_3 + a_2^2a_3)\,A_1(n) +$$
$$+ (2a_1a_2a_3 + a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4 + a_3^2 + a_1^3a_3)\,A_2(n) + (a_5 + a_1a_4 + a_1^2a_3 + a_2a_3)\,A_3(n) +$$
$$+ (a_4 + a_1a_3)\,A_4(n) + A_5(n)\,a_3,$$

$$A_4(n+1) = (a_1^4a_4 + 2a_1a_2a_5 + a_1^3a_5 + a_4^2 + a_2^2a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + a_3a_5 + 2a_1a_3a_4)\,A_1(n) +$$
$$+ (a_2a_5 + 2a_1a_2a_4 + a_1^2a_5 + a_1^3a_4 + a_3a_4)\,A_2(n) + (a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4)\,A_3(n) + (a_5 + a_1a_4)\,A_4(n) + A_5(n)\,a_4,$$

$$A_5(n+1) = a_5\,(2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4 + a_2^2 + a_1^4)\,A_1(n) + a_5\,(a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,A_2(n) + a_5\,(a_2 + a_1^2)\,A_3(n) +$$
$$+ A_4(n)\,a_1a_5 + A_5(n)\,a_5.$$

Доказательство: Принимая в (5.7) $n = n + 1$, получаем:

$$x^{(5n+5)} = A_1(n+1)\,x^4 + A_2(n+1)\,x^3 + A_3(n+1)\,x^2 + A_4(n+1)\,x + A_5(n+1).$$

Тогда с учетом (5.7) и (5.1) отсюда следует:

$$A_1(n+1)\,x^4 + A_2(n+1)\,x^3 + A_3(n+1)\,x^2 + A_4(n+1)\,x + A_5(n+1) =$$
$$= (A_1(n)\,x^4 + A_2(n)\,x^3 + A_3(n)\,x^2 + A_4(n)\,x + A_5(n))(a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5).$$

Раскрывая скобки в правой части этого равенства и далее приводя подобные члены при одинаковых степенях x^k, $k=0,\ 1\ ..\ 5$, получим, приравнивая левые и правые части формулы (5.12), формулы, которые позволяют легко получать все значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i=1\ ..\ 5$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots$. Действительно, принимая, например, в формулах (5.12) $n = 1$, получаем:

$$A_1(2) = (a_5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 3a_1^2a_3)\,A_1(1) + (2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4 + a_2^2 + a_1^4)\,A_2(1) + \\ + (a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,A_3(1) + (a_2 + a_1^2)\,A_4(1) + A_5(1)\,a_1,$$

$$A_2(2) = (a_1a_5 + a_1^4a_2 + a_1^2a_4 + a_3^2 + 4a_1a_2a_3 + 3a_1^2a_2^2 + 2a_2a_4 + a_1^3a_3 + a_2^3)\,A_1(1) + \\ + (a_1a_4 + a_1^2a_3 + 2a_2a_3 + a_5 + a_1^3a_2 + 2a_1a_2^2)\,A_2(1) + (a_4 + a_1a_3 + a_1^2a_2 + a_2^2)\,A_3(1) + \\ + (a_3 + a_1a_2)\,A_4(1) + A_5(1)\,a_2,$$

$$A_3(2) = (a_1^2a_5 + 2a_3a_4 + a_1^4a_3 + a_2a_5 + 2a_1a_2a_4 + a_1^3a_4 + 2a_1a_3^2 + 3a_1^2a_2a_3 + a_2^2a_3)\,A_1(1) + \\ + (2a_1a_2a_3 + a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4 + a_3^2 + a_1^3a_3)\,A_2(1) + (a_5 + a_1a_4 + a_1^2a_3 + a_2a_3)\,A_3(1) + \\ + (a_4 + a_1a_3)\,A_4(1) + A_5\,(1)\,a_3,$$

$$A_4(2) = (a_1^4a_4 + 2a_1a_2a_5 + a_1^3a_5 + a_4^2 + a_2^2a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + a_3a_5 + 2a_1a_3a_4)\,A_1(1) + \\ + (a_2a_5 + 2a_1a_2a_4 + a_1^2a_5 + a_1^3a_4 + a_3a_4)\,A_2(1) + (a_1a_5 + a_1^2a_4 + a_2a_4)\,A_3(1) + (a_5 + a_1a_4)\,A_4(1) + A_5(1)\,a_4,$$

$$A_5(2) = a_5(2a_1a_3 + 3a_1^2a_2 + a_4 + a_2^2 + a_1^4)\,A_1(1) + a_5(a_3 + 2a_1a_2 + a_1^3)\,A_2(1) + \\ + a_5(a_2 + a_1^2)\,A_3(1) + A_4(1)\,a_1a_5 + A_5(1)\,a_5.$$

С учетом (5.9) имеем: (5.13)

$$A_1(2) = 6a_1a_2a_3 + 2a_1a_5 + 6a_1^2a_2^2 + a_3^2 + 5a_1^4a_2 + 2a_2a_4 + a_1^6 + 4a_1^3a_3 + a_2^3 + 3a_1^2a_4,$$

$$A_2(2) = a_1^3a_4 + 3a_2^2a_3 + 2a_3a_4 + 4a_1a_2a_4 + 2a_1a_3^2 + a_1^4a_3 + a_1^2a_5 + 4a_1^3a_2^2 + 3a_1a_2^3 + a_1^5a_2 + 2a_2a_5 + 6a_1^2a_2a_3,$$

$$A_3(2) = a_2^2a_4 + 3a_1^2a_2a_4 + 2a_2a_3^2 + 4a_1a_3a_4 + 2a_1a_2a_5 + 2a_3a_5 + a_1^4a_4 + 4a_1^3a_2a_3 + a_1^3a_5 + a_4^2 + 3a_1a_2^2a_3 + \\ + 3a_1^2a_3^2 + a_1^5a_3,$$

$$A_4(2) = 3a_1^2a_3a_4 + a_2^2a_5 + 2a_4a_5 + 2a_1a_4^2 + a_1^5a_4 + 4a_1^3a_2a_4 + 2a_2a_3a_4 + 2a_1a_3a_5 + 3a_1a_2^2a_4 + a_1^4a_5 + 3a_1^2a_2a_5$$

$$A_5(2) = a_5(a_5 + 4a_1^3a_2 + 3a_1a_2^2 + a_1^5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3 + 3a_1^2a_3).$$

Сравнивая полученные значения с (5.11), устанавливаем, что они совпадают. Таким образом, пользуясь формулами (5.12), действительно последовательно находим $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$, $n = 3, 4, 5\ldots$.

СВОЙСТВО 3. **Существует строгая связь между коэффициентами n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$ и корнями алгебраического уравнения (5.1), а именно: если известны различные корни алгебраического уравнения (5.1) $x = \{x_i, i = 1\ ..\ 5\}$, то коэффициенты n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$, определяются однозначно.**

Доказательство: Действительно, в соответствии со свойством 1, корни исходного уравнения (5.1) заведомо являются также корнями уравнения n-образа (5.7). Следовательно,

$$x_i^{(5n)} = A_1(n)x_i^4 + A_2(n)x_i^3 + A_3(n)x_i^2 + A_4(n)\,x + A_5(n),\ \ i = 1\ ..\ 5.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получим искомые формулы (здесь не приводятся в силу громоздкости). Свойство 3 доказано.

Подставляя эти формулы в рекуррентные соотношения (5.12), получим новые четыре соотношения между корнями алгебраического уравнения (5.1), отличные от определяемых теоремой Виета, в силу наличия произвольного параметра n. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $n = 1$ эти формулы совпадают с соотношениями, определяемыми теоремой Виета для уравнения пятой степени.

5.4. Определение общих формул для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2\ ..\ 5$

Так как в соответствии со свойством 3 была доказана прямая связь между значениями коэффициентов n-образа и корнями исходного уравнения (5.1), то крайне важной является задача определения общих формул представления для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$.

Анализируя вычисленные значения (5.13) для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1\ ..\ 5$, устанавливаем, что в общей форме эти коэффициенты определяются суммой слагаемых вида $B(k_1, k_2\ ..\ k_5)\, a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}$, где $B(k_1, k_2\ ..\ k_5)$ — некоторый числовой коэффициент, являю-

щийся целым числом, а k_i, $i = 1$ .. 5 — показатели степени. При этом выясняется следующая закономерность:
если ввести комбинированный параметр:

$$\mathrm{K}(n) = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5, \tag{5.14}$$

то для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_1(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 5n - 4. \tag{5.15}$$

Действительно, возьмем, например, первое слагаемое в $A_1(2)$: $-6a_1a_2a_3$. Тогда сумма степеней, в соответствии с (4.17), для него равна: $-1 + 2(1) + 3(1) = 6$. В то же время в соответствии с формулой (5.15) имеем: $5(2) - 4 = 6$. Как видим, результаты совпали.

Совершенно аналогично выясняется, что:

1) для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_2(n)$, параметр (5.14) принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 5n - 3,$$

2) для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_3(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 5n - 2,$$

3) для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_4(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n - 1,$$

4) для всех слагаемых, образующих коэффициент $A_5(n)$, он принимает значение:

$$\mathrm{K}(n) = 4n.$$

Таким образом, общая формула для для всех степеней слагаемых многочленов, образующих коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1$ .. 5, определяется формулой:

$$5n - 5 + i = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5. \tag{5.16}$$

5.4.1. Вывод общих формул для коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2 .. 5$

Таким образом, показатели слагаемых $a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}$ многочлена для коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1 .. 5$ удовлетворяют формуле (5.16). Отсюда следует, что

$$k_1 = 5n - 5 + i - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 - 5k_5. \tag{5.17}$$

Таким образом, слагаемые многочлена, определяющего вид коэффициента $A_i(n)$, определяются видом:

$$a_1^{(5n - 5 + i - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 - 5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}. \tag{5.18}$$

Поскольку параметр k_1, принимая значение равное нулю, определяет при этом максимальное значение парметра $k_{2,\,\max}$, то из (5.17) получим:

$$0 = 5n - 5 + i - 2k_2 - 3k_3 - 4k_4 - 5k_5.$$

Таким образом,

$$k_{2,\,\max} = \left[\frac{5n - 5 + i - 3k_3 - 4k_4 - 5k_5}{2}\right]. \tag{5.19}$$

Здесь квадратные скобки означают выполнение операции округления дроби до наименьшего целого числа вниз.

Снова принимая в (5.19) $k_{2,\,\max} = 0$, получаем равенство:

$$5n - 5 + i - 3k_{3,\,\max} - 4x_4 - 5k_5 = 0.$$

Отсюда имеем:

$$k_{3,\,\max} = \left[\frac{5n - 4 + i - 4k_4 - 5k_5}{3}\right]. \tag{5.20}$$

Совершенно аналогичными рассуждениями получаем:

$$k_{4,\,\max} = \left[\frac{5n - 4 + i - 5k_5}{4}\right]. \tag{5.21}$$

Таким образом, с учетом (5.19), (5.20), (5.21) формула для нахождения коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1 \,..\, 5$ может быть записана следующим образом: (5.22)

$$A_i(n) = \sum_{k_5=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=5}^{i} \delta(i-s)\right)} \; \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-5+i-5k_5}{4}\right]} \; \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-5+i-4k_4-5k_5}{3}\right]} \; \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-5+i-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} B_i(k_1, k_2 \,..\, k_5, n)\, a_1^{5n-5+i-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}.$$

$\delta(i)$ — символ Кронекера, обладающий свойством: $\delta(0) = 1$, $\delta(i) = 0$, i — натуральное число.

Нахождение коэффициентов $B_i(k_1, k_2 \,..\, k_5, n)$ производим подходом, изложенным ранее, совершенно аналогичным для случаев уравнений меньших степеней. Используя, в частности, метод аналогии построения коэффициентов $B_1(k_1, k_2 \,..\, k_5, n)$ для уравнений второй, третьей и четвертой степени, выписываем их известные значения:

— для уравнений второй степени: $C_{2n-k_2-1}^{k_2}$,

— для уравнении третьей степени: $C_{3n-2k_3-k_2-2}^{(k_2+k_3)} C_{k_2+k_3}^{k_2}$,

— для уравнений четвертой степени: $C_{4n-3k_4-2k_3-k_2-3}^{(k_2+k_3+k_4)} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_4+k_3}^{k_3}$.

Поэтому предполагаемый вид коэффициента $B_1(k_1, k_2 \,..\, k_5, n)$ для определения коэффициента $A_1(n)$ характеризуется формулой:

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{(k_2+k_3+k_4+k_5)} C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4}.$$

В итоге, аналогичным подходом, получаем искомые значения коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$:

$$A_i(n) = \sum_{k_5=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{4}\delta(s-i)\right)} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-5+i-5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-5+i-4k_4-5k_5}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-5+i-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} \times \tag{5.22}$$

$$\times C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4+(i-2)\sum\limits_{s=3}^{i}\delta(i-s)}^{\left(k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right)\right)} C^{k_2}_{k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=3}^{i}\delta(i-s)\right)} C^{k_3}_{k_4+k_3+k_5-\left(\sum\limits_{s=4}^{i}\delta(i-s)\right)} C^{k_4}_{k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=5}^{i}\delta(i-s)\right)} \times$$

$$\times a_1^{(5n-5+i-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}.$$

Или в раскрытой форме для каждого члена: (5.23)

$$A_1(n) = \sum_{k_5=0}^{n-1} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-4-5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-4-4k_4-5k_5}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-4-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{(k_2+k_3+k_4+k_5)} C^{k_2}_{k_2+k_3+k_4+k_5} C^{k_3}_{k_4+k_3+k_5} C^{k_4}_{k_4+k_5} \times$$

$$\times a_1^{(5n-4-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5},$$

$$A_2(n) = \sum_{k_5=0}^{n-1} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-3-5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-3-4k_4-5k_5}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-3-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{(k_2+k_3+k_4+k_5-1)} C^{k_2}_{k_2+k_3+k_4+k_5} C^{k_3}_{k_4+k_3+k_5} C^{k_4}_{k_4+k_5} \times$$

$$\times a_1^{(5n-3-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_5=0}^{n-1}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-2-5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-2-4k_4-5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-2-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-3}^{(k_2+k_3+k_4+k_5-1)} C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(5n-2-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5},$$

$$A_4(n)=\sum_{k_5=0}^{n-1}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-1-5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-1-4k_4-5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-1-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-2}^{(k_2+k_3+k_4+k_5-1)} C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5-1}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(5n-1-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5},$$

$$A_5(n)=\sum_{k_5=0}^{n}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-4k_4-5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-1}^{(k_2+k_3+k_4+k_5-1)} C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5-1}^{k_3} C_{k_4+k_5-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(5n-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}.$$

Справедливость полученных формул доказывается методом математической индукции, аналогично тому, как это выполнено для случая квадратного уравнения.

5.5. Гипергеометрическая форма представления коэффициентов *n*-образа $A_i(n)$, $i = 1\,..\,5$

Полученные конечные суммы для коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1, 2\,..\,5$ определены для любых целых натуральных значений n. Вводя новые переменные:

$$z_1=\frac{a_2}{a_1^2},\ z_2=\frac{a_3}{a_1^3},\ z_3=\frac{a_4}{a_1^4},\ z_4=\frac{a_5}{a_1^5}, \qquad (5.24)$$

представим формулы (5.22) следующим образом:

$$A_i(n) = a_1^{(5n-5+i)} \sum_{k_5=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{4}\delta(s-i)\right)} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n-5+i-5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n-5+i-4k_4-5k_5}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n-5+i-3k_3-4k_4-5k_5}{2}\right]} \times \tag{5.25}$$

$$\times C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4+(i-2)\left(\sum\limits_{s=3}^{i}\delta(i-s)\right)}^{\left(k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right)\right)} C_{k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=3}^{i}\delta(i-s)\right)}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5-\left(\sum\limits_{s=4}^{i}\delta(i-s)\right)}^{k_3} C_{k_4+k_5-\left(\sum\limits_{s=5}^{i}\delta(i-s)\right)}^{k_4} \times$$

$$\times z_1^{k_2} z_2^{k_3} z_3^{k_4} z_4^{k_5}, \quad i = 1,\ 2\ ..\ 5.$$

Будем считать, что коэффициенты a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$ уравнения (5.1) выбраны таким образом, что правые части формул (5.25) представляют собой сходящиеся ряды при любых, даже очень больших значениях параметра n. В этом случае справедлива **ТЕОРЕМА 5.1: Коэффициенты $A_i(n)$, $i = 1, 2\ ..\ 5$, представляют собой гипергеометрические функции:** (5.26)

$$A_1(n) = a_1^{(5n-4)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(-5n+4,\ 2k_3+3k_4+4k_5)\, r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}}{\mathrm{P}(-5n+4,\ k_2+2k_3+3k_4+4k_5)\, k_2!k_3!k_4!k_5!},$$

$$A_2(n) = a_1^{(5n-3)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(-5n+3,\ 2k_3+3k_4+4k_5)(k_2+k_3+k_4+k_5)\, r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}}{(5n-3)\,\mathrm{P}(-5n+4,\ k_2+2k_3+3k_4+4k_5)\, k_2!k_3!k_4!k_5!},$$

$$A_3(n) = a_1^{(5n-2)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(-5n+2,\ 2k_3+3k_4+4k_5)(k_4+k_3+k_5)\, r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}}{(5n-2)\,\mathrm{P}(-5n+3,\ k_2+2k_3+3k_4+4k_5)\, k_2!k_3!k_4!k_5!},$$

$$A_4(n) = a_1^{(5n-1)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(-5n+1, 2k_3+3k_4+4k_5)(k_4+k_5) r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}}{5\mathrm{P}(-5n+2, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)(5n-1) k_2! k_3! k_4! k_5!},$$

$$A_5(n) = a_1^{(5n)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(-5n, 2k_3+3k_4+4k_5) k_5 r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}}{\mathrm{P}(-5n+1, k_2+2k_3+3k_4+4k_5) 5n k_2! k_3! k_4! k_5!}.$$

где

$$r_i = -z_i, \quad i = 1 \,..\, 4 \tag{5.27}$$

или

$$r_1 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad r_2 = -\frac{a_3}{a_1^3}, \quad r_3 = -\frac{a_4}{a_1^4}, \quad r_4 = -\frac{a_5}{a_1^5}, \tag{5.28}$$

с областью определения:

$$|r_4| < \frac{256}{3125}, \quad |r_3| < \frac{27}{256}, \quad |r_2| < \frac{4}{27}, \quad |r_1| < \frac{1}{4}. \tag{5.29}$$

Доказательство: Докажем Теорему 5.1 для коэффициента $A_1(n)$.

Вводя обозначение:

$$F(k_2, k_3, k_4, k_5) = C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{k_2+k_3+k_4+k_5} C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4}$$

и следуя горновскому определению, составим соотношения: (5.30)

$$f_1(k_2, k_3, k_4, k_5) = \frac{F(k_2+1, k_3, k_4, k_5)}{F(k_2, k_3, k_4, k_5)} = \frac{(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-5)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-4)}{(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)(k_2+1)},$$

$$f_2(k_2, k_3, k_4, k_5) := \frac{F(k_2, k_3+1, k_4, k_5)}{F(k_2, k_3, k_4, k_5)} =$$

$$= \frac{(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-6)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-5)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-4)}{(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-5)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)(k_3+1)},$$

$$f_3(k_2, k_3, k_4, k_5) := \frac{F(k_2, k_3, k_4+1, k_5)}{F(k_2, k_3, k_4, k_5)} =$$

$$= \frac{(5n-5k_5-4k_4-3k_3-7-2k_2)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-6)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-5)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-4)}{(5n-4k_5-3k_4-2k_3-6-k_2)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-5)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)(k_4+1)},$$

$$f_4(k_2, k_3, k_4, k_5) := \frac{F(k_2, k_3, k_4, k_5+1)}{F(k_2, k_3, k_4, k_5)} =$$

$$= \frac{(5n-5k_5-4k_4-8-3k_3-2k_2)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-7-2k_2)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-6)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-5)(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-4)}{(5n-4k_5-3k_4-7-2k_3-k_2)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-6-k_2)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-5)(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)(k_5+1)}.$$

Так как порядки полиномов числителей и знаменателей во всех формулах равны, то отсюда следует, что соответствующие бесконечные ряды сходятся условно и имеют конечные радиусы сходимости. Действуя по схеме Горна, вычислим эти радиусы. Для этого в формулах (5.30) введем преобразования:

$$k_2 = sl_2,\ \ k_3 = sl_3,\ \ k_4 = sl_4,\ \ k_5 = sl_5,$$

где l_2, l_3, l_4, l_5 — параметры, принимающие значение в интервале [0, 1], а параметр s принимает значение в интервале $[0, \infty)$.

Тогда получим:

$$f_1(sl_2, sl_3, sl_4, sl_5) = \frac{(5n-5sl_5-4sl_4-3sl_3-2sl_2-5)(5n-5sl_5-4sl_4-3sl_3-2sl_2-4)}{(5n-4sl_5-3sl_4-2sl_3-sl_2-4)(sl_2+1)},$$

$$f_2(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) =$$
$$= \frac{(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 6)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 5)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 4)}{(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 5)(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 4)(sl_3 + 1)},$$

$$f_3(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) =$$
$$= \frac{(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 7 - 2sl_2)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 6)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 5)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 4)}{(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - 6 - sl_2)(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 5)(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 4)(sl_4 + 1)},$$

$$f_4(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) = ((5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 8 - 3sl_3 - 2sl_2)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 7 - 2sl_2) \times$$
$$\times (5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 6)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 5)(5n - 5sl_5 - 4sl_4 - 3sl_3 - 2sl_2 - 4)) \,/$$
$$/\, ((5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 7 - 2sl_3 - sl_2)(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - 6 - sl_2)(5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 5) \times$$
$$\times (5n - 4sl_5 - 3sl_4 - 2sl_3 - sl_2 - 4)(sl_5 + 1)).$$

Отсюда следуют равенства:

$$R_1(l_2, l_3, l_4, l_5) = \lim_{s \to \infty} f_1(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) = -\frac{(5l_5 + 4l_4 + 3l_3 + 2l_2)^2}{(4l_5 + 3l_4 + 2l_3 + l_2)l_2},$$

$$R_2(l_2, l_3, l_4, l_5) = \lim_{s \to \infty} f_2(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) = -\frac{(5l_5 + 4l_4 + 3l_3 + 2l_2)^3}{(4l_5 + 3l_4 + 2l_3 + l_2)^2 l_3},$$

$$R_3(l_2, l_3, l_4, l_5) = \lim_{s \to \infty} f_1(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) = -\frac{(5l_5 + 4l_4 + 3l_3 + 2l_2)^4}{(4l_5 + 3l_4 + 2l_3 + l_2)^3 l_4},$$

$$R_4(l_2, l_3, l_4, l_5) = \lim_{s \to \infty} f_4(sl_2,\ sl_3,\ sl_4,\ sl_5) = -\frac{(5l_5 + 4l_4 + 3l_3 + 2l_2)^5}{(4l_5 + 3l_4 + 2l_3 + l_2)^4 l_5}.$$

Таким образом, в соответствии со схемой Горна искомые радиусы сходимости равны:

$$p_1 := \frac{1}{|R_1(1,0,0)|} = \frac{1}{4}, \quad p_2 := \frac{1}{|R_2(0,1,0)|} = \frac{4}{27}, \tag{5.31}$$
$$p_3 := \frac{1}{|R_3(0,0,1)|} = \frac{27}{256}, \quad p_4 := \frac{1}{|R_4(0,0,1)|} = \frac{256}{3125}.$$

Следовательно, четырехкратный ряд, определяющий гипергеометрическую функцию $A_1(n)$, сходится при условии, что имеют место неравенства (5.29). Изложенного достаточно, чтобы сделать вывод о соответствии четырехкратного степенного ряда, из (5.25), определяющего значение коэффициента $A_1(n)$, гипергеометрической функции: (5.32)

$$A_1(n) = a_1^{(5n-4)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)} C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{k_2+k_3+k_4+k_5} C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4} r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}.$$

Совершенно аналогичным образом доказывается, что $A_i(n)$, $i = 2\ ..\ 5$,

$$A_i(n) = a_1^{(5n-5+i)} \sum_{k_5=0}^{\infty} \sum_{k_4=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)} \times \tag{5.33}$$
$$\times C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4+(i-2)\left(\sum_{s=3}^{i}\delta(i-s)\right)}^{\left(k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right)\right)} C^{k_2}_{k_2+k_3+k_4+k_5-\left(\sum_{s=3}^{i}\delta(i-s)\right)} C^{k_3}_{k_4+k_3+k_5-\left(\sum_{s=4}^{i}\delta(i-s)\right)} C^{k_4}_{k_4+k_5-\left(\sum_{s=5}^{i}\delta(i-s)\right)} \times$$
$$\times r_1^{k_2} r_2^{k_3} r_3^{k_4} r_4^{k_5}$$

также являются четырехмерными гипергеометрическими функциями, с областью определения (5.29).

5.5.1. Преобразование к стандартному гипергеометрическому представлению коэффициентов $A_i(n)$, $i = 1, 2 .. 5$

Преобразуем формулу, определяющую значение коэффициента $A_i(n)$ в форме (5.32), к Поххаммеровскому представлению.

Так как

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{k_2+k_3+k_4+k_5} C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2} C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4} = \frac{(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)!}{(5n-4-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)!\,k_2!\,k_3!\,k_4!\,k_5!}. \tag{5.34}$$

В соответствии с формулой:

$$(l+k-l)! = \mathrm{P}(l, k)(l-1)!$$

имеем:

$$(5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4)! = \mathrm{P}(-3+5n, -k_2-2k_3-3k_4-4k_5)(-4+5n)! \tag{5.35}$$

$$(5n-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2-4)! = \mathrm{P}(-3+5n, -2k_2-3k_3-4k_4-5k_5)(-4+5n)!$$

Так как индексы суммирования входят в эти формулы с отрицательными знаками, то воспользуемся формулой:

$$\mathrm{P}(a, -k) = \frac{(-1)^k}{\mathrm{P}(1-a, k)}.$$

В этом случае получим:

$$\mathrm{P}(5n-3, -k_2-2k_3-3k_4-4k_5) = \frac{(-1)^{(k_2+2k_3+3k_4+4k_5)}}{\mathrm{P}(-5n+4, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)},$$

$$\mathrm{P}(5n-3, -2k_2-3k_3-4k_4-5k_5) = \frac{(-1)^{(2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)}}{\mathrm{P}(-5n+4, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)}.$$

Подставляя эти значения в (5.35) и далее в (5.34), получаем искомое представление:

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{k_2+k_3+k_4+k_5}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2}\, C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3}\, C_{k_4+k_5}^{k_4} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)}\, \mathrm{P}(-5n+4,\, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)}{\mathrm{P}(-5n+4,\, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, k_5!}.$$

Совершенно аналогичным способом получаем также:

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-4}^{k_2+k_3+k_4+k_5-1}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2}\, C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3}\, C_{k_4+k_5}^{k_4} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)}\, \mathrm{P}(-5n+3,\, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)(k_2+k_3+k_4+k_5)}{\mathrm{P}(-5n+4,\, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)(5n-3)\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, k_5!},$$

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-3}^{k_2+k_3+k_4+k_5-1}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2}\, C_{k_4+k_3+k_5}^{k_3}\, C_{k_4+k_5}^{k_4} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)}\, \mathrm{P}(-5n+2,\, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)(k_4+k_3+k_5)}{\mathrm{P}(-5n+3,\, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)(5n-2)\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, k_5!},$$

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-2}^{k_2+k_3+k_4+k_5-1}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2}\, C_{k_4+k_3+k_5-1}^{k_3}\, C_{k_4+k_5}^{k_4} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)}\, \mathrm{P}(-5n+1,\, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)(k_4+k_5)}{\mathrm{P}(-5n+2,\, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)(5n-1)\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, k_5!},$$

$$C_{5n-4k_5-3k_4-2k_3-k_2-1}^{k_2+k_3+k_4+k_5-1}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5-1}^{k_2}\, C_{k_4+k_3+k_5-1}^{k_3}\, C_{k_4+k_5-1}^{k_4} = \frac{(-1)^{(k_2+k_3+k_4+k_5)}\, \mathrm{P}(-5n,\, 2k_2+3k_3+4k_4+5k_5)}{\mathrm{P}(-5n+1,\, k_2+2k_3+3k_4+4k_5)\, 5n\, k_2!\, k_3!\, k_4!\, (k_5-1)!}.$$

Подставляя полученные значения в (5.32), (5.33), получим искомые формулы (5.26). Теорема доказана.

5.6. Формула для нахождения корней алгебраического уравнения пятой степени

Докажем, что справедлива **ТЕОРЕМА 5.2: Корни алгебраического уравнения пятой степени (5.1), где a_i, $i = 1, 2 .. 5$ — коэффициенты, удовлетворяющие условиям (5.29), определяются формулами:**

$$\boldsymbol{x_i = \frac{R_i}{G_i},\ \ i = 1, 2\ ..\ 5,} \tag{5.35}$$

где (4.52)

$$R_i := \begin{bmatrix} \omega_i^3 A_5\left(\frac{3}{5}\right) & -\omega_i^3 A_3\left(\frac{3}{5}\right) & -\omega_i^3 A_2\left(\frac{3}{5}\right)+1 & -\omega_i^3 A_1\left(\frac{3}{5}\right) \\ \omega_i^4 A_5\left(\frac{4}{5}\right) & -\omega_i^4 A_3\left(\frac{4}{5}\right) & -\omega_i^4 A_2\left(\frac{4}{5}\right) & 1-\omega_i^4 A_1\left(\frac{4}{5}\right) \\ \omega_i A_5\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_3\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_2\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_1\left(\frac{1}{5}\right) \\ \omega_i^2 A_5\left(\frac{2}{5}\right) & -\omega_i^2 A_3\left(\frac{2}{5}\right)+1 & -\omega_i^2 A_2\left(\frac{2}{5}\right) & -\omega_i^2 A_1\left(\frac{2}{5}\right) \end{bmatrix},$$

$$G_i := \begin{bmatrix} -\omega_i^3 A_4\left(\frac{3}{5}\right) & -\omega_i^3 A_3\left(\frac{3}{5}\right) & -\omega_i^3 A_2\left(\frac{3}{5}\right)+1 & -\omega_i^3 A_1\left(\frac{3}{5}\right) \\ -\omega_i^4 A_4\left(\frac{4}{5}\right) & -\omega_i^4 A_3\left(\frac{4}{5}\right) & -\omega_i^4 A_2\left(\frac{4}{5}\right) & 1-\omega_i^4 A_1\left(\frac{4}{5}\right) \\ 1-\omega_i A_4\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_3\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_2\left(\frac{1}{5}\right) & -\omega_i A_1\left(\frac{1}{5}\right) \\ -\omega_i^2 A_4\left(\frac{2}{5}\right) & -\omega_i^2 A_3\left(\frac{2}{5}\right)+1 & -\omega_i^2 A_2\left(\frac{2}{5}\right) & -\omega_i^2 A_1\left(\frac{2}{5}\right) \end{bmatrix},$$

$$\omega_1 = 1,\quad \omega_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},\quad \omega_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},$$

$$\omega_4 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},\quad \omega_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{I\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4},$$

I — мнимая единица, $A_i\left(\frac{s}{5}\right)$, $i = 1\ ..\ 5$, $s = 1\ ..\ 4$ — выражаются формулами (5.26).

ω_i — корни алгебраического уравнения:

$$\omega^5 = 1. \tag{5.36}$$

Доказательство: Так как n-образ для алгебраического уравнения (5.1) представляется равенством:

$$x^{(5n)} = A_1(n)\,x^4 + A_2(n)\,x^3 + A_3(n)\,x^2 + A_4(n)\,x + A_5(n), \tag{5.37}$$

где $A_i(n)$, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$ — определяются формулами (5.26), то введем параметр ω, удовлетворяющий условию (5.36). Очевидно, что в этом случае также выполняется равенство:

$$\omega^{(5n)} = 1,$$

где n — произвольное натуральное число.

Следовательно, уравнение (5.37) можно формально записать следующим образом:

$$x^{(5n)} = \omega^{(5n)}(A_1(n)\,x^4 + A_2(n)\,x^3 + A_3(n)\,x^2 + A_4(n)\,x + A_5(n)). \tag{5.38}$$

Так как коэффициенты исходного уравнения (5.1) a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$ удовлетворяют условиям (5.29), то гипергеометрические функции (5.26) сходятся, также при условии, что параметр n — действительное число. Поэтому зададим ему значения: $n = \frac{i}{5}$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. В этом случае равенство (5.38) образует систему алгебраических уравнений:

$$x^i = \omega^i\left(A_1\left(\frac{i}{5}\right)x^4 + A_2\left(\frac{i}{5}\right)x^3 + A_3\left(\frac{i}{5}\right)x^2 + A_4\left(\frac{i}{5}\right)x + A_5\left(\frac{i}{5}\right)\right),\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{5.39}$$

каждое из которых содержит только один корень уравнения (5.1).

Так как параметр ω принимает в соответствии с (5.37) пять отличных значений, удовлетворяющих (5.36), т. е. $\omega = \{\omega_i,\ i = 1\ ..\ 5\}$, то сопоставим каждому из них соответствующее неизвестное значение $x = \{x_i,\ i = 1\ ..\ 5\}$. Следовательно, образуются пять систем алгебраических уравнений вида:

$$x_k^i = \omega_k^i\left(A_1\left(\frac{i}{5}\right)x_k^4 + A_2\left(\frac{i}{5}\right)x_k^3 + A_3\left(\frac{i}{5}\right)x_k^2 + A_4\left(\frac{i}{5}\right)x_k + A_5\left(\frac{i}{5}\right)\right), \quad i = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, 2\ ..\ 5, \quad (5.40)$$

каждая из которых содержит отличный от других только один корень алгебраического уравнения (5.1).

Решая последовательно эти системы алгебраических уравнений (5.40) методом Крамера, в итоге и получаем формулы для корней (5.35). Теорема доказана.

Отметим, что для вычисления корней алгебраического уравнения (5.1), используя Теорему 5.2, необходимо вычислять суммы рядов (5.26), т. е. уметь вычислять четырехкратные бесконечные ряды вида:

$$\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} A(k_1, k_2, k_3, k_4).$$

В общем случае для вычисления суммы недостаточно указать вид функции $A(k_1, k_2, k_3, k_4)$, необходимо также задать последовательность частичных сумм, пределом которых по определению и будет сумма указанного ряда. По аналогии с вычислением тройных бесконечных сумм для уравнений четвертой степени в данном случае вычисление можно производить по четырехмерным призмам:

$$\sum_{k_4=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{k_4}\sum_{k_2=0}^{k_4-k_3}\sum_{k_1=0}^{k_4-k_3-k_2} A(k_1, k_2, k_3, k_4 - k_3 - k_2 - k_1)$$

с использованием рекуррентных соотношений, обходящих случаи, когда (вместе или раздельно) $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0$.

Относительную ошибку вычисления искомых корней можно установить, пользуясь формулой:

$$\delta(x_i) = \left| \frac{x_i^5 - (a_1 x_i^4 + a_2 x_i^3 + a_3 x_i^2 + a_4 x_i + a_5)}{a_5} \right|,\ i = 1, 2\ ..\ 5. \tag{5.41}$$

5.7. Преобразование гипергеометрических функций. Новые области определения для корней алгебраического уравнения пятой степени. Примеры

5.7.1. Новые представления для гипергеометрических функций

Поскольку формулы для корней алгебраического уравнения (5.1) в форме Теоремы 5.2. требуют особых преобразований для использования в качестве вычислительного алгоритма, то рассмотрим и другие представления для гипергеометрических функций (5.26), лишенные этого недостатка. В частности, производя замену индекса k_5 на $-k_5 + n - 1$ в первых четырех представлениях (5.23) и замену индекса k_5 на $-k_5 + n$ в пятом равенстве, получим новые представления: (5.42)

$$A_1(n) = \sum_{k_5=0}^{n-1} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{4}+\frac{5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{3}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-1)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4} \times$$

$$\times a_1^{(1-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_2(n)=\sum_{k_5=0}^{n-1}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$

$$\times a_1^{(2-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_5=0}^{n-1}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3}{4}+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[1-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5+1-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-2}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$

$$\times a_1^{(3-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_4(n)=\sum_{k_5=0}^{n-1}\sum_{k_4=0}^{\left[1+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[2-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5+2-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-2}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-2}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$

$$\times a_1^{(4-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_5(n)=\sum_{k_5=0}^{n}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2-1}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-1)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$

$$\times a_1^{(-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)}a_2^{k_2}a_3^{k_3}a_4^{k_4}a_5^{(-k_5+n)}.$$

Как видим, в этих формулах параметр n находится только в верхнем пределе суммирования последней суммы, поэтому данные формулы легко применимы для непосредственного вычисления корней уравнения (5.1), в форме: (5.43)

$$A_1(n)=\sum_{k_5=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{4}+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-1)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(1-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_2(n)=\sum_{k_5=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{2}+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(2-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_3(n)=\sum_{k_5=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3}{4}+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[1-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5+1-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-2}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(3-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_4(n)=\sum_{k_5=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\left[1+\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4}{3}-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[2-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5+2-3k_4-2k_3-k_2}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-2)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-2}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-2}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(4-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n-1)},$$

$$A_5(n)=\sum_{k_5=0}^{\infty}\sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5k_5}{4}\right]}\sum_{k_3=0}^{\left[-\frac{4k_4}{3}+\frac{5k_5}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[-\frac{3k_3}{2}-2k_4+\frac{5k_5}{2}\right]} C_{n+4k_5-3k_4-2k_3-k_2-1}^{(k_2+k_3+k_4-k_5+n-1)} C_{k_2+k_3+k_4-k_5+n-1}^{k_2} C_{k_4+k_3-k_5+n-1}^{k_3} C_{k_4-k_5+n-1}^{k_4}\times$$
$$\times a_1^{(-2k_2-3k_3-4k_4+5k_5)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{(-k_5+n)},$$

Очевидно, что область определения этих гипергеометрических функций другая:

$$\left|\frac{a_1^5}{a_5}\right| < \frac{3125}{256}, \quad \left|\frac{a_4}{a_1^4}\right| < \frac{27}{256}, \quad \left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{4}{27}, \quad \left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4}. \tag{5.44}$$

Она определяется аналогично ранее изложенным горновским подходом.

Таким образом, замена индексов суммирования определяет новые области сходимости для итоговых формул, для корней уравнения (5.1).

Изложенное позволяет считать доказанной **ТЕОРЕМУ 5.3. Корни уравнения (5.1), при условии, что его коэффициенты удовлетворяют условию (5.44), определяются формулами (5.35), где коэффициенты *n*-образа задаются значениями (5.43).**

5.7.2. Примеры

▶ **Пример 1.** Вычислить корни уравнения

$$x^5 = x^4 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{8} - 4 \tag{5.45}$$

при условии, что для его вычислений используются только первые шесть слагаемых в рядах (5.43).

Решение: Проверяем, удовлетворяют ли условиям (5.44) коэффициенты уравнения (5.45):

$$\frac{1}{4} < \frac{3125}{256}, \quad \frac{1}{8} < \frac{27}{256}, \quad \frac{1}{6} < \frac{4}{27}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Как видим, первые три условия выполнены, а четвертое нет. Однако, исходя из предположения, что отклонение незначительно, вычисляем по формулам (5.43) для $N = 5$ (т. е. в этих формулах заменяем бесконечность на данное значение) коэффициенты n-образа:

$$A_4\left(\frac{1}{5}\right) = .2716454592\text{e-}1 + .1973619780\text{e-}1\,I,\ A_1\left(\frac{1}{5}\right) = -.5577660332\text{e-}1 - .4052407430\text{e-}1\,I,$$

$$A_5\left(\frac{1}{5}\right) = 1.078063460 + .7832589517\,I,\ A_3\left(\frac{1}{5}\right) = .1089564441\text{e-}1 + .7916149013\text{e-}2\,I,$$

$$A_2\left(\frac{1}{5}\right) = .8312310938\text{e-}2 + .6039247365\text{e-}2\,I,$$

$$A_4\left(\frac{2}{5}\right) = .2422327099\text{e-}1 + .7455156248\text{e-}1\,I,\ A_5\left(\frac{2}{5}\right) = .5486687086 + 1.688628641\,I,$$

$$A_3\left(\frac{2}{5}\right) = .7211133783\text{e-}2 + .2219358774\text{e-}1\,I,\ A_2\left(\frac{2}{5}\right) = .2883524440\text{e-}2 + .8874575781\text{e-}2\,I,$$

$$A_1\left(\frac{2}{5}\right) = -.5629361214\text{e-}1 - .1732539231\,I,$$

$$A_5\left(\frac{3}{5}\right) = -.7278377999 + 2.240054410\,I,\ A_4\left(\frac{3}{5}\right) = -.3920479672\text{e-}1 + .1206599562\,I,$$

$$A_3\left(\frac{3}{5}\right) = -.5177649544\text{e-}2 + .1593516676\text{e-}1\,I,\ A_1\left(\frac{3}{5}\right) = .1108307098 - .3411018493\,I,$$

$$A_2\left(\frac{3}{5}\right) = .5183419996\text{e-}2 - .1595292648\text{e-}1\,I,$$

$$A_3\left(\frac{4}{5}\right) = .2542066903\text{e-}1 - .1846919706\text{e-}1\,I,\;\; A_2\left(\frac{4}{5}\right) = .7369957434\text{e-}1 - .5354587523\text{e-}1\,I,$$

$$A_4\left(\frac{4}{5}\right) = -1277240806 + .9279697655\text{e-}1\,I,\;\; A_1\left(\frac{4}{5}\right) = .5033178421 - .3656818167\,I,$$

$$A_5\left(\frac{4}{5}\right) = -2.503439644 + 1.818855368\,I.$$

Таким образом, искомые корни в соответствии с формулами (5.35) равны:

$$x_1 = 1.359933739 + .6560642185\,I,\;\; x_2 = -.2762603093 + 1.194432399\,I,$$
$$x_3 = -1.167346916 - .5215402053\text{e-}9\,I,\;\; x_4 = -.2762603082 - 1.194432399\,I,$$
$$x_5 = 1.359933738 - .6560642190\,I.$$

Относительная ошибка вычислений равна:

$$\delta(x_1) = -.4656\text{e-}7 + .9312\text{e-}7\,I,\;\; \delta(x_2) = -.20524\text{e-}7 + .2250\text{e-}7\,I,$$
$$\delta(x_3) = -.1671\text{e-}7 + .2897802584\text{e-}8\,I,\;\; \delta(x_4) = -.18290\text{e-}7 - .1366\text{e-}7\,I,$$
$$\delta(x_5) = -.4732\text{e-}7 - .9190\text{e-}7\,I.$$

Как видим, даже при первых шести значениях рядов точность вычисления очень высока. Задача решена.

▶ **Пример 2.** Вычислить корни уравнения

$$x^5 = x^4 I + \frac{Ix^3}{7} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 8 + I \qquad (5.46)$$

при условии, что для его вычислений используются только первые шесть слагаемых в рядах (5.43).

Р е ш е н и е: Проверяем удовлетворяют ли условиям (5.44) коэффициенты уравнения (5.46):

$$\frac{\sqrt{65}}{65} < \frac{3125}{256}, \quad \frac{1}{2} < \frac{27}{256}, \quad \frac{1}{2} < \frac{4}{27}, \quad \frac{1}{7} < \frac{1}{4}.$$

Как видим, второе и третье условия не выполняются. Однако, продолжая вычислять по формулам (5.43) для $N = 5$ (т. е. в этих формулах заменяем бесконечность на данное значение), получаем коэффициенты n-образа:

$$A_1\left(\frac{1}{5}\right) = .4630278493\text{e-}2 + .3864559905\text{e-}1\,I, \ A_2\left(\frac{1}{5}\right) = .1359907647\text{e-}1 - .7163080708\text{e-}2\,I,$$

$$A_4\left(\frac{1}{5}\right) = .1338664052\text{e-}1 - .1967559791\text{e-}1\,I, \ A_5\left(\frac{1}{5}\right) = 1.527279702 + .2111315390\text{e-}1\,I,$$

$$A_3\left(\frac{1}{5}\right) = .1475080524\text{e-}1 + .4714101514\text{e-}2\,I,$$

$$A_2\left(\frac{2}{5}\right) = .3086323286\text{e-}1 - .1982180575\text{e-}1\,I, \ A_1\left(\frac{2}{5}\right) = .1108466022\text{e-}1 + .1173116615\,I,$$

$$A_5\left(\frac{2}{5}\right) = 2.329085964 + .7505123180\text{e-}1\,I, \ A_3\left(\frac{2}{5}\right) = .4782668155\text{e-}1 + .1235276533\text{e-}1\,I,$$

$$A_4\left(\frac{2}{5}\right) = .4364787564\text{e-}1 - .4624998070\text{e-}1\,I,$$

Всего необходимо получить двадцать различных значений $A_i\left(\frac{k}{5}\right)$, $i = 1\ ..\ 5$, $k = 1\ ..\ 4$.

Продолжая вычислять коэффициенты n-образа с точностью до 10^{-6} степени далее получаем:

$$A_3\left(\frac{3}{5}\right) = .1158011730 + .2111968407\text{e-}1\,I,\ \ A_1\left(\frac{3}{5}\right) = .1768005570\text{e-}1 + .2661306508\,I,$$

$$A_2\left(\frac{3}{5}\right) = .4660617967\text{e-}1 - .4157602629\text{e-}1\,I,\ \ A_4\left(\frac{3}{5}\right) = .1078495166 - .7252321548\text{e-}1\,I,$$

$$A_5\left(\frac{3}{5}\right) = 3.538765633 + .1982028788\,I,$$

$$A_4\left(\frac{4}{5}\right) = .2390070219 - .7586352619\text{e-}1\,I,\ \ A_2\left(\frac{4}{5}\right) = .4680940055\text{e-}1 - .7875139035\text{e-}1\,I,$$

$$A_1\left(\frac{4}{5}\right) = .1878248716\text{e-}1 + .5342628592\,I,\ \ A_3\left(\frac{4}{5}\right) = .2486278415 + .2365632109\text{e-}1\,I,$$

$$A_5\left(\frac{4}{5}\right) = 5.344168917 + .4614903099\,I.$$

Таким образом, искомые корни уравнения (5.46), определяются по формулам (5.35) и будут равны:

$$x_1 = 1.543094126 + .2183860278\,I,\ \ x_2 = .3118072385 + 1.695483253\,I,$$
$$x_3 = -1.163996414 + 1.116894065\,I,\ \ x_4 = -1.148622588 - .7601539112\,I,$$
$$x_5 = .4577177403 - 1.270609380\,I.$$

Относительная ошибка вычислений равна:

$$\delta(x_1) = .9385384617\text{e-}7 - .5416923077\text{e-}7\,I,\ \ \delta(x_2) = .1847830770\text{e-}6 - .9953538462\text{e-}7\,I,$$
$$\delta(x_3) = -.7432307693\text{e-}7 - .1415846154\text{e-}6\,I,\ \ \delta(x_4) = -.1976923074\text{e-}8 - .6031538463\text{e-}7\,I,$$
$$\delta(x_5) = .2270153847\text{e-}7 - .5208769232\text{e-}7\,I.$$

Отсюда следует, что несмотря на отсутствие выполнения условий (5.44), корни уравнения (5.46) вычислены с очень высокой точностью.

Задача решена.

Примечание: Изложенный пример показывает, что условия (5.44) не являются строгими.

Выводы:

Не существует единых формул для определения корней алгебраического уравнения (5.1) для произвольного значения коэффициентов a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$, как это имеет место для уравнений со второй по четвертую степень. Корни уравнения пятой и, конечно же, более высоких степеней можно вычислять только для определенных областей сходимости коэффициентов исходного алгебраического уравнения (5.1). Однако, в принципе, можно путем преобразования индексов суммирования, а также разложением известных представлений коэффициентов n-образа $A_i(n)$, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$, установить формулы, справедливые для других областей изменения a_i, $i = 1,\ 2\ ..\ 5$.

6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СТЕПЕНИ m

Рассмотрим алгебраическое уравнение степени m в приведенной форме:

$$x^m = \sum_{i=1}^{m} a_i x^{(m-i)}, \tag{6.1}$$

где a_i — произвольные элементы множества C, $a_m \neq 0$.

В соответствии с основной теоремой алгебры [1], уравнение (6.1) имеет m корней $-x = \{x_i,\ i = 1\ ..\ m\}$. Ставится задача определения формул для их нахождения. Несмотря на то что Абель и Галуа доказали, что в радикалах этих формул не существует, это не означает, что эти формулы не существуют вообще. Их можно установить, например, в виде аналитических функций. Поскольку до настоящего времени этого не сделано, то цель этого параграфа восполнить этот существенный пробел.

6.1. Уравнение *n*-образа

Как это было показано ранее, основной идеей в решении поставленной задачи является введение понятия уравнения n-образа, который в общем случае, применительно к уравнению (6.1), определяется формулой:

$$x^{(mn)} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,\,i}(n)\, x^{(m-i)}. \tag{6.2}$$

Здесь $A_{m,\,i}(n)$ — коэффициенты n-образа.

Уравнение (6.2) следует из (6.1), если правую и левую части возвести в степень с натуральным числом n. Далее используя формулу бинома Ньютона, раскрываем правую часть и производим с учетом (6.1) замену всех переменных $x^{(m+i)}$, $i = 0,\ 1,\ 2\ ..\ n$. Таким образом и приходим к представлению (6.2).

Очевидно, имеет место, с учетом (6.1), также и эквивалентная формула:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x^{(m-i)}\right)^n = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n)\, x^{(m-i)}. \tag{6.3}$$

На основании изложенного следует, что главной теперь является задача нахождения общей формулы для коэффициентов n-образа — $A_{m,i}(n)$.

6.2. Свойства уравнения n-образа и его коэффициентов

СВОЙСТВО 1. **Уравнение n-образа (6.2) содержит все корни уравнения (6.1).**

Данное свойство очевидно, так как алгебраическое уравнение (6.2) образовано возведением в степень n исходного уравнения (6.1) без привлечения других равенств. При этом все переменные $x^{(m+i)}$, $i = 0, 1, 2 .. n$ заменены также с учетом только (6.1).

СВОЙСТВО 2. **Коэффициенты n-образа $A_{m,i}(n)$ должны удовлетворять начальным условиям:**

$$A_{m,i}(1) = a_i, \quad i = 1 .. m. \tag{6.4}$$

Действительно, принимая в (6.2) $n = 1$, получим:

$$x^m = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(1)\, x^{(m-i)}.$$

Так как по условию свойства 1 данное уравнение является степени той же, что и исходное (6.1), то для того, чтобы оно имело такие же корни, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство (6.4).

СВОЙСТВО 3. Коэффициенты n-образа $A_{m,i}(n)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, следующим из равенства:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} A_{m,k}(n)\, a_i x^{(2m-i-k)} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n+1)\, x^{(m-i)}, \tag{6.5}$$

в котором предполагается, что после определения конкретного значения m производится замена всех переменных $x^{(m+i)}$, $i = 0, 1, 2..$ с учетом исходного уравнения (6.1) и далее приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях $x^{(m-i)}$, $i = 1 .. m$.

Действительно, принимая в уравнении n-образа (6.3) $n = n + 1$, получим:

$$x^{(m\,(n+1))} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n+1)\, x^{(m-i)}.$$

С учетом исходного уравнения (6.1) и уравнения n-образа (6.3) левая часть принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n)\, x^{(m-i)} \sum_{i=1}^{m} a_i x^{(m-i)} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n+1)\, x^{(m-i)}.$$

Отсюда и следует равенство (6.5).

СВОЙСТВО 4. Если корни уравнения (6.1) известны, то коэффициенты n-образа определяются однозначно.

Действительно, в том случае если известны все корни уравнения (6.1), то в силу свойства 1 имеют место равенства:

$$x_i^{(mn)} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,i}(n)\, x_i^{(m-i)}, \quad i = 1 \,..\, m. \tag{6.6}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно m неизвестных коэффициентов $A_{m,\,i}(n)$, $i = 1\ ..\ m$, получим однозначные искомые формулы, подобно тому как это сделано в случае уравнений второй, третьей, четвертой и пятой степеней.

6.3. Определение общей формулы для коэффициентов *n*-образа $A_{m,\,i}(n)$

Задача правильного определения общего вида для коэффициентов n-образа $A_{m,\,i}(n)$ является ключевой в построении теории нахождения корней алгебраических уравнений (6.1). С этой целью воспользуемся методом индукции, исходя из уже установленных ранее значений этих коэффициентов для алгебраических уравнений со второй по пятую степень. Выпишем значения коэффициентов n-образа $A_{m,\,1}(n)$, $m = 2\ ..\ 5$.

$$A_{2,\,1}(n) = \sum_{k_2=0}^{n-1} C_{2n-1-k_2}^{k_2}\, a_1^{(2n-1-2k_2)} a_2^{k_2},$$

$$A_{3,\,1}(n) = \sum_{k_3=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{3n}{2}-1-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{3n-2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3}\, C_{k_2+k_3}^{k_2}\, a_1^{(3n-2-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3},$$

$$A_{4,\,1}(n) = \sum_{k_4=0}^{n-1} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{4n}{3}-1-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[2n-\frac{3}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{4n-3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4}\, C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2}\, C_{k_3+k_4}^{k_3}\, a_1^{(4n-3-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4},$$

$$A_{5,\,1}(n) = \sum_{k_5=0}^{n-1} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{5n}{4}-1-\frac{5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{5n}{3}-\frac{4}{3}-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{5n}{2}-2-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{5n-4-k_2-2k_3-3k_4-4k_5}^{k_2+k_3+k_4+k_5}\, C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2}\, C_{k_3+k_4+k_5}^{k_3}\, C_{k_4+k_5}^{k_4} \times$$
$$\times\, a_1^{(5n-4-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}.$$

Анализируя представленные формулы, приходим к следующим обобщающим результатам:

1) Количество знаков суммирования равно $\boldsymbol{m-1}$;

2) Значение верхнего предела суммирования последней суммы ряда равно $\boldsymbol{n-1}$;

3) Значение верхнего предела суммирования для предпоследней суммы ряда $\boldsymbol{\left[\frac{m(n-1-k_m)+1}{m-1}\right]}$;

4) Значение верхнего предела суммирования для следующей, после предпоследней, суммы ряда $\boldsymbol{\left[\frac{m(n-1-k_m)+1-(m-1)k_{m-1})}{m-2}\right]}$;

5) Значение верхнего предела суммирования для l, $l = 2 \,..\, m-1$ начиная с предпоследней суммы ряда $\boldsymbol{\left[\frac{m(n-1)+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{l}(m-s+2)k_{m-s+2}\right)}{m-l+1}\right]}$;

6) Значения нижних пределов суммирования в первой сумме ряда: $k_2 = 0$, во второй сумме ряда $k_3 = 0$ и так до $k_m = 0$ в последней сумме ряда;

7) Количество биномиальных коэффициентов под знаком сумм равно $\boldsymbol{m-1}$;

8) Выражение для произведения биномиальных коэффициентов под знаком суммы может быть записано в общем виде как $C_{m(n-1)+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}(s-1)k_s\right)}^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s} \cdot \prod\limits_{r=2}^{m-1} C_{\sum\limits_{s=r}^{m}k_s}^{k_r}$;

9) Выражение для произведения коэффициентов исходного алгебраического уравнения, под знаком сумм: $a_1^{\left(m\,(n-1)+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m} sk_s\right)\right)}\left(\prod\limits_{s=2}^{m} a_s^{k_s}\right)$.

Изложенного достаточно, чтобы в общем виде выписать значение коэффициента n-образа $A_{m,\,1}(n)$:

$$A_{m,1}(n)=\sum_{k_m=0}^{n-1}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m\,(n-1)+1-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s}_{m\,(n-1)+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}(s-1)\,k_s\right)}\cdot\prod_{r=2}^{m-1}C^{k_r}_{\sum\limits_{s=r}^{m}k_s}\;a_1^{\left(m\,(n-1)+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right).$$

Совершенно аналогичным образом устанавливаем значение коэффициента n-образа $A_{m,\,2}(n)$:

$$A_{m,2}(n)=\sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=2}^{m-1}\delta\,(s-2)\right)}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m\,(n-1)+2-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{2}\delta\,(2-s)\right]}_{m\,(n-1)+\delta\,(1)+\sum\limits_{s=2}^{m}(\delta\,(2-s)-(s-1)\,k_s)}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{r=2}^{m-1}C^{k_r}_{\sum\limits_{s=r}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{2}\delta\,(2-s)\right]}\;a_1^{\left(m\,(n-1)+2-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right),$$

коэффициента $A_{m,\,3}(n)$:

$$A_{m,3}(n) = \sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=3}^{m-1}\delta(s-3)\right)} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m(n-1)+3-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{3}\delta(3-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(2)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(2\delta(3-s)-(s-1)k_s)\right]} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\sum\limits_{s=r}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{3}\delta(3-s)\right]} a_1^{\left(m(n-1)+3-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right),$$

коэффициента $A_{m,\,4}(n)$:

$$A_{m,4}(n) = \sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=4}^{m-1}\delta(s-4)\right)} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m(n-1)+4-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{4}\delta(4-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(3)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(3\delta(4-s)-(s-1)k_s)\right]} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{4}\delta(4-s)\right]} a_1^{\left(m(n-1)+4-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right),$$

коэффициента $A_{m,\,5}(n)$:

$$A_{m,\,5}(n)=\sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=5}^{m-1}\delta(s-5)\right)}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m(n-1)+5-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{5}\delta(5-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(4)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(4\delta(5-s)-(s-1)k_s)\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{r=2}^{m-1}C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{5}\delta(5-s)\right]}\,a_1^{\left(m(n-1)+5-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right).$$

Изложенного достаточно, чтобы выписать коэффициенты n-образа $A_{m,\,i}(n)$ в общем виде:

$$A_{m,\,i}(n)=\sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{j=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}((i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]}\times\right. \quad (6.7)$$

$$\left.\times\prod_{r=2}^{m-1}C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}\,a_1^{\left(m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right),\quad i=1\,..\,m.$$

Здесь $\delta(0)=1,\ \delta(1)=0,\ \delta(-i)=0,\ i=1,\ 2\,..\,n.$

Исследуем полученную формулу на соответствие. Покажем вначале, что формула (6.7) при $m = 2, 3, 4, 5$ дает уже ранее доказанные и проверенные на практике вычисления корней формулы для коэффициентов n-образа уравнений второй, третьей, четвертой, пятой степени. Действительно, из (6.7) следует:

Для квадратных уравнений, при $m = 2$:

$$A_{2,\,i}(n) = \sum_{k_2=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{1}\delta(s-i)\right)} C_{2n-2+\delta(i-1)+(i-1)\delta(i-2)-k_2}^{k_2-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} a_1^{(2n-2+i-2k_2)} a_2^{k_2}. \tag{6.8}$$

Для кубических уравнений, при $m = 3$:

$$A_{3,\,i}(n) = \sum_{k_3=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{2}\delta(s-i)\right)} \left(\sum_{k_2=0}^{\mathrm{trunc}\left(\frac{3n}{2}-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}-\frac{3k_3}{2}\right)} C_{3n-3+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{3}(i-1)\delta(i-s)-(s-1)k_s\right]}^{\sum\limits_{s=2}^{3}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \times \right. \tag{6.9}$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{2} C_{\left[\sum\limits_{s=r}^{3}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_r} a_1^{\left(3n-3+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{3}sk_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{3} a_s^{k_s}\right) \right).$$

Как видим, условие соблюдения при $m = 2, 3$ начальных значений коэффициентов n-образа $A_{m,\,i}(n)$ выполнено. Продолжая далее, установим возможность получения из общей формулы ранее установленных соотношений.

Для алгебраических уравнений четвертой степени, при $m = 4$: (6.10)

$$A_{4,\,i}(n) = \sum_{k_4 = 0}^{n - \left(\sum\limits_{s=i}^{3} \delta\,(s - i)\right)} \left(\sum_{k_3 = 0}^{\operatorname{trunc}\left(\frac{4n}{3} - \frac{4}{3} + \frac{i}{3} - \frac{4k_4}{3}\right)} \left(\sum_{k_2 = 0}^{\operatorname{trunc}\left(2n - 2 + \frac{i}{2} - 2k_4 - \frac{3k_3}{2}\right)} C_{4n - 4 + \delta\,(i-1) + \left[\sum\limits_{s=2}^{4} (i-1)\,\delta\,(i-s) - (s-1)\,k_s\right]}^{\sum\limits_{s=2}^{4} k_s - \left[\sum\limits_{s=2}^{i} \delta(i-s)\right]} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \prod_{r=2}^{3} C_{\left[\sum\limits_{s=r}^{4} k_s\right] - \left[\sum\limits_{s=r+1}^{i} \delta(i-s)\right]}^{k_r} \, a_1^{\left(4n - 4 + i - \left(\sum\limits_{s=2}^{4} s k_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{4} a_s^{k_s} \right) \right)\right).$$

Для алгебраических уравнений пятой степени, при $m = 5$: (6.11)

$$A_{5,\,i}(n) = \sum_{k_5 = 0}^{n - \left(\sum\limits_{s=i}^{4} \delta\,(s - i)\right)} \left(\sum_{k_4 = 0}^{\operatorname{trunc}\left(\frac{5n}{4} - \frac{5}{4} + \frac{i}{4} - \frac{5k_5}{4}\right)} \left(\sum_{k_3 = 0}^{\operatorname{trunc}\left(\frac{5n}{3} - \frac{5}{3} + \frac{i}{3} - \frac{5k_5}{3} - \frac{4k_4}{3}\right)} \left(\sum_{k_2 = 0}^{\operatorname{trunc}\left(\frac{5n}{2} - \frac{5}{2} + \frac{i}{2} - \frac{5k_5}{2} - 2k_4 - \frac{3k_3}{2}\right)} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. C_{5n - 5 + \delta\,(i-1) + \left[\sum\limits_{s=2}^{5} (i-1)\,\delta\,(i-s) - (s-1)\,k_s\right]}^{\sum\limits_{s=2}^{5} k_s - \left[\sum\limits_{s=2}^{i} \delta(i-s)\right]} \cdot \prod_{r=2}^{4} C_{\sum\limits_{s=r}^{5} k_s - \left[\sum\limits_{s=r+1}^{i} \delta(i-s)\right]}^{k_r} \, a_1^{\left(5n - 5 + i - \left(\sum\limits_{s=2}^{5} s k_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{5} a_s^{k_s} \right) \right)\right)\right).$$

Убеждаемся, что полученные формулы соответствуют ранее установленным для соответствующих степеней исходного алгебраического уравнения. Таким образом, формула (6.7) включает в качестве частного случая все ранее выведенные формулы. Проверим соответствие формулы (6.7) начальным условиям (6.4):

$$A_{m,\,i}(1) = a_i,\;\; i = 1\,..\,m.$$

Принимая в (6.7) $n = 1$, получим:

$$A_{m,\,i}(1) = \sum_{k_m = 0}^{1 - \left(\sum\limits_{s=i}^{m-1} \delta(s-i)\right)} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2} = 0}^{\left[\frac{i - \left(\sum\limits_{s=2}^{l+1} (m-s+2)\,k_{m-s+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{z=2}^{m} k_z - \left[\sum\limits_{s=2}^{i} \delta(i-s)\right]}_{\delta(i-1) + \left[\sum\limits_{s=2}^{m} (i-1)\,\delta(i-s) - (s-1)\,k_s\right]} \times \right. \tag{6.12}$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m} k_z\right] - \left[\sum\limits_{s=r+1}^{i} \delta(i-s)\right]}\, a_1^{\left(i - \left(\sum\limits_{s=2}^{m} s k_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m} a_s^{k_s} \right) \right).$$

Так как в верхнем пределе суммирования по k_m:

$$\sum_{s=i}^{m-1} \delta(s-i) = 1,\;\; i = 1\,..\,m-1 \quad \text{и} \quad \sum_{s=m}^{m-1} \delta(s-i) = 0,$$

то для коэффициентов n-образа $A_{m,\,i}(1)$, $i = 1\,..\,m - 1$, индекс $k_m = 0$, а для $A_{m,\,m}(1)$ он также может принимать значение, равное единице. Следовательно, (6.12) принимает значения:

$$A_{m,\,i}(1) = \sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{i-\left(\sum\limits_{s=3}^{l+1}(m-s+2)\,k_{m-s+2}\right)}{m-l}\right]} C_{\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)\,k_s\right]}^{\sum\limits_{z=2}^{m}k_z-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \times$$

$$\times \prod_{r=2}^{m-1} C_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m}k_z\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_r}\, a_1^{\left(i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m} a_s^{k_s}\right), \quad i = 1\,..\,m-1,$$

$$A_{m,\,m}(1) = \sum_{k_m=0}^{1}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m-\left(\sum\limits_{s=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C_{\delta(m-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(m-1)\,\delta(m-s)-(s-1)\,k_s\right]}^{\sum\limits_{z=2}^{m}k_z-\left[\sum\limits_{s=2}^{m}\delta(m-s)\right]} \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{r=2}^{m-1} C_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m}k_z\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{m}\delta(m-s)\right]}^{k_r}\, a_1^{\left(m-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m} a_s^{k_s}\right)\right).$$

Рассмотрим вторую формулу из (6.13). Здесь

$$\delta(m-1)=0,\ \ \sum_{s=2}^{m}(m-1)\delta(m-s)=m-1,\ \ \sum_{s=2}^{m}\delta(m-s)=1,\ \ \sum_{s=r+1}^{m}\delta(m-s)=1.$$

Поэтому

$$A_{m,\,m}(1)=\sum_{k_m=0}^{1}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m-\left(\sum\limits_{s=2}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)}{m-l}\right]} C_{m-1-\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(s-1)\,k_s\right]}^{\left(\sum\limits_{s=2}^{m}k_s\right)-1}\cdot\prod_{r=2}^{m-1}C_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m}k_z-1\right]}^{k_r}\,a_1^{\left(m-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right).$$

Так как индекс k_m принимает только два значения: ноль или единица, то при $k_m=0$ все слагаемые в силу отрицательности коэффициентов, входящих в биномиальные коэффициенты, равны нулю. Поэтому остается рассмотреть случай $k_m=1$. Здесь остаются только слагаемые, содержащие индекс k_{m-1}, который может принимать только значение $k_{m-1}=0$, но тогда и все остальные индексы $k_{m-l}=1\ ..\ m-3$ оказываются равными нулю. Следовательно, для выражения, расположенного после биномиальных коэффициентов, получаем:

$$a_1^{\left(m-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right):=a_1^{(m-mk_m)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)=a_m.$$

Таким образом, доказано, что: $A_{m,\,m}(1)=a_m$ для любых m.

В первой формуле (6.13) $k_m = 0$, поэтому примем $i = m - 1$. Тогда получим:

$$A_{m,\,m-1}(1) = \sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m-1-\left(\sum\limits_{s=3}^{l+1}(m-s+2)\,k_{m-s+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\sum\limits_{z=2}^{m}k_z - \left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}\delta(m-1-s)\right]}_{\delta(m-2)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}(m-2)\,\delta(m-1-s)-(s-1)\,k_s\right]} \times$$

$$\times \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m}k_z\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{m-1}\delta(m-1-s)\right]}\, a_1^{\left(m-1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right).$$

Так как

$$\delta(m-2)=0,\ \sum_{s=2}^{m}(m-2)\,\delta(m-1-s)=m-2,\ \sum_{s=2}^{m-1}\delta(m-1-s)=1,\ \sum_{s=r+1}^{m-1}\delta(m-1-s)=1,$$

то

$$A_{m,\,m-1}(1) = \sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m-1-\left(\sum\limits_{s=3}^{l+1}(m-s+2)\,k_{m-s+2}\right)}{m-l}\right]} C^{\left(\sum\limits_{s=2}^{m-1}k_s\right)-1}_{m-2-\left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}(s-1)\,k_s\right]} \cdot \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{z=r}^{m}k_z\right]-1}\, a_1^{\left(m-1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right).$$

В этом случае при $l = 1$ индекс k_{m-1} может принимать только два значения: ноль или единицу. В первом случае, в силу отрицательности второй составляющей, биномиальные коэффициенты равны нулю, поэтому остается рассмотреть случай $k_{m-1} = 1$. Здесь остаются только слагаемые, содержащие индекс k_{m-2}, который может принимать только значение $k_{m-2} = 0$, но тогда и все остальные индексы k_{m-l}, $l = 1 \,..\, m - 3$ оказываются равными нулю. Следовательно, для выражения, расположенного после биномиальных коэффициентов, получаем:

$$a_1^{\left(m-1-\left(\sum\limits_{s=2}^{m} s k_s\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m-1} a_s^{k_s}\right) := a_1^{(m-1-(m-1)k_{m-1})} \left(\prod_{s=2}^{m-1} a_s^{k_s}\right) = a_{m-1}.$$

Таким образом, имеем:

$$A_{m,\,m-1}(1) = a_{m-1}.$$

Снова принимая $i = m - 2$, аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что имеет место равенство:

$$A_{m,\,m-2}(1) = a_{m-2}.$$

Следовательно, в общем случае приходим к выводу, что $A_{m,\,i}(1) = a_i$, $i = 1 \,..\, m - 1$. Утверждение доказано. Таким образом, показано, что формулы (6.7) удовлетворяют условиям (6.4).

В качестве примера, доказывающего справедливость полученной формулы, рассмотрим случай $m := 6$.

Тогда для алгебраического уравнения шестой степени:

$$x^6 = a_1 x^5 + a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6 \tag{6.14}$$

уравнение n-образа имеет вид:

$$x^{\langle 6n \rangle} = A_{6,\,1}(n)\,x^5 + A_{6,\,2}(n)\,x^4 + A_{6,\,3}(n)\,x^3 + A_{6,\,4}(n)\,x^2 + A_{6,\,5}(n)\,x + A_{6,\,6}(n). \tag{6.15}$$

В этом случае из формулы (6.7) получаем: (6.16)

$$A_{6,1}(n) = \sum_{k_6=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{5}\delta(s-i)\right)} \; \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{6}{5}+\frac{1i}{5}-\frac{1\left(\sum\limits_{j=2}^{2}(8-j)\,k_{8-j}\right)}{5}\right]} \; \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1i}{4}-\frac{1\left(\sum\limits_{j=2}^{3}(8-j)\,k_{8-j}\right)}{4}\right]} \; \sum_{k_3=0}^{\left[2n-2+\frac{1i}{3}-\frac{1\left(\sum\limits_{j=2}^{4}(8-j)\,k_{8-j}\right)}{3}\right]}$$

$$\sum_{k_2=0}^{\left[3n-3+\frac{1i}{2}-\frac{1\left(\sum\limits_{j=2}^{5}(8-j)\,k_{8-j}\right)}{2}\right]} C_{6n-6+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{6}(i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)\,k_s\right]}^{\sum\limits_{s=2}^{6}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \times$$

$$\times \prod_{l=2}^{5} C_{\left(\sum\limits_{s=l}^{6}k_s\right)-\left[\sum\limits_{s=l+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_l} \, a_1^{\left(6n-6+1-\left(\sum\limits_{s=2}^{6}sk_s\right)\right)} \prod_{s=2}^{6} a_s^{k_s}, \quad i=1\ ..\ 6.$$

Выписывая (6.16) в раскрытой форме, получаем следующие значения коэффициентов n-образа: (6.17)

$$A_{6,1}(n) = \sum_{k_6=0}^{n-1} \; \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-1-\frac{6k_6}{5}\right]} \; \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{5}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]} \; \sum_{k_3=0}^{\left[2n-\frac{5}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \; \sum_{k_2=0}^{\left[3n-\frac{5}{2}-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-5-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6} \times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_2} \, C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3} \, C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4} \, C_{k_5+k_6}^{k_5} \, a_1^{(6n-5-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6^{k_6},$$

$$A_{6,2}(n)=\sum_{k_6=0}^{n-1}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{4}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-1-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[2n-\frac{4}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[3n-2-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-5-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_2}\,C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3}\,C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4}\,C_{k_5+k_6}^{k_5}\,a_1^{(6n-4-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)}\,a_2^{k_2}\,a_3^{k_3}\,a_4^{k_4}\,a_5^{k_5}\,a_6^{k_6},$$

$$A_{6,3}(n)=\sum_{k_6=0}^{n-1}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{3}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{3}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[2n-1-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[3n-\frac{3}{2}-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-4-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_2}\,C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3}\,C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4}\,C_{k_5+k_6}^{k_5}\,a_1^{(6n-3-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)}\,a_2^{k_2}\,a_3^{k_3}\,a_4^{k_4}\,a_5^{k_5}\,a_6^{k_6},$$

$$A_{6,4}(n)=\sum_{k_6=0}^{n-1}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{2}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[2n-\frac{2}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[3n-1-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-3-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_2}\,C_{k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_3}\,C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4}\,C_{k_5+k_6}^{k_5}\,a_1^{(6n-2-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)}\,a_2^{k_2}\,a_3^{k_3}\,a_4^{k_4}\,a_5^{k_5}\,a_6^{k_6},$$

$$A_{6,5}(n)=\sum_{k_6=0}^{n-1}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{1}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{1}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[2n-\frac{1}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[3n-\frac{1}{2}-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-2-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_2}\,C_{k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_3}\,C_{k_4+k_5+k_6-1}^{k_4}\,C_{k_5+k_6}^{k_5}\,a_1^{(6n-1-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)}\,a_2^{k_2}\,a_3^{k_3}\,a_4^{k_4}\,a_5^{k_5}\,a_6^{k_6},$$

$$A_{6,6}(n)=\sum_{k_6=0}^{n}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{6n}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{3n}{2}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[2n-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[3n-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{6n-1-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5+k_6-1}^{k_3} C_{k_4+k_5+k_6-1}^{k_4} C_{k_5+k_6-1}^{k_5} a_1^{(6n-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6^{k_6}.$$

Проверим полученные формулы на соответствие начальным условиям (6.4). С этой целью примем в системе (6.17) $n = 1$.

Рассмотрим подробно вычисление коэффициента $A_{6,1}(1)$:

$$A_{6,1}(n)=\sum_{k_6=0}^{0}\ \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{1}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]}\ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]}\ \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]}\ \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{1-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}\times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3} C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4} C_{k_5+k_6}^{k_5} a_1^{(1-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5-6k_6)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6^{k_6}.$$

Так как индекс $k_6 = 0$, то для верхнего предела суммирования индекса k_5 имеем:

$$\left[\frac{1}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]=\left[\frac{1}{5}\right]=0.$$

Следовательно, индекс $k_5 = 0$. В этом случае значение верхнего предела суммирования для индекса k_4 равно:

$$\left[\frac{1}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]=\left[\frac{1}{4}\right]=0.$$

Следовательно, индекс $k_4 = 0$. Поэтому значение верхнего предела суммирования для индекса k_3 равно:

$$\left[\frac{1}{3} - 2k_6 - \frac{5k_5}{3} - \frac{4k_4}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] = 0.$$

Отсюда следует, что индекс $k_3 = 0$, поэтому значение верхнего предела суммирования для индекса k_2 равно:

$$\left[\frac{1}{2} - 3k_6 - \frac{5k_5}{2} - 2k_4 - \frac{3k_3}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0.$$

Отсюда следует, что индекс $k_2 = 0$, поэтому под знаком суммы остается только одно слагаемое:

$$C_{1-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6} C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3} C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4} C_{k_5+k_6}^{k_5} a_1^{(1-2k_2-3k_3-4k_4-5k_5-6k_6)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6^{k_6},$$

в котором все индексы необходимо принять равными нулю. В этом случае получаем:

$$C(1, 0)\,C(0, 0)^4 a_1 = a_1.$$

Таким образом, показано, что:

$$A_{6,\,1}(1) = a_1.$$

Совершенно аналогичным способом показывается, что:

$$A_{6,\,2}(1) = a_2,\; A_{6,\,3}(1) = a_3,\; A_{6,\,4}(1) = a_4,\; A_{6,\,5}(1) = a_5,\; A_{6,\,6}(1) = a_6.$$

Убедимся, что при $n = 2$ вычисленные по формулам (6.17) значения действительно соответствуют истинным.

С этой целью правую и левую части уравнения (6.14) возведем в квадрат:

$$(x^6)^2 = (a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6)^2.$$

Раскрывая скобки и используя уравнение (6.14) с целью исключения неизвестных: x^{10}, x^9, x^8, x^7, x^6, в итоге получим:

$$x^{12} = (4a_1^3a_4 + 3a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_4 + a_1^7 + 6a_1^5a_2 + 10a_1^3a_2^2 + 5a_1^4a_3 + 4a_1a_2^3 + 3a_1^2a_5 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 + 2a_1a_6 + \\ + 12a_1^2a_2a_3 + 3a_1a_3^2)\,x^5 + (9a_1a_2^2a_3 + 6a_1^2a_2^3 + 3a_2a_3^2 + a_1^3a_5 + 3a_2^2a_4 + 4a_1a_2a_5 + 4a_1a_3a_4 + 8a_1^3a_2a_3 + a_2^4 + \\ + a_1^5a_3 + a_1^4a_4 + 5a_1^4a_2^2 + 3a_1^2a_3^2 + a_1^2a_6 + a_1^6a_2 + 2a_3a_5 + 2a_2a_6 + 6a_1^2a_2a_4 + a_4^2)\,x^4 + (2a_3a_6 + 3a_1a_2^2a_4 + \\ + 6a_1^2a_2^2a_3 + 2a_1a_4^2 + a_2^3a_3 + a_1^3a_6 + a_3^3 + a_2^2a_5 + 2a_1a_2a_6 + 3a_1^2a_2a_5 + 4a_1a_3a_5 + 6a_1a_2a_3^2 + a_1^5a_4 + 5a_1^4a_2a_3 + \\ + 4a_2a_3a_4 + a_1^4a_5 + 4a_1^3a_3^2 + a_1^6a_3 + 2a_4a_5 + 4a_1^3a_2a_4 + 6a_1^2a_3a_4)\,x^3 + (3a_1a_2^2a_5 + 6a_1a_2a_3a_4 + 6a_1^2a_2^2a_4 + \\ + a_3^2a_4 + a_2^3a_4 + 3a_1^2a_4^2 + a_2^2a_6 + 3a_1^2a_2a_6 + 2a_1a_3a_6 + a_1^5a_5 + 5a_1^4a_2a_4 + 4a_1^3a_3a_4 + 4a_1a_4a_5 + 2a_2a_3a_5 + \\ + a_1^4a_6 + a_1^6a_4 + 2a_2a_4^2 + 2a_4a_6 + 4a_1^3a_2a_5 + 3a_1^2a_3a_5 + a_5^2)\,x^2 + (3a_1a_2^2a_6 + 6a_1a_2a_3a_5 + 6a_1^2a_2^2a_5 + 3a_1^2a_4a_5 + \\ + a_3^2a_5 + a_2^3a_5 + 2a_1a_5^2 + 2a_2a_4a_5 + a_1^5a_6 + 5a_1^4a_2a_5 + 4a_1^3a_3a_5 + 2a_1a_4a_6 + 2a_2a_3a_6 + a_1^6a_5 + 2a_5a_1 + \\ + 4a_1^3a_2a_6 + 3a_1^2a_3a_6)\,x + a_6(4a_1^3a_3 + a_2^3 + 6a_1a_2a_3 + a_1^6 + a_6 + 5a_1^4a_2 + 3a_1^2a_4 + 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + 6a_1^2a_2^2 + a_3^2).$$

С другой стороны, подставляя в уравнение n-образа (6.15) значение $n = 2$, имеем:

$$x^{12} = A_{6,\,1}(2)\,x^5 + A_{6,\,2}(2)\,x^4 + A_{6,\,3}(2)\,x^3 + A_{6,\,4}(2)\,x^2 + A_{6,\,5}(2)\,x + A_{6,\,6}(2).$$

Таким образом, в силу равенства левых частей, необходимо, чтобы имели место равенства: (6.18)

$$A_{6,\,1}(2) = 2a_2a_5 + 2a_3a_4 + 2a_1a_6 + 6a_1a_2a_4 + 12a_1^2a_2a_3 + 3a_1^2a_5 + 4a_1^3a_4 + 5a_1^4a_3 + 3a_1a_3^2 + 3a_2^2a_3 + 6a_1^5a_2 + \\ + 10a_1^3a_2^2 + 4a_1a_2^3 + a_1^7,$$

$$A_{6,\,2}(2) = a_4^2 + 2a_3a_6 + 2a_2a_6 + a_1^2a_6 + a_1^6a_2 + 4a_1a_2a_5 + 6a_1^2a_2a_4 + 4a_1a_3a_4 + a_1^3a_5 + a_1^4a_4 + 3a_2^2a_4 + \\ + a_1^5a_3 + 8a_1^3a_2a_3 + 9a_1a_2^2a_3 + 3a_1^2a_3^2 + 3a_2a_3^2 + 5a_1^4a_2^2 + 6a_1^2a_2^3 + a_2^4,$$

$$A_{6,\,3}(2) = 2a_4a_5 + a_1^3a_6 + 2a_3a_6 + 2a_1a_2a_6 + 3a_1^2a_2a_5 + 4a_1a_3a_5 + a_1^4a_5 + a_2^2a_5 + a_1^5a_4 + 4a_1^3a_2a_4 + \\ + 6a_1^2a_3a_4 + 3a_1a_2^2a_4 + 4a_2a_3a_4 + 5a_1^4a_2a_3 + 6a_1^2a_2^2a_3 + 6a_1a_2a_3^2 + 2a_1a_4^2 + a_1^6a_3 + 4a_1^3a_3^2 + a_2^3a_3 + a_3^3,$$

$$A_{6,\,4}(2) = a_5^2 + 2a_4a_6 + a_2^2a_6 + 3a_1^2a_2a_6 + 2a_1a_3a_6 + a_1^4a_6 + a_1^5a_5 + 4a_1^3a_2a_5 + 3a_1^2a_3a_5 + 3a_1a_2^2a_5 + \\ + 4a_1a_4a_5 + 2a_2a_3a_5 + 5a_1^4a_2a_4 + 4a_1^3a_3a_4 + 6a_1^2a_2^2a_4 + a_1^6a_4 + 3a_1^2a_4^2 + a_2^3a_4 + 2a_2a_4^2 + a_3^2a_4 + 6a_1a_2a_3a_4,$$

$$A_{6,\,5}(2) = 2a_5a_6 + a_1^5a_6 + 4a_1^3a_2a_6 + 3a_1^2a_3a_6 + 3a_1a_2^2a_6 + 2a_1a_4a_6 + 2a_2a_3a_6 + 5a_1^4a_2a_5 + 4a_1^3a_3a_5 +$$
$$+ 6a_1^2a_2^2a_5 + 3a_1^2a_4a_5 + a_1^6a_5 + 2a_1a_5^2 + a_2^3a_5 + a_3^2a_5 + 6a_1a_2a_3a_s + 2a_2a_4a_5,$$

$$A_{6,\,6}(2) = a_6(a_6 + 2a_1a_5 + 6a_1a_2a_3 + 6a_1^2a_2^2 + 2a_2a_4 + 5a_1^4a_2 + a_2^3 + 4a_1^3a_3 + a_1^6 + 3a_1^2a_4 + a_3^2).$$

Подставляя теперь в формулы (6.17) $n = 2$, получаем совершенно идентичные значения, в частности покажем это для коэффициента

$$A_{6,1}(2) := \sum_{k_6=0}^{1} \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{7}{5}-\frac{6k_6}{5}\right]} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{7}{4}-\frac{3k_6}{2}-\frac{5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{7}{3}-2k_6-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{7}{2}-3k_6-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{7-k_2-2k_3-3k_4-4k_5-5k_6}^{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6} \times$$

$$\times C_{k_2+k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5+k_6}^{k_3} C_{k_4+k_5+k_6}^{k_4} C_{k_5+k_6}^{k_5} a_1^{(7-6k_6-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6^{k_6} =$$

$$= \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{7}{5}\right]} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{7}{4}-\frac{5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{7}{3}-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{7}{2}-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{7-k_2-2k_3-3k_4-4k_5}^{k_2+k_3+k_4+k_5} C_{k_2+k_3+k_4+k_5}^{k_2} C_{k_3+k_4+k_5}^{k_3} C_{k_4+k_5}^{k_4} C_{k_5}^{k_5} \times$$

$$\times a_1^{(7-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} + \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{1}{5}\right]} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{4}-\frac{5k_5}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}-\frac{5k_5}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{5k_5}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{2-k_2-2k_3-3k_4-4k_5}^{k_2+k_3+k_4+k_5+1} C_{k_2+k_3+k_4+k_5+1}^{k_2} \times$$

$$\times C_{k_3+k_4+k_5+1}^{k_3} C_{k_4+k_5+1}^{k_4} C_{k_5+1}^{k_5} a_1^{(1-5k_5-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5} a_6 =$$

$$= \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{7}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{7}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{7}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{7-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4} C_{k_2+k_3+k_4}^{k_2} C_{k_3+k_4}^{k_3} C_{k_4}^{k_4} C_0^0 \, a_1^{(7-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} +$$

$$+ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[1-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{3-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4+1} C_{k_2+k_3+k_4+1}^{k_2} C_{k_3+k_4+1}^{k_3} C_{k_4+1}^{k_4} C_1^1 \, a_1^{(2-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5 +$$

$$+ \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{1}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}-\frac{4k_4}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-2k_4-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{2-k_2-2k_3-3k_4}^{k_2+k_3+k_4+1} C_{k_2+k_3+k_4+1}^{k_2} C_{k_3+k_4+1}^{k_3} C_{k_4+1}^{k_4} C_0^1 \, a_1^{(1-4k_4-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_6 :=$$

$$:= \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{7}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{7}{2}-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{7-k_2-2k_3}^{k_2+k_3} C_{k_2+k_3}^{k_2} C_{k_3}^{k_3} (C_0^0)^2 \, a_1^{(7-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} +$$

$$+ \sum_{k_3=0}^{[1]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{4-k_2-2k_3}^{k_2+k_3+1} C_{k_2+k_3+1}^{k_2} C_{k_3+1}^{k_3} C_1^1 C_0^0 \, a_1^{(3-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4 +$$

$$+ \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{2}{3}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[1-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{3-k_2-2k_3}^{k_2+k_3+1} C_{k_2+k_3+1}^{k_2} C_{k_3+1}^{k_3} C_0^1 C_1^1 \, a_1^{(2-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_5 +$$

$$+\sum_{k_3=0}^{\left[\frac{1}{3}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}-\frac{3k_3}{2}\right]} C_{2-k_2-2k_3}^{k_2+k_3+1} C_{k_2+k_3+1}^{k_2} C_{k_3+1}^{k_3} (C_1^0)^2\, a_1^{(1-3k_3-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_6 = \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{7}{2}\right]} C_{7-k_2}^{k_2} C_{k_2}^{k_2} (C_0^0)^3\, a_1^{(7-2k_2)} a_2^{k_2} +$$

$$+\sum_{k_2=0}^{[2]} C_{5-k_2}^{k_2+1} C_{k_2+1}^{k_2} C_1^1 (C_0^0)^2\, a_1^{(4-2k_2)} a_2^{k_2} a_3 + \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} C_{3-k_2}^{k_2+2} C_{k_2+2}^{k_2} C_2^2 (C_0^0)^2\, a_1^{(1-2k_2)} a_2^{k_2} a_3^2 +$$

$$+\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{3}{2}\right]} C_{4-k_2}^{k_2+1} C_{k_2+1}^{k_2} C_0^1 C_1^1 C_0^0\, a_1^{(3-2k_2)} a_2^{k_2} a_4 + \sum_{k_2=0}^{[0]} C_{2-k_2}^{k_2+2} C_{k_2+2}^{k_2} C_1^2 C_1^1 C_0^0\, a_1^{(-2k_2)} a_2^{k_2} a_3 a_4 +$$

$$+\sum_{k_2=0}^{[1]} C_{3-k_2}^{k_2+1} C_{k_2+1}^{k_2} (C_1^0)^2 C_1^1\, a_1^{(2-2k_2)} a_2^{k_2} a_5 + \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} C_{2-k_2}^{k_2+1} C_{k_2+1}^{k_2} (C_1^1)^3\, a_1^{(1-2k_2)} a_2^{k_2} a_6 =$$

$$= a_1^7 + 6a_1^5a_2 + 10a_1^3a_2^2 + 4a_1a_2^3 + 5a_1^4a_3 + 12a_1^2a_2a_3 + 3a_2^2a_3 + 3a_1a_3^2 + 4a_1^3a_4 + 6a_1a_2a_4 + 2a_3a_4 + 3a_1^2a_5 +$$
$$+ 2a_2a_5 + 2a_1a_6,$$

что в точности соответствует (6.18). Совершенно аналогичным способом показывается, что $A_{6,\,i}(2)$, $i = 2, 3 .. 6$, вычисленные по формулам (6.17), в точности соответствуют значениям, полученным другим способом в (6.18). Это доказывает на практике справедливость полученных формул.

Приведем программу на языке программирования MAPLE, печатающую в раскрытой форме значения коэффициентов n-образа для алгебраического уравнения степени m.

```
> restart:
> m:=2: #введите степень алгебраического уравнения
> x^m =add(a[l]*x^(m-l),l = 1 .. m);x^(m*n)=add(A[m,l](n)*x^(m-l),l = 1 .. m);
> yrn := proc (m,i::integer) local k,k0,i0,l, Ds; global resd,Yr,yr0,x; option
  remember;yr0:=x^m=Sum(a[l]*x^(m-l),l = 1 .. m);Yr:=x^(m*n)=Sum(A[m,l](n)*x^(m-l),
  l = 1 .. m);delta(0):=1;for i0 to m+10 do delta(i0):=0;delta(-i0):=0 od;for k0
  to m-1 do g(k0):=[value((m*(n-1)+i-Sum((m-j+2)*k[m-j+2],j = 2 .. k0+1))/(m-k0))]od;
  Ds:=value(C(m*(n-1)+delta(i-1)+(i-1)*Sum(delta(i-s),s  =  2..m)-Sum((j-1)*k[j],
  j = 2 .. m),Sum(k[z],z = 2 .. m)-Sum(delta(i-s),s = 2 .. i))*Product(C(Sum(k[z],
  z = l .. m)-Sum(delta(i-s),s = l+1 .. i),k[l]),l = 2 .. m-1)*a[1]^(m*(n-1)+i-
  Sum(j*k[j],j = 2 .. m))*Product(a[j]^k[j],j = 2 .. m)); for k0 from 2 to m-1 do
  Ds:=Sum(Ds,k[k0]=0..value(g(m-k0))) end do; resd :=A[m,i](n)=Sum(Ds,k[m]=0..n-
  value(Sum(delta(s-i),s = i .. m-1)))end:
> M:=m:for e to M do yrn(M,e) od;
```

Программа распечатает исходное алгебраическое уравнение степени m, его уравнение n-образа и все значения коэффициентов n-образа.

В частности, при $m := 2$ получаем:

$$x^2 = a_1 x + a_2,$$

$$x^{(2n)} = A_{2,1}(n)\,x + A_{2,2}(n),$$

$$A_{2,1}(n) = \sum_{k_2=0}^{n-1} C_{2n-1-k_2}^{k_2} a_1^{(2n-1-k_2)} a_2^{k_2},$$

$$A_{2,2}(n) = \sum_{k_2=0}^{n} C_{2n-1-k_2}^{k_2-1} a_1^{(2n-2k_2)} a_2^{k_2}$$

и так далее.

П р и м е ч а н и е: Наиболее доказательным фактором правильности формул (6.17) будет наличие высокой точности при вычислении корней конкретных алгебраических уравнений.

6.4. Гипергеометрическое представление коэффициентов *n*-образа. Область определения

Основная идея нахождения корней алгебраического уравнения (6.1), используя уравнение n-образа (6.2), заключается в формальном расширении области определения параметра n на множество действительных чисел. Произвольность этого параметра позволяет задавать ему такие значения, которые и приводят к появлению системы линейных алгебраических уравнений меньшей степени, содержащей только одно решение исходного уравнения (6.1). При этом используется идея Ньютона, заключающаяся в том, что выражение:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

которое при целых n удовлетворяет формуле:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (x+1)^n, \quad C_n^k = \frac{k!}{n!(n-k)!}, \tag{6.19}$$

после замены в верхнем пределе суммирования параметра n на бесконечность, образует аналогичную зависимость в представлении

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k = (x+1)^n, \quad C_n^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n-k+1)}. \tag{6.20}$$

«Платой» за это является следующее: если равенство (6.19) справедливо для любых значений x, то равенство (6.20) только для определенного подмножества его значений, которое называется областью определения (6.20). Однако в этом случае в (6.20) параметр n может становиться не только натуральным числом, но и **принадлежать к множеству действительных чисел**. Эта возможность представления параметра n и является ключевой идеей использования уравнения n-образа (6.2) к нахождению корней алгебраического уравнения (6.1). Следуя этой идее, произведем замену параметра n в верхнем пределе суммирования формулы (6.7) на бесконечность. Тогда получим новое представление для коэффициентов n-образа:

$$A_{m,i}(n) = \sum_{k_m=0}^{\infty}\left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\infty} C_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}((i-1)\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]}^{\sum\limits_{s=2}^{m}k_s-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \cdot \prod_{r=2}^{m-1} C_{\left(\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right)-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_r} \times \right. \tag{6.21}$$

$$\left. \times\, a_1^{\left(m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m}a_s^{k_s}\right)\right).$$

В соответствии с горновским определением гипергеометрической функции [16], составим соотношения:

$$f_i(k_2\,..\,k_m) = \frac{\left[C_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}((i-1)\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]}^{\left[\sum\limits_{s=2}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \cdot \prod\limits_{r=2}^{m-1} C_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_r}\right]_{k_i=k_i+1}}{C_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m}((i-1)\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]}^{\left[\sum\limits_{s=2}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \cdot \prod\limits_{r=2}^{m-1} C_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m}k_s\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}^{k_r}}, \tag{6.22}$$

$i = 2\,..\,m$.

Так как в числителе и знаменателе содержится одинаковое число биномиальных коэффициентов, то порождаемые ими полиномы имеют конечные радиусы сходимости. Следовательно, функция (6.21) относится к классу гипергеометрических функций. Установим радиус сходимости, т. е. установим область определения гипергеометрической функции (6.21) в общем случае. С этой целью, согласно горновской методике, произведем замену параметров k_i по формуле: $k_i = ql_i$, $i = 2 .. m$, где l_i — новые переменные, определенные только в интервале [0, 1], а q — параметр, стремящийся к бесконечности. В этом случае определяются функции:

$$F_i(l_2 .. l_m) = \lim_{q \to \infty} f_i(ql_2 .. ql_m), \ i = 2 .. m.$$

Следовательно, искомые радиусы сходимости равны:

$$R_i = \frac{1}{|F_i(l_2 .. l_m)|}, \ i = 2 .. m, \tag{6.23}$$

где все $l_j = 0$, j — принадлежит интервалу $(2, m]$, в котором одно значение $l_i = 1$, где i принимает последовательно значения от 2 до m.

Выражение

$$a_1^{\left(m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m} sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{m} a_s^{k_s}\right),$$

которое определяет сходимость гипергеометрической функции (6.21), можно представить в виде:

$$a_1^{\left(m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m} sk_s\right)\right)}\prod_{s=2}^{m} a_s^{k_s} = a_1^{(m(n-1)+i)}\prod_{s=2}^{m}\left(\frac{a_s}{a_1^s}\right)^{k_s}.$$

В этом случае, опираясь на результаты (6.23), приходим к выводу, что $m - 1$ — кратный ряд, определяющий гипергеометрическую функцию (6.21), сходится при одновременном выполнении условий:

$$\left|\frac{a_i}{a_1^i}\right| < R_i, \ i = 2 .. m.$$

Выясним числовые значения радиусов сходимости R_i. С этой целью выпишем последовательно его значения для уравнений со второй по пятую степень, пользуясь изложенной методикой, по которой эти вычисления производились ранее.

Для квадратных уравнений: $\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{2^2}$.

Для кубических уравнений: $\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{2^2}$, $\left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{2^2}{3^3}$.

Для уравнений четвертой степени: $\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{2^2}$, $\left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{2^2}{3^3}$, $\left|\frac{a_4}{a_1^4}\right| < \frac{3^3}{4^4}$.

Для уравнений пятой степени: $\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{2^2}$, $\left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{2^2}{3^3}$, $\left|\frac{a_4}{a_1^4}\right| < \frac{3^3}{4^4}$, $\left|\frac{a_5}{a_1^5}\right| < \frac{4^4}{5^5}$.

Анализируя полученные формулы, можно сделать однозначный вывод о том, что радиусы сходимости представляются формулами:

$$R_i = \frac{(i-1)^{(i-1)}}{i^i}, \quad i = 2 \,..\, m.$$

В этом случае формула принимает законченный вид:

$$\left|\frac{a_i}{a_1^i}\right| < \frac{(i-1)^{(i-1)}}{i^i}, \quad i = 2 \,..\, m. \tag{6.24}$$

Таким образом, условия (6.24) задают область определения, в которой гарантированно имеет место сходимость m-кратных рядов, определяющих гипергеометрические функции (6.21). Приведение гипергеометрических функций (6.21) к общепринятому представлению через функции

Похгаммера выполнено в работе [8]. Однако использование полученных гипергеометрических функций в форме (6.21) для вычисления коэффициентов n-образа требует создания специального вычислительного алгоритма, подобно тому как это описано для случаев кубического уравнения, уравнений четвертой и пятой степеней.

В данном общем случае получим новое представление функций (6.7), которое позволит получить такие гипергеометрические представления для коэффициентов n-образа, что это не потребует образования специальных вычислительных алгоритмов, а позволит прямо использовать полученные формулы для необходимых вычислений.

С этой целью представим (6.7) в виде:

$$A_{m,i}(n) = \sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{j=3}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)-mk_m}{m-l}\right]} \right.$$

$$C^{\left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}k_s\right]+k_m-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}(i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)\,k_s\right]+(i-1)\,\delta(i-m)-(m-1)\,k_m} \times$$

$$\left. \times \prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m-1}k_s\right]+k_m-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]} \, a_1^{\left(m(n-1)+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m-1}sk_s\right)-mk_m\right)} \left(\prod_{s=2}^{m-1}a_s^{k_s}\right) a_m^{k_m} \right).$$

Произведем замену — инверсию индекса суммирования k_m, т. е. заменим его на

$$-k_m + n - \left(\sum_{s=i}^{m-1} \delta(s-i)\right).$$

Тогда получим формулу:

$$A_{m,i}(n) = \sum_{k_m=0}^{n-\left(\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{-m+i-\left(\sum_{j=3}^{l+1}(m-j+2)k_{m-j+2}\right)+m\left(k_m+\left(\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right)}{m-l}\right]} \right.$$

$$C^{\left[\sum_{s=2}^{m-1}k_s\right]-k_m+n-\left[\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right]-\left[\sum_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]}_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum_{s=2}^{m-1}((i-1)\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]+(i-1)\delta(i-m)-(m-1)\left[-k_m+n-\left(\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right]}\times$$

$$\left.\times\left(\prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum_{s=r}^{m-1}k_s\right]-k_m+n-\left[\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right]-\left[\sum_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}\right) a_1^{\left(-m+i-\left(\sum_{s=2}^{m-1}sk_s\right)+m\left(k_m+\left(\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m-1}a_s^{k_s}\right) a_m^{\left(-k_m+n-\left(\sum_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right)}\right).$$

В данном случае получена формула, содержащая параметр n только в верхнем пределе суммирования последней суммы, поэтому следуя идее, изложенной ранее, произведем замену значения $n - \left(\sum\limits_{s=i}^{m-1} \delta\,(s-i)\right)$ на знак «бесконечность». В итоге имеем искомую формулу:

$$A_{m,i}(n) = \sum_{k_m=0}^{\infty} \left(\sum_{[k_{m-l}]_{l=1..m-2}=0}^{\left[\frac{-m+i-\left(\sum\limits_{j=3}^{l+1}(m-j+2)\,k_{m-j+2}\right)+m\left(k_m+\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta\,(s-i)\right)\right)}{m-l}\right]} \right. \tag{6.25}$$

$$C_{m(n-1)+\delta(i-1)+\left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}((i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)\,k_s)\right]+(i-1)\,\delta(i-m)-(m-1)\left[-k_m+n-\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right]}^{\left[\sum\limits_{s=2}^{m-1}k_s\right]-k_m+n-\left[\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right]-\left[\sum\limits_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]} \times$$

$$\times \left(\prod_{r=2}^{m-1} C^{k_r}_{\left[\sum\limits_{s=r}^{m-1}k_s\right]-k_m+n-\left[\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right]-\left[\sum\limits_{s=r+1}^{i}\delta(i-s)\right]}\right) a_1^{\left(-m+i-\left(\sum\limits_{s=2}^{m-1}sk_s\right)+m\left(k_m+\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right)\right)} \left(\prod_{s=2}^{m-1}a_s^{k_s}\right) a_m^{\left(-k_m+n-\left(\sum\limits_{s=i}^{m-1}\delta(s-i)\right)\right)} \left. \vphantom{\sum_{s=2}^{m-1}} \right),$$

$$i = 1 \,..\, m.$$

Она позволяет производить непосредственные вычисления коэффициентов n-образа, в том числе и для действительных значений параметра n.

Так как формула (6.25) получена посредством инверсии k_m, то область определения коэффициентов n-образа (6.25) имеет вид:

$$\left|\frac{a_i}{a_1^i}\right| < \frac{(i-1)^{(i-1)}}{i^i}, \quad i = 2 \,..\, m-1, \quad \left|\frac{a_1^m}{a_m}\right| < \frac{m^m}{(m-1)^{(m-1)}}. \tag{6.26}$$

6.5. Формулы для определения корней алгебраического уравнения степени *m*

Рассмотрим уравнение n-образа (6.2)

$$x^{(mn)} = \sum_{i=1}^{m} A_{m,\,i}(n)\,x^{(m-i)}, \tag{6.27}$$

в котором коэффициенты n-образа $A_{m,\,i}(n)$ определяются формулами (6.25), в области определения (6.26).

В этом случае параметр n может принимать и действительные значения. Пусть задан некий новый параметр $\omega = \{\omega_1, \omega_2 \,..\, \omega_m\}$, удовлетворяющий алгебраическому уравнению:

$$\omega^m = 1. \tag{6.28}$$

Тогда будет справедливо также и другое формальное равенство:

$$\omega^{(mn)} = 1. \tag{6.29}$$

Очевидно, что с формальной точки зрения уравнение (6.27) не изменится, если его записать в следующем виде:

$$x^{(mn)} = \omega^{(mn)}\left(\sum_{i=1}^{m} A_{m,\,i}(n)\,x^{(m-i)}\right). \tag{6.30}$$

В силу того, что параметр n может принадлежать и множеству действительных чисел, зададим ему последовательно новые значения:

$$n = \frac{\varepsilon}{m},\ \ \varepsilon = 1, 2\ ..\ m - 1. \tag{6.31}$$

В этом случае равенство (6.30) образует систему алгебраических уравнений степени $m - 1$, относительно неизвестных: x, x^2, x^3 .. $x^{(m-1)}$:

$$x^{\varepsilon} = \omega^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{m} A_{m,\,i}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)x^{(m-i)}\right),\ \ \varepsilon = 1, 2\ ..\ m - 1. \tag{6.32}$$

Эта система преобразуется к виду:

$$x^{\varepsilon} - \omega^{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{m-1} A_{m,\,i}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)x^{(m-i)}\right) = \omega^{\varepsilon} A_{m,\,m}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right),\ \ \varepsilon = 1, 2\ ..\ m - 1. \qquad (6.32)$$

В матричной форме эта система принимает вид:

$$QX = B, \tag{6.33}$$

где Q — матрица размерности $((m - 1)(m - 1))$ коэффициентов левой части (для которой в данном случае выписаны только первые четыре члена строки и столбца).

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}
1-\omega A_{m,\,m-1}\left(\frac{1}{m}\right) & -\omega A_{m,\,m-2}\left(\frac{1}{m}\right) & -\omega A_{m,\,m-3}\left(\frac{1}{m}\right) & -\omega A_{m,\,m-4}\left(\frac{1}{m}\right) & \vdots \\
-\omega^2 A_{m,\,m-1}\left(\frac{2}{m}\right) & 1-\omega^2 A_{m,\,m-2}\left(\frac{2}{m}\right) & -\omega^2 A_{m,\,m-3}\left(\frac{2}{m}\right) & -\omega^2 A_{m,\,m-4}\left(\frac{2}{m}\right) & \vdots \\
-\omega^3 A_{m,\,m-1}\left(\frac{3}{m}\right) & -\omega^3 A_{m,\,m-2}\left(\frac{3}{m}\right) & 1-\omega^3 A_{m,\,m-3}\left(\frac{3}{m}\right) & -\omega^3 A_{m,\,m-4}\left(\frac{3}{m}\right) & \vdots \\
-\omega^4 A_{m,\,m-1}\left(\frac{4}{m}\right) & -\omega^4 A_{m,\,m-2}\left(\frac{4}{m}\right) & -\omega^4 A_{m,\,m-3}\left(\frac{4}{m}\right) & 1-\omega^4 A_{m,\,m-4}\left(\frac{4}{m}\right) & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{bmatrix}. \qquad (6.34)
$$

$$
X = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ \cdots\cdots \\ x^{(m-2)} \\ x^{(m-1)} \end{bmatrix} \text{— вектор, содержащий искомые значения } x. \qquad (6.35)
$$

$$
B = \begin{bmatrix}
\omega A_{m,\,m}\left(\frac{1}{m}\right) \\
\omega^2 A_{m,\,m}\left(\frac{2}{m}\right) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega^{\varepsilon} A_{m,\,m}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right) \\
\omega^{(m-2)} A_{m,\,m}\left(\frac{m-2}{m}\right) \\
\omega^{(m-1)} A_{m,\,m}\left(\frac{m-1}{m}\right)
\end{bmatrix} \text{— вектор свободных коэффициентов правой части (6.32).} \qquad (6.36)
$$

Используя либо метод Крамера, либо, как в данном случае, матричный подход к решению системы уравнений (6.33), получим искомое решение:

$$X = Q^{(-1)}B, \tag{6.37}$$

где $Q^{(-1)}$ — матрица, обратная Q.

Поскольку параметр ω представляет собой вектор $\omega = \{\omega_1, \omega_2 \,..\, \omega_m\}$, то каждому его значению ω_k, $k = 1 \,..\, m$, которое по условиям является корнем уравнения (6.28), соответствует свое значение соответственно: B_k, $Q_k^{(-1)}$, X_k, $k = 1 \,..\, m$, так что $B = \{B_1, B_2 \,..\, B_m\}$, $Q^{(-1)} = \{Q_1^{(-1)}, Q_2^{(-1)} \,..\, Q_m^{(-1)}\}$, $X = \{X_1, X_2 \,..\, X_m\}$. Поэтому формулу (6.37) можно представить в общей форме:

$$X_k = Q_k^{(-1)}B_k, \quad k = 1 \,..\, m. \tag{6.38}$$

Поскольку в соответствии с (6.35) вектор

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^2 \\ x_k^3 \\ \ldots\ldots \\ x_k^{(m-2)} \\ x_k^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad k = 1{,}2 \,..\, m$$

содержит в качестве одного из решений x_k, то получаем из (6.38) m различных корней алгебраического уравнения (6.1).

Таким образом, доказана **ТЕОРЕМА 6.1: Корни алгебраического уравнения (6.1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (6.26), определяются формулами (6.38).**

Вывод: Данная теорема решает основную задачу алгебры, вытекающую из основной теоремы алгебры.

6.6. Примеры

Очевидно, что основным критерием любой теории является ее практическое приложение. В данном случае, для практических вычислений, необходимо в формуле (6.25), определяющей значения коэффициентов n-образа, вместо значка «бесконечность» ввести новый параметр N — количество слагаемых. Кроме того, необходимо ввести понятие точности вычислений, т. е. показатель ошибки вычислений заданного корня. В качестве такого показателя будем использовать формулу:

$$\delta(x_k) = \left| \frac{x_k^m - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\, x_k^{(m-i)} \right)}{a_m} \right|, \quad k = 1 \,..\, m \tag{6.39}$$

которая определяет относительную ошибку (или точность) вычислений корня x_k.

Приведем примеры, подтверждающие справедливость изложенной теории.

Искомые корни заданных уравнений будут установлены в матричной форме, используя метод Крамера.

Представляем программу на языке Maple, печатающую формулы для корней заданного алгебраического уравнения в соответствии с определением Теоремы 6.1.

```
> restart:
> m:=3;  #  степень  алгебраического  уравнения
> with(student):
> with(LinearAlgebra):
  with(Student[LinearAlgebra]):
> with(linalg):alias(C=binomial):
> print(«алгебраическое  уравнение»);
```

```
> yr0:=x^m=sort(add(a[i]*x^(m-i),i=1..m),x);
> print(«в области определения»);
> seq(abs(a[i]/a[1]^i)<(i-1)^(i-1)/i^i,i=2..m-1),abs(a[1]^m/a[m])<m^m/(m-1)^(m-1);
> n:=e/m:
> Rs:=solve({omega^m=1},omega):
> r:=x^(m*n) =omega^(m*n)*add(A[m,i](n)*x^(m-i),i = 1 .. m):
> for e to m-1 do E(e):=expand(subs(seq(x^(m-i)=z[m-i],i=1..m-1),r)) od:
> F0:=genmatrix({seq(E(l),l=1..m-1)},[seq(z[i],i=1..m-1)]):
> F:=GenerateMatrix({seq(E(l),l=1..m-1)},[seq(z[i],i=1..m-1)]):
> Fx:=swapcol(F,1,m):
> Fx1:=Matrix(m-1,m,Fx):
> Fz:=SubMatrix(Fx1,[seq(i,i=1..m-1)],[1..m-1]):
> for i to m do x[i]=subs(Rs[i],Fz/matrix(m-1,m-1,F0)) od:i:='i':n:='n':#корни
  алгебраического уравнения в раскрытой матричной форме.
> print(«имеет корни»);
> x[i]=subs(omega=omega[i],Fz/matrix(m-1,m-1,F0)),i=1..m;n:='n':i:='i':#корни
  алгебраического уравнения в матричной форме — общий вид.
> #LinearSolve(F)[1]; #корни алгебраического уравнения в раскрытой, т. е. явной
  форме.
> print(«где»);
> seq(subs(omega=omega[i],Rs[i]),i=1..m);
> ##########################################################################
  ################
> delta(0) := 1: for i0 to m+10 do delta(i0) := 0: delta(-i0) := 0 end do: for
  k0 to m-1 do g(k0) := [((m*(n-1)+i-Sum((m-j+2)*k[m-j+2],j = 2 .. k0+1))/(m-k0))]
```

```
end do: Ds := C(m*(n-1)+delta(i-1)+Sum((i-1)*delta(i-s)-(s-1)*k[s],s =2 .. m),
Sum(k[s],s = 2 .. m)-Sum(delta(i-s),s = 2 .. i))*Product(C(Sum(k[s],s = l .. m)-
Sum(delta(i-s),s = l+1 .. i),k[l]),l = 2 .. m-1)*a[1]^(m*(n-1)+i-Sum(s*k[s],
s = 2 .. m))*Product(a[s]^k[s],s = 2 .. m): for k0 from 2 to m-1 do Ds :=
Sum(Ds,k[k0] = 0 .. (g(m-k0))) end do: resd := A[m,i](n) = Sum(Ds,k[m] = 0 .. n-
(Sum(delta(s-i),s = i .. m-1))):
> ResA:=subs(S=k[m],changevar(k[m]=-S+n-value(Sum(delta(s-i),s = i .. m-1)),
resd,S)):
> Rs:=subs(n=epsilon/m,lhs(ResA)=Sum(op(rhs(ResA))[1],k[m]=0..infinity)),i=1..m,
epsilon=1..m-1;
> print(«###################################################################
#######################»);
```

▶ **Пример 1**

Выписать формулы для корней уравнения шестой степени

$$x^6 = a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 \qquad \textbf{(6.40)}$$

в области определения (6.26) и проверить на примерах.

Р е ш е н и е. В соответствии с теорией и пользуясь приведенной программой, получаем результат:

Алгебраическое уравнение (6.40) в области определения

$$\left|\frac{a_2}{a_1^2}\right| < \frac{1}{4},\ \left|\frac{a_3}{a_1^3}\right| < \frac{4}{27},\ \left|\frac{a_4}{a_1^4}\right| < \frac{27}{256},\ \left|\frac{a_5}{a_1^5}\right| < \frac{256}{3125},\ \left|\frac{a_1^6}{a_6}\right| < \frac{45656}{3125}. \qquad \textbf{(6.41)}$$

имеет корни: (6.42)

$$x_i=\frac{\begin{bmatrix}\omega_i A_{6,6}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,4}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,2}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,1}\left(\frac{1}{6}\right)\\ \omega_i^2 A_{6,6}\left(\frac{1}{3}\right) & 1-\omega_i^2 A_{6,4}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,3}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,2}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,1}\left(\frac{1}{3}\right)\\ \omega_i^3 A_{6,6}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) & 1-\omega_i^3 A_{6,3}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,1}\left(\frac{1}{2}\right)\\ \omega_i^4 A_{6,6}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,4}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,3}\left(\frac{2}{3}\right) & 1-\omega_i^4 A_{6,2}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,1}\left(\frac{2}{3}\right)\\ \omega_i^5 A_{6,6}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,4}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,3}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,2}\left(\frac{5}{6}\right) & 1-\omega_i^5 A_{6,1}\left(\frac{5}{6}\right)\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1-\omega_i A_{6,5}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,4}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,2}\left(\frac{1}{6}\right) & -\omega_i A_{6,1}\left(\frac{1}{6}\right)\\ -\omega_i^2 A_{6,5}\left(\frac{1}{3}\right) & 1-\omega_i^2 A_{6,4}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,3}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,2}\left(\frac{1}{3}\right) & -\omega_i^2 A_{6,1}\left(\frac{1}{3}\right)\\ -\omega_i^3 A_{6,5}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) & 1-\omega_i^3 A_{6,3}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right) & -\omega_i^3 A_{6,1}\left(\frac{1}{2}\right)\\ -\omega_i^4 A_{6,5}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,4}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,3}\left(\frac{2}{3}\right) & 1-\omega_i^4 A_{6,2}\left(\frac{2}{3}\right) & -\omega_i^4 A_{6,1}\left(\frac{2}{3}\right)\\ -\omega_i^5 A_{6,5}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,4}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,3}\left(\frac{5}{6}\right) & -\omega_i^5 A_{6,2}\left(\frac{5}{6}\right) & 1-\omega_i^5 A_{6,1}\left(\frac{5}{6}\right)\end{bmatrix}},$$

$$i=1,\ 2\ ..\ 6,$$

где

$$\omega_1 = -1,\ \ \omega_2 = 1,\ \ \omega_3 = -\frac{\sqrt{-2+2I\sqrt{3}}}{2},\ \ \omega_4 = \frac{\sqrt{-2+2I\sqrt{3}}}{2},\ \ \omega_5 = -\frac{\sqrt{-2-2I\sqrt{3}}}{2},\ \ \omega_6 = \frac{\sqrt{-2-2I\sqrt{3}}}{2},$$

$$A_{6,\,i}\left(\frac{\varepsilon}{6}\right) = \sum_{k_6=0}^{\infty} \sum_{k_5=0}^{\left[\frac{\varepsilon}{5}-\frac{6}{5}+\frac{i}{5}-\frac{\sum_{j=2}^{2}(8-j)\,k_{8-j}}{5}\right]} \sum_{k_4=0}^{\left[\frac{\varepsilon}{4}-\frac{3}{2}+\frac{i}{4}-\frac{\sum_{j=2}^{3}(8-j)\,k_{8-j}}{4}\right]} \sum_{k_3=0}^{\left[\frac{\varepsilon}{3}-2+\frac{i}{3}-\frac{\sum_{j=2}^{4}(8-j)\,k_{8-j}}{3}\right]}$$

$$\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{\varepsilon}{2}-3+\frac{i}{2}-\frac{\sum_{j=2}^{5}(8-j)\,k_{8-j}}{2}\right]} C^{\left(\sum_{s=2}^{6}k_s\right)-\left[\sum_{s=2}^{i}\delta(i-s)\right]}_{\varepsilon-6+\delta(i-1)+\left[\sum_{s=2}^{6}((i-1)\,\delta(i-s)-(s-1)k_s)\right]} \cdot \prod_{l=2}^{5} C^{k_l}_{\left(\sum_{s=l}^{6}k_s\right)-\left[\sum_{s=l+1}^{i}\delta(i-s)\right]}\, a_1^{\left(\varepsilon-6+i-\left(\sum_{s=2}^{6}sk_s\right)\right)}\left(\prod_{s=2}^{6}a_s^{k_s}\right),$$

$$i = 1\ ..\ 6,\ \ \varepsilon = 1\ ..\ 5.$$

Таким образом, формулы, определяющие корни уравнения шестой степени, установлены. Приведем примеры практического вычисления этих корней. При этом примем $N = 5$.

▶ Пример 2

Вычислить корни уравнения

$$x^6 = 2x^5 + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{6} + 2x + 1200. \tag{6.43}$$

Р е ш е н и е.

Проверяем, удовлетворяют ли коэффициенты уравнения (6.43) условиям (6.41):

$$\frac{4}{75} < \frac{45656}{312}, \quad \frac{51}{32} < \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{64} < \frac{4}{27}, \quad \frac{1}{96} < \frac{27}{256}, \quad \frac{1}{16} < \frac{256}{3125}.$$

Поскольку все условия выполнены, то производим вычисление коэффициентов n-образа, используя формулы, представленные в (6.42):

$$A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right) = .1387656333\text{e-}3 + .3468581112\text{e-}2\,I, \;\; A_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right) = .3229009411\text{e-}1 - .7659514718\text{e-}3\,I,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{1}{3}\right) = 5.678546983 - .1156890772\,I, \;\; A_{6,1}\left(\frac{5}{6}\right) = .1045559040\text{e-}1 + .7071953180\,I,$$

$$A_{6,4}\left(\frac{5}{6}\right) = -.1872851819 + .2691771603\text{e-}2\,I, \;\; A_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) = -.5191551497\text{e-}1 + .1771782667\text{e-}2\,I,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{5}{6}\right) = .6820454610\text{e-}1 - .6178304230\text{e-}3\,I, \;\; A_{6,6}\left(\frac{5}{6}\right) = 76.35933599 - .9922474511\,I,$$

$$A_{6,3}\left(\frac{5}{6}\right) = .1841838530\text{e-}2 + .1713044524\,I, \;\; A_{6,4}\left(\frac{1}{3}\right) = -.1661478682\text{e-}1 + .7060290247\text{e-}3\,I,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{1}{6}\right) = .2094127385\text{e-}3 + .4452215661\text{e-}2\,I, \;\; A_{6,3}\left(\frac{2}{3}\right) = .2081922022\text{e-}2 + .1033498009\,I,$$

$$A_{6,3}\left(\frac{1}{2}\right) = .1244693187\text{e-}2 + .4417667054\text{e-}1\,I, \;\; A_{6,2}\left(\frac{1}{3}\right) = .1255358235\text{e-}1 - .3574523932\text{e-}3\,I,$$

$$A_{6,5}\left(\frac{1}{3}\right) = .8244029371\text{e-}1 - .2674532031\text{e-}1\,I,\;\; A_{6,6}\left(\frac{1}{6}\right) = 2.382297397 - .3019970063\text{e-}1\,I,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -.2729203348\text{e-}2 + .7557686930\text{e-}1\,I,\;\; A_{6,1}\left(\frac{1}{3}\right) = .9081526416\text{e-}3 + .2119367067\text{e-}1\,I,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{2}{3}\right) = 32.19986663 - .6634720335\,I,\;\; A_{6,6}\left(\frac{1}{2}\right) = 13.53242449 - .3117041223\,I,$$

$$A_{6,5}\left(\frac{5}{6}\right) = 2.799502352 - .4102711397\,I,\;\; A_{6,5}\left(\frac{1}{6}\right) = .1730609831\text{e-}1 - .5538479020\text{e-}2\,I,$$

$$A_{6,4}\left(\frac{1}{6}\right) = -.3641687027\text{e-}2 + .1810347631\text{e-}3\,I,\;\; A_{6,3}\left(\frac{1}{3}\right) = .5165088675\text{e-}3 + .1483654690\text{e-}1\,I,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{2}{3}\right) = .6403338276\text{e-}2 + .2391069542\,I,\;\; A_{6,5}\left(\frac{2}{3}\right) = .9386317410 - .2294424615\,I,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{2}{3}\right) = .6270006184\text{e-}1 - .1084064015\text{e-}2\,I,\;\; A_{6,4}\left(\frac{2}{3}\right) = -.1237119787 + .3053952056\text{e-}2\,I,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{1}{6}\right) = -.3374345061\text{e-}2 - .1065185481\text{e-}3\,I,\;\; A_{6,5}\left(\frac{1}{2}\right) = .2949400162 - .8890081903\text{e-}1\,I.$$

Теперь пользуясь формулами (6.42), представленными в матричной форме, получаем искомые корни:

$$x_1 = -2.997330322,\;\; x_2 = 3.720833185,\;\; x_3 = -1.349740938 - 2.761029926\,I,$$
$$x_4 = 1.987989504 + 2.727620026\,I,\;\; x_5 = -1.349740938 + 2.761029926\,I,$$
$$x_6 = 1.987989504 - 2.727620026\,I.$$

Определим относительную ошибку вычислений, пользуясь формулами (6.39):

$$\delta(x_1) = |-.9521\text{e-}8|,\ \delta(x_2) = \|-.12800\text{e-}7\|,\ \delta(x_3) = |.4895\text{e-}8 + .2538\text{e-}8\,I|,$$
$$\delta(x_4) = |-.134\text{e-}9 + .3431\text{e-}8\,I|,\ \delta(x_5) = |.4895\text{e-}8 - .2538\text{e-}8\,I|,\ \delta(x_6) = |-.134\text{e-}9 - .3431\text{e-}8\,I|.$$

Как видим, даже при $N = 5$ решения получаются с очень высокой точностью.
Задача решена.

▶ Пример 3

Вычислить корни уравнения с комплексными коэффициентами

$$x^6 = 2Ix^5 - \frac{x^4}{7} + \frac{Ix^3}{40} + \frac{x^2}{6} + 8x + 180. \tag{6.44}$$

Р е ш е н и е.
Проверяем, удовлетворяют ли коэффициенты уравнения (6.44) условиям (6.41):

$$\frac{1}{320} < \frac{4}{27},\quad \frac{1}{96} < \frac{27}{256},\quad \frac{1}{4} < \frac{256}{3125},\quad \frac{1}{28} < \frac{1}{4},\quad \frac{16}{45} < \frac{46656}{3125}.$$

Поскольку все условия выполнены, то производим вычисление коэффициентов n-образа, используя формулы, представленные в (6.42):

$$A_{6,1}\left(\frac{1}{3}\right) = .5882351745\text{e-}2,\ A_{6,1}\left(\frac{1}{6}\right) = .9022750281\text{e-}3,\ A_{6,6}\left(\frac{5}{6}\right) = 367.5217243,$$
$$A_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right) = -.1259734617\text{e-}1,\ A_{6,4}\left(\frac{2}{3}\right) = -.5496959217\text{e-}1,\ A_{6,3}\left(\frac{1}{3}\right) = -.4346342202\text{e-}2,$$
$$A_{6,5}\left(\frac{1}{2}\right) = -.5452033484\text{e-}3,\ A_{6,6}\left(\frac{1}{6}\right) = 3.256978276,\ A_{6,6}\left(\frac{1}{3}\right) = 10.60931266,$$

$$A_{6,4}\left(\frac{1}{6}\right) = -.5769524560\text{e-}3,\ A_{6,2}\left(\frac{5}{6}\right) = -.5308433159\text{e-}1,\ A_{6,2}\left(\frac{2}{3}\right) = -.3389058936\text{e-}1,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{1}{2}\right) = .2877004296\text{e-}1,\ A_{6,4}\left(\frac{1}{3}\right) = -.3755541990\text{e-}2,\ A_{6,3}\left(\frac{5}{6}\right) = -.1464014629,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{5}{6}\right) = .5104001478,\ A_{6,5}\left(\frac{2}{3}\right) = .2099059141\text{e-}1,\ A_{6,6}\left(\frac{2}{3}\right) = 112.6751026,$$

$$A_{6,5}\left(\frac{1}{3}\right) = -.5423418906\text{e-}3,\ A_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) = -.1653756047\text{e-}1,\ A_{6,1}\left(\frac{2}{3}\right) = .1251224608,$$

$$A_{6,4}\left(\frac{5}{6}\right) = -.1137564959,\ A_{6,2}\left(\frac{1}{6}\right) = -.6964120444\text{e-}3,\ A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right) = -.7356602971\text{e-}3,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{1}{3}\right) = -.3558141753\text{e-}2,\ A_{6,5}\left(\frac{1}{6}\right) = -.7119651445\text{e-}4,\ A_{6,5}\left(\frac{5}{6}\right) = .2536987130,$$

$$A_{6,3}\left(\frac{2}{3}\right) = -.5937364676\text{e-}1,\ A_{6,6}\left(\frac{1}{2}\right) = 34.56735109,\ A_{6,3}\left(\frac{1}{2}\right) = -.1798864084\text{e-}1$$

Теперь пользуясь формулами (6.42), представленными в матричной форме, получаем искомые корни:

$$x_1 = -2.225590239 + .2839789082\,I,\ x_2 = 2.307679215 + .2970394127\,I,$$
$$x_3 = -1.168657602 - 1.778839129\,I,\ x_4 = 1.032709932 + 2.563056686\,I,$$
$$x_5 = -1.081993444 + 2.479973246\,I,\ x_6 = 1.135851962 - 1.845209226\,I.$$

Определим относительную ошибку вычислений, пользуясь формулами (6.39):

$$\delta(x_1) = |.2912\text{e-}7 + .7464\text{e-}7\,I|,\ \delta(x_2) = \|-.682\text{e-}7 + .1899\text{e-}7\,I\|,\ \delta(x_3) = |.433\text{e-}8 + .4988\text{e-}7\,I|,$$
$$\delta(x_4) = |-.22422\text{e-}6 + .588\text{e-}7\,I|,\ \delta(x_5) = |.4558\text{e-}7 + .2179\text{e-}6\,I|,\ \delta(x_6) = |-.2544\text{e-}7 + .3884\text{e-}7\,I|.$$

Как видим, даже при $N = 5$ решения алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами получаются с очень высокой точностью.

Задача решена.

▶ Пример 4

Найти корни уравнения

$$x^6 = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{6} + 2x + 1200. \tag{6.45}$$

Р е ш е н и е.

Как видим, в этом уравнении $a_1 = 0$, поэтому нет смысла проверять на соответствие области определения (6.41), так как заведомо эти условия не выполнены. Однако решение по приведенной схеме дает правильный результат.

Коэффициенты n-образа равны:

$$A_{6,3}\left(\frac{1}{2}\right) = -.1806156764\text{e-}2,\ A_{6,3}\left(\frac{1}{3}\right) = -.3695031233\text{e-}3,\ A_{6,1}\left(\frac{5}{6}\right) = -.8080405117\text{e-}5,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{1}{6}\right) = 3.259833596,\ A_{6,1}\left(\frac{1}{2}\right) = -.1371039150\text{e-}5,\ A_{6,3}\left(\frac{5}{6}\right) = -.3196608951\text{e-}1,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{1}{2}\right) = 34.64080776,\ A_{6,5}\left(\frac{1}{3}\right) = .5934465211\text{e-}2,\ A_{6,6}\left(\frac{5}{6}\right) = 368.1144893,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{5}{6}\right) = .3196273517\text{e-}1,\ A_{6,5}\left(\frac{5}{6}\right) = .5119378246,\ A_{6,2}\left(\frac{1}{3}\right) = .3693616211\text{e-}3,$$

$$A_{6,2}\left(\frac{2}{3}\right) = .7846021299\text{e-}2,\ A_{6,4}\left(\frac{1}{6}\right) = .7187501948\text{e-}4,\ A_{6,4}\left(\frac{1}{2}\right) = .2337122017\text{e-}2,$$

$$A_{6,4}\left(\frac{2}{3}\right)=.1025753756\text{e-}1,\ A_{6,1}\left(\frac{1}{6}\right)=-.7179957873\text{e-}7,\ A_{6,4}\left(\frac{1}{3}\right)=.4732842566\text{e-}3,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{2}{3}\right)=112.9237179,\ A_{6,5}\left(\frac{1}{2}\right)=.2898043471\text{e-}1,\ A_{6,4}\left(\frac{5}{6}\right)=.4220189533\text{e-}1,$$

$$A_{6,1}\left(\frac{1}{3}\right)=-.3741705186\text{e-}6,\ A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right)=-.5669434903\text{e-}4,\ A_{6,2}\left(\frac{1}{6}\right)=.5666807892\text{e-}4,$$

$$A_{6,3}\left(\frac{1}{6}\right)=.1257985123,\ A_{6,1}\left(\frac{2}{3}\right)=-.3969402915\text{e-}5,\ A_{6,5}\left(\frac{1}{6}\right)=.9114217034\text{e-}3,$$

$$A_{6,6}\left(\frac{1}{3}\right)=10.62652903,\ A_{6,3}\left(\frac{2}{3}\right)=-.7847620156\text{e-}2,\ A_{6,2}\left(\frac{1}{2}\right)=-1805621400\text{e-}2.$$

Корни приведенного уравнения, используя формулы (6.42), имеют следующие значения:

$$x_1=-3.266073704,\ x_2=3.268038011,\ x_3=-1.632793973-2.813325043\,I,$$
$$x_4=1.631811821+2.821822662\,I,\ x_5=-1.632793973+2.813325043\,I,$$
$$x_6=1.631811821-2.821822662\,I.$$

При этом относительная ошибка вычислений равна:

$$\delta(x_1)=|-.2822\text{e-}8|,\ \delta(x_2)=\|.346\text{e-}9\|,\ \delta(x_3)=|-.1146\text{e-}8+.308\text{e-}9\,I|,$$
$$\delta(x_4)=|.3503\text{e-}8+.1282\text{e-}8\,I|,\ \delta(x_5)=|-.1146\text{e-}8-.308\text{e-}9\,I|,\ \delta(x_6)=|.3503\text{e-}8-.1282\text{e-}8\,I|.$$

Отсюда следует, что корни уравнения даже при $N=5$ получены с высокой точностью, несмотря на то что условия определения не выполняются.

Задача решена.

Литература

1. Большой Энциклопедический словарь Математика. — М.: Научное издательство «Большая Советская Энциклопедия», 1988. — 845 с.
2. *Чеботарев Н. Г.* Теория Галуа. ОНТИ НКТП СССР. — Л., 1936.
3. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: Издательство «Наука», 1966. — 506 с.
4. *Граве Д. А.* Элементы высшей алгебры. — Киев, 1914. — 698 с.
5. *Лахтин Л. К.* Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях. — М., 1993. — 426 с.
6. *Birkeland R.* Les equations algebricues at les fonctios hypergeometricues / Ark Norske Vid. Akad. Oslo. 8 1927. str. 1—23 (111).
7. *Бейтман Г., Эрдей А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Издательство «Наука», 1983.
8. *Незбайло Т. Г.* Теория нахождения корней алгебраических уравнений в аналитической форме. СПб.: Издательство БАН, 2000. — 167 с.

Незбайло Т. Г.

Н44 Теория нахождения корней алгебраических уравнений (в символьном представлении) : пособие для учащихся старших кл. — СПб. : КОРОНА-Век, 2007. — 207 с. — ISBN 978-5-903383-42-9.

Книга посвящена решению самой старой (имеющей более чем тысячелетнюю историю) и наиболее известной, но так до конца и не решенной математической проблеме, а именно: нахождению формул для корней алгебраических уравнений произвольной степени. После того как Сципион Дель Ферро в 1530 году нашел формулы для вычисления корней кубического уравнения, а в 1545 Феррари установил эти формулы для корней уравнения четвертой степени, большинство математиков всего мира стали безуспешно искать формулы для корней алгебраического уравнения пятой степени. Только в 1834 году Абель, а затем и Галуа доказали, что корни алгебраических уравнений степени выше четыре в радикалах получить нельзя. Но это, однако, не запрещает им существовать в классе трансцендентных функций, что подтверждается работами многих известных математиков. Тем не менее даже в этом случае получить эти формулы в общем виде, с позиции единого научного подхода пока никому не удалось. В данной работе излагается единая теория нахождения формул для корней алгебраических уравнений с произвольными коэффициентами. Кроме самих формул приводится также много примеров, иллюстрирующих излагаемую теорию. Также представлены программы для ЭВМ, позволяющие распечатать эти формулы для уравнения заданной степени.

УДК 372.8 373 5

Учебное издание

Незбайло Тиберий Георгиевич

ТЕОРИЯ НАХОЖДЕНИЯ
КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(в символьном представлении)

Пособие для учащихся старших классов

Оформление обложки *Е. Н. Гозман*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректор *А. К. Райхчин*

Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3000 — книги и брошюры. Подписано в печать 30.07.07. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13. Тираж 1000 экз. Заказ № .

ООО «КОРОНА-Век».
193318, Санкт-Петербург, ул. Ворошилова, 6.