

**М.В. Шамолин**

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С ПЕРЕМЕННОЙ  
ДИССИПАЦИЕЙ  
В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

*Издательство  
«ЭКЗАМЕН»*

**МОСКВА  
2007**

УДК 517+531(075.8)  
ББК 22.161.1:22.21  
Ш19

**Рецензенты:**

*Белецкий В.В.* — член-корреспондент РАН,  
*Кондратьев В.А.* — доктор физико-математических наук, профессор.

**Шамолин, М.В.**

Ш19 Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела / М.В. Шамолин. — М.: Издательство «Экзамен», 2007. — 349, [3] с.

ISBN 5-472-02476-5

Настоящая книга посвящена развитию качественных методов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Используются свойства квазистационарного взаимодействия тела со средой в условиях струйного (или отрывного) обтекания. Предлагаемый материал находится на стыке таких дисциплин, как динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, и качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

Книга предназначена для специалистов в области классической динамики, качественной теории динамических систем и теории колебаний, а также для студентов и аспирантов механико-математических специальностей.

**УДК 517+531(075.8)**  
**ББК 22.161.1:22.21**

---

Подписано в печать с диапозитивов 05.08.2006. Формат 84x108/32.  
Гарнитура «Таймс». Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 15,11.  
Усл. печ. л. 25,20. Тираж 1 000 экз. Заказ №

---

ISBN 5-472-02476-5

© Шамолин М.В., 2007  
© Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие.....	7
Введение.....	11
<b>ГЛАВА 1. Методика определения параметров воздействия</b>	
<b>среды на тело в условиях квазистационарности</b> .....	39
§ 0. Предварительные сведения.....	39
§ 1. Методика определения неизвестных безразмерных параметров воздействия среды на тело.....	41
§ 2. Нелинейные динамические системы, описывающие различные варианты движения тела в среде .....	60
<b>ГЛАВА 2. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений</b> .....	69
§ 3. Замечания по бифуркации рождения цикла Пуанкаре-Андронova-Хопфа.....	69
§ 4. О замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых в точку по фазовой поверхности .....	81
§ 5. Об отсутствии замкнутых кривых из траекторий, охватывающих фазовый цилиндр.....	84
§ 6. О существовании топографических систем Пуанкаре в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой .....	87
§ 7. Кривые контактов и системы сравнения. Предельные циклы и проблема различения центра и фокуса.....	94
§ 8. О траекториях, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки плоскости .....	105
§ 9. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в фазовых пространствах динамических систем.....	113
§ 10. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения .....	116
§ 11. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем .....	119
§ 12. Об интегрировании некоторых классов систем с переменной диссипацией с нулевым средним на $so(4) \times R^4$ при наличии циклических интегралов .....	129
§ 13. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек.....	136

## Содержание

<b>ГЛАВА 3. Относительная структурная устойчивость и относительная структурная неустойчивость различных степеней</b> .....	141
§ 14. Определение относительной структурной устойчивости (относительной грубости) .....	143
§ 15. Относительная структурная неустойчивость (относительная негрубость) различных степеней .....	148
§ 16. Примеры из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой .....	149
<b>ГЛАВА 4. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твердого тела</b> .....	156
§ 17. Случай движения тела в среде при наличии некоторой связи и начало качественного анализа .....	157
§ 18. О трансцендентной интегрируемости системы .....	159
§ 19. О механической аналогии с маятником в потоке среды .....	162
§ 20. Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы .....	165
§ 21. Общие свойства решений динамической системы .....	169
§ 22. Расслоения фазового пространства .....	171
§ 23. Свойства решений, соответствующих колебательной области .....	174
§ 24. Свойства решений, соответствующих вращательной области .....	180
§ 25. Об инструментальных средствах исследования модели .....	185
§ 26. Сведение системы к физическому маятнику .....	188
§ 27. Начало качественного анализа. Точки покоя систем и стационарные движения .....	191
§ 28. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа .....	194
§ 29. О существовании дополнительного трансцендентного интеграла .....	196
§ 30. Топологическое строение фазовых портретов системы на двумерном цилиндре .....	201
§ 31. Механическая интерпретация некоторых особых фазовых траекторий .....	207
<b>ГЛАВА 5. Семейства портретов систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твердого тела</b> .....	209
§ 32. Начало качественного анализа. Точки покоя систем второго и третьего порядков .....	209

§ 33. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа .....	216
§ 34. Классификация фазовых портретов системы на двумерном цилиндре для первой области параметров .....	219
§ 35. Классификация портретов для второй и третьей областей параметров .....	230
§ 36. Строение фазового портрета системы для четвертой области параметров .....	233
<b>ГЛАВА 6. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем с переменной диссипацией с нулевым средним в пространственной динамике твердого тела .....</b>	<b>236</b>
§ 37. Постановка задачи о пространственном движении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании .....	236
§ 38. Случай движения тела в среде при наличии некоторой связи и начало качественного анализа .....	241
§ 39. О трансцендентной интегрируемости системы .....	247
§ 40. Задача о пространственном маятнике в потоке набегающей среды .....	252
§ 41. Топологическое строение фазового портрета исследуемой системы .....	257
§ 42. Траектории движения сферического маятника и случай ненулевой его закрутки около продольной оси .....	261
<b>ГЛАВА 7. Семейства портретов систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в пространственной динамике твердого тела .....</b>	<b>263</b>
§ 43. Случай нулевой продольной составляющей угловой скорости и соответствующие стационарные движения .....	266
§ 44. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа .....	272
§ 45. Классификация фазовых портретов системы в трехмерном пространстве для некоторой области параметров .....	275
<b>ГЛАВА 8. Некоторые задачи плоской динамики твердого тела, взаимодействующего со средой при наличии линейного демпфирования со стороны среды .....</b>	<b>282</b>
§ 46. Свободное торможение тела в среде при учете линейного демпфирующего момента .....	283
§ 47. Движение в среде при наличии некоторой связи и линейного демпфирующего момента .....	288

## **Содержание**

---

§ 48. Топологическое строение некоторых фазовых портретов в задаче о движении тела в среде при учете демпфирующего момента .....	292
§ 49. Сравнения некоторых классов движений тела в среде при отсутствии и наличии линейного демпфирующего момента .....	301
<b>Заключение</b> .....	307
<b>Иллюстрации</b> .....	310
<b>Литература</b> .....	326

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

---

*Посвящается моему отцу  
Владимиру Александровичу*

Настоящая книга посвящена развитию качественных методов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Используются свойства квазистационарного взаимодействия тела со средой в условиях струйного (или отрывного) обтекания. Предлагаемый материал находится на стыке таких дисциплин, как динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, и качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается класс задач, в котором характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра.

Сложность решения таких задач зависит от многих факторов, в том числе и от характера внешнего силового поля. Например, в случае консервативного поля сил (тяжести) движение тела вокруг своего центра масс может быть сильно хаотичным (классическая задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки). В этом случае построить сколько-нибудь общую теорию интегрирования невозможно; естественная возможность продвинуться дальше — это наложить какие-то ограничения на геометрию твердого тела, а также на необходимость обладания силовым полем какими-то группами пусть даже и скрытых симметрий.

Предлагаемая работа посвящена задаче движения в сопротивляющейся среде твердого тела, поверхностью контакта со средой которого является лишь плоский участок его внешней поверхности. Силовое поле в этом случае строится из соображений воздействия среды на тело при струйном (или отрывном) обтекании в условиях квазистационарности. Оказывается, что изучение движения такого класса тел сводится к сис-

темам либо с рассеянием энергии (диссипативные системы), либо с ее подкачкой (так называемые системы с антидиссипацией). Отметим, что подобные задачи уже появлялись в прикладной аэродинамике в исследованиях ЦАГИ.

В предлагаемой работе рассмотрены классы плоскопараллельных и пространственных движений твердых тел, взаимодействующих со средой среди которых (в зависимости от числа степеней свободы) можно назвать следующие: движения тел свободных в среде, покоящейся на бесконечности, и тел частично закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды.

Обстоятельно изучена одна из таких задач, которая имеет наибольшее прикладное значение, — задача о свободном торможении. Кроме того, рассмотрены задачи о движении свободного тела при наличии следящей силы, а также о колебаниях закрепленного маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Рассматриваемые в работе проблемы стимулируют развитие качественного аппарата исследования, который естественным образом дополняет качественную теорию неконсервативных систем с диссипацией и антидиссипацией.

Настоящая книга преследовала следующие цели: обработать экспериментальные данные о струйном обтекании твердого тела водой и определить безразмерные параметры воздействия среды на твердое тело. Исследовать динамические уравнения движения, возникающие при изучении плоской и пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой, а также возможно обобщить полученные методы исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний. Исследовать нелинейные эффекты в плоской и пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Обосновать на качественном уровне необходимость

введения определений относительной грубости и относительной негрубости различных степеней.

В результате этого была получена относительно простая методика определения безразмерных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности. Такая методика успешно применена при исследовании движения тел простой формы — круговых цилиндров, входящих в воду.

Разработаны также методы качественного исследования диссипативных систем и систем с антидиссипацией, позволившие получить условия бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых автоколебаний, а также условия отсутствия любых таких траекторий. Метод исследования плоских топографических систем Пуанкаре и систем сравнения удалось распространить на высшие размерности. Получены достаточные условия устойчивости по Пуассону некоторых классов незамкнутых траекторий динамических систем.

В плоской и пространственной динамике твердого тела обнаружены первые интегралы диссипативных и антидиссипативных систем, являющиеся трансцендентными (в смысле классификации их особенностей) функциями, выражающимися в ряде случаев через элементарные функции. Введены новые определения свойств относительной грубости и относительной негрубости различных степеней, которыми обладают проинтегрированные системы.

Получены двухпараметрические семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов, возникающие в задаче о свободном торможении. Почти каждый портрет таких семейств — (абсолютно) груб.

Обнаружены новые качественные аналогии между свойствами движения свободных тел в сопротивляющейся среде, покоящейся на бесконечности, и тел закрепленных, находящихся в потоке набегающей среды.

Книга содержит множество рисунков и иллюстраций, при этом последние приводятся в конце книги перед списком литературы.

## **Предисловие**

---

Автор выражает искреннюю благодарность всему коллективу лаборатории навигации и управления Института механики Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова за искреннее внимание к автору.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых докторов наук (грант МД-2311.2005.1; 2005—2006 г.г.) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-08-01378-а и 05-01-00401-а).

## **ВВЕДЕНИЕ**

---

*«...Лучший способ ознакомиться  
с каким-нибудь предметом —  
написать книгу о нем...»*

*Бенджамин Дизраэли*

Задача о движении тела в сопротивляющейся среде (например, о падении тела в воздухе) интересует исследователей вот уже несколько столетий: еще в средние века появилась необходимость изучения зависимости дальности стрельбы от величины угла возвышения ствола пушки.

Опыты по исследованию движения тела в воздухе и жидкости привели Х. Гюйгенса к установлению эмпирического закона сопротивления, пропорционального квадрату скорости движения тела в воздухе (1669). И. Ньютон на основе опытов (Ф. Гоуксби, Ж. Деагюлье и собственных) создал математическую теорию сопротивления воздуха, разработку которой продолжали в XVIII В. Вариньон, Д. Бернулли, Ж. Даламбер, Л. Эйлер и др. В те же годы был изобретен баллистический маятник.

Л. Эйлер, в результате глубокого анализа опытного материала англичанина Б. Робинса, заменил в 1745 г. квадратичный закон сопротивления двучленным: первое слагаемое пропорционально квадрату скорости, а второе — четвертой степени скорости. В дальнейшем Л. Эйлер разработал численные методы интегрирования дифференциального уравнения движения снаряда, в частности, используя медленно сходящиеся ряды. Для прицельной стрельбы он предложил другую методику, согласно которой движение снаряда разделялось на составляющие, одна из которых отвечает за сопротивление.

Усилия ученых были направлены не только на нахождение траектории и закона движения снаряда, но также на возможно более полный учет дополнительных явлений, приводящих к важнейшим поправкам к основной теории. В XVIII в. Робинс

заметил, что центр масс вращающегося снаряда описывает не плоскую, а пространственную кривую. Позднее, в XIX в. С. Пуассон, затем М. В. Остроградский пытались дать математическую трактовку этого явления. На основе общей теории движения твердого тела было установлено, что продолговатый вращающийся снаряд имеет собственное быстрое вращение вокруг продольной оси динамической и геометрической симметрии, прецессию около вектора скорости снаряда и нутационное движение около вектора опрокидывающего момента.

*Исследования Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.* Н.Е. Жуковский одним из первых анализировал разные задачи динамики точки в среде, а именно: падение тел, движение тела, брошенного под углом к горизонту, движение маятника и т.д. Наряду с интегрированием уравнений движения, он совершенствовал модель взаимодействия тел с сопротивляющейся средой и считал, что кинетическая энергия падающего тела тратится на образование вихревых движений воздуха и, кроме того, на преодоление молекулярных сил прилипания воздуха к движущемуся телу. Сопротивление зависит не только от скоростей движения точек тела, но и от формы самого тела. Если скорость мала, то с достаточной точностью можно принять сопротивление пропорциональным первой степени скорости. При больших скоростях сопротивление пропорционально квадрату скорости.

Из исследований Н. Е. Жуковского известна также попытка моделирование движения на основе экспериментов по самовращению падающих в воздухе пластинок [78, 79] (так называемого «гамбургского картона»). Здесь приходится учитывать такие свойства воздействия среды на тело как силу сопротивления и подъемную силу. Именно аэродинамические характеристики пластинки использованы и для моделирования полета птиц [79].

Н. Е. Жуковский предполагал существование такого динамического равновесия «тела-птицы» относительно центра

масс, при котором угол между скоростью центра масс и плоскостью крыла-пластинки (угол атаки) служит управляющим параметром, т.е. может быть задан произвольным образом. Это предположение равнозначно предположению о таком разделении движений тела, при котором характерное время движения относительно центра масс существенно меньше характерных времен движения самого центра.

Представляет интерес исследование движения тела в среде при условиях, когда его поступательное движение связано с вращательным. Упомянутые выше задачи далеко не исчерпывают всех возможностей подобного типа.

Из исследований С. А. Чаплыгина отметим также постановку задачи о движении тяжелого тела в несжимаемой жидкости [183, 184].

*Основополагающей* в рамках данной работы задачей является изучение движения пластины бесконечной длины в условиях струйного обтекания [184]. Эта задача является важной прежде всего для дальнейшего исследования движения тела, взаимодействующего со средой через передний плоский участок.

*Различные аспекты рассмотрения проблемы.* Как видно, в историческом прошлом в основном затронут лишь один аспект задачи о движении тел в сопротивляющейся среде. А именно, интересы исследователей направлены на получение конкретных траекторий пусть и в приближенном, но в явном виде. При этом параллельно рассматривалась задача более точного моделирования взаимодействия тела с сопротивляющейся средой. Об интересных экспериментальных явлениях см. также работы Hubert Airy, Magnus Blix, Bret Onniere, Otto Liliental, Marey, Mouillard, Parseval, S. E. Peal, Rayleigh, Weyher [252–254, 256–259, 263, 265, 302].

Плоская пластина — наиболее простое тело, позволяющее исследовать различные особенности движения в среде. Динамические эффекты, связанные с влиянием присоединенных масс (классическая задача Кирхгофа), демонстрируются в

учебнике Г. Ламба [101] на примере движения тела-пластины в жидкости (исследование, как известно, начато Томсоном, Тэйтом и Кирхгофом).

Задача Кирхгофа, поставленная во второй половине XIX в., заложила второй аспект рассмотрения задачи. Он связан с вопросами интегрируемости той нелинейной системы дифференциальных уравнений [101], которая описывает данное движение (вопросы существования аналитических (гладких, мероморфных) первых интегралов).

До наших дней различные варианты задачи Кирхгофа, по причине сложности, почти всегда рассматривались с точки зрения проблемы интегрируемости, и лишь в некоторых случаях проведен качественный анализ ряда траекторий. В работах Кирхгофа, Клебша, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина, Харламова и др. указаны условия существования дополнительного аналитического первого интеграла [14, 18, 40, 91, 115, 148, 167, 171]. В наши же дни решение этой проблемы совершенствуется: в [135] (А. М. Переломов) построена теория интегрируемых случаев (построение L-A-пары), а в [95] (В. В. Козлов, Д. А. Онищенко) указаны условия несуществования дополнительного первого интеграла уравнений Кирхгофа (см. также работы О. И. Богоявленского, С. П. Новикова, С. Т. Садэтова [35, 36, 128, 147]).

Укажем также на третий аспект рассмотрения указанной проблемы, а именно, на качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение (расслоения фазового пространства, качественное расположение фазовых траекторий, симметрии и т.д.). И хотя перечисленные проблемы тесно связаны с интегрируемостью, их разрешение носит самостоятельный характер. Более того, данный аспект и стимулирует развитие качественного аппарата.

**Современное состояние** проблемы моделирования движения твердого тела в среде опирается на возможные модельные ограничения в задаче и на состояние математическо-

го аппарата. Так в работах В. В. Козлова [92, 93] исследовалась задача Чаплыгина о свободном падении в безграничном объеме идеальной жидкости тяжелого тела, имеющего плоскость симметрии. Наряду с классической постановкой описания воздействия среды на тело здесь учитывается вязкое сопротивление, задаваемое функцией Рэлея, а также эффект присоединенных масс.

При общих предположениях о характере аэродинамического воздействия в работах Б. Я. Локшина [107–110] были исследованы вопросы существования и устойчивости стационарных режимов движения в среде. Интересна также задача об устойчивости перманентного вращения тела в потоке среды (режима авторотации [141], см. также [19] и работы В. А. Привалова и В. А. Самсонова [112–114, 131]). Специальная конструкция поверхности тела и гипотеза о квазистатическом воздействии среды позволили сформулировать полную схему сил, в которую входят массовые, геометрические и аэродинамические характеристики. Исследованы режим авторотации и его устойчивость. Смоделирован эффект Магнуса, неконсервативный характер которого оказывает заметное влияние на свойство устойчивости вращения тел в среде.

Интересные модели взаимодействия освещены в работах В. В. Белецкого. Так в [26] учитывается влияние аэродинамических сил на вращение и ориентацию спутника на орбите. Основные же эффекты динамики вращательного движения спутников под действием моментов, в том числе и аэродинамических, рассмотрены в [20, 26], динамика вращательного движения небесных тел в гравитационных полях с упором на резонансные эффекты — также в [26].

В работе [130] (В. А. Садовничий, Ю. М. Окунев) построены модельные динамические системы, позволившие исследовать движение относительно центра масс динамически симметричного тела пространственной аэродинамической формы с высокими несущими свойствами при нестационар-

ном полете. В рамках квазистационарной линеаризованной модели аэродинамического воздействия, не учитывающей демпфирующих моментов аэродинамических сил, выявлено демпфирующее влияние подъемной силы и найдены ограничения на аэродинамические коэффициенты, соблюдение которых обеспечивает эффективное затухание угловых колебаний тела. Для условий высокоскоростного полета, когда аэродинамическое воздействие на тело существенно превышает влияние силы тяжести, получено аналитическое решение линеаризованной по части переменных нестационарной динамической системы, описывающей движение тела относительно центра масс. Методика получения описанных результатов приведена в [132] (В. А. Садовничий, Г. Г. Черный, Ю. М. Окунев, В. А. Самсонов), где сообщено о библиотеке прикладных программ, обеспечивающих многооконное представление графической информации о поведении различных компонент вектора состояния динамической модели. Данный цикл работ был начат около двадцати лет назад [111, 112] и в настоящее время развивается в лаборатории навигации и управления Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Последовательность шагов при моделировании.**

Проблема исследования движения тела под действием силы сопротивления «упирается» в отсутствие полного описания силы, поскольку в принципе она зависит и от обобщенных скоростей. Поэтому в дальнейшем в динамических уравнениях возможно наличие членов, характеризующих как рассеяние энергии (диссипацию), так и ее подкачку (так называемую *антидиссипацию*).

Таким образом, процесс моделирования представляет собой последовательность следующих шагов. Сначала изучается предварительная модель силового поля и строится семейство механических систем, движение которых обладало бы различными характеристиками, существенно зависящими от тех параметров модели, информация о которых не полна или отсут-

ствуется вовсе. В результате исследования такой модели возникают вопросы, ответы на которые в рамках принятой модели не могут быть найдены. Тогда разработанные объекты становятся предметом детального экспериментального исследования на втором шаге. Такой эксперимент либо предлагает ответы на сформулированные вопросы и вносит в предварительно построенную модель необходимые коррективы, либо выявляет новые вопросы, которые приводят к необходимости повторения начального шага, но уже на новом уровне понимания проблемы.

Такой подход связан с описанием стационарных режимов движения, их ветвлением, бифуркацией, анализом устойчивости и неустойчивости, выявлением условий для перестроек [9, 12, 15, 16].

На некоторые вопросы качественного характера иногда удается получить ответы, обсуждая традиционную проблему аналитической механики, — проблему наличия полного набора первых интегралов у построенной динамической системы. В то же время, изучение поведения динамической системы «в целом» часто заставляет обращаться к численному эксперименту. При этом возникает необходимость в разработке новых вычислительных алгоритмов или усовершенствовании известных, также как и новых качественных методов, что и принимается в данной книге.

Используемая в дальнейшем математическая модель движения твердого тела частично уже анализировалась ранее. Так в [112, 113, 158, 159] (Б. Я. Локшин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов) построен фазовый портрет физического маятника, помещенного в поток среды. Динамическая система, описывающая движение маятника, обладает интересными нелинейными свойствами, что определяет необходимость дальнейшего полного нелинейного анализа и возможного создания методики исследования. В [71, 73] (В. А. Ерошин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов и др.) разобран вопрос об устойчивости пря-

молинейных движений свободного тела при струйном обтекании. Исследование проведено на базе линеаризованных уравнений движения тела. Поэтому, в согласии с [71–73], для начала будет описана линейная модель.

В работе изучается задача о движении тела в таком силовом поле, при котором линия действия силы, приложенной к телу, не меняет своей ориентации относительно тела, а лишь может смещаться параллельно самой себе в зависимости от фазовых переменных. Подобные условия возникают при движении пластины, так сказать, с «большими» углами атаки, в среде при струйном обтекании [64, 162, 183, 184] (М. И. Гуревич, Л. И. Седов, С. А. Чаплыгин) или при отрывном [172, 173] (В. Г. Табачников). Таким образом, *основным объектом исследования* является семейство тел, часть поверхности которых имеет плоский участок (пластину), обтекаемый средой по законам струйного обтекания. При этом поток среды предполагается однородным, в том смысле, что если движущееся тело свободное, то среда на бесконечности покоится, а если (частично) закрепленное (в частности, вращается вокруг неподвижной точки), то скорость набегающего потока на бесконечности постоянна. В данном случае *содержательным примером* является упомянутая выше *основополагающая* в рамках данной работы задача С. А. Чаплыгина о движении пластины бесконечной длины.

Поставим подробно **задачу плоскопараллельного движения**. Предположим, что однородное твердое тело массы  $m$  совершает плоскопараллельное движение в среде с квадратичным законом сопротивления, и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину, находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что воздействие среды на пластину (тело) сводится к силе  $\mathbf{S}$  (приложенной в точке  $M$ ), линия действия которой ортогональна пластине (рис. 0.1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объема, огра-

ниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и главное, что она не испытывает действия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду.

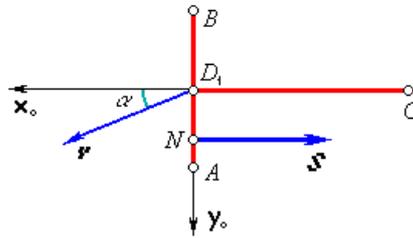


Рис. 0.1

Допустим, что среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения. Это возможно при выполнении двух условий, а именно: (1) скорость движения всех точек тела ортогональна пластине  $AB$ ; (2) перпендикуляр, опущенный из центра тяжести  $C$  тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы  $S$ .

*Гипотеза квазистационарности и фазовые переменные.* Свяжем с пластиной правую систему координат  $D_1x_0y_0z_0$  (ось  $z_0$  — перпендикулярна плоскости рисунка) и будем считать, для простоты,  $D_1z_0x_0$  плоскостью геометрической симметрии тела. Это обеспечит выполнение условия (2) при движении, удовлетворяющем условию (1).

Для построения динамической модели введем первые три фазовые координаты:  $v$  — величина скорости точки  $D_1$  относительно потока (рис. 0.1),  $\alpha$  — угол между вектором  $v$  скорости точки  $D_1$  и осью  $D_1x_0$ ,  $\Omega$  — алгебраическое значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось  $z_0$ ,  $AB = D$ .

Примем, что величина силы  $S$  квадратично зависит  $S = s_1 v^2$  от  $v$  с неотрицательным коэффициентом сопротивле-

ния  $s_1$ . Обычно его представляют в виде  $s_1 = \frac{1}{2} \rho P c_x$ , где  $c_x$  — уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления ( $\rho$  — плотность среды,  $P$  — площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхалия и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхалия»  $\omega = \frac{\Omega D}{v}$ , а также вспомогательную функцию  $s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha$ , которая является, вообще говоря, знакопеременной. Таким образом, в дальнейшем в уравнениях движения возникают следующие две функции фазовых переменных:  $y_N$  и  $s$ , которые будем называть *функциями воздействия среды*.

Ограничимся зависимостью  $c_x$  от угла атаки, т.е. в принципе будем считать величину  $s$  функцией  $\alpha$ , а величину  $y_N$  — функцией пары безразмерных переменных  $(\alpha, \omega)$ .

Работы предыдущих авторов (В. А. Ерошин, В. А. Привалов, В. А. Самсонов) посвящены такому исследованию плоского взаимодействия, при котором учитывается зависимость пары  $(y_N, s_1)$  лишь от угла атаки. При этом рассматривались только линейные задачи около прямолинейного поступательного движения. В данной работе изучаются плоскопараллельные и пространственные движения тела в нелинейной постановке как в случае зависимости пары  $(y_N, s)$  только от угла атаки, так и при условии дополнительной зависимости величины  $y_N$  от приведенной угловой скорости  $\omega$ .

В дальнейшем будут рассмотрены несколько классов плоскопараллельных и пространственных движений твердых тел, взаимодействующих со средой, которые можно разделить на части: движения тел свободных и тел частично закрепленных в потоке, в том смысле, что число степеней свободы при этом уменьшается.

Одна из таких задач (имеющая большое прикладное значение) — *задача о свободном торможении* — будет исследована особенно основательно [156, 160, 189, 193, 195, 201, 203, 206, 216, 218, 222, 225, 235, 243, 270, 278, 280, 288, 290, 294].

**Плоскопараллельное движение с малыми углами атаки.** Задача о движении тела с малыми углами атаки формирует представление о нелинейных динамических системах, исследуемых в дальнейшем. Поэтому проведем далее линейный анализ несколько подробнее.

*Режим невозмущенного движения.* Прямолинейное поступательное движение (которое в дальнейшем назовем *невозмущенным*) задается уравнениями  $\alpha(t) \equiv 0, \omega(t) \equiv 0$ . Поэтому функцию  $y_N(\alpha, \omega)$  при малых  $(\alpha, \omega)$  примем в виде  $y_N = D(k\alpha - h\omega)$ , где  $k$  и  $h$  — некоторые постоянные. Зависимостью же  $s$  от  $\alpha$ , в силу геометрической симметрии тела, обеспечивающей четность функции  $s$ , пренебрегаем.

*Ключевые параметры.* Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра  $s = s_1, k, h$ , которые определяются формой пластины в плане. Как уже отмечалось, первый из этих параметров — коэффициент  $s$  — размерный. Параметры же  $k, h$  являются безразмерными, в силу способа их введения.

Отметим, что величины  $s, k$  могут быть экспериментально определены путем весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В литературе [64, 264] (М. И. Гуревич, L. Prandtl, A. Betz) имеется также информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин (см. также работы В. А. Ерошина, Г. А. Константинова, Н. И. Романенкова, Ю. Л. Якимова, А. В. Плюснина, Ю. А. Созоненко, И. В. Серебрякова, Ю. Ф. Журавлева, В. В. Стрекалова, О. П. Шорыгина [71–77, 80, 81, 169, 248]). Эта информация позволяет считать, что  $k > 0$ . Что же касается параметра  $h$  (который вносит в систему зависимость момента

силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна.

**Эксперимент.** Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова В. А. Ерошиным и В. М. Макарашиным было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров [69, 73, 74, 158, 160] (ср. с [83]).

Эксперимент (обработку результатов которого проводил автор) позволил остановиться на важных выводах. Первый: *режим прямолинейного поступательного торможения тела (в воде) неустойчив* по крайней мере по отношению к углу ориентации тела. Стало возможным также определение безразмерных параметров  $k, h$  воздействия среды на твердое тело, чему и посвящена, в частности, глава 1 работы.

Второй вывод, полученный из проведенного натурального эксперимента, следующий: при моделировании воздействия среды на тело необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный так называемой вращательной производной момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр вносит в систему диссипацию [160].

*О коэффициенте демпфирования.* Величина коэффициента демпфирующего момента уже была оценена в работах [69, 70] (В. А. Ерошин) для некоторых случаев движения тел в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости прямолинейного поступательного движения твердого тела в воде. Чисто формально, увеличивая величину коэффициента демпфирования, возможно достижение устойчивости данного движения. Прямолинейное движение твердого тела в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент [30–32] (Ю. К. Бивин, В. В. Викторов, Л. П. Степанов). Возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

**Нелинейный анализ.** Первый вывод, сделанный из эксперимента, заставляет нас рассматривать класс возможных движений тела при малых углах атаки в качестве «опорного» для рассмотрения класса свободного торможения тела с конечными углами атаки. Для тел различной формы углы атаки вполне могут принимать практически любое значение из интервала  $(0, \pi/2)$ , и лишь при углах, близких к  $\pi/2$ , неизбежен так называемый *замыв боковой поверхности*. Поэтому возникает необходимость продолжения функций воздействия среды  $Y_N$  и  $s$  по крайней мере на конечные углы атаки, т.е. «расширение» их области определения на интервал  $(0, \pi/2)$ . Но фактически продолжать данные функции необходимо на всю числовую прямую, что будет ясно из следующих рассуждений, подсказанных автору В. А. Самсоновым.

Представим себе летающий аппарат, совершающий плоскопараллельное движение над водой. Предположим, что аппарат взаимодействует с водой посредством некоторой конструкции, содержащей плоскую пластину, которая опущена в воду вертикально, и обтекается водой при движении над ней летательного аппарата. Можно считать, что пластина взаимодействует с водой по законам струйного обтекания практически при любых углах атаки. Такой летательный аппарат подобен хорошо известному экраноплану [129] (В. А. Одареев, докторская диссертация). При этом плоскопараллельность движения рассматриваемого летательного аппарата над водой обеспечивается наличием самого экрана — плоской поверхности воды.

Как уже отмечалось, опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для *пластины бесконечной длины* получил эти функции в аналитическом виде [183]. Он показал, что если такая пластина движется в среде по законам струйного обтекания, то коэффициент квадратичного по скорости центра пластины сопротивления пропорционален аналитиче-

## Введение

ской функции — косинусу угла атаки, а расстояние от центра давления до центра пластины пропорционально его синусу.

Последний факт позволяет перенести результаты С. А. Чаплыгина на семейство тел, часть внешней поверхности которых имеет форму плоской пластины, в том числе и для кругового цилиндра с передним плоским торцом.

Представим нелинейные динамические уравнения плоскопараллельного движения тела следующим образом:

$$v^{\bullet} \cos \alpha - \alpha^{\bullet} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2, \quad (0.1)$$

$$v^{\bullet} \sin \alpha + \alpha^{\bullet} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^{\bullet} = 0, \quad (0.2)$$

$$I \Omega^{\bullet} = y_N(\alpha, \omega) s(\alpha) v^2, \quad \omega = \frac{D \Omega}{v}. \quad (0.3)$$

Здесь  $(v, \alpha, \Omega$  или  $\omega)$  — фазовые переменные,  $\sigma, I, D$  — постоянные величины ( $\sigma = D_1 C$ ,  $I$  — центральный момент инерции),  $y_N, s$  — некоторые функции воздействия среды, соответствующие некоторому классу мыслимых тел и их мыслимых движений. Данные функции воздействия среды принадлежат к определенным функциональным классам.

*Классы функций воздействия среды.* Первым этапом полного нелинейного исследования движения тела в среде в условиях квазистационарности является конструирование и исследование соответствующих динамических систем, в которых не учитывается влияние вращательных производных момента аэродинамических сил по угловой скорости тела (в частности, в линейном случае  $h = 0$ ). Учет такого влияния является следующим трудоемким этапом исследования проблемы [45, 46, 188, 298].

Объясним необходимость широкого выбора классов функций воздействия среды. Отрезок  $AB$  (рис. 0.1) является геомет-

рическим сечением плоскостью движения нашей пластины. Геометрическая же форма пластины в принципе может быть совершенно различной. Кроме того, хорда, лежащая в плоскости пластины, может по-разному определять плоскость движения самого тела (в случае плоскопараллельного движения). Последние обстоятельства и позволяют отнести две возникающие функции воздействия среды к определенным классам. Как указано выше, на эти функциональные классы накладываются достаточно слабые условия, поэтому данные классы достаточно широки. Они заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения.

Для начала рассмотрим случай, когда пара функций воздействия среды  $(y_N, s)$  зависит лишь от угла атаки. При этом для качественного описания данной пары функций используется *экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания*. Вводимые классы достаточно широки: они состоят из функций достаточно гладких,  $2\pi$  — периодических ( $y_N(\alpha)$  — нечетная, а  $s(\alpha)$  — четная), удовлетворяющих следующим условиям:  $y_N(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi)$ , причем  $y_N'(0) > 0, y_N'(\pi) < 0$  (класс функций  $\{y_N\} = Y$ );  $s(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $s(\alpha) < 0$  при  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , причем  $s(0) > 0, s'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$  (класс функций  $\{s\} = \Sigma$ ). Как  $y_N$ , так и  $s$  меняют знак при замене  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ . Таким образом,

$$y_N \in Y. \quad (0.4)$$

$$s \in \Sigma. \quad (0.5)$$

В частности, аналитические функции

$$y_N(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha \in Y, \quad (0.6)$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma; A, B > 0 \quad (0.7)$$

(соответствующие случаю С. А. Чаплыгина [183]) служат типичными представителями описанных классов.

В дальнейшем в рассматриваемых динамических системах возникает произведение  $F(\alpha) = y_N(\alpha)s(\alpha)$ . Из вышеперечисленных условий следует, что  $F$  — достаточно гладкая нечетная  $\pi$  — периодическая функция, удовлетворяющая условиям:  $F(\alpha) > 0$  при  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F'(\pi/2) < 0$  (класс функций  $\{F\} = \Phi$ ). Таким образом,

$$F \in \Phi. \quad (0.8)$$

В частности, аналитическая функция

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \quad (0.9)$$

(также соответствующая случаю С. А. Чаплыгина [183]) является типичным представителем возникающего класса функций  $\Phi$ .

Итак, для исследования обтекания пластины средой используются *классы динамических систем*, определенные с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

**Направления, развиваемые в работе.** У системы (0.1)—(0.3) третьего порядка возможно отщепление независимой подсистемы второго порядка.

Действительно, система (0.1)—(0.3) является эйлеровской однородной системой по части квазискоростей  $(\Omega, v)$  степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени  $t$ ) по формуле  $dq = v dt$ ,  $v \neq 0$  получаем новую систему, эквивалентную системе (0.1)—(0.3) (в данном случае также выполнено равенство  $\phi' = \omega$ ):

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (0.10)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (0.11)$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad (0.12)$$

где  $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$  (таким образом, в системе (0.10)—(0.12) переменная  $\omega$  отличается от переменной  $\omega$  в системе (0.1)—(0.3) только лишь делением на величину  $D$ ).

В системе (0.10)—(0.12) третьего порядка появляется независимая подсистема (0.11), (0.12) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на ее фазовом цилиндре.

Укажем далее на направления, развиваемые в работе. Первые два направления являются традиционными для аналитической механики, а именно:

*Качественное исследование нелинейных систем неконсервативного характера, что позволит изучить геометрию фазового пространства и, в частности, ответить на главный вопрос нелинейного анализа при исследовании системы (0.11), (0.12): возможно ли найти пару функций  $y_N$  и  $S$  из вышеописанных классов, такую, чтобы в конечной окрестности начала координат на фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$  у системы (0.11), (0.12), отцепленной от общей нелинейной системы (0.10)—(0.12) при помощи указанного выше приема, существовали бы устойчивые предельные циклы.*

Последний вопрос возникает по следующей причине: поскольку прямолинейное поступательное торможение (невозмущенное движение) неустойчиво по углу атаки и угловой скорости, возможны ли при этом устойчивые автоколебания в системе?

*Поиск возможных интегрируемых случаев.*

Третье направление характерно для прикладной аэродинамики и является специфическим в рамках данной работы:

*Поиск возможных аналогий между динамикой движения частично закрепленных тел и тел свободных.*

*Возможные ответы на главный вопрос нелинейного анализа.* Неустойчивость прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного режима) побудила нас к постановке нелинейной задачи, а также к главному вопросу нелинейного анализа (отмеченному выше) в исследовании конечной окрестности такого движения.

Одним из основных результатов работы является частично отрицательный ответ на главный вопрос нелинейного анализа, а именно, при квазистационарном описании взаимодействия среды с телом, когда величины  $y_N$  и  $S$  зависят лишь от угла атаки, для любой допустимой пары функций воздействия среды  $y_N(\alpha)$  и  $s(\alpha)$  во всем диапазоне конечных углов атаки на интервале  $\alpha \in (0, \pi/2)$  отсутствуют какие-либо автоколебания в системе. Математическая сторона данного вопроса на качественном уровне исследуется в главе 2.

Для возможного достижения *положительного ответа на главный вопрос нелинейного анализа* при моделировании взаимодействия тела со средой учитывается влияние вращательных производных момента, действующего со стороны среды, который вносит в систему диссипацию. Поэтому, в принципе, при выполнении некоторых дополнительных условий в рамках рассматриваемой модели возможно возникновение устойчивых автоколебаний, однако поиск тела, обладающего необходимыми свойствами, требует проведения дополнительного натурального эксперимента.

После его проведения появляется возможность сравнивать результаты численного эксперимента, полученные при моде-

лировании воздействия среды на тело, с результатами эксперимента натурного.

**Динамические системы с переменной диссипацией и их свойства.** Вообще, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где возникают либо диссипативные системы, либо системы с так называемой антидиссипацией. Поэтому становится актуальным построение методики именно для тех классов систем, которые возникают при моделировании движения такого класса тел, поверхностью контакта со средой которых является плоский участок их внешней поверхности.

Поскольку при таком моделировании используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания, возникает необходимость исследования класса динамических систем, которые обладают свойством (относительной) структурной устойчивости. Поэтому вполне естественно ввести определения относительной грубости для таких систем. При этом многие из рассматриваемых систем получаются (абсолютно) грубыми по Андронову-Понтрягину [6, 8, 190, 194, 196–198, 215, 224, 226, 261, 267, 273, 283].

Как будет показано в главе 1, после некоторых упрощений общая система (0.1)—(0.3) приводится к маятниковым системам второго порядка, в которых присутствует линейная диссипативная сила с переменным коэффициентом, который при разных углах атаки имеет разный знак.

В данном случае будем говорить о системах с так называемой *переменной диссипацией*, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака.

В среднем за период по углу атаки диссипация может быть как положительной, так и отрицательной, а также равной нулю. В последнем случае будем говорить *о системах с переменной диссипацией с нулевым средним*.

*Диссипативные системы с переменной диссипацией с нулевым или ненулевым средним.* Дать общее определение системы с переменной диссипацией с нулевым или ненулевым средним достаточно непросто. Далее в работе ограничимся следующим.

Рассмотрим гладкую автономную динамическую систему  $n+1$  порядка нормального вида в  $R^n \{x\} \times S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\}$ . Дивергенцию правой части (которая, вообще говоря, является функцией всех фазовых переменных и не равна тождественно нулю) данной динамической системы будем обозначать через  $div(x, \alpha)$ . Будем называть такую систему *системой с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним*, если функция

$$\int_0^{2\pi} div(x, \alpha) d\alpha$$

равна (не равна) тождественно нулю.

*Качественные аналогии.* В дальнейшем будут отмечены важные механические аналогии, возникающие при сравнении качественных свойств стационарного движения свободного тела и равновесия маятника в потоке среды. Такие аналогии носят глубокий опорный смысл, поскольку позволяют перенести свойства нелинейных динамических систем для маятника на динамические системы для свободного тела. И те, и другие системы принадлежат к классу так называемых маятниковых динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Например, при выполнении условия (0.9) угол поворота маятника эквивалентен углу атаки при движении свободного тела [152–155, 185, 204, 277]. Если же условие (0.9) (группа условий (0.6), (0.7)) не выполнено, то угол атаки свободного тела и угол поворота маятника траекторно топологически эквивалентны (о такой эквивалентности см. главы 3, 4, 6, а также [17, 21, 28, 48, 49]).

*Общий характер симметрий системы для плоской и пространственной динамики.* При дополнительных условиях вышеописанная эквивалентность распространяется и на пространственный случай, что позволяет говорить об *общем ха-*

*рактуре симметрий, имеющихся в системе с переменной диссипацией с нулевым средним как при плоскопараллельном, так и при пространственном движениях (о плоском и пространственном вариантах маятника см. главы 4 и 6) [146, 152–155, 185, 204, 207, 210–214, 217, 220, 231, 238–240, 242, 268, 269, 282, 286, 293, 295, 296, 299].*

**Краткое содержание остальных глав книги.** В главе 1 подвергнута более конкретному анализу задача о движении тела в среде с малыми углами атаки. Обработаны результаты эксперимента, благодаря чему получена относительно простая методика определения параметров воздействия среды на тело. В данной главе также сформирован ряд нелинейных динамических систем с переменной диссипацией с нулевым и ненулевым средним в пространстве квазискоростей, зависящий от двух функций воздействия среды и описывающий различные классы движений тела в среде в условиях квазистационарности. Полный нелинейный анализ таких систем проводится в дальнейших главах как ранее известными методами качественной теории, так и новыми методами, полученными исключительно для возникающих систем с переменной диссипацией.

Глава 2 посвящена некоторым вопросам качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, как в применении к конкретным динамическим системам, возникающим в динамике твердого тела, так и в применении к произвольным динамическим системам на маломерных гладких многообразиях. Получены достаточные условия существования бифуркации рождения устойчивых и неустойчивых предельных циклов для систем (в частности (0.11), (0.12)), описывающих движение тела в сопротивляющейся среде, а также достаточные условия отсутствия таких траекторий [298].

Предъявлено простое уточнение теоремы Бендиксона, которая дает достаточные условия отсутствия замкнутых характеристик векторного поля в той области плоскости, где не меняет знака его дивергенция, т.е. для динамических систем со знакопо-

стоянной диссипацией. Уточнение последнего факта таково: для отсутствия замкнутых характеристик векторного поля на двумерном ориентируемом римановом многообразии достаточно знакопостоянство почти всюду скалярного произведения  $(rotfw, n)$ , где  $f$  — гладкая функция,  $w$  — векторное поле, ортогональное исследуемому, а  $n$  — внешняя нормаль к многообразию.

В понятии топографической системы Пуанкаре (ТСП) [25, 142, 143, 145, 170, 181, 191, 200, 209, 229, 272, 274, 275, 279, 281] первоначально был заложен ряд требований аналитического характера. ТСП строилась с помощью достаточно гладкой алгебраической функции двух переменных, которая: ограниченная в ограниченной области, стремящаяся к бесконечности, когда одна из переменных стремится к бесконечности, равная нулю в особой точке векторного поля на плоскости, положительная во всех остальных точках, имеющая первые производные, обращающиеся в нуль в особой точке, в которой она к тому же и выпукла. В книге же учитывается лишь геометрия расположения так называемой кривой контактов траекторий исследуемой динамической системы и кривых ТСП (т.е. кривой, в которой последние два класса траекторий касаются).

Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уровня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля (ср. с [3, 22, 42, 43, 98–100]).

Более того в работе предложен метод построения ТСП в многомерных пространствах.

Изучаются также некоторые элементы теории монотонных векторных полей, т.е. полей, зависящих от параметра, при из-

менении которого само поле поворачивается в одну и ту же сторону монотонно. При некоторых условиях классы траекторий таких векторных полей имеют монотонно меняющиеся друг относительно друга предельные множества [24, 192].

Предлагается достаточно простая методика доказательства устойчивости по Пуассону незамкнутых траекторий динамических систем. В частности, в некоторых исследуемых системах с переменной диссипацией с нулевым средним показано наличие семейств таких длиннопериодических траекторий: при некоторых условиях траектория движения точки  $D_1$  (центра пластины (рис. 0.1)) устойчива по Пуассону [33, 34, 103, 199, 221, 246, 271, 289].

Отмечены классы существенно нелинейных систем второго и третьего порядков, интегрируемых в трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) элементарных функциях [56, 91, 117, 216, 241, 244, 284, 285, 287, 292, 301]. Для примера такими являются пятипараметрические динамические системы, включающие в себя большинство систем, исследуемых в книге:

$$\begin{cases} \alpha^* = a \sin \alpha + b\omega + \gamma_1 \sin^5 \alpha + \gamma_2 \omega \sin^4 \alpha + \\ \quad + \gamma_3 \omega^2 \sin^3 \alpha + \gamma_4 \omega^3 \sin^2 \alpha + \gamma_5 \omega^4 \sin \alpha, \\ \omega^* = c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \gamma_1 \omega \sin^4 \alpha \cos \alpha + \\ \quad + \gamma_2 \omega^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \gamma_3 \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ \quad + \gamma_4 \omega^4 \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_5 \omega^5 \cos \alpha. \end{cases}$$

В главе 3 вводятся определения относительной структурной устойчивости (относительной грубости) и относительной структурной неустойчивости (относительной негрубости) различных степеней. Последние свойства доказываются для систем, возникающих в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой [133, 198] (ср. с [61]).

Как известно, (чисто) диссипативные динамические системы (впрочем как и (чисто) антидиссипативные), которые в

нашем случае могут принадлежать к системам с переменной диссипацией с ненулевым средним, являются, как правило, структурно устойчивыми ((абсолютно) грубыми), а вот системы с переменной диссипацией с нулевым средним (которые, как правило, обладают дополнительными симметриями) являются либо структурно неустойчивыми (негрубыми), либо только лишь относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми). Последнее утверждение доказать в общем случае затруднительно. Тем не менее введение понятия относительной грубости (а также относительной негрубости различных степеней) позволяет предъявить классы конкретных систем из динамики твердого тела, которые обладают вышеуказанными свойствами [2, 7, 10, 11].

В главе 4 качественно исследованы и проинтегрированы два модельных варианта плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде, которые описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Такие случаи движения предполагают наличие некоторой связи в системе (а именно, в одном случае величина  $|v| = v$  постоянна со временем, в другом — скорость центра масс как вектор постоянна) [186, 187]. Такие системы являются относительно структурно устойчивыми (относительно грубыми) и топологически эквивалентными системе, описывающей закрепленный маятник, помещенный в поток набегающей среды. Указан дополнительный первый интеграл в системе, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки после ее продолжения в комплексную область) функцией фазовых переменных и выражающейся через элементарные функции. Более того, фазовый цилиндр  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  (или  $R^2\{\alpha, \omega\}$ ) квазискоростей имеет интересную топологическую структуру разбиения на траектории. На цилиндре имеются две области (замыкание которых и есть фазовый цилиндр) с совершенно различным характером траекторий (см. ил. 2).

Первая область — колебательная или финитная (она односвязна (ил. 1—5)) — сплошь заполнена траекториями следующего типа. Почти любая такая траектория начинается в отталкивающейся точке  $(2\pi k, 0)$  и кончается в притягивающей  $((2l+1)\pi, 0)$ ,  $l, k \in Z$ . Исключение лишь составляют точки покоя  $(\pi k, 0)$ , а также сепаратрисы, которые либо выходят из отталкивающих точек  $(2\pi k, 0)$  и входят в седла  $S_{2k-1}$  и  $S_{2k}$ , либо выходят из седел  $S_{2k}$  и  $S_{2k+1}$  и входят в притягивающие точки  $((2k+1)\pi, 0)$ . Здесь

$$S_k = \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^k \beta \right).$$

Вторая область — вращательная (она, вообще говоря, многосвязна) — сплошь заполнена вращательными движениями подобно вращениям на фазовой плоскости математического маятника. Данные фазовые траектории огибают фазовый цилиндр и являются на нем периодическими. Хотя рассматриваемые динамические системы и неконсервативны, во вращательной области ее фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  (или  $R^2\{\alpha, \omega\}$ ) они допускают сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним.

Сами ключевые сепаратрисы являются границами областей, в каждой из которых движение имеет различный характер. Так в колебательной области, содержащей притягивающие и отталкивающие точки покоя, почти все траектории имеют в качестве предельных множеств аттракторы и репеллеры. Следовательно, не существует даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью инвариантной меры в данной области.

Иначе обстоит дело с областью, сплошь заполненной вращательными движениями. Как показала в своей дипломной работе В. В. Журавлева (1988 г.), существует гладкая функ-

ция, являющаяся плотностью инвариантной меры в области, сплошь заполненной периодическими траекториями, не стягиваемыми по фазовому цилиндру в точку [180, 186].

Задача плоской динамики твердого тела, описываемая системами с переменной диссипацией с положительным средним, качественно исследована в главе 5. Это наиболее интересная в прикладном отношении задача — о свободном торможении тела. Получены новые семейства топологически неэквивалентных фазовых портретов. Типичные портреты семейства — (абсолютно) грубы. А вот «критические» фазовые портреты (если их рассматривать не на цилиндре, а на плоскости) являются негрубыми, причем бесконечной степени (и абсолютной, и относительной) негрубости [297, 298].

Проведена классификация множества параметров системы по отношению к определенному типу ее фазового портрета. При этом перестройки топологического типа фазового портрета носят вырожденный (по причине бесконечной степени негрубости) характер [260, 262].

В главе 6 некоторые результаты плоской динамики переносятся на пространственный случай, в связи с чем подробно ставится *пространственная задача*. В частности, найден полный список интегралов в задаче о пространственном движении динамически симметричного закрепленного твердого тела, помещенного в поток набегающей среды. Данная система с переменной диссипацией с нулевым средним топологически эквивалентна пространственному движению твердого тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело наложена некоторая связь. Пространственное движение твердого тела в сопротивляющейся среде, при котором центр масс совершает прямолинейное равномерное движение, также представляет собой динамическую систему с переменной диссипацией с нулевым средним. Ее качественное исследование позволяет предъявить удобную пространственную систему сравнения для исследования многих систем с переменной диссипацией с ненулевым средним [170, 179, 202, 205, 207, 276].

В главе 7 получено семейство фазовых портретов в задаче о пространственном свободном торможении тела в сопротивляющейся среде. Основной прикладной результат — неустойчивость прямолинейного поступательного торможения (т.е. движения с нулевыми углом атаки и угловой скоростью). В данной главе развивается техника исследования окрестности сингулярного положения равновесия, т.е. такого, в котором правые части динамических систем доопределяются лишь по непрерывности. К примеру, при малых углах атаки и угловых скоростях (т.е. в окрестности пространственного прямолинейного поступательного торможения) у правой части системы имеется особенность  $1/\alpha$  (здесь  $\alpha$  — угол атаки при движении твердого тела в сопротивляющейся среде). Эта трудность преодолевается особым построением функции Ляпунова [228].

Получено аналогичное плоскопараллельной динамике (см. главу 5) семейство трехмерных фазовых портретов.

В главе 8 обсуждаются некоторые следствия введения слагаемых, характеризующих вращательную производную момента аэрогидродинамических сил по угловой скорости. В задаче о плоскопараллельном свободном торможении тела в среде на базе нелинейных уравнений исследуется устойчивость прямолинейного поступательного торможения при наличии линейного демпфирующего момента. Показано, что в рамках рассматриваемой модели в принципе могут возникнуть автоколебания, соответствующие предельным циклам, которые рождаются из слабого фокуса (известная бифуркация Андронова-Хопфа). Последний аспект является *возможным положительным ответом* на главный вопрос нелинейного анализа — может ли начало координат на плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  (или  $R^2\{\alpha, \omega\}$ ) стать устойчивым (что эквивалентно устойчивости прямолинейного поступательного торможения по части переменных) [4, 23, 136, 166, 188].

Если в первых главах показано, что для однородных круговых цилиндров, движущихся в воде, прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах таких цилиндров, и это связано,

## Введение

---

по-видимому, с движением цилиндров именно в воде, когда демпфирование со стороны воды *незначительно*, что не позволяет говорить об устойчивости исследуемого режима, то для цилиндров, имеющих внутри себя полость, при некоторых условиях возможно достижение названной устойчивости.

Таким образом, учет вращательных производных при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: *при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний. Причем для круговых цилиндров с полостью при некоторых условиях возможно возникновение устойчивых, а при некоторых — неустойчивых автоколебаний!*

В задаче о движении тела в среде при наличии некоторой связи проводится полный нелинейный анализ динамических систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в пространстве квазискоростей [188]. Такие системы также обладают свойством (абсолютной) грубости. Приведен список типичных глобальных фазовых портретов на фазовом цилиндре после перестроек фазовых портретов аналогичных задач, которые исследовались в предыдущих главах книги. Интересно, что в данном случае возможно возникновение стационарных режимов, при которых угол атаки лежит в интервале  $(0, \pi/2)$ , т.е. данные стационарные режимы могли бы реализоваться до наступления так называемого *бокового замыка*.

Данная глава открывает *новый этап* исследовательских работ по нелинейному анализу движения тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности при учете вращательных производных момента. Результаты, полученные в ней, позволяют сделать главный вывод о том, что прямолинейное поступательное торможение тела (невозмущенное движение) в принципе может стать устойчивым.

## **ГЛАВА 1. Методика определения параметров воздействия среды на тело в условиях квазистационарности**

---

*В построенной математической модели торможения твердого тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании в условиях квазистационарности режим прямолинейного поступательного торможения, как правило, неустойчив. Это позволило разработать достаточно простую методику экспериментального определения параметров воздействия среды на тело. Приводится пример использования этой методики для тела цилиндрической формы: задача о входе в воду кругового цилиндра.*

*Данное исследование составляет ту часть, которая посвящена изучению линейной модели взаимодействия (т.е. взаимодействия при малых углах атаки). Как указано во введении, в дальнейшей работе в основном ограничимся распространением модели на нелинейный случай, описываемый системой (0.1)–(0.3). Поэтому в конце главы будут получены нелинейные динамические системы, описывающие несколько вариантов движения тела. Такие системы являются системами с переменной диссипацией.*

### **§ 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ**

---

В данной главе исследуются линеаризованные уравнения движения тела в среде возле прямолинейного поступательного торможения (невозмущенного движения). Напомним, что в [71, 159] уже разобран вопрос об устойчивости прямолинейного поступательного торможения свободного тела. Исследование проведено именно на базе линеаризованных уравнений. Показано, что неустойчивость такого движения по части пе-

ременных иногда связана с раскачкой угловых колебаний тела. Однако экспериментально обеспечить равномерное движение тела затруднительно. Поэтому задача о торможении тела представилась более удобной для экспериментальной проверки эффекта раскачки. Предварительные исследования [70] позволили его обнаружить и показали, что для лучшего количественного совпадения расчетных и экспериментальных траекторий необходимо дополнить квазистатическую модель еще одним параметром — вращательной производной момента гидродинамических сил по угловой скорости тела. Этот параметр обычно вносит в модель диссипацию, однако здесь она оказалась недостаточной, чтобы подавить эффект раскачки. Данное исследование позволило разработать достаточно простую и эффективную методику определения неизвестных параметров модели.

Наряду с углом  $\varphi$ , определяющим ориентацию тела на плоскости, вполне естественно ввести ординату точки  $D_1$  (рис. 0.1) в неподвижной системе координат, т.е. боковое смещение  $a$  как функцию натурального безразмерного параметра  $\tau$ . Пара функций  $(\varphi(\tau), a(\tau))$  однозначно определяет положение тела на плоскости в линейном приближении.

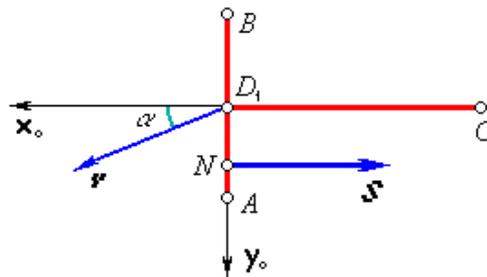


Рис. 0.1

Боковое смещение  $a(\tau)$  при условии, что  $a(0) = 0$ , можно определить по формуле

$$a(\tau) = \int_0^{\tau} (\alpha(q) + \varphi(q)) dq.$$

Конечно, трудно рассчитывать на какое-либо прикладное значение неустойчивого движения. Однако такое движение можно использовать в методических целях, для определения неизвестных параметров, в частности, безразмерных параметров  $k, h$  воздействия среды на тело. К методике определения этих параметров мы переходим в следующем параграфе.

### § 1. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ СРЕДЫ НА ТЕЛО

Уравнения движения центра масс в проекциях на оси  $D_1x_0, D_1y_0$  (рис. 0.1) и уравнение изменения кинетического момента относительно оси Кенига с точностью до линейных по  $\alpha, \Omega$  членов имеют следующий вид (здесь  $\sigma$  — расстояние  $D_1C, I$  — центральный момент инерции):

$$v \dot{\sigma} = -\frac{sv^2}{m}, \quad (1.1)$$

$$v\alpha \dot{\sigma} - \frac{sv^2\alpha}{m} + v\Omega - \sigma\Omega \dot{\sigma} = 0, \quad (1.2)$$

$$I\Omega \dot{\sigma} = sDv^2 \left( k\alpha - \frac{hD\Omega}{v} \right). \quad (1.3)$$

Считая  $v \neq 0$ , с помощью обычного для таких систем введения  $vdt = Dd\sigma_1$  натурального параметра  $\sigma_1$ , переменной  $\omega$  и

очевидной формулы дифференцирования  $D(\cdot) = v \frac{d}{d\sigma_1}(\cdot) = v(\cdot)'$ , приходим к следующей системе:

$$v' = -\frac{sv}{m}D, \quad (1.4)$$

$$I\omega' = \alpha(I - mD^2h) \frac{Ds}{m} + sD^3k\alpha, \quad (1.5)$$

$$\alpha' = -\omega \left( 1 + \frac{s\sigma D^2}{I}h \right) + sD \left( \frac{1}{m} + \frac{k\sigma D}{I} \right) \alpha, \quad (1.6)$$

в которой два последних уравнения отделились от первого и могут быть исследованы самостоятельно (здесь, очевидно,  $\tau = \sigma_1$ ).

Преобразуем эти уравнения: исключив из них  $\alpha$ , вводя угол поворота  $\varphi$  по формуле  $\varphi' = \omega$ , получаем их линейный интеграл в следующей форме:

$$\alpha - \omega \left( \frac{I}{kmD^2} + \frac{\sigma}{D} \right) + \varphi \left( 1 + \frac{\sigma s}{m} + \frac{Is}{km^2D} - \frac{hsD}{km} \right) = b = \text{const},$$

с учетом которого уравнение для угла поворота  $\varphi$  примет вид:

$$I\varphi'' + \varphi' sD \left( D^2h - D\sigma k - \frac{2I}{m} \right) + \varphi sD^3B_1 = ksD^3b = \varphi_* sD^3B_1, \quad (1.7)$$

$$B_1 = k + \frac{k\sigma s}{m} + \frac{Is}{m^2D} - \frac{hsD}{m},$$

$$\varphi_* = \frac{B_1}{kb}.$$

Нетрудно видеть, что оно имеет вид уравнения линейного маятника, при некоторых условиях совершающего колебания около некоторого положения  $\varphi_*$ , определяемого значением  $b$  линейного интеграла.

При достаточно малом  $h$  коэффициент при позиционной составляющей положителен, а коэффициент так называемого приведенного демпфирования отрицателен, что позволяет говорить о неустойчивости решения  $\varphi = \varphi_*$ . Более того, это подтверждает, что в системе производится подкачка энергии со стороны среды или, другими словами, зависимость обобщенных сил от скоростей носит *антидиссипативный характер*.

Напротив, при достаточно большом  $h$  решение  $\varphi = \varphi_*$  можно сделать неустойчивым и к тому же теряющим свой колебательный характер, поскольку коэффициент позиционной составляющей становится отрицательным.

*Но главное, что в принципе при некоторых конечных «промежуточных» значениях  $h$  допустима устойчивость решения  $\varphi = \varphi_*$ , поскольку оба вышеупомянутых коэффициента могут оказаться положительными.*

В Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова (ср. с [160]) В. А. Ерошиным и В. М. Макарашиным проведены эксперименты по регистрации движения в воде двух однородных круговых цилиндров со следующими параметрами:

$$m = 178 \text{ г}, 2\sigma = 35 \text{ мм}, D = 30 \text{ мм}, \quad (1.8)$$

(стальная модель)

$$m = 178 \text{ г}, 2\sigma = 60 \text{ мм}, D = 30 \text{ мм}, \quad (1.9)$$

(титановая модель)

при скоростях  $v \cong 150 - 250 \text{ м/сек}$  (для обеих цилиндрических моделей  $c_x = 0,82$ ). Регистрация осуществлялась путем фотографирования цилиндра в некоторых точках траектории на интервале  $0 < \tau < 45$ . С фотографии снимались продольное смещение  $\tau_i$  точки  $D_1$  цилиндра вдоль линии  $L_1$  (располагающейся в неподвижном пространстве) невозмущенного движения, поперечное смещение  $a_i = a(\tau_i)$  точки  $D_1$  и угол  $\varphi_i = \varphi(\tau_i)$  ориента-

## **Глава 1. Методика определения параметров воздействия...**

---

ции оси цилиндра относительно линии  $L_1$ . Экспериментальные результаты изображены точками на рис. 1.1—1.10 (для стальной модели) и на рис. 1.11—1.20 (для титановой).

§ 1. Методика определения неизвестных...

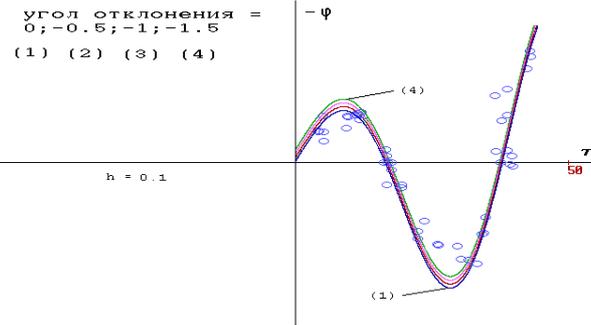


Рис. 1.1а

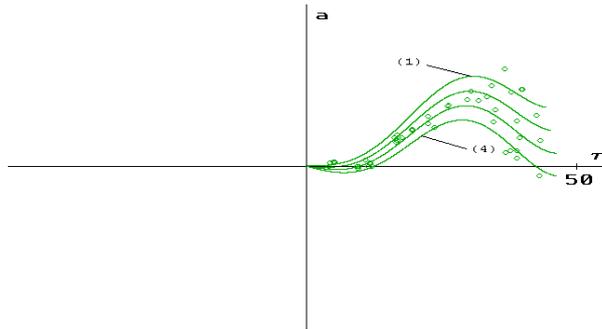


Рис. 1.1б

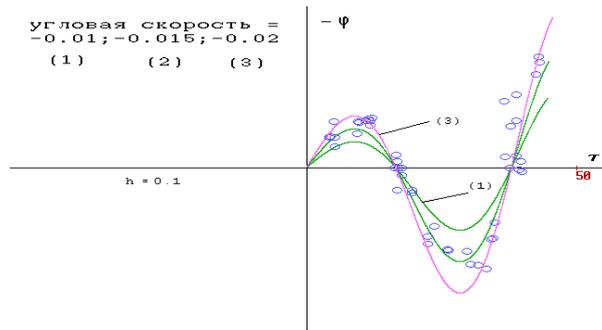


Рис. 1.2а

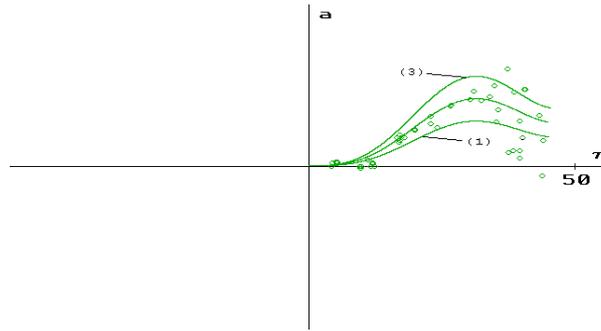


Рис. 1.2б

угол атаки =  
1; 0.5; 0; -0.5  
(1) (2) (3) (4)

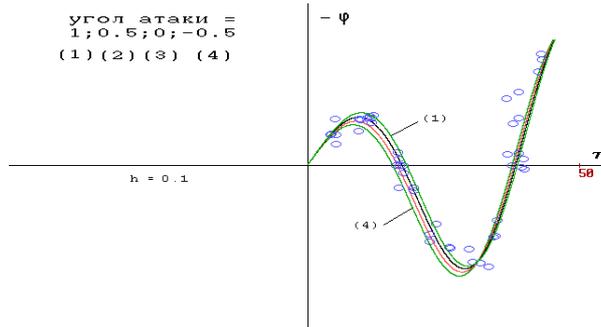


Рис. 1.3а

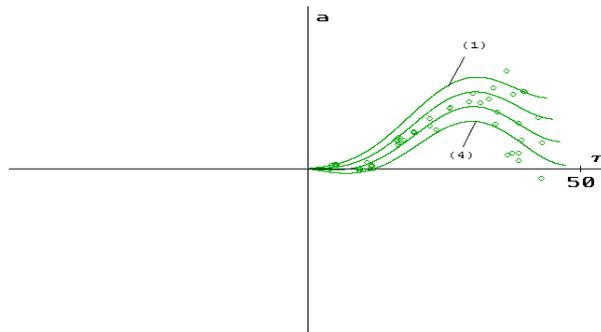


Рис. 1.3б

§ 1. Методика определения неизвестных...

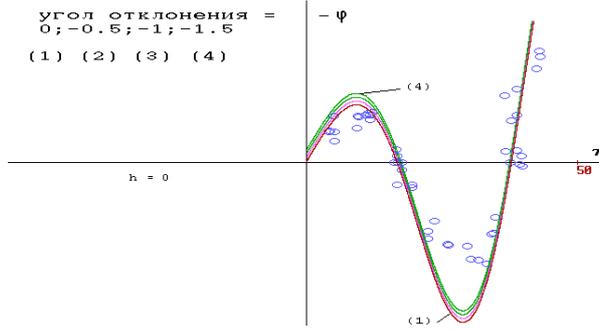


Рис. 1.4а

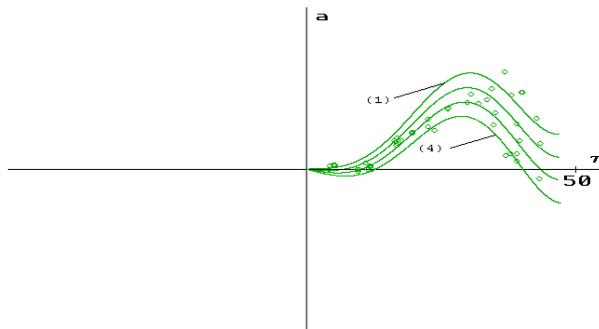


Рис. 1.4б

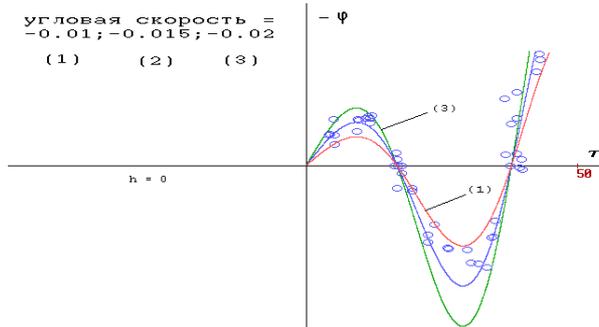


Рис. 1.5а

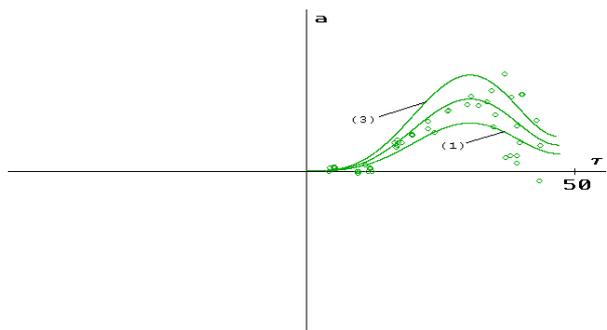


Рис. 1.5б

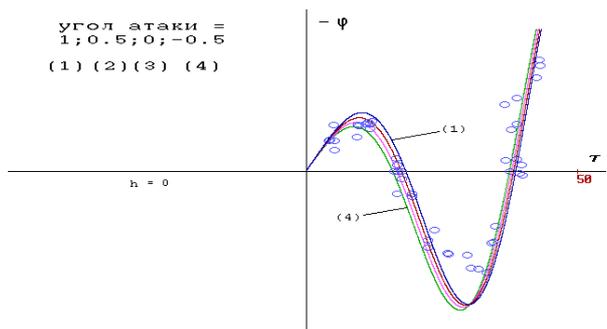


Рис. 1.6а

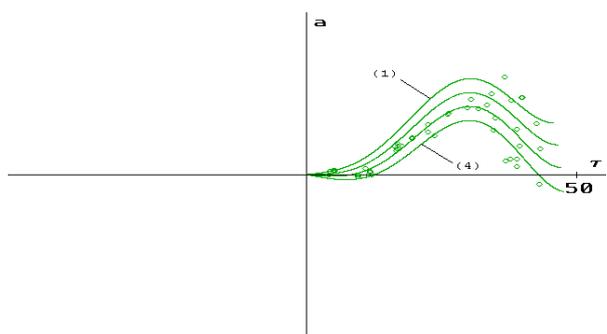


Рис. 1.6б

§ 1. Методика определения неизвестных...

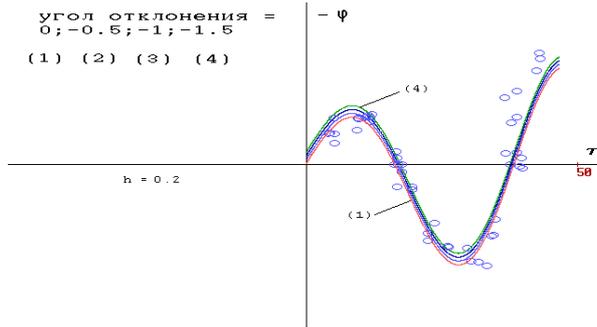


Рис. 1.7а

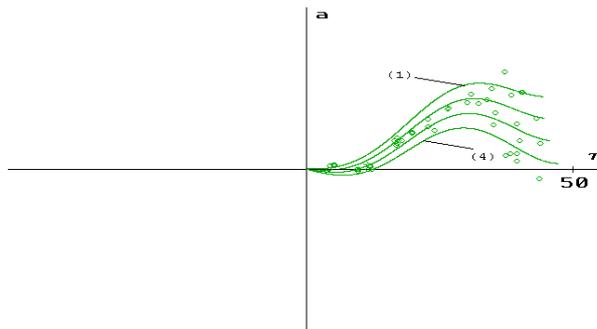


Рис. 1.7б

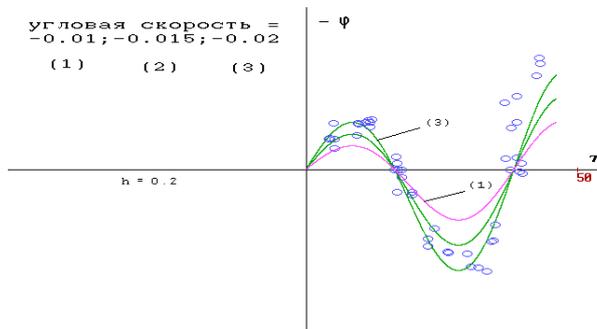


Рис. 1.8а

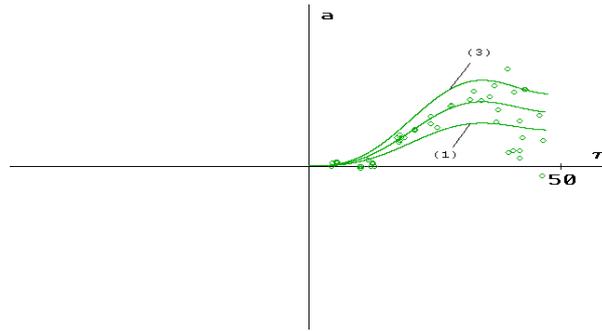


Рис. 1.8б

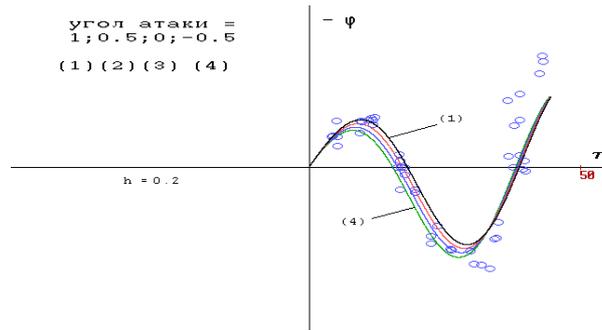


Рис. 1.9а

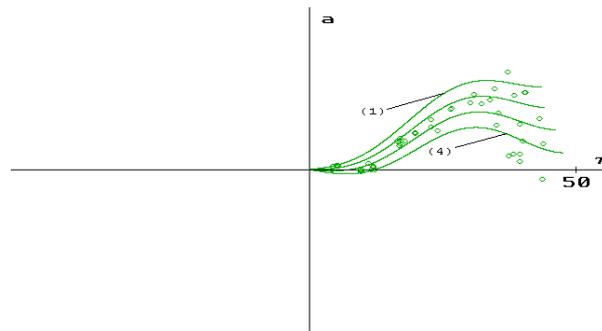


Рис. 1.9б

§ 1. Методика определения неизвестных...

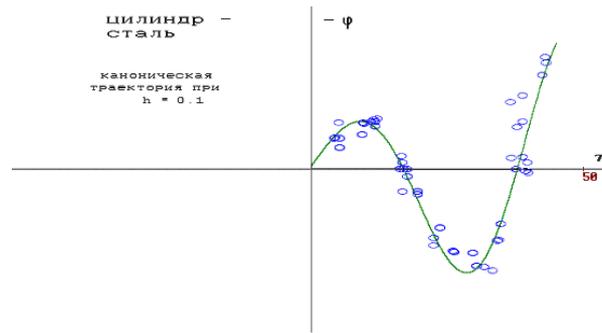


Рис. 1.10а

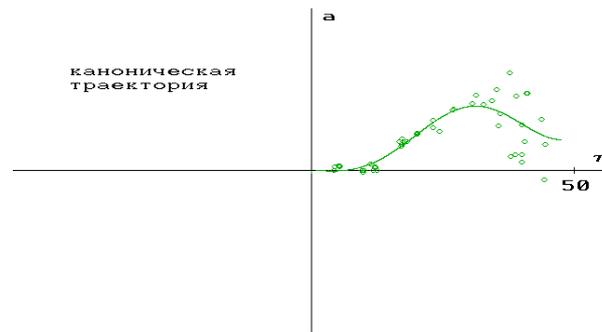


Рис. 1.10б

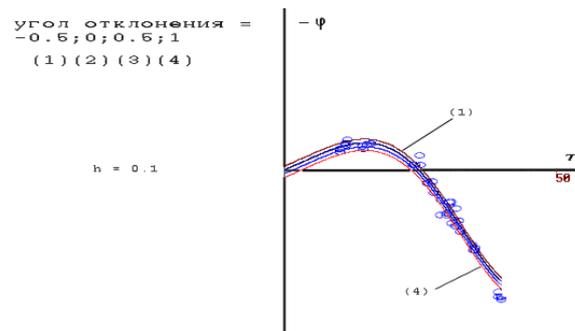


Рис. 1.11а

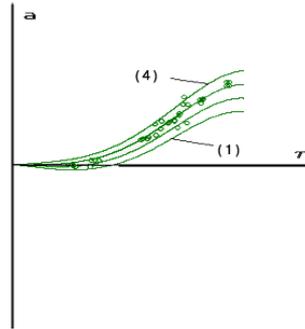


Рис. 1.11б

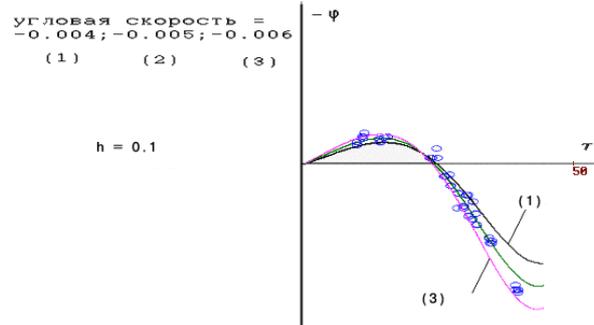


Рис. 1.12а

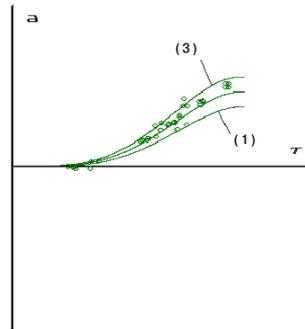


Рис. 1.12б

§ 1. Методика определения неизвестных...

угол атаки =  
0.2; -0.5; -1.2  
(1) (2) (3)

$h = 0.1$

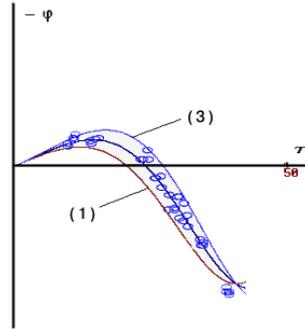


Рис. 1.13а

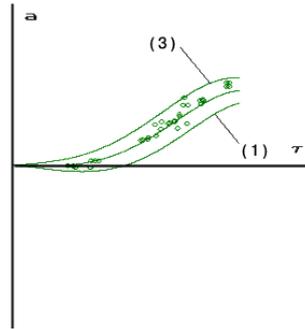


Рис. 1.13б

угол отклонения =  
-0.5; 0; 0.5; 1  
(1) (2) (3) (4)

$h = 0$

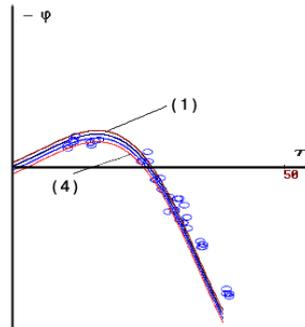


Рис. 1.14а

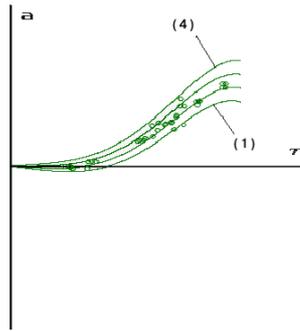


Рис. 1.14б

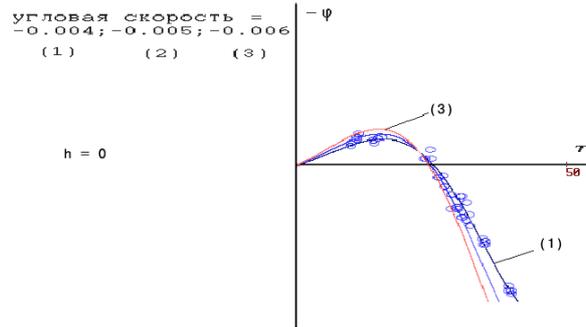


Рис. 1.15а

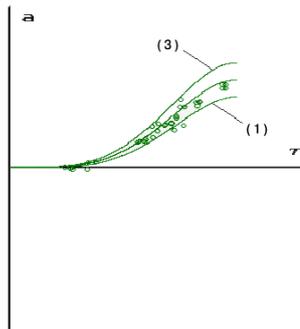


Рис. 1.15б

§ 1. Методика определения неизвестных...

угол атаки =  
0.2; -0.6; -1.2  
(1) (2) (3)

$h = 0$

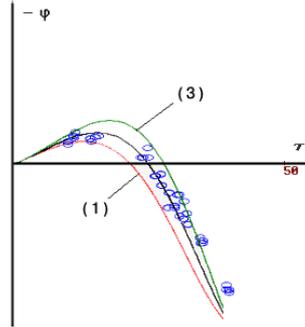


Рис. 1.16а

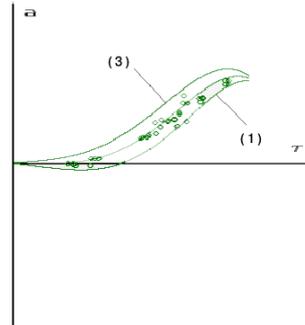


Рис. 1.16б

угол отклонения =  
-0.6; 0; 0.6; 1  
(1) (2) (3) (4)

$h = 0.2$

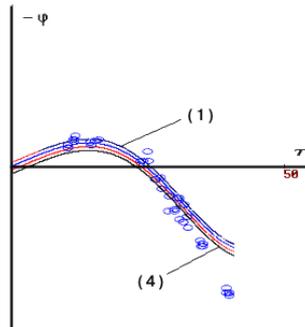


Рис. 1.17а

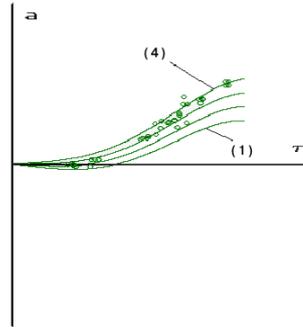


Рис. 1.17б

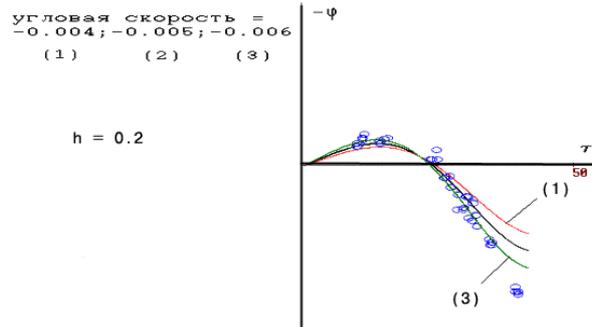


Рис. 1.18а

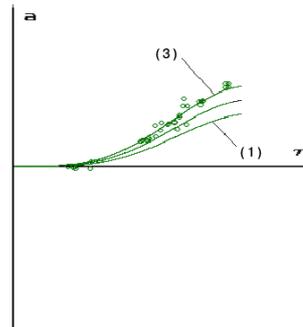


Рис. 1.18б

§ 1. Методика определения неизвестных...

УГОЛ АТАКИ =  
0.2; -0.5; -1.2  
(1) (2) (3)

$h = 0.2$

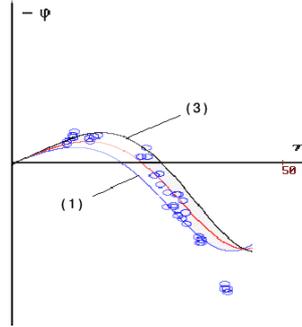


Рис. 1.19а

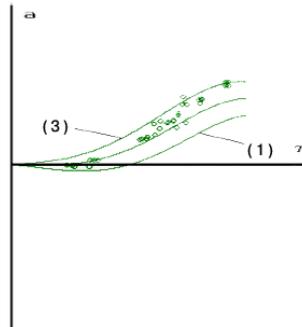


Рис. 1.19б

ЦИЛИНДР  
- ТИТАН

каноническая  
траектория при  
 $h = 0.1$

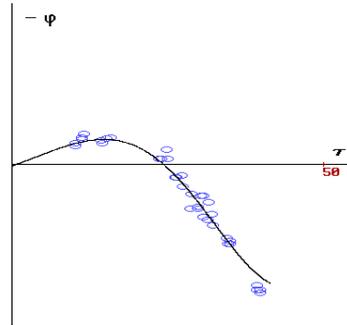


Рис. 1.20а

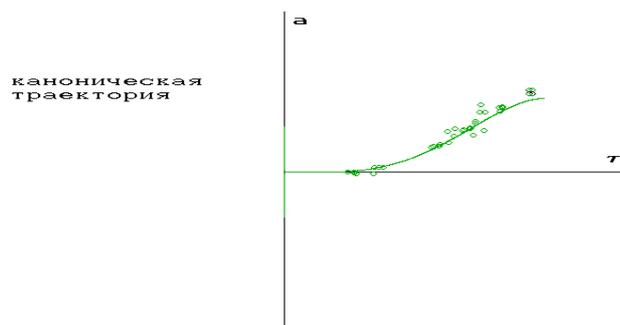


Рис. 1.20б

Номинальные начальные условия для обеих моделей выбираются в следующем виде:  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\alpha_0 = \frac{\omega_0 \sigma}{D}$ . Экспериментальную зависимость  $\varphi(\tau_i)$  можно интерпретировать, как колебания около некоторого отрицательного значения с возрастающей амплитудой, что может служить проявлением описанной выше неустойчивости поступательного движения. Кроме того, разброс экспериментальных точек, особенно по боковому смещению, позволяет предположить не только погрешность измерений, но и ошибки в реализации начальных условий. Поэтому для обработки использовался прием так называемых «накрывающих пучков».

Сущность этого приема в применении к данной задаче состоит в том, что экспериментальные данные, обозначаемые на рис. 1.1—1.20 точками, покрываются пучками кривых, являющихся решениями соответствующего дифференциального уравнения при различных начальных условиях. При этом начальные условия выбираются так, чтобы удовлетворительно накрыть всю сеть экспериментальных точек.

Как и в [70] для параметра  $k$  принята оценка  $k=0,1$ , а для начальных условий по углам атаки и отклонения — около  $0^\circ$ . Построены три группы траекторий для каждой модели при

различных начальных условиях для  $h = 0$ ,  $h = 0,1$ ,  $h = 0,2$ . При этом угловая скорость выбиралась в пределах  $10^{-2} - 10^{-3}$ .

В каждой такой группе содержатся пучки траекторий для различных начальных условий. Так, например, для стальной модели на рис. 1.1, 1.4, 1.7 ( $h=0,1; 0; 0,2$ , соответственно) показаны пучки интегральных траекторий, отвечающих следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = 0^\circ; -0,5^\circ; -1^\circ; -1,5^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,02$ ;  $\alpha_0 = 0^\circ$ . На рис. 1.2, 1.5, 1.8 ( $h=0,1; 0; 0,2$ , соответственно) — следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = 0^\circ$ ;  $\alpha_0 = 0^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,01; -0,015; -0,02$ . На рис. 1.3, 1.6, 1.9 ( $h=0,1; 0; 0,2$ , соответственно) — следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = 0^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,017$ ;  $\alpha_0 = 1^\circ; 0,5^\circ; 0^\circ; -0,5^\circ$ .

Аналогичным образом, для титановой модели на рис. 1.11, 1.14, 1.17 ( $h=0,1; 0; 0,2$ , соответственно) показаны пучки интегральных траекторий, отвечающих следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = -0,5^\circ; 0^\circ; 0,5^\circ; 1^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,005$ ;  $\alpha_0 = -0,5^\circ$ . На рис. 1.12, 1.15, 1.18 ( $h=0,1; 0; 0,2$ , соответственно) — следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = 0,3^\circ$ ;  $\alpha_0 = -0,5^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,004; -0,005; -0,006$ . На рис. 1.13, 1.16, 1.19 ( $h = 0,1; 0; 0,2$ , соответственно) — следующим начальным условиям:  $\varphi_0 = 0,3^\circ$ ;  $\omega_0 = -0,005$ ;  $\alpha_0 = 0,2^\circ; -0,5^\circ; -1,2^\circ$ .

Изображения на рис. 1.1б—1.9б (для стальной модели) и рис. 1.11б—1.19б (для титановой модели) показывают, что все три пучка удовлетворительно (по крайней мере, наглядно) «накрывают» экспериментальные точки  $a(\tau_i)$ . В то же время степень соответствия для  $\varphi(\tau_i)$  (рис. 1.1а—1.9а и рис. 1.11а—1.19а) различна для различных значений  $h$ , что позволяет принять в качестве предварительной оценки значение  $h_{экс} = 0,1$ . Для дополнительной иллюстрации приведем (рис. 1.10 для стальной модели и рис. 1.20 для титановой) расчетную траекторию для  $k = 0,1$ ,  $h = 0,1$  с начальными условиями  $\varphi_0 = -0,3^\circ$ ,

$\omega_0 = -0,017$ ,  $\alpha_0 = -0,12^\circ$  для стальной и  $\varphi_0 = 0,3^\circ$ ,  $\omega_0 = -0,005$ ,  $\alpha_0 = -0,5^\circ$  для титановой модели, соответственно.

Следует также заметить, что разброс начальных условий, позволяющий «накрыть» экспериментальные точки «сетью» решений соответствующего дифференциального уравнения, как по углам атаки и отклонения, так и по начальной скорости, лежит в пределах того же порядка, что и начальные условия для так называемых «канонических» траекторий, показанных на рис. 1.10, 1.20 [73, 74].

Указанные выше параметры воздействия среды на тело несколько отличаются от тех, которые были приведены в [70] и которые определялись по относительно малому количеству точек без учета возможного разброса начальных возмущений.

Фактически при проведении каждого эксперимента снималась информация лишь об одной точке. Проводя эксперимент повторно, получалась информация, хотя и близкая к предыдущей, но отличная от нее. Тем самым скопление большого количества экспериментальных точек хотя и создает более полное представление о действительной траектории движения, но создает некоторые трудности в определении как действительных начальных условий движения, так и безразмерных параметров воздействия среды на тело. Для преодоления таких трудностей было бы целесообразно для каждой экспериментальной траектории получать информацию хотя бы о двух точках, которые будут отвечать одним и тем же начальным условиям движения.

В заключение отметим, что уже на базе линейных уравнений движения тела показано, что неустойчивый характер прямолинейного поступательного торможения можно использовать для построения методики определения параметров взаимодействия тела со средой. Но эффект раскачки угловых колебаний тела приводит к необходимости учета нелинейных членов в полной системе уравнений. Поэтому в следующем параграфе приводятся нелинейные динамические системы, описывающие различные варианты движения тела.

**§ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ,  
ОПИСЫВАЮЩИЕ РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ  
ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СРЕДЕ**

Выше исследовалась линейная модель взаимодействия тела со средой. Как указано во введении, в основном ограничимся нелинейной моделью взаимодействия, описываемой системой (0.1)—(0.3) при условиях (0.4)—(0.5) (или (0.8)).

Как уже отмечалось, одной из целей настоящего исследования является изучение конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения по части переменных  $(\alpha, \Omega)$  и нахождение такой пары  $(v_N, s)$  функций воздействия среды, которая бы «отлавливала» возможные автоколебания в системе.

Для начала, при тех же предположениях на характер взаимодействия тела со средой, выделим такой более общий класс задач, при котором на тело, наряду с силой воздействия среды, приложена следящая сила (назовем ее *силой тяги*)  $T$  по прямой  $CD_1$  (рис. 0.1). Одна из таких задач уже решалась В. А. Ерошиным, В. А. Приваловым и В. А. Самсоновым при условии, когда тяга постоянна, и была показана неустойчивость прямолинейного поступательного движения по  $\alpha$  и  $\Omega$ .

Отметим случаи движения, которые в дальнейшем подверглись обстоятельному анализу:

1)  $V_C = \text{const}$  (если  $T = -S$ ).

2)  $v \equiv \text{const}$  ( $T = m\sigma\Omega^2 + v^2 \left[ s(\alpha) - \frac{m\sigma}{I} F(\alpha, \omega) \text{tg}\alpha \right]$ ), имеет

лишь *методическое* значение.

**Заметим, что при выполнении условия**

$$T = \tau_1(\alpha, \omega)v^2 + \tau_2(\alpha, \omega)v\Omega + \tau_3(\alpha, \omega)\Omega^2,$$

как и в случае свободного торможения, возможно отщепление независимой подсистемы от полной системы динамических уравнений.

Действительно, система (0.1)—(0.3) является эйлеровской однородной системой по части квазискоростей  $(\Omega, v)$  степени однородности 2, поскольку после замены независимого переменного (времени  $t$ ) по формуле  $dq = v dt$ ,  $v \neq 0$  (ср. с введением) получаем новую систему, эквивалентную системе (0.1)—(0.3) (в которой, в свою очередь, в правой части первого уравнения появляется величина  $T$  тяги):

$$\varphi' = \omega, \quad (1.10)$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.11)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha) - \bar{\tau}(\alpha, \omega)}{m} \sin \alpha, \quad (1.12)$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.13)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha + \frac{\bar{\tau}(\alpha, \omega) - s(\alpha)}{m} \cos \alpha, \\ \bar{\tau}(\alpha, \omega) = \tau_1(\alpha, \omega) + \tau_2(\alpha, \omega) + \tau_3(\alpha, \omega).$$

В системе (1.11)—(1.13) третьего порядка появляется независимая подсистема (1.12), (1.13) второго порядка, которая может быть рассмотрена самостоятельно на ее фазовом цилиндре.

1. *Движение тела при наличии некоторой связи.* Рассмотрим далее плоскопараллельное движение твердого тела при условии, когда на систему наложена неинтегрируемая связь вида

$$v = v_0 = \text{const}. \quad (1.14)$$

Для достижения этого потребуем, чтобы уравнение (0.1) (в правой части которого будет стоять величина  $\frac{T - s(\alpha)v^2}{m}$ ) удовлетворялось бы тождественно (см. случай движения 2)).

Уравнение (1.14) задает в фазовом пространстве класс поверхностей уровня связи  $\Phi_0 = v = \text{const}$ . Функция же  $T$  есть управление (следящая сила), поддерживающее движение системы при условии (1.14).

При выполнении условия (1.14), в случае (0.8) у системы (0.1)—(0.3) появляется независимая подсистема вида

$$\begin{cases} \alpha^* v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \Omega^* = 0, \\ I \Omega^* = F(\alpha) v^2, \end{cases} \quad (1.15)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$  [152, 154, 155, 185, 188].

Как видно из (1.15), на многообразии

$$O = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda_i, \quad \Lambda_i = \left\{ (\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\} \quad (1.16)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\alpha^*$ . Формально, таким образом, на многообразии  $O$  происходит нарушение теоремы единственности.

Из этого следует, что система (1.15) вне и только вне  $O$  эквивалентна системе

$$\begin{cases} \alpha^* = -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, & A_1 = \frac{\sigma v}{I}, \quad A_2 = \frac{v^2}{I}, \\ \Omega^* = A_2 F(\alpha), \end{cases} \quad (1.17)$$

которую будем исследовать при условии (0.8) (на многообразии  $O$  систему доопределим по непрерывности).

В частности, если выполнено условие (0.9), то система (1.17) примет вид аналитической:

$$\begin{cases} \alpha^* = -\Omega + A_1 \sin \alpha, \\ \Omega^* = A_2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{cases} \quad A_1 = \frac{\sigma v AB}{I}, \quad A_2 = \frac{v^2 AB}{I}. \quad (1.18)$$

Нарушение теоремы единственности для системы (1.15) на многообразии  $O$  происходит в следующем смысле: почти через любую точку из  $O$  проходит неособая фазовая траектория системы (1.15), пересекая  $O$  под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой.

Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения  $T$  тяги. Покажем это.

Для поддержания связи вида (1.14) необходимо выбрать значение  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + v^2 \left[ s(\alpha) - \frac{m\sigma}{I} F(\alpha, \omega) \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (1.19)$$

(На многообразии  $O$  доопределим по непрерывности.)

Пусть  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} = L$ . Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только

тогда, когда  $\left| F' \left( \frac{\pi}{2} \right) \right| < +\infty$ . При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  нужная величина тяги

найдется из равенства

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = m\sigma\Omega^2 - \frac{v^2 m \sigma L}{I},$$

где  $\Omega$  — произвольно.

С другой стороны, поддерживая с помощью тяги вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать тягу в виде

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \frac{v^2 m}{R_0}, \quad (1.20)$$

где  $R_0$  — расстояние  $CW$ .

Равенства (1.19) и (1.20) определяют, вообще говоря, различные значения  $T$  для почти всех точек многообразия  $O$ , что и доказывает замечание.

2. Движение с постоянной скоростью центра масс. Изучаемая динамическая система (0.1)—(0.3) может описывать также такой класс движений, при котором скорость центра масс постоянна как вектор [153, 154, 185, 187]. Последнее достигается, в частности, выбором управляющей тяги из условия (см. случай движения 1))

$$T \equiv -S. \quad (1.21)$$

Условие (1.21) также является достаточным условием понижения порядка системы (0.1)—(0.3), и ее можно преобразовать к виду

$$\varphi' = \omega, \quad (1.22)$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.23)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha, \quad (1.24)$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.25)$$

где  $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha$ .

Условие (1.22) (как и (1.10)) является новым кинематическим соотношением, а система (1.23)—(1.25) (как и (1.11)—(1.13)) — новой полной системой, рассмотренной в динамическом пространстве квазискоростей.

Функция  $F$ , входящая в правую часть системы (1.23)—(1.25), по-прежнему удовлетворяет условию (0.8).

В частности, если выполнено условие (0.9), то система (1.23)—(1.25) примет следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \quad (1.26)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma AB}{I} \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha, \quad (1.27)$$

$$\omega' = \frac{AB}{I} \sin \alpha \cos \alpha - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.28)$$

где  $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma AB}{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha$ .

3. *Свободное торможение твердого тела.* Вернемся к рассмотрению свободного торможения тела. Это, означает, что

$$T \equiv 0. \quad (1.29)$$

Условие (1.29) также является достаточным для понижения порядка системы (0.1)—(0.3), которую можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \omega, \\ v' &= v \Psi(\alpha, \omega), \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (1.31)$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.32)$$

где  $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$ .

Уравнения (1.31), (1.32) образуют замкнутую подсистему второго порядка. При этом считаем, что функции  $F, s$ , входящие в правую часть системы (1.30)—(1.32), удовлетворяют условиям (0.8), (0.5).

В частности, если выполнены условия (0.9), (0.7), то система (1.30)—(1.32) примет следующий вид:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.33)$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma AB}{I} \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1.34)$$

$$\dot{\omega} = \frac{AB}{I} \sin \alpha \cos \alpha - \omega \Psi(\alpha, \omega), \quad (1.35)$$

где  $\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma AB}{I} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha$ .

4. *Нелинейный приведенный осциллятор.* Рассмотрим для примера системы вида (1.17) на плоскости. Пусть  $g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$  (на многообразии  $O$  доопределим по непрерывности). В силу (0.8) функция  $g$  — достаточно гладкая.

После регулярной в  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  замены

$$y_2 = -\Omega + A_1 g(\alpha), \quad y_1 = \alpha$$

фазовые траектории системы (1.17) эквивалентны траекториям следующей системы:

$$y_1^\bullet = y_2, \quad y_2^\bullet = -A_2 g(y_1) \cos y_1 + A_1 y_2 g'(y_1),$$

которая описывает нелинейный маятник с переменной диссипацией. Движение происходит под действием двух сил: потенциальной

$$A_2 g(y_1) \cos y_1$$

и линейной по скорости  $y_2$ , коэффициент  $A_1 g'(y_1)$  которой, вообще говоря, меняет знак.

В тех полосах на фазовом цилиндре, где коэффициент  $A_1 g'(y_1)$  имеет строго положительный знак, происходит подкачка энергии со стороны среды. В тех же полосах, где коэффициент силы, линейной по скорости  $y_2$ , имеет строго отрицательный знак, сила, действующая на тело, рассеивает энергию, заставляя маятник тормозить свое движение.

Последние замечания показывают, что мы имеем дело с диссипативной системой с переменной диссипацией (а точнее, с системой, имеющей диссипацию переменного знака). И во-

обще, фазовая плоскость складывается в объединение чередующихся областей, в каждой из которых присутствует диссипация только одного знака.

5. *Диссипативные системы и системы с переменной диссипацией с нулевым и ненулевым средним.* Системы (1.17), (1.18), (1.24), (1.25), (1.27), (1.28) являются системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Дать достаточно общее и строгое определение таких систем нелегко. В настоящей работе будем определять такие системы следующим образом (см. введение). Система на фазовом цилиндре имеет переменную диссипацию с нулевым средним, если в среднем по цилиндру диссипация равна нулю. Например, для системы (1.18) ее фазовый цилиндр является замыканием объединения полос

$$\Pi = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$$

и

$$\Pi' = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right\},$$

в каждой из которых диссипация в системе имеет строго определенный знак: в полосе  $\Pi$  — отрицательный (т. е. происходит подкачка энергии), а в полосе  $\Pi'$  — положительный (т. е. происходит рассеяние энергии). Отличительным признаком подкачки или рассеяния энергии в данном случае является знак дивергенции векторного поля системы. Действительно, указанная дивергенция для системы (1.18) равна  $A_1 \cos \alpha$  и в полосе  $\Pi$  положительна, что объясняет «расширение» фазового объема в силу фазового потока, а в полосе  $\Pi'$  отрицательна, что объясняет его «сокращение» (см. также главу 4). В среднем же по цилиндру дивергенция равна нулю, так как

$$A_1 \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = 0.$$

Более общо, для системы (1.17) также имеем выполнение равенства

$$A_1 \int_0^{2\pi} \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha} d\alpha = 0.$$

Ниже будет показано, что перечисленные системы имеют дополнительные симметрии, поэтому их фазовые цилиндры и являются объединением чередующихся полос, в каждой из которых имеется диссипация только одного знака.

Системы же (1.31),(1.32) и (1.34),(1.35) не обладают описанным свойством, несмотря на то, что на их фазовых цилиндрах действительно имеется диссипация разных знаков. В среднем же по фазовому цилиндру для названных систем диссипация строго положительна (см. также главу 5), поэтому данные системы являются системами с переменной диссипацией *с ненулевым средним*.

В дальнейших главах переходим к построению качественной методики исследования полученных динамических систем. Аналогичные системы, полученные из пространственной динамики, исследуются методами многомерной качественной теории. Исследование систем пространственной динамики (ввиду его сложности) выносится в главы 6 и 7.

## **ГЛАВА 2. Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений**

---

Во второй главе затрагиваются некоторые вопросы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, от решения которых зависит исследование как (чисто) диссипативных динамических систем, так и систем с переменной диссипацией, рассматриваемых ниже и возникающих в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Рассматриваются такие проблемы как бифуркация рождения предельного цикла из слабого фокуса; наличия замкнутых траекторий, в том числе, таких, которые охватывают фазовый цилиндр; качественные вопросы теории топографических систем Пуанкаре и более общих систем сравнения; проблемы существования и единственности траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки для систем на плоскости; элементы качественной теории монотонных векторных полей, а также вопросы существования семейств длиннопериодических и устойчивых по Пуассону траекторий. Исследуются также возможности перенесения теории двумерных топографических систем Пуанкаре и систем сравнения на многомерный случай (см. также [168, 250, 251, 266, 291, 300]).

В заключение предлагается некоторая простая методика интегрирования некоторых классов неконсервативных систем в элементарных трансцендентных (в смысле теории функций комплексного переменного) функциях.

### **§ 3. ЗАМЕЧАНИЯ ПО БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА ПУАНКАРЕ-АНДРОНОВА-ХОПФА**

---

1. *Общие теоремы о рождении предельного цикла.* Цель этого параграфа – предложить достаточно простое, хотя и не

исчерпывающее, изложение того, что обычно называют бифуркацией рождения предельного цикла из слабого фокуса, а также ее приложений к задачам динамики твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Исторически это восходит к работам А. Пуанкаре [142–144] (1892 г.). Эта тема также обсуждалась А. А. Андроновым [4, 5], начиная с 1930 г. Основные же работы Хопфа по данному вопросу появились в 1942 г. Хотя термин «бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа» (сюда иногда даже включают Фридрихса) был бы более точным, в западной литературе более распространен термин «бифуркация Хопфа». Причиной этого является то, что самый существенный вклад Хопфа – обобщение результата с двумерного случая на высшие размерности.

Бифуркация рождения цикла – это появление периодических орбит («автоколебаний») из устойчивой неподвижной точки при прохождении параметра через критическое значение. Хотя в наше время доказана возможность применения бифуркационной теории Хопфа к нелинейным параболическим уравнениям с частными производными, мы целиком и полностью ограничимся применением этой теории к обыкновенным дифференциальным уравнениям на плоскости.

Как было указано ранее, обычно к указанной бифуркации относят бифуркацию рождения устойчивого цикла из слабого асимптотически устойчивого положения равновесия.

**Теорема 2.1 [119, 123, 124, 142, 186].** *Рассмотрим на плоскости автономную систему, заданную достаточно гладкими функциями  $X_1(x_1, x_2, \mu)$ ,  $X_2(x_1, x_2, \mu)$*

$$\begin{aligned}x_1' &= X_1(x_1, x_2, \mu), \\x_2' &= X_2(x_1, x_2, \mu),\end{aligned}\tag{2.1}$$

*зависящую от параметра  $\mu$ . Пусть для любого параметра  $\mu$  система имеет в начале координат неподвижную точку, а  $\lambda_i(\mu)$  ( $i=1,2$ ) – собственные значения линеаризованной сис-*

### § 3. Замечания по бифуркации рождения цикла...

темы в начале координат – комплексно-сопряжены (и чисто мнимы при  $\mu=\mu_0$ ), то пусть

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_i(\mu) \right|_{\mu=\mu_0} > 0 (< 0).$$

При этом предположим, что начало координат при  $\mu=\mu_0$  асимптотически устойчиво.

Тогда:

1)  $\mu=\mu_0$  – точка бифуркации системы.

2) Существует  $\mu_1 < \mu_0$  ( $\mu_1 > \mu_0$ ) такое, что для любого  $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$  ( $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ ) начало координат – устойчивый фокус.

3) Существует  $\mu_2 > \mu_0$  ( $\mu_2 < \mu_0$ ) такое, что для любого  $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$  ( $\mu \in (\mu_2, \mu_0)$ ) начало координат – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с возрастанием (убыванием)  $\mu$  от  $\mu_0$  до  $\mu_2$  как  $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ .

Доказательство этой теоремы (а также более общей) можно найти в [119]. Основная техника, используемая в доказательстве – это метод инвариантных многообразий. Суть доказательства лежит в применении теоремы о неявной функции.

В силу теоремы 2.1 можно сформулировать аналогичную теорему для рождения неустойчивого предельного цикла.

**Теорема 2.2.** Пусть система (2.1) имеет неподвижную точку в начале координат для любого  $\mu$ , а  $\lambda_i(\mu)$  ( $i=1,2$ ) – собственные значения линеаризованной системы – комплексно-сопряжены (и чисто мнимы при  $\mu=\mu_0$ ), то пусть

$$\left. \frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda_i(\mu) \right|_{\mu=\mu_0} < 0 (> 0).$$

При этом предположим, что при  $\mu=\mu_0$  начало координат является отталкивающим положением равновесия.

Тогда:

1)  $\mu = \mu_0$  – точка бифуркации системы.

2) Существует  $\mu_1 < \mu_0$  ( $\mu_1 > \mu_0$ ) такое, что для любого  $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$  ( $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ ) начало координат – неустойчивый фокус.

3) Существует  $\mu_2 > \mu_0$  ( $\mu_2 < \mu_0$ ) такое, что для любого  $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$  ( $\mu \in (\mu_2, \mu_0)$ ) начало координат – устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с возрастанием (убыванием)  $\mu$  от  $\mu_0$  до  $\mu_2$  как  $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ .

Теорему 2.2 можно доказать либо методом, используемым при доказательстве теоремы 2.1, либо сведением системы (2.1) к новой системе при помощи замены независимого переменного  $t \rightarrow -t$  и  $\mu \rightarrow -\mu$ , в которой произойдет рождение устойчивого предельного цикла согласно теореме 2.1.

**Замечание 1.** Теоремы, изложенные выше, существенно связаны с однопараметрическими семействами дифференциальных уравнений. Поэтому никаких равномерных оценок на параметры, при которых происходит бифуркация рождения цикла, вообще говоря, не существует.

Таким образом, если система уравнений зависит от  $m$  параметров, то, вообще говоря, рождение цикла связано лишь с изменением одного параметра при фиксированных остальных  $m - 1$  параметрах.

**Замечание 2.** Основным моментом существования указанной бифуркации является наличие негрубого положения равновесия (но только фокуса – аттрактора или репеллера). Можно привести примеры, когда все условия теоремы выполнены кроме одного: как в линейном, так и в нелинейном случае положение равновесия является центром. Последнее условие и является ключевым в данном вопросе. Оно будет противоречить рождению грубого предельного цикла (ср. с [11]).

### § 3. Замечания по бифуркации рождения цикла...

2. Рождение предельных циклов в задаче о движении тела в среде при наличии неголономной связи. Рассмотрим системы вида (1.17) но с дополнительным слагаемым

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ \Omega' &= A_2 F(\alpha) - h\Omega\end{aligned}\quad (2.2)$$

в полосе  $\Pi = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right\}$ . При  $h=0$  маятниковая система (2.2) совпадает с (1.17). При  $h \neq 0$  в системе присутствует линейный демпфирующий момент [185, 188] (см. также главу 8). Если не оговорено дополнительно, функция  $F$  удовлетворяет условию (0.8).

**Лемма 2.1.** Пусть:

$$1) A_1 > 0, F'(0) > 0, F(-\alpha) = -F(\alpha), F(\epsilon_0) > 0, \forall \epsilon_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$A_1^2 F'(0) - A_2 < 0;$$

$$2) F \in C^2 \left( \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right), |F(\alpha)| < F'(0) |\alpha| \cos \alpha$$

( $|F(\alpha)| > F'(0) |\alpha| \cos \alpha$ ) в некоторой окрестности начала координат (либо  $F'''(0) + 3F'(0) < 0$  ( $F'''(0) + 3F'(0) > 0$ ));

$$3) \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \geq 0, \forall \alpha \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда:

1) при  $h \leq 0$  не существует в полосе  $\Pi$  замкнутых кривых из траекторий;

2)  $h = h_0 = A_1 F'(0)$  – точка бифуркации системы;

3) существует  $h_1 < h_0$  такое, что для любого  $h \in (h_1, h_0)$  точка  $(0, 0)$  – неустойчивый фокус, окруженный единственным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $h$  от  $h_0$  до  $h_1$  (для любого  $h \in (h_1, h_0)$  точка  $(0, 0)$  – неустойчивый фокус);

4) существует  $h_2 > h_0$  такое, что для любого  $h \in (h_0, h_2)$  точка  $(0, 0)$  – устойчивый фокус (для любого  $h \in (h_0, h_2)$  точка  $(0, 0)$  – устойчивый фокус, окруженный единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $h$  от  $h_0$  до  $h_2$ ).

Доказательство. Пусть для определенности  $|F(\alpha)| < F'(0)|\alpha| \cos \alpha$  в некоторой окрестности (либо  $F'''(0) + 3F'(0) < 0$ ), а также, от противного, существует замкнутая траектория, которая ограничивает область  $S$ , содержащую начало координат. Тогда должно выполняться равенство

$$\int_{\gamma} [h\Omega - A_2 F(\alpha)] d\alpha + \left[ -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \right] d\Omega = 0.$$

Поэтому по формуле Грина должно быть выполнено равенство

$$\int_S \left[ A_1 \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} - h \right] d\alpha d\Omega = 0.$$

Видно, что если  $h \leq 0$ , то в полосе  $\Pi$  замкнутой кривой из траекторий нет, поскольку  $A_1 > 0$ .

Если же такая траектория существует, то значение параметра  $h$  от координаты  $\epsilon$  точки пересечения такой траектории с координатной осью  $\alpha$  выражается функцией

$$h = h(\epsilon),$$

причем  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = A_1 F'(0)$ .

Рассмотрим линеаризованную систему

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\Omega + A_1 F'(0)\alpha, \\ \Omega' &= A_2 F'(0)\alpha - h\Omega \end{aligned}$$

при  $h = h_0$ . Ее собственные значения имеют вид:

**§ 3. Замечания по бифуркации рождения цикла...**

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-h + A_1 F'(0)) \pm \frac{i}{2} \sqrt{-D},$$

где  $D = (h - A_1 F'(0))^2 - 4A_2 F'(0) + 4A_1^2 F'(0)^2$ .

Видно, что  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ ,  $\omega_0 \in R$  при  $h = h_0$ . Если заменить в последней системе  $h$  на  $-h$ , то будет выполнено неравенство

$$\left. \frac{d}{dh} \right|_{h=h_0} \operatorname{Re} \lambda_i(h) > 0.$$

Докажем, что начало координат при  $h = h_0$  асимптотически устойчиво.

Система (2.2) при  $h = h_0$  эквивалентна уравнению

$$\alpha'' = A_1^2 F'(0) \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} - A_2 F(\alpha) - A_1 F'(0) \alpha' + A_1 \alpha' \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}. \quad (2.3)$$

По условию  $A_1^2 F'(0) - A_2 < 0$ , поэтому функцию Ляпунова выберем в виде

$$V(\alpha, \alpha') = \frac{\alpha'^2}{2} + A_2 \int_0^\alpha F(\xi) d\xi - A_1^2 F'(0) \int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos \eta} d\eta.$$

Поскольку функция  $\frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$  нечетна, то  $\int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos \eta} d\eta$  – четна.

Поэтому  $\int_0^\alpha \frac{F(\eta)}{\cos \eta} d\eta = \frac{F'(0)}{2} \alpha^2 + o(\alpha^2)$  в окрестности начала координат.

По этой же причине  $\int_0^\alpha F(\xi) d\xi = \frac{F'(0)}{2} \alpha^2 + o(\alpha^2)$  в окрестности начала координат, где функция  $V(\alpha, \alpha')$  положительно определена.

Производная функции  $V(\alpha, \alpha')$  в силу уравнения (2.3) равна

$$V'(\alpha, \alpha') \Big|_{(2,3)} = -A_1 \alpha'^2 \Big|_{(2,3)} \left[ F'(0) - \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \right].$$

Условие  $F'(0) > \frac{d}{d\alpha} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$  в окрестности начала координат эквивалентно  $|F(\alpha)| < F'(0)|\alpha| \cos \alpha$  (или  $F'''(0) + 3F'(0) < 0$ ), что и требовалось для доказательства леммы (ср. с [191]).

**Следствие.** Функция  $F = F_0 = AB \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $A, B > 0$  (см. (0.9)) удовлетворяет условию леммы 2.1. В силу этого в полосе  $\Pi$  появится устойчивый предельный цикл.

**Лемма 2.2.** Рассмотрим системы вида (2.2) в полосе  $\Pi'$  при выполнении условий леммы 2.1 (здесь  $\Pi' = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : \frac{\pi}{2} < \alpha < 3\frac{\pi}{2} \right\}$ ), а также при условии  $F(\alpha + \pi) = F(\alpha)$ .

Тогда: 1) при  $h \geq 0$  не существует замкнутых кривых из траекторий в полосе  $\Pi'$ ;

2) точка  $h = h_0 = -A_1 F'(0)$  – точка бифуркации системы;

3) существует  $h_1 > h_0$  такое, что для любого  $h \in (h_0, h_1)$  точка  $(\pi, 0)$  – устойчивый фокус, окруженный единственным неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $h$  от  $h_0$  до  $h_1$  (для любого  $h \in (h_0, h_1)$  точка  $(\pi, 0)$  – устойчивый фокус);

4) существует  $h_2 < h_0$  такое, что для любого  $h \in (h_2, h_0)$  точка  $(\pi, 0)$  – неустойчивый фокус (для любого  $h \in (h_2, h_0)$  точка  $(\pi, 0)$  – неустойчивый фокус, окруженный единственным устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $h$  от  $h_0$  до  $h_2$ ).

Лемма 2.2 следует из леммы 2.1 и теоремы Четаева о неустойчивости.

3. Рождение предельных циклов в задаче о свободном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде. Рас-

**§ 3. Замечания по бифуркации рождения цикла...**

смотрим системы вида (1.31),(1.32) в полосе  $\Pi'$  ( $\Omega=\omega$ ) и, если не будет оговорено, при условиях (0.8), (0.5).

Если  $n_0^2 = \frac{F'(0)}{I}$ ,  $B=s(0)$ , то введем два безразмерных параметра  $\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0} > 0$ ,  $\mu_2 = \sigma n_0 > 0$ . Пусть  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ .

Дальнейшие рассуждения для простоты проведем для систем следующего вида. Переносим систему координат в точку  $(\pi, 0)$  и делаем для наглядности замену  $\omega \rightarrow -\omega$ , в новых координатах исследуемая система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega - \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha - \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) - \sigma \omega^3 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \omega \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (2.4)$$

поскольку  $s(\alpha + \pi) = -s(\alpha)$  и  $F(\alpha + \pi) = F(\alpha)$ .

Пусть  $F \in C^3((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Phi$ ,  $s \in C^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Sigma$ . Тогда систему (2.4) можно переписать в виде (т. е. в полосе  $\Pi$  ( $\Omega=\omega$ )):

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega + \alpha \left\{ -\frac{\sigma}{I} F'(0) + \frac{s(0)}{m} \right\} + \\ &+ \frac{\alpha^3}{6} \left\{ -\frac{\sigma}{I} F'''(0) + 3\frac{\sigma}{I} F'(0) + 3\frac{s''(0)}{m} - \frac{s(0)}{m} \right\} - \sigma \alpha \omega^2 + R_\alpha(\alpha, \omega), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \alpha \left\{ -\frac{1}{I} F'(0) \right\} + \frac{\alpha^3}{6} \left\{ -\frac{1}{I} F'''(0) \right\} - \sigma \omega^3 + \omega \frac{s(0)}{m} + \\ &+ \omega \alpha^2 \left\{ \frac{\sigma}{I} F'(0) + \frac{s''(0)}{2m} - \frac{s(0)}{2m} \right\} + R_\omega(\alpha, \omega), \end{aligned}$$

где  $R_\lambda(\alpha, \omega) = o((\alpha^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}})$ ,  $\lambda = \alpha, \omega$ .

Матрица линеаризованной системы (оператор производной поля системы в координатах  $(\alpha, \omega)$  возле точки  $(0, 0)$ ) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sigma}{I}F'(0) + \frac{s(0)}{m} & 1 \\ -\frac{1}{I}F'(0) & \frac{s(0)}{m} \end{pmatrix}.$$

После линейной регулярной замены переменных во всей фазовой плоскости

$$\alpha = a, \quad \omega = \frac{\sigma F'(0)}{2I}a + \omega_0 w,$$

где  $\omega_0 = n_0 \sqrt{1 - \frac{\sigma^2 n_0^2}{4}}$ , система при  $\mu = 0$  примет вид, в котором правые части разложены до третьего порядка включительно:

$$\begin{aligned} a' &= \omega_0 w + \frac{a^3}{6} \left\{ -\frac{\sigma}{I}f_3 + 3\frac{s_2}{m} + \frac{5}{2}\sigma n_0^2 \right\} - \sigma a \left\{ \left( \frac{\sigma n_0^2}{2}a + \omega_0 w \right)^2 \right\} + R_a(a, w), \\ w' &= -\omega_0 a - \frac{a^3}{6\omega_0} \frac{f_3}{I} - \frac{\sigma}{\omega_0} \left\{ \left( \frac{\sigma n_0^2}{2}a + \omega_0 w \right)^3 \right\} + \\ &\quad + \frac{a^2}{\omega_0} \left( \frac{\sigma n_0^2}{2}a + \omega_0 w \right) \left( \frac{3}{4}\sigma n_0^2 + \frac{s_2}{2m} \right) - \\ &\quad - \frac{\sigma n_0^2}{2\omega_0} \left\{ \frac{a^3}{6} \left[ -\frac{\sigma}{I}f_2 + 3\frac{s_2}{m} + \frac{5}{2}\sigma n_0^2 \right] - \sigma a \left[ \left( \frac{\sigma n_0^2}{2}a + \omega_0 w \right)^2 \right] \right\} + R_w(a, w), \end{aligned}$$

где  $R_\lambda(a, w) = o((a^2 + w^2)^{3/2})$ ,  $\lambda = a, w$ ;  $f_3 = F'''(0)$ ,  $s_2 = s''(0)$ .

Поскольку  $\mu = 0$ , то корни характеристического уравнения последней системы чисто мнимы.

Подсчитаем индекс [182, 249]

$$J = |\omega_0| (Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2) + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 - Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2),$$

где

$$Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial Y_j \partial Y_k}(0,0), Y_{jkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial Y_j \partial Y_k \partial Y_l}(0,0).$$

Здесь  $Y_i$  – координатные направления для  $(a, w)$ . Если (см. [249])  $J < 0$ , то начало координат асимптотически устойчиво.

Нетрудно заметить, что  $Y_{11}^1 = Y_{12}^2 = Y_{22}^1 = 0$ . Поэтому индекс  $J$  становится нечетной функцией от коэффициентов искомого векторного поля.

**Следствие.** Будут получены необходимые и достаточные условия как наличия аттрактора, так и наличия репеллера (если  $J \neq 0$ ).

Очевидно, что  $Y_{111}^1 = \left\{ -\frac{\sigma}{I} f_3 + 3 \frac{s_2}{m} + \frac{5}{2} \sigma n_0^2 \right\} - \frac{3}{2} \sigma^3 n_0^4,$

$$Y_{122}^1 = -2\sigma\omega_0^2, Y_{112}^2 = -\frac{\sigma^3 n_0^4}{2} + \frac{3}{2} \sigma n_0^2 + \frac{s_2}{m}, Y_{222}^2 = -6\sigma\omega_0^2.$$

Пусть  $J = |\omega_0| In$ . Тогда  $In = -\frac{\sigma}{I} f_3 + 4 \frac{s_2}{m} - 4\sigma n_0^2$ . Итак, нами

доказана.

**Лемма 2.3.** При  $In < 0$  точка  $(0,0)$  для исследуемой системы – аттрактор, а при  $In > 0$  – репеллер.

Из последнего предложения следует основная

**Лемма 2.4.** Рассмотрим систему (1.31), (1.32) в полосе  $\Pi'$ . Пусть  $F \in C^3((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Phi$ ,  $s \in C^2((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) \cap \Sigma$ , а также

$$\mu_2 = \sigma n_0 < 2, In = -\frac{\sigma}{I} f_3 + 4 \frac{s_2}{m} - 4\sigma n_0^2. \text{ Зафиксируем } \mu_2^0 < 2. \text{ Тогда}$$

при  $\mu_1 = \mu_2$  происходит бифуркация системы и:

1) если  $ln < 0$ , то существует  $\bar{\mu}_1 < 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$  точка  $(\pi, 0)$  – устойчивый фокус; существует  $\bar{\mu}_2 > 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$  точка  $(\pi, 0)$  – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\bar{\mu}$  от 0 до  $\bar{\mu}_2$ ;

2) если  $ln > 0$ , то существует  $\bar{\mu}_1 > 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_1)$  точка  $(\pi, 0)$  – неустойчивый фокус; существует  $\bar{\mu}_2 < 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_2, 0)$  точка  $(\pi, 0)$  – устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением  $\bar{\mu}$  от 0 до  $\bar{\mu}_2$ ;

В лемме 2.3 не существует равномерных оценок на оба параметра  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**Следствие.** Пусть выполнены условия (0.9), (0.7) и  $\sigma n_0 < 2$ . Тогда:

1. При  $2 \frac{B}{tn_0} = \sigma n_0$  происходит бифуркация системы.

2. Зафиксируем  $\sigma n_0 = \mu_2^0 < 2$ . Существует  $\bar{\mu}_1 < 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$  точка  $(\pi, 0)$  – устойчивый фокус; существует  $\bar{\mu}_2 > 0$  такое, что для любого  $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$  точка  $(\pi, 0)$  – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом  $\bar{\mu}$  от 0 до  $\bar{\mu}_2$ .

**Замечание.** Цепочка равенств  $\mu_1 = \mu_2, ln = 0, \dots$  задает в бесконечномерном пространстве коэффициентов тейлоровских разложений функций  $F$  и  $s$  некоторое множество. В силу

#### § 4. О замкнутых кривых из траекторий...

того, что при  $\mu_1 \neq \mu_2$  или  $ln \neq 0$  удастся определить характер траекторий возле точки  $(\pi, 0)$ , величины  $\mu = \mu_1 - \mu_2$  и  $ln$  являются функциями от первых двух коэффициентов функции последования.

Действительно,  $\mu = 0$  и  $ln = 0$  тогда и только тогда, когда либо линейный, либо коэффициент при кубе разложения по малому параметру функции последования равны нулю [39, 55, 68, 85, 126, 142, 161].

#### **§ 4. О ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ ИЗ ТРАЕКТОРИЙ, СТЯГИВАЕМЫХ В ТОЧКУ ПО ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

---

В данном разделе затрагиваются вопросы существования замкнутых кривых из траекторий систем дифференциальных уравнений на двумерных поверхностях. Рассматриваемые фазовые кривые стягиваются в точку по фазовой поверхности. Таким образом, искомые замкнутые фазовые траектории являются подмножеством той части фундаментальной группы данной двумерной фазовой поверхности, представляющей тривиальную компоненту, которая существует для любого гладкого фазового двумерного многообразия. Замкнутые траектории всегда являются ключевыми (по крайней мере для систем на двумерных многообразиях), поскольку от их расположения зависит глобальное расположение многих остальных фазовых траекторий. Последний факт объясняется тем, что фазовые кривые, состоящие из траекторий динамических систем на двумерных многообразиях и стягиваемых по ним в точку, разделяют фазовое многообразие на две части (см. также [13, 176]).

Если искомые кривые существуют, то основным методом их исследования является построение и изучение функции последования Пуанкаре.

С помощью применения теоремы Стокса можно доказать следующее простое утверждение.

**Теорема 2.3.** *Рассмотрим ориентируемое риманово многообразие  $N^2 \subset R^3$  с векторным полем  $\vartheta$  на нем [51, 67, 82]. Пусть  $w$  — ненулевое векторное поле, такое, что скалярное произведение  $(w, \vartheta)|_{N^2} = 0$ . Если существует такая достаточно гладкая функция  $F$ , не равная тождественно нулю на многообразии, что  $(rotFw, n)|_{N^2}$  не меняет знака в данной односвязной области, граница которой стягиваема по многообразию  $N^2$  в точку, то в этой области не существует замкнутой кривой из траекторий поля  $\vartheta$ , стягиваемой по многообразию в точку (здесь  $n$  — внешняя нормаль).*

В частности, на плоскости для отсутствия данных замкнутых кривых из траекторий достаточно, чтобы существовала гладкая функция  $F$ , не равная тождественно нулю и такая, что дивергенция поля  $F\vartheta$  не меняла бы знака [68].

Доказательство теоремы 2.3 получается в результате применения формулы Гаусса-Остроградского. От противного. Пусть такая кривая  $\gamma$  существует и ограничивает область  $S$  двумерного многообразия  $N^2$ . Если  $(w, \vartheta)|_{N^2} = 0$ , то  $\int_{\gamma} (Fw, ds)|_{N^2} = 0$ , где  $ds$  — элемент дуги вдоль  $\gamma$ , для некоторой гладкой функции  $F$ , не равной тождественно нулю.

Последнее равенство эквивалентно

$$\int_S (rotFw, n)|_{N^2} d\Sigma = 0,$$

где  $d\Sigma$  — элемент площади поверхности  $N^2$ . Топологические тонкости опускаем.

**Лемма 2.5.** *Рассмотрим систему (1.17) в полосе  $\Pi$ . Если  $A_1 \neq 0$ ,  $F \in C^1\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ ,  $\frac{d F(\alpha)}{d \alpha \cos \alpha}$  знакопостоянна при  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , то в полосе  $\Pi$  не существует замкнутой кривой из траекторий.*

Доказательство леммы 2.5. От противного. Пусть существует замкнутая кривая  $\gamma_0$  из траекторий поля в полосе  $\Pi$ , ограничивающая область  $S$ . Заметим, что точка  $(0,0) \in S$ . Если  $X = \{X_1, X_2\}$  – векторное поле системы, то, очевидно, в стандартной метрике  $(Y, X)|_{R^2} = 0$ , где  $Y = \{-X_2, X_1\}$ . Поскольку  $\Pi$  односвязна и  $F \in C^1\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ , то по формуле Грина

$$\int_{\gamma_0} (-X_2 dx_1 + X_1 dx_2) = \int_S \operatorname{div} X d\alpha d\Omega.$$

Левая часть этого равенства обращается в нуль, так как  $\gamma_0$  — траектория поля  $X$ . Поскольку  $A_1 \neq 0$ , то

$$\int_S \frac{d F(\alpha)}{d \alpha \cos \alpha} d\alpha d\Omega = 0,$$

что противоречит условиям леммы, так как величина  $\frac{d F(\alpha)}{d \alpha \cos \alpha}$  не меняет знака во всей полосе  $\Pi$ .

**Замечание.** В силу теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема с постоянной плотностью, условия леммы 2.5 являются достаточными для отсутствия сохранения интегрального инварианта.

Тем же методом можно доказывать отсутствие замкнутых кривых из траекторий у полей в  $R^n$ , интегрируя нормальные поля вдоль  $I$  – путей [57, 58].

**§ 5. ОБ ОТСУТСТВИИ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ  
ИЗ ТРАЕКТОРИЙ, ОХВАТЫВАЮЩИХ ФАЗОВЫЙ  
ЦИЛИНДР**

---

*1. Общие утверждения об отсутствии замкнутых траекторий, охватывающих цилиндр, для систем, обладающих центральной симметрией.* В предыдущем разделе рассматривались замкнутые траектории систем дифференциальных уравнений, стягиваемых в точку по двумерной фазовой поверхности. Такие траектории представляют часть тривиальной компоненты фундаментальной группы. В отличие от траекторий, рассматриваемых в предыдущем параграфе, замкнутые кривые, которые не стягиваются по фазовому многообразию в точку, могут не существовать. Последнее связано с тем, что топология фазового многообразия может препятствовать существованию нетривиальной компоненты у фундаментальной группы данного многообразия.

Рассмотрим для простоты случай двумерного цилиндра, топология которого допускает существование замкнутых кривых, не стягиваемых по цилиндру в точку. Примером такой кривой может служить огибающая цилиндра окружность. К тому же в дальнейших главах часто будут рассматриваться динамические системы на двумерном цилиндре.

В предыдущих параграфах уже употреблялся термин «кривая, состоящая из фазовых траекторий». В этой связи дадим

**Определение.** *Фазовой характеристикой назовем кривую, касающуюся векторного поля. В частности, кривая, состоящая из фазовых кривых поля, будет являться фазовой характеристикой.*

**Определение.** *Центром симметрии векторного поля, заданного в координатах  $(x, y)$ , назовем точку  $(x_0, y_0)$  такую, что после замены переменных*

$$\begin{pmatrix} x_0 & -x \\ y_0 & -y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_0 & +x \\ y_0 & +y \end{pmatrix}$$

векторное поле меняет знак на противоположный.

Справедлива следующая теорема [25, 88, 185, 186].

**Теорема 2.4.** *Рассмотрим автономную систему*

$$\begin{aligned} \psi' &= \Psi(\psi, y), \\ y' &= Y(\psi, y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

на цилиндре  $\mathcal{C} = S^1 \{\psi \bmod 2\pi\} \times R^1 \{y\}$ , где  $\Psi, Y \in C^1(\mathcal{C})$ . Пусть существует достаточно гладкая функция  $M: \mathcal{C} \rightarrow R$  такая, что  $\operatorname{div} M V(\psi, y)$  знакоопределена (здесь  $V(\psi, y) = (\Psi(\psi, y), Y(\psi, y))$ ) в области  $\Omega$ , охватывающей цилиндр).

Тогда в  $\Omega$  нет более одной замкнутой кривой из траекторий системы (2.5), не стягиваемой по цилиндру в точку.

Если же при этом существует центр симметрии  $x_0$  векторного поля системы (2.5) такой, что ни одна нетривиальная фазовая характеристика не продолжается через  $x_0$ , то у системы (2.5) не существует даже одной замкнутой кривой из траекторий системы (2.5).

Доказательство. От противного. Пусть  $\gamma_1, \gamma_2$  замкнутые кривые из траекторий в области  $\Omega$ . Рассмотрим область  $S$  на цилиндре, ограниченную кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Очевидно, если  $M$  – гладкая функция на цилиндре, то векторное поле  $M \bar{x} = \{-MY, M\Psi\}$  на цилиндре  $\mathcal{C}$  в стандартной его метрике ортогонально исходному:

$$M(\bar{x}, V) \Big|_{\mathcal{C}} = M(\bar{x}, V) \Big|_{R^2} = 0.$$

Введем координату  $\tau \in R^3$  такую, что цилиндр  $\mathcal{C} \subset R^3$  задается соотношением  $\tau=1$ . При этом продолжим систему в  $R^3$ :

$$\psi' = \Psi(\psi, y), \quad y' = Y(\psi, y), \quad \tau' = T(\psi, y, \tau),$$

где  $T$  – гладкая функция и  $T(\psi, y, \tau)|_{\tau=1} = 0$ . По формуле Гаусса-Остроградского, примененной к полю  $M\{-Y, \Psi, 0\}$ , на цилиндре  $\mathcal{C}$  в координатах  $\{\psi, y, \tau\}$  будет выполнено равенство

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} (-MYd\psi + M\Psi dy) = \int_S \operatorname{div} MV d\sigma,$$

поскольку цилиндр обладает евклидовой метрикой. Так как  $y_1, y_2$  – кривые из траекторий, то левая часть последнего равенства обращается в нуль, а правая не равна нулю, в силу условия. Противоречие. Первая часть теоремы доказана.

Если существует центр симметрии поля, обладающий указанным свойством, то кривых из траекторий будет существовать по крайней мере две (если они вообще есть). В силу утверждения, доказанного выше, приходим к противоречию. Теорема доказана.

2. *Замечания из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.* Хотя утверждения этого пункта носят достаточно простой характер, идеология поиска фазовых характеристик, огибающих фазовый цилиндр (см. предыдущий пункт), прекрасно отражается на следствиях из теоремы 2.3.

**Следствие.** *Рассмотрим системы (2.2) на цилиндре. Если*

$$|h| \geq A_1 \max \left| \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha} \right|, \text{ то у систем вида (2.2) не существует}$$

*более одной кривой из фазовых траекторий, огибающей цилиндра. Если же при этом  $F \in \Phi$  (выполнено условие (0.8)), то таких кривых вообще нет.*

Доказательство. Пусть  $M(\alpha, \omega) \equiv 1$ . Дивергенция поля системы (2.2) равна  $A_1 \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha} - h$ . Если же  $F \in \Phi$ , то существует

центр симметрии поля – начало координат, обладающее свойством теоремы 2.3. Следствие доказано.

И хотя данное следствие носит очевидный характер, при условии, когда  $F \in \Phi$ , у систем вида (2.2) при любом  $h \neq 0$  не существует замкнутых характеристик, огибающих фазовый

### § 6. О существовании топографических систем Пуанкаре...

цилиндр (см. также главу 8). При  $h=0$  таких кривых – бесконечно много.

**Замечание.** Когда будут разбираться системы сравнения [142, 191], будет показано, что для системы (1.31),(1.32), описывающей свободное торможение тела в среде (она задана на цилиндре) при некоторых естественных условиях не будет существовать ни одной фазовой характеристики, огибающей фазовый цилиндр.

### § 6. О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПУАНКАРЕ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДОЙ

Для исследования замкнутых траекторий динамических систем, возникающих в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, применим (а в некоторых случаях и видоизменим) теорию топографических систем Пуанкаре (ТСП) [142, 191].

1. *Топографические системы Пуанкаре.* Пуанкаре предложил метод (хотя и не совсем общий) отыскания замкнутых орбит дифференциального уравнения (2.1). Для этого ему потребовалось ввести понятие «топографических систем» [142, 191].

В его трудах впервые начала рассматриваться алгебраическая функция  $F(x_1, x_2)$ , которая:

а) достаточно гладкая и ограниченная в любой ограниченной области, стремящаяся к бесконечности, когда одна из ее переменных стремится к бесконечности;

б) равна нулю при  $x_1 = x_2 = 0$  и положительна в остальных точках;

в) имеет первые производные, обращающиеся в нуль лишь при  $x_1 = x_2 = 0$ ;

г) такова, что при  $x_1 = x_2 = 0$  выполнено неравенство

$$\left( \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right)^2 +$$

$$+ 4 \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right) \left( \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \right) < 0.$$

Последнее неравенство означает, что кривая контактов имеет в начале координат изолированную особую точку (о кривых контактов см. ниже);

д) такова, что кривая, заданная уравнением

$$X_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,$$

не уходит на бесконечность.

При выполнении условий а) – д) уравнение

$$F(x_1, x_2) = \text{const}$$

дает так называемую топографическую систему вложенных друг в друга кривых, имеющую вершину в начале.

Надо сказать, что не все аналитические условия а) – д) нам понадобятся. Мы будем учитывать лишь геометрию расположения кривых контактов, траекторий исследуемой динамической системы и кривых топографической системы Пуанкаре (ТСП).

Ниже рассмотрим системы вида (1.7), (2.2), (1.31), (1.32), (1.24), (1.25) на цилиндре  $S^1 \{ \alpha \bmod 2\pi \} \times R^1 \{ \omega \text{ (или } \Omega) \}$  или на плоскости  $R^2 \{ \alpha, \omega \text{ (или } \Omega) \}$ .

Если не будет дополнительно оговорено, можно считать, что выполнены условия (0.8), (0.5).

Под ТСП будем понимать систему вложенных друг в друга замкнутых кривых, полученных с помощью поверхностей уров-

ня неотрицательной функции, которая равна нулю лишь в точке, к которой сходятся полученные вложенные замкнутые кривые. С помощью такой системы можно успешно «ловить» замкнутые траектории исследуемой динамической системы: вычисляя угол между векторами поля, образующими семейство ТСП, и векторами исследуемого поля динамической системы, можно получить информацию о расположении траекторий исследуемого векторного поля. Чтобы доказать отсутствие замкнутых фазовых характеристик достаточно выполнение неравенства

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} X_2 \leq (\geq) 0.$$

Здесь  $F(x_1, x_2) = \text{const}$  – семейство замкнутых кривых,  $X = \{X_1, X_2\}$  – исходное векторное поле. Таким образом, с помощью последнего неравенства можно исследовать качественное поведение траекторий исходной системы. Заметим, что векторное поле обязательно должно быть задано в некоторых координатах (см. также [90, 94, 96]).

Выше указывалось, что можно определить ТСП более корректно, но это нам не потребуется. Более того, нас интересуют лишь геометрические свойства взаимного расположения кривых ТСП и фазовых кривых исследуемого поля.

2. *Характеристические функции и кривые контактов векторных полей и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой.* С понятием топографической системы Пуанкаре тесно связано понятие характеристической функции двух полей на плоскости. Последняя функция определяет косимметрическую форму на плоскости. Если  $F(x_1, x_2) = \text{const}$  – семейство замкнутых кривых, то система, имеющая явный вид гамильтоновой,

$$x_1' = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, x_2' = \frac{\partial F}{\partial x_1},$$

задает векторное поле, касательное к семейству кривых ТСП. Тогда последнее неравенство эквивалентно

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \leq (\geq) 0,$$

в котором  $Y_1 = -\frac{\partial F}{\partial x_2}, Y_2 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$  – векторное поле системы. Оно касается кривых ТСП.

Рассмотрим две системы уравнений на плоскости. Эти уравнения задаются полями  $X = \{X_1, X_2\}$  и  $Y = \{Y_1, Y_2\}$  в некоторых координатах. Естественно рассмотреть функцию  $\chi = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ , которая отвечает за знак синуса угла между полями  $X$  и  $Y$ . Очевидно  $\chi = 0$  там и только там, где поля  $X$  и  $Y$  касаются.

Функция  $\chi$  удовлетворяет следующим свойствам:  $\chi(X, Y) = -\chi(Y, X)$ ,  $\chi(\lambda X, Y) = \lambda \chi(X, Y)$  для любой действительной функции  $\lambda$ .

**Определение.** Функцию  $\chi$  мы назовем *характеристической функцией двух векторных полей*, а уравнение  $\chi(X, Y) = 0$  назовем *уравнением кривой контактов для полей  $X$  и  $Y$* .

В применении метода ТСП к динамическим системам, возникающим в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, рассмотрим системы вида (1.17) в полосе  $\Pi$ . У такой системы не существует никакой замкнутой кривой, состоящей из фазовых траекторий.

**Лемма 2.6.** Пусть  $A_1 A_2 \neq 0$ . Если  $F(\alpha) \neq 0$  при  $\alpha \neq 0$  в полосе  $\Pi$ , то у системы вида (1.17) не существует замкнутой кривой из траекторий в полосе  $\Pi$ , если  $F'(0) > 0, F(0) = 0$ .

Доказательство. Систему (1.17) при  $A_1 = 0$  будем называть системой (1.17'). Для системы (1.17') начало координат является особой точкой, имеющей топологический тип центра. Таким образом, существует семейство периодических траек-

торий, подходящих как угодно близко к точкам  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  и  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ . Характеристическая функция, отвечающая системам (1.17) и (1.17'), равна

$$A_1 A_2 \frac{F^2(\alpha)}{\cos \alpha}.$$

Единственная кривая контактов – прямая  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha = 0\}$ . В остальных точках полосы  $\Pi$  характеристическая функция положительна.

От противного. Пусть существует замкнутая кривая из траекторий  $\gamma_0$ , ограничивающая область  $S_0$ . Пусть точка  $(\alpha_0, 0) \in \gamma_0$ , где  $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим точку  $(\alpha_0 + \varepsilon, 0)$ ,  $\varepsilon$  – достаточно мало. Через нее проходит траектория ТСП –  $\gamma_\varepsilon$ , ограничивающая область  $S_\varepsilon$ . Очевидно, что, выходя из точки  $(\alpha_0, 0)$ , траектория  $\gamma_0$  никогда не попадет в область  $S_\varepsilon$ , в силу положительности почти всюду характеристической функции. Но  $(\alpha_0, 0) \in S_\varepsilon$ . Противоречие. Лемма доказана.

**Следствие.** Если  $F \in \Phi$ , то в полосе  $\Pi$  (впрочем, как и в полосе  $\Pi'$ ) не существует замкнутой характеристики системы (1.17).

Рассмотрим далее систему (1.24), (1.25) в полосе  $\Pi$ .

**Лемма 2.7.** У системы (1.24), (1.25) в полосе  $\Pi$  при  $\sigma \neq 0$  не существует замкнутой кривой из траекторий, если  $F(\alpha) \neq 0$  при  $\alpha \neq 0$ , а также  $F'(0) > 0$ ,  $F(0) = 0$ .

Доказательство. Систему (1.24), (1.25) при  $\sigma = 0$  обозначим (1.24), (1.25'). Аналогично лемме 2.6, система (1.24), (1.25') обладает особой точкой типа центр, окруженной замкнутыми траекториями, продолжающимися до точек  $(-\pi/2, 0)$  и  $(\pi/2, 0)$ . Характеристическая функция, отвечающая системам (1.24), (1.25) и (1.24), (1.25'), равна

$$\sigma \cos \alpha \left\{ \left( \frac{F(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \right\}.$$

Лишь в начале координат поля систем (1.24),(1.25) и (1.24),(1.25') касаются. Из рассуждений, используемых при доказательстве леммы 2.6, следует лемма 2.7.

**Следствие.** Если  $F \in \Phi$ , то в полосе  $\Pi$  (впрочем, как и в полосе  $\Pi'$ ) не существует замкнутой характеристики системы (1.24),(1.25).

Теперь рассмотрим систему (1.31),(1.32) в полосе  $\Pi$ .

**Лемма 2.8.** У системы вида (1.31),(1.32) в полосе  $\Pi$  при  $\sigma \neq 0$  не существует замкнутой кривой из траекторий, если  $F(\alpha) \neq 0$  при  $\alpha \neq 0$ , а также  $s(\alpha)|_{\Pi} \geq 0$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F(0) = 0$ .

Доказательство. Рассмотрим систему (1.24),(1.25') (см. лемму 2.7). Для нее, по-прежнему, начало координат имеет топологический тип центра, обладающий семейством замкнутых траекторий, продолжающихся до точек  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$  и  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Характеристическая функция, отвечающая полям систем (1.31),(1.32) и (1.24),(1.25'), равна

$$\sigma \cos \alpha \left\{ \left( \frac{F(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \right\} + \frac{1}{I} F(\alpha) \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha + \omega^2 \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha.$$

Очевидно, что почти всюду в полосе  $\Pi$  характеристическая функция положительна. Остается сослаться на методы доказательств лемм 2.6 и 2.7.

**Следствие.** Если  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$ , то в полосе  $\Pi$  не существует замкнутой характеристики системы (1.31),(1.32).

**Замечание.** Как было показано в § 3, в полосе  $\Pi'$  у системы вида (1.31),(1.32) возможны при некоторых условиях предельные циклы.

§ 6. О существовании топографических систем Пуанкаре...

Рассмотрим систему (1.31),(1.32) в области  $O' = \Pi_{(0,\pi)} \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}$ . Если  $s(\frac{\pi}{2}) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$ , то существует особая точка  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ . (Здесь  $\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : 0 < \alpha < \pi\}$ .)

**Лемма 2.9.** *Рассмотрим систему вида (1.31),(1.32) в области  $O'$ . Пусть для простоты  $F \in \Phi, s \in \Sigma$ . Тогда вокруг точки покоя  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$  в области  $O'$  не существует замкнутой кривой из траекторий, если равенство*

$$\omega^2 s(\alpha) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) s(\alpha) + \frac{1}{I} F(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha = 0 \quad (2.6)$$

выполнено в области  $O'$  только при  $\alpha = \pi/2$ . (Заметим, что равенство (2.6) возникает при изучении так называемых нетривиальных положений равновесия (НПР) системы (1.31),(1.32). (Об НПР см. также главу 4).

Доказательство. В области  $O'$  рассмотрим систему (1.31),(1.32). Точка покоя  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$  для системы (1.24),(1.25) имеет топологический тип центра (ил. 3—5, в которых заменим  $\alpha$  на  $-\alpha$ ). Существует семейство замкнутых траекторий, окружающее точку  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ . Это семейство может уходить на бесконечность. Характеристическая функция, отвечающая системам (1.24),(1.25) и (1.31),(1.32)), равна

$$\omega^2 s(\alpha) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) s(\alpha) + \frac{1}{I} F(\alpha) s(\alpha) \sin \alpha .$$

Последняя величина знакоопределена, поскольку выполнено равенство (2.6) лишь при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Поля систем (1.24),(1.25) и (1.31),(1.32) в области  $O'$  касаются лишь на прямой

$\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \pi/2\}$ . Остается сослаться на методы доказательств лемм 2.6, 2.7, 2.8.

Вообще говоря, при исследовании системы (1.31),(1.32), в зависимости от области, используется одна из систем вида (1.24),(1.25) или (1.24),(1.25'). Напомним, что система (1.24),(1.25') – это система (1.24),(1.25) при  $\sigma=0$ .

### **§ 7. КРИВЫЕ КОНТАКТОВ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ . ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ПРОБЛЕМА РАЗЛИЧЕНИЯ ЦЕНТРА И ФОКУСА**

---

*1. Системы сравнения и исследование топологической структуры расположения траекторий (см. также [104–106]).* Метод ТСП, о котором говорилось в § 6, является частным случаем метода исследования с помощью систем сравнения. Рассмотрим две системы уравнений на плоскости и характеристическую функцию определяющих их векторных полей, которая, как указывалось, отвечает за знак синуса угла между векторными полями данных систем. Зная принцип разбиения на траектории одной из них, возможен анализ устройства фазовой плоскости другой системы. В частности, ТСП позволяет, к примеру, исследовать вопрос существования предельных циклов. Таким образом, основной упор делается на вычисление угла между двумя полями рассматриваемых систем в одной и той же области фазовой поверхности.

Вычислять характеристическую функцию можно для любых двух векторных полей на плоскости. В этой связи назовем системой сравнения для данной системы ту систему, качественное расположение траекторий которой полностью известно.

Ранее уже проводилось сравнение векторных полей систем (1.7'), (1.31),(1.32), (1.24),(1.25).

**Предложение 2.1.** *Рассмотрим системы вида (1.24),(1.25) и (1.31),(1.32) на плоскости. Почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от 0 до  $\pi$ , и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, если выполнены все условия леммы 2.9.*

Действительно, если  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$  то, в силу леммы 2.9, характеристическая функция во всей фазовой плоскости знакоопределена.

**Замечание 1.** Если выполнены условия (0.9), (0.7), то угол между векторами полей систем (1.31),(1.32) и (1.24),(1.25) меняется монотонно относительно параметра  $\mu_1 = \frac{B}{2mn_0}$ , где, как и ранее,  $n_0^2 = \frac{F'(0)}{I}$ ,  $B = s(0)$ . В частности, при  $\mu_1 = 0$  последняя характеристическая функция тождественно равна нулю.

**Замечание 2.** Поскольку система (1.24),(1.25) на плоскости имеет три топологически различных типа фазового портрета, для исследования системы (1.31),(1.32) в каждой из областей ее параметров используется свой топологический тип (см. также главу 4 и ил. 3—5).

В качестве системы сравнения для системы (1.31),(1.32) можно использовать систему (1.24),(1.25'), описывающую консервативную систему, — физический маятник на фазовой плоскости.

**Замечание 3.** У системы (1.31),(1.32) не существует замкнутых кривых из траекторий, охватывающих фазовый цилиндр, если выполнены все условия предложения 2.1.

Доказательство. От противного. Пусть существует искомая замкнутая кривая. Можно считать, что начальными условиями для такой траектории является точка  $(0, \omega^*)$ ,  $\omega^* > 0$ .

Проведем через данную точку траекторию системы сравнения (1.24),(1.25) в зависимости от топологического типа ее фазового портрета (ил. 3–5). В силу предложения 2.1, если такая траектория существует, то она пройдет лишь через точку  $(2\pi, \omega^* + \delta)$ , где  $\delta > 0$ , что противоречит замкнутости кривой.

**Предложение 2.2.** *Рассмотрим системы (1.31),(1.32) и (1.24),(1.25') во всей плоскости. В полосе  $\Pi$  почти всюду угол от вектора одного поля до вектора другого поля лежит в пределах от 0 до  $\pi$ , и лишь на множестве нулевой меры этот угол равен нулю, а в полосе  $\Pi'$  при условии, что*

$$\frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha}, \forall \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

*существует кривая контактов рассматриваемых двух полей, которая является топологической окружностью.*

Действительно, если  $F \in \Phi, s \in \Sigma$ , то в полосе  $\Pi$  кривая контактов – начало координат. Перенесем начало координат в точку  $(\pi, 0)$  и перепишем уравнение кривой контактов в виде

$$\sigma \cos \alpha \left\{ \left( \frac{F(\alpha)}{I} \right)^2 + \omega^4 \right\} = \frac{1}{I} F(\alpha) \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha + \omega^2 \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.7) кривой контактов, которую назовем нетривиальной (НКК), можно разрешить относительно  $\omega^2$ :

$$2\sigma\omega^2 = \frac{s(\alpha)}{m} \pm \sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma \frac{F(\alpha)}{I} \sin \alpha \left\{ \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} - \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}}. \quad (2.8)$$

В полосе  $\Pi$  уравнение (2.8), взятое со знаком «минус», задает лишь точку  $(0, 0)$ , а взятое со знаком «плюс», – НКК.

НКК симметрична относительно обеих осей координат (после переноса из полосы  $\Pi'$  в полосу  $\Pi$ ), пересекает обе оси под прямым углом и только два раза (по теореме о неявной функции). Тем самым предложение доказано.

2. *Некоторые общие утверждения о ТСП и системах сравнения.* С целью рассмотрения вопросов существования ключевых траекторий (замкнутых фазовых характеристик и др.), докажем одну общую теорему. Для этого заметим, что вплоть до прямых  $\Lambda_{-1}$  и  $\Lambda_0$  (а также  $\Lambda_0$  и  $\Lambda_1$ ) существует семейство замкнутых кривых, которое является ТСП (интегральные кривые системы (1.24),(1.25'), описывающей физический маятник). Здесь

$$\Lambda_k = \left\{ (\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}.$$

Поставим также вопрос о существовании замкнутых кривых из траекторий для системы (1.31),(1.32) в полосе  $\Pi'$ . Для этого докажем утверждение, обобщающее рассуждения доказательства лемм 2.6, 2.7, 2.8, 2.9.

**Теорема 2.5.** *Пусть в односвязной области  $D$  плоскости, содержащей точку покоя  $x_0$  достаточно гладкого векторного поля  $\vartheta_1$ , существует кривая  $\gamma \ni x_0$ , соединяющая две точки  $A, B \in \partial D$  (точки  $A, B$  могут быть бесконечно удалены), такая, что существует ТСП с центром в  $x_0$ , задаваемая достаточно гладкой функцией  $V$ , продолжающаяся вдоль  $\gamma$  до  $A$  и  $B$ , заполняющая область  $K \subseteq D$  и обладающая свойством*

$$(\vartheta_1, \vartheta_2) \Big|_{R^2} > 0$$

(где  $\vartheta_2 = \text{grad}V$ ) почти всюду в  $K$  за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих  $x_0$ . (Здесь  $V = \text{const}$  – семейство кривых ТСП.)

Тогда во всей области  $D$  вокруг точки  $x_0$  не существует ни одной замкнутой кривой из траекторий поля  $\vartheta_1$ .

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая  $\gamma_0$  существует, ограничивая область  $S_0 \ni x_0$ . Пусть  $\{N_1, N_2\} =$

$= \gamma \cap \gamma_0 \neq \emptyset$  (поскольку  $x_0 \in \gamma$ ) и точка  $N_1$  – неособое начальное условие при движении по кривой  $\gamma_0$ . Через точку  $N_1$  проходит замкнутая кривая  $\bar{\gamma}$  из ТСП, причем  $\bar{\gamma} \subset K$ . Если кривая  $\bar{\gamma}$  ограничивает область  $\bar{S}$ , то существует  $\varepsilon > 0$  (которое уменьшим насколько нужно), такое, что:

- 1)  $N_\varepsilon \in \bar{\gamma}_\varepsilon \cap \gamma$ , где  $\bar{\gamma}_\varepsilon$  – кривая ТСП;
- 2) расстояние между точками  $N_\varepsilon$  и  $N_1$  равно  $\varepsilon$ ;
- 3)  $\bar{\gamma}_\varepsilon$  ограничивает область  $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$ .

Выбранное значение  $\varepsilon$  таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории  $\gamma_0$  с начальным условием  $N_1$ , покинет область  $\bar{S}_\varepsilon$ . Поскольку  $\bar{S}_\varepsilon \subset K$  и выполнено неравенство  $(\vartheta_1, \vartheta_2)|_{R^2} > 0$  почти всюду в  $K$  за исключением, быть может, некоторых кривых, не охватывающих  $x_0$ , то точка с начальным условием  $N_1$  никогда больше в область  $\bar{S}_\varepsilon \subset K \subset D$  не вернется. Так как  $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$ , то приходим к противоречию с замкнутостью кривой  $\gamma_0$ .

Как уже отмечалось, в полосе  $\Pi'$  для систем вида (1.31), (1.32) существует ТСП с центром в точке  $(\pi, 0)$  (система (1.24), (1.25')), продолжающаяся до точек  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  и  $(3\frac{\pi}{2}, 0)$ .

При этом НКК системы сравнения (ТСП) и поля системы (1.31), (1.32) ограничивает область, целиком содержащую ТСП. Таким образом, ссылаясь на теорему 2.5, справедлива

**Лемма 2.10.** *Рассмотрим систему (1.31), (1.32) в полосе  $\Pi'$ , при условиях, если НКК системы сравнения (1.24), (1.25') и системы (1.31), (1.32) ограничивает область, целиком содержащую ТСП, продолжающуюся до точек  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  и  $(3\frac{\pi}{2}, 0)$ .*

*Тогда в полосе  $\Pi'$  не существует замкнутой характеристики системы (1.31), (1.32).*

**Замечание.** Рассмотрим системы вида (1.31),(1.32) при условиях (0.8), (0.5). Выше ставился вопрос о существовании замкнутых характеристик в полосе  $\Pi'$ , т.е. кривых, окружающих точку  $(\pi, 0)$ . Поставим также более общий вопрос о существовании любых замкнутых характеристик системы (1.31),(1.32), стягиваемых по фазовому цилиндру в точку.

Очевидно, что сумма индексов особых точек, находящихся внутри таких кривых, должна равняться 1. Значит такие кривые могут возникнуть вокруг точек  $(\pi k, 0), k \in \mathbb{Z}$ . Внутри таких кривых не могут содержаться одновременно два седла  $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$  и  $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 0)$  и точка  $(2\pi k, 0)$ , поскольку сумма индексов при этом равна -1. Такие кривые не могут содержать внутри себя одновременно точки  $(\pi k, 0)$  и  $(\pi(k+1), 0)$ , поскольку, в силу центральной симметрии поля системы (1.31),(1.32) относительно точек  $(\pi k, 0)$  и теоремы единственности, это невозможно.

Остается единственная возможность существования такой кривой, содержащей более одной особой точки внутри себя. Пусть для определенности  $k=0$ . Такая кривая может содержать точки  $(0, 0), (-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}), (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ , сумма индексов которых равна 1. Но в силу леммы 2.9 это невозможно, хотя бы потому, что траектория, имеющая в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ , имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества бесконечно удаленную точку (см. следующий параграф).

Таким образом, вопрос существования замкнутых характеристик системы (1.31),(1.32) на фазовом цилиндре при условии выполнения леммы 2.9 свелся к отысканию таких кривых в полосе  $\Pi'$  вокруг точки  $(\pi, 0)$ . Как было показано в § 3, при некоторых условиях такие кривые существуют, а при некоторых — нет.

3. *Проблема различения центра и фокуса и системы сравнения.* Первая проблема различения в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений – проблема различения центра и фокуса – возникает в точке  $(\pi, 0)$  в полосе  $\Pi'$  для динамической системы вида (1.31), (1.32) при условиях (0.8), (0.5), а также при  $\mu_1 = \mu_2$  и  $0 < \mu_2 < 2$  (см. § 3). В § 3 (лемма 2.3) данная проблема решена при  $ln \neq 0$  в пользу слабого фокуса. Таким образом, в достаточно малой окрестности точки  $(\pi, 0)$  все траектории-спирали приближаются к точке  $(\pi, 0)$  либо при  $q \rightarrow +\infty$ , либо при  $q \rightarrow -\infty$  (здесь  $q$  – независимый параметр вдоль траекторий).

Поставим вопрос о расширении данной окрестности точки  $(\pi, 0)$  в полосе  $\Pi'$  (на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ ). Для этого переведем начало координат в точку  $(\pi, 0)$ . После такой замены переменных система (1.31), (1.32) (рассматриваемая уже в полосе  $\Pi$ ) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega - \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha - \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \\ \omega' &= \frac{1}{I} F(\alpha) - \sigma \omega^3 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) \sin \alpha + \frac{\omega}{m} s(\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для простоты рассмотрим систему (2.9) при условиях (0.9), (0.7), т.е. когда  $F(\alpha) = F_0(\alpha)$ ,  $s(\alpha) = s_0(\alpha)$ . После замены в полосе  $\Pi$  по формуле  $\tau = \sin \alpha$ ,  $|\tau| < 1$ , системе (2.9) сопоставим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{-n_0^2 \tau - \sigma \omega^3 + \sigma n_0^2 \omega \tau^2 + \frac{\sigma n_0^2}{2} \omega \sqrt{1 - \tau^2}}{-\omega - \sigma n_0^2 \tau (1 - \tau^2) - \sigma \omega^2 \tau + \frac{\sigma n_0}{2} \tau \sqrt{1 - \tau^2}}. \quad (2.10)$$

В уравнении (2.10) уже учтено условие  $\mu_1 = \mu_2$ , которое эквивалентно  $\frac{B}{mn_0} = \frac{\sigma n_0}{2}$ .

Пусть формально  $\tau = x, \omega = -y$ . Система (2.9), рассматриваемая в полосе  $\Pi$ , фазовые траектории которой совпадают с интегральными траекториями уравнения (2.10), рассматриваемого в полосе  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \frac{\sigma n_0}{2} x \sqrt{1-x^2}, \\ y' &= -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \frac{\sigma n_0^2}{2} y \sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x' &= y - \frac{\sigma n_0^2}{2} x + \frac{3\sigma n_0^2}{4} x^3 - \sigma y^2 x, \\ y' &= -n_0^2 x + \frac{\sigma n_0^2}{2} y - \sigma y^3 + \frac{3\sigma n_0^2}{4} y x^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

которая является системой сравнения для системы (2.11). Характеристическая функция пары систем (2.11) и (2.12) является, как уже отмечалось, кососимметрической билинейной функцией.

**Предложение 2.3.** *Характеристическая функция  $\chi((2.11), (2.12))$  при  $\sigma n_0 < 2$  в полосе  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$  положительно определена (она равна нулю лишь в начале координат).*

Действительно,

$$\chi((2.11), (2.12)) = \frac{\sigma n_0^2}{2} [y^2 - \sigma n_0^2 x y + n_0^2 x^2] \left[ \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) - \sqrt{1-x^2} \right].$$

Заметим, что правые части системы (2.12) отличаются от правых частей системы (2.11) лишь членами пятого порядка малости по  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , т. е. членами порядка  $\underline{O}(\rho^5)$ .

**Предложение 2.4.** *Точка  $(0, 0)$  является сложным устойчивым фокусом при  $\sigma n_0 < 2$  для системы (2.12).*

Действительно, индекс  $In$  (см. § 3) точки  $(0,0)$  для системы (2.12) совпадает с индексом  $In$  точки  $(0,0)$  для системы (2.11) и он отрицателен, поскольку зависит лишь от вторых и третьих производных правых частей рассматриваемых систем.

Поставим следующий вопрос: как соотносится знак характеристической функции как формы от упорядоченной пары систем на плоскости с углом поворота от поля одной системы к другой. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x' &= y - \sigma n_0^2 x + \sigma n_0^2 x^3 - \sigma y^2 x + \lambda x \sqrt{1-x^2}, \\ y' &= -n_0^2 x - \sigma y^3 + \sigma n_0^2 y x^2 + \lambda y \sqrt{1-x^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

зависящую от параметра  $\lambda > 0$ . Векторное поле системы (2.13) обладает некоторым свойством строгой монотонности (СМ) (см. далее) при некоторых условиях и при  $\sigma n_0 < 2$  в любой области без особых точек. Если при  $\lambda = \lambda_1$  систему (2.13) обозначить через (2.13'), а при  $\lambda = \lambda_2$  – через (2.13''), то справедливо равенство

$$\chi((2.13'), (2.13'')) = (\lambda_2 - \lambda_1) [y^2 - \sigma n_0^2 xy + n_0^2 x^2] \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, при  $\lambda_2 > \lambda_1$  и при  $\sigma n_0 < 2$  последняя функция положительно определена в полосе  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$  (равна нулю лишь в начале координат). Но как легко понять, начало координат для системы (2.13'') является «более неустойчивой» особой точкой, чем начало координат для системы (2.13'). Таким образом, векторное поле системы (2.13'') поворачивается при  $\lambda_2 > \lambda_1$  около векторного поля системы (2.13') на положительный угол.

Прежде чем говорить о характере траекторий системы (2.11), сформулируем одно вспомогательное утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Для поиска подходящей системы сравнения, в целях исследования существования предельных циклов, проблемы различения центра и фокуса и т.д., вовсе не обязательно иметь ТСП с центром в данной особой точке. Искомая система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку.

Пусть в области  $D$ , содержащей единственную особую точку системы  $(A)$ , заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система  $(B)$  имеет ту же единственную особую точку  $x_0$ .

Рассмотрим для определенности так называемые отрицательно ориентируемые системы, в которых траектории обходят точку  $x_0$  по часовой стрелке. Аналогично могут быть рассмотрены положительно ориентируемые системы.

**Лемма 2.11.** *Пусть область  $D$  является притягиваемой (отталкиваемой) точкой  $x_0$  отрицательно ориентируемой системы  $(B)$ . Тогда если характеристическая функция  $\chi((A), (B))$  положительно (отрицательно) определена в области  $D$ , то область  $D$  является притягиваемой (отталкиваемой) точкой  $x_0$  (отрицательно ориентируемой) системы  $(A)$ .*

Лемма 2.11 носит явно геометрический характер. Действительно, векторное поле системы  $(B)$  повернуто относительно векторного поля системы  $(A)$  на неотрицательный (неположительный) угол.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для устойчивых и неустойчивых предельных циклов.

Итак, в качестве системы  $(A)$  возьмем систему (2.11) (которая является отрицательно ориентируемой), а в качестве системы  $(B)$  – систему (2.12) (которая также отрицательно ориентируема). Возникает вопрос о размерах области  $D$ , фигурирующей в лемме 2.11.

**Предложение 2.5.** *Система (2.12) при  $\sigma n_0 < 2$  полосе  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$  обладает первым интегралом, который*

**Глава 2. Некоторые вопросы качественной теории...**

одновременно является и трансцендентной функцией в полосе, и мероморфной функцией во множестве  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$  без начала координат, которое является единственной существенно особой точкой для данного первого интеграла.

Доказательство. После замены переменных  $\frac{\sqrt{3}}{2}n_0x - y = u$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}n_0x + y = v$  система (2.12) приведет к уравнению

$$du \left[ u \left( \frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12} \right) - \frac{v}{12} - \frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0} uv^2 \right] + dv \left[ \frac{u}{12} + v \left( -\frac{\sigma n_0}{2\sqrt{3}} + \frac{7}{12} \right) + \frac{\sigma}{\sqrt{3}n_0} u^2 v \right] = 0.$$

После же замены  $u = tv$ ,  $v^2 = p$ ,  $v \neq 0$  оно примет вид

$$dp [C_1 t^2 + C_2] + 2p \left[ C_1 t - 1 - u\sqrt{3} \frac{\sigma}{n_0} tp \right] dt = 0.$$

Здесь введены обозначения  $C_1 = 7 + 2\sqrt{3}\sigma n_0$ ,  $C_2 = 7 - 2\sqrt{3}\sigma n_0$ . Заменой  $p = q^{-1}$  приводим его к линейному неоднородному уравнению вида

$$\frac{dq}{dt} [C_1 t^2 + C_2] + 2[1 - C_1 t]q + 8\sqrt{3} \frac{\sigma}{n_0} t = 0. \quad (2.14)$$

Общее решение однородного уравнения имеет следующий вид:

$$q_0(t) = C \frac{C_1 t^2 + C_2}{\exp \left\{ \frac{2}{C_1} \operatorname{arctg} \sqrt{C_2 t / C_1} \right\}}, \quad C = \text{const}.$$

Варьируя постоянную  $C$ , имеем дифференциальное уравнение, позволяющее получить трансцендентное решение уравнения (2.14). Особенности возникают лишь при  $u = v = 0$ , т.е. когда значение  $t$  не определено. Но последнее уравнение и задает начало координат на плоскости  $R^2\{x, y\}$ .

**Следствие 1.** Для системы (2.12) область притяжения — вся полоса  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$ .

**Следствие 2.** У системы (2.11) в полосе  $\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 1\}$  не существует замкнутых характеристик.

Доказательство. Начало координат для системы (2.12) — аттрактор (предложение 2.4). В силу предложения 2.5, область его притяжения — вся полоса. В силу предложения 2.3 попадаем в условия леммы 2.11.

**Следствие 3.** При  $\sigma n_0 < 2$ , а также при  $\frac{B}{m n_0} < \frac{\sigma n_0}{2}$  у систем вида (1.34), (1.35) в полосе  $\Pi'$  не существует простых и сложных предельных циклов, а также любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.

### § 8. О ТРАЕКТОРИЯХ, ИМЕЮЩИХ В КАЧЕСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫЕ ТОЧКИ ПЛОСКОСТИ

---

1. *Примеры из динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.* В этом параграфе будут рассмотрены вопросы существования и единственности траекторий динамических систем (2.1) на плоскости, имеющих в качестве  $\alpha$ - или

$\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки [28, 142, 192]. Таким образом, на сферах Римана или Пуанкаре предельными множествами данных траекторий будет северный полюс. Такие траектории уже по определению являются ключевыми, поскольку бесконечно удаленная точка всегда является особой.

Для начала рассмотрим системы вида (1.24),(1.25) и (1.31),(1.32).

**Лемма 2.12.** *Рассмотрим систему (1.24),(1.25) на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}.$$

*Тогда для любой достаточно гладкой функции  $F \in \Phi$  существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(+0, +\infty)$ ).*

Доказательство. Дополним фазовую плоскость  $R^2\{\alpha, \omega\}$  бесконечно удаленной точкой. Получим расширенную фазовую плоскость  $\overline{R^2\{\alpha, \omega\}}$ . Отобразим область  $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}$  на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы существуют новые координаты  $(\alpha, y)$ ,  $y = -(1/\omega)$ , в которые переводятся старые координаты из рассматриваемой области расширенной фазовой плоскости неособым преобразованием.

В переменных  $(\alpha, y)$  система (1.24),(1.25) эквивалентна уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \frac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \sin \alpha}{\frac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha) \sin \alpha}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы по-другому, нежели траектории системы (1.24),(1.25).

Видно, что у уравнения существует особая точка  $(0, 0)$ , соответствующая бесконечно удаленной точке  $(+0, +\infty)$  системы (1.24),(1.25). Нетрудно убедиться в том, что точка  $(0, 0)$  уравнения является гиперболическим седлом, что и доказывает лемму.

**Лемма 2.13.** *Рассмотрим систему (1.31),(1.32) на множестве*

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}.$$

*Тогда для любых достаточно гладких функций  $F \in \Phi$  и  $s \in \Sigma$  существует единственная траектория, уходящая в бесконечность (имеющая в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(+0, +\infty)$ ).*

Доказательство. Следуя методу доказательства леммы 2.12, отображая расширенную фазовую плоскость на сферу, делая аналогичную замену координат, приходим к уравнению

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y + \frac{\sigma}{I} y^2 F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \sin \alpha + y^2 \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha}{\frac{y^4}{I} F(\alpha) - \sigma y \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} y^3 F(\alpha) \sin \alpha - y^3 \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha}.$$

При этом траектории данного уравнения параметризованы по-другому, нежели траектории системы (1.31),(1.32).

Видно, что у уравнения существует особая точка  $(0, 0)$ , соответствующая бесконечно удаленной точке  $(+0, +\infty)$  системы (1.31),(1.32). Нетрудно убедиться, что данная особая точка имеет топологический тип грубого седла, что и доказывает лемму.

2. *Существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность.* Рассмотрим произвольную автономную систему дифференциальных уравнений (2.1) на плоскости. Будем сопоставлять данной системе уравнение, фазовые траектории которого параметризованы по-другому, а также последние отображены с расширенной фазовой плоскости

системы на сферу Римана (или Пуанкаре). При этом, как уже отмечалось, бесконечно удаленные точки перейдут в северный полюс сферы.

**Теорема 2.6.**

1) Если после замены фазовых переменных  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, y)$ , где  $y = \frac{1}{x_2}$ , у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка  $(x_1^0, 0)$ , то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 = x_1^0\},$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

2) Если после замены фазовых переменных  $(x_1, x_2) \rightarrow (y, x_2)$ , где  $y = \frac{1}{x_1}$ , у уравнения, заданного на сфере, появилась особая точка  $(0, x_2^0)$ , то у рассматриваемой системы существует траектория, стремящаяся к прямой

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 : x_2 = x_2^0\},$$

и имеющая в качестве предельного множества бесконечно удаленную точку.

Доказательство. Следуя леммам 2.12, 2.13, дополним фазовую плоскость бесконечно удаленной точкой, получив  $R^2 \cup \{\alpha, \omega\}$ . Отобразим расширенную плоскость на сферу Римана или Пуанкаре. В окрестности северного полюса сферы можно ввести координаты, отображающие эту окрестность на некоторую окрестность нуля координатной плоскости такие, что в случае 1) они равны  $(x_1, y)$ ,  $y = \frac{1}{x_2}$ , а в случае 2) –  $(y, x_2)$ ,  $y = \frac{1}{x_1}$ . В первом случае изучаем бесконечно удаленные точки

вдоль оси  $x_2$ , а во втором – вдоль оси  $x_1$ . Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам лемм 2.12, 2.13.

**Замечание 1.** Количество траекторий, уходящих на бесконечность, определяется через топологический тип бесконечно удаленной особой точки. В частности, в системах (1.24),(1.25), (1.31),(1.32) существует единственная траектория, уходящая на бесконечность, поскольку бесконечно удаленная точка (которая всегда является особой) является седлом (если, конечно, отображать не плоскость, а фазовый цилиндр).

**Замечание 2.** Могут существовать фазовые траектории, уходящие на бесконечность на фазовой плоскости, вдоль которых обе фазовые переменные неограниченно возрастают. В этом случае, после замены  $x_1 = \frac{1}{y_1}$ ,  $x_2 = \frac{1}{y_2}$ , исследуя топологический тип северного полюса сферы, который всегда является особой точкой, можно попытаться доказать существование и единственность траекторий, приближающихся к прямым вида

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0,$$

где  $A_1A_2 \neq 0$ .

Действительно, в этом случае к северному полюсу сферы траектория будет стремиться под определенным углом, что соответствует стремлению траектории на плоскости к прямой, имеющей ненулевую и конечный угловой коэффициент наклона.

3. *Элементы теории монотонных векторных полей.* Рассмотрим семейство достаточно гладких векторных полей  $\vartheta_\varepsilon$  в области  $D$  двумерной ориентированной римановой поверхности. В касательном пространстве  $T_qD$  каждой точки  $q \in D$  можно измерять углы между векторами рассматриваемого семейства.

**Определение.** *Однопараметрическое семейство полей  $\vartheta_\varepsilon$  ( $\varepsilon \in E$ ) обладает свойством монотонности (СМ) в  $D$ , если для любых точек  $q \in D$ ,  $\varepsilon_1 \in E$ ,  $\varepsilon_2 \in E$  в касательном пространстве  $T_qD$  угол между векторами  $\vartheta_{\varepsilon_1}, \vartheta_{\varepsilon_2} \in T_qD$  является мо-*

нотонной функцией разности параметров  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ; при этом сохраняется ориентация изменения угла. Если рассматриваемая монотонная зависимость строгая, то говорим, что  $\vartheta_\varepsilon$  обладает СМ строгим.

**Теорема 2.7.** Пусть поле  $\vartheta_\varepsilon$  обладает СМ в области  $D$  плоскости  $R^2$ . Пусть  $x_0$  – неособое начальное условие для фазовой траектории поля  $\vartheta_\varepsilon$  при всех  $\varepsilon \in E$ .

Тогда, если для любого  $\varepsilon \in E$  предельное множество траекторий, начинающихся в  $x_0$ , есть множество  $\gamma_0$ , лежащее в конечной части плоскости, причем  $\{A, B\} = \partial\gamma_0$ ,  $A$  – предельное множество траектории поля  $\vartheta_{\varepsilon_1}$ , а  $B$  – предельное множество траектории  $\vartheta_{\varepsilon_2}$ ,  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то  $\varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  тогда и только тогда, когда существует множество  $C$ , являющееся предельным множеством траектории поля  $\vartheta_\varepsilon$ , причем при увеличении  $\varepsilon$  предельное множество монотонно смещается от  $A$  до  $B$ . (Здесь идет речь одновременно либо об  $\alpha$ -, либо об  $\omega$ -предельных множествах семейства траекторий.)

При этом искомая фазовая траектория единственна, если СМ строгое.

Заметим, что множество всех предельных множеств траектории, начинающейся в точке  $x_0$ , может быть не односвязным.

Схема доказательства. По теореме Бендиксона [28] предельное множество на плоскости – только лишь положение равновесия и простой или сложный предельный цикл. Поэтому, в принципе, достаточно разобрать все три случая (данное исследование мы для краткости опустим).

Можно считать, что для любого  $\varepsilon$  множество  $\gamma_0$  состоит из  $\omega$ -предельных множеств. Согласно теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей уравнений, при малом изменении параметра  $\varepsilon$  предельное множество останется в близкой окрестности перво-

начального (в частности, если множество  $\gamma_0$  односвязно). Если последнее множество многосвязно, то последовательно перебираем каждую из компонент связности. В силу выполнения свойства монотонности, применяя теорию систем сравнения, немонотонная зависимость траектории от параметра  $\varepsilon$  исключается.

Пусть система обладает строгим СМ. От противного. Пусть для точки  $M \in \gamma_0$  существуют хотя бы два параметра  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ , при которых траектории полей  $\vartheta_{\varepsilon^1}, \vartheta_{\varepsilon^2}$  стремятся к точке  $M$ . Тогда траектории всех полей  $\vartheta_{\varepsilon}, \varepsilon \in [\varepsilon^1, \varepsilon^2]$  стремятся к точке  $M$  (в силу выполнения СМ). Поскольку СМ строгое, для любого  $\delta > 0$  система с векторным полем  $\vartheta_{\varepsilon+\delta}$  ( $\varepsilon + \delta \in E$ ) является системой сравнения для  $\vartheta_{\varepsilon}$ . Легко понять, что траектория поля  $\vartheta_{\varepsilon+\delta}$ , выпущенная из неособого начального условия, никогда не пересечет соответствующую траекторию поля  $\vartheta_{\varepsilon}$ , выпущенную из того же начального условия. В силу последнего, траектории полей  $\vartheta_{k_1}$  и  $\vartheta_{k_2}$  будут иметь разные предельные множества, причем  $\varepsilon^1 < k_1 < k_2 < \varepsilon^2$ . Противоречие.

Аналогично может быть доказана качественно другая лемма, которая верна и на любых гладких двумерных ориентированных многообразиях.

**Лемма 2.14.** *Рассмотрим семейство полей  $\vartheta_{\varepsilon}$  ( $\varepsilon \in E$ ) в области сферы  $S^2$  следующего вида. Южный ( $S$ ) и северный ( $N$ ) полюса сферы являются седлами. Пусть данное семейство полей обладает строгим СМ таким образом, что при некотором  $\varepsilon_1$   $\omega$ -предельным множеством траектории, выходящей из южного полюса, является южный полюс (рис. 2.1), а при некотором  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$   $\omega$ -предельным множеством траектории, выходящей из северного полюса, является северный полюс (рис. 2.2). При этом, обе рассмотренные ситуации – это гомоклинические ситуации на сфере, когда существует лишь одна точка*

покоя (кроме  $N$  и  $S$ ), которая содержится в области, ограниченной указанными сепаратрисами. Других нетривиальных предельных множеств в этой области сферы нет.

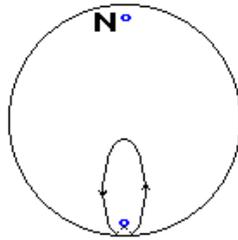


Рис. 2.1

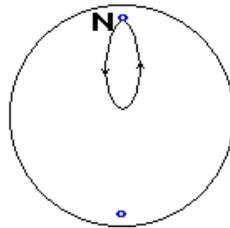


Рис. 2.2.

Тогда существует единственное значение параметра  $\varepsilon = \varepsilon_0 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , такое, что траектория, выходящая из южного (северного) полюса, входит в северный (южный) полюс (рис. 2.3) (это – гетероклиническая ситуация на сфере) (ср. с [65]).

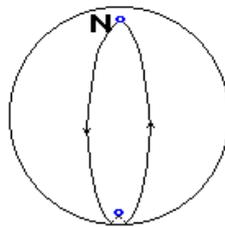


Рис. 2.3

### § 9. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории...

Доказательство. Единственность. От противного. Пусть два параметра  $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$  обладают указанным свойством. Тогда, в силу строгого СМ, все параметры из интервала  $(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$  обладают указанным свойством. Рассуждая как в теореме 2.7, приходим к противоречию со свойством монотонности.

Существование. Таким образом, существует единственное значение параметра  $\varepsilon = \varepsilon_0$  такое, что при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  реализуется одна гомоклиническая ситуация на сфере, а при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  – другая. От противного. Пусть при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  реализуется одна из гомоклинических ситуаций. Тогда существует окрестность значения  $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$U_{\varepsilon_0}^{\delta} = \{\varepsilon: |\varepsilon - \varepsilon_0| < \delta\}$$

такая, что для любого  $\varepsilon \in U_{\varepsilon_0}^{\delta}$  справедлива одна и та же гомоклиническая ситуация. Противоречие. Лемма полностью доказана.

**Замечание.** Мы получили еще один метод доказательства лемм 2.12 и 2.13. Действительно, искомые поля удовлетворяют условиям леммы 2.14, поскольку бесконечно удаленная точка проектируется в северный полюс сферы Римана (или Пуанкаре), а точка  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  – в южный.

### § 9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И УСТОЙЧИВЫЕ ПО ПУАССОНУ ТРАЕКТОРИИ В ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

---

Часто в системах обыкновенных дифференциальных уравнений существуют бесконечные всюду плотные в некоторых огра-

ниченных множества семейства замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории также оказываются всюду плотными в некоторой области фазового пространства. Здесь наряду с понятием «всюду плотность во множестве» возникает более конкретное понятие всюду плотности возле себя. Последнее свойство траекторий имеет классическое название устойчивости по Пуассону (см. также [15, 33, 97, 199, 223, 245–247]).

Напомним, что траектория в фазовом пространстве устойчива по Пуассону, если через конечное время она возвращается в любую достаточно малую окрестность любой своей точки [15, 33].

Достаточные условия существования устойчивых по Пуассону траекторий формулируются в следующей теореме.

**Теорема 2.8.** *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$x' = f(t, x, \mu), \quad (2.15)$$

*зависящую от параметра  $\mu \in M \subseteq R^1$  в области  $D \subseteq R^{n+1}\{x, t\}$ . Пусть для некоторых начальных условий  $(x_0, t_0) \in D$  проекция интегральной траектории  $(x_*(t), t)$  с данными начальными условиями и параметром  $\mu = \mu_0$  на пространство  $R^n\{x\}$  является незамкнутой кривой и продолжаема на всю ось времени.*

*Тогда, если в любой окрестности  $U_{\mu_0}$  точки  $\mu = \mu_0 \in M$  существует значение  $\mu$  такое, что проекция интегральной траектории  $x(t, \mu)$  с произвольными начальными условиями  $(x_1, t_1) \in (x_*(t), t)$  на пространство  $R^n\{x\}$  – замкнутая кривая, то кривая  $x_*(t)$ ,  $t \in R$ , принадлежащая пространству  $R^n\{x\}$ , всюду плотна возле себя (устойчива по Пуассону).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку  $x_1$  проекции незамкнутой интегральной кривой  $x_*(t)$  и проекцию

решения системы (2.15) с начальным условием  $(x_1, t_1) \in \in (x_*(t), t)$  при  $\mu = \mu_0$ . Поскольку это решение продолжаемо на всю ось времени, по теореме о непрерывной зависимости решения от правых частей и параметра, для любого  $\varepsilon > 0$  существуют достаточно близкое значение  $\mu_1$  к значению  $\mu_0$ , а также положительное число  $T_1$  такие, что при  $t_1 \leq t \leq T_1$  выполнено условие

$$|x_*(t) - x^0(t)| < \varepsilon.$$

Здесь  $x_*(t)$  – решение системы (2.15) при  $\mu = \mu_0$  с начальным условием  $(x_1, t_1)$ , а  $x^0(t)$  – решение системы (2.15) при  $\mu = \mu_1$  с тем же начальным условием. Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  в  $\varepsilon$ -окрестности  $U_{x_1}^\varepsilon$  точки  $x_1 \in R^n \{x\}$  существует проекция решения системы (2.15) при  $\mu = \mu_0$  и при некотором  $T_1 > 0$ . Отсюда вытекает плотность траектории  $x_*(t)$ , принадлежащей пространству  $R^n \{x\}$ , возле себя. При этом пространство  $R^n \{x\}$  является проекцией фазового пространства  $R^{n+1} \{t, x\}$ . Теорема 2.8 доказана.

**Замечание 1.** Под замкнутыми кривыми в пространстве  $R^n \{x\}$  следует понимать проекции периодических решений системы (2.15) как интегральных кривых из пространства  $R^{n+1} \{t, x\}$  в пространство  $R^n \{x\}$ .

**Замечание 2.** Если рассмотреть замыкание  $Z_1$  устойчивой по Пуассону траектории  $x_*(t)$  как множества в пространстве  $R^n \{x\}$ , то во множестве  $Z_1$  рассматриваемое семейство замкнутых траекторий всюду плотно. В свою очередь, если рассмотреть замыкание  $Z_2$  семейства замкнутых траекторий как множества в пространстве  $R^n \{x\}$ , то во множестве  $Z_2$  устойчивая по Пуассону траектория  $x_*(t)$  также всюду плотна.

**Следствие.** Множества  $Z_1$  и  $Z_2$  совпадают. И прямое, и обратное включения следуют из плотности семейства замкнутых кривых и устойчивости по Пуассону.

Как будет показано в главах 4, 6, у некоторых неавтономных систем в  $R^3$  и в  $R^4$  существуют устойчивые по Пуассону траектории.

## § 10. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПУАНКАРЕ И СИСТЕМЫ СРАВНЕНИЯ

*1. Топографические системы в пространственном случае.* Пространственные ТСП (см. также [29]) можно определить аналогично ТСП на плоскости. При этом (невыврожденные) гиперповерхности уровня коразмерности  $l$  в пространстве  $R^n$  образуют топографическую систему вложенных друг в друга гиперповерхностей, имеющих вершину в особой точке [200, 209].

**Теорема 2.9.** Пусть в односвязной области  $D$  пространства  $R^n$ , содержащей единственную точку покоя  $x_0$  достаточно гладкого векторного поля  $v_1$ , существует гиперповерхность  $\Gamma \ni x_0$ , продолжающаяся до границы  $\partial D$  и пересекающая ее по поверхности  $\gamma$  (поверхность  $\gamma$  может быть бесконечно удалена), такая, что существует ТСП с центром в  $x_0$ , задаваемая гладкой функцией  $V$ , продолжающаяся вдоль  $\Gamma$  до  $\gamma$ , заполняющая область  $K \subseteq D$  и обладающая свойством

$$(v_1, v_2)|_{R^n} > 0$$

( $v_2 = \text{grad}V$ ) почти всюду в  $K$  за исключением, быть может, некоторых замкнутых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя  $x_0$ . (Здесь  $V = \text{const}$  – семейство гиперповерхностей ТСП.)

Тогда во всей области  $D$  не существует ни одной замкнутой кривой, состоящей из траекторий поля  $v_1$ , пересекающей гиперповерхность  $\Gamma$ .

Доказательство. От противного. Пусть такая кривая  $\gamma_0$  существует,  $\{N_1, N_2\} = \Gamma \cap \gamma_0 \neq \emptyset$ , и точка  $N_1$  – неособое начальное условие при движении по кривой  $\gamma_0$ . Через точку  $N_1$  проходит замкнутая гиперповерхность  $\bar{\Gamma}$  из ТСП, причем  $\bar{\Gamma} \subset K$ . Если гиперповерхность  $\bar{\Gamma}$  ограничивает область  $\bar{S}$ , то существует  $\varepsilon > 0$  (которое уменьшим насколько нужно) такое, что:

- 1)  $N_\varepsilon \in \bar{\Gamma}_\varepsilon \cap \Gamma$ , где  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  – гиперповерхность ТСП;
- 2) расстояние между точками  $N_\varepsilon$  и  $N_1$  равно  $\varepsilon$ ;
- 3)  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  ограничивает область  $\bar{S}_\varepsilon \supset \bar{S}$ .

Выбранное значение  $\varepsilon$  таково, что через конечное время точка, двигаясь по траектории  $\gamma_0$  с начальным условием  $N_1$ , покинет область  $\bar{S}_\varepsilon$ . Поскольку  $\bar{S}_\varepsilon \subset K$  и выполнено неравенство теоремы почти всюду в  $K$  за исключением, быть может, некоторых замкнутых гиперповерхностей, не содержащих внутри себя  $x_0$ , то точка с начальным условием  $N_1$  никогда больше в область  $\bar{S}_\varepsilon \subset K \subset D$  не вернется. Так как  $\bar{S} \subset \bar{S}_\varepsilon$ , то приходим к противоречию с замкнутостью кривой  $\gamma_0$ . Теорема доказана.

Напомним, что пространственные ТСП особенно удачно помогают решить в ряде случаев проблему различения центра и фокуса. В последнем случае вовсе не обязательно иметь с центром в данной особой точке ТСП. Система сравнения может иметь либо притягивающую, либо отталкивающую особую точку (см. также [62]).

Пусть в области  $D$ , содержащей единственную особую точку системы (А), заданной для простоты на плоскости, стоит проблема различения центра и фокуса. Пусть в этой же области система (Б) имеет ту же единственную особую точку  $x_0$ .

Характеристическая функция в пространственном случае строится следующим образом. Пусть  $v_1, v_2$  – два гладких векторных поля в пространстве  $R^n$ . По полю  $v_1$  строится (вообще говоря, неоднозначно) нормальное гладкое векторное поле  $n$ . В каждом конкретном случае поле  $n$  строится из тех соображений, которые позволяют получить в дальнейшем знакоопределенную характеристическую функцию. Последняя определяется как скалярное произведение

$$\chi = (n, v_2).$$

2. *Четномерный случай.* В четномерном случае характеристическая функция имеет наиболее естественный вид.

**Пример.** Рассмотрим систему слабо перевязанных маятников, т.е. консервативную систему с малыми (неконсервативными) добавками, задаваемую полем  $\{X_1, X^1, \dots, X_n, X^n\}$  в координатах  $x = (x_1, x^1, \dots, x_n, x^n)$  следующего вида:

$$X_i = -x^i + \varepsilon F_i(x), \quad X^i = G_i(x) + \varepsilon F^i(x), \quad dG(0) \geq 0.$$

Тогда естественно выбрать характеристическую функцию в виде

$$\chi = \sum_{i=1}^n (X_i Y^i - X^i Y_i),$$

при этом векторное поле  $Y$  системы сравнения имеет следующий вид:

$$Y = \{Y_1, Y^1, \dots, Y_n, Y^n\},$$

$$\text{где } Y_i = -x^i, \quad Y^i = G_i(x).$$

И в многомерном случае можно привести соответствующие утверждения, подобно двумерным ТСП и системам сравнения. Вынесем их в главы 6, 7, когда будут изучаться задачи пространственного движения тел в сопротивляющейся среде.

### § 11. ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

1. *Неконсервативные системы с группами симметрий.* В данном параграфе изучаются вопросы интегрируемости классов многомерных, вообще говоря, неконсервативных систем, имеющих, по крайней мере, одну периодическую координату. Исследуемые далее системы имеют такие симметрии, при которых они становятся системами с переменной диссипацией с нулевым средним (в смысле определения, данного в работе). Подобные системы на двумерном цилиндре уже приводились в предыдущем материале.

Рассмотрим следующие системы, вообще говоря, неконсервативного вида [216, 217, 241]:

$$\dot{\alpha} = f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad \dot{\omega}_k = f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha), \quad k=1, \dots, n, \quad (2.16)$$

заданные на  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^n\{\omega\}$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , где функции  $f_{\lambda}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)$ ,  $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ , таковы:

$$f_{\alpha}(-t_1, -t_2, t_3) = -f_{\alpha}(t_1, t_2, t_3), \quad f_{\alpha}(t_1, t_2, -t_3) = f_{\alpha}(t_1, t_2, t_3),$$

$$f_k(-t_1, -t_2, t_3) = -f_k(t_1, t_2, t_3), \quad f_k(t_1, t_2, -t_3) = -f_k(t_1, t_2, t_3),$$

а система (2.16) соответствует системе

$$\frac{d\omega_k}{d\alpha} = \frac{f_k(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)}{f_{\alpha}(\omega, \sin \alpha, \cos \alpha)},$$

которая подстановкой  $\tau = \sin \alpha$  приводится к виду

$$\frac{d\omega_k}{d\tau} = \frac{f_k(\omega, \tau, \varphi_k(\tau))}{f_{\alpha}(\omega, \tau, \varphi_{\alpha}(\tau))},$$

где  $\varphi_{\lambda}(-\tau) = \varphi_{\lambda}(\tau)$ ,  $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ .

**Глава 2. Некоторые вопросы качественной теории...**

Пусть функции  $f_\lambda$  ( $\lambda = \alpha, 1, \dots, n$ ) – полиномы по  $\omega, \tau$ .

Рассмотрим для начала случай систем на  $S^1 \times R^1$ . Например, следующим системам

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = -\omega + \beta \sin \alpha, \\ \omega^\bullet = \sin \alpha \cos \alpha, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = -\omega + \beta \sin \alpha + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha + \beta \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega^\bullet = \sin \alpha \cos \alpha - \beta \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \beta \omega^3 \cos \alpha, \end{cases}$$

аналогичным системам (1.18) и (1.27), (1.28), в других переменных ( $\omega, \tau$ ) сопоставим уравнения

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau}{-\omega + \beta\tau}$$

и

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\tau + \beta\omega[\omega^2 - \tau^2]}{-\omega + \beta\tau + \beta\tau[\omega^2 - \tau^2]},$$

соответственно.

В случае же  $S^1 \setminus \{\alpha = \pi k, k \in Z\} \times R^2$  следующая система

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = -z_2 + \beta \sin \alpha, \\ z_2^\bullet = \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^\bullet = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (2.17)$$

возникающая при описании пространственного движения тела в сопротивляющейся среде (см. также главу 6), соответствует следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau - z_1^2 \times \left(\frac{1}{\tau}\right)}{-z_2 + \beta\tau}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{z_1 z_2 \frac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta\tau}. \end{cases} \quad (2.18)$$

2. Системы на  $S^1 \times R^1$ . Для начала рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) системы следующего вида:

$$\begin{cases} x^* = ax + by + f_1 x^3 + f_2 x^2 y + f_3 x y^2 + f_4 y^3, \\ y^* = cx + dy + g_1 x^3 + g_2 x^2 y + g_3 x y^2 + g_4 y^3, \end{cases}$$

рассмотренной на плоскости  $R^2\{x, y\}$ . Кроме того, для определенности будем считать, что корни характеристического уравнения для  $\lambda$ -матрицы

$$\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

вещественны. В этом случае можно считать, что  $b=0$ . В случае же наличия комплексно-сопряженных корней у данного уравнения можно считать, что  $ad - bc = 1$ .

Применяя замену  $y = tx$  переменных, характерную для однородных систем, придем к интегрированию следующего тождества:

$$\begin{aligned} & [at + bt^2 + f_1 tx^2 + f_2 t^2 x^2 + f_3 t^3 x^2 + f_4 t^4 x^2 - \\ & - c - dt - g_1 x^2 - g_2 tx^2 - g_3 t^2 x^2 - g_4 t^3 x^2] dx + \\ & + [ax + btx + f_1 x^3 + f_2 tx^3 + f_3 t^2 x^3 + f_4 t^3 x^3] dt = 0. \end{aligned}$$

Видно, что нелинейность характеризуют 8 параметров. Для интегрирования в элементарных функциях последнего

тождества, как однородного уравнения, достаточно наложить 5 независимых соотношений:

$$g_1=0, f_1=g_2=\beta_1, f_2=g_3=\beta_2, f_3=g_4=\beta_3, f_4=0.$$

**Предложение 2.6.** *Трехпараметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $R^2\{x, y\}$*

$$\begin{cases} x^* = ax + by + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 y + \beta_3 xy^2, \\ y^* = cx + dy + \beta_1 x^2 y + \beta_2 xy^2 + \beta_3 y^3 \end{cases}$$

*обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.*

Схема доказательства. После несложных преобразований приходим к необходимости интегрирования следующего уравнения Бернулли:

$$[at + bt^2 - c - dt] \frac{dx}{dt} + [a + bt]x + [\beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2]x^3 = 0,$$

которое заменой  $x^{-2} = u$  сводится к линейному неоднородному

$$\left[ -\frac{at + bt^2 - c - dt}{2} \right] \frac{du}{dt} + [a + bt]u = -\beta_1 - \beta_2 t - \beta_3 t^2.$$

Поскольку первообразная функции  $\frac{a + bt}{at + bt^2 - c - dt}$  выражается через элементарные функции, общее решение однородной части последнего уравнения тоже выражается через элементарные функции.

Если же мы считаем, что без ограничения общности  $b=0$ , то частное решение последнего неоднородного уравнения выражается через конечную комбинацию элементарных функций.

**Пример 1.** Системы следующего вида

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = a \sin \alpha + b\omega + \beta_1 \sin^3 \alpha + \beta_2 \omega \sin^2 \alpha + \beta_3 \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega^\bullet = c \sin \alpha \cos \alpha + d\omega \cos \alpha + \beta_1 \omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ + \beta_2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_3 \omega^3 \cos \alpha \end{cases}$$

имеют первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

Рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) системы следующего вида:

$$\begin{cases} x^\bullet = ax + by + p_1 x^5 + p_2 x^4 y + p_3 x^3 y^2 + p_4 x^2 y^3 + p_5 x y^4 + p_6 y^5, \\ y^\bullet = cx + dy + q_1 x^5 + q_2 x^4 y + q_3 x^3 y^2 + q_4 x^2 y^3 + q_5 x y^4 + q_6 y^5, \end{cases}$$

рассмотренной на плоскости  $R^2\{x, y\}$ .

Поступая аналогичным образом, для интегрирования последнего уравнения придем к интегрированию следующего тождества:

$$\begin{aligned} & [at + bt^2 + p_1 t x^4 + p_2 t^2 x^4 + p_3 t^3 x^4 + p_4 t^4 x^4 + p_5 t^5 x^4 + p_6 t^6 x^4 - \\ & - c - dt - q_1 x^4 - q_2 t x^4 - q_3 t^2 x^4 - q_4 t^3 x^4 - q_5 t^4 x^4 - q_6 t^5 x^4] dx + \\ & + [ax + btx + p_1 x^5 + p_2 t x^5 + p_3 t^2 x^5 + p_4 t^3 x^5 + p_5 t^4 x^5 + p_6 t^5 x^5] dt = 0. \end{aligned}$$

Видно, что в данном случае нелинейность характеризуют 12 параметров. Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества, как однородного уравнения, достаточно наложить 7 независимых соотношений:

$$q_1 = 0, \quad p_1 = q_2 = \gamma_1, \quad p_2 = q_3 = \gamma_2, \quad p_3 = q_4 = \gamma_3,$$

$$p_4 = q_5 = \gamma_4, \quad p_5 = q_6 = \gamma_5, \quad p_6 = 0.$$

**Предложение 2.7.** *Пятипараметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $R^2\{x, y\}$*

$$\begin{cases} x^* = ax + by + \gamma_1 x^5 + \gamma_2 x^4 y + \gamma_3 x^3 y^2 + \gamma_4 x^2 y^3 + \gamma_5 x y^4, \\ y^* = cx + dy + \gamma_1 x^4 y + \gamma_2 x^3 y^2 + \gamma_3 x^2 y^3 + \gamma_4 x y^4 + \gamma_5 y^5 \end{cases}$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

**Пример 2.** Системы следующего вида

$$\begin{cases} \alpha^* = a \sin \alpha + b \omega + \gamma_1 \sin^5 \alpha + \gamma_2 \omega \sin^4 \alpha + \gamma_3 \omega^2 \sin^3 \alpha + \\ \quad + \gamma_4 \omega^3 \sin^2 \alpha + \gamma_5 \omega^4 \sin \alpha, \\ \omega^* = c \sin \alpha \cos \alpha + d \omega \cos \alpha + \gamma_1 \omega \sin^4 \alpha \cos \alpha + \gamma_2 \omega^2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + \\ \quad + \gamma_3 \omega^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \gamma_4 \omega^4 \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_5 \omega^5 \cos \alpha \end{cases}$$

имеют первый интеграл, выражающийся через элементарные функции.

А теперь рассмотрим возможности полного интегрирования (в элементарных функциях) систем более общего вида. А именно, нелинейность является произвольной однородной формой нечетной степени  $2n-1$ .

Тогда справедливо более общее утверждение, чем предложения 2.6 и 2.7.

**Предложение 2.8.**  $2n-1$ -параметрическое семейство систем уравнений на плоскости  $R^2 \{x, y\}$

$$\begin{cases} x^* = ax + by + \delta_1 x^{2n-1} + \delta_2 x^{2n-2} y + \dots + \delta_{2n-2} x^2 y^{2n-3} + \delta_{2n-1} x y^{2n-2}, \\ y^* = cx + dy + \delta_1 x^{2n-2} y + \delta_2 x^{2n-3} y^2 + \dots + \delta_{2n-2} x y^{2n-2} + \delta_{2n-1} y^{2n-1} \end{cases}, \quad (2.19)$$

обладает (вообще говоря, трансцендентным) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.

Семейство уравнений (2.19) действительно зависит от  $2n-1$  независимых параметров, поскольку общая нелинейность нечетной степени в данном случае характеризуется  $4n$  параметрами, на которые накладываются  $2n+1$  условий.

3. Системы на  $S^1 \times R^2$ . Рассмотрим далее случай системы, заданной на трехмерном цилиндре  $S^1 \setminus \{\alpha = \pi k, k \in Z\} \times R^2$ .

Будем исследовать систему вида (2.17), которая сводится к (2.18), а также систему

$$\begin{cases} \alpha^* = -z_2 + \beta(z_1^2 + z_2^2) \sin \alpha + \beta \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ z_2^* = \sin \alpha \cos \alpha + \beta z_2 (z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^* = \beta z_1 (z_1^2 + z_2^2) \cos \alpha - \beta z_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases}$$

которая, соответствует системе

$$\begin{cases} \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{\tau + \beta z_2 (z_1^2 + z_2^2) - \beta z_2 \tau^2 - z_1^2 \frac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta \tau (z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \\ \frac{dz_1}{d\tau} = \frac{\beta z_1 (z_1^2 + z_2^2) - \beta z_1 \tau^2 + z_1 z_2 \frac{1}{\tau}}{-z_2 + \beta \tau (z_1^2 + z_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Аналогичным образом производится переход к однородным координатам  $u_k$ ,  $k = 1, 2$ , по формулам  $z_k = u_k \tau$ .

Система (2.18) приведет к виду

$$\begin{cases} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau}, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, к уравнению

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1 u_2 - \beta u_1}. \quad (2.21)$$

Данное уравнение интегрируется, в элементарных функциях, поскольку интегрируется тождество

$$d \left( \frac{1 - \beta u_2 + u_2^2}{u_1} \right) + du_1 = 0,$$

и имеет в координатах  $(\tau, z_1, z_2)$  первый интеграл следующего вида:

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \beta z_2 \tau + \tau^2}{z_1 \tau} = \text{const}.$$

Система же (2.20) после приведения ее к «однородному» виду соответствует системе

$$\begin{cases} \tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{\tau + \beta u_2 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_2 \tau^3 - u_1^2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \\ \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{\beta u_1 \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) - \beta u_1 \tau^3 + u_1 u_2 \tau}{-u_2 \tau + \beta \tau^3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta \tau (1 - \tau^2)}, \end{cases}$$

которая также приводится к (2.21).

Рассмотрим проблему интегрирования системы более общего вида

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{ax + by + cz + c_1 z^2 \frac{1}{x} + c_2 zy \frac{1}{x} + c_3 y^2 \frac{1}{x} + Z_1(x, y, z)}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \frac{1}{x} + f_2 zy \frac{1}{x} + f_3 y^2 \frac{1}{x} + X_1(x, y, z)}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{gx + hy + iz + i_1 z^2 \frac{1}{x} + i_2 zy \frac{1}{x} + i_3 y^2 \frac{1}{x} + Y_1(x, y, z)}{dx + ey + fz + f_1 z^2 \frac{1}{x} + f_2 zy \frac{1}{x} + f_3 y^2 \frac{1}{x} + X_1(x, y, z)}, \end{cases} \quad (2.22)$$

имеющей особенность типа  $1/x$ . Функции же  $X_1(x, y, z)$ ,  $Y_1(x, y, z)$ ,  $Z_1(x, y, z)$  являются однородными по  $x, y, z$  степени  $l$ .

Для начала рассмотрим случай, когда  $X_1(x, y, z) = Y_1(x, y, z) = Z_1(x, y, z) = 0$ .

Вводя, как и ранее, замены  $y = ix$ ,  $z = vx$ , получим, что система (2.22) приводится к следующей системе:

$$\begin{cases} x \frac{dv}{dx} + v = \frac{ax + bux + cvx + c_1 v^2 x + c_2 v ux + c_3 u^2 x}{dx + e ux + f vx + f_1 v^2 x + f_2 v ux + f_3 u^2 x}, \\ x \frac{du}{dx} + u = \frac{gx + hux + ivx + i_1 v^2 x + i_2 v ux + i_3 u^2 x}{dx + e ux + f vx + f_1 v^2 x + f_2 v ux + f_3 u^2 x}, \end{cases}$$

которой сопоставим уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - v[d + eu + fv + f_1 v^2 + f_2 vu + f_3 u^2]}{g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - u[d + eu + fv + f_1 v^2 + f_2 vu + f_3 u^2]}.$$

Пусть  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ . Все в таком случае сводится к интегрированию соотношения

$$\begin{aligned} [g + hu + iv + i_1 v^2 + i_2 vu + i_3 u^2 - du - eu^2 - fuv]dv = \\ = [a + bu + cv + c_1 v^2 + c_2 vu + c_3 u^2 - dv - euv - fv^2]du. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Имеем, вообще говоря, 15-параметрическое семейство уравнений в полных дифференциалах. Для интегрирования в элементарных функциях последнего тождества, как однородного уравнения, достаточно наложить 7 соотношений:

$$g = 0, \quad i_3 = e, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad c_2 = e, \quad c = h, \quad 2c_1 = i_2 + f. \quad (2.24)$$

Введем 8 параметров  $\beta_1, \dots, \beta_8$  и рассмотрим их в качестве независимых:

$$\begin{aligned} g = 0, \quad h = \beta_1, \quad i = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = \beta_2, \quad i_3 = \beta_3, \quad d = \beta_4, \quad e = \beta_3, \\ f = \beta_5, \quad a = \beta_6, \quad b = \beta_7, \quad c = \beta_1, \quad c_1 = \frac{\beta_2 + \beta_5}{2}, \quad c_2 = \beta_3, \quad c_3 = \beta_8. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (2.23) при выполнении группы условий (2.24) сводится к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta_6 + \beta_7 u + (\beta_1 - \beta_4)v + \frac{\beta_2 - \beta_5}{2}v^2 + \beta_8 u^2}{(\beta_1 - \beta_4)u + (\beta_2 - \beta_3)vu}, \quad (2.25)$$

после чего уравнение (2.25) интегрируется в элементарных функциях.

Действительно, интегрируя тождество (2.25), получаем следующее соотношение:

$$d\left[\frac{(\beta_1 - \beta_4)v}{u}\right] + d\left[\frac{(\beta_2 - \beta_5)v^2}{2u}\right] + d\left[\frac{\beta_6}{u}\right] - d[\beta_7 \ln|u|] - d[\beta_8 u] = 0,$$

которое в координатах  $(x, y, z)$  позволяет получить первый интеграл в следующем виде:

$$\frac{\frac{\beta_2 - \beta_5}{2} z^2 - \beta_8 y^2 + (\beta_1 - \beta_4)zx + \beta_6 x^2}{yx} - \beta_7 \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \text{const}.$$

Таким образом, можно сделать вывод об интегрируемости в элементарных функциях следующей, вообще говоря, неконсервативной системы, зависящей от 8 параметров:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{\beta_6 x + \beta_7 y + \beta_1 z + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z^2 \frac{1}{x} + \beta_3 z y \frac{1}{x} + \beta_8 y^2 \frac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\beta_1 y + \beta_2 z y \frac{1}{x} + \beta_3 y^2 \frac{1}{x}}{\beta_4 x + \beta_3 y + \beta_5 z}. \end{cases}$$

**Следствие.** Следующая система третьего порядка на  $S^1 \{\alpha \bmod 2\pi \setminus \alpha = \pi k, k \in Z\} \times R^2 \{z_1, z_2\}$ , зависящая от 8 параметров, обладает, вообще говоря, трансцендентным (в смысле теории функций комплексного переменного) первым интегралом, выражающимся через элементарные функции:

$$\begin{cases} \alpha^* = \beta_4 \sin \alpha + \beta_3 z_1 + \beta_5 z_2, \\ z_2^* = \beta_6 \sin \alpha \cos \alpha + \beta_7 z_1 \cos \alpha + \beta_1 z_2 \cos \alpha + \frac{\beta_2 + \beta_5}{2} z_2^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \\ \quad + \beta_3 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_8 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^* = \beta_1 z_1 \cos \alpha + \beta_2 z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \beta_3 z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{cases}$$

Последняя система при  $\beta_1 = \beta_3 = \beta_7 = 0$ ,  $\beta_2 = \beta_6 = 1$ ,  $\beta_5 = \beta_8 = -1$ ,  $\beta_4 = \beta$  приводится к системе (2.13).

Для нахождения дополнительного первого интеграла неавтономной системы (2.22) используется найденный первый интеграл, выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

Практически все исследуемые в данном параграфе системы являются системами с переменной диссипацией с нулевым средним по имеющейся периодической координате.

**§ 12. ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ НА  $so(4) \times R^4$  ПРИ НАЛИЧИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ**

---

Часто структура динамических уравнений движения сохраняется при переносе динамических свойств на случаи большей размерности. Например, в настоящее время во множестве работ развивается теория движения  $n$ -мерного твердого тела (см. [27, 128, 175, 177] и др.). Настоящий параграф посвящен изучению движения так называемого четырехмерного твердого тела, взаимодействующего «с сопротивляющейся средой» по законам «струйного обтекания» и впервые представляет результаты по изучению данного вопроса. Уравнения движения, полученные в таком «более общем» случае, значительно обобщают уравнения реальных плоскопараллельного и пространственного движений твердого тела [52–54, 66, 178, 227, 230, 232, 233, 236, 237].

В работе предполагается что все взаимодействие (четырёхмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму

(трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела шестимерен, а скорость центра масс – четырехмерна (см. также [38, 41]).

1. Уравнения на  $so(4)$ . Пусть четырехмерное твердое тело движется в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерную область евклидова пространства, и все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму трехмерного диска  $D^3$ . Расстояние от точки  $N$  приложения силы сопротивления до центра  $D_1$  диска является функцией лишь одного параметра – угла атаки  $\alpha$ , который измеряется между скоростью  $v$  точки  $D_1$  и средним перпендикуляром к диску, опущенным из центра  $C$  масс тела, в четырехмерном пространстве.

Пусть, по аналогии со случаями движения на  $so(2) \times R^2$  и  $so(3) \times R^3$ , сила  $S$  сопротивления ортогональна в четырехмерном пространстве к диску  $D^3$ , и ее величина имеет вид  $S = s_1(\alpha)v^2$ , где  $s_1$  – неотрицательный «коэффициент сопротивления».

Свяжем с телом систему координат  $D_1x_1x_2x_3x_4$ , ось  $D_1x_1$  которой совпадает с осью  $CD_1$ , а оси  $D_1x_2, D_1x_3, D_1x_4$  лежат в гиперплоскости диска.

Если оператор инерции в системе  $D_1x_1x_2x_3x_4$  имеет диагональный вид  $diag\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ ,  $\Omega$  – «матрица угловой скорости» твердого тела,  $\Omega \in so(4)$ , то та часть уравнений движения четырехмерного твердого тела, которая отвечает группе  $so(4)$ , имеет следующий вид [12]:

$$\Omega^* \Lambda + \Lambda \Omega^* + [\Omega, \Omega \Lambda + \Lambda \Omega] = M,$$

где  $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ ,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$ , ...,

$\lambda_4 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + I_3 - I_4)$ ,  $M$  – момент «внешних сил», действующих на тело в  $R^4$ , спроектированный на естественные координаты в  $so(4)$ ,  $[ ]$  – коммутатор в  $so(4)$ . Матрицу  $\Omega \in so(4)$

также удобно представлять в следующих естественных координатах:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  – компоненты «угловой скорости» в проекциях на естественные координаты в  $so(4)$ .

Коэффициент сопротивления  $s_1$  по аналогии представим в виде  $s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sign} \cos \alpha$ . Если  $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  – координаты точки  $N$  в системе  $D_1 x_1 x_2 x_3 x_4$ ,  $\{-S, 0, 0, 0\}$  – координаты вектора силы  $S$  сопротивления в той же системе, то при вычислении момента силы сопротивления необходимо построить отображение

$$R^4 \times R^4 \rightarrow so(4),$$

переводящее пару векторов из  $R^4$  в некоторый элемент из алгебры Ли  $so(4)$ .

В проекциях на естественные координаты в алгебре  $so(4)$  момент силы сопротивления имеет следующий вид [ ]:

$$M = (0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in R^6 \cong so(4).$$

Здесь необходимо учесть, что если  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  – сферические координаты в  $R^4$ , то  $x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1$ ,  $x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2$ ,  $x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2$ .

С учетом всего можно получить уравнения движения в рассмотренном поле силы сопротивления:

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\omega_1^* + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \quad (2.26)$$

$$(\lambda_2 + \lambda_4)\omega_2^* + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = 0, \quad (2.27)$$

$$(\lambda_4 + \lambda_1)\omega_3^* + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = x_{4N}S, \quad (2.28)$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\omega_4^* + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = 0, \quad (2.29)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\omega_5^* + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = -x_{3N}S, \quad (2.30)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\omega_6^* + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = x_{2N}S. \quad (2.31)$$

2. *Динамика на  $R^4$* . По аналогии с трехмерным случаем можно вывести формулы, аналогичные формулам Эйлера и Ривальса; т.е. векторы скорости и ускорения любых двух точек  $A$  и  $B$  четырехмерного твердого тела в любой системе координат связаны следующими соотношениями:

$$v_B = v_A + \Omega AB, \quad w_B = w_A + \Omega^2 AB + EAB, \quad (2.32)$$

где  $\Omega \in so(4)$ ,  $E = \Omega^* \in so(4)$ . Матрица  $E$  называется «матрицей ускорения».

С помощью формул (2.32) можно получить уравнения движения центра масс четырехмерного твердого тела на  $R^4$ .

3. *Движение в сопротивляющейся среде под действием некоторой связи*. Рассмотрим такой класс движений тела, при котором во все время выполнено условие (1.14). При этом предположим, что на тело действует некоторая (следящая) сила тяги, обеспечивающая выполнение условия (1.14) и являющаяся реакцией данной связи.

Определенным выбором величины тяги вдоль прямой  $CD_1$  выполнение условия (1.14) может быть достигнуто (см. главу 1).

4. *Случай динамически симметричного твердого тела*. Пусть по аналогии с трехмерным случаем выполнены равенства

$$I_2 = I_3 = I_4.$$

В таком случае существуют три циклических первых интеграла у уравнений (2.26)—(2.31):

$$\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0.$$

Рассмотрим для простоты движения на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0. \quad (2.33)$$

Для описания движения тела используется пара динамических функций  $(R(\alpha), s(\alpha))$ , информация о которых носит качественный характер. По аналогии со случаями для систем на  $so(2) \times R^2$  и  $so(3) \times R^3$  будем считать, что

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, A > 0, s(\alpha) = B \cos \alpha, B > 0.$$

В результате всего этого уравнения на «части»  $so(4)$  примут следующий вид (здесь  $n_0^2 = \frac{AB}{2I_2}$ ):

$$\omega_3^* = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2,$$

$$\omega_5^* = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2,$$

$$\omega_6^* = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1.$$

Если ввести естественную замену угловых скоростей по формулам

$$z_1 = \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2,$$

$$z_2 = -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1,$$

$$z_3 = \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1,$$

то «совместные» уравнения движения на  $so(4) \times R^4$  (после учета четырех условий (1.14) и (2.33)) примут симметричный вид:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_2^{\bullet} = z_2 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + z_1^2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ z_1^{\bullet} = z_1 z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ \beta_1^{\bullet} = z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\beta_2^{\bullet} = -z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (2.35)$$

У системы (2.34), (2.35) шестого порядка существует независимая подсистема пятого порядка (2.34). Для полного интегрирования данной системы необходимо, вообще говоря, знать пять независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных

$$z_1, z_2 \rightarrow z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, z_* = \frac{z_2}{z_1}$$

система (2.34), (2.35) приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha, \\ z_3^{\bullet} = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z^{\bullet} = z z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} z_*^{\bullet} = \sqrt{1+z_*^2} z \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1}, \\ \beta_1^{\bullet} = \frac{z z_*}{\sqrt{1+z_*^2}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\beta_2^* = -z_1(z, z_*) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1}. \quad (2.38)$$

Видно, что система пятого порядка распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (2.36) — третьего, а система (2.37) (конечно, после замены независимого переменного (времени)) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (2.36)—(2.38) достаточно указать два независимых интеграла системы (2.36), один — системы (2.37) и дополнительный интеграл, «привязывающий» уравнение (2.38).

Система (2.36) появится далее в динамике трехмерного твердого тела (см. также главы 6,7). Она обладает двумя следующими трансцендентными интегралами:

$$\frac{z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 v z_3 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha}{z \sin \alpha} = C_1 = \text{const},$$

$$G\left(\frac{z}{\sin \alpha}, \frac{z_3}{\sin \alpha}, \sin \alpha\right) = C_2 = \text{const}.$$

Система (2.37) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \text{const}$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл имеет вид

$$\pm \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin \{C_3(\beta_2 + C_4)\}, C_4 = \text{const}.$$

5. *Новый класс задач с ненулевым моментом сил в правой части.* Ранее (в основном геометриями) рассматривались лишь такие движения четырехмерного тела, когда  $M \equiv 0$ . Данная работа принадлежит одному из современных направлений в геометрии и механике, развиваемое автором, в исследовании

уравнений движения твердого тела на  $so(4) \times R^4$  (когда момент внешних сил  $M$  не равен тождественно нулю).

Методика же интегрирования рассматриваемых динамических систем (с переменной диссипацией) может быть распространена и на пространство  $so(n) \times R^n$  произвольного динамически симметричного  $n$ -мерного твердого тела.

---

**§ 13. О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ОКОЛО СИНГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК**

---

*1. Классические методы* нахождения замкнутых траекторий систем обыкновенных дифференциальных уравнений около (регулярных) особых точек восходят к работам А. Пуанкаре (1892 г.) (см., например, § 3). Позже исследования по данному вопросу были продолжены в работах А. А. Андронova, Хопфа, и других авторов (например, известная бифуркация рождения цикла из слабого фокуса в многомерном пространстве).

Отличительной особенностью работ отмеченных авторов является исследование окрестностей векторных полей систем именно около регулярной особой точки, т.е. там, где правые части систем имеют достаточное количество непрерывных производных.

Предположим, что у автономной системы третьего порядка в  $R^3 \{x_1, x_2, x_3\}$  существует изолированная особая точка (начало координат). При этом на плоскости  $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 = 0\}$  правая часть системы, вообще говоря, не определена (например, в правой части присутствует особенность типа

$f(x_1, x_2, x_3) \frac{1}{x_1}$ , где  $f(x_1, x_2, x_3)$  – достаточно гладкая функция около начала координат).

Предположим, что плоскость

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_3 = 0\} \quad (2.39)$$

является интегральной для рассматриваемой автономной системы третьего порядка, которая редуцируется к независимой подсистеме

$$x_1' = \Phi_1(x_1, x_2), \quad x_2' = \Phi_2(x_1, x_2) \quad (2.40)$$

после формального доопределения на всей плоскости (2.39).

2. *Существование замкнутых траекторий.* В приложениях могут возникать случаи, когда правая часть системы возле особой точки или не имеет производных, или их нахождение сильно затруднительно, поскольку возникает проблема «доопределения по непрерывности» правых частей системы в самих особых точках.

Если на плоскости (2.39) у системы (2.40) вблизи начала координат есть предельный цикл, то возникает вопрос: появятся ли у общей системы третьего порядка в области  $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 > 0, x_3 > 0\}$  какие-либо нетривиальные предельные множества? В общем случае данный вопрос достаточно сложный, но, используя трехмерную топографическую систему Пуанкаре как совокупность (двумерных) поверхностей уровня функции  $V = x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k}$ ,  $k \in N$ , вблизи начала координат и исследуя знак скалярного произведения  $(gradV(x), v)$ , где  $v$  — векторное поле исследуемой трехмерной системы, можно «поймать» предельные циклы не только вблизи особой точки (см. также [116, 125]).

Рассмотрим для начала пример системы третьего порядка, возникающей в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Систему (см. также главу 6)

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$Z_2' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2.41)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

где

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha,$$

рассмотрим в слое  $\Pi_{(0,\pi)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 > 0, 0 < \alpha < \pi\}$ ,  $\sigma, n_0, B, m > 0$ .

Если формально положить  $Z_1 = 0$ , а систему (2.41) доопределить по непрерывности при  $Z_1 = 0$ , то плоскость  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$  является интегральной. На ней «отщепившаяся» система второго порядка

$$\alpha' = -\Omega + \sigma \Omega^2 \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\Omega' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha + \Omega \left\{ \sigma \Omega^2 \cos \alpha - \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{B}{m} \cos^2 \alpha \right\},$$

рассматриваемая на двумерном цилиндре  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$ , имеет бесконечное число топологически различных фазовых портретов и, при некоторых условиях, вокруг точки  $(\pi, 0)$  могут возникнуть предельные циклы [193, 203].

Возникает вопрос: появятся ли у системы (2.41) в замыкании слоя  $\overline{\Pi_{(0,\pi)}}$  около особой точки  $(\pi, 0, 0)$  какие-либо замкнутые траектории или, вообще говоря, предельные множества?

### § 13. О предельных множествах дифференциальных уравнений...

Воспользуемся методом многомерных топографических систем (Пуанкаре). Рассмотрим поверхность уровня (топографическую систему) неотрицательной функции (Ляпунова)

$$V_0(\alpha, Z_1, Z_2) = Z_1^2 + Z_2^2 + n_0^2 \sin^2 \alpha$$

во всем пространстве  $R^3(\alpha, Z_1, Z_2)$ . Поверхности уровня Функции  $V_0$  являются интегральными уровнями для системы

$$\alpha' = -Z_2, \quad Z_2' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

которую рассматриваем в качестве системы сравнения для (2.41) (см. также § 10). Скалярное произведение градиента  $grad V_0(\alpha, Z_1, Z_2)$  на векторное поле системы (2.41) в координатах  $(\alpha, Z_1, Z_2)$  является знакопеременной характеристической функцией  $\chi(\alpha, Z_1, Z_2)$  при  $2 \frac{B}{mn_0} = \sigma n_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малое

положительное число. В некоторой малой окрестности точки  $(\pi, 0, 0)$  характеристическая функция  $\chi$  положительно определена, что и подтверждает отталкивающий характер (сингулярной) особой точки  $(\pi, 0, 0)$ . При этом существует сферический слой в малой окрестности рассматриваемой особой точки такой, в который через его внутреннюю и внешнюю границы фазовые траектории системы (2.41) только входят. Поскольку вблизи  $(\pi, 0, 0)$  других особых точек системы (2.41) нет, в рассматриваемой сферическом слое существует нетривиальное  $\omega$ -предельное множество. Можно показать, что в данном случае это предельное множество – притягивающий предельный цикл.

3. *Маятниковые системы.* Приведенные рассуждения легко распространяются и на более общий случай маятниковых систем вида

$$\varphi' = -x_1 + \delta F_\varphi(\varphi, x_1, x_2),$$

## Глава 2. Некоторые вопросы качественной теории...

---

$$x_1' = F(\varphi) - x_2^2 \operatorname{ctg} \varphi + \delta F_1(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg} \varphi),$$

$$x_2' = x_1 x_2 \operatorname{ctg} \varphi + \delta F_2(\varphi, x_1, x_2, \operatorname{ctg} \varphi),$$

где  $F'(0) > 0$ ,  $F_i(s_1, s_2, s_3, s_4)$  – гладкие функции (вблизи начала координат),  $\frac{\partial F_i}{\partial s_4}(s_1, s_2, s_3, s_4)$  – полиномы по  $s_4$  степени  $s^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $\delta \in R$ .

Тогда функцию (Ляпунова)  $V$  следует искать в виде

$$V = f_\varphi(\varphi, x_1, x_2) \sin^2 \varphi + f_1(\varphi, x_1, x_2) x_1^{2k} + f_2(\varphi, x_1, x_2) x_2^{2k},$$

при этом  $f_\varphi, f_1, f_2$  – гладкие положительные функции и  $2k \geq s+1$ ,  $s = \max_{i=1,2} s^i$  (см. также [149]).

### **ГЛАВА 3. Относительная структурная устойчивость и относительная структурная неустойчивость различных степеней**

---

*Настоящая глава посвящена исследованию вопросов относительной структурной устойчивости (относительной грубости) динамических систем, деформация которых рассматривается не во всем пространстве динамических систем, а лишь на некотором его подпространстве. При этом пространство деформаций систем несколько ограничено и не совпадает со всем пространством допустимых деформаций. В частности, будут рассмотрены системы дифференциальных уравнений, возникающие в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Показана их относительная грубость, а также, при некоторых условиях, относительная негрубость различных степеней.*

Грубые (структурно устойчивые) системы можно рассматривать как наиболее простые, наиболее многочисленные динамические системы в соответствующем пространстве динамических систем. Действительно, грубые системы выделяются условиями типа неравенств, и поэтому их естественно рассматривать как наиболее общий случай.

Можно провести далеко идущую аналогию между грубыми динамическими системами и функциями одной переменной, имеющими только простые корни, а также кривыми, не имеющими особенностей, рассматриваемыми в конечной части плоскости [63]. Эта аналогия является, в частности, весьма плодотворной для выработки эффективных методов качественного исследования.

В ряде вопросов представляет интерес рассмотрение относительной грубости, именно грубости по отношению к некоторому классу динамических систем, т.е. по отношению к некото-

рому подмножеству пространства динамических систем. Таким понятием относительной грубости можно воспользоваться при выделении простейших негрубых систем, т.е. систем первой степени негрубости, а также при классификации негрубых систем по степени сложности, или степени негрубости. Отметим, что с точки зрения такой классификации негрубых систем консервативные системы являются системами бесконечной степени негрубости, другими словами, системами степени негрубости более высокой, чем любая конечная степень негрубости. Таким образом, консервативные системы являются с точки зрения такой классификации чрезвычайно «редкими» системами.

Однако мы можем, рассматривая класс консервативных (или, допустим, гамильтоновых) систем, ввести понятие грубости системы относительно этого класса. Таким понятием (без термина «грубость») фактически пользовался Пуанкаре.

Системы первой степени (относительной) негрубости можно определить как системы, которые являются (относительно) грубыми во множестве (относительно) негрубых систем (точное определение будет дано ниже).

Негрубое (относительно негрубое) векторное поле может быть топологически эквивалентно грубому (относительно грубому) векторному полю. Например, на двумерной сфере возможна та ситуация, при которой векторное поле (абсолютно) негрубо, хотя топологически эквивалентно грубому векторному полю (о топологической эквивалентности см. далее).

Основной причиной негрубости в последнем случае является вырожденность производной возле предельного множества [119].

В случае гладких динамических систем, требуя у правых частей динамической системы не менее пяти производных, можно определить динамические системы второй степени негрубости как системы, относительно грубые во множестве систем, негрубых и не являющихся системами первой степени негрубости.

#### **§ 14. Определение относительной структурной устойчивости...**

Совершенно аналогично можно определить динамические системы 3-й, 4-й, ...,  $n$ -й степени негрубости. Определение вводится индуктивно. В рассматриваемом случае динамических систем с аналитическими правыми частями вводится определение близости систем.

Таким образом, динамическую систему в дальнейшем назовем системой  $n$ -й степени негрубости в замкнутой области, если она является негрубой системой, не являющейся негрубой системой степени, меньшей или равной  $n-1$ , и если она является относительно грубой во множестве негрубых систем, не являющихся не грубыми системами степени, меньшей или равной  $n-1$ .

#### **§ 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ (ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ГРУБОСТИ)**

Классическое определение грубости [2, 8], а также определение, данное в работе [142, 143], оперируют с двумя объектами, а именно, с классами динамических систем и с пространством деформаций систем со своей топологией.

Впервые определение грубости динамической системы на плоскости было дано при некотором дополнительном предположении относительно множества рассматриваемых динамических систем. Именно, дополнительно предполагалось, что граница области, в которой рассматривается система, является циклом без контакта для траекторий этой системы, т.е. простой гладкой замкнутой кривой, не имеющей контактов (не касающейся траекторий системы). Очевидно, тогда кривая является циклом без контакта также и для траекторий всякой системы, достаточно близкой к рассматриваемой. Хотя это

предположение сильно ограничивает класс рассматриваемых динамических систем, при этом смысл понятия грубости системы сохраняется, а определение грубости значительно проще, чем при общих предположениях относительно границы области.

Можно ввести определение грубости таким образом, что оно не будет запрещать наличие негрубых траекторий, лежащих на границе области. А это, вообще говоря, не соответствует содержанию понятия грубости.

Введение понятия грубости без специальных предположений о границе области представляется естественным и необходимым с различных точек зрения [16, 25].

В основе же понятия грубости (в том числе и различных степеней негрубости) лежит понятие топологической эквивалентности динамических систем.

Пусть  $X^r(M)$  – пространство  $C^r$  – векторных полей на компактном многообразии  $M$  с  $C^r$  – топологией,  $r \geq 1$ . Два векторных поля  $X, Y \in X^r(M)$  называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M$ , который переводит траектории поля  $X$  в траектории поля  $Y$ , сохраняя их ориентации; это последнее условие означает, что если  $p \in M$  и  $\delta > 0$ , то существует такое  $\varepsilon > 0$ , что если  $0 < t < \delta$ , то  $hX_t(p) = Y_t(h(p))$  для не которого  $t' \in (0, \varepsilon)$ . Будем называть  $h$  топологической эквивалентностью между  $X$  и  $Y$ . Таким образом, мы определили отношение эквивалентности на  $X^r(M)$ . Другим, более сильным отношением является сопряженность потоков векторных полей. Два векторных поля  $X$  и  $Y$  называются сопряженными, если существует топологическая эквивалентность  $h$ , сохраняющая параметр  $t$ ; это означает, что  $hX_t(p) = Y_t(h(p))$  при всех  $p \in M$  и  $t \in R$ .

**Замечание.** Сопряженность потоков – слишком сильное отношение, поскольку, как известно, расширяющийся цикл

#### § 14. Определение относительной структурной устойчивости...

(как функция от параметра) для автономных систем, как правило, меняет свой период, а, как известно, замкнутые траектории переходят в замкнутые при топологической эквивалентности.

Определение, данное Андроном и Понtryгиным [8], наряду с близостью в некоторой топологии рассматриваемой системы и ее деформации требует близость к тождественному гомеоморфизму, через который осуществляется топологическая эквивалентность последних двух систем. Определение же, данное Пейксото [260–262], не требует указанной близости.

Если система груба по Андронову-Понtryгину, то она является грубой и по Пейксото. При этом необходимые и достаточные условия грубости по Андронову-Понtryгину совпадают с необходимыми и достаточными условиями грубости по Пейксото. Последнее определение имеет следующее преимущество: непосредственно из этого определения вытекает тот факт, что грубые системы в пространстве динамических систем заполняют области. При первом же определении этот факт нужно доказывать, опираясь на необходимые и достаточные условия грубости.

Пусть  $\Xi$  – достаточно малая окрестность рассматриваемого векторного поля  $X$  в  $X'(M)$ . Как уже кратко отмечалось, в первоначальном определении грубости, данным Андроном и Понtryгиным, требуется еще, чтобы при достаточной малости окрестности  $\Xi$  гомеоморфизм, осуществляющий топологическую эквивалентность между  $X$  и  $Y$ , мог быть сделан сколь угодно близким к тождественному в  $C^0$  – топологии (т.е. сколь угодно мало сдвигал точки многообразия  $M$ ). Так как вариант этого требования предложен Пейксото, в тех случаях, когда надо уточнить, какой именно вариант грубости имеется в виду, говорят о грубости по Андронову-Понtryгину и о грубости по Пейксото. Однако в настоящее время не совсем ясно, действительно ли эти варианты различаются между собой и имеет ли один из них существенное преимущество перед другим.

Приведенное определение зависит от  $r$ . При необходимости явно указывать на эту зависимость можно говорить о грубости в классе  $C^r$  [137–140].

До сих пор мы говорили о глобальных свойствах векторных полей на многообразиях. Можно анализировать локальное топологическое поведение траекторий векторных полей. Для векторных полей из некоторого открытого плотного подмножества в пространстве  $X^r(M)$  можно описать поведение траекторий в окрестности каждой точки многообразия. Кроме того, локальная структура траекторий не меняется при малых возмущениях поля (так называемая локальная грубость). Таким образом, получается полная классификация через топологическую сопряженность.

**Замечание.** По всей видимости, лишь в локальном случае отношение топологической сопряженности является конструктивным, поскольку в глобальном случае это влечет наличие очень жестких условий.

В высших размерностях множество грубых полей по-прежнему обширно, но не является уже всюду плотным. Здесь существуют богатые и более сложные явления, сохраняющиеся при малых возмущениях первоначального поля. Даже для грубых полей структура траекторий предельных множеств до конца не ясна, и ее описание по-прежнему остается областью активного исследования [164, 165].

Параллельно определениям, данным выше, в работах [7–9] изучались маломерные грубые системы, а в работе [13] — теория систем Аносова, для которых понятие грубости оказалось естественным.

В силу классических определений структурной устойчивости, в работах [137–140] обсуждаются критерии последней как для линейных неавтономных систем, так и для классов нелинейных систем. Признаки структурной устойчивости для

#### § 14. Определение относительной структурной устойчивости...

маломерных систем формулируются в качестве гипотез Смейла на большие размерности [164, 165].

За последнее время появилось еще несколько видоизмененных определений грубости [140]. Все они имеют одно общее сходство: деформация рассматриваемых динамических систем на некотором многообразии  $M^n$  берется во всем пространстве гладких векторных полей  $\chi(C^r)$  в  $C^r$  – топологии (чаще всего  $r=1$ ).

Будем рассматривать векторные поля (динамические системы), деформируемые не над всем классом  $X^r(M^n)$  полей, а лишь над некоторым подклассом  $X(Q)$ , определенным с помощью класса функций  $Q \in C^r$ .

**Определение 1.** *Векторное поле  $v$  на многообразии  $M^n$  называется относительно структурно устойчивым (относительно грубым или грубым по отношению к классу полей  $X(Q)$ , определенного с помощью класса функций  $Q$ ), если для любой окрестности  $\Theta$  гомеоморфизма  $1_{M^n}$  в пространстве всех гомеоморфизмов с  $C^0$  — топологией имеется такая окрестность  $U \in X(Q)$  рассматриваемого векторного поля  $v$ , что последнее топологически эквивалентно любому векторному полю из  $1_{M^n}$  посредством некоторого гомеоморфизма из  $\Theta$ .*

Заметим, что близость векторных полей понимается в  $C^1$  — топологии, а близость гомеоморфизма — в  $C^0$  — топологии. При этом, речь идет не о сопряжении, а об эквивалентности.

Заметим также, что пока в вышеприведенном определении важны:

- 1) достаточная малость гомеоморфизма, осуществляющего эквивалентность;
- 2)  $C^1$  — топология в пространстве рассматриваемых векторных полей.

---

**§ 15. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ СТРУКТУРНАЯ  
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ (ОТНОСИТЕЛЬНАЯ НЕГРУБОСТЬ)  
РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ**

---

Подобно тому, как дается определение векторного поля первой степени негрубости, можно определить поля первой степени относительной негрубости, рассматривая деформации полей в подпространстве  $X(Q)$  пространства всех векторных полей.

**Определение 2.** Векторное поле  $v$  на многообразии  $M^n$  называется векторным полем первой степени относительной негрубости, если оно не является относительно грубым векторным полем и если для любой окрестности  $\Theta$  гомеоморфизма  $1_{M^n}$  в пространстве всех гомеоморфизмов с  $C^0$  — топологией имеется такая окрестность  $U \in X(Q)$  векторного поля  $v$ , что оно топологически эквивалентно любому полю из  $U \in X(Q)$ , не являющемуся относительно грубым, посредством некоторого гомеоморфизма из  $\Theta$ .

Заметим, что близость векторных полей в данном случае понимается в  $C^3$  — топологии.

Аналогичным образом можно определить векторные поля, являющиеся полями  $n$ -ой степени относительной негрубости. При этом используется  $C^{2n+1}$  — топология в пространстве векторных полей.

**Определение 3.** Векторное поле  $v$  на многообразии  $M^n$  называется векторным полем  $n$ -ой степени относительной негрубости, если оно не является относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной  $n-1$ , и если для любой окрестности  $\Theta$  гомеоморфизма  $1_{M^n}$  в пространстве всех гомеоморфизмов с  $C^0$  — топологией имеется такая окрестность  $U \in X(Q)$  векторного поля  $v$ , что оно то-

пологически эквивалентно любому полю из  $U \in X(Q)$ , не являющемуся относительно грубым или относительно негрубым векторным полем степени, меньшей или равной  $n-1$ , посредством некоторого гомеоморфизма из  $\Theta$ .

## § 16. ПРИМЕРЫ ИЗ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Рассмотрим динамические системы, возникающие в плоской (в дальнейшем и пространственной) динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. В силу цикличности некоторых фазовых переменных, общая система шестого порядка (для случая плоскопараллельного движения) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка (0.1)—(0.3). В последней, в свою очередь, известным приемом выделена динамическая система второго порядка, для которой проведен обстоятельный анализ различных типов допускаемых ею фазовых портретов.

*1. Системы с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твердого тела.* Такие системы обладают одним общим свойством: поскольку, как правило, у систем, обладающих переменной диссипацией с нулевым средним, существуют дополнительные симметрии, данные системы имеют сепаратрисы, соединяющие гиперболические седловые положения равновесия. Поэтому (абсолютно) структурно устойчивы такие системы быть не могут [89, 127, 134].

Поскольку деформации таких систем рассматриваются лишь над некоторым подмножеством всех систем, определенным с помощью подкласса функций (правых частей), позво-

ляющего сохранить все симметрии в системе, рассматриваемые системы в некоторых областях параметров остаются относительно грубыми.

**Пример 1.** Рассмотрим системы вида (1.17) при условии (0.8).

**Лемма 3.1.** Система (1.17) относительно структурно устойчива. Более того, любые две системы вида (1.17) топологически эквивалентны.

Схема доказательства. Зафиксируем пространство векторных полей  $X(Q)$ , отвечающих системе (1.17); при этом функция  $F$  из данной системы пробегает весь класс  $\Phi$ . Пространство параметров системы при этом бесконечномерно. Лемма 3.1 следует из следующих соображений.

а) Для любого  $F \in \Phi$  фазовый портрет системы (1.17) имеет один и тот же топологический тип.

б) В каждой из областей фазового цилиндра (колебательная и вращательная) (ил. 2) строится своя топологическая эквивалентность: на «ключевых» сепаратрисах (см. далее главу 4) данные эквивалентности «сшиваются».

в) К примеру, в колебательной области (ил. 2) эквивалентность строится следующим образом.

Построим не только эквивалентность – гомеоморфизм  $h$  фазового цилиндра, – а даже сопряжение. В колебательной области существуют лишь две особые точки:  $(0,0)$  и  $(0,\pi)$  (первая из которых отталкивающая, а вторая – притягивающая). Итак, рассмотрим две системы (1.17) для функций  $F_1(\alpha)$ ,  $F_2(\alpha)$ , соответственно. Соответствующие фазовые потоки фазового цилиндра обозначим через  $g_1^t$ ,  $g_2^t$ . Потребуем, чтобы гомеоморфизм  $h$  начало координат переводил в начало координат. Рассмотрим малую окружность  $S^1$  вокруг начала координат. Ее можно выбрать трансверсальной к обоим полям систем (1.17) при  $F=F_1(\alpha)$  и  $F=F_2(\alpha)$  одновременно. Определим  $h(p)=p$  (с точностью до линейного сжатия или растя-

жения) для всех  $p \in S^1$  таким образом, чтобы  $h(p_1^1) = h(p_2^1)$  и  $h(p_1^2) = h(p_2^2)$ . Здесь  $h(p_1^k) = h(p_2^k)$ ,  $k = 1, 2$ , – две точки на окружности  $S^1$ , через которые проходят сепаратрисы поля системы (1.17) при  $F = F_k$ , выходящие из начала координат и входящие в седла  $S_{-1}$  и  $S_0$  (в полосе  $\Pi$ ). Если точка  $q$  не является началом координат, то существует единственное  $t \in R$ , такое что  $g_1^t(q) = p \in S^1$ . Положим  $h(q) = g_2^{-t}(p) = g_2^{-t} g_1^t(q)$ . Непосредственно видно, что  $h$  непрерывно и имеет непрерывное обратное.

г) В силу построенного отображения  $h$ , точка  $(\pi, 0)$  для  $F = F_1$  перейдет в точку  $(\pi, 0)$  для  $F = F_2$  по непрерывности.

**Следствие.** Система (1.17) при условии (0.8) топологически эквивалентна уравнению (4.3) (см. далее главу 4), а также общему уравнению плоского маятника в потоке среды (см. также главу 4).

**Пример 2.** Рассмотрим систему (1.24), (1.25) при условии (0.8). Она также является системой с переменной диссипацией с нулевым средним.

**Лемма 3.2.** Бесконечномерное пространство векторных полей  $X(\Phi)$ , отвечающее системе (1.24), (1.25), разбивается на непересекающиеся объединения

$$X(\Phi) = X(\Phi_1) \amalg X(\Phi_2) \amalg X(\Phi_3),$$

обладающее следующими свойствами:

а) система (1.24), (1.25), определенная с помощью пространств  $X(\Phi_1)$ ,  $X(\Phi_3)$  (ил. 3, 5, соответственно), относительно груба в пространстве  $X(\Phi)$ ;

б) система (1.24), (1.25), определенная с помощью пространства  $X(\Phi_2)$  (ил. 4), является системой первой степени относительной негрубости в пространстве  $X(\Phi)$ ;

в) множество  $X(\Phi_2)$  имеет меру нуль в пространстве  $X(\Phi)$ ;

г) множества  $X(\Phi_1)$ ,  $X(\Phi_3)$  имеют конечную меру в пространстве  $X(\Phi)$ .

Топологическая эквивалентность в данном случае строится в зависимости от области фазового цилиндра системы (1.24),(1.25), а также в зависимости от классов  $X(\Phi_k)$ ,  $k=1,2,3$ .

2. Системы с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твердого тела.

**Пример 3.** Ниже (см. также главу 8) приведена типичная топологическая классификация портретов системы (2.2) при условии (0.8) для некоторой бесконечномерной области параметров. Вообще же, система (2.2) при  $h \neq 0$  является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним.

**Лемма 3.3.** Бесконечномерное пространство векторных полей  $X(\Phi)$ , отвечающее системе (2.2) при  $h \neq 0$ , разбивается на конечное непересекающееся объединение

$$X(\Phi) = X(\Phi_1) \amalg \dots \amalg X(\Phi_{N_1}) \amalg X(\Phi^1) \amalg \dots \amalg X(\Phi^{N_2}),$$

обладающее следующими свойствами:

а) система (2.2) при  $h \neq 0$ , определенная с помощью пространств  $X(\Phi_k)$ ,  $k=1, \dots, N_1$ , (абсолютно) груба;

б) множества  $X(\Phi_k)$ ,  $\forall k$  имеют конечную меру в пространстве  $X(\Phi)$ ;

в) множества  $X(\Phi^k)$ ,  $k=1, \dots, N_2$ , имеют меру нуль в пространстве  $X(\Phi)$ .

Восемь «типичных» классов для систем вида (2.2) при  $h \neq 0$  приведены на ил. 6—13 (при замене  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

Необходимо заметить, что во всех приведенных выше системах (а в системе (2.2) при  $h \neq 0$  лишь в подобласти параметров) можно пользоваться «типичными» представителями дан-

ных классов систем – соответствующими аналитическими системами.

**Пример 4.** Рассмотрим систему (1.31),(1.32) при условиях (0.8), (0.5), а также в некоторой области параметров  $I$  (см. также главу 5).

С помощью классов функций  $\Phi$ ,  $\Sigma$ , которые соответствуют функциям  $F$  и  $s$ , определяется пространство векторных полей системы (1.31),(1.32), которое обозначим через  $X(Q) = X(\Phi, \Sigma)$ .

**Лемма 3.4.** *Бесконечномерное пространство  $X(Q) = X(\Phi, \Sigma)$ , отвечающее системе вида (1.31),(1.32), разбивается на счетное непересекающееся объединение*

$$X(Q) = X(Q_1) \amalg X(q_1) \amalg X(Q_2) \amalg X(q_2) \amalg \dots,$$

обладающее следующими свойствами:

а) система вида (1.31),(1.32), определенная с помощью пространств  $X(Q_i)$ , для любого  $i \in N$  (абсолютно) груба;

б) система (1.31),(1.32), определенная с помощью пространств  $X(q_i)$ , является системой первой степени относительно негрубости в пространстве  $X(Q)$ ;

в) множества  $X(q_i)$  имеют меру нуль в пространстве  $X(Q)$ ;

г) множества  $X(Q_i)$  имеют конечную меру в пространстве  $X(Q)$ .

Более того, гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, систем, взятых из пространства  $X(Q_i)$  для каждого фиксированного  $i$ , может и не быть достаточно близок к тождественному.

Таким образом, имеем двухпараметрическое семейство фазовых портретов, в котором при переходе от одного топологического типа портрета к другому мы вынуждены иметь дело с вырожденными перестройками (см. также главу 5). Причем,

как будет показано ниже, рассматриваемые подмножества в пространстве  $J^2$ , с помощью которых определяются подклассы полей  $X(Q_i)$ ,  $X(q_i)$ , накапливаются возле точки  $(0, 0) \in J^2 \{ \mu_1, \mu_2 \}$ .

Десять классов топологически неэквивалентных полей данной системы изображены на ил. 14—23 (при замене  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

**Пример 5.** Рассмотрим систему (1.31), (1.32) при условиях (0.8), (0.5), областях параметров II, III (см. также главу 5). С помощью классов функций  $\Phi$  и  $\Sigma$  определяется пространство векторных полей системы (1.31), (1.32), которое обозначим через  $X(Q) = X(\Phi, \Sigma)$ , как и выше.

Для таких векторных полей справедлива лемма 3.4. Восемь классов полей с различными качественными свойствами изображены на ил. 24—31 (при замене  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

Из всего вышеизложенного видно, что рассмотренные системы с переменной диссипацией с ненулевым средним в типичном случае (абсолютно) структурно устойчивы. При этом относительно структурно устойчивые (типичные) системы с переменной диссипацией с нулевым средним являются, как правило, удобными системами сравнения для систем с переменной диссипацией с ненулевым средним (см. главу 2).

*3. Системы с переменной диссипацией в пространственной динамике твердого тела.* Такие системы с переменной диссипацией с нулевым средним являются лишь относительно грубыми, а системы с переменной диссипацией с ненулевым средним – просто (абсолютно) грубыми. Такие системы являются нетривиальными примерами относительно и абсолютно грубых систем, имеющих порядок выше двух. Ввиду громоздкости, качественный анализ таких систем (третьего и выше порядков) здесь полностью не приводится (о системах с переменной диссипацией из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой, см. также главы 6, 7).

Необходимо заметить, что системы с переменной диссипацией с нулевым средним возникают естественным образом

#### § 16. Примеры из динамики твердого тела...

---

в динамике твердого тела, благодаря наличию дополнительных групп симметрий. Последние возникают из естественных (геометрических и аналитических) симметрий задачи. Таким образом, наряду с «полезностью» возникновения систем с переменной диссипацией с нулевым средним в качестве важных систем сравнения, они имеют право на существование ввиду их относительной грубости. А вот системы с переменной диссипацией с ненулевым средним уже по своей физической и топологической природе являются (абсолютно) грубыми, что позволяет говорить о структурно устойчивом описании природных явлений с помощью таких систем (см. также [84]).

В дальнейших главах будут качественно исследованы нелинейные системы вида (1.17), (1.23)—(1.25), (1.26)—(1.28), (1.30)—(1.32), (1.33)—(1.35), появляющиеся в плоской динамике твердого тела. В главах 6, 7 изучаются, в свою очередь, аналогичные системы из пространственной динамики. При этом будет использован качественный материал, полученный ранее во главах 2, 3.

#### **ГЛАВА 4. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем с переменной диссипацией с нулевым средним в плоской динамике твёрдого тела**

---

*В первой части главы рассматривается такой класс движений, при котором на систему наложена связь, позволяющая считать во все время движения величину скорости характерной точки твёрдого тела в качестве постоянной. Проводится полный качественный анализ полученной динамической системы в пространстве квазискоростей. Отмечаются симметрии в системе, приводится в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной функцией квазискоростей.*

Рассмотрим такой случай движения тела, при котором выполнено условие (1.14). Как показано в § 2, в пространстве квазискоростей  $\alpha$  и  $\Omega$  выделяется система (1.17) при условии (0.8).

Для описания положения тела на плоскости выберем декартовы координаты  $x, y$  центра  $D_1$  пластины и угол поворота  $\varphi$ , который будем измерять в плоскости движения тела между прямой  $CD_1$  и осью инерциальной системы координат. При этом фазовое состояние системы характеризуется следующим набором величин:  $(x^{\bullet}, y^{\bullet}, \varphi^{\bullet}, x, y, \varphi)$ , при этом

$$\varphi^{\bullet} = \Omega, x^{\bullet} = v \cos(\alpha + \varphi), y^{\bullet} = v \sin(\alpha + \varphi). \quad (4.1)$$

Как уже отмечалось, координаты  $(x, y, \varphi)$  являются циклическими.

**Замечание.** Конечно, цикличность в данном случае понимается не по Раусу, когда каждой циклической координате соответствует первый интеграл, в результате чего порядок общей лагранжевой системы понижается [150, 151]. Здесь

цикличность понимается в том смысле, что динамические функции (кинетическая энергия и обобщенные силы) не зависят от некоторых координат конфигурационного пространства. При этом порядок общей системы понижается на число таких координат.

**§ 17. СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СРЕДЕ  
ПРИ НАЛИЧИИ НЕКОТОРОЙ СВЯЗИ И НАЧАЛО  
КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА**

---

*1. Точки покоя системы и соответствующие им стационарные движения.* Множество точек покоя системы (1.15), которым соответствуют стационарные движения, разбивается на две части.

Во-первых, существуют изолированные особые точки, которые находятся из системы

$$\{\alpha=0 \bmod \pi, \Omega=0\}.$$

Эти особые точки соответствуют таким стационарным движениям, при которых тело движется поступательно вдоль прямой  $CD_1$  в ту или иную сторону.

Во-вторых, формально существует одномерное многообразие  $O$  особых точек (1.16).

Точка особого многообразия  $O$  соответствует такому стационарному движению, при котором тело совершает вращение вокруг некоторой неподвижной точки  $W$  с постоянной угловой скоростью; при этом прямая  $CD_1$  непременно проходит через точку  $W$ . Угол атаки при этом формально равен  $\pi/2$ .

Данные классы движений несколько противоречат здравому смыслу. Противоположные края пластины «разрезают»

среду в разных направлениях. При этом необходимо учитывать наличие и сопротивления среды, и момента ее сопротивления. Поскольку введение момента сопротивления требует учета дополнительного демпфирования (см. введение), учет такого влияния, как уже, отмечалось, является следующим этапом изучения проблемы.

2. *Симметрии векторного поля системы на фазовом цилиндре квазискоростей.* Векторное поле системы (1.17) при условии (0.8) обладает двумя видами симметрий:

а) центральной симметрией. Такая симметрия возле точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in Z$ , возникает по причине того, что векторное поле системы в координатах  $(\alpha, \Omega)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix};$$

б) некоторой зеркальной симметрией (НЗС). Такая симметрия относительно прямых  $\Lambda_i$ ,  $i \in Z$ , (см. (1.16)), возникает по причине того, что  $\alpha$  – составляющая векторного поля системы в координатах  $(\alpha, \Omega)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix},$$

а  $\Omega$  – составляющая меняет знак.

Из наличия НЗС следует, что объединение прямых

$$\left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} k, k \in Z \right\}$$

и только оно является изоклинами горизонтального направления. Изоклиной вертикального направления является лишь следующая линия:

$$\bar{L} = \left\{ (\alpha, \Omega) \in R^2 : \Omega = \frac{\sigma v F(\alpha)}{I \cos \alpha} \right\}.$$

(На многообразии  $O$  доопределяем по непрерывности.)

---

**§ 18. О ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМЫ**

---

Данный параграф посвящен изучению возможностей полного интегрирования рассматриваемой динамической системы. В нем приводится первый интеграл системы (1.18), выражающийся через элементарные функции, а также обсуждается путь интегрирования общей системы (1.17).

*1. Некоторые общие утверждения.* Справедлива теорема, связывающая поведение траекторий возле асимптотических предельных множеств и интегрируемость системы. Асимптотическими предельными множествами будем называть отталкивающие и притягивающие предельные множества.

Рассмотрим систему уравнений в фазовом пространстве  $R^n$ .

**Теорема 4.1.** *Если система обладает асимптотически предельными множествами, то она не имеет полного набора непрерывных первых интегралов во всем фазовом пространстве.*

Данная теорема хотя и доказывается достаточно просто, но имеет важный топологический смысл о непрерывности первых интегралов возле предельных множеств.

**Следствие.** *Как функции первые интегралы могут иметь в данных асимптотических предельных множествах существенно особые точки.*

Ниже будет показано, что изолированные особые точки системы (1.15) являются притягивающими или отталкивающими. Таким образом, если и существует первый интеграл системы (1.17) (или (1.18)), то он является трансцендентной функцией.

*2. Трансцендентный интеграл системы.*

**Теорема 4.2.** *Система (1.18) обладает трансцендентным первым интегралом, выражающимся через элементарные функции.*

Доказательство. Система (1.18) с помощью замены вне многообразия  $O$

$$\tau = \sin \alpha, \quad y = -\Omega + A_1 \tau$$

может быть приведена к одному уравнению

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{A_2 \tau}{y} + A_1,$$

в котором подстановкой  $\xi = \frac{y}{\tau}$  осуществляется разделение переменных

$$(\xi^2 - A_1 \xi + A_2) d\tau = -\xi \tau d\xi.$$

Квадратура последнего и дает искомый первый интеграл (в зависимости от параметров имеем три случая).

$$1) \quad A_1^2 - 4A_2 < 0.$$

$$\ln(\xi^2 - A_1 \xi + A_2) + \frac{2A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \operatorname{arctg} \frac{2\xi - A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$2) \quad A_1^2 - 4A_2 > 0.$$

$$\ln |\xi^2 - A_1 \xi + A_2| + \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - 4A_2}} \ln \left| \frac{2\xi - A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2\xi - A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const};$$

$$3) \quad A_1^2 - 4A_2 = 0.$$

$$\ln \left| \xi - \frac{A_1}{2} \right| - \frac{A_1}{2\xi - A_1} + \ln |\tau| = \text{const}.$$

Переходя к переменным  $\Omega$  и  $\tau$ , имеем:

$$1) \quad A_1^2 - 4A_2 < 0.$$

$$[\Omega^2 - A_1 \tau \Omega + A_2] \times \exp \left\{ \frac{2A_1}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \operatorname{arctg} \frac{2\Omega - A_1 \tau}{\sqrt{-A_1^2 + 4A_2}} \right\} = \text{const};$$

$$2) A_1^2 + 4A_2 > 0 .$$

$$\begin{aligned} & \left| 2\Omega + (A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4A_2})\tau \right|^{\sqrt{A_1^2 + 4A_2} - A_1} \times \\ & \times \left| 2\Omega + (A_1 - \sqrt{A_1^2 + 4A_2})\tau \right|^{\sqrt{A_1^2 + 4A_2} + A_1} = \text{const}; \end{aligned}$$

$$3) A_1^2 - 4A_2 = 0 .$$

$$\left| 2\Omega + A_1\tau \right| \exp \left\{ -\frac{A_1\tau}{2\Omega + A_1\tau} \right\} = \text{const} .$$

**Следствие.** При  $A_1 = 0$  трансцендентный первый интеграл превращается в аналитический первый интеграл физического маятника.

3. О выражении интеграла системы через элементарные и неэлементарные функции. Для поиска первого интеграла системы рассмотрим уравнение

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{1}{y_2} A_2 g(y_1) \cos y_1 + A_1 g'(y_1) .$$

Это уравнение имеет более общий вид, чем уравнение, описывающее движение центра масс в классической работе Н.Е. Жуковского [78].

После замены  $\tau = \sin y_1$ ,  $y_1 \neq \frac{\pi}{2}k$ ,  $k \in Z$ , сокращая на  $\cos y_1$ , имеем уравнение

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -\frac{1}{y_2} A_2 g(\arcsin \tau) + A_1 \frac{dg(\arcsin \tau)}{d\tau} .$$

В частности, если выполнено условие (0.9), то мы имеем случай, когда последнее уравнение становится однородным. Как показано выше, первый интеграл в этом случае выражается через элементарные функции. Вообще же говоря, оно при-

водится к уравнению Риккати, решение которого в самом общем случае в элементарных функциях не выражается.

### § 19. О МЕХАНИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ С МАЯТНИКОМ В ПОТОКЕ СРЕДЫ

Кратко проанализируем задачу о физическом маятнике в потоке набегающей среды, принадлежащую Б. Я. Локшину, В.А. Привалову и В.А. Самсонову [112]. Данная задача позволит обнаружить качественные аналогии.

Рассмотрим плоскую пластину  $AB$ , закрепленную перпендикулярно державке  $OD$  на цилиндрическом шарнире  $O$ , находящуюся в потоке среды (рис. 4.1). В этом случае тело представляет собой физический маятник. Пластина  $AB$  и ось шарнира перпендикулярны плоскости движения. Поток среды движется с постоянной скоростью  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Предположим, что державка сопротивления не создает.

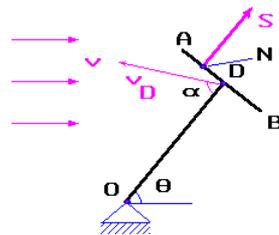


Рис. 4.1

Суммарная сила  $S$  воздействия потока среды на тело направлена параллельно державке, а точка  $N$  приложения этой силы определяется лишь одним параметром – углом атаки  $\alpha$ , который измеряется между вектором скорости  $\vec{v}_D$  точки  $D$  относительно

**§ 19. О механической аналогии с маятником в потоке среды**

потока и державкой  $OD$ . Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания плоских тел.

Таким образом, сила  $S$  направлена по нормали к пластине в ту сторону от нее, которая противоположна направлению скорости  $\vec{v}_D$ , и проходит через некоторую точку  $N$  пластины, смещенную от точки  $D$  вперед по отношению к направлению вектора  $\vec{v}_D$ .

Вектор  $e = OD/\sigma$  ( $\sigma$  – расстояние  $OD$ ) определяет ориентацию державки. Тогда

$$S = s_1(\alpha)v_D^2 e,$$

где коэффициент сопротивления  $s_1$  зависит лишь от угла атаки.

В силу свойств симметрии пластины относительно точки  $D$ , функция  $s(\alpha) = s_1(\alpha)\text{sign}\cos\alpha$  удовлетворяет условию (0.5), а смещение точки  $N$  (т. е.  $DN = y(\alpha)$ ) удовлетворяет условию

$$y \in Y.$$

Здесь  $Y$  – класс функций  $\{y\}$ , описанный во введении (см. (0.4)). Нетрудно убедиться, что произведение  $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$  удовлетворяет условию (0.8).

Уравнение движения рассматриваемого маятника имеет следующий вид:

$$I\vartheta'' = -F(\alpha)v_D^2, \quad (4.2)$$

где  $\vartheta$  – угол отклонения маятника (рис. 4.1),  $I$  – его момент инерции.

Связь между углом атаки и величинами  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  определяется следующими кинематическими соотношениями:

$$v_D \cos \alpha = v \cos \alpha,$$

$$v_D \sin \alpha = \sigma \vartheta' + v \sin \alpha,$$

$$v = |\vec{v}|.$$

В частном случае, когда выполнено свойство (0.9), уравнение (4.2) приводится к следующему виду:

$$I_* \vartheta'' + k_* \vartheta' \cos \vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta = 0, \quad (4.3)$$

где  $I_*, h_* > 0$ .

Обратимся теперь к предыдущей задаче о движении свободного тела. Система (1.18) эквивалентна уравнению

$$\alpha'' - A_1 \alpha' \cos \alpha + A_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (4.4)$$

где  $A_1, A_2 > 0$ .

Таким образом, уравнение (4.4) эквивалентно уравнению (4.3), если положить  $\alpha = \vartheta + \pi$ . При этом изменение во времени мгновенного угла атаки  $\alpha$  свободного тела и угла поворота маятника, помещенного в поток среды, подчиняется одинаковым законам.

Можно показать, что даже если условие (0.9) не выполнено, то полученная механическая аналогия имеет место для любых функций  $F$ , удовлетворяющих условию (0.8).

Действительно, уравнение движения физического маятника в потоке среды приводится к виду

$$I_* \vartheta'' + f(\alpha) [\sigma v \vartheta' \cos \vartheta + v^2 \sin \vartheta \cos \vartheta] = 0,$$

где функция  $f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}$  (здесь  $\alpha = \arctg \frac{\sigma \vartheta' + v \sin \vartheta}{v \cos \vartheta}$ )

удовлетворяет условиям

$$0 < f_* \leq f(\alpha) \leq f^* < +\infty,$$

в силу выполнения свойства (0.8). Имеем, таким образом, автономное уравнение на двумерном фазовом цилиндре. Методами, развиваемыми в главах 2, 3, можно показать, что последнее дифференциальное уравнение и уравнение (4.2) топологически эквивалентны.

Фазовый портрет уравнения (4.4) изображен на ил. 1, при этом вместо  $\Omega$  следует принять  $\alpha^*$ . Динамическая система, заданная уравнением (4.4), относительно структурно устойчива (относительно груба) по отношению к классу функций  $\Phi$  (см. главу 3).

**§ 20. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ  
ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА  
ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ**

---

В данном параграфе проведем глобальный качественный анализ динамической системы (1.17) при условии (0.8) на всей фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ . Для любой функции  $F \in \Phi$  фазовый портрет системы (1.17) имеет один и тот же топологический тип.

Как будет следовать из проводимого анализа, у системы (1.17) не существует траекторий, имеющих в качестве  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ .

В главе 2 (следствие из леммы 2.6) показано, что вокруг точек  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in Z$ , (как в полосе  $\Pi$ , так и в полосе  $\Pi'$ ) не существует замкнутой характеристики векторного поля системы (1.17), т.е. не существует простых и сложных предельных циклов. В силу наличия двух видов симметрий, на фазовой плоскости системы (1.17) вообще не существуют замкнутые характеристики, стягиваемые по фазовому цилиндру в точку.

*1. Топологическая классификация точек покоя системы.* Проведем топологическую классификацию особых точек системы (1.17) при условии (0.8).

1) Точки покоя  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in Z$ , системы (1.17) являются отталкивающими при  $k=2l$ ,  $l \in Z$ , и притягивающими при  $k=2l+1$ .

При  $A_1^2 F'(0) - 4A_2 < 0$  рассмотренные точки являются фокусами, при  $A_1^2 F'(0) - 4A_2 > 0$  — узлами, а при  $A_1^2 F'(0) - 4A_2 = 0$  — вырожденными узлами.

2) На каждой связной компоненте  $\Lambda_i$  многообразия  $O$  ((1.16)) лежит особая точка  $S_i$  системы (1.17) с координатами

$$\left( (2i+1)\frac{\pi}{2}, (-1)^i A_1 \right).$$

Такая точка для любого  $i$  является точкой гиперболического типа — седлом, которое обладает сепаратрисами. В силу наличия двух видов симметрий, достаточно разобрать поведение сепаратрис, входящих (выходящих) в седла (из седел)  $S_{-1}$  и  $S_0$  в полосе  $\Pi$ .

Поведение сепаратрисы, выходящей из точки  $S_{-1}$  в полосу  $\Pi$  (так же как и сепаратрисы, выходящей из точки  $S_0$  в полосу  $\Pi$ ), определяет глобальное поведение всех траекторий системы (1.17). Эту сепаратрису назовем ключевой.

2. *О поведении ключевой сепаратрисы.* Исследуя изоклины, заключаем, что ключевая сепаратриса не может уйти на бесконечность на фазовой плоскости. Поскольку в полосе  $\Pi$  (и  $\Pi'$ , см. главу 2) не существует замкнутых кривых из траекторий системы (1.17), ключевая сепаратриса либо войдет в точку  $S_0$ , либо под прямым углом пересечет прямую  $\Lambda_0$ .

**Предложение 4.1.** *Ключевая сепаратриса пересечет прямую  $\Lambda_0$  в точке  $\left(\frac{\pi}{2}, \Omega^*\right)$  при  $\Omega^* < A_1$ .*

Доказательство можно провести методом систем сравнения (см. главу 2).

3. *Фазовый портрет. Его относительная грубость.* Рассмотрим теперь глобальное качественное расположение траекторий системы (1.17) на фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ .

Ввиду наличия НЗС для системы (1.17), а также в силу предложения 4.1, ключевая сепаратриса будет иметь в качестве  $\omega$ -предельного множества седло  $\left(-\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ . Поведение остальных симметричных сепаратрис может быть исследовано аналогичным образом.

**Следствия.** 1) *Сепаратриса, входящая в точку  $S_{-1}$  в полосу  $\Pi$ , имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества начало координат.*

2) *Движения с достаточно большой энергией являются периодическими.*

3) *Фазовым пространством системы (1.17) является цилиндр  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\Omega\}$ , поэтому на нем существует континуум замкнутых траекторий, охватывающих его. Замкнутых же траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, не существует.*

4) *В силу неособой во всей плоскости замены переменных  $y_1 = \alpha, y_2 = -\Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$ , фазовый портрет системы на плоскости  $R^2\{y_1, y_2\}$  изображен на ил. 1 (вместо  $\Omega$  надо взять  $y_2$ , а вместо  $\alpha - y_1$ ).*

5) *Фазовый портрет системы (1.17) изображен на ил. 2 (где вместо  $\alpha$  следует взять  $-\alpha$ ).*

**Замечание.** Ключевые сепаратрисы являются границами областей, в каждой из которых движение имеет различный характер. Так в колебательной области, содержащей притягивающие и отталкивающие точки покоя, почти все траектории имеют в качестве предельных множеств аттракторы и репеллеры. Следовательно, не существует даже абсолютно непре-

рывной функции, являющейся плотностью инвариантной меры в данной области.

Иначе обстоит дело с областью, сплошь заполненной вращательными движениями.

Как показала в своей дипломной работе В. В. Журавлева (1988 г.), существует гладкая функция, являющаяся плотностью инвариантной меры в области, сплошь заполненной периодическими траекториями, не стягиваемыми по фазовому цилиндру в точку.

В связи с проведенным глобальным качественным анализом системы (1.17) сделаем важный вывод, а именно, векторные поля систем вида (1.17) при условии (0.8) топологически эквивалентны между собой (см. главу 3).

В частности, относительно класса функций  $\Phi$  система уравнений вида (1.17) структурно устойчива.

Вообще же говоря, рассматривая произвольную деформацию векторного поля системы (1.17), обычная (абсолютная) грубость системы не будет иметь место. Последнее произойдет ввиду наличия сепаратрис, идущих из седла в седло.

Так при  $h \neq 0$  ключевые сепаратрисы системы (2.2) расщепляются (см. также главу 8). Там же для любого  $h$  будет проведена типичная топологическая классификация фазовых портретов системы (2.2) при условии (0.8), которая описывает плоскопараллельное движение тела в среде, при котором величина скорости центра пластины остается постоянной, а на тело действует линейный по угловой скорости демпфирующий момент.

*Далее проводится качественный анализ траекторий движения тела на плоскости. После полного качественного исследования фазового цилиндра квазискоростей становится возможным исследование конкретных траекторий твердого тела. Динамическая система в пространстве квазискоростей относительно структурно устойчива. Проводится интегрирование кинематических соотношений с целью механической интерпретации движения.*

## **§ 21. Общие свойства решений динамической системы**

---

*Обсуждаются общие свойства пространства решений: симметрии, различные расслоения фазового пространства, его разделение на колебательную и вращательную области. Изучаются свойства решений, соответствующих колебательной области: свойства асимптот при движении твердого тела, различные отношения эквивалентности на пространстве траекторий, качественные аналогии, механические интерпретации асимптотических движений. Изучаются свойства решений, соответствующих вращательной области: существование семейства периодических траекторий, всюду плотно заполняющих некоторые области, вопросы плотности незамкнутых траекторий в ограниченных множествах.*

Уже первые результаты численного исследования траекторий движения тела на плоскости явились хорошим стимулом развития аналитического аппарата для изучения таких траекторий. Эти численные результаты указали на путь развития качественного анализа данной динамической системы. В последствии, когда были получены исчерпывающие аналитические доказательства для различных качественных свойств данной динамической системы, численное построение дает количественные характеристики траекторий движения тела на плоскости.

## **§ 21. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

---

---

Поскольку топологический тип фазового портрета системы (1.17) не меняется при деформациях векторного поля вдоль класса полей, определенного с помощью условия (0.8), будем исследовать аналитическую безразмерную систему уравнений, полученную из системы (1.18):

$$\alpha^* = \Omega + \beta \sin \alpha, \quad \Omega^* = -\beta \sin \alpha \cos \alpha. \quad (4.5)$$

Обезразмеренные кинематические соотношения перепишем в виде

$$\varphi^* = \Omega, \quad x^* = \cos(\alpha - \varphi), \quad y^* = \sin(\alpha - \varphi). \quad (4.6)$$

Здесь введен безразмерный параметр  $\beta = \frac{\sigma^2 AB}{I} = \sigma^2 n_0^2 > 0$ .

Фазовый портрет системы (4.5) для любого  $\beta > 0$  изображен на ил. 2, и для любых начальных условий  $(\alpha_0, \Omega_0)$  известно качественное поведение решений  $\alpha = \alpha_1(t, \alpha_0, \Omega_0)$ ,  $\Omega = \Omega_1(t, \Omega_0, \alpha_0)$  системы (4.5). Таким образом, в силу (4.6)

$$\varphi = \varphi_1(t, \varphi_0, \alpha_0, \Omega_0) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \Omega_1(\tau, \Omega_0, \alpha_0) d\tau,$$

$$x = x_1(t, x_0, \alpha_0, \Omega_0, \varphi_0) = x_0 + \int_{t_0}^t \cos(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \Omega_0) - \varphi_1(\tau, \varphi_0, \alpha_0, \Omega_0)) d\tau,$$

$$y = y_1(t, y_0, \alpha_0, \Omega_0, \varphi_0) = y_0 + \int_{t_0}^t \sin(\alpha_1(\tau, \alpha_0, \Omega_0) - \varphi_1(\tau, \varphi_0, \alpha_0, \Omega_0)) d\tau.$$

В силу наличия центральной симметрии и некоторой зеркальной симметрии (НЗС), будем рассматривать класс следующих начальных условий:

$$t_0 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Таким образом,

$$\alpha = \alpha_1\left(t, \frac{\pi}{2}, \Omega_0\right) = \alpha_2(t, \Omega_0),$$

$$\Omega = \Omega_1\left(t, \Omega_0, \frac{\pi}{2}\right) = \Omega_2(t, \Omega_0),$$

$$\varphi = \varphi_1(t, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \Omega_0) = \varphi_2(t, \Omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \Omega_2(\tau, \Omega_0) d\tau,$$

$$x = x_1(t, 0, \frac{\pi}{2}, \Omega_0, -\frac{\pi}{2}) = x_2(t, \Omega_0) = \int_0^t \cos(\alpha_2(\tau, \Omega_0) - \varphi_2(\tau, \Omega_0)) d\tau,$$

$$y = y_1(t, 0, \frac{\pi}{2}, \Omega_0, -\frac{\pi}{2}) = y_2(t, \Omega_0) = \int_0^t \sin(\alpha_2(\tau, \Omega_0) - \varphi_2(\tau, \Omega_0)) d\tau.$$

Укажем на общие свойства решений системы (4.5), (4.6), соответствующих вышеприведенному классу начальных условий.

**Предложение 4.2.** *Функции  $\alpha_2(t, \Omega_0) - \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2(t, \Omega_0) + \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2(t, \Omega_0)$  – нечетные, а  $\Omega_2(t, \Omega_0)$ ,  $y_2(t, \Omega_0)$  – четные функции времени  $t$  (все это для любого фиксированного  $\Omega_0 \in R$ ).*

Можно считать, что  $\Omega_0 \in (-\beta, +\infty)$  в силу наличия двух видов симметрий.

**Следствие.** *На плоскости  $R^2\{x, y\}$  кривая*

$$F_0(x_2(t, \Omega_0), y_2(t, \Omega_0)) = 0$$

*для любого  $\Omega_0 \in R$  симметрична относительно оси  $Oy$ .*

## § 22. РАССЛОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Два подхода к рассмотрению глобального расположения траекторий в фазовом пространстве. В силу отщепления независимой подсистемы (4.5), фазовое пространство допускает следующие расслоения.

*Первый подход.* В силу (1.14), фазовое пространство расщепляется на пятимерные гиперплоскости

$$\{(v, \alpha, \Omega, x, y, \varphi) \in R^6 : v = \text{const} > 0\},$$

которые являются расслоениями над двумерными базами – цилиндрами  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\Omega\}$ . Данное семейство цилиндров получено в явном виде для случая (0.9), поскольку предъявлен первый интеграл независимой подсистемы (1.18).

Зафиксируем какой-нибудь один уровень интеграла системы (1.18). Получим, таким образом, четырехмерный цилиндр. Ограничим систему уравнений только лишь на данный цилиндр. Трехмерная база  $R^3\{x, y, \varphi\}$  расслоения, в свою очередь, является расслоением над окружностью  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$  со слоем – плоскостью  $R^2\{x, y\}$  – и имеет также ряд свойств цилиндрической природы.

*Второй подход.* В силу (1.14), (4.5) шестимерное фазовое пространство является расслоением над трехмерной базой  $R^3\{v, \alpha, \Omega\}$ , которая, в свою очередь, расщепляется на двумерные плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ , а именно:

$$\{(v, \alpha, \Omega) \in R^3 : v = \text{const} > 0\}.$$

Фазовые портреты на этих плоскостях представляют собой портреты независимой системы (4.5). Таким образом, мы получили полное расслоение базы  $R^3\{v, \alpha, \Omega\}$ .

В силу предъявленного выше описания базы  $R^3\{v, \alpha, \Omega\}$  расслоения шестимерного фазового пространства, осуществление поднятия траекторий из базы в фазовое пространство и получение полного расслоения всего пространства.

2. *О разделении фазовой плоскости квазискоростей на области с различным характером поведения траекторий.* Строение фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  системы (4.5) полностью определяет расслоение шестимерного фазового про-

пространства. Остановимся подробнее на анализе фазовых траекторий на плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ .

Ключевые сепаратрисы (т.е. сепаратрисы, выходящие из точек  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi l, (-1)^l \beta\right)$  и входящие в точки  $\left(3\frac{\pi}{2} + \pi l, (-1)^l \beta\right)$ , разделяют фазовую плоскость на две области с совершенно различным характером поведения траекторий (ил. 2).

Первая область — колебательная или финитная (она односвязна и содержит прямую  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \Omega = 0\}$ ) — сплошь заполнена траекториями следующего типа. Почти любая такая траектория начинается в отталкивающейся точке  $(2\pi k, 0)$  и кончается в притягивающей  $((2k \pm 1)\pi, 0)$ ,  $k \in Z$ . Исключение лишь составляют точки покоя  $(\pi k, 0)$ , а также сепаратрисы, которые либо выходят из отталкивающих точек  $(2\pi k, 0)$  и входят в седла  $S_{2k-1}$  и  $S_{2k}$ , либо выходят из седел  $S_{2k}$  и  $S_{2k+1}$  и входят в притягивающие точки  $((2k+1)\pi, 0)$ . Здесь

$$S_k = \left( \frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^{k+1} \beta \right).$$

Вторая область — вращательная (она двусвязна) — сплошь заполнена вращательными движениями подобно вращениям на фазовой плоскости математического маятника. Данные фазовые траектории огибают фазовый цилиндр и являются на нем периодическими. Хотя динамическая система (4.5) и неконсервативна, во вращательной области ее фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$  она, как отмечалось выше, допускает сохранение инвариантной меры с переменной плотностью. Данное свойство характеризует рассматриваемую систему как систему с переменной диссипацией с нулевым средним.

**§ 23. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ,  
СООТВЕТСТВУЮЩИХ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ  
ОБЛАСТИ**

В данном параграфе проводится качественное исследование решений кинематических уравнений (4.6), соответствующих начальным условиям из колебательной области плоскости квазискоростей.

1. *Свойства асимптот при движении твердого тела на плоскости.* Будем рассматривать функции  $\alpha_2(t, \Omega_0)$ ,  $\Omega_2(t, \Omega_0)$  при  $t \geq 0$ , а также при  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ , где  $\Omega_*$  такое значение, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2(t, \Omega_*) = \beta.$$

При всех таких  $\Omega_0$  выполнены равенства:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Omega_2(t, \Omega_*) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_2(t, \Omega_*) = \pi.$$

Все последующие рассуждения данного параграфа относительно движения тела носят формальный характер.

Поступательное движение тела, при котором центр масс находится впереди, экспоненциально орбитально устойчиво. Поэтому существует прямая на плоскости  $R^2\{x, y\}$ , являющаяся асимптотой при  $t \rightarrow +\infty$  для центра пластины твердого тела. Чтобы охарактеризовать свойства асимптоты приведем вспомогательное утверждение, несущее информацию о возможных поворотах тела.

**Предложение 4.3.** 1) Для любого действительного  $T > 0$  ( $T < 0$ ) существует начальное значение  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  такое, что

$$I_1(\Omega_0) = \int_0^{+\infty} \Omega_2(t, \Omega_0) dt > T \quad (< T). \quad (4.7)$$

2) Функция  $I_1(\Omega_0)$  гладко зависит от  $\Omega_0$ .

**Следствие 1.** Для любого действительного  $r$  найдется  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  такое, что  $I_1(\Omega_0) = r$ . Таким образом, отображение

$$I_1 : (-\beta, \Omega_*) \rightarrow R$$

является отображением на.

В силу экспоненциальной устойчивости стационарного движения, при котором центр масс движется впереди, предельными движениями при  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  и при  $t \rightarrow \pm\infty$  будут являться асимптотические движения к прямым, симметрично расположенным относительно оси  $Oy$ : при  $t \rightarrow +\infty$  – к одной прямой, а при  $t \rightarrow -\infty$  – к другой. Поэтому достаточно изучить лишь одну прямую. Очевидно, что угол поворота искомой прямой при  $t \rightarrow +\infty$  равен  $I_1(\Omega_0)$ , т.е. задается интегралом (4.7). Таким образом, угловой коэффициент искомой прямой задается начальным значением угловой скорости  $\Omega_0$ .

В силу предложения 4.3, возникает (может и многозначное) отображение

$$I_2 : R \rightarrow (-\beta, \Omega_*).$$

Это отображение порождает следующее отображение:

$$I_3 : S^1 \rightarrow (-\beta, \Omega_*),$$

которое является многозначным и в некотором смысле является обратным к отображению

$$I_1^{\text{mod}} : (-\beta, \Omega_*) \rightarrow S^1 = R / 2\pi Z.$$

Рассмотрим механический смысл отображений  $I_1$  и  $I_1^{\text{mod}}$ , которые, соответственно, являются обратными для отображений  $I_2$  и  $I_3$ . Отображение  $I_1$  каждому допустимому значению  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  сопоставляет действительное число  $r$ , взяв которое по модулю  $2\pi$  можно получить угол между асимптотой и

осью  $Oy$ . При этом делитель числа  $r$  на  $2\pi$  дает число оборотов со знаком, которое сделает тело при движении от его начального положения до асимптотически устойчивого конечного (при  $t \rightarrow +\infty$ ). Отображение же  $I_1^{\text{mod}}$  лишь сопоставляет допустимому значению начальной угловой скорости угол поворота от оси  $Oy$  до асимптоты движения тела при  $t \rightarrow +\infty$  и не несет никакой информации относительно числа полных оборотов со знаком.

2. *Отношения эквивалентности на пространстве траекторий.* Рассмотрим пространство всех траекторий тела на плоскости  $R^2\{x, y\}$ , соответствующее решениям системы (4.5), (4.6)

$$\alpha_2(t, \Omega_0), \Omega_2(t, \Omega_0), \varphi_2(t, \Omega_0), x_2(t, \Omega_0), y_2(t, \Omega_0),$$

т.е. семейство кривых на плоскости, зависящее от параметра  $\Omega_0$ . Для каждого фиксированного  $\beta > 0$  отождествим все траектории, имеющие одно и то же значение  $I_1(\Omega_0)$ . Таким образом, мы отождествили такие допустимые движения тела, при которых:

а) тело совершает одно и то же количество полных оборотов со знаком;

б) оно имеет асимптоту с одним и тем же углом от оси  $Oy$ .

Данное отношение задает отношение эквивалентности. Фактор-пространство всего пространства допустимых траекторий по данному отношению эквивалентности будем обозначать через  $FT$ .

Очевидно, что если отображение  $I_1$  взаимнооднозначно, то  $FT$  совпадает со всем пространством траекторий, при которых  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$ .

Пусть на окружности  $S^1$  с фиксированной на ней точкой  $E_1 \in S^1$  заданы пути, начинающиеся в точке  $E_1$  и заканчивающиеся на окружности в точке  $E_2$ . Пути из  $E_1$  в  $E_2$  на окружности будем считать тождественными (гомотопными), если

они стягиваются друг к другу по окружности. Такое отношение задает отношение эквивалентности.

**Следствие 2.** При  $E_1 = E_2$  получим фундаментальную группу окружности  $\pi_1(S^1)$ , которая изоморфна  $Z$ . Если же  $E_1 \neq E_2$ , причем точка  $E_2$  – не фиксирована, то получившаяся фактор-группа изоморфна  $\pi_1(S^1) \times S^1 = Z \times S^1$ .

**Предложение 4.4.** Пространство  $FT$  изоморфно  $\pi_1(S^1) \times S^1 = Z \times S^1$ .

**Следствие 3.** Каждому допустимому значению  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  соответствует траектория на плоскости  $R^2\{x, y\}$ , определяющая элемент пространства  $FT$ , который, в свою очередь, задается двумя числами: целым числом полных оборотов со знаком, а также действительным числом по модулю  $2\pi$  поворота асимптоты от оси  $Oy$ .

**Следствие 4.** Если  $E_1 = E_2$ , то получаем изоморфизм  $FT = \pi_1(S^1)$ .

Это соответствует тому, что тело, сделав несколько оборотов, имеет при  $t \rightarrow +\infty$  асимптоту, параллельную оси  $Oy$ . Таким образом, в этом случае каждой траектории соответствует лишь одно целое число, несущее информацию о количестве полных оборотов со знаком.

**Следствие 5.** Если отображение  $I_1(\Omega_0)$  строго монотонно, то появляется естественный изоморфизм между интервалом  $(-\beta, \Omega_*)$  и множеством  $Z \times S^1$ .

Теперь уместно сделать вывод о траекториях движения тела на плоскости: для каждого  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  траектория на плоскости  $R^2\{x, y\}$  «кодируется» парой чисел  $(q, \psi)$ ,  $q \in Z$ ,  $\psi \in R$ ,  $\psi \bmod 2\pi$ , которая является «адресом» траектории.

3. *Механические интерпретации асимптотических движений.* Рассмотрим те начальные значения угловой скорости

$\Omega_0$ , при которых асимптота параллельна одной из осей координат.

*Случай А.* Асимптота параллельна оси  $Ox$ . Существует последовательность точек  $\{\Omega'_n\} \in (-\beta, \Omega_*)$  такая, что  $I_1^{\text{mod}}(\Omega'_n) = \frac{\pi}{2}, \forall n \in N$ . Число полных оборотов тела, закрученного с угловой скоростью  $\Omega'_n$ , может достигать любого целого числа. Расстояние от асимптоты до прямой  $Ox$  обозначим через  $L_1$ . В силу следствия из предложения 4.2, асимптота движения тела при  $t \rightarrow -\infty$  совпадает с асимптотой движения тела при  $t \rightarrow +\infty$ . Таким образом, для любых начальных угловых скоростей  $\Omega'_n$  ( $n \in N$ ) приращение ординаты точки тела за бесконечное время (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) равно нулю (рис. 4.2).

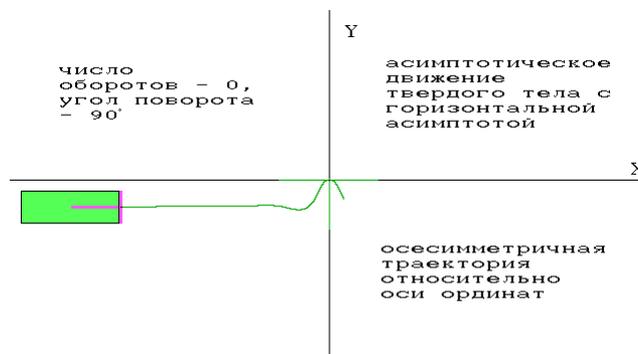


Рис. 4.2

*Случай Б.* Асимптота параллельна оси  $Oy$ . Существует последовательность точек  $\{\Omega''_n\} \in (-\beta, \Omega_*)$  такая, что  $I_1^{\text{mod}}(\Omega''_n) = 0, \forall n \in N$ . Число полных оборотов тела, закрученного с угловой скоростью  $\Omega''_n$ , может достигать любого целого числа. Расстояние от асимптоты до прямой  $Oy$  обозначим через  $L_2$ . В силу следствия из предложения 4.2, асимптота движения тела при  $t \rightarrow -\infty$  также параллельна оси  $Oy$  и находится на расстоянии

$L_2$  до оси  $Oy$ . Таким образом, для любых начальных угловых скоростей  $\Omega_n$  ( $n \in N$ ) приращение абсциссы точки тела за бесконечное время (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) равно  $2L_2$  (рис. 4.3).

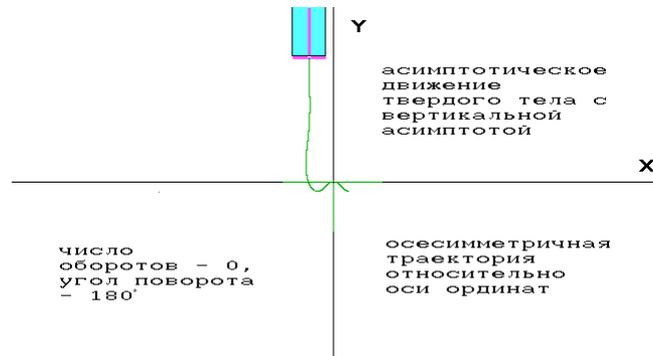


Рис. 4.3

В этом случае (см. следствие 4 данного параграфа) имеется топологическая аналогия: пространство  $FT$  изоморфно фундаментальной группе  $\pi_1(S^1)$ .

Для более детального объяснения последнего факта достаточно рассмотреть как все возможные траектории  $x(t), y(t)$  на плоскости  $R^2\{x, y\}$  и выделить среди них действительные в качестве решений системы (4.5), (4.6), так и все возможные кривые на окружности  $S^1$ , начинающиеся в фиксированной точке и заканчивающиеся на окружности. Последние траектории необходимо рассмотреть с точностью до гомотопии вдоль  $S^1$ .

4. *Об одном локальном свойстве асимптоты.* Пока система (4.5),(4.6) рассматривалась при любом фиксированном значении параметра  $\beta > 0$ . Укажем на одно свойство асимптоты движения, параллельной оси  $Oy$  и формально зависящей от параметра  $\beta > 0$ .

Поставим следующий вопрос: как изменяется приращение  $L_2$  от параметра  $\beta$ . Величина  $L_2$  при этом представляется в следующем виде:

$$L_2 = L_2(\Omega_0, \beta) = \int_0^{+\infty} \cos(\alpha_\beta(t, \Omega_0) - \varphi_\beta(t, \Omega_0)) dt.$$

Здесь  $\alpha_\beta(t, \Omega_0)$ ,  $\varphi_\beta(t, \Omega_0)$  – решения  $\alpha_2(t, \Omega_0)$ ,  $\varphi_2(t, \Omega_0)$  системы (4.5) для каждого фиксированного  $\beta > 0$ .

**Предложение 4.5.** При малых  $\beta > 0$  функция  $L_2(\Omega_0, \beta)$  для любого  $\Omega_0 \in (-\beta, \Omega_*)$  представляется в виде:

$$L_2(\Omega_0, \beta) = l_2(\Omega_0, \beta) \beta^2,$$

где  $\left. \frac{\partial l_2(\Omega_0, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}$ ,  $l_2(\Omega_0, \beta)|_{\beta=0}$  – ограничены. (Здесь производные берутся при  $\beta \rightarrow +0$ .)

**Следствие 6.** В случае системы (4.5) функция  $l_2(\Omega_0, \beta)$  при допустимых  $\Omega_0$  – функция аналитическая, поэтому представление для  $L_2(\Omega_0, \beta)$  справедливо при всех  $\beta \in R$ .

#### § 24. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим класс траекторий, соответствующий вращательной области.

1. *Существование семейства периодических траекторий.* Изучим общие свойства периодических траекторий, огибающих фазовый цилиндр квазискоростей, а также связь этих свойств со свойствами траекторий твердого тела на плоскости. Для этого исследуем функции  $\alpha_2(t, \Omega_0)$ ,  $\Omega_2(t, \Omega_0)$  при  $t \geq 0$ , а также при  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ . При этом  $\Omega_2(t, \Omega_0)$  для каждого фик-

сированного  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$  – периодическая функция  $t$  периода  $T(\Omega_0)$ :

$$\Omega_2(t+T(\Omega_0), \Omega_0) = \Omega_2(t, \Omega_0),$$

а  $\alpha_2(t, \Omega_0)$  – имеет приращение  $2\pi$ :

$$\alpha_2(t+T(\Omega_0), \Omega_0) = \alpha_2(t, \Omega_0) + 2\pi.$$

Для начала исследуем зависимость периода  $T(\Omega_0)$  траектории от  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ .

Поскольку вдоль замкнутой на цилиндре траектории

$$\frac{\partial \alpha_2(t, \Omega_0)}{\partial t} > 0, \quad \forall t \in R, \quad \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty),$$

то по теореме о неявной функции можно разрешить однозначно

$$t = t_2(\alpha, \Omega_0)$$

вдоль периодической траектории. При этом  $\frac{\partial t_2(t, \Omega_0)}{\partial \alpha} > 0$ ,

$\forall \alpha \in R, \quad \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ .

Функция  $T(\Omega_0)$  представляется в следующем виде:

$$0 < T(\Omega_0) = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{d\alpha}{\Omega_2(t_2(\alpha, \Omega_0), \Omega_0) + \beta \sin \alpha}.$$

**Предложение 4.6.** Функция  $T(\Omega_0)$  – гладкая на интервале  $(\Omega_*, +\infty)$ , причем  $\lim_{\Omega_0 \rightarrow \Omega_*+0} T(\Omega_0) = +\infty$ ,  $\lim_{\Omega_0 \rightarrow +\infty} T(\Omega_0) = +0$ ,

$\frac{dT(\Omega_0)}{d\Omega_0} < 0$ ,  $\forall \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ . Таким образом, функция  $T(\Omega_0)$

задает диффеоморфизм

$$T: (\Omega_*, +\infty) \rightarrow (0, +\infty).$$

Рассмотрим теперь класс функций  $x_2(t, \Omega_0)$ ,  $y_2(t, \Omega_0)$  при  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ . В силу предложения 4.2 –  $x_2(t, \Omega_0)$  – нечетная, а  $y_2(t, \Omega_0)$  – четная функции  $t$ . В силу (4.6)

$$\frac{d}{dt} x_2(t, \Omega_0) = \cos(\alpha_2(t, \Omega_0) - \varphi_2(t, \Omega_0)),$$

$$\frac{d}{dt} y_2(t, \Omega_0) = \cos(\alpha_2(t, \Omega_0) - \varphi_2(t, \Omega_0)).$$

Фиксируем  $\Omega_0$ . Пусть приращение функции  $\varphi_2(t, \Omega_0)$  за время  $T(\Omega_0)$  равно  $\Delta\varphi = \varphi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \varphi_2(0, \Omega_0) = \varphi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) + \frac{\pi}{2} > 0$ , так как  $\Omega_2(t, \Omega_0) > 0$ ,  $\forall t \in R$ ,  $\forall \Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ . Если  $\Delta\alpha = \alpha_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \alpha_2(0, \Omega_0)$ , то, очевидно,  $\Delta\alpha = 2\pi$ .

**Рассмотрим**

$$\Delta(\alpha - \varphi) = \alpha_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \varphi_2(T(\Omega_0), \Omega_0) - \alpha_2(0, \Omega_0) + \varphi_2(0, \Omega_0).$$

В силу предложений 4.3, 4.6, функция  $\Delta(\alpha - \varphi)(\Omega_0)$  гладкая при  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$ .

Обозначим  $\Delta(\alpha - \varphi)(\Omega_0)$  через  $\Delta_{\alpha-\varphi}(\Omega_0)$ . Справедливо неравенство

$$-\infty < \Delta_{\alpha-\varphi}(\Omega_0) < 2\pi.$$

Другими словами, приращение разности углов за период может быть достаточно большим.

**Предложение 4.7.** *Для любого достаточно большого отрицательного значения  $D < 0$  найдется  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$  такое, что  $\Delta_{\alpha-\varphi}(\Omega_0) = D$ .*

Рассмотрим значения правых частей последних равенств за период  $T(\Omega_0)$ , т.е. при  $t = T(\Omega_0)$ :

$$\frac{d}{dt}x_2(T(\Omega_0), \Omega_0) = \cos z,$$

$$\frac{d}{dt}y_2(T(\Omega_0), \Omega_0) = \sin z.$$

Другими словами,  $x_2^*(t, \Omega_0) = \cos f(t)$ ,  $y_2^*(t, \Omega_0) = \sin f(t)$ , где  $f(T(\Omega_0)) = z$ .

**Предложение 4.8.** *Функции  $\cos f(t)$  и  $\sin f(t)$  периодические тогда и только тогда, когда  $z$  рационально зависимо с  $\pi$ .*

**Предложение 4.9.** *На числовом луче  $(\Omega_*, +\infty)$  существует всюду плотное счетное множество  $K$ , обладающее следующим свойством:  $\Omega_0 \in K$  тогда и только тогда, когда функции  $x_2^*(t, \Omega_0)$  и  $y_2^*(t, \Omega_0)$  периодические периода  $\tau(\Omega_0)$ .*

Поскольку на множестве  $K$  (при фиксированном  $\Omega_0 \in K$ ) функции  $x_2^*(t, \Omega_0)$  и  $y_2^*(t, \Omega_0)$  — периодические периода  $\tau(\Omega_0)$ , то функции  $x_2(t, \Omega_0)$  и  $y_2(t, \Omega_0)$  периодические в том и только том случае, если

$$\int_0^{\tau(\Omega_0)} x_2^*(t, \Omega_0) dt = \int_0^{\tau(\Omega_0)} y_2^*(t, \Omega_0) dt = 0. \quad (4.8)$$

Равенства (4.8) выполнены на множестве  $K$ , поскольку функция  $y_2^*(t, \Omega_0)$  — нечетная переменная  $t$ , а также выполнено свойство

$$\frac{d}{dt}y_2\left(t + \frac{\pi}{2}, \Omega_0\right) = \frac{d}{dt}x_2(t, \Omega_0), \quad \forall \Omega_0 \in K.$$

Таким образом верно.

**Предложение 4.10.** *Кривая*

$$\gamma(t) : \{(x, y) \in R^2 : x = x_2(t, \Omega_0), y = y_2(t, \Omega_0)\}$$

*на плоскости  $R^2\{x, y\}$  замкнута тогда и только тогда, когда  $\Omega_0 \in K$ .*

**Следствие 1.** Для почти всех  $\Omega_0 \in (\Omega_*, +\infty)$  траектория движения центра пластины твердого тела на плоскости – незамкнутая кривая.

**Следствие 2.** Поскольку выполнено свойство (1.14), то либо кривая уходит на бесконечность, либо существует множество, в котором она всюду плотна.

2. О плотности незамкнутых траекторий. В рассматриваемой системе существует бесконечное всюду плотное семейство замкнутых траекторий. При этом незамкнутые траектории оказываются всюду плотными. Для исследования данного вопроса обратимся к теореме 2.9, из которой получаются важные следствия.

**Предложение 4.11.** Незамкнутая траектория, которая является проекцией на плоскость  $R^2\{x, y\}$  фазовой траектории системы (4.5), (4.6), всюду плотна возле себя.

Можно показать, что в нашем случае траектория центра пластины твердого тела заполняет ограниченную область – кольцо – на плоскости. На рис. 4.4 и 4.5 показаны траектории центра пластины соответственно на малых и больших временах. Данная визуализация движения на персональном компьютере была получена благодаря написанному пакету программ.

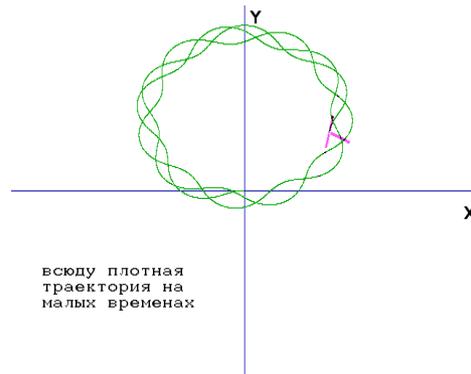


Рис. 4.4

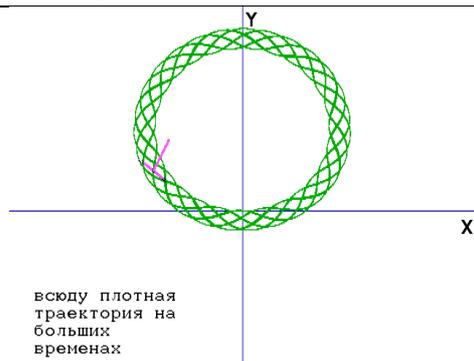


Рис. 4.5

Итак, для почти всех значений начальной угловой скорости траектория центра пластины – всюду плотная в ограниченном множестве плоскости, а также возле себя незамкнутая траектория. Для остальных значений начальной угловой скорости искомая кривая – замкнутая, задаваемая длиннопериодическими функциями.

#### § 25. ОБ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВАХ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ

---

В данном параграфе автор считает нужным кратко рассказать о пакете прикладных программ, позволившем визуализировать движение тела на плоскости.

Поскольку аналитическое исследование поведения системы в «большом» весьма затруднительно, проведено подробное численное моделирование движения системы с различными значениями параметров. С этой целью создана программа, позволяющая последовательно конструировать механическую модель и моделировать ее движение в желаемом диапазоне параметров. Процесс работы программы разбит на несколько этапов: машин-

ное конструирование механической модели, выбор начальных условий, моделирование движения. В этой связи интересно описать инструментальные средства исследования модели.

а) Машинное конструирование механической модели.

На первом этапе работы программы на дисплее появляются список механических параметров системы, полноэкранное изображение механической модели. Далее проводится желаемое изменение параметров описываемой модели, отвечающих за свойства модели. Таким образом для получения требуемой конфигурации и уравнений движения проводится последовательное конструирование механической модели, которая будет использоваться для дальнейших расчетов.

б) Выбор начальных условий.

Следующим этапом, предваряющим непосредственное моделирование движения, является задание начальных условий. На экране отображается конфигурационная плоскость обобщенных координат и задание начальных условий осуществляется выбором точки на этой плоскости или вводом точных значений начальных условий.

в) Моделирование движения.

В процессе моделирования поведения системы интегрируются уравнения движения при выбранных начальных условиях, причем результаты счета выводятся на экран непосредственно в процессе интегрирования. Вывод результатов осуществляется в двух графических режимах.

В первом режиме средствами быстрой машинной графики в процессе интегрирования непрерывно строится фазовый портрет динамической системы. Этот режим служит для обнаружения и анализа характерных типов движений на фазовой плоскости: положений равновесия, замкнутых траекторий и т.п.

Во втором режиме параллельно вычислениям на экране демонстрируется реальная картина движения исследуемой системы, совершающей поступательно-вращательные движения в потоке среды.

*Некоторые промежуточные выводы.* Путем введения ряда упрощающих предположений, проведено понижение порядка в некоторой задаче моделирования плоскопараллельного движения тела в среде при струйном или отрывном обтекании. Редуцированная система допускает проведение полного качественного анализа на фазовой плоскости квазискоростей и геометрическую интерпретацию движения.

Показано, что траектория центра пластины на плоскости обладает осевой симметрией, а при некоторых начальных условиях и сферической. Фазовое пространство задачи обладает рядом свойств, характеризующих наличие расслоений. Ключевые сепаратрисы делят плоскость квазискоростей на две области – колебательную (финитную) и вращательную.

Орбитальная экспоненциальная устойчивость движений из колебательной области позволяет говорить о существовании асимптот для траекторий движения. Для любого наперед заданного угла существуют начальные условия движения, при которых тело повернется на этот угол за бесконечное время. Таким образом, движение способно иметь любую асимптоту. Благодаря ряду геометрических и топологических аналогий показано, что в пространстве траекторий можно ввести отношения эквивалентности. При этом каждая траектория «кодируется» целым числом полных оборотов и действительным числом по модулю  $2\pi$  угла поворота асимптоты. В зависимости от единственного безразмерного параметра поступательное приращение тела за бесконечное время пропорционально квадрату этого параметра.

Движения тела, соответствующие вращательной области плоскости квазискоростей, могут быть либо периодическими, либо всюду плотными в ограниченной области плоскости. Период движения по такой траектории может быть сколь угодно большим. При этом почти все (с точки зрения меры) траектории являются всюду плотными. Существует бесконечное всюду плотное семейство замкнутых траекто-

рий в фазовом пространстве. Апериодические траектории всюду плотны в сферически симметричной области, а также плотны возле себя.

Таким образом, траекториям из вращательной области фазовой плоскости квазискоростей соответствуют движения в ограниченной области плоскости как проекции конфигурационного пространства, а траекториям из колебательной (финитной) области – движения, уходящие на бесконечность.

*Изучение динамики движения твердого тела с постоянной скоростью центра масс эквивалентно, как известно, изучению динамики движения вокруг центра масс в системе координат Кенига.*

*В соответствии с этим, далее проводится глобальный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, возникающих при описании движения твердого тела в сопротивляющейся среде, при котором на тело действует лишь пара сил. При этом изучение проводится не в системе координат Кенига, а в отличной от нее инерциальной системе. Последнее проводится по той причине, что изучаемые системы уравнений являются удобными системами сравнения для более сложных (систем с переменной диссипацией с ненулевым средним) систем, которые будут рассматриваться позднее. Тем не менее, далее указано на три различных топологических типа фазовых портретов систем, а также на трансцендентную интегрируемость.*

## **§ 26. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ К ФИЗИЧЕСКОМУ МАЯТНИКУ**

---

*1. О сведении динамической системы к физическому маятнику.*

При рассмотрении данного класса движений, описываемых системой (0.1)—(0.3), (4.1) при условии (1.21), можно

## § 26. Сведение системы к физическому маятнику

пойти двумя путями. Во-первых, как уже говорилось, в инерциальной системе координат Кенига нетривиальна лишь группа из двух уравнений, а именно,

$$\dot{\varphi} = -\Omega, \quad \dot{\Omega} = F(\alpha)v^2,$$

к которой необходимо добавить два кинематических соотношения, связывающих величины  $v$ ,  $\alpha$  и  $v_{D_1}$ , где  $D_1$  – центр пластины твердого тела. При этом мы необходимо попадаем в условия § 19, динамическая система которого эквивалентна последней системе.

Во-вторых, с точки зрения теории динамических систем, рассматривая систему (0.1)—(0.3),(4.1), делаем вывод, что она интегрируема. Вообще говоря, достаточно иметь для этого пять первых интегралов. Но поскольку система (0.1)—(0.3) – независимая подсистема третьего порядка в системе (0.1)—(0.3),(4.1), достаточно проинтегрировать эту подсистему, а затем подставить полученные функции в систему (4.1). При этом качественно находятся величины  $\varphi$ ,  $x$ ,  $y$ .

Если центр масс движется прямолинейно и равномерно, правая часть системы (0.1)—(0.3) обращается в нуль, и у совокупной системы (0.1)—(0.3),(4.1) имеются два независимых первых интеграла:

$$v \cos(\alpha + \varphi) - \sigma \Omega \sin \varphi = C_1,$$

$$v \sin(\alpha + \varphi) + \sigma \Omega \cos \varphi = C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const}.$$

Левые части последних равенств являются компонентами вектора скорости центра масс в неподвижной системе координат. Дополнительный первый интеграл, независимый с двумя последними, будет получен позднее.

Таким образом, достаточно знать не пять, а три независимых первых интеграла. Действительно, имея три независимых соотношения на четыре переменные  $\varphi$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega$ , почти в каждой

точке фазового пространства можно рассматривать последние три величины как функции от  $\varphi$ . Таким образом, в силу первого из кинематических соотношений (4.1), величина  $\varphi$  определяется с помощью квадратур. Следовательно, определяются величины  $v$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega$ . Последние же два кинематических соотношения (4.1) после этого легко превратить в квадратуры от координат  $\{x, y\}$ .

С другой стороны, поскольку, по крайней мере, величина скорости центра масс постоянна, у системы (0.1)—(0.3) имеется аналитический первый интеграл, позволяющий в паре с дополнительным первым интегралом также проинтегрировать полную систему шестого порядка.

2. *Существование аналитического интеграла.* В силу (1.21) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (0.1)—(0.3), а именно, функция фазовых переменных

$$\Phi_0(v, \alpha, \Omega) = v^2 + \sigma^2 \Omega^2 + 2\sigma\Omega v \sin \alpha = v_c^2 \quad (4.9)$$

постоянна на фазовых траекториях.

В силу невырожденной замены независимого переменного у системы (1.22)—(1.25) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Phi_1(v, \alpha, \omega) = v^2(1 + \sigma^2 \omega^2 + 2\sigma\omega \sin \alpha) = v_c^2 \quad (4.10)$$

постоянна на фазовых траекториях.

Равенство (4.10) позволяет, не решая системы (1.23)—(1.25), найти зависимость скорости центра пластины от других фазовых переменных, а именно, при  $v_c \neq 0$

$$v^2 = (1 + \sigma^2 \omega^2 + 2\sigma\omega \sin \alpha)^{-1} v_c^2.$$

Поскольку фазовое пространство  $R_+^1 \{v\} \times S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1 \{\omega\}$  системы (1.23)—(1.25) трехмерно, а, как будет показано ниже, в нем существуют асимптотические предельные

множества, то равенство (4.10) задает единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (1.23)—(1.25) во всем фазовом пространстве. Аналогичным образом, первый интеграл (4.9) – последний аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (0.1)—(0.3) во всем пространстве.

Ниже будет разобран вопрос существования второго (дополнительного) первого интеграла системы (1.23)—(1.25).

Фазовое пространство системы (1.23)—(1.25) расслаивается на поверхности  $\{v_c = \text{const}\}$  подобно тому, как это происходит в случае, когда  $v \equiv \text{const}$ .

### § 27. НАЧАЛО КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА. ТОЧКИ ПОКОЯ СИСТЕМ И СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

У системы третьего порядка (0.1)—(0.3) существуют точки покоя, которые заполняют одномерные многообразия. В силу того, что система (1.23)—(1.25) редуцировалась к подсистеме второго порядка, в фазовом пространстве последней точки покоя могут являться проекциями целых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства.

Поэтому вопрос об особых точках разбивается на два: о точках покоя системы (1.23)—(1.25) в фазовом пространстве  $R^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$  и о точках покоя укороченной системы (1.24), (1.25) на двумерном фазовом цилиндре  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$  или на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ .

*1. Точки покоя системы третьего порядка.* Особые точки трехмерного пространства будут заданы системами

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0, \quad v = v_1, \quad (4.11)$$

$$\alpha=(2k+1)\pi, k \in Z; \omega=0, v=v_2, \quad (4.12)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z; \omega=0, v=v_3, \quad (4.13)$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi l, l \in Z; \omega=-\frac{1}{\sigma}, \sigma \neq 0, v=v_4, \quad (4.14)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l \in Z; \omega=\frac{1}{\sigma}, \sigma \neq 0, v=v_5, \quad (4.15)$$

Здесь  $\{v_i\}_{i=1}^5$  – набор положительных постоянных. Системы (4.11)—(4.15) задают в пространстве  $R_+^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$  одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы (1.23)—(1.25).

Механическая интерпретация (которая носит формальный характер) точек покоя, заданных системами (4.14), (4.15), совпадает с механической интерпретацией точек покоя системы (1.17), при этом  $W = C$ ; точек покоя, заданных системами (4.11), (4.12), также рассмотрена выше. Точки покоя, заданные системой (4.13), интерпретируются следующим образом: тело движется поступательно, параллельно пластине.

2. *Точки покоя системы второго порядка.* Рассмотрим укороченную систему (1.24),(1.25). У нее существуют положения равновесия на фазовой плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ , которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha=2\pi k, k \in Z; \omega=0, \quad (4.16)$$

$$\alpha=(2k+1)\pi, k \in Z; \omega=0, \quad (4.17)$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi l, l \in Z; \omega=0, \quad (4.18)$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi l, l \in Z; \omega=-\frac{1}{\sigma}, \sigma \neq 0, \quad (4.19)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad (4.20)$$

где  $l \in Z$ ;  $\omega = \frac{1}{\sigma}$ ,  $\sigma \neq 0$ ,

Неособых фазовых траекторий, проектирующихся на плоскость на точки, задаваемые системами (4.16)—(4.20), не существует.

**Предложение 4.12.** У систем вида (1.23)—(1.25) в пространстве  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  для любой функции  $F$ , удовлетворяющей условию (0.8), не существует частных решений вида

$$\alpha = \alpha_1(q) \equiv \alpha^0 = \text{const},$$

$$\omega = \omega_1(q) \equiv \omega^0 = \text{const},$$

$$v = v_1(q) \equiv v^0 = \text{const}.$$

Из предложения 4.12 немедленно следует

**Предложение 4.13.** У системы (1.24), (1.25) при условии (0.8) все точки покоя лежат на прямых

$$\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \sin 2\alpha = 0\}.$$

Другими словами, точки покоя, заданные системами (4.16)—(4.20), исчерпывают все множество точек покоя систем вида (1.24), (1.25).

**Замечание 1.** Поскольку аналитический первый интеграл (4.10) не зависит от выбора  $F$ , предложение 4.13 верно для всех систем вида (1.24), (1.25) при условии (0.8).

**Замечание 2.** Ввиду того, что изоклины вертикального и горизонтального направлений пересекаются в точках покоя трансверсально, при любой достаточно малой деформации векторного поля (1.24), (1.25) предложения 4.12 и 4.13 останутся в силе.

**§ 28. РАССЛОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА,  
ЕГО СИММЕТРИИ И НАЧАЛО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО  
АНАЛИЗА**

1. *Топологическая классификация особых точек укороченной системы.* Топологический анализ исследуемой системы начнем с классификации особых точек. Далее, как и ранее,

$$n_0^2 = \frac{F'(0)}{I}.$$

а) Точки покоя, задаваемые системой (4.16), являются отталкивающими: при  $\sigma n_0 < 2$  они являются неустойчивыми фокусами, при  $\sigma n_0 = 2$  — неустойчивыми вырожденными узлами, а при  $\sigma n_0 > 2$  — неустойчивыми узлами;

б) точки покоя, задаваемые системой (4.17), являются притягивающими: при  $\sigma n_0 < 2$  они являются устойчивыми фокусами, при  $\sigma n_0 = 2$  — устойчивыми вырожденными узлами, а при  $\sigma n_0 > 2$  — устойчивыми узлами;

в) точки покоя, задаваемые системой (4.18), являются седлами;

г) точки покоя, задаваемые системами (4.19), (4.20), не являются гиперболическими, поскольку матрица линеаризованной системы около них имеет собственные числа, лежащие на мнимой оси. Таким образом, линеаризованное векторное поле около точек (4.19), (4.20) не позволяет говорить о характере устойчивости данных точек. Имеем проблему различения центра и фокуса.

**Предложение 4.14.** *Для системы уравнений (1.24), (1.25), рассмотренной при условии (0.8), особые точки, задаваемые системами (4.19), (4.20), имеют топологический тип центра.*

Для систем вида (1.27), (1.28) ниже будет получен первый интеграл в явном виде. Таким образом, будет получен дополнительный первый интеграл для системы (1.26)—(1.28).

2. *Расслоения фазового пространства и его симметрии.* Фазовые траектории системы (1.23)—(1.25) лежат на поверхностях, расслаивающих трехмерное фазовое пространство и являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве дополнительный первый интеграл системы (1.23)—(1.25), то он является функцией переменных  $(\alpha, \omega)$ , а поэтому задает семейство цилиндров в  $R^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ .

**Замечание 1.** Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство необходимо выяснить знак проекции векторного поля на  $p$ -ось в пространстве  $R^3\{p, \alpha, \omega\}$  или на  $v$ -ось в области

$$\{(v, \alpha, \omega) \in R^3 : v > 0\}.$$

Рассмотрим поверхность  $M$ , являющуюся объединением поверхностей:  $M = M_1 \cup \overline{M}$ , где

$$M_1 = \{(p, \alpha, \omega) \in R^3 : \omega^2 = \frac{1}{I} F(\alpha)\},$$

а  $\overline{M}$ , в свою очередь, представляется в виде

$$\overline{M} = \bigcup_{i \in Z} M_i, \quad M_i = \{(p, \alpha, \omega) \in R^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i\}.$$

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, которые делят фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на  $p$ -ось имеет определенный знак. На самой поверхности  $M$  (и только на ней) проекция поля на  $p$ -ось обращается в нуль.

**Замечание 2.** Для векторных полей систем вида (1.24), (1.25) при условии (0.8) справедлива центральная симметрия.

У векторного поля системы (1.24),(1.25) (также как и у поля системы (1.17)) существует НЗС. Она состоит в том, что относительно замены переменных

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}-\alpha+\pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}+\alpha+\pi k \\ \omega \end{pmatrix}, k \in Z,$$

$\omega$ -составляющая поля меняет знак, а  $\alpha$ -составляющая остается неизменной.

### **§ 29. О СУЩЕСТВОВАНИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО ИНТЕГРАЛА**

Система (1.23)—(1.25) обладает аналитическим интегралом (4.10). Это единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл во всем фазовом пространстве. Если же дополнительный интеграл продолжить в комплексную область, то точки, которые являются устойчивыми или неустойчивыми фокусами (узлами), станут для него существенно особыми. Действительно, в этих точках дополнительный интеграл не имеет предела как функция. Кроме того, что он является трансцендентной функцией, он почти никогда не выражается через элементарные функции.

Система (1.26)—(1.28) является частным представителем класса систем вида (1.23)—(1.25), но уже для нее справедлив тот факт, что вопрос о выражении через элементарные функции дополнительного интеграла нетривиален.

Для обоснования последнего, сопоставим системе (1.27),(1.28) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = \frac{-n_0^2\tau + \sigma\omega[\omega^2 - n_0^2\tau^2]}{\omega + \sigma n_0^2\tau + \sigma\tau[\omega^2 - n_0^2\tau^2]}, \quad \tau = -\sin \alpha.$$

**§ 29. О существовании дополнительного трансцендентного...**

Введем обозначения:  $C_1 = 2 - \sigma n_0$ ,  $C_1 = \sigma n_0$ ,  $C_1 = 2 + \sigma n_0$ . Совершая ряд замен переменных по формулам

$$\omega - n_0 \tau = u_1, \quad \omega + n_0 \tau = v_1, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = p_1,$$

где  $v_1 \neq 0$ , получим уравнение типа Бернулли:

$$2p_1[C_1 t_1 + C_2 + \frac{2\sigma}{n_0} t_1 p_1] = \frac{dp_1}{dt_1} [C_3 - C_1 t_1^2].$$

Известной заменой  $p_1^{-1} = q_1$  при  $p_1 \neq 0$  приведем последнее уравнение к форме

$$q_1^\bullet = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1),$$

где  $a_1(t_1) = \frac{2(C_1 t_1 + C_2)}{C_1 t_1^2 - C_3}$ ,  $a_2(t_1) = \frac{4\sigma t_1}{n_0(C_1 t_1^2 - C_3)}$ . (Точкой здесь

обозначена производная по  $t_1$ .) Общее решение линейного однородного уравнения представится в виде

$$q_{1одн}(t_1) = k(C_1 t_1^2 - C_3) Q(t_1),$$

где  $k = \text{const}$ , а функция  $Q$ , в зависимости от значения постоянной  $C_1$ , имеет следующий вид:

$$Q(t_1) = \begin{cases} e^{t_1}, & C_1 = 0; \\ e^{\frac{C_2 - \arctg \sqrt{\frac{C_1}{C_3}}}{\sqrt{-C_1 C_3}}}, & C_1 > 0; \\ \left( \frac{\sqrt{-C_1 t_1} + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1 t_1} - \sqrt{-C_3}} \right)^{\frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}}}, & C_1 < 0. \end{cases}$$

Для получения решения неоднородного уравнения будем считать величину  $k$  функцией  $t_1$ , которая найдется квадратурой

$$k(t_1) = \frac{4\sigma}{n_0} \int Q^{-1}(t_1) \frac{t_1}{(C_1 t_1^2 - C_3)^2} dt_1.$$

Таким образом, дополнительный интеграл системы (1.27),(1.28) примет следующий вид:

$$Q^{-1}(t_1)q_1(C_1t_1^2 - C_3)^{-1} - \frac{4\sigma}{n_0} \int_{t_0}^{t_1} Q^{-1}(\tau_1) \frac{\tau_1}{(C_1\tau_1^2 - C_3)^2} d\tau_1 = C^0,$$

где  $C^0 = \text{const}$ .

Как видно, окончательный вид первого интеграла зависит от знака постоянной  $C_1$ , в результате чего возможны три варианта. Разберем каждый из них.

*Первый вариант.*  $C_1 = 0$ . После элементарного вычисления получим дополнительный интеграл в виде

$$e^{-\frac{u_1}{v_1}} \left[ v_1^{-2} + \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{u_1}{v_1} + 1 \right) \right] = \text{const}. \quad (4.21)$$

Итак, первый интеграл (4.21) системы (1.27),(1.28) при  $C_1 = 0$  выражается через элементарные функции. Докажем, что этот интеграл может быть получен из первого интеграла системы (1.18) при  $A_1^2 - 4A_2 = 0$ . Действительно, переходя в равенстве (4.21) к переменным  $\{\alpha, \Omega\}$ , имеем при  $\sigma n_0 = 2$ :

$$e^{-\frac{\Omega - n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha}} \left[ \frac{\sigma^2 \Omega^2 + 2\sigma \Omega v \sin \alpha + v^2}{(\Omega + n_0 v \sin \alpha)^2} \right] = \text{const}. \quad (4.22)$$

Числитель, стоящий в квадратных скобках, в силу (4.9), – постоянная функция на фазовых траекториях системы (1.23)–(1.25). Поэтому, рассматривая степень  $(-2)$  от равенства (4.22), заключаем, что следующее равенство вновь выполнено на фазовых траекториях системы (1.23)–(1.25):

$$e^{\frac{1}{2} \frac{\Omega - n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha}} [\Omega + n_0 v \sin \alpha] = \text{const}. \quad (4.23)$$

Умножая (4.23) на  $e^{3/2}$ , не нарушаем последнее равенство на исследуемых фазовых траекториях. При этом показатель экспоненты примет следующий вид:

$$\frac{2\Omega + n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha}.$$

С другой стороны, рассматривая систему координат Кенига, в которой ось  $Sx$  выбрана вдоль вектора скорости центра масс  $\vec{V}_C$ , имеем следующие кинематические соотношения:

$$v \cos \alpha = -V_C \cos \varphi, \quad -v \sin \alpha = V_C \sin \varphi - \sigma \Omega,$$

которые записаны в исходных фазовых координатах  $v, \alpha, \Omega, \varphi$ . В такой системе координат Кенига уравнение движения получившегося физического маятника, помещенного в поток среды, эквивалентно системе (здесь учитывается, что  $\sigma n_0 = 2$ )

$$\varphi^{\cdot} = y + 2n_0 V_C \sin \varphi, \quad y^{\cdot} = -n_0^2 V_C^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.24)$$

Система (4.24), в силу наличия дополнительного первого интеграла у системы (1.18), при  $A_1^2 - 4A_2 = 0$  имеет первый интеграл следующего вида:

$$e^{\frac{n_0 V_C \sin \varphi}{\Omega + n_0 V_C \sin \varphi}} [\Omega + n_0 V_C \sin \varphi] = \text{const}.$$

Последнее равенство выполнено на фазовых траекториях системы (4.24). Это равенство эквивалентно

$$e^{\frac{1}{2} \frac{\Omega - n_0 v \sin \alpha}{\Omega + n_0 v \sin \alpha}} [\Omega + n_0 v \sin \alpha] = \text{const},$$

которое совпадает с равенством (4.23). Верна

**Теорема 4.3.** *Первый интеграл динамической системы, описывающий физический маятник, постоянен на фазовых траекториях системы (1.27), (1.28).*

Аналогичным образом теорема может быть доказана и для случая  $\sigma n_0 \neq 2$ .

*Второй вариант.*  $C_1 > 0$ . Интегрирование приводит к функции (см. также [59, 60])

$$-\frac{\sigma}{4n_0} e^{-2\frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}}\zeta} \left\{ \frac{C_2}{\sqrt{-C_1 C_3}} \sin 2\zeta + \cos 2\zeta \right\} + \text{const},$$

где  $\zeta = \arctg \sqrt{-\frac{C_1}{C_3}} t_1$ . Как видно, в случае  $C_1 > 0$  дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

*Третий вариант.*  $C_1 < 0$ . Эквивалентными преобразованиями интеграл преобразуется к виду (см. также [60])

$$\frac{\sigma}{C_1 C_2 n_0} \left[ 2 \frac{\zeta^{1-\gamma}}{\gamma-1} - 3 \frac{\zeta^{-\gamma}}{\gamma} + \frac{\zeta^{-1-\gamma}}{\gamma+1} \right] + \text{const},$$

где  $\gamma = \frac{C_2}{\sqrt{C_1 C_3}} > 1$ ,  $\zeta = \frac{\sqrt{-C_1} t_1 + \sqrt{-C_3}}{\sqrt{-C_1} t_1 - \sqrt{-C_3}}$ . Поэтому, и в случае  $C_1 < 0$  дополнительный первый интеграл выражается через элементарные функции.

Таким образом, верны следующие следствия из теоремы 4.3:

**Следствие 1.** Точки покоя системы (1.27), (1.28), задаваемые равенствами (4.19), (4.20), имеют топологический тип центра.

**Следствие 2.** У системы (1.27), (1.28) на фазовом цилиндре  $S^1 \times R^1$  не существует простых и сложных предельных циклов.

В заключение этого параграфа хотелось бы отметить безусловный факт, что явное нахождение первого интеграла системы (1.27), (1.28) позволяет исследовать качественную структуру разбегания на траектории системы на фазовом цилиндре

$S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1 \{\omega\}$ . Несмотря на это, такое исследование можно провести и качественными методами, которые предлагаются в следующем параграфе.

**§ 30. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ  
ПОРТРЕТОВ СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОМ ЦИЛИНДРЕ**

*1. Введение в топологическую классификацию фазовых портретов.* Ранее была проведена топологическая классификация точек покоя системы (1.24),(1.25).

В § 8 (лемма 2.12) доказаны существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность.  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными множествами таких траекторий являются бесконечно удаленные точки  $(k\pi, \pm \infty)$ ,  $k \in Z$ , и только они.

В § 4 при помощи метода топографической системы Пуанкаре (ТСП) показано отсутствие замкнутых кривых из траекторий как в полосе  $\Pi$ , так и в полосе  $\Pi'$  (лемма 2.7). Таким образом, вокруг точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in Z$ , замкнутые кривые из траекторий отсутствуют. В силу  $2\pi$ -периодичности фазового портрета, а также центральной его симметрии, замкнутые кривые из траекторий могут существовать одновременно лишь вокруг точек  $(0, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma})$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma})$ , сумма индексов которых равна 1. Но и последняя возможность отпадает, в силу обладания системы (1.24),(1.25) НЗС.

Доказывая методом ТСП (§ 4) лемму 2.7, совершенно ясно, что сепаратриса, входящая в седло  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ , имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества начало координат. В силу нали-

чия двух видов симметрий, поведение других аналогичных сепаратрис подобно только что описанному, и ключевым вопросом топологической классификации является вопрос о поведении сепаратрисы, выходящей из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу

П. Назовем данную сепаратрису ключевой.

2. *О предельных множествах ключевой сепаратрисы.* Как уже отмечалось, на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$  точки  $(2\pi l, 0)$ ,  $l \in Z$ , являются отталкивающими, а точки  $((2l+1)\pi, 0)$  – притягивающими. Точки  $\left(\frac{\pi}{2} + \pi l, 0\right)$  являются седлами, а поэтому образуют асимптотическими кривыми – сепаратрисами; каждое седло имеет две сепаратрисы, входящие, и две – выходящие из него. На прямых  $\left\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i\right\}$ ,  $i \in Z$ , точки покоя, имеющие ненулевую ординату, имеют топологический тип центра.

Построение фазового портрета системы (1.24),(1.25) опирается на исследование глобального качественного поведения ключевой сепаратрисы. Исследуя изоклины, можно утверждать, что возможны три варианта: искомая сепаратриса будет иметь в качестве  $\omega$ –предельного множества бесконечно удаленную точку  $(0, \infty)$ ; она трансверсально пересечет прямую

$$\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = 0\}$$

и дальше уйдет в полосу П; огибая точку покоя, являющуюся центром, она вернется в точку  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Покажем, что при некоторых условиях возможны все три варианта.

Введем общее семейство полос:

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом введенные ранее полосы имеют вид:  $\Pi = \Pi_{(-\pi/2, \pi/2)}$ ,  
 $\Pi' = \Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)}$ .

**Лемма 4.1.** *Зафиксируем значение  $n_0 > 0$ . Рассмотрим сепаратрисы, выходящие из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , для различных двух значений  $\sigma = \sigma_1$  и  $\sigma = \sigma_2$  ( $\sigma_1 < \sigma_2$ ) системы (1.24), (1.25). Тогда там, где данные сепаратрисы, соответствующие значениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в полосе  $\Pi$ , одновременно можно задать в виде графиков*

$$\omega = \sum_i \alpha_i(\alpha), \quad i=1, 2,$$

справедливо неравенство

$$\sum_2(\alpha) > \sum_1(\alpha).$$

**Лемма 4.2.** *Пусть при некотором безразмерном значении  $(\sigma n_0)^*$  в полосе  $\Pi$  для системы (1.24), (1.25) справедлива гомоклиническая ситуация: сепаратриса, выходящая из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , войдет в ту же точку. Тогда при любом  $\sigma n_0 > (\sigma n_0)^*$  для системы (1.24), (1.25) подобная гомоклиническая ситуация сохранится.*

**Лемма 4.3.** *Для любого фиксированного  $n_0$  найдется достаточно малое  $\bar{\sigma}$  такое, что для любого  $\sigma < \bar{\sigma}$  для системы вида (1.24), (1.25) сепаратриса, выходящая из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , трансверсально пересечет прямую*

$$\left\{ (\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = -\frac{\pi}{2} \right\}$$

в точке  $(\alpha, \omega^*)$  при некотором  $\omega^* > 0$  и войдет в седло  $\left(-3\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

**Лемма 4.4.** Для любой функции  $F \in \Phi$  найдется  $\sigma^*$  такое, что для любого  $\sigma > \sigma^*$  для систем вида (1.24), (1.25) в полосе  $\Pi_{(0, \pi)}$  справедлива гомоклиническая ситуация.

Итак, для любой фиксированной функции  $F \in \Phi$  при некоторых значениях  $\sigma_{n_0}$  реализуются все три возможных случая поведения сепаратрисы, выходящей из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ . Причем, для фиксированного  $n_0$  при малых  $\sigma$ , меньших некоторого  $\sigma^*$ , искомая сепаратриса войдет в точку  $\left(-3\frac{\pi}{2}, 0\right)$ , при  $\sigma = \sigma^*$  – уйдет на бесконечность, а при  $\sigma > \sigma^*$  будет справедлива гомоклиническая ситуация, отмеченная в лемме 4.2.

Заметим, что в силу наличия строгого свойства монотонности, значение  $\sigma^*$  – единственное, а указанные перестройки  $\omega$ –предельного множества происходят монотонным образом. Более общие утверждения см. в § 8.

3. Топологическая классификация фазовых портретов системы. Замечания об относительной структурной устойчивости. Фазовый портрет системы (1.24), (1.25) реализуется в трех различных топологических типах.

Случай 1. Пусть  $\omega$ –предельным множеством для сепаратрисы, выходящей из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , является точка

$\left(-3\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Тогда сепаратриса, выходящая из  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , войдет в точку  $\left(3\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Таким образом, существует одно-

связная область на фазовом цилиндре, границей которой являются только что упомянутые сепаратрисы, внутри которой почти все неособые траектории выходят из отталкивающих точек и входят в притягивающие. Вне же упомянутой области картина разбиения на траектории следующая. Ввиду существования и единственности траектории, уходящей на бесконечность, траектория, имеющая в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(-\pi+0, -\infty)$ , будет иметь в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(-0, -\infty)$ , а также будет ограничивать область, содержащую континуум замкнутых траекторий вокруг точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right)$ . В остальной области, ввиду регулярности векторного поля системы, будут существовать замкнутые траектории, охватывающие фазовый цилиндр. Фазовый портрет для этого случая изображен на ил. 3 ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

*Случай 2.* Пусть  $\omega$ -предельным множеством для сепаратрисы, выходящей из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , является бесконечно удаленная точка  $(0, \infty)$ . Тогда из бесконечно удаленной точки  $(-0, -\infty)$  протянется траектория, входящая в полосу  $\Pi_{(-\pi, 0)}$  в точку  $(-\pi/2, 0)$ . Последние две сепаратрисы ограничат область, сплошь заполненную неизолированными замкнутыми траекториями, содержащими внутри себя особую точку  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1}{\sigma}\right)$ . Почти все остальные траектории выйдут из отталкивающих точек и войдут в притягивающие. Фазовый портрет для этого случая изображен на ил. 4 ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

*Случай 3.* Пусть реализуется в полосе  $\Pi_{(0,\pi)}$  вышеупомянутая гомоклиническая ситуация (лемма 4.4). Тогда существуют и единственные траектории в соответствующих полосах, выходящие (входящие) из (в) отталкивающих точек (притягивающие точки) и имеющие в качестве  $\omega$ - ( $\alpha$ -) предельных множеств бесконечно удаленные точки. В остальной области для поля системы траектории достраиваются образом, аналогичным случаям 1 и 2. Фазовый портрет для этого случая изображен на ил. 5 ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

Системы вида (1.24),(1.25) при условии (0.8) относительно структурно устойчивы в следующем смысле. В зависимости от параметров  $\sigma, n_0$  топологическая эквивалентность портретов строится в зависимости от самого типа портрета. Структурная устойчивость понимается относительно класса функций  $\Phi$  (подробнее об этом см. главу 3).

4. *Пример: оценка для безразмерного параметра, при котором происходит перестройка топологических типов фазовых портретов системы.* Для оценки постоянной  $(\sigma n_0)^*$  (см. вывод после леммы 4.4) для системы частного вида (1.27),(1.28) исследуем поведение ключевой сепаратрисы, которая выходит из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ .

В силу монотонной зависимости векторного поля системы (1.27),(1.28) от параметра  $\sigma$ , справедлива

**Теорема 4.2.** *Постоянная величина  $(\sigma n_0)^*$ , при которой происходит перестройка топологического типа фазового портрета системы (1.27),(1.28), удовлетворяет неравенству*

$$(\sigma n_0)^* < 2.$$

**Следствие.** *Фазовый портрет системы (1.27),(1.28) при  $\sigma n_0 \geq 2$  изображен на ил. 5 ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).*

Таким образом, уже при некотором значении  $\sigma n_0 < 2$  реализуется третья возможность фазового портрета системы (1.27), (1.28) (ил. 5).

### § 31. МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Почти все рассуждения данного параграфа относительно траекторий центра пластины твердого тела на плоскости носят формальный характер.

На фазовых портретах (ил. 3—5) при некоторых начальных условиях существует особая фазовая траектория, которая при стремлении независимого параметра  $q$  к некоторому значению  $q_0$  уходит на бесконечность. К примеру, в области  $\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}$  существует траектория, которая при  $q \rightarrow q_0$  стремится к бесконечно удаленной точке  $(+0, +\infty)$ .

Сделаем обратный переход от независимого параметра  $q$  ко времени  $t$ . Поскольку  $\Omega = \omega v$ , в области

$$\Pi \cap \{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\},$$

где данная траектория уходит на бесконечность, проекция векторного поля системы на  $v$ -ось отрицательна.

**Предложение 4.15.** *Траектория, уходящая на бесконечность в пространстве  $R_+^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ , параметризованная натуральным параметром  $q$ , в пространстве  $R_+^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\Omega\}$  является замкнутой траекторией. Разрыв исследуемой траектории в пространстве  $R_+^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\Omega\}$  при  $t = t_0$  ( $q_0 = q(t_0)$ ) происходит*

#### Глава 4. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем...

из-за того, что якобиан замены  $t \rightarrow q$  независимого переменного  $q$  обращается в нуль при  $t=t_0$ .

Таким образом, на плоскости  $R^2\{x, y\}$  траекторией центра пластины при рассматриваемых начальных условиях является циклоида с точкой возврата.

Что касается механической интерпретации других фазовых траекторий, то она может быть проведена не методом интегрирования кинематических соотношений, а либо изучением поверхностей уровня первого интеграла системы, либо качественным интегрированием и интерпретацией траекторий на фазовом цилиндре  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\Omega\}$  (см. ил. 1,  $(\Omega \rightarrow \alpha^*)$ ). Последние траектории легко интерпретируются, поскольку они описывают движение физического маятника в потоке среды. Остается лишь добавить переносную скорость  $V_C$  движения твердого тела и получить явную картину распределения скоростей в теле при абсолютном движении.

Данная глава с математической точки зрения фактически является подготовительным материалом для исследования самого интересного в прикладном отношении случая движения – свободного торможения твердого тела в сопротивляющейся среде. Следующая глава освещает многие динамические эффекты такого движения на базе качественных результатов, полученных в данной главе и фактически является введением в задачу о свободном торможении.

## **ГЛАВА 5. Семейства портретов систем с переменной диссипацией с ненулевым средним в плоской динамике твердого тела**

---

*Проводится исследование самого интересного в прикладном отношении класса движений твердого тела – свободного торможения в сопротивляющейся среде. Данный материал фактически представляет собой введение в нелинейную задачу о свободном торможении. В ней получены некоторые частные решения полной системы, подготовлен материал для проведения качественного интегрирования динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре. Показано, что полученное семейство состоит из бесчисленного множества фазовых портретов с различными качественными свойствами.*

### **§ 32. НАЧАЛО КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА . ТОЧКИ ПОКОЯ СИСТЕМ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ**

---

Будем исследовать системы вида (1.31),(1.32), только слегка преобразованные:  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . Получим систему (2.4), которая, впрочем, уже появлялась в § 3.

В фазовом пространстве  $R^2\{\alpha, \omega\}$  системы (2.4) точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства. У системы (1.30)—(1.32) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы в фазовом пространстве  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  и о точках покоя укороченной системы (2.4) на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$  или на цилиндре  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ .

1. *Точки покоя системы третьего порядка.* Искомые точки покоя будут заданы системами с положительными параметрами  $v_1, v_2, v_3$ :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0, \quad v = v_1, \quad (5.1)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_2, \quad (5.2)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad v = v_3, \quad (5.3)$$

Системы (5.1)—(5.3) задают в фазовом пространстве  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы.

2. *Интерпретация точек покоя трехмерного фазового пространства.* И хотя данные точки покоя имеют лишь формальный смысл и не имеют смысла гидродинамического, проведем их интерпретацию. а) Система (5.1). Тело совершает поступательное движение в любую сторону с любой постоянной скоростью, параллельной пластине. б) Системы (5.2), (5.3). Квадрат скорости центра масс найдется из следующего равенства:

$$v_c^2(v, \omega, \alpha) = v^2(1 + \sigma^2 \omega^2 - 2\sigma \omega \sin \alpha).$$

Поскольку

$$v_c^2(v_2, -\frac{1}{\sigma}, \frac{\pi}{2} + 2\pi l) = v_c^2(v_3, \frac{1}{\sigma}, -\frac{\pi}{2} + 2\pi l) = 0, \quad l \in Z,$$

то центр масс неподвижен. Так как  $\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{v_k}{\sigma}$ ,  $k=2,3$ , то тело вращается вокруг неподвижного центра масс с произвольной постоянной скоростью.

3. *Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы второго порядка на плоскости.* У системы (2.4) существуют точки покоя на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$ , которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \omega = 0, \quad (5.4)$$

$$\alpha = (2k+1)\pi, \quad k \in Z; \quad \omega = 0, \quad (5.5)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = 0, \quad (5.6)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad (5.7)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in Z; \quad \omega = -\frac{1}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad (5.8)$$

Системы (5.6), (5.7), (5.8) и только они задают на фазовой плоскости точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия.

Следовательно, системы (5.4), (5.5) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{-\frac{B}{m}q}, \quad v^0 = v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \pi k, \quad k \in Z, \\ \omega(q) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

при четном  $k$  соответствующие прямолинейному поступательному торможению.

Механическая интерпретация частных решений (5.9) следующая: тело совершает прямолинейное поступательное движение с углом атаки, равным либо 0, либо  $\pi$ . При этом скорости всех точек тела, в силу соотношения  $\frac{d}{dt}v = v \frac{d}{dq}v$  убывают со временем как  $t^{-1}$ .

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений точек покоя (5.4)—(5.8), последние назовем тривиальными положениями равновесия (ТПР). Наряду с ТПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям общей системы (0.1)—(0.3), (4.1).

**Определение.** Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (2.4) на плоскости называются точки покоя, не лежащие на прямых

$$\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

4. Нетривиальные положения равновесия системы второго порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям. Рассмотрим систему (2.4) для простоты при выполнении условий (0.9), (0.7). Аналогично может быть рассмотрена общая система (2.4). Необходимым условием существования НПР является их выражение системами

$$\begin{cases} \omega = a \sin \alpha, \\ \cos \alpha = \frac{-\frac{B}{m} + \sqrt{\frac{B^2}{m^2} + 4\sigma a(1+\sigma a)(a^2 - n_0^2)}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)}, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \omega = a \sin \alpha, \\ \cos \alpha = \frac{-\frac{B}{m} - \sqrt{\frac{B^2}{m^2} + 4\sigma a(1+\sigma a)(a^2 - n_0^2)}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)}, \end{cases} \quad (5.11)$$

причем либо

$$a = a_+ = \frac{n_0}{2} \left( -\sigma n_0 + \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} \right),$$

либо

$$a = a_- = \frac{n_0}{2} \left( -\sigma n_0 - \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} \right).$$

**Следствие.** При  $\sigma n_0 < 2$  НПП не существуют.

**Замечание.** Если у системы (2.4) существуют НПП, то они удовлетворяют уравнению

$$\omega^2 + \frac{1}{I} g(\alpha) \sin \alpha - \frac{\sigma}{I} \omega g(\alpha) = 0, \quad (5.12)$$

где  $g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$ . В частности, если выполнено свойство (0.9),

то  $g(\alpha) = AB \sin \alpha$ .

Рассмотрим

$$\max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{g(\alpha)}{\sin \alpha} = \max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = g^*$$

(при  $\alpha = \pi/2$  доопределим по непрерывности).

Введем обозначение  $\frac{g^*}{I} = n^2$  (при выполнении свойства (0.2)  $n^2 = n_0^2$ ). Дискриминант уравнения (5.12) отрицателен, если

$$\sigma n < 2. \quad (5.13)$$

Таким образом, у системы (2.4) при условиях (5.13), (0.8), (0.5) не существуют НПП. При выполнении условий (0.9), (0.7) условие (5.13), как уже отмечалось, эквивалентно  $\sigma n_0 < 2$ .

В силу (5.13), рассмотрим для простоты, систему (2.4) при условиях (0.9), (0.7),  $\sigma n_0 \geq 2$ .

**Предложение 5.1.**

1) Если  $\frac{B}{t} > -\frac{n_0^2}{a_-}$ , то у исследуемой системы существуют

НПР, которые задаются системой (5.10) при  $a = a_-$ .

2) Если выполнены неравенства  $\frac{B}{t} \leq 2\sigma(n_0^2 - a_+^2)$ ,  $\frac{B^2}{t^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2)$ , то у исследуемой системы существуют НПР, которые задаются системой (5.10) при  $a = a_+$ .

3) Если выполнены неравенства  $\frac{B}{t} > 2\sigma(n_0^2 - a_+^2)$ ,  $\frac{B^2}{t^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2)$ ,  $\frac{B}{t} > -\frac{n_0^2}{a_+}$ , то у исследуемой системы существуют НПР, которые задаются системой (5.10) при  $a = a_+$ .

4) Если выполнены неравенства  $\frac{B}{t} < 2\sigma(n_0^2 - a_+^2)$ ,  $\frac{B^2}{t^2} \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2)$ ,  $\frac{B}{t} < -\frac{n_0^2}{a_+}$ , то у исследуемой системы существуют НПР, которые задаются системой (5.11) при  $a = a_+$ .

5) Условия 1)–4) являются необходимыми и достаточными для существования НПР.

**Следствие 1.** У системы (2.4) при условиях (0.9), (0.7) существуют частные решения вида

$$v(q) = v^0 e^{\kappa q}, \quad v^0 = v(0), \quad \kappa < 0,$$

$$\alpha(q) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0) \neq \pi k, \quad k \in Z,$$

$$\omega(q) \equiv \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(0).$$

**Следствие 2.** У системы (0.1)—(0.3), (4.1) при условиях (0.7), (0.9) существуют частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0),$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0),$$

$$\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0),$$

при этом

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t), \quad \varphi_0 = \varphi(0),$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 + \varphi_0) - \frac{v_0}{\Omega_0} \sin\left(\alpha_0 + \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)\right),$$

$$x_0 = x(0),$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 + \varphi_0) + \frac{v_0}{\Omega_0} \cos\left(\alpha_0 + \varphi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)\right),$$

$$y_0 = y(0).$$

**Следствие 3.** Траектория центра пластины при движении на плоскости  $R^2\{x, y\}$ , соответствующая последним частным решениям системы (0.1)—(0.3), — окружность с центром в точке

$$\left( x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 + \varphi_0), y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 + \varphi_0) \right)$$

и радиусом  $\frac{v_0}{\Omega_0}$ .

### § 33. РАССЛОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА, ЕГО СИММЕТРИИ И НАЧАЛО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Топологическая классификация ТПР укороченной системы на плоскости. Для простоты, рассмотрим возле точки  $(\alpha_0, \omega_0)$  систему (2.4) при условиях (0.9), (0.7).

Далее введем два безразмерных параметра:  $\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}$ ,

$$\mu_2 = \sigma n_0.$$

#### Предложение 5.2.

1) Точки покоя (5.4) всегда являются репеллерами: неустойчивыми фокусами, если  $\mu_2 < 2$ ; неустойчивыми узлами, если  $\mu_2 > 2$ ; неустойчивыми вырожденными узлами, если  $\mu_2 = 2$ .

2) Точки покоя (5.5) являются: седлами, если  $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) > 4$ ; репеллерами, если  $\mu_2 < \mu_1$ ,  $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$ ; аттракторами, если  $\mu_2 > \mu_1$ ,  $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$ . Причем, при выполнении последних двух групп условий, данные точки покоя являются фокусами, если  $\mu_2 < 2$  и узлами, если  $\mu_2 > 2$ .

3) Точки покоя (5.6) являются седлами.

4) Точки покоя (5.7), (5.8) всегда являются аттракторами: устойчивыми фокусами, если  $\mu_1 \mu_2 < 4$ ; устойчивыми узлами, если  $\mu_1 \mu_2 > 4$ ; устойчивыми вырожденными узлами, если  $\mu_1 \mu_2 = 4$ .

2. Расслоения фазового пространства и его симметрии. В силу отделения от системы третьего порядка (1.30)–(1.32) независимой подсистемы второго порядка (1.31), (1.32) (или (2.4)) фазовые траектории в  $R_+^1 \{v\} \times R^2 \{\alpha, \omega\}$  лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности,

если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (2.4), то он является функцией переменных  $(\alpha, \omega)$ , а поэтому задает семейство цилиндров в  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$ .

**Замечание 1.** Поскольку  $\frac{d}{dt}\varphi = v \frac{d}{dq}\varphi$ , то в фазовом пространстве  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  системы (0.1)—(0.3) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (1.30)—(1.32) в  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  с помощью фазового портрета системы (2.4) в  $R^2\{\alpha, \omega\}$ . Последний не будет являться частью портрета в  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  в теоретико-множественном смысле, а будет ортогональной проекцией фазового портрета на плоскость  $\{v = \text{const}\}$ .

Поэтому становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство  $R_+^1\{v\} \times R^2\{\alpha, \omega\}$  и получение трехмерных фазовых портретов искомой системы.

**Замечание 2.** Поскольку  $v > 0$ , то движение возможно лишь в области  $B' = \{(\alpha, \omega, v) \in R^3 : v > 0\} \subset R^3\{\alpha, \omega, v\}$ .

Если формально сделать замену переменных в области  $B'$  по формуле  $\bar{p} = \ln v$ , то полученное векторное поле в фазовом пространстве  $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$  не зависит от  $\bar{p}$ , т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и ортогонально проектируется на все семейство плоскостей  $\{v = \text{const}\}$ . При этом положения равновесия на плоскости  $R^2\{\alpha, \omega\}$  полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области  $B'$ .

**Замечание 3.** Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в  $R^3\{\alpha, \omega, \bar{p}\}$  на  $\bar{p}$ -ось, либо на  $v$ -ось в области  $B'$ .

Рассмотрим поверхность  $M$ , являющуюся объединением поверхностей  $M = M^0 \cup \bar{M}$ , где

$$M^0 = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \Psi(\alpha, \omega) \cos^{-1} \alpha = 0\}$$

(там, где  $\cos \alpha = 0$ , доопределим поверхность по непрерывности), а  $\bar{M}$ , в свою очередь, представляется в виде  $\bar{M} = \bigcup_{s \in Z} M_s$ , где

$$M_s = \{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi s\}.$$

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, которые разрезают фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на  $\bar{p}$ -ось имеет фиксированный знак.

На самой поверхности  $M$  (и только на ней) проекция векторного поля на  $v$ -ось обращается в нуль.

**Замечание 4.** Для любых  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$  векторное поле системы (1.31), (1.32) (или (2.4)) обладает свойством центральной симметрии относительно точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in Z$ , т.е. в координатах  $(\alpha, \omega)$  векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha + \pi k \\ \omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha + \pi k \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in Z.$$

Другими словами, векторное поле системы (1.30)—(1.32) обладает симметрией относительно лучей

$$\{(\alpha, \omega, v) \in B' : \alpha = \pi k, \omega = 0\}.$$

**§ 34. КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМЫ НА ДВУМЕРНОМ ЦИЛИНДРЕ ДЛЯ ПЕРВОЙ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ**

1. Введение в классификацию фазовых портретов. Изобразим диаграмму перестроек векторного поля системы (2.4) возле точки  $(\pi, 0)$  (рис. 5.1). Поведение поля системы возле этой точки определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета.

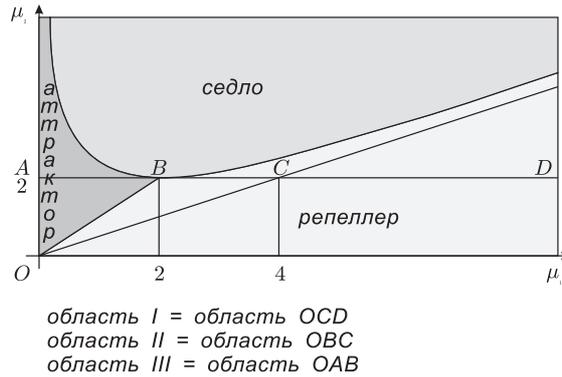


Рис. 5.1

Будем изучать те динамические системы, которые допускают выполнение равенства (5.12) лишь на ТПР. Более того, мы будем для простоты предполагать, что выполнено неравенство (5.13) для любых  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$ . Последнее неравенство, как уже указывалось, трансформируется в  $\sigma_{n_0} < 2$ , если  $F = F_0 \in \Phi$ ,  $s = s_0 \in \Sigma$ .

Поэтому в общем пространстве физически допустимых параметров

$$M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

в основном будем изучать область

$$J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\}.$$

Для проведения классификации фазовых портретов системы на плоскости или цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы.

Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки. Лемма 2.13 доказывает существование и единственность траекторий, уходящих на бесконечность.  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными множествами их являются бесконечно удаленные точки  $(\pi k, \pm\infty)$ ,  $k \in Z$ . В этой лемме показано, что только эти точки обладают указанным свойством.

Ввиду рассмотрения динамических систем на цилиндре, наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых по цилиндру в точку. При естественных предположениях предложение 2.1 (когда выполнены все условия леммы 2.9) дает ясную информацию о взаимном расположении фазовых кривых систем (2.4) и

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega - \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \cos \alpha - \sigma \omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) - \sigma \omega^3 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega F(\alpha) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Легко показать, что при этом у системы (2.4) отсутствуют замкнутые фазовые характеристики, огибающие фазовый цилиндр.

Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов. Заметим, что в силу  $2\pi$ -периодичности векторного поля системы по  $\alpha$ , последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек покоя индекса  $I$ .

Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел. Данные сепаратрисы разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия. Ввиду последнего, фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Ответ на последний вопрос требует доказательства ряда вспомогательных утверждений, которые будут рассмотрены ниже.

**Замечание.** Области параметров для любых  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$  определим следующим образом:

область I:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha}, \forall \alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) \right\};$$

область II:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \exists \alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} < \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) - \right. \\ \left. - \text{ репеллер} \right\};$$

область III:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \exists \alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} < \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) - \right. \\ \left. - \text{ аттрактор} \right\};$$

область IV:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in M^2 : (\pi, 0) - \text{ седло} \right\}.$$

Заметим, что если  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$ , то области параметров I, II, III совпадают с областями I, II, III, показанными на рис. 5.1.

2. Разбиение на траектории фазового цилиндра системы для первой области параметров. Рассмотрим систему (2.4) в области параметров I.

Следующее утверждение относится ко всему пространству параметров  $M^2$  и базируется на наличии топографической системы Пуанкаре в полосе П.

**Предложение 5.3.** Устойчивая сепаратриса в полосе П для точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества начало координат.

Предложение 5.3 доказывается методом ТСП (см. главу 2).

**Следствие 1.** Ввиду центральной симметрии поля поведение других аналогичных сепаратрис подчиняется аналогичным законам.

**Следствие 2.** У системы (2.4) в полосе П не существует любых замкнутых кривых, составленных из траекторий.

**Предложение 5.4.** Рассмотрим систему (2.4) в области параметров I. Пусть  $F(\alpha)\sin\alpha \geq 0$  в полосе П. Тогда, если  $\frac{s(\alpha)}{t} \geq \frac{\sigma}{I} \bar{g}(\alpha)$ , где  $\bar{g}'(\alpha) = -2F(\alpha)$ ,  $\bar{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , то ТСП с центром в точке  $(\pi, 0)$  полностью лежит в области, ограниченной нетривиальной кривой контактов (НКК) (см. предложение 2.2).

**Следствие.** Пусть выполнено условие (0.9). Тогда очевидно, что в области параметров I выполнено неравенство  $\frac{B}{t} \geq \sigma n_0^2 \cos\alpha$ ,  $\forall \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . При этом  $\bar{g}(\alpha) = AB \cos^2 \alpha$ . Таким образом, при  $F = F_0$  мы необходимо попадаем в условия предложения 5.4.

**Предложение 5.5.** Пусть выполнены все условия предложения 5.4. Тогда, по крайней мере в области значений пара-

метров  $I$ , сепаратриса, входящая в точку  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi'$ , имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(\pi, 0)$ .

3. Топологическое строение типов фазовых портретов для первой области параметров. Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$  и из  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi'$ . Результат, касающийся поведения этих сепаратрис, распространяется для динамических систем в той части области параметров  $M^2$ , в которой не существуют НПП (в частности, в области  $J^2$ ). Для этого дадим определение индекса сепаратрисного поведения (ИСП).

**Определение.** ИСП (будем обозначать его  $isp$ ) называется пара  $k=(k_1, k_2)$ , где  $k_1 \in N_0 \cup \left\{l + \frac{1}{4}, l \in N_0\right\}$ . При этом значение  $k_2$  выбирается неоднозначно и может быть равно

$$k_2 = \begin{cases} k_1 - \frac{1}{2}, & \text{если } k_1 \in N; \\ k_1 + \frac{1}{2}, & \text{если } k_1 \in N_0; \\ k_1 - \frac{1}{4}, & \text{если } k_1 \in N \end{cases}$$

и  $k_2 = k_1 + \frac{1}{4}$ , если  $k_1 \notin N_0$ . Здесь и далее  $N_0 = N \cup \{0\}$ . По определению  $isp = k = (k_1, k_2)$ , если сепаратриса, выходящая из  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , имеет в качестве  $\omega$ -предельного мно-

жества точку, отстоящую от точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  на  $2\pi k_1$  по оси  $\alpha$ , а сепаратриса, выходящая из  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi'$ , имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку, отстоящую от  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  на  $2\pi k_2$  по оси  $\alpha$ .

Последнее определение опирается на тот факт, что сепаратрисы, выходящие из точек  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l, 0\right)$ ,  $l \in Z$ , лежат в области, частью границы которой являются сепаратрисы, выходящие из точек  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l, 0\right)$ , для каждого фиксированного  $l \in Z$ .

**Теорема 5.1.** *Определение для ИСП корректно, т.е. для любого  $isp=k$  из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.*

Прежде чем доказывать теорему 5.1, приведем несколько вспомогательных утверждений. Предложение 5.6 характеризует поведение сепаратрисы системы (5.14) при наличии «возмущения», дающего систему (2.4).

**Предложение 5.6.** *Возмущение системы (5.14), дающее систему (2.4), расщепляет сепаратрису системы (5.14), выходящую из  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ .*

Обозначим  $B^* = \max_{\alpha \in R} |s(\alpha)|$ . Пусть  $\mu^* = 2 \frac{B^*}{m\pi_0}$ . При  $F = F_0$ ,

$s = s_0$  очевидны равенства:  $B^* = B$ ,  $\mu^* = \mu_1$ .

**Предложение 5.7.** *Для любого  $M > 0$  и достаточно малого значения  $\mu_2 > 0$  найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что для любого положительного значения  $\mu^* < \varepsilon$  сепаратриса, выходящая из*

точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , продолжится вправо вдоль оси  $\alpha$  более чем на  $M$ .

Заметим, что введение параметра  $\mu^*$  для каждой фиксированной функции  $s$  никоим образом не вводит каких-либо ограничений на пространства функций  $\Phi$ ,  $\Sigma$  и пространство параметров  $M^2$ .

Начнем доказательство теоремы 5.1. Рассмотрим сепаратрису, выходящую из точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ . Фазовый поток исследуемой системы отображает часть прямой  $\Lambda_{-1}$  на прямую  $\Lambda_1$ . (Здесь, как и ранее,  $\Lambda_k = \left\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$ .)

Итак, рассмотрим отображение прямой  $\Lambda_{-1}$  на  $\Lambda_1$  в силу фазовых траекторий. Для системы сравнения (5.14) с вращениями (ил. 3) это отображение, по крайней мере вблизи точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в области  $\{(\alpha, \omega) \in R^2 : \omega > 0\}$ , тождественно.

**Предложение 5.8.** Для системы (2.4) построенное отображение (там, где оно определено) при выполнении условия (5.13) таково:

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \omega_1\right) \mapsto \left(3\frac{\pi}{2}, \omega_2\right), \quad \omega_1 < \omega_2.$$

Продолжим доказательство теоремы 5.1. Имея в виду непрерывную зависимость отображения, построенного в предложении 5.8, от параметра  $\mu^*$ , рассмотрим при достаточно малых  $\mu_2$  зависимость типа фазового портрета от параметра  $\mu^*$ .

Предположим, что сепаратриса, выходящая из точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ , имеет предельное множество, отстоящее

от прямой  $\Lambda_{-1}$  вдоль оси  $\alpha$  на  $2\pi k_1$ ,  $k_1 \in N_0$ . Рассмотрим ТСП, задаваемую системой (5.14), вокруг точки  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(k_1 + 1), \frac{1}{\sigma}\right)$ .

Эта система (ТСП) ограничена особой траекторией, уходящей на бесконечность (см. ил. 3). Уменьшим параметр  $\mu^*$  настолько, чтобы точка  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \frac{1}{\sigma}\right)$  перестала быть  $\omega$ -предельным множеством для данной сепаратрисы. Так называемое «отделение» траектории — сепаратрисы — от точки  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1, \frac{1}{\sigma}\right)$  к точке  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi(k_1 + 1), \frac{1}{\sigma}\right)$  произойдет в силу того, что угол между векторными полями системы (2.4) и системы сравнения (5.14) стремится к нулю при  $\mu^* \rightarrow 0$ . Случай  $k_1 \in N_0$  рассмотрим. Покажем, что при этом  $k_2$  выбирается из вышеописанного множества (см. определение *isp*).

Заметим, что возможны три логические ситуации для  $k_2$ , когда  $k_1 \in N_0$ .

Напомним, что у систем (5.14) и (2.4) на фазовом цилиндре существуют бесконечно удаленные предельные точки  $(-0, +\infty)$ ,  $(+0, -\infty)$ ,  $(\pi + 0, +\infty)$ ,  $(\pi - 0, -\infty)$ , причем две первые — притягивающие, а две последние — отталкивающие.

**Предложение 5.9.** *Исследуемая сепаратриса может иметь в качестве  $\omega$ -предельного множества бесконечно удаленную точку  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\left(l + \frac{1}{4}\right) - 0, +\infty\right)$ .*

Доказательство. Спроектируем фазовую плоскость на сферу Римана или Пуанкаре. В силу гладкой зависимости исследуемой сепаратрисы от параметра  $\mu^*$ , при том критическом значении параметра, при котором происходит перестройка грубого  $\omega$ -предельного множества сепаратрисы, новым  $\omega$ -

предельным множеством станет бесконечно удаленная точка (на плоскости) или северный полюс (на сферах Римана или Пуанкаре). Действительно, если бы северный полюс сферы при критическом значении параметра не был бы  $\omega$ -предельным множеством для данной сепаратрисы, то тогда эта сепаратриса имела бы другое грубое (разобранное выше)  $\omega$ -предельное множество. Поскольку при малом шевелении последнее  $\omega$ -предельное множество сохранится, мы вступаем в противоречие с тем, что критическое значение параметра  $\mu^*$  соответствует грубому  $\omega$ -предельному множеству. Предложение доказано.

Более общее утверждение, в том числе и о строго монотонных полях, см. в главе 2.

Закончим доказательство теоремы 5.1. Пусть теперь

$$k_1 = l + \frac{1}{4},$$

$l \in Z$ . Тогда у сепаратрисы, выходящей из точки  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi'$ , нет других  $\omega$ -предельных множеств, кроме как точка  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k_2, \frac{1}{\sigma}\right)$ ,

$$k_2 = k_1 + \frac{1}{4},$$

$k_1 \notin N_0$ . Причем заметим, что данные  $\omega$ -предельные множества являются грубыми (в силу гиперболичности асимптотически устойчивых точек  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \frac{1}{\sigma}\right)$ ).

Теперь для доказательства теоремы 5.1 достаточно мало продеформировать параметры  $\mu^*$  и  $\mu_2$  рассматриваемой динамической системы (2.4).

Действительно, если  $k_2$  – фиксировано, то  $k_1$  может быть равно  $k_2 \pm \frac{1}{2}$  (грубое  $\omega$ -предельное множество перемещается), либо (в силу предложения 5.9) равно  $k_2 + \frac{1}{4}$  (негрубое  $\omega$ -предельное множество). Теорема 5.1 доказана.

4. *Полная классификация фазовых портретов для первой области параметров динамической системы на двумерном цилиндре.* В силу теоремы 5.1, можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (2.4), когда ее параметры пробегает область I. Как показано выше, таких портретов – бесконечно много.

В качестве следствия рассмотрим систему сравнения

$$\begin{aligned} \alpha' &= \omega, \\ \omega' &= -\frac{1}{I} F(\alpha) \end{aligned} \quad (5.15)$$

для системы (2.4). Она описывает консервативную систему – физический маятник – на плоскости. Тогда среди систем вида (2.4), достаточно мало отличающихся от (5.15), существуют системы с любым из описанных выше типов фазовых портретов. Другими словами, любое достаточно малое возмущение, дающее систему вида (2.4), бесконечно много раз перестраивает глобальный топологический тип фазового портрета физического маятника.

Некоторые из фазовых портретов (индекс  $isp$  пробегает десять первых значений

$$\begin{aligned} &(0, 1/2), 1/4, 1/2, (1, 1/2), \\ &(1, 3/4), (1, 3/2), (5/4, 3/2), (2, 3/2), \\ &(2, 7/4), (2, 5/2), (9/4, 5/2) \end{aligned}$$

показаны на ил. 14–23, соответственно. При этом функции  $F$  и  $s$  удовлетворяют условиям (0.8), (0.5) и (5.13).

Дальнейшие возможные значения индекса  $isp$  таковы:  $(3, 5/2)$ ,  $(3, 11/4)$ ,  $(3, 7/2)$  и т. д.

Таким образом и проводится полная классификация фазовых портретов системы (2.4) для области параметров I.

Заметим, что многие утверждения данного параграфа справедливы и в более широких областях параметров.

В заключении хотелось бы отметить общее свойство движения тела, которое носит формальный характер. Рассмотрим область параметров I. Ей соответствует небольшой по сравнению с безразмерной силой безразмерный момент. В этой области почти при любых начальных условиях в смысле меры за конечное достаточно большое время твердое тело стремится к экспоненциально устойчивому стационарному движению следующего вида: тело движется вокруг неподвижного центра масс с постоянной угловой скоростью.

*Итак, в только что изложенном материале начато рассмотрение модельного варианта задачи о свободном плоскопараллельном торможении тела в среде. В нем проводится вспомогательный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение для некоторой области ненулевой меры в пространстве параметров. На основе этого получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов, состоящее из бесчисленного множества различных типов портретов. В системе при этом отсутствуют автоколебания, и почти при любых начальных условиях все траектории стремятся к асимптотически устойчивым положениям равновесия.*

Следующий материал фактически продолжает глобальный качественный анализ динамической системы в пространстве квазискоростей. При этом исследуется другая область ненулевой меры в пространстве параметров системы и получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами. Таким образом, в системе при некоторых условиях могут возникнуть автоколебания.

### § 35. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОРТРЕТОВ ДЛЯ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ

*1. Вопрос о поведении сепаратрис.* Предыдущий материал был изложен достаточно подробно. В дальнейшем в данной главе опустим доказательства многих утверждений. Они следуют из качественного материала, подготовленного ранее.

Рассмотрим систему (2.4) в областях параметров II, III.

Как и ранее, ключевым вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

Напомним, что предельные циклы для исследуемой системы могут существовать лишь в полосе  $\Pi'$  (см. главу 2).

Рассмотрим ключевые вопросы – о глобальном поведении следующих сепаратрис:

- а) выходящей из точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi$ ;
- б) входящей в точку  $\left(-3\frac{\pi}{2}, 0\right)$  из полосы  $\Pi_{(-3\pi/2, -\pi/2)}$ ;
- в) выходящей из точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  в полосу  $\Pi_{(-3\pi/2, -\pi/2)}$ .

Под независимостью поведения сепаратрис будем понимать тот факт, при котором рассматриваемые сепаратрисы имеют предельные множества, независимо выбираемые из области определения логически возможных предельных множеств сепаратрис. Область определения предельных множеств сепаратрис — все логически возможные предельные множества сепаратрис, после принятия во внимание возможного расположения изоклин системы и характера имеющихся особых точек.

**Лемма 5.1.** *Глобальное поведение любых двух сепаратрис из а)–в) независимо. Поведение третьей сепаратрисы определяется через поведение двух других.*

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы а) и б).

**Определение 1.** Индексом  $k_1$  сепаратрисы а) назовем рациональное число, выбираемое из множества

$$\left\{ r \in \mathbb{Q} : r = m, r = \frac{1}{4} + m, m \in N_0 \right\}.$$

Скажем, что  $k_1 = r$ , если сепаратриса а) имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi r, \frac{1}{\sigma}\right)$ , если  $r \in N_0$  и точку  $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi r - 0, +\infty\right)$ , если  $r \notin N_0$ .

**Определение 2.** Индексом  $k_2$  сепаратрисы б) назовем натуральное число  $j$ , выбираемое из множества

$$\{j \in N : j = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Скажем, что  $k_2 = j$ , если сепаратриса б) имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $(-\pi, 0)$  или цикл (если  $j=1$ ); точку  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  (если  $j=2$ ); точку  $(0, 0)$  (если  $j=3$ ); точку  $(-\pi - 0, -\infty)$  (если  $j=4$ ); точку  $(-2\pi, 0)$  (если  $j=5$ ).

Таким образом видно, что поведение сепаратрисы в) зависит от индексов  $k_1$  и  $k_2$ , т.е. от конкретного поведения сепаратрис а) и б).

**Замечание.** Если фиксировать индекс  $k_1$ , то индекс  $k_2$  может, в частности, выбираться из более узкого множества, описанного в определении 2. Прямое произведение множеств, описанных в определениях 1 и 2, является максимальным в смысле возможного определения пары индексов  $k_1$  и  $k_2$ .

2. Основная теорема о классификации фазовых портретов. Обозначим через  $k_2^*$  индекс  $k_2$  в том случае, если последний выбирается из усеченной области определения в связи с последним замечанием и составим прямое произведение индексов  $k_1$  и  $k_2^*$ . Для этого рассмотрим индекс  $k=(k_1, k_2^*)$ .

**Теорема 5.2.** Для любого  $k$  из области определения возможно соответствующее поведение сепаратрис а) и б). Таким образом, строится двухпараметрическое семейство фазовых портретов, содержащее портреты с предельными циклами, а также бесконечное множество фазовых портретов с различными качественными свойствами.

Теорема 5.2 позволяет сделать следующий вывод: любое достаточно малое возмущение, дающее искомую систему в областях параметров II, III для системы, описывающей физический маятник на плоскости, бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонового фазового портрета физического маятника.

Некоторые из портретов (индекс  $k$  принимает значения  $(0,5)$ ,  $(0,3)$ ,  $(0,5)^*$ ,  $(0,3)^*$ ,  $(0,4)$ ,  $(0,4)^*$ ,  $(0,2)=(0,2)^*$ ,  $(1/4,3)^*$ ) показаны соответственно на ил. 24—31.

Двухпараметрическое семейство, построенное выше, не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет тот факт, при котором каждой независимой паре безразмерных параметров  $\mu^*$ ,  $\mu_2$  соответствует пара независимых индексов (в данном случае  $k_1$ ,  $k_2^*$ ), «кодирующих» топологический тип фазового портрета. В последнем случае надо сделать оговорку на имеющиеся в семействе портреты с предельными циклами. Такие портреты могут иметь топологические типы, отличные от портретов с теми же индексами  $k$ , но без предельных циклов. В последнем случае можно как-то метить индексы  $k$  и

говорить о помеченных фазовых портретах (например, в случае цикла имеем индекс  $(k_1, k_2)^*$ ): фазовый портрет, изображенный на ил. 29, имеет помеченный индекс  $(0, 4)^*$ ).

### § 36. СТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА СИСТЕМЫ ДЛЯ ЧЕТВЕРТОЙ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ

*1. Строение наиболее «богатого» на положения равновесия фазового портрета.* В зависимости от выполнения того или иного свойства из предложения 5.1, у системы (2.4) имеется «больше» или «меньше» дополнительных особых точек на фазовом цилиндре, отвечающим НПП. В каждом конкретном случае наличие таких точек и их устойчивость исследуется самостоятельно (см. также [219]).

Для той подобласти параметров из области IV, когда существуют НПП, задаваемые обеими системами (и (5.10), и (5.11)), фазовый портрет показан на ил. 32.

**Предложение 5.10.** *У системы (2.4), рассмотренной в области параметров IV, имеются НПП, лежащие лишь в полосе  $\Pi'$ , соответствующие как отталкивающим или притягивающим, так и седловым особым точкам.*

Таким образом, предложение 5.10 затрагивает тот случай, когда у исследуемой системы существует максимальное возможное значение дополнительных особых точек.

В любом случае НПП соответствуют частным решениям системы (0.1)–(0.3), (4.1), которые выражаются через формулы из следствия 2 к предложению 5.1.

Таким образом, последние частные решения системы (0.1)–(0.3), (4.1) могут быть как орбитально устойчивыми, так и орбитально неустойчивыми.

Продолжая качественный анализ, заметим, что если рассматривать систему (2.4) в области параметров IV, то периодических траекторий, стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, не существует.

Будем исследовать вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

Заметим, что в области

$$W = \{(\alpha, \omega) \in \Pi' : \omega > 0\}$$

существует три НПП системы (2.4): одно положение равновесия отталкивающее, одно – притягивающее и одно – седловое.

**Предложение 5.11 (см. также [219]).**

а) Устойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi$  для точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества начало координат.

б) Неустойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi$  для точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества точку  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right)$ .

в) Устойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi'$  для точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества отталкивающее НПП в области  $W$ .

г) Неустойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi'$  для точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества притягивающее НПП в области  $R^2 \{ \alpha, \omega \} \setminus W$ .

д) Устойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$  для точки  $(-\pi, 0)$  имеет в качестве  $\alpha$ -предельного множества отталкивающее НПП в области  $W$ .

е) Неустойчивая сепаратриса в полосе  $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$  для точки  $(-\pi, 0)$  имеет в качестве  $\omega$ -предельного множества притягивающее НПП в области  $W$ .

ж) Две устойчивые сепаратрисы для седлового НПП в области  $W$  имеют в качестве  $\alpha$ -предельных множеств начало координат и отталкивающее НПП в области  $W$ .

з) Две неустойчивые сепаратрисы для седлового НПП в области  $W$  имеют в качестве  $\omega$ -предельных множеств точку  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sigma}\right)$  и притягивающее НПП в области  $W$ .

Вопрос о предельных множествах других ключевых траекторий решается, благодаря предложению 5.11, очевидно (ил. 32).

2. *Классы траекторий движения твердого тела на плоскости.* В основном в данном пункте информация о классах возможных движений носит формальный характер.

В соответствии с глобальным фазовым портретом (ил. 32), типичные траектории движения точки твердого тела на плоскости делятся на следующие классы.

Неустойчивое стационарное движение твердого тела с нулевым углом атаки (центр масс сзади), а также неустойчивое стационарное движение, соответствующее отталкивающему НПП, имеют следующие предельные движения:

а) тело асимптотически стремится к вращению с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижного центра масс;

б) тело асимптотически стремится к стационарному движению, соответствующему притягивающему НПП.

В заключение хотелось бы отметить тот факт, что рассмотренные классы движений (поскольку динамическая система в пространстве квазискоростей абсолютно структурно устойчива) обладают важным свойством (абсолютной) грубости. Область физических параметров системы при этом обладает ненулевой мерой.

## **ГЛАВА 6. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем с переменной диссипацией с нулевым средним в пространственной динамике твердого тела**

---

*В данной главе рассматриваются возможности перенесения результатов плоскопараллельного взаимодействия тела со средой, на пространственный случай. Анализируются задачи о сферическом маятнике, помещенном в поток набегающей среды, о пространственном движении тела при наличии некоторой связи, а также показываются качественные аналогии последних двух задач.*

### **§ 37. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПРИ СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ**

---

Гипотезы, приведенные в [112] и касающиеся свойств среды, нашли свое отражение в построении пространственной динамической модели взаимодействия среды с телом. В этой связи появляется возможность формализации модельных предположений и получение полной системы уравнений (см. также [1, 37, 157, 208, 234, 236]).

1. Все взаимодействие среды с однородным телом (имеющим осесимметричную геометрическую форму) сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского круглого диска  $P$  (рис. 6.1).

2. Поскольку взаимодействие происходит по законам струйного обтекания, сила  $S$  этого взаимодействия направлена

### § 37. Постановка задачи о пространственном движении тела...

по нормали к диску. Примем также простейшее предположение о том, что точка  $N$  приложения силы  $S$  определяется лишь одним параметром – углом атаки  $\alpha$ , который измеряется между вектором скорости  $v$  точки  $D$  диска и внешней нормалью в этой точке (прямая  $CD$ ). Точка  $D$  является пересечением срединного перпендикуляра, опущенного из центра масс  $C$  на плоскость  $P$ . Итак,  $DN = R(\alpha)$ .

3. Величину  $S$  силы сопротивления примем в виде  $S = s_1 v^2$ , где  $v$  – модуль скорости точки  $D$ , а коэффициент сопротивления  $s_1$  (как и в случае плоскопараллельного движения) является функцией только угла атаки  $\alpha$ :  $s_1 = s_1(\alpha)$ .

4. Как и в случае плоскопараллельного движения, по прямой  $CD$  на тело может действовать дополнительная сила  $T$ , которую по-прежнему назовем «силой тяги». Введение этой силы используется для обеспечения некоторых заданных классов движений (при этом  $T$  – реакция возможных наложенных связей). В случае отсутствия внешней силы  $T$  тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде (см. также главу 7).

5. Связанную с телом систему координат обозначим через  $Dxyz$  (рис. 6.1). Эта система координат выбирается таким образом, что тензор инерции в данной системе имеет диагональный вид:  $diag\{I_1, I_2, I_3\}$ . Распределение масс примем таким, что продольная главная ось инерции совпадает с осью  $CD$  (это ось  $Dx$ ), а оси  $Dy$  и  $Dz$  лежат в плоскости диска  $P$  и образуют правую систему координат. Более того, рассматривается случай динамически симметричного твердого тела, т.е.

$$I_2 = I_3.$$

6. В данном случае для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты  $(x_0, y_0, z_0)$  точки  $D$  и три угла  $(\theta, \psi, \varphi)$ , которые определяются подобно навигационным углам следующим образом (ср. с [44, 47, 50, 86]).

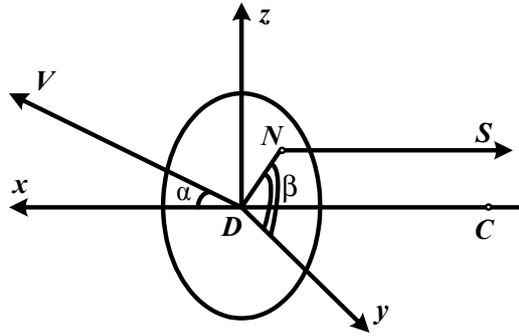


Рис. 6.1

Поворот от системы  $Dx_0y_0z_0$  к системе  $Dxyz$  представим в виде композиции трех поворотов  $T_3(\varphi)T_2(\psi)T_1(\theta)$ , при которых сначала репер  $(e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0})$  поворачивается вокруг вектора  $e_{x_0}$  на угол  $\theta$  (выполняется  $T_1(\theta)$ ):

$$(e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0}) \xrightarrow{T_1(\theta)} (e_{x_0}, e_{y_0}^{(1)}, e_{z_0}^{(1)}),$$

затем репер  $(e_{x_0}, e_{y_0}^{(1)}, e_{z_0}^{(1)})$  поворачивается вокруг вектора  $e_{y_0}^{(1)}$  на угол  $\psi$  (выполняется  $T_2(\psi)$ ):

$$(e_{x_0}, e_{y_0}^{(1)}, e_{z_0}^{(1)}) \xrightarrow{T_2(\psi)} (e_{x_0}^{(2)}, e_{y_0}^{(1)}, e_z),$$

и, в заключение, репер  $(e_{x_0}^{(2)}, e_{y_0}^{(1)}, e_z)$  поворачивается вокруг вектора  $e_z$  на угол  $\varphi$  (выполняется  $T_3(\varphi)$ ):

$$(e_{x_0}^{(2)}, e_{y_0}^{(1)}, e_z) \xrightarrow{T_3(\varphi)} (e_x, e_y, e_z).$$

При этом векторы, имеющие компоненты в репере  $(e_x, e_y, e_z)$ , получают новые координаты в базисе  $(e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0})$ . Такое преобразование будет задано в базисе  $(e_x, e_y, e_z)$  матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \\ \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \sin \psi \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}$$

и фазовое состояние системы характеризуется двенадцатью величинами:  $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, \theta^*, \psi^*, \varphi^*, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$ .

Рассмотрим сферические координаты  $(\nu, \alpha, \beta)$  конца вектора  $\nu$  скорости точки  $D$ , в которых угол  $\beta$  отсчитывается от оси  $Dy$  в плоскости  $P$  до прямой  $DN$ , которая, в свою очередь, является пересечением плоскостей, одна из которых содержит вектор  $\nu$  и ось  $Dx$ , а вторая – плоскость  $P$  (рис. 6.1).

Данные сферические координаты, а также компоненты угловой скорости выражаются через фазовые переменные  $(x_0^*, y_0^*, z_0^*, \theta^*, \psi^*, \varphi^*, \theta, \psi, \varphi)$  неинтегрируемыми соотношениями. Поэтому фазовое состояние системы определяется через функции  $(\nu, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$ , а первые шесть функций рассматриваются в качестве квазискоростей системы. Здесь набор величин  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  определяется как  $\Omega = \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z$ , где  $\Omega$  – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела.

Ввиду того, что обобщенные силы не зависят от положения тела в пространстве, координаты  $(x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$  являются циклическими. Это позволяет рассматривать динамическую часть уравнений движения в качестве независимой подсистемы [102, 118, 163, 174].

Введем вспомогательную функцию  $s(\alpha) = s_1(\alpha) \operatorname{sgn} \cos \alpha$ , которая является знакопеременной величиной.

В силу теоремы о движении центра масс в пространстве в проекциях на связанные оси  $(x, y, z)$  и теоремы об изменении кинетического момента относительно этих осей, получаем полную систему дифференциальных уравнений, рассмотрен-

ную в динамическом пространстве квазискоростей  $R_+^1\{v\} \times T^2\{\alpha, \beta\} \times R^3\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ :

$$v^* \cos \alpha - \alpha^* v \sin \alpha + \Omega_y v \sin \alpha \sin \beta - \Omega_z v \sin \alpha \cos \beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = \frac{T}{m} - \frac{s(\alpha)}{m} v^2,$$

$$v^* \sin \alpha \cos \beta + \alpha^* v \cos \alpha \cos \beta - \beta^* v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_x v \cos \alpha -$$

$$-\Omega_x v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \Omega_z^* = 0,$$

$$v^* \sin \alpha \sin \beta + \alpha^* v \cos \alpha \sin \beta + \beta^* v \sin \alpha \cos \beta + \Omega_x v \sin \alpha \cos \beta - \quad (6.1)$$

$$-\Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \Omega_y^* = 0,$$

$$I_1 \Omega_x^* + (I_3 - I_2) \Omega_y \Omega_z = 0,$$

$$I_2 \Omega_y^* + (I_1 - I_3) \Omega_x \Omega_z = -z_N s(\alpha) v^2,$$

$$I_3 \Omega_z^* + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y = y_N s(\alpha) v^2.$$

Координаты точки  $N$  в системе  $(e_x, e_y, e_z)$  примут вид:

$$(0, y_N(\alpha, \beta), z_N(\alpha, \beta)),$$

где  $y_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \cos \beta$ ,  $z_N(\alpha, \beta) = R(\alpha) \sin \beta$ .

Систему (6.1) дополним кинематическими соотношениями:

$$\theta^* = \frac{1}{\cos \psi} [\Omega_x \cos \varphi - \Omega_y \sin \varphi],$$

$$\psi^* = \Omega_x \sin \varphi + \Omega_y \cos \varphi,$$

$$\varphi^* = \Omega_z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} [\Omega_y \sin \varphi - \Omega_x \cos \varphi], \quad (6.2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \cos \beta \\ v \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Выше используются следующие обозначения:  $\sigma$  – расстояние  $DC$ ,  $m$  – масса тела.

В динамическую систему (6.1) входят функции  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ , для качественного описания которых, по-прежнему, используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания (см. введение). Функция  $R(\alpha)$  удовлетворяет условию (0.4), а  $s(\alpha)$  – условию (0.5).

**§ 38. СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В СРЕДЕ  
ПРИ НАЛИЧИИ НЕКОТОРОЙ СВЯЗИ И НАЧАЛО  
КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА**

---

Как и в плоском случае, будем рассматривать класс движений, при котором выполнено тождество (1.14), которое является неинтегрируемой связью.

0. *Об аналитическом интеграле.* В случае динамически симметричного твердого тела система (6.1) имеет аналитический интеграл вида

$$\Omega_x = \Omega_{x_0} = \text{const}, \quad (6.3)$$

т.е. обобщенные силы допускают собственное вращение тела около продольной оси динамической симметрии.

1. *О возникновении независимой подсистемы.* Воспользуемся (см. главу 4) методическим приемом понижения порядка системы, т.е. выразим из первого уравнения (6.1) функцию  $T$  так, чтобы в силу системы (6.1) полная производная величины

$v$  равнялась нулю. В результате данного понижения порядка у системы (6.1) возникает независимая подсистема вида

$$\begin{aligned} \alpha^* v \cos \alpha \cos \beta - \beta^* v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z v \cos \alpha - \\ - \Omega_{x_0} v \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_{x_0} \Omega_y - \sigma \Omega_z^* = 0, \\ \alpha^* v \cos \alpha \sin \beta + \beta^* v \sin \alpha \cos \beta + \Omega_{x_0} v \sin \alpha \cos \beta - \\ - \Omega_y v \cos \alpha - \sigma \Omega_{x_0} \Omega_z + \sigma \Omega_y^* = 0, \\ I_2 \Omega_y^* + (I_1 - I_2) \Omega_{x_0} \Omega_z = -z_N s(\alpha) v^2, \\ I_3 \Omega_z^* + (I_2 - I_1) \Omega_{x_0} \Omega_y = y_N s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$ .

2. *Случай нулевой проекции угловой скорости на продольную ось и случай аналитической системы.* Рассмотрим траектории движения системы (6.4) на уровне интеграла (6.3) при  $\Omega_{x_0} = 0$ . При этом она примет вид:

$$\begin{aligned} \alpha^* v \cos \alpha \cos \beta - \beta^* v \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z v \cos \alpha - \sigma \Omega_z^* = 0, \\ \alpha^* v \cos \alpha \sin \beta + \beta^* v \sin \alpha \cos \beta - \Omega_y v \cos \alpha + \sigma \Omega_y^* = 0, \\ I_2 \Omega_y^* = -F(\alpha) \sin \beta v^2, \\ I_2 \Omega_z^* = F(\alpha) \cos \beta v^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

первые два уравнения которой эквивалентны

$$\begin{aligned} \alpha^* \cos \alpha + \Omega_z \cos \alpha \cos \beta - \Omega_y \cos \alpha \sin \beta - (\sigma / I_2) v F(\alpha) = 0, \\ \beta^* \sin \alpha - \Omega_y \cos \alpha \cos \beta - \Omega_z \cos \alpha \sin \beta = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если выполнено свойство (0.9) то, вводя обозначение  $n_0^2$ , как и выше, вместо (6.6) имеем аналитическую систему ( $n_0^2 = AB / I_2$ ):

$$\begin{aligned} \alpha^* + \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta - \sigma n_0^2 v \sin \alpha = 0, \\ \beta^* \sin \alpha - \Omega_y \cos \alpha \cos \beta - \Omega_z \cos \alpha \sin \beta = 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

которую дополним уравнениями

$$\Omega_y^* = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta, \quad \Omega_z^* = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta. \quad (6.8)$$

Система (6,7),(6,8) – замкнута. Заметим, что система (6.7) эквивалентна (6.6) вне и только вне многообразия

$$O = \{(\alpha, \beta, \Omega_y, \Omega_z) \in R^4 : \cos \alpha = 0\}. \quad (6.9)$$

Спроектируем угловую скорость на подвижную систему координат  $Dz_1 z_2$  (поворачивая систему  $Dzx$  на угол  $-\beta$ ) таким образом, что

$$z_1 = \Omega_y \cos \beta + \Omega_z \sin \beta, \quad z_2 = \Omega_z \cos \beta - \Omega_y \sin \beta. \quad (6.10)$$

При этом, поскольку  $z_1^* = \beta^* z_2$ , то система (6.6) вне и только вне многообразия  $O'$  эквивалентна

$$\begin{cases} \alpha^* = -z_2 + \frac{\sigma v F(\alpha)}{I_2 \cos \alpha}, \\ z_2^* = \frac{F(\alpha)}{I_2} v^2 - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^* = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\beta^* = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (6.12)$$

где

$$O' = \{(\alpha, \beta, \Omega_y, \Omega_z) \in R^4 : \sin \alpha \cos \alpha = 0\}. \quad (6.13)$$

Система (6.11),(6.12) при условии (0.9) примет вид аналитической:

$$\begin{cases} \alpha^* = -z_2 + \sigma n_0^2 \sin \alpha, \\ z_2^* = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^* = z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\beta^* = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (6.15)$$

От динамической системы (6.5) вне и только вне многообразия  $O'$  отделилась независимая подсистема третьего порядка (6.11), которая рассматривается на трехмерном многообразии  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi \setminus \alpha = \pi k, k \in Z\} \times R^2\{z_1, z_2\}$ . Поскольку произошло «отделение» системы третьего порядка, фазовое пространство  $S^1\{\alpha \bmod 2\pi \setminus \alpha = \pi k, k \in Z\} \times R^2\{z_1, z_2\} \times S^1\{\beta \bmod 2\pi\}$  уже обладает рядом расслоений.

3. *Точки покоя системы и соответствующие им стационарные движения.* Множество точек покоя системы (6.6), которым соответствуют стационарные движения, разбивается на две части.

Во-первых, существуют особые точки

$$\{\alpha = 0 \bmod 2\pi, \Omega_y = \Omega_z = 0\}, \quad (6.16)$$

соответствующие таким стационарным движениям, при которых тело движется поступательно вдоль прямой  $CD$  в ту или иную сторону.

Во-вторых, формально существует двумерное многообразие особых точек  $O$ , которые соответствуют стационарным движениям, освещенным в главе 4.

4. *О нарушении теоремы единственности.* На многообразии  $O'$  нельзя однозначно разрешить систему (6.5) относительно  $\alpha^*, \beta^*$ . Формально, на  $O'$  нарушается теорема единственности.

Как упоминалось, вне и только вне  $O'$  система (6.5) эквивалентна (6.11). Но фактически теорема единственности нарушается лишь на многообразии  $O \subset O'$ , поскольку на  $O \setminus O$  векторное поле (6.11) не определено по причине вырождения сферических координат  $(\nu, \alpha, \beta)$  точки  $D$ . На многообразии  $O$  нарушение теоремы единственности происходит в следующем смысле: почти через любую точку  $O$  проходит неособая фазо-

вая траектория системы (6.5), пересекая  $O$  под прямым углом, а также существует фазовая траектория, совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения тяги  $T$  (реакции наложенной связи). Покажем это.

Для поддержания связи вида (1.14) необходимо выбрать величину  $T$  реакции в виде

$$T_v(\alpha, \Omega_y, \Omega_z) = \sigma m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + v^2 \left[ s(\alpha) - \frac{m\sigma}{I_2} F(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \right]. \quad (6.17)$$

Если  $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} = L$ , то при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  нужная величина тяги найдется из равенства

$$T_v\left(\frac{\pi}{2}, \Omega_y, \Omega_z\right) = \sigma m(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) + \frac{m\sigma}{I_2} Lv^2,$$

где величины  $\Omega_y, \Omega_z$  – произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью тяги  $T$  вращение вокруг некоторой точки  $W$ , необходимо выбрать величину тяги в виде

$$T_v \equiv \frac{mv^2}{R_0}, \quad (6.18)$$

где  $R_0$  – расстояние  $CW$ . Равенства (6.17) и (6.18), вообще говоря, определяют различные значения  $T$ , что и доказывает замечание.

Если  $|L| = +\infty$ , то мгновенная фазовая скорость возле многообразия  $O$  бесконечна.

5. *Симметрии векторного поля системы в фазовом пространстве квазискоростей.* Векторное поле системы (6.11) обладает тремя видами симметрий:

а) центральной симметрией. Такая симметрия возле  $(\pi k, 0, 0)$ ,  $k \in Z$ , в пространстве  $R^3\{\alpha, z_2, z_1\}$  возникает по причине того, что векторное поле в координатах  $(\alpha, z_2, z_1)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix};$$

б) некоторой зеркальной симметрией (НЗС). Такая симметрия относительно плоскостей  $\Lambda_i$ ,  $i \in Z$ , где

$$\Lambda_i = \left\{ (\alpha, z_2, z_1) \in R^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i \right\},$$

возникает по причине того, что  $\alpha$ -составляющая векторного поля системы в координатах  $(\alpha, z_2, z_1)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

а  $z_2$ - и  $z_1$ -составляющие меняют знак;

в) симметрией относительно плоскости

$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in R^3 : z_1 = 0\},$$

а именно,  $z_2$ - и  $\alpha$ -составляющие векторного поля системы сохраняются при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix},$$

а  $z_1$ -составляющая меняет знак.

**§ 39. О ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СИСТЕМЫ**

Данный параграф посвящен изучению возможностей полного интегрирования рассматриваемой динамической системы. В нем приводятся первые интегралы системы (6.14), выражающиеся через элементарные функции, а также обсуждается путь интегрирования общей системы (6.11) (см. также [120–122]).

1. Теорема о полной интегрируемости.

**Теорема 6.1.** Система (6.14) обладает полным набором первых интегралов, являющихся трансцендентными (в смысле теории функций комплексного переменного) функциями. Система (6.14), (6.15) также вполне интегрируема, два первых интеграла которой являются первыми интегралами системы (6.14), а третий – также трансцендентная функция.

Первый трансцендентный интеграл системы (6.14) будет иметь вид

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 - \sigma n_0^2 v z_2 \sin \alpha + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha}{z_1 \sin \alpha} = C_1. \quad (6.19)$$

2. Замечания об интегрируемости консервативной системы. Систему (6.14) при  $\sigma=0$  обозначим через (6.14').

**Предложение 6.1.** Система (6.14') является консервативной системой, обладающей двумя первыми интегралами

$$z_1 \sin \alpha = C_1^0, \quad z_1^2 + z_2^2 + n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha = C_2^0; \quad C_1^0, C_2^0 = \text{const}. \quad (6.20)$$

Несмотря на простой характер предложения 6.1, необходимо сделать важное замечание.

**Замечание.** Очевидно, что отношение двух первых интегралов (6.20) есть первый интеграл (6.14'). Но каждая из

функций (6.20) (если во второй функции формально вычесть величину  $\sigma n_0^2 v z_2 \sin \alpha$ , обращающуюся в нуль при  $\sigma=0$ ) не является первым интегралом (6.14). Однако отношение последних двух функций является первым интегралом системы (6.14) при любом  $\sigma$ .

3. *Поиск дополнительных интегралов системы.* Поскольку система (6.14) обладает переменной диссипацией и является аналитической, для нее удастся в явном виде найти два других дополнительных интеграла. Выполнено тождество:

$$u_1 = \frac{1}{2} \{C_1 \pm G\}. \quad (6.21)$$

Здесь  $G = \sqrt{C_1^2 - 4[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2]}$ ,  $u_1 = z_1 \tau$ ,  $u_2 = z_2 \tau$ ,  $\tau = \sin \alpha$  (для поиска дополнительных интегралов используется первый интеграл (6.19)). Квадратура для поиска искомого интеграла, связывающего величины  $u_2$  и  $\tau$ , выглядит как

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(\sigma n_0^2 v - u_2) du_2}{2[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2 + n_0^2 v^2] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm G)}. \quad (6.22)$$

Если  $w_1 = u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2}$ , то правая часть (6.22) примет вид:

$$\int \frac{(\sigma n_0^2 v / 2 - w_1) dw_1}{2 \left[ w_1^2 - n_0^2 v^2 \frac{\sigma n_0^2 - 4}{4} \right] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm G)}. \quad (6.23)$$

Величина (6.23) разбивается на части  $\frac{\sigma n_0^2 v}{2} \int_{(1)} - \int_{(2)}$ , где

$$\int_{(1)} = \int \frac{dw_1}{G_1}, \quad \int_{(2)} = \int \frac{dw_1^2}{2G_1}; \quad \text{здесь} \quad G_1 = 2 \left[ w_1^2 - n_0^2 v^2 \frac{\sigma n_0^2 - 4}{4} \right] - \frac{C_1}{2}(C_1 \pm G).$$

Если  $a = n_0^2 v^2 \frac{\sigma^2 n_0^2 - 4}{4}$ ,  $\bar{x} = w_1^2$ ,  $\bar{y}^2 = C_1^2 - 4(\bar{x} - a)$ , то

$$\int_{(2)} = \frac{1}{2} \ln |\bar{y} + C_1| + \text{const}.$$

Далее,

$$\int_{(1)} = \pm \int \frac{d\bar{y}}{(\bar{y} + C_1) \sqrt{C_1^2 - \bar{y}^2 + 4a}}.$$

Пусть для определенности  $C_1^2 + 4a \geq 0$ . Тогда

$$\int_{(1)} = \pm \frac{1}{n_0^2 v^2 \sqrt{4 - \sigma^2 n_0^2}} \arcsin \frac{C_1 \bar{y} + C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}{(\bar{y} + C_1) \sqrt{C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}} + C_2,$$

если  $\sigma n_0 < 2$ ;

$$\int_{(1)} = \mp \frac{1}{C_1 (\bar{y} + C_1)} \sqrt{C_1^2 - \bar{y}^2} + C_2, \text{ если } \sigma n_0 = 2;$$

$$\begin{aligned} \mp \int_{(1)} = & - \frac{1}{2n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} + G_1}{\bar{y} + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| + \\ & + \frac{1}{2n_0^2 v^2 \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \ln \left| \frac{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4} - G_1}{\bar{y} + C_1} + \frac{C_1}{n_0 v \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4}} \right| + C_2, \end{aligned}$$

если  $\sigma n_0 > 2$ ;  $C_2 = \text{const}$ .

4. Поиск второго дополнительного интеграла. Дополнительный интеграл системы, найденный выше, являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных, составляет вместе с (6.19) полный набор первых интегралов системы (6.14). Для системы (6.14), (6.15) необходим еще один первый интеграл.

**Замечание.** Везде выше (см. предыдущий пункт) вместо  $C_1$  необходимо вставить левую часть равенства (6.19).

Таким образом, дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln |\sin \alpha| + G_2(z_2 \sin \alpha, z_1 \sin \alpha, \sin \alpha) = C_2.$$

Для поиска последнего интеграла системы (6.14), (6.15) заметим, что раз  $\frac{dz_1}{d\beta} = z_2$ , то  $\frac{du_1}{d\beta} + [-u_2 + \sigma n_0^2 v] = u_2$ . Поэтому

$$\frac{du_1}{d\beta} = \pm \sqrt{\sigma^2 n_0^4 v^2 - 4[u_1^2 - C_1 u_1 + n_0^2 v^2]}, \quad (6.24)$$

а, следовательно, искомая квадратура принимает вид:

$$\mp \int \frac{du_1}{\sqrt{\sigma^2 n_0^4 v^2 - 4[u_1^2 - C_1 u_1 + n_0^2 v^2]}} = \beta + C_3, \quad C_3 = \text{const}. \quad (6.25)$$

Левая часть (6.25) (без знака) имеет вид:

$$\frac{1}{2} \arcsin \frac{\left(u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2}\right)^2}{\sqrt{C_1^2 + n_0^2 v^2 (\sigma^2 n_0^2 - 4)}}. \quad (6.26)$$

После нужных подстановок имеем искомое инвариантное соотношение:

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{\left(u_2 - \frac{\sigma n_0^2 v}{2}\right)^2 u_1^2}{G_3}, \quad (6.27)$$

где

$$G_3 = [u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2]^2 + 2[u_2^2 - \sigma n_0^2 v u_2][u_1^2 + n_0^2 v^2] + [u_1^2 + n_0^2 v^2]^2 + \sigma^2 n_0^4 v^2 u_1^2.$$

**Пример.** Если  $\sigma n_0 = 2$ , то равенство (6.27) примет вид:

$$\cos^2[2(\beta + C_3)] = \frac{(z_2 - n_0 v \sin \alpha) z_1}{(z_2 - n_0 v \sin \alpha)^2 + z_1^2}. \quad (6.28)$$

Правая часть (как нечетная функция от  $\zeta = \frac{z_2 - n_0 v \sin \alpha}{z_1}$ ) имеет при  $\zeta = 1$  глобальный максимум, равный  $1/2$ .

5. *О маятнике с переменной диссипацией.* Система (6.11), (6.12) также является маятниковой системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Движение происходит под действием двух сил: потенциальной  $\frac{F(\alpha)}{I_2}$  и линейной по скорости

$$\sigma \frac{v}{I_2} \alpha \cdot \frac{d F(\alpha)}{d \alpha \cos \alpha}$$

с переменным коэффициентом. В одном подпространстве этот коэффициент имеет строго положительный знак, поэтому здесь происходит подкачка энергии со стороны среды. В другом подпространстве данный коэффициент имеет строго отрицательный знак. Поэтому сила рассеивает энергию, заставляя тело тормозить свое движение.

Последние замечания показывают (как и в случае плоскопараллельного движения), что мы имеем дело с диссипативной системой с переменной диссипацией с нулевым средним. И вообще, фазовое пространство складывается в объединение чередующихся областей, в каждой из которых присутствует диссипация только одного знака.

**Замечание.** В случае системы (6.11), (6.12) поиск интегралов сводится к интегрированию уравнений Риккати, решения которых в самом общем случае в элементарных функциях не выражаются.

### § 40. ЗАДАЧА О ПРОСТРАНСТВЕННОМ МАЯТНИКЕ В ПОТОКЕ НАБЕГАЮЩЕЙ СРЕДЫ

По аналогии с плоским случаем, рассмотрим задачу о пространственном маятнике, помещенном в поток набегающей среды (рис. 6.2).

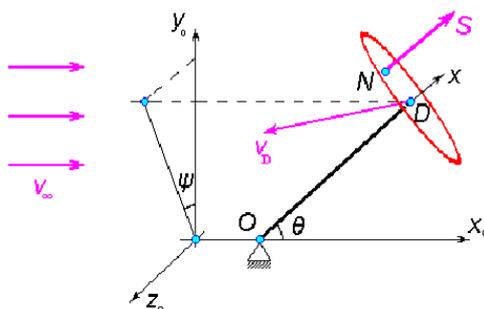


Рис. 6.2

Пусть плоский круглый диск закреплен в своем центре перпендикулярно державке на сферическом шарнире и находится в потоке набегающей среды, который движется с постоянной скоростью  $\vec{v}_\infty \neq \vec{0}$ . Предположим, что державка сопротивления не создает.

Суммарная сила  $\vec{S}$  воздействия потока среды на диск направлена параллельно державке, а точка  $N$  приложения этой силы определяется лишь одним параметром – углом атаки  $\alpha$ , который измеряется между вектором скорости  $\vec{v}_A$  точки  $A$  относительно потока и державкой. Таким образом, сила  $\vec{S}$  направлена по нормали в ту сторону от нее, которая противоположна направлению скорости  $\vec{v}_A$ , и проходит через некоторую точку  $N$  диска, смещенную от точки  $A$  вперед по отношению к направлению  $\vec{v}_A$ . Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания пространственных тел.

Вектор  $\vec{e}$  определяет ориентацию державки. Тогда  $\vec{S} = s_1(\alpha)v_A^2\vec{e}$ , где коэффициент сопротивления  $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sgn}\cos\alpha$ .

Пусть  $Ox_0y_0z_0$  – неподвижная система координат. Направление набегающего потока совпадает с направлением оси  $x_0$ . Свяжем с телом систему координат  $Axyz$ , где ось  $x$  направлена вдоль державки, а оси  $y, z$  жестко связаны с диском.

Координаты точки  $N$  в системе  $Axyz$  имеют вид  $(0, y_N, z_N)$ . По аналогии с задачей о движении свободного тела, вводятся функция  $R(\alpha)$ , а также угол  $\beta$ , измеряемый в плоскости  $Ayz$ . При этом пусть, для простоты, выполнено свойство (0.9). Для любой допустимой функции  $R(\alpha)$  анализ проводится аналогично.

Если тело динамически симметрично ( $I_1, I_2 = I_3$  – главные моменты инерции в системе  $Axyz$ ),  $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  – проекции угловой скорости в системе  $Axyz$ , то уравнения движения примут вид, аналогичный (6.8):

$$\Omega_y^* = -n_0^2 v_A^2 \sin\alpha \cos\alpha \sin\beta, \quad \Omega_z^* = n_0^2 v_A^2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta. \quad (6.29)$$

Сила сопротивления допускает наличие первого интеграла (6.3), при этом в уравнениях (6.29) учитывается условие  $\Omega_{x_0} = 0$  (для простоты рассмотрим этот случай).

Введем углы  $(\xi, \eta)$ , определяющие ориентацию маятника. Угол  $\xi$  будем измерять от оси  $x_0$  до державки, а  $\eta$  измеряется от проекции державки на плоскость  $Oy_0z_0$  до оси  $y_0$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \cos\xi &= \cos\psi \cos\varphi, \\ \sin\xi \cos\eta &= \cos\psi \sin\varphi, \\ \sin\xi \sin\eta &= \sin\psi. \end{aligned} \quad (6.30)$$

1. *Полная система уравнений.* Соотношения, связывающие  $(v_A, \alpha, \beta)$  и  $(\xi, \eta, \Omega_y, \Omega_z)$ , ( $l$  – длина державки) имеют вид:

$$\begin{aligned} v_A \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_A \sin \alpha \cos \beta &= l\Omega_z + v_\infty \sin \xi \cos(\eta + \Omega_{x_0} t), \\ v_A \sin \alpha \sin \beta &= -l\Omega_y - v_\infty \sin \xi \sin(\eta + \Omega_{x_0} t). \end{aligned} \quad (6.31)$$

В силу первых трех соотношений из (6.2), имеем:

$$\theta^* = -\Omega_y \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \quad \varphi^* = \Omega_z + \Omega_y \sin \varphi \frac{\sin \psi}{\cos \psi}, \quad \psi^* = \Omega_y \cos \varphi, \quad (6.32)$$

откуда легко выводим, что

$$\Omega_y = \frac{\psi^*}{\cos \varphi}, \quad \Omega_z = \varphi^* - \psi^* \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi}. \quad (6.33)$$

Используя свойства (6.30), (6.33), имеем тождества:

$$\begin{aligned} \Omega_y &= \xi^* \sin \eta + \eta^* \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \cos \eta, \\ \Omega_z &= \xi^* \cos \eta - \eta^* \frac{\sin \xi}{\cos \xi} \sin \eta. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Уравнения из (6.29), (6.31), (6.34) образуют полную систему для определения движения маятника на уровне интеграла  $\Omega_{x_0} = 0$ .

2. Система дифференциальных уравнений и топологическая аналогия. Исходя из трех групп уравнений, две из которых дифференциальные, а третья – алгебраическая, нетрудно доказать

**Предложение 6.2.** Полная система уравнений движения маятника имеет вид:

$$\begin{aligned} \xi^{\ddot{}} + l n_0^2 v_\infty \xi^* \cos \xi + n_0^2 v_\infty^2 \sin \xi \cos \xi - \eta^{*2} \frac{\sin \xi}{\cos \xi} &= 0, \\ \eta^{\ddot{}} + l n_0^2 v_\infty \eta^* \cos \xi + \xi^* \eta^* \left[ \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Как и в случае свободного тела, система (6.35) обладает симметриями. Она также обладает полным набором первых интегралов и угол  $\eta$  является циклической координатой.

Заметим также, что система (6.35) является динамической системой на касательном расслоении к двумерной сфере.

**Теорема 6.2.** Система (6.35) (топологически) эквивалентна (6.14). Таким образом, как и в плоском случае, справедлива механическая аналогия между маятником в потоке среды и свободным телом.

**Замечание.** Угол  $\alpha$  для свободного тела эквивалентен углу  $\xi$ , а угол  $\beta$  – углу  $\eta$ . При этом для того, чтобы системы (6.14) и (6.35) были тождественными, необходимо положить  $l = -\sigma$  и  $v_\infty = v$ . Постоянная величина скорости характерной точки плоского круглого диска (в случае свободного тела) соответствует постоянной величине скорости набегающего потока на маятник. Равенство же  $l = -\sigma$  говорит о том, что для свободного тела стационарное движение при  $\alpha \equiv 0$  – экспоненциально неустойчиво, а для маятника стационарное движение при  $\xi \equiv 0$  – экспоненциально устойчиво.

3. *Замечания о динамически симметричном твердом теле в специальном поле сил.* Система (6.14) обладает переменной диссипацией и не является консервативной. Она становится консервативной при формальном приравнении величины  $\sigma$  к нулю. Это означает, что в среде движется плоский диск, центр которого имеет постоянную по величине скорость.

Справедлива еще одна аналогия с твердым телом Лагранжа в специальном поле сил. Пусть на твердое тело Лагранжа в случае, когда продольная составляющая угловой скорости равна нулю, действует следующая сила: она перпендикулярна экваториальной плоскости, ее величина равна

$$s(\theta), s \in \Sigma \quad (6.36)$$

( $\theta$  – угол нутации), а расстояние от точки приложения до оси динамической симметрии равно

$$R(\theta), R \in Y. \quad (6.37)$$

Тогда динамические уравнения движения примут вид (см. также [87]):

$$\Omega_y^* = -\frac{R(\theta)s(\theta)}{I_2} v^2 \cos \varphi, \quad \Omega_z^* = \frac{R(\theta)s(\theta)}{I_2} v^2 \sin \varphi. \quad (6.38)$$

Здесь  $\varphi$  – угол собственного вращения,  $v = \text{const}$ . Тогда, в силу кинематических формул Эйлера, вводя замены

$$\begin{aligned} z_1 &= -\Omega_z \cos \varphi - \Omega_y \sin \varphi, \\ z_2 &= -\Omega_y \sin \varphi - \Omega_z \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.39)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \theta^* &= -z_2, \\ z_2^* &= n_0^2 v^2 \sin \theta \cos \theta - z_1^2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$z_1^2 = z_1 z_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

$$\varphi^* = z_1 \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (6.41)$$

**Следствие.** Система (6.40), (6.41) эквивалентна (6.14'), (6.15).

Таким образом, мы имеем три модельных задачи, эквивалентных между собой:

- а) свободное твердое тело при наличии следящей силы;
- б) маятник в потоке среды;
- в) динамически симметричное твердое тело в специальном поле сил.

**§ 41. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ**

В данном параграфе приведем схему глобального качественного анализа динамической системы (6.11) во всем фазовом пространстве  $R^3\{\alpha, z_2, z_1\}$ . Для любой функции  $F \in \Phi$  фазовый портрет системы (6.11) имеет один и тот же топологический тип (рис. 6.3).

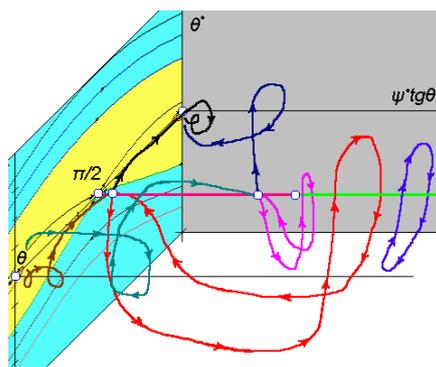


Рис. 6.3

У системы (6.11) не существует траекторий, имеющих в качестве  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки пространства  $R^3\{\alpha, z_2, z_1\}$ . Кроме того, у системы не существует простых и сложных предельных циклов.

1. *Приведение системы к исследуемому виду.* Сделаем формальную замену  $\alpha \rightarrow -\alpha$  для удобства рисования трехмерного фазового портрета и сохранения правоориентированной системы координат  $\{\alpha, z_2, z_1\}$ . При этом, в силу наличия симметрий, будем изучать область

$$\{(\alpha, z_2, z_1) \in R^3 : 0 < \alpha < \pi, z_1 > 0\}. \quad (6.42)$$

Система при этом примет вид:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = z_2 + \frac{\sigma v F(\alpha)}{I_2 \cos \alpha}, \\ z_2^{\bullet} = -\frac{F(\alpha)}{I_2} v^2 + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^{\bullet} = -z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{cases} \quad (6.43)$$

а при условии (0.9) вид аналитической системы:

$$\begin{cases} \alpha^{\bullet} = z_2 + \sigma n_0^2 \sin \alpha, \\ z_2^{\bullet} = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ z_1^{\bullet} = -z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{cases} \quad (6.44)$$

Для простоты исследуем систему (6.44) и «выпрямим» поле вдоль цилиндров  $\{(\alpha, z_2, z_1) \in R^3 : z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha = 0\}$ ; а именно, делая замену фазовых переменных  $u = z_2 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha$ , от системы (6.44) приходим к системе

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= u, \\ u^{\bullet} &= -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha + z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sigma n_0^2 v u \cos \alpha, \\ z_1^{\bullet} &= -z_1 [u - \sigma n_0^2 v \sin \alpha] \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

При  $\sigma=0$  система (6.45) (обозначенная через (6.45')) обладает двумя аналитическими интегралами. Очевидно

**Предложение 6.3.** *Плоскость*

$$\{(\alpha, u, z_1) \in R^3 : z_1 = 0\} \quad (6.46)$$

является интегральной для системы (6.43).

**Следствие.** На плоскости (6.46) «содержится» портрет системы из плоской динамики (см. ил. 1, если доопределить на прямых  $\{(\alpha, u) \in R^2 : \sin \alpha = 0\}$  поле системы по непрерывности).

Введем семейство (трехмерных) слоев:

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, x_1, x_2) \in R^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}. \quad (6.47)$$

2. Консервативная система сравнения третьего порядка.

В главе 2 приводилось множество утверждений, касающихся ТСП и более общих систем сравнения на двумерных многообразиях. Для исследования систем третьего порядка нам потребуются ТСП и системы сравнения более высокой размерности. Не будем останавливаться на общей теории ТСП и систем сравнения высших размерностей, а ограничимся ее применением к исследуемой системе.

Поскольку система (6.45') обладает двумя аналитическими интегралами (6.20), последние расслаивают фазовое пространство, в каждой точке которого можно провести две поверхности, задаваемые равенствами (6.20) и пересекающиеся по фазовой характеристике системы (6.45'). Для каждой точки фазового пространства системы (6.45) определим две пары подпространств, в каждую из которых входит (или выходит) характеристика системы (6.45). Первые интегралы (6.20) «помогают» исследовать поведение фазовых траекторий системы (6.45).

Если  $g_1 = \{n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha, u, z_1\}$ ,  $g_2 = \{z_1 \cos \alpha, 0, \sin \alpha\}$  – градиенты поверхностей (6.20), то скалярные произведения  $\chi_k = (g_k, v)$ ,  $k=1, 2$ , ( $v$  – векторное поле системы (6.45)) обладают всеми свойствами характеристических функций (см. главу 2).

**Предложение 6.4.** *Характеристические функции  $\chi_k$  имеют вид:*

$$\chi_1(\alpha, u, z_1) = \sigma n_0^2 v \cos \alpha [u^2 + z_1^2], \quad \chi_2(\alpha, z_1) = \sigma n_0^2 v \sin \alpha \cos \alpha.$$

3. Точки покоя исследуемой системы. Исследуемая система (6.45) имеет следующие состояния равновесия:

- а) точка  $(0, 0, 0)$  – отталкивающая;
- б) точка  $(-\pi, 0, 0)$  – притягивающая.

В каждой элементарной площадке, перпендикулярной плоскости  $\left\{ (\alpha, u, z_1) : \alpha = \frac{\pi}{2} \right\}$ :

- в) точки  $\left( \frac{\pi}{2}, 0, Q_1 \right)$ ,  $Q_1 \in [0, n_0)$  – седла;
- г) точки  $\left( \frac{\pi}{2}, 0, Q_2 \right)$ ,  $Q_2 \in (n_0, +\infty)$  – центры.

В случаях в), г) особые точки являются неизоллированными.

На протяжении всей главы качественный анализ проводился достаточно подробно. Следующий пункт является следствием предыдущего материала.

4. Строение фазового портрета. Из предложения 6.4 вытекают следующие утверждения.

- 1)  $\alpha$ –предельным множеством сепаратрис, входящих в точки в) в слое  $\Pi_{(-\pi/2, 0)}$ , является точка а);
- 2)  $\omega$ –предельным множеством сепаратрис, выходящих из точек в) в слое  $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ , является точка б);
- 3)  $\omega$ –предельными ( $\alpha$ –предельными) множествами сепаратрис, выходящих (входящих) из точек в) в слое  $\Pi_{(-\pi/2, 0)}$  (в слое  $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ ), являются эти же точки;
- 4) та часть фазового пространства, которая содержит точки г), сплошь заполнена замкнутыми траекториями.

**§ 42. ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО  
МАЯТНИКА И СЛУЧАЙ НЕНУЛЕВОЙ ЕГО ЗАКРУТКИ  
ОКОЛО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ**

1. *Траектории маятника на сфере.* В соответствии со свойствами разбиения на траектории фазового пространства, типичные траектории точки  $D$  плоской области делятся на классы.

а) Траектории, соответствующие колебательной области. Такие траектории представляют собой кривые на сфере, неограниченно приближающиеся к полюсам сферы (по потоку) при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

б) Траектории, соответствующие вращательной области. Такие траектории представляют собой кривые, почти всегда всюду плотно заполняющие кольцеобразные области на сфере, симметричные относительно экватора.

2. *Сферический маятник при ненулевой собственной закрутке.* Сразу же приведем уравнения движения маятника при условии, когда  $\Omega_{x_0} \neq 0$ . Данные уравнения имеют вид, аналогичный (6.35):

$$\begin{aligned} \xi'' + l n_0^2 v_\infty \xi' \cos \xi + n_0^2 v_\infty^2 \sin \xi \cos \xi - (\eta' - \Omega_{x_0})^2 \frac{\sin \xi}{\cos \xi} - \\ - \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x_0} (\eta' - \Omega_{x_0}) \frac{\sin \xi}{\cos \xi} = 0, \\ \eta'' + l n_0^2 v_\infty (\eta' - \Omega_{x_0}) \cos \xi + \xi' \eta' \left[ \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} \right] + \\ + \Omega_{x_0} \xi' \left( \frac{I_1 \cos \xi}{I_2 \sin \xi} - \frac{1 + \cos^2 \xi}{\cos \xi \sin \xi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$

## Глава 6. Семейства портретов и интегрируемые случаи систем...

---

Численный анализ помогает получить нам следующие результаты, имеющие в большей степени формальный смысл.

а) Траектории, соответствующие траекториям а) для случая  $\Omega_{x_0} = 0$ . Асимптотика поведения таких кривых прежняя.

б) Траектории, соответствующие траекториям б) для случая  $\Omega_{x_0} = 0$ . Такие траектории всюду плотны на всей сфере.

**ГЛАВА 7. Семейства портретов систем  
с переменной диссипацией с ненулевым  
средним в пространственной динамике  
твердого тела**

---

Данная глава (подобно главе 5) посвящена исследованию самого интересного в прикладном отношении класса движений твердого тела – свободного торможения в сопротивляющейся среде. Она фактически представляет собой введение в задачу о пространственном свободном торможении. В ней получены частные решения полной системы, подготовлен материал для проведения качественного интегрирования динамических уравнений в пространстве квазискоростей. Вторая часть главы посвящена новому двухпараметрическому семейству фазовых портретов, состоящему из бесчисленного множества неэквивалентных портретов в трехмерном пространстве. Такие фазовые портреты обладают нетривиальными нелинейными качественными свойствами.

Рассмотрим такой класс движений, при котором тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде.

Систему (6.1) можно преобразовать к следующему виду ( $z_i = Z_i v$ ,  $i=1,2$ ,  $\alpha^* = \alpha' v$ ,  $\beta^* = \beta' v$ ,  $v^* = v' v$ ):

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + \sigma \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha' = & -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \cos \alpha + \\ & + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$Z_2' = \frac{1}{I_2} F(\alpha) + Z_2 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{\nu I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha \right\} - Z_1 \Psi_2(\nu, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.3)$$

$$Z_1' = Z_1 \left\{ -\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{\nu I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha \right\} + Z_2 \Psi_2(\nu, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.4)$$

$$\beta' = -\frac{\Omega_{x_0}}{\nu} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma I_1}{\nu I_2} \Omega_{x_0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq}(\cdot) = (\cdot)' &= \frac{1}{\nu} (\cdot)^*, \quad \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \\ &+ \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha, \\ \Psi_2(\nu, \alpha, Z_1, Z_2) &= -\frac{I_1}{I_2} \frac{\Omega_{x_0}}{\nu} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma I_1}{\nu I_2} \Omega_{x_0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Уравнения (7.1)—(7.4) образуют замкнутую подсистему четвертого порядка, а при  $\Omega_{x_0} = 0$  уравнения (7.2)—(7.4) — третьего. При этом считаем, что функции  $F, s$ , входящие в правую часть системы (7.1)—(7.4), удовлетворяют условиям (0.8), (0.5).

В частности, если выполнены условия (0.9), (0.7), то система (7.1)—(7.4) примет следующий вид:

$$\nu' = \nu \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + \sigma \frac{I_1}{I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \\ &+ \frac{\sigma I_1}{\nu I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \cos \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$Z_2' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha + Z_2 \{-\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha\} - Z_1 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.8)$$

$$Z_1' = Z_1 \{-\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x_0} Z_1 \sin \alpha\} + Z_2 \Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.9)$$

где  $n_0^2 = \frac{AB}{I_2}$ ,  $\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha$ ,  $\Psi_2(v, \alpha, Z_1, Z_2) = -\frac{I_1 \Omega_{x_0}}{I_2 v} + Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sigma I_1}{v I_2} \Omega_{x_0} \frac{Z_2}{\sin \alpha}$ .

При  $\Omega_{x_0} = 0$  (случай отсутствия собственного вращения тела) системы (7.1)—(7.4) и (7.6)—(7.9) примут, соответственно, вид:

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.10)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha, \quad (7.11)$$

$$Z_2' = \frac{1}{I_2} F(\alpha) - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.12)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.13)$$

где  $\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$ , и

$$v' = v \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (7.14)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \sigma n_0^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (7.15)$$

$$Z_2' = n_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - Z_2 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.16)$$

$$Z_1' = -Z_1 \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (7.17)$$

$$\text{где } \Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \sigma n_0^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha.$$

При некоторых естественных условиях системы (7.6)—(7.9) и (7.14)—(7.17) отражают основные топологические свойства разбиения на траектории систем (7.1)—(7.4) и (7.10)—(7.13), соответственно, в пространстве  $R_+^1 \{v\} \times R^3 \{\alpha, Z_1, Z_2\}$ .

**§ 43. СЛУЧАЙ НУЛЕВОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ  
УГЛОВОЙ СКОРОСТИ  
И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ**

---

Рассмотрим случай, когда  $\Omega_{x_0} = 0$ . От исходной системы (7.10)—(7.13) отделилась подсистема третьего порядка (7.11)—(7.13). Поэтому в фазовом пространстве последней точки покоя могут являться проекциями неособых фазовых траекторий четырехмерного фазового пространства. Действительно, у системы (7.10)—(7.13) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы (7.10)—(7.13) в пространстве  $R_+^1 \{v\} \times R^3 \{\alpha, Z_1, Z_2\}$  и о точках покоя укороченной системы (7.11)—(7.13) в пространстве  $R^3 \{\alpha, Z_1, Z_2\}$ .

*1. Точки покоя системы четвертого порядка.* Искомые точки покоя будут заданы системой с положительным параметром  $v_1$ :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \left( Z_2 - \frac{1}{2\sigma} \right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}, \quad v = v_1. \quad (7.18)$$

Система (7.18) задает в пространстве  $R_+^1 \{v\} \times R^3 \{\alpha, Z_1, Z_2\}$  одномерное многообразие (окружность), сплошь заполненную точками покоя системы (7.10)—(7.13).

2. *Механическая интерпретация точек покоя четырехмерного фазового пространства.* Дальнейшая информация о движении тела носит формальный характер.

В отличие от случая плоскопараллельного движения тела, точки покоя (7.18) четырехмерного пространства соответствуют стационарным движениям, имеющим более богатую механическую интерпретацию.

Итак, рассмотрим частное решение системы (7.10)—(7.13):

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad v = v_0, \quad \Omega_y = \Omega_{y_0}, \quad \Omega_z = \Omega_{z_0}.$$

Кинематические соотношения

$$\begin{aligned} \theta^* &= -\frac{\Omega_{y_0}}{\cos \psi} \sin \varphi, \\ \psi^* &= \Omega_{y_0} \cos \varphi, \\ \varphi^* &= \Omega_{z_0} + \frac{\Omega_{y_0}}{\cos \psi} \sin \varphi \sin \psi \end{aligned} \quad (7.19)$$

допускают «отделение» независимой подсистемы второго порядка (два последних уравнения), которая обладает аналитическим первым интегралом.

**Предложение 7.1.** Система (7.19) обладает первым интегралом вида

$$\Omega_{y_0} \sin \varphi \cos \psi - \Omega_{z_0} \sin \psi = C_1 = const, \quad (7.20)$$

который означает, что сохраняется проекция на ось  $Ox_0$  (см. § 37) абсолютной угловой скорости.

В силу предложения 7.1 и первого уравнения системы второго порядка из (7.19), угол  $\psi$  найдется из равенства

$$\sin \psi = \pm \frac{\Omega_{y_0} \sqrt{(\Omega_{y_0}^2 + \Omega_{z_0}^2) - C_1^2}}{\Omega_{y_0}^2 + \Omega_{z_0}^2} \sin \left\{ \sqrt{\Omega_{y_0}^2 + \Omega_{z_0}^2} (t + C_2) \right\} - \frac{C_1 \Omega_{z_0}}{\Omega_{y_0}^2 + \Omega_{z_0}^2}, \quad (7.21)$$

где  $C_2 = \text{const}$ . Тождества (7.20) и (7.21) позволяют определить зависимость угла  $\varphi$  от времени через элементарные функции.

На исследуемых фазовых траекториях выполнено равенство

$$x_0^* = -v_0 \cos \psi \sin \varphi = \frac{v_0}{\Omega_{y_0}} [-C_1 - \Omega_{z_0} \sin \psi],$$

а, в силу (7.21),

$$x_0^* = \frac{v_0}{\Omega_{y_0}} [A_1 \mp A_2 \sin(A_3 t + A_4)].$$

Таким образом, при  $C_1 = 0$  (случай плоскопараллельного движения,  $\Omega_{z_0} = \frac{1}{\sigma}$ ,  $\alpha = \pi/2$ ) координата  $x_0$  периодически меняется со временем. Аналогично определяются  $y_0$  и  $z_0$ .

Несмотря на нахождение лишь одной декартовой координаты, можно сделать вывод о стационарном движении тела.

Пусть  $Z_1 = Z_2 = 0$  (в начальный момент времени, случай плоскопараллельного движения). При этом тело движется поступательно с постоянной скоростью, параллельной плоской области. В силу предложения 7.1, ось  $Ox_0$  направлена параллельно плоской области (при любых  $Z_1, Z_2$  в процессе движения).

Если фиксировать постоянную скорость поступательного движения при последних начальных условиях и задать начальный толчок в перпендикулярном направлении к оси  $Ox_0$  (т.е. «закручивая» тело), то характерная точка  $D$  плоской области (рис. 6.1) будет совершать винтовое движение, при котором центр масс тела движется прямолинейно и равномерно, а вращательное движение происходит с постоянной скоростью.

Увеличивая угловую скорость вращения тела и уменьшая, в свою очередь, скорость центра масс до нуля, попадаем из последних начальных условий в точку, задаваемую равенствами  $Z_2 = \frac{1}{\sigma}$ ,  $Z_1 = 0$ , также соответствующую плоскопараллельному движению.

3. *Тривиальные и нетривиальные точки покоя системы третьего порядка.* У системы (7.11)—(7.13) существуют точки покоя в пространстве  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ , которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad Z_1 = Z_2 = 0, \quad (7.22)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma}\right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}. \quad (7.23)$$

Как было указано выше, точки покоя укороченной системы могут являться ортогональной проекцией либо неособых фазовых траекторий, либо многообразий, сплошь заполненных точками покоя пространства  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ . Система (7.23) задает в данном пространстве точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия. И, наоборот, только в точки, задаваемые системой (7.23), проектируются многообразия положений равновесия.

Следовательно, система (7.22) задает точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$\begin{aligned} v(q) &= v^0 e^{-\frac{B}{m}q}, \\ v^0 &= v(0), \\ \alpha(q) &\equiv \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \\ Z_1(q) &= Z_2(q) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Механическая интерпретация частных решений (7.24) следующая: тело совершает прямолинейное поступательное движение с углом атаки, равным либо 0, либо  $\pi$ . При этом скорости всех точек тела убывают со временем как  $t^{-1}$ .

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений точек покоя (7.22) и (7.23), последние будем называть тривиальными положениями равновесия (ТПР, аналогично динамике плоскопараллельного движения). Наряду с ТПР могут существовать точки покоя, соответствующие нетривиальным частным решениям системы.

**Определение.** Нетривиальными положениями равновесия (НПР) системы (7.11)—(7.13) в пространстве  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  называются точки покоя, не лежащие на плоскостях

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0\}.$$

4. Нетривиальные положения равновесия системы третьего порядка, соответствующие нетривиальным частным решениям. Введем обозначение  $n_0^2 = \frac{F'(0)}{I_2}$  (как и в предыдущих главах). Рассмотрим систему (7.15)—(7.17) для простоты. Аналогично может быть рассмотрена система (7.11)—(7.13). Необходимым и достаточным условием существования НПР (в пространстве, не лежащих на интегральной плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ ) является выражение данных положений равновесия через систему

$$Z_2 = \frac{\sigma n_0^2}{2} \sin \alpha ; Z_1^2 = n_0^2 \left[ 1 - \frac{\sigma^2 n_0^2}{4} \right] \sin^2 \alpha ; \cos \alpha = -\frac{\sigma n_0^2 m}{2B},$$

причем вне плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$  НПР появляются лишь при  $\sigma n_0 < 2$ , а вот при  $\sigma n_0 > 2$  они вовсе отсутствуют.

Итак, при  $\sigma n_0 < 2$  на плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$  НПР не существуют (см. динамику плоскопараллельного движения). В свою очередь, при  $\sigma n_0 \geq 2$  НПР в пространстве  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 \neq 0\}$  не существуют. При  $\sigma n_0 < 2$  НПР на плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$  «пропадают» и «перемещаются» в пространство  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 \neq 0\}$ .

**Следствие 1.** У системы (7.10)—(7.13) при условиях (0.8), (0.5) и  $\Omega_{x_0} = 0$  существуют частные решения вида

$$v(q) = v^0 e^{\kappa q}, \quad v^0 = v(0), \quad \kappa < 0;$$

$$\alpha(q) \equiv \alpha_0; \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta(q) = Z_{10} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} q + \beta^0, \quad \beta^0 = \beta(0);$$

$$Z_1(q) \equiv Z_{10}, \quad Z_2(q) \equiv Z_{20}, \quad Z_{i0} = Z_i(0), \quad i=1, 2.$$

**Следствие 2.** У системы (6.1) при условиях (0.8), (0.5) и  $\Omega_{x_0} = 0$  существуют частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0);$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0; \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta(t) = \beta_0 - \frac{\beta_0^*}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t);$$

а также, если определить, что  $\beta_0 = 0$ ,

$$\Omega_y(t) = \frac{1}{1 - v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \cos \beta(t) - \Omega_{z0} \sin \beta(t)],$$

$$\Omega_z(t) = \frac{1}{1 - v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \sin \beta(t) + \Omega_{z0} \cos \beta(t)], \quad \Omega_{y0} = \Omega_y(0),$$

$$\Omega_{z0} = \Omega_z(0),$$

аналогичные соответствующим решениям из динамики плоскопараллельного движения.

**§ 44. РАССЛОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА,  
ЕГО СИММЕТРИИ И НАЧАЛО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

1. *Топологическая классификация особых точек укороченной системы в трехмерном пространстве.* Как и ранее, введем два безразмерных параметра:  $\mu_1 = 2 \frac{B}{m n_0}$ ,  $\mu_2 = \sigma n_0$ . Будем рассматривать систему (7.11)—(7.13) при  $\sigma n_0 < 2$ .

**Предложение 7.2.**

1) *Неизолированные точки покоя (7.23), лежащие на окружности, при  $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$  в каждой перпендикулярной площадке к окружности являются седлами (рис. 7.1).*

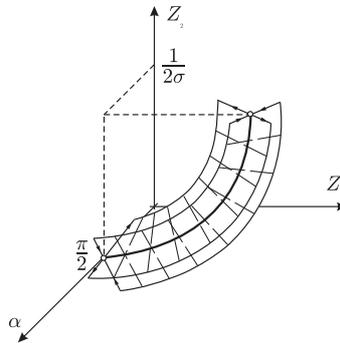


Рис. 7.1

2) *Неизолированные точки покоя (7.23) при  $Z_2 > \frac{1}{2\sigma}$ , лежащие на окружности, в каждой перпендикулярной площадке к окружности являются притягивающими.*

3) *Изолированная точка покоя (7.22) при  $k = 0$  всегда является отталкивающей (рис. 7.2).*

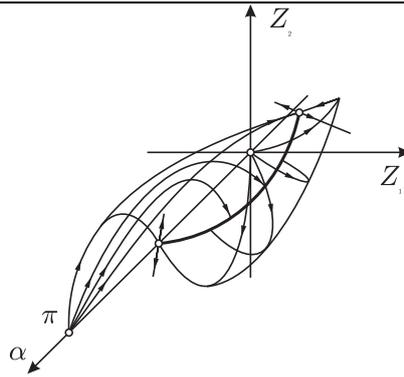


Рис. 7.2

4) *Изолированная точка покоя (7.22) при  $k=1$  является: отталкивающей, если  $\mu_2 < \mu_1$  и притягивающей, если  $\mu_2 > \mu_1$  (рис. 7.2).*

2. *Расслоения фазового пространства и его симметрии.* В силу отделения от системы четвертого порядка независимой подсистемы третьего порядка, фазовые траектории в  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  лежат на поверхностях, являющихся трехмерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве дополнительный первый интеграл системы (7.11)—(7.14), то он является функцией переменных  $(\alpha, Z_1, Z_2)$ , а поэтому задает семейство цилиндров в  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ .

Благодаря вышеописанной редукции, удобнее строить фазовый портрет системы (7.10)—(7.13) в  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  с помощью азогого портрета системы (7.11)—(7.13) в  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ . Фазовый портрет в пространстве  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  не будет являться частью портрета в  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  в теоретико-множественном смысле, а будет проекцией фазового портрета на плоскость  $\{(v, \alpha, Z_1, Z_2) \in R^4 : v = \text{const}\}$ . Проекция в данном случае ортогональна.

Благодаря цилиндрической природе векторного поля, становятся возможными поднятие фазовых траекторий в пространство  $R_+^1\{v\} \times R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  и получение четырехмерных фазовых портретов искомой системы.

Поскольку  $v > 0$ , то движение возможно лишь в области  $B' = \{(v, \alpha, Z_1, Z_2) \in R^4 : v > 0\} \subset R^4\{v, \alpha, Z_1, Z_2\}$ .

Если формально сделать замену переменных в области  $B'$  по формуле  $\bar{p} = \ln v$ , то полученное векторное поле в фазовом пространстве  $R^4\{\bar{p}, \alpha, Z_1, Z_2\}$  не зависит от  $\bar{p}$ , т.е. имеет цилиндрическую природу более высокого порядка и однозначно ортогонально проектируется на все семейство плоскостей  $\{(\bar{p}, \alpha, Z_1, Z_2) \in R^4 : \bar{p} = \text{const}\}$ . При этом положения равновесия в пространстве  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$  полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области  $B'$ .

Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в четырехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в  $R^4\{\bar{p}, \alpha, Z_1, Z_2\}$  на  $\bar{p}$ -ось, либо на  $v$ -ось в области  $B'$ .

Для любых  $F \in \Phi$ ,  $s \in \Sigma$  векторное поле системы (7.11)—(7.13) обладает свойством центральной симметрии относительно точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in \{0, 1\}$ , т.е. в координатах  $(\alpha, Z_1, Z_2)$  векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1\}.$$

Более того, плоскость  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$  является интегральной, а векторное поле системы обладает следующей симметрией:  $\alpha$ - и  $Z_2$ -составляющие сохраняются, а  $Z_1$ -составляющая меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1, Z_2 \end{pmatrix}, k \in \{0, 1\}.$$

Для дальнейшего анализа введем определения семейства слоев в фазовом пространстве  $R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ :

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},$$

при этом, как и в предыдущих главах,  $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$ ,  $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$ .

Следует заметить, что фактически фазовым пространством исследуемой системы является множество  $\Pi_{(0, \pi)} \cup \cup\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 \geq 0\}$ .

**§ 45. КЛАССИФИКАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ СИСТЕМЫ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ**

*1. Введение в классификацию фазовых портретов.* Подобно изучению динамики плоскопараллельного движения тела, можно изобразить диаграмму перестроек векторного поля системы (7.11)—(7.13) возле точки  $(\pi, 0)$  на множестве  $\Pi_{(0, \pi)} \cup \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 \geq 0\}$ . Поведение поля системы возле этой точки определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета.

Будем изучать те динамические системы вида (7.11)—(7.13), при которых НПР существуют лишь вне плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ .

Поэтому в общем пространстве физически допустимых параметров

$$M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$$

в основном будем изучать область

$$J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\} \subset M^2.$$

Типичная топологическая классификация ТПР была приведена выше. Для проведения полной классификации фазовых портретов системы необходимо ответить на следующие вопросы.

Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельных множеств бесконечно удаленные точки.

**Предложение 7.3.** У системы (7.11)-(7.13) траектории, уходящие на бесконечность, существуют лишь на интегральной плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ .  $\alpha$ - и  $\omega$ -предельными их множествами являются бесконечно удаленные точки  $(+0, 0, +\infty)$  и  $(\pi-0, 0, +\infty)$  плоскости  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ . Только эти точки обладают указанным свойством.

Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по слою  $\Pi_{(0, \pi)}$  в точку.

Последняя задача в общей постановке очень сложна, а в области рассматриваемых параметров справедливо

**Предложение 7.4.** В области параметров  $I$  (ср. с результатами динамики плоскопараллельного движения, глава 5) замкнутых характеристик у систем вида (7.11)—(7.13) при условиях (0.8), (0.5) не существует.

Основным вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел. Данные сепаратрисы разделяют все фазовое пространство на области без положений равновесия. Ввиду последнего, фазовые портреты мгновенно достраиваются.

Ответ на последний вопрос требует рассмотрения ряда вспомогательных утверждений.

2. *Разбиение на траектории фазового пространства системы для первой области параметров.* Рассмотрим систему (7.11)—(7.13) в области параметров I:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \forall \alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}.$$

Будем исследовать вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

Следующее утверждение относится ко всему пространству параметров  $M^2$  и базируется на наличии трехмерной топографической системы Пуанкаре в полосе  $\Pi$ .

**Предложение 7.5.** *Устойчивые сепаратрисы в слое  $\Pi$  для точек (7.23) при  $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$  имеют в качестве  $\alpha$ -предельных множеств начало координат.*

**Предложение 7.6.** *Рассмотрим систему (7.11)—(7.13) в области параметров I. Пусть  $F(\alpha) \sin \alpha \geq 0$  в полосе  $\Pi$ . Тогда, если  $\frac{s(\alpha)}{m} \geq \frac{\sigma}{I} \bar{g}(\alpha)$ , где  $\bar{g}'(\alpha) = -2F(\alpha)$ ,  $\bar{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , то ТСП с центром в точке  $(\pi, 0)$  полностью лежит в области, ограниченной нетривиальной поверхностью контактов (НПК) (см. аналогичное предложение 2.2 для нетривиальной кривой контактов (НКК) на плоскости).*

Данное предложение формулируется и доказывается аналогично предложению из динамики плоскопараллельного движения твердого тела за тем исключением, что НПК, перенесенная в слой  $\Pi$ , имеет следующий вид:

$$2\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) = \frac{s(\alpha)}{m} + \sqrt{\frac{s^2(\alpha)}{m^2} + 4\sigma \frac{F(\alpha)}{I} \sin \alpha \left\{ \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} - \frac{\sigma F(\alpha)}{I \sin \alpha} \right\}}.$$

**Следствие.** Пусть выполнено условие (0.9). Тогда очевидно, что в области параметров  $I$  выполнено неравенство  $\frac{B}{t} \geq \sigma n_0^2 \cos \alpha$ ,  $\forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . При этом  $\bar{g}(\alpha) = AB \cos^2 \alpha$ . Таким образом, при  $F = F_0$  мы естественным образом попадаем в условия предложения 7.6.

**Предложение 7.7.** Пусть выполнены все условия предыдущих предложений. Тогда, по крайней мере в области значений параметров  $I$ , сепаратрисы, входящие в точки (7.23) при  $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$  в слое  $\Pi'$ , имеют в качестве  $\alpha$ -предельного множества точку  $(\pi, 0, 0)$ .

3. Топологическое строение типов фазовых портретов для первой области параметров. Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек (7.23) при  $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$  в слой  $\Pi$  и в слой  $\Pi'$ . Для этого дадим определение индексу сепаратрисного поведения (ИСП) для данной задачи.

**Определение.** ИСП (будем обозначать его  $isp$ ) называется число  $k \in N_0$ . По определению,  $isp = k$ , если сепаратрисы, выходящие из точек (7.23) при  $Z_2 < 1/2\sigma$  в слое  $\Pi$ , имеют в качестве  $\omega$ -предельного множества точки (7.23) при  $Z_2 > 1/2\sigma$ ,  $k \in N_0$ . При этом сепаратрисы огибают окружность (7.23) и уходят в область под окружностью (7.23)  $k$  раз (рис. 7.3 ( $k=0$ ), 7.4 ( $k=2$ )).

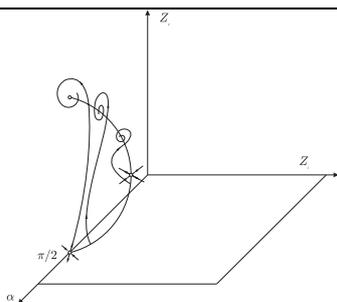


Рис. 7.3

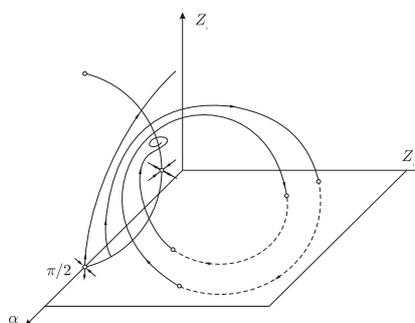


Рис. 7.4

**Теорема 7.1.** *Определение корректно, т.е. для любого  $isp=k$  из области определения возможно соответствующее поведение рассматриваемых сепаратрис.*

Теорема 7.1 доказывается методами теории монотонных векторных полей (см. главу 2). Монотонность понимается относительно параметра  $\mu^* = 2 \frac{s^*}{m n_0}$ ,  $s^* = \max_{\alpha \in R} |s(\alpha)|$  (ср. с аналогичными результатами из динамики плоскопараллельного движения, глава 5).

4. *Полная классификация фазовых портретов для первой области параметров динамической системы в трехмерном пространстве.* В силу теоремы 7.1, можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (7.11)—(7.13),

когда ее параметры пробегает область I. Как показано выше, таких портретов — бесконечно много.

Для проведения полной классификации портретов остается исследовать сепаратрисы, выходящие из точек (7.23) при  $Z_2 < \frac{1}{2\sigma}$  в слой  $\Pi'$ . Такие сепаратрисы имеют предельные множества из НПР. Появившаяся особая точка (НПР) в полупространстве  $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 > 0\}$  имеет седловой тип с одним притягивающим собственным направлением и двумя отталкивающими.

Необходимо сделать замечание о том, как точки из НПР вносят возможные изменения в свойства разбиения на траектории трехмерного фазового пространства.

Устойчивое собственное направление (точки из НПР) имеет в качестве  $\alpha$  — предельного множества точку  $(\pi, 0, 0)$ . Неустойчивые же направления, на которые натягивается целая «неустойчивая» плоскость (а также сепаратрисы, о которых говорится в последнем определении) имеют в качестве предельных множеств притягивающие точки (7.23) при  $Z_2 > \frac{1}{2\sigma}$ .

Видно, что седловые точки из НПР вносят в образующийся топологический тип трехмерного фазового портрета свои изменения, которые не влияют на тип портрета, описанный в определении. В нашем понимании топологические типы трехмерных фазовых портретов «кодирует» лишь индекс  $k = isp$ , который «отвечает» за другие сепаратрисные поверхности.

Таким образом и проводится полная классификация фазовых портретов системы для области параметров I.

Заметим, что многие утверждения данного параграфа справедливы и в более широких областях параметров.

*5. Некоторые выводы.* В заключении хотелось бы отметить общее свойство движения тела, которое носит формальный характер. Рассмотрим область параметров I. Ей соответ-

стает небольшой по сравнению с безразмерной силой безразмерный момент. В этой области при типичных начальных условиях в смысле меры за конечное достаточно большое время твердое тело стремится к экспоненциально устойчивому стационарному движению следующего вида: центр масс тела движется прямолинейно и равномерно, а тело вращается вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью, в направлении, перпендикулярном скорости движения центра масс. При этом скорость относительного движения при вращении больше (переносной) скорости центра масс.

В только что изложенном материале рассмотрен модельный вариант задачи о свободном пространственном торможении тела в среде. В нем проводится вспомогательный качественный анализ систем дифференциальных уравнений, описывающих данное движение для некоторой области ненулевой меры в пространстве параметров. На основе этого получено новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов, состоящее из бесчисленного множества неэквивалентных типов. При этом отсутствуют автоколебания, и при типичных начальных условиях траектории стремятся к асимптотически устойчивым стационарным режимам.

Важно также заметить, что режим прямолинейного поступательного торможения (описываемый условиями  $\alpha \equiv Z_1 \equiv Z_2 \equiv 0$ ) неустойчив «в целом», поскольку при любых начальных условиях, принадлежащих слою  $\Pi_{(0, \pi/2)}$ , фазовая траектория системы (7.11)—(7.14) в трехмерном фазовом пространстве покидает данный слой.

## **ГЛАВА 8. Некоторые задачи плоской динамики твердого тела, взаимодействующего со средой при наличии линейного демпфирования со стороны среды**

---

До сих пор рассматривалась такая нелинейная модель взаимодействия тела со средой, при которой в системе отсутствовало демпфирование со стороны среды (в линейном случае  $h = 0$  (см. введение и главу 1)), соответствующая тому, что сила сопротивления и ее момент зависели лишь от угла атаки. В данной главе переходим к учету дополнительного линейного демпфирующего воздействия со стороны среды.

На базе нелинейных уравнений исследуется устойчивость прямолинейного поступательного торможения при наличии линейного демпфирующего момента. Показано, что в рамках рассматриваемой модели в принципе могут возникнуть автоколебания, соответствующие предельным циклам, которые рождаются из слабого фокуса (известная бифуркация Андронова-Хопфа).

Проводится также качественный анализ некоторых нелинейных динамических систем, полученных выше, но при условии того, что в системе присутствует линейный демпфирующий момент. В зависимости от коэффициента демпфирования со стороны среды проводится топологическая классификация типичных фазовых портретов системы, рассмотренной на фазовом цилиндре квазискоростей. Показано, что при некоторых условиях в системе могут возникнуть устойчивые, а при некоторых и неустойчивые автоколебания.

Результаты, полученные в предыдущих главах, в основном опираются на главное условие относительно пары динамических функций  $(v_N, s)$ , – их зависимость лишь от угла атаки.

Настоящая глава посвящена изучению эффектов от влияния вращательной производной момента аэродинамических

сил по угловой скорости на движение самого тела. Учет такого влияния в общем случае сталкивается с серьезными трудностями, связанными со сложным характером зависимости момента аэродинамических сил от угловой скорости тела. Изучим для начала случай линейной зависимости величины  $y_N$  от угловой скорости тела с коэффициентом, зависящим от угла атаки.

**§ 46. СВОБОДНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ТЕЛА В СРЕДЕ  
ПРИ УЧЕТЕ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА**

1. *Условия экспоненциальной устойчивости прямолинейного поступательного торможения тела.* Вернемся к задаче о свободном плоскопараллельном торможении тела в среде. Наряду с имеющейся силой сопротивления предположим, что ордината точки приложения представляется в виде  $y_N(\alpha) - h' \frac{\Omega}{v}$ . При этом уравнение (0.3) примет вид

$$I\Omega' = F(\alpha)v^2 - h's(\alpha)\Omega v, \tag{8.1}$$

в котором  $h'$  – постоянный коэффициент. С учетом (8.1) соответствующие динамические уравнения, аналогичные (1.31), (1.32), примут следующий вид:

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \tag{8.2}$$

$$\alpha' = -\omega + \frac{\sigma}{I}F(\alpha)\cos\alpha + \sigma\omega^2\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{m}\sin\alpha - \frac{\sigma}{I}h'\omega s(\alpha)\cos\alpha, \tag{8.3}$$

$$\omega' = \frac{1}{I} F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega) - \frac{h'}{I} \omega, \quad (8.4)$$

где

$$\Psi(\alpha, \omega) = \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \sigma \omega^2 \cos \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha - \frac{\sigma}{I} h' \omega s(\alpha) \sin \alpha.$$

При  $h' = 0$  (см. главу 1) тривиальное решение независимой подсистемы (8.3), (8.4) экспоненциально неустойчиво.

При изучении прямолинейного поступательного торможения тела из эксперимента о входе в воду круговых цилиндров (см. введение и главу 1) было получено, что коэффициент  $h$  воздействия среды на тело имеет строго положительный знак, т.е. вносит в систему демпфирование. Поэтому в дальнейшем в основном будет рассмотрен случай, когда  $h_1 = h' s(0) > 0$ .

**Предложение 8.1.** *Если*

$$\frac{n_0^2}{I} = \frac{F'(0)}{I} > \frac{s^2(0)}{m^2} = \frac{B^2}{m^2}, \quad (8.5)$$

*то существует такое критическое значение  $h_1^* = I \left( \sigma n_0^2 + 2 \frac{B}{m} \right)$ , что при  $h_1 > h_1^*$  тривиальное решение системы (8.3), (8.4) экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим задачу о входе в воду круговых цилиндров (см. введение и главу 1). Условие наличия колебательной экспоненциальной устойчивости (8.5) принимает вид

$$\frac{D I \rho_{ж}}{m^2} < \frac{8k}{c_x \pi}, \quad (8.6)$$

а значения физических параметров цилиндров, при которых прямолинейное поступательное торможение в принципе может стать устойчивым, должно удовлетворять условию

$$h \frac{mD^2}{I} > 2 + k \frac{m\sigma D}{I}. \quad (8.7)$$

Для безразмерных параметров  $k, h$  воздействия воды на тело уже принята оценка  $k = h = 0,1$  (см. главу 1). Таким образом, условия (8.6) и (8.7) позволяют попытаться «сконструировать» твердое тело – круговой цилиндр, – для которого прямолинейное поступательное торможение может стать устойчивым. Для этого необходимо выбрать динамические параметры  $\sigma, D, I, m$  цилиндра, исходя из условий (8.6) и (8.7).

Последний факт, на первый взгляд, противоречит утверждению о том, что прямолинейное поступательное торможение однородных круговых цилиндров в воде неустойчиво. Динамические параметры самих цилиндров таковы, что неравенство (8.6) выполняется, а (8.7) – нет. Действительно, для круговых цилиндров, движущихся в воде ( $k = h = 0,1$ ), с равномерным распределением масс справедливо равенство

$$F_1(k, h, m, I, \sigma, D) \Big|_{k=h=0,1} = h \frac{mD^2}{I} - k \frac{m\sigma D}{I} - 2 \Big|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma, D),$$

правая часть которого с точностью до положительного множителя принимает следующее отрицательное значение:

$$-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2,$$

что соответствует экспоненциальной неустойчивости прямолинейного поступательного торможения (здесь учитывается, что  $I = m \left( \frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16} \right)$ ).

Проследим формальную зависимость функции  $F_1$  от параметров  $k$  и  $h$ , которые, видимо, определяются самой средой. Возможно, что параметры  $k$  и  $h$  возрастают с вязкостью самой среды. При этом, к примеру, уже при  $k = h > \frac{2\sqrt{5}-4}{3} \cong 0,157$  су-

ществуют такие динамические параметры однородных круговых цилиндров, при которых функция  $F_1$  становится положительной, что свидетельствует о возможной устойчивости прямолинейного поступательного торможения.

2. *О движении круговых цилиндров с полостью.* Как было показано выше, прямолинейное поступательное торможение сплошных однородных круговых цилиндров массы  $m$  неустойчиво. Для возможного достижения такой устойчивости рассмотрим задачу о свободном торможении однородного кругового цилиндра, имеющего внутри себя полость. При этом момент инерции цилиндра с полостью относительно поперечной оси геометрической центра симметрии цилиндра равен

$$I = m \left( \frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16} \right) - m_1 \rho^2, \text{ где } \rho - \text{ центральный радиус инерции}$$

мыслимого твердого тела, заполняющего полость мыслимой массы  $m_1 = m - m'$ . Здесь  $m'$  – масса «оставшегося» твердого тела «однородный цилиндр без своей внутренней части».

Тогда, к примеру, если цилиндрическая полость, находящаяся строго «в центре «всеобъемлющего» цилиндра (и она не меняет внешней геометрии, но меняет геометрию масс), имеет диаметр  $D_1 = k_1 D$  и полувысоту  $\sigma_1 = k_2 \sigma$  ( $0 < k_1, k_2 < 1$ ), то при

$$(D^2 - \sigma D)(1 - k_1^2 k_2) > 20 \left[ \frac{\sigma^2}{3} (1 - k_1^2 k_2^3) + \frac{D^2}{16} (1 - k_1^4 k_2) \right]$$

прямолинейное поступательное торможение будет экспоненциально устойчиво (здесь учитывается условие  $k = h = 0, 1$ ).

3. *Возникновение автоколебаний в силу бифуркации рождения цикла Андронова-Хопфа.* Рассмотрим вопрос об устойчивости тривиального решения системы (8.3), (8.4) на границе области устойчивости при критическом значении параметра  $h_1^*$  демпфирования со стороны среды. Введем обозначения, аналогичные обозначениям главы 2, а именно,

$$In = \frac{\sigma}{I} f_3 + 4 \frac{s_2}{m} - 2 \frac{B}{m} - 5\sigma n_0^2 + 8\sigma A_1^2 + 8\sigma \omega_0^2 + 4\sigma A_1 \left( \sigma n_0^2 + 2 \frac{B}{m} \right),$$

$$s_2 = s''(0), f_3 = F'''(0), A_1 = \frac{\sigma n_0^2 + \frac{B}{m}}{1 + \sigma^2 n_0^2 + 2\sigma \frac{B}{m}}, \omega_0 = \frac{\sqrt{n_0^2 - \frac{B^2}{m^2}}}{1 + \sigma^2 n_0^2 + 2\sigma \frac{B}{m}},$$

$$n_0^2 = \frac{F'(0)}{I}, B = s(0).$$

**Предложение 8.2.** Если  $In < 0$ , то начало координат системы (8.3), (8.4) при  $h_1 = h_1^*$  асимптотически устойчиво, если же  $In > 0$ , – неустойчиво.

Значение индекса  $In$  позволяет судить об устойчивости слабого фокуса в начале координат системы (8.3), (8.4) и тем самым делать вывод о возникновении автоколебаний в системе.

**Предложение 8.3.** Если  $In < 0$ , то существует  $\underline{h}_1$  такое, что при  $0 < \underline{h}_1 < h_1 < h_1^*$  в системе (8.3), (8.4) в полосе  $\Pi$  имеется устойчивый предельный цикл, который растет с уменьшением  $h_1$  от  $h_1^*$  до  $\underline{h}_1$ . Если же  $In > 0$ , то существует  $\bar{h}_1$  такое, что при  $h_1^* < h_1 < \bar{h}_1$  у системы (8.3), (8.4) в полосе  $\Pi$  имеется неустойчивый предельный цикл, который растет с ростом  $h_1$  от  $h_1^*$  до  $\bar{h}_1$ .

Индекс  $In$  зависит от высших производных функций  $F$  и  $s$  воздействия среды, знак которых нам, вообще говоря, неизвестен. Если принять выполнение условий (0.9) и (0.7), то индекс  $In$  может быть отрицателен, что свидетельствовало бы о рождении устойчивого предельного цикла при  $h_1 < h_1^*$ . Для проверки последнего факта необходимо провести эксперимент взаимодействия с водой, к примеру, однородного кругового цилиндра с такими геометрическими и динамическими пара-

метрами, при которых функция  $F_2$  наиболее близко подходит своими значениями к нулю слева.

Итак, в принципе динамические параметры твердого тела могут быть таковы, что, несмотря на экспоненциальную неустойчивость прямолинейного поступательного торможения тела, его угловые колебания возле данного торможения могут быть равномерно ограничены по амплитуде. Другими словами, каково бы не было достаточно малое возмущение прямолинейного поступательного торможения по углу атаки и угловой скорости, угловые колебания ограничены по амплитуде устойчивыми угловыми автоколебаниями, что и является положительным ответом на главный вопрос нелинейного анализа при исследовании системы (8.3),(8.4).

#### **§ 47. ДВИЖЕНИЕ В СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕКОТОРОЙ СВЯЗИ И ЛИНЕЙНОГО ДЕМПИРУЮЩЕГО МОМЕНТА**

---

В главе 4 проведено полное исследование динамической системы (1.17) на фазовом цилиндре, отделившейся от общей системы (0.1)—(0.3). Система (1.17) определена с помощью пространства функций  $\Phi$  и имеет фазовый портрет, не меняющий своего топологического типа при варьировании функции  $F$  вдоль всего класса  $\Phi$ , поэтому в дальнейшем в главе 4 проведено интегрирование кинематических уравнений проведено для системы (1.18) частного вида.

*1. Линейный по угловой скорости момент со стороны среды.* Рассмотрим задачу о движении тела в среде при условии (1.14) (см. главу 4). Допустим, что наряду с силами сопротивления и тяги на тело действует линейный по углу-

вой скорости демпфирующий момент, который меняет лишь угловое ускорение. Предположим, что изменение угла атаки и угловой скорости тела при условии (0.9) дается следующей системой:

$$\alpha^* = \Omega + A_1 \sin \alpha, \quad \Omega^* = -A_2 \sin \alpha \cos \alpha - h_2 \Omega. \quad (8.8)$$

При  $h_2 > 0$  дополнительный момент вносит в систему диссипацию, а при  $h_2 < 0$  – он только усиливает эффект раскачки угловых колебаний тела. Но, как было указано выше, в соответствии с экспериментом, знак  $h_2$  по-прежнему выбираем положительным.

Система частного вида (1.18) сохраняет все топологические особенности строения фазового портрета общей системы (1.17). А вот система (8.8) не обладает таким свойством по отношению к системе (2.2) по следующей причине. В силу леммы 2.1, пространство векторных полей систем вида (2.2) делится, по крайней мере, на два обширных класса, в каждом из которых соответствующий фазовый портрет имеет предельный цикл определенного типа устойчивости. По мере исследования системы (2.2) будет указано, для каких функций  $F \in \Phi$  проводится качественный анализ.

2. *Точки покоя и соответствующие им стационарные движения.* Начнем глобальный качественный анализ динамической системы (2.2) при условии (0.8) на фазовой плоскости квазискоростей.

Множество точек покоя системы (2.2) (или системы частного вида (8.8)), которому соответствуют стационарные движения, разбивается на следующие части.

В полосе  $\Pi$  (или  $\Pi'$ ) существуют изолированные особые точки, которые находятся из системы

$$\{\alpha \bmod \pi, \Omega = 0\}.$$

Эти особые точки соответствуют прямолинейным поступательным движениям тела с постоянной скоростью, перпендикулярной плоской пластине.

У системы (2.2) существуют особые точки

$$\left( \pm \arccos\left(\frac{A_1 h}{A_2}\right), \pm \frac{A_2}{h} F\left(\arccos\left(\frac{A_1 h}{A_2}\right)\right) \right), \quad (8.9)$$

если и только если  $0 < h < \frac{A_2}{A_1}$ . При выполнении последнего

условия они появляются лишь в полосе П.

Если и только если  $-\frac{A_2}{A_1} < h < 0$ , то, в свою очередь, в поло-

се П' (и только в ней) появляются точки

$$\left( \pi \pm \arccos\left(-\frac{A_1 h}{A_2}\right), \pm \frac{A_2}{h} F\left(\arccos\left(-\frac{A_1 h}{A_2}\right)\right) \right), \quad (8.10)$$

Механическая интерпретация особых точек (8.9) и (8.10) следующая: тело совершает движение в среде с постоянным углом атаки, не равным 0 или  $\pi$ , с постоянной угловой скоростью. При этом, очевидно, центр пластины твердого тела движется по окружности, поскольку его декартовы координаты  $\{x, y\}$  представляются следующим образом:

$$x(t) = \frac{v}{\Omega_0} \{ \sin \alpha_0 - \sin(\alpha_0 + \Omega_0 t) \},$$

$$y(t) = \frac{v}{\Omega_0} \{ \cos(\alpha_0 + \Omega_0 t) - \cos \alpha_0 \},$$

где  $(\alpha_0, \Omega_0)$  – особые точки вида (8.9) или (8.10) (можно считать, что начальный угол отклонения тела от оси абсцисс и начальные декартовы координаты равны 0). Уравнение траектории движения имеет вид уравнения окружности с центром

$$\left( \frac{v}{\Omega_0} \sin \alpha_0, -\frac{v}{\Omega_0} \cos \alpha_0 \right).$$

3. Симметрии векторного поля системы на фазовом цилиндре квазискоростей. Векторное поле системы (2.2) при условии (0.8) обладает следующими видами симметрий:

а) Центральной симметрией. Такая симметрия возле точек  $(\pi k, 0)$ ,  $k \in Z$ , возникает по причине того, что векторное поле системы в координатах  $(\alpha, \Omega)$  меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\Omega \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \Omega \end{pmatrix}.$$

б) Некоторой расширенной зеркальной симметрией (НРЗС). Такая симметрия в пространстве  $S^1 \{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^2 \{\Omega, h\}$  относительно плоскостей

$\left\{ (\alpha, \Omega, h) \in R^3 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi i, i \in Z \right\}$ , возникает

по причине того, что  $\alpha$  – составляющая векторного поля системы в координатах  $(\alpha, \Omega)$  сохраняется при замене

$$\begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i - \alpha \\ \Omega \\ -h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi/2 + \pi i + \alpha \\ \Omega \\ h \end{pmatrix},$$

а  $\Omega$  – составляющая меняет знак.

Следствием НРЗС является НЗС векторного поля системы (2.2) (см. главу 4) на фазовом цилиндре квазискоростей, если и только если  $h = 0$ .

4. Замечание об интегрируемости системы. У системы (2.2) при некоторых условиях существуют притягивающие и отталкивающие не только точки покоя, но и предельные циклы. Таким образом, в силу следствия из теоремы 4.1, у системы (2.2) если и существует первый интеграл на всем фазовом

цилиндре, то он является разрывной функцией не только в отталкивающих и притягивающих точках, но и на целых замкнутых кривых.

**§ 48. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ  
ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА  
В СРЕДЕ ПРИ УЧЕТЕ ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА**

Как указывалось выше, в отличие от системы (1.17), система (2.2) при  $h \neq 0$  при разных функциях  $F \in \Phi$  может иметь кординально различный топологический тип своего фазового портрета. Различия в топологических типах портретов на цилиндре могут появляться при условии, если  $F_1'''(0) + 3F_1'(0) > 0$  для портрета системы (2.2) с одной функцией  $F_1 = F_1(\alpha) \in \Phi$  (рождается неустойчивый цикл при  $h > -A_1 F_1'(0)$ ) и если  $F_1'''(0) + 3F_1'(0) < 0$  для портрета системы (2.2) с другой функцией  $F_2 = F_2(\alpha) \in \Phi$  (рождается устойчивый цикл при  $h < A_1 F_1'(0)$ ). В данном случае необходимо конкретно выделять тот подкласс функций из класса  $\Phi$ , для которого исследуется топологический тип фазовых портретов систем, определяемых с помощью такого подкласса.

*1. Топологическая классификация точек покоя системы.* Проведем типичную топологическую классификацию особых точек  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  системы (8.8) на цилиндре, поскольку полученные далее соотношения на постоянн  $A_1$  и  $A_2$  для нее отличаются от аналогичных соотношений для системы (2.2) заменой  $A_1$  на  $A_1 F_1'(0)$  и  $A_2$  на  $A_2 F_1'(0)$ .

Характеристические (вообще говоря, комплексные) корни системы (8.8), линеаризованной возле точки  $(0, 0)$ , имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(A_1 - h_2 \pm [(h_2 + A_1)^2 - 4A_2]^{1/2}),$$

а бифуркационное множество состоит из следующих постоянных:

$$\left\{ A_1, -\frac{A_2}{A_1}, -A_1 + 2\sqrt{A_2}, -A_1 - 2\sqrt{A_2} \right\}.$$

Для точки  $(\pi, 0)$  имеем аналогичные выражения при замене  $A_1$  на  $-A_1$ .

Точки покоя (8.9) и (8.10) являются седлами для любого  $h \in \left( -\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_2}{A_1} \right)$ .

Аналогичное уравнение для системы (2.2) отличается от предыдущего ненулевой мультипликативной постоянной.

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие обозначения и аббревиатуры:  $\xi = \frac{A_2}{A_1}$ ,  $\eta_{\pm}^{\pm} = A_1 \pm 2\sqrt{A_2}$ ,

$\eta_{\pm}^{\pm} = -A_1 \pm 2\sqrt{A_2}$ , С – седло, УУ – устойчивый узел, НУ – неустойчивый узел, УФ – устойчивый фокус, НФ – неустойчивый фокус, УЦ – устойчивый предельный цикл, НЦ – неустойчивый предельный цикл, ФП – фазовый портрет.

Классификация точек покоя  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$  приведена в таблицах 1-4 и соответствует следующим четырем случаям:

*Случай 1* (табл. 1):

$$-\xi < \eta_{-}^{-} < \eta_{+}^{-} < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_{-}^{+} < \eta_{+}^{+} < \xi.$$

*Случай 2* (табл. 2):

$$\eta_{-}^{-} < -\xi < \eta_{+}^{-} < -A_1 < 0 < A_1 < \eta_{-}^{+} < \xi < \eta_{+}^{+}.$$

*Случай 3* (табл. 3):

$$\eta_{-}^{-} < -A_1 < -\xi < \eta_{+}^{-} < 0 < \eta_{-}^{+} < \xi < A_1 < \eta_{+}^{+}.$$

Случай 4 (табл. 4):

$$\eta_-^- < -A_1 < \eta_-^+ < -\xi < 0 < \xi < \eta_+^- < A_1 < \eta_+^+.$$

Таблица 1

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		(0,0)	( $\pi$ ,0)	
1	$(-\infty, -\xi)$	НУ	С	6
2	$(-\xi, \eta_-^-)$	НУ	НУ	13*
3	$(\eta_-^-, \eta_+^-)$	НФ	НУ	13*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	13
5	$(A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-9 11
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-8 10
7	$(A_1, \eta_+^+)$	УФ	УФ	12
8	$(\eta_-^+, \eta_+^+)$	УУ	УФ	12*
9	$(\eta_+^+, \xi)$	УУ	УУ	12*
10	$(\xi, +\infty)$	С	УУ	7

Таблица 2

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		(0,0)	( $\pi$ ,0)	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	6
2	$(\eta_-^-, -\xi)$	НФ	С	6*
3	$(-\xi, \eta_+^-)$	НФ	НУ	13*
4	$(\eta_+^-, -A_1)$	НФ	НФ	13
5	$(-A_1, 0)$	НФ	УФ	НЦ-9 11

§ 48. Топологическое строение некоторых фазовых портретов...

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		$(0,0)$	$(\pi,0)$	
6	$(0, A_1)$	НФ	УФ	УЦ-8 10
7	$(A_1, \eta_+^+)$	УФ	УФ	12
8	$(\eta_+^+, \xi)$	УУ	УФ	12*
9	$(\xi, \eta_+^+)$	С	УФ	7*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	7

Таблица 3

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		$(0,0)$	$(\pi,0)$	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	6
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	6*
3	$(-A_1, -\xi)$	НФ	С	6*
4	$(-\xi, \eta_+^-)$	НФ	УУ	11*
5	$(\eta_+^-, 0)$	НФ	УФ	11
6	$(0, \eta_+^+)$	НФ	УФ	10
7	$(\eta_+^+, \xi)$	НУ	УФ	10*
8	$(\xi, A_1)$	С	УФ	7*
9	$(A_1, \eta_+^+)$	С	УФ	7*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	7

Таблица 4

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		$(0,0)$	$(\pi,0)$	
1	$(-\infty, \eta_-^-)$	НУ	С	6
2	$(\eta_-^-, -A_1)$	НФ	С	6*

№ под-сл.	Диапазон изменения $h$	Тип точки покоя		Номер фигуры
		$(0,0)$	$(\pi,0)$	
3	$(-A_1, \eta_-^+)$	НФ	С	6*
4	$(\eta_-^+, -\xi)$	НУ	С	6
5	$(-\xi, 0)$	НУ	УУ	11*
6	$(0, \xi)$	НУ	УУ	10*
7	$(\xi, \eta_+^-)$	С	УУ	7
8	$(\eta_+^-, A_1)$	С	УФ	7*
9	$(A_1, \eta_+^+)$	С	УФ	7*
10	$(\eta_+^+, +\infty)$	С	УУ	7

2. О траекториях, уходящих на бесконечность на фазовой плоскости. У системы вида (2.2) при выполнении условия (0.8) при любом  $h \in R$  не существует фазовой траектории, имеющей горизонтальную или вертикальную асимптоты на фазовой плоскости в окрестности бесконечно удаленной точки (для этого используем методы § 8).

**Лемма 8.1.** У системы (2.2) ( $\omega = \Omega$ ) при условии (0.8) для любого  $h \neq 0$  существуют траектории, уходящие на бесконечность и стремящиеся к некоторым прямым семейства, задаваемого линейной дифференциальной формой

$$d\Omega + hd\alpha = 0.$$

На фазовом цилиндре существует одна прямая (с точностью до центральной симметрии относительно начала координат), являющаяся асимптотой для траекторий, уходящих на бесконечность.

**Лемма 8.2.** Бесконечно удаленная точка является притягивающим (при  $h > 0$ ) и отталкивающим (при  $h < 0$ ) сложным узлом.

**Следствие.** При  $h < 0$  (при  $h > 0$ ) фазовые траектории системы (2.2) на плоскости, имеющие в качестве  $\omega -$

**§ 48. Топологическое строение некоторых фазовых портретов...**

предельного ( $\alpha$  – предельного) множества бесконечно удаленную точку, имеют конечную меру.

3. *О замкнутых траекториях различного топологического типа на фазовом цилиндре.* Рассмотрим вопрос о существовании замкнутых траекторий различного топологического типа на фазовом цилиндре для систем вида (2.2). Для начала исследуем наличие траекторий, не стягиваемых по фазовому цилиндру в точку, т.е. траекторий, охватывающих фазовый цилиндр.

**Лемма 8.3.** *При  $h \neq 0$  у систем вида (2.2) при условии (0.8) не существует замкнутой фазовой траектории, не стягиваемой по фазовому цилиндру в точку.*

Доказательство леммы представляет самостоятельный интерес, поэтому приведем его полностью. Системе (2.2) сопоставим систему

$$\alpha' = u, \quad u' = A_2 F(\alpha) + A_1 u \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha} - h \left( u - A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \right), \quad (8.11)$$

полученную неособым преобразованием, заданным в виде

$$u = \Omega + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha},$$

переводящим искомые фазовые траектории системы (2.2) в аналогичные траектории системы (8.11).

Систему (8.11) при  $h=0$  обозначим через (8.11'). Характеристическая функция для систем (8.11) и (8.11') имеет вид

$$hu \left( u - A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \right). \quad (8.12)$$

Она обращается в нуль в верхней полуплоскости  $\{(\alpha, u) \in R^2 : u > 0\}$  лишь на кривой  $\{(\alpha, u) \in R^2 : u = A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}\}$ .

Фазовый портрет системы (8.11') изображен на ил. 1. У системы (8.11') существует траектория, огибающая фазовый цилиндр и проходящая через точку  $\left(-\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)$ , при любом  $\varepsilon > 0$ .

Существует также ключевая сепаратриса (см. главу 4), выходящая из точки  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  и входящая в точку  $\left(3\frac{\pi}{2}, 0\right)$ . Докажем, что ключевые сепаратрисы ограничивают область (см. ил. 1), содержащую кривую контактов векторных полей систем (8.11) и (8.11').

Действительно, ключевая сепаратриса пересечет прямую  $\{(\alpha, u) \in R^2 : \alpha = 0\}$  в верхней полуплоскости в точке  $(0, u^*)$ , где

$$u^* = \int_{-\pi/2}^0 \frac{A_2 F(\alpha) + A_1 U(\alpha) \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha}}{U(\alpha)} d\alpha, \quad (8.13)$$

и  $u = U(\alpha)$  – уравнение ключевой сепаратрисы, заданной в виде графика в верхней полуплоскости.

Правая часть (8.13) строго больше  $W_1$ , где

$$W_1 = A_1 \int_{-\pi/2}^0 \frac{d F(\alpha)}{d\alpha \cos \alpha} d\alpha = -A_1 F' \left( \frac{\pi}{2} \right).$$

Выполнено неравенство

$$\int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 F(a)}{U(a)} da \geq 0, \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

поскольку  $U(\alpha) \geq u_1(\alpha)$ , где  $u = u_1(\alpha)$  – уравнение сепаратрисы системы (8.11') при  $A_1 = 0$ , выходящей из  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  и входящей в  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .

Тогда

$$-A_1 F' \left( \frac{\pi}{2} \right) + \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 F(a)}{U(a)} da + A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} > A_1 \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}, \quad \forall \alpha \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

а, следовательно, при таких  $\alpha$

$$U(\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\alpha} \frac{A_2 F(a) + A_1 U(a) \frac{d}{d\alpha} \frac{F(a)}{\cos a}}{U(a)} da > A_1 \frac{F(a)}{\cos a}.$$

В полосе же  $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)}$  кривая контактов лежит лишь в замыкании нижней полуплоскости, что и доказывает лемму, поскольку искомая замкнутая траектория, огибающая фазовый цилиндр, вынуждена лежать выше ключевой сепаратрисы в верхней полуплоскости.

Дальнейшую часть этого пункта посвятим исследованию траекторий, стягиваемых по цилиндру в точку, в частности, изучению возможных предельных циклов на плоскости.

Заметим, что в силу лемм 2.1 и 2.2, у систем вида (2.2) при некоторых условиях существуют единственные предельные циклы либо в полосе  $\Pi$ , либо в  $\Pi'$ . При этом условие 3) леммы 2.1, в принципе, является лишним, поскольку в силу леммы 2.6, кривые контактов векторных полей систем (2.2) и (2.2') имеют действительные ветви, лежащие при  $h \leq 0$  в полосе  $\Pi'$ , а при  $h \geq 0$  — в полосе  $\Pi$ .

В силу леммы 2.1, пространство  $\Phi$  разбивается по крайней мере на две части (каждая из которой положительной меры), отвечающие рождению цикла разной устойчивости. Первая часть

$$CH1 = \{F \in \Phi : F(\alpha) < F'(0) |\alpha| \cos \alpha, \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon), \alpha \neq 0\}$$

соответствует рождению устойчивого цикла слева от значения  $A_1 F'(0)$ , а вторая часть

$$CH2 = \{F \in \Phi: F(\alpha) > F'(0)|\alpha| \cos \alpha, \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon), \alpha \neq 0\}$$

– рождению неустойчивого цикла справа от  $-A_1 F'(0)$  ( $\varepsilon$  – достаточно мало). Рассмотрим, к примеру, подкласс  $CH1$  функций класса  $\Phi$ . Очевидно, что  $F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in CH1$  ( $A, B > 0$ ).

**Лемма 8.4.**

Если  $F \in CH1$ , то в достаточно малой окрестности начала координат у систем вида (2.2) на фазовой плоскости при  $h > A_1 F'(0)$  не существует замкнутой фазовой характеристики системы (2.2).

Аналогичная лемма справедлива для системы (2.2) при условии  $h < -A_1 F'(0)$ , когда  $F \in CH2$ .

**Следствие 1.** Если  $F'(0)$  – глобальный максимум функции  $\frac{d F(\alpha)}{d \alpha \cos \alpha}$  при  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , то замкнутых кривых, составленных из траекторий систем вида (2.2), на фазовой плоскости не существует при любом  $h > A_1 F'(0)$ .

**Следствие 2.** Находясь в условиях следствия 1, можно утверждать, что существует  $\underline{h} > 0$  такое, что единственный устойчивый предельный цикл у систем вида (2.2) в полосе  $\Pi$  существует тогда и только тогда, когда  $h \in (\underline{h}, A_1 F'(0))$ .

**Следствие 3.** В силу последнего следствия, а также НРЗС, существует  $\bar{h} < 0$  такое, что единственный неустойчивый предельный цикл у систем вида (2.2) в полосе  $\Pi'$  существует тогда и только тогда, когда  $h \in (-A_1 F'(0), \bar{h})$ .

4. Топологическая классификация фазовых портретов системы для некоторого подмножества допустимых функций. Для завершения классификации типичных фазовых портретов системы (8.8) необходимо исследовать поведение сепаратрис имеющих гиперболических седел. Для краткости

#### **§ 49. Сравнения некоторых классов движений тела в среде...**

изложения опустим данное исследование и приведем сводку окончательных результатов по устройству фазового цилиндра системы (8.8).

Для случаев 1.1, 1.10, 2.1, 2.2, 2.9, 2.10, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, и только для них, положения равновесия (8.9) и (8.10) отсутствуют.

Информация о соответствии подслучаев для четырех случаев 1, 2, 3, 4 фазовым портретам показана в табл. 1—4. Звездочкой помечены портреты, которые различаются лишь топологическим типом некоторых положений равновесия (например, вместо узла имеется фокус той же устойчивости, и наоборот), но являются (абсолютно) грубыми.

Проведенная классификация грубых фазовых портретов для некоторой подобласти пространства параметров позволяет сделать вывод о многообразии различных неэквивалентных топологических типов портретов системы (8.8) при  $h_2 \neq 0$ .

После проведения исследования устройства фазового цилиндра системы (8.8) для получения конкретного движения тела на плоскости необходимо дополнительное интегрирование кинематических соотношений.

#### **§ 49. СРАВНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА В СРЕДЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ И НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА**

Проследим изменение глобальной топологической структуры фазовых портретов нелинейных систем, описывающих классы плоскопараллельных движений твердого тела в среде, при добавлении дополнительного воздействия со стороны среды – линейного демпфирования.

Для начала рассмотрим задачу о движении тела при условии постоянства скорости центра пластины при отсутствии демпфирования со стороны среды (см. главу 4). Расположение траекторий на плоскости квазискоростей  $(\alpha, \Omega)$  для этого случая описывается системой (1.17) и показано на ил. 2 ( $\alpha \rightarrow -\alpha$ ).

*1. Общая характеристика траекторий движения тела на плоскости при отсутствии демпфирования со стороны среды.* В главе 4 проведено качественное интегрирование кинематических соотношений для определения положения тела на плоскости.

Кратко отметим некоторые отличительные особенности расположения траекторий системы (1.17) на фазовом цилиндре  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$ , соответствующие некоторым отличительным классам движения тела на плоскости.

*1. Стационарные движения, соответствующие точкам покоя, пока носят формальный смысл.* Наряду с прямолинейными поступательными движениями тела, перпендикулярными плоской пластине, существуют стационарные вращения с постоянной угловой скоростью (с углом атаки, равным  $\pi/2$ ) вокруг точки  $W$ , лежащей на прямой, проходящей через центр масс и центр пластины (в частности, точка  $W$  может быть бесконечно удалена). Наличие таких стационарных движений сталкивается с принципиальными противоречиями следующего характера: противоположные края пластинки «разрезают» среду в разных направлениях. При этом имеется и сопротивление среды, и момент ее сопротивления. Причина этого противоречия состоит в том, что пока в рассматриваемой нелинейной динамической модели не учитывалось влияние вращательных производных момента по угловой скорости.

*2. Замкнутые траектории на фазовом цилиндре.* На фазовом цилиндре  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$  у системы (1.17) не существует замкнутых кривых, стягиваемых по цилиндру в точ-

ку, в частности, не существует предельных циклов на плоскости  $R^2\{\alpha, \Omega\}$ .

У системы (1.17) существует континуум замкнутых фазовых характеристик, не стягиваемых по цилиндру в точку, т.е. огибающих фазовый цилиндр.

3. Наличие колебательной и вращательной областей. В силу предыдущего пункта (см. также главу 4), фазовый цилиндр системы (1.17) является замыканием двух областей, в каждой из которых траектории имеют свои предельные множества.

В колебательной области (см. ил. 2) почти все траектории «выходят» из отталкивающих точек и «входят» в притягивающие. Колебательная область имеет конечную площадь на фазовом цилиндре.

Вращательная область сплошь заполнена периодически траекториями, являющимися своими же предельными множествами, и имеет бесконечную площадь на фазовом цилиндре.

Свойство ограниченности плоских движений тела, соответствующих колебательной и вращательной областям на фазовом цилиндре квазискоростей, является обратным к свойству ограниченности самих областей (см. главу 4). Действительно, компактной колебательной области соответствуют неограниченные плоские движения тела, а неограниченной вращательной области – движения, заполняющие компактные кольцеобразные области.

А теперь проследим изменение структуры расположения фазовых траекторий при наличии линейного демпфирования.

3. *Характеристика некоторых траекторий тела на плоскости при наличии линейного демпфирования.* Отметим основные отличительные особенности расположения траекторий системы (8.8) на фазовом цилиндре  $\{(\alpha, \Omega) \in R^2 : \alpha \bmod 2\pi\}$  для случая  $h_2 > 0$ , который, как указано выше, выбран в соответствии с экспериментом (см. введение и главу 1).

1. Стационарные движения тела с конечным углом атаки, меньшим  $\pi$ . Вместе с прямолинейными поступательными движениями с постоянной скоростью, которые имеются и при  $h_2 = 0$ , у системы (8.8) при некоторых условиях имеются седла, лежащие в полосе  $\Pi$  (ил. 8, 10, 12). Они соответствуют стационарным движениям следующего вида: центр пластины тела движется по окружности с центром в фиксированной точке плоскости; при этом само тело движется с постоянной угловой скоростью и постоянным углом атаки, меньшем  $\pi/2$  (см. § 48).

Заметим, что при  $h_2 \neq 0$  устраняется принципиальное противоречие, связанное с аналогичным стационарным движением при  $h_2 = 0$ , описанным в предыдущем пункте.

2. Замкнутые траектории на фазовом цилиндре. При  $h_2 \neq 0$  у системы (8.8) на фазовом цилиндре отсутствуют замкнутые характеристики, огибающие фазовый цилиндр, что соответствует принципиальному отсутствию длиннопериодических и устойчивых по Пуассону плоских траекторий центра  $D_1$  пластины тела в ограниченных областях плоскости  $R^2\{x, y\}$ .

Как видно из главы 2, у системы (8.8) при  $h_2 > 0$  в полосе  $\Pi$  при некоторых условиях могут возникнуть устойчивые предельные циклы, соответствующие устойчивым автоколебаниям следующего вида: тело совершает ограниченные по амплитуде плоские угловые колебания вокруг некоторой асимптоты, уходя на бесконечность. Угол атаки при этом лежит на интервале  $(0, \pi/2)$ .

Интересно проследить формальную асимптотику размера устойчивого предельного цикла от параметра  $h_2$ . При конечном  $h_2 = A_1$  устойчивый предельный цикл появляется, с уменьшением  $h_2$  от  $A_1$  до некоторого положительного значения  $\underline{h}_2$  цикл увеличивается в своих размерах как  $\sqrt{|A_1 - h_2|}$ , а при  $h_2 = \underline{h}_2$  — исчезает.

3. *Области притяжения на фазовом цилиндре.* Система (8.8) при  $h_2 \neq 0$  становится диссипативной системой с ненулевым средним. Как следствие этого у ее фазового цилиндра пропадает какое-либо распределение на колебательную и вращательную области. А именно, почти весь фазовый цилиндр притягивается устойчивыми особыми точками и предельными циклами. Действительно, в случае, показанном на ил. 7, 10, видно, что устойчивая особая точка  $(\pi, 0)$  притягивает почти весь фазовый цилиндр. На ил. 8 точка  $(\pi, 0)$  и устойчивый предельный цикл также притягивают почти весь цилиндр, а в случае, показанном на ил. 12, почти весь фазовый цилиндр является областью притяжения для двух устойчивых точек –  $(0, 0)$  и  $(\pi, 0)$ .

Если говорить о характере плоских движений твердого тела «в целом» при  $h_2 > 0$ , то главное отличительное свойство для почти всех траекторий таково: *при почти всех начальных условиях твердое тело уходит на бесконечность, в отличие от классов плоских движений тела, рассматриваемых без учета демпфирования со стороны среды.*

4. *Некоторые выводы.* Данная глава явилась первым этапом исследования движения тела в среде при учете демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

Для однородных круговых цилиндров прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах таких цилиндров. Это связано, по-видимому, с движением цилиндров именно в воде, когда демпфирование со стороны среды незначительно, что не позволяет говорить об устойчивости прямолинейного поступательного торможения. А вот для цилиндров, имеющих

## **Глава 8. Некоторые задачи плоской динамики твердого тела...**

---

внутри себя полость, при некоторых условиях возможно достижение упомянутой устойчивости.

Учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний. Причем для круговых цилиндров с полостью в принципе возможно возникновение и устойчивых, и неустойчивых автоколебаний.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

---

Неустойчивость простейшего движения тела – прямолинейного поступательного торможения – используется в методических целях, а именно, для определения неизвестных параметров воздействия среды на твердое тело в условиях квазистационарности.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведенный в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твердое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что пара динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра – угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, носят характер систем с переменной диссипацией. Поэтому появляется необходимость создания методики исследования таких систем.

Вообще, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой, – как раз та область, где обычно возникают либо системы с переменной диссипацией с ненулевым средним, либо системы, в которых потеря энергии в среднем за период может

## **Заключение**

---

обращаться в нуль. В работе получена такая методика, благодаря которой удастся до конца аналитически исследовать модельные задачи о плоскопараллельном и пространственном движении твердого тела.

При качественном описании взаимодействия тела со средой по причине использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определенный разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем. При этом многие из рассматриваемых систем получают просто (абсолютно) грубыми по Андронову-Понтрягину в обычном смысле.

Весь спектр результатов, найденных при простейшем предположении об отсутствии демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых существовали бы автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения.

Заключительная часть работы открывает первый этап исследования движения тела в среде при учете демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела *в принципе может стать устойчивым*.

Таким образом, для однородных круговых цилиндров прямолинейное поступательное торможение неустойчиво при любых динамических и геометрических параметрах, что, по-видимому, связано с движением цилиндров именно в воде. А вот для цилиндров, имеющих внутри себя полость, при некоторых условиях в принципе возможно достижение устойчивости прямолинейного поступательного торможения.

Поэтому учет демпфирующего воздействия со стороны среды на твердое тело при некоторых условиях приводит к

## **Заключение**

---

положительному ответу на *главный вопрос: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.*

Данная книга в том числе открывает новый цикл исследовательских работ по нелинейному анализу движения тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности при учете демпфирования со стороны среды.

## Иллюстрации

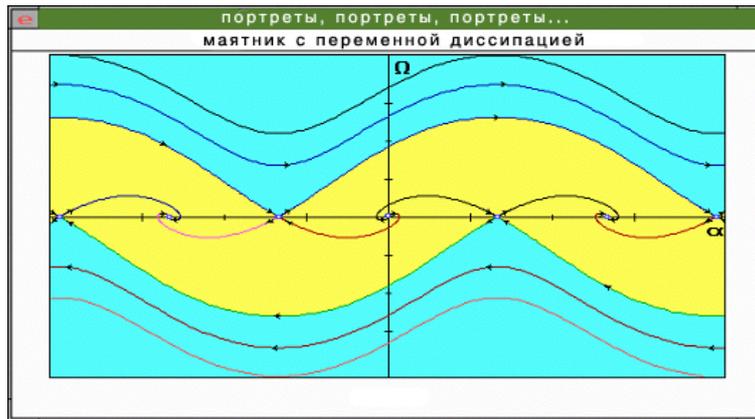


Иллюстрация 1

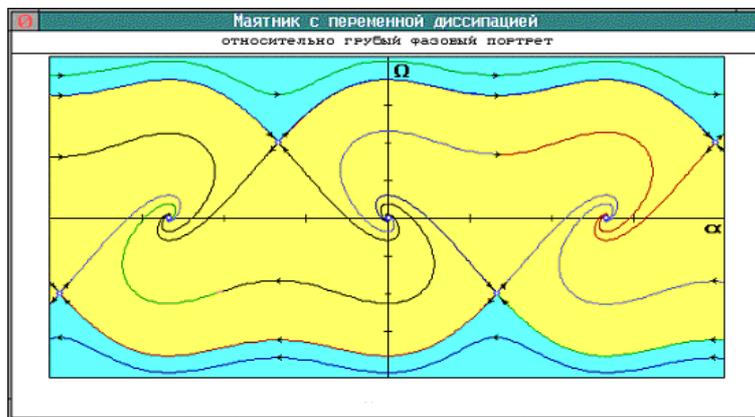


Иллюстрация 2

первый тип перестроек

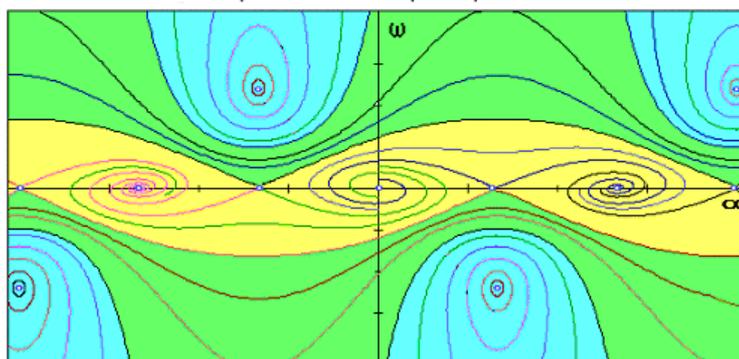


Иллюстрация 3

второй тип перестроек

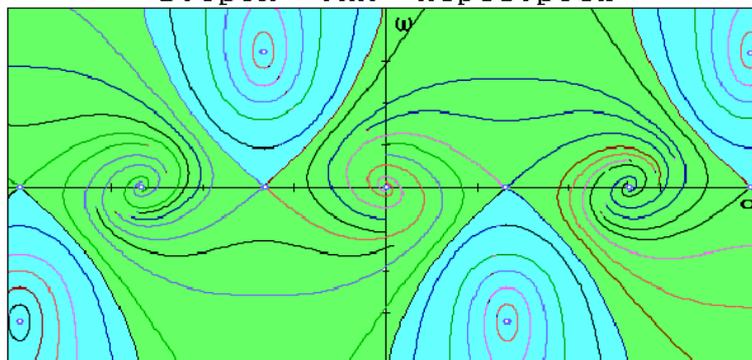


Иллюстрация 4

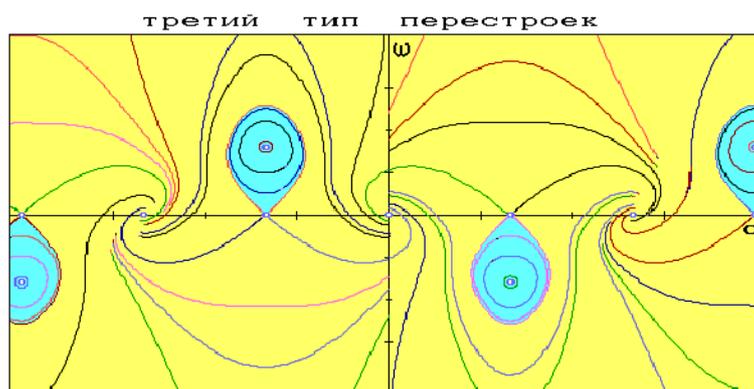


Иллюстрация 5

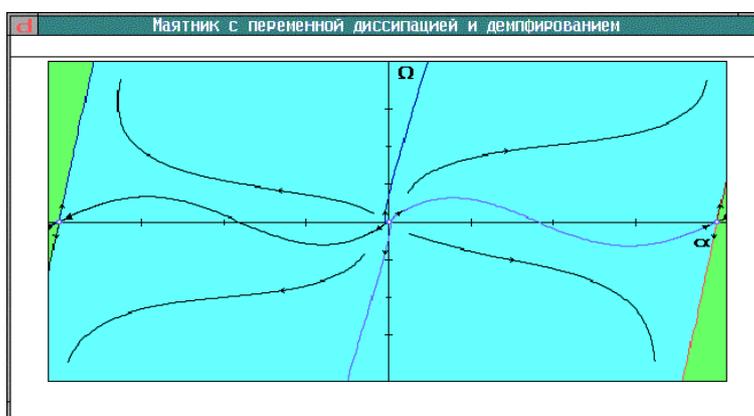


Иллюстрация 6

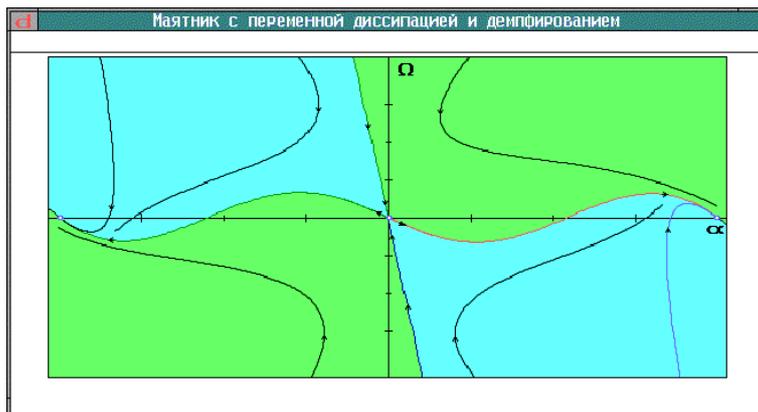


Иллюстрация 7

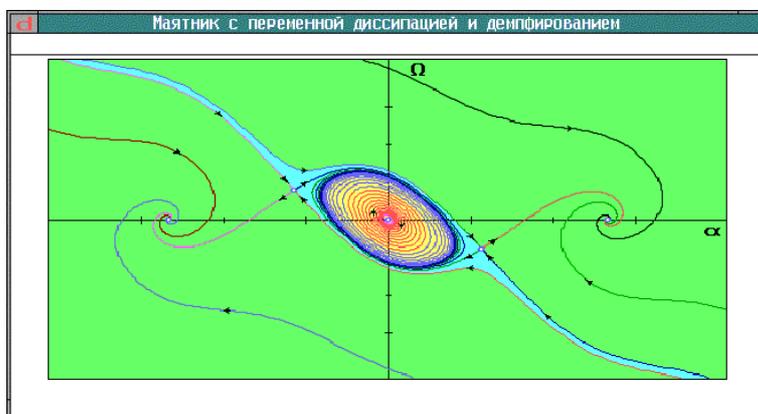


Иллюстрация 8

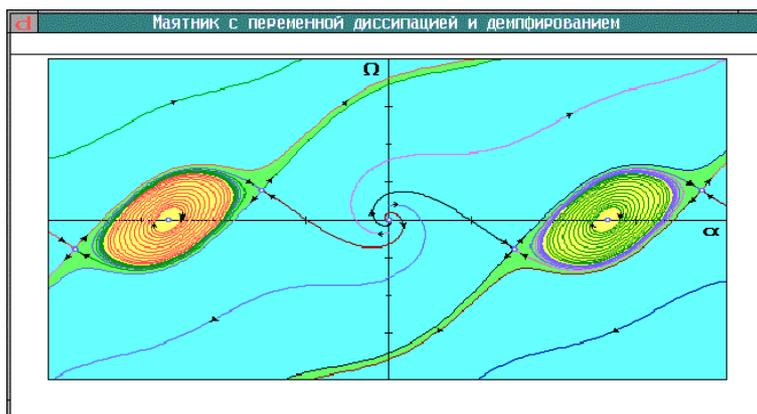


Иллюстрация 9

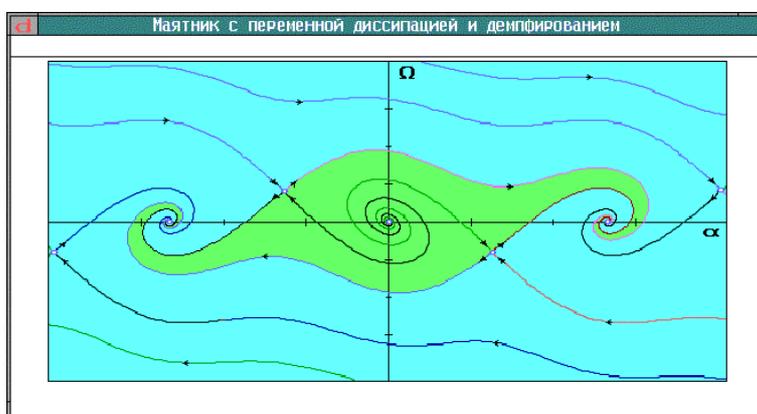


Иллюстрация 10

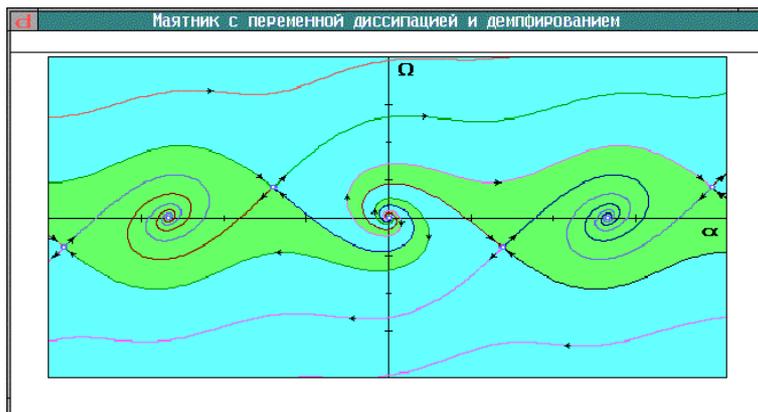


Иллюстрация 11

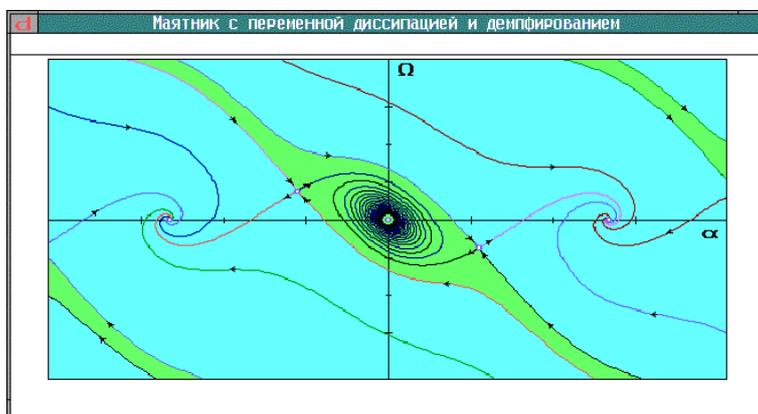


Иллюстрация 12

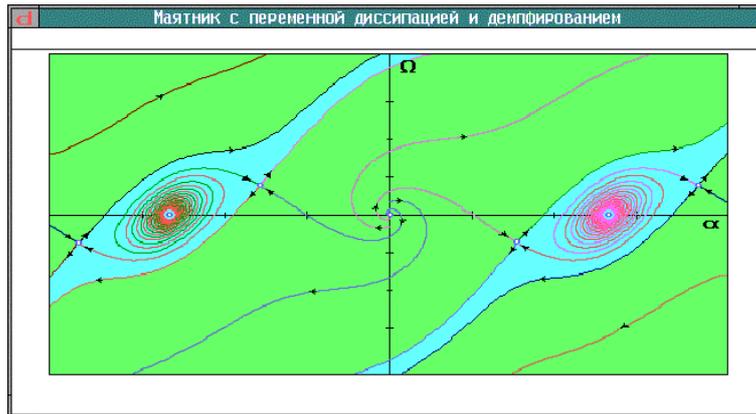


Иллюстрация 13

Двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(0, 1/2)$ )

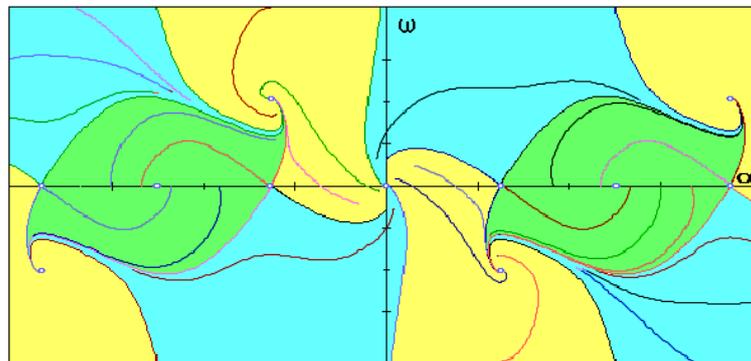


Иллюстрация 14

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(1/4, 1/2)$ )

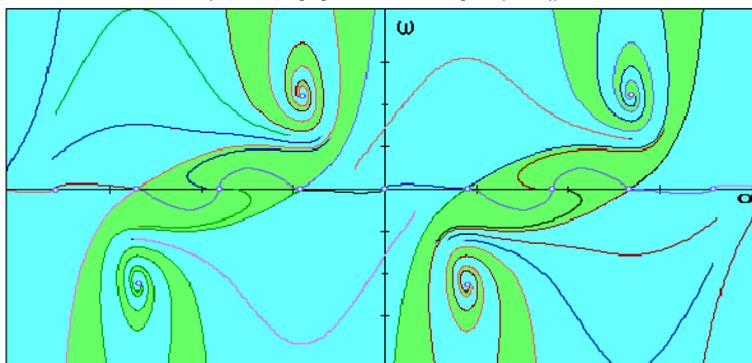


Иллюстрация 15

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(1, 1/2)$ )

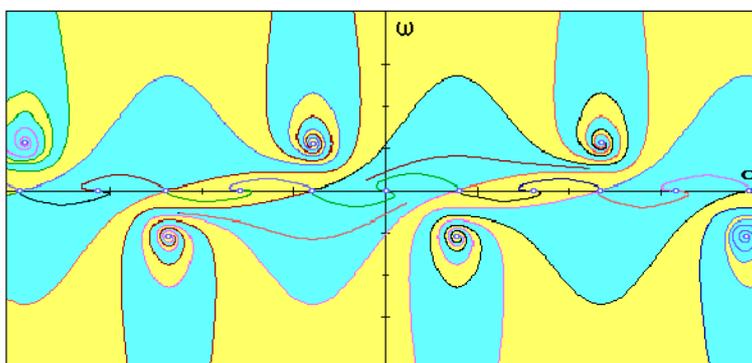


Иллюстрация 16

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(1, 3/4)$ )

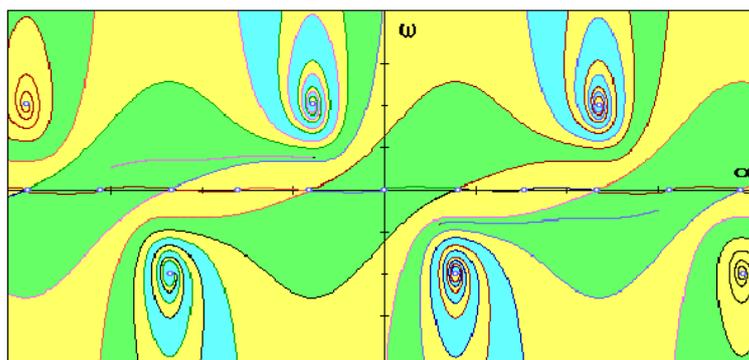


Иллюстрация 17

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(1, 3/2)$ )

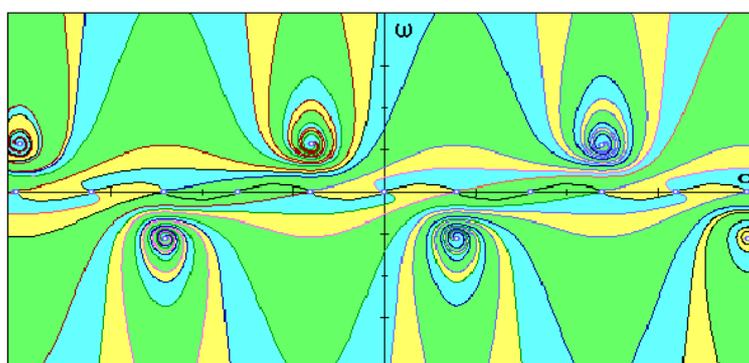


Иллюстрация 18

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(5/4, 3/2)$ )

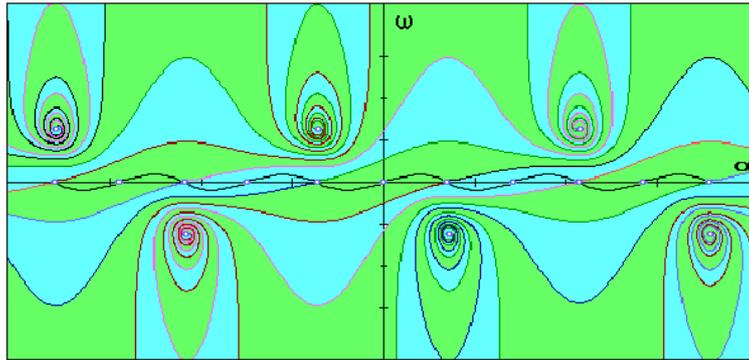


Иллюстрация 19

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(2, 3/2)$ )

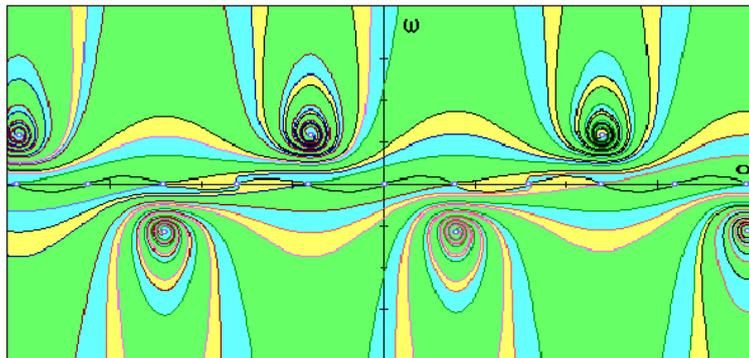


Иллюстрация 20

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(2,7/4)$ )

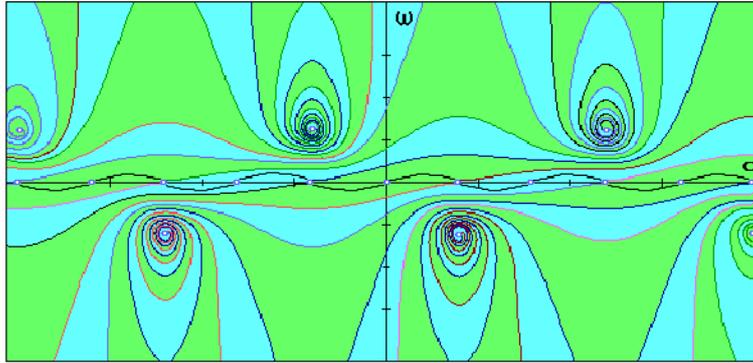


Иллюстрация 21

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(2,5/2)$ )

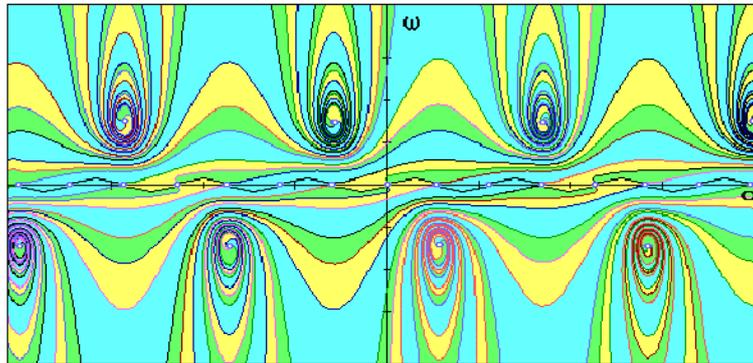


Иллюстрация 22

двупараметрическое семейство  
(индекс сепаратрисного поведения равен  $(9/4, 5/2)$ )

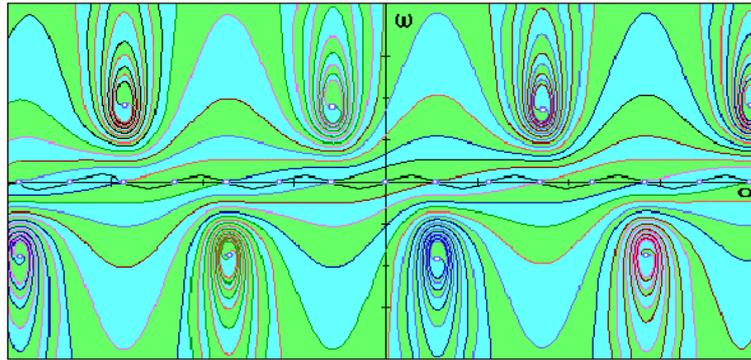


Иллюстрация 23

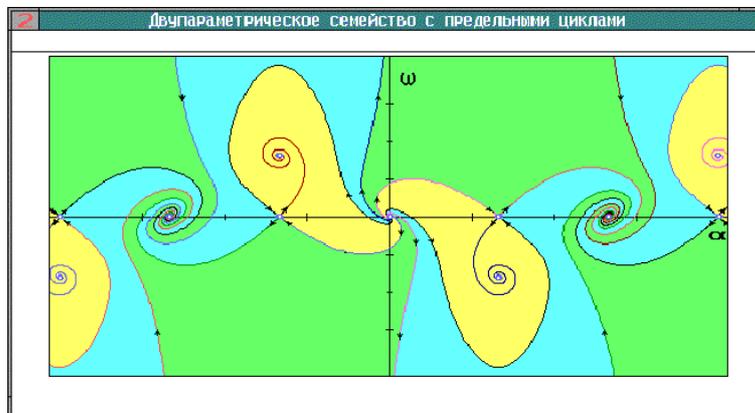


Иллюстрация 24

Иллюстрации

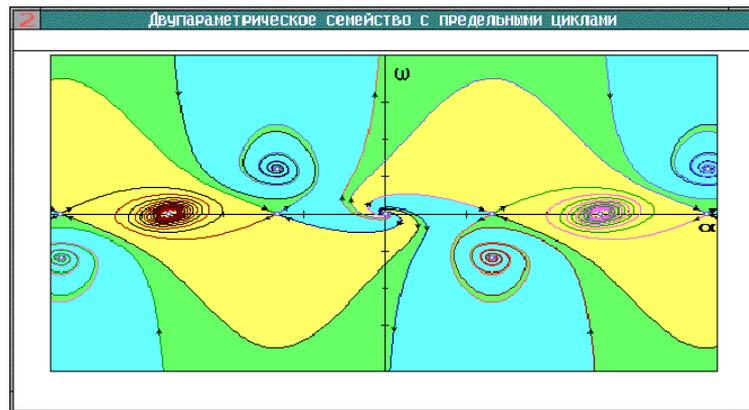


Иллюстрация 25

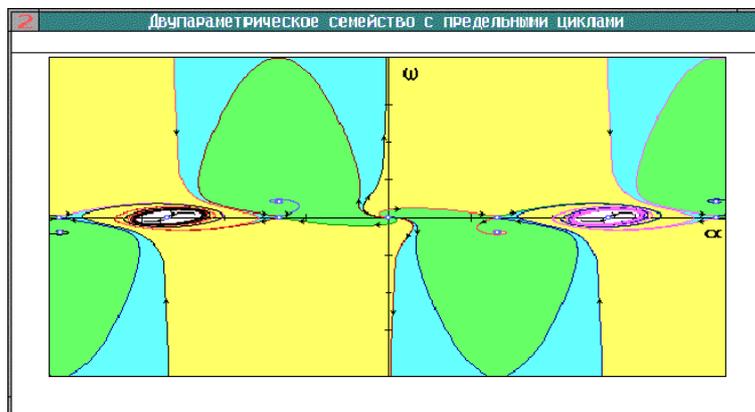


Иллюстрация 26

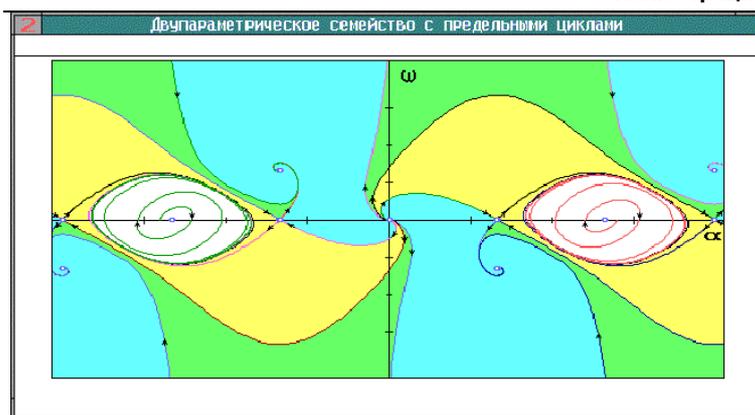


Иллюстрация 27

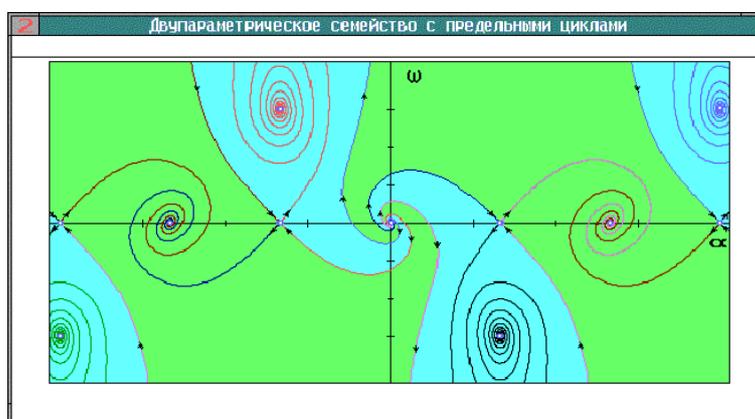


Иллюстрация 28

Иллюстрации

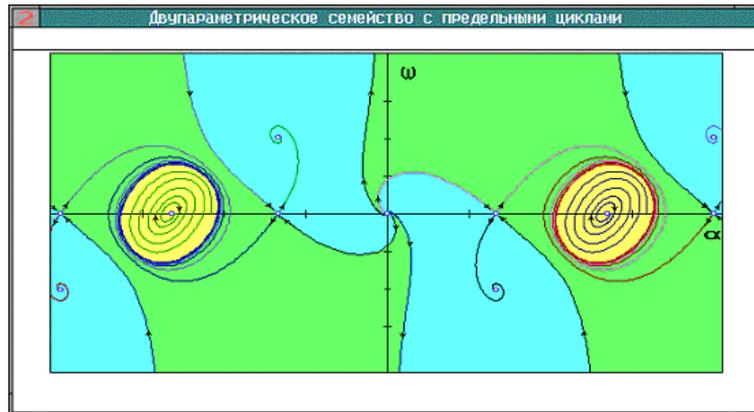


Иллюстрация 29

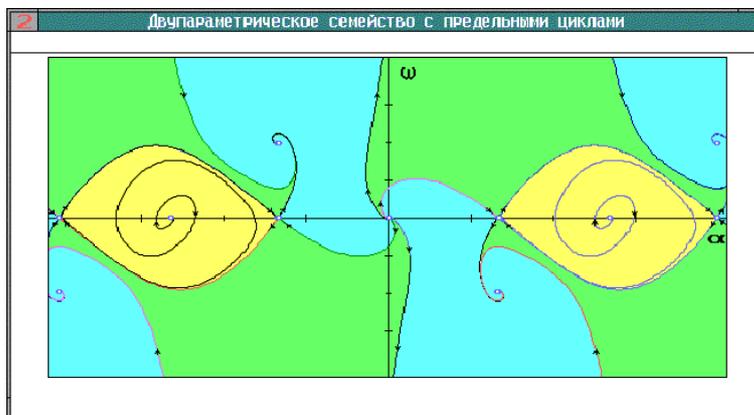


Иллюстрация 30

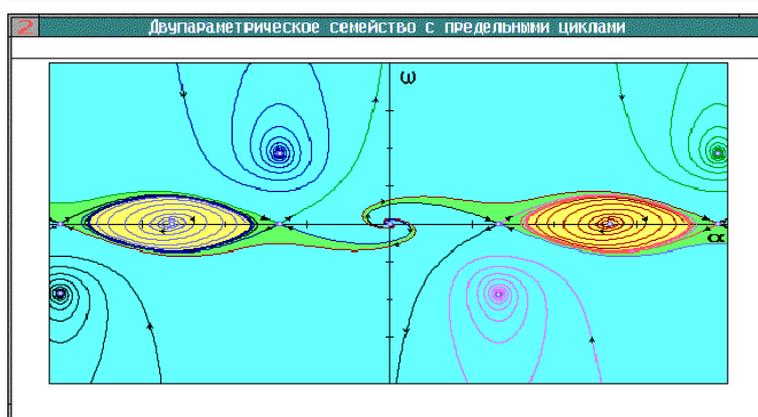


Иллюстрация 31

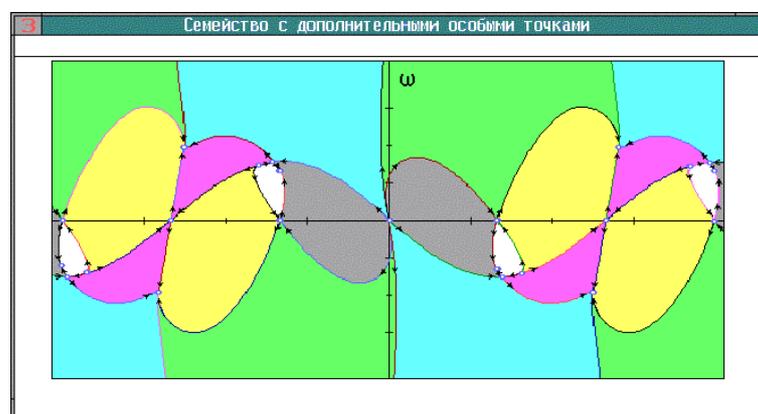


Иллюстрация 32

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Альев Г. А.* Пространственная задача о погружении диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1988. — № 1. — С. 17—20.
2. *Андронов А. А.* Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории // ДАН СССР. — 1938. — Т. 21. — Вып. 9.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла // Мат. сб. — 1956. — Т. 40. — Вып. 2.
5. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Мат. сб. — 1959. — Т. 48. — Вып. 3.
6. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Мат. сб. — 1965. — Т. 68. — Вып. 3.
7. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. — 1970. — Т. 6. — № 12.
8. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14. — № 5. — С. 247—250.
9. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. — 568 с.
10. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.
11. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
12. *Аппель П.* Теоретическая механика: в 2-х т. М.: Физматгиз, 1960.
13. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. — 1986. — Т. 41. — Вып. 1.

14. *Арнольд В. И.* Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела в идеальной жидкости // УМН. — 1969. — Т. 24. — № 3, с. 225—226.
15. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
16. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
17. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. — 472 с.
18. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. — 304 с.
19. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. — 328 с.
20. *Бабицкий В. И., Крупенин В. Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. — 320 с.
21. *Баггис Г. Ф.* Грубые системы двух дифференциальных уравнений // УМН. — 1955. — Т. 10. — Вып. 4.
22. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.
23. *Баутин Н. Н.* О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр // Мат. сб. — 1952. — Т. 30 (72). — Вып. 1.
24. *Баутин Н. Н.* Некоторые методы качественного исследования динамических систем, связанные с поворотом поля // ПММ. — 1973. — Т. 37. — Вып. 6.
25. *Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. — 496 с.
26. *Белецкий В. В., Янишин А. М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984. — 188 с.
27. *Беляев А. В.* О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести // Мат. сб. — 1981. — Т. 114. — № 3, с. 465—470.
28. *Бендиксон И.* О кривых определяемых дифференциальными уравнениями // УМН. — 1941. — Т. 9.
29. *Берже М.* Геометрия. Т.т. I, II. М.: Мир, 1984.
30. *Бивин Ю. К.* Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. — МТТ. — 1981. — № 4. — С. 105—109.

## Литература

31. Бивин Ю. К., Викторов В. В., Степанов Л. П. Исследования движения твердого тела в глинистой среде // Изв. АН СССР. — МТТ. — 1978. — № 2. — С. 159—165.
32. Бивин Ю. К., Глухов Ю. М., Пермяков Ю. В. Вертикальный вход твердых тел в воду // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1985. — № 6. — С. 3—9.
33. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. — 320 с.
34. Бишоп Р. Л. Колебания. М.: Наука, 1986. — 189 с.
35. Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287. — № 5. — С. 1105—1108.
36. Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова // УМН. — 1985. — Т. 40. — № 4. — С. 145—146.
37. Борисенок И. Т., Локшин Б. Я., Привалов В. А. О динамике полета осесимметричных вращающихся тел в воздушной среде // Изв. АН СССР. — МТТ. — 1984. — № 2. — С. 35—42.
38. Брашлов А. В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // ДАН СССР. — 1983. — Т. 268. — № 5. — С. 1043—1046.
39. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. — 253 с.
40. Бурбаки Н. Интегрирование. М.: Наука, 1970. — 320 с.
41. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. — С. 331.
42. Бутенина Н. Н. Бифуркации сепаратрис и предельных циклов двумерной динамической системы при повороте поля // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9. — № 8.
43. Бутенина Н. Н. К теории бифуркаций динамических систем при повороте поля // Дифференц. уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 7.
44. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики: в 2-х ч. М.: Наука, 1972.
45. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. М.: Машиностроение, 1969. — 349 с.
46. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1988. — 320 с.
47. Валле Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике. — М.: ИЛ. — Т. 1, 1948. — 188 с.; т. 2, 1949. — 259 с.

48. Врублевская И. Н. О геометрической эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // *Мат. сб.* — 1947. — Т. 42.
49. Врублевская И. Н. Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем // — *ДАН СССР.* — 1954. — Т. 97. — № 2.
50. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1960. — 296 с.
51. Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, методы // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — *Фунд. и прикл. мат.* — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 301.
52. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в  $R^n$  // *Доклады РАН.* — 2001. — Т. 380. — № 1. — С. 47—50.
53. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в  $R^n$  // *Доклады РАН.* — 2002. — Т. 383. — № 5. — С. 635—637.
54. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в  $R^n$  // *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* — 2003. — № 5. — С. 37—41.
55. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. — 188 с.
56. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. — 436 с.
57. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.-Л.: Гостехиздат, 1953. — 288 с.
58. Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наукова думка, 1978. — 296 с.
59. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // *Варшав. унив. изв.* 1916. — Кн. 3. С. 1—15.
60. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм рядов и производных. М.: Гостехиздат, 1963. — 602 с.

## Литература

61. Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1959. — Т. 128. — № 5. — С. 880—881.
62. Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в  $n$ -мерном пространстве // Мат. сб. — 1962. — Т. 56. — № 1. — С. 77—94.
63. Гудков Д. А. О понятии грубости и степеней негрубости для плоских алгебраических кривых // Мат. сб. — 1965. — Т. 67. — № 4.
64. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. — 322 с.
65. Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1990. — № 3. — С. 70—77.
66. Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279. — № 2. — С. 294—297.
67. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. — 760 с.
68. Дюлак Г. О предельных циклах. М.: Наука, 1980.
69. Ерошин В. А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1983. — № 2. — С. 142—144.
70. Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. — МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 20—30.
71. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. научн.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. М.: Наука, 1987. — С. 75—78.
72. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в среде при струйном обтекании // Тез. всесоюзной конференции по устойчивости движения, колебаниям механических систем и аэродинамике. М., 2-4 февр., 1988. М.: МАИ, 1988. — С. 21. — Деп. в ВИНТИ 22.12.88, № 8886-В—88.
73. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Тез. докл. Чебышевских чтений // Вестн.

Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1995. — № 6. — С. 17.

74. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Известия РАН. — МЖГ. — 1995. — № 3. — С. 23—27.

75. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1988. — № 2. — С. 21—25.

76. *Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И., Якимов Ю. Л.* Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 88—94.

77. *Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л.* Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. — МЖГ. — 1980. — № 6. — С. 44—51.

78. *Жуковский Н. Е.* О падении легких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси // П.с.с. — Т. 5. М.: Физматгиз, 1937. — С. 72-80, 100—115.

79. *Жуковский Н. Е.* О парении птиц // П.с.с. — Т. 5. М.: Физматгиз, 1937. — С. 49—59.

80. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. — 328 с.

81. *Журавлев Ю. Ф.* Погружение в жидкость диска под углом с свободной поверхности // Сб. работ по гидродинамике. М.: ЦАГИ, 1959. — С. 164—167.

82. *Зейферт Г., Трельфаль В.* Топология. М.-Л.: Гостехиздат, 1938. — 400 с.

83. *Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н.* Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974. — 344 с.

84. *Иванова Т. А.* Об уравнения Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — Т.52. — В.2. — С. 43—51.

## Литература

85. *Ильяшенко Ю. С.* Мемуар Дюлака «О предельных циклах» и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений // УМН. — Т. 40. — № 6.
86. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. — 672 с.
87. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Беркелеевский курс физики. Том 1. Механика. М.: Наука, 1983. — 447 с.
88. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
89. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980.
90. *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1983, № 6. — С. 10—22.
91. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. — 1983. — Т. 38. — № 1 — С. 3—67.
92. *Козлов В. В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. — МТТ. — 1989. — № 5. — С. 10—17.
93. *Козлов В. В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 1. — С. 79—87.
94. *Козлов В. В., Колесников Н. Н.* Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1979, № 6, с. 88—91.
95. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. — 1982. — Т. 266. — № 6. — С. 1298—1300.
96. *Колесников Н. Н.* Натуральные системы с разрешимой группой симметрий // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1978, № 5, с. 99—103.
97. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // В кн. Международный математический конгресс в Амстердаме. М.: Физматгиз, 1961. — С. 187—208.
98. *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. — М.: Физматгиз, 1963.
99. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Новые методы нелинейной механики. М.; Л.: ОНТИ, 1934.

100. Крылов Н. Н., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М.: Изд-во АН СССР, 1937. — 112 с.
101. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947. — 928 с.
102. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. М.: Наука, 1968.
103. Левиец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961. — 387 с.
104. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14. — № 5.
105. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103. — № 4.
106. Лич Дж. У. Классическая механика. — М.: ИЛ, 1961. — 173 с.
107. Локшин Б. Я. Об одном движении быстровращающегося тела в воздухе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1970. — № 6. — С. 93—98.
108. Локшин Б. Я. Об устойчивости плоского движения быстровращающегося симметричного тела в атмосфере // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1971. — № 4. — С. 113—118.
109. Локшин Б. Я. О винтовом движении быстровращающегося твердого симметричного тела в воздухе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1973. — № 4. — С. 79—86.
110. Локшин Б. Я. Об устойчивости стационарных движений быстровращающегося симметричного твердого тела в воздухе // Изв. АН СССР. МТТ. — 1976. — № 2. — С. 18—24.
111. Локшин Б. Я., Черкасов О. Ю. О структуре оптимальных траекторий движения вращающегося твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 1. — С. 63—68.
112. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1986. — 86 с.
113. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. — М.: МГУ, 1992. — 76 с.
114. Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Некоторые интегрируемые случаи пространственных коле-

## Литература

баний твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. XXI научн. чтений по космонавтике (Москва, 28-31.01.1997). — М.: ИИЕТ РАН, 1997, с. 82—83.

115. *Ляпунов А. М.* Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // В кн. Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320—324.

116. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956. 491 с.

117. *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Вып. 11. Современные проблемы математики. — М.: ВИНТИ, 1978. С. 5—112.

118. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 416 с.

119. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1986.

120. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981. 342 с.

121. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.

122. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.

123. *Неймарк Ю. И.* О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению // ДАН СССР. — 1967. — Т. 172. — № 5, с. 1021—1024.

124. *Неймарк Ю. И.* Структура движений динамической системы в окрестности гомоклинической кривой // 5-я летняя матем. школа, Киев, 1968, с. 400—435.

125. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неавтономных систем. — М.: Наука, 1967. — 519 с.

126. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 550 с.

127. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975. — 304 с.

128. *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнения Кирхгофа свободного движения твердого тела и идеальной жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса (ЛМШ) I // Функцион. анализ и его прил. — 1981. — Т. 15, № 3, с. 54—66.

129. *Одареев В. А.* Декомпозиционный анализ динамики и устойчивости продольного возмущенного движения экраноплана. Докторская диссертация. М., МГАИ, 1995. — 385 с.
130. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А.* Модельные динамические системы одной задачи внешней баллистики и их аналитические решения // Проблемы современной механики / Под ред. чл.-корр. РАН С. С. Григоряна. — М.: Изд-во МГУ. — 1998. — С. 28—46.
131. *Окунев Ю. М., Привалов В. А., Самсонов В. А.* Некоторые задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Тр. Всес. конф. «Нелинейные явления». М.: Наука, 1991. — С. 140—144.
132. *Окунев Ю. М., Садовничий В. А., Самсонов В. А., Черный Г. Г.* Комплекс моделирования задач динамики полета // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996, № 6, с. 66—75.
133. *Пали Дж., Смейл С.* Теоремы структурной устойчивости // Сб. пер. Мат. — 1969. — Т. 13. — № 2. — С. 145—155.
134. *Палис Ж., Ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986. — 301 с.
135. *Переломов А. М.* Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его прилож. — 1981. — Т. 15. — Вып. 2. — С. 83—85.
136. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
137. *Плисс В. А.* О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестн. ЛГУ, сер. матем., 1960, т. 13, с. 15—23.
138. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.-Л.: Наука, 1964.
139. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1967.
140. *Плисс В. А.* Об устойчивости произвольной системы по отношению к малым в смысле  $C$  возмущениям // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16. — № 10. — С. 1891—1892.
141. *Привалов В. А., Самсонов В. А.* Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. — 1990. — № 2. — С. 32—38.
142. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.-Л.: ОГИЗ, 1947.
143. *Пуанкаре А.* Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1,2. — М.: Наука, 1971,1972. — 771 с. и 999 с.

## Литература

144. Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983. — 560 с.
145. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974.
146. Рыжова В. Е., Шамолин М. В. О некоторых аналогиях в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Седьмой Всес. съезд по теоретич. и прикл. механ., М., 15—21 авг., 1991. — М., 1991. — С. 305.
147. Садэтов С. Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1990, № 3, с. 56—62.
148. Сальникова Т. В. Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1985, № 4, с. 68—71.
149. Самсонов В. А. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в некоторых случаях // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1962. — № 5. — С. 74—78.
150. Самсонов В. А. О квазистационарных движениях механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. — 1978. — № 1. — С. 32—35.
151. Самсонов В. А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. — М.: Наука, 1980. — 64 с.
152. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51—54, 105.
153. Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всес. конф. (16—18 апреля 1989 г.). Тез. докл. — М.: ВИНТИ. — 1989. — С. 128—129.
154. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3969. — М., 1990. — 80 с.
155. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всес. конф. (сентябрь 1990 г.), ч. 2. — Горький. — 1990. — С. 95—96.
156. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4141. — М., 1991. — 48 с.
157. Самсонов В. А., Шамолин М. В. Об устойчивости вращения тела при его торможении в сопротивляющейся среде / VII

Четаевская конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 10-13 июня 1997 г.: Тез. докл. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. унта, 1997, с. 24.

158. *Самсонов В. А., Ерошин В. А., Константинов Г. А., Макаришин В. М.* Две модельные задачи о движении тела в среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3427. — М., 1987. — 27 с.

159. *Самсонов В. А., Локишин Б. Я., Привалов В. А.* Динамика вращающегося тела, взаимодействующего со средой. Качественный анализ (промежуточный). Научный отчет Ин-та механики МГУ № 3245. М., 1985. — 58 с.

160. *Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаришин В. М.* Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4396. М., 1995. — 41 с.

161. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ИЛ, 1954.

162. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. — М.: Наука, 1983. — 528 с.; т. 2. — М.: Наука, 1984. — 560 с.

163. *Синг Дж. Л.* Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963. — 448 с.

164. *Смейл С.* Грубые системы не плотны. — Сб. пер. Мат. — 1967. — Т. 11. — № 4. — С. 107—112.

165. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. — 1970. — Т. 25. — № 1. — С. 113—185.

166. *Старжинский В. М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука, 1977. 255 с.

167. *Стеклов В. А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. — 234 с.

168. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

169. *Стрекалов В. В.* Рикошет при входе в воду диска, плоскость которого близка к вертикальной // Уч. записки ЦАГИ. 1977. Т. 8. № 5. С. 66—73.

170. *Суворова Е. И., Шамолин М. В.* Топографические системы Пуанкаре и системы сравнения высших порядков // Мат. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26 января-2 февраля 2003 г. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2003. — С. 251—252.

## Литература

171. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946. — 654 с.
172. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
173. *Табачников В. Г.* Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. Вып. 1621. — М., 1974. — С. 18—24.
174. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. — М.: МГУ, 1984. — 296 с.
175. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44. — № 5, с. 1191—1199.
176. *Трофимов В. В.* Геометрические инварианты вполне интегрируемых систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии «в целом». Новосибирск, 1987, с. 121.
177. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254. — № 6, с. 1349—1353.
178. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Диссипативные системы с нетривиальными обобщенными классами Арнольда-Маслова. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 2, с. 62.
179. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. — М.: ОНТИ, 1937. — 500 с.
180. *Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В.* О сохранении фазового объема в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним» // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 311.
181. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.
182. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
183. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т.1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133—135.
184. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976. — 495 с.

185. *Шамолин М. В.* Качественный анализ модельной задачи о движении тела в среде со струйным обтеканием. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1991. — 147 с.
186. *Шамолин М. В.* Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 2. — С. 52—56, 112.
187. *Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52—58, 112.
188. *Шамолин М. В.* Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. матем. и механ. — 1993. — Т. 57. — Вып. 4. — С. 40—49.
189. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (24-28.5.1993): Тезисы докладов. — Киев: Знание, 1993. — Ч. 2. — С. 62—63.
190. *Шамолин М. В.* Относительная структурная устойчивость задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Механика и ее применения. Научн. конф. 9—11.11.93: Тез. докл. — Ташкент: ТашГУ, 1993. — С. 20—21.
191. *Шамолин М. В.* Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1993. — № 2. — С. 66—70, 113.
192. *Шамолин М. В.* Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1993. — № 1. — С. 68—71, 112.
193. *Шамолин М. В.* Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. — 1994. — Т. 337. — № 5. — С. 611—614.
194. *Шамолин М. В.* Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в среде при струйном обтекании // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (16—20.5.1994): Тез. докл. — Киев, 1994. — С. 144—145.

## Литература

195. *Шамолин М. В.* Новое двумпараметрическое семейство фазовых портретов с предельными циклами в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (15—19.5.1995): Тезисы докладов (Исследование систем.). — Киев, 1995, с. 125.

196. *Шамолин М. В.* Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде // Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике: Сб. науч. трудов / Под ред. Б. Е. Победри и В. В. Козлова. — М.: Изд-во МГУ, 1995. — С. 14—19.

197. *Шамолин М. В.* Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде. Тез. докл. Чебышевских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1995, № 6, с. 17.

198. *Шамолин М. В.* Определение относительной грубости и двумпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела // Успехи матем. наук. — 1996, т. 51, вып.1, с. 175—176.

199. *Шамолин М. В.* Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Известия РАН. МТТ. — 1996, № 2, с. 55—63.

200. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Тез. докл. матем. конф. «Еругинские чтения III», (Брест, 14—16.05.1996). — Брест, 1996, с. 107.

201. *Шамолин М. В.* Введение в пространственную динамику движения твердого тела в сопротивляющейся среде // Материалы межд. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175—летию со дня рожд. П.Л.Чебышева (Москва, 14—19 мая 1996 г.). — Т. 2. — М.: МГУ, с. 371—373.

202. *Шамолин М. В.* Список интегралов динамических уравнений в пространственной задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Научн. конф. (20-24.5.1996): Тезисы докладов (Исследование систем.). — Киев, 1996, с. 142.

203. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. — Т. 349. — № 2. — С. 193—197.

204. *Шамолин М. В.* Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // II Сибирский Конгресс по прикл. и индустр. матем. (Новосибирск, 25-30.06.1996): Тезисы докладов. — Новосибирск, ч. III, 1996, с. 267.
205. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде // II Симпозиум по классической и небесной механике. Тез. докл. Великие Луки, 23—28.08.1996. — Москва — Великие Луки, 1996, с. 91—92.
206. *Шамолин М. В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика. 1996, № 4, с. 57—69.
207. *Шамолин М. В.* Об интегрируемом случае в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1997, № 2, с. 65—68.
208. *Шамолин М. В.* Частичная стабилизация вращательных движений тела в среде при свободном торможении // Тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием «Проблемы небесной механики», Санкт-Петербург, 3-6 июня 1997 г. / Ин-т теор. астрон.; Под ред. А.Г.Сокольского, А.С.Баранова. — Спр.: Изд-во ИТА РАН, 1997. — С. 183—184.
209. *Шамолин М. В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. — 1997, Т. 52, вып. 3, с. 177—178.
210. *Шамолин М. В.* Математическое моделирование динамики пространственного маятника, обтекаемого средой // Тр. VII Межд. Симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 26—29 июня 1997 г., Феодосия; Херсон: Изд-во ХГТУ, 1997, с. 153—154.
211. *Шамолин М. В.* Пространственная динамика твердого тела, взаимодействующего со средой // Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. Известия РАН. МТТ. — 1997, № 4, с. 174.
212. *Шамолин М. В.* Качественные методы в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // YSTM'96: «Молодежь и наука — третье тысячелетие». Тр. межд. конгресса — М.: НТА «АПФН», 1997 г. — (Сер. Профессионал), т. 2. — С. I-4.
213. *Шамолин М. В.* Качественные и численные методы в некоторых задачах пространственной динамики твердого тела, взаимо-

## Литература

действующего со средой // Тез. докл. 5 Межд. совещ.-сем. «Инженерно-физические проблемы новой техники» (Москва, 19—22.5.1998). — М.: Изд-во МГТУ, 1998. — С. 154—155.

214. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой в условиях квазистационарности // Тез. докл. Всерос. научн.-техн. конф. молодых ученых «Современные проблемы аэрокосмической науки» (г. Жуковский, 27—29.5.1998). — М.: Изд-во ЦАГИ, 1998. — С. 89—90.

215. *Шамолин М. В.* Абсолютная и относительная структурная устойчивость в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Тр. Межд. конф. «Математика в промышленности» (СИМ-98, г. Таганрог, 29.06.—03.07.1998). — Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998. — С. 332—333.

216. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. — 1998, Т. 53, вып. 3, с. 209—210.

217. *Шамолин М. В.* Методы нелинейного анализа в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой (Methods of nonlinear analysis in dynamics of a rigid interacting with a medium), In: CD-Proc. of the Cong. «Nonlinear Analysis and It's Applications», Moscow, Russia, Sept. 1—5, 1998; 1999, pp. 497—508.

218. *Шамолин М. В.* Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1998, № 6, с. 29—37.

219. *Шамолин М. В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Известия РАН. МТТ. — 1999, № 2, с. 178—189.

220. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364. — № 5. — С. 627—629.

221. *Шамолин М. В.* Семейства длиннопериодических траекторий в пространственной динамике твердого тела // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (25-29.5.1999): Тезисы докладов (System Modelling). — Киев, 1999, с. 60.

222. *Шамолин М. В.* Нелинейные динамические эффекты при пространственном торможении тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. III межд. конф. «Чкаловские чтения. Инж.-физ. пробл. авиац. и космич. техники» (1—4.6.1999). — Егорьевск: ЕАТК ГА, 1999. — С. 257—258.

223. *Шамолин М. В.* Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. — 2004. — Т. 40. — № 4. — С. 137—144.
224. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // Успехи матем. наук. — 1999, Т. 54, вып. 5, с. 181—182.
225. *Шамолин М. В.* Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Доклады РАН, 2000. — Т. 371. — № 4. — С. 480—483.
226. *Шамолин М. В.* О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией. Тез. докл. сем. по вект. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2000, № 2, с. 63.
227. *Шамолин М. В.* Задача о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости // Book of Abs. 3th Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12-17, 2000; Изд-во СПбГТУ, 2000, с. 198.
228. *Шамолин М. В.* О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // Успехи матем. наук. — 2000. — Т. 55, вып. 3. — С. 187—188.
229. *Шамолин М. В.* Многомерные топографические системы Пуанкаре и трансцендентная интегрируемость // IV Сибирский Конгресс по прикл. и индустр. матем. (Новосибирск, 26.06-01.07.2000): Тезисы докладов. — Новосибирск: Изд-во ин-та матем., ч. I, 2000, с. 25—26.
230. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 21-26.08.2000). — Владимир: Влад. гос. унив., 2000. С. 196—197.
231. *Шамолин М. В.* Сопоставление некоторых интегрируемых случаев из двумерной, трехмерной и четырехмерной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. V Крымской Межд. Мат. школы «Метод функции Ляпунова и его приложения» (МФЛ-2000) (Крым, Алушта, 05-13.09.2000). — Симферополь, 2000, с. 169.
232. *Шамолин М. В.* Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодейст-

## Литература

вующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифферен. и интегр. уравнениям (Одесса, 12-14.09.2000). — Одесса: Изд-во «АстроПринт», 2000. — С. 294—295.

233. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. — 2000. — Т. 375. — № 3. — С. 343—346.

234. *Шамолин М. В.* Об устойчивости движения твердого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Известия РАН. МГТ. — 2001. — № 1. — С. 189—193.

235. *Шамолин М. В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 302—303.

236. *Шамолин М. В.* Интегрируемость задачи о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики». — Фунд. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 309.

237. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Научн. конф. (22-25.5.2001): Thes. of Conf. Rep. — Kyiv, 2001. — С. 344.

238. *Шамолин М. В.* Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. — 2001. — Т. 37. — № 6. — С. 74—82.

239. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. (Пермь, 23—29.08.2001). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599—600.

240. *Шамолин М. В.* Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 2001. — № 5. — С. 22—28.

241. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. — 2002. — Т. 57, вып. 1. С. 169—170.

242. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые случаи в динамике двумерного, трехмерного и четырехмерного твердого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Межд. конф. по дифф. уравнениям и дин. системам (Суздаль, 01—06.07.2002). — Владимир: Влад. гос. унив., 2002. С. 142—144.
243. *Шамолин М. В.* Об одной пространственной задаче о движении твердого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. межд. научн. конф. по мех. «Третьи Поляховские чтения». Санкт-Петербург, 4—6 февраля 2003 г. — СПб.: Изд-во НИИХ С.-Пб. ун-та, 2003. — С. 170—171.
244. *Шамолин М. В.* Интегрируемость в трансцендентных функциях в динамике твердого тела // Тез. докл. научн. конф. «Ломоносовские чтения-2003». Секц. механ. 17—27 апреля 2003 г., Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. — С. 130.
245. *Шамолин М. В.* Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Изд-во «Экзамен», 2004. — 256 с.
246. *Шамолин М. В., Цытцын С. В.* Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде. Научный отчет Ин-та механики МГУ № 4289. — М., 1993. — 43 с.
247. *Шамолин М. В., Шебаршов Д. В.* Проекция лагранжевых торов для бигармонического осциллятора на пространство положений и динамика твердого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Научн. конф. (19—23.5. 1997). Тезисы докладов (Mechanical Systems). — Киев, 1997, с. 142.
248. *Шорыгин О. П., Шульман Н. А.* Вход диска в воду с углом атаки // Уч. записки ЦАГИ. 1977. Т.8. № 1. С.12—21.
249. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
250. *Якоби К.* Лекции по динамике. — М.-Л.: ОНТИ, 1936. — 272 с.
251. *Якобсон М. В.* О гладких отображениях окружности в себя // Матем. сб., 1975, вып.85, с. 183—188.

## Литература

252. *Hubert Airy*, The Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.596.
253. *Magnus Blix*, Une nouvelle theorie sur le vol a viole des oiseaux, «Revue generale sciences pures et appliques», 1890.
254. *Bret Onniere*, Etude sur le vol plane, «L'Aeronaute», 1891.
255. *Ishlinsky A. Yu., Klimov D. M.* Some aspects of the solution of the main problem of inertial navigation. — J. Inst. Navig., 1970, vol. 23, No. 4.
256. *Otto Liliental*, Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst. Berlin, 1889, S. 81.
257. *Marey*, Le vol des oiseaux, chap.XX, Paris, 1890, 157 p.
258. *Mouillard*, L'empire de l'air, Paris, 1881.
259. *Parseval*, Die Mechanik des Vogelflugs, Wisbaden, 1889, S. 122.
260. *Peixoto M.*, On structural stability, Ann. of Math. (2) 69 (1959), 199—222.
261. *Peixoto M.*, Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1962, v. 1, N 2, p. 101—120.
262. *Peixoto M.*, On an approximation theorem of Kupka and Smale, J. Diff. Eq., 3 (1966), p. 214—227.
263. *S. E. Peal*, Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.11.
264. *L. Prandtl, A. Betz*, Ergebnisse der Aerodinamischen Versuchsanstalt zu Gottingen, b.4 Lieferung. M nchen Berlin; R. Oldenbourg, 1932. 148 p.
265. *Rayleigh*, The Soaring of Birds, «Nature», vol. XXVIII, 1.534.
266. *M. V. Shamolin*, Global qualitative analysis of the nonlinear systems on the problem of a body motion in a resisting medium // Fourth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, August 18-21, 1993. — Szeged, Hungary, 1993, p. 54.
267. *M. V. Shamolin*, Relative structural stability on the problem of a body motion in a resisting medium // ICM'94, Abstract of Short Communications, Zurich, 3-11 August, 1994. — Zurich, Switzerland, 1994, p. 207.
268. *M. V. Shamolin*, Structural Optimization of the Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium. In: WCSMO-1, Extended Abstracts. Posters, Goslar, May 28 — June 2, 1995. Goslar, Germany, 1995, p. 18—19.

269. *M. V. Shamolin*, Qualitative Methods to the Dynamic Model of an Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium and New Two-Parametric Families of the Phase Portraits. In: DynDays'95 (Sixteenth Annual Informal Workshop), Program and Abstracts, Lyon, June 28 — July 1, 1995. Lyon, France, 1995, p. 185.
270. *M. V. Shamolin*, New Two-Parameter families of the phase patterns on the problem of a body motion in a resisting medium. In: ICIAM'95, Book of Abstracts, Hamburg, 3.—7.July, 1995. Hamburg, Germany, 1995, p. 436.
271. *M. V. Shamolin*, Poisson-stable and dense orbits in rigid body dynamics. In: 3rd Experimental Chaos Conference, Advance Program, Edinburg, Scotland, August 21—23, 1995. Edinburg, Scotland, 1995, p. 114.
272. *M. V. Shamolin*, Qualitative methods in interacting with the medium rigid body dynamics, In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'96, 27.—31.May, 1996, Prague, Czech Rep.; Karls-Universitat Prag, p. 129—130.
273. *M. V. Shamolin*, Relative structural stability and relative structural instability of different degrees in Topological Dynamics, In: Abstracts of International Topological Conference Dedicated to P.S.Alexandroff's 100th Birthday «Topology and Applications», Moscow, May 27—31, 1996; Moscow: Phasys, 1996, p. 207—208.
274. *M. V. Shamolin*, Topographical Poincare systems in many dimensional spaces, In: Fifth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, July 29 — August 2, 1996. Szeged, Hungary, 1996, p. 45.
275. *M. V. Shamolin*, Qualitative Methods in Interacting with the Medium Rigid Body Dynamics, In: Abstracts of XIXth ICTAM, Kyoto, Japan, August 25—31, 1996; Kyoto, Japan, 1996, p. 285.
276. *M. V. Shamolin*, Three-Dimensional Structural Optimization of Controlled Rigid Motion in a Resisting Medium. In: Proceedings of WCSMO-2, Zakopane, Poland, May 26—30, 1997. Zakopane, Poland, 1997, p. 387—392.
277. *M. V. Shamolin*, Classical problem of a three-dimensional motion of a pendulum in a jet flow. In: 3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference, Book of Abstracts, Stockholm, Sweden, August 18—22, 1997. Royal Inst. of Technology, Stockholm, Sweden, 1997, p. 204.

## Литература

278. *M. V. Shamolin*, Families of three-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body. In: EQUADIFF 9, Abstracts, Enlarged Abstracts, Brno, Czech Rep., August 25—29, 1997. Masaryk Univ., Brno, Czech Rep., 1997, p. 76.

279. *M. V. Shamolin*, Many-dimensional topographical Poincare systems in rigid body dynamics, In: Abstracts of GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung'98, 6.—9. April, 1998, Bremen, Germany; Universitat Bremen, 1998, p. 128.

280. *M. V. Shamolin*, New two-parametric families of the phase portraits in three-dimensional rigid body dynamics // Межд. конф., посвященная 90-летию со дня рожд. Л. С. Понтрягина. М., 31.8.—6.9. 1998. Тез. докл. Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — С. 97—99.

281. *M. V. Shamolin*, Lyapunov functions method and many-dimensional topographical systems of Poincare in rigid body dynamics // IV Крымская Межд. мат. школа «Метод функции Ляпунова и его приложения». Тез. докл. Крым, Алушта (05-12.09. 1998). — Крым, Симферополь: Изд-во Симф. госун-тет, 1998. — С. 80.

282. *M. V. Shamolin*, Some Classical Problems in a Three Dimensional Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium, In: Proc. of ICTACEM'98, Kharagpur, India, Dec.1—5, 1998; Aerospace Engineering Dep., Indian Inst. of Technology, Kharagpur, India, 1998, 11 p. (CD-Rome, Printed at: Printek Point, Technology Market, KGP-2).

283. *M. V. Shamolin*, Structural Stability in 3D Dynamics of a Rigid. In: CD-Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17—21, 1999; Buffalo, NY, 1999, 6 p.

284. *M. V. Shamolin*, Integrability in Terms of Transcendental Functions in Rigid Body Dynamics, In: Book of Abstracts of GAMM Annual Meeting, April 12—16 1999, Metz, France; Universite de Metz, 1999, p. 144.

285. *M. V. Shamolin*, Properties of Integrability of Systems in Terms of Transcendental Functions, In: Final Progr. and Abstracts of Fifth SIAM Conf. on Appl. of Dynamic. Syst., May 23—27, 1999, Snowbird, Utah, USA; SIAM, 1999, p. 60.

286. *M. V. Shamolin*, Mathematical Modelling in 3D Dynamics of a Rigid Interacting with a Medium, In: Book of Abstracts of the Second Int. Conf. «Tools for Mathematical Modelling», Saint-Petersburg, Russia, 14—19 June, 1999; Saint-Petersburg State Tech. Univ., 1999, p. 122—123.

287. *M. V. Shamolin*, Some properties of transcendental integrable dynamical systems, In: Book of Abst. of EQUADIFF 10, Berlin, August 1—7, 1999; Free Univ. of Berlin, 1999, pp. 286—287.
288. *M. V. Shamolin*, Methods of analysis of a deceleration of a rigid in 3D medium, In: Contributed abstracts of 3rd ENOC, Copenhagen (Lyngby), Denmark, August 8—12, 1999; Tech. Univ. of Denmark, 1999 (without pages).
289. *M. V. Shamolin*, Long-Periodic Trajectories in Rigid Body Dynamics, In: Sixth Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Bolyai Institute, Regional Committee of the Hungarian Academy of Sciences, August 10—14, 1999. Szeged, Hungary, 1999, p. 47.
290. *M. V. Shamolin*, New Families of the Non-Equivalent Phase Portraits in 3D Rigid Body Dynamics, In: Abstracts of Second Congress ISAAC 1999, Fukuoka, Japan, August 16—21, 1999; Fukuoka Ins. of Tech, 1999, p. 205—206.
291. *M. V. Shamolin*, Methods of analysis of dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Book of Abstracts of Annual Scient. Conf. GAMM 2000 at the Univ. of Gottingen, 2—7 April, 2000; Univ. of Gott., 2000, p. 144.
292. *M. V. Shamolin*, Integrability and non-integrability in terms of transcendental functions, In: CD-abs. of 3<sup>rd</sup> ECM (Poster sessions), Barcelona, Spain, June 10—14, 2000 (poster no. 36, without pages).
293. *M. V. Shamolin*, About interaction of a rigid body with a resisting medium under an assumption of a jet flow, In: Book of Abst. II (General sessions) of 4<sup>th</sup> EUROMECH Solid Mech. Conf., Metz, France (June 26—30, 2000); Univ. of Metz, 2000, p. 703.
294. *M. V. Shamolin*, New families of many-dimensional phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: CD-Proc. of 16th IMACS World Cong. 2000, Lausanne, Switzerland, August 21—25; EPFL, 2000, 3 p.
295. *M. V. Shamolin*, Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability, In: Book of Abst. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spain, 11—14 September; Barcelona, 2000, p. 495.
296. *M. V. Shamolin*, Comparison of Some Cases of Integrability in Dynamics of a Rigid Body Interacting with a Medium, In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2001, ETH Zurich, 12—15 February, 2001; ETH Zurich, 2001, p. 132.

## Литература

---

297. *M. V. Shamolin*, Pattern Recognition in the Model of the Interaction of a Rigid Body with a Resisting Medium, In: Col. of Abst. of First SIAM-EMS Conf. «Applied Mathematics in our Changing World», Berlin, Germany, Sept. 2—6, 2001; Springer-Birkhauser, 2001, p. 66.

298. *M. V. Shamolin*, Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 110, No. 2, 2002, p.p. 2526—2555 (пер. «Итоги науки и техники», сер. «Современные проблемы математики и ее приложения», тематические обзоры, т. 79, «Динамические системы-10», 2000).

299. *M. V. Shamolin*, New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p.p. 919—975 (пер. «Итоги науки и техники», сер. «Современные проблемы математики и ее приложения», тематические обзоры, т. 88, «Динамические системы-12», 2001).

300. *M. V. Shamolin*, Foundations of differential and topological diagnostics, In: Journal of Mathematical Sciences, Vol. 114, No. 1, 2003, p.p. 976—1024 (пер. «Итоги науки и техники», сер. «Современные проблемы математики и ее приложения», тематические обзоры, т. 88, «Динамические системы-12», 2001).

301. *M. V. Shamolin*, Integrability and Nonintegrability in Terms of Transcendental Functions, In: Book of Abs. of Annual Scient. Conf. GAMM 2003, Abano Terme-Padua, Italy, 24—28 March, 2003; Univ. of Padua, 2003, p. 77.

302. *Weyher*, Observations sur le vol plane par obres, «L'Aeronaute», 1890.

**Шамолин Максим Владимирович**

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ  
В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

ИД № 05518 от 01.08.01

Гигиенический сертификат  
№ 77.99.28.953.Д.005398.08.05 от 30.08.2005 г.

Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*  
Компьютерная верстка *Н.Э. Николаева*

105066, Москва, ул. Александра Лукьянова, д. 4, стр. 1.  
[www.examen.biz](http://www.examen.biz)

E-mail: по общим вопросам: [info@examen.biz](mailto:info@examen.biz);  
по вопросам реализации: [sale@examen.biz](mailto:sale@examen.biz)  
тел./факс 263-96-60

Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература  
учебная

**По вопросам реализации обращаться по тел.: 263-96-60.**