МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

И. А. Шведов

КОМПАКТНЫЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебное пособие

Издание второе, переработанное

Под редакцией
Л. В. Войтишек, Я. А. Копылова

Новосибирск
2003

УДК 517(075.8)
ББК В 16я73-1
Ш 341

Шведов И. А. Компактный курс математического анализа: Учеб. пособие/ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Ч.2: Дифференциальное исчисление функций многих переменных. 88 с.

Учебное пособие предназначается студентам и преподавателям 1-го и 2-го курсов математических факультетов университетов. В основе лежит курс лекций, читаемый автором в Новосибирском государственном университете. Пособие содержит все определения, формулировки и доказательства теорем, поясняющие примеры и упражнения. У читателя предполагается наличие некоторого опыта изучения теории функций одной переменной.

Рецензент
Доцент Л. В. Войтишек

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Предлагаемый текст является основой второй части слагавшегося многие годы лекционного курса, читаемого мною на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета.

Основные принципы, которых я старался придерживаться при отборе и изложении материала, таковы:

1. Учебно-научный трактат должен быть нацелен в первую очередь на изложение основных идей и достижений соответствующей отрасли науки.

2. Стиль, язык и уровень строгости изложения должны быть адекватны современному состоянию науки.

Эпитет "компактный" в заглавии книги отражает лишь стремление к полноте и краткости, а вовсе не оценку полученного результата. К тому же я стремился сделать формулировки утверждений как можно более удобными для разговорной речи, не потеряв необходимого уровня строгости. По сравнению с изданием 2001 года материал пополнился доказательствами всех утверждений, входящих в экзаменационную программу.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность всем моим коллегам-математикам, которые помогали мне все прошлые годы неизменно доброжелательными и содержательными математическими дискуссиями. Особая благодарность редакторам текста Л. В. Войтишек и Я. А. Копылову за творческое обсуждение материала, а также моей жене К. В. Шведовой за кропотливый труд по его форматированию.

И. А. Шведов

Глава 7. МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

§ 7.1. Метрические и нормированные пространства

Говорят, что на множестве X задано (определено) *расстояние (метрика)* ϱ, если каждой паре точек $x, y \in X$ поставлено в соответствие число $\varrho(x, y) \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty[$ и выполнены следующие условия:

M1. Симметричность: $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.

M2. Неравенство треугольника: $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

M3. $\varrho(x, x) = 0$.

M4. Отделимость: $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Тем самым метрика (расстояние) на множестве X – это функция вида $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами M1 – M3.

Примеры. 1. Функция $\varrho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, задаваемая формулой $\varrho(x, y) = |x - y|$, является расстоянием на множестве $\mathbb{R}$. Ее называют *стандартным расстоянием* на числовой прямой.

2. Функция $\varrho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, задаваемая формулой $\varrho(x, y) = |x-y| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, является расстоянием на пространстве $\mathbb{R}^n$. Эту функцию обычно называют *евклидовой* или *стандартной метрикой* пространства $\mathbb{R}^n$.

3. Функция $\alpha : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$, определяемая формулой $\alpha(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, является расстоянием на расширенной числовой прямой. ($\arctan(\pm\infty) := \pm\pi/2$)

Множество, на котором задано расстояние (метрика), называется *метрическим пространством.* Точнее, метрическое пространство — это упорядоченная пара вида (X, ϱ), где X — множество, а ϱ — расстояние на множестве X. Обычно метрическое пространство обозначают тем же символом, что и множество точек этого пространства. Если для обозначения метрики метрического пространства X заранее не выбрана буква, то эту метрику будем обозначать символом ϱ_X или даже символом ϱ, если нет повода для недоразумения.

Пусть S — подмножество метрического пространства (X, ϱ). Для каждой пары точек $x, y \in S$ положим $\varrho_S(x, y) = \varrho(x, y)$. Функцию $\varrho_S : S \times S \to \mathbb{R}_+$ называют *индуцированным расстоянием* на S. Метрическое пространство (S, ϱ_S) называют *подпространством* метрического пространства (X, ϱ). Как правило, индуцированное расстояние обозначают той же буквой, что и расстояние в объемлющем пространстве. Если о каком-либо подмножестве метрического пространства говорят как о метрическом пространстве, то при отсутствии специальных указаний предполагают, что это подмножество снабжено индуцированной метрикой.

Произведением метрических пространств $X_1, \ldots, X_k$ будем называть множество $X := X_1 \times \ldots \times X_k$, в котором расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$ определяется формулой $\varrho(x, y) := \left(\sum\limits_{i=1}^{k} (\varrho_{X_i}(x_i, y_i))^2\right)^{1/2}$. В частности, метрическое пространство $\mathbb{R}^k$ — это произведение метрических пространств $X_1, \ldots, X_k$, где $X_i = \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, k\}$.

Говорят, что на векторном пространстве E задана норма $\| \ \|$, если каждому вектору $x \in E$ поставлено в соответствие число $\|x\| \in \mathbb{R}_+$ и при этом выполнены следующие три условия.

N1. *Однородность:* $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для каждого $x \in E$ и любого $\lambda \in \Lambda$. Здесь $\Lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — поле скаляров пространства E.

N2. *Неравенство треугольника:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in E$.

N3. *Отделимость:* $\|x\| = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0 \in E$.

Тем самым норма на векторном пространстве E — это функция вида $\| \ \| : E \to \mathbb{R}_+$, обладающая свойствами $N1, N2, N3$.

Примеры. 1. Если E — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$, то функция $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ является нормой на E.

2. Пусть $p \in [1, \infty]$. Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $|x|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, если $p \in [1, \infty[$, и $|x|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Число $|x|_p$ называют *L_p-нормой* вектора x. Однородность и невырожденность L_p-нормы очевидны; неравенство треугольника устанавливается с использованием следующего утверждения.

Неравенство Гсльдера. $\langle x, y\rangle \leq |x|_p |y|_q$, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

◀ Это неравенство достаточно установить для ненулевых векторов с неотрицательными координатами. Поскольку при $p = 1$ и $q = \infty$ неравенство Гсльдера очевидно, будем предполагать ещс, что $p, q \in]1, \infty[$.

Обратимся к неравенству Юнга, которое в нашей ситуации имеет вид $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q,\ \forall a, b \in \mathbb{R}_+$ (§ 4.1). Следовательно,

$$\frac{\langle x, y\rangle}{|x|_p |y|_q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|_p} \frac{y_i}{|y|_q} \overset{\text{Юнг}}{\leq} \sum_i \left(\frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{|x|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{|y|_q}\right)^q\right) =$$

$$= \frac{1}{p(|x|_p)^p} \sum_i x_i^p + \frac{1}{q(|x|_q)^q} \sum_i y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \ \blacktriangleright$$

Неравенство Минковского. $|x+y|_p \le |x|_p + |y|_p$ для любых векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $p \in [1, \infty]$ и, стало быть, функция $|x|_p$ переменной $x \in \mathbb{R}^n$ является нормой на векторном пространстве $\mathbb{R}^n$.

◀ По причине, указанной при выводе неравенства Гсльдера, достаточно предполагать, что $p \in]1, \infty[$, а x, y — ненулевые векторы с неотрицательными координатами.

Пусть $q := \frac{p}{p-1}$. Тогда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и, следовательно,

$$(|x+y|_p)^p = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum (x_i + y_i)(x_i + y_i)^{p-1},$$

положив $z_i := (x_i + y_i)^{p-1}$, и $z := (z_1, \ldots, z_n)$, продолжим прерванную цепочку равенств следующим образом:

$$= \sum (x_i + y_i) z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \overset{\text{Гсльдер}}{\le} |x|_p |z|_q + |y|_p |z|_q = (|x|_p + |y|_p)|z|_q =$$

$$= (|x|_p + |y|_p) \left(\sum \left((x_i + y_i)^{p-1} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= (|x|_p + |y|_p) \left(\sum (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = (|x|_p + |y|_p)(|x+y|_p)^{p-1}.$$

Остается сравнить первый и последний члены полученной цепочки соотношений. ▶

Упражнение. Для любого $p \in [1, \infty]$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $|x|_\infty \le |x|_p \le n^{1/p} |x|_\infty$.

В конце главы будет показано, что любые две нормы на пространстве $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, т. е. для любых двух норм $\| \ \|$ и $\| \ \|'$ существуют такие константы $c, \ c' \in \mathbb{R}$, что

$$\|x\| \le c' \|x\|', \quad \|x\|' \le c \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому для изложения основ анализа можно было бы использовать любую норму на пространстве $\mathbb{R}^n$. Однако мы обычно будем пользоваться нормой $|x| := |x|_2$, дабы опираться на арифметический, геометрический и физический опыт.

По этой же причине при отсутствии специальных указаний рассматриваемую норму на векторном пространстве E будем обозначать либо символом $| \ |$, либо $\| \ \|$, если нет повода для недоразумений.

Векторное пространство, на котором задана норма, называют *нормированным векторным пространством.* Точнее, нормированное векторное — это упорядоченная пара вида $(E, \| \ \|)$, где E — векторное пространство, а $\| \ \|$ — норма на пространстве E. Обычно нормированное векторное пространство обозначают тем же символом, что и множество векторов этого пространства. Если для обозначения нормы нормированного пространства E заранее не выбрана буква, то эту норму будем обозначать символом $|\,|_E$ или даже символом $|\,|$, если нет повода для недоразумений.

Нормированное пространство обычно считают метрическим пространством, расстояние на котором определено формулой $\varrho(x,y) = \|x-y\|$. Если о множестве $\mathbb{R}^n$ говорят как о нормированном векторном пространстве, то при отсутствии специальных указаний предполагают, что $\mathbb{R}^n$ снабжено евклидовой нормой.

Произведением нормированных векторных пространств $E_1,\dots,E_l$ будем называть векторное пространство $E = E_1\times\ldots\times E_l$, в котором норма вектора $x = (x_1,\dots,x_l)$ задастся формулой $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{l} |x_i|^2_{E_i}\right)^{1/2}$. В частности, нормированное векторное пространство $\mathbb{R}^l$ является произведением нормированных векторных пространств $E_1,\dots,E_l$, где $E_i = \mathbb{R}\ \forall i \in \{1,\dots,l\}$.

§ 7.2. Основы анализа взаимного расположения (Analysis Situs)

Пусть X — произвольное метрическое пространство.

Для каждой точки $p \in X$ и каждого $\varepsilon > 0$ положим:
$O_\varepsilon(p,X) := \{x \in X :\ \varrho(x,p) < \varepsilon\} :=$ *открытая ε-окрестность* точки p,
$B_\varepsilon(p,X) := \{x \in X :\ \varrho(x,p) \le \varepsilon\} :=$ *замкнутая ε-окрестность* точки p.
Открытую (замкнутую) окрестность точки p называют также *открытым (замкнутым) шаром* радиуса ε с центром в точке p.

Упражнения. 1. Каковы ε-окрестности различных точек метрического пространства $[a<b] \subset \mathbb{R}$?

2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ нарисовать ε-окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^2$ относительно L_p-нормы, $p \in \{1,2,\infty\}$, при $\varepsilon = 1$.

3. Как выглядят и называются такие же ε-окрестности в пространстве $\mathbb{R}^3$?

4. Каковы ε-окрестности различных точек метрического пространства $(\overline{\mathbb{R}},\alpha)$? Здесь α — метрика на $\overline{\mathbb{R}}$, определяемая формулой $\alpha(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

5. В любом нормированном векторном пространстве E всякая ε-окрестность нуля является выпуклым множеством, симметричным относительно точки $0 \in E$.

Множество $U \subset X$ называют *окрестностью* точки $p \in X$, если U содержит некоторую ε-окрестность этой точки. Совокупность всех окрестностей точки p будем обозначать символом $\mathscr{N}_X(p)$. Подмножество U метрического пространства X называют *открытым в X множеством*, если оно является окрестностью каждой своей точки.

Упражнение. Открытая ε-окрестность точки является открытым множеством в рассматриваемом пространстве.

Свойства системы окрестностей метрического пространства.

1. Пересечение любых двух окрестностей точки является окрестностью этой точки.

2. Каждая окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки.

3. Множество, содержащее некоторую окрестность точки, само является окрестностью этой точки.

4. Любые две различные точки *метрического* пространства обладают непересекающимися окрестностями.

5. Каждая точка метрического пространства обладает такой последовательностью окрестностей $U_0 \supset \ldots \supset U_n \ldots$, что в любой окрестности V этой точки лежит некоторая окрестность вида U_n. Такие последовательности называют базисными •

Упражнения. 1. Каково множество тех точек $p \in \mathbb{R}$, для которых $\mathbb{R}_+ \in \mathscr{N}(p)$?

2. Метрика $\alpha(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ порождает стандартную систему окрестностей на расширенной числовой прямой (§ 0.1). Это позволяет расширенную числовую прямую с ес обычной системой окрестностей изучать в рамках теории метрических пространств.

Основные свойства системы открытых множеств.

1. Объединение любого семейства открытых в X множеств открыто в X.

2. Пересечение любого конечного семейства открытых в X множеств открыто в X.

3. Пустое множество $\emptyset$ и всс пространство X открыты в X •

Совокупность всех открытых в X множеств называют *топологической структурой* пространства X или *топологией* пространства X. Другой смысл слова "топология" — учение о взаимном расположении.

Говорят, что $p \in X$ является *точкой прикосновения множества* $S \subset X$, если в любой (даже сколь угодно малой) окрестности V точки

p имеются представители множества S, т. е. если

$$\forall V \in \mathscr{N}(p) \quad V \cap S \neq \emptyset.$$

Совокупность всех точек прикосновения множества S в пространстве X называют *замыканием множества* S и обозначают символом $\operatorname{Cl}_X S$ или $\overline{S}$, если ясно, о каком объемлющем пространстве идст речь.

Упражнения. 1. Каждая точка множества S является точкой его замыкания, т. е. $S \subset \overline{S}$.

2. $\infty \in \overline{\mathbb{N}} = \operatorname{Cl}_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{N}$. $\operatorname{Cl}_{\overline{\mathbb{R}}}]a < b[= [a, b]$. $\operatorname{Cl}_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{Q} = \operatorname{Cl}_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}}$. $\operatorname{Cl}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

3. $S \subset T \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{T}$.

Подмножество S пространства X называют *замкнутым* в X, если оно содержит все свои точки прикосновения, т. е. совпадает со своим замыканием $\operatorname{Cl}_X S$.

Топологический критерий замкнутости. Множество S замкнуто в X тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus S$ открыто в X.

Основные свойства системы замкнутых множеств.

1. Пересечение любого семейства замкнутых в X множеств замкнуто в X.

2. Объединение любого конечного семейства замкнутых в X множеств замкнуто в X.

3. Вce пространство X и пустое множество $\emptyset$ замкнуты в X •

Упражнения. 1. Привести пример неоткрытого и незамкнутого множества на числовой прямой $\mathbb{R}$ и на плоскости $\mathbb{R}^2$.

2. Всякая замкнутая ε-окрестность точки является замкнутым подмножеством объемлющего метрического пространства.

3. Открытая (замкнутая) часть подпространства S пространства X может не быть открытой (замкнутой) частью пространства X. Привести примеры.

Лемма об открытых (замкнутых) частях подпространства. Подмножество A подпространства S пространства X открыто (замкнуто) в S в том и только в том случае, когда существует такое открытое (замкнутое) в X множество B, что $A = B \cap S$. ◄ ►

Подмножество S пространства X называют *плотным* в X, если его замыкание совпадает с X, т. е. если $\operatorname{Cl}_X S = X$.

Точку $p \in X$ называют *внутренней* точкой множества $S \subset X$, если S является окрестностью точки p. Совокупность всех внутренних точек множества S обозначают символом $\operatorname{Int}_X S$.

Точку $p \in S$ называют *изолированной* точкой множества S, если $p \notin \operatorname{Cl}_X(S \setminus \{p\})$.

Множество $S \subset X$ называют *дискретным* в X, если каждая его точка изолирована.

Точку $p \in X$ называют *граничной* точкой множества S, если каждая ее окрестность U пересекается как с множеством S, так и с его дополнением $X \setminus S$. Совокупность всех граничных точек множества S называют границей множества S в X и обозначают символом $\operatorname{Fr}_X S$ или $\dot{S}$.

В символах $O_\varepsilon(p, X)$, $B_\varepsilon(p, X)$, $\mathcal{N}_X$, Cl_X, Int_X, Fr_X, букву X обычно опускают, когда ясно, к какому объемлющему пространству X такая символика относится, или, когда в рассматриваемом фрагменте текста объемлющим может быть любое выбранное пространство.

Упражнения. 1. Множество $S \subset X$ замкнуто (открыто) в X в том и лишь в том случае, когда $\operatorname{Fr} S \subset S$ ($\operatorname{Fr} s \cap S = \emptyset$).

2. Множества $\operatorname{Cl} S$ и $\operatorname{Fr} S$ замкнуты в X, а $\operatorname{Int} S$ открыто в X.

3. $\operatorname{Fr} S = (\operatorname{Cl} S) \setminus \operatorname{Int} S = (\operatorname{Cl} S) \cap \operatorname{Cl}(X \setminus S)$.

4. $\operatorname{Cl}_X S$ есть наименьшее замкнутое в X множество, содержащее S; $\operatorname{Int}_X S$ есть наибольшее открытое в X множество, содержащееся в S. Что это означает?

5. $\operatorname{Cl} \circ \operatorname{Cl} = \operatorname{Cl}$; $\operatorname{Int} \circ \operatorname{Int} = \operatorname{Int}$.

6. $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$. $\operatorname{Int}(A \cap B) = (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Int} B)$.

7. Верно ли, что $\operatorname{Cl}(A \cap B) = (\operatorname{Cl} A) \cap (\operatorname{Cl} B)$ и что $\operatorname{Int}(A \cup B) = (\operatorname{Int} A) \cup (\operatorname{Int} B)$?

8. Множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел плотны в $\mathbb{R}$.

9. *Метрический критерий плотности.* Подмножество S метрического пространства X плотно в X в том и только в том случае, когда для каждой точки $p \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдстся такая точка $s \in S$, что $\varrho(s, p) < \varepsilon$.

10. Множество $\mathbb{Q}^n$ рациональных точек пространства $\mathbb{R}^n$ плотно в $\mathbb{R}^n$.

Параллельные переносы и гомотетии пространства $\mathbb{R}^n$ переводят открытые множества в открытые, замкнутые множества — в замкнутые, а также перестановочны с операциями Cl, Fr, Int.

Диаметром множества S в метрическом пространстве называют число $\operatorname{diam} S := \sup\{\varrho(x, y) \mid x, y \in S\}$. Множество S называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam} S < \infty$.

Расстоянием от точки $x \in X$ до множества $S \subset X$ называют число $\varrho(x, S) := \inf\{\varrho(x, s) \mid s \in S\}$. Для функции $\varrho(x, S)$ переменной $x \in X$ справедливо следующее неравенство треугольника:

$$\varrho(x, S) \le \varrho(x, z) + \varrho(z, S).$$

Понятия, которые можно определить, опираясь лишь на понятие окрестности и на операции теории множеств, называют *топологическими.*

Таким образом, понятия ε-окрестности, диаметра, ограниченности и расстояния от точки до множества являются метрическими, а все остальные понятия этого параграфа — топологическими.

§ 7.3. Предел

В дальнейшем в этой главе буквами X, Y, Z обозначаются метрические пространства, буквами E и F — нормированные векторные пространства над полем $\Lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, а слово "пространство" считается синонимом термина "метрическое пространство".

Упражнения. 1. Обобщая понятие предела числовой последовательности, дать определение предела последовательности точек x_n пространства X.

2. Точка $p \in X$ принадлежит замыканию множества $S \subset X$ тогда и только тогда, когда имеется такая последовательность точек $x_n \in S$, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} p$.

3. *Секвенциальный критерий замкнутости.* Множество S замкнуто в X в том и лишь в том случае, когда S содержит пределы всех своих последовательностей, сходящихся в пространстве X.

4. Если последовательность точек $x_n \in X$ имеет предел в X, то она удовлетворяет *условию Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : \ \forall k, l \in \mathbb{N} \ (l \geq k \geq m \Rightarrow \varrho(x_k, x_l) \leq \varepsilon).$$

Последовательность метрического пространства, удовлетворяющую условию Коши, называют *фундаментальной* или *последовательностью Коши.*

5. *Длиной последовательности* точек x_n метрического пространства X называют число $\sum\limits_n \varrho(x_n, x_{n+1})$:

a) последовательность конечной длины фундаментальна;

b) всякая последовательность Коши обладает подпоследовательностью конечной длины.

6. Условие Коши не является достаточным для существования предела в метрическом пространстве. Привести примеры.

Метрическое пространство, в котором каждая последовательность Коши имеет предел, называют *полным.* Нормированное полное векторное пространство называют *банаховым пространством.*

Теорема. Пространство $\mathbb{R}^k$ банахово.

Следствие. Подпространство S пространства $\mathbb{R}^k$ полно в том и только в том случае, когда оно замкнуто.

Упражнения. 1. Дать определение *суммы ряда* элементов нормированного пространства и заметить, что члены суммируемого ряда стремятся к нулю (*необходимое условие суммируемости ряда*).

2. Убедиться в том, что для рядов в любом банаховом пространстве $(E, |\,|)$ справедливы:

a) *критерий Коши суммируемости ряда*: ряд $\alpha_n \in E$ суммируем в том и только в том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N} : \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \; (l \geq k \geq m \Rightarrow \left| \sum_{n=k}^{l} \alpha_n \right| \leq \varepsilon)$$

(*условие Коши суммируемости ряда*);

b) *принцип сравнения*: если для ряда $\alpha \in E$ имеется такой числовой суммируемый ряд β, что $(|\alpha_n| \leq \beta_n)_{n \to \infty}$, то ряд α суммируем;

c) *неравенство Абеля*: если $u_k \geq \ldots \geq u_l \geq 0$, то

$$|\sum_{n=k}^{l} u_n v_n| \leq u_k \sup \left\{ |\sum_{n=k}^{j} v_n| \; : \quad j \in \{k, \ldots, l\} \right\}$$

для любых $v_k, \ldots, v_l \in E$;

d) *признак Абеля—Дирихле суммируемости ряда*: если u_n — убывающая числовая последовательность, стремящаяся к нулю, и если частичные суммы ряда $v_n \in E$ образуют ограниченную последовательность, то ряд $u_n v_n$ суммируем.

Пусть p — точка прикосновения множества $S \subset X$.

Мы говорим, что *высказывание* $\Phi(x)$ *верно при* x*, стремящемся к* p *по множеству* S, и пишем $(\Phi(x))_{x \to p|S}$, если у точки p имеется такая окрестность $V \in \mathscr{N}_X(p)$, что $\Phi(x)$ справедливо при любом $x \in S \cap V$. Множество S в подобной ситуации называем *направляющим к точке* p. Приписку $x \to p|S$ часто бывает удобно помещать под одним из фрагментов высказывания $\Phi(x)$.

Примеры. 1. Если высказывание $\Phi(x)$ справедливо для каждой точки x направляющего множества S, то $(\Phi(x))_{x \to p|S}$.

2. $|x| \underset{x \to 0|\mathbb{R}}{\leq} 10^{-9}$.

3. $e^x \underset{x \to \infty|\mathbb{R}}{>} x^{100}$. Тут в качестве объемлющего пространства X негласно выступает $\overline{\mathbb{R}}$.

Пусть f — отображение некоторого множества M пространства X в пространство Y.

Будем говорить, что *функция* $f(x)$ *стремится к* $a \in Y$ *при* x, *стремящемся к* p *по множеству* S, и писать $f(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} a$, если $\forall U \in \mathscr{N}(a)\ (f(x) \in U)_{x \to p|S}$, т. е. если $\forall U \in \mathscr{N}_Y(a)\ \exists V \in \mathscr{N}_X(p)$: $: \forall x \in S \cap V\ f(x) \in U$.

Точку a в этом случае будем называть *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к p по S, и обозначать $\lim\limits_{x \to p|S} f(x)$.

Приписку $x \to p|S$ в утверждениях вида $f(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} a$, $\lim\limits_{x \to p|S}$ и $(\Phi(x))_{x \to p|S}$ обычно заменяют следующими приписками:
$x \to p$, если предполагается, что $S = \operatorname{Dom} f \setminus \{p\}$ или $S = \operatorname{Dom} \Phi \setminus \{p\}$;
$x \nearrow p$, если $X = \overline{\mathbb{R}},\ S =]-\infty, p[\, \cap \operatorname{Dom} f$ или $S =]-\infty, p[\, \cap \operatorname{Dom} \Phi$;
$x \searrow p$, если $X = \overline{\mathbb{R}},\ S =]p, \infty[\, \cap \operatorname{Dom} f$ или $S =]p, \infty[\, \cap \operatorname{Dom} \Phi$.
Например, $e^x \underset{x \to \infty}{>} x^{100}$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{sign} x = -1$.

Если $S = \mathbb{N}$, то в качестве переменной чаще всего используют буквы n, k, i, j, а не x, а вместо приписки $n \to \infty|\mathbb{N}$ пишут просто $n \to \infty$.

Метрический критерий сходимости. Для любого отображения $f : M_{\subset X} \to Y$ метрических пространств следующие условия равносильны:

a) $f(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} a \in Y$;

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in S\ \ \big(\varrho_X(x, p) < \delta \Rightarrow \varrho_Y(f(x), a) < \varepsilon\big)$;

c) $\varrho_Y\big(f(x), f(p)\big) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} 0$.

Ниже в этом параграфе рассматриваются функции вида
$f : \operatorname{Dom} f \to Y$, где $\operatorname{Dom} f \subset X$.

Упражнения. 1. Для отображений метрических пространств справедливы теоремы о единственности предела, о пределе композиции и критерий сходимости Гейне. Теоремы о промежуточной функции и о неравенстве пределов справедливы для вещественных функций.

2. Данные в гл. 2 определения асимптотических отношений сравнения $f(x) \underset{x \to p|S}{=} o\big(g(x)\big)$, $f(x) \underset{x \to p|S}{=} O\big(g(x)\big)$ автоматически переносятся на функции вида $f : \operatorname{Dom} f \to E$ и $g : \operatorname{Dom} g \to F$. При этом все свойства этих отношений, отмеченные в гл. 2, остаются справедливыми. Аналогичное утверждение справедливо и для отношения асимптотической эквивалентности $f(x) \underset{x \to p|S}{\sim} g(x)$, где f и g — скалярные функции.

3. *Теорема о сумме пределов.* Сумма пределов является пределом суммы: если E-значные функции f и g таковы, что $f(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} a$, $g(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} b$, то $f(x) + g(x) \underset{x \to p|S}{\longrightarrow} a + b$.

4. *Лемма об умножении на бесконечно малую.* Произведение асимптотически ограниченной и бесконечно малой является бесконечно малой: если при $x \to p|S$ функция $f(x)$ асимптотически ограничена, а функция $g(x)$ стремится к нулю, то $f(x)g(x) \underset{x \to p|S}{\to} 0$.

5. *Теорема о произведении пределов.* Произведение пределов является пределом произведения: если Λ-значная функция f и E-значная функция G таковы, что $f(x) \underset{x \to p|S}{\to} a \in \Lambda$, $g(x) \underset{x \to p|S}{\to} b \in E$, то $f(x)g(x) \underset{x \to p|S}{\to} ab$.

6. *Теорема об обратной величине предела.* Обратная величина предела является пределом обратной величины: если Λ-значная функция f такова, что $f(x) \underset{x \to p|S}{\to} a \neq 0$, то $\frac{1}{f(x)} \underset{x \to p|S}{\to} \frac{1}{a}$.

§ 7.4. Непрерывные отображения

Говорят, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $p \in X$, если $f(x) \underset{x \to p|X}{\to} f(p)$. Отображение $f\colon X \to Y$ называют *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $p \in X$.

Топологический критерий непрерывности. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $p \in X$ в том и только в том случае, когда прообраз любой окрестности точки $f(p) \in Y$ является окрестностью точки p :

$$\big(\forall U \in \mathscr{N}_Y(f(p)) \quad f^{-1}(U) \in \mathscr{N}_X(p)\big)\,.$$

Упражнения. 1. Всякое постоянное отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно.

2. Тождественное отображение $id\colon X \to X$ непрерывно.

3. Пусть S – подпространство пространства X. Отображение $g\colon S \to X$, определяемое равенством $g(x) = x$ $\forall x \in S$, непрерывно. Его называют *тождественным вложением* S в X.
$\triangleleft$ Воспользоваться леммой об открытых частях подпространства. $\triangleright$

4. Непрерывность в точке является локальным понятием: отображение $f : X \to Y$ окажется непрерывным в точке $p \in X$, если в X отыщется такая окрестность U этой точки, что суженное отображение $f : U \to Y$ непрерывно в точке p.

5. Пусть $X = A \cup B$. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $p \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда отображения $f\colon A \to Y$ и $f\colon B \to Y$ непрерывны в точке p. Отображение $f\colon X \to Y$ может не быть непрерывным в то время, как его сужения $f\colon A \to Y$ и $f\colon B \to Y$ непрерывны (пример: $f(x) := \max(0, \operatorname{sign} x)$).

Теорема о непрерывности композиции. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно в точке $p \in X$, а отображение $g: Y \to Z$ непрерывно в точке $q = f(p)$, то отображение $g \circ f\colon X \to Z$ непрерывно в точке p.

Лемма о непрерывности промежуточной функции. Если функции $f, u, v\colon X \to \mathbb{R}$ таковы, что $f(x) \in [u(x), v(x)]$, функции u и v непрерывны в точке $p \in X$ и $v(p) = u(p)$, то функция f непрерывна в точке p.

Метрический критерий непрерывности. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $p \in X$ в том и лишь в том случае, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из условия $\varrho_X(x, p) < \delta$ следует неравенство $\varrho_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Координатный критерий непрерывности. Функция $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon X \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ непрерывна в точке $p \in X$ в том и только в том случае, когда каждая ес компонента $f_i\colon X \to Y_i$ непрерывна в точке p.

Лемма о непрерывности проекций. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ — произведение метрических пространств. Отображение $\pi_i : X \to X_i$, определяемое формулой $\pi_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$, непрерывно. Его называют *канонической проекцией декартова произведения* на i-й сомножитель.
◀ Отображение π_i не увеличивает расстояния. ▶

Каноническую проекцию пространства $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на i-й сомножитель называют *i-й координатой* и чаще всего обозначают либо x_i, либо y_i, либо t_i. Таким образом, i-я координата x_i сопоставляет каждой точке $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ число p_i, т. е. i-ю координату этой точки. Следовательно, набор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *стандартных* координат пространства $\mathbb{R}^n$ представляет собой тождественное отображение этого пространства ($x(p) = p$).

На $\mathbb{C}$ i-ю каноническую проекцию пространства $\mathbb{C}^n$ чаще всего обозначают символом z_i.

Упражнения. 0. Расстояние $\varrho(x, S)$ от точки x до множества S как функция переменной x непрерывно.

1. Всякий полином $P(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, коэффициенты которого суть векторы пространства E, задаст непрерывное отображение $P\colon \mathbb{R}^n \to E$. В частности, всякое линейное отображение $l\colon \mathbb{R}^n \to E$ непрерывно.

2. Для любого нормированного векторного пространства E непрерывны следующие отображения:

норма $|\,|_E : E \to \mathbb{R}_+$;

операция сложения $+\colon E \times E \to E$, определяемая равенством $+(x, y) := x + y$;

операция умножения вектора на скаляр $\cdot : \Lambda \times E \to E$, определяемая равенством $\cdot(\lambda, x) := \lambda x$.

3. Непрерывны следующие операции:

скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$;

векторное произведение $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$;

операция умножения матриц $\cdot \colon M_{k,l} \times M_{l,m} \to M_{k,m}$;

детерминант $\det \colon M_{n,n} \to \mathbb{R}$.

Здесь $M_{n,k}$ — множество вещественных матриц из n строк и k столбцов. Любую матрицу $a \in M_{n,k}$ считаем системой столбцов $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Тем самым отождествляем множество $(n \times k)$-матриц с пространством $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^{nk}$.

Топологический критерий глобальной непрерывности. Следующие три свойства отображения $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f непрерывно;

(b) прообраз $f^{-1}(V)$ всякого открытого в Y множества V открыт в X;

(c) прообраз $f^{-1}(S)$ любого замкнутого в Y множества S замкнут в X.

◀ $(a) \Rightarrow (b)$. Если U открыто в Y, то множество $f^{-1}(U)$ является окрестностью каждой своей точки в силу топологического критерия непрерывности.

$(b) \Rightarrow (c)$. Если Z замкнуто в Y, то согласно топологическому критерию замкнутости $(Y \setminus Z)$ открыто в Y. В силу (b) $f^{-1}(Y \setminus Z)$ открыто в X. А так как $f^{-1}(Y \setminus Z) = X \setminus f^{-1}(Z)$, то $f^{-1}(Z)$ замкнуто в X.

Упражнение: $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$. ▶

Функциональный признак открытости. Множество, определяемое конечной системой строгих неравенств, левые и правые части которых суть непрерывные функции на пространстве X, открыто в X.

Функциональный признак замкнутости. Множество, определяемое произвольной системой, состоящей из уравнений и нестрогих неравенств, левые и правые части которых суть непрерывные функции на пространстве X, замкнуто в X •

◀ 0. Пусть $M = \{x \in X \colon \Phi_i(x),\ i \in I\}$ и $M_i = \{x \in X \colon \Phi_i(x)\},\ i \in I$, где $\big(\Phi_i(x) \colon i \in I\big)$ — произвольное семейство формул.
Тогда $M = \bigcap\limits_{i \in I} M_i$.

1. Пусть $\Phi_i(x) = (f_i(x) < g_i(x)),\ i \in \{1, \ldots, k\}$, где $f_i,\ g_i$ – непрерывные вещественные функции на X. Тогда $M_i := \{x \in X \colon \Phi_i(x)\} = \{x \in X \colon h(x) := \big(f_i(x) - g_i(x)\big) < 0\} = h^{-1}(]-\infty, 0[)$ открыто в X, ибо $]-\infty, 0[$ открыто в $\mathbb{R}$. Следовательно, множество M открыто в X,

будучи пересечением конечного числа открытых множеств M_i.

2. Пусть I — произвольное множество индексов, f_i и g_i – непрерывные вещественные функции на $X,\ i \in I$.

Если $\Phi_i(x) = \big(f_i(x) \le g_i(x)\big)$, то

$$M_i := \{x \in X \colon \Phi_i(x)\} = \{x \in X \colon h(x) := \big(f_i(x) - g_i(x)\big) \le 0\} =$$

$= h^{-1}(]-\infty, 0])$ замкнуто в X, ибо $]-\infty, 0]$ замкнуто в $\mathbb{R}$.

Если $\Phi_i(x) = \big(f_i(x) = g_i(x)\big)$, то

$$M_i := \{x \in X \colon \Phi_i(x)\} = \{x \in X \colon h(x) := \big(f_i(x) - g_i(x)\big) = 0\} =$$

$= h^{-1}\big(\{0\}\big)$ замкнуто в X, ибо множество $\{0\}$ замкнуто в $\mathbb{R}$.

Следовательно, множество M замкнуто в X, будучи пересечением замкнутых множеств M_i. ►

Следствия. 1. *Стандартная n-мерная сфера* $S^n := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \colon\ |z| = 1\}$ и *стандартный n-мерный шар* $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ |x| \le 1\}$ — замкнутые подмножества пространств $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathbb{R}^n$, соответственно.

2. Группа $GL(n)$ обратимых $n \times n$-матриц является открытым множеством пространства $L(n) := M_{n,n}$.

3. Группа $O(n)$ ортогональных $n \times n$-матриц ограничена и замкнута в пространстве $L(n)$.

Отображение $f \colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называют *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует δ_ε такое, что из условия $\varrho_X(x, x') < \delta_\varepsilon$ вытекает: $\varrho_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$ (сравнить с метрическим критерием непрерывности).

Упражнения. 1. Всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно.

2. Функция $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, но не равномерно непрерывна.

3. Отображение $f : X \to Y$ равномерно непрерывно, если найдстся такая функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, что $h(t) \underset{t \searrow 0}{\longrightarrow} 0$ и $\varrho_Y\big(f(x), f(z)\big) \le h\big(\varrho_X(x, z)\big)$ для любых $x, z \in X$. Такую функцию часто называют *модулем непрерывности отображения f*.

Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y называют *липшицевым*, если существует такая константа $c < \infty$, что

$$\varrho_Y\big(f(x), f(z)\big) \le c\varrho_X(x, z)\ \forall x, z \in X.$$

Нижнюю грань множества всех таких констант c, для которых справедлива эта формула, будем обозначать $lip(f)$ и называть *константой*

Липшица отображения f.

Константу Липшица линейного отображения $a : E \to F$ нормированных пространств называют *нормой оператора* a и обозначают $\|a\|$.

Упражнения. 1. Всякое липшицево отображение равномерно непрерывно.

2. Отображение $f(x) = \sqrt{x} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равномерно непрерывно, но не липшицево.

3. Если функция f дифференцируема на промежутке $T \subset \mathbb{R}$, то

$$lip(f) = \sup\{|f'(t)| \colon t \in T\}.$$

4. $lip(f) = \sup\{\frac{\varrho_Y\left(f(x),f(z)\right)}{\varrho_X(x,z)} : x, z \in X,\ x \neq z\}$. Имея в виду эту формулу, константу Липшица вещественной функции называют крутизной ес графика.

5. Какова константа Липшица проекции декартова произведения метрических пространств на один из сомножителей?

6. Найти константу Липшица функции $\varrho(x, S)$ в том случае, когда S плотно в X, и в том случае, когда S неплотно в X.

Отображение φ называют *сжимающим*, если его константа Липшица $lip(\varphi)$ меньше единицы.

Теорема о неподвижной точке сжимающего отображения. Всякое сжимающее отображение $\varphi : X \to X$ непустого полного метрического пространства в себя обладает неподвижной точкой, т. е. такой точкой $p \in X$, что $p = \varphi(p)$.

◀ Пусть x_0 — какая-нибудь точка пространства X, $x_1 := \varphi(x_0), \dots$, $x_n := \varphi(x_{n-1}), \dots$ и $c = lip(\varphi)$. Тогда

$$\varrho(x_n, x_{n+1}) = \varrho\big(\varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)\big) \leq c\varrho(x_{n-1}, x_n) \ldots \leq c^n \varrho(x_0, x_1).$$

Поскольку $c < 1$, то длина рассматриваемой последовательности $\sum\limits_n \varrho(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\varrho(x_0,x_1)}{1-c} < \infty$. Следовательно, последовательность x_n фундаментальна. Так как X полно, то x_n сходится к некоторой точке $p \in X$.

Отображение φ непрерывно и потому

$$\varphi(p) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = p. \blacktriangleright$$

"Контрпример". Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $\varphi(x) = x - \arctan x - 2$, уменьшает расстояния, но не обладает неподвижной точкой.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называют *топологическим изоморфизмом* или *гомеоморфизмом*, если имеется такое непрерывное отображение $g : Y \to X$, что $g \circ f := id_X$, а $f \circ g = id_Y$. Иными словами, гомеоморфизм — это непрерывное отображение, обладающее непрерывным обратным.

Пространства X и Y называются *гомеоморфными* или *топологически изоморфными*, если существует гомеоморфизм $f : X \to Y$.

Примеры и упражнения. 1. Если $f \colon T \to \mathbb{R}$ — непрерывная инъективная функция на промежутке T, то отображение $f \colon T \to f(T)$ есть гомеоморфизм, а множество $f(T)$ является промежутком того же типа, что и T.

2. Отображение $z \colon [0, 2\pi[\to S^1$, задаваемое формулой $z(t) = e^{it}$, непрерывно и биективно, однако обратное к нему отображение разрывно в точке $1 \in \mathbb{C}$.

3. Гомеоморфны: а) окружность и эллипс, б) круг и квадрат, в) плоскость $\mathbb{R}^2$ и открытый квадрат, г) шар и куб в $\mathbb{R}^3$.

4. Всякое биективное линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом.

5. Следующие три свойства непрерывного биективного отображения эквивалентны:

a) f — гомеоморфизм;

b) f переводит открытые множества в открытые;

c) f переводит замкнутые множества в замкнутые.

Для того чтобы установить, что пространства X и Y негомеоморфны, надо указать какое-либо топологическое свойство, которым одно из этих пространств обладает, а другое нет.

Свойство $\mathscr{A}$ метрических пространств называют *топологическим*, если из того, что пространство X обладает свойством $\mathscr{A}$, следует, что любое пространство Y, гомеоморфное X, также обладает свойством $\mathscr{A}$.

Например, число точек пространства — топологическое свойство.

Пространство X называют *линейно связным*, если любые две его точки соединимы путсм, т. е. если для любых двух точек $p, q \in X$ существует такое непрерывное отображение $\gamma \colon [a, b] \to X$, что $\gamma(a) = p$ и $\gamma(b) = q$.

Упражнения. 1. Образ линейно связного пространства при непрерывном отображении линейно связен и, следовательно, линейная связность является топологическим свойством.

2. Если в пространстве X точка p соединима путсм с точкой q, а точка q — с точкой r, то точки p и r соединимы путсм в пространстве X и, следовательно, объединение любого семейства попарно пересекающихся

линейно связных подпространств пространства X линейно связно.

3. Пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и сфера S^{n-1} линейно связны при $n \geq 2$.

4. Русский алфавит содержит три не линейно связные буквы.

5. Всякое линейно связное подпространство числовой прямой является промежутком.

6. Количество компонент линейной связности пространства является топологическим свойством. (Непустое линейно связное подпространство L пространства X называют *компонентой линейной связности пространства* X, если оно не содержится в более широком линейно связном подпространстве.)

7. Промежутки расширенной числовой прямой одного наименования гомеоморфны, а разных наименований — нет. Промежуток и окружность не гомеоморфны.

8. Какие заглавные буквы латинского алфавита гомеоморфны между собой, а какие нет? Предполагается, что буква есть подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, составленное из нескольких отрезков.

Информация. Если замкнутые подмножества S и Z пространства $\mathbb{R}^n$ гомеоморфны, то их дополнения $\mathbb{R}^n \setminus S$ и $\mathbb{R}^n \setminus Z$ имеют одинаковое количество компонент линейной связности (*теорема Александера—Понтрягина*). В частности, если S гомеоморфно k-мерному шару, то его дополнение линейно связно. А если S гомеоморфно сфере S^{n-1}, то егодополнение состоит из двух компонент линейной связности (*теорема Жордана—Брауэра*).

Теорема. Группа $GL(n)$ обратимых матриц состоит из двух компонент линейной связности: $GL^+(n) := \{x \in L(n) : \ \det x > 0\}$ и $GL^-(n) := \{x \in L(n) : \ \det x < 0\}$.

◀ Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Для всякого числа δ символом $e(\delta)$ обозначим матрицу, первый столбец которой есть вектор δe_1, а i-тый столбец совпадает с вектором e_i при $i > 1$.

Простой перестройкой матрицы назовсм операцию прибавления к одному из ес столбцов линейной комбинации остальных столбцов.

1) Для каждой матрицы $a \in GL(n)$ существует такая цепочка матриц $a_0, \ldots, a_k \in GL(n)$, что $a_0 = a$, $a_k = e(\delta)$, a_i получена простой перестройкой из a_{i-1}.

2) Если матрица b получена из $a \in GL(n)$ простой перестройкой, то отрезок $[a, b] \subset GL(n)$.

3) Если $\delta \neq 0$, то $[e(\delta), e(\operatorname{sign} \delta)] \subset GL(n)$.

4) Если матрицы a и b соединимы путсм в $GL(n)$, то $\operatorname{sign} \det a = \operatorname{sign} \det b$. ▶

Поскольку каждая $(n \times n)$-матрица A является системой столбцов

$A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^n$, то группа $GL(n)$ представляет собой пространство базисов векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Базисы $a, b \in GL(n)$ называют *одинаково ориентированными*, если они соединимы путсм в пространстве базисов $GL(n)$ и — *противоположно ориентированными* в ином случае.

Критерий сориентированности базисов. Базисы a и b пространства $\mathbb{R}^n$ одинаково ориентированы в том и только в том случае, когда $\operatorname{sign}(\det a) = \operatorname{sign}(\det b)$.

Упражнения. 1. Группа ортогональных матриц состоит из двух компонент линейной связности. (Вспомните о преобразовании Грама—Шмидта $GL(n) \to O(n)$.)

2. Пространство $U(n)$ унитарных $(n \times n)$-матриц линейно связно.

§ 7.5. Компактность

Говорят, что система множеств $\omega = (U_i \subset X\colon\ i \in I)$ *покрывает* множество S или является *покрытием* множества S, если $S \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Покрытие ω называют открытым, если каждый его элемент (множество U_i) является открытой частью пространства X.

Теорема Бореля—Лебега. Любое открытое покрытие отрезка числовой прямой $\mathbb{R}$ содержит конечное подпокрытие.

◀ Пусть $\omega = (U_i\colon\ i \in I)$ — открытое покрытие отрезка $T_0 = [a, b]$. Множество $S \subset T_0$ называют ω-ограниченным, если имеется конечный набор $U_{i_1}, \dots, U_{i_k}$ элементов покрытия ω, покрывающий S. Для краткости такие множества будем называть хорошими. Наша цель — установить, что отрезок T_0 хорош.

Допустим, что отрезок T_0 плох. Тогда одна из его половинок $[a, c]$ или $[c, b]$ $(c = \frac{a+b}{2})$ окажется плохой, ибо объединение двух хороших множеств является хорошим множеством. Пусть T_1 — плохая половинка отрезка $T_0, \dots,$ T_n — плохая половинка отрезка $T_{n-1}, \dots$. Согласно принципу вложенных отрезков, существует точка p, принадлежащая каждому из этих отрезков. Пусть U_i — элемент открытого покрытия ω, содержащий точку p. Поскольку U_i является окрестностью этой точки, а диаметр отрезка T_n равен $2^{-n}|b - a|$, то найдстся такой номер n, что $T_n \subset U_i$. Это означает, что плохой отрезок T_n хорош — противоречие. ▶

Упражнения. 1. Для интервалов и полуинтервалов подобное утверждение неверно.

2. Верно ли, что всякое покрытие отрезка, состоящее из отрезков, содержит конечное подпокрытие?

Пространство X называют *компактным*, если всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактное пространство часто называют *компактом*.

Теорема Вейерштрасса об экстремумах. На непустом компакте всякая непрерывная вещественная функция обладает наибольшим и наименьшим значениями.

◀ Пусть $f : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на непустом компакте K и $h := \sup f(K)$. Наша цель — установить, что $h \in f(K)$.

Допустим, что это не так. Пусть $y_0 < y_1 < \dots y_n < \dots$ — какая-нибудь последовательность, сходящаяся к h. Для каждого номера n положим $U_n := \{x \in K\colon\ f(x) < y_n\}$. Легко видеть, что $U_0 \subset U_1 \dots U_n \subset U_{n+1} \dots$. Кроме того, каждое U_n открыто в K согласно функциональному критерию открытости. И наконец, каждая точка $x \in K$ лежит в некотором U_n, ибо по нашей гипотезе $f(x) < h$ и потому найдстся такое число y_n, что $f(x) < y_n$.

Таким образом, возрастающая последовательность множеств U_n образует открытое покрытие компакта K и потому найдстся U_n, покрывающее K. Это означает, что $f(x) < y_n \ \forall x \in K$ Стало быть, $y_n \geq \sup f(K) = h$ — абсурд!

Наличие наименьшего значения устанавливается аналогично. (Для чего была нужна непустота K?) ▶

Следствия. 1. На компактном пространстве любая $\mathbb{R}$-значная непрерывная функция ограничена.

2. Всякое компактное метрическое пространство ограничено.

Лемма 1. Замкнутое подпространство компакта компактно.

◀ Пусть Z замкнутое подпространство компакта K и пусть $(U_i \subset Z\colon\ i \in I)$ — открытое покрытие этого подпространства. Согласно лемме об открытых частях подпространства, для каждого $i \in I$ имеется такое открытое в K множество V_i, что $U_i = V_i \cap Z$.

Пусть $A := K \setminus Z$ и $A_i := V_i \cup A$. Множество A открыто в K, ибо Z замкнуто. Следовательно, A_i открыто в K. Семейство $(A_i\colon\ i \in I)$ открытых множеств покрывает компакт K и потому содержит конечный набор $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$, покрывающий K. Так как $Z \cap A_i = Z \cap V_i = U_i \ \forall i \in I$, то множества $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ покрывают Z. ▶

Лемма 2. Любое компактное подпространство K метрического пространства H замкнуто.

◀ Пусть $p \in H \setminus K$. Для каждой точки $x \in K$ имеются непересекающиеся открытые окрестности U_x и V_x точек x и p соответственно. Семейство $(U_x\colon\ x \in K)$ открытых частей пространства H покрывает компакт K. Значит, найдутся такие точки $x_1, \dots, x_n \in K$, что

$K \subset \bigcup\limits_i U_{x_i} =: U$. Нетрудно понять, что множество $V := \bigcap\limits_i V_{x_i}$ не пересекается с U, а, значит, и с K. Поскольку V является окрестностью точки p, то $p \notin \operatorname{Cl} K$. ▶

Лемма 3. Непрерывный образ компакта компактен.

◀ Пусть $f : K \to X$ — непрерывное отображение компакта K, $(U_i\colon\ i \in I)$ – открытое покрытие подпространства $f(K)$ пространства X. В силу критерия глобальной непрерывности семейство множеств $(V_i := F^{-1}(U_i)\colon\ i \in I)$ является открытым покрытием компакта K и потому имеет конечное подпокрытие $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$. Остатся заметить, что множества $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ покрывают $f(K)$. ▶

Теорема о непрерывной биекции. Непрерывное биективное отображение компакта K в метрическое пространство H, является топологическим изоморфизмом.

◀ Пусть $g : H \to K$ — обратное к f отображение и Z — произвольное замкнутое подмножество компакта K. Поскольку Z компактно (?), то множество $g^{-1}(Z) = f(Z)$ компактно в H (?) и потому замкнуто (?). В силу критерия глобальной непрерывности отображение g непрерывно. ▶

"Контрпример". Отображение $z\colon [0, 2\pi[\to S^1$, задаваемое формулой $z(t) = e^{it}$, непрерывно и биективно, но не является гомеоморфизмом.

Теорема Гейне–Кантора о равномерной непрерывности. Всякое непрерывное отображение компактного пространства в любое метрическое пространство равномерно непрерывно.

◀ Пусть $f : K \to M$ — такое отображение и $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывно в каждой точке, то

$$\forall x \in K\ \exists \delta(x) > 0\colon\ \forall y \in K\quad \Big(\varrho(y,x) < \delta(x) \Rightarrow \varrho\big(f(y), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}\Big). \quad (*)$$

Для каждого $x \in K$ положим $U(x) := O_{\delta(x)/2}(x)$. Система $(U(x)\colon\ x \in K)$ открытых множеств покрывает компакт K и потому имеется конечный набор $\alpha := \big(U(x_1), \dots, U(x_n)\big)$, покрывающий K.

Пусть $x, y \in K$ — такие точки, что $\varrho(y,x) < \delta :=$ $:= \min(\frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_n)}{2})$. Точка x лежит в некотором шаре $U(x_i)$ радиуса $\frac{\delta(x_i)}{2}$. Следовательно, $\varrho(x_i, x) < \frac{\delta(x_i)}{2}$, а $\varrho(y, x_i) \le \varrho(y,x) + \varrho(x, x_i) <$ $< \delta + \frac{\delta(x_i)}{2} < \delta(x_i)$. Поэтому согласно $(*)$
$\varrho\big(f(y), f(x)\big) \le \varrho\big(f(y), f(x_i)\big) + \varrho\big(f(x_i), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. ▶

Секвенциальный критерий компактности (СКК). Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность его точек обладает подпоследовательностью, сходящейся в этом пространстве.

◀ **Необходимость.** Для последовательности x_n и множества S положим $x^{-1}(S) := \{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in S\}$.

1. Каждая последовательность точек x_n компактного пространства K обладает точкой сгущения, т. е. имеется такая точка $p \in K$, в каждую окрестность U которой попадает бесконечно много членов этой последовательности (множество $x^{-1}(U)$ бесконечно).

◁ Допустим, что это не так. Тогда для для каждой точки $p \in K$ найдстся такая открытая окрестность $U(p)$, что множество номеров $N(p) := x^{-1}(U(p))$ конечно. Семейство открытых множеств $(U(p)\colon\ p \in K)$ покрывает компакт K. Значит, имеются множества $U(p_1), \dots, U(p_n)$, покрывающие K. Следовательно, конечные множества $N(p_1), \dots, N(p_n)$ покрывают натуральный ряд — абсурд! ▷

2. Пусть p — точка сгущения последовательности x_n в метрическом пространстве M. Тогда найдстся подпоследовательность, сходящаяся к этой точке.

◁ Пусть $U_0 \subset \dots U_n \subset \dots$ — базисная система окрестностей точки p и $V_n := x^{-1}U_n$. При любом $k \in \mathbb{N}$ множество номеров V_k бесконечно и, значит, содержит номер $n_k > k$.

Легко видеть, что при $k \to \infty$ $n_k \to \infty$, а $x_{n_k} \to p$, ибо $x_{n_k} \in U_k$. ▷

Достаточность. Пусть M — метрическое пространство, в котором каждая последовательность точек обладает сходящейся подпоследовательностью.

(a) Для каждого $\varepsilon > 0$ пространство M содержит конечное *ε-плотное множество* S. ($S \subset M$ называют ε-плотным или ε-сетью, если его ε-окрестность совпадает с M.)

◁ Пусть $x_0 \in M$ — произвольная точка и $U_0 = O_\varepsilon(x_0)$. Если $U_0 \neq M$, то отметим какую-нибудь точку $x_1 \in M \setminus U_0$ и положим $U_1 := U_0 \cup O_\varepsilon(x_1)$. ... Если $U_k \neq M$, то отметим какую-нибудь точку $x_{k+1} \in M \setminus U_k$ и положим $U_{k+1} := U_k \cup O_\varepsilon(x_{k+1}) \dots$. Если этот процесс не оборвстся, то мы получим бесконечную последовательность x_k, расстояние между любыми членами которой не меньше ε. Но такая последовательность не имеет сходящихся подпоследовательностей. Стало быть, наш процесс закончится созданием множества $S = \{x_0, \dots, x_n\}$, ε-окрестность которого U_n покрывает M. ▷

Пусть ω — открытое покрытие пространства M.

(b) Существует такое число $\varepsilon > 0$, что любой шар вида $O_\varepsilon(x)$, $x \in M$, лежит в некотором элементе U покрытия ω.

◁ Число ε, обладающее этим свойством, назовсм хорошим и допустим, что числа $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$ плохие. Это означает, что для каждого номера $n > 0$ найдстся такая точка x_n, что шар $O_{1/n}(x_n)$ не помещается ни в каком элементе покрытия ω.

По условию имеется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторой точке $p \in M$. Эта точка лежит в каком-то элементе U покрытия ω. Пусть $O_{2\varepsilon}(p)$ — шар, лежащий в U. Поскольку x_{n_k} сходится к p, а $1/n_k$ — к нулю, то существует такой номер k, что $x_{n_k} \in O_\varepsilon(p)$, а $\delta := 1/n_k < \varepsilon$. Следовательно, $O_\delta(x_{n_k}) \subset O_{2\varepsilon}(p) \subset U \in \omega$, т. е. плохое число δ не является плохим — абсурд! ▹

Пусть $\varepsilon > 0$ — хорошее число. Согласно пункту (а) существуют такие точки $p_1, \dots, p_k \in M$, ε-окрестности $V_1, \dots, V_k$ которых покрывают всс пространство M. Так как ε — хорошее число, то каждый шар V_i лежит в некотором элементе U_i покрытия ω. ►

Теорема. Декартово произведение $K \times L$ компактов компактно.

◄ Пусть X, Y — компактные метрические пространства, $Z = X \times Y$ и $z_n = (x_n, y_n)$ — какая-нибудь последовательность в Z. Согласно СКК, последовательность x_n обладает подпоследовательностью x_{n_k}, сходящейся к некоторой точке $p \in X$, а y_n — подпоследовательностью $y_{n_{k_i}}$, сходящейся к некоторой точке $q \in Y$. Так как подпоследовательность $x_{n_{k_i}}$ сходится к p, то по координатному критерию сходимости подпоследоватльность $z_{n_{k_i}}$ сходится к точке (p, q). ►

Теорема о компактах в $\mathbb{R}^k$. Подпространство S пространства $\mathbb{R}^k$ компактно в том и только в том случае, когда оно ограничено и замкнуто.

◄ **Необходимость** является прямым следствием леммы 2 и следствия 2 теоремы Вейерштрасса об экстремумах.

Достаточность. Пусть S – ограниченное и замкнутое подпространство в $\mathbb{R}^n$. Будучи ограниченным, S является частью некоторого куба $Q = [a, b]^k$. Согласно теореме Бореля—Лебега и теореме о произведении компактов, куб Q компактен.

Так как S и Q замкнуты в $\mathbb{R}^k$ (почему?), то S замкнуто в Q (почему?) и потому компактно (почему?). ►

Теорема. Любые две нормы пространства $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

◄ Достаточно установить, что произвольная норма $'|\,|$ в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна стандартной (евклидовой) норме $|\,|$.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$'|x| =' \big| \sum x_i e_i \big| \leq \sum{}' |e_i||x_i| \leq c|x|, \text{ где } c = \left(\sum{}' |e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е. евклидова норма мажорирует штрих-норму.

Пусть E — пространство $\mathbb{R}^n$, снабжснное штрих-нормой; $S := S^{n-1} := \{x \in E\colon\ |x| = 1\}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$, называемое стандартной $(n-1)$-мерной сферой; $j : \mathbb{R}^n \to E$ — тождественное отображение ($j(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$); $'S := j(S)$ — подпространство нормированного пространства E, т. е. та же самая сфера, но снабжснная расстоянием, задаваемым штрих-нормой: $\varrho(x, y) =' |y - x|$.

Отображение $j : \mathbb{R}^n \to E$ непрерывно, как и любое линейное отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в нормированное пространство. Подпространство S пространства $\mathbb{R}^n$ компактно, будучи ограниченным и замкнутым. Согласно теореме Вейерштрасса, функция $'|\,| :' S \to \mathbb{R}$ обладает наименьшим значением $:= \delta$. Поэтому для каждого $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{x}{|x|} \in S =' S \Rightarrow \delta \leq' \left|\frac{x}{|x|}\right| = \frac{'|x|}{|x|}.$$

А так как $\delta > 0$ (почему?), то $|x| \leq \frac{1}{\delta}{}'|x|\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. ►

Упражнения. 0. Пересечение убывающей последовательности $Z_0 \supset \ldots Z_n \supset \ldots$ непустых замкнутых подмножеств компакта K непусто. (Обобщение принципа вложенных отрезков.)

1. Всякая компактная выпуклая окрестность точки в пространстве $\mathbb{R}^n$ гомеоморфна n-мерному замкнутому шару.

2. Пусть E — векторное пространство непрерывных вещественных функций на отрезке $[0, 1]$. Для каждой функции $f \in E$ положим $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}$. Замкнутый шар в нормированном пространстве E не компактен.

Информация. Нормированное векторное пространство V конечномерно тогда и только тогда, когда у точки $0 \in V$ есть компактная окрестность.

Глава 8. ОСНОВЫ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этой главе предполагается, что слово "функция" является синонимом фразы "отображение вида $f : X \to E$," где $X \subset \mathbb{R}^n$, а E — банахово пространство с нормой $|\,|$.

§ 8.1. Частные производные

Говорят, что функция $f : U \to E$ *дифференцируема (обладает производной) в точке* $p \in X$ *вдоль вектора (по вектору)* $v \in \mathbb{R}^n$, если функция $\varphi(t) := f(p + tv)$ вещественной переменной t дифференцируема в точке $0 \in \mathbb{R}$. В этом случае элемент $\varphi'(0) \in E$ называют *производной функции* f *вдоль вектора (по вектору)* v *в точке* p и обозначают символом $\partial_v f(p)$. Таким образом, $\partial_v f(p) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} \in E$.

Упражнения. 0. Функция f обладает производной по вектору v в точке $p + tv$ в том и только в том случае, когда функция $\varphi(\tau) := f(p + \tau v)$ переменной $\tau \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке t. В этом случае $\partial_v f(p + tv) = \varphi'(t)$.

1. Если вектор-функция $f\colon T \to E$, $T \subset \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $p \in T$, а $v = 1 \in \mathbb{R}$, то $\partial_v f(p) = f'(p)$.

2. Сумма функций f и g, дифференцируемых по вектору v в точке p, дифференцируема по вектору v в точке p, причсм

$$\partial_v(f + g)\big|_p = \partial_v f(p) + \partial_v g(p).$$

3. Произведение fg функций f и g, дифференцируемых по вектору v в точке p, дифференцируемо по вектору v в точке p, причсм

$$\partial_v fg(p) = (\partial_v f(p))g(p) + f(p)\,\partial_v g(p).$$

4. *Координатный критерий дифференцируемости по вектору.* Функция $f = (f_1, \dots, f_l) : X \to E = E_1 \times \ldots \times E_l$ дифференцируема по вектору v в точке p тогда и только тогда, когда каждая ес компонента $f_i : X \to E_i$ дифференцируема по вектору v в точке p. В этом случае

$$\partial_v f(p) = \big(\partial_v f_1(p), \dots, \partial_v f_l(p)\big).$$

Множество точек, в которых функция f дифференцируема по вектору v, будем обозначать символом $\mathrm{Dom}\,\partial_v f$. Функцию, значение которой в каждой точке $x \in \mathrm{Dom}\,\partial_v f$ равно $\partial_v f(x)$, обозначают символом $\partial_v f$ и называют *производной функции* f *по вектору* v.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Производную функции f вдоль i-го базисного вектора e_i называют *i-й частной производной функции* f и обозначают $D_i f$. Упорядоченный набор $Df := (D_1 f, \dots, D_n f)$ всех частных производных функции f называют *матрицей Якоби* функции f. Матрица Якоби $\mathbb{R}^k$-значной функции n переменных имеет k строк и n столбцов; в этом случае i, j-й член матрицы Df равен $D_j f_i$. Детерминант матрицы Якоби функции вида $f : X_{\subset\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$ называют *якобианом* этой функции.

Если стандартные координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначены буквами $x_1, \dots, x_n$, то вместо $D_i f$ часто пишут $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, а вместо Df — $\frac{\partial f}{\partial x}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат.

Принцип фиксации переменных. Формула

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + te_1) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1 + t, x_2, \dots) - f(x_1, x_2, \dots)}{t}$$

говорит о том, что, вычисляя первую частную производную функции $f(x_1, \dots x_n)$ переменных $x_1, \dots x_n$, можно считать все буквы набора $x = (x_1, \dots x_n)$, кроме первой, постоянными, т. е. рассматривать выражение $f(x)$ как функцию переменной x_1. Аналогично поступают с другими переменными. Например:

$$\frac{\partial x^y}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial x^y}{\partial y} = x^y \ln x \ .$$

Замечание. Поскольку для всякого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to E$ имеет место формула $A\langle v\rangle = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_i = A\langle e_i\rangle$, то $DA = \frac{\partial A}{\partial x} = a := (a_1, \dots, a_n)$, т. е. *матрица Якоби линейного отображения согласно терминологии курсов линейной алгебры является матрицей этого линейного отображения.*

Говорят, что p есть *точка минимума (строгого минимума) вещественной функции* f на множестве X, если $f(x) \geq f(p)$ $\forall x \in X$ (если $f(x) > f(p)$ $\forall x \in X \setminus \{p\}$).

Говорят, что p есть *точка локального (строгого локального) минимума функции* f *на множестве* X, если у точки p имеется такая окрестность U, что $f(x) \geq f(p)$ $\big(f(x) > f(p)\big)$ $\forall x \in X \cap U \setminus \{p\}$. Аналогично определяются *точки максимума, строгого максимума, локального максимума и строгого локального максимума функции.* Точки локального минимума и точки локального максимума называют *точками локального экстремума функции.*

Необходимое условие локального экстремума (лемма Ферма). Если p – точка локального экстремума функции f на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и в этой точке определена производная по вектору v функции f, то $\partial_v f(p) = 0 \in E$. В частности, если в точке p определены все частные производные этой функции, то все они равны нулю $\in E$.

Лемма о степенно́й оценке приращения (ЛСОП). Пусть в шаре $U \subset \mathbb{R}^n$ с центром в точке p определены все частные производные функции f, причсм имеются такие константы $c, s \in \mathbb{R}_+$, что для каждой точки $x \in U$ выполнено неравенство $|D_i f(x)| \leq c(|x - p|_1)^s$ при любом

$i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\forall x \in U \quad |f(x) - f(p)| \le \frac{c}{s+1}(|x-p|_1)^{s+1} \le \frac{c}{s+1}(\sqrt{n}|x-p|)^{s+1}.$$

◀ Достаточно считать, что $p = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$, $p_0 := p$, $p_1 := p_0 + x_1 e_1, \dots$, $p_n := p_{n-1} + x_n e_n = x$, $\varphi_i(t) := f(p_{i-1} + te_i)$. Так как $[p_{i-1}, p_i] \subset U \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, то

$$\left| f \Big|_{p_{i-1}}^{p_i} \right| = \left| \varphi_i \Big|_0^{x_i} \right| = \Big| \int\limits_0^{x_i} \varphi_i'(t)dt \Big| = \Big| \int\limits_0^{x_i} D_i f(p_{i-1} + te_i)dt \Big| \le$$

$$\le \Big| \int\limits_0^{x_i} c|p_{i-1} + te_i|_1^s dt \Big| \le c \int\limits_0^{|x_i|} (|p_{i-1}|_1 + t)^s dt =$$

$$= \frac{c}{s+1}\big((|p_{i-1}|_1 + |x_i|)^{s+1} - |p_{i-1}|_1^{s+1}\big) = \frac{c}{s+1}\big(|p_i|_1^{s+1} - |p_{i-1}|_1^{s+1}\big).$$

Следовательно,

$$\left| f \Big|_p^x \right| \le \sum_{i=1}^n \left| f \Big|_{p_{i-1}}^{p_i} \right| \le \frac{c}{s+1}\big(|p_n|_1^{s+1} - |p_0|_1^{s+1}\big) =$$

$$= \frac{c}{s+1}|x|_1^{s+1} = \frac{c}{s+1}|x-p|_1^{s+1}. \ ▶$$

Дифференциальный признак непрерывности. Если в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ определены и ограничены все частные производные функции f, то f непрерывна на U.

Пример. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определеснная условиями $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, дифференцируема в каждой точке плоскости $\mathbb{R}^2$ по любому вектору. В частности, она дифференцируема как функция переменной x и как функция переменной y. Однако она разрывна в точке $(0,0)$.

Упражнения 1. Пусть в открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ все частные производные функции f определены и ограничены константой c. Если точки p и q соединимы в U отрезком ($[p,q] \subset U$), то

$$|f(q) - f(p)| \le c|q-p|_1 \le c\sqrt{n}|q-p|.$$

2. Если в открытом выпуклом множестве $V \subset \mathbb{R}^n$ все частные производные функции f определены и ограничены, то на V функция f

липшицева.

3. Пусть $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \le 0, y = 0\}$ = (левый луч оси абсцисс) и $U = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Для каждой точки $(x,y) \in U$ угол между векторами (1,0) и (x,y) обозначим через $\theta(x,y) \in [-\pi,\pi]$.

a) Найти частные производные функции θ.

Подсказ. Если $x > 0$, то $\theta(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$; если $y > 0$, то $\theta(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$; если $y < 0$, то $\theta(x,y) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}$.

b) На линейно связном открытом множестве $U' := \{(x,y) \in U\colon x^2 + y^2 > 1\}$, частные производные функции θ ограничены. Однако на этом множестве функция f не липшицева и даже не равномерно непрерывна.

§ 8.2. Дифференциал

Будем говорить, что функция $f : U \to E$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *дифференцируема* в точке $p \in U$ и писать $f \in \mathscr{D}(p)$, если:

1) множество U является окрестностью точки p ($U \in \mathscr{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$);

2) имеется такое линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to E$, что

$$f(x) = f(p) + A\langle x-p\rangle + \omega(x),\ \text{где}\ \omega(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|).$$

В этом случае отображение A называют *дифференциалом* функции f в точке p и обозначают символом $df(p)$. Значение дифференциала $df(p)$ на векторе v будем обозначать $df(p)\langle v\rangle$ или $df(p)v$. Отображение f называют дифференцируемым, если оно дифференцируемо в каждой точке области $\operatorname{Dom} f$.

Упражнения 1. Постоянное отображение $f : \mathbb{R}^n \to E$ дифференцируемо, а его дифференциал $df(p)$ в каждой точке $p \in \mathbb{R}^n$ есть нулевое отображение из $\mathbb{R}^n$ в E.

2. Всякое линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to E$ дифференцируемо; его дифференциал в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$ совпадает с ним самим, т. е. $dA(x)v = Av\ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

3. Дифференцируемость и дифференциал суть локальные понятия: если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки p и если $f \in \mathscr{D}(p)$, то $g \in \mathscr{D}(p)$ и $df(p) = dg(p)$.

Лемма 0 (об отношении "о-малое"). Пусть $\omega : X \to E$ — функция, равная нулю в точке $p \in X$. Тогда $\omega(x) \underset{x\to p}{=} o\big((x-p)^k\big)$, $k \in \mathbb{N}$ в том и лишь в том случае, когда функция φ представима в виде $\omega(x) = \alpha(x)|x-p|^k$, где α — функция, непрерывная в точке p и равная нулю в этой точке.

◀ Простое следствие определений. ▶

Следствие. Функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке.

Формула для производной по вектору. Если $f \in \mathscr{D}(p)$, то функция f обладает производной $\partial_v f(p)$ вдоль каждого вектора $v \in \mathbb{R}^n$. При этом

$$\partial_v f(p) = df(p)v = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) v_i = \big(D_1 f(p), \ldots, D_n f(p)\big) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= Df(p) \cdot v.$$

◀ Согласно лемме 0, функция f представима в виде $f(x) = f(p) + df(p)\langle x - p\rangle + \alpha(x)|x - p|$, где α — функция, непрерывная в точке p и равная нулю в этой точке. Поэтому для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\left| \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} - df(p)\langle v\rangle \right| = |v||\alpha(p + tv)| \underset{x \to p}{\to} 0.$$

Значит, $\partial_v f(p) = df(p)\langle v\rangle = df(p)\langle \sum\limits_i v_i e_i\rangle = \sum\limits_i v_i df(p)\langle e_i\rangle =$
$= \sum\limits_i v_i \,\partial_{e_i} f(p) = \sum\limits_i v_i D_i f(p) = Df(p) \cdot v.$ ▶

Следствие. Единственность дифференциала: если $f \in \mathscr{D}(p)$ и A_1, A_2 — дифференциалы функции f в точке p, то $A_1 = A_2$.

Координатное представление дифференциала. Если $f \in \mathscr{D}(p)$, то

$$df(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i,$$

где $dx_1, \ldots, dx_n$ — дифференциалы стандартных координат $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

◀ i-я координата x_i есть отображение $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, сопоставляющее каждому вектору $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ его i-ю координату v_i. Следовательно (формула для производной по вектору и упр.1.2):

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \; df(p)v = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) v_i = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) dx_i(p) v,$$

т. е. функции $df(p)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i f(p) dx_i(p)$ совпадают. Остастся заметить, что отображение $dx_i(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не зависит от p и что в подобных ситуациях выражение (p) принято опускать. ▶

Достаточный признак дифференцируемости. Если в некоторой окрестности U точки p определены все частные производные функции f и все они непрерывны в точке p, то $f \in \mathscr{D}(p)$.

◀ Для каждого вектора $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ и для каждой точки $x \in \operatorname{Dom} f$ положим $A\langle v \rangle := \sum\limits_i D_i f(p) v_i$ и $\omega(x) := f(x) - \big(f(p) + A\langle x - p \rangle\big)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $D_i\omega(x) = D_i f(x) - D_i f(p) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, то все частные производные функции ω непрерывны в точке p и равны нулю в этой точке. Значит, имеется шар U с центром p, в котором все частные производные функции ω ограничены константой $\varepsilon/\sqrt{n}$. Согласно ЛСОП §8.1, $|\omega(x) - \omega(p)| \le \varepsilon|x - p| \quad \forall x \in U$. Это означает, что $\omega \underset{x\to p}{=} o\big(|x - p|\big)$. Следовательно, линейное отображение A служит дифференциалом функции f. ▶

Пример. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определелснная условиями $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, имеет ограниченные частные производные на $\mathbb{R}^2$. Однако она не дифференцируема в точке $(0, 0)$ (почему?).

Для каждой матрицы $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in E$ положим $|a| := \big(\sum\limits_i |a_i|^2\big)^{1/2}$ и заметим, что для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство Коши $|a \cdot v| \le |a||v|$. Для всякого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to E$ положим $|A| := |DA|$. В частности, $|df(x)| = |Df(x)|$.

Асимптотическая оценка приращения. Если $f \in \mathscr{D}(p)$, то $f(x) - f(p) \underset{x\to p}{=} O\big(|x - p|\big)$.

$$◀ \; \forall \varepsilon > 0 \; \big|f(x) - f(p)\big| = \big|Df(p) \cdot (x - p) + \omega(x)\big| \le \big|Df(p)\big||x - p| + \big|\omega(x)\big| \le$$

$$\le \left(\big|Df(p)\big| + \frac{\big|\omega(x)\big|}{|x - p|}\right)|x - p| \underset{x\to p}{\le} \big(\big|Df(p)\big| + \varepsilon\big)\,|x - p|. \; ▶$$

Правило дифференцирования декартова произведения. Отображение $f = (f_1, \ldots, f_l) \colon U \to E = E_1, \times \ldots \times E_l$ дифференцируемо в точке p тогда и только тогда, когда каждая его компонента $f_i \colon U \to E_i$ дифференцируема в точке p. В этом случае $df(p) = \big(df_1(p), \ldots, df_l(p)\big)$.

◀ Прямое следствие леммы 0 и координатного признака непрерывности. ▶

Правило дифференцирования суммы. Если функции $f, g \colon X \to E$ дифференцируемы в точке p, то их сумма также дифференцируема в этой точке. При этом

$$d(f + g)(p) = df(p) + dg(p), \; d(f + g)(p) = df(p) + dg(p).$$

Правило дифференцирования произведения. Произведение fg функций $f, g \in \mathscr{D}(p)$ дифференцируемо в точке p и

$$dfg(p) = df(p)g(p) + f(p)dg(p),\ \ Dfg(p) = Df(p)g(p) + f(p)Dg(p).$$

◀ $f(x)g(x) = \big(f(p) + df(p)\langle x-p\rangle + \alpha(x)|x-p|\big)\big(g(p) + dg(p)\langle x-p\rangle +$ $+\beta(x)|x-p|\big) = f(p)g(p) + \Big(\big(df(p)\langle x-p\rangle\big)g(p) + f(p)dg(p)\langle x-p\rangle\Big) + \omega(x)$, где $\omega(x) = \{\big(f(p) + df(p)\langle x-p\rangle\big)\beta(x) + \alpha(x)\big(g(p) + dg(p)\langle x-p\rangle\big) +$ $+\alpha(x)\beta(x)|x-p|\}|x-p|$.

Поскольку функция, обрамлснная фигурными скобками непрерывна в точке p и равна нулю в этой точке, то $\omega(x) \underset{x\to p}{=} o\big(|x-p|\big)$. Значит, линейная функция $df(p)\langle v\rangle g(p) + f(p)dg(p)\langle v\rangle$ векторной переменной $v \in \mathbb{R}^n$ есть дифференциал функции $f \cdot g(x)$. Поэтому в силу формулы для производной по вектору для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ имеем $Dfg(p) \cdot v = dfg(p)\langle v\rangle = df(p)\langle v\rangle g(p) + f(p)dg(p)\langle v\rangle = \big(Df(p)\cdot v\big)g(p) +$ $+f(p)Dg(p)\cdot v = \big(Df(p)g(p)\big)\cdot v + f(p)Dg(p)\cdot v = \big(Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)\big)\cdot$ $\cdot v$. Значит, матрицы $Dfg(p)$ и $Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)$ совпадают. ▶

Правило дифференцирования композиции (ПДК). Если отображение $f : X_{\subset\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^l$ дифференцируемо в точке p, а отображение $g : Y_{\subset\mathbb{R}^l} \to E$ дифференцируемо в точке $q = f(p)$, то отображение $g \circ f$ дифференцируемо в точке p, причсм $d(g\circ f)(p) = dg\big(f(p)\big) \circ df(p)$ и, следовательно, $D(g\circ f)(p) = Dg\big(f(p)\big) \cdot Df(p)$.

◀ 1. Установим, что $\operatorname{Dom} g \circ f := X \cap f^{-1}(Y) \in \mathscr{N}(p)$. Поскольку функции f и g дифференцируемы в точках p и $q = f(p)$, то множества X и Y являются окрестностями точек p и q соответственно. Так как функция g непрерывна в точке q, то, согласно топологическому критерию непрерывности, $f^{-1}(Y) \in \mathscr{N}(p)$. Следовательно, множество $X \cap f^{-1}(Y)$ является окрестностью точки p.

2. Из предпосылок теоремы и леммы 0 вытекает, что рассматриваемые функции представимы в виде $f(x) = f(p)A\langle x-p\rangle + \alpha(x)|x-p|$, $g(y) = g(q) + B\langle y-q\rangle + \beta(y)|y-q|$, где $a = df(p)$, $B = dg(q)$, $\alpha(x)$, $\beta(y)$ — функции, непрерывные в точках p, q соответственно и равные нулю в этих точках. Отсюда
$g\big(f(x)\big) = g(q) + B\langle f(x) - q\rangle + \beta\big(f(x)\big)|f(x) - q| = g(f(p)) +$ $+B\langle A\langle x-p\rangle\rangle + B\langle\alpha(x)\rangle|x-p| + \beta\big(f(x)\big)|f(x) - f(p)| = g\circ f(p) +$ $+B\circ A\langle x-p\rangle + \big(B\circ\alpha(x)\big)|x-p| + \big(\beta\circ f(x)\big)|f(x) - f(p)|$.

Так как отображение $B\circ A$ линейно, то нам достаточно показать, что третье и четвсртое слагаемые последней суммы являются o-малыми от $|x-p|$ при $x \to p$.

3. $\big(B\circ\alpha(x)\big)|x-p| = o\big(|x-p|\big)$, поскольку функция $B\circ\alpha(x)$ непрерывна в точке p и равна нулю в этой точке.

4. Поскольку функция f дифференцируема в точке p, то в силу асимптотической оценки приращения $\big|f(x)-f(p)\big| \underset{x\to p}{=} O\big(|x-p|\big)$. Так как $\beta\big(f(x)\big) \underset{x\to p}{=} o(1)$, то

$$\beta\big(f(x)\big)|f(x)-f(p)|^k \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k.$$

Итак, $g\circ f(x) - \big(g\circ f(p) + B\circ A\langle x-p\rangle\big) = o\big(|x-p|\big)$, т. е. $d(g\circ f)(p) = = dg(q)\circ df(p)$. Поэтому для каждого вектора $v\in\mathbb{R}^n$ благодаря формуле для производной по вектору имеем $D(g\circ f)(p)\cdot v = d(g\circ f)(p)\langle v\rangle = = dg(q)\circ df(p)\langle v\rangle = dg(q)\langle df(p)\langle v\rangle\rangle = Dg(q)\cdot\big(Df(p)\big)\cdot v$. Следовательно, $D(g\circ f)(p) = Dg(q)\cdot Df(p)$. ►

Правило дифференцирования обратного отображения (ПДОО). Пусть $f\colon U\to V$ и $g\colon V\to U$ — взаимно обратные отображения подмножеств U и V пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть f дифференцируемо в точке $p\in U$. В такой ситуации отображение g дифференцируемо в точке $q = f(p)$ в том и лишь в том случае , когда $(*)$ дифференциал $df(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть обратимое линейное отображение, отображение g непрерывно в точке q, а множество V – окрестность этой точки. В таком случае

$$dg(q) = \big(df\big(g(q)\big)\big)^{-1} \text{ и } Dg(q) = \big(Df\big(g(q)\big)\big)^{-1}.$$

◄ Если $g\in\mathscr{D}(q)$, то g непрерывно в точке q, а V – окрестность этой точки. Так как $f\circ g = id_V$, то в силу ПДК $Df(g(q))\cdot Dg(q) = 1\in M_{n,n}$ и, значит, $Dg(q) = (Df(g(q)))^{-1}$. По аналогичной причине дифференциалы $dg(q)$ и $df(g(q))$ суть взаимно обратные линейные отображения.

Пусть $A := df(p)$ и $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — обратное к A линейное отображение. Так как $f\in\mathscr{D}(p)$, то для каждого $x\in U$ справедливы равенства $f(x) = f(p)+A\langle x-p\rangle+\alpha(x)|x-p|$ и $x-p = B\langle f(x)-f(p)\rangle - B\langle\alpha(x)\rangle|x-p|$, причсм функция α непрерывна в точке p и равна нулю в этой точке.

Следовательно, для всякого $y\in V$ будем иметь

$$g(y)-g(q) = B\langle y-q\rangle + \gamma(y)|g(y)-g(q)|, \tag{1}$$

где $\gamma(y) := -B\langle\alpha(g(y))\rangle$, и, стало быть,

$$|g(y)-g(q)| \le |B\langle y-q\rangle| + |\gamma(y)||g(y)-g(q)|. \tag{2}$$

Так как функция γ непрерывна в точке q и равна нулю в этой точке, то найдстся такая окрестность W точки q, что для всякого $y\in W$

$|\gamma(y)| < 1$. Поэтому для таких y из неравенства (2) получаем

$$|g(y) - g(q)| \le \frac{|B\langle y-q\rangle|}{1-|\gamma(y)|} \le \frac{|B|}{1-|\gamma(y)|}|y-q| \underset{x\to p}{=} O\big(|y-q|\big).$$

Следовательно, $\gamma(y)|g(y)-g(q)| \underset{x\to p}{=} o(|y-q|)$. Поэтому в силу равенства (1) линейное отображение B является дифференциалом функции g в точке q. ►

Замечания. 1. Пусть $f \in \mathscr{D}(p)$. Следующие условия эквивалентны:

а) дифференциал $df(p)$ есть обратимое линейное отображение;

б) матрица Якоби $Df(p)$ обратима;

в) столбцы (строки) матрицы Якоби $Df(p)$ линейно независимы;

г) $\det(Df(p)) \neq 0$.

2. Согласно теореме о вложении области (§ 7.4), условие непрерывности функции g в точке q в ПДОО выполнено, если отображение $f : U \to V$ непрерывно.

Приложение. Градиент вещественной функции

Лемма-определение. Если функция $f : X_{\subset\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке p, то существует единственный вектор $\nabla \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$df(p)v = \langle\nabla, v\rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Этот вектор называется *градиентом* функции f в точке p и обозначается $\operatorname{grad} f(p)$ или $\nabla f(p)$.

Упражнение. Относительно стандартной системы координат в $\mathbb{R}^n$ имеет место формула $\operatorname{grad} f(p) = \big(D_1 f(p), \ldots, D_n f(p)\big)$.

Геометрическая интерпретация градиента. 1. Градиент функции f в точке p ортогонален поверхности уровня этой функции, проходящей через точку p: если $S_h = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) = h\}$ — поверхность уровня h функции f, где $h = f(p)$, то косинус угла между векторами $\operatorname{grad} f(p)$ и $x - p$ стремится к нулю при $x \to p|S_h$.

2. Градиент задаст направление и скорость наибольшего роста функции: если $u = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ — единичный вектор, сонаправленный с градиентом, то для любого единичного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $|\,\partial_v f(p)| \le |\,\partial_u f(p)|$.

◄ Пусть $\nabla := \operatorname{grad} f(p)$ и $c(a,b) :=$ косинус угла между векторами $a, b \in \mathbb{R}^n$. Считается, что $c(a,b) = 0$, если $|a||b| = 0$.

а) Достаточно считать, что $\nabla \neq 0 \neq x - p$. Поскольку $f \in \mathscr{D}(p)$, то

$$f(x) - f(p) - \langle\nabla, x-p\rangle = \omega(x)|x-p|,$$

где функция ω непрерывна в точке p и равна нулю в этой точке. Поэтому, если $x \in S_h$, то

$$c(\nabla, x-p) = \frac{\langle \nabla, x-p \rangle}{|\nabla||x-p|} = -\frac{\omega(x)}{|\nabla|} \underset{x \to p|S_h}{\to} 0.$$

b) $|\,\partial_v\, f(p)| = |df(p)v| = |\langle \nabla, v \rangle| \leq |\nabla| = \langle \nabla, u \rangle = df(p)u = \partial_u\, f(p)$. ►

Векторное поле w называют потенциальным в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если существует такая дифференцируемая функция $U : \Omega \to \mathbb{R}$, что $\operatorname{grad} U(x) = w(x) \quad \forall x \in X$. Всякую такую функцию называют потенциалом поля w.

Упражнения. 0. Функция $U(x) = -c|x|^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ является потенциалом гравитационного поля $w(x) = c\frac{x}{|x|^3}$, создаваемого Солнцем (закон Ньютона).

1. Пусть, например, w — гравитационное поле в открытом линейно связном множестве Ω.

a) Если U — потенциал поля w в области Ω, то работа, произведснная этим полем при перемещении частицы массы m из пункта p в пункт q, будет равна $mU\Big|_p^q$ и, стало быть, не зависит от способа перемещения, т. е. от выбора кусочно дифференцируемой функции $x : [a, b] \to \Omega$ такой, что $x(a) = p,\ x(b) = q$.

b) Разность любых двух потенциалов поля w в области Ω является константой.

Для того чтобы дифференцируемое векторное поле $w = (w_1, \ldots, w_n)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ было потенциальным, необходимо, чтобы *для каждого* $x \in \Omega$ *и любых* $i, j \in \{1 \ldots, n\}$ *имело место равенство* $D_i w_j(x) = D_j w_i(x)$ (§ 8.3, теорема о вторых производных). Если область Ω выпуклая, то это условие является достаточным для потенциальности поля w (§ 12.3).

§ 8.3. Правила многократного дифференцирования

8.3.1. Высшие производные

Если функция f дифференцируема в точке $p \in \mathbb{R}^n$, то будем говорить также, что *функция f один раз дифференцируема в точке p*, и писать $f \in \mathscr{D}^1(p)$. При $k \geq 2$ будем говорить, что *функция f дифференцируема k раз в точке p*, и писать $f \in \mathscr{D}^k(p)$, если:

I. Функция f дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности точки p.

II. Все частные производные функции f дифференцируемы $k{-}1$ раз в точке p.

Если $f \in \mathscr{D}^k(p)$ при любом k, то будем говорить, что *функция f бесконечно дифференцируема* в точке p, и писать $f \in \mathscr{D}^\infty(p)$. Высказывание $f \in \mathscr{D}^0(p)$ лишено смысла.

Упражнения. 1. $\mathscr{D}^1(p) \supset \mathscr{D}^2(p) \supset \ldots \mathscr{D}^\infty(p) = \bigcap_{k\geq 1} \mathscr{D}^k(p)$.

2. Координатный критерий многократной дифференцируемости: функция $f = (f_1, \ldots, f_l)\colon X \to E = E_1 \times \ldots \times E_l$ дифференцируема k раз в точке $p \in X$ в том и лишь в том случае, когда каждая ес компонента $f_i : X \to E_i$ дифференцируема k раз в точке p.

3. Функция $f : X \to E$ дифференцируема $k \geq 2$ раз в точке $p \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки p, а ес матрица Якоби (функция $Df = (D_1 f, \ldots, D_n f)$) дифференцируема $k-1$ раз в этой точке.

4. Сумма и произведение функций дифференцируемых k раз в точке p дифференцируемы k раз в этой точке.

5. Композиция k раз дифференцируемых функций k раз дифференцируема: если функции $f\colon X_{\subset\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^n$ и $g\colon Y_{\subset\mathbb{R}^n} \to E$ дифференцируемы k раз в точках $p \in X$ и $q = f(p) \in Y$, то $g \circ f \in \mathscr{D}^k(p)$.

6. Пусть $f : U \to V$ и $g : V \to U$ — такие взаимно обратные непрерывные отображения открытых частей пространства $\mathbb{R}^n$, что $f \in \mathscr{D}^k(p)$, а дифференциал $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое линейное отображение. Тогда $g \in \mathscr{D}^k(q = f(p))$.

Доказательства утверждений 5 и 6 можно получить, обратившись к [7, § 4.2].

Теорема о вторых производных. Если функция f дважды дифференцируема в точке $p \in \mathbb{R}^n$, то

$$D_i D_j f(p) = D_j D_i f(p) \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

◀ Достаточно считать, что f является функцией двух переменных x и y, причсм $p := (x_p, y_p) = (0,0)$, а $f(p) = 0 = \frac{\partial f(p)}{\partial x} = \frac{\partial f(p)}{\partial y}$. $\big($В ином случае следует рассмотреть функцию $g(x,y) := f(x + x_p, y + y_p) - \big(f(p) + \frac{\partial f(p)}{\partial x} x + \frac{\partial f(p)}{\partial y} y\big)$, у которой вторые производные в точке $(0,0)$ такие же, как и у функции f в точке p.$\big)$

Поскольку обе частные производные функции $f(x,y)$ дифференцируемы в точке $p = (0,0)$, то их дифференциальные разложения в этой точке имеют вид

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= a_1 x + b_1 y + \alpha_1(x,y), \\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= a_2 x + b_2 y + \alpha_2(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где a_1, b_1 и a_2, b_2 — значения частных производных функций $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке p, $\alpha_i(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$, $i \in \{1,2\}$.

Наша цель — доказать равенство $a_2 = b_1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и U — такой замкнутый круг радиуса r с центром в точке 0, что на U функция f дифференцируема и $|\alpha_i(x,y)| < \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$ $\forall (x,y) \in U$.

Пусть $s > 0$ — такое число, что квадрат с вершинами $(0,0), (s,0)$, (s,s) и $(0,s)$ лежит в U. Отсюда с учстом формулы Ньютона—Лейбница и разложений (1) получаем

$$0 = f\Big|_{(0,0)}^{(s,0)} + f\Big|_{(s,0)}^{(s,s)} + f\Big|_{(s,s)}^{(0,s)} + f\Big|_{(0,s)}^{(0,0)} =$$

$$= \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)dx + \int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(s,y)dy - \int_0^s \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)dx - \int_0^s \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)dy =$$

$$= a_1\frac{s^2}{2} + a_2 s^2 + b_2\frac{s^2}{2} - (a_1\frac{s^2}{2} + b_1 s^2 + b_2\frac{s^2}{2}) +$$

$$+ \int_0^s \alpha_1(x,0)dx + \int_0^s \alpha_2(s,y)dy - \int_0^s \alpha_1(x,s)dx - \int_0^s \alpha_2(0,y)dy.$$

Следовательно,
$|a_2 - b_1|s^2 \le \Big| \int_0^s \alpha_1(x,0)dx + \int_0^s \alpha_2(s,y)dy - \int_0^s \alpha_1(x,s)dx - \int_0^s \alpha_2(0,y)dy \Big| \le$
$\le 4\varepsilon \int_0^s \sqrt{s^2+s^2}dx$. Тем самым, $|a_2 - b_1| \le 8\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. ►

"Контрпример". Пусть $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, если $x^2+y^2 > 0$, а $f(0,0) = 0$. В каждой точке плоскости $\mathbb{R}^2$ функция f дифференцируема и обладает всеми четырьмя вторыми производными; причсм на проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ она бесконечно дифференцируема. Однако

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f\right)\Big|_{(0,0)} \ne \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f\right)\Big|_{(0,0)}. \text{ Проверьте.}$$

Какое условие теоремы о вторых производных нарушено?

Упражнение. Если $f \in \mathscr{D}^2(p)$, то $\partial_u \partial_v f(p) = \partial_v \partial_u f(p) = \sum_{i,j} u_i v_j D_i D_j f(p)$ для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Символ ∂_v трактуют как операцию, которая каждой функции f и любому вектору $v \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет функцию $\partial_v f$ (возможно, даже с пустой областью задания). При этом считают, что

$$\partial_v^0 f := f,\ \partial_v^1 f := \partial_v f, \dots \partial_v^k f := \partial_v^{k-1} \partial_v f, \dots .$$

В частности, для любых номеров $i \in \{1, \dots n\}$, $k \in \mathbb{N}$ и функции f определена ес частная производная функция $D_i^k f := \partial_{e_i}^k f$. *Частной производной порядка* $k > 0$ функции f называют всякую функцию вида $D_{i_1}(\dots(D_{i_k} f)) := (D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_k})f$.

8.3.2. Мультииндексный формализм

Мультииндексом длины n будем называть всякий упорядоченный набор натуральных чисел $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{N}^n$. Для каждого мультииндекса μ положим

$|\mu| := \mu_1 + ... + \mu_n :=$ *порядок мультииндекса* μ;

$\mu! := \mu_1! \dots \mu_n!$ — произведение чисел $\mu_1!, \dots, \mu_n!$;

$D^\mu := D_1^{\mu_1} \circ ... \circ D_n^{\mu_n}$;

$x^\mu := x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$. Если $x = (x_1, \dots, x_n)$ — набор чисел, то x^μ — число. Если же $x = (x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат пространства $\mathbb{R}^n$, то x^μ — вещественная функция на этом пространстве. Эту функцию обычно называют мономом порядка $|\mu|$ от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Канонический вид высших частных производных. Если функция f дифференцируема k раз в точке p, то каждая ес частная производная порядка k определена в этой точке и может быть представлена в виде

$$D^\mu f(p) := \big(D_1^{\mu_1} \circ \dots \circ D_n^{\mu_n}\big) f|_p = D_1^{\mu_1}\big(\dots(D_n^{\mu_n} f(p))\big),$$

где μ — мультииндекс порядка k.

Далее в этом параграфе $x = (x_1, \dots, x_n)$ — набор стандартных координат в пространстве $\mathbb{R}^n$, λ и μ — мультииндексы длины n.

Правило дифференцирования монома. $D^\lambda x^\mu = \frac{\mu!}{(\mu-\lambda)!} x^{\mu-\lambda}$, если набор μ-λ не содержит отрицательных чисел, и $D^\lambda x^\mu = 0$ в ином случае. Следовательно:

$$D^\lambda x^\mu\big|_{x=0\in\mathbb{R}^n} = \lambda! \delta_{\lambda,\mu}.$$

Приложения. 1. *Критерий совпадения полиномов.* Полиномы $A(x) = \sum\limits_\mu a_\mu x^\mu$ и $B(x) = \sum\limits_\mu b_\mu x^\mu$ совпадают ($a_\mu = b_\mu$ при любом $\mu \in \mathbb{N}^n$) тогда и только тогда, когда $A(x) = B(x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, т. е. когда функции, порождснные полиномами A и B, совпадают. (Записывая полином в виде бесконечной линейной комбинации мономов, предполагают, что в этой комбинации все коэффициенты, кроме конечного числа, равны нулю.)

◄ Вычислить производную D^λ каждого из этих полиномов в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. ►

Эта теорема оправдывает практику отождествлять термины "полином" и "полиномиальная функция".

2. *Правило возведения суммы в степень.*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{|\mu|=k} C_k^\mu x^\mu, \ C_k^\mu = \frac{k!}{\mu!}.$$

◀ Вычислить производную D^λ левой и правой части равенства при $|\lambda| = k$. ▶

3. Пусть $D = (D_1, \ldots, D_n)$. Полином вида $A := A(D) := \sum\limits_{|\mu|\le m} a_\mu D^\mu$, коэффициенты которого суть вещественные константы, называют *вещественным линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами порядка не выше* m.

Такой полином задаст операцию, сопоставляющую каждой функции f от n переменных функцию $\sum\limits_{|\mu|\le m} a_\mu D^\mu f$.

Примеры. 0. Всякая вещественная константа представляет собой дифференциальный оператор порядка 0.

1. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Дифференциальный оператор $\sum\limits_{i=1}^n v_i D_i$ называют *оператором дифференцирования по вектору* v в связи с тем, что для всякой дифференцируемой функции $f(x)$ имеет место формула $\sum\limits_{i=1}^n v_i D_i f(x) = df(x)v = \partial_v\, f(x)$ (§ 8.2).

2. Полином $D_1^2 + \ldots + D_n^2$ называют *оператором Лапласа* и обозначают символом Δ. Это самый популярный дифференциальный оператор второго порядка.

Композиционное правило для дифференциальных операторов (КПДО). Если $A = \sum\limits_\lambda a_\lambda D^\lambda$ и $B = \sum\limits_\mu b_\mu D^\mu$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, порядки которых не выше k и l соответственно, то для всякой функции f, дифференцируемой $(k + l)$ раз в точке x, справедлива формула

$$(A \cdot B)f|_x = A(Bf)|_x.$$

◀ Согласно правилу умножения полиномов

$$(A \cdot B)f = \big(\sum_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu D^{\lambda+\mu}\big)f,$$

а в силу теоремы о вторых производных

$$A(Bf) = \sum_{\lambda} a_\lambda D^\lambda (Bf) = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} a_\lambda b_\mu D^\lambda (D^\mu f) = \sum_{\lambda,\mu} a_\lambda b_\mu D^{\lambda+\mu} f. \blacktriangleright$$

8.3.3. Дифференциалы высших порядков

Пусть $f \in \mathscr{D}^k(p)$. Функцию $\partial_v^k f(p)$ векторной переменной v называют k-*м дифференциалом* функции f в точке p и обычно обозначают символом $d^k f(p)$. Значение этой функции на векторе $v \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $d^k f(p)\langle v \rangle$. Таким образом, k-й дифференциал функции f в точке p — это отображение $d^k f(p) : \mathbb{R}^n \to E$, определяемое для функций класса $\mathscr{D}^k(p)$ равенством $d^k f(p)\langle v \rangle = \partial_v^k f(p)$.

Координатное представление высших дифференциалов. Если функция f дифференцируема k раз в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то для любого вектора $v = (v_1, \dots , v_n)$ справедлива формула

$$d^k f(x)\langle v \rangle = \sum_{|\mu|=k} \frac{k!}{\mu!} D^\mu f(x) v^\mu$$

и, следовательно, имеет место равенство функций

$$d^k f(x) = \sum_{|\mu|=k} \frac{k!}{\mu!} D^\mu f(x) (dx)^\mu,$$

где $dx = (dx_1, \dots , dx_n)$ — набор дифференциалов стандартных координат в $\mathbb{R}^n$.

$\blacktriangleleft$ $d^k f(x)\langle v \rangle := \partial_v^k f(x) \overset{\text{КПДО}}{=} \big(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i D_i\big)^k f|_x = \big(\sum\limits_{|\mu|=k} \frac{k!}{\mu!} v^\mu D^\mu f\big)|_x$.

Из доказанной формулы и равенства $dx_i\langle v \rangle = v_i$ следует, что значения функций $d^k f(x)$ и $\sum\limits_{|\mu|=k} \frac{k!}{\mu!} (D^\mu f(x))(dx)^\mu$ на каждом векторе v совпадают. Значит, эти функции равны. $\blacktriangleright$

Следствие. k-й дифференциал $d^k f(p)$ является однородной полиномиальной функцией степени k векторной переменной.

В частности, второй дифференциал функции f в точке p есть квадратичная форма. Эту форму называют *гессианом* функции f в точке p.

Координатное представление гессиана. Если $f \in \mathscr{D}^2(p)$, то $d^2 f(p)\langle v \rangle = \sum\limits_{i,j} D_i D_j f(p) v_i v_j \ \forall v \in \mathbb{R}^n$.

Матрицу $(h_{i,j} := D_i D_j f(p) \colon\ i, j \in \{1, \dots n\})$ называют *матрицей Гессе* функции f в точке p.

§ 8.4. Разложение Тейлора

Теорема о тейлоровом разложении (ТТР). Если $f \in \mathscr{D}^k(p)$, то имеется, и к тому же лишь один, полином $A(v) = \sum\limits_{|\mu|\le k} a_\mu v^\mu$ степени $\le k$ переменных $v = (v_1, ..., v_n)$ такой, что

$$f(x) = A(x-p) + \varphi(x),\ \varphi(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$$

(*тейлорово разложение порядка k функции f в точке p*). В этом случае $a_\mu = \frac{D^\mu f(p)}{\mu!}$.

◀ **Единственность.** Пусть $A(v)$ и $B(v)$ — полиномы, удовлетворяющие заключению теоремы и $C(v) = A(v) - B(v)$. Тогда $C(v) \underset{x\to p}{=} o(|v|^k)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор и $P(t) := C(tv)$, $t \in \mathbb{R}$. Степень полинома $P(t)$ переменной t не превосходит k, причсм $P(t) \underset{t\to 0}{=} o(t^k)$, т. е. $P(t)$ есть полином Тейлора нулевой функции переменной t. Следовательно, $P(t)$ — нулевой полином согласно теореме о тейлоровом разложении для функций одной переменной. Поэтому $C(v) = P(1) = 0$ при любом v. По критерию совпадения полиномов $A = B$ (§ 8.3).

Существование. Функция $g(x) := f(x) - \sum\limits_{|\mu|\le k} \frac{D^\mu f(p)}{\mu!}(x-p)^\mu$ дифференцируема k раз в точке p, причсм $D^\mu g(p) = 0$, если $|\mu| \le k$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если $|\mu| = k-1$, то $D^\mu g \in \mathscr{D}(p)$, причсм $D^\mu g(p) = 0$ и $dD^\mu g(p) = 0$. Значит, $D^\mu g(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|)$. Следовательно, имеется такой шар U с центром p, что $|D^\mu g(x)|_E \le \varepsilon|x-p|_1$ для каждого $x \in U$ и любого μ порядка $k-1$. Поэтому, согласно лемме о степенн ой оценке приращения, для каждого μ порядка $k-2$ и любого $x \in U$ имеем $|D^\mu g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}|x-p|_1^2$ и т.д. $|D^0 g(x)|_E \le \frac{\varepsilon}{k!}|x-p|_1^k$ $\forall x \in U$. т. е. $g(x) \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^k)$. ▶

Полином A, участвующий в этой теореме, называется k-м *полиномом Тейлора функции f в точке p*. Согласно ТТР и координатному представлению высших дифференциалов, этот полином допускает следующие представления:

$$A(v) = \sum_{|\mu|\le k} \frac{D^\mu}{\mu!} v^\mu = \sum_{j=0}^{k} \frac{d^j f(p)\langle v\rangle}{j!}.$$

Последовательность функций $\tau_j(x) := \frac{d^j f(p)\langle x-p\rangle}{j!} = \sum\limits_{|\mu|=j} \frac{D^\mu f(p)}{\mu!}(x-p)^\mu$, $j = \{0, \dots\}$ называют *рядом Тейлора функции*

f *в точке* p. Этот ряд может оказаться конечным.

Интегральная формула Тейлора. Если функция f дифференцируема k раз в каждой точке отрезка $[p,x]\subset\mathbb{R}^n$, то

$$f(x)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d^jf(p)\langle x-p\rangle}{j!}=\int\limits_1^0\frac{d^kf(x(\tau))\langle x-p\rangle}{k!}d(1-\tau)^k,$$

где $x(\tau)=p+(x-p)\tau$.

◀ Пусть $\varphi(t):=f(x(t))$ и $v:=x-p$. Функция $\varphi(t)$ вещественной переменной t дифференцируема k раз на отрезке $[0,1]$и потому согласно интегральной формуле Тейлора (§ 5.3)

$$\varphi(t)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{D^j\varphi(0)t^j}{j!}=\frac{t^k}{k!}\int\limits_1^0 D^k\varphi(t(\tau))d(1-\tau)^k,\ t(\tau)=0+(t-0)\tau=t\tau. \tag{$*$}$$

Из равенства $D\varphi(t)=\partial_v\,f(p+tv)$ по индукции заключаем, что $D^j\varphi(t)= =\partial_v^j\,f(p+tv):=d^j\,f(p+tv)\langle v\rangle$. Преобразовав с помощью этого равенства формулу $(*)$ и положив затем $t=1$, получим доказываемую формулу. ▶

Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора. Если функция f дифференцируема k раз на отрезке $[p,x]\subset\mathbb{R}^n$ и если на этом отрезке каждая ес производная порядка k ограничена константой S, то

$$\left|f(x)-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{d^jf(p)\langle x-p\rangle}{j!}\right|\le\frac{S}{k!}|x-p|_1^k+.$$

◀ Пусть r — левая часть неравенства, $v:=x-p$ и $u:=(|v_1|,\dots,|v_n|$. Тогда $r=\left|\sum\limits_{|\mu|=k}\frac{v^\mu}{\mu!}\int\limits_1^0 D^\mu f(x(t))d(1-t)^k\right|\le\sum\limits_{|\mu|=k}\frac{u^\mu}{\mu!}S= =\big(\sum\limits_{|\mu|=k}|v_i|\big)^kS=|v|_1^kS.$ ▶

Говорят, что *порядок касания функций* f *и* g *в точке* p не меньше k, если они совпадают в точке p и $f(x)-g(x)=o\big(|x-p|^k\big)$. Таким образом, порядок касания k раз дифференцируемой в точке p функции и ес k-го полинома Тейлора в этой точке не меньше k.

Упражнения. 1. Каков ряд Тейлора:

а) функции $f(x,y,z)=x^2y^4z^8$ в точке $0\in\mathbb{R}^3$;

b) функции $f(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ в точке $1 \in \mathbb{C}$;

c) функции $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в точке $p \in \mathbb{C}$?

2. Если порядок касания функции f и некоторого полинома в точке p не меньше нуля, то функция f непрерывна в точке p.

3. Для каких номеров k справедливо следующее утверждение: Если порядок касания функций f и g в точке p не меньше k и если функция $g \in \mathscr{D}^k(p)$, то $f \in \mathscr{D}^k(p)$ и $d^k f(p) = d^k g(p)$? (См. [7], § 4.3)

4. *Полиномиальные разложения суммы и произведения.* Пусть в точке p порядки касания функции f и полинома A, а также функции g и полинома B не меньше k. Тогда если $h = f + g$, то порядок касания функции h и полинома $A + B$ в точке p не меньше k;
а если $h = fg$, то порядок касания функции h и полинома AB в точке p не меньше k. (См.§ 4.3.)

Полиномиальное разложение композиции. Если $h = g \circ f$ и порядки касания функции $f : X_{\subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^s$ и полинома A в точке $p \in X$, а также функции $g : Y_{\subset \mathbb{R}^s} \to E$ и полинома B в точке $q = f(p) \in Y$ не меньше k, то порядок касания функции h и полинома $B \circ A$ в точке p не меньше k.

◀ Если $k = 0$, то функции f и g непрерывны в точках p и q. Значит, разность $g \circ f - B \circ A$ непрерывна, равна нулю в точке p, и потому есть o-малое от единицы при $x \to p$.

Пусть $k \geq 1$. Из предпосылок теоремы вытекает, что рассматриваемые функции представимы в виде $f(x) = A(x) + \alpha(x)|x - p|^k$, $g(y) = B(y) + \beta(y)|y - q|^k$, где α и β — функции, непрерывные в точках p и q, соответственно, и равные нулю в этих точках. Отсюда

$$g\big(f(x)) - B(A(x)\big) = \Big(B\big(f(x)\big) - B\big(A(x)\big)\Big) + \beta\big(f(x)\big)|f(x) - f(p)|^k.$$

Нам достаточно показать, что каждое слагаемое в правой части этого равенства есть o-малое от $|x - p|^k$ при $x \to p$.

1. Пусть V — замкнутый шар радиуса 1 с центром в точке q. Частные производные функции B, будучи полиномиальными функциями, непрерывны и потому, в силу теоремы Вейерштрасса об экстремумах, на шаре V все они ограничены некоторой константой $c \in \mathbb{R}$. Согласно лагранжевой оценке приращения, для каждой пары точек $y_0, y_1 \in V$ справедливо неравенство $|B(y_0) - B(y_1)| \leq c|y_0 - y_1|_1$.

Поскольку функции f и A непрерывны в точке p, то у этой точки имеется такая окрестность U, что при любом $x \in U$ $f(x), A(x) \in V$ и, следовательно,

$$|B\big(f(x)\big) - B\big(A(x)\big)| \leq c|f(x) - A(x)|_1 = c|\alpha(x)|_1|x - p|_1^k \underset{x \to p}{=} o\big(|x - p|^k\big),$$

ибо $\alpha \underset{x\to p}{=} o(1)$.

2. Поскольку $k \geq 1$, то функция f дифференцируема в точке p и, следовательно, $f(x)-f(p) \underset{x\to p}{=} O\big(|x-p|\big)$. А так как $\beta(f(x)) \underset{x\to p}{=} o(1)$, то

$$\beta\big(f(x)\big)|f(x)-f(p)|^k \underset{x\to p}{=} o\big(|x-p|^k\big). \blacktriangleright$$

Достаточный признак локального экстремума. Пусть f — такая вещественная дважды дифференцируемая в точке p функция, что ес первый дифференциал в этой точке есть нулевая линейная форма $\big(df(p)v=0\ \forall v\in\mathbb{R}^n\ \big)$. Тогда:

1. если гессиан $Hv := d^2f(p)\langle v\rangle$ функции f в точке p является положительной (отрицательной) квадратичной формой, то p есть точка строгого локального минимума (максимума) функции f;

2. если же существуют такие векторы v и w, что $Hv>0$, а $Hw<0$, то p не является точкой локального экстремума функции f.

$\blacktriangleleft$ 2. Пусть $\varphi_v(t) := f(p+tv)$. Тогда $D^2\varphi_v(0)=\partial_v^2 f(p)=Hv>0$. Поэтому на прямой $\{x=p+tv\colon\ t\in\mathbb{R}\}$, проходящей через точку p параллельно вектору v, функция f имеет строгий локальный минимум в точке p. Значит, p не точка локального максимума функции f. Поскольку $Hw<0$, то по такой же причине p не точка локального минимума.

1. Допустим, что $Hv>0\quad\forall v\neq 0$. $\big[$Для всякого такого вектора v на каждой прямой, проходящей через точку p параллельно вектору v функция f имеет строгий локальный минимум в точке p. Значит, p – точка строгого локального минимума функции f — ошибочное заключение! (См. последнее замечание главы)$\big]$.

Так как сфера S^{n-1} компактна, а функция Hv непрерывна, то, согласно теореме Вейерштрасса, $c := \min(Hv\colon |v|=1)>0$. Поэтому $Hv\geq c|v|^2\forall v\in\mathbb{R}^n$, ибо Hv — однородный полином степени 2.

Пусть $\omega := f(x)-(f(p)+\frac{1}{2}H(x-p))$. По теореме о тейлоровом разложении $\omega \underset{x\to p}{=} o(|x-p|^2$. Стало быть, имеется такая окрестность U точки p, что $|\omega(x)|<c|x-p|^2\quad\forall x\in U\setminus\{p\}$. Следовательно, для таких x имеем $f(x)-f(p)=H(x-p)+\omega(x)>c|x-p|^2-|\omega(x)|>0$. $\blacktriangleright$

Замечания. 1. Квадратичная форма $Hv=\sum h_{i,j}v_iv_j$ положительна, если:

a) она приводится (например, методом Гаусса выделения квадратов) к сумме квадратов всех координат;

b) собственные числа матрицы $(h_{i,j})$ положительны;

c) сильвестровы миноры матрицы $(h_{i,j})$ положительны.

Курьсзы. 1. Существует функция двух переменных, которая в каждой точке плоскости $\mathbb{R}^2$ обладает всеми частными производными любых порядков, бесконечно дифференцируема в каждой точке проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но которая разрывна в точке (0,0).

$\lhd$ Пусть $\delta(t) := \exp\big((t^2-1)^{-1}\big)$, если $|t| < 1$, и $\delta(t) = 0$, если $|t| \geq 1$. Функция $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема (почему?), положительна на интервале $]-1,1[$ и равна нулю вне его.

Пусть P_k — парабола на плоскости $\mathbb{R}^2$, определяемая уравнением $y = kx^2$. Положим $\tau(x,y) := \delta\left(\frac{y-2x^2}{x^2}\right)$, если $x \neq 0$, и $\tau(x,y) = 0$, если $x = 0$. Функция τ

1) положительна на открытом множестве U, расположенном между параболами P_1 и P_3;

2) на проколотой параболе $P_2 \setminus \{(0,0)\}$ равна e^{-1};

3) равна нулю на $\mathbb{R}^2 \setminus U$;

4) бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

5) обладает любыми частными производными любых порядков, ибо если какая-либо функция f обладает свойствами пп. 3 и 4, то функция $\partial_v f$ обладает этими свойствами, каков бы ни был вектор $v \in \mathbb{R}^2$.$\rhd$

2. Существует дифференцируемая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, обладающая всевозможными частными производными, такая, что в точке $p = (0,0)$ дифференциал $df(p)$ равен нулю, матрица вторых производных симметрична и положительна, сужение функции f на любую прямую, проходящую через точку p, имеет строгий локальный минимум в этой точке, но для которой точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума.

Например: $f(x,y) = (x^2+y^2)\big(1 - 2e\tau(x,y)\big)$, где τ — предыдущая курьсзная функция.

Глава 9. ОСНОВЫ ГЛАДКОГО АНАЛИЗА

§ **9.1. Отображения класса C^r**

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Говорят, что отображение $f : U \to E$ открытого в $\mathbb{R}^k$ множества U принадлежит классу C^r, если в U определены и непрерывны все частные производные отображения f до порядка r включительно.

Пусть X и Y — произвольные подмножества пространств $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^l$ соответственно. Будем говорить, что *отображение* $f : X \to Y$ *принадлежит классу* C^r, и писать $f \in C^r$, если оно является сужением некоторого отображения $f : U \to \mathbb{R}^l$ класса C^r, где U — открытое в $\mathbb{R}^k$ множество. Такие отображения называют C^r*-отображениями.*

Отображения класса C^0 непрерывны, поскольку $D^0 f := f$. Отображения класса C^r при $r \geq 1$ называют *r-гладкими* или *r раз непрерывно дифференцируемыми.* Если $f \in C^r$ для каждого натурального r, то отображение f называют *бесконечно гладким* и пишут $f \in C^\infty$.

Упражнения. 1. $C^0 \supset \mathscr{D}^1 \supset C^1 \supset \mathscr{D}^2 \supset \dots C^\infty = \mathscr{D}^\infty$.

2. Какого класса гладкости функция $f(x) = |x|^7$, т. е. чему равен $\sup\{r : f \in C^r\}$?

3. *Координатный критерий принадлежности классу C^r* : отображение $f = (f_1, \dots , f_l) : X \to \mathbb{R}^l$ принадлежит классу C^r тогда и только тогда, когда каждая его компонента $f_i : X \to \mathbb{R}$ есть C^r-функция.

4. Сумма, произведение, композиция C^r-отображений являются C^r-отображениями.

5. Отображение $f : U \to E$ принадлежит классу $C^{r \geq 1}$ тогда и только тогда, когда на множестве U определены все частные производные этого отображения, причсм матричнозначная функция $Df : U \to E^n$ принадлежит классу C^{r-1}.

Лемма о классе гладкости обратного отображения. Пусть $f : U \to V$ и $g : V \to U$ — непрерывные взаимно обратные отображения открытых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, причсм отображение f принадлежит классу $C^{r \geq 1}$, а его дифференциал $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в каждой точке $x \in U$ является линейным изоморфизмом. Тогда $g \in C^r$.

◀ Вспоминая правило дифференцирования обратной функции, заключаем, что отображение g дифференцируемо в каждой точке $q \in V$ и что $Dg(q) = (Df(g(q)))^{-1}$. Для каждой обратимой матрицы $z \in GL(n)$ положим $\omega(z) := z^{-1}$. Это позволяет записать предыдущую формулу в виде

$$Dg = \omega \circ (Df \circ g).$$

По условию функция $g : V \to U$ принадлежит классу C^0; матричнозначная функция $Df : U \to L(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ принадлежит классу C^{r-1}; операция $\omega : GL(n) \to GL(n)$ — классу C^∞ (почему?). Следовательно, $Dg \in C^0$, и потому $g \in C^1$ и т. д., следовательно, $Dg \in C^{r-1}$ и потому $g \in C^r$. ▶

Отображение $f : X \to Y$ класса C^r будем называть *C^r-изоморфизмом (обратимым в классе C^r)*, если имеется такое отображение $g : Y \to X$ класса C^r, что $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$. Изоморфизмы класса C^r при $r \geq 1$ называют также *диффеоморфизмами* класса C^r, или *r-гладкими изоморфизмами,* а если $r = 0$, то *гомеоморфизмами*, или *топологическими изоморфизмами.*

Будем говорить, что *множества X и Y $\mathscr{C}^r$-изоморфны*, и писать $X \underset{C^r}{\cong} Y$, если существует C^r-изоморфизм $f : X \to Y$.

Отображение $\varphi : X \to Y$ называют C^r-вложением, если его сужение $\varphi : X \to \varphi(X)$ является $\mathscr{C}^r$-изоморфизмом.

Упражнения. 1. Тождественное отображение; отображение, обратное к C^r-изоморфизму; композиция C^r-изоморфизмов являются C^r-изоморфизмами.

2. Всякое сужение $\varphi : S \to T$ C^r-вложения является C^r-вложением.

3. Любое аффинное инъективное отображение $a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ является C^∞-вложением.

4. Окружность и эллипс C^∞-изоморфны.

5. Полуокружность и отрезок прямой C^∞-изоморфны. Окружность и промежуток любого типа негомеоморфны.

6. Окружность и граница квадрата топологически изоморфны, а гладко — нет.

Экскурс в прошлое

Теорема о вложении промежутка. Если $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ — непрерывное инъективное отображение промежутка T, то множество $f(T)$ является промежутком того же типа что и T, а отображение $f : T \to f(T)$ является топологическим изоморфизмом. ◄ § 3.2. ►

Теорема о вложении компакта. Пусть $\varphi : K \to H$ — непрерывное инъективное отображение компакта K в метрическое пространство H. Тогда подпространство $\varphi(K) \subset H$ компактно, а отображение $\varphi : K \to \varphi(K)$ является топологическим изоморфизмом. ◄ § 7.5. ►

Информация

Теорема о вложении области. Если $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывное отображение открытой части U пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$, то множество $\varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$ является топологическим изоморфизмом.

Следствия. 1. **Теорема об инвариантности области.** Всякий гомеоморфизм $g : X \to Y$ между множествами $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ переводит внутренние точки множества X во внутренние точки множества Y, а граничные — в граничные.

2. Если множество $X \subset \mathbb{R}^k$ содержит внутренние точки $\big(\operatorname{Int}_{\mathbb{R}^k} X \neq \emptyset\big)$, то не существует инъективного непрерывного отображения X в $\mathbb{R}^l$ при $l < k$.

3. Если множества $X \subset \mathbb{R}^k$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ содержат внутренние точки, причсм $k \neq n$, то эти множества топологически неизоморфны.

4. Не существует плоской карты всей земной поверхности, т.е. не существует непрерывного инъективного отображения сферы в плоскость.

Лемма о липшицевом вложении области. Пусть U — открытое подмножество банахова пространства E и $\varphi : U \to E$ — такое отображение, что $(\varphi - id)$ является сжимающим отображением. Тогда

1. Множество $\varphi(U)$ открыто в E.

2. Отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$ является липшицевым изоморфизмом $\big($обратимо в классе липшицевых отображений$\big)$.

◀ Пусть $f(x) := \varphi(x) - x$ и λ — константа Липшица отображения f. По условию $\lambda < 1$.

1. Достаточно установить, что у каждой точки $q \in \varphi(U)$ имеется ε-окрестность, лежащая в $\varphi(U)$.

Пусть q — произвольная точка множества $\varphi(U)$, $p \in U$ — такая точка, что $q = \varphi(p)$, B_δ — замкнутая ес δ-окрестность, лежащая в U, $\varepsilon = (1-\lambda)\delta$ и r — какая-нибудь точка из ε-окрестности O_ε точки q. Для нашей цели достаточно в шаре B_δ найти решение x уравнения $r = \varphi(x)$ или эквивалентного уравнения $x = r - f(x)$, т.е. найти неподвижную точку отображения $g = r - f$.

Константа Липшица отображения g равна λ. Значит, отображение g — сжимающее.

Покажем, что g переводит шар B_δ в себя. Если $x \in B_\delta$, т.е. если $|x-p| \le \delta$, то $|g(x)-p| = |r - f(x) - p| = |r - q + \varphi(p) - f(x) - p| = |r - q + p + f(p) - f(x) - p| \le |r-q| + |f(p) - f(x)| \le \varepsilon + \lambda\delta = \delta$, т. е. $g(x) \in B_\delta$.

Шар B_δ есть замкнутое подмножество банахова пространства E и, значит, является непустым полным метрическим пространством. Поэтому сжимающее отображение $g : B_\delta \to B_\delta$ имеет неподвижную точку (§7.4).

2. Для любых $x, y \in E$ имеем:

а) $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y + f(x) - f(y)| \le (1+\lambda)|x-y|$ и, стало быть, отображение φ липшицево;

б) $|x-y| = |\varphi(x) - f(x) - (\varphi(y) - f(y))| \le |\varphi(x) - \varphi(y)| + \lambda|x-y|$, иначе

$$|x-y| \le \frac{1}{1-\lambda}|\varphi(x) - \varphi(y)|,$$

и, следовательно, отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$ биективно, причсм константа Липшица обратного отображения не превосходит $\frac{1}{1-\lambda}$. ▶

Следующий факт служит основой гладкого анализа.

Теорема о локальной обратимости (ТЛО). Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — такое r-гладкое отображение открытого в $\mathbb{R}^n$ множества Ω, что его дифференциал $d\varphi(p)$ в точке $p \in \Omega$ есть линейный изоморфизм. Тогда у точки p найдстся такая открытая окрестность U, что:

1) множество $\varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$;

2) отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$ является r-гладким изоморфизмом.

◀ Допустим сначала, что $d\varphi(p) = id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. В такой ситуации разность $f = \varphi - id$ есть r-гладкое отображение, причсм все его частные производные в точке p равны нулю. Поскольку частные производные отображений φ и f непрерывны в точке p, то у этой точки имеется такая открытая выпуклая окрестность U, что в каждой ес точке x $\det D\varphi(x) > 0$, а $|D_i f(x)|_1 < \frac{1}{2}$ при любом $i \in \{1, \dots, n\}$. Согласно лагранжевой оценке приращения, $|f(x) - f(y)|_1 \le \frac{1}{2}|x - y|_1$ для любых $x, y \in U$, т. е. отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ сжимающее. В силу леммы о липшицевом вложении области множество $V := \varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $\varphi : U \to V$ является гомеоморфизмом. Тем самым это отображение удовлетворяет условиям леммы о классе гладкости обратного отображения и потому является C^r-изоморфизмом.

Общий случай. Пусть $A := d\varphi(p)$ и B — обратный к A линейный изоморфизм. Тогда $d(B \circ \varphi)\big|_p = B \circ A = id$ и, по доказанному, у точки p найдстся такая открытая окрестность U, что множество $V := B(\varphi(U))$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $\psi := B \circ \varphi : U \to V$ есть C^r-изоморфизм. Так как A является C^∞-изоморфизмом, то множество $\varphi(U)$, равное $A(V)$, открыто, а отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$, будучи композицией C^r-изоморфизмов $A \circ \psi$, является C^r-изоморфизмом. ▶

Примеры–упражнения.

0. **Теорема о гладком вложении области.** Если $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — инъективное r-гладкое отображение открытого в $\mathbb{R}^n$ множества U и если его дифференциал $df(x)$ в каждой точке $x \in U$ обратим, то множество $\varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $\varphi : U \to \varphi(U)$ является r-гладким изоморфизмом.

1. Пусть $\varphi(x) = x + x^2 \sin x^{-2}$, $\varphi(0) = 0$. Отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируемо, $D(0) = 1$. Однако его сужение $f : U \to f(U)$ на любую окрестность нуля необратимо. Какое условие ТЛО не выполнено?

2. Отображение $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ бесконечно гладкое, его дифференциал в каждой точке поля $\mathbb{C}$ обратим. Однако это отображение $2\pi i$-периодично и потому необратимо. Каковы exp-образы вертикальных и горизонтальных прямых?

3. Пусть $U := \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ — горизонтальная открытая полоса, $V := \exp(U)$. Тогда:

a) $V := \exp(U) = \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \colon x \le 0,\ y = 0\}$ – плоскость с разрезом;

b) отображение $\exp : U \to V$ является C^∞-изоморфизмом. Обратное к нему отображение будем называть *главной ветвью логарифма* и обозначать привычным символом ln :

$$\text{если } z = re^{i\theta},\ -\pi < \theta < \pi, \text{ то } \ln z = \ln|z| + i\theta;$$

c) не существует непрерывного продолжения функции $\ln : V \to \mathbb{C}$ на множество $\mathbb{C}$.

Приложения.

1. Криволинейные системы координат. *Системой координат (картой)* класса C^r на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ называют C^r-вложение вида $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) : X \to \mathbb{R}^k$. При этом числа $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ называют *координатами точки* $x \in X$ *относительно координатной системы* φ.

Сюръективные C^r-отображения вида $\psi : U_{\subset \mathbb{R}^k} \to X \subset \mathbb{R}^n$ называют *параметризациями* множества X. При этом координаты точки $u = (u_1, \dots, u_k) \in U$ называют параметрами точки $\psi(u)$.

Примеры и упражнения. a) Если X — векторное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ и $w_1, \dots, w_k$ — какой-нибудь его базис, то отображение $X \to \mathbb{R}^k$, сопоставляющее каждому вектору $x = \sum t_i w_i \in X$ набор $(t_1, \dots, t_k)$ его координат относительно этого базиса, является бесконечно гладкой системой координат.

b) Отображение $\psi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$, определяемое формулой $\psi(\varrho, \theta) = (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$, называют *полярной параметризацией* плоскости $\mathbb{R}^2$. Если открытые множества $U \subset \mathbb{R}^2_+$ и $X \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ таковы, что отображение $\psi : U \to X$ биективно, то обратное к нему отображение называют полярной системой координат на множестве X.

Типичный пример: $U = \{(\varrho, \theta) \colon \varrho > 0, \theta \in]-\pi, \pi[\}$, $X =$"плоскость с разрезом"$= \mathbb{R}^2 \setminus L$, где $L := \{(x, y) \colon x \leq 0,\ y = 0\}$.

c) Пусть $S^2_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ — сфера радиуса $r > 0$ с центром $0 \in \mathbb{R}^3$. Отображение $p : \mathbb{R}^2 \to S^2_r$, определяемое формулой $p(\alpha, \beta) = (r\cos\alpha\, \cos\beta, r\cos\alpha\, \sin\beta, r\sin\alpha)$, называется *сферической параметризацией* сферы S^2_r. Если U и X — такие открытые части плоскости $\mathbb{R}^2$ и сферы S^2_r соответственно, что отображение $p : U \to X$ биективно, то обратное к нему отображение называют сферической системой координат на множестве X.

Типичный пример: $X = \{(x, y, z) \in S^2_r \mid y > 0\}$ — "восточное полушарие", $U = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \colon \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \ \beta \in [0, \pi[\}$. Числа α и β называют широтой и долготой точки $p(\alpha, \beta)$.

Какого класса гладкости рассмотренные системы координат?

2. Регулярные точки гладкого отображения. Говорят, что $p \in X \subset \mathbb{R}^n$ *регулярная точка отображения (системы функций)*

$f = (f_1, \dots, f_k) : X \to \mathbb{R}^k$, или, что отображение f регулярно в точке p, если оно дифференцируемо в этой точке, а его дифференциал $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ есть сюръективное линейное отображение (эпиморфизм). Последнее условие равносильно утверждению "строки матрицы Якоби $Df(p)$ линейно независимы".

Лемма о регулярном дополнении. Если система r-гладких вещественных функций $f = (f_1, \dots, f_k)$, заданных на открытом в R^n множестве Ω, регулярна в точке $p \in \Omega$ и $k < n$, то существует такой набор $g = (g_1, \dots, g_{n-k})$, что отображение $\varphi := (f, g) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ регулярно в точке p.

◀ По условию матрица Якоби $Df(p)$ содержит k линейно независимых столбцов. Дабы упростить обозначения, будем считать, что это первые столбцы. Обозначим стандартные координаты пространства $\mathbb{R}^n$ буквами $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ и пусть $x := (x_1, \dots, x_k)$, а $y := (y_1, \dots, y_l)$.

Пусть $g_i(x, y) := y_i$, $i \in \{1, \dots, n-k\}$, $g := (g_1, \dots, g_{n-k})$ Рассмотрим отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Матрица Якоби этого отображения имеет следующий вид:

$$D\varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 \in M_{l,k} & 1 \in M_{l,l} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det D\varphi(p) = \det \frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$. ▶

Лемма о локальном наложении. Если p — регулярная точка гладкого отображения $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ открытого в $\mathbb{R}^n$ множества Ω, то образ $f(\Omega)$ содержит некоторую ε-окрестность точки $f(p)$, т. е. $f(\Omega)$ является окрестностью этой точки.

◀ Если $k = n$, то лемма есть прямое следствие ТЛО.

Пусть $k < n$ и $g = (g_1, \dots, g_{n-k})$ — такой набор гладких функций, что отображение $\varphi := (f, g) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ регулярно в точке p. По ТЛО эта точка обладает открытой окрестностью U, образ $V := \varphi(U)$ которой открыт в $\mathbb{R}^n$ и потому содержит некоторую ε-окрестность точки $\varphi(p)$.

Пусть $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — проекция, определяемая формулой $\pi(x, y) = x$. Поскольку $f = \pi \circ \varphi$, то $f(U) = \pi(\varphi(U)) = \pi(V)$. Остается заметить, что проекция π переводит ε-окрестности точек в ε-окрестности образов этих точек $(\pi(O_\varepsilon(x, y)) = O_\varepsilon(x))$. ▶

Следствие. Если отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ регулярно в каждой точке открытого в $\mathbb{R}^n$ множества Ω, то образ $f(\Omega)$ открыт в $\mathbb{R}^k$.

3. Функционально независимые системы функций. Говорят, что на множестве X функция g выражается через функции $f_1, \dots, f_k$, если существует такая функция $\alpha(y_1, \dots, y_k) : Y_{\subset\mathbb{R}^k} \to \mathbb{R}$, что для всякого $x \in X$ справедливо равенство $g(x) = \alpha(f_1(x), \dots, f_k(x))$. Говорят, что функции $f_1, \dots, f_k$ функционально зависимы на множестве X, если на этом множестве одна из них выражается через остальные.

Достаточный признак функциональной независимости. Если система гладких вещественных функций $f = (f_1, \dots, f_{k+1})$, определеснная на открытом в $\mathbb{R}^n$ множестве Ω, обладает регулярной точкой $p \in \Omega$, то рассматриваемые функции на множестве Ω функционально независимы.

◀ Допустим, что это не так. Например, пусть $\alpha(y_1, \dots, y_k) : Y \to \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^k$ — такая функция, что $f_{k+1}(x) = \alpha\big(f_1(x), \dots, f_k(x)\big)$ при любом $x \in \Omega$. Это означает, что для каждого такого X точка $(f_1(x), \dots, f_k(x), f_{k+1}(x))$ расположена на графике Γ_α функции α, т. е. $f(\Omega) \subset \Gamma_\alpha$. Согласно лемме о локальном наложении, график Γ_α содержит шарик с центром $f(p)$ — абсурд, ибо любая вертикальная прямая пересекает график функции α не более, чем в одной точке. ▶

Упражнение. Если $f = (f_1, \dots, f_k) : X \to \mathbb{R}^k$ — карта (система координат) на множестве X, то любая функция g на множестве X выразима через функции системы f.

4. Теорема о неявной функции. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$ и $y = (y_1, \dots, y_l)$ — стандартные координаты в пространствах $X = \mathbb{R}^k$ и $Y = \mathbb{R}^l$ соответственно; $f(x, y) : \Omega \to Y$ — r-гладкая функция на открытом в $X \times Y$ множестве Ω и пусть M — множество решений уравнения $f(x, y) = 0 \in Y$, а $z = (p, q) \in M$ — такое решение, что матрица $\frac{\partial f}{\partial y}(p, q)$ обратима. Тогда у точки z найдстся такая окрестность Ω_z что:

1) множество $M_z := M \cap \Omega_z$ является графиком некоторой r-гладкой функции $\alpha : U \to Y$, заданной на открытом в X множестве U;

2) для каждой точки $x \in U$ выполнено равенство

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \alpha(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha(x))\right).$$

◀ 1) Пусть $\varphi : \Omega \to X \times Y$, — отображение, определяемое формулой $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$. Его матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Следовательнно, } \det D\varphi(x, y) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \forall (x, y) \in \Omega \qquad (*)$$

и потому $\det D\varphi(z) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(z)\right) \neq 0$. По теореме о локальной обратимости у точки $z = (p, q)$ есть такая окрестность Ω_z, что множество $\Theta := \varphi(\Omega_z)$ открыто в $X \times Y$, а отображение $\varphi : \Omega_z \to \Theta$ является C^r-изоморфизмом. Пусть $\psi : \Theta \to \Omega_z$ — обратный изоморфизм. Так как преобразование φ сохраняет первую координату точки, то обратное к нему отображение ψ обязано тоже сохранять эту координату, т. е. для отображения $\psi : \Theta \to X \times Y$ имеет место формула $\psi(x, y) = (x, h(x, y))$, где h — функция из Θ в Y. Отметим, что $h \in C^r$, поскольку h является одной из компонент C^r- отображения ψ.

Пусть $U := \{x \in X\colon (x, 0) \in \Theta\}$. Для каждого $x \in U$ положим $\alpha(x) = h(x, 0)$ и покажем, что $M_z = \Gamma_\alpha :=$ (график α).

Пусть $(x, y) \in M_z$, т. е. $f(x, y) = 0$ и $(x, y) \in \Omega_z$. Значит, $\varphi(x, y) = \big(x, f(x, y)\big) = (x, 0) \in \Theta$. Следовательно, $x \in U$ и $(x, y) = \psi(\varphi(x, y)) = \psi(x, 0) = (x, h(x, 0)) = (x, \alpha(x)) \in \Gamma_\alpha \Rightarrow M_z \subset \Gamma_\alpha$.

Пусть $(x, y) \in \Gamma_\alpha$, т. е. $(x, 0) \in \Theta$ и $y = \alpha(x) = h(x, 0)$. Значит, $(x, y) = (x, h(x, 0)) = \psi(x, 0) \in \Omega_z$. Следовательно, $(x, f(x, y)) = \varphi(x, y) = \varphi(\psi(x, 0)) = (x, 0)$ и потому $f(x, y) = 0$. Тем самым, $(x, y) \in \Omega_z \cap M = M_z$. Итак, $\Gamma_\alpha \subset M_z \subset \Gamma_\alpha$.

Пусть $j : X \to X \times Y$ — вложение на уровень 0 ($j(x) = (x, 0)$), Так как $U = j^{-1}(\theta)$, $\alpha = h \circ j$, $j \in C^\infty$, $h \in C^r$, то U открыто в X (критерий глобальной непрерывности § 7.4), а $\alpha \in C^r$.

2) Высказывание $f(x, \alpha(x)) = 0\ \forall x \in U$ равносильно утверждению "$f \circ A$ есть нулевое отображение", где $A : U \to X \times Y$ – отображение, задаваемое формулой $A(x) = (x, \alpha(x))$. Согласно ПДК § 8.2, $\forall x \in U \quad D(f \circ A)|_x = Df\big(A(x)\big) \cdot DA(x) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(A(x)) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A(x))\big) \cdot \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A(x))\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(A(x))\right) \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)\right) = 0.$

Остается показать , что $\frac{\partial f}{\partial y}(A(x))$ — обратимая матрица при любом $x \in U$.

Так как преобразование $\varphi : \Omega_z \to \Theta$ обратимо в классе дифференцируемых отображений, то матрица $D\varphi(x, y)$ обратима в каждой точке $(x, y) \in \Omega_z$ (ПДОО § 8.2). И поскольку $A(x) \in M_z \subset \Omega_z$ при любом $x \in U$, то в силу равенства $(*)$ для таких x матрица $\frac{\partial f}{\partial y}(A(x))$ обратима. ►

§ 9.2. Многообразия в $\mathbb{R}^n$

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называют *k-мерным многообразием класса C^r*, если у каждой точки $p \in M$ имеется открытая в M окрестность W ($\exists W \in O_M(p)$), C^r-изоморфная либо некоторой открытой части пространства $\mathbb{R}^k$, либо некоторой открытой части полупространства $\mathbb{R}^k_+$. Одномерные многообразия обычно называют линиями, двумерные — поверхностями, а k-мерные — k-мерными поверхностями. (Понятие линии, будучи эмпирическим, более широкое, нежели математическое понятие одномерного многообразия. Обычно линия — это объединение конечного набора одномерных многообразий. То же можно сказать о понятии поверхности.) Многообразия класса $C^{r\geq 1}$ называют r-гладкими.

Примеры и упражнения 0. Открытые части пространства $\mathbb{R}^k$ и полупространства $\mathbb{R}^k_+$ суть k-мерные многообразия класса C^∞.

1. Конечные множества в $\mathbb{R}^n$ суть нульмерные многообразия класса C^∞. Почему?

2. Любой промежуток прямой в $\mathbb{R}^n$, эллипс, гипербола, парабола суть бесконечно гладкие линии. График функции $|x|$ — линия класса C^0. Буква Т не является многообразием. Почему? (Подсказ: следствие теоремы о вложении промежутка.)

3. Круг, сфера, полусфера, плоскость и полуплоскость в $\mathbb{R}^n$ суть поверхности класса C^∞. Конус второго порядка и объединение пары непараллельных плоскостей в $\mathbb{R}^3$ не являются двумерными многообразиями. Почему? Поверхности куба и тетраэдра суть двумерные многообразия класса C^0.

4. Шар в $\mathbb{R}^3$, а также куб и тетраэдр суть трсхмерные многообразия.

5. Пустое множество является k-мерным многообразием при любом $k \in \mathbb{N}$.

6. Непустые многообразия различных размерностей топологически неизоморфны (следствие теоремы о вложении области).

7. Конфигурационное пространство механической системы (множество ес возможных положений), как правило, является гладким многообразием. Его размерность называют числом степеней свободы этой системы.

8. Задать конфигурационное пространство летящего в $\mathbb{R}^3$ копья уравнением в $\mathbb{R}^6$ и убедиться, что оно есть пятимерное многообразие класса C^∞. (Расположение копья определяется положениями его начала и конца.)

9. Каждая точка k-мерного многообразия класса C^r обладает окрестностью, C^r-изоморфной либо пространству $\mathbb{R}^k$, либо полупространству $\mathbb{R}^k_+$.

Точку p k-мерного многообразия M называют *крайней*, если у нес нет окрестности в M, гомеоморфной некоторой открытой части U пространства $\mathbb{R}^k$. Множество крайних точек многообразия M обозначают символом ∂M и называют краем многообразия M.

Упражнения. 0. Край нульмерного многообразия пуст.

1. $\partial[a < b] = \{a, b\}$.

2. Всякое k-мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является k-мерным многообразием класса C^∞ без края.

3. $\partial\, S^k = \emptyset$.

4. **Лемма об открытых частях многообразия (ЛОЧМ).** Каждая открытая часть M' многообразия M класса C^r является многообразием класса C^r, причсм $\partial\, M' = M' \cap \partial\, M$.

5. **Лемма об изоморфизме многообразий (ЛИМ).** Если отображение $\varphi : M \to X$ k-многообразия M класса C^r является C^r-изоморфизмом, то X есть k-многообразие класса C^r, причсм $\partial\, X = \varphi(\partial\, M)$.

6. График Γ_f C^r-отображения $f : U \to \mathbb{R}^l$ открытого в $\mathbb{R}^k$ множества U является k-мерным C^r-многообразием без края.
$\triangleleft$ Подсказ: $\varphi(x) := (x, f(x)) : U \to \Gamma_f$ и $\pi(x, y) := x : \Gamma \to U$ взаимно обратные отображения, $\varphi \in C^r$, $\pi \in C^\infty$, U — k-мерное C^∞- многообразие без края. $\triangleright$

Лемма о крае полупространства.

$$\partial\, \mathbb{R}^k_+ = F := Fr_{\mathbb{R}^k}\mathbb{R}^k_+ = \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 = 0\}.$$

◀ Поскольку множество $\mathbb{R}^k_+ \setminus F$ открыто как в $\mathbb{R}^k_+$, так и в $\mathbb{R}^k$, то $\partial\, \mathbb{R}^k_+ \subset F$.

Пусть $p \in F$. Предположим, что $p \notin \partial\, \mathbb{R}^k_+$, т. е. что у точки p имеется окрестность $W \subset \mathbb{R}^k_+$, гомеоморфная некоторой открытой части пространства $\mathbb{R}^k$. Согласно теореме о вложении области, W открыто в $\mathbb{R}^k$. Следовательно, W не помещается в полупространство $\mathbb{R}^k_+$, ибо содержит точку $p \in F$ — противоречие. Значит, $p \in \partial\, \mathbb{R}^k_+$. ▶

Теорема о крае многообразия. Край k-мерного многообразия M класса C^r является $(k-1)$-мерным многообразием без края класса C^r.

◀ Если $p \in \partial\, M$, то существуют открытая в M окрестность W и C^r-изоморфизм $\varphi : W \to \mathbb{R}^k_+$. Пусть $V := W \cap \partial\, M$. По лемме об открытых частях многообразия $V = \partial\, W$, а по лемме об изоморфизме многообразий и лемме о крае полупространства $V \underset{C^r}{\cong} \partial\, \mathbb{R}^k_+ = F$. Остастся заметить, что $F \underset{C^\infty}{\cong} \mathbb{R}^{k-1}$ и что V открыто в $\partial\, M$. ▶

Рассмотрим множества, определяемые системами соотношений следующих двух типов:

$$f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0; \tag{I}$$

$$h(z) \geq 0, f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0, \tag{II}$$

где $h, f_1, \dots, f_k$ — вещественные r-гладкие функции, заданные на открытом в $\mathbb{R}^n$ множестве Ω.

Решение p системы уравнений (I) называется регулярным, если p есть регулярная точка системы функций $f = (f_1, \dots, f_k)$.

Теорема I о регулярных решениях. Множество M регулярных решений системы уравнений (I) является гладким $(n-k)$-мерным многообразием без края.

Решение p системы соотношений (II) называется внутренним, если $h(p) > 0$, и граничным, если $h(p) = 0$. Внутреннее решение p называется регулярным, если p — регулярная точка системы функций $f = (f_1, \dots, f_k)$. Граничное решение p называется регулярным, если p — регулярная точка системы функций $f = (h, f_1, \dots, f_k)$.

Теорема II о регулярных решениях. Множество M регулярных решений системы (II) является $(n-k)$-мерным гладким многообразием, край которого есть множество регулярных граничных решений системы уравнений

$$h(z) = f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0. \tag{III}$$

Для изложения доказательств последних двух теорем введсм следующие обозначения: $q := n-k$, $X := \mathbb{R}^q$, $x := (x_1, \dots, x_q) \in X$, $Y := \mathbb{R}^k$, $y \in Y$, $E := \{(x,y) \in X \times Y : y = 0\} = X \times \{0\}$, $f := (f_1, \dots, f_k) : \Omega \to Y$, $E_+ := \{(x,y) \in X \times Y : x_1 \geq 0, y = 0\}$, $F := \{(x,y) \in X \times Y : x_1 = 0, y = 0\} = \partial E_+$.

Теперь системы I и II имеют вид $f(z) = 0$ и $h(z) \geq 0, f(z) = 0$, $z \in \Omega$, а многообразия E и E_+ суть множества решений простейших регулярных систем типа I и II.

◀ I. Пусть S — множество всех решений системы I и $p \in M$. Согласно лемме о регулярном дополнении § 9.1, имеется такой набор g, содержащий q вещественных r-гладких функций что отображение $\varphi := (g, f) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ регулярно в точке p. В данной ситуации это равносильно формуле $\det \varphi'(p) \neq 0$. По ТЛО имеется такая открытая окрестность U точки p, что множество $V := \varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а отображение $\varphi : U \to V$ является r-гладким изоморфизмом.

Пусть $\psi : V \to U$ — обратный изоморфизм, $S' := S \cap U$, $E' := E \cap V$. Нетрудно заметить, что изоморфизм φ преобразует множество S' в E', а ψ — обратно. Следовательно, $S' \underset{C^r}{\cong} E'$. Так как $\varphi : U \to V$ обратимо в классе дифференцируемых отображений, то φ регулярно в каждой точке $x \in U$. Следовательно, $S' = M \cap U$. Остастся заметить, что S' открыто в M, а E' открыто в E и, стало быть, E' C^r-изоморфно некоторой открытой части пространства $\mathbb{R}^q$. ▶

◀ II. Пусть S — множество всех решений системы II, T — множество ес граничных решений и $p \in M$ — произвольное регулярное решение.

1. Допустим, что p — внутреннее решение, т. е. $p \in M' := M \cap \Omega'$, где $\Omega' := \{z \in \Omega \colon h(z) > 0\}$. Поскольку M' является множеством регулярных решений системы I, рассматриваемой в открытом множестве Ω', то, согласно теореме I, у точки p имеется открытая в M' окрестность W, C^r-изоморфная некоторой открытой части пространства $\mathbb{R}^q$. Поскольку M' открыто в M, то W открыто в M.

2. Допустим, что p — регулярное граничное решение системы II, т. е. что $p \in M \cap T$. Согласно лемме о регулярном дополнении § 9.1, имеется такой набор g вещественных r-гладких функций, что отображение $\varphi := (h, g, f) : \Omega \to X \times Y$ регулярно в точке p. В данной ситуации это равносильно формуле $\det \varphi'(p) \neq 0$. По ТЛО имеется такая открытая окрестность U точки p, что множество $V := \varphi(U)$ открыто в $X \times Y$, а отображение $\varphi : U \to V$ является r-гладким изоморфизмом. Пусть $\psi : V \to U$ — обратный изоморфизм, $S' := S \cap U$, $T' := T \cap U$.

С другой стороны, пусть $E' := E_+ \cap V$, $F' := F \cap V$.

Нетрудно заметить, что изоморфизм φ преобразует пару множеств S', T' в пару E', F', а ψ — обратно. Так как E' — открытая часть q-мерного векторного полупространства E_+, то, согласно ЛОЧМ, E' есть q-мерное многообразие класса C^∞, а $F' = \partial E'$. По ЛИМ S' есть q-мерное C^r-многообразие, а $T' = \partial S'$.

Так как $\varphi : U \to V$ обратимо в классе дифференцируемых отображений, то φ регулярно в каждой точке $x \in U$. Следовательно, $S' = M \cap U$ открыто в M. Поскольку S' C^r-изоморфно V, а V C^r-изоморфно некоторой открытой части полупространства $\mathbb{R}^q$, то, стало быть, у точки p нашлась открытая в M окрестность, C^r-изоморфная открытой части полупространства $\mathbb{R}^q$.

Из этого и заключения п. 1 следует, что M является q-мерным многообразием класса C^r. Кроме того, из п.1 следует, что всякое внутреннее регулярное решение системы II не лежит на ∂M. А соотношение $p \in T' = \partial S'$ из п. 2 и ЛОЧМ говорят о том, что каждое граничное регулярное решение является крайней точкой многообразия M. ▶

Описание устройства множества всех решений систем I и II вблизи нерегулярного решения, а также множеств, задаваемых более сложными системами, нуждается в специальном анализе.

Лемма о локальном вложении. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение открытого в $\mathbb{R}^k$ множества Ω и $p \in \Omega$ — такая точка, что столбцы матрицы Якоби $Df(p)$ линейно независимы. Тогда у точки p найдстся такая открытая окрестность U, что отображение

$f : U \to \mathbb{R}^n$ является гладким вложением, и, следовательно, множество M:$=f(U)$ есть гладкое k-мерное многообразие.

◀ В данной ситуации матрица $Df(p)$ содержит k линейно независимых строк. Можно считать, что это — первые строки матрицы, и рассмотрим отображение $\varphi = (f_1, \ldots, f_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Строки $k \times k$-матрицы $D\varphi(p)$ линейно независимы и потому у точки p имеется такая открытая окрестность U, что множество $V = \varphi(U)$ открыто в $\mathbb{R}^k$, а отображение $\varphi : U \to V$ является гладким изоморфизмом. Пусть $\psi : V \to U$ — обратный изоморфизм и $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — проекция, определяемая формулой $\pi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = (x_1 \ldots, x_k)$. Поскольку $\forall u \in \Omega\ \varphi(u) = \pi(f(u))$, то $\forall u \in U\ u = \psi(\varphi(u)) = \psi(\pi(f(u)))$. Отсюда, представив любую точку $x \in M := f(U)$ в виде $x = f(u), u \in U$, будем иметь $x = f(u) = f(\psi(\pi(f(u)))) = f(\psi(\pi(x)))$. Следовательно, отображения $f : U \to M$ и $\psi \circ \pi : M \to U$ — взаимно обратные изоморфизмы. ▶

Пример. Отображение $z : T =]0, 2\pi[\to \mathbb{C}$, определяемое формулой $z(t) = \cos t + \frac{i}{2} \sin 2t$, инъективно, принадлежит классу C^∞, причсм $Dz(t) \neq 0$ при любом t. Однако оно даже не является C^0-вложением, ибо множество его значений $z(T)$ ("восьмсрка") компактно и потому негомеоморфно интервалу T.

Упражнения. 1. Каждая точка гладкого k-мерного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ обладает такой открытой в $\mathbb{R}^n$ окрестностью Ω, в которой множество $M \cap \Omega$ совпадает с множеством решений некоторой регулярной системы соотношений вида I или II, содержащей $n - k$ уравнений.

2. Пусть Θ — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$ (замыкание некоторого открытого множества). Если граница $Fr\Theta$ есть гладкое $(n-1)$-мерное многообразие, то Θ есть гладкое n-мерное многообразие. В классе C^0 этого может не быть.

§ 9.3. Касательное пространство

Кинематическое определение касания. Вектор $v \in \mathbb{R}^n$ будем называть *касательным вектором* к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in M$ и писать $v \in T_pM$, если существует функция (движение) $\gamma : T_{\subset\mathbb{R}} \to M$ такая, что

$$p = \gamma(0),\ v = \gamma'_+(0) := \lim_{t \searrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}.$$

(Область T такой функции обязана содержать точку $0 \in \mathbb{R}$ и накапливаться к ней справа: $0 \in \mathrm{Cl}(T \cap]0, \infty[)$.) Совокупность T_pM всех касательных векторов к множеству M в точке p называют *касательным* *пространством* множества (к множеству) M в точке p, а множество $K_pM := p + T_pM$ — *контингенцией.*

В математике в качестве рабочего инструмента, как правило, используют понятие касательного пространства. Но для создания полезных наглядных представлений обычно пользуются изображением контингенции. В тех случаях, когда контингенция является прямой, плоскостью и т. п., ес называют *касательной.*

Упражнения. 1. Нулевой вектор $0 \in \mathbb{R}^n$ касателен к любому множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в каждой точке $p \in M$.

2. Если интервал $]p, q[\subset \mathbb{R}^n$ содержит последовательность точек $x_n \in X$, сходящуюся к $p \in X$, то вектор $v = q - p$ касателен к множеству X в точке p.

3. Ненулевой вектор v касателен к множеству X в точке $p \in X$ тогда и только тогда, когда имеется такая последовательность точек $x_n \in X \setminus \{p\}$, сходящаяся к точке p, что угол между векторами v и $x_n - p$ стремится к нулю при $n \to \infty \Leftrightarrow \frac{v_n}{|v_n|} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{v}{|v|}$.

4. Каковы касательное пространство и контингенция у известных школьных фигур в различных точках этих фигур?

Основные свойства касательного пространства.

T1. Пространство T_pM является замкнутым конусом с вершиной в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что множество T_pM замкнуто в пространстве $\mathbb{R}^n$ и что T_pM есть объединение некоторого множества лучей, выходящих из точки 0. (Лучом, выходящим из точки p, называется множество вида $\{p + tv \colon t \in \mathbb{R}_+\} = p + \mathbb{R}_+ \cdot v$, где $p, v \in \mathbb{R}^n$.)

T2. Монотонность: если $p \in S \subset M$, то $T_pS \subset T_pM$.

T3. Локальность: если $U \subset M$ является окрестностью в M точки p, то $T_pU = T_pM$.

T4. Если M есть замкнутый конус с вершиной p, то $T_pM = M - p, \quad K_pM = M$.

◀ Достаточно предполагать, что $p = 0 \in \mathbb{R}^n$.

1. Покажем, что T_pM — конус с вершиной 0. Для этого нужно установить, что для любых $v \in T_pM$ и $\lambda \geq 0$ $\lambda v \in T_pM$. Если $\lambda v = 0$, это очевидно. Пусть $v \in (T_pM) \setminus \{0\}$, $\lambda > 0$ и $x : T \to M$ — такая функция, что $x(0) = 0$, $x'_+(0) = v$. Пусть $S := \frac{1}{\lambda}T$ и $y : S \to M$ — функция, заданная условиями $y(s) := x(\lambda s)$ $\forall s \in S$. Тогда

$$\frac{y(s)}{s} = \frac{x(\lambda s)}{s} = \lambda \frac{x(\lambda s)}{\lambda s} \underset{s\searrow 0}{\to} \lambda v$$

и так как $y(0) = p$, то $v \in T_pM$.

Замкнутость. Пусть $v \in \operatorname{Cl} T_pM$. Поскольку в любой окрестности точки v есть представители множества T_pM, то для каждого номера n имеется такой вектор $v_n \in T_pM$, что $|v_n - v| < 2^{-n}$. Пусть $x_n : T_n \to M$ — такая функция, что $x_n(0) = p$, $(x_n)'_+(0) = v_n$. Ввиду того что множество T_0 накапливается справа к точке 0, а $\frac{x_0(t)}{t} \underset{t \searrow 0}{\to} v_0$, найдсм такую точку $t_0 \in T_0 \cap]0, \infty[$, что $\left| \frac{x_0(t_0)}{t_0} - v_0 \right| < 2^{-0}$.

Ввиду того, что множество T_1 накапливается справа к точке 0, а $\frac{x_1(t)}{t} \underset{t \searrow 0}{\to} v_1$, найдсм такую точку $t_1 \in T_1 \cap]0, \frac{t_0}{2}[$, что $\left| \frac{x_1(t_1)}{t_1} - v_1 \right| < 2^{-1}$. Продолжая намеченный процесс, получаем последовательность точек t_n, подчинснную условиям: $t_n \in]0, \frac{t_{n-1}}{2}[$, $\left| \frac{x_n(t_n)}{t_n} - v_n \right| < 2^{-n}$. Пусть $x : T \to M$ — функция, заданная условиями $T := \{0, t_0, \ldots, t_n, \ldots\}$, $x(0) = 0 = p$, $x(t_n) = x_n(t_n)$. Из неравенства $\left| \frac{x(t_n)}{t_n} - v \right| = \left| \frac{x_n(t_n)}{t_n} - v_n + v_n - v \right| < 2^{1-n}$ следует, что $x'_+(0) = v \Rightarrow v \in T_pM$.

2. Монотонность очевидна.

3. Покажем, что $T_pM \subset T_p(M \cap U)$. Пусть $v \in T_pM$ и $x : T \to M$ — такая функция, что $x(0) = 0$, $x'_+(0) = v$. Поскольку $x(t) \underset{t \searrow 0}{\to} 0$, то существует $\delta > 0$: $x(t) \in U$ $\forall t \in T' := T \cap]0, \delta[$. Пусть $u : T' \to M \cap U$ — такая функция, что $u(t) = x(t)$ $\forall t \in T'$. Легко видеть, что $u(0) = p$, $u'_+(0) = v$. Значит, $v \in T_p(M \cap U)$.

4. Пусть M – замкнутый конус с вершиной $p = 0$. Ясно, что $M \subset T_pM$. Установим обратное включение. Пусть $v \in T_pM$ и $x : T \to M$ — такая функция, что $x(0) = 0$, $x'_+(0) = v$. В этой ситуации в каждой окрестности точки v содержится точка вида $\frac{x(t)}{t}$, где $t > 0$. Так как $x(t) \in M$, а M — конус с вершиной 0, то $\frac{x(t)}{t} \in M$. Следовательно, $v \in M$, ибо M замкнуто. ▶

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^s$ — произвольные множества и $\varphi : X \to Y$ — гладкое отображение. Определим его дифференциал $d\varphi(p) : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ в любой точке p следующим образом. Выберем какое-нибудь гладкое расширение $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to \mathbb{R}^s$ отображения φ на открытую окрестность $\tilde{X}$ множества X и для каждого $v \in T_pX$ положим $d\varphi(p)v := d\tilde{\varphi}(p)v$.

Лемма. Приведенное определение корректно, т. е., во-первых, отображение $d\varphi(p)$ переводит T_pX в $T_{\varphi(p)}Y$ и, во-вторых, не зависит от выбора расширения $\tilde{\varphi}$.

◀ Поскольку отображение $\tilde{\varphi}$ дифференцируемо, то

$$\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(p) = d\tilde{\varphi}(p)\langle x - p\rangle + \omega(x),\ \omega(x) \underset{x\to p}{=} o(x-p).$$

Пусть $v \in T_pX$, $w := d\tilde{\varphi}(p)\langle v\rangle$ и $x : T \to X$ – такая функция, что $x(0) = p$, $x'_+(0) = v$. Зададим функцию $y : T \to Y$ формулой $y(t) := \varphi(x(t))$. Тогда $y(0) = q := \varphi(p)$, $\frac{y(t)-y(0)}{t} = \frac{\varphi(x(t))-\varphi(x(0))}{t} = \frac{\tilde{\varphi}(x(t))-\tilde{\varphi}(x(0))}{t} = d\tilde{\varphi}(p)\langle \frac{x(t)-x(0)}{t}\rangle + \frac{\omega(x(t))}{t} \underset{t\searrow 0}{\to} d\tilde{\varphi}(p)\langle v\rangle + 0 = w$. Следовательно, $y'_+(0) = w$. Отсюда $w \in T_qY$, и поскольку определение функции y не опиралось на $\tilde{\varphi}$, то вектор $w := d\tilde{\varphi}(p)\langle v\rangle$ не зависит от выбора $\tilde{\varphi}$. ▶

Свойства дифференциала. 1. Дифференциал гладкого отображения является линейным отображением касательных пространств в соответствующих точках: если $\varphi : X \to Y, X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^s$, — гладкое отображение, то для любой точки $p \in X$ дифференциал $d\varphi(p) : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ является сужением некоторого линейного отображения $\Phi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$.

2. Дифференциал тождественного отображения является тождественным отображением соответствующих касательных пространств.

3. Дифференциал композиции гладких отображений равен композиции их дифференциалов в соответствующих точках:

$$d(\psi\circ\varphi)\big|_p = d\psi(\varphi(p))\circ d\varphi(p).$$

4. Если $\varphi : X \to Y$ — гладкий изоморфизм, то его дифференциал $d\varphi(p) : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ в любой точке $p \in X$ есть линейный изоморфизм соответствующих касательных пространств.

Упражнения. 1. Круг, треугольник и квадрат топологически изоморфны, а гладко — нет.

2. Если φ — гладкое отображение открытой части U пространства $\mathbb{R}^k$ в множество $X \subset \mathbb{R}^n$, то для каждой точки $u \in U$ и любого вектора $v \in \mathbb{R}^k$ $\partial_v\,\varphi(u) \in T_{\varphi(u)}X$, в частности, *каждая частная производная $D_i\varphi(u)$ есть касательный вектор к множеству X в точке $\varphi(u)$*.

Экскурс в алгебру. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называют *k-мерным векторным полупространством*, если существует такая линейно независимая система векторов $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, что $X = \{x = \sum t_iv_i\colon\ t_1 \geq 0\}$, т. е. если X линейно изоморфно полупространству $\mathbb{R}^k_+$.

Инъективное линейное отображение (мономорфизм) переводит k-мерные векторные пространства (полупространства) в k-мерные векторные пространства (полупространства) •

Теорема о касательном пространстве многообразия. Пусть M — гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$.

1. Если $p \in M \setminus \partial M$, то T_pM является k-мерным векторным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Если $p \in \partial M$, то T_pM есть k-мерное векторное полупространство в $\mathbb{R}^n$, причсм край этого полупространства является касательным пространством края многообразия M в точке p: $\partial T_pM = T_p \partial M$•

◀ Пусть p — произвольная точка многообразия M, $\varphi : U \to V$ — гладкий изоморфизм, где U — открытая в M окрестность точки p, V — открытое множество либо в $\mathbb{R}^k$, либо в $\mathbb{R}^k_+$. Пусть $q = \varphi(p)$ и $\psi : V \to U$ — обратный к φ изоморфизм.

1. $p \in M \setminus \partial M,\ V$ открыто в $\mathbb{R}^k$. В этом случае $T_qV \overset{T3.}{=} T_q\mathbb{R}^k \overset{T4.}{=} \mathbb{R}^k$. Так как отображение $d\psi(p) : T_qV \to T_pU$ является линейным изоморфизмом, то T_pU — k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Остастся заметить, что $T_pM \overset{T3.}{=} T_pU$.

2. $p \in \partial M,\ V$ открыто в $\mathbb{R}^k_+$. В этом случае $q \overset{\text{ЛИМ}}{\in} \partial V \overset{\text{ЛОЧМ§9.2}}{=} V \cap \partial \mathbb{R}^k_+$. Отсюда $T_q \partial V \overset{T3.}{=} T_q \partial \mathbb{R}^k_+$. Кроме того, $T_qV \overset{T3.}{=} T_q\mathbb{R}^k_+ \overset{T4.}{=} \mathbb{R}^k_+$. Так как отображение $d\psi(p) : T_qV \to T_pU$ и его сужение $d\psi(p) : T_q \partial V \to T_p \partial U$ суть линейные изоморфизмы, то T_pU — k-мерное полупространство в $\mathbb{R}^n$, а $T_p \partial U$ — его край. Остастся заметить, что $T_pU = T_pM$, а $T_p \partial U = T_p \partial M$. ▶

Приложения.

1. Уравнения касательного пространства и контингенции. Пусть S — множество всех решений гладкой системы уравнений (I) § 9.2 и $p \in S$ — регулярное решение этой системы. Тогда касательное пространство T_pS является множеством всех решений системы линейных однородных уравнений

$$df_1(p)v = \ldots = df_k(p)v = 0,\ v \in \mathbb{R}^n, \tag{T}$$

а контингенция K_pS — множеством всех решений системы уравнений

$$df_1(p)\langle x - p\rangle = \ldots = df_k(p)\langle x - p\rangle = 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

◀ Пусть V – множество всех решений системы уравнений (T). Поскольку $f_i(S) = \{0\}$, то для каждого вектора $v \in T_pS$ имеем $df_i(p)v \in T_{f_i(p)}\{0\} = \{0\}$. Следовательно, $T_pS \subset V$.

Поскольку p — регулярное решение системы (I), то ранг системы линейных уравнений (T) равен k и, стало быть, V есть $(n-k)$-мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$. А так как множество M регулярных решений системы (I) является $(n-k)$-мерным гладким многообразием, то T_pM есть $(n-k)$-мерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$. И поскольку $T_pM \subset T_pS \subset V$, то $T_pM = T_pS = V$.

Второе заключение доказываемого утверждения есть простое следствие первого. ►

Упражнение. Пусть S — множество всех решений гладкой системы (II) § 9.2. Написать системы линейных соотношений, определяющие T_pS и K_pS в тех случаях, когда p — внутреннее регулярное решение и когда p — граничное регулярное решение этой системы.

2. Говорят, что векторы $v, w \in \mathbb{R}^n$ ортогональны, и пишут $v \perp w$, если $\langle w, v \rangle = 0$. Будем говорить, что *вектор $w \in R^n$ ортогонален к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in M$*, и писать $w \perp T_pM$, если $w \perp v$ для каждого $v \in T_pM$. Совокупность $(T_pM)^\perp$ всех векторов, ортогональных к множеству M в точке p, называют *нормалью (ортогональю)*.

Упражнения. 1. Ортогональ $(T_pM)^\perp$ всегда является векторным подпространством объемлющего пространства, а если M есть гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, то ортогональ $(T_pM)^\perp$ является $(n-k)$-мерным векторным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Если $M \subset S \subset \mathbb{R}^n$, то $(T_pM)^\perp \supset (T_pS)^\perp$

Теорема о градиентах. Пусть p — какая-либо точка множества S, определяемого гладкой системой уравнений (I) § 9.2. Тогда градиенты $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)$ ортогональны к множеству S в точке p, а если p — регулярное решение рассматриваемой системы, то они образуют базис ортогонали $(T_pS)^\perp$.

◄ Поскольку $f_i(S) = \{0\}$, то для каждого вектора $v \in T_pS$ имеем $df_i(p)v \in T_{f_i(p)}\{0\} = \{0\}$ и, следовательно, $\langle \nabla f_i(p), v \rangle = df_i(p)v = 0$, т. е. $\nabla f_i(p) \in (T_pS)^\perp$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Допустим теперь, что в точке p градиенты функций $f_1, \dots, f_k$ линейно независимы. Это означает, что p — регулярное решение системы (I). Поскольку множество M регулярных решений этой системы является открытой частью множества S всех ес решений, то $T_pS = T_p$ (свойство T3). А так как M — $(n-k)$-мерное гладкое многообразие то ортогональ $(T_pM)^\perp$ является k-мерным векторным пространством, содержащим линейно независимые векторы $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)$. ►

3. Необходимые признаки условного экстремума

Пусть h — гладкая вещественная функция, определсниая на некотором открытом множестве пространства $\mathbb{R}^n$.

Геометрический вариант леммы Ферма. Если p — точка локального экстремума функции h на гладком многообразии M (при условии $x \in M$), то либо $\nabla h(p) \perp T_pM$, либо $p \in \partial M$.

◀ Допустим, что $p \in M \setminus \partial M$ — точка локального минимума функции h. В этом случае T_pM является векторным пространством, а $h(M) \subset Y := [h(p), \infty[$. Следовательно, $Z := dh(p)\langle T_pM\rangle \subset T_{hp)}Y = \mathbb{R}_+$. Множество Z согласно свойству $d1$ дифференциала является векторным подпространством поля $\mathbb{R}$. Остатся заметить, что на луче $\mathbb{R}_+$ есть только нулевое векторное под пространство, и, стало быть, $\langle \nabla h(p), v\rangle = dh(p)v = 0 \ \forall v \in T_pM$. ▶

Метод множителей Лагранжа поиска условного экстремума. Если функция h имеет локальный экстремум в точке x при условии (I)§ 9.2 (на множестве S, определяемом системой уравнений I) и если в этой точке градиенты функций $f_1, \dots, f_k$ линейно независимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что $\nabla h(x) = \sum \lambda_i \nabla f_i(x)$.

◀ Пусть M — множество регулярных решений системы (I). Если в точке p градиенты функций $f_1, \dots, f_k$ линейно независимы, то $p \in M$. К тому же p является точкой локального экстремума функции h на множестве M. И поскольку M — гладкое $(n-k)$-мерное многообразие без края, то ортогональ $(T_pM)^\perp$ является k-мерным векторным пространством, содержащим как линейно независимые векторы $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)$ (теорема о градиентах), так и вектор $\nabla h(p)$ (лемма Ферма). Следовательно, этот вектор является линейной комбинацией предыдущих . ▶

Приложение к анализу в пространстве матриц

В этом разделе буквами x, y, v обозначаются вещественные $(n \times n)$-матрицы, символом x_{ij} обозначается ij-я компонента матрицы x, символом x_i — i-й столбец этой матрицы. Скалярное произведение в пространстве $L(n)$ вещественных $(n \times n)$-матриц задастся формулой

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i,j} x_{ij}y_{ij} = \sum_i \langle x_i y_i\rangle = \sum_i x_i^* \cdot y_i = tr(x^* \cdot y).$$

1. Для частных производных $D_{ij}\det := \frac{\partial}{\partial x_{ij}}\det$ функции $\det : L(n) \to \mathbb{R}$ имеет место равенство $D_{ij}\det(x) = a_{ij}(x) :=$ алгебраическое дополнение к элементу x_{ij} матрицы x. Следовательно, для матрицы Якоби функции det справедлива формула $D\det(x) = \nabla\det(x) = = a(x)$:=матрица алгебраических дополнений, а значение дифференциала $d\det$ в точке x на векторе $v \in L(n)$ задастся равенством

$$d\det x\langle v\rangle = \langle \nabla\det(x), v\rangle = tr((a(x))^* \cdot v).$$

◁ Пусть $(e_i : i \in \{1, \dots, n\})$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, а $(e_{ij} : i, j \in$

$\in \{1, \dots, n\})$ — стандартный базис в $L(n)$ (здесь e_{ij} — матрица, в которой на (ij)-том месте стоит единица, а на остальных — нули). Тогда

$$D_{ij} \det x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\det(x + te_{ij}) - \det x) = \det(\dots, x_{j-1}, e_i, x_{j+1}, \dots) =:$$

$$=: a_{ij}(x).$$

$\triangleright$

2. Каждая обратимая матрица x является регулярной точкой функции $\det$.

3. Группа унимодулярных матриц $\Gamma := SL(n) := \{x \in L(n)\colon \det x = 1\}$ есть бесконечно гладкое (n^2-1)-мерное многообразие. Касательное пространство $T_1\Gamma$ в точке $1 \in \Gamma$ есть пространство матриц с нулевым следом.

4. Группа $O(n)$ ортогональных матриц является компактным бесконечно гладким многообразием. Какой размерности? Касательное пространство $T_1 O(n)$ в точке $1 \in O(n)$ есть пространство антисимметричных матриц.

$\triangleleft$ $O(n) := \{x \in L(n)\colon x^* \cdot x = 1 \in L(n)\}$. Пусть S — векторное пространство симметричных матриц и $f : L(n) \to S$ — функция, определяемая равенством $f(x) = x^* \cdot x$. Тогда $df(x)v = x^* \cdot v + v^* \cdot x$, ибо $f(x+v) - (x^* \cdot x + x^* \cdot v + v^* \cdot x) = v^* \cdot v \underset{v \to 0}{=} o(v)$. Уравнение $x^* \cdot v + v^* \cdot x = s$ разрешимо при любых $x \in O(n)$ и $s \in S$ (например, $v = \frac{x}{2}s$), т. е. $df(x) : L(n) \to S$ является эпиморфизмом. Значит, каждое решение уравнения $f(x) = 1 \in S$ регулярно и потому $O(n)$ есть $(n^2 - k)$-мерное многообразие, где k — размерность векторного пространства S. Наконец, $T_1 O(n)$ есть множество решений уравнения $1 = df(1)v = v^* + v$. $\triangleright$

5. Множество точек $x \in \Gamma$, ближайших к точке $0 \in L(n)$, есть группа вращений $SO(n) := \{x\colon x^*x = 1,\ \det x = 1\}$.

$\triangleleft$ Ближайшая к нулю точка множества Γ является точкой минимума функции $h(x) = |x|^2 = \langle x, x\rangle$ на многообразии Γ (при условии $\det x = 1$). В силу метода Лагранжа для такой точки x найдстся такое λ, что $\nabla h(x) = 2\lambda \nabla \det x$. Так как $\nabla h(x) = 2x$, то $x = \lambda \nabla \det x = \lambda a(x) = \lambda (x^{-1})^* \det x$. Поскольку $\det x = 1$, то $\lambda^n = 1$ и, стало быть, $x^* \cdot x = \pm 1 \in L(n)$. Однако равенство $x^* x = -1$ невозможно, ибо собственные числа матрицы $x^* x$ неотрицательны. Значит, $x \in SO(n)$.

Поскольку Γ — непустое замкнутое в $L(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ множество, то оно содержит ближайшую к нулю точку (следствие теоремы Вейерштрасса). А так как квадрат расстояния каждой точки $x \in SO(n)$ до нуля равен $|x|^2 = tr(x^* x) = n$, то все они — ближайшие. $\triangleright$

Глава 10. ПОТОЧЕЧНАЯ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

В этой главе термин "функция" — синоним фразы "отображение вида $f : X \to E$", где $X \subset \mathbb{R}^s$, а E — банахово пространство с нормой $|\,|$ над полем $\Lambda \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Рассмотрим один из ключевых вопросов математического анализа: если последовательность функций $f_n(x)$ *поточечно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* S

$$(f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)\ \forall x \in S),$$

то при каких условиях справедливы следующие три утверждения:

1) $\lim\limits_{x\to p|S} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \lim\limits_{x\to p|S} f(x)$;

2) $Df_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} Df(x)$;

3) $\int_S f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_S f(x)dx$.

Вопрос не праздный, как показывают следующие примеры.

1. Пусть $f_n(x) = \arctan nx$. Тогда $f_n(x) \to \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x\Big|_{n\to\infty}$. Здесь нарушены формулы 1 и 2. Все функции f_n дифференцируемы, в то время как их поточечный предел f даже не является непрерывной функцией.

2. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan nx$. Тогда $f_n(x) \to 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Однако $Df_n(0) = 1$ при любом $n > 0$. Здесь нарушена формула 2.

3. ("Набегающая волна".) Пусть $f_n(x) = n \sin nx$ при $x \in [0, \pi/n]$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin [0, \pi/n]$. В этом случае $f_n(x) \to 0$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. В то же время $\int_0^{2\pi} f_n(x)\,dx = 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ — не выполнена формула 3.

§ 10.1. Признаки равномерной сходимости

Согласно метрическому критерию сходимости, последовательность функций $f_n(x)$ поточечно сходится на множестве S к функции $f(x)$ при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in S\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq m\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность функций $f_n(x)$ *сходится* к функции $f(x)$ равномерно по x из S (на множестве S) при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq m\ \forall x \in S\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

В этом случае функцию f будем называть равномерным пределом последовательности f_n и будем писать $f_n(x) \underset{n\to\infty|x\in S,}{\rightrightarrows} f(x)$, опуская приписки вида $n \to \infty$, $x \in S$ или переменную x там, где это не вредит пониманию текста.

Равномерная сходимость влечёт поточечную, но не наоборот (примеры 1 и 3).

Говорят, что ряд функций φ_n равномерно суммируем (сходится) на множестве S, если последовательность его частичных сумм $\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} \varphi_n$ равномерно на S сходится к некоторой функции σ. В этом случае функцию σ называют равномерной суммой ряда φ_n.

Критерий Коши равномерной сходимости. Последовательность функций f_n равномерно сходится на множестве S к некоторой функции тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему *условию Коши равномерной сходимости:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \forall k, l \geq m \forall x \in S\ |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon.$$

◀ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и $\varepsilon > 0$. По определению, имеется такой номер m, что $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для каждого $x \in S$ при любом $n \geq m$. Для таких x и номеров $k, l \geq m$ имеем $|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x) - f_l(x)| \leq \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть выполнено условие Коши. Тогда для всякого $x \in S$ последовательность точек $f_n(x) \in E$ фундаментальна. А так как пространство E полно, то она сходится к некоторой точке $f(x) \in E$. Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Пусть $\varepsilon > 0$ и m — такой номер, что $\forall k, l \geq m\ \forall x \in S\ |f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$. Перейдя к пределу при $l \to \infty$, будем иметь $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ \forall k \geq m\ \forall x \in S$. ▶

Обозначим через $\mathscr{F}(X, E)$ множество всевозможных E-значных функций, определелснных на множестве X, и для каждой функции $f \in \mathscr{F}(X, E)$ положим $\|f\| := \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}$. Число $\|f\|$ называют *супремум-нормой* функции f, а число $\|f - g\|$ — *равномерным отклонением* f от g.

Векторное пространство функций $\mathscr{F}(X, E)$ будем считать снабжсн-ным супремум-нормой. Это пространство не является нормированным векторным пространством в строгом смысле слова, ибо супремум-норма может принимать значение ∞. Тем не менее в нсм можно действовать как в обычном нормированном пространстве.

Упражнения. Здесь все функции суть элементы пространства $\mathscr{F} := \mathscr{F}(X, E)$.

0. **Свойства супремум-нормы.**

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|. \qquad \|f\| \in [0, \infty].$$
$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \qquad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \in \mathscr{F}(X, E).$$

1. $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \|f - f_n\| \to 0$.

2. Условие Коши равномерной сходимости равносильно утверждению

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \forall k, l \geq m \|f_k - f_l\| \leq \varepsilon.$$

Следствие. Пространство $\mathscr{F}(X, E)$ полно (относительно супремум-нормы).

3. **Критерий Коши равномерной суммируемости ряда:** ряд функций φ_n равномерно суммируем тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\colon \forall k, l \geq m\ \|\sum_k^l \varphi_n\| \leq \varepsilon.$$

4. **Признак Вейерштрасса равномерной суммируемости ряда.**

(**Принцип сравнения для рядов в пространстве** $\mathscr{F}(X, E)$.) Ряд функций, мажорируемый суммируемым числовым рядом, равномерно суммируем: если для ряда функций $\varphi_n \in \mathscr{F}(X, E)$ найдстся такой суммируемый числовой ряд $\varrho_n \in \mathbb{R}$, что $\|\varphi_n\| \leq \varrho_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то ряд φ_n равномерно суммируем на X. Стало быть, если $\sum \|\varphi_n\| < \infty$, то ряд φ равномерно суммируем.

5. **Признак Абеля—Дирихле равномерной суммируемости.** Если на множестве X последовательность вещественных функций $u_n(x)$, убывая, равномерно стремится к нулю, а частичные суммы ряда функций $v_n(x)$ равномерно ограничены, то ряд $u_n(x)v_n(x)$ равномерно суммируем на множестве X. (Подсказ: вспомните неравенство Абеля.)

Теорема Дини. Если последовательность непрерывных вещественных функций на компактном пространстве K, *возрастая*, поточечно сходится к *непрерывной* функции, то сходится она равномерно на K.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$, $g_n := f - f_n$ и $U_n := \{x \in K : g_n < \varepsilon\}$. Так как каждая функция g_n непрерывна, то каждое множество U_n открыто в пространстве K. (Почему?) А так как последовательность функций g_n, убывая, стремится к нулю, то последовательность множеств U_n, возрастая, покрывает компакт K. Значит, имеется конечная подпоследовательность множеств $U_{n_1} \subset \ldots \subset U_{n_j}$, покрывающая K. Следовательно, U_{n_j} покрывает всс K, т. е.

$$\varepsilon > g_{n_j}(x) \geq g_n(x) = f(x) - f_n(x) \geq 0 \quad \forall n \geq n_{n_j} \quad \forall x \in K. \blacktriangleright$$

Существенность предпосылок теоремы выявляет пример "набегающей волны".

§ 10.2. Предельный переход и основные операции анализа

Теорема о пределе пределов. Пусть последовательность функций $f_n \in \mathscr{F}(S, E)$ такова, что

1) $f_n(x) \underset{n\to\infty|x\in S}{\rightrightarrows} g(x)$;

2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f_n(x) \underset{x\to p|S}{\to} z_n$ $\qquad$ ($p \in \operatorname{Cl} S$ — точка прикосновения множества S).

Тогда в пространстве значений E имеется такой элемент z, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = \lim\limits_{x\to p} g(x)$. Тем самым

$$z = \lim_{x\to p} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to p} f_n(x).$$

◀ Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно условию 1 и критерию Коши, имеется такой номер m, что для каждого $x \in S$ для любых $k, l \geq m$ $|f_k(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon$. Переход к пределу при $x \to p|S$ даст неравенство $|z_k - z_l| \leq \varepsilon$. Значит, последовательность $z_n \in E$ удовлетворяет условию Коши и потому в банаховом пространстве E есть точка $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Поскольку $f_n \rightrightarrows g$, а $z_n \to z$, то имеется такой номер i, что $|z_i - z| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\;$ а $\;|g(x) - f_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x \in S$.

Так как $f_i(x) \underset{x\to p|S}{\to} z_i$, то у точки p есть такая окрестность U, что $|f_i(x) - z_i| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ для любой точки $x \in U \cap S$. Следовательно, для каждой такой точки имеем

$$|g(x) - z| \leq |g(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - z_i| + |z_i - z| \leq \varepsilon.$$

Значит, $g(x) \underset{x\to p|S}{\to} z$. ▶

Следствие 1. Равномерный предел непрерывных функций непрерывен: если последовательность функций $f_n : X \to E$ непрерывных в точке $p \in X$ равномерно сходится к функции f, то функция f непрерывна в точке $p \in X$.

Следствие 2. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Следствие 3. Пространство $C(X, E)$ непрерывных E-значных функций на пространстве X, снабжсннное супремум-нормой, полно.

Теорема об интегрировании равномерного предела. Если на *ограниченном* отрезке $[a < b]$ последовательность интегрируемых функций f_n равномерно сходится к интегрируемой функции f, то

$$\int\limits_a^x f_n(t)\,dt \underset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt.$$

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ и m — такой номер, что

$$|f(t) - f_n(t)| \le \frac{\varepsilon}{|b-a|} \quad \forall n \ge m \quad \forall t \in [a, b].$$

Отсюда в силу свойства ограниченности операции $\int$ имеем

$$\left|\int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^x f_n(x)dt\right| = \left|\int\limits_a^x (f(t) - f_n(x))dt\right| \le \int\limits_a^x \frac{\varepsilon}{|b-a|}dt \le \varepsilon$$

$$\forall n \ge m \quad \forall x \in [a < b].$$ ▶

Для неограниченной области интегрирования такая теорема неверна:

Пример ("Расползающаяся куча".) Последовательность функций $f_n(x) := D\arctan\frac{x}{n} = \frac{n}{n^2+x^2}$ сходится к нулю равномерно на отрезке $[-\infty, \infty]$, в то время как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = \pi$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Теорема о пределе производных. Пусть функции $f_0, \dots, f_n, \dots$ дифференцируемы на ограниченном выпуклом открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^s$, причсм:

1) последовательность Df_n равномерно на X сходится к некоторой функции g;

2) имеется такая точка $p \in X$, что последовательность $f_n(p)$ имеет предел в E.

Тогда на X последовательность f_n равномерно сходится к некоторой дифференцируемой функции f, причсм $Df(x) = g(x)\ \forall x \in X$.

◀ Предположим сначала, что X есть интервал числовой прямой.

Для каждой пары номеров $k, l \in \mathbb{N}$ положим $f_{k,l} := f_k - f_l$, $s_{k,l} := \|Df_k - Df_l\| = \|Df_{k,l}\|$, и пусть $\delta = 1 + \operatorname{diam} X$.

a) Согласно лагранжевой оценке приращения, для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $|f_{k,l}(x) - f_{k,l}(y)| \le s_{k,l}|x - y|$.

b) Исходя из первого и второго условий теоремы, для каждого $\varepsilon > 0$ отметим такой номер m_ε, что для любых номеров $k, l > m_\varepsilon$ имеют место неравенства $s_{k,l} \le \frac{\varepsilon}{2\delta}$ и $|f_{k,l}(p)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

c) Для любых $k, l > m_\varepsilon$ и любой точки $x \in X$ из a) и b) получаем неравенство

$$|f_{k,l}(x)| = |f_{k,l}(x) - f_{k,l}(p) + f_{k,l}(p)| \le s_{k,l}|x-p| + \frac{\varepsilon}{2} \le s_{k,l}\delta + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, на X последовательность функций f_n удовлетворяет равномерному условию Коши и потому равномерно сходится к некоторой функции f.

d) Пусть q — произвольная точка области X. Поскольку каждая функция f_n дифференцируема в точке q, то $f_n(x) = f_n(q) + Df_n(q) \cdot (x-q) + \alpha_n(x)|x-q|$, где α_n — функция, непрерывная в точке q и равная нулю в этой точке.

Пусть α — функция, определяемая следующими условиями

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(q) - g(q) \cdot (x-q)}{|x-q|}, \ \alpha(q) = 0.$$

Так как $f_n(x) \to f(x)$, а $Df_n(q) \to g(q)$, то $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$.

Покажем, что последовательность функций α_n удовлетворяет равномерному условию Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. Используя оценки пунктов a) и b), для любых $k, l > m_\varepsilon$ и любой точки $x \in X$ получаем

$$|\alpha_k(x) - \alpha_l(x)| = \frac{|f_{k,l}(x) - f_{k,l}(q) - Df_{k,l}(q) \cdot (x-q)|}{|x-q|} \le$$

$$\le \frac{(s_{k,l} + s_{k,l})|x-q|}{|x-q|} = \frac{\varepsilon}{\delta} \le \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность α_n сходится к функции α равномерно и потому эта функция непрерывна в точке q. А так как $f(x) = f(q) + g(q) \cdot (x-q) + \alpha(x)|x-q|$ и $\alpha(q) = 0$, то функция f дифференцируема в точке q, причсм $Df(q) = g(q)$.

Доказательство справедливо и в общем случае, если считать, что $|x - y| := |x-y|_1 = \sum\limits_{i=1}^{s} |x_i - y_i|$; $|Df_n(x)| := \max(|D_1 f_n(x)|_E, \dots, |D_s f_n(x)|_E$. ►

Теорема о сумме ряда производных. Пусть функции $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots$ дифференцируемы на ограниченном выпуклом открытом множестве $X \subset \mathbb{R}^s$, причсм:

1) ряд $D\alpha_n$ равномерно суммируем (сходится) на X;

2) множество X содержит такую точку p, что ряд $\alpha_n(p)$ суммируем.
Тогда ряд α_n равномерно суммируем на X, причсм на X его сумма

дифференцируема, и справедлива формула

$$D \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} D\alpha_n.$$

§ 10.3. Приложения

В этом параграфе E — банахово пространство над полем $\mathbb{C}$.

10.3.1. Степенные ряды

Теорема Абеля. Если ряд $c_n \in E$ суммируем, то ряд функций $c_n t^n$ переменной T равномерно суммируем на отрезке $[0,1]$ и, стало быть, его сумма непрерывна на этом отрезке.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ и m — такой номер, что для любых номеров $k, j \geq m$ $\quad |\sum\limits_k^j c_n| \leq \varepsilon$. Поскольку $\forall t \in [0,1] \quad t^0 \geq \ldots t^n \geq \ldots$, то $\forall l \geq k \geq m$ $\left|\sum\limits_k^l c_n t^n\right| \leq t^k \sup\{\left|\sum\limits_k^j c_n\right| : j \in \{k \ldots l\}\} \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0,1].$ ▶

Пусть $(\alpha_n(z) = a_n z^n : n \in \mathbb{N})$ — произвольный степенной ряд, где $a_n \in E$, $z = x + iy$, x, y — стандартные координаты в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Число

$$\varrho := \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : \text{последовательность } |a_n| r^n \text{ ограничена}\}$$

будем называть *радиусом круга сходимости* ряда α, а множество $O_\varrho := \{z : |z| < \varrho\}$ — *кругом сходимости* этого ряда. Объяснение такой терминологии даст следующий фундаментальный факт.

Теорема о сходимости степенного ряда. Степенной ряд α абсолютно суммируем при любом $z \in O_\varrho$, равномерно суммируем на любом круге $O_{r<\varrho}$. Если же $|z| > \varrho$, то ряд $a_n(z)$ несуммируем.

◀ Если $|z| > \varrho$, то последовательность $|a_n||z^n|$ неограничена и, значит, последовательность $a_n z^n$ не стремится к нулю.

Пусть $r \in]0, \varrho[$ и $s \in]r, \varrho[$. Согласно определению числа ϱ $\exists h < \infty : |a_n| s^n \leq h \ \forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда для каждого $z \in O_r$ получаем

$$|a_n z^n| = |a_n| s^n \frac{|z|^n}{s^n} \leq |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq h \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Так как геометрическая прогрессия $\left(\frac{r}{s}\right)^n$ суммируема, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд $a_n z^n$ равномерно суммируем в круге O_r.

Из этой же оценки следует, что $\sum |a_n z^n| < \infty$. Остается заметить, что каждая точка $z \in O_\varrho$ лежит в некотором круге $O_{r<\varrho}$. ▶

Теорема о сумме степенного ряда. Функция $f(z) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ дифференцируема внутри круга сходимости O_ϱ ряда $a_n z^n$ и для каждой точки $z = x + iy$ этого круга справедливы формулы

$$df(z) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}\right) dz, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

◀ 1. Частные производные функции $\alpha_n(z) := a_n(x+iy)^n$ таковы:

$$\frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial x} = a_n n z^{n-1}, \ \frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial y} = a_n n z^{n-1} i.$$

2. Радиус ϱ_1 круга сходимости ряда $a_n n z^{n-1}$ равен радиусу ϱ круга сходимости ряда $a_n z^n$.

◁ Пусть $r \in]0, \varrho[$, $s \in]r, \varrho[$ и $h \in \mathbb{R}_+$ таково, что $|a_n| s^n \le h \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|a_n n z^{n-1}| = |a_n| s^n \frac{n}{s}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} \le h\frac{n}{s}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\varrho_1 \ge \varrho$. Обратное неравенство очевидно. ▷

3. Согласно пп. 1, 2 и теореме о круге сходимости ряды производных, $\frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial x}$ и $\frac{\partial \alpha_n(z)}{\partial y}$ равномерно суммируемы в любом круге $O_{r<\varrho}$. По теореме о сумме ряда производных функция f дифференцируема в каждом таком круге и

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \sum a_n n z^{n-1} = \frac{1}{i}\frac{\partial f(z)}{\partial y}.$$

Отсюда $df(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(z)}{\partial y}dy = \sum a_n n z^{n-1}(dx + i dy) = \sum a_n n z^{n-1} dz$. ▶

Следствие. Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема внутри круга сходимости этого ряда.

Формулу $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$ называют *уравнением Коши—Римана.*

10.3.2. Ряды Фурье

Неправдоподобная (например, по мнению Лагранжа) мысль Жозефа Фурье о возможности представить любую кусочно гладкую функцию f на отрезке длины 2π в виде

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n\ge1}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

оказалась чрезвычайно плодотворной для математики и физики.

Последовательность функций $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots$ будем называть *вещественным базисом Фурье,* а семейство функций

$(e^{ikx}\colon k \in \mathbb{Z})$ — *комплексным базисом Фурье.* Пусть $T = [u, u+2\pi]$ — произвольный отрезок длины 2π и $\int\limits_T := \int\limits_u^{u+2\pi}$.

Лемма о базисах Фурье. 1. $\int\limits_T e^{ikt}e^{-ilt}dt = 2\pi\delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}.$

2. Для любых различных функций φ, ψ вещественного базиса Фурье $\int\limits_T \varphi(t)\psi(t)dt = 0$. Кроме того,
$\int\limits_T \cos^2 ktdt = \int\limits_T \sin^2 ktdt = \pi \quad \forall k > 0, \quad \int\limits_T \cos^2 0dt = 2\pi$•

◀ 1. Вытекает из того, что первообразная функции e^{int} 2π-периодична при $n \neq 0$, а

2. Является простым следствием п. 1. и формул Эйлера. ▶

Формулы этой леммы полезно интерпретировать как систему попарных скалярных произведений элементов базиса Фурье относительно скалярного произведения функций f, g, заданного формулой $\langle f, g\rangle := \int\limits_T f\bar{g}dt$. С такой точки зрения каждый базис Фурье является ортогональной системой.

Следствие. Если $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$,
то $a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\cos ktdt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\sin ktdt.$

Это наблюдение послужило толчком к введению следующих понятий.

Для каждой интегрируемой на промежутке T функции f и любого номера $k \in \mathbb{N}$ положим

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\cos ktdt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t)\sin ktdt.$$

(Указанные интегралы определены благодаря ФИЧ § 5.2.)

Элементы $a_k(f), b_k(f)$ пространства E называют коэффициентами Фурье функции f на отрезке T относительно вещественного базиса Фурье. Функцию $S_nf|_x := \frac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$ называют n-й частичной суммой ряда Фурье функции f.

Комплексная форма частичных сумм ряда Фурье. Если функция f интегрируема на отрезке $T = [u, u+2\pi]$, то
$S_nf|_x = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$, где $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_T f(t)e^{-ikt}dt.$

◀ Благодаря формулам Эйлера имеем

$$S_n f|_x = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \tfrac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right),$$

$$\forall k \geq 0 \quad c_k := \tfrac{1}{2\pi} \int_T f(t)(\cos kt - i \sin kt)dt = \tfrac{a_k - ib_k}{2}$$

и

$$\forall k > 0 \quad c_{-k} := \tfrac{1}{2\pi} \int_T f(t)(\cos(-kt) - i \sin(-kt))dt = \tfrac{a_k + ib_k}{2}.$$

Следовательно:

$$S_n f|_x = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}). \blacktriangleright$$

Элементы $c_k(f)$ называют *коэффициентами Фурье функции f относительно комплексного базиса Фурье.*

Поскольку ряд Фурье не меняется при изменении рассматриваемой функции в конечном наборе точек, то, изучая ряд Фурье функции f на отрезке T, удобно считать, что f является сужением некоторой 2π-периодической функции $f : \mathbb{R} \to E$.

Лемма об интегралах периодической функции. 2π-периодическая функция f интегрируема на отрезке $T = [u, u + 2\pi]$ в том и лишь в том случае, когда она интегрируема на отрезке $[0, 2\pi]$. В этом случае $\int_T f dt = \int_0^{2\pi} f dt$ и, стало быть, ряд Фурье такой функции не зависит от выбора отрезка длины 2π.

$\blacktriangleleft$ $\exists n \in \mathbb{Z}$: $v := 2n\pi \in T$. Пусть $p = v - 2(n-1)\pi$. По (ФЗП) $\int_u^v f(t)dt = \int_p^{2\pi} f(x)dx$, $\int_v^{u+2\pi} f(t)dt = \int_0^p f(x)dx$. $\blacktriangleright$

Будем говорить, что функция f принадлежит классу Фурье и писать $f \in \Phi$, если она 2π-периодична, кусочно дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$, а ес производная ограничена.

Лемма о точках разрыва функций класса Фурье. Если $f \in \Phi$, то для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ существуют пределы $f_-(x) := \lim_{t \nearrow x} f(t)$ и $f_+(x) := \lim_{t \searrow x} f(t)$. Следовательно, функция f ограничена и интегрируема на любом ограниченном отрезке.

$\blacktriangleleft$ Для любой точки $x \in \mathbb{R}$ найдстся такая точка $a < x$, что на полуинтервале $[a, x[$ функция f дифференцируема. Поскольку функция f' ограничена и обладает первообразной на $[a, x[$, то, согласно асимптотическому признаку Вейерштрасса (§ 5.3), f' интегрируема на отрезке $[a, x]$ и потому $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds \underset{s \nearrow x}{\rightarrow} \int_a^x f(s)ds = f_-(x)$. $\blacktriangleright$

Формула Дирихле. Если $f \in \Phi$, то для каждой точки $x \in \mathbb{R}$

и любого $n \in \mathbb{N}$

$$2\pi\left(S_n f|_x - \frac{f_-(x)+f_+(x)}{2}\right) = \int\limits_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f_-(x))D_n(t)dt +$$

$$+\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)-f_+(x))D_n(t)dt, \quad D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

$$◀\ a)\ 2\pi S_n f|_x = 2\pi\sum_{-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-n}^{n} e^{i(x-t)k}dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{-n}^{n} z^k dt, \quad z = e^{i(x-t)}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=-n}^{n} z^k = (z^{n+1/2} - z^{-(n+1/2)})/(z^{1/2} - z^{-1/2}) =$ $= (\sin(n+\frac{1}{2})(x-t))/\sin\frac{x-t}{2} = D_n(x-t)$, то $2\pi s_n f|_x = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$.

Далее, опираясь на чстность функции D_n и лемму об интегралах периодической функции, получаем $2\pi S_n f|_x =$ $= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt \overset{t=x+\tau}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)D_n(-\tau)d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt$.

b) Функция $D_n(t)$ чстная и $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt}dt = 2\pi$. Поэтому $\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int_0^{\pi} D_n(t)dt = \pi$. С учстом результата пункта а) имеем

$$2\pi\left(S_n f|_x - \frac{f_-(x)+f_+(x)}{2}\right) = 2\pi S_n f|_x - f_-(x)\pi - f_+(x)\pi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt - f_-(x)\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt - f_+(x)\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{0}(f(x+t)-f_-(x))D_n(t)dt + \int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)-f_+(x))D_n(t)dt. ▶$$

Теорема Фурье. Если функция f принадлежит классу Фурье, то ес ряд Фурье суммируем на всей числовой прямой, причсм последовательность его частичных сумм $S_n f|_x$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ сходится к $\frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}$, а на каждом отрезке, не содержащем точек разрыва функции f, эта последовательность сходится равномерно к функции f.

◀ а) Пусть $x \in \mathbb{R}$. Покажем, что каждый интеграл в формуле Дирихле стремится к нулю при $n \to \infty$. Но прежде заметим, что на отрезке $[0, \pi]$ функция $\sin t/2$ выпукла вверх, и потому $\sin t/2 \geq \frac{t}{\pi}$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|f'\|\pi\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ и чтобы на полуинтервале $]x, x+\delta]$ не было точек разрыва функции f, т. е. чтобы функция f_+ была непрерывной на отрезке $[x, x+\delta]$. В этом случае

$$\left|\int\limits_0^\delta (f(x+t) - f_+(x))D_n(t)dt\right| = \left|\int\limits_0^\delta (f_+(x+t) - f_+(x))D_n(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\delta \frac{\|f'\|t}{\sin t/2}dt \leq \|f'\|\pi\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь интеграл $I_n := \int\limits_\delta^\pi (f(x+t) - f_+(x))D_n(t)dt$.

Пусть $g(t) := \frac{f(x+t)-f(x)}{\sin t/2}$. Для каждой точки t отрезка $[\delta, \pi]$, в которой функция f дифференцируема, справедливы неравенства
$|g(t)| \leq \frac{2\|f\|}{\sin \delta/2} := C,\ |g'(t)| = \frac{|f'(x+t)\sin t/2 - (f(x+t)-f(x))(\sin t/2)'|}{\sin^2 t/2} \leq$
$\leq \frac{\|f'\|+\|f\|}{\sin^2 \delta/2} := H.$

Пусть $q_n := n + 1/2$, M — число, на единицу большее числа точек разрыва функции f на отрезке $[0, 2\pi]$, $t_0 = \delta < \ldots < t_k = \pi$ — такие точки, что на каждом интервале $]t_{i-1}, t_i[$ функция g непрерывна, а в каждой точке $t_i \in]\delta, \pi[$ она разрывна. Тогда $k \leq M$ и

$$|I_n| \leq \sum_{i=1}^k \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g(t)\sin q_n t\, dt\right| =$$

$$= \frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^k \left|(g_-(t_i)\cos(q_n t_i) - g_+(t_{i-1})\cos(q_n t_{i-1})) - \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} g'(t)\cos t q_n dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{q_n}\left(\sum_{i=1}^k 2C + \int\limits_\delta^\pi H dt\right) \leq \frac{1}{q_n}(2CM + \pi H) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $n > \frac{2(2CM+\pi H)}{\varepsilon}$.

Сходимость к нулю другого интеграла в формуле Дирихле устанавливается аналогично.

b) Пусть X — какой-нибудь отрезок, на котором функция f непрерывна, и пусть $r > 0$ — такое число, что расстояние от любой точки разрыва этой функции до X не меньше, чем r.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы имели место неравенства $\delta < r$ и $\|f'\|\pi\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Повторяя при этих условиях рассуждения пункта a), убеждаемся в том, что все приведенные оценки не зависят от выбора точки $x \in X$. ►

Следствие. Непрерывная функция класса Фурье является равномерной суммой своего ряда Фурье.

Ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции может расходиться в некоторых точках. В 1966 году Карлесон установил, что, если квадрат модуля функции f интегрируем на отрезке $[0, 2\pi]$, (например, если f непрерывна), то сумма ес ряда Фурье равна этой функции "почти в каждой точке". Точный смысл этих слов будет дан в следующей главе.

Теорема Вейерштрасса о тригонометрической аппроксимации. Для всякой непрерывной 2π-периодической функции f и любого $\varepsilon > 0$ найдстся такой тригонометрический полином $\tau(x) = \sum\limits_{k=j}^{m} c_k e^{ikx}$, что $|f(x) - \tau(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

◄ По теореме Гейне–Кантора f равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Значит, имеется такое $\delta = \frac{2\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$, что $|x - y| \le \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{4}$.

Пусть $p_0 = 0, p_1 = \delta, \dots, p_n = 2\pi$ и g — такая 2π-периодическая функция, что $g(p_i) = f(p_i)$ для всякого $i \in \{0, \dots, n\}$, а на отрезке $[p_{i-1}, p_i]$ ес график есть прямая линия, т. е.
$g(x) = f(p_i) + \frac{f(p_i) - f(p_{i-1})}{p_i - p_{i-1}}(x - p_i) \forall x \in [p_{i-1}, p_i]$. Тогда $\|f - g\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку g — непрерывная функция класса Φ, то, согласно теореме Фурье, существует такой номер k, что $\|g - s_k(g)\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\|f - s_k(g)\| \le \varepsilon$. ►

Теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации. Если функция f непрерывна на ограниченном отрезке X, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдстся такой полином $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, что $|f(x) - A(x)| \le \varepsilon$ при любом $x \in X$. Иными словами, множество полиномов плотно в пространстве непрерывных функций $C(X, E)$, снабжснном супремум-нормой.

◄ Без ущерба для общности можем считать, что $X = [0, 2\pi]$ и что $f(0) = 0 = f(2\pi)$.

Пусть g — 2π-периодическая функция, совпадающая с f на отрезке

X. Поскольку g непрерывна, то существует такой тригонометрический полином $\tau(x) = \sum\limits_{k=j}^{m} c_k e^{ikx}$, что $\|g - \tau\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Функция τ является суммой некоторого степенного ряда $a_n x^n$, ибо $e^{ikx} = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} \frac{(ikx)^j}{j!} \forall x \in \mathbb{C}$. Согласно теореме о сходимости степенных рядов, ряд $a_n x^n$ равномерно суммируем на любом ограниченном множестве и, в частности, на X. Поэтому существует такая частичная сумма $A(x)$ этого ряда, что $|\tau(x) - A(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in X$ и, следовательно, $|f(x) - A(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X$. ►

Упражнения. 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и посмотреть на это разложение в точках π и 0.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ при любом $t \in]0, 2\pi[$.

3. Ряд Фурье производной *непрерывной* функции f класса Фурье равен ряду производных ряда Фурье исходной функции:

$$c_n(f') = i\, n\, c_n(f) \ \forall n \in \mathbb{Z}; \quad a_k(f') = k b_k(f), \quad b_k(f') = -k a_k(f);$$
$$c_0(f') = a_0(f') = 0.$$

4. $c_n(\bar{g}) = \overline{c_{-n}(g)}$ для каждой комплексной функции $g \in \Phi$ и любого $n \in \mathbb{Z}$.

Равенство Парсеваля. Если f и g — непрерывные скалярные функции класса Фурье, то

$$\int\limits_0^{2\pi} f\bar{g}dt = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)} =$$

$$= \pi \left(\frac{a_0(f)\overline{a_0(g)}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}) \right).$$

◄ Согласно теореме Фурье, $S_n f \rightrightarrows f$ и $S_n \bar{g} \rightrightarrows \bar{g}$. Так как функции f и $\bar{g}$ ограничены, то $(S_n f)(S_n \bar{g}) \rightrightarrows f\bar{g}$. Согласно теореме об интегрировании равномерного предела:

$$\int\limits_0^{2\pi} f\bar{g}dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} S_n f S_n \bar{g} dt = \lim_n \int\limits_0^{2\pi} \sum_{k,l \in \{-n \dots n\}} c_k(f) c_l(\bar{g}) e^{i(k+l)t} dt =$$

$$= \lim_n \sum_{k,l \in \{-n \dots n\}} c_k(f) c_l(\bar{g}) \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+l)t} dt = \lim_n \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) c_{-k}(\bar{g}) 2\pi =$$

$$= 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)c_{-k}(\bar g) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)}.$$

Равенство Парсеваля относительно вещественного базиса Фурье устанавливается аналогично. ►

Информация. Класс функций, для которых справедливо равенство Парсеваля, значительно шире указанного в этой теореме. В частности, *он содержит функции класса Фурье и их производные.*

Упражнение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4 \frac{1}{90}$.

Лемма о натуральной параметризации. Для каждой *гладкой дуги* S (линии, гладко изоморфной отрезку) существует такой гладкий изоморфизм $\gamma : [a < b] \to S$, что $|\gamma'| = 1$.

◄ Пусть $f : [x < y] \to S$ — какой-нибудь гладкий изоморфизм, $g : [x < y] \to \mathbb{R}$ — гладкое отображение, задаваемое формулой $g(t) = \int\limits_x^t |f'(\tau)|d\tau$, и $a = g(x)$, $b = g(y)$. Так как $g'(t) = |f'(t)| > 0$, то $g : [x, y] \to [a, b]$ обратимо, причсм обратное к нему отображение $h : [a, b] \to [x, y]$ гладкое и $h'(s) = \frac{1}{g'(h(s))} = \frac{1}{|f'(h(s))|}$.

Отображение $\gamma := f \circ h : [a < b] \to S$ есть нужный изоморфизм, поскольку $|\gamma'(s)| = |f'(h(s))h'(s)| = \left| f'(h(s))\frac{1}{|f'(h(s))|} \right| = 1$. ►

Изопериметрическое неравенство. Пусть U — выпуклая компактная область плоскости $\mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей длины 2π. Тогда площадь $\mu(U) \le \pi$ и, если $\mu(U) = \pi$, то область U является кругом радиуса 1.

◄ Будем считать , что точка $0 \in \mathbb{C}$ лежит внутри области U, т. е. что U есть конус над $\operatorname{Fr} U$ с вершиной 0 (ч. I, гл. 6). По условию $\operatorname{Fr} U$ представляет собой цепочку гладких дуг. Это позволяет представить FrU как траекторию такой непрерывной кусочногладкой функции (движения) $z(t) = x(t) + iy(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, что $|z'| = 1$, $z(0) = z(2\pi)$, $\det(z, z') > 0$. Наглядно функцию z удобно представлять как обход области U по ес границе с единичной скоростью, при котором область находится слева от наблюдателя.

Согласно формуле для площади криволинейного сектора (ч. I, гл. 6), $2\mu(U) = \int\limits_0^{2\pi} \det(z, z')dt = \int\limits_0^{2\pi} (xy' - x'y)dt$. Легко проверить, что $z'\bar z = xx' + yy' + i(xy' - x'y)$. Так как функция z непрерывна и $z(0) = z(2\pi)$,
то $\int\limits_0^{2\pi} (xx' + yy')dt = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}(x^2 + y^2)'dt = 0$. По этой же причине коэффициенты

рядов Фурье функций z и z' связаны формулой $c_n(z') = i\,n\,c_n(z)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Опираясь на указанные формулы и равенство Парсеваля, видим, что

$$2\mu(U) = \int\limits_0^{2\pi} \det(z, z')dt = \int\limits_0^{2\pi}(xy' - x'y)dt = -i\int\limits_0^{2\pi}(i(xy' - x'y)+$$

$$+(xx' + yy'))dt = -i\int\limits_0^{2\pi} z'\bar{z}dt = -2\pi i\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z')\overline{c_n(z)} =$$

$$= -2\pi i\sum_{n\neq 0} c_n(z')\overline{\frac{c_n(z')}{-in}} = 2\pi\sum_{n\neq 0}\frac{c_n(z')\overline{c_n(z')}}{n} \leq 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z')\overline{c_n(z')} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} z'\bar{z}'dt = \int\limits_0^{2\pi}|z'|^2dt = 2\pi.$$

Поскольку в этой цепи соотношений знак "$\leq$" встречается лишь один раз, то равенство $\mu(U) = \pi$ возможно лишь тогда, когда $\sum\limits_{n\neq 0} c_n(z')\frac{\bar{c}_n(z')}{n} = \sum\limits_{n\in\in\mathbb{Z}} c_n(z')\bar{c}_n(z')$. А так как $c_n\bar{c}_n \geq 0$, то это возможно лишь в том случае, когда $c_n(z') = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$. В таком случае $c_n(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0, 1\}$. Значит, $z(t) = c_0 + c_1e^{it}$, и потому траектория пути z есть окружность. ►

Список имсн

Абель (Abel) Нильс Хенрик (1802—1829)
Александер (Alexander) Джеймс (1888–1971)
Банах (Banach) Стефан (1892—1945)
Борель (Borel) Эмиль (1871—1956)
Брауэр (Brauer) Ричард (1901—1977)
Вейерштрасс (Weierstrass) Карл Теодор Вильгельм (1815—1897)
Гейне (Heine) Генрих 1821—1881)
Гсльдер (Hölder) Отто (1859—1937)
Гессе (Hesse) Отто Людвиг (1811—1874)
Дини (Dini) Улисс (1845—1918)
Дирихле (Dirichlet) Петер Густав (1805—1859)
Жордан (Jordan) Камиль (1838–1922)
Карлесон (Carleson) Леннарт Аксель Эдвард (1928 —)
Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789—1857)
Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736—1813)
Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749—1827)
Лебег (Lebesgue) Анри (1875—1941)
Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1646—1716)
Липшиц (Lipchitz) Рудольф Отто Сигизмунд (1832—1903)
Минковский; (Minkowski) Герман (1864—1909)
Ньютон (Newton) Исаак (1643—1727)
Парсеваль (Parseval) Марк Антуан (1755—1836)
Понтрягин Лев Семенович (1908—1988)
Тейлор (Taylor) Брук (1685—1731)
Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768—1830)
Эйлер (Euler) Леонард (1707—1783)
Юнг (Young William Henry) Томас, 1863 – 1942.
Якóби (Jacobi) Карл Густав Якоб, 1804—1851

Библиографический список

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

2. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

3. Зорич В. А. Математический анализ. М.: МЦНМО, 1998. Ч. 1—2.

4. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 2. Кн. 1 и 2.

5. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958—1960. Т. 1, 3.

7. Шведов И. А. Компактный курс математического анализа. Учеб. пособие/ Новосибирский гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Ч. 1: Функции одной переменной. 112 с.