

*Дорогой
Томас
але марков,
А. К. Р.*

И. В. Андрианов
В. А. Лесничая
В. В. Лобода
Л. И. Маневич

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Киев — Донецк
Головное издательство
издательского объединения
„Вища школа”
1986

Расчет прочности ребристых оболочек инженерных конструкций. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Лобода В. В., Маневич Л. И. — Киев; Донецк: Вища шк. Головное изд-во, 1986. — 104 с.

Исследованы вопросы статического и динамического расчета конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек. В качестве основного аппарата исследования использован метод асимптотического интегрирования. В результате получены упрощенные краевые задачи, определены пределы применимости упрощенных теорий, а также оценена их точность. Решены конкретные задачи расчета ребристых цилиндрических оболочек. Даны практические рекомендации по применению изложенных методов к расчету подкрепленных конструкций.

Монография предназначена для научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области расчета тонкостенных конструкций.

Табл. 11. Ил. 19. Библиогр.: 77 назв.

Редакция общетехнической литературы при Донецком государственном университете.
Зав. редакцией М. Х. Тахтаров

Р 3202000000 — 162 — 268 — 86
М211 (04) — 86

© Издательское объединение
„Вища школа”, 1986

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тонкостенные цилиндрические оболочки широко используются в различных областях современной техники. Они являются элементами многих строительных конструкций, применяются в авиа-, ракето- и судостроении, химическом машиностроении. Благодаря основополагающим исследованиям В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, В. В. Новожилова и других авторов теория изотропных оболочек в настоящее время располагает большим количеством точных и приближенных методов расчета.

Специфика теории оболочек связана с наличием в исходных соотношениях малого параметра относительной толщины. Поэтому асимптотические методы нашли в теории изотропных оболочек широкое применение и позволили решить ряд важных задач.

Тонкостенные оболочки, как правило, редко используются без подкрепляющих элементов, позволяющих ужесточить конструкцию, не увеличивая ее материалоемкости. Расщепление по параметру относительной тонкостенности в таком случае зачастую не приводит к существенным упрощениям. Поэтому развитие теории подкрепленных оболочек и совершенствование методов их расчета являются задачами первостепенной важности. Наиболее распространенный метод расчета ребристых оболочек — конструктивно-ортотропная теория, которая позволяет учесть основные характеристики подкрепляющих элементов, интегрально оценить их влияние на напряженно-деформированное состояние и использовать известные методы расчета гладких оболочек применительно к более сложному объекту исследования.

Цель настоящей монографии — изложить приближенные методы расчета конструктивно-ортотропных оболочек, которые вытекают из асимптотического анализа исходных краевых задач. При этом основное внимание уделено тем вопросам, которые, несмотря на практическое значение, до настоящего времени оставались недостаточно изученными, в частности расчету открытых оболочек при произвольных условиях закрепления торцов;

анализу спектра колебаний; нелинейным задачам; исследованию устойчивости при сложных граничных условиях. Полученные результаты могут быть эффективно использованы при расчете подкрепленных конструкций с учетом дискретности размещения ребер [5, 6].

В первой главе монографии приведены основные уравнения статики конструктивно-ортотропных оболочек. Дана классификация таких конструкций в зависимости от соотношений их геометрико-жесткостных параметров. Изложены основы асимптотического метода.

Во второй главе проведен асимптотический анализ краевых задач теории конструктивно-ортотропных оболочек. Получены оценки точности расчета по упрощенным соотношениям. Предложен эффективный приближенный метод расчета открытых цилиндрических оболочек.

В третьей главе выполнен асимптотический анализ динамических краевых задач теории конструктивно-ортотропных оболочек как в линейной, так и в нелинейной постановках. В результате получены приближенные уравнения и соответствующие граничные условия, использование которых существенно упрощает расчет конкретных конструкций. На основе предложенного метода исследован спектр линейных колебаний в зависимости от граничных условий, эксцентриситета ребер, длины оболочки и других факторов. Установлены типы амплитудно-частотных характеристик геометрически нелинейных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек.

Четвертая глава посвящена задачам устойчивости. Здесь построены обоснованные приближенные дифференциальные уравнения и граничные условия, позволившие получить ряд простых приближенных формул и решить задачи, исследование которых другими способами сопряжено с определенными трудностями.

Глава I ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние подкрепленной в двух главных направлениях замкнутой круговой цилиндрической оболочки (рис. 1) при заданных краевых условиях. В расчетной схеме оболочка принимается конструктивно-ортотропной. Точность такого предположения оценена в работах [4–6]. Основные выводы сводятся к тому, что конструктивно-ортотропная схема для наиболее распространенных на практике оболочек позволяет достаточно точно определять перемещения, частоты колебаний и мембранные усилия, при исследовании же моментов она может рассматриваться как первое приближение, допускающее аналитическое уточнение.

Уравнения равновесия в усилиях и моментах имеют обычный вид [25]

$$\begin{aligned} T_{1,\xi} + S_{,2} - R q_x &= 0; & T_{2,\eta} + S_{,\xi} + Q_2 + R q_y &= 0; \\ Q_{1,\xi} + Q_{2,\eta} - T_2 - R q_z &= 0; & R Q_1 &= M_{1,\xi} + H_{,2}; \\ R Q_2 &= M_{2,\eta} + H_{,\xi}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь T_1, T_2, S — мембранные усилия; $\xi = x/R$; $\eta = y/R$; индексы ξ, η обозначают дифференцирование по соответствующим переменным; R — радиус оболочки; q_x, q_y, q_z — компоненты поверхностной нагрузки; M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты, положительные направления которых показаны на рис. 2, 3. Усилия и моменты связаны с деформациями срединной поверхности $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}$ и кривизнами (кручением) $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ следующими соотношениями [55]:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_{11} \epsilon_{11} + B_{12} \epsilon_{12} + K_{11} \chi_{11} + K_{12} \chi_{22}, \\ T_2 &= B_{12} \epsilon_{12} + B_{22} \epsilon_{22} + K_{21} \chi_{11} + K_{22} \chi_{22}, \\ S &= B_{33} \epsilon_{12} + K_{33} \chi_{12}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

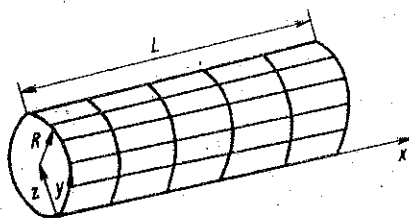


Рис. 1

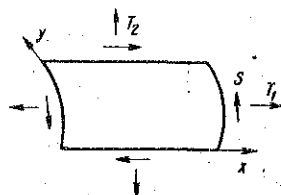


Рис. 2

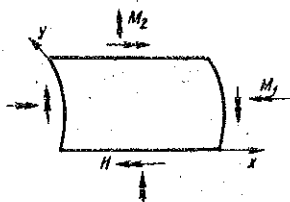


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 M_1 &= K_{11} \epsilon_{11} + K_{12} \epsilon_{22} + \\
 &+ D_{11} \chi_{11} + D_{12} \chi_{22}, \\
 M_2 &= K_{21} \epsilon_{11} + K_{22} \epsilon_{22} + \\
 &+ D_{12} \chi_{11} + D_{22} \chi_{22}, \\
 H &= K_{33} \epsilon_{12} + D_{33} \chi_{12}. \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

В качестве основной поверхности (от положения которой зависят жесткости D_{ij} и K_{ij}) выбираем срединную поверхность обшивки. Величинами K_{12} и K_{21} можно пренебречь ввиду малости коэффициента поперечного взаимодействия сетки ребер ($K_{12} = K_{21} \approx 0$). Кроме того, в дальнейшем принимаем, что сдвиг передается только обшивкой [$B_{33} = h/2/(1 + \nu)$], связь кручения и сдвига мала ($K_{33} = 0$), а крутильная жесткость равна сумме крутильных жесткостей обшивки и ребер ($D_{33} = D/2 + E_1 I_{11}/4 l_1 + E_2 I_{22}/4 l_2$). Для остальных жесткостей имеем такие выражения [54]:

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= B + E_i F_i / l_i; \quad D_{ij} = D + E_i I_i / l_i; \quad B_{12} = B_{21} = \nu_{21} B_{11} = \\
 &= \nu_{12} B_{22} \approx \nu B; \quad D_{12} = D_{21} = \nu_{21} D_{11} = \nu_{12} D_{22} = \nu D; \\
 K_{ij} &= E_i S_i / l_i; \quad B = Eh/(1 - \nu^2); \\
 D &= Eh^3/12(1 - \nu^2) \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Здесь E, E_i — модули Юнга обшивки, стрингеров и шпангоутов; F_i, I_i, I_{ii}, S_i — площади поперечных сечений, моменты инерции, моменты инерции на кручение и статические моменты стрингера и шпангоута (S_i считаются положительными для внутренних и отрицательными для наружных ребер); l_1, l_2 — расстояние между соседними стрингерами и шпангоутами соответственно; h, ν — толщина обшивки и ее коэффициент Пуассона. Деформация и

кривизны (кручение) выражаются через перемещения u, v, w при помощи геометрических соотношений [55]:

$$\epsilon_{11} = u_{,\xi}/R, \quad \epsilon_{22} = (v_{,\xi} - w)/R, \quad \epsilon_{12} = (u_{,\xi} + v_{,\xi})/R; \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{11} &= -w_{,\xi\xi}/R^2, \quad \chi_{22} = -(w_{,\xi\xi} - v_{,\xi\xi})/R^2, \\
 \chi_{12} &= -2w_{,\xi\xi}/R^2. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Обычным путем [25] получаем следующие уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
 &B_{11} u_{,\xi\xi} + B_{33} u_{,\xi\xi} + (B_{12} + B_{33}) v_{,\xi\xi} - B_{12} w_{,\xi\xi} - \\
 &- K_{11} w_{,\xi\xi\xi}/R = -q_x R^2; \\
 &(B_{21} + B_{33}) u_{,\xi\xi} + (B_{22} - 2K_{22}/R + D_{22}/R^2) v_{,\xi\xi} + \\
 &+ (B_{33} + D_{33}/R^2) v_{,\xi\xi} + (D_{22}/R^2 - K_{22}/R) w_{,\xi\xi} + (D_{21} + \\
 &+ 2D_{33}) w_{,\xi\xi}/R^2 + (B_{22} - K_{22}/R) w_{,\xi} = -q_y R^2; \\
 &- B_{21} u_{,\xi} - K_{11}/R u_{,\xi\xi} + (D_{22}/R^2 + K_{22}/R) v_{,\xi\xi} + \\
 &+ (D_{12} + 2D_{33}) v_{,\xi\xi}/R^2 - (B_{22} - K_{22}/R) v_{,\xi} + \\
 &+ D_{11} w_{,\xi\xi\xi}/R^2 + 2(D_{12} + 2D_{33}) w_{,\xi\xi\xi}/R^2 + \\
 &+ D_{22}/R^2 w_{,\xi\xi\xi} + 2K_{22} w_{,\xi\xi}/R^2 + B_{22} w = -q_z R^2. \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Уравнения (1.1)–(1.5) должны быть дополнены одним из приведенных в табл. 1 вариантов граничных условий, где $w_{,\xi} = w_{,\xi}$; $\bar{Q}_1 = Q_1 + H_{,\xi}/R$. Рассматривается одна из гармоник разложения внешней нагрузки в ряд Фурье ($u_m, v_m, w_m, w_{,\xi m}, T_m, S_m, H_m, \bar{Q}_m$ — постоянные, $\xi = L/R$).

Не останавливаясь на определении частного интеграла системы (1.6), соответствующего поверхностным нагрузкам q_x, q_y, q_z (здесь могут быть использованы известные методы [2, 25]), перейдем к построению ее общего решения. Сначала сведем систему (1.6) к одному разрешающему уравнению. Для этого воспользуемся операторным методом, суть которого состоит в следующем [25]. Уравнения (1.6) рассматриваются как алгебраические относительно u, v, w , причем в коэффициенты наряду с другими величинами входят символы дифференцирования по ξ и ζ (символы кратного дифференцирования рассматриваются

Таблица 1

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$v = v_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_2	$v = v_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_3	$v = v_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_4	$v = v_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_5	$S = S_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_6	$S = S_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_7	$S = S_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_8	$S = S_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; w = w_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_9	$v = v_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_{10}	$v = v_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_{11}	$v = v_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_{12}	$v = v_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_{13}	$S = S_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_{14}	$S = S_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; w_\xi = w_{\xi m} \cos m \xi$
A_{15}	$S = S_m \sin m \xi; u = u_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$
A_{16}	$S = S_m \sin m \xi; T_1 = T_m \cos m \xi; \tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_m \cos m \xi; M_1 = M_m \cos m \xi$

как произведение соответствующих степеней $\partial/\partial \xi$ и $\partial/\partial \eta$. Обозначим определитель системы (1.6), при вычислении которого символами дифференцирования оперировали как алгебраическими величинами, через Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + B_{33} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} & (B_{12} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} & -B_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{K_{11}}{R} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \\ (B_{21} + B_{33}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} & (B_{22} - \frac{2K_{22}}{R^2} + \frac{D_{22}}{R^2}) \chi & \frac{1}{R} (\frac{D_{22}}{R} - K_{22}) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \chi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (B_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) \chi & + \frac{D_{21} + 2D_{33}}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (B_{22} - \frac{K_{22}}{R}) \frac{\partial}{\partial \eta} \\ -B_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{K_{11}}{R} \chi & -\frac{1}{R} (\frac{D_{22}}{R} + K_{22}) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} + \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} - (B_{22} - \frac{K_{22}}{R}) \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{R^2} [D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + 2K_{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}] + B_{22} \end{vmatrix}$$

Миноры определителя Δ обозначим через Δ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$). Зададим перемещения u, v, w в таком виде:

$$u = \sum_{k=1}^3 \Delta_{1k} \Psi_k; \quad v = \sum_{k=1}^3 \Delta_{2k} \Psi_k; \quad w = \sum_{k=1}^3 \Delta_{3k} \Psi_k. \quad (1.7)$$

Подставим выражения (1.7) в уравнения (1.6). Тогда в соответствии с известными положениями теории алгебраических уравнений получим

$$\Delta \Psi_1 + R^2 q_x = 0; \quad \Delta \Psi_2 + R^2 q_y = 0; \quad \Delta \Psi_3 + R^2 q_z = 0. \quad (1.8)$$

Функции u^*, v^*, w^* составляющие интеграл однородной системы (1.6), можно также искать в виде разложения (1.7). При этом для нахождения Ψ_i получаем уравнения

$$\Delta \Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.9)$$

Таким образом, функции u^*, v^*, w^* определяемые равенствами

$$u^* = \sum_{k=1}^3 \Delta_{1k} \Psi_k^*; \quad v^* = \sum_{k=1}^3 \Delta_{2k} \Psi_k^*; \quad w^* = \sum_{k=1}^3 \Delta_{3k} \Psi_k^*,$$

дают интеграл однородной системы (1.6) для любых Ψ_i , удовлетворяющих уравнениям (1.9). В частности, можно положить $\Psi_1^* = \Psi_2^* = 0; \quad \Psi_3^* = \tilde{\Phi}/B_{22}B_{33}$. Тогда каждому решению уравнения

$$\Delta \tilde{\Phi} = 0 \quad (1.10)$$

будет соответствовать интеграл однородных уравнений равновесия в перемещениях, определяемый формулами

$$u = \Delta_{13} \tilde{\Phi} / B_{22} B_{33}; \quad v = \Delta_{23} \tilde{\Phi} / B_{22} B_{33}; \quad w = \Delta_{33} \tilde{\Phi} / B_{22} B_{33}. \quad (1.11)$$

Функцию $\tilde{\Phi}$ будем называть потенциальной, а уравнение (1.10), которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta^0 \tilde{\Phi} = & \left\{ (1 + v_{12}^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_6^2) \frac{\partial^8}{\partial \xi^8} + 2(\epsilon_3 + \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} - \right. \\ & - v_{12} \epsilon_1^{-2} \epsilon_6 \epsilon_7) \frac{\partial^8}{\partial \xi^6 \partial \eta^2} + [\epsilon_2 + 4\epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_4 + \\ & + \epsilon_1^{-2} (\epsilon_6^2 + 2v_{12} \epsilon_6 \epsilon_7)] \frac{\partial^8}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + 2(\epsilon_2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \\ & + \epsilon_3 \epsilon_4 - v_{21} \epsilon_1^{-2} \epsilon_7 \epsilon_8) \frac{\partial^8}{\partial \xi^2 \partial \eta^6} + \\ & + (\epsilon_2 \epsilon_4 + v_{21}^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_7^2) \frac{\partial^8}{\partial \eta^8} - 2v_{12} \epsilon_1^{-2} \epsilon_6 \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} + \\ & + 2(2\epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + v_{12} \epsilon_2 \epsilon_4 + \epsilon_3 \epsilon_4 - v_{21} \epsilon_1^{-2} \epsilon_7) \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \\ & + 2(\epsilon_2 \epsilon_4 + v_{21}^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_7^2) \frac{\partial^6}{\partial \eta^6} + \epsilon_1^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(\epsilon_2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \\ & + v_{12} \epsilon_2 \epsilon_4 - v_{21} \epsilon_1^{-2} \epsilon_7) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (\epsilon_2 \epsilon_4 + \\ & + v_{21}^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + 2[2\epsilon_3 \epsilon_4 (\epsilon_5^{-1} + v_{12} \epsilon_3 \epsilon_4) + \\ & \left. + \epsilon_1^{-2} \epsilon_6] \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} \right\} \tilde{\Phi} = 0, \quad (1.12) \end{aligned}$$

— разрешающим уравнением системы (1.6). При этом перемещения u, v, w определяются такими формулами:

$$\begin{aligned} u = \Delta_{13}^0 \tilde{\Phi} = & \left\{ v_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_8 \frac{\partial^5}{\partial \xi^5} + [(1 + 2v_{12} \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \right. \\ & + v_{12} v_{21}) (\epsilon_1^2 \epsilon_3 - v_{12} \epsilon_6 \epsilon_7) + (\epsilon_5^{-1} + v_{10}) \epsilon_6] \frac{\partial^5}{\partial \xi^3 \partial \eta^2} + \\ & \left. + [1 + v_{12} (v_{21} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1})] \epsilon_7 - [1 + v_{21} (v_{10} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \epsilon_5^{-1}) \epsilon_7] \frac{\partial^5}{\partial \xi \partial \eta^4} + v_{12} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + [2v_{12} \epsilon_4 (\epsilon_5^{-1} + v_{12}) \epsilon_7 + (1 - 2v_{21} \epsilon_5^{-1} - 3v_{12} v_{21}) \epsilon_7 - 1] \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} \right\} \tilde{\Phi};$$

$$\begin{aligned} v = \Delta_{23}^0 \tilde{\Phi} = & \left\{ -[2v_{10} (\epsilon_5 \epsilon_1^2 - v_{12} \epsilon_6 \epsilon_7) + (2v_{12} \epsilon_5^{-1} + \right. \\ & + v_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6] \frac{\partial^5}{\partial \xi^4 \partial \eta} - [2v_{10} \epsilon_7 - 2v_{10} \epsilon_7 + v_0 (\epsilon_1^2 \epsilon_3 - \\ & - v_{12} \epsilon_6 \epsilon_7)] \frac{\partial^5}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} - v_0 (\epsilon_7 - \epsilon_7) \frac{\partial^5}{\partial \eta^5} - [v_{12} - \\ & - 2v_{10} (1 - \epsilon_7)] \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (1 - v_0 \epsilon_7) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left. \right\} \tilde{\Phi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = \Delta_{33}^0 \tilde{\Phi} = & \left[\epsilon_4^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + (2\epsilon_5^{-1} - 4v_{10} \epsilon_7 + 2v_0 v_{10} \epsilon_7) \right. \\ & \left. \times \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (1 - 2v_0 \epsilon_7 + v_0 \epsilon_7) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right] \tilde{\Phi}. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Здесь

$$\epsilon_1 = (D_1 / B_2 R^2)^{1/2}; \quad \epsilon_2 = D_2 / D_1; \quad \epsilon_3 = D_3 / D_1;$$

$$\epsilon_4 = B_2 / B_1; \quad \epsilon_5 = B_3 / B_1; \quad \epsilon_6 = e_1 / R; \quad \epsilon_7 = e_2 / R;$$

$$D_i = D_{ii} - K_{ij}^2 / B_j; \quad D_3 = D_{12} + 2D_{33} + e_1 e_2 v_0 B_{12};$$

$$B_j = v_0 B_{jj}; \quad B_3 = 2B_1 B_{22} B_{33} / (B_1 B_{22} - 2B_{12});$$

$$B_j = K_{ij} / B_j; \quad v_0 = 1 - v_{12} v_{21}; \quad v_{10} = v_{12} + \epsilon_5^{-1}; \quad \epsilon_8 = \epsilon_6 + \epsilon_7;$$

$$\epsilon_7 = \epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2; \quad v_{11} = 1 + v_{12} v_{21} \quad (i = 1, 2).$$

Коэффициенты соотношений (1.12), (1.13) записаны с точностью до членов порядка ϵ_1^2 по сравнению с единицей. Отметим, что эксцентриситет ребер не только влияет на эффективные

жесткости D_i , но и входит непосредственно в коэффициенты уравнений, которые зависят как от абсолютной величины, так и от знака эксцентриситета. Наиболее важные для практики оболочечные конструкции можно условно разбить на три класса: оболочки вафельные, для которых жесткости в обоих направлениях примерно одинаковы, стрингерные (с преимущественно продольным подкреплением) и шпангоутные (с преимущественно кольцевым подкреплением). При этом, как показывает анализ типичных конструкций, справедливы оценки: для вафельных оболочек $\epsilon_2 \sim 1, \epsilon_3 \sim 1$ (или $\epsilon_3 \sim \epsilon_4$), $\epsilon_4 \sim 1, \epsilon_5 < 1, \epsilon_6 \sim \epsilon_7 \sim \epsilon_1$, для стрингерных $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^2, \epsilon_3 \sim \epsilon_1$ (или $\epsilon_3 \sim 1$), $\epsilon_4 \sim \epsilon_5 < 1, \epsilon_6 \sim \epsilon_1$, для шпангоутных $\epsilon_2 \sim \epsilon_1, \epsilon_3 \sim \epsilon_1$ (или $\epsilon_3 \sim 1$), $\epsilon_4 < 1, \epsilon_5 < 1, \epsilon_6 \sim \epsilon_1$. Символ \sim означает асимптотическое равенство (равенство порядков). Эти оценки будут использованы при асимптотическом анализе.

§ 2. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Многие физические явления описываются краевыми задачами, содержащими малый параметр ϵ ($\epsilon \ll 1$):

$$M(z; \chi; \epsilon) = 0; \quad N(z; \epsilon) = 0,$$

где M, N — дифференциальные операторы; z — искомая функция; χ — скалярная или векторная независимая переменная. Такие задачи, как правило, существенно упрощаются при $\epsilon = 0$. Это позволяет искать решение в виде ряда по степеням ϵ :

$$z(\chi; \epsilon) = z_0(\chi) + \epsilon^{M_1} z_1(\chi) + \epsilon^{M_2} z_2(\chi) + \dots, \quad (1.14)$$

где M_i — параметры, определяемые из вида конкретной задачи; $M_1 < M_2 < \dots$; $z_0(\chi)$ — решение при $\epsilon = 0$. Если для любых значений χ выполняется условие $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{M_{i+1} - M_i} z_{i+1}(\chi) / z_i(\chi) = 0$ ($i = 0, 1, \dots$), то ряд (1.14) называется асимптотическим.

В общем случае он не сходится, однако n первых членов аппроксимируют искомое решение с точностью до $\epsilon^{M_{n+1}}$.

Задачи теории возмущений рассмотрены во многих работах [48, 60]. Остановимся лишь на нескольких вопросах, представляющих непосредственный интерес для дальнейшего изложения. Сначала рассмотрим алгебраические уравнения, содержащие малый параметр. Пусть, например, задано квадратное уравнение

$$z^2 + 2\epsilon z - 1 = 0, \quad (1.15)$$

решение которого имеет вид

$$z = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + 1}. \quad (1.16)$$

Нетрудно убедиться, что решения вырожденного ($\epsilon = 0$) уравнения $z_0 = \pm 1$ представляют собой первые члены разложения точного решения (1.16) в ряд по ϵ , так как $\chi = \pm 1 + \epsilon \pm (\epsilon^2/2 + \dots)$. Если представить z рядом по ϵ с неопределенными коэффициентами $z = z_0 + z_1\epsilon + z_2\epsilon^2 + \dots$, подставить это разложение в исходное уравнение (1.15) и приравнять к нулю члены при одинаковых степенях ϵ , то приходим к следующей рекуррентной системе:

$$\epsilon^0: z_0^2 - 1 = 0;$$

$$\epsilon^1: 2z_0z_1 = 2z_0;$$

$$\epsilon^2: 2z_0z_2 = -z_1^2;$$

$$\dots \dots \dots$$

решение которой позволяет определить $z_0 = \pm 1$; $z_1 = 1$, $z_2 = \pm 1/2$ и т. д. Задачи теории возмущений подобного типа называются регулярными.

Рассмотрим теперь уравнение, мало, на первый взгляд, отличающееся от уравнения (1.14):

$$\epsilon z^2 - 2z + 1 = 0. \quad (1.17)$$

Решение имеет вид $z = \epsilon^{-1}(1 \pm \sqrt{1 - \epsilon}) = \epsilon^{-1} \pm (\epsilon^{-1} - 1/2 + \dots)$. Вырожденное ($\epsilon = 0$) уравнение имеет только один корень $z_1 = 1/2$, поскольку второй корень исходного уравнения (1.17) $z^{(2)}$ „уходит“ в бесконечность при $\epsilon \rightarrow 0$. Поэтому $z^{(2)}$ будем искать в виде разложения, начинающегося с членов порядка ϵ^{-1} : $z^{(2)} = z_0^{(2)}\epsilon^{-1} + z_1^{(2)} + z_2^{(2)}\epsilon + \dots$, причем $z_0^{(2)} \neq 0$. Тогда соответствующая рекуррентная система может быть записана так:

$$\epsilon^{-1}: z_0^{(2)} = 2;$$

$$\epsilon^0: -2z_1^{(2)} + 1 = 0;$$

$$\epsilon^1: (z_2^{(2)})^2 - 2z_2^{(0)} = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

Наконец рассмотрим уравнение

$$\epsilon z^3 + z^2 - z + \epsilon = 0. \quad (1.18)$$

В этом случае вырожденное уравнение имеет корни $z^{(1)} = 1$; $z^{(2)} = 0$, а исходное — $z^{(1)} = 1 + 0(\epsilon)$, $z^{(2)} = \epsilon + 0(\epsilon)$, $z^{(3)} = -\epsilon + 0(\epsilon)$ (символ 0 означает, что отброшенные члены имеют порядок ϵ по сравнению с последним оставленным). Таким образом, при

помощи вырожденного уравнения удовлетворительно определяется только корень $z_0^{(1)}$, для уточнения которого можно использовать разложение $z^{(1)} = z_0^{(1)} + \epsilon z_1^{(1)} + \dots$. Корни же $z^{(2)}, z^{(3)}$ следует искать в виде $z^{(2)} = \epsilon z_0^{(2)} + \epsilon^2 z_1^{(2)} + \dots$ и $z^{(3)} = \epsilon^{-1} z_0^{(3)} + z_1^{(3)} + \dots$. Отметим, что задачи возмущений алгебраических уравнений, в которых переход к предельному уравнению связан с потерей корней, относятся к задачам сингулярных возмущений.

Перейдем к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим регулярный случай — малый параметр не стоит при старшей производной:

$$z'' + 2\epsilon z' - z = 0; \quad z(0) = 1; \quad z'(0) = 0. \quad (1.19)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x . Разложение решения запишем в виде

$$z(x; \epsilon) = z_0(x) + \epsilon z_1(x) + \dots \quad (1.20)$$

Подставляя ряд (1.20) в уравнение и начальные условия (1.19) и группируя члены при одинаковых степенях ϵ , получаем рекуррентную последовательность задач Коши

$$\epsilon^0: \quad z_0'' - z_0 = 0; \quad z_0(0) = 1, \quad z_0'(0) = 0;$$

$$\epsilon^1: \quad z_1'' - z_1 = -2z_0'; \quad z_1(0) = z_1'(0) = 0;$$

.....

решение которых можно записать так:

$$z_0 = chx; \quad z_1 = shx - xchx; \quad \dots$$

Следовательно, с точностью до членов порядка ϵ^2 решение исходной задачи Коши (1.19) имеет вид $z \approx chx + \epsilon(shx - xchx)$. Точное же решение в этом случае запишется так:

$$z(x; \epsilon) = \{(\sqrt{\epsilon^2 + 1} + \epsilon) \exp(\sqrt{\epsilon^2 + 1} - \epsilon)x + (\sqrt{\epsilon^2 + 1} - \epsilon) \exp[-(\sqrt{\epsilon^2 + 1} + \epsilon)x]\} / \sqrt{\epsilon^2 + 1} = z_0 + \epsilon z_1 + O(\epsilon^2).$$

Пусть теперь малый параметр стоит при старшей производной (сингулярный случай). Рассмотрим сначала простейшую задачу

$$\epsilon z' + z = 1; \quad z(0) = 0, \quad (1.21)$$

точное решение которой имеет вид $z = 1 - \exp(-\epsilon^{-1}x)$. Решение же вырожденного ($\epsilon = 0$) уравнения $z_0 = 1$ не удовлетворяет заданному граничному условию. Ситуация, характерная для задач сингулярного возмущения, наглядно проиллюстрирована на рис. 4, где приведены графики точного и вырожденного реше-

ния уравнения (1.21) [сплошная и штриховая линии соответственно]. Существенная погрешность наблюдается лишь в окрестности точки $x = 0$, причем эта область, называемая пограничным слоем, будет тем уже, чем меньше ϵ . Ясно, что получить равномерно пригодное решение сингулярно возмущенной задачи, используя лишь разложение (1.20), невозможно. В этом случае необходимо дорабатывать решение типа пограничного слоя, которое, как следует из приведенного примера, должно быть быстро переменным по соответствующей координате.

Особенности асимптотического исследования в сингулярном случае изучим на примере уравнения

$$\epsilon z'' + z' + z = 0 \quad (1.22)$$

с начальными условиями

$$z(0) = 1; \quad z'(0) = 0. \quad (1.23)$$

Решение для области, удаленной от точки $x = 0$, ищем в виде ряда (1.20). Подставляя это решение в уравнение (1.22) и производя расщепление по ϵ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{z}_0' + z_0 &= 0; \\ z_1' + z_1 &= 0; \\ \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

Очевидно, что за счет каждого из уравнений (1.24) можно удовлетворить лишь одному из начальных условий (1.23), поэтому для компенсации невязки в начальных условиях необходимо дорабатывать дополнительное решение типа пограничного слоя \bar{z} . Это решение быстро изменяется по x , однако скорость изменения пока неизвестна.

Введем параметр асимптотического интегрирования α при помощи следующего соотношения: $\bar{z}' \sim \epsilon^{-\alpha} \bar{z}$. В зависимости от величины α возникают три случая с различными предельными уравнениями, которым должны удовлетворять члены соответствующих разложений: $\alpha > 1, \epsilon/\epsilon^\alpha \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$ — предельное уравнение $\bar{z}'' = 0$ пригодено только для очень малых x ; $\alpha = 1, \epsilon/\epsilon^\alpha = 1$ — предельное уравнение $\bar{z}'' + \bar{z}' = 0$ позволяет удовлетворить начальным условиям; $\alpha < 1, \epsilon/\epsilon^\alpha \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$ — предельное уравнение $\bar{z}' = 0$.

Поскольку второй объединяет и первый, и третий, можно в дальнейшем ограничиться им, полагая $\alpha = 1$. Решение

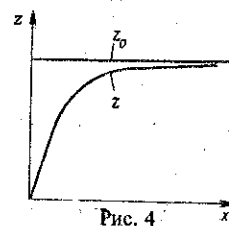


Рис. 4

типа пограничного слоя представляем в виде $\bar{z}(x; \epsilon) = \epsilon^p X$
 $X[\bar{z}_0(x) + \epsilon \bar{z}_1(x) + \dots]$. Параметр p остается пока неопределенным, поскольку порядок малости решения типа пограничного слоя еще не известен. Он зависит от порядка малости вырожденного решения, причем связь между \tilde{z} и \bar{z} осуществляется через граничные условия. Подставляя разложение \bar{z} в исходное уравнение (1.22) и производя расщепление по ϵ , получаем

$$\begin{aligned} \epsilon^p: \bar{z}_0'' + \bar{z}_0' &= 0; \\ \epsilon^{p+1}: \bar{z}_1'' + \bar{z}_1' &= -\bar{z}_0; \end{aligned} \quad (1.25)$$

Формально каждое из уравнений (1.25) имеет второй порядок. Однако поскольку мы ищем быстро изменяющееся решение ($\bar{z}' \sim \epsilon^{-1} \bar{z}$), эти уравнения нужно заменить следующими:

$$\begin{aligned} \bar{z}_0' + \bar{z}_0 &= 0; \\ \bar{z}_1' + \bar{z}_1 &= -\int_0^x \bar{z}_0 dx; \end{aligned} \quad (1.26)$$

Уравнения (1.26) будем называть уравнениями пограничного слоя.

Сформулируем теперь граничные условия для уравнений (1.25), (1.26). Представим решение исходной краевой задачи (1.22), (1.23) в виде

$$z = \tilde{z} + \bar{z} = (\tilde{z}_0 + \epsilon \tilde{z}_1 + \dots) + \epsilon^p (z_0 + \epsilon z_1 + \dots).$$

Подставляя это выражение в начальные условия (1.23), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{z}_0 + \epsilon \tilde{z}_1 + \dots) + \epsilon^p (\bar{z}_0 + \epsilon \bar{z}_1 + \dots) &= 1; \\ (\tilde{z}_0' + \epsilon \tilde{z}_1' + \dots) + \epsilon^p (\bar{z}_0' + \epsilon \bar{z}_1' + \dots) &= 0 \text{ при } x=0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Поскольку $\bar{z}' \sim \epsilon^{-1} \bar{z}$, второй член в граничном условии для \bar{z} имеет порядок ϵ^{p-1} . Подберем теперь непротиворечивое значение p , т. е. такое, при котором краевые задачи для уравнений (1.25), (1.26) имеют решение. Это означает, что для каждого уравнения из указанных рекуррентных последовательностей должно быть поставлено только одно граничное условие. Если $p > 1$, то оба граничных условия отходят к уравнениям (1.25), если $p < 1$ — к уравнениям (1.26). Отсюда единственное непротиворечивое значение p — $p = 1$. Таким образом оценивается порядок решения типа пограничного слоя через граничные условия

и решение вырожденного уравнения. Принимая теперь $p = 1$, группируя в условиях (1.27) члены при одинаковых степенях ϵ и приравнявая их к нулю, а также учитывая, что из уравнений (1.26) $\tilde{z}_0' = -\bar{z}_0$, получаем

$$\bar{z}_0 = 1; \quad \tilde{z}_1 = -\bar{z}_0; \quad \dots; \quad (1.28)$$

$$\bar{z}_0' = \tilde{z}_0; \quad \bar{z}_1' = \tilde{z}_1; \quad \dots \text{ при } x=0. \quad (1.29)$$

Граничные условия (1.28), (1.29) задаются для уравнений (1.24), (1.26) соответственно.

В общем случае уравнений в частных производных процедуры построения пограничного слоя и формулировки приближенных краевых задач далеко не так просты [26, 48, 60]. Остановимся, в частности, на методе поиска параметров асимптотического интегрирования, позволяющем проводить полную классификацию всех возможных вариантов упрощенных уравнений. Проиллюстрируем его на примере. Пусть задано дифференциальное уравнение в частных производных с малым параметром при старших производных

$$\epsilon (w_{,xx} + w_{,yy}) + w = 0 \quad (1.30)$$

и требуется определить все возможные упрощенные уравнения, которые ему соответствуют. Понятно, что они не исчерпываются предельным ($\epsilon \rightarrow 0$) уравнением $w = 0$, так как решение w может иметь различные изменчивости по независимым переменным x и y . Чтобы учесть этот факт, введем параметры асимптотического интегрирования α и β при помощи следующих соотношений:

$$w_{,x} \sim \epsilon^{-\alpha} w; \quad w_{,y} \sim \epsilon^{-\beta} w \quad (-\infty < \alpha, \beta < \infty).$$

Рассмотрим все возможные значения α и β . Это позволит выявить все различные упрощенные уравнения, которые, взаимно дополняя одно другое, позволяют в совокупности приближенно описать круг задач, определяемый исходным уравнением (1.30).

Рассмотрим плоскость $\alpha\beta$ (рис. 5) и построим на ней зоны, соответствующие наименьшим значениям показателей степеней ϵ всех членов уравнения (1.30): $1 - 2\alpha$, $1 - 2\beta$, 0 . Показатель $1 - 2\alpha$ будет наименьшим при выборе значений α и β в зоне 4. Показатель $1 - 2\beta$ наименьший в зоне 1, а показатель 0 — в зоне 6 (области 1, 4, 5 рассматриваются как открытые, т. е. граничные прямые в них не включаются). При выборе параметров α, β в зонах 1, 4, 6 предельные уравнения принимают вид $w_{,yy} = 0$; $w_{,xx} = 0$ и $w = 0$ соответственно. Это максимально простые в данном случае уравнения, содержащие всего по одному члену. На грани-

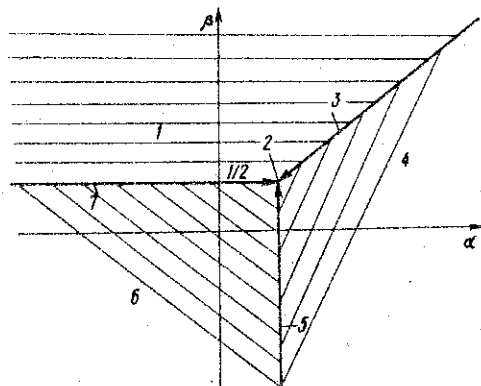


Рис. 6

$$\epsilon w_{,xx} + w = 0;$$

$$\epsilon w_{,yy} + w = 0.$$

Наконец, координаты точки пересечения граничных прямых (зона 2) дают значения α и β , при которых в уравнении (1.30) остаются все члены ($\alpha = \beta = 1/2$). Поскольку теперь на плоскости $\alpha\beta$ не осталось „белых пятен”, других вариантов предельных систем нет.

Описанный графический способ позволяет достаточно просто решить задачу подбора двух параметров асимптотического интегрирования. Для случая одного параметра можно эффективно использовать метод многоугольника Ньютона [18]. При числе параметров больше двух их значения подбирают исходя из интуитивных соображений о характере искомого решения исходных уравнений. В то же время, поскольку процедура поиска параметров асимптотического интегрирования носит достаточно формальный характер, она может быть автоматизирована при помощи ЭВМ [69].

ных прямых (точка с координатами $(1/2, 1/2)$ пока исключается из рассмотрения) лежат те значения α и β , при которых предельные ($\epsilon \rightarrow 0$) уравнения содержат уже по два члена. Не трудно убедиться, что для областей 3, 5, 7 они таковы:

$$w_{,xx} + w_{,yy} = 0.$$

Глава 2

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Исчерпывающий асимптотический анализ уравнений теории изотропных оболочек дан в монографии [25], а приближенные теории для замкнутых конструктивно-ортотропных оболочек при малой изменчивости напряженного состояния — в работах [2, 3, 34, 51, 52]. В настоящем параграфе проведен асимптотический анализ разрешающего уравнения конструктивно-ортотропных оболочек, в полной мере учитывающий их специфику, и получены упрощенные уравнения для любых показателей изменчивости напряженного состояния [9–12, 49, 50, 57].

Рассмотрим вначале оболочки „вафельного” типа. Из совокупности геометрико-жесткостных характеристик выделяются параметры ϵ_1, ϵ_5 , которые могут быть приняты в качестве параметров асимптотического интегрирования. Поскольку $\epsilon_1 \ll \epsilon_5$, асимптотический анализ удастся провести последовательно в два этапа. Считая на первом этапе $\epsilon_5 \sim 1$, представим функцию $\tilde{\varphi}$ рядом по ϵ_1 :

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \epsilon_1 \varphi_1 + \dots \quad (2.1)$$

Введем также параметры асимптотического интегрирования, характеризующие изменчивость функции φ по ξ и η :

$$\varphi_{,\xi} \sim \epsilon_1^\alpha \varphi; \quad \varphi_{,\eta} \sim \epsilon_1^\beta \varphi. \quad (2.2)$$

Исходная задача допускает разделение переменных, т. е. потенциальную функцию φ можно записать так:

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \exp(im\eta). \quad (2.3)$$

Тогда параметр β оказывается заданным ($\epsilon_1^\beta = m$), причем $\beta \geq 0$.

В результате анализа, аналогичного описанному в предыдущем параграфе, получаем разбиение полуплоскости α, β , приведенное на рис. 6. Поскольку полуплоскость заполнена плотно, других предельных ($\epsilon \rightarrow 0$) уравнений, кроме соответствующих парам α, β из каждой области 1–9, нет. Опишем их, приводя только первые приближения (высшие могут быть построены по известной методике [60]). Основное состояние описывается безмоментными или полубезмоментными уравнениями. Уравнения



$$\begin{aligned} u &= v_{12} \Phi_{,\xi\xi\xi} - \Phi_{,\xi\xi\xi}; & v &= (v_{12} + 2\epsilon_5^{-1}) \times \\ &\times \Phi_{,\xi\xi\xi} + \Phi_{,\xi\xi\xi}; & w &= \epsilon_4^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \\ &+ 2\epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

а усилия вычисляются по формулам (1.2).

Разрешающее уравнение полубезмоментной теории (область 2, $\beta = 0$, $\alpha = -1/2$) можно представить следующим образом:

$$(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 + v_{21} \epsilon_7) \nabla_{07}^2 \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} - 2v_{21} \epsilon_7 \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} = 0, \quad (2.6)$$

где $\nabla_{07}^2 = \nabla_{07} \nabla_{07}$; $\nabla_{07} = 1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$. Перемещения, усилия и моменты принимают вид

$$u = -\Phi_{,\xi\xi\xi}, \quad v = \Phi_{,\xi\xi\xi}, \quad w = \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}; \quad (2.7)$$

$$T_1 = B_1 (v_{21} \epsilon_7 \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi} - \Phi_{,\xi\xi\xi}),_{\xi\xi} / R,$$

$$T_2 = -B_2 [(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + v_{21}^2 \epsilon_4 \epsilon_7) \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi} - v_{21} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 \Phi_{,\xi\xi\xi}],_{\xi\xi} / R + B_1 (v_{21} \epsilon_7 \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi} - \Phi_{,\xi\xi\xi}),_{\xi\xi} / R,$$

$$S = B_1 (\Phi_{,\xi\xi\xi} - v_{21} \epsilon_7 \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi}),_{\xi\xi} / R,$$

$$M_1 = v_{21} B_1 \epsilon_8 \nabla_{07} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}, \quad M_2 = B_2 [(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + v_{21}^2 \epsilon_4 \epsilon_7) \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \nabla_{07} \Phi - v_{21} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 \Phi_{,\xi\xi\xi}],_{\xi\xi},$$

$$H = B_1 (\epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 - v_{21} \epsilon_8) (\Phi_{,\xi\xi} + \Phi),_{\xi\xi\xi\xi};$$

$$\epsilon_8 = \epsilon_1^2 \epsilon_4 + \epsilon_6^2. \quad (2.8)$$

Если $\beta > 0$ (область 3, $\beta < 1/2$, $\alpha = -1/2 + 2\beta$), то в операторе ∇_{07} нужно опустить единицу.

Потенциальная функция, перемещения и усилия (моменты) простого краевого эффекта (область 8, $\alpha = -1/2$, $\beta < 1/2$) в нулевом приближении задаются уравнениями

$$(\epsilon_1^2 + v_{21}^2 \epsilon_6^2) \Phi_{,\xi\xi\xi\xi\xi} + \Phi - 2v_{12} \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi\xi} = 0; \quad (2.9)$$

$$u = (v_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi\xi} + v_{12} \Phi),_{\xi\xi\xi\xi},$$

$$v = [-(2v_{12} \epsilon_5^{-1} + v_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi} + (2\epsilon_5^{-1} + v_{12}) \Phi],_{\xi\xi\xi\xi},$$

$$w = \epsilon_4^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi\xi}; \quad (2.10)$$

$$T_1 = B_1 (-\Phi + v_{12} \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi}),_{\xi\xi\xi\xi} / R,$$

$$T_2 = -B_1 \Phi_{,\xi\xi\xi\xi\xi} / R,$$

$$S = B_1 (\Phi - v_{12} \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi}),_{\xi\xi\xi\xi} / R,$$

$$M_1 = B_1 [(\epsilon_1^2 + v_{12}^2 \epsilon_6^2) \Phi_{,\xi\xi\xi} - v_{12} \epsilon_6 \Phi],_{\xi\xi\xi\xi},$$

$$M_2 = B_1 (\epsilon_{70} v_{12} \Phi_{,\xi\xi} + \epsilon_7 \Phi),_{\xi\xi\xi\xi},$$

$$H = B_1 (\epsilon_1^2 \epsilon_3 - v_{12} \epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2 + \epsilon_6 \epsilon_7) \Phi_{,\xi\xi\xi\xi\xi\xi}. \quad (2.11)$$

Пределы применимости полученных приближенных уравнений (2.6), (2.9) уже, чем в случае изотропной оболочки (краевой эффект затухает медленнее, а основное полубезмоментное состояние изменяется быстрее). Из уравнений (2.6), (2.9) следует, что абсолютная величина и знак эксцентриситета шпангоутов влияют лишь на основное полубезмоментное состояние, а стрингеров — на краевой эффект. Но в обоих случаях влияние членов, в которые эксцентриситет входит непосредственно, невелико, и основную роль играют не зависящие от знака ϵ_6 , ϵ_7 изменения приведенных изгибных жесткостей, определяющих величины ϵ_1 , ϵ_2 .

Точке с координатами $\alpha = \beta = 1/2$ на рис. 6 (область 5) соответствует напряженно-деформированное состояние с большим показателем изменчивости (теория пологих оболочек), описываемое соотношениями

$$\epsilon_1^2 \nabla_2^4 \nabla_1^4 \Phi + (\nabla_3^4 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2})^2 \Phi = 0; \quad (2.12)$$

$$u = v_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + 2v_{10} \epsilon_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \xi^2} - (2v_{21} \epsilon_5^{-1} + v_{11}) \epsilon_7 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi \partial \xi^4} + v_{12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \xi^2},$$

$$\begin{aligned}
v = & -(2v_{12}\epsilon_5^{-1} + v_{11}\epsilon_4^{-1})\epsilon_6 \frac{\partial^5 \phi}{\partial \xi^4 \partial \eta} + \\
& + 2v_{10}\epsilon_7 \frac{\partial^5 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^3} + (2\epsilon_5^{-1} + v_{12}) \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} + \\
& + \epsilon_7 v_0 \frac{\partial^5 \phi}{\partial \eta^5}, \quad w = \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \phi, \quad \epsilon_{11} = \frac{1}{R} \left[v_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \right. \\
& \times \frac{\partial^6 \phi}{\partial \xi^6} + 2v_{10}\epsilon_6 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} - (2v_{21}\epsilon_5^{-1} + v_{11}) \times \\
& \times \epsilon_7 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + v_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} - \left. \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right], \quad \epsilon_{22} = -\frac{1}{R} \times \\
& \times \left[(2v_{12}\epsilon_5^{-1} + v_{11}\epsilon_4^{-1})\epsilon_6 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^2} - 2v_{10}\epsilon_7 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} + \right. \\
& + v_0 \epsilon_7 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \eta^6} - v_{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left. \epsilon_4^{-1} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} \right], \quad \epsilon_{12} = \\
& = -(\epsilon_5^{-1} + v_{10}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (\nabla_3^4 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}) \phi / R, \quad x_1 = \frac{1}{\epsilon_4 R^2} \times \\
& \times \nabla_2^4 \phi, \quad x_2 = \frac{1}{\epsilon_4 R^2} \nabla_2^4 \phi, \quad x_{12} = \frac{1}{\epsilon_4 R^2} \times \\
& \times \nabla_2^4 \phi, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\nabla_1^4 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}; \\
\nabla_2^4 &= \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}; \\
\nabla_3^4 &= v_{12}\epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + v_{21}\epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}.
\end{aligned}$$

Усилия и моменты определяются из соотношений упругости (1.2), (1.3). При выводе принималось $\epsilon_3 \sim 1$ (крутильная жесткость ребер велика), иначе в операторе ∇_1^4 можно опустить средний член. В рассматриваемом случае влияние членов, содержащих ϵ_6, ϵ_7 и зависящих от знака эксцентриситета, существенно. Отметим, что уравнения основного состояния (2.4), (2.6), краевого эффекта (2.9) и пологих оболочек (2.12) были получены ранее в работах [34, 52].

При $\beta > 1/2, \alpha = \beta$ (область 6) разрешающее уравнение принимает вид

$$\epsilon_1^2 \nabla_2^4 \nabla_1^4 \phi + (\nabla_3^4)^2 \phi = 0. \quad (2.14)$$

Для центрально подкрепленной оболочки $\nabla_3^4 \phi = 0$ и уравнение (2.14) описывает тангенциальную деформацию и изгиб пластины. В общем случае такое распадение невозможно, так как между тангенциальной деформацией и изгибом имеется связь, определяемая величиной (но не знаком) эксцентриситета. Перемещения и деформации, соответствующие этому варианту теории, можно получить из соотношений (2.13), оставляя в каждом выражении лишь производные максимального порядка. Влияние эксцентриситета на напряженно-деформированное состояние менее существенно, чем для пологих оболочек.

Наконец, выбирая параметры α, β в областях 1 ($\beta = 0, \alpha = -1/2$), 4 ($(\alpha < 1/2) \cup (-1/2 < \alpha < 1/2, \beta > 1/4 + \alpha/2) \cup (\beta > \alpha > 1/2)$) и 7 ($\alpha > \beta, \alpha > 1/2$) (см. рис. 5), получаем уравнения деформации кольца и стержней

$$\nabla_{0t}^2 \phi,_{tttt} = 0; \quad (2.15)$$

$$\partial^8 \phi / \partial t^8 = 0; \quad (2.16)$$

$$\partial^8 \phi / \partial \xi^8 = 0. \quad (2.17)$$

Уравнения (2.15) – (2.17) в дальнейшем анализе рассматриваться не будут. Интересно отметить, что при всех значениях изменчивости внешней нагрузки, характеризуемой параметром β , можно пользоваться тем или иным из упрощенных предельных соотношений. Все полученные приближенные уравнения остаются верными и при переходе к изотропии, поэтому им можно поставить в соответствие системы основных физико-геометрических гипотез, приведенные в работе [25]. Имеются и существенные отличия от теории изотропных оболочек. Обратимся к уравнению (2.12), описывающему деформацию пологих оболочек. В изотропном случае после разделения переменных (2.3) корни характеристического уравнения, соответствующего найденному обыкновенному дифференциальному уравнению, могут быть выражены через параметры оболочки аналитически. Для ортотропных оболочек такая возможность отсутствует, и уравнение (2.13) остается достаточно сложным. В то же время в него входит параметр $\epsilon_5 \approx 0,2 - 0,3$ для подкрепленных оболочек. Значит, его можно принять в качестве малого параметра и продолжить асимптотическое расщепление [42].

Представим функцию Φ асимптотическим разложением по ϵ

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{01} \epsilon_5 + \dots \quad (2.18)$$

и введем параметры асимптотического интегрирования γ, δ при помощи соотношений

$$\Phi_{0,\xi} \sim \epsilon_5^{-\gamma} \Phi_0; \quad \Phi_{0,t} \sim \epsilon_5^{-\delta} \Phi_0; \quad \gamma > 0; \quad \delta > 0. \quad (2.19)$$

Индекс 0 в дальнейшем опускаем. Кроме того, для удобства будем считать $\epsilon_6 \sim \epsilon_7 \sim \epsilon_1 \epsilon_5^{-1/2}$. Подставляя разложение (2.18) в уравнение (2.13) и учитывая соотношения (2.19), получаем две пары непротиворечивых значений γ и $\delta - \gamma = \delta$; $\gamma = \delta + 1/2$. Первой паре отвечает предельное ($\epsilon_5 \rightarrow 0$) уравнение

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi + 0,5 \epsilon_5 \nabla_{12} \Phi_{,\xi\xi t} = 0, \quad (2.20)$$

где $\nabla_{12} = 1 + \epsilon_6 \partial^2 / \partial t^2$. Формулы для перемещений, усилий и моментов имеют вид

$$U = 2 \epsilon_5^{-1} \epsilon_6 \Phi_{,\xi\xi\xi t} - \Phi_{,\xi t};$$

$$V = 2 \epsilon_5^{-1} (\epsilon_7 \Phi_{,tt} + \Phi)_{,\xi\xi t}; \quad W = 2 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi t};$$

$$T_1 = -B_1 \nabla_{12} \Phi_{,\xi\xi t} / R; \quad T_2 = -B_2 \nabla_{12} \Phi_{,\xi\xi\xi} / R;$$

$$S = B_1 \nabla_{12} \Phi_{,\xi\xi\xi t} / R;$$

$$M_1 = B_1 (2 \epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi t} + \epsilon_6 \nabla_{12} \Phi)_{,\xi\xi};$$

$$M_2 = B_2 (2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,ttt} + \epsilon_4^{-1} \epsilon_7 \nabla_{12} \Phi_{,\xi\xi})_{,\xi\xi};$$

$$H = 2 B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^3 \partial t^3}. \quad (2.21)$$

Разрешающее уравнение (2.20) можно получить из системы (1.6), используя гипотезы нерастяжимости для нейтральных слоев совокупных сечений

$$\epsilon_{11} + \theta_1 x_{11} = U_{,\xi} - \epsilon_6 W_{,\xi\xi};$$

$$\epsilon_{22} + \theta_2 x_{22} = V_{,t} - W - \epsilon_7 W_{,tt} = 0. \quad (2.22)$$

Усилия T_1, T_2 являются в этом случае статическими реакциями, т. е. определяются из уравнений (1.1). Влияние величины и знака эксцентриситета ребер на напряженно-деформированное состояние этого типа оказывается существенным.

Дополнительное состояние типа пограничного слоя

$$\Phi_{,\xi\xi} + 2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,tt} = 0 \quad (2.23)$$

получается в результате предельного перехода $\epsilon_5 \rightarrow 0$ при $\gamma = \delta + 1/2$. Основное перемещение в этом состоянии $V = 2 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi t}$, а усилия $S = B_1 \Phi_{,\xi\xi\xi t} / R$, $T_2 = 2 B_2 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi t} / R$.

Специфика предельного уравнения состоит в том, что оно лежит на спектре [20], т. е. характеристическое уравнение обыкновенного дифференциального уравнения по ξ , получающегося после разделения переменных по формуле (2.3), содержит два нулевых корня. В этом случае наряду с дополнительным состоянием типа пограничного слоя появляется еще одно состояние, которое изменяется по координате ξ медленнее ($\gamma = \delta - 1/2$), чем определяемое уравнением (2.20)

$$\Phi_{,\xi\xi} + 0,5 \epsilon_5 \Phi_{,tt} = 0. \quad (2.24)$$

Основное перемещение в этом состоянии $U = -\Phi_{,\xi t}$, усилия

$$T_1 = -B_1 \Phi_{,\xi\xi t} / R, \quad S = -0,5 B_1 \epsilon_5 \Phi_{,\xi\xi t} / R.$$

Уравнение (2.20) теперь можно записать так:

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi_{,\xi\xi} + 0,5 \epsilon_5 \nabla_{12} \Phi_{,tt} = 0. \quad (2.25)$$

Напряженно-деформированные состояния, описываемые уравнениями (2.23), (2.24), не зависят ни от величины, ни от знака эксцентриситета ребер.

Полученные уравнения (2.23), (2.25) не имеют аналога в теории изотропных оболочек. Тем не менее проведенные расчеты и анализ имеющихся в литературе численных данных подтверждают, что для оболочек „вафельного” типа при $m \sim \epsilon_1^{-1/2}$ корни характеристического уравнения разделяются на три группы, соответствующие уравнениям (2.23), (2.25).

Уравнение деформации пластины (2.14) может быть подвергнуто аналогичному расщеплению по малому параметру ϵ_5 . Предельные уравнения (2.23) и (2.24), коэффициенты которых не зависят от эксцентриситета ребер, сохраняют свою форму. Разрешающее уравнение, соответствующее по смыслу уравнению (2.25), принимает вид

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi + 0,5 \epsilon_5 \epsilon_6^2 \Phi_{,\xi\xi t} = 0 \quad (2.26)$$

и описывает преимущественно изгибную деформацию пластины. Второй член в этом уравнении, зависящий от абсолютной величины эксцентриситета ребер, характеризует влияние мембранных жесткостей на изгиб. Перемещения, усилия и моменты можно

получить из соотношений (2.21), оставляя лишь производные максимального порядка.

Рассмотрим теперь стрингерные оболочки. Основными параметрами в этом случае являются величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_6$, причем $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^2, \epsilon_6 \sim \epsilon_1$. Будем считать $\epsilon_3 \sim \epsilon_1$ (случай большой крутильной жесткости ребер рассмотрен в работе [10]). Предельные соотношения (2.4), (2.6) и (2.9) (в которых нужно положить $\epsilon_7 = 0$) сохраняют свой вид. Для уравнений же теории пологих оболочек это не так. Поскольку $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^2$, уже при расщеплении по ϵ_1 соответствующие указанным теориям уравнения распадаются. Вместо одного уравнения восьмого порядка по координате ξ (2.13) имеем два, описывающие напряженно-деформированное состояние с большим показателем изменчивости вдоль направляющей ($\alpha = 0, \beta = 1/2$)

$$\nabla_{2\xi}^2 \Phi, \xi\xi\xi\xi + \epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi, \xi\xi\xi\xi = 0;$$

$$\nabla_{2\xi}^2 = 1 + \epsilon_6 \partial^2 / \partial \xi^2 \quad (2.27)$$

и состояние типа пограничного слоя ($\alpha = \beta = 1/2$)

$$\nabla_2^4 \Phi + \epsilon_1^{-2} \left(1 - \nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^2 \Phi +$$

$$+ \epsilon_6 \left(2 - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.28)$$

В первом случае перемещения, усилия и моменты выражаются через потенциальную функцию Φ таким образом:

$$u = -\Phi, \xi\xi\xi, \quad v = \Phi, \xi\xi\xi, \quad w = \Phi, \xi\xi\xi\xi; \quad (2.29)$$

$$T_1 = -B_1 \nabla_{2\xi}^2 \Phi, \xi\xi\xi\xi / R, \quad T_2 = -B_1 \nabla_{2\xi}^2 \Phi, \xi\xi\xi\xi / R,$$

$$S = B_1 \nabla_{2\xi}^2 \Phi, \xi\xi\xi\xi / R,$$

$$M_1 = B_1 \epsilon_8 (\Phi, \xi\xi\xi + \nu_{21} \Phi, \xi\xi\xi), \xi\xi\xi\xi,$$

$$M_2 = B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6}, \quad H = B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_3 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi \partial \xi^5}, \quad (2.30)$$

а во втором

$$u = \nu_0 \epsilon_4^{-1} \epsilon_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^5} + 2 \nu_{10} \epsilon_6 \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \xi^2} + \nu_{12} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} -$$

$$- \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \xi^2}, \quad v = - \left[(2 \nu_{12} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11} \epsilon_4^{-1}) \epsilon_6 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + (\epsilon_5^{-1} +$$

$$+ \nu_{10}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad w = \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi; \quad (2.31)$$

$$T_1 = \frac{B_1}{R} \left(\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \xi^2},$$

$$T_2 = \frac{B_1}{R} \left(\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4},$$

$$S = -\frac{B_1}{R} \left(\nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 1 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^3 \partial \xi},$$

$$M_1 = B_1 \left\{ \left(\epsilon_1^2 + \nu_{12} \epsilon_6^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{12} \epsilon_1^2 \epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \nabla_2^4 \Phi +$$

$$+ \left[(1 + 2 \nu_{12} \epsilon_4 \epsilon_5^{-1}) \epsilon_6^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} + \nu_{12} \epsilon_4 \epsilon_6^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \right.$$

$$\left. + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi, \quad M_2 = B_2 \epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4^{-1} \chi$$

$$\chi \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \nabla_2^4 \Phi, \quad H = -\nu_{12} B_1 \epsilon_4^{-1} \epsilon_8 \nabla_2^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \xi}. \quad (2.32)$$

Уравнение (2.27) можно получить вариационным методом, используя гипотезы отсутствия сдвигов и нерастяжимости в кольцевом направлении срединной поверхности обшивки ($\epsilon_{12} = \epsilon_{22} = 0$). Соответствующие усилия S, T_2 являются статическими реакциями и определяются из уравнений (1.1). Для второго состояния основную (с энергетической точки зрения) роль играют деформации $\epsilon_{22}, \chi_{11}, \chi_{22}$. Напряженно-деформированные состояния рассматриваемых типов, как видно из соотношений (2.27) – (2.32), существенно зависят от величины и знака эксцентриситета стрингеров. При $\beta > 1/2$ получаем уравнения, описывающие преимущественно изгибную и тангенциальную деформации пластины:

$$\epsilon_1^2 \epsilon_4 \nabla_1^4 \Phi + \epsilon_6^2 \Phi, \xi\xi\xi\xi = 0, \quad \alpha = k,$$

$$\beta = 1/2 + k, \quad k > 0; \quad (2.33)$$

$$\epsilon_1^2 \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_6^2 (\nu_{12} \Phi_{,\xi\xi} - \Phi_{,\eta\eta}) = 0, \\ \alpha = \beta > 1/2. \quad (2.34)$$

При $\epsilon_6 = 0$ получаем обычные уравнения изгиба и плоского напряженного состояния стрингерной пластины. Выражения перемещений, усилий и моментов можно найти из соотношений (2.29), (2.30) и (2.32), удерживая в них лишь производные максимального порядка. Как и для пластины вафельного типа, знак эксцентриситета не влияет на напряженно-деформированное состояние.

Рассмотрим, наконец, оболочки, подкрепленные преимущественно в кольцевом направлении. Основные параметры $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, при этом $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^{-1}, \epsilon_7 \sim \epsilon_1^{1/2}, \epsilon_3 \sim 1$ (случай $\epsilon_3 \sim \epsilon_1^{-1}$ рассмотрен в работе [10]).

Уравнения (2.4), (2.6), (2.9) остаются без изменения, в них надо лишь положить $\epsilon_6 = 0$. Уравнение же теории пологих оболочек для шпангоутных оболочек распадается на уравнения напряженно-деформированного состояния с большим показателем изменчивости ($\alpha = \beta = 1/4$)

$$(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_7^2 \nabla_{3\eta}^2) \Phi_{,\eta\eta\eta\eta} + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \Phi_{,\xi\xi\eta\eta} + \\ + \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.35)$$

и состояния типа пограничного слоя

$$\Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \epsilon_2 \Phi_{,\eta\eta\eta\eta} + \epsilon_1^{-2} \nabla_{4\eta}^2 \Phi = 0. \quad (2.36)$$

Здесь $\nabla_{3\eta}^2 = \partial^2/\partial \xi^2 - \nu_{12} \partial^2/\partial \eta^2$; $\nabla_{4\eta}^2 = 1 + \epsilon_7 \partial^2/\partial \eta^2$.

Разрешающие уравнения (2.35) и (2.36) можно получить, приняв в качестве основных деформации $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{12}, \chi_{11}$ и $\epsilon_{22}, \chi_{11}, \chi_{22}$ соответственно. Для первого состояния перемещения, усилия и моменты выражаются через потенциальную функцию Φ следующим образом:

$$u = \left[-(2\nu_{21}\epsilon_5^{-1} + \nu_{11})\epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \nabla_{3\eta}^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}; \\ \nu = \left[2\nu_{10}\epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \nu_{11}\epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + (\epsilon_5^{-1} + \right. \\ \left. + \nu_{10}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}; \quad w = \epsilon_4^{-1} \nabla_2^4 \Phi;$$

$$T_1 = -\frac{B_1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}; \quad T_2 = -\frac{B_1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}; \quad S = \frac{B_1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \chi \\ \chi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}; \quad M_1 = B_1 \epsilon_1^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \nu_{21}\epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \nabla_2^4 \Phi; \\ M_2 = B_1 \left[(\nu_{12}\epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_1^2 \epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}) \nabla_2^4 + \right. \\ \left. + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right] \Phi; \quad H = B_1 \epsilon_1^2 (\epsilon_3 - \nu_{21}) \nabla_2^4 \chi \\ \chi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (2.37)$$

а для второго

$$u = \nu_{12} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}; \quad \nu = 2\nu_{10}\epsilon_7 \Phi_{,\xi\xi\eta\eta\eta\eta} + 2\nu_{10} \Phi_{,\xi\xi\eta\eta}; \\ w = \epsilon_4^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}; \quad T_1 = -B_1 \nabla_{4\eta}^2 \Phi_{,\xi\xi\eta\eta} / R; \\ T_2 = -B_1 \nabla_{4\eta}^2 \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} / R; \quad S = B_1 \nabla_{4\eta}^2 \Phi_{,\xi\xi\xi\xi}; \\ M_1 = B_1 \epsilon_1^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^6}; \quad M_2 = B_1 \left[\epsilon_7 \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4}; \quad H = B_1 \epsilon_1^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \xi^5 \partial \eta}. \quad (2.38)$$

Зависимость напряженных состояний, описываемых уравнениями (2.35), (2.36), от величины и знака эксцентриситета существенна. Если $\beta > 1/4$, после асимптотического расщепления получаем уравнения преимущественно изгибной и тангенциальной деформации пластины

$$\epsilon_1^2 \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \epsilon_7 \nu_{12} \Phi_{,\eta\eta\eta\eta} = 0, \quad \beta > 1/4, \quad \alpha = 1/4 + \beta; \quad (2.39)$$

$$\epsilon_1^2 \epsilon_2 \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_7 \nabla_{3\eta}^2 \Phi = 0, \quad \alpha \sim \beta > 1/4, \quad (2.40)$$

которые при $\epsilon_7 = 0$ переходят в уравнение изгиба и плоского

напряженного состояния. Перемещения, усилия и моменты определяются из соотношений (2.37), (2.38) соответственно, если в них удерживать лишь производные максимального порядка. Таким образом, для всех типов подкрепленных оболочек — ватфельных, стрингерных и шпангоутных — удается провести асимптотическое расщепление таким образом, что предельные дифференциальные уравнения при каждом значении показателя изменчивости внешней нагрузки имеют порядок по продольной координате ξ не выше четвертого. Значит, после разделения переменных по формуле (2.3) можно аналитически найти корни соответствующих характеристических уравнений. Уравнения (2.28), (2.35) допускают дальнейшее расщепление по параметру ϵ_4 [10].

§ 2. РАСЧЛЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В предыдущем параграфе были получены упрощенные уравнения подкрепленных оболочек. Однако для краевых задач наряду с анализом разрешающих уравнений необходимо выполнить расчленение граничных условий. Эта задача с математической точки зрения рассматривалась в работах [20, 72]. Для известных приближенных теорий изотропных оболочек ряд важных результатов был получен в работах [18, 25, 27, 44–47, 64]. Однако до настоящего времени даже для изотропных оболочек не существовало полной классификации упрощенных краевых задач, учитывающей различную степень осцилляции граничных условий.

В этом параграфе сформулированы корректные краевые задачи для упрощенных уравнений теории конструктивно-орто-тропных цилиндрических оболочек как для известных, так и для новых, не имеющих аналога в изотропном случае. Исследуем сначала упрощения при малой осцилляции внешней нагрузки, когда возможно разделение напряженного состояния на основное состояние (2.6) и краевой эффект (2.9). Считаем, что оболочка достаточно длинная, так что взаимным влиянием краевых эффектов можно пренебречь. Рассмотрим расчленение граничных условий для варианта A_6 . Используя формулы (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) и учитывая изменчивость каждого из состояний по обеим координатам, оценим порядки входящих в граничные условия величин

$$S^{(1)} \sim \epsilon_1^{1,5-2\beta} \Phi^{(1)}; \quad S^{(2)} \sim \epsilon_1^{-1,5-\beta} \Phi^{(2)};$$

$$T_1^{(1)} \sim \epsilon_1^{1-6\beta} \Phi^{(1)}; \quad T_1^{(2)} \sim \epsilon_1^{-1-2\beta} \Phi^{(2)};$$

$$W^{(1)} \sim \epsilon_1^{-4\beta} \Phi^{(1)};$$

$$W^{(2)} \sim \epsilon_1^{-2} \Phi^{(2)};$$

$$W_\xi^{(1)} \sim \epsilon_1^{0,5-6\beta} \Phi^{(1)};$$

$$W_\xi^{(2)} \sim \epsilon_1^{-2,5} \Phi^{(2)}.$$

Пусть P — некоторое усилие, момент или перемещение. Введем параметр $\mu(P)$ при помощи соотношения $\epsilon_1^{\mu(P)} \sim P^{(2)}$. $\chi \Phi^{(1)}/P^{(1)} \Phi^{(2)}$ и назовем его характеристическим показателем P . В рассматриваемом случае $\mu(S) = \mu(W_\xi) = -3 + 6\beta$; $\mu(T_1) = \mu(W) = -2 + 4\beta$. Далее будем считать, что граничные условия записаны в каноническом виде [20, 44, 45], если они расположены в порядке убывания характеристического показателя. Для данных граничных условий канонический вид $T_1, W; S, W_\xi$. Теперь в соответствии с обычной методикой [20, 44, 45] первые два условия должны быть отнесены к основному состоянию, а третье и четвертое — к простому краевому эффекту.

Искомое расчленение принимает различный вид в зависимости от того, какие компоненты краевой нагрузки заданы. Так, если $S_m = W_{\xi m} = 0, W_m \neq 0$ (или $T_m \neq 0$), то должны быть заданы при $\xi = 0, l$

$$T_1^{(1)} = T_m \cos m\eta; \quad W^{(1)} = W_m \cos m\eta;$$

$$S^{(2)} = -S^{(1)}; \quad W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)},$$

а в случае $W_m = T_m = 0, S_m \neq 0$ (или $W_{\xi m} \neq 0$)

$$S^{(2)} = S_m \sin m\eta; \quad W_\xi^{(2)} = W_{\xi m} \cos m\eta;$$

$$T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \quad W^{(1)} = -W^{(2)}.$$

Таким образом, в зависимости от заданной нагрузки исследованные оболочки можно начинать с расчета основного напряженного состояния или краевого эффекта. В табл. 2 приведен канонический вид всех вариантов граничных условий.

Краевые задачи удобно решать, когда напряженные состояния, описываемые уравнениями (2.6) и (2.9), можно рассматривать последовательно. Пока это верно только для вариантов $A_5 - A_{12}$, поэтому необходим дополнительный анализ.

Рассмотрим, например, вариант A_4 . Если хотя бы одна из величин $V_m, W_m, W_{\xi m}$ отлична от нуля, то из канонического вида получаем следующее „неудобное“ (т. е. не позволяющее рассчитывать одно из состояний независимо от другого) расчленение:

$$W^{(1)} + W^{(2)} = W_m \cos m\eta; \quad W_\xi^{(2)} = W_{\xi m} \cos m\eta;$$

$$V^{(1)} = V_m \sin m\eta; \quad U^{(1)} = -U^{(2)} + U_m \cos m\eta.$$

Однако, учитывая соотношение (2.7), первое условие можно привести к виду $W^{(2)} = (W_m - mV_m) \cos m\eta$ при $\xi = 0, l$.

Таблица 2

Вариант	Канонический вид	Вариант	Канонический вид
A ₁	$v, u \sim w, w_\xi$	A ₉	v, u, w_ξ, \tilde{Q}_1
A ₂	$v, T_1 \sim w, w_\xi$	A ₁₀	$v, T_1, w_\xi, \tilde{Q}_1$
A ₃	$v, u, \sim w, M_1$	A ₁₁	v, u, M_1, \tilde{Q}_1
A ₄	$v, T_1 \sim w, M_1$	A ₁₂	v, T_1, M_1, \tilde{Q}_1
A ₅	$u \sim w, S \sim w_\xi$	A ₁₃	$u, S \sim w_\xi, \tilde{Q}_1$
A ₆	$T_1 \sim w, S \sim w_\xi$	A ₁₄	$T_1, S \sim w_\xi, \tilde{Q}_1$
A ₇	$u \sim w, S \sim M_1$	A ₁₅	$u, S \sim M_1, \tilde{Q}_1$
A ₈	$T_1 \sim w, S \sim M_1$	A ₁₆	$T_1, S \sim M_1, \tilde{Q}_1$

Теперь уже основное состояние и краевой эффект можно рассматривать независимо друг от друга.

Пусть $u_m \neq 0$. Тогда в расчлененных граничных условиях.

$$v^{(1)} = 0; w^{(1)} = 0; u^{(1)} = u_m \cos m\xi;$$

$$w_\xi^{(2)} = w_\xi^{(1)} \quad (\xi = 0, l) \quad (2.41)$$

первые два условия линейно зависимы в силу соотношений (2.7). Для получения недостающего краевого условия учтем члены первого приближения в выражениях перемещений v и w через потенциальные функции $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$:

$$v = \Phi_{,zzz}^{(1)} + (2\epsilon_5^{-1} + \nu_{12}) \Phi_{,\xi\xi\xi}^{(1)};$$

$$w = \Phi_{,zzz}^{(1)} + 2\epsilon_5^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi}^{(1)} + \epsilon_4^{-1} \Phi_{,\xi\xi\xi}^{(2)} \quad (2.42)$$

Используя соотношения (2.7), (2.10), расчленение (2.42) можно записать так:

$$u^{(1)} = u_m \cos m\xi; \quad v^{(1)} = 0;$$

$$w^{(2)} = -\nu_{12} \Phi_{,\xi\xi\xi}^{(2)}; \quad w_\xi^{(2)} = -w_\xi^{(1)}.$$

Аналогично приводятся к „удобному“ виду расчленения для вариантов A₂—A₄, A₁₃—A₁₆, причем в четырех последних случаях приходится комбинировать условия по S и Q_1 . Окончательные результаты приведены в табл. 3. Отметим, что полученные расчленения справедливы также для случая изотропной оболочки

Таблица 3

Вариант	Расчлененные условия при $\xi = 0, l$
A ₁	$w^{(2)} = (w_m - m v_m) \cos m\xi; \quad w_\xi^{(2)} = w_{\xi m} \cos m\xi;$ $v^{(1)} = v_m \sin m\xi; \quad u^{(1)} = -u^{(2)}$ $v^{(1)} = 0; \quad u^{(1)} = u_m \cos m\xi; \quad w^{(2)} = -\nu_{12} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial z^2};$ $w_\xi^{(2)} = -w_\xi^{(1)}$
A ₂	$w^{(2)} = (w_m - m v_m) \cos m\xi; \quad w_\xi^{(2)} = w_{\xi m} \cos m\xi;$ $v^{(1)} = v_m \sin m\xi; \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $v^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} = T_m \cos m\xi; \quad w^{(2)} = -\nu_{12} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial z^2};$ $w_\xi^{(2)} = -w_\xi^{(1)}$
A ₃	$w^{(2)} = (w_m - m v_m) \cos m\xi; \quad M_1^{(2)} = M_m \cos m\xi;$ $v^{(1)} = v_m \sin m\xi; \quad u^{(1)} = -u^{(2)}$ $v^{(1)} = 0; \quad u^{(1)} = u_m \cos m\xi; \quad w^{(2)} = -\nu_{12} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial z^2};$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A ₄	$w^{(2)} = (w_m - m v_m) \cos m\xi; \quad M_1^{(2)} = M_m \cos m\xi;$ $v^{(1)} = v_m \sin m\xi; \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $v^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} = T_m \cos m\xi; \quad w^{(2)} = -\nu_{12} \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial z^2};$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$
A ₅	$S^{(2)} = S_m \sin m\xi; \quad w_\xi^{(2)} = w_{\xi m} \cos m\xi;$ $u^{(1)} = -u^{(2)}; \quad w^{(1)} = -w^{(2)}; \quad u^{(1)} = u_m \cos m\xi;$ $w^{(1)} = w_m \cos m\xi; \quad S^{(2)} = -S^{(1)}; \quad w_\xi^{(2)} = -w_\xi^{(1)}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_6	$T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau; W^{(1)} = W_m \cos m\tau; S^{(2)} = -S^{(1)}$ $W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m\tau; W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m\tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $W^{(1)} = -W^{(2)}$
A_7	$U^{(1)} = u_m \cos m\tau; W^{(1)} = W_m \cos m\tau; S^{(2)} = -S^{(1)}$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m\tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; U^{(1)} = -U^{(2)}$ $W^{(1)} = -W^{(2)}$
A_8	$T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau; W^{(1)} = W_m \cos m\tau; S^{(2)} = -S^{(1)}$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m\tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $W^{(1)} = -W^{(2)}$
A_9	$V^{(1)} = v_m \sin m\tau; U^{(1)} = u_m \cos m\tau; W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)}$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; U^{(1)} = -U^{(2)}$ $V^{(1)} = 0$
A_{10}	$V^{(1)} = v_m \sin m\tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau;$ $W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau;$ $T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; V^{(1)} = 0$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_{11}	$V^{(1)} = v_m \sin m\tau; U^{(1)} = u_m \cos m\tau; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; U^{(1)} = -U^{(2)}$ $V^{(1)} = 0$
A_{12}	$V^{(1)} = v_m \sin m\tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $V^{(1)} = 0$
A_{13}	$U^{(1)} = u_m \cos m\tau; S^{(1)} = (S_m + m\tilde{Q}_m) \sin m\tau;$ $W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau$ $W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; U^{(1)} = -U^{(2)}; S^{(1)} = 0$
A_{14}	$T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau; S^{(1)} = (S_m + m\tilde{Q}_m) \sin m\tau;$ $W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau$ $W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $S^{(1)} = 0$
A_{15}	$U^{(1)} = u_m \cos m\tau; S^{(1)} = (S_m + m\tilde{Q}_m) \sin m\tau;$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; U^{(1)} = -U^{(2)}$ $S^{(1)} = 0$
A_{16}	$T_1^{(1)} = T_m \cos m\tau; S^{(1)} = (S_m + m\tilde{Q}_m) \sin m\tau;$ $M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}$ $S^{(1)} = 0$

Таблица 4

Вариант	Канонический вид	Вариант	Канонический вид
A_1	$v \sim w, u \sim w_{\xi}$	A_9	$v, u \sim w_{\xi}, \tilde{Q}_1$
A_2	$v \sim w, w_{\xi}, T_1$	A_{10}	$v, w_{\xi}, T_1, \tilde{Q}_1$
A_3	$v \sim w \sim M_1, u$	A_{11}	$v \sim M_1, u, \tilde{Q}_1$
A_4	$v \sim w \sim M_1, T_1$	A_{12}	$v \sim M_1, T_1, \tilde{Q}_1$
A_5	$w, u \sim w_{\xi}, S$	A_{13}	$u \sim w_{\xi}, S \sim \tilde{Q}_1$
A_6	w, w_{ξ}, T_1, S	A_{14}	$w_{\xi}, T_1, S \sim \tilde{Q}_1$
A_7	$w \sim M_1, u, S$	A_{15}	$M_1, u, S \sim \tilde{Q}_1$
A_8	$w \sim M_1, T_1, S$	A_{16}	$M_1, T_1, S \sim \tilde{Q}_1$

Перейдем к новым, не имеющим аналога в изотропном случае, вариантам приближенных уравнений для состояния с большим показателем изменяемости. Рассмотрим стрингерные оболочки. Канонический вид граничных условий для уравнений (2.27) и (2.28) дан в табл. 4. Расчлененные условия для вариантов $A_1 - A_5, A_9, A_{13}$ некорректны, поскольку, как следует из соотношений (2.29), $w^{(1)} = v_{,2}^{(1)}, w_{\xi}^{(1)} = u_{,2}^{(1)}$, и соответствующие условия линейно зависимы. Эта трудность преодолевается при помощи описанной методики линейной комбинации некоторых граничных условий. Окончательные результаты приведены в табл. 5, где принято $L_1 = v_{,2}^{(2)} - w^{(2)}$, $L_2 = u_{,2}^{(2)} + w_{\xi}^{(2)}$.

Корректные расчленения граничных условий для шпангоутных оболочек приведены в табл. 6. Индексы 1, 2 относятся к состоянию, описываемым уравнениями (2.35) и (2.36) соответственно.

Расчленение граничных условий для вафельной оболочки имеет некоторые особенности по сравнению с описанными ранее случаями и проводится в два этапа. Рассмотрим вариант A_2 . Введем характеристические показатели $M_1(R)$ и $M_2(R)$ при помощи

Таблица 5

Вариант	Расчлененные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$L_1(v^{(2)}, w^{(2)}) = (mv_m - w_m) \cos m\tau; L_2(u^{(2)}, w_{\xi}^{(2)}) = (w_{\xi m} - m^2 u_m) \cos m\tau; v^{(1)} = v_m \sin m\tau - v^{(2)};$ $w_{\xi}^{(1)} = w_{\xi m} \cos m\tau - w_{\xi}^{(2)}$
A_2	$T_1^{(2)} = T_m \cos m\tau; L_1 = (mv_m - w_m) \cos m\tau;$ $v^{(1)} = v_m \sin m\tau; w_{\xi}^{(1)} = -v_{\xi}^{(2)}$ $v^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = w_{\xi m} \cos m\tau; T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}; L_1 = 0$
A_3	$M_1^{(2)} = M_m \cos m\tau; L_1 = mv_m \cos m\tau; u^{(1)} = -u^{(2)};$ $v^{(1)} = v_m \sin m\tau$ $v^{(1)} = 0; u^{(1)} = u_m \cos m\tau; L_1 = 0; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}$ $w^{(1)} = w_m \cos m\tau; M_1^{(1)} = 0; L_1 = -w_m \cos m\tau;$ $u^{(2)} = -u^{(1)}$
A_4	$L_1 = (mv_m - w_m) \cos m\tau; \frac{1}{R} \left(1 + \epsilon_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) M_1^{(2)} +$ $+ (\epsilon_8 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \epsilon_8) T_1^{(2)} - \frac{B_1}{R} \left(1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \epsilon_8 v_{21} \frac{\partial^3 v^2}{\partial \tau^3} =$ $= \left[\frac{1}{R} [1 - m^2 \epsilon_8] (M_m + v_{21} B_1 \epsilon_8 m^3 v_m) + (\epsilon_6 - m^2 \epsilon_8) T_m \right] \chi$ $\chi \cos m\tau; v^{(1)} = v_m \sin m\tau - v^{(2)};$ $T_1^{(1)} = T_m \cos \tau - T_1^{(2)}$
A_5	$S^{(2)} = S_m \sin m\tau; L_2 = (w_{\xi m} - m^{(2)} u_m) \cos m\tau;$ $w_{\xi}^{(1)} = w_{\xi m} \cos m\tau - w_{\xi}^{(2)}; w^{(1)} = 0$ $w^{(1)} = w_m \cos m\tau; u^{(1)} = 0; L_2 = 0; S^{(2)} = -S^{(1)}$
A_6	$w^{(1)} = w_m \cos m\tau; w_{\xi}^{(1)} = w_{\xi m} \cos m\tau; T_1^{(2)} = -T_1^{(1)};$ $S^{(2)} = 0$ $T_1^{(2)} = T_m \cos m\tau; S^{(2)} = S_m \sin m\tau; w_{\xi}^{(1)} = -w_{\xi}^{(2)};$ $w^{(1)} = 0$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, l$
A_7	$w^{(4)} = 0; u^{(1)} = u_m \cos m z; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}; S^{(2)} = 0$ $\tilde{M}_1^{(2)} = M_m \cos m z; S^{(2)} = S_m \sin m z; u^{(1)} = -u^{(2)};$ $w^{(1)} = 0$ $w^{(1)} = w_m \cos m z; M_1^{(1)} = 0; u^{(2)} = -u^{(1)}; S^{(2)} = 0$
A_8	$S^{(2)} = S_m \sin m z; \frac{1}{R}(1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) M_1^{(2)} + (\epsilon_8 \frac{\partial^2}{\partial z^2} +$ $+ \epsilon_6) T_1^{(2)} - \frac{B_1}{R} (1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \epsilon_8 v_{21} \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial z^2} =$ $= \left[\frac{1}{R} (1 - m^2 \epsilon_6) M_m + (\epsilon_6 - m^2 \epsilon_8) T_m \right] \cos m z;$ $T_1^{(1)} = T_m \cos m z - T_1^{(2)}; w^{(1)} = 0$ $w^{(1)} = w_m \cos m z; M_1^{(1)} = 0; T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}; S^{(2)} = 0$
A_9	$L_2 = (w_m m - m^2 u_m) \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z;$ $v^{(1)} = 0; w^{(1)} = w_m \cos m z - w^{(2)}$ $v^{(1)} = v_m \sin m z; u^{(1)} = 0; L_2 = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = -\tilde{Q}_1^{(1)}$
A_{10}	$v^{(1)} = v_m \sin m z; w^{(1)} = w_m \cos m z;$ $T_1^{(2)} = -T_1^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(2)} = T_m \cos z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z;$ $w^{(1)} = -w^{(2)}; v^{(1)} = 0$
A_{11}	$v^{(1)} = v_m \sin m z; M_1^{(1)} = M_m \cos m z; u^{(2)} = -u^{(1)}; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $u^{(2)} = u_m \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; v^{(1)} = -v^{(2)}; M_1^{(1)} = -M_1^{(2)}$
A_{12}	$v^{(1)} = v_m \sin m z; M_1^{(1)} = M_m \cos m z; T_1^{(2)} = -T_1^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(2)} = T_m \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; v^{(1)} = -v^{(2)};$ $M_1^{(1)} = -M_1^{(2)}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, l$
A_{13}	$L_2 = (w_m m - m^2 u_m) \cos m z;$ $(1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \tilde{Q}_1^{(2)} - \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_8 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \epsilon_6) S^{(2)} +$ $+ \frac{B_1}{R} \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 (1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \frac{\partial^4 u^{(2)}}{\partial z^4} =$ $= [(1 - m^2 \epsilon_6) (\tilde{Q}_m + \frac{B_1}{R} \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 m^4 u_m) +$ $+ m (\epsilon_8 m^2 - \epsilon_6) S_m] \cos m z;$ $u^{(1)} = u_m \cos m z - u^{(2)};$ $S^{(1)} = S_m \sin m z - S^{(2)}$
A_{14}	$w^{(1)} = w_m \cos m z; T_1^{(1)} = T_m \cos m z; S^{(2)} = -S^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = -\tilde{Q}_1^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)};$ $w^{(1)} = 0$
A_{15}	$M_1^{(1)} = M_m \cos m z; u^{(1)} = u_m \cos m z; S^{(2)} = -S^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = -\tilde{Q}_1^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; u^{(1)} = -u^{(2)};$ $M_1^{(1)} = 0$
A_{16}	$M_1^{(1)} = M_m \cos m z; T_1^{(1)} = T_m \cos m z; S^{(2)} = -S^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = -\tilde{Q}_1^{(1)}$ $S^{(2)} = S_m \sin m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)};$ $M_1^{(1)} = 0$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ w_{\xi}^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi m} \cos m \tau; u^{(1)} = -u^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_2	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ w_{\xi}^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi m} \cos m \tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_3	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ M_1^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m \tau; u^{(1)} = -u^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_4	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ M_1^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m \tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_5	$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ w_{\xi}^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi m} \cos m \tau; S^{(1)} = -S^{(2)}; \\ u^{(1)} &= -u^{(2)} \end{aligned}$
A_6	$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ w_{\xi}^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = w_{\xi m} \cos m \tau; S^{(1)} = -S^{(2)}; \\ T_1^{(1)} &= -T_1^{(2)} \end{aligned}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, l$
A_7	$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ M_1^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m \tau; S^{(1)} = -S^{(2)}; \\ u^{(1)} &= -u^{(2)} \end{aligned}$
A_8	$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; w^{(2)} = -w^{(1)}; \\ M_1^{(2)} &= 0 \\ w^{(2)} &= w_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = M_m \cos m \tau; S^{(1)} = -S^{(2)}; \\ T_1^{(1)} &= -T_1^{(2)} \end{aligned}$
A_9	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = -w_{\xi}^{(1)}; \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= 0 \\ w_{\xi}^{(2)} &= w_{\xi m} \cos m \tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m \tau; u^{(1)} = -u^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_{10}	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = -w_{\xi}^{(1)}; \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= 0 \\ w_{\xi}^{(2)} &= w_{\xi m} \cos m \tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m \tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_{11}	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}; \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= 0 \\ M_1^{(2)} &= M_m \cos m \tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m \tau; u^{(1)} = -u^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_{12}	$\begin{aligned} v^{(1)} &= v_m \sin m \tau; T_1^{(1)} = T_m \cos m \tau; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)}; \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= 0 \\ M_1^{(2)} &= M_m \cos m \tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m \tau; T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; \\ v^{(1)} &= 0 \end{aligned}$
A_{13}	$\begin{aligned} S^{(1)} &= S_m \sin m \tau; u^{(1)} = u_m \cos m \tau; w_{\xi}^{(2)} = -w_{\xi}^{(1)}; \\ \tilde{Q}_1^{(2)} &= 0 \\ w_{\xi}^{(2)} &= w_{\xi m} \cos m \tau; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m \tau; S^{(1)} = -S^{(2)}; \\ u^{(1)} &= -u^{(2)} \end{aligned}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_{14}	$S^{(4)} = S_m \sin m z; T_1^{(4)} = T_m \cos m z; W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $W_\xi^{(2)} = W_{\xi m} \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; S^{(1)} = -S^{(2)};$ $T_1^{(4)} = -T_1^{(2)}$
A_{15}	$S^{(4)} = S_m \sin m z; u^{(4)} = u_m \cos m z; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; S^{(1)} = -S^{(2)};$ $u^{(4)} = -u^{(2)}$
A_{16}	$S^{(4)} = S_m \sin m z; T_1^{(4)} = T_m \cos m z; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)};$ $\tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $M_1^{(2)} = M_m \cos m z; \tilde{Q}_1^{(2)} = \tilde{Q}_m \cos m z; S^{(1)} = -S^{(2)};$ $T_1^{(4)} = -T_1^{(2)}$

следующих соотношений:

$$\epsilon_1^{M_1(R)} \sim R^{(1)} \Phi^{(2)} / R^{(2)} \Phi^{(1)};$$

$$\epsilon_1^{M_2(R)} \sim R^{(3)} \Phi^{(1)} / R^{(1)} \Phi^{(2)}.$$

Оценивая порядки входящих в граничные условия A_2 величин получаем

$$M_1(T_1) = -1; M_1(\nu) = M_1(W) = -3; M_1(W_\xi) = -3,5;$$

$$M_2(u) = 1; M_2(W_\xi) = -0,5; M_2(\nu) = M_2(T_1) = -1.$$

Сформируем две последовательности так, чтобы размещение компонент в первой из них определялось убыванием параметра M_1 , а во втором — параметра M_2 :

$$T_1, \nu \sim W, W_\xi; \quad (2.43)$$

$$W, W_\xi, \nu \sim T_1. \quad (2.44)$$

Последовательность (2.43) представляет собой канонический вид граничных условий, соответствующий расщеплению исходного разрешающего уравнения на уравнения (2.22) и (2.23), а последовательность (2.44) — дальнейшему расщеплению уравнения (2.22) на уравнения (2.25) и (2.24). Пусть, например $T_m \neq 0, W_m = W_{\xi m} = W_m = 0$. Тогда из первого канонического представления (2.43) имеем

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_1	$u^{(2)} = u_m \cos m z; W^{(4)} = -W^{(2)}; W_\xi^{(4)} = 0; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)} - \nu^{(2)};$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; W_\xi^{(4)} = W_{\xi m} \cos m z; u^{(2)} = -u^{(4)}; \nu^{(3)} = -\nu^{(4)};$ $\nu^{(3)} = \nu_m \sin m z; u^{(2)} = -u^{(3)}; W^{(4)} = -W^{(2)}; W_\xi^{(4)} = 0$
A_2	$T_1^{(2)} = T_m \cos m z; W^{(4)} = -W^{(2)}; W_\xi^{(4)} = 0; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)} - \nu^{(2)};$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; W_\xi^{(4)} = W_{\xi m} \cos m z; \nu^{(3)} = -\nu^{(4)};$ $T_1^{(2)} = -T_1^{(1)} - T_1^{(3)}$ $\nu^{(3)} = \nu_m \sin m z; T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}; W^{(4)} = 0; W_\xi^{(4)} = -W_\xi^{(3)}$
A_3	$u^{(2)} = u_m \cos m z; W^{(4)} = -W^{(2)}; M_1^{(4)} = 0; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)} - \nu^{(2)};$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; M_1^{(4)} = M_m \cos m z; u^{(2)} = -u^{(4)}; \nu^{(3)} = -\nu^{(4)};$ $\nu^{(3)} = \nu_m \sin m z; u^{(2)} = -u^{(3)}; W^{(4)} = -W^{(2)}; M_1^{(4)} = 0$
A_4	$T_1^{(2)} = T_m \cos m z; W^{(4)} = -W^{(2)}; M_1^{(4)} = 0;$ $\nu^{(3)} = -\nu^{(1)} - \nu^{(2)}$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; M_1^{(4)} = M_m \cos m z; \nu^{(3)} = -\nu^{(4)};$ $T_1^{(2)} = -T_1^{(4)} - T_1^{(3)}$ $\nu^{(3)} = \nu_m \sin m z; T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}; W^{(4)} = 0; M_1^{(4)} = -M_1^{(3)}$
A_5	$u^{(2)} = u_m \cos m z; S^{(3)} = -S^{(2)}; W_\xi^{(4)} = -W_\xi^{(3)}; W^{(4)} = 0$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; W_\xi^{(4)} = W_{\xi m} \cos m z; u^{(2)} = -u^{(4)};$ $S^{(3)} = -S^{(4)}$ $S^{(3)} = S_m \sin m z; W^{(4)} = 0; W_\xi^{(4)} = -W_\xi^{(3)};$ $u^{(2)} = -u^{(3)}$
A_6	$T_1^{(2)} = T_m \cos m z; S^{(3)} = -S^{(2)}; W_\xi^{(4)} = -W_\xi^{(3)}; W^{(4)} = 0$ $W^{(4)} = W_m \cos m z; W_\xi^{(4)} = W_{\xi m} \cos m z; T_1^{(2)} = -T_1^{(4)};$ $S^{(3)} = -S^{(4)}$ $S^{(3)} = S_m \sin m z; W^{(4)} = 0; W_\xi^{(4)} = -W_\xi^{(3)};$ $T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_7	$\begin{aligned} u^{(2)} &= u_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; M_1^{(4)} = -M_1^{(3)}; W^{(4)} = 0 \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; M_1^{(1)} = M_m \cos m\tau; u^{(2)} = -u^{(1)}; \\ S^{(3)} &= -S^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; W^{(4)} = 0; M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}; u^{(2)} = -u^{(3)} \end{aligned}$
A_8	$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; M_1^{(4)} = -M_1^{(3)}; W^{(4)} = 0 \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; M_1^{(1)} = M_m \cos m\tau; T_1^{(2)} = -T_1^{(4)}; \\ S^{(3)} &= -S^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; W^{(4)} = 0; M_1^{(1)} = -M_1^{(3)}; T_1^{(2)} = -T_1^{(3)} \end{aligned}$
A_9	$\begin{aligned} u^{(2)} &= u_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(2)}; W^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)}; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} \\ \nu^{(3)} &= \nu_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; W^{(4)} = 0; u^{(2)} = -u^{(1)} - u^{(3)} \end{aligned}$
A_{10}	$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(2)}; W^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)}; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} - T_1^{(3)} \\ \nu^{(3)} &= \nu_m \sin m\tau; W^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; T_1^{(2)} = -T_1^{(3)} \end{aligned}$
A_{11}	$\begin{aligned} u^{(2)} &= u_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(2)}; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; M_1^{(1)} = 0 \\ \tilde{Q}_1^{(1)} &= \tilde{Q}_m \cos m\tau; M_1^{(1)} = M \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)}; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} \\ \nu^{(3)} &= \nu_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; M_1^{(1)} = 0; u^{(2)} = -u^{(1)} - u^{(3)} \end{aligned}$
A_{12}	$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(2)}; M_1^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ M_1^{(1)} &= M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; \nu^{(3)} = -\nu^{(1)}; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} - T_1^{(3)} \\ \nu^{(3)} &= \nu_m \sin m\tau; M_1^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(3)} \end{aligned}$

Вариант	Расщепленные условия при $\xi = 0, \ell$
A_{13}	$\begin{aligned} u^{(2)} &= u_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; W^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(1)}; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; W^{(4)} = 0; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} - u^{(3)} \end{aligned}$
A_{14}	$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; W^{(4)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ W^{(1)} &= W_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(1)}; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; W^{(4)} = 0; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} - T_1^{(3)} \end{aligned}$
A_{15}	$\begin{aligned} u^{(2)} &= u_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; M_1^{(4)} = 0; \\ \tilde{Q}_1^{(1)} &= -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ M_1^{(1)} &= M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(1)}; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; M_1^{(4)} = 0; \\ u^{(2)} &= -u^{(1)} - u^{(3)} \end{aligned}$
A_{16}	$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(2)}; M_1^{(4)} = 0; \\ \tilde{Q}_1^{(1)} &= -\tilde{Q}_1^{(3)} \\ M_1^{(1)} &= M_m \cos m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_m \cos m\tau; S^{(3)} = -S^{(1)}; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} \\ S^{(3)} &= S_m \sin m\tau; \tilde{Q}_1^{(1)} = -\tilde{Q}_1^{(3)}; M_1^{(4)} = 0; \\ T_1^{(2)} &= -T_1^{(1)} - T_1^{(3)} \end{aligned}$

$$T_1^{(2)} = T_m \cos m \tau; \quad [\nu^{(1)} + \nu^{(3)}] + \nu^{(2)} = 0; \quad [W^{(1)} + W^{(3)}] + W^{(2)} = 0; \quad W_{\xi}^{(1)} + W_{\xi}^{(3)} = 0 \quad (\xi = 0, \ell).$$

Используя последовательность (2.44), получаем окончательное расчленение

$$T_1^{(2)} = T_m \cos m \tau; \quad W^{(1)} = -W^{(2)}; \\ W_{\xi}^{(1)} = 0; \quad \nu^{(3)} = -\nu^{(1)} - \nu^{(2)} \quad (\xi = 0, \ell).$$

Анализ показывает, что возможны еще два варианта расчленения: если $W_m = T_m = 0$, $W_m \neq 0$ (или $W_{\xi m} \neq 0$), то

$$W^{(1)} = W_m \cos m \tau; \quad W_{\xi}^{(1)} = W_{\xi m} \cos m \tau; \\ \nu^{(3)} = -\nu^{(1)}; \quad T_1^{(2)} = -T_1^{(1)} - T_1^{(3)} \quad (\xi = 0, \ell),$$

а в случае $\nu_m \neq 0$, $W_m = W_{\xi m} = T_m = 0$ имеем

$$\nu^{(3)} = \nu_m \sin m \tau; \quad T_1^{(2)} = -T_1^{(3)}; \quad W^{(1)} = 0; \\ W_{\xi}^{(1)} = -W_{\xi}^{(3)} \quad (\xi = 0, \ell).$$

Расчленения для всех вариантов приведены в табл. 7.

§ 3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОСНОВНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Рассмотрим расчет эксцентрично подкрепленной цилиндрической оболочки при малой осцилляции краевой нагрузки. В этом случае напряженно-деформированное состояние оболочки может быть в первом приближении описано уравнениями (2.6), (2.9), соответствующими основному состоянию и краевому эффекту. Ограничимся исследованием основного состояния, так как для краевого эффекта результаты аналогичны. Решение уравнения (2.6) представим в виде

$$\Phi = C \exp(k \xi) \cdot \begin{Bmatrix} \cos m \tau \\ \sin m \tau \end{Bmatrix} \quad (C = \text{const}).$$

Корни соответствующего характеристического уравнения можно записать так:

$$k_j^0 = \pm m \sqrt{m^2 - 1} (b_{11} + i b_{12}) / \sqrt{2} \quad (j = 1, 2, 3, 4); \\ b_{11} = \sqrt{\tilde{\alpha} + 1}; \quad b_{12} = \sqrt{\tilde{\alpha} - 1}; \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}; \quad (2.45) \\ \alpha_1 = \nu_{21} \epsilon_T; \quad \alpha_2 = \epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4.$$

Для уточнения найденных значений корней и оценки погрешности их определения воспользуемся модифицированным методом Ньютона [43], преимуществами которого являются простота и возможность использования хорошо развитого математического аппарата для исследования сходимости.

Уточненные до величины порядка $\epsilon_1^{1/2}$ значения корней (2.45) имеют вид

$$k_j^{(1)} = k_j^0 \pm \frac{\tilde{\alpha}^2 (b_{13} + i b_{14})}{\sqrt{2} (b_{13}^2 + b_{14}^2)} \quad (j = 1, 2, 3, 4);$$

$$b_{13} = \alpha_{11} b_{11} - \sqrt{\alpha_2} b_{12}; \quad b_{14} = \alpha_{11} b_{12} + \sqrt{\alpha_2} b_{11}. \quad (2.46)$$

В предельном случае изотропной оболочки ($\epsilon_1^2 = \alpha_1^2$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 1$, $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$) соотношения (2.46) полностью совпадают с полученными другим путем в работе [58]. Аналогично были найдены уточненные значения корней характеристических уравнений для всех приведенных в §1 вариантов приближенных уравнений. Численный анализ полученных решений показал, что для реальных значений параметров погрешности асимптотических расщеплений уравнений стрингерных, шпангоутных и вафельных оболочек (в последнем случае при малой осцилляции краевой нагрузки, $m < \epsilon_1^{-1/2}$) не превышают 6–7 %, а для пологих вафельных оболочек, где упрощение достигалось благодаря использованию малости параметра ϵ_6 , они были равны 9–13 %.

Предположим, что корни уточнены, и перейдем к оценке погрешности полученных в §2 расщеплений граничных условий. В общем виде линейные алгебраические уравнения, соответствующие граничным условиям, можно записать так:

$$(G) \bar{x} = [(G_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k (G_k)] \bar{x} + y, \quad (2.47)$$

где (G) — матрица коэффициентов при неизвестных ($\det(G) \neq 0$); \bar{x}, y — векторы неизвестных и правых частей, представляющих краевую нагрузку, соответственно; ϵ — малый параметр. Это задача о возмущении системы линейных алгебраических уравнений, которая аналогична рассмотренной в работе [20]. Задавая \bar{x} асимптотическим рядом по малому параметру ϵ

$$\bar{x} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \bar{x}_j, \quad (2.48)$$

подставляя разложение (2.48) в уравнение (2.47) и производя расщепление по ϵ , приходим к следующей рекуррентной последовательности матричных уравнений для определения \bar{x}_j :

$$(G_0)x_0 = y; (G_0)\bar{x}_1 = -(G_1)\bar{x}_0; (G_0)\bar{x}_j = -\sum_{i=1}^j (G_i)\bar{x}_{j-i} \quad (j = 2, 3, \dots). \quad (2.49)$$

Поскольку $\det(G_0) \neq 0$, существует обратная матрица и возможно построение итерационного процесса (2.49). В результате имеем

$$\bar{x}_0 = (G_0)^{-1}y; \bar{x}_1 = -(G_0)^{-1}(G_1)\bar{x}_0; \bar{x}_j = -(G_0)^{-1} \sum_{i=1}^j (G_i)\bar{x}_{j-i} \quad (j = 2, 3, \dots). \quad (2.50)$$

Если $\|\bar{x}\|$ — некоторая норма вектора \bar{x} , а $\|G_0\|$ — согласованная с ней норма матрицы (G_0) , то справедливы неравенства [43]

$$\|\bar{x}_1\| \leq \|G_0^{-1}\| \|G_1\| \|\bar{x}_0\|; \|\bar{x}_j\| \leq \|G_0^{-1}\| \sum_{i=1}^j \|G_i\| \|\bar{x}_{j-i}\|, \quad (2.51)$$

которые могут быть использованы для оценки погрешности j -го приближения и доказательства сходимости итерационного процесса (2.50). Пусть, например, $(G_i) = 0$ при $j \geq 2$. Тогда, используя неравенство (2.51), получаем $\|\bar{x}_j\| \leq \|G_0^{-1}\| \|G_1\| \|\bar{x}_0\|$.

Ряд $\sum_{j=0}^{\infty} (\epsilon \|G_0\| \|G_1\| \|\bar{x}_0\|)^j$ мажорирует ряд (2.47) и при достаточно малом ϵ ($\epsilon < [\|G_0\| \|G_1\| \|\bar{x}_0\|]^{-1}$) сходится. Следовательно, сходится и ряд (2.47). Аналогично проводится доказательство и при $(G_j) \neq 0$.

Для всех полученных в § 2 расчленений при реальных значениях параметров величина погрешности не превышает 8–12%. Исключение составляет лишь случай вафельной оболочки, когда проводится дополнительный анализ по параметру ϵ_5 . Здесь верхняя граница допускаемой погрешности, определяемая предложенным методом, возрастает до 15–20%. Проведенные дополнительно расчеты показывают, что действительные величины погрешностей значительно меньше. Следовательно, полученные при помощи неравенства (2.5) оценки сильно завышены.

§ 4. РАСЧЕТ ОТКРЫТЫХ ОБОЛОЧЕК

Существующие в настоящее время аналитические методы расчета открытых оболочек основаны, как правило, на разложении искомого решения в ряд по некоторой системе аппроксимирующих функций. Однако, помимо случая шарнирного опирания, можно назвать лишь ограниченное число вариантов закрепления кромок, для которых построены численные решения при помощи полиномов Хорви [31, 63]. В настоящем параграфе предлагается приближенный подход, позволяющий получать простые аналитические решения для широкого класса открытых оболочек, справедливые как во внутренней, так и в краевых зонах оболочки.

Рассмотрим открытую конструктивно-ортотропную оболочку средней относительной длины. С целью упрощения выкладок принимаем $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$ (это ограничение не существенно). Введем параметры α_1, α_2 и β_1, β_2 , характеризующие изменчивость напряженных состояний вдоль образующей и направляющей:

$$\phi_{,\xi}^{(j)} \sim \epsilon_1^{-\alpha_j} \phi^{(j)}; \phi_{,\eta}^{(j)} \sim \epsilon_1^{-\beta_j} \phi^{(j)} \quad (j = 1, 2).$$

Индексами 1, 2 обозначаются величины, относящиеся к обобщенному и простому краевым эффектам соответственно. Необходимость введения двух параметров β_1 и β_2 связана с тем, что для открытой оболочки, в отличие от замкнутой, величина β не определяется соотношением $\epsilon_1^{-\beta} = m$, а зависит от изменчивости напряженного состояния по продольной координате.

Пусть частный интеграл, соответствующий поверхностной нагрузке, найден. При этом в общем случае граничные условия на контуре оболочки не удовлетворяются. Соответствующие невязки на продольных кромках могут быть сняты в результате решения уравнений обобщенного краевого эффекта [25], которое имеет вид

$$\epsilon_2 \epsilon_4 \frac{\partial^8 \phi^{(1)}}{\partial \eta^8} + \epsilon_1^{-2} \frac{\partial^4 \phi^{(1)}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2.52)$$

Уравнение (2.52) позволяет удовлетворить лишь двум граничным условиям на каждой из криволинейных кромок оболочки. В связи с этим вблизи торцов появляется напряженное состояние типа пограничного слоя, которое в рассматриваемом случае описывается уравнением простого краевого эффекта ($\beta_2 < 1/2, \alpha_2 = 1/2$)

$$\frac{\partial^4 \phi^{(2)}}{\partial \xi^4} + \epsilon_1^{-2} \phi^{(2)} = 0. \quad (2.53)$$

Решение уравнения (2.53) не может, вообще говоря, удовлетворить краевым условиям на продольных кромках оболочки. Возникающие при этом невязки быстропеременны по $\xi (\partial/\partial \xi \sim \sim \xi^{-1/2})$ и затухают на расстоянии $\epsilon_1 \sim \sqrt{\epsilon_1}$ от торцов. Согласно результатам работ [17, 21] соответствующее напряженное состояние будет быстро затухать и при удалении от прямолинейных кромок, т. е. вблизи углов панели имеем напряженное состояние типа двумерного пограничного слоя. Зоны его влияния, однако, очень малы и сосредоточены в наиболее жестких областях конструкции. Поэтому в дальнейшем угловые двумерные пограничные слои рассматривать не будем.

Построим расчлененные граничные условия, соответствующие упрощенным уравнениям (2.52), (2.53). Рассмотрим вариант граничных условий A_6 . Учитывая изменчивости каждого из элементарных состояний (2.51), (2.52) и формулы (2.7), (2.8), (2.10), (2.11), определим характеристические показатели входящих в граничные условия величин: $M(S) = -3 + 7\beta_1 - \beta_2$; $M(T_1) = -2 + 6\beta_1 - 2\beta_2$; $M(W) = -2 + 4\beta_1$; $M(W_\xi) = -3 + 5\beta_1$. Канонические последовательности зависят от соотношений β_1 и β_2 . При $\beta_1 < \beta_2$; $\beta_1 = \beta_2$; $\beta_1 > \beta_2$ они имеют соответственно такой вид: W, T_1, W_ξ, S ; $W \sim T_1, S \sim W_\xi$; T_1, W, S, W_ξ .

Получающиеся на основе выписанных канонических последовательностей расчленения различны. Однако результаты расчетов с их использованием практически совпадают, поэтому в дальнейшем выбираем одно из них (при $\beta_1 = \beta_2$) для всех случаев. Если $S_m = W_\xi m$, то это расчленение имеет вид

$$T_1^{(1)} = T_m \cos m \xi; W^{(1)} = W_m \cos m \xi; S^{(2)} = -S^{(1)}; W_\xi^{(2)} = -W_\xi^{(1)} \quad (\xi = 0, \ell). \quad (2.54)$$

Для $T_{1m} = W_m = 0$ получаем

$$S^{(2)} = S_m \sin m \xi; W_\xi^{(2)} = W_\xi m \cos m \xi;$$

$$T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}; W^{(1)} = -W^{(2)} \quad (\xi = 0, \ell). \quad (2.55)$$

Расчленения (2.54), (2.55) совпадают с приведенными в табл. 3.

Из полученных результатов видно, что расчет открытой оболочки можно производить следующим образом: если S_m и $W_\xi m$ отличны от нуля, сначала рассчитывается простой краевой эффект, затем решается уравнение (2.52) при граничных условиях (2.54) и исходных условиях на прямолинейных кромках, а в случае $T_{1m} \neq 0$; $W_m \neq 0$ процедура начинается с расчета обобщенного краевого эффекта. Таким образом, благодаря

применению асимптотического метода краевую задачу можно исследовать в два этапа, решая на каждом уравнение четвертого порядка по ξ . Расчет простого краевого эффекта не представляет труда, а для решения уравнения (2.52) можно применять метод разложения по тригонометрическим функциям. Анализ граничных условий для остальных вариантов (см. табл. 1) проводится аналогично, а расчленения совпадают с приведенными в табл. 3. При этом граничные условия $A_2, A_4, A_6, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{15}$ и $A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}, A_{14}, A_{16}$ сводятся для уравнения (2.52) к условиям „шарнирного опирания“ ($\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ при $\xi = 0, \ell$) и „зашемления“ ($\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ при $\xi = 0, \ell$) соответственно. В первом случае можно использовать разложение по синусам, во втором для расчета обобщенного краевого эффекта целесообразно применять полиномы Хорви [31] либо балочные функции.

Для оценки точности предложенного подхода рассчитаем открытую изотропную круговую цилиндрическую оболочку, прямолинейные кромки которой ($\eta = 0, 1$) зашлемлены, а на торцах $\xi = 0, \ell$ заданы следующие граничные условия:

$$\nu = W = M_1 = 0, T_1 = T_m \sin m \xi.$$

Расчлененные граничные условия для этого случая (см. табл. 3) таковы:

$$\nu^{(1)} = 0; T_1^{(1)} = T_m \sin m \xi;$$

$$W^{(2)} = -\nu \varphi_{,\xi\xi}^{(1)}; M_1^{(2)} = -M_1^{(1)} \quad (\xi = 0, \ell).$$

Для потенциальной функции обобщенного краевого эффекта получаем выражение

$$\varphi^{(1)} = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\eta) \sin \lambda_k \xi + P \xi (\xi - \ell) \sin m \xi. \quad (2.56)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_k = & \exp(-\alpha_k \eta) (A_{1k} \cos \beta_k \eta + A_{2k} \sin \beta_k \eta) + \\ & + \exp(-\beta_k \eta) (A_{3k} \cos \alpha_k \eta + A_{4k} \sin \alpha_k \eta) + (-1)^m \{ \exp[\alpha_k (\eta - 1)] [A_{1k} \cos \beta_k (1 - \eta) + A_{2k} \sin \beta_k (1 - \eta)] + \\ & + \exp[\beta_k (\eta - 1)] [A_{3k} \cos \alpha_k (1 - \eta) + A_{4k} \sin \alpha_k (1 - \eta)] \} - \psi_k; \\ \psi_k = & m^8 P \alpha_k a^2 [\alpha_k^2 m^8 + \lambda_k^4 (1 - \nu^2)]^{-1} \sin m \xi; \\ \lambda_k = & \pi k / \ell; R_k = 2 \sqrt{2 \lambda_k \sqrt{a}}; P = T_m R / 2 B m^2; \\ \alpha_k = & \sqrt{2 + 1} R_k; \beta_k = \sqrt{2 - 1} R_k; \end{aligned} \quad (2.57)$$

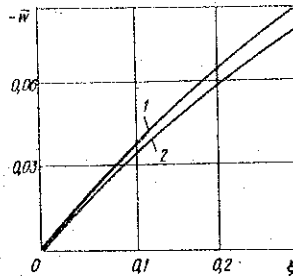


Рис. 7

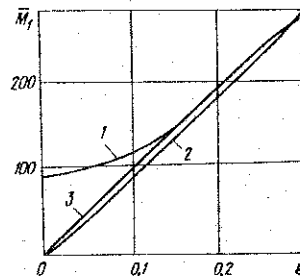


Рис. 8

постоянные A_{ik} определяются из граничных условий на прямолинейных кромках. Ряд, частная сумма которого представлена выражением (2.56), сходится как $\exp(-\sqrt{k}z)/k^5$, а ряды, получающиеся при вычислении перерезывающих сил (т. е. в самом неблагоприятном случае), — как $\exp(-\sqrt{k}z)/k^{3/2}$. Поэтому при вычислениях достаточно удерживать несколько первых членов.

Решение типа простого краевого эффекта у торца $\xi = 0$ имеет вид

$$\Phi^{(2)} = -4\rho m^4 a^6 \exp(-b\xi) (\sin b\xi - \nu m^2 b^{-2} \cos b\xi) \sin m z, \quad b = 1/\sqrt{2} \alpha. \quad (2.58)$$

Результаты расчета при $\nu = 0,3$, $\epsilon_1 = 0,25 \cdot 10^{-2}$, $m = 1$, $\ell = 3$, $P = 1$ представлены на рис. 7, 8, где принято $w = w/R$, $\bar{M} = M_1/2B\epsilon_1^2$. Кривые 2 соответствуют точному решению в одинарных тригонометрических рядах [13], 1 и 3 — приближенному решению, построенному без учета и с учетом краевого эффекта соответственно. Из приведенных результатов видно, что расчет открытой оболочки по теории обобщенного краевого эффекта дает хорошие результаты только вдали от торцов ($\sqrt{h/R} < \xi < \ell - \sqrt{h/R}$). Вблизи же криволинейных торцов необходим учет напряженного состояния типа простого краевого эффекта, который существенно уточняет решение для всей краевой зоны, за исключением зон $z < \sqrt{h/R}$ и $z > 1 - \sqrt{h/R}$. Ранее, однако, было отмечено, что эти зоны незначительны и наименее опасны с прочностной точки зрения.

Рассмотрим еще пример расчета открытой стрингерной цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением $q_z = P \sin m_1 z \sin \lambda_n \xi$. На каждой из кромок заданы граничные условия, отличные от шарнирного опирания

$$S = T_1 = w = M_1 = 0 \quad (\xi = 0, \ell);$$

$$u = v = w = w_z \quad (z = 0, 1).$$

Частное решение, определенное по методике, описанной в монографии [25], можно записать так:

$$\Phi^0 = Q_{mn} \sin m z \sin \lambda_n \xi, \quad (2.59)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{mn} = & P / [\lambda_n^8 + 2(\epsilon_3 + \epsilon_4 \epsilon_5^{-1}) \lambda_n^6 m^2 + \\ & + (\epsilon_2 + 4\epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_4) \lambda_n^4 m^4 + 2\epsilon_4 (\epsilon_2 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_3) \lambda_n^2 m^6 + \\ & + \epsilon_2 \epsilon_4 m^8 - 2\epsilon_4 (2\epsilon_3 \epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \epsilon_2 + \epsilon_3) \lambda_n^2 m^4 - \\ & - 2\epsilon_2 \epsilon_4 m^6 + \epsilon_1^{-2} \lambda_n^4 + 2\epsilon_4 (\epsilon_2 \epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \epsilon_2) \lambda_n^2 m^2 + \\ & + \epsilon_2 \epsilon_4 m^4 - 4\epsilon_3 \epsilon_4 (\epsilon_5^{-1} + \nu_{12} \epsilon_3 \epsilon_4) \lambda_n^4 m^2]. \end{aligned}$$

Расчлененные граничные условия на криволинейных кромках имеют вид (см. табл. 3)

$$\begin{aligned} S^{(2)} = \bar{S}; \quad M_1^{(2)} = 0; \quad T_1^{(1)} = -T_1^{(2)}, \\ w^{(1)} = -w^{(2)} \quad (\xi = 0, \ell). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Здесь \bar{S} — невязка в краевых условиях за счет частного решения (2.59). Построение общего решения необходимо начинать с расчета состояния типа простого краевого эффекта (2.53) при граничных условиях (2.55):

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} = & 2 Q_{mn} \lambda_n^3 b_1^{-3} \{ \exp(-b_1 \xi) \cos b_1 \xi + \\ & + (-1)^n \exp[b_1(\xi - \ell)] \cos b_1(\xi - \ell) \} \sin m z; \quad b_1 = (2\epsilon_1)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Для обобщенного краевого эффекта также получаем решение в замкнутом виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} = & \sum_{k=1}^N \varphi_k(z) \sin \lambda_k \xi + \\ & + 2 \{ 1 + [(-1)^n - 1] \xi / \ell \} (Q_{mn} b_1 \lambda_n^3 / \epsilon_4 m) \sin m z. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_k(z)$ определяются формулой (2.57), в которой нужно положить

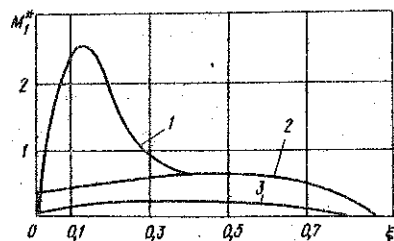


Рис. 9

$$R_K = \sqrt{\lambda_K} / 2 \sqrt{2} \sqrt[3]{\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4}.$$

Результаты численного расчета осевого изгибающего момента, полученные при $\nu = 0,3$, $m = 1$, $n = 3$, $l = 3$, $\eta = 0,3$, $E_1 F_1 / BR = 0,3$, $E_1 I_1 / BR^3 = 0,3 \cdot 10^{-6}$, приведены на рис. 9. Кривая 3 соответствует частному решению; 2 — решению с учетом обобщенного краевого эффекта, 1 — полному решению по изложенной выше методике. Из рис. 9 видно, что краевой эффект имеет определяющее значение при нахождении характеристик напряженного состояния вблизи торцов открытой оболочки.

$$\psi_K = 4 \epsilon_2 m^4 Q_{mn} b_1 \lambda_n X$$

$$X [1 - (-1)^{n+K}] / \{K X$$

$$X [\epsilon_2 \epsilon_4 / m^8 + \\ + \epsilon_1^{-2} \lambda_K^4] \};$$

Глава 3 КОЛЕБАНИЯ

§ 1. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Уравнения движения в перемещениях конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки можно получить из уравнений (1.6), если положить

$$q_x = -\rho R^{-2} u_{,tt}; \quad q_y = -\rho R^{-2} v_{,tt};$$

$$q_z = -\rho R^{-2} w_{,tt},$$

где $\rho = \rho_0 + \rho_1 / l_1 + \rho_2 / l_2$, ρ_0, ρ_1, ρ_2 — плотности материала обшивки, стрингеров и шпангоутов соответственно; t — время. Кроме того, должны быть заданы соответствующие граничные (см. табл. 1) и начальные условия. Разрешающее уравнение имеет вид

$$\left\{ \Delta^0 - \epsilon_1^{-2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ (2\nu_{10} + 1) \epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \right. \right. \\ + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial z^2} + \epsilon_4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} - \nu_0 [2\epsilon_0^2 \nu_{10} + \\ + \epsilon_{10} (1 + \frac{\nu_{11} \nu_{10}^{-1}}{2})] \frac{\partial^6}{\partial \xi^6} - [2(\epsilon_1^2 + \epsilon_6^2)(\nu_{10} \nu_0^{-1} + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \nu_{10}^{-1} - \\ - 2\epsilon_7) + (2\epsilon_1^2 \epsilon_3 - \nu_{12} \epsilon_6 \epsilon_7)] \frac{\partial^6}{\partial \xi^4 \partial z^2} - [(4\epsilon_1^2 \epsilon_3 - \\ - \nu_{12} \epsilon_6 \epsilon_7) \epsilon_4 \nu_0 \nu_{10} (\nu_0^{-1} + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \nu_{10}^{-1} - 2\epsilon_7) + \epsilon_1^2 \epsilon_2 - \\ - \epsilon_7^2] \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial z^4} - 2\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 \nu_{10} (\nu_0^{-1} + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \nu_{10}^{-1} - \\ - 2\epsilon_7) \frac{\partial^6}{\partial z^6} \left. \right\} - 2\epsilon_1^{-2} \epsilon_4 \nu_{10} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \left\{ -\epsilon_4 + (1 + \right. \\ + \frac{1}{2} \nu_0 \nu_{10}^{-1}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + \nu_0 \nu_{10}^{-1} \epsilon_4 / 2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

$$\begin{aligned}
& -2\epsilon_8 v_{10} v_0^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2(\epsilon_1^2 \epsilon_3 - \epsilon_6 \epsilon_7 v_0 v_{12}) \epsilon_4^2 v_{10} v_0^{-1} \chi \\
& \chi \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 2\epsilon_{10} \epsilon_4^2 v_{10} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} - 2v_0 v_{10} \epsilon_1^{-2} \epsilon_4 \chi \\
& \chi \frac{\partial^6}{\partial \tau^6} \} \tilde{\Phi} = 0, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

где $\tau = \sqrt{B_1/\rho R^2} t$.

Перемещения могут быть выражены через потенциальную функцию $\tilde{\Phi}$ следующим образом:

$$u = \left[\Delta_{13}^0 + 2\epsilon_4^{-1} v_{10} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (v_{21} v_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon_6 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}) \right] \tilde{\Phi};$$

$$\begin{aligned}
v = & \left\{ \Delta_{23}^0 + 2v_{10} [(v_0^{-1} - \epsilon_7) \frac{\partial}{\partial \eta} - (\epsilon_1^2 \epsilon_2^{-1} \epsilon_3 - v_{12} \epsilon_6 \epsilon_7) \chi \right. \\
& \left. \chi \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (\epsilon_7 - \epsilon_{10}) \frac{\partial^3}{\partial \eta^3}] \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right\} \tilde{\Phi};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = & \left\{ \Delta_{33}^0 - \epsilon_4^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} [1 + 2\epsilon_4 v_{10} (v_0^{-1} - 2\epsilon_7 + \epsilon_1^2 + \right. \\
& \left. + \epsilon_7^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (1 + 2v_{10} v_0^{-1}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}] - 2\epsilon_4^{-1} v_{10} v_0^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \right\} \tilde{\Phi}.
\end{aligned}$$

Поскольку рассматриваются собственные колебания, функция Φ представляется в виде

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0(\xi) \sin \omega t \begin{Bmatrix} \sin n\eta \\ \cos n\eta \end{Bmatrix}$$

Таким образом, определение частот и форм сводится к решению задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами восьмого порядка. Точное решение задачи может быть построено, однако при этом нужно найти корни характеристического уравнения восьмого порядка и трансцендентного частотного уравнения, что достигается только численно. Применять приближенные методы типа Бубнова-Галеркина нецелесообразно из-за сложности

подбора аппроксимирующих функций, удовлетворяющих большому числу граничных условий. Поэтому асимптотическое расщепление исходной системы уравнений движения и краевых условий представляет большой интерес.

В дополнение к параметрам α и β , характеризующим изменчивость функции $\tilde{\Phi}$ по пространственным координатам, введем показатель изменчивости по времени ϑ

$$\tilde{\Phi}_{,t} \sim \tilde{\omega} \tilde{\Phi} \sim \epsilon_1^{\vartheta} \tilde{\Phi}, \quad (3.2)$$

а также параметр φ , равный единице для стрингерных и вафельных и двум для шпангоутных оболочек. Потенциальную функцию $\tilde{\Phi}$ и частоту $\tilde{\omega}$ представим в виде разложений по малому параметру ϵ_1 :

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \Phi_1 \epsilon_1 + \dots; \quad \tilde{\omega} = \omega + \omega_1 \epsilon_1 + \dots$$

Производя асимптотический анализ, получаем предельные соотношения, которые в совокупности позволяют охватить все задачи, описываемые исходной системой уравнений и краевых условий. При классификации колебаний будем использовать терминологию работы [27]. Далее выписаны лишь уравнения первых приближений. Уточнение может быть проведено по известной методике [60]. Сначала рассмотрим упрощенные уравнения, имеющие аналоги в изотропном случае [27]. Для исследования нижней части спектра колебаний не очень длинных оболочек можно использовать уравнения квазипоперечных безмоментных колебаний ($\alpha = \beta$; $\beta < 1/2 \varphi$; $\vartheta = 0$):

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \omega^2 \nabla_2^4 \right) \Phi = 0. \quad (3.3)$$

В рассмотренном случае нормальное перемещение значительно больше тангенциальных перемещений u и v . Уравнение (3.3) имеет четвертый порядок по координате ξ , поэтому при его интегрировании могут быть учтены лишь по два граничных условия на каждом краю оболочки. Дополнительное динамическое состояние, компенсирующее невязки в граничных условиях, имеет такие же показатели изменчивости по η и τ , как и основное, но быстро изменяется по ξ ($\alpha = 1/2 \varphi$):

$$\left[(\epsilon_1^2 + v_{12}^2 \epsilon_6^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - 2v_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 - \omega^2 \right] \Phi = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) описывает динамический краевой эффект.

При расчете квазипоперечных колебаний с преимущественной изменчивостью по направляющей и относительно малой изменчивостью по образующей ($\beta < 1/2 \varphi$; $\alpha = 2\beta - 1/2 \varphi$; $\psi = 2\beta - 1/\varphi$) следует исходить из уравнения динамической полубезмоментной теории:

$$\begin{aligned} & \left[(\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 + \nu_{12}^2 \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right)^2 - \right. \\ & - 2 \nu_{12} \epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right) + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - \\ & \left. - \epsilon_4 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right) \right] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Слагаемыми в фигурных скобках при $\beta > 0$ можно пренебречь. Уравнение (3.5) получается на основе тех же гипотез, что и в статическом случае: $\epsilon_{22} = \epsilon_{12} = 0$; основными с энергетической точки зрения являются деформации ϵ_{11} , ϵ_{22} .

Дополнительным состоянием, позволяющим компенсировать невязки в граничных условиях, является квазистатический краевой эффект. Он совпадает с уравнением (3.4), если в последнем пренебречь ω^2 .

Теория пологих оболочек, которой соответствуют уравнения квазипоперечных колебаний с промежуточным показателем изменчивости ($\alpha = \beta = 1/2 \varphi$; $\psi = 0$)

$$\left[\nabla_2^4 (\epsilon_1^2 \nabla_1^4 - \omega^2) + \left(\nabla_3^4 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] \Phi = 0, \quad (3.6)$$

имеет широкую область применимости. Уравнение (3.6) — восьмого порядка по координате ξ , поэтому при его интегрировании могут быть учтены все граничные условия. В отличие от колебаний двух предыдущих типов, на которые эксцентриситет подкрепления не оказывал (безмоментные колебания) или оказывал незначительное влияние (полубезмоментные колебания), в данном случае частоты и формы колебаний существенно зависят от величины и знака эксцентриситетов ребер. Уравнение (3.6) может быть получено на основе известных физических и геометрических гипотез, приведенных в монографиях [25, 27].

Изгибные колебания конструктивно-ортотропной пластины описываются уравнением

$$\left[\nabla_2^4 (\epsilon_1^2 \nabla_1^4 - \omega^2) + (\nabla_3^4)^2 \right] \Phi = 0. \quad (3.7)$$

При $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$ оно распадается на уравнения плоского напряженного состояния и изгибных колебаний пластины. Колебания рассматриваемого типа — квазитангенциальные с большим показателем изменчивости ($\alpha = \beta$; $\beta > 1/2 \varphi$; $\psi = 2\beta - 1/\varphi$). Для квазитангенциальных колебаний, когда $u \sim v \gg w$; $\alpha = \beta < 1/\varphi$; $\psi = \beta$, предельное уравнение записывается так:

$$\begin{aligned} & \left\{ \nu_{22} \epsilon_4^{-2} \nabla_2^4 + \epsilon_4^{-1} \left[(1 + \nu_{22}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu_{22} \epsilon_4) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \omega^2 + \omega^4 \right\} \Phi = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\nu_{22} = 0,5 \nu_0 / \nu_{10}$. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$T_{1\xi} + S_{,2} = u_{,TT}; \quad S_{,1\xi} + T_{2\eta} = v_{,TT}; \quad (3.9)$$

$$T_2 + w_{,TT} = 0. \quad (3.10)$$

Здесь $T_1 = B_{11} \epsilon_{11} + B_{12} \epsilon_{22}$; $\epsilon_{22} = \nu_{12}$; ϵ_{11} , ϵ_{22} заданы выражениями (1.4); $S = B_{33} \epsilon_{12}$; $T_2 = B_{22} \epsilon_{22} + B_{12} \epsilon_{11}$.

Уравнения (3.9) описывают колебания конструктивно-ортотропной пластины в своей плоскости. Радиальные перемещения определяются из соотношений (3.10). В отличие от всех рассмотренных выше вариантов уравнения (3.9), (3.10) не имеют статического аналога в теории оболочек. Дополнительное состояние — краевой эффект квазитангенциальных колебаний ($\alpha = \beta + 1/2 \varphi$; $\beta < 1/\varphi$; $\psi = \beta$):

$$\left[-\epsilon_2 \omega^2 + (\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_6^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right] \Phi = 0. \quad (3.11)$$

Таким образом, для каждой пары показателей α , β или для каждой формы колебаний получаем два приближенных соотношения: одно из уравнений (3.3) — (3.7) и уравнение (3.8). Первое соответствует преимущественно радиальным низкочастотным колебаниям, второе — в основном тангенциальным высокочастотным колебаниям.

В случаях, описываемых уравнениями (3.3) — (3.5), (3.8), (3.11), задача существенно упростилась: порядок исходного уравнения по координате ξ понизился до четвертого. Уравнения же (3.6), (3.7) остались достаточно сложными, и для их эффективно-аналитического решения нужны дальнейшие расщепления, аналогичные проведенным в гл. 2 для статических задач. Так, уравнение пологой стрингерной оболочки распадается на два уравнения,

отвечающих состояниям с относительно малой ($\alpha = 0$; $\beta = 1/2$; $\vartheta = 1$) и большой ($\alpha = \beta = 1/2$; $\vartheta = 1$) изменяемостью по координате ξ .

Первому уравнению

$$\left[\epsilon_4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} (\epsilon_1^2 \nabla_1^4 - \omega^2) + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(\{1\} + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi = 0 \quad (3.12)$$

отвечают следующие уравнения движения в усилиях, а также физические и геометрические соотношения:

$$T_{1,\xi} + S_{,\eta} = 0, \quad S_{,\xi} + T_{2,\eta} = 0; \quad (3.13)$$

$$M_{1,\xi\xi} + 2H_{,\xi\eta} + M_{2,\eta\eta} + T_2 + w_{,\tau\tau} = 0; \quad (3.14)$$

$$T_1 = B_{11}\epsilon_{11} + A_{11}x_{11}, \quad 0 = B_{21}\epsilon_{11} + B_{22}\epsilon_{22}, \quad S = B_{22}\epsilon_{12},$$

$$M_1 = D_{11}x_{11} + A_{11}\epsilon_{11}, \quad M_2 = D_{21}x_{11} + D_{22}x_{22},$$

$$H = D_{33}x_{12},$$

$$\epsilon_{11} = u_{,\xi}, \quad 0 = v_{,\eta} + w, \quad 0 = u_{,\eta} + v_{,\xi},$$

$$x_{11} = -w_{,\xi\xi}, \quad x_{22} = -w_{,\eta\eta}, \quad x_{12} = -w_{,\xi\eta}. \quad (3.15)$$

Соотношения (3.12) — (3.15) можно получить из исходных, приняв гипотезы нерастяжимости в кольцевом направлении и отсутствия сдвига ($\epsilon_{22} = \epsilon_{12} = 0$).

Второе предельное уравнение описывает дополнительное состояние, позволяющее удовлетворить всем заданным граничным условиям:

$$\left[\epsilon_1^2 \nabla_2^4 + \{1\} + v_{12}\epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right]^2 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (2 +$$

$$+ \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2v_{12}\epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}) \Phi = 0;$$

$$T_2 + M_{1,\xi\xi} = 0; \quad T_1 = B_{11}\epsilon_{11} + B_{12}\epsilon_{22} + A_{11}x_{11};$$

$$T_2 = B_{21}\epsilon_{11} + B_{22}\epsilon_{22}; \quad S = B_{33}\epsilon_{12};$$

$$M_1 = D_{11}x_{11} + D_{12}x_{22} + k_{11}\epsilon_{11};$$

$$\epsilon_{11} = u_{,\xi}; \quad \epsilon_2 = v_{,\eta} + w; \quad \epsilon_{12} = u_{,\eta} + v_{,\xi};$$

$$x_{11} = -w_{,\xi\xi}; \quad x_{22} = -w_{,\eta\eta}. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) приведено вместе с полной системой соответствующих ему физико-геометрических соотношений (поскольку уравнения (3.13) являются общими для всех рассматриваемых ниже предельных систем, далее приводить их не будем). Изгибные колебания стрингерной пластины можно исследовать при помощи уравнений (3.12) и (3.16), отбросив в последних слагаемые в фигурных скобках.

В случае преимущественного кольцевого подкрепления основное состояние ($\alpha = \beta = 1/4$; $\vartheta = 0$) задается соотношениями

$$\left\{ \nabla_2^4 (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} - \omega^2) + \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - v_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right] \right\} \Phi = 0; \quad (3.17)$$

$$M_{2,\eta\eta} + T_2 + w_{,\tau\tau} = 0, \quad T_1 = B_{11}\epsilon_{11} + B_{12}\epsilon_{22},$$

$$T_2 = B_{21}\epsilon_{11} + B_{22}\epsilon_{22}, \quad S = B_{33}\epsilon_{12}, \quad M_2 = D_{22}x_{22} +$$

$$+ k_{22}\epsilon_{22}, \quad \epsilon_{11} = u_{,\xi}, \quad \epsilon_{22} = v_{,\eta} + w, \quad \epsilon_{12} = u_{,\eta} + v_{,\xi}, \quad x_{22} = -w_{,\eta\eta}.$$

Для дополнительного состояния ($\epsilon_3 \sim \epsilon_1$) получаем

$$\left[\epsilon_1^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) + (1 + \epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})^2 - \omega^2 \right] \Phi = 0; \quad (3.18)$$

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + T_2 + w_{,\tau\tau} = 0, \quad 0 = B_{11}\epsilon_{11} + B_{12}\epsilon_{22},$$

$$T_2 = B_{21}\epsilon_{11} + B_{22}\epsilon_{22}, \quad S = B_{33}\epsilon_{12},$$

$$M_1 = D_{11}x_{11}, \quad M_2 = D_{22}x_{22} + k_{22}\epsilon_{22},$$

$$\epsilon_{11} = u_{,\xi}, \quad \epsilon_{22} = w,$$

$$\epsilon_{12} = u_{,\eta} + v_{,\xi}, \quad \chi_{11} = -w_{,\xi\xi}, \quad \chi_{22} = -w_{,\eta\eta}.$$

Для анализа вафельной оболочки по ϵ_5 введем параметры $\gamma, \delta, \vartheta_1$ при помощи соотношений

$$\varphi_{,\xi} \sim \epsilon_5^{-\gamma} \varphi; \quad \varphi_{,\eta} \sim \epsilon_5^{-\delta}; \quad \varphi_{,\tau} \sim \epsilon_5^{-\vartheta_1} \varphi. \quad (3.19)$$

В результате асимптотического расщепления по ϵ_5 получим три предельных уравнения: два из них — квазистатические, совпадающие с уравнениями (2.23) и (2.24) соответственно; динамическое же уравнение ($\gamma = \delta = \vartheta_1/2$; $\gamma > 0$) таково:

$$\left[2\epsilon_4\epsilon_5^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\epsilon_1^2 \nabla_1^4 - \omega^2) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})^2 \right] \varphi = 0. \quad (3.20)$$

Полная система физико-геометрических соотношений для уравнения (3.20) имеет вид

$$M_{\eta\xi\xi} + 2H_{\xi\xi\eta} + M_{2,\eta\eta} + T_2 + w_{,\tau\tau} = 0;$$

$$0 = B_{11}\epsilon_{11} + B_{12}\epsilon_{22}; \quad 0 = B_{22}\epsilon_{22} + k_{22}\chi_{22}; \quad S = B_{33}\epsilon_{12};$$

$$M_1 = D_{11}\chi_{11} + k_{11}\epsilon_{11}; \quad M_2 = D_{22}\chi_{22} + k_{22}\epsilon_{22}; \quad H = D_{33}\chi_{12};$$

$$\epsilon_{11} = u_{,\xi}; \quad \epsilon_{22} = v_{,\eta} + w; \quad \epsilon_{12} = u_{,\eta} + v_{,\xi};$$

$$\chi_{11} = -w_{,\xi\xi}; \quad \chi_{22} = -w_{,\eta\eta}; \quad \chi_{12} = -w_{,\xi\eta}. \quad (3.21)$$

Таким образом, в результате дополнительного анализа получены достаточно простые — не выше четвертого порядка по ξ и первого относительно ω^2 — уравнения для определения собственных форм и частот колебаний конструктивно-ортотропных оболочек.

Для формулировки корректных краевых задач необходимо провести асимптотический анализ однородных граничных условий. Расчлененные краевые условия для уравнений динамической полубезмоментной теории и краевого эффекта, стрингерных [уравнения (3.12), (3.16)], шпангоутных [уравнения (3.17), (3.18)] и вафельных [уравнения (2.23), (2.24), (3.20)] оболочек приведены в табл. 8—11 соответственно. Величины u_1, v_1 ,

Таблица 8

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$w^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(1)} + w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_2	$w^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \quad \epsilon_{22}^{(1)} + \epsilon_{22}^{(2)} = 0$
A_3	$u^{(1)} = 0; \quad w^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \quad \epsilon_{22}^{(1)} + \epsilon_{22}^{(2)} = 0$
A_4	$v^{(1)} = 0; \quad w^{(1)} = 0; \quad (T_1^{(1)} = 0, \quad M_1^{(1)} = 0)$
A_5	$w^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad S^{(1)} + S^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_6	$w^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \quad S^{(2)} = 0$
A_7	$u^{(1)} = 0; \quad w^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \quad S^{(2)} = 0$
A_8	$w^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} = 0; \quad S^{(1)} + S^{(2)} = 0; \quad M_1^{(2)} = 0$
A_9	$v^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_{10}	$v^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{11}	$u^{(1)} = 0; \quad v^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{12}	$v^{(1)} = 0; \quad T_1^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_{13}	$u^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_{14}	$T_1^{(1)} = 0; \quad w_{,\xi}^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad w_{,\xi\xi}^{(2)} = 0$
A_{15}	$u^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad S^{(2)} = 0$
A_{16}	$T_1^{(1)} = 0; \quad M_1^{(1)} = 0; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; \quad S^{(2)} = 0$

Таблица 9

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; u_1^{(1)} + u^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(1)} + w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_2	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \epsilon_{221}^{(1)} + \epsilon_{22}^{(2)} = 0$
A_3	$u^{(1)} = 0; w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \epsilon_{221}^{(1)} + \epsilon_{22}^{(2)} = 0$
A_4	$v^{(1)} = 0; w^{(1)} = 0; (T_1^{(1)} = M_1^{(1)} = 0)$
A_5	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_6	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; S^{(2)} = 0$
A_7	$u^{(1)} = 0; w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; S^{(2)} = 0$
A_8	$w^{(1)} = 0; T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$
A_9	$v^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_{10}	$v^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}^{(2)} = 0$
A_{11}	$u^{(1)} = 0; v^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{12}	$v^{(1)} = 0; T_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; T_1^{(2)} = 0$
A_{13}	$u^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_{14}	$T_1^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_{15}	$u^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; S^{(2)} = 0$
A_{16}	$T_1^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} = 0; S^{(2)} = 0$

Таблица 10

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, l$
A_1	$u^{(1)} = 0; v^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$ $v^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_2	$T_1^{(1)} = 0; v^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; v^{(1)} + v^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_3	$u^{(1)} = 0; v^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$ $v^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$
A_4	$T_1^{(1)} = 0; v^{(1)} = 0$ $w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$
A_5	$u^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$ $u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_6	$T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0$
A_7	$u^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$ $u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$
A_8	$T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w^{(1)} + w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0$

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, \ell$
A_9	$u^{(1)} = 0; \nu^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} + w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $\nu^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{10}	$T_1^{(1)} = 0; \nu^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} + w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{11}	$u^{(1)} = 0; \nu^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $\nu^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{12}	$T_1^{(1)} = 0; \nu^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{13}	$u^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} + w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{14}	$T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} + w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; w_{\xi}^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{15}	$u^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$
A_{16}	$T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} = 0; M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$ $T_1^{(1)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0; M_1^{(2)} = 0; \tilde{Q}_1^{(2)} = 0$

Вариант	Граничные условия при $\xi = 0, \ell$
A_1	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; \nu^{(2)} + \nu^{(3)} = 0$
A_2	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; T_{11}^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(3)} = 0$
A_3	$w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; \nu^{(2)} + \nu^{(3)} = 0$
A_4	$w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0$
A_5	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_6	$w^{(1)} = 0; w_{\xi}^{(3)} = 0; T_{11}^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_7	$w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_8	$w^{(1)} = 0; M_1^{(1)} = 0; T_1^{(2)} + T_1^{(3)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_9	$w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(3)} = 0$
A_{10}	$w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \nu^{(3)} = 0$
A_{11}	$M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; u^{(2)} + u^{(3)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(3)} = 0$
A_{12}	$M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} = 0; \nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \nu^{(3)} = 0$
A_{13}	$w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; u^{(1)} + u^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(2)} = 0$
A_{14}	$w_{\xi}^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_{15}	$M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; u^{(2)} + u^{(3)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$
A_{16}	$M_1^{(1)} = 0; \tilde{Q}_1^{(1)} = 0; T_1^{(1)} + T_1^{(2)} = 0; S^{(1)} + S^{(3)} = 0$

$W_{E1}, S_1, T_{11}, \epsilon_{221}$ вычислены с учетом членов первого приближения, A_j обозначают однородные граничные условия из табл. 1, т. е. все величины с индексом m равны нулю. В случае шпангоутных оболочек для каждого варианта граничных условий возможны два непротиворечивых расчленения граничных условий. Это связано с тем, что дополнительное уравнение (3.18) динамическое.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Полученные в предыдущем параграфе упрощенные динамические краевые задачи позволяют сравнительно просто исследовать влияние различных факторов (граничных условий, длины оболочки, эксцентриситета ребер) на частоты собственных колебаний подкрепленных оболочек. Поскольку для колебаний с малым показателем изменчивости влияние первых двух факторов может быть оценено на основе результатов для изотропных оболочек [27, 59, 68], исследуем колебания с большим показателем изменчивости. Рассмотрим колебания стрингерных оболочек, которые описываются уравнениями (3.12), (3.16). Из расчленения граничных условий видно (см. табл. 9), что основное влияние на частоты колебаний оказывают ограничения, накладываемые на продольное перемещение и угол поворота. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (3.12),

$$[\epsilon_1^2 \epsilon_4 n^8 + (1 - \epsilon_6 n^2)^2] \lambda^4 - 2 \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 n^6 \lambda^2 + \epsilon_4 n^4 (\epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 - \omega^2) = 0, \quad (3.22)$$

имеет два мнимых ($\pm i \lambda_1$) и два действительных ($\pm \lambda_2$) корни. При граничных условиях A_4, A_8, A_{13}, A_{16} (шарнирное опирание) получаем следующее частотное уравнение:

$$\sin \lambda_1 l = 0, \quad (3.23)$$

а при условиях $A_1 - A_3, A_5 - A_7, A_9 - A_{11}, A_{14}, A_{15}$ (защемление)

$$2 \lambda_1 \lambda_2 (1 - \cos \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l) + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l = 0; \quad (3.24)$$

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2 + 2 \lambda_0, \quad \lambda_0 = \epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 n^6 / (1 + \epsilon_1^2 \epsilon_4 n^4) \quad (3.25)$$

либо (при $\lambda_2 l > 0$) $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0 \operatorname{tg} \lambda_1 l$.

68

На рис. 10 показаны зависимости частот оболочек ω_0 различной длины с параметрами

$$\epsilon_1^2 = 2,2 \cdot 10^{-6}; \quad \epsilon_2 = 10^{-4};$$

$$\epsilon_3 = 10^{-2}; \quad \epsilon_4 = 0,6;$$

$$\epsilon_5 = 0,3;$$

$$\epsilon_6 = 0,9 \cdot 10^{-2};$$

$$\epsilon_7 = 0; \quad \nu_{12} = 0,2 \quad (3.26)$$

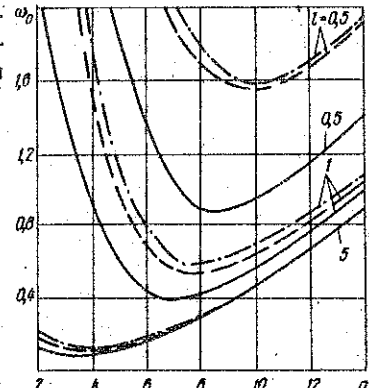


Рис. 10

от числа полуволн в окружном направлении n при шарнирном опирании (сплошные кривые) и защемлении (штриховые кривые). С уменьшением длины влияние граничных условий становится все более существенным.

Понижение порядка уравнения и уменьшение числа граничных условий дают возможность эффективно использовать метод Бубнова-Галеркина. Выбирая в качестве аппроксимирующей функцию

$$\Phi(\xi) = A \sin^2 \lambda \xi \quad (\lambda = \pi m / l), \quad (3.27)$$

получим следующую формулу для частот защемленной оболочки:

$$\omega = [\epsilon_1^2 (16 \lambda^4 + 8 \epsilon_3 \lambda^2 n^2 + 3 \epsilon_2 n^4) + 16 \lambda^4 (1 - \epsilon_6 n^2)^2 \epsilon_4^{-1} n^{-4}] / 3. \quad (3.28)$$

Частотам оболочки с параметрами (3.26), вычисленным по формуле (3.28), на рис. 10 соответствуют штрихпунктирные кривые.

Рассмотрим шпангоутные оболочки. Расчленения граничных условий, приведенные в табл. 10, показывают, что основное влияние на частоты оказывают тангенциальные граничные условия — ограничения, накладываемые на продольные и кольцевое перемещения. Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (3.17),

$$(\epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 - \omega^2) (\lambda^4 - 2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \lambda^2 n^2 + \epsilon_4 n^4) + (1 - \epsilon_7 n^2)^2 \lambda^4 - 2 \epsilon_7 \nu_{21} (1 - \epsilon_7 n^2) \lambda^2 n^4 + \epsilon_7^2 \nu_{21}^2 n^8 = 0, \quad (3.29)$$

имеет два мнимых ($\pm i\lambda_1$) и два действительных ($\pm \lambda_2$) корни при выполнении условия $\epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 + (1 - \epsilon_7 n^2)^2 - \omega^2 > 0$. Частотное уравнение, соответствующее условиям A_2, A_4, A_{10}, A_{12} (шарнирное опирание), совпадает с уравнением (3.23), а для условий A_1, A_3, A_9, A_{11} (закрепление) оно имеет вид

$$2\lambda_1 \lambda_2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \cos \lambda_1 l \operatorname{ch} \lambda_2 l + (\lambda_2^2 \alpha_1^2 \beta_2^2 - \lambda_1^2 \alpha_2^2 \beta_1^2) \sin \lambda_1 l \operatorname{sh} \lambda_2 l = 0.$$

Здесь

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2 - [\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} n^2 + \epsilon_7 \nu_{21} (1 - \epsilon_7 n^2)] / [\epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 -$$

$$- \omega^2 + (1 - \epsilon_7 n^2)^2]; \quad \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_4 \lambda_1^2;$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \lambda_1^2; \quad \alpha_3 = -n^3 + (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \epsilon_7 n^5;$$

$$\alpha_4 = (2\epsilon_5^{-1} + \nu_{12})(1 - \epsilon_7 n^2)n; \quad \beta_1 = \lambda_1(\beta_3 - \nu_{12} \lambda_1^2);$$

$$\beta_2 = \lambda_2(\beta_3 + \nu_{12} \lambda_1^2); \quad \beta_3 = n^2 - (2\nu_{21} \epsilon_5^{-1} + \nu_{11})n^4; \quad \beta_4 = \nu_{12}.$$

Результаты численных расчетов для оболочек различной длины с параметрами

$$\begin{aligned} \epsilon_1^2 &= 0,2 \cdot 10^{-4}; \quad \epsilon_2 = 10^4; \quad \epsilon_3 = 7; \quad \epsilon_4 = 2,8; \\ \epsilon_5 &= 0,7; \quad \epsilon_6 = 0; \quad \epsilon_7 = 0,16 \cdot 10^{-1}; \quad \nu_{12} = 0,125 \end{aligned} \quad (3.30)$$

приведены на рис. 11. Сплошные кривые соответствуют частотам при шарнирном опирании, штриховые — при закреплении. Штрихпунктирным кривым соответствуют частоты, определенные по методу Бубнова—Галеркина [аппроксимирующая функция (3.27)]:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 + [16(1 - \epsilon_7 n^2)^2 \lambda^4 - 8\epsilon_7 \nu_{12} (1 - \\ &- \epsilon_7 n^2) \lambda^2 n^4 + 3\epsilon_7^2 \nu_{21} n^8] [3(16\lambda^4 - 8\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \lambda^2 n^2 + \\ &+ 3\epsilon_4 n^4)]^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вафельные оболочки. Из расчленений граничных условий (см. табл. 11) видно, что на частоты колебаний оказывают преимущественное влияние нетангенциальные краевые условия—ограничения, накладываемые на радиальное перемещение и угол поворота. Характеристическое уравнение, соответ-

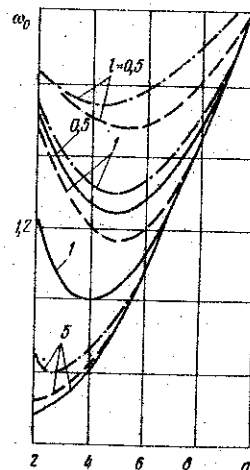


Рис. 11

ствующее уравнению (3.20).

$$2\epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} n^2 \lambda^4 - 4[\epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} n^4 + (1 - \epsilon_7 n^2)^2] \lambda^2 + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} n^2 (\epsilon_1^2 \epsilon_4 n^4 - \omega^2) = 0 \quad (3.31)$$

имеет два мнимых ($\pm i\lambda_1$) и два действительных ($\pm \lambda_2$) корни. Частотное уравнение при граничных условиях A_1, A_2, A_5, A_6 (закрепление) можно получить из уравнения (3.24), если положить

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 &= \lambda_1^2 = 0,5[4\epsilon_1^2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} n^4 + (1 - \\ &- \epsilon_7 n^2)^2] \epsilon_1^{-2} \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 n^{-2}. \end{aligned}$$

На рис. 12 приведены результаты численного расчета частот оболочек различной длины с параметрами

$$\begin{aligned} \epsilon_1^2 &= 2 \cdot 10^{-4}; \quad \epsilon_2 = 1; \quad \epsilon_3 = 0,25; \\ \epsilon_4 &= 0,5; \quad \epsilon_5 = 0,25; \quad \epsilon_6 = \epsilon_7 = \\ &= 7 \cdot 10^{-3}; \quad \nu_{12} = 0,2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

при шарнирном опирании (сплошные кривые) и закреплении (штриховые кривые). Влияние граничных условий на частоты тем существеннее, чем короче оболочка. Частотам колебаний, определенным по методу Бубнова—Галеркина [аппроксимирующая функция (3.27)],

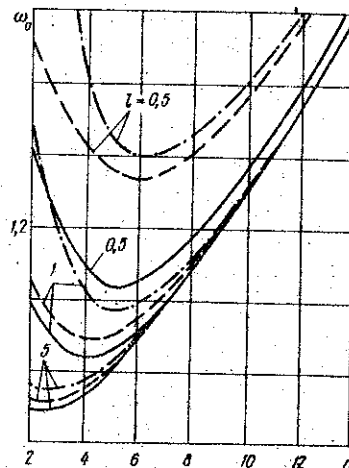


Рис. 12

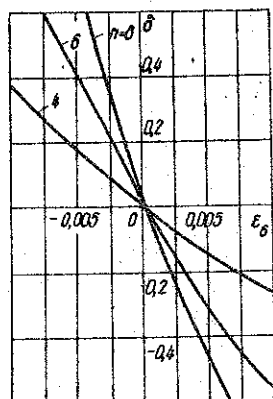


Рис. 13

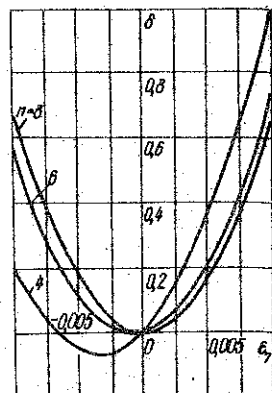


Рис. 14

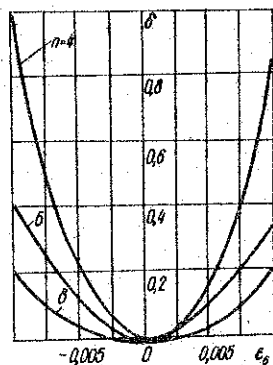


Рис. 15

$$\omega^2 = [\epsilon_1^2 16 \lambda^4 + 8 \epsilon_3 \lambda^2 n^2 + 3 \epsilon_2 n^4] + 0,5 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} (1 - \epsilon_6 n^2)^2 / 3$$

соответствуют штрихпунктирные кривые.

Варьируя величины и знаки эксцентриситетов ребер в выражениях (3.22), (3.29), (3.31), можно достаточно просто исследовать вопрос о влиянии эксцентриситета ребер на собственные частоты подкрепленных оболочек. Эксцентриситет ребер варьировался в пределах от $-0,01$ до $0,01$ при $l = 4$, $m = 1$.

На рис. 13 представлена зависимость величины $\delta = (\omega^2 - \bar{\omega}^2)/\omega^2$ (ω — частота при данном расположении ребер; $\bar{\omega}$ — частота при симметричном расположении ребер) от эксцентриситета ϵ_6 для стрингерной оболочки с параметрами (3.26). Частоты существенно зависят от величины и знака эксцентриситета. При внешнем расположении ребер частоты значительно выше, чем при внутреннем. На рис. 14 приведена аналогичная зависимость для шпангоутной оболочки с параметрами (3.30). Частоты в этом случае не зависят от знака и сравнительно слабо зависят от величины эксцентриситета. При несимметричном расположении ребер частоты выше, чем при симметричном. Подобная ситуация

наблюдается и для вафельных оболочек (рис. 15). Расчет вафельной оболочки производился для оболочки с параметрами (3.32).

§3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ УПРОЩЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Оценим погрешности, допускаемые при определении частот из полученных в § 1 приближенных краевых задач. Прежде всего рассмотрим случай, когда погрешность связана только с использованием приближенных уравнений, а граничные условия A_1 удовлетворяются точно. Тогда функция Φ может быть представлена в виде

$$\Phi = C \sin \lambda \xi \sin n \eta \exp(i \omega \tau).$$

Из точного разрешающего уравнения находим

$$\omega^2 = \epsilon_1^2 \delta_1^4 + \delta_2^{-4} (\delta_3^4 - \lambda^2)^2, \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1^4 &= \lambda^4 + 2 \epsilon_3 \lambda^2 n^2 + \epsilon_2 n^4; \\ \delta_2^4 &= \lambda^4 + 2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \lambda^2 n^2 + \epsilon_4 n^4; \\ \delta_3^4 &= \nu_{12} \epsilon_6 \lambda^4 - \epsilon_6 \lambda^2 n^2 + \nu_{21} \epsilon_7 n^4. \end{aligned}$$

Из уравнения (3.33) получаем приближенные выражения частот для стрингерных, шпангоутных и вафельных оболочек соответственно:

$$\omega_1^2 = \epsilon_1^2 \delta_1^4 + \lambda^4 (1 - \epsilon_6 n^2)^2 \epsilon_4^{-1} n^{-4}; \quad (3.34)$$

$$\omega_2^2 = \epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 + [\lambda^2 - \epsilon_7 n^2 (\lambda^2 - \nu_{21} n^2)^2] \delta_2^{-4}; \quad (3.35)$$

$$\omega_3^2 = \epsilon_1^2 \delta_1^4 + 0,5 \lambda^2 (1 - \epsilon_6 n^2)^2 \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 n^{-2}. \quad (3.36)$$

Анализ формул (3.33) — (3.36) показывает, что приближенные значения ω_i^2 являются первыми членами разложения точного значения ω^2 в ряд по соответствующему малому параметру (ϵ_1 в случае стрингерных и шпангоутных, ϵ_5 — в случае вафельных оболочек). Для относительных погрешностей справедливой оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2} \right| &\sim \frac{2 \lambda^8}{\epsilon_4 \epsilon_5 n^6 \omega^2}; \quad \left| \frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2} \right| \sim \frac{2 \epsilon_3 \lambda^2 + \epsilon_2 n^2}{\omega^2}; \\ \left| \frac{\omega^2 - \omega_3^2}{\omega^2} \right| &\sim \frac{\lambda^4 + \epsilon_4 n^4}{2 \epsilon_4^2 n^4 \omega^2} \epsilon_5. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к общему случаю, когда расщепляются и граничные условия. Общая схема оценки погрешности такова. Полное разрешающее уравнение и граничные условия запишем в виде

$$(\tilde{L} - \omega^2 \tilde{M}) \tilde{\Phi} = 0, \quad R_j \tilde{\Phi} = 0 \quad (\xi = 0, \ell; j = 1-4). \quad (3.37)$$

Здесь $\tilde{L}, \tilde{M}, R_j$ — заданные дифференциальные операторы. Решение краевой задачи (3.37) может быть представлено так:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{j=1}^8 C_j \exp[\lambda_j \xi + i(nz + \omega \tau)],$$

где λ_j — корни характеристического многочлена $f(\lambda, \omega)$. Подставляя выражение для функции Φ в граничные условия, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных C_j . Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель $\Delta_1(\lambda(\omega))$ равен нулю. Из этого условия находим частоты ω . Реализуя подобную процедуру для приближенной краевой задачи, мы допускаем погрешность, связанную с определением корней λ_j из приближенного характеристического уравнения, а частоты $\tilde{\omega}$ — из приближенного частотного уравнения. Для каждого типа оболочек операторы \tilde{L} и \tilde{M} могут быть представлены следующим образом:

$$\tilde{L} = L^{(0)} + \epsilon L^{(1)} + \epsilon^2 L^{(2)} + \dots; \quad \tilde{M} = M^{(0)} + \epsilon M^{(1)} + \epsilon^2 M^{(2)} + \dots,$$

где ϵ — характерный малый параметр. В соответствии с этим представлением запишем характеристическое уравнение

$$f(\lambda(\omega)) = f^{(0)}(\lambda, \omega) + \epsilon f^{(1)}(\lambda, \omega) + \epsilon^2 f^{(2)}(\lambda, \omega) + \dots = 0. \quad (3.38)$$

При $f_{,\lambda}^{(0)} \neq 0$ решение уравнения (3.38) ищем в виде разложения

$$\lambda(\omega) = \lambda_0(\omega) + \epsilon \lambda_1(\omega) + \epsilon^2 \lambda_2(\omega) + \dots \quad (3.39)$$

Определитель $\Delta_1(\lambda(\omega))$ разложим по минорам четвертого порядка и выделим главные члены:

$$\Delta_1(\lambda(\omega)) = \Delta_1^0 + \epsilon^p \Delta_1^{(1)} + \epsilon^{2p} \Delta_1^{(2)} + \dots \quad (3.40)$$

Параметр p определяется порядком отброшенных членов и может быть найден следующим образом. Запишем граничные условия в каноническом виде и обозначим через $\epsilon^{k_i}, \epsilon^{l_i}$ ($i = 1-4$) порядки величин $R_j^0 \Phi_1$ и $R_j^0 \Phi_2$ соответ-

ственно (индекс 1 обозначает основное состояние, 2 — дополнительное состояние типа пограничного слоя). Тогда

$$p = \min \{ |k_1 + k_2 + l_3 + l_4 - a_j| \} \quad (j = 1-5);$$

$$a_1 = k_1 + k_3 + l_2 + l_4; \quad a_2 = k_1 + k_4 + l_2 + l_3;$$

$$a_3 = k_2 + k_3 + l_1 + l_4; \quad a_4 = k_2 + k_4 + l_1 + l_3;$$

$$a_5 = k_3 + k_4 + l_1 + l_2.$$

Учитывая разложения (3.39) и (3.40), приходим к следующему частотному уравнению:

$$\Delta_1(\lambda(\omega)) = \Delta_1^0(\lambda_0(\omega)) + \epsilon^s \Delta_1^{(1)}(\omega) + \epsilon^{2s} \Delta_1^{(2)} + \dots = 0. \quad (3.41)$$

Здесь $s = \min(1, p)$. Если $\Delta_{1,\lambda}^0 \neq 0$, то решение уравнения (3.41) может быть представлено в виде $\omega = \omega_0 + \epsilon^s \omega_1 + \dots$. Следовательно, для погрешности δ , допускаемой при определении частоты, справедлива асимптотическая оценка $\delta \sim \epsilon^s$. Исследования, проведенные на основе описанной методики, показали, что во всех случаях, когда в качестве малого параметра выбирался параметр ϵ_1 , погрешность $\delta \sim \epsilon_1^{1/2}$ (или даже $\delta \sim \epsilon_1$), а если $\epsilon \equiv \epsilon_5$, то $\delta \sim \epsilon_5^{1/2}$. Дополнительное исследование в последнем случае продемонстрировало, что эта оценка сильно завышена, и для реальных вафельных оболочек погрешность $\delta = 8-10\%$.

§ 4. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Нелинейные уравнения движения имеют вид [73]

$$T_{1,\xi} + S_{1,\eta} + 0,5 H_{,\eta} R^{-1} - 0,5 \psi(T_1 + T_2) - \rho R u_{,\tau\tau} = 0;$$

$$S_{1,\xi} + T_{2,\eta} - Q_2 - 0,5 H_{,\xi} R^{-1} + \psi_1 S + \psi_2 T_2 +$$

$$+ 0,5 [\psi(T_1 + T_2)],_{\xi} - \rho R v_{,\tau\tau} = 0;$$

$$Q_{1,\xi} + Q_{2,\eta} + T_2 - (\psi_1 T_1 + \psi_2 S),_{\xi} -$$

$$- (\psi_1 S + \psi_2 T_2),_{\eta} - \rho R w_{,\tau\tau} = 0. \quad (3.42)$$

Уравнения, описывающие связи между усилиями (моментами) и деформациями (кривизнами и кручением), а также выражения для перерезывающих сил имеют тот же вид, что и в линейном случае. Геометрические соотношения запишем следующим

образом [73]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{1\xi}/R + (\psi_1^2 + \psi^2)/2; \quad \epsilon_{22} = (v_{1\eta} - w)/R + \\ &+ (\psi_2^2 + \psi^2)/2; \quad \epsilon_{12} = (v_{1\xi} + u_{1\eta})/2R + \psi_1\psi_2/2; \\ x_1 &= \psi_{1,\xi}/R; \quad x_2 = \psi_{2,\eta}/R; \quad x_{12} = (\psi_{2,\xi} + \psi_{1,\eta} - \psi)/2R. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В дополнение к параметрам α, β, δ , характеризующим изменимость напряженного состояния по пространственным координатам и времени, введем дополнительные параметры $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, характеризующие степень нелинейности и величину тангенциальных перемещений относительно прогиба:

$$w \sim R\epsilon_1^{\delta_1}, \quad u \sim \epsilon_1^{\delta_2} w, \quad v \sim \epsilon_1^{\delta_3} w.$$

Ниже выписаны полученные в соответствии с процедурой асимптотического расщепления предельные системы. Поскольку все они имеют аналоги в линейном случае, далее не приводятся соотношения между усилиями (моментами) и деформациями (кривизнами и кручением), значения параметров α, β, δ и соотношения, которые после асимптотического расщепления не меняются по сравнению с исходными.

Нелинейные безмоментные уравнения движения можно представить следующим образом ($\delta_1 = 2\beta, \delta_2 = \delta_3 = \beta$):

$$\begin{aligned} T_{1,\xi} + S_{1,\eta} - \{\psi(T_1 + T_2)_{,\eta}/2\} &= 0; \\ S_{1,\xi} + T_{2,\eta} + \{\psi(T_1 + T_2)_{,\xi}/2 + \psi_1 S + \psi_2 T_2\} &= 0; \\ RT_2 - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{,\xi} - R(\psi_1 S + & \\ + \psi_2 T_2)_{,\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} &= 0; \\ \epsilon_{11} &= u_{1,\xi}/R + \psi_1^2/2; \quad \epsilon_{22} = (v_{1,\eta} - w)/R + \psi_2^2/2; \\ \epsilon_{12} &= (u_{1,\eta} + v_{1,\xi})/2R + \psi_1\psi_2/2; \quad \psi_1 = -w_{1,\xi}/R; \\ \psi_2 &= -w_{2,\eta}/R - \{v/R\}; \quad \psi = (v_{1,\xi} - u_{1,\eta})/2R. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Члены, заключенные в фигурные скобки, следует учитывать лишь при $\beta = 0$.

Система уравнений, описывающая нелинейную полубезмоментную теорию, имеет вид ($\delta_1 = 2\beta; \delta_2 = 1/2; \delta_3 = \beta$):

$$\begin{aligned} T_{1,\xi} + S_{1,\eta} - \{\psi_1 T_1\}_{,\eta}/2 &= 0; \\ S_{1,\xi} + T_{2,\eta} - \{M_{2,\eta}/R + (\psi T_1)_{,\xi}/2 + \psi_1 S + \psi_2 T_2\} &= 0; \\ M_{2,\eta\eta} + RT_2 - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{,\xi} - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_{,\eta} - & \\ - \rho R^2 w_{,\tau\tau} &= 0; \\ \epsilon_{11} &= u_{1,\xi}/R + \psi_1^2/2; \quad 0 = (v_{1,\eta} - w)/R + \\ + \psi_2^2/R; \quad 0 &= (u_{1,\eta} + v_{1,\xi})/2R + \psi_1\psi_2/2; \\ \psi_1 &= -w_{1,\xi}/R; \quad \psi_2 = -w_{2,\eta}/R - \{v/R\}; \\ \psi &= (v_{1,\xi} - u_{1,\eta})/2R. \end{aligned} \quad (3.45)$$

В этом случае выполняются нелинейные условия нерастяжимости и отсутствия сдвигов в срединной поверхности обшивки: $\epsilon_{22} = \epsilon_{12} = 0$. Члены в фигурных скобках в формулах (3.45) должны приниматься во внимание только при $\beta = 0$. При $\delta_1 > 2\beta$ соотношения (3.45) линеаризуются.

Построим дополнительное состояние типа пограничного слоя, компенсирующего невязки в граничных условиях. Начнем с дополнительного состояния для уравнений полубезмоментной теории. Оно быстро изменяется по ξ , а его изменимость по окружной координате и времени должна быть такой же, как и у основного состояния. Далее представим любую компоненту P напряженного деформированного состояния в виде

$$P = P^{(0)} + P^{(1)}, \quad (3.46)$$

где индексами 0 и 1 обозначены величины, относящиеся соответственно к основному состоянию и краевому эффекту. Связь между порядками величин основного и дополнительного состояний определяется граничными условиями. Расчлененные граничные условия для нелинейного случая ничем не отличаются от линейного варианта, поэтому можно воспользоваться результатами для линейного случая, приведенными в табл. 8—11. Для всех вариантов граничных условий верна оценка:

$$w^{(K)} \sim \epsilon_1^{(1-2\beta)} w^{(0)}. \quad (3.47)$$

Отсюда следует оценка степени нелинейности дополнительного состояния, поскольку для основного она уже установлена. Подставляя представление (3.46) в исходные уравнения и производя асимптотическое расщепление с учетом изменчивостей основного и дополнительного состояний (изменяемость по ξ дополни-

тельного состояния подбирается, как обычно, из условия корректности соответствующей краевой задачи) и оценки (3.47), получаем $\alpha = \delta_2 = 1/2$, $\delta_1 = 1$, $\delta_3 = 1 - \beta$ и следующую предельную систему для определения краевого эффекта:

$$\begin{aligned} T_{1,\xi}^{(1)} + S_{1,\eta}^{(1)} &= 0; \quad S_{1,\xi}^{(1)} + T_{2,\eta}^{(1)} = 0; \\ M_{1,\xi\xi}^{(1)} + RT_2^{(1)} + T_{1,\xi}^{(0)} w_{,\xi\xi}^{(1)} &= 0; \\ \epsilon_{11}^{(1)} = u_{,\xi}^{(1)}/R + (w_{,\xi}^{(1)})^2/2R^2 + w_{,\xi\xi}^{(0)} w_{,\xi\xi}^{(1)}/R^2; \quad \epsilon_{22}^{(1)} &= \\ = -w_{,\eta}^{(1)}/R + w_{,\eta\xi}^{(0)} w_{,\eta\xi}^{(1)}/R^2; \quad \epsilon_{12}^{(1)} = (v_{,\xi}^{(1)} + & \\ + u_{,\eta}^{(1)})/2R + (w_{,\xi}^{(1)} w_{,\eta}^{(1)} + w_{,\xi\xi}^{(0)} w_{,\eta\xi}^{(1)} + & \\ + w_{,\eta\xi}^{(0)} w_{,\xi\xi}^{(1)})/R^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В соотношениях (3.48) переменные коэффициенты, полученные за счет членов основного состояния, должны быть заморожены [60]. Например, если рассматривается торец оболочки, на котором $\xi = 0$, следует вместо $w_{,\xi}^{(0)} w_{,\xi\xi}^{(1)}$ принимать $w_{,\xi}^{(0)} \chi(w_{,\xi\xi}^{(1)}|_{\xi=0})$. Такое замораживание оправдано тем, что функция $w^{(0)}$ изменяется по координате ξ медленнее, чем $w^{(1)}$. Следовательно, коэффициенты уравнений (3.48) переменны только по координате η . Усилие $T_{1,\eta}^{(0)}$ как и в линейном случае, является статической реакцией, т. е. определяется непосредственно из уравнений (3.48). Соотношения краевого эффекта для безмоментных уравнений отличаются от уравнений (3.48) лишь присутствием динамического члена $\rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(1)}$.

Уравнения теории пологих оболочек ($\delta_1 = 2\beta$, $\delta_2 = \delta_3 = \beta$) имеют вид

$$\begin{aligned} T_{1,\xi} + S_{1,\eta} &= 0, \quad S_{1,\xi} + T_{2,\eta} = 0; \\ M_{1,\xi\xi} + 2H_{,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2 + (w_{,\xi} T_1 + w_{,\eta} S)_{,\xi} + & \\ + (w_{,\xi} S + w_{,\eta} T_2)_{,\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} &= 0, \\ \epsilon_{11} = u_{,\xi}/R + (w_{,\xi})^2/2R^2, \quad \epsilon_{22} = (v_{,\eta} - w)/R + & \\ + (w_{,\eta})^2/2R^2, & \\ \epsilon_{12} = (u_{,\eta} + v_{,\xi})/2R + (w_{,\xi} w_{,\eta})/2R^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Уравнения (3.49) линеаризуются при $\delta_1 > 2\beta$. Первые два уравнения движения здесь и далее, кроме специально оговоренных

случаев, записываем в виде выражений (3.49). Соотношения, описывающие движение подкрепленной пластины, совпадают с соотношениями (3.49) при отбрасывании члена RT_2 . Полученные выше предельные системы имеют второй порядок по координате τ , в то время как исходная система — шестой. Это приводит к тому, что при собственных колебаниях оболочек описывается лишь низшая часть спектра, а при свободных и вынужденных — только установившийся процесс.

Для исследования высокочастотных колебаний ($\varphi = \beta$; $\delta_1 = 2\beta$; $\delta_2 = \delta_3 = \beta$) или для построения переходного процесса служит следующая предельная система:

$$\begin{aligned} T_{1,\xi} + S_{1,\eta} - \rho R u_{,\tau\tau} &= 0; \quad S_{1,\xi} + T_{2,\eta} - \rho R v_{,\tau\tau} = 0; \\ RT_2 + (w_{,\xi} T_1 + w_{,\eta} S)_{,\xi} + & \\ + (w_{,\xi} S + w_{,\eta} T_2)_{,\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Дополнительное (необходимое для выполнения граничных условий по пространственным переменным) состояние описывается линейными уравнениями (3.11).

Дальнейший асимптотический анализ будем производить отдельно для каждого класса подкрепленных оболочек. Для стрингерных оболочек динамическому состоянию с большим показателем изменчивости вдоль направляющей соответствует следующая система ($\delta_1 = 2\beta$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 1/2$):

$$\begin{aligned} M_{1,\xi\xi} + 2H_{,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2 + R(\psi^{(1)} T_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} S^{(1)})_{,\xi} + & \\ + R(\psi_1^{(1)} S^{(1)} + \psi_2 T_2^{(1)})_{,\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} &= 0; \\ \epsilon_{11}^{(1)} = (u_{,\xi}^{(1)})/R + (w_{,\xi}^{(1)})^2/2R^2; \quad 0 = (v_{,\eta}^{(1)} - w^{(1)})/R + & \\ + (w_{,\eta}^{(1)})^2/2R^2; \quad 0 = (v_{,\xi}^{(1)} + u_{,\eta}^{(1)})/2R + & \\ + (w_{,\xi}^{(1)} w_{,\eta}^{(1)})/2R^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Дополнительное состояние быстро изменяется как по направляющей, так и по образующей. Оно локализовано вблизи торцов оболочки ($\delta_1 = 2$ либо $\delta_1 = 5/2$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/2$):

$$M_{1,\xi\xi}^{(2)} + RT_2^{(2)} + R\psi_{2,\xi}^{(1)} T_2^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{,\xi}^{(2)}/R; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = (v_{,\eta}^{(2)} - w^{(2)})/R + \psi_2^{(2)} \psi_2^{(1)}/R;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{,\xi}^{(2)} + u_{,\eta}^{(2)})/2R + \psi_2^{(1)} \psi_1^{(2)}/2. \quad (3.52)$$

Предельные уравнения, описывающие изгибные колебания пластины, подкрепленной в направлении оси ξ ребрами жесткости, имеют вид ($\delta_1 = 1 + 2k$, $\delta_2 = 1 + k$, $\delta_3 = 1/2 + k$ $k > 0$):

$$M_{1,\xi\xi} + 2H_{,\xi\eta} + M_{2,\eta\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} = 0. \quad (3.53)$$

Геометрические соотношения при этом такие же, как и в случае (3.51). Колебания стрингерной пластины с более высокими частотами, чем в предыдущем случае, описываются уравнениями ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta_3 = 1 - \beta$):

$$M_{1,\xi\xi} - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S)_{,\xi} - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2)_{,\eta} -$$

$$- \rho R^2 w_{,\tau\tau} = 0; \quad \epsilon_{11} = (u_{,\xi})/R + \psi_1^2/2; \quad \epsilon_{22} = (v_{,\eta})/R +$$

$$+ \psi_2^2/2; \quad \epsilon_{12} = (v_{,\xi} + u_{,\eta})/2R + \psi_1 \psi_2/2. \quad (3.54)$$

Для оболочек с преимущественно кольцевым подкреплением выделяются состояние с большим показателем изменчивости как в кольцевом, так и в продольном направлениях и состояние с большим показателем изменчивости вдоль образующей. Как и в линейном случае, оба эти состояния динамические, поэтому решение задачи можно начинать с расчета любого из них. При этом вид предельных систем зависит от степени нелинейности. Если расчет начинается с основного напряженного состояния, то оно описывается при $\delta_1 = 1/2$ ($\delta_2 = \delta_3 = 1/4$) системой

$$M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(1)} - R(\psi_1^{(1)} T_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} S^{(1)})_{,\xi} -$$

$$- R(\psi_1^{(1)} S_1^{(1)} + \psi_2^{(1)} T_2^{(1)})_{,\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(1)} = 0, \quad (3.55)$$

при $\delta_1 = 3/4$ ($\delta_2 = \delta_3 = 1/4$) — системой

$$M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(1)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(1)} = 0$$

и, наконец, при $\delta_1 = 1$ ($\delta_2 = \delta_3 = 1/4$) предельные уравнения совпадают с (3.55).

Для дополнительного состояния ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2$; $\delta_3 = 3/4$) в первом случае имеем:

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(2)} - R\psi_{2,\eta}^{(2)} T_2^{(2)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = (u_{,\xi}^{(2)})/R + (\psi_1^{(2)})^2/2; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = -w^{(2)}/R + \psi_2^{(1)} \psi_2^{(2)}/2;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{,\xi}^{(2)} + u_{,\eta}^{(2)})/2R + \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)}/2 +$$

$$+ (\psi_1^{(1)} \psi_2^{(2)} + \psi_2^{(1)} \psi_1^{(2)})/2.$$

Во втором случае предельные уравнения $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2$, $\delta_3 = 3/4$ записываются так:

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(2)} - RT_1^{(1)} \psi_{1,\xi}^{(2)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = u_{,\xi}^{(2)}/R + (\psi_1^{(2)})^2/2 + \psi_1^{(1)} \psi_1^{(2)};$$

$$\epsilon_{22}^{(2)} = -w^{(2)}/R; \quad \epsilon_{12}^{(2)} = (v_{,\xi}^{(2)} +$$

$$+ u_{,\eta}^{(2)})/2R + \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)} + (\psi_1^{(2)} \psi_2^{(1)} +$$

$$+ \psi_1^{(2)} \psi_2^{(1)})/2.$$

И, наконец, в последнем случае для нахождения дополнительного состояния служат уравнения ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2$, $\delta_3 = 3/4$):

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(2)} - RT_1^{(1)} \psi_{1,\xi}^{(2)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(2)} = 0;$$

$$\epsilon_{11}^{(2)} = (u_{,\xi}^{(2)})/R + (\psi_1^{(2)})^2/2; \quad \epsilon_{22}^{(2)} = -w^{(2)}/R;$$

$$\epsilon_{12}^{(2)} = (v_{,\xi}^{(2)} + u_{,\eta}^{(2)})/2R + \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)}/2.$$

Если же рассчитывать вначале дополнительное состояние ($\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/2$, $\delta_3 = 3/4$), то оно описывается соотношениями:

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(2)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(2)} = 0.$$

Решение же для основного состояния ($\delta_1 = -1/4$ либо $\delta_1 = -1/2$) определяется тогда из системы:

$$M_{2,\eta\eta} + RT_2^{(1)} - R\psi_{1,\xi}^{(2)} T_1^{(1)} - \rho R^2 w_{,\tau\tau}^{(1)} = 0.$$

Уравнения преимущественно изгибных колебаний пластины, подкрепленной в направлении оси η ребрами жесткости ($\delta_1 = 1 + 2k$; $\delta_2 = 1/2 + k$; $\delta_3 = 3/4 - k$; $k > 0$), имеют вид

$$M_{1,\xi\xi} + M_{2,\eta\eta} - \rho R^2 w_{,\tau\tau} = 0. \quad (3.56)$$

Предельное уравнение, описывающее колебания конструктивно-ортотропной пластины с более высокими частотами, чем в предыдущем случае ($\delta_1 = 1/2$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/2 - \delta_1$), можно записать так:

$$M_{2,zz} - R(\psi_1 T_1 + \psi_2 S), \xi - R(\psi_1 S + \psi_2 T_2), \eta - \rho R^2 w, \tau \tau = 0.$$

Для вафельных оболочек приводим расщепление по параметру ϵ_5 . Введем параметры асимптотического интегрирования $\delta_4, \delta_5, \delta_6$ по формулам $w \sim R \epsilon_5^{\delta_4}$; $u \sim \epsilon_5^{\delta_5}$; $v \sim \epsilon_5^{\delta_6}$. В результате расщепления уравнения (3.49) по параметру ϵ_5 ($\delta_4 = 2\delta$, $\delta_5 = \delta_6 = \delta$) получаем предельную систему

$$M_{1,\xi\xi} + 2H_{,\xi\eta} + M_{2,\eta\eta} + RT_2 - \rho R^2 w, \tau \tau = 0;$$

$$\epsilon_{11} = u, \xi / R + (w, \xi)^2 / 2R^2; \quad \epsilon_{22} = (v, \eta - w) / R +$$

$$+ (w, \eta)^2 / 2R^2; \quad \epsilon_{12} = (u, \eta + v, \xi) / 2R + (w, \xi w, \eta) / 2R^2. \quad (3.57)$$

Уравнения (3.57) можно получить из исходной системы, используя гипотезы нерастяжимости для нейтральных слоев совокупных сечений: $u, \xi + (w, \xi)^2 / 2R - \epsilon_6 w, \xi\xi = 0$; $v, \eta - w + (w, \eta)^2 / 2R - \epsilon_7 w, \eta\eta = 0$. Дополнительное состояние описывается соотношениями (2.23), (2.24).

Исследуем нелинейные собственные колебания пологих оболочек при шарнирном опирании торцов (граничные условия A_4). Ограничимся случаем квазилинейных колебаний и будем использовать метод возмущений [66]. Искомые собственные функции $U(u, v, w)$ и частоту колебаний представим в виде рядов по малому параметру d_0 , характеризующему начальный уровень энергии:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{\infty} d_0^i \bar{U}_i; \quad \omega^2 = \omega_1^2 (1 + \sum_{i=1}^{\infty} d_0^i \omega_{2i}^2).$$

Пусть перемещение w в нулевом (линейном) приближении имеет вид

$$w_1 = (A \sin n\eta + B \cos n\eta) \sin(m\pi\xi L^{-1}) \exp(i\omega_1 \tau).$$

Обусловленные нелинейностью поправки к частотам линейных колебаний для различных типов подкрепленных оболочек таковы: для стрингерных оболочек

$$\omega_{21} = -3n^4(A^2 + B^2)/16; \quad (3.58)$$

для вафельных оболочек

$$\omega_{21} = \begin{cases} -3n^4(A^2 + B^2)/16 & (\varphi_1 = \pi m / L n \gg 1), \\ -15n^4(A^2 + B^2)/16 & (\varphi_1 \ll 1); \end{cases}$$

(3.59)

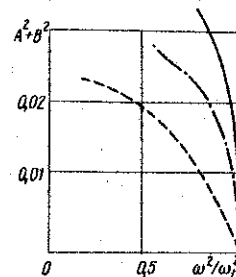


Рис. 16

для шпангоутных оболочек

$$\omega_{21} = \begin{cases} -5n^6 \epsilon_1^2 \epsilon_2 (A^2 + B^2) / (4(1 - \epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4)) & (\varphi_1 \ll 1), \\ 3\varphi^4 (A^2 + B^2) / 64 \epsilon_4 & (\varphi_1 \gg 1). \end{cases} \quad (3.60)$$

На рис. 16 приведены результаты расчетов при следующих значениях параметров $\epsilon_4 \epsilon_1^2 n^4 = 0,042$; $\epsilon_2 = 0,001$; $\epsilon_3 = \epsilon_6 = 0,01$; $\varphi_1 = 0,031$ для стрингерной оболочки (сплошная линия); $\epsilon_1^2 m^4 / L = 0,97 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_2 = 1$; $\epsilon_3 = 0,25$; $\epsilon_5 = 0,2$; $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 7 \cdot 10^{-3}$, $\varphi_1 = 0,125$ для вафельной оболочки (штриховая линия); $\epsilon_2 n^4 \epsilon_1^2 = 2,5$, $\epsilon_4 = 2$, $\varphi_1 = 0,25$ для шпангоутной оболочки (штрихпунктирная линия).

Как видно из соотношений (3.58) – (3.60) и рис. 16, для стрингерных и вафельных оболочек амплитуда убывает с ростом частоты (т. е. имеем нелинейную характеристику мягкого типа), для шпангоутных оболочек тип нелинейности зависит от величины φ_1 .

§ 5. СОСТАВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Последовательные упрощенные уравнения оболочек могут быть получены в результате асимптотического расщепления исходной системы. Эти уравнения позволяют решать широкий класс практически важных задач, однако при различных изменениях напряженного состояния приходится использовать различные приближенные соотношения. Точность первых приближений не всегда достаточна, построение же высших приближений связано с весьма громоздкими выкладками, зачастую сводящими на нет все преимущества асимптотического упрощения. Наконец, расщепленные краевые задачи могут оказаться некорректными. В ряде случаев эти недостатки устраняются при помощи метода составных уравнений [19]. Так, в работе [70] предложено вместо обычного уравнения теории пологих изотропных

оболочек следующее:

$$\nabla_0^4 \nabla_0^4 \Phi + \alpha^{-2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0. \quad (3.61)$$

Здесь

$$\nabla_0^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Уравнение (3.61) отличается от общепринятого единицей в операторе ∇_0^4 . Оно не может быть получено в результате предельного перехода, но почти верно для любых изменяемостей напряженного состояния. Для конструктивно-ортотропных оболочек аналогичное уравнение можно записать так:

$$\nabla_{10}^4 \nabla_{20}^4 \Phi + \epsilon_1^{-2} (\nabla_{30}^4 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2})^2 \Phi = 0, \quad (3.62)$$

где

$$\nabla_{10}^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

$$\nabla_{20}^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

$$\nabla_{30}^4 = \nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} - (\epsilon_6 + \epsilon_7) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \nu_{21} \epsilon_7 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Уравнения для стрингерных и шпангоутных оболочек можно преобразовать в составные уравнения, справедливые при любой изменяемости напряженного состояния. Для стрингерных оболочек они имеют вид:

$$A_1 \Phi \equiv \epsilon_4 \epsilon_1^2 \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \left(\left\{1\right\} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(1 + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2 \Phi = 0; \quad (3.63)$$

$$A_2 \Phi \equiv \epsilon_1^{-2} \left(1 + \nu_{12} \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)^2 \Phi + \nabla_2^4 \Phi + \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(2 - \epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \Phi = 0. \quad (3.64)$$

Уравнения (3.64) и (2.28) совпадают, а выражения (3.63) и (2.27) отличаются только слагаемыми в фигурных скобках. Соотношение (3.63) включает уравнения основного состояния, напряженного состояния с большим показателем изменяемости в кольцевом направлении и изгиба пластины, а выражение (3.64) — уравнения краевого эффекта, напряженного состояния с большим показателем изменяемости по обеим координатам и преимущественно тангенциальной деформации пластины.

Для шпангоутных оболочек имеем

$$A_3 \Phi \equiv \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left[(\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} - \nu_{12} \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (\epsilon_1^2 \epsilon_2 \epsilon_4 + \nu_{12}^2 \epsilon_7^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right)^2 \right] \Phi + \epsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \{2 \nu_{12}\} \right) \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0; \quad (3.65)$$

$$A_4 \Phi \equiv \epsilon_1^2 \nabla_1^4 \Phi + \left(1 + \epsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2 \Phi = 0. \quad (3.66)$$

Уравнения (3.66) и (2.36) совпадают, в уравнение же (3.65) добавлены по сравнению с выражением (2.35) члены в фигурных скобках. Соотношение (3.65) включает уравнения основного состояния, напряженного состояния с большим показателем изменяемости и преимущественно тангенциальной деформации пластины, в соотношение (3.66) входят уравнения краевого эффекта, напряженного состояния с большим показателем изменяемости в продольном направлении и преимущественно изгибной деформации пластины.

При постановке составных краевых задач метод расчленения граничных условий, описанный во второй главе, не подходит. Можно использовать методику, изложенную в работе [18]: после построения общего решения уравнений пограничных слоев [в данном случае уравнений (3.64) и (3.66)] исключить составляющие решения типа пограничного слоя из краевых условий. Упрощенные соотношения (3.63) — (3.66) удобно использовать для аналитического построения функции Грина.

Для оценки области применимости составных уравнений сравнивались квадраты корней характеристических уравнений, соответствующих уравнениям стрингерной оболочки (3.63), (3.64), с точными значениями, найденными численно. Потенциальная функция представлялась в виде $\Phi = c \exp(\lambda \xi) \cos m \eta$.

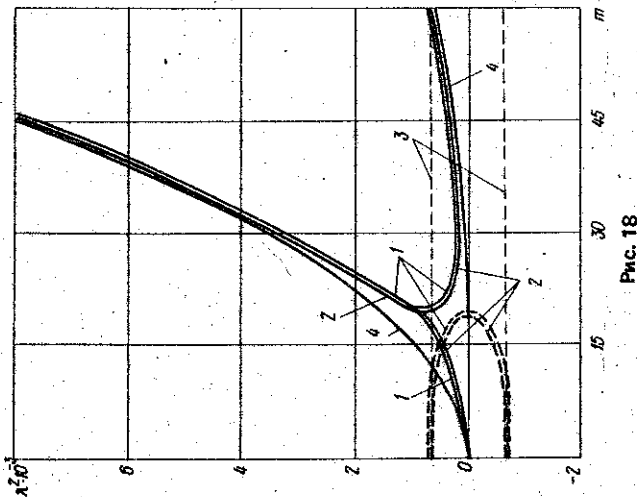


Рис. 18

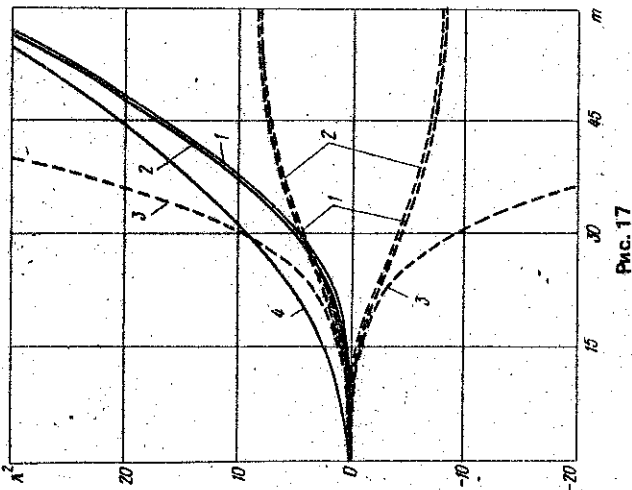


Рис. 17

Принимались следующие значения геометрико-жесткостных параметров: $\epsilon_1^2 = 2,2 \cdot 10^{-6}$; $\epsilon_2 = 10^{-4}$; $\epsilon_3 = 10^{-2}$; $\epsilon_4 = 0,6$; $\epsilon_5 = 0,3$; $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0,2$. Результаты сравнения приведены на рис. 17, 18. Сплошными кривыми обозначены действительные части λ^2 , штриховыми — мнимые. Кривые 1 отвечают точному решению. Кривым 2—4 на рис. 17 соответствуют решения уравнения (3.63), полубезмоментной теории и изгиба пластины; на рис. 18 — решения уравнения (3.64), простого краевого эффекта и плоского напряженного состояния. Как видно из рисунков, составные уравнения действительно дают решения, пригодные для всех m .

При исследовании колебаний стрингерных оболочек составные уравнения, справедливые при любых частотах и изменяемых m , записываются так:

$$A_1 \Phi - \omega^2 A_{11} \Phi \equiv A_1 \Phi - \omega^2 \left\{ \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \epsilon_1^2 \epsilon_4 \left[(a_0 + 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (a_0 + \epsilon_4) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \omega^2 + \epsilon_4 a_0 \omega^4 \right\} \Phi = 0;$$

$$\epsilon_1^2 A_2 \Phi - \omega^2 \Phi = 0.$$

Для шпангоутных оболочек получаем

$$A_3 \Phi - \omega^2 A_{11} \Phi = 0; \quad A_4 \Phi - \omega^2 \Phi = 0.$$

Точность уравнений нулевого приближения можно повышать, оставляя в них члены высших порядков малости. Например, в строительной механике используются уравнения основного состояния, полученные вариационным методом на основе гипотезы нерастяжимости в кольцевом направлении [62]. Отсутствие сдвигов (в отличие от классической полубезмоментной теории) не предполагается. Обоснованность такого подхода обусловлена тем, что соотношение $\epsilon_{22} = 0$ в полубезмоментной теории выполняется точнее, чем соотношение $\epsilon_{12} = 0$:

$$\epsilon_{22} = 0 + O(a^{1/2}); \quad \epsilon_{12} = 0 + O(a^{1/4}). \quad (3.67)$$

Если оставить члены высших порядков в уравнениях основного состояния и просто краевого эффекта для конструктивно-ортотропных оболочек, то эти уравнения можно представить так:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right)^2 \Phi + \epsilon_1^{-2} \left[\nu_{12} \epsilon_7 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right]^2 \Phi + \\
& + \left\{ (\epsilon_2 + \epsilon_4) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + 2 \epsilon_3 \epsilon_5^{-1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} + \right. \\
& + \epsilon_1^{-2} [2 \epsilon_6 + 2 \epsilon_7 - (\epsilon_6 + \epsilon_7)^2 + 2 \nu_{12} \nu_{21} \epsilon_6 \epsilon_7] \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \chi \\
& \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \Phi - \epsilon_1^{-2} (\epsilon_6 + \epsilon_7) \nu_{21} \epsilon_7 \frac{\partial^6}{\partial \xi^2 \partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \Phi + \\
& \left. + 2 (\epsilon_3 \epsilon_4 + \epsilon_2 \epsilon_5^{-1}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right\} = 0; \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 + \nu_{12}^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_6^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \epsilon_1^{-2} \Phi - 2 \nu_{12} \epsilon_1^2 \epsilon_6^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \\
& + \left\{ 2 (\epsilon_3 + \epsilon_5^{-1}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (\epsilon_2 + \epsilon_4 + 4 \epsilon_3 \epsilon_5^{-1} + (\epsilon_6 + \right. \\
& \left. + \epsilon_7)^2) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + 2 (\epsilon_6 + \epsilon_7) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} = 0. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

В фигурных скобках приведены члены высших приближений. Уравнения (3.68), (3.69) имеют четвертый порядок по продольной координате ξ . При решении краевых задач нужно в граничных условиях оставлять члены соответствующих приближений или использовать методику, приведенную в работе [18].

Глава 4 УСТОЙЧИВОСТЬ

Исследование устойчивости эксцентрично подкрепленных оболочек представляет важную с практической точки зрения задачу, которой посвящено значительное число работ [29, 30, 36, 39, 55, 61, 67, 75]. Однако полученные в них результаты являются в ряде случаев достаточно сложными для проектировочного расчета. В настоящей главе построены приближенные уравнения для различных задач устойчивости. Существенная особенность этих задач заключается в том, что характер волнообразования (изменяемость напряженного состояния) не задается заранее, а определяется как параметрами конструкции, так и нагрузкой. Связанные с этим трудности, как правило, не принципиальны, так как опыт проектирования и экспериментальные данные дают достаточную информацию о возможных типах поведения конструкции.

Докритическое состояние оболочек принимается однородным и безмоментным, что можно считать оправданным, поскольку влияние моментности докритического состояния на устойчивость подкрепленных оболочек значительно меньше, чем в изотропном случае [75] (если внешняя нагрузка приложена без эксцентриситета). Уравнения устойчивости, геометрические соотношения и граничные условия получаются путем линеаризации полной системы нелинейных уравнений равновесия (3.42), (3.43). Операторным методом исходная система сводится к одному уравнению восьмого порядка относительно потенциальной функции Φ , которое не приводится из-за своей громоздкости. В дополнение к определенным раньше параметрам α , β , характеризующим волнообразование по образующей и направляющей соответственно, введем параметры λ , t_1 , t_2 , t_3 при помощи соотношений $\epsilon_2 \sim \epsilon_1^{\lambda}$, $T_{10} \sim \epsilon_1^{t_1}$, $T_{20} \sim \epsilon_1^{t_2}$, $S_0 \sim \epsilon_1^{t_3}$. Здесь $\{T_{10}, T_{20}, S_0\} = \{T_{10}, T_{20}, S_0\} / B_2$; $\lambda = 0, 1/2, -1/4$ для вафельных, стрингерных и шпангоутных оболочек соответственно; T_{10}, T_{20}, S_0 — осевое, кольцевое и сдвиговое усилия в докритическом состоянии. Опишем полученные на основе асимптотического расщепления упрощенные уравнения.

Пусть характер волнообразования соответствует основному напряженному состоянию. Тогда

$$\alpha = 2\beta - \lambda - 1/2; \quad \beta < \min(1/2; 1/2 + \lambda);$$

$$t_1 = 1 + 2\lambda; \quad t_2 = t_1 + 2\beta; \quad t_3 = t_1 + \beta,$$

а приближенное уравнение устойчивости имеет вид

$$\begin{aligned} & (\epsilon_1^2 \epsilon_2 + \nu_{21}^2 \epsilon_4^{-1} \epsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \nabla_{0\eta}^2 \Phi + \epsilon_4^{-1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \nabla_{0\eta}^2 \left[(\bar{T}_{10} - 2\nu_{12} \epsilon_4^{-1} \epsilon_7) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & \left. + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для волнообразования типа краевого эффекта $\alpha = 1/2$, а предельное уравнение записывается следующим образом:

$$(\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_8^2) \Phi_{,\xi\xi\xi\xi} + \Phi + (\bar{T}_{10} - 2\nu_{12} \epsilon_8) \Phi_{,\xi\xi} = 0. \quad (4.2)$$

Анализ уравнений (4.1), (4.2) показывает, что знак эксцентриситета шпангоутов влияет лишь на основное напряженное состояние, а стрингеров — на краевой эффект. Уравнение (4.1) — аналог соотношений полубезмоментной теории. Оно применяется при слабо выраженном волнообразовании по образующей, что характерно для превалирующего внешнего давления. Уравнение же (4.2) может быть использовано для описания осесимметричной потери устойчивости, а также неосесимметричного выпучивания в краевой зоне сжатой оболочки. Использование расчетных уравнений и граничных условий позволяет во многих практически важных случаях определять собственные числа на основе одного уравнения четвертого порядка по продольной координате ξ . Для построения же форм потери устойчивости необходимо привлекать оба уравнения (4.1), (4.2), так как определяемые ими состояния взаимно дополняют друг друга.

Пусть характер волнообразования соответствует напряженно-деформированному состоянию с большим показателем изменчивости [$\alpha = 1/2$; $\beta = \min(1/2; 1/2 + \lambda)$]. Разрешающее уравнение принимает вид

$$\nabla_2^4 \left[\nabla_1^4 + \epsilon_1^{-2} \left(\bar{T}_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \right] \Phi +$$

$$+ \epsilon_1^{-2} \left(\nabla_3^4 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (4.3)$$

Оно является аналогом уравнения Муштары—Доннелла—Власова в изотропном случае, применимо в широком диапазоне нагрузок и для реальных подкрепленных оболочек дает хорошие результаты. Однако уравнение (4.3) имеет восьмой порядок по координатам. Дальнейшие упрощения возможны, если учесть характерные для основных типов подкрепленных оболочек соотношения между геометрико-жесткостными параметрами.

В случае преимущественно продольного подкрепления форм потерь устойчивости с большим показателем изменчивости в кольцевом направлении ($\alpha = 0$, $\beta = 1/2$) соответствует уравнение

$$\begin{aligned} & \epsilon_4^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(1 + 2\epsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi + \epsilon_1^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \right. \\ & + 2\epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left. \right] \Phi + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ & \left. + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) можно получить вариационным методом, приняв гипотезы отсутствия сдвигов и нерастяжимости срединной поверхности обшивки в кольцевом направлении.

Для волнообразования с большим показателем изменчивости как по направляющей, так и по образующей ($\alpha = \beta = 1/2$) разрешающее уравнение будет таким:

$$\begin{aligned} & \Phi + 2\epsilon_6 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi + (\epsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \epsilon_6^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \\ & + 2(\epsilon_1^2 \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} - \nu_{12} \epsilon_6^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \epsilon_8 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) описывает состояние, имеющее характер пограничного слоя. Оно может быть получено вариационным методом, если в качестве основных деформаций принять ϵ_{11} , ϵ_{12} , ϵ_{22} , χ_{11} . Определение собственных чисел существенно упрощается, так как параметрические члены входят лишь в уравнение (4.4). Для построения же формы потерь устойчивости нужно использовать решения уравнений (4.4), (4.5), причем связь между ними осуществляется через граничные условия. Критические

усилия и формы потери устойчивости существенно зависят от величины и знака эксцентриситета стрингеров.

При $\beta > 1/2$ соотношения (4.4), (4.5) переходят в уравнения устойчивости и преимущественно тангенциальной деформации пластины, эксцентрично подкрепленной ребрами в одном направлении и нагруженной сжимающими и сдвигающими усилиями. В этом случае в уравнении (4.4) следует опустить первые два, а в уравнении (4.5) — первые три члена. Уравнения (4.4), (4.5) могут быть использованы и при расчете гофрированных оболочек, геометрико-жесткостные характеристики которых вычисляются по известным формулам [38].

Рассмотрим шпангоутные оболочки. Формы волнообразования с большим показателем изменчивости ($\alpha = \beta = 1/4$) описываются уравнением четвертого порядка по ξ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\epsilon_7 \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \nu_{21} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \right] \Phi + \\ + \epsilon_7^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \nabla_2^4 \left(\epsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \epsilon_1^{-2} \bar{T}_{20} \right) \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Основными деформациями в этом случае являются ϵ_{11} , ϵ_{12} и ϵ_{22} .

Если потеря устойчивости происходит по коротким продольным волнам, то соответствующее приближенное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi + 2\epsilon_7 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \epsilon_1^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \epsilon_7 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\ \left. + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь основными деформациями являются ϵ_{12} , ϵ_{11} , ϵ_{22} .

Уравнения (4.6) и (4.7) — исходные для определения собственных чисел соответственно в случаях преобладающего внешнего давления и осевого сжатия (или кручения). Форма потери устойчивости, как и для стрингерной оболочки, представляется в виде суммы решений уравнений (4.6) и (4.7), коэффициенты которых существенно зависят как от величины, так и от знака эксцентриситета.

При $\beta > 1/4$ соотношение (4.7) переходит в уравнение устойчивости эксцентрично подкрепленной пластины (при этом в нем следует опустить первые два члена), а уравнение (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla_2^4 \left(\epsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \epsilon_1^{-2} \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi + \\ + \epsilon_7^2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{21} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если $\bar{T}_{20} = 0$, то уравнение (4.8) описывает преимущественно тангенциальную деформацию пластины, а при $\epsilon_7 = 0$ оно распадается на уравнения тангенциальной деформации пластины и устойчивости стержня под действием сжимающей нагрузки \bar{T}_{20} . В общем случае такое распадение невозможно.

Для вафельных оболочек волнообразование с большим показателем изменчивости ($\alpha = \beta = 1/2$) описывается уравнением (4.3). Дальнейшие упрощения здесь достигаются благодаря асимптотическому расщеплению по малому параметру ϵ_5 . В результате приходим к трем предельным уравнениям

$$\begin{aligned} \epsilon_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \nabla_1^4 \Phi + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[1 + (\epsilon_6 + \epsilon_7) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \Phi = 0; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\Phi_{,\xi\xi} + 2\epsilon_4 \epsilon_5^{-1} \Phi_{,\eta\eta} = 0; \quad (4.10)$$

$$\Phi_{,\xi\xi} + 0,5\epsilon_5 \Phi_{,\eta\eta} = 0. \quad (4.11)$$

Для напряженного состояния, описываемого уравнениями (4.9) — (4.11), параметры δ , γ равны соответственно 0, 0; 1/2, 0; 1/2, 0. К уравнению (4.9) можно прийти, используя вариационный метод и приняв гипотезы нерастяжимости нейтральных слоев совокупных сечений обшивки и ребер. Оно справедливо при больших крутильных жесткостях ребер ($\epsilon_3 \sim 1$). Если же $\epsilon_3 \sim \epsilon_4$, то в операторе ∇_1^4 должен быть опущен второй член. Как и для стрингерной оболочки, параметрические члены входят только в уравнение (4.9), имеющее четвертый порядок по координате ξ . Поскольку коэффициенты этого уравнения существенно зависят от коэффициентов ϵ_6 , ϵ_7 , влияние эксцентриситета ребер на критические усилия и формы потери устойчивости значительно. Дополнительные же состояния, определяемые уравнениями (4.10), (4.11), не зависят от эксцентриситета подкреплений.

При $\beta > 1/2$, $\alpha \sim \beta$ разрешающее уравнение (4.3) принимает вид

$$\nabla_2^4 (\nabla_1^4 \Phi + \bar{T}_{10} \Phi_{,\xi\xi} + 2\bar{S}_0 \Phi_{,\xi\eta} + \bar{T}_{20} \Phi_{,\eta\eta}) + \nabla_3^4 \Phi = 0. \quad (4.12)$$

В случае центрально подкрепленной оболочки оно распадается на уравнения устойчивости и тангенциальной деформации пластины, подкрепленной перекрестной системой ребер, в общем же случае такое распадение невозможно, так как между указанными уравнениями имеется связь, определяемая абсолютной величиной эксцентриситетов. Дальнейшее асимптотическое расщепление по ϵ_5 приводит к соотношениям, аналогичным уравнениям (4.9) — (4.11), только во втором члене уравнения (4.9) должна быть опущена единица. Расщепленные граничные условия совпадают с приведенными в табл. 8—11.

Перейдем к построению составных уравнений. Уравнения устойчивости для стрингерных оболочек представим в виде

$$A_1 \Phi + \epsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0; \quad A_2 \Phi + \epsilon^{-2} \bar{T}_{10} \Phi = 0.$$

Для шпангоутных оболочек имеем

$$A_3 \Phi + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \epsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \left(2 \bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi = 0; \\ A_4 \Phi + \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0.$$

Покажем на нескольких примерах эффективность построенных приближенных уравнений. Пусть оболочка нагружена равномерным осевым сжимающим усилием. Исследуем сначала такой вариант граничных условий:

$$w = M_1^* = S = T_1(u) = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \ell. \quad (4.13)$$

Здесь $M_1^* = M_1 - e_1 T_1$ — изгибающий момент относительно центральной поверхности [54].

Анализ характерных для изотропных [29, 65] и шпангоутных [77] оболочек форм выпучивания при граничных условиях (4.13) показывает, что для описания потери устойчивости в этом случае нужно использовать уравнения (4.1), (4.2), связь между которыми осуществляется через граничные условия (см. табл. 8)

$$w = w^{(0)} + w^{(1)}; \quad T_1 = T_1^{(0)} + T_1^{(1)} \quad (\text{или } u = u^{(0)} + u^{(1)}); \\ S = S^{(1)}; \quad M_1^* = M_1^{(1)} \quad (\xi = 0, \ell).$$

Индексы 0; 1 означают, что соответствующая компонента напряженного состояния вычисляется на основе уравнения (4.1) или (4.2) соответственно.

Таким образом, для определения критического усилия осевого сжатия получаем задачу на собственные значения для уравнения (4.2) со следующими краевыми условиями:

$$S^{(1)} = 0, \quad M_1^{(1)} = 0 \quad (\xi = 0); \\ S^{(1)} \rightarrow 0, \quad M_1^{(1)} \rightarrow 0 \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (4.14)$$

Используя уравнения (4.2) и граничные условия (4.14), найдем

$$T_{10} = B_2 \epsilon_1 / \sqrt{1 + \nu_2^2 \epsilon_1^{-2} \epsilon_6^2}. \quad (4.15)$$

Переходя к изотропному случаю ($\nu = 0,3$, $\epsilon_6 = 0$), имеем $T_{10} = 0,3 E h^2 / R$, что совпадает с известными решениями [1, 29]. Для шпангоутных и вафельных оболочек формула (4.15) подтверждается результатами численных расчетов, приведенных в работах [77, 76] соответственно.

Рассмотрим теперь случай классического шарнирного опирания торцов:

$$w = v = T_1 = M_1^* = 0 \quad (\xi = 0, \ell) \quad (4.16)$$

Зададим функцию Φ так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям (4.16):

$$\Phi = C \sin(m \pi \xi / \ell) \cos n \eta.$$

Тогда для стрингерных оболочек получаем

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_4^{-1} \left(\frac{\pi}{n^2 \ell} \right)^2 (1 - \epsilon_6 n^2)^2 + \epsilon_1^2 \left[\left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 + 2 \epsilon_3 n^2 + \epsilon_2 \left(\frac{\pi}{n^2 \ell} \right)^2 \right]. \quad (4.17)$$

Здесь $m = 1$; найти минимум по n аналитически не удастся, однако это легко сделать численно. На рис. 19 представлены результаты расчета критических усилий осевого сжатия, полученные по формуле (4.17) и уравнению (4.3). Результаты расчета на основе уравнения (4.3), которые могут рассматриваться как точные, заимствованы из работы [54].

Принимались следующие значения геометрико-жесткостных параметров: $\epsilon_2 = 0,008$; $\epsilon_3 = 0,024$; $\epsilon_4 = \epsilon_5 = 0,7$; $|\epsilon_6 \epsilon_1^{-2}| = 0,4$. Сплошные кривые соответствуют наружному, штриховые — внутреннему ($\epsilon_6 > 0$) подкреплениям, цифрой 1 обозначено точное, 2 — приближенное решения. На рис. 19 принято $\ell_0 = \ell^2 / 2 \sqrt{3} \epsilon_1$; $T^* = T_{10} R / 2 \sqrt{B_1 D_2}$. Сопоставление постро-

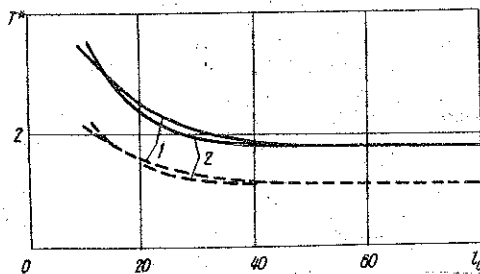


Рис. 19

случай является наименее благоприятным при асимптотическом анализе.

Для центрально подкрепленных стрингерных оболочек при малой крутильной жесткости ребер ($\epsilon_6 = 0$; $\epsilon_3 = 0$) после минимизации по n^2 получаем

$$\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1\epsilon_2^{1/2}\epsilon_4^{-1/2} + \epsilon_1^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2.$$

✓ При переходе к изотропии ($\epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$) имеем $\bar{T}_{10} \approx h/(\sqrt{3}(1 - \nu^2)R)$, если же жесткость стрингеров очень велика ($\epsilon_2 \rightarrow 0$), то $\bar{T}_{10} \approx \epsilon_1^2 \pi^2 \ell^{-2}$.

Для шпангоутных оболочек находим

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_1^2 \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 + [\epsilon_1^2 \epsilon_2 n^4 + (1 - \epsilon_7 n^2)^2] \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^{-2}.$$

Минимум этого выражения достигается при $n^2 = \epsilon_7 \epsilon_2^{-1}$. Отсюда видно, что неосесимметричная форма потери устойчивости возможна лишь при сравнительно большой абсолютной величине эксцентриситета внутренних шпангоутов. В остальных случаях реализуется осесимметричная форма потери устойчивости ($n = 0$), описываемая уравнением (4.2), и $\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1$.

Рассмотрим вафельные оболочки при малой крутильной жесткости ребер ($\epsilon_3 \sim \epsilon_1$). Критическое усилие осевого сжатия тогда можно записать так:

$$\bar{T}_{10} = \epsilon_1^2 \left[\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 + \epsilon_2 \left(\frac{m\pi}{n^2 \ell}\right)^{-2} \right] + \frac{1}{2} \epsilon_4^{-1} \epsilon_5 n^{-2} (1 - \epsilon_6 n^2)^2. \quad (4.18)$$

Минимизируя выражение (4.18) по n и m , находим

$$m = \left(\frac{\ell}{\pi}\right) \epsilon_2^{1/4} n; \quad n^2 = [4\epsilon_1^2 \epsilon_2^{1/2} \epsilon_4 \epsilon_5^{-1} + \epsilon_6^2 \epsilon_2^{-1/2}]^{-1/2}.$$

Для центрально равноподкрепленной оболочки ($\epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$, $\epsilon_6 = \epsilon_7 = 0$) выражение (4.18) принимает вид $\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1 \epsilon_5^{1/2}$.

В то же время точное решение [54] можно представить так:

$$T_{10} = 2\epsilon_1 \epsilon_5^{1/2} (1 + \epsilon_5)^{1/2}.$$

Как и следовало ожидать, приближенное решение соответствует первому члену разложения точного решения в ряд по малому параметру ϵ_5 : $\bar{T}_{10} = 2\epsilon_1 \epsilon_5^{1/2} (1 + \epsilon_5/2 + 3\epsilon_5^2/8 + \dots)$.

Предварительное расщепление уравнений и граничных условий позволяет эффективно использовать для поиска собственных значений вариационные методы [46]. Этому способствуют понижение порядка уравнения, а также то, что вариационный метод используется для построения гладкой части решения.

Остановимся подробнее на физическом объяснении эффекта эксцентричного размещения ребер [54]. Влияние эксцентриситета складывается из двух противоположных эффектов — первичного и вторичного, обусловленных влиянием мембранных сил в обшивке на изгиб и изгиба на мембранное усилие в поперечном направлении. С точки зрения первичного эффекта более рациональны наружные ребра, а с точки зрения вторичного — внутренние.

Отсечем мысленно ребра от обшивки, т. е. допустим проскальзывание между ними, сохраняя общий изгиб. Рассмотрим их собственные деформации при том изгибе, который происходит в подкрепленной оболочке. В обшивке при выпучивании возникает дополнительная деформация сжатия в выпучинах внутрь (в осевом и окружном направлениях) и деформация растяжения — в выпучинах наружу. При этом деформация такова, что энергия, накапливаемая в срединной поверхности, минимальна по сравнению с энергией любой другой возможной деформации при данном изгибе. Для внутреннего ребра поверхность его контакта с оболочкой также сжата в выпучинах внутрь и растянута в выпучинах наружу, для наружного же — наоборот. Если теперь наложить условия совместности деформации обшивки и ребер, то очевидно, что собственное напряженно-деформированное состояние как обшивки, так и ребер изменится при наружном расположении ребер в значительно большей степени, чем при внутреннем. При наружном расположении собственная деформация обшивки искажается больше, чем при внутреннем, поэтому энергия деформации в направлении ребра, накапливаемая в обшивке в первом случае, будет большей, чем во втором. Аналогично в самих наружных ребрах будет накапливаться большая энергия, чем во внутренних. Этим объясняется первичный эффект эксцентриситета.

Далее нужно учесть, что ребра вызывают деформацию обшивки также и в поперечном к ребру направлении. Причем при наружных ребрах эта деформация совпадает по знаку с собственной

деформацией обшивки, а при внутренних — противоположна ей. Следовательно, энергия деформации в поперечном направлении будет большей при внутренних ребрах. В этом состоит суть вторичного эффекта эксцентриситета.

Можно ожидать, что вторичный эффект будет меньше по сравнению с первичным вследствие малости коэффициента Пуассона. Это действительно справедливо для стрингеров при осевом сжатии (при неосесимметричной форме). Однако, если собственная деформация обшивки в направлении ребра невелика по сравнению с деформацией в поперечном к ребру направлении, то вторичный эффект может превалировать. Примером служит оболочка со шпангоутами, нагруженная внешним давлением. При достаточной длине оболочки и одной полуволне по длине $\epsilon_{22} \ll \epsilon_{11}$, в этом случае критические усилия при внутреннем расположении колец выше, чем при внешнем. Если длина уменьшается, кольцевые деформации возрастают и эффект эксцентриситета меняет знак. Для стрингеров первичным будет эффект, связанный с осевой деформацией ϵ_{11} . Поэтому при длинных волнах преобладает первичный эффект, а при очень коротких — вторичный. Предельным случаем является осесимметричное выпучивание. Тогда для стрингерной оболочки существен только вторичный эффект, а эксцентрисичность шпангоутов не влияет на критическую нагрузку, так как изгиб их отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алмрос. Влияние граничных условий на устойчивость продольно сжатой цилиндрической оболочки. — Ракет. техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 1, с. 171–176.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. — М.: Физматгиз, 1961. — 384 с.
3. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
4. Амбро И. Я., Заруцкий В. А. Теория ребристых оболочек. — К.: Наук. думка, 1980. — 368 с.
5. Андрианов И. В., Маневич Л. И. О классификации приближенных уравнений теории подкрепленных оболочек, учитывающих дискретность расположения ребер. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1972, № 15, с. 115–122.
6. Андрианов И. В., Маневич Л. И. К расчету напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы, подкрепленной ребрами жесткости. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 4, с. 135–140.
7. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Приближенные уравнения устойчивости эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1975, № 20, с. 96–105.
8. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Исследование устойчивости эксцентрично подкрепленных круговых цилиндрических и конических оболочек со свободными в кольцевом направлении торцами. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1976, № 21, с. 139–141.
9. Андрианов И. В., Лобода В. В., Маневич Л. И. Асимптотический анализ краевых задач теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — В кн.: Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин. Днепропетровск: ДГУ, 1973, с. 139–153.
10. Андрианов И. В., Лобода В. В., Маневич Л. И. Об основных гипотезах, соответствующих теориям эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — В кн.: Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин. Днепропетровск: ДГУ, 1973, с. 162–169.
11. Андрианов И. В., Лобода В. В., Маневич Л. И. Оценка погрешности основных приближений при асимптотическом анализе уравнений эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — В кн.: Динамическая прочность и устойчивость элементов крупных машин. Днепропетровск: ДГУ, 1973, с. 154–161.
12. Андрианов И. В., Лобода В. В., Маневич Л. И. К формулировке краевых задач для упрощенных уравнений теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 7, с. 50–55.

13. Андрианов И. В., Побода В. В., Маневич Л. И. Расчеты открытой цилиндрической оболочки. — В кн.: Динамика и прочность тяжелых машин. Днепропетровск: ДГУ, 1976, вып. 1, с. 45–54.

14. Баттерман. Пластическое выпучивание сжатой в осевом направлении цилиндрической оболочки со свободным краем. — Прикл. механика (Тр. Амер. об-ва инж.-мех.; Сер. Е). М.: Мир, 1968, № 1, с. 81–90.

15. Болотин В. В. Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях. — В кн.: Пробл. механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 60–72.

16. Бырсан К. Е., Кан С. Н., Черняков Д. С. О влиянии эксцентрисности подкрепления на устойчивость оболочек. — В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 110–114.

17. Бутузов В. Ф. Угловой погранслои в сингулярно возмущенных задачах с частными производными. — Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 10, с. 1848–1862.

18. Вахромеев Ю. М., Корнев В. М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 7, с. 1163–1170.

19. Вандайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 310 с.

20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и погранслои для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. — Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5, с. 3–122.

21. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотика решений некоторых краевых задач с осциллирующими граничными условиями. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 1, с. 13–16.

22. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.

23. Гаврилов Ю. В. Собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек. — В кн.: Тр. конф. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КФАН, 1961, с. 124–129.

24. Гарнет Г., Леви А. Свободные колебания подкрепленных упругих оболочек. — Прикл. механика (Тр. Амер. об-ва инж.-мех.; Сер. Е). М.: Мир, 1969, № 4, с. 188–194.

25. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. — М.: Наука, 1976. — 512 с.

26. Гольденвейзер А. Л. Некоторые математические проблемы линейной теории упругости тонких оболочек. — Успехи мат. наук, 1960, т. 15, вып. 5, с. 3–75.

27. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — 384 с.

28. Гонтикевич В. С. Собственные колебания ортотропных оболочек. — В кн.: Тр. конф. по теории оболочек и пластин. Казань: Изд-во КФАН, 1961, с. 72–82.

29. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел. 1967. М.: ВИНТИ, 1969. — 384 с.

30. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. — М.: Наука, 1978. — 360 с.

31. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И. Деформация оболочек с шарнирно опертым и жестко защемленным противоположными краями. — Прикл. механика, 1969, т. 5, вып. 2, с. 79–84.

32. Ермоленко В. М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний. — Журн. прикл. механики и техн. физики, 1980, № 1, с. 163–170.

33. Жинжер Н. И., Хроматов В. Е. Применение асимптотического метода к исследованию спектров колебаний ортотропных оболочек. — Инж. журн. Механика твердого тела, 1971, № 6, с. 95–101.

34. Заруцкий В. О. Наближені рівняння рівноваги конструктивно-ортотропних циліндричних оболонок. — Прикл. механіка, 1961, т. 7, вип. 6, с. 677–680.

35. Заруцкий В. А. Приближенные формулы для вычисления минимальных собственных частот колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек. — Прикл. механика, 1977, т. 13, вып. 5, с. 43–51.

36. Заруцкий В. А., Санников Ю. А. Приближенные формулы для расчета на устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при действии осевых сил и внешнего давления. — Прикл. механика, 1978, т. 14, вып. 4, с. 118–121.

37. Игл, Сьюол. Исследование свободных колебаний цилиндрических оболочек с ортогонально расположенными подкрепляющими элементами, рассматриваемыми как дискретные. — Ракет. техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 3, с. 167–177.

38. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. — М.: Машиностроение, 1966. — 508 с.

39. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. М., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. — М.: Машиностроение, 1975. — 375 с.

40. Карпов Н. И. Анализ спектра частот цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами жесткости. — Прикл. механика, 1965, т. 1, вып. 12, с. 9–14.

41. Кильчевский Н. А. Об осесимметричных колебаниях и устойчивости круглой трубы, находящейся под действием продольных сжимающих усилий. — Прикл. мат. и механика, 1942, т. 6, вып. 6, с. 497–508.

42. Коблик С. Г., Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. — Киев; Донецк: Вища шк. Головное изд-во, 1982. — 152 с.

43. Колатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Мир, 1969. — 448 с.

44. Корнев В. М. Получение краевых условий упрощенных теорий тонких упругих оболочек при заданной осцилляции нагрузок на контуре. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 5, с. 151–156.

45. Корнев В. М. К формулировке граничных условий упрощенных уравнений оболочек вращения. — Прикл. мат. и механика, 1970, т. 34, вып. 1, с. 84–94.

46. Корнев В. М. О реализации асимптотических методов при колебаниях и устойчивости упругих пластин и оболочек. — В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 304–310.

47. Корнев В. М. О краевых эффектах в тонких цилиндрических оболочках. — Прикл. механика, 1975, т. 2, вып. 11, с. 36–44.

48. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972. — 274 с.

49. Леснича В. А. Асимптотическое исследование нелинейных колебаний эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек. — В кн.: Теоретич. и експеримент. дослід. прочності, стійкості та коливань конструкцій. Днепропетровск: ДГУ, 1973, с. 103–107.

50. Лесничай В. А., Маневич Л. И. Собственные колебания эксцентрично подкреплённых цилиндрических оболочек. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск: ДГУ, 1974, № 18, с. 95–102.
51. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е, пер. и доп. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
52. Липовский Д. Е. Исследование возможных упрощений уравнений напряжённого состояния и устойчивости круговых цилиндрических оболочек. — Инж. журн., 1965, т. 5, вып. 3, с. 522–530.
53. Мак-Элман, Микулас мл., Стейн. Влияние эксцентricности ребер жесткости на статику и динамику пластин и цилиндрических оболочек. — Ракет. техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 5, с. 151–160.
54. Маневич А. И. Устойчивость подкреплённых цилиндрических оболочек с учетом эксцентricитета ребер. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1971, вып. 14, с. 72–86.
55. Маневич А. И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкреплённых оболочек. — Киев; Донецк: Вища шк. Головное изд-во, 1979. — 152 с.
56. Маневич Л. И., Стежко А. В. Исследование устойчивости цилиндрической оболочки, подкреплённой по краям упругими шпангоутами. — В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Харьков: ХГУ, 1968, вып. 8, с. 92–98.
57. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический анализ уравнений теории эксцентрично подкреплённых цилиндрических оболочек. — В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971, с. 185–190.
58. Меньшиков В. М. О приближенных методах расчета круговых цилиндрических оболочек. — Прикл. мат. и механика, 1960, т. 24, вып. 4, с. 691–702.
59. Мясенков В. И., Репин А. А. Влияние граничных условий на собственные частоты колебаний цилиндрических оболочек. — Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 6, с. 31–36.
60. Найфэ А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 456 с.
61. Немировский Ю. В. Устойчивость и выпучивание конструктивно-анизотропных и неоднородных оболочек и пластин. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. — 154 с.
62. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. — М.: Машиностроение, 1966. — 333 с.
63. Разживин К. А. Напряжённое состояние открытой круговой цилиндрической оболочки с защемленными прямолинейными кромками. — Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5, с. 163–166.
64. Рейсснер Э. Асимптотические разложения для круговых цилиндрических оболочек. — Прикл. механика (Тр. Амер. об-ва инж.-мех.; Сер. Е). М.: Мир, 1964, № 2, с. 96–104.
65. Симмондс, Даниэльсон. Новые результаты в исследовании нагрузок, вызывающих потерю устойчивости сжатых вдоль оси цилиндрических оболочек при ослабленных граничных условиях. — Прикл. механика. (Тр. Амер. об-ва инж.-мех.; Сер. Е). М.: Мир, 1970, № 1, с. 97–102.
66. Тонкостенные оболочечные конструкции. — М.: Машиностроение, 1980. — 608 с.
67. Тербушко О. И. Устойчивость подкреплённых и анизотропных оболочек. — В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970, с. 884–897.
68. Фурсберг. Влияние граничных условий на частоты колебаний оболочек. — Ракет. техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 12, с. 166–174.
69. Шамровский А. Д. Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования. — Прикл. мат. и механика, 1979, т. 43, вып. 5, с. 859–868.
70. Шкутин Л. И. Введение двух разрешающих функций в уравнения неологичных оболочек. — ДАН СССР, 1972, т. 204, № 4, с. 809–811.
71. Das Y. C. Vibration of orthotropic cylindrical shells. — Appl. Sci. Res., Sec. A, 1973, v. 12 p. 317–326.
72. Handelman C. H., Keller G. B., O'Malley R. E. Loss of boundary condition in the asymptotic solution of linear ordinary differential equation. — Comm. of Pure and Appl. Math., 1968, v. 21, No 3, p. 243–261.
73. Sanders I. L. Nonlinear Theories for thin Shells. — Quart. Appl. Math., 1963, v. 21, No 1 p. 21–36.
74. Scruggs R. M., Piece C. V., Reese I. R. An analitical and experimental study of the vibration of orthogonally stiffened cylindrical shell. — J. Spacecraft and Rockets, 1969, v. 6, No 5, p. 603–609.
75. Singer I. Buckling of integrally stiffened cylindrical shells. Review of Experiment and theory. — In: Contrib. Theory Aircraft. Struct. Delft: 1972, p. 325–357.
76. Soong Tsai-Chen. Influence of boundary constraints on the buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. In: Proc. 7-th Int. Symp. Space Techn. and Sci. Tokyo: 1968, p. 253–266.
77. Weller T., Baruch M., Singer I. Influence of in-plane boundary conditions on buckling under axial compression of ring stiffened cylindrical shells. — Isr. J. Techn., 1971, v. 9, No 4, p. 397–410.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Основные соотношения и методика исследования	5
1. Исходные соотношения	5
2. Метод асимптотического интегрирования	12
Глава 2. Напряженно-деформированное состояние	19
1. Асимптотический анализ уравнений равновесия	19
2. Расчленение граничных условий	30
3. Оценка погрешности основных приближений	46
4. Расчет открытых оболочек	49
Глава 3. Колебания	55
1. Асимптотический анализ краевых задач	55
2. Исследование частот собственных колебаний	68
3. Оценка точности упрощенных соотношений	73
4. Анализ нелинейных задач	75
5. Составные уравнения	83
Глава 4. Устойчивость	89
Список литературы	99

Игорь Васильевич Андрианов, Валентина Алексеевна Песничая,
Владимир Васильевич Лобода, Леонид Исаакович Маневич

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Редактор И. Д. Бородин. Обложка художника Л. В. Максимчук. художе-
ственный редактор И. Г. Хороший. Технический редактор Е. С. Неведрова.
Корректоры И. Е. Михнева, Н. С. Королева. Оператор И. И. Хеостик

Информ. бланк № 9681

Подп. в печать 17.12.85. БИ 09284. Формат 84×108 ¹/₃₂. Бумага офс. № 1.
Универс. гарн. Офс. печать. Усл. печ. л. 5,46. Усл. кр.-отт. 5,72. Уч.-изд. л.
4,95. Тираж 1500 экз. Изд. № 5553. Зак. № 6-104 Цена 75 к.

Главное издательство издательского объединения „Вища школа”, 252054,
Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Напечатано с оригинала-макета, подготовленного в Головном издательст-
ве издательского объединения „Вища школа”, в Киевской книжной типо-
графии научной книги, 252004, Киев-4, ул. Репина, 4