Лекции по тензорному анализу

О. Э. Зубелевич

Оглавление

1 Полилинейная алгебра **5**

1 Введение 5

2 Обозначения и определения 5

3 Сопряженное пространство и взаимный базис 7

4 Преобразование координат векторов и линейных функционалов при замене базиса 8

5 Тензорное произведение 9

6 Тензоры в линейном пространстве 12

7 Метрический тензор: поднятие и опускание индексов 15

8 Кососимметрические формы 16

9 Тензорные величины (тензорные плотности) 20

2 Дифференциальное исчисление тензоров **25**

1 Введение 25

2 Понятие m-мерной поверхности 25

3 Замены координат на поверхности 27

4 Тензорные поля на поверхности 29

5 Производная Ли 30

6 Дифференциальные формы 33

7 Связность, тензор кручения 37

8 Связность, согласованная с метрикой 42

9 Тензор кривизны Римана 44

10 Ковариантное дифференцирование тензорных величин . . 48

Глава 1

Полилинейная алгебра

1 Введение

Законы физики выражаются уравнениями, которые записываются в той или иной системе координат. Но сами эти законы инвариантны, т. е. не зависят от систем координат.

В разных системах координат один и тот же физический закон представляется совершенно различными уравнениями, за которыми часто не видно инвариантной природы этого закона. Следовательно, мы должны научиться выделять те свойства уравнений физики, которые от координатного представления не зависят, и потому имеют физический смысл.

Для решения этой задачи служит аппарат тензорного анализа, он позволяет работать с координатными представлениями физических законов, сохраняя инвариантную терминологию.

2 Обозначения и определения

Тензорная алгебра имеет дело с наборами чисел вида $t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}$, где верхние и нижние индексы пробегают различные целочисленные значения:

$$i_k, j_l \in \{1,\dots,m\}, \quad k=1,\dots,p, \quad l=1,\dots,q.$$

Эти многоиндексные наборы чисел приходится перемножать, получая новые наборы, например: $a^{i_1,i_2}_{j_1,j_2,j_3} \cdot b^k_n = c^{i_1,i_2,k}_{j_1,j_2,j_3,n}$, и суммировать, например:

$$d^{i_1}_{j_1,j_3} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} a^{i_1,r}_{j_1,s,j_3} \cdot b^s_r. \tag{2.1}$$

В последнем случае принято, следуя Эйнштейну, опускать знаки суммирования. В соответствие с этим формула (2.1) приобретает вид:

$$d^{i_1}_{j_1,j_3} = a^{i_1,r}_{j_1,s,j_3} \cdot b^s_r.$$

При этом отмечают, если необходимо, что суммирование ведется по индексам r и s от единицы до m.

Итак, если в формуле один и тот же индекс встречается дважды снизу и сверху, то по этому индексу ведется суммирование, например:

$$a^i_i = \sum_{i=1}^{m} a^i_i.$$

Двухиндексный набор чисел

$$\delta_{i,j} = \delta^{i,j} = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

называется символом Кронекера.

Иногда удобно использовать штрихованные индексы, например: $c_{i'}$. В этом случае считается, что штрих просто перенесен на индекс с буквы, т. е. $c_{i'} = c'_i$, при этом $1' = 1, \quad 2' = 2$ и т. д.

Напомним несколько определений.

Определение 1.1 *Рассмотрим множества A и B. Отображение $f : A \to B$ называется биекцией, если оно каждому элементу $a \in A$ ставит в соответствие единственный элемент $f(a) \in B$, и каждому элементу $b \in B$ соответствует единственный элемент $a \in A$, такой, что $f(a) = b$.*

Если отображение f является биекцией, то оно имеет обратное отображение $f^{-1} : B \to A$, определенное формулами:

$$f(f^{-1}(b)) = b, \quad f^{-1}(f(a)) = a.$$

Определение 1.2 *Рассмотрим линейные пространства L и M. Линейное отображение $A : L \to M$ называется линейным изоморфизмом, если оно является биекцией. Можно показать, что в этом случае обратное отображение тоже линейно.*

3 Сопряженное пространство и взаимный базис

Пусть L – $m-$мерное линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Обозначим через L^* множество линейных функционалов $f : L \to \mathbb{R}$ на пространстве L. Это множество тоже является линейным пространством относительно операции сложения функционалов:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad f, g \in L^*, \quad x \in L$$

и умножения функционала на число:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Элементы пространства L^* называются ковекторами.

Зададим в пространстве L базис $e_1, \dots, e_m$, и рассмотрим функционалы $\{e^1, \dots, e^m\} \subset L^*$, заданные соотношениями:

$$e^i(e_j) = \delta^i_j. \tag{3.1}$$

Задача 1.1 *Покажите, что функционалы, определенные формулой (3.1), линейно-независимы.*

Значение функционала e^i на любом векторе $x = x^k e_k$ однозначно определяется формулой:

$$e^i(x) = x^k e^i(e_k) = x^k \delta^i_k = x^i. \tag{3.2}$$

Это означает, что функционалы (e^i) единственным образом восстанавливаются по данному базису (e_i).

В соответствии с формулой (3.2) возьмем произвольный линейный функционал f и рассмотрим его значение на векторе x:

$$f(x) = x^k f(e_k) = f(e_k) e^k(x).$$

Это равенство показывает, что любой функционал раскладывается в линейную комбинацию функционалов e^i по формуле

$$f = f_i e^i, \quad f_i = f(e_i).$$

Таким образом, функционалы e^i образуют базис в пространстве L^*. Этот базис называется взаимным к базису (e_i). Набор чисел (f_i) является координатами функционала f во взаимном базисе.

Как и в случае векторов, при сложении функционалов их координаты складываются, а при умножении функционала на число его координаты умножаются на это число.

4 Преобразование координат векторов и линейных функционалов при замене базиса

Зададим в пространстве L новый базис $e_{1'}, \dots e_{m'}$, связанный со старым посредством невырожденной матрицы $C = (c^i_{i'})$:

$$e_{i'} = c^i_{i'} e_i, \quad e_i = c^{i'}_i e_{i'}, \quad C^{-1} = (c^{i'}_i). \tag{4.1}$$

Отметим, что формула $CC^{-1} = E$ в координатном виде записывается так:

$$c^k_{i'} c^{i'}_i = \delta^k_i. \tag{4.2}$$

Разложим вектор x по старому и новому базису:

$$x = x^i e_i = x^{i'} e_{i'}.$$

Подставляя в это выражение формулу преобразования векторов базиса, получаем:

$$x^i e_i = x^{i'} c^k_{i'} e_k.$$

Приравнивая в последней формуле коэффициенты при соответствующих базисных векторах, находим:

$$x^k = c^k_{i'} x^{i'}. \tag{4.3}$$

Такой закон преобразования координат называется контравариантным.

Теперь рассмотрим закон преобразования координат в сопряженном пространстве. Пусть $e^{1'}, \dots, e^{m'}$ – взаимный к $(e_{i'})$ базис:

$$e^{i'}(e_{j'}) = \delta^{i'}_{j'}. \tag{4.4}$$

Очевидно,

$$e^{i'} = d^{i'}_k e^k, \tag{4.5}$$

где $(d^{i'}_k)$ – компоненты некоторой невырожденной матрицы. Подставляя формулы (4.5), (4.1) в (4.4), получаем:

$$e^{i'}(e_{j'}) = d^{i'}_k e^k (c^l_{j'} e_l) = d^{i'}_k c^l_{j'} e^k(e_l) = d^{i'}_k c^l_{j'} \delta^k_l = d^{i'}_l c^l_{j'} = \delta^{i'}_{j'}.$$

Откуда находим $d^{i'}_l = c^{j'}_l \delta^{i'}_{j'} = c^{i'}_l$. Таким образом, формула (4.5) приобретает вид:

$$e^{i'} = c^{i'}_i e^i, \quad e^i = c^i_{i'} e^{i'}. \tag{4.6}$$

Выведем закон преобразования координат линейного функционала при замене базиса. Разложим функционал $f \in L^*$ по старому и новому базису:

$$f = f_i e^i = f_{i'} e^{i'}.$$

Подставляя в это выражение формулу преобразования векторов базиса, получим:

$$f_i e^i = f_{k'} c^{k'}_l e^l.$$

Приравнивая в последней формуле коэффициенты при соответствующих базисных векторах, находим:

$$f_i = c^{k'}_i f_{k'}. \tag{4.7}$$

Такой закон преобразования координат называется ковариантным.

Задача 1.2 *Рассмотрим функционал $f = f_i e^i \in L^*$ и вектор $x = x^i e_i \in L$. Докажите, что $f(x) = f_i x^i$.*

В заключение отметим, что всякий вектор x из L можно трактовать как линейный функционал на пространстве L^*, то есть как элемент пространства L^{**}, значение которого на элементе $f \in L^*$ равно $f(x)$.

Задача 1.3 *Докажите, что описанное соответствие между элементами пространств L и L^{**} является естественным или каноническим (то есть независимым от систем координат) линейным изоморфизмом.*

По существу, это делает пространства L и L^{**} неразличимыми!

5 Тензорное произведение

Рассмотрим линейные пространства M и N размерностей m и n соответственно.

Определение 1.3 *Тензорным произведением пространств M и N (обозначается $M \otimes N$) называется пространство билинейных (т.е. линейных по каждому аргументу) функционалов $f : M^* \times N^* \to \mathbb{R}$.*

Вообще, функционал, определенный на прямом произведении нескольких линейных пространств и являющийся линейным по каждому аргументу при фиксированных остальных, называется полилинейным.

Определение 1.4 *Тензорным произведением элементов $x \in M$ и $y \in N$ (обозначается $x \otimes y$) называется функционал $g \in M \otimes N$, определенный равенством:*

$$g(u, v) = u(x)v(y), \quad u \in M^*, \quad v \in N^*.$$

Отметим, что $(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y)$ и

$$(x + z) \otimes y = x \otimes y + z \otimes y, \quad x \otimes (y + t) = x \otimes y + x \otimes t,$$

но $x \otimes y \neq y \otimes x$.

Пусть $a_1, \dots, a_m$ – базис в M, а $b_1, \dots, b_n$ – базис в N.

Теорема 1.1 *Набор элементов*

$$a_i \otimes b_j, \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots, n \tag{5.1}$$

является базисом в $M \otimes N$.

Доказательство. Покажем, что любой функционал $f \in M \otimes N$ является линейной комбинацией указанных элементов.

Обозначим через (a^i) базис пространства M^*, взаимный к базису (a_i), а через (b^k) – базис в N^*, взаимный к (b_k).

Тогда если $u = u_i a^i \in M^*$, а $v = v_j b^j \in N^*$, то в силу билинейности f имеем:

$$f(u, v) = f(u_i a^i, v_j b^j) = u_i v_j f(a^i, b^j). \tag{5.2}$$

Ввиду взаимности базисов $u_i = u(a_i)$ и $v_j = v(b_j)$. Подставляя эти формулы в (5.2), получаем:

$$f = f^{i,j} a_i \otimes b_j, \quad f^{i,j} = f(a^i, b^j). \tag{5.3}$$

Остается доказать, что элементы $a_i \otimes b_j$ линейно-независимы в $M \otimes N$. Положим

$$h = \lambda^{i,j} a_i \otimes b_j \in M \otimes N$$

и покажем, что если $h = 0$, то все числа $\lambda^{i,j}$ тоже равны нулю. Действительно, в силу взаимности базисов имеем

$$h(a^k, b^l) = \lambda^{k,l} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1 *Размерность пространства $M \otimes N$ равна mn.*

Числа $f^{i,j}$ в формуле (5.3) являются координатами элемента f в базисе $(a_i \otimes b_j)$.

Обозначим через V l-мерное линейное пространство с базисом $v_1, \dots, v_l$. Пространства $(M \otimes N) \otimes V$ и $M \otimes (N \otimes V)$ различны, но между ними существует изоморфизм, который описывается следующим образом. Каждому элементу $g = g^{i,j,k}(a_i \otimes b_j) \otimes v_k \in (M \otimes N) \otimes V$ ставится в соответствие элемент $\widetilde{g} = g^{i,j,k} a_i \otimes (b_j \otimes v_k) \in M \otimes (N \otimes V)$.

Задача 1.4 *Докажите, что построенное соответствие действительно является линейным изоморфизмом и не зависит от выбора базисов в пространствах M, N, V.*

В смысле этого изоморфизма тензорное произведение пространств является ассоциативной операцией: $(M \otimes N) \otimes V \simeq M \otimes (N \otimes V)$.

Задача 1.5 *Пусть $u \in M$, $v \in N$, $w \in V$. Докажите, что при данном изоморфизме элементу $(u \otimes v) \otimes w$ соответствует элемент $u \otimes (v \otimes w)$.*

Отметим еще один изоморфизм.

Определим пространство $M \otimes N \otimes V$ как пространство трилинейных отображений
$$h : M^* \times N^* \times V^* \to \mathbb{R}.$$
Используя разложения по базисам
$$x = x_i a^i, \quad y = y_j b^j, \quad z = z_k v^k$$
найдем
$$h(x, y, z) = x_i y_j z_k h^{i,j,k}, \quad h^{i,j,k} = h(a^i, b^j, v^k).$$

Основываясь на этой формуле, можно показать, что базисом в пространстве $M \otimes N \otimes V$ является набор трилинейных форм
$$a_i \otimes b_j \otimes v_k,$$
которые определяются следующим образом:
$$(a_i \otimes b_j \otimes v_k)(x, y, z) = x(a_i) y(b_j) z(v_k) = x_i y_j v_k.$$

При этом отображение $h \mapsto h^{i,j,k}(a_i \otimes b_j) \otimes v_k$ является изоморфизмом пространств $M \otimes N \otimes V$ и $(M \otimes N) \otimes V$, и этот изоморфизм не зависит от выбора базисов в M, N, V.

В заключение получим

$$M \otimes N \otimes V \simeq (M \otimes N) \otimes V \simeq M \otimes (N \otimes V).$$

Между пространствами $M \otimes N$ и $N \otimes M$ тоже существует изоморфизм, независящий от выбора базисов в M и N. Этот изоморфизм строится аналогично: элементу $g = g^{i,j} a_i \otimes b_j \in M \otimes N$ мы поставим в соответствие элемент $\widetilde{g} = g^{i,j} b_j \otimes a_i \in N \otimes M$.

При этом изоморфизме элементу $u \otimes v$ соответствует элемент $v \otimes u$. Таким образом, тензорное произведение пространств коммутативно с точностью до естественного изоморфизма: $M \otimes N \simeq N \otimes M$.

В заключение отметим, что если $x = x^i a_i \in M$ и $y = y^j b_j \in N$, то в соответствии со свойствами тензорного произведения справедлива формула:

$$x \otimes y = x^i y^j a_i \otimes b_j,$$

т. е. числа $(x^i y^j)$ являются координатами тензора $x \otimes y$ в базисе (5.1).

6 Тензоры в линейном пространстве

Вернемся к m-мерному линейному пространству L. Пусть, как и выше, $e_1, \dots, e_m$ и $e^1, \dots, e^m$ – взаимные базисы в пространствах L и L^* соответственно.

Определение 1.5 *Если задан элемент пространства*

$$T(p,q,L) = \underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{p \text{ сомножителей}} \otimes \underbrace{L^* \otimes \ldots \otimes L^*}_{q \text{ сомножителей}},$$

то говорят, что на пространстве L определен p раз контравариантный и q раз ковариантный тензор, число $p+q$ называется валентностью тензора. Кроме того, будем считать, что $T(0,0,L) = \mathbb{R}$ – пространство скаляров.

Используя результат задачи 1.3 мы можем показать, что пространство $T(p,q,L)$ канонически изоморфно пространству полилинейных функций

$$t : \underbrace{L \times \ldots \times L}_{q \text{ сомножителей}} \times \underbrace{L^* \times \ldots \times L^*}_{p \text{ сомножителей}} \to \mathbb{R}.$$

В силу теоремы 1.1 набор элементов

$$(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}) \tag{6.1}$$

является базисом в $T(p,q,L)$. Размерность пространства $T(p,q,L)$ равна m^{p+q}.

Всякий тензор $t \in T(p,q,L)$ раскладывается по этому базису:

$$t = t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}. \tag{6.2}$$

Так как взаимный базис пространства L^* однозначно определен базисом в пространстве L, то координаты $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$ зависят только от базиса в L.

Подставим в формулу (6.2) выражения (4.1) и (4.6):

$$t = t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} c^{i'_1}_{i_1} \ldots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \ldots c^{j_q}_{j'_q} e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes e^{j'_q}.$$

Таким образом, в новом базисе $(e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes e^{j'_q})$ координаты тензора t имеют вид:

$$t^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q} = c^{i'_1}_{i_1} \ldots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \ldots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}. \tag{6.3}$$

Для приложений бывает полезно следующее эквивалентное определение тензора.

Определение 1.6 *Предположим, во всех системах координат пространства L заданы наборы чисел $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$, которые связаны формулами (6.3). Тогда говорят, что на пространстве L определен p раз контравариантный и q раз ковариантный тензор, или коротко – тензор типа (p,q).*

Используя это определение, рассмотрим тензорные операции. Как уже отмечалось, тензоры одного типа образуют линейное пространство. Это значит, что если имеются тензоры с компонентами $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}), (d^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) \in T(p,q,L)$ то наборы чисел $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} + d^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$ и $(\lambda t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$ также являются компонентами тензора из $T(p,q,L)$.

Теорема 1.2 *Пусть дан тензор $t = (t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) \in T(p,q,L)$. Тогда наборы чисел $(t^{i_1,\ldots,i_{r+1},i_r,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots j_q})$ и $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{l+1},j_l,\ldots,j_q})$ задают тензоры пространства $T(p,q,L)$.*

Доказательство. Проверим, что набор чисел $d^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = t^{i_1,\dots,i_{r+1},i_r,\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q}$ преобразуется по тензорному закону. Действительно, в новой системе координат имеем:

$$t^{i'_1,\dots,i'_{r+1},i'_r,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots j'_q} = c^{i'_1}_{i_1}\dots c^{i'_{r+1}}_{i_{r+1}} c^{i'_r}_{i_r}\dots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1}\dots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\dots,i_{r+1},i_r,\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q}.$$

Но это и означает, что

$$d^{i'_1,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_q} = c^{i'_1}_{i_1}\dots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1}\dots c^{j_q}_{j'_q} d^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2 *Свойство тензора* $(t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$ *быть симметричным по паре верхних индексов:* $t^{i_1,\dots,i_{r+1},i_r,\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q} = t^{i_1,\dots,i_r,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q}$ *или кососимметричным:* $t^{i_1,\dots,i_{r+1},i_r,\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q} = -t^{i_1,\dots,i_r,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q}$ *является инвариантным, т. е. если это свойство выполнено для компонент тензора в одной системе координат, то оно выполняется и во всех остальных системах координат.*

То же касается и симметрии по нижним индексам.

Действительно, предположим тензор $(t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q})$ симметричен. Тогда тензор с компонентами $(t^{i_1,\dots,i_{r+1},i_r,\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q} - t^{i_1,\dots,i_r,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots j_q})$ равен нулю, но свойство тензора быть нулевым не зависит от выбора системы координат. Аналогично проверяется инвариантность косой симметрии.

Теорема 1.3 *Пусть дан тензор* $t = (t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in T(p,q,L)$. *Тогда набор чисел*

$$(t^{i_1,\dots,i_{r-1},k,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{l-1},k,j_{l+1},\dots,j_q})$$

является тензором пространства $T(p-1,q-1,L)$.

Этот тензор называется сверткой тензора t *по индексам* i_r, j_l.

Доказательство. Используя формулу (4.2), проверим, что указанный набор чисел преобразуется по тензорному закону:

$$\begin{aligned} t^{i'_1,\dots,i'_{r-1},k,i'_{r+1},\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_{l-1},k,j'_{l+1},\dots,j'_q} &= c^{i'_1}_{i_1}\dots c^{i'_{r-1}}_{i_{r-1}} c^k_s c^{i'_{r+1}}_{i_{r+1}}\dots c^{i'_p}_{i_p} \\ &\cdot c^{j_1}_{j'_1}\dots c^{j_{l-1}}_{j'_{l-1}} c^n_k c^{j_{l+1}}_{j'_{l+1}}\dots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\dots,i_{r-1},s,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{l-1},n,j_{l+1},\dots,j_q} \\ &= c^{i'_1}_{i_1}\dots c^{i'_{r-1}}_{i_{r-1}} c^{i'_{r+1}}_{i_{r+1}}\dots c^{i'_p}_{i_p} \\ &\cdot c^{j_1}_{j'_1}\dots c^{j_{l-1}}_{j'_{l-1}} c^{j_{l+1}}_{j'_{l+1}}\dots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\dots,i_{r-1},s,i_{r+1},\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{l-1},s,j_{l+1},\dots,j_q}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 1.4 *Рассмотрим тензоры*

$$t = (t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}) \in T(p,q,L), \quad d = (d^{l_1,\dots,l_r}_{n_1,\dots,n_s}) \in T(r,s,L).$$

Числа

$$v^{i_1,\dots,i_p,l_1,\dots,l_r}_{j_1,\dots,j_q,n_1,\dots,n_s} = t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} d^{l_1,\dots,l_r}_{n_1,\dots,n_s}$$

являются компонентами тензора пространства $T(p+r, q+s, L)$.

В условиях теоремы 1.4 тензор $v = (v^{i_1,\dots,i_p,l_1,\dots,l_r}_{j_1,\dots,j_q,n_1,\dots,n_s})$ называется тензорным произведением тензоров t и d и обозначается $v = t \otimes d$.

Необходимо отметить, что такое определение тензорного произведения лишь с точностью до изоморфизма пространств совпадает с ранее введенным.

Дело в том, что в соответствии с определением 1.4 тензор v является элементом пространства $T(p,q,L) \otimes T(r,s,L)$, однако мы относим координаты этого тензора к базису пространства $T(p+r, q+s, L)$. Можно показать, что такое отображение является изоморфизмом пространств $T(p,q,L) \otimes T(r,s,L)$ и $T(p+r, q+s, L)$ и не зависит от выбора базиса пространства L.

Задача 1.6 *Докажите теорему 1.4, исходя из преобразования координат.*

7 Метрический тензор: поднятие и опускание индексов

Определение 1.7 *Симметрический тензор* $g = (g_{i,j}) \in T(0,2,L)$ *называется метрическим тензором пространства* L, *или метрикой, если он невырожден, т. е. если из равенства*

$$g_{i,j} a^i a^j = 0$$

следует, что $a^i = 0, \quad i = 1,\dots,m$, *и неотрицательно определен: для любого вектора* (a^i) *верно неравенство*

$$g_{i,j} a^i a^j \geq 0.$$

Матрица $G = (g_{i,j})$ называется матрицей Грамма. В силу симметричности и невырожденности тензора g, матрица G симметрична и невырождена. Через $(g^{i,j})$ обозначим компоненты матрицы G^{-1}, так, что $g_{i,j}g^{i,k} = \delta_j^k$.

Если на метрику не наложено условие неотрицательной определенности, то такая метрика называется индефенитной. Все дальнейшие построения относятся к случаю индефенитной метрики.

Задача 1.7 *Докажите, что свойства метрики быть неотрицательно определенной и невырожденной не зависят от выбора системы координат в L.*

Докажите, что набор чисел $(g^{i,j})$ является симметрическим тензором пространства $T(2, 0, L)$.

Если в пространстве L определена метрика, то с ее помощью мы можем ставить в соответствие тензорам с ковариантными компонентами тензоры с контравариантными компонентами и наоборот.

Например, тензору $d = (d_{l,k}^{i,j})$ можно поставить в соответствие тензор $d_{s,l,k}^{j} = d_{l,k}^{i,j} g_{i,s}$. Эта операция называется опусканием индекса у тензора d. Аналогично, тензор $d_k^{r,i,j} = d_{l,k}^{i,j} g^{l,r}$ является результатом поднятия индекса у тензора d.

Однако, надо оговаривать отдельно, какой по порядку индекс мы поднимаем или опускаем: тензоры $(d_{l,k}^{i,j} g^{l,r})$ и $(d_{l,k}^{i,j} g^{k,r})$, вообще говоря, различны.

С помощью надлежащей композиции операций поднятия и опускания индексов мы устанавливаем канонический изоморфизм между пространствами $T(p, q, L)$ и $T(p', q', L)$, $\quad p + q = p' + q'$.

8 Кососимметрические формы

Обозначим через σ биекцию множества чисел $\{1, \ldots, n\}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

которая числу $j \in \{1, \ldots, n\}$ взаимнооднозначно ставит в соответствие число $\sigma(j) \in \{1, \ldots, n\}$.

Биекции множества из n элементов называются перестановками. Множество перестановок чисел $\{1, \ldots, n\}$ обозначается через S_n.

Как известно из комбинаторики, S_n состоит из $n!$ элементов:

$$\#S_n = n!.$$

Четностью перестановки называется число

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{-1, 1\}.$$

Четность композиции перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ находится по следующей формуле:

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}). \tag{8.1}$$

Пусть, как обычно, m – размерность линейного пространства L. С точностью до канонического изоморфизма, пространство $T(0, k, L)$ состоит из полилинейных отображений вида

$$f : \underbrace{L \times \ldots \times L}_{k \text{ сомножителей}} \to \mathbb{R}.$$

Определение 1.8 *Тензор $f \in T(0, k, L)$ называется кососимметрическим, если для любой перестановки $\sigma \in S_k$ верна формула $f(u_1, \ldots, u_k) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)})$. Такие тензоры мы будем называть $k-$формами. Число k называется степенью формы.*

Пространство k-форм обозначим символом $\Lambda^k(L)$.

В частности, $\Lambda^1(L) = L^*$.

Итак, пространство $\Lambda^k(L)$ является подпространством в $T(0, k, L)$.

Задача 1.8 *Докажите, что если $k > m$, то размерность пространства $\Lambda^k(L)$ равна нулю, а если $k = m$, то – единице.*

Определение 1.9 *Пусть $f(u_1, \ldots, u_k) \in \Lambda^k(L)$ и $g(v_1, \ldots, v_l) \in \Lambda^l(L)$. Внешним произведением тензоров f и g (обозначается $f \wedge g$) называется элемент пространства $T(0, k + l, L)$, определенный формулой:*

$$(f \wedge g)(u_1, \ldots, u_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)}) g(u_{\sigma(k+1)}, \ldots, u_{\sigma(k+l)}).$$

Как видно из определения, $f \wedge g \in \Lambda^{k+l}(L)$. Кроме того операция внешнего произведения билинейна.

Теорема 1.5 *Пусть* $f \in \Lambda^p(L), \quad g \in \Lambda^q(L), \quad h \in \Lambda^r(L)$. *Тогда*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h). \tag{8.2}$$

Это свойство внешнего умножения называется ассоциативностью. Оно непосредственно проверяется в случае, когда $f, g, h \in \Lambda^1(L)$. Доказательство теоремы 1.5 мы приводим ниже, а сейчас вернемся к более элементарным свойствам внешнего умножения.

Задача 1.9 *Пусть* $f \in \Lambda^k(L)$ *и* $g \in \Lambda^l(L)$. *Докажите, что*

$$f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f.$$

Пусть $e^1, \dots, e^m$ – базис в L^*. Положим по определению

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_1}(u_{\sigma(1)}) \dots e^{i_k}(u_{\sigma(k)}).$$

Корректность такого определения обосновывается леммой 1.1 (см. ниже).

Задача 1.10 *Выведите, используя (8.1), следующую формулу:*

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\sigma(k)}}, \tag{8.3}$$

и покажите, что

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \Lambda^k(L).$$

Лемма 1.1 *Справедливо равенство:*

$$(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{l-1}}) \wedge (e^{i_l} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}. \tag{8.4}$$

Доказательство. Обозначим через $S'_k \subset S_k$ – множество перестановок, оставляющих на месте все элементы, начиная с l. Обозначим через $S''_k \subset S_k$ – множество перестановок, оставляющих на месте первые $l-1$ элементов. Очевидно,

$$\# S'_k = (l-1)!, \quad \# S''_k = (k-l+1)!.$$

Используя эти формулы, а также формулу (8.3), для произвольного набора векторов $u_1, \ldots, u_k \in L$ найдем:

$$
\begin{aligned}
&(e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_{l-1}}) \wedge (e^{i_l} \wedge \ldots \wedge e^{i_k})(u_1, \ldots, u_k) \\
&= \frac{1}{(k-l+1)!(l-1)!} \sum_{\xi \in S_k} \operatorname{sgn}(\xi) \sum_{\sigma \in S'_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S''_k} \operatorname{sgn}(\tau) \\
&\cdot e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\sigma(l-1)}} \otimes e^{i_{\tau(l)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\tau(k)}}(u_{\xi(1)}, \ldots, u_{\xi(k)}) \\
&= \frac{1}{(k-l+1)!(l-1)!} \sum_{\xi \in S_k} \operatorname{sgn}(\xi) \sum_{\sigma \in S'_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\tau \in S''_k} \operatorname{sgn}(\tau) \\
&\cdot e^{i_{\xi\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\xi\sigma(l-1)}} \otimes e^{i_{\xi\tau(l)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\xi\tau(k)}}(u_1, \ldots, u_k) \\
&= \frac{1}{(k-l+1)!(l-1)!} \sum_{\sigma \in S'_k} \sum_{\tau \in S''_k} \sum_{\xi \in S_k} \operatorname{sgn}(\xi\tau\sigma) \\
&\cdot e^{i_{\xi\tau\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\xi\tau\sigma(k)}} = e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(u_1, \ldots, u_k).
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\operatorname{sgn}(\xi\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\xi)\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

и тем, что $\tau\sigma(j) = \sigma(j)$, если $j \le l-1$, и $\tau\sigma(j) = \tau(j)$, если $j \ge l$.

Лемма доказана.

Теорема 1.6 *Набор элементов*

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k \tag{8.5}$$

является базисом пространства $\Lambda^k(L)$.

Доказательство. Рассмотрим тензор

$$f = f_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} \in \Lambda^k(L).$$

По формуле (5.3) имеем $f_{i_1,\ldots,i_k} = f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, и следовательно $f_{i_1,\ldots,i_k} = \operatorname{sgn}(\sigma) f_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}}, \quad \sigma \in S_k$. Таким образом, используя формулу (8.3), получаем:

$$
\begin{aligned}
f = f_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k} &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} f_{i_1,\ldots,i_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\sigma(k)}} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} f_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.
\end{aligned}
$$

Итак, всякий тензор f является линейной комбинацией тензоров (8.5).

Покажем, что элементы (8.5) линейно независимы. Рассмотрим линейную комбинацию:

$$h = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m} \lambda_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$$

и покажем, что если $h=0$ то $\lambda_{i_1,\ldots,i_k}=0$. Действительно, $h(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}) = \lambda_{j_1,\ldots,j_k}=0$.

Теорема доказана.

Следствие 1.3 *Размерность пространства $\Lambda^k(L)$ равна*

$$\frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Докажем теорему 1.5. В силу билинейности внешнего умножения и теоремы 1.6, нам достаточно проверить, что формула (8.2) верна для одночленов

$$f = e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_p}, \quad g = e^{j_1}\wedge\ldots\wedge e^{j_q}, \quad h = e^{l_1}\wedge\ldots\wedge e^{l_r}.$$

Но это, в свою очередь, вытекает из формулы (8.4).

Задача 1.11 *Пусть $e_1,\ldots,e_m$ и $e^1,\ldots,e^m$ – взаимные базисы в L и L^* соответственно. Рассмотрим в пространстве L векторы: $u_j = u^i_j e_i, \quad j = 1,\ldots,m$. Через U обозначим матрицу с компонентами u^i_j.*

Покажите, что

$$(e^1\wedge\ldots\wedge e^m)(u_1,\ldots,u_m) = \det U.$$

9 Тензорные величины (тензорные плотности)

В этом разделе мы обобщим понятие "тензор". По аналогии с определением 1.6 будем говорить, что в пространстве L задана скалярная величина, если каждой системе координат в L сопоставлено число. Так, системе координат $e_1, \dots, e_m$ поставлено в соответствие число a, а системе координат $e_{1'}, \dots, e_{m'}$ – число a'. Числа a и a' связаны друг с другом линейным преобразованием:

$$a' = fa,$$

где $f = f(C)$ – функция матрицы перехода от базиса $e_1, \dots, e_m$ к базису $e_{1'}, \dots, e_{m'}$. Естественно,

$$f(E) = 1, \quad E = (\delta_i^j). \tag{9.1}$$

Обозначим через a'' число, поставленное в соответствие системе координат $e_{1''}, \dots, e_{m''}$, и пусть Q – матрица перехода к этой системе от системы $e_{1'}, \dots, e_{m'}$. Соответственно, $a'' = f(Q)a' = f(Q)f(C)a$. Так как, переход от системы координат $e_1, \dots, e_m$ к системе координат $e_{1''}, \dots, e_{m''}$ осуществляется с помощью матрицы QC, мы можем написать $a'' = f(QC)a$. Следовательно функция f удовлетворяет уравнению

$$f(QC) = f(Q)f(C), \tag{9.2}$$

для любых невырожденных матриц Q, C.

В силу формул (9.1), (9.2) функция $f : GL(L) \to \mathbb{R}$ является гомоморфизмом группы невырожденных преобразований пространства L в мультипликативную группу действительных чисел.

Теорема 1.7 ([4]) *Предположим $f : GL(L) \to \mathbb{R}$ – гомоморфизм указанного вида. Тогда, существует такая константа $\sigma \in \mathbb{R}$, что либо*

$$f(C) = |\det C|^{\sigma},$$

либо

$$f(C) = |\det C|^{\sigma-1} \det C.$$

Таким образом возможны следующие случаи.

1) Скалярная величина a во всех базисах одна и та же. Тогда a это скаляр (инвариант).

2) При замене базиса величина a преобразуется по закону

$$a' = |\det C|^{-1} \det C a = \operatorname{sgn}(\det C) a,$$

в этом случае величина a называется осевым (аксиальным) инвариантом, или аксиальной скалярной величиной.

3) Если $a' = |\det C|^\sigma a, \quad \sigma \neq 0$, то a это псевдоинвариант веса σ.

4) Если $a' = |\det C|^{\sigma-1} \det C a, \quad \sigma \neq 0$, то a – осевой (аксиальный) псевдоинвариант веса σ.

Пример. В пространстве L задана билинейная функция (тензор типа (0,1)). Определитель матрицы этой билинейной функции – псевдоинвариант веса 2.

С точностью до канонического изоморфизма, пространство $T(p, q, L)$ состоит из полилинейных функций

$$t: \quad \underbrace{L \times \ldots \times L}_{q \text{ сомножителей}} \quad \times \quad \underbrace{L^* \times \ldots \times L^*}_{p \text{ сомножителей}} \quad \to \mathbb{R}.$$

Само значение полилинейной функции является скаляром, т. е. не зависит от того в каком базисе мы его вычисляем.

Теперь мы будем рассматривать полилинейные функции, значения которых, являются скалярными величинами. Сами такие функции называются тензорными величинами.

Пусть $e_1, \ldots, e_m$ и $e_{1'}, \ldots, e_{m'}$ – произвольные базисы в L, связанные матрицей перехода $C = (c^i_{i'})$.

Следующее определение обобщает определение 1.6.

Определение 1.10 *Предположим, что каждому базису пространства L поставлен в соответствие набор чисел $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$, и эти наборы связаны друг с другом формулами*

$$t^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q} = |\det C|^{\sigma-1} \det C c^{i'_1}_{i_1} \ldots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \ldots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}. \tag{9.3}$$

Тогда говорят, что в пространстве L задан аксиальный псевдотензор типа (p, q) веса σ. Множество таких псевдотензоров обозначим через $T^a_\sigma(p, q, L)$.

Предположим, что каждому базису пространства L поставлен в соответствие набор чисел $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$, и эти наборы связаны друг с другом формулами

$$t^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q} = |\det C|^{\sigma} c^{i'_1}_{i_1} \ldots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \ldots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}. \tag{9.4}$$

Тогда говорят, что в пространстве L задан псевдотензор типа (p, q) веса σ. Множество таких псевдотензоров обозначим через $T_\sigma(p, q, L)$.

В обоих случаях набор чисел $(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q})$ будем называть координатами тензорной величины в базисе $e_1, \ldots, e_m$, координаты $(t^{i'_1,\ldots,i'_p}_{j'_1,\ldots,j'_q})$ при этом, соответствуют базису $e_{1'}, \ldots, e_{m'}$.

Аксиальные псевдотензоры веса 0 называют аксиальными тензорами. Псевдотензоры веса 0 являются тензорами в обычном смысле.

Множества $T_\sigma^a(p,q,L)$ и $T_\sigma(p,q,L)$ образуют линейные пространства относительно операций покоординатного сложения и умножения на число.

Полилинейная функция , значение которой является скалярной величиной, строится по своим координатам следующим образом:

$$t = t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \in T_\sigma^a(p,q,L) \quad \text{или} \quad T_\sigma(p,q,L).$$

Как и в случае обычных тензоров, операция перестановки местами пары верхних или нижних индексов (теорема 1.2) не меняет тип и вес тензорной величины. Операция свертки (теорема 1.3) уменьшает на единицу количество ковариантных и контравариантных индексов у тензорной величины, но не меняет ее вес.

Тензорное произведение тензорных величин определяется так же, как в теореме 1.4. Вес тензорного произведения двух тензорных величин равен сумме весов сомножителей. При этом тензорное произведение двух аксиальных псевдотензоров дает псевдотензор; тензорное произведение аксиального псевдотензора на псевдотензор дает аксиальный псевдотензор; тензорное произведение двух псевдотензоров дает псевдотензор.

Предположим, что в пространстве L задан метрический тензор $g_{i,j}$ (положительно определенный). Можно показать, что определитель матрицы Грамма $g = \det(g_{i,j})$ является псевдоинвариантом веса 2. Это позволяет установить канонический изоморфизм между пространствами тензорных величин различного веса. Действительно пространство $T_{\sigma_1}(p,q,L)$ канонически изоморфно пространству $T_{\sigma_2}(p,q,L)$. Изоморфизм дается следующей формулой:

$$T_{\sigma_1}(p,q,L) \ni (t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}) \leftrightarrows (g^{(\sigma_2-\sigma_1)/2} t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}) \in T_{\sigma_2}(p,q,L).$$

Точно также строится канонический изоморфизм между пространствами $T_{\sigma_1}^a(p,q,L)$ и $T_{\sigma_2}^a(p,q,L)$.

Пусть $L = \mathbb{R}^3$. Оказывается, что пространство $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ канонически изоморфно пространству $T_1^a(1,0,\mathbb{R}^3)$. Изоморфизм строится следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1^a(1,0,\mathbb{R}^3) \ni u &= u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3 \\ &\leftrightarrows \omega_u = u^3 e^1 \wedge e^2 + u^1 e^2 \wedge e^3 + u^2 e^3 \wedge e^1 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Если в добавок в $\mathbb{R}^3$ имеется метрический тензор то пространство $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ канонически изоморфно пространству аксиальных векторов:

$$T_0^a(1,0,\mathbb{R}^3) \ni u = \frac{1}{\sqrt{g}}(u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3) \\ \leftrightarrows \omega_u = u^3 e^1 \wedge e^2 + u^1 e^2 \wedge e^3 + u^2 e^3 \wedge e^1 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3). \quad (9.5)$$

Этот изоморфизм позволяет построить векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что в $\mathbb{R}^3$ задан метрический тензор $g_{i,j}$. Тогда опуская индексы у векторов $v = (v^i)$ и $w = (w^i)$ построим 2-форму:

$$\omega = (v_i e^i) \wedge (w_i e^i), \quad v_i = g_{i,j} v^j, \quad w_i = g_{i,j} w^j.$$

Аксиальный вектор, который соответствует этой форме при изоморфизме (9.5), называется векторным произведением вектора v на w.

Глава 2

Дифференциальное исчисление тензоров

1 Введение

Этот раздел посвящен элементам дифференциального исчисления тензоров. Рассмотрены следующие темы: дифференциальные формы и внешнее дифференцирование, производная Ли, связность и ковариантное дифференцирование, тензор Римана.

Отметим некоторые особенности изложения.

Для понимания курса требуется знание линейной алгебры в объеме учебника [4].

Все функции, встречающиеся в этом курсе, считаются бесконечно дифференцируемыми в своих областях определения.

Так как дифференцирование является локальной операцией, мы не вводим понятие многообразия. Все построения происходят на поверхности, которая состоит из одной карты и, для удобства восприятия, вложена в пространство большей размерности. Несмотря на указанную специфику, все результаты легко переносится на случай произвольного гладкого многообразия.

2 Понятие m-мерной поверхности

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из точек с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_j \in \mathbb{R}$. Удобно также считать, что каждая точка задана своим радиус-вектором $\mathbf{r} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Представим себе, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ движется точка. Это значит, что ее радиус-вектор зависит от времени:

$$\mathbf{r}(t) = (a_1(t), \ldots, a_n(t)). \tag{2.1}$$

В этом случае вектор-функция (2.1) задает кривую в пространстве $\mathbb{R}^n$, которая является траекторией точки. Каждому значению параметра t соответствует точка кривой с радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$.

Вектор

$$e(t) = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \Big(\frac{da_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{da_n(t)}{dt}\Big)$$

задает скорость точки в момент времени t и касается кривой.

Очевидно, если скорость точки не обращается в ноль, то ее траектория будет гладкой, т. е. не будет иметь изломов.

Кривая является примером одномерной поверхности в $\mathbb{R}^n$. Обобщая этот пример, введем определение поверхности.

Обозначим через B единичный шар пространства $\mathbb{R}^m$, $\quad m \leq n$:

$$B = \Big\{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid |x|^2 = \sum_{i=1}^{m} (x^i)^2 < 1\Big\}.$$

Определение 2.1 *Предположим, что задана вектор-функция*

$$\mathbf{r}(x) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in B. \tag{2.2}$$

Тогда множество точек $M = \{\mathbf{r}(x) \mid x \in B\}$ называется $m-$мерной поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^n$, если выполнены следующие условия:

1) Отображение $\mathbf{r} : B \to M$ взаимнооднозначно,

2) Векторы $e_j(x) = \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x^j}$, $\quad j = 1, \ldots, m$ линейно независимы при всех $x \in B$. Они называются базисными векторами на поверхности.

Числа $x = (x^1, \ldots, x^m)$ называются координатами точки поверхности с радиус-вектором $\mathbf{r}(x)$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ называется объемлющим пространством.

В дальнейшем мы будем отождествлять координаты точки поверхности с самой точкой и писать $x = (x^1, \ldots, x^m) \in M$, кроме того, там, где это не приводит к недоразумениям, мы опускаем аргументы функций и пишем e_j вместо $e_j(x)$.

Рассмотрим пример. Зададим в пространстве $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность радиус-вектором

$$\mathbf{r}(x^1, x^2) = (2x^1, x^2, 1 - (x^1)^2 - 3(x^2)^2), \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 < 1. \tag{2.3}$$

Здесь $e_1 = (2, 0, -2x^1)$, $\quad e_2 = (0, 1, -6x^2)$. Очевидно, эта поверхность является параболоидом.

Вернемся к общему случаю. Если у радиус-вектора (2.2) зафиксировать все аргументы, кроме x^i, то получится радиус-вектор, зависящий от одного аргумента. Этот радиус-вектор задает кривую на поверхности M, которая называется i-ой координатной линией. Придавая различные значения зафиксированным координатам, мы получим семейство i-х координатных линий.

Вектор e_i является касательным вектором к i-ой координатной линии.

Меняя в этой конструкции индекс i от 1 до m, мы покрываем поверхность M координатной сеткой.

Определение 2.2 *Пусть $\widehat{x} \in M$. Линейное пространство с базисом $e_i(\widehat{x})$, $\quad i = 1, \ldots, m$ называется касательным пространством к поверхности M в точке $\widehat{x}$ и обозначается $T_{\widehat{x}}M$.*

Пространство, сопряженное с $T_{\widehat{x}}M$, называется кокасательным пространством в точке $\widehat{x}$ и обозначается $T^*_{\widehat{x}}M$.

Из определения поверхности следует, что размерность касательного пространства во всех точках равна m.

Геометрически пространство $T_{\widehat{x}}M$ представляет собой $m-$мерную плоскость, которая касается поверхности M в точке $\widehat{x}$ и состоит из точек, заданных радиус-векторами

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\widehat{x}) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in T_{\widehat{x}}M.$$

3 Замены координат на поверхности

Рассмотрим взаимно однозначное отображение шара B в себя, которое точке с координатами $x = (x^i)$ ставит в соответствие точку с координатами $x'(x) = (x^{i'}(x^1, \ldots, x^m))$. Положим, что якобиан этого отображения не равен нулю ни в одной точке шара:

$$\det(c_i^{i'}) \neq 0, \quad c_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Такое отображение называется диффеоморфизмом. По теореме о неявной функции определено обратное отображение $x(x')$, матрица Якоби которого имеет компоненты

$$c^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

причем $c^{i'}_j c^k_{i'} = \delta^k_j$.

Теперь мы можем задать поверхность M с помощью радиус-вектора $\mathbf{r}'(x')$:

$$\mathbf{r}'(x') = \mathbf{r}(x(x')). \tag{3.1}$$

Вектор-функция $\mathbf{r}'(x')$ задает на поверхности новую координатную сетку с координатами x' и базисными векторами

$$e_{j'}(x') = \frac{\partial \mathbf{r}'(x')}{\partial x^{j'}}, \quad j' = 1, \ldots, m.$$

Для того, чтобы найти закон, связывающий векторы старого и нового базиса, продифференцируем формулу (3.1) по $x^{j'}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}'(x')}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial \mathbf{r}(x)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}},$$

или

$$e_{j'} = c^k_{j'} e_k. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) показывает, что вектор-функция $\mathbf{r}'(x')$ удовлетворяет условиям определения 2.1. Действительно, так как матрица с компонентами $c^k_{j'}$ невырождена, то векторы $e_{j'}$ линейно независимы.

Таким образом, всякий диффеоморфизм шара B задает замену координат в M и приводит к линейной замене базиса в пространстве $T_{\hat{x}}M$ по формулам (3.2). Соответственно, закон преобразования взаимных базисов в пространстве $T^*_{\hat{x}}M$ имеет вид:

$$e^{j'} = c^{j'}_k e^k, \tag{3.3}$$

здесь базис $e^{j'}$ взаимен с базисом $e_{j'}$, а базис e^k взаимен с базисом e_k.

Если базисные ковекторы e^i переобозначить через dx^i, т. е. $dx^i = e^i$, то уравнение (3.3) примет более естественную форму:

$$dx^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} dx^k.$$

По тем же причинам, в силу формулы (3.2), векторы e_j иногда обозначают символами соответствующих частных производных:

$$e_j = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

4 Тензорные поля на поверхности

Обозначим через $T(p,q,L)$ множество тензоров типа (p,q) в линейном пространстве L.

В каждом касательном пространстве $T_x(M), \quad x \in M$ зададим тензор типа (p,q) с координатами

$$t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x). \tag{4.1}$$

Соответственно, если в наборе функций (4.1) положить $x = \widehat{x}$, где $\widehat{x}$– любая фиксированная точка поверхности M, то мы получим набор чисел $t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(\widehat{x})$, задающий координаты тензора в касательном пространстве $T_{\widehat{x}}(M)$.

Определение 2.3 *Функция*

$$t : M \to \bigcup_{x\in M} T(p,q,T_x(M)),$$

которая каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие тензор типа (p,q) в пространстве $T_x(M)$, называется тензорным полем на поверхности M. Пространство таких функций мы обозначим через $T(p,q,M)$.

Так, тензор типа $(0,0)$ – это скалярная функция $f : M \to \mathbb{R}$.

Вместо слова "тензорное поле"мы иногда будем просто говорить "тензор".

К элементам пространства $T(p,q,M)$ применимы все операции, которые рассматриваются в алгебраической теории тензоров (тензорное произведение, свертка и т. д.).

В частности, при переходе от координат x к координатам x' на поверхности M, координаты тензора типа (p,q) преобразуются следующим образом:

$$t^{i'_1,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_q} = c^{i'_1}_{i_1}\dots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1}\dots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}, \tag{4.2}$$

где в силу формул (3.2), (3.3)

$$t^{i'_1,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_q} = t^{i'_1,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_q}(x'), \qquad t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x(x')),$$
$$c^k_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}(x'), \qquad c^{k'}_k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}(x(x')).$$

Однако, так как элементы пространства $T(p,q,M)$ являются функциями точки $x \in M$, то кроме алгебраических операций, к ним применимы операции анализа, к изучению которых мы и переходим.

Задача 2.1 *Рассмотрим функцию $f : M \to \mathbb{R}$. Докажите, что набор функций*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

задает координаты тензора типа $(0,1)$, то есть ковектора.

5 Производная Ли

Нам понадобится несколько фактов из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробное изложение содержится в [1].

Зададим на поверхности M векторное поле (т. е. тензор типа $(1,0)$) с компонентами $v(x) = (v^1(x), \dots, v^m(x))$. Для того, чтобы найти кривую

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t)) \in M,$$

которая проходит через точку $\widehat{x} = (\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^m)$ и касается этого векторного поля во всех своих точках, надо решить следующую задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x), \quad x^i(0) = \widehat{x}^i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Решение такой задачи существует (по крайней мере при достаточно малых $|t|$) и единственно.

Обозначим это решение через $g^t(\widehat{x}) = ((g^t)^1(\widehat{x}), \dots, (g^t)^m(\widehat{x}))$:

$$\frac{dg^t(\widehat{x})}{dt} = v(g^t(\widehat{x})), \quad g^0(\widehat{x}) = \widehat{x}.$$

Рассмотрим область D, компактно принадлежащую M. Через $g^t(D)$ обозначим образ этой области при отображении g^t. Можно показать, что при малых $|t|$ отображение $x \mapsto g^t(x)$ является диффеоморфизмом областей D и $g^t(D)$, причем g^{-t} является обратным диффеоморфизмом.

Нам понадобятся следующие асимптотические формулы для матриц Якоби отображений $y(x) = g^t(x)$ и $x = g^{-t}(y)$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta^i_j - t\frac{\partial v^i(x)}{\partial x^j} + o(t), \quad t \to 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + t\frac{\partial v^i(x)}{\partial x^j} + o(t). \tag{5.2}$$

Кроме того, отметим, что

$$g^t(x) = x + tv(x) + o(t), \quad t \to 0. \tag{5.3}$$

Производная Ли тензорного поля обобщает понятие производной по направлению от функции. Зададим функцию $f : M \to \mathbb{R}$.

Для того, чтобы характеризовать изменение этой функции вдоль векторного поля v, рассмотрим следующую производную:

$$\frac{d}{dt} f(g^t(x)).$$

Значение этой производной при $t = 0$ называется производной Ли от функции f вдоль векторного поля v и обозначается $L_v f$. В силу формулы (5.3), производная Ли от функции имеет вид

$$L_v f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

В случае произвольного тензорного поля с координатами $u^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x)$ нам недостаточно просто подставить преобразование $g^t(x)$ в аргумент функций $u^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}(x)$, так как не только аргумент, но и сами эти функции меняются при преобразовании $x \mapsto g^t(x)$. Поэтому удобно трактовать отображение $y = g^t(x)$ как замену координат в D. Тогда производная Ли определяется следующим образом.

Определение 2.4 *Производной Ли тензорного поля* $u = u^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \in T(p,q,M)$ *называется тензор пространства* $T(p,q,M)$ *с координатами:*

$$(L_v u)^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c^{i_1}_{i'_1} \dots c^{i_p}_{i'_p} c^{j'_1}_{j_1} \dots c^{j'_q}_{j_q} u^{i'_1,\dots,i'_p}_{j'_1,\dots,j'_q}(g^t(x)),$$

здесь

$$c_k^{l'} = \frac{\partial y^{l'}}{\partial x^k}(x), \quad c_{k'}^{l} = \frac{\partial x^l}{\partial y^{k'}}(y(x)).$$

Производная Ли является линейным оператором в $T(p,q,M)$, и для любых тензоров h и b выполнено правило Лейбница:

$$L_v(h \otimes b) = L_v h \otimes b + h \otimes L_v b.$$

В качестве примера найдем координаты производной Ли от векторного поля w. Используя формулы (5.2), (5.3) вычислим:

$$\begin{aligned} c_{i'}^i w^{i'}(g^t(x)) &= \Big(\delta_{i'}^i - t\frac{\partial v^i}{\partial x^{i'}} + o(t)\Big) \cdot \Big(w^{i'}(x) + \frac{\partial w^{i'}}{\partial x^k} v^k t + o(t)\Big) \\ &= w^i + t\Big(\frac{\partial w^i}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^i}{\partial x^{i'}} w^{i'}\Big) + o(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(L_v w)^j = \frac{\partial w^j}{\partial x^k} v^k - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} w^i. \tag{5.4}$$

Задача 2.2 *Используя формулы (5.1), (5.2), (5.3), найдите координаты производной Ли вдоль векторного поля v от тензора $a_j^i(x) \in T(1,1,M)$.*

Производная Ли от одного векторного поля вдоль другого обладает рядом замечательных свойств, некоторые из которых мы сейчас отметим.

Векторное поле $L_v w$ назовем коммутатором полей v и w и обозначим

$$[v,w] = L_v w.$$

Коммутатор, очевидно, является билинейной операцией. Кроме того, он кососимметричен: $[v,w] = -[w,v]$, и для него выполнено тождество Ли:

$$[u,[v,w]] + [w,[u,v]] + [v,[w,u]] = 0, \quad u,v,w \in T(1,0,M).$$

Таким образом, пространство $T(1,0,M)$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования.

Задача 2.3 *Используя формулу (5.4), проверьте перечисленные выше свойства коммутатора.*

6 Дифференциальные формы

Определение 2.5 *Дифференциальной k-формой называется ковариантный кососимметрический тензор валентности k.*

Напомним некоторые факты из алгебраической теории тензоров. Множество ковариантных кососимметрических тензоров валентности k образует линейное пространство, которое мы обозначим через $\Lambda^k(M)$. Тензоры

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$$

задают базис в каждом пространстве $\Lambda^k(T_xM), \quad x \in M$.

Всякий элемент $\omega \in \Lambda^k(M)$ раскладывается по этому базису следующим образом:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{6.1}$$

Если k больше размерности M, то дифференциальная форма тождественно равна нулю.

Функции $\omega_{i_1,\ldots,i_k}$, которые являются координатами тензора ω, кососимметричны по своим индексам:

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k} = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)}}, \quad \sigma \in S_k.$$

Так как дифференциальные формы являются функциями точки $x \in M$, то над ними, кроме алгебраических операций, можно выполнять еще и операции анализа.

Определение 2.6 *Внешним дифференциалом называется линейный оператор $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$, который на форму (6.1) действует следующим образом*

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{6.2}$$

Конечно, данное определение нуждается в проверке корректности: мы должны доказать, что выражение (6.2) действительно является дифференциальной формой.

Для простоты сначала проверим этот факт на примере дифференцирования 1−формы.

Рассмотрим форму $\omega = \omega_i dx^i$. По определению

$$d\omega = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{j<i} \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \Big) dx^j \wedge dx^i.$$

Очевидно, набор функций

$$u_{i,j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i}$$

кососимметричен по своим индексам. Покажем, что $u_{i,j}$ – компоненты двухвалентного ковариантного тензора. Для этого заметим, что так как функции ω_i являются компонентами ковектора, то при замене координат $x^i \mapsto x^{i'}$ они преобразуются по формуле:

$$\omega_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \omega_i.$$

Дифференцируя эту формулу по $x^{s'}$, получаем:

$$\frac{\partial \omega_{i'}}{\partial x^{s'}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{s'} \partial x^{i'}} \omega_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^l}.$$

Меняя в последней формуле местами i' и s' и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{s'} \partial x^{i'}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{s'}},$$

находим:

$$\frac{\partial \omega_{i'}}{\partial x^{s'}} - \frac{\partial \omega_{s'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{s'}} \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \omega_l}{\partial x^i} \Big).$$

Но это и означает, что функции $u_{i,j}$ преобразуются по ковариантному закону.

В общем виде мы докажем корректность определения 2.6 ниже. А сейчас, считая временно, что система координат x фиксирована, изучим свойства оператора внешнего дифференцирования.

На функции этот оператор действует как обычный дифференциал:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \tag{6.3}$$

Теорема 2.1 *Рассмотрим формы $\omega_1 \in \Lambda^p(M)$ и $\omega_2 \in \Lambda^q(M)$. Справедливы следующие формулы:*

$$dd\omega_1 = 0, \tag{6.4}$$
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \tag{6.5}$$

Задача 2.4 *Докажите формулу (6.4).*

Докажем формулу (6.5). В силу линейности операции d формулу (6.5) достаточно проверить лишь для случая, когда ω_1 и ω_2 – одночлены:

$$\omega_1 = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \quad \omega_2 = g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Тогда

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&d(\omega_1 \wedge \omega_2) \\
&\quad = \frac{\partial f}{\partial x^k} g\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \\
&\quad + f \frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \\
&\quad = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge (g\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}) \\
&\quad + (-1)^p (f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \right) \\
&\quad = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2,
\end{aligned}$$

где мы использовали тождество

$$\begin{aligned}
&dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} \\
&\qquad = (-1)^p dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.
\end{aligned}$$

Теорема 2.2 *Линейный оператор $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ однозначно определен свойствами (6.3), (6.4), (6.5).*

Доказательство Пусть ∂ – какая-нибудь другая операция, обладающая перечисленными свойствами. Тогда если форма ω определена формулой (6.1), то в силу линейности и свойства (6.5) имеем:

$$\partial\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m} \Big((\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x))dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$
$$+\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial dx^{i_l}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\Big). \qquad (6.6)$$

По формуле (6.3) получим

$$\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{\partial\omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^s}dx^s, \quad \partial x^s = dx^s.$$

Из последней формулы и ввиду свойства (6.4) находим $\partial dx^s = \partial\partial x^s = 0$. Подставляя все эти формулы в (6.6), получаем $\partial\omega = d\omega$.

Теорема доказана.

Таким образом, если в разных системах координат определить операторы внешнего дифференцирования формулой (6.2), то ввиду теоремы 2.2 и инвариантности свойств (6.3), (6.4), (6.5) эти операторы совпадут. Это и доказывает корректность определения оператора d.

В заключение отметим некоторые формулы, связывающие внешнее дифференцирование и производную Ли.

Задача 2.5 *Пусть* $\omega_1\in\Lambda^p(M)$ *и* $\omega_2\in\Lambda^q(M)$, $\quad v\in T(1,0,M)$.

Докажите, что

$$dL_v\omega_1 = L_v d\omega_1, \quad L_v(\omega_1\wedge\omega_2) = (L_v\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge(L_v\omega_2).$$

Определим оператор гомотопии $i_v : \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k-1}(M)$, $\quad v\in T(1,0,M)$ формулой:

$$i_v \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m}\omega_{i_1,\ldots,i_k}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$
$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le m}\omega_{j,i_1\ldots,i_{k-1}}v^j dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{k-1}}.$$

Задача 2.6 *Пусть* $\omega_1\in\Lambda^p(M)$ *и* $\omega_2\in\Lambda^q(M)$. *Докажите, что*

$$i_v i_v\omega_1 = 0,$$
$$i_v(\omega_1\wedge\omega_2) = (i_v\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^p\omega_1\wedge(i_v\omega_2),$$
$$i_v d\omega_1 + d i_v\omega_1 = L_v\omega_1.$$

Последняя формула называется формулой гомотопии (по существу, это просто правило Лейбница).

7 Связность, тензор кручения

Как уже отмечалось, если задана функция $f : M \to \mathbb{R}$, то ее частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

образуют ковариантный тензор. Однако, как легко проверить, набор вторых частных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

никакого тензора, вообще говоря, не образует. Кроме того, тензором не является, например, набор частных производных от компонент векторного поля.

Для того, чтобы преодолеть это неудобство, мы построим операцию, которая является инвариантной версией частного дифференцирования и одновременно обобщает понятие градиента функции.

Определение 2.7 *Будем говорить, что на поверхности M задана аффинная связность, если каждому векторному полю $v \in T(1,0,M)$ сопоставлена операция*

$$\nabla_v : T(p,q,M) \to T(p,q,M),$$

определенная при всех целых неотрицательных p,q и обладающая следующими свойствами.

Для всякой функции $f : M \to \mathbb{R}$, векторных полей u, v, ковекторного поля g и тензоров $U, V \in T(p,q,M)$, $\quad W \in T(p',q',M)$ выполнены равенства:

$$\nabla_u(U+V) = \nabla_u U + \nabla_u V, \tag{7.1}$$
$$\nabla_{fu+v} U = f\nabla_u U + \nabla_v U, \tag{7.2}$$
$$\nabla_u(fU) = f\nabla_u U + (L_u f)U, \tag{7.3}$$
$$\nabla_u(U \otimes W) = (\nabla_u U) \otimes W + U \otimes (\nabla_u W), \tag{7.4}$$
$$\nabla_u g(v) = (\nabla_u g)(v) + g(\nabla_u v). \tag{7.5}$$

Операция ∇_v называется ковариантным дифференцированием вдоль векторного поля v.

Подставляя $W = f$ в формулу (7.4), и сравнивая результат с (7.3), находим:

$$\nabla_u f = L_u f.$$

Обсудим определение 2.7. Мы могли бы задать операцию ∇_u формулами (7.1-7.3) только на векторах (или только на ковекторах). Тогда формула (7.4) позволяет нам продолжить операцию ковариантного дифференцирования на контравариантные (ковариантные) тензоры любой валентности, а формула (7.5) – на ковариантные (контравариантные) тензоры.

Формула (7.5) используется при выводе равенства (7.9).

Сделаем некоторые предварительные замечания. Введем обозначение

$$\nabla_k = \nabla_{e_k}.$$

В частности, для функции f имеем

$$\nabla_k f = \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Таким образом, операция ∇_k обобщает операцию частного дифференцирования по x^k.

Разложим вектор $\nabla_k e_j$ по базису:

$$\nabla_k e_j = \Gamma^l_{j,k} e_l. \tag{7.6}$$

Функции $\Gamma^l_{j,k}$ называются символами Кристоффеля, ниже мы увидим, что именно они задают операцию ковариантного дифференцирования.

Предложение 2.1 *Верны формулы*

$$\nabla_k e^j = -\Gamma^j_{i,k} e^i. \tag{7.7}$$

Доказательство. Применим операцию ∇_k к левой и правой части тождества:

$$e^j(e_i) = \delta^j_i.$$

В силу формулы (7.5) получим

$$(\nabla_k e^j)(e_i) + e^j(\nabla_k e_i) = 0. \tag{7.8}$$

Разложим ковектор $\nabla_k e^j$ по взаимному базису:

$$\nabla_k e^j = \tilde{\Gamma}^j_{s,k} e^s.$$

Подставляя эту формулу и формулу (7.6) в (7.8), находим, что

$$\tilde{\Gamma}^j_{i,k} = -\Gamma^j_{i,k}. \tag{7.9}$$

Это и доказывает формулу (7.7).

В качестве примера посмотрим, как ковариантное дифференцирование действует на тензор $H = h^j_i e_j \otimes e^i$. Зададим векторное поле $v = v^k e_k$ и вычислим, используя формулы (7.1)-(7.4):

$$\nabla_v H = \nabla_{v^k e_k} h^j_i e_j \otimes e^i = v^k (h^j_i \nabla_k (e_j \otimes e^i) + (L_{e_k} h^j_i) e_j \otimes e^i). \tag{7.10}$$

Очевидно,

$$L_{e_k} h^j_i = \frac{\partial h^j_i}{\partial x^k}.$$

По формуле (7.4) имеем:

$$\nabla_k (e_j \otimes e^i) = (\nabla_k e_j) \otimes e^i + e_j \otimes \nabla_k e^i.$$

Следовательно, задача о вычислении ковариантной производной от тензора сводится к вычислению векторов $\nabla_k e_j$ и ковекторов $\nabla_k e^i$. Последние выражаются по формулам (7.6), (7.7).

Возвращаясь к формуле (7.10), найдем:

$$\begin{aligned} \nabla_v H &= v^k \Big(h^j_i (\Gamma^l_{j,k} e_l \otimes e^i - \Gamma^i_{s,k} e_j \otimes e^s) + \frac{\partial h^j_i}{\partial x^k} e_j \otimes e^i \Big) \\ &= v^k \Big(h^j_i \Gamma^l_{j,k} - h^l_s \Gamma^s_{i,k} + \frac{\partial h^l_i}{\partial x^k} \Big) e_l \otimes e^i. \end{aligned} \tag{7.11}$$

В частности

$$\nabla_k H = \Big(h^j_i \Gamma^l_{j,k} - h^l_s \Gamma^s_{i,k} + \frac{\partial h^l_i}{\partial x^k} \Big) e_l \otimes e^i.$$

Так как в формуле (7.11) векторное поле v произвольно, мы можем ввести тензорное поле типа $(1, 2)$

$$\nabla H = w^l_{i,k} e_l \otimes e^i \otimes e^k, \quad w^l_{i,k} = h^j_i \Gamma^l_{j,k} - h^l_s \Gamma^s_{i,k} + \frac{\partial h^l_i}{\partial x^k}.$$

Это тензорное поле называется ковариантной производной тензора H. Часто ковариантная производная записывается следующим образом:

$$\nabla_k h_i^l = h_i^j \Gamma_{j,k}^l - h_s^l \Gamma_{i,k}^s + \frac{\partial h_i^l}{\partial x^k}. \tag{7.12}$$

Обратим внимание на то, что эта запись – символическая. Символом $\nabla_k h_i^l$ здесь обозначена вовсе не "ковариантная производная по x^k от функции h_i^l", а компонента тензора ∇H, который является результатом ковариантного дифференцирования тензора $H = (h_i^l)$.

Формулы (7.6), (7.7) позволяют, пользуясь свойствами (7.1)-(7.4), найти ковариантную производную от любого тензора. Поэтому, действуя аналогично, мы можем любому тензорному полю $U \in T(p, q, M)$ сопоставить его ковариантную производную $\nabla U \in T(p, q+1, M)$.

Задача 2.7 *Пусть $v = (v^k)$ – векторное поле, и $a = (a_{i,j}) \in T(0, 2, M)$. Выведите формулы:*

$$\nabla_r v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} + \Gamma_{s,r}^k v^s, \tag{7.13}$$

$$\nabla_k a_{i,j} = \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x^k} - a_{s,j}\Gamma_{i,k}^s - a_{i,s}\Gamma_{j,k}^s. \tag{7.14}$$

Предложение 2.2 *При замене системы координат в M символы Кристоффеля преобразуются по формуле*

$$\Gamma_{r,s}^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s} \Gamma_{r',s'}^{k'} + \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^r \partial x^s} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}. \tag{7.15}$$

Доказательство. Используя формулы преобразования базисных векторов и свойства связности, вычислим

$$\begin{aligned}\Gamma_{j,k}^s e_s &= \nabla_k \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j} e_{s'} = \frac{\partial^2 x^{s'}}{\partial x^j \partial x^k} e_{s'} + \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j} \nabla_k e_{s'} \\ &= \frac{\partial^2 x^{s'}}{\partial x^j \partial x^k} e_{s'} + \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \nabla_{k'} e_{s'} = \frac{\partial^2 x^{s'}}{\partial x^j \partial x^k} e_{s'} + \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{s',k'}^{l'} e_{l'}.\end{aligned}$$

Отсюда и по формуле

$$e_s = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^s} e_{i'},$$

находим

$$\Gamma^s_{j,k}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^s}e_{i'} = \frac{\partial^2 x^{s'}}{\partial x^j \partial x^k}e_{s'} + \frac{\partial x^{s'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^{l'}_{s',k'}e_{l'}.$$

Для завершения доказательства надо приравнять коэффициенты при $e_{l'}$ в последней формуле.

Задача 2.8 *Покажите, что если формула (7.15) верна, то обратное преобразование записывается аналогично:*

$$\Gamma^{k'}_{r',s'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{s'}}\Gamma^k_{r,s} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{r'}\partial x^{s'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

Это показывает непротиворечивость аксиом связности.

Из формулы (7.15) вытекает, что функции

$$T^k_{r,s} = \Gamma^k_{r,s} - \Gamma^k_{s,r}$$

являются компонентами тензорного поля типа $(1,2)$. Поэтому свойство символов Кристоффеля быть симметричными по нижним индексам не зависит от системы координат.

Тензорное поле

$$T = (T^k_{r,s}), \quad T^k_{r,s} = -T^k_{s,r}$$

называется тензором кручения аффинной связности. Если тензор кручения равен нулю, то говорят, что связность является симметричной.

Имеется инвариантное определение тензора кручения. Зададим билинейный кососимметрический оператор $T : T(1,0,M) \times T(1,0,M) \to T(1,0,M)$ формулой:

$$T(\xi,\eta) = T^i_{j,k}\xi^j\eta^k e_i.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$T(\xi,\eta) = \nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi - [\xi,\eta].$$

Приведем один простой факт, который часто бывает полезен при выводе разных формул.

Предложение 2.3 *Предположим, что связность симметрична. Тогда в достаточно малой окрестности любой точки $\widehat{x} \in M$ можно ввести координаты $x^{i'}$ в которых $\Gamma^{k'}_{r',s'}(\widehat{x}) = 0$.*

Доказательство. Не сужая общности, будем считать, что $\widehat{x} = 0$. Сделаем замену координат:

$$x^{i'} = x^i + \frac{1}{2}\Gamma^i_{j,l}(0)x^j x^l.$$

По формуле (7.15) находим: $\Gamma^{k'}_{r',s'}(0) = 0$.

Предложение доказано.

В заключение этого раздела отметим, что если отказаться от гипотезы (7.5), то равенство (7.9), вообще говоря, не будет выполняться. Можно показать, что функции $\tilde{\Gamma}^k_{r,s}$ при замене системы координат преобразуются по формуле:

$$\tilde{\Gamma}^k_{r,s} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{r'}}{\partial x^r}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^s}\tilde{\Gamma}^{k'}_{r',s'} - \frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^r \partial x^s}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}.$$

Отсюда следует, что $S^k_{r,s} = \tilde{\Gamma}^k_{r,s} + \Gamma^k_{r,s}$ – тензор. Этот тензор ввел Эйнштейн. Формула (7.5) верна тогда и только тогда, когда $S^k_{r,s} = 0$.

В книге [6] рассматриваются примеры связностей, для которых $S^k_{r,s} \neq 0$, однако, насколько известно автору, в современных теориях поля такие связности не используются.

8 Связность, согласованная с метрикой

Зададим на поверхности M метрический тензор с компонентами $g_{i,j}$. Это можно сделать различными способами. Например, предположим, что в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$. Тогда метрику на поверхности M определим следующим образом: $g_{i,j} = (e_i, e_j)$. В этом случае говорят, что метрика на поверхности M индуцирована метрикой объемлющего пространства.

Определение 2.8 *Связность называется согласованной с метрикой, если метрика ковариантно постоянна в смысле этой связности:*

$$\nabla_k g_{i,j} = 0. \tag{8.1}$$

Оказывается, по всякой метрике можно однозначно восстановить согласованную с ней симметричную связность.

Теорема 2.3 *Существует, и притом единственная, симметричная связность, согласованная с данной метрикой.*

Символы Кристоффеля этой связности вычисляются по формулам:

$$\Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2} g^{k,l} \Big(\frac{\partial g_{l,j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^l} \Big). \tag{8.2}$$

Доказательство. По формуле (7.14) имеем

$$\nabla_k g_{i,j} = \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{i,k} g_{l,j} - \Gamma^l_{j,k} g_{i,l} = 0. \tag{8.3}$$

Переставляя в этой формуле индексы i, j, k, получим еще два уравнения:

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial x^j} - \Gamma^l_{k,j} g_{l,i} - \Gamma^l_{i,j} g_{k,l} = 0, \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{j,i} g_{l,k} - \Gamma^l_{k,i} g_{j,l} = 0. \tag{8.5}$$

Сложим уравнение (8.3) с уравнением (8.4) и вычтем (8.5):

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} - 2\Gamma^l_{k,j} g_{l,i} = 0.$$

Выражая из этого уравнения $\Gamma^l_{k,j}$, получаем формулу (8.2). Это доказывает единственность связности, согласованной с метрикой.

Существование проверяется прямой подстановкой формулы (8.2) в уравнение (8.3).

Связность и метрика позволяют дать инвариантные определения операторов векторного анализа.

До конца этого раздела будем считать, что связность согласована с положительно определенной метрикой.

Градиентом функции f называется векторное поле, определенное следующим образом:

$$\operatorname{grad} f = g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} e_i.$$

Дивергенцией векторного поля $v = (v^i)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i.$$

Задача 2.9 *Докажите, что*

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} v^i), \quad g = \det(g_{i,j}).$$

Оператор Лапласа определяется как обычно:

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad},$$

но в случае произвольной положительно определенной метрики он называется оператором Лапласа-Бельтрами.

С ротором дело обстоит сложнее. Предположим, что размерность M равна 3. Тогда по векторному полю $v = (v^i) \in T(1,0,M)$ построим дифференциальную форму

$$\alpha = v_i dx^i, \quad v_i = g_{i,j} v^j.$$

Напомним, что пространство 2-форм канонически изоморфно пространству аксиальных векторов (для этого нужна трехмерность M и метрика). Ротором вектора v называется аксиальный вектор, который соответствует форме $d\alpha$ при указанном изоморфизме.

Задача 2.10 *Докажите формулу*

$$\operatorname{rot}(a \times b) = [a, b] + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a,$$

здесь $a, b \in T(1,0,M)$, через $\times$ обозначено векторное произведение.

9 Тензор кривизны Римана

Из анализа известно, что частные производные гладких функций коммутируют:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} f.$$

В случае ковариантных производных от произвольных тензорных полей свойство коммутативности, вообще говоря, нарушается:

$$\nabla_i \nabla_j \neq \nabla_j \nabla_i.$$

Для описания связи между операциями $\nabla_i \nabla_j$ и $\nabla_j \nabla_i$ вводится тензор Римана.

Опишем соответствующую конструкцию.

Зададим произвольное векторное поле с компонентами v^i. Непосредственным, хотя и весьма громоздким, вычислением, используя формулы (7.13) и (7.12), получаем:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^i = -R^i_{s,k,l} v^s + T^s_{k,l} \nabla_s v^i,$$

где $T^s_{k,l}$ – тензор кручения, а

$$-R^i_{s,k,l} = \frac{\partial \Gamma^i_{s,l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{s,k}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{r,k}\Gamma^r_{s,l} - \Gamma^i_{r,l}\Gamma^r_{s,k}. \tag{9.1}$$

Функции $R^i_{s,k,l}$ являются компонентами тензора типа $(1,3)$, этот тензор называется тензором кривизны Римана, или тензором кривизны аффинной связности.

Имеется инвариантное определение тензора кривизны. Зададим трилинейный оператор $R : T(1,0,M) \times T(1,0,M) \times T(1,0,M) \to T(1,0,M)$ формулой

$$R(\xi,\eta)\zeta = R^i_{j,k,l}\xi^k\eta^l\zeta^j e_i.$$

Прямое вычисление показывает, что

$$R(\xi,\eta)\zeta = (\nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_\xi\nabla_\eta)\zeta + \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta.$$

Геометрический смысл тензора кривизны раскрывается в следующей теореме.

Теорема 2.4 *Предположим, что связность симметрична и тензор кривизны равен нулю на M. Тогда любая точка поверхности M имеет окрестность, в которой можно ввести координаты (y^i) такие, что*

$$\Gamma^i_{j,k}(y) \equiv 0. \tag{9.2}$$

Если связность согласована с метрикой, то в силу формулы (8.1), метрический тензор в указанной системе координат постоянен.

Доказательство этой теоремы [7] опирается на один результат типа теоремы Фробениуса и далеко выходит за рамки нашего курса.

Координаты, в которых справедливо равенство (9.2), называются евклидовыми. Если на поверхности M можно ввести евклидовы координаты, то тензор Римана равен нулю. Если связность согласована с метрикой, то в евклидовых координатах метрический тензор постоянен. Это частично обращает теорему 2.4.

Перечислим симметрии тензора кривизны.

1) Справедливо равенство $R^i_{s,k,l} = -R^i_{s,l,k}$. Это следует непосредственно из формулы (9.1).

2) Для симметричной связности имеют место тождества:

$$R^i_{s,k,l} + R^i_{k,l,s} + R^i_{l,s,k} = 0,$$
$$\nabla_s R^r_{i,k,l} + \nabla_l R^r_{i,s,k} + \nabla_k R^r_{i,l,s} = 0.$$

Последнее равенство называется тождеством Бьянки.

3) Для связности, согласованной с метрикой $g_{i,j}$, введем тензор $R_{i,s,k,l} = g_{i,r}R^r_{s,k,l}$. Тогда

$$R_{i,s,k,l} = -R_{s,i,k,l}.$$

4) Для тензора кривизны симметричной связности, согласованной с метрикой $g_{i,j}$, имеется следующая симметрия:

$$R_{i,s,k,l} = R_{k,l,i,s}.$$

Все эти факты следуют непосредственно из формулы (9.1). Однако их удобно выводить, используя предложение 2.3.

Действительно, предположим, что $\Gamma^i_{j,k}(\widehat{x}) = 0$. Тогда

$$-R^i_{s,k,l}(\widehat{x}) = \frac{\partial \Gamma^i_{s,l}}{\partial x^k}(\widehat{x}) - \frac{\partial \Gamma^i_{s,k}}{\partial x^l}(\widehat{x}), \tag{9.3}$$

и

$$-\nabla_j R^i_{s,k,l}(\widehat{x}) = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{s,l}}{\partial x^j \partial x^k}(\widehat{x}) - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{s,k}}{\partial x^j \partial x^l}(\widehat{x}). \tag{9.4}$$

Из формул (9.3), (9.4) следуют симметрии пункта 2), первая и вторая соответственно.

Задача 2.11 *Докажите формулу пункта 3).*

Если симметричная связность согласована с метрикой, то в силу (8.1) мы имеем

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k}(\widehat{x}) = 0,$$

что позволяет из равенств (9.3) и (8.2) вывести формулу

$$R_{i,q,k,l}(\widehat{x}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 g_{i,l}}{\partial x^q \partial x^k}(\widehat{x}) + \frac{\partial^2 g_{q,k}}{\partial x^i \partial x^l}(\widehat{x}) - \frac{\partial^2 g_{i,k}}{\partial x^q \partial x^l}(\widehat{x}) - \frac{\partial^2 g_{q,l}}{\partial x^i \partial x^k}(\widehat{x})\Big).$$

Из этой формулы следует симметрия 4).

Если связность симметрична и согласована с метрикой, а поверхность M трехмерна, то, в силу перечисленных симметрий, тензор Римана вполне определяется по компонентам тензора Риччи: $R_{k,s} = R^i_{k,i,s}$, $\quad R_{k,s} = R_{s,k}$. Это следует из формулы

$$R_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} = R_{\alpha,\gamma}g_{\beta,\delta} - R_{\alpha,\delta}g_{\beta,\gamma} + R_{\beta,\delta}g_{\alpha,\gamma} - R_{\beta,\gamma}g_{\alpha,\delta} + \frac{R}{2}(g_{\alpha,\delta}g_{\beta,\gamma} - g_{\alpha,\gamma}g_{\beta,\delta}),$$

здесь $R = g^{k,s}R_{s,k}$ – скалярная кривизна.

Задача 2.12 *Докажите, что если поверхность M m-мерна и симметричная связность согласована с метрикой, то верна формула*

$$\nabla_l R^l_k = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^k}, \quad R^l_k = g^{l,s}R_{s,k}.$$

Указание: используйте тождество Бьянки.

В случае двумерной поверхности (связность симметрична и согласована с метрикой) у тензора Римана имеется только одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента $R_{1,2,1,2}$. Поэтому тензор Римана вполне определяется скалярной кривизной:

$$R_{1,2,1,2} = \frac{\det(g_{i,j})}{2}R.$$

Симметрии 3) и 4) позволяют рассматривать тензор Римана как квадратичную форму на пространстве контравариантных кососимметрических тензоров валентности два. Если $\omega^{i,j}$ – тензор указанного типа, то значение квадратичной формы на нем определяется следующим образом:

$$R_{i,j,k,l}\omega^{i,j}\omega^{k,l}.$$

Говорят, что поверхность M имеет отрицательную кривизну, если эта квадратичная форма отрицательно определена.

Задача 2.13 *Докажите, что в случае симметричной связности верна формула*

$$(\nabla_k\nabla_l - \nabla_l\nabla_k)a^i_s = a^i_\mu R^\mu_{s,k,l} - R^i_{r,k,l}a^r_s,$$

где a^i_j – компоненты тензора типа $(1,1)$.

10 Ковариантное дифференцирование тензорных величин

Пусть, как и выше, M – $m-$мерная поверхность, на которой задана аффинная связность, $e_1, \dots, e_m$ и $e^1, \dots e^m$ – сопряженное базисное векторное и ковекторное поле на M.

Пусть C – матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_m$ к базису $e_{1'}, \dots, e_{m'}$:

$$C = \Big(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\Big), \quad e_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i.$$

Обозначим через $\tilde{T}_n(p, q, M)$ пространство тензорных величин $t^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}$, которые при замене базиса преобразуются по правилу

$$t^{i'_1, \dots, i'_p}_{j'_1, \dots, j'_q} = (\det C)^n c^{i'_1}_{i_1} \dots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \dots c^{j_q}_{j'_q} t^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_q}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пространство $\tilde{T}_0(p, q, M)$ совпадает с пространством $T(p, q, M)$.

Наша задача состоит в том, чтобы построить для этих величин ковариантное дифференцирование. Чтобы отличить ковариантное дифференцирование тензорных величин от дифференцирования тензоров, мы вместо ∇_l и будем использовать символ D_l.

Напомним некоторые обозначения:

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^m = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\sigma(m)}},$$
$$e_1 \wedge \dots \wedge e_m = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(m)}}.$$

Легко показать, что

$$e^{1'} \wedge \dots \wedge e^{m'} = (\det C)^{-1} e^1 \wedge \dots \wedge e^m,$$
$$e_{1'} \wedge \dots \wedge e_{m'} = \det C e_1 \wedge \dots \wedge e_m.$$

Используя правило Лейбница и формулы (7.6), (7.7), найдем

$$\nabla_l(e^1 \wedge \dots \wedge e^m) = -\Gamma^s_{s,l} e^1 \wedge \dots \wedge e^m,$$
$$\nabla_l(e_1 \wedge \dots \wedge e_m) = \Gamma^s_{s,l} e_1 \wedge \dots \wedge e_m.$$

Введем обозначение

$$(e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^k = \underbrace{(e^1 \wedge \ldots \wedge e^m) \otimes \ldots \otimes (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)}_{k \text{ сомножителей}}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned}
(e^{1'} \wedge \ldots \wedge e^{m'})^k &= (\det C)^{-k} (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^k, \\
(e_{1'} \wedge \ldots \wedge e_{m'})^k &= (\det C)^{k} (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m)^k, \\
\nabla_l (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^k &= -k \Gamma^s_{s,l} (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^k, \\
\nabla_l (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m)^k &= k \Gamma^s_{s,l} (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m)^k.
\end{aligned}$$

Пусть $n > 0$, тогда каждой тензорной величине $t = (t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) \in \tilde{T}_n(p,q,M)$ канонически соответствует тензор

$$f = t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \otimes (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^n \in T(p, q+mn, M).$$

Продифференцируем тензор f, используя сделанные выше замечания:

$$\begin{aligned}
&\nabla_l f = \\
&\nabla_l \Big(t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \Big) \otimes (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^n \\
&\qquad + t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \otimes \nabla_l (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^n \\
&\qquad = (\nabla_l t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} - n \Gamma^s_{s,l} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \\
&\qquad \otimes (e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)^n.
\end{aligned}$$

Здесь запись $\nabla_l t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}$ означает формальное ковариантное дифференцирование, по правилу дифференцирования тензоров.

При том же каноническом соответствии тензору $\nabla_l f$ соответствует тензорная величина

$$D_l t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = \nabla_l t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} - n \Gamma^s_{s,l} t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \in \tilde{T}_n(p, q+1, M).$$

Рассмотрим случай $n < 0$. Теперь тензорной величине $t = (t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}) \in \tilde{T}_n(p,q,M)$ мы поставим в соответствие тензор

$$g = t^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q} \otimes (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m)^{-n} \in T(p+mn, q, M).$$

Далее, рассуждая аналогично, получим:

$$D_l t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \nabla_l t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} - n\Gamma^s_{s,l} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \in \tilde{T}_n(p, q+1, M).$$

(Такая же формула.)

Итак, мы построили операцию $D : \tilde{T}_n(p, q, M) \to \tilde{T}_n(p, q+1, M)$, которую естественно считать определением ковариантного дифференцирования тензорных величин. Эта операция в координатном представлении записывается следующим образом:

$$D_l t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \nabla_l t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} - n\Gamma^s_{s,l} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2.14 *Предположим, что на поверхности M задана метрика $g_{i,j}$ и согласованная с ней связность.*

Докажите, что $g = \det(g_{i,j}) \in \tilde{T}_2(0, 2, M)$ и

$$D_l g = \frac{\partial g}{\partial x^l} - 2\Gamma^s_{s,l} g = 0.$$

Литература

[1] *В.И. Арнольд* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, 1978.

[2] *Б. Л. ван дер Варден* Алгебра. Наука, 1976.

[3] *Б. А. Дубровин С. П. Новиков А. Т. Фоменко* Современная геометрия. Наука, 1979.

[4] *Н. В. Ефимов Э.Р. Розендорн* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1970.

[5] *С. Стернберг* Лекции по дифференциальной геометрии. М., Мир, 1970.

[6] J. Schouten Der Ricci-Kalkül. Berlin: Springer, 1924.

[7] *M. E. Taylor* Partial Differential Equations, Vol. 2, Springer, New York, 1996.