

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова

НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

*Издание второе,
переработанное и дополненное*

Рекомендовано НМС по математике и механике УМО университетов
в качестве учебного пособия по специальности 01 05 00 — механика



Издательство "Самарский университет"
2004

ББК 22.251
А 91
УДК 539.375

Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. – Самара: Издательство "Самарский университет", 2001. – 562 с.

ISBN 5-86465-181-8

В монографии содержится полное и систематическое изложение методов и результатов нелинейной механики разрушения.

При изложении материала акцент делается на связи между физическими представлениями и теорией, а также на общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики разрушения.

В книгу включен ряд новых результатов по применению метода разложения по собственным функциям, метода годографа и канонических преобразований для анализа локализации пластических деформаций, оценке влияния удаленных локализованных пластических зон на равновесие трещин, исследованию влияния поврежденности на развитие трещин с учетом зон локализации пластических деформаций перед вершиной и в условиях ползучести в связках пластичность—поврежденность, ползучесть—поврежденность.

Книга может быть полезна для студентов механико-математических факультетов университетов специальностей "Механика" и "Прикладная математика", специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела, ставящих своей целью ознакомление с современным состоянием этой науки и перспективами ее развития.

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН С.А. Шестериков

Рецензент д-р техн. наук, проф. Е.М. Морозов

Издание осуществляется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-14029)

Р_{ffi}И

П $\frac{1603040000 - 038}{6K4(03) - 00}$ Без объявл.

ISBN 5-86465-181-8

© Астафьев В.И.,
Радаев Ю.Н.,
Степанова Л.В.,
2001 г.

Оглавление

Предисловие редактора	7
Предисловие	9
Введение	20
1. Введение в механику разрушения	29
1.1. Концентрация напряжений	29
1.1.1. Концентрация напряжений при всестороннем растяжении пластины с круговым отверстием	30
1.1.2. Концентрация напряжений при одноосном растяжении пластины с круговым отверстием	31
1.1.3. Концентрация напряжений при всестороннем растяжении пластины с эллиптическим вырезом	32
1.1.4. Концентрация напряжений при одноосном растяжении пластины с эллиптическим вырезом	33
1.1.5. Концентрация напряжений у сферической полости в поле одноосного растяжения	35
1.1.6. Концентрация напряжений у сферической полости в поле чистого сдвига	36
1.2. Метод Эшелби	37
1.2.1. Тензорная формализация метода Эшелби	38
1.2.2. Иголообразный и дискообразный дефекты в упругой среде	41
1.2.3. Конфигурационная сила, действующая на точечный дефект со стороны упругого поля	43
1.3. Применение граничных интегральных представлений	44
1.3.1. Тензор Кельвина–Соммильяны	45
1.3.2. Асимптотика поля напряжений на значительном удалении от плоского разреза	48
1.4. Различные дополнения и обобщения	50
2. Основные понятия и уравнения механики разрушения	54
2.1. Поля напряжений и перемещений у вершины трещины в упругой среде	54
2.1.1. Полубесконечная трещина в упругой среде. Метод комплексных потенциалов	55
2.1.2. Метод разложения по собственным функциям	60
2.1.3. Асимптотика пространственного поля перемещений и напряжений у заостренного входящего края произвольного очертания	62
2.1.4. Коэффициенты интенсивности напряжений	64
2.1.5. Различные замечания и результаты	69
2.2. Динамическое распространение трещин	78
2.2.1. Основные соотношения динамической теории упругости	80

2.2.2.	Структура локально стационарных полей напряжений и перемещений у вершины трещины. Динамические коэффициенты интенсивности напряжений	81
2.2.3.	Комплексное представление Галина локально стационарного поля у вершины трещины	84
2.2.4.	Неустановившееся развитие трещины	87
2.3.	Критерии разрушения	87
2.3.1.	Энергетический критерий хрупкого разрушения Гриффитса. Скорость освобождения упругой энергии и трещинодвижущая сила	87
2.3.2.	Силовой критерий Ирвина и эквивалентность критериев разрушения	97
3.	Нелинейная механика разрушения: основные методы и результаты	101
3.1.	Канонические законы сохранения и силы, действующие на дефекты в нелинейно упругих твердых телах	101
3.1.1.	Нелинейная кинематика	102
3.1.2.	Канонические законы сохранения	103
3.1.3.	Глобальный баланс канонического импульса для упругого тела с трещиной	107
3.1.4.	Глобальный баланс энергии для упругого тела с трещиной	111
3.2.	Нелинейная теория упругости как физическая теория поля	114
3.2.1.	Функционал действия и классические законы сохранения	116
3.2.2.	Инвариантные интегралы теории упругости	119
3.2.3.	Элементы теории поля	124
3.2.4.	Теорема Нетер	132
3.2.5.	Основные группы инвариантности функционала действия	135
3.2.6.	Обобщенные группы преобразований. Стандартные, внутренние и внешние вариации	140
3.2.7.	Обобщенные группы инвариантности действия	149
3.2.8.	Лагранжиан пустого пространства	151
3.3.	Инвариантный J -интеграл Эшелби–Черепанова–Райса	168
3.3.1.	Предварительные замечания и исторические сведения	168
3.3.2.	Вычисление потока энергии в вершину трещины	171
3.3.3.	Использование инвариантного J -интеграла для формулировки критерия распространения трещины	174
3.3.4.	Различные замечания и дополнения	182
3.4.	Локализованная пластичность	186
3.4.1.	Основные понятия и уравнения математической теории пластичности	186
3.4.2.	Приближенный анализ локализованного у вершины трещины пластического течения	198
3.4.3.	Жесткопластический предельный анализ	201
3.4.4.	Оценка линейного размера зоны локализации по Ирвину	216
3.4.5.	Трещина антиплоского сдвига в идеально упругопластическом теле	219
3.4.6.	Трещина антиплоского сдвига с узкой зоной локализации пластических деформаций	226
3.4.7.	Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния в идеально пластическом теле	228
3.4.8.	Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом теле	234
3.4.9.	Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния в идеально пластическом теле	239
3.5.	Применение канонического преобразования в задачах о локализованной плоской пластической деформации	240

3.5.1.	Канонические переменные плоской задачи теории пластичности	242
3.5.2.	Пример: растяжение полосы с симметричными вырезами произвольного очертания	246
3.6.	Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла	250
3.6.1.	Постановка задачи и основные уравнения	252
3.6.2.	Локализация пластических деформаций при повторном нагружении . .	262
3.6.3.	Вычисление раскрытия трещины при двухзонной локализации пластических деформаций	280
3.6.4.	Пример численного анализа	286
3.7.	Методы континуальной теории дислокаций в задачах о трещинах	288
3.7.1.	Основные понятия теории дислокаций	288
3.7.2.	Представление трещин скоплениями дислокаций	293
3.7.3.	Модель Билби–Коттрелла–Свиндена	301
3.8.	Влияние физической нелинейности	304
3.8.1.	Сингулярное решение Хатчинсона–Райса–Розенгрена (HRR-асимптотики)	304
3.8.2.	Численный анализ задачи на собственные значения в случае горизонтальной трещины	309
3.8.3.	Численный анализ задачи на собственные значения в случае наклонной трещины	315
3.9.	Метод годографа Нейбера–Райса (антиплоский сдвиг трещины в упрочняющемся упругопластическом теле)	324
3.9.1.	Общая схема метода годографа	324
3.9.2.	Маломасштабное пластическое течение в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига	328
3.9.3.	Антиплоский сдвиг полупространства с угловым вырезом	333
3.9.4.	Асимптотики скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига для дробно-линейного определяющего закона	340
3.10.	Трещины в условиях ползучести	341
3.10.1.	Феноменологические уравнения установившейся ползучести	342
3.10.2.	Инвариантный C^* -интеграл установившейся ползучести	344
3.10.3.	Асимптотика напряжений у вершины стационарной трещины в упруго нелинейно вязком теле	346
3.10.4.	Автомодельность в задачах о трещинах в упругих нелинейно вязких телах	348
3.10.5.	Асимптотическое исследование полей напряжений и деформаций у вершины растущей в условиях ползучести трещины	357
3.11.	Трещины в средах с дробно-линейным определяющим законом	365
3.11.1.	Предварительные замечания	365
3.11.2.	Трещина антиплоского сдвига. Решение методом разложения по собственным функциям	365
3.11.3.	Трещина нормального отрыва (плоское деформированное состояние). Решение методом разложения по собственным функциям	375
4.	Связанные задачи нелинейной механики разрушения	386
4.1.	Связанная постановка (упругость–поврежденность, ползучесть–поврежденность) задач о трещинах	386
4.1.1.	Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины растущей трещины антиплоского сдвига при ползучести	387
4.1.2.	Анализ распределения напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины типа I и II (связанная постановка)	391
4.1.3.	Асимптотический анализ усталостного роста трещины в среде с поврежденностью	397

4.2. Автомодельные решения задач теории трещин в связанной постановке (связка ползучесть–поврежденность)	404
4.2.1. Автомодельная переменная в задаче о трещине в среде с поврежденностью	406
4.2.2. Антиплоский сдвиг пространства с полубесконечной трещиной (автомодельное решение связанной задачи)	408
4.3. Представление анизотропной поврежденности тензором поврежденности второго ранга	418
4.3.1. Модель Качанова–Работнова. Параметр поврежденности. Эффективные напряжения	422
4.3.2. Эквивалентная конфигурация континуума с внутренним распределением повреждений	427
4.3.3. Определение и координатное представление тензора поврежденности второго ранга	428
4.3.4. Главные поврежденности и главные оси поврежденности. Геометрическая и механическая интерпретация собственных элементов тензора поврежденности	433
4.3.5. Экстремальные свойства главных поврежденностей. Вычисление тензора поврежденности по экспериментальным диаграммам	435
4.3.6. Возрастание напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений. Тензор эффективных напряжений	437
4.4. Связанные (пластичность–поврежденность) уравнения теории пластичности и методы связанного анализа	440
4.4.1. Основные уравнения модели упругопластического тела с условием пластичности Треска	442
4.4.2. Канонические инварианты уравнений пластического равновесия	451
4.4.3. Учет анизотропной поврежденности	465
4.4.4. Инварианты плоской и пространственной связанной (пластичность–поврежденность) задачи	472
Приложение I	475
Приложение II	478
Приложение III	485
Приложение IV	490
Добавление	496
Основные обозначения	510
Замечания об использовании индексов	519
Замечания об алгебраических и дифференциальных операторах	521
Некоторые специальные тензоры и символы	525
Литература	529
Предметный указатель	547

Предисловие редактора

Исследование проблем прочности и разрушения твердых тел и в настоящее время представляется важной как в теоретическом, так и в прикладном плане задач. В каждой отдельной отрасли механики деформируемого твердого тела (имеются в виду теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости и ползучести) созданы основополагающие концепции и разработаны эффективные методы оценки прочности и условий разрушения. Неоспорим существенный вклад российских ученых в эту область механики. Следует однако признать, что со времени выхода в свет классических монографий, посвященных механике разрушения, минуло почти тридцать лет, и не было бы большим преувеличением сказать, что мы ощущаем потребность в издании книг, в которых с современных позиций были бы изложены и классические основы механики разрушения, и новейшие достижения в этой области, особенно в части, касающейся нелинейных связанных моделей и задач механики разрушения.

При создании данной монографии перед авторами возникла сложная проблема. С одной стороны, читатель в условиях огромного количества публикаций по механике разрушения, разбросанных по разным статьям и монографиям, часто вообще недоступных для прочтения, с целью устранения трудностей по переработке гигантского массива информации предпочел бы иметь универсальную книгу—пособие. С другой стороны, понятно желание авторов более подробно обсудить ключевые положения, методы и результаты нелинейной механики разрушения и представить результаты собственных научных исследований. В связи с этим представляемая монография может рассматриваться как компромисс между указанными двумя факторами. Именно поэтому в книге читатель может найти современное видение механики разрушения как единой науки, все основные ее достижения, и, кроме того, новейшие результаты в этой области, комплексное изложение которых в рамках научной монографии осуществляется, по-видимому, впервые. Именно по этой причине издание книги было поддержано Российским фондом фундаментальных исследований.

Новые результаты, которые авторы сочли нужным включить в данное издание, группируются вокруг следующих вопросов: решение нелинейных краевых задач о локализации необратимых деформаций и концентрации напряжений методом годографа; численный анализ проблемы влияния удаленной зоны локализации необратимых деформаций на состояние трещины; асимптотический анализ напряжений и деформаций у вершины растущей в процессе ползучести трещины; постановка и решение связанных задач (в связках пластичность—поврежденность, ползучесть—поврежденность), в том числе и с учетом возможной анизотропии распределения поврежденности по ориентациям.

Особенно необходимо акцентировать внимание читателя на этой последней группе результатов. Известно, что важность связанного анализа для механики разрушения была в свое время осознана Ю. Н. Работновым, им же анализировались связанные уравнения теории ползучести и поврежденности, представ-

ленной скалярным параметром — параметром поврежденности. Не требует особых комментариев тот факт, что связанные задачи механики деформируемого твердого тела на порядок сложнее, нежели таковые в несвязанной постановке. Проявление и изучение эффектов связности есть основной предмет заключительной главы книги. В этой области авторами монографии, принадлежащими школе Ю. Н. Работнова, получен ряд важных и многообещающих результатов.

Возьму на себя смелость утверждать, что монография — единственное в своем роде издание, содержащее оригинальные методы связанного анализа, с помощью которых удалось получить оценки влияния поврежденности на напряженно-деформированное состояние кончика трещины и скорость развития усталостных трещин, а также трещин, развивающихся в процессе ползучести, и исследовать геометрию поврежденной зоны.

Заклячая свое предисловие, хочу выразить свою уверенность в том, что представляемая монография займет достойное место в ряду книг, посвященных механике разрушения, и будет высоко оценена как специалистами в этой области, так и университетской средой, для которой оригинальность, ясность и последовательность изложения возможно будет определяющим фактором.

Москва, сентябрь 2000 г.

Чл.-корр. РАН С. А. Шестериков

Предисловие

Представляемая работа¹ возникла на базе исследований, выполненных в последнее десятилетие в Самарском государственном университете по проблемам разрушения и накопления повреждений в твердых телах. Кроме результатов оригинальных исследований мы сочли целесообразным изложить также и современное видение классических разделов механики разрушения.

Интерес к проблемам разрушения не ослабевает ввиду их огромного прикладного значения. В настоящее время подавляющее число публикаций по механике деформируемого твердого тела в той или иной степени касается проблем разрушения и развития повреждений. На русском языке имеется ряд прекрасно зарекомендовавших себя монографий по механике разрушения [63], [175], [117], [26], [155], [120], [98], подробный для времени своего написания обзор работ [114] и известный семитомник "Разрушение" под редакцией Г. Либовица. Однако большинство книг 70-х и 80-х годов по механике разрушения следует признать по вполне понятным причинам в значительной мере устаревшими. Именно поэтому мы решились на переизложение практически всего основного массива той ветви механики твердого тела, которую принято называть механикой разрушения.

Работа отражает почти тридцатилетний опыт преподавания механики разрушения и накопления повреждений кафедрой механики сплошных сред. В рамках единой схемы приводится практически полное изложение как линейной, так и нелинейной механики разрушения, включая как традиционные, так и новые идеи, методы и результаты этой науки. Современная нелинейная механика разрушения отличается исключительным динамизмом развития, поэтому подобные работы просто необходимы для лиц, профессионально исследующих проблемы разрушения твердых тел. Мы также надеемся, что монография окажется полезной и для изучающих механику разрушения в рамках дисциплин специализации на механико-математических факультетах классических университетов, и для тех, кто впервые знакомится с основами механики разрушения и накопления повреждений в твердых телах в рамках программы технических университетов по механике деформируемого твердого тела.

Несколько слов о форме представления излагаемого материала. Книга состоит из большого количества разделов, объединенных, если они связаны между собой с точки зрения содержания и логики изложения, в более крупные элементы. Для идентификации разделов использованы три номера и в некоторых случаях — литера: первый — указывает на номер главы, второй — на порядковый номер цикла разделов внутри главы, третий — представляет номер раздела, литера — на часть раздела, оформленную как отдельная проблема, часто представляющая и самостоятельный интерес — теоретический или прикладной.

Для идентификации формул используются два номера: первый — указывает

¹Е-версия располагается на сервере Самарского государственного университета и может быть найдена по web-адресу: <http://www.ssu.samara.ru/~radayev/fracture.html>

на порядковый номер раздела (и в точности совпадает с третьим идентифицирующим раздел номером), содержащего формулу, второй — на номер формулы внутри раздела. Поэтому при указании на формулу из другого раздела книги всегда приводится и полный тройной идентификатор того раздела, на формулу из которого дается ссылка.

Для удобства пользования в конце книги помещается список важнейших обозначений, устанавливаются система обозначения и правила оперирования с индексами, а также определения дифференциальных операторов, специальных тензоров и символов.

Нумерация уравнений — двойная: первый номер указывает на порядковый номер раздела, второй — на порядковый номер уравнения внутри раздела.

Нумерация рисунков — сквозная по всему тексту книги.

Несколько слов о структуре работы: она разделена на четыре главы:

- Введение в механику разрушения;
- Основные понятия и уравнения механики разрушения;
- Нелинейная механика разрушения: основные методы и результаты;
- Связанные задачи нелинейной механики разрушения.

Для облегчения восприятия книги мы сочли целесообразным включить четыре приложения, в которые вынесен вспомогательный материал, помещенный отдельно, чтобы не прерывать ход основного изложения.

Добавление к книге содержит основные сведения о высокоточных интерференционных методах измерения деформаций твердых тел, применяемых в современной механике деформируемого твердого тела, в частности, для экспериментальной проверки теоретических положений и результатов механики разрушения. Приводимые там экспериментальные данные получены в лаборатории лазерной интерферометрии кафедры механики сплошных сред Самарского государственного университета.

В первой главе — **Введение в механику разрушения** — рассмотрены различные аспекты проблемы концентрации напряжений в твердых телах около вырезов различной формы.

Мы не ограничились здесь только двумерными задачами о концентрации напряжений. Приводится (1.2) также метод Эшелби (J. D. Eshelby), позволяющий рассчитывать возмущение упругого поля в теле с эллипсоидальным вырезом. Этот классический метод был развит Эшелби в ряде работ и в настоящее время признан самым эффективным для оценки влияния эллипсоидальных дефектов на напряженно-деформированное состояние линейно упругих изотропных сред. Схема Эшелби проста и допускает тензорную формализацию. Ясно, что с помощью эллипсоидов поддаются моделированию и иглообразные, и дискообразные, и порообразные дефекты. Поэтому расчетная схема Эшелби и сейчас привлекает к себе внимание.

Достаточно подробно в разделе 1.2.3 исследована проблема взаимодействия дефектов и включений с внешним упругим полем. Рассмотрение подобных задач естественно приводит к необходимости вычисления энергии взаимодействия

включения с упругим полем и позволяет ввести понятие о конфигурационной силе, характеризующей воздействие внешнего поля на включение или дефект, не прибегая при этом к аппарату инвариантных интегралов теории упругости, которые, как известно, являются в теоретическом аспекте основой механики разрушения. Несколько позже (1.4) рассматривается вопрос об энергии взаимодействия сферических (или эллипсоидальных) дефектов, помещенных в сингулярно возмущенное их присутствием внешнее упругое поле. Основным результатом здесь является асимптотическая зависимость энергии парного взаимодействия сферических включений в изотропной упругой среде по закону шестой степени расстояния между центрами этих включений.

Применение граничных интегральных представлений упругих полей обсуждается в разделе 1.3, где дано решение проблемы нахождения асимптотики дальнего поля в теле с дефектом. Эта проблема в некотором смысле противоположна проблеме оценки концентрации напряжений, поскольку интерес представляет не локальное поле вблизи дефекта, а асимптотика упругого поля на значительном удалении от области концентрации напряжений.

Во второй главе — **Основные понятия и уравнения механики разрушения**, — которая по существу является вводной в собственно механику разрушения, мы воспроизводим классические результаты по анализу напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины каждого из трех основных типов. Здесь также помимо двумерных задач (см. разделы 2.1.1 и 2.1.2) и прямолинейных трещин в 2.1.3 даны асимптотики пространственных упругих полей при приближении к криволинейному краю трещины. Общий результат здесь состоит в следующем: исследование особенностей решений уравнений теории упругости в окрестности криволинейного края дефекта или трещины сводится к анализу двух двумерных задач в плоскости, нормальной краю, о плоской деформации и антиплоском сдвиге. При этом в уравнениях теории упругости, сформулированных в естественной локальной координатной системе, связанной с краем трещины, нужно удерживать лишь главные члены, не влияющие на характер особенности решения, которая в случае трещины с криволинейным краем сохраняет свою традиционную корневую структуру.

Приоритет при анализе двумерных задач теории трещин мы отдаем двум методам: методу комплексных потенциалов и методу разложений по собственным функциям. Ключевое понятие и основной характерный параметр механики разрушения — коэффициент интенсивности напряжений — определяется с помощью асимптотик поля напряжений при приближении к вершине трещины в 2.1.1 и 2.1.2. Формулы расчета коэффициентов интенсивности напряжений для трещин трех основных типов в неограниченной упругой среде получены на основании решения смешанной задачи теории аналитических функций для верхней полуплоскости и обсуждаются в разделе 2.1.4.

Далее в разделе 2.1.5 приводятся выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в ряде практически важных случаев. Однако приводимые здесь сведения по необходимости минимальны. Так, например, анализ влияния трещин на распределение напряжений в телах в условиях деформации круче-

ния ограничивается лишь небольшим количеством примеров, поскольку исчерпывающее изложение этого круга вопросов дано в монографии [4], которая с момента своего издания в 1963 г. рассматривается как энциклопедическое руководство по предмету и к настоящему времени остается непревзойденной по количеству собранного материала, обработке идей, методов и результатов (особый интерес представляют исторический обзор и комментарии, сопровождающие изложение). Вообще вычислению и оценке коэффициентов интенсивности напряжений посвящена обширная литература, в которой приводятся результаты для огромного количества конфигураций трещин в телах различной геометрии и в условиях разнообразных состояний их деформации².

Ряд классических результатов по исследованию динамического распространения трещин в упругой среде рассматривается в 2.2.

В частности, в разделе 2.2.2 с помощью метода разложения по собственным функциям получены асимптотики локально стационарного поля напряжений у вершины распространяющейся с постоянной скоростью трещины каждого из трех основных типов и определены динамические коэффициенты интенсивности напряжений. Исследование локально стационарного динамического упругого поля с успехом может быть реализовано на базе комплексного представления Л. А. Галина, рассмотренного в 2.2.3.

В разделе 2.2.4 мы кратко обсуждаем результаты, относящиеся к поведению нестационарного упругого поля у вершины динамически распространяющейся трещины. Решение двумерной задачи о распространении в упругом теле прямолинейной полубесконечной трещины с переменной скоростью получено Б. В. Костровым в 1974 г. методом интегральных преобразований. Оказывается, что асимптотическая структура поля напряжений у вершины прямолинейной трещины, распространяющейся с постоянной скоростью по прямолинейной траектории, проанализированная в 2.2.2, обладает достаточной общностью в том плане, что если рассматривать динамическое развитие трещины по криволинейной плоской траектории с переменной скоростью, не превышающей скорость волн Рэлея (J. W. Rayleigh), то, вводя локальную систему координат, связанную с вершиной трещины, можно показать, что угловое распределение сингулярных асимптотик напряжений не отличается от таковых при стационарном распространении прямолинейной трещины. Следовательно, асимптотики напряжений, приведенные в разделе 2.2.2, можно применять и для нестационарного развития трещины, не забывая при этом о том, что теперь динамические коэффициенты интенсивности напряжений зависят от мгновенного значения скорости движения вершины трещины.

Заканчивается вторая глава расчетом (2.3.1) скорости освобождения упругой энергии, обусловленной развитием трещины в упругом теле, и доказательством эквивалентности энергетического и силового критериев хрупкого разрушения (2.3.2).

Несмотря на многообразие процессов, происходящих у вершины трещины, процесс роста макротрещины может быть описан количественно более или ме-

²См., например, двухтомный справочник по коэффициентам интенсивности напряжений [160].

нее точно на основе уравнения виртуального энергетического баланса, сформулированного для виртуального изменения длины трещины. Этот подход восходит к классическим работам А. А. Гриффитса (A. A. Griffith), который по праву может считаться основоположником механики разрушения. Гриффитс записал уравнение энергетического баланса для упругого тела с трещиной, когда энергия при распространении трещины расходуется только на образование новых свободных поверхностей. Ясно, что учет локализации необратимых деформаций перед вершиной трещины неизбежно приводит к изменению соотношений баланса энергии и требует формулировки иных критериев разрушения. Тем не менее разрушение металлов часто тоже можно считать практически хрупким (квазихрупким), если размер пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины.

Вторая глава, как это можно заключить ознакомившись с ее содержанием, содержит все основные классические концепции механики разрушения и уравнения, необходимые для формулировки и решения ее прикладных задач. По существу ее можно рассматривать как краткое изложение основ механики разрушения, вполне пригодное для первоначального их изучения. С точки зрения логики изложения эта глава имеет, конечно же, вспомогательный характер: главная цель ее написания — установить общую концептуальную основу, единую терминологию и привести все результаты, составляющие фундамент механики разрушения.

Третья глава книги — **Нелинейная механика разрушения: основные методы и результаты** — открывается (3.1) выводом законов сохранения для тел с трещинами, реализованным в наиболее общем варианте, т.е. с учетом конечности деформаций и возможного динамического развития трещин. Мы избрали здесь каноническую форму записи законов сохранения, терминологию и обозначения, предложенные в монографии [284].

Преимущества подобного выбора очевидны: вполне строгий вывод законов сохранения импульса и энергии в геометрически нелинейном случае, ясное определение конфигурационной силы, действующей со стороны внешнего упругого поля на трещину, и, наконец, естественный вывод основных инвариантных интегралов статической и динамической нелинейной теории упругости. Мы отдаем себе отчет в том, что в литературе на русском языке, посвященной механике разрушения, канонический формализм [284] вообще не применяется, хотя преимущества его, на наш взгляд, очевидны и неоспоримы. С его помощью удастся достаточно быстро прийти к обобщению большинства классических результатов механики разрушения на случай конечных деформаций и нелинейных определяющих законов, и при этом выявить то базовое уравнение, из которого выводятся все энергетические соотношения и линейной, и нелинейной теории — уравнение баланса полной энергии внутри фиксированной области пространства Эйлеровых переменных, сформулированного с помощью Лагранжевых переменных (см. раздел 3.1.4, уравнение (4.10)). Именно по этой причине обратное Лагранжево описание деформации тела и каноническая формализация законов сохранения оказываются идеально приспособленными для целей

нелинейной механики разрушения и позволяют наиболее рациональным способом вывести инвариантные интегралы, которые вне всякого сомнения являются не только ее теоретическим базисом, но и важным (а иногда и единственным) инструментом решения многих прикладных задач.

Мы сочли целесообразным посвятить специальный и довольно большой раздел **3.2** нелинейной теории упругости, переизложив ее как физическую теорию поля в духе классического курса [77]. Такая необходимость продиктована желанием более подробно осветить смысл инвариантных интегралов как одного из проявлений инвариантности функционала действия по отношению к тем или иным группам преобразований пространственно-временного многообразия.

В формальном плане все традиционные, не зависящие от пути интегрирования инварианты механики разрушения могут быть получены прямым применением теоремы Нетер (E. Noether) (см. **3.2.4**) к функционалу действия для упругой среды.³ Линейно упругий случай рассматривается отдельно в **3.2.2**, сведения по нелинейной теории даны в **3.2.5**, **3.2.6** и **3.2.7**. В принципе, формально возможен вывод всех инвариантных интегралов и построение всей нелинейной механики разрушения на основе анализа групп инвариантности и обобщенных симметрий функционала действия, но такой путь мы считаем менее предпочтительным, чем тот, который изложен в **3.1**. Тем не менее включение этого материала в книгу оправдано тем, что в русскоязычной литературе по механике разрушения существует значительный пробел в анализе этой проблематики, который мы надеемся восполнить.

Расчет инвариантного J -интеграла — важнейшего параметра механики разрушения — является предметом рассмотрения в **3.3**. Мы сочли уместным включить помимо традиционного J -интеграла некоторые его обобщения. В этом разделе, а также в последующем изложении (особенно **3.8** и **3.10**) читатель найдет большое количество расчетных формул и примеров применения инвариантных интегралов к статическим и динамическим задачам о трещинах.

Анализ напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в идеально упругопластическом теле и все относящиеся к этой тематике результаты отражены в разделе **3.4**.

Раздел **3.4.3** целиком посвящен скорее нетрадиционным для механики разрушения вопросам, связанным с анализом предельного равновесия тел, что характерно для теории пластичности. С точки зрения механики разрушения здесь наибольший интерес представляет собой расчет разрушающей нагрузки для тел с вырезами различной формы и возможный кинематический механизм разрушения.

Отдавая дань традиции, в **3.4.4** рассматривается классическая схема Ирвина (G. R. Irwin) приближенного расчета зоны локализации пластических деформаций перед вершиной трещины.

Затем (**3.4.5–3.4.9**) приводятся решения статических уравнений теории пла-

³До недавнего времени теорема Нетер служила единственным общим методом нахождения законов сохранения уравнений, следующих из вариационного принципа. В настоящее время развиты более общие методы, основанные не теориях высших и обобщенных симметрий. Современное изложение этого круга вопросов дано в монографии [154].

стичности, как правило, без исследования вопроса о возможности продолжения поля напряжений в пластической зоне в жесткие (или упругие) зоны и построения согласованного совместного поля деформаций. Поэтому все решения этого раздела следует классифицировать как неполные. Большая коллекция результатов, связанных с анализом напряжений и деформаций у вершины трещины в упругопластическом теле, приводится в известной монографии Б. Д. Аннина и Г. П. Черепанова [1].

Отметим также результаты, приведенные в 3.5, по применению метода годографа для вычисления концентрации напряжений для тел с симметричными вырезами в условиях плоской пластической деформации. Локализация пластических деформаций и концентрация напряжений в условиях плоского деформированного состояния могут быть проанализированы на основе метода годографа, применение которого позволяет получить распределение напряжений в аналитической форме. Сущность этого метода заключается в преобразовании уравнений плоской задачи к криволинейным координатам, подобранным таким образом, что координатные линии совпадают с траекториями главных напряжений. Соотношения плоской задачи могут быть проинтегрированы вдоль линий главных напряжений, в результате чего может быть получено каноническое (сохраняющее площадь любого элемента пластической зоны) отображение физической плоскости течения на вспомогательную плоскость, причем геометрия течения и форма образа пластической зоны при этом становятся чрезвычайно простыми. Каноническое преобразование определяется через посредство производящей функции, которая в свою очередь является интегралом одного точно линеаризуемого нелинейного уравнения в частных производных. Оказывается, что в зоне локализации пластических деформаций в самом узком месте полосы с вырезами нормальные напряжения превосходят предел текучести при растяжении, т.е. действительно имеет место концентрация напряжений во всем наиболее узком сечении. Этот же эффект наблюдается и в зоне локализации пластических деформаций внутри осесимметричной шейки.

Модель трещины Леонова—Панасюка—Дагдейла и целый спектр результатов анализа состояния трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния приводятся в 3.6. Помимо классических результатов, включены и новые [308], [310] — оценка остаточных напряжений в пластине с трещиной нормального отрыва после разгрузки, локализация пластических деформаций при повторном нагружении (двухзонное пластическое течение) и вычисление параметров локализации, оценка величины раскрытия трещины при повторном нагружении.

Искажение внешнего упругого поля, обусловленное наличием в теле трещины, может моделироваться и как его возмущение скоплением винтовых или краевых дислокаций, непрерывно распределенных вдоль отрезка, представляющего трещину. В итоге расчет возмущенного упругого поля сводится к решению хорошо изученного сингулярного интегрального уравнения. Поэтому все классические результаты механики разрушения могут быть получены методами теории дислокаций. Этот круг вопросов обсуждается в 3.7. Дислокационная

модель трещины Билби—Коттрелла—Свиндена (B. A. Bilby, A. N. Cottrell, K. N. Swinden) и схема расчета зон локализации пластических деформаций перед вершиной трещины обсуждаются в **3.7.3**. Эта модель, как известно, является альтернативой подходу Дагдейла, предложившего удобную и эффективную схему расчета геометрии вытянутой вдоль линии трещины узкой зоны локализации пластических деформаций перед вершиной трещины.

В разделе **3.8** мы рассмотрели влияние физической нелинейности (несжимаемая среда и степенной определяющий закон, связывающий интенсивность касательных напряжений и интенсивность деформации сдвига) на равновесие трещины в упругом теле. Ясно, что в рамках геометрически линейной теории отклонения от закона Гука при сравнительно больших значениях деформаций приводят к перераспределению напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Асимптотика напряжений и деформаций для полубесконечной трещины в неограниченной плоскости в условиях плоского напряженного состояния (или плоской деформации) в случае степенного определяющего закона была получена в работах Хатчинсона, Райса и Розенгрена (J. W. Hutchinson, J. R. Rice, G. F. Rosengren). Этот классический результат мы приводим в разделе **3.8.1**. Численный метод, позволяющий найти угловые распределения, входящие в указанную асимптотику, достаточно подробно излагается в **3.8.2**. Здесь же приводятся результаты численного анализа.⁴ Случай наклонной трещины исследуется в **3.8.3**.

Метод годографа Нейбера—Райса (H. Neuber, J. R. Rice) и его применение к анализу трещины антиплоского сдвига в упрочняющемся упругопластическом теле читатель может найти в разделе **3.9**. Формально метод Нейбера—Райса пригоден и для расчета в условиях установившейся ползучести. Мы приводим соответствующий результат для трещины антиплоского сдвига при дробно-линейном определяющем законе ползучести в **3.9.4**.

Разделы **3.10.1–3.10.5** посвящены исследованию трещин, развивающихся в условиях ползучести. Необходимо отметить, что обсуждаемые здесь вопросы и результаты не нашли своего отражения в русскоязычной литературе. Так, к сожалению, до сих пор не переведена монография Риделя (H. Riedel) [322], предметом которой является разрушение при высоких температурах. В настоящее время данная монография представляет собой, по-видимому, единственную полную коллекцию решений и подходов к исследованию трещин в условиях ползучести. Поэтому мы сочли необходимым остановиться на известных решениях задач определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и растущей трещины в упругом нелинейно вязком теле. Так, установлено, что в окрестности вершины неподвижной трещины в упругом нелинейно вязком теле (при учете лишь второй стадии ползучести — установившейся ползучести и использовании степенного определяющего соотношения) скоростями упругих деформаций можно пренебречь по сравнению со скоростями деформаций ползучести (для всех показателей степеней, строго больших единицы), и, следовательно, асимптотика напряжений

⁴Численный анализ по нашей просьбе был заново произведен А. Н. Крутовым.

вблизи вершины трещины представляется хорошо известным решением Хатчинсона—Райса—Розенгрена и определяется не зависящим от пути интегрирования C^* -интегралом.

Дальнейшее изложение касается асимптотического исследования напряженно-деформированного состояния вблизи вершины подвижной трещины в упругом нелинейно вязком материале. Показывается, что в окрестности растущей трещины в рассматриваемом материале скоростями упругих деформаций пренебрегать нельзя, что ведет к новой асимптотике полей деформаций и напряжений, впервые установленной в [250].

Раздел 3.10.4 этого цикла посвящен подобию в задачах о трещинах в упругих нелинейно вязких телах, где на основе введения автомодельной переменной удается связать два предельных случая состояния трещины в данном материале под нагрузкой: случай коротких времен после приложения нагрузки и случай достаточно больших времен, когда наблюдаются обширные области, занятые деформациями ползучести. Следует отметить, что изучение названных предельных случаев и переходного режима имеет непосредственное практическое значение, поскольку оно связано с выделением набора параметров, характеризующих скорость роста трещины, которая, в свою очередь, определяет время до разрушения и, следовательно, долговечность конструкции.

С помощью автомодельной переменной может быть исследовано не только стационарное состояние трещины, но и ее докритический рост в упругом нелинейно вязком материале, что осталось за пределами наших рассмотрений. Заинтересованному читателю укажем, например, работу [251].

Мы также сочли необходимым включить в раздел 3.11 результаты, полученные в последние годы и касающиеся сравнительно нового типа определяющих соотношений — дробно-линейного закона ползучести, введенного в [180] на основе анализа большого количества экспериментальных данных. Приведены решения задач о трещинах **типа I** и **типа III** для дробно-линейного определяющего соотношения методом разложения по собственным функциям. Для данного класса задач характерно дискретное изменение показателя сингулярности скоростей деформаций ползучести у вершины трещины в зависимости от полярного угла.

Последняя глава книги — **Связанные задачи нелинейной механики разрушения** — содержит решения ряда связанных задач о трещинах в связках упругость—поврежденность, ползучесть—поврежденность.

Необходимо отметить, что именно это направление в механике разрушения и механике поврежденности является наиболее динамично развивающимся. Появляется множество работ, посвященных изучению влияния поврежденности на поля напряжений и деформаций в телах с трещинами, находящихся под действием различных систем нагрузок и в различных условиях. Этот факт свидетельствует о том, что решения обсуждаемых проблем не получили пока полной теоретической завершенности и исчерпывающего математического обоснования. Поэтому мы не преследовали цель изложить и привести все разнообразие методов и подходов, ограничившись ссылками на статьи в периодических изда-

ниях. В представляемой книге читатель найдет решения задач о трещинах в связанной постановке, которые обладают достаточной общностью, а именно: у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль [14], [15], [343]; показано, что учет влияния поврежденности приводит либо к устранению характерной для линейной механики разрушения и для степенных определяющих соотношений в нелинейной механике разрушения сингулярности [14], [15], либо в значительном ее ослаблении [343].

Попытка исследовать напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью на основе введения автомодельной переменной, предложенной в [322], предпринята в 4.2, где построены разложения компонент тензора напряжений, скоростей деформаций и скалярного параметра сплошности по собственным функциям и численно определена геометрия области полностью поврежденного материала.

В разделе 4.3 развивается так называемый геометрический подход механики поврежденности, изложенный впервые в работе Мураками (S. Murakami) [294]. Следуя [305], [100], приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности второго ранга), которая обладает фундаментальным свойством симметрии. Одним из главных преимуществ этого подхода к описанию и представлению анизотропного состояния поврежденности является возможность достаточно простого и естественного представления эффекта возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями с помощью понятия эффективного напряжения, что открывает возможность применения механики поврежденности в классических разделах механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и ползучести.

Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности [305], [100] (см. также [138], [139]) с тензором поврежденности второго ранга может быть синтезирована с классическими соотношениями теории пластичности и ползучести с целью получения связанных постановок краевых задач. В разделе 4.4 геометрический подход выступает в качестве основы для вывода связанных уравнений теории пластичности и поврежденности. Этот раздел целиком посвящен общему анализу связанных уравнений теории пластичности и поврежденности.

Соотношения статики и кинематики пластического течения, искаженного полем микроповреждений, сформулированные вдоль линий главных напряжений (изостат), приводятся специально с тем расчетом, чтобы использовать их при численном анализе связанных краевых задач, и особенно задач о локализации пластических деформаций и повреждений у вершины трещины. Так как в двумерных задачах свободные берега трещины сами являются линиями главных напряжений, то исключительно удобно привязать разностную схему к счету вдоль линий главных напряжений от свободных от напряжений берегов трещин и пор различной формы.

Несколько слов о библиографическом списке, включенном в книгу. Литера-

тура по механике разрушения обширна. При ее отборе мы руководствовались, во-первых, возможностью с помощью того или иного источника получить последовательное, ясное и современное представление о существе затрагиваемой проблематики, а во-вторых, — доступностью литературного источника. Последнее обстоятельство является актуальным, поскольку многие из классических монографий по специальности сейчас превратились в недоступные раритеты.⁵ Поэтому нередко указание на принадлежность того или иного результата в монографии дается через посредство более доступных изданий. В любом случае с помощью списка литературы могут быть установлены и приоритетность, и принадлежность результатов, включенных в настоящую работу.

Работа над монографией распределилась между авторами следующим образом: **глава I**, разделы **3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.7, 3.8.1, 4.3, 4.4** написаны д-ром физ.-мат. наук, проф. Ю. Н. Радаевым; **глава II**, разделы **3.9, 3.10, 3.11, 4.1, 4.2**, написаны канд. физ.-мат. наук Л. В. Степановой; раздел **3.6** монографии написан совместно Ю. Н. Радаевым и Л. В. Степановой. Добавление к книге написано канд. физ.-мат. наук М. Н. Осиповым.

Большую помощь при подготовке рукописи к публикации на всех ее этапах оказала М. Е. Федина. Авторы считают своим долгом поблагодарить ее за эту неоценимую помощь.

Мы считаем своим приятным долгом выразить благодарность научному редактору книги, чл.-корр. РАН, проф. С. А. Шестерикову и рецензенту проф. Е. М. Морозову за ценные замечания и внимательный просмотр рукописи.

Поскольку при издании новой книги неизбежны недостатки, мы будем признательны читателям за критические замечания.

Самара, сентябрь 2000 г.

*В. И. Астафьев
Ю. Н. Радаев
Л. В. Степанова*

⁵Недавно была предпринята беспрецедентная попытка свести все основные сведения, касающиеся механики разрушения, в один том энциклопедии [228]. В этот же том включены переиздания всех классических работ по механике разрушения А. А. Гриффитса, Дж. Ирвина, Дж. Эшелби, Дж. Райса, Г. П. Черепанова.

Введение

Механика разрушения — ветвь механики деформируемого твердого тела, которая изучает закономерности нарушения сплошности твердых тел.

Механика деформируемого твердого тела в настоящее время должна рассматриваться как единая наука, объединяющая ряд научных дисциплин, которые по сложившейся исторически традиции излагаются и изучаются в соответствии со следующей схемой: теория напряжений и деформаций сплошных тел, основные физические законы сохранения, термодинамика сплошных сред, теория упругости, теория пластичности, теория вязкоупругости и наследственной упругости, теория ползучести и механика разрушения твердых тел.

Под разрушением в механике деформируемого твердого тела понимается макроскопическое нарушение сплошности тела в результате воздействия на него внешнего окружения. Разрушение обычно развивается параллельно с упругой или пластической деформацией твердого тела, или в условиях ползучести. Различают две формы разрушения: скрытое разрушение — зарождение и развитие микродефектов, рассеянных по объему тела, и полное разрушение — разделение тела на части. Кроме того, различают несколько видов разрушения в зависимости от того, какие из свойств тела играют определяющую роль в наблюдаемом процессе разрушения: хрупкое (без заметных пластических деформаций),⁶ пластическое (вязкое),⁷ усталостное⁸ и длительное.⁹

Исследование скрытого разрушения в настоящее время уже не является предметом механики разрушения, а осуществляется с помощью методов и теорий только что сложившейся новой науки — механики поврежденности. Поврежденность чаще всего трактуется как сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади составляющих его элементов, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины — в упругости, дислокации — в пластичности, микропоры — при ползучести, поверхностные микротрещины — при усталости). О современном состоянии этой ветви механики деформируемого твердого тела читатель может судить по учебникам и монографиям [263], [277], [269].

Основная область приложения механики деформируемого твердого тела — оценка прочности элементов конструкций. Под прочностью обычно понимают свойство тела в определенных условиях и пределах, не разрушаясь, сопротивляться воздействиям со стороны внешнего окружения (термическим, силовым,

⁶При хрупком разрушении деформации тела обратимы вплоть до его разрушения. Образовавшиеся в результате хрупкого разрушения части тела обычно можно сложить, восстановив исходное тело.

⁷Этот вид разрушения характеризуется значительными необратимыми деформациями тела, приводящими к существенному искажению его геометрии и исчерпанию его несущей способности. При пластическом разрушении величина упругих деформаций тела обычно пренебрежимо мала.

⁸Усталостное разрушение — финальная стадия процесса развития дефектов, сопровождающего циклическое пластическое деформирование тела.

⁹Длительное разрушение является результатом прогрессивного накопления внутренних повреждений, разупрочнения и характерно для металлов в условиях ползучести.

электромагнитным, химическим). Современные теории прочности опираются на развитые физико-химические модели, отражающие сущность протекающих в твердых деформируемых телах процессов. Традиционными мерами механической прочности являются предел пропорциональности, предел текучести, предел прочности, предел длительной прочности.

Уменьшение прочности твердых тел¹⁰ часто может быть объяснено скрытым разрушением и микродефектной структурой тела. В этом смысле механика поврежденности и теории прочности направлены в конечном счете на исследование одной и той же проблемы. Если учесть, что повреждения тела существенно влияют на характер его разрушения, то становится очевидной взаимосвязь всех трех указанных наук.

Таким образом, механика разрушения, механика поврежденности и теории прочности в комплексе образуют науку, которая призвана решить главную прикладную задачу об оценке запаса прочности твердого тела.

В **Предисловии** довольно подробно было описано содержание представляемой работы. Здесь нам представляется уместным лишь обсудить отличительные особенности монографии и те новые результаты, которые нашли отражение в этой книге.

Значительное внимание уделяется применению двух наиболее эффективных методов решения задач нелинейной механики: методу годографа и методу разложения по собственным функциям. Мы даем большое количество примеров их применения к анализу локализации пластических деформаций у трещин и вырезов, а также ряд важных результатов связанного анализа, полученных с их помощью.

Метод разложения по собственным функциям в основе своей доступен и технически реализуется достаточно просто. В конце концов, с его помощью нелинейные краевые задачи для уравнений в частных производных можно свести к нелинейной задаче на собственные значения для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем разрешается численно.

Метод годографа гораздо сложнее концептуально и применяется к задачам с неизвестной свободной границей. Необходимо знать эффективную замену переменных, позволяющую отобразить свободную границу на кривую достаточно простой геометрии и переформулировать краевую задачу в новых переменных. Однако очень часто он оказывается единственным эффективным средством аналитического анализа нелинейных задач механики. Применение метода годографа к задачам механики деформируемого твердого тела восходит к известной работе Треффца (E. Trefftz) 1922 г., в которой исследовалась задача о сложном сдвиге упругопластического тела уголкового профиля. В механике разрушения этот метод позволяет провести аналитическое решение упругопластической задачи о сложном сдвиге трещины в упрочняющемся (по произвольному закону) теле (J. R. Rice, 1967 г.). Метод годографа в сочетании с канонической заменой

¹⁰Изменение прочности твердого тела может проявляться как уменьшение его жесткости (под жесткостью обычно понимается свойство твердого тела сопротивляться образованию и развитию деформации), твердости (способность сопротивляться местной пластической деформации), долговечности (остаточного времени жизни до разрушения).

переменных оказывается эффективным инструментом анализа уравнений теории пластичности, сформулированных для ребра поверхности текучести, общих соотношений плоской и осесимметричной задачи [134], [135].

Значительное место в книге (3.1) мы отводим каноническим законам сохранения нелинейной упругости и конфигурационным силам; вычисление последних выводит на сцену инвариантные интегралы механики разрушения. Здесь мы привели предельно общие формулировки: геометрически нелинейный вариант и учет динамического вклада.

При написании монографии мы отдавали себе отчет в том, что современное видение механики разрушения не будет полным без указания на место законов сохранения для нелинейно упругого сингулярного поля в ряду других физических теорий поля. Компактное математическое представление поля осуществляется с помощью функционала действия, из которого могут быть выведены как уравнения поля, так и естественные граничные условия. Поэтому в книгу и был включен раздел 3.2, в котором, в частности, приводится вывод инвариантных интегралов (и их далеко идущих обобщений) нелинейной упругости путем применения теоремы Нетер [296] к функционалу действия.

Применение симметрий к проблеме интегрирования уравнений аналитической механики было блестяще продемонстрировано Якоби (К. Jacobi) в 1884 г. в его "Лекциях по динамике".¹¹ Теорема Нетер (1918 г.), в которой в полной общности были сформулированы представления о группе вариационных симметрий, и установлена их связь с законами сохранения, безусловно является одним из самых выдающихся результатов математической физики уходящего столетия. Однако вплоть до недавнего времени эта теорема практически не имела новых существенных приложений.¹²

Исторически инвариантные интегралы в теории упругости появились впервые в работах Эшелби (1951 г.). Они были найдены с помощью специальной техники и никак вплоть до работы [242] (1962 г.) не связывались с вариационными симметриями энергетического функционала теории упругости. Обобщение инвариантных интегралов на динамический случай произошло еще позднее — в [186], [229], [175]. В работах [297], [298] были найдены новые, не обнаруженные ранее, симметрии уравнений теории упругости и соответствующие им законы сохранения.

В разделе 3.2.6 мы обсуждаем различные виды вариаций, определение которых приводится на основе обобщения понятия группы инвариантности функционала действия. Это позволяет обнаружить новые законы сохранения и соответствующие им инвариантные интегралы. Можно даже пойти дальше и построить математическое представление поля с помощью обратного описания деформации тела, развитого в работах Маженна (G. A. Maugin), которые подытожены в монографии [284] и обзорной статье [285]. Обратное описание деформации сплошной среды и соответствующая вариационная формулировка нелинейной

¹¹Имеется русский перевод: Якоби К. Лекции по динамике. М., Л.: ОНТИ, 1936. 272 с.

¹²Краткий исторический обзор по проблематике, связанной с применением теоремы Нетер, читатель может найти в [111], с. 362-365.

теории упругости¹³ неожиданно оказываются удобными для исследования сингулярного упругого поля и позволяют с иных позиций взглянуть на энергетические соотношения нелинейной механики разрушения.

Ряд новых результатов, посвященных влиянию удаленной пластической зоны на равновесие трещины Дагдейла, приводится в третьей главе книги. Схема Леонова—Панасюка—Дагдейла [85], [214]¹⁴ неизменно привлекает к себе внимание, благодаря сравнительно простой расчетной схеме и широкому кругу приложений. Указанная схема позволяет дать оценку влияния удаленной зоны локализации пластических деформаций на трещину в условиях плоского напряженного состояния.

В 3.6 исследуется влияние очага локализации пластических деформаций и поврежденности, удаленного от кончика трещины нормального отрыва, на трещину в условиях плоского напряженного состояния. Удаленные локализованные зоны пластического течения, сопровождаемого развитием в этих зонах повреждений, могут зарождаться в процессе циклического нагружения, химического или температурного воздействия. На основании [308], [310] мы даем в 3.6.3 метод вычисления раскрытия трещины нормального отрыва в зависимости от геометрических параметров двухзонной локализации пластических деформаций и приводим соответствующие численные результаты.

Циклическое нагружение трещины с локализованной у ее вершины пластической зоной активизирует процесс освобождения скрытой свободной энергии, связанной с микронеоднородным в пределах пластической зоны полем напряжений. Освобождающаяся энергия является основным источником развития поврежденности в зонах локализации пластических деформаций. Поврежденность, в свою очередь, искажая поле напряжений и геометрию локализованных зон, влияет на состояние трещины. Одной из характеристик подобного влияния может служить изменение раскрытия трещины, обусловленное перераспределением напряжений и изменением зон локализации пластических деформаций вследствие роста поврежденности. Удастся получить точную формулу для вычисления раскрытия трещины при двухзонно локализованных пластических деформациях. Асимптотический анализ величины раскрытия трещины для случая, когда линейный размер удаленной пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины, приводит к заключению, что влияние удаленной пластической зоны на трещину проявляется в форме ее дополнительного закрытия. Последнее обстоятельство является проявлением эффекта перераспределения энергетического ландшафта вследствие оттока энергии из вершины трещины

¹³Сам автор этого подхода называет обратное описание деформации описанием Пиола (G. Piola) и отмечает, что обратная вариационная формулировка в сущности совпадает с использованной еще в XIX в. (и затем забытой) формулировкой [304]. Ясно, что и два традиционных способа описания деформации сплошного тела (в духе Лагранжа и Эйлера), и возможность расширения понятия группы инвариантности функционала действия и обобщенного варьирования — следствия универсального принципа двойственности и тотальной равноправности отсчетной и актуальной конфигураций тела в состоянии его деформации, пронизывающих всю механику деформируемых тел.

¹⁴Близкая по форме модель была предложена Г. И. Баренблаттом [18], [19], [20]. Моделирование узкой зоны локализации пластических деформаций может быть реализовано также методами теории дислокаций. Соответствующая модель была развита в [193].

в удаленную зону локализации необратимых деформаций и последующего ее освобождения при развитии микроповреждений в этой зоне.

Следует отметить, что проблема расчета двухзонно локализованного пластического течения представляет значительные трудности как при аналитическом подходе, так и при численном анализе, поскольку, например, в последнем случае сопряжена со значительными затратами времени вычислений.

Большое количество оригинальных результатов, включенных в книгу, связано с анализом развития трещин в условиях ползучести, особенно в связке ползучесть—поврежденность.

Под поврежденностью обычно понимается сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины — в упругости, дислокации — в пластичности, микропоры — при ползучести, поверхностные микротрещины — при усталости).

В ряду важнейших разделов механики деформируемого твердого тела механика континуума с внутренним распределением повреждений — по-прежнему, один из наиболее динамично развивающихся. Круг потенциальных приложений континуальной механики поврежденных тел чрезвычайно широк. Проникая в классические разделы механики твердого тела — такие как теория упругости, пластичности, ползучести — механика трещин и разрушения, механика поврежденности не только обогащается новыми концепциями и методами, свойственными этим ветвям механики твердого тела, но и заставляет переосмыслить традиционные для классических теорий подходы и постановки задач при расчетах напряженно-деформированных состояний твердых тел.

Согласно сложившейся традиции, основополагающими для континуальной механики поврежденности следует считать известные статьи Л. М. Качанова (1958 г.) и Ю. Н. Работнова (1959 г.). Ценность этих первых работ, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы, пригодной для описания поврежденности в упругих и упругопластических телах, а также ее развития в условиях ползучести. Сущность нового подхода заключалась в использовании новой переменной — параметра поврежденности, — отражающей присутствие в теле поврежденности (или различных видов повреждений).

В конце 70-х годов были предложены первые теоретические модели роста трещин в металлах в условиях ползучести с явным учетом деградации прочностных свойств металла. Моделирование роста трещины основывалось на предположении, что рост трещины происходит в том случае, если некоторая мера поврежденности достигает своего критического значения на некотором расстоянии от вершины трещины. В [8], [270] при моделировании роста трещин использовался скалярный параметр поврежденности Качанова—Работнова. В [319] параметр поврежденности связывался с величиной пористости материала и предполагалось, что процесс накопления повреждений обусловлен совместным действием диффузионного и вязкого механизмов роста пор в условиях

высокотемпературной ползучести. В [207] в качестве меры поврежденности материала принималась величина интенсивности накопленных деформаций ползучести. Модель, описывающая рост трещин в условиях ползучести, в более общей постановке, была предложена в [12]. В рамках этой модели предполагалось, что величина критической поврежденности материала не является постоянной, зависит от уровня напряжений и убывает при возрастании интенсивности напряжений.

Асимптотическое решение для поля напряжений у вершины трещины в упрочняющейся упругопластической среде, формально пригодное и для случая установившейся ползучести, было исследовано в работах [253], [314]. В работе [318] проанализировано напряженно-деформированное состояние для случая неподвижной трещины в упруго нелинейно вязкой среде. В условиях ползучести происходит перераспределение напряжений у вершины подрастающей трещины. Новый тип сингулярности поля напряжений для растущей в условиях ползучести трещины был определен в [250].

Однако наиболее существенное влияние на перераспределение напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины несомненно оказывает величина накопленной поврежденности. Первые теоретические модели, учитывающие процесс накопления рассеянных повреждений, основывались на несвязанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. В несвязанной постановке накопленная поврежденность определялась посредством интегрирования кинетического уравнения после определения поля напряжений. Таким образом, величина накопленной поврежденности не влияет на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины. Немногочисленные работы [246], [247] были посвящены конечноэлементному анализу процесса роста трещины в условиях ползучести на основе связанной постановки задачи теории ползучести с поврежденностью, предложенной впервые Ю. Н. Работновым [130].

В связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности параметр поврежденности входит в определяющие соотношения задачи и, следовательно, процесс накопления рассеянных повреждений влияет на напряженно-деформированное состояние.

Проблема моделирования роста трещин в связанной постановке представляет собой одну из важных задач механики деформируемого твердого тела, и к настоящему времени предприняты попытки рассмотреть распространение трещины в связанной постановке. Так, в [14] дано решение задачи о росте трещины антиплоского сдвига в среде с поврежденностью в связанной постановке. Исследование показало, что у вершины трещины отсутствует характерное для теории трещин сингулярное поле напряжений: эффективные напряжения ограничены, сами напряжения и сплошность линейно спадают до нуля, к свободным от нагрузок берегам трещины вблизи ее вершины примыкают области полностью разрушенного материала, в которых все напряжения и сплошность равны нулю.

Таким образом, связанность постановки задачи проявляется прежде всего

в исчезновении традиционной для механики разрушения сингулярности напряжений у вершины трещины.

В [15] рассмотрена задача о растущей в процессе ползучести трещины нормального отрыва в среде с поврежденностью. Результаты показывают, что к берегам растущей трещины примыкает область полностью поврежденного материала. Такое поле напряжений принципиально отличается от соответствующего сингулярного поля напряжений в несвязанной постановке задачи.

В [343] изучен усталостный рост трещины в среде с поврежденностью. Установлено, что принципиально невозможно удовлетворить граничным условиям на берегах трещины, что, в свою очередь, приводит к необходимости модификации постановки задачи: введения области, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю.

Наряду с построением асимптотик полей напряжений и сплошности в окрестности вершины прорастающей трещины, как это было сделано в работах [14], [15], [343], в [322] введены автомодельные переменные для задачи о росте трещины в среде с поврежденностью при использовании степенных соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и эффективные напряжения. Однако даже полная постановка данной задачи в [322] отсутствует.

Поэтому в настоящей книге мы приводим результаты исследования полей напряжений и скоростей деформаций у вершины трещины антиплоского сдвига для степенного определяющего закона на основе введения автомодельной переменной. Трудности, возникающие при решении этой задачи, обусловлены существованием области полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Эта задача — задача с неизвестной границей, поэтому необходимо разработать технику, позволяющую определить конфигурацию области полностью поврежденного материала.

Для разыскания напряженно-деформированного состояния использовался метод разложения компонент тензора напряжений и параметра сплошности по собственным функциям в новой системе координат, смещенной относительно старой на расстояние, равное характерному линейному размеру области полностью поврежденного материала. Установлено, что свойственная для рассматриваемого класса несвязных задач сингулярность полей напряжений и скоростей деформаций отсутствует. Компоненты тензора напряжений и параметр сплошности линейно падают до нуля при приближении к границе полностью поврежденного материала. Также изучены компоненты тензора напряжений и параметр сплошности на расстояниях, больших по сравнению с характерным линейным размером области полностью поврежденного материала, но все еще малых по сравнению с теми, для которых можно пренебречь влиянием поврежденности: получена так называемая промежуточная асимптотика, что позволило оценить геометрию области полностью поврежденного материала.

В разделе 4.3 представляемой монографии развивается так называемый геометрический подход механики поврежденности, изложенный впервые в работе [294] (см. также статьи [305], [100], [138], [139]), где на основе представления об

эквивалентной конфигурации континуума как собрания элементов, поврежденность которых некоторым воображаемым образом элиминирована, приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности второго ранга), которая обладает фундаментальным свойством симметрии. Эквивалентная конфигурация может быть корректно определена только как трехмерное риманово многообразие, при этом тензор поврежденности выступает как изометрический инвариант указанного многообразия. Можно даже пойти дальше и трактовать эквивалентную конфигурацию как многообразие с кривизной и кручением, тем более что такого рода пространства (с неевклидовой внутренней геометрией) уже давно применяются механиками для моделирования дефектных структур — дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов, — начиная с классических работ 50-х годов Кондо (K. Kondo) [266] и Билби (B. A. Bilby) [192].

Применение методов дифференциальной геометрии для построения параметров состояния тела с полем повреждений и в настоящее время представляется актуальной задачей, несмотря на то, что, по-видимому, уже сформировались основные принципы соответствия между аффинно-метрическими теориями и дефектными структурами.

Из всего сказанного можно заключить, что геометрическая модель [305], [100] с тензором поврежденности второго ранга может и дальше с успехом развиваться в плане учета микроструктуры тела с помощью методов дифференциальной геометрии. Однако одним из главных преимуществ этого подхода к описанию и представлению анизотропного состояния поврежденности является возможность достаточного простого и естественного учета эффекта возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями с помощью понятия эффективного напряжения, что открывает возможность применения механики поврежденности в классических разделах механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и ползучести. В разделе 4.4 геометрический подход выступает в качестве основы для вывода связанных уравнений теории пластичности и поврежденности. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности с тензором поврежденности второго ранга может быть синтезирована с классическими соотношениями теории пластичности и ползучести с целью получения связанных постановок краевых задач.

Общему анализу связанных уравнений теории пластичности и поврежденности целиком посвящен раздел 4.4, в котором приводятся результаты работ [141], [142], [143]. Насколько нам известно, связанные уравнения теории пластичности (в связке с поврежденностью) до последнего времени вообще не подвергались анализу и результаты в этой области, за исключением указанных работ, отсутствуют.

Соотношения статики и кинематики пластического течения, искаженного полем микроповреждений, сформулированные вдоль линий главных напряжений, приводятся специально с тем расчетом, чтобы использовать их при численном анализе связанных краевых задач, и особенно задач о локализации пластиче-

ских деформаций и повреждений у вершины трещины. Так как, например, в плоских задачах свободные берега трещины сами являются линиями главных напряжений, то исключительно удобно привязать разностную схему к счету вдоль линий главных напряжений от свободных от напряжений берегов трещин, пор и дефектов различной формы. Важными с этой точки зрения представляются инвариантные отношения, приведенные в 4.4.4, поскольку это — конечные отношения, сохраняющие неизменными свои значения при продвижении вдоль траекторий главных напряжений, связывающие главные напряжения и главные поврежденности с элементами внутренней геометрии линий главных напряжений и позволяющие уменьшить число неизвестных величин, подлежащих определению.

Механика разрушения продолжает динамично развиваться не только в своей прикладной части, но и в плане развития и совершенствования своих общетеоретических основ. За последние десять лет многие факты и концепции разрушения получили совершенно иную интерпретацию. В связи с этим следует еще раз отметить метод обратного описания упругого поля и оригинальную трактовку энергетических теорем и инвариантных интегралов механики разрушения, предложенные в [285]. В основе нового канонического подхода к исследованию твердых деформируемых тел лежит представление о материальных силах и канонических законах сохранения. Эффективность этого подхода блестяще продемонстрирована в обзорной статье [285], в частности, в применении к механике разрушения.

Заклучая введение, необходимо отметить, что требования к уровню специалистов в области механики разрушения постоянно повышаются. В настоящее время в связи с быстрым развитием вычислительной техники, созданием компьютерных методов анализа экспериментальных данных и программного обеспечения по моделированию механического поведения твердых деформируемых тел к этим требованиям добавляются новые, главное из которых — свободное владение компьютерными технологиями и пакетами программного обеспечения и поддержки механики разрушения. Мы надеемся, что монография будет способствовать достижению этих целей.

Введение в механику разрушения

1.1. Концентрация напряжений

Из экспериментов и инженерной практики известно, что вблизи существенных изменений формы поверхности тела значительно изменяется и "местное" напряженное состояние, которое быстро затухает по мере удаления от границы тела. В некоторых случаях уровень "местных" напряжений может быть очень высоким. При этом говорят о концентрации напряжений. В механике деформируемого твердого тела определение "местных" напряжений вблизи значительных изменений формы поверхности тела выделяют в отдельную проблему — проблему концентрации напряжений. Задачам теоретического и экспериментального исследования концентрации напряжений посвящено большое число работ. Упомянем здесь монографию [105], в которой дается систематическое изложение вопроса с позиций механики деформируемого твердого тела.

Особенно значимые результаты получены по расчету концентрации напряжений в упругих телах. Концентрация напряжений в условиях пластичности и ползучести исследована в меньшей степени. Ряд результатов численного анализа локализации пластических деформаций и деформаций ползучести, а также концентрации напряжений в элементах конструкций приведены в [89].

Ниже приводится ряд простейших примеров концентрации напряжений у вырезов. В плоских задачах теории упругости все компоненты тензора напряжений являются бигармоническими функциями, следовательно максимальные значения компоненты напряжений достигаются на границах вырезов.

Разрушение твердых тел нередко обусловлено образованием и развитием макроскопических трещин. В механике разрушения эту ситуацию схематизируют, заменяя трещину разрезом нулевой толщины. Трещина-разрез может быть получена предельным переходом от эллипсоидального выреза. Ясно, поэтому, что исследование локального напряженного состояния вблизи эллипсоидальных вырезов представляет исключительный интерес. Мы сочли необходимым изложить метод Эшелби, позволяющий эффективно рассчитывать напряженное состояние вблизи эллипсоидальных дефектов и включений в упругой среде.

1.1.1. Концентрация напряжений при всестороннем растяжении пластины с круговым отверстием

Пусть упругая неограниченная пластинка с круговым отверстием радиуса a всесторонне растягивается постоянными напряжениями $T_\infty = \sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty$, приложенными на бесконечности (рис. 1).

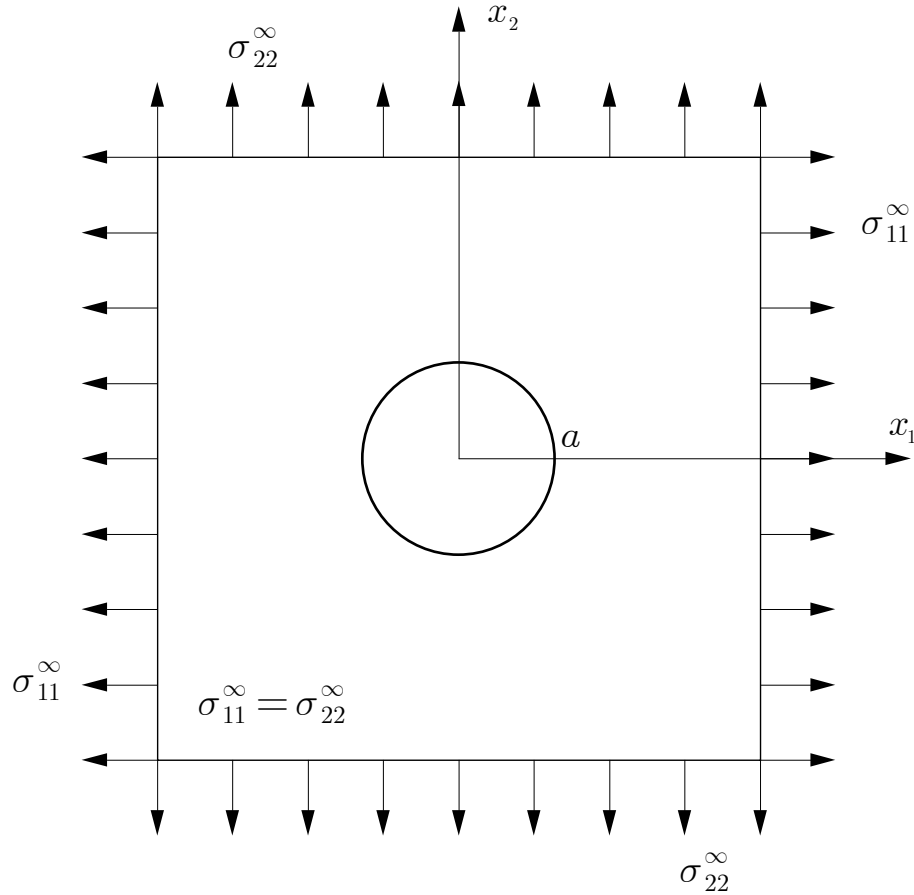


Рис. 1. Всестороннее растяжение упругой пластины с круговым отверстием

Принимая предположение о реализации плоского напряженного состояния в рассматриваемой пластине, можно показать (см., например, [167], с. 354, 355), что распределение напряжений представляется формулами

$$\sigma_{rr} = T_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = T_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0.$$

Ясно, что тангенциальное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ возрастает при приближении к контуру отверстия вдоль луча $\theta = \text{const}$. Максимальное значение $\sigma_{\theta\theta}$ достигает на контуре отверстия и этот максимум достигает удвоенного значения напряжения "дальнего поля" T_∞ .¹⁵

Приведенное распределение "местных" напряжений хорошо подтверждается экспериментально до тех пор, пока на контуре отверстия не возникают пластические деформации.

¹⁵Можно ввести понятие о коэффициенте концентрации напряжений, чтобы количественно выразить данный эффект. По понятным причинам в рассматриваемом случае он равен двум.

1.1.2. Концентрация напряжений при одноосном растяжении пластины с круговым отверстием

Снова рассмотрим упругую неограниченную пластинку с круговым отверстием радиуса a , которая находится под действием напряжений "дальнего поля" σ_{22}^∞ (см. рис. 2).

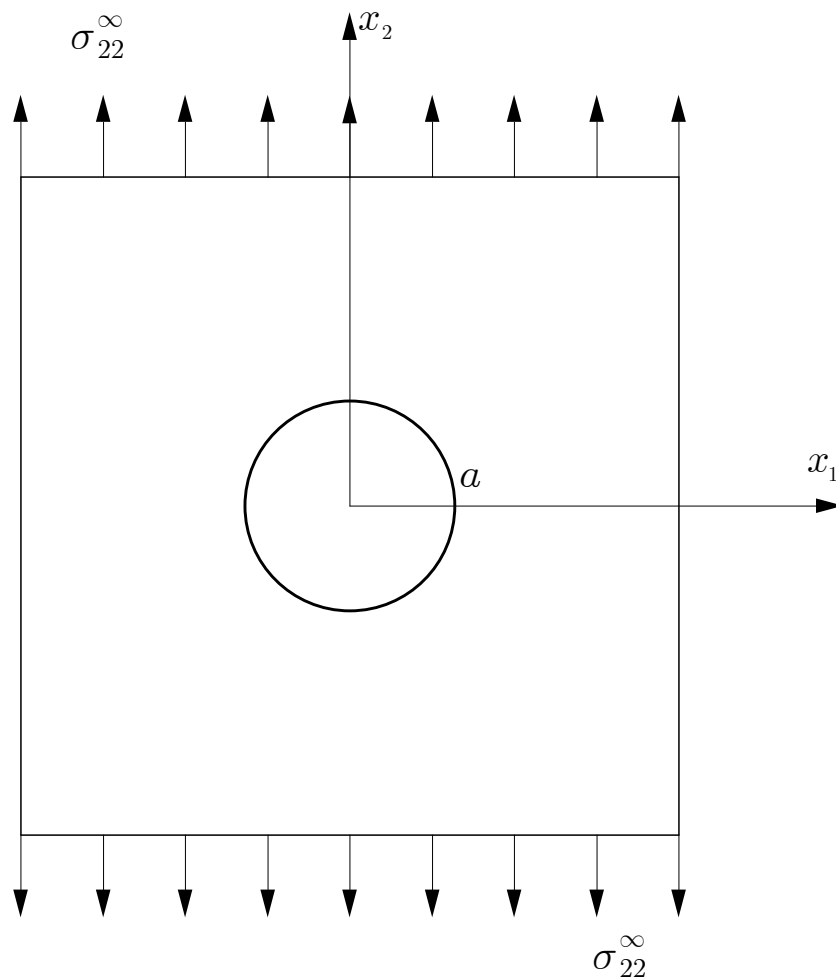


Рис. 2. Одноосное растяжение упругой пластины с круговым отверстием

Поле напряжений в этом случае описывается формулами (см., например, [167], с. 352, 353)¹⁶

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}\sigma_{22}^\infty \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\sigma_{22}^\infty \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right],$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}\sigma_{22}^\infty \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta.$$

¹⁶Приводимое ниже решение известно как решение Кирша (G. Kirsch, 1898 г.). В книгах [167], [169] имеется ссылка на его оригинальную работу.

Эпюра тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на контуре отверстия может быть построена, исходя из распределения

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{22}^{\infty}(1 + 2 \cos 2\theta).$$

Замечательной особенностью распределения тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ по контуру отверстия является то, что оно может принимать отрицательные значения.

Местные напряжения, возникающие у края кругового отверстия, превышают номинальные напряжения в три раза:

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} = 3\sigma_{22}^{\infty}.$$

Эта формула дает теоретическое обоснование найденному экспериментально сильному повышению напряжений в просверленном образце. Распределение напряжений в пластинке с круговым вырезом изучалось экспериментально методом фотоупругости.

В книге [169] построены изоклины и изостатические траектории, наблюдаемые при одноосном растяжении пластинки с одним и двумя круглыми отверстиями (с. 194-196, 226), а также распределение главных напряжений (с. 244-247).

1.1.3. Концентрация напряжений при всестороннем растяжении пластины с эллиптическим вырезом

Рассмотрим всестороннее растяжение напряжением "дальнего поля" T_{∞} неограниченной упругой пластины с эллиптическим вырезом. Пусть a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Введем эллиптические координаты r, θ , связанные с декартовыми координатами x_1, x_2 соотношениями

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \left(r + \frac{m}{r} \right) \cos \theta, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} \left(r - \frac{m}{r} \right) \sin \theta,$$

где $0 < m = (a-b)/(a+b) < 1$.

Распределение напряжений вычисляется в форме:

$$\sigma_{<rr>} + \sigma_{<\theta\theta>} = 2T_{\infty} \frac{r^4 - m^2}{r^4 - 2mr^2 \cos 2\theta + m^2},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{<rr>} - \sigma_{<\theta\theta>} + 2i\sigma_{<r\theta>} = \\ = \frac{2T_{\infty}r^2}{(\bar{\varsigma}^2 - m)(\varsigma^2 - m)^2} \left[(1 + m^2)(\varsigma^2 + m) - 2\varsigma m \left(\bar{\varsigma} + \frac{m}{\varsigma} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$z = \frac{a+b}{2} \left(\varsigma + \frac{m}{\varsigma} \right), \quad \varsigma = re^{i\theta}.$$

В частности, на контуре эллиптического отверстия тангенциальное напряжение есть

$$\sigma_{<\theta\theta>} = T_{\infty} \frac{2(1 - m^2)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}.$$

Тангенциальное напряжение достигает максимума у большой полуоси эллипса:

$$(\sigma_{<\theta\theta>})_{\max} = 2T_{\infty} \frac{a}{b}.$$

При $b \rightarrow 0$, когда эллиптический вырез вырождается в прямолинейный разрез нулевой толщины, коэффициент концентрации напряжений обращается в бесконечность.

Приведем также формулы для распределения напряжений на продолжении большой полуоси эллипса ($x_1 > a$, $x_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{T_{\infty} x_1 (x_1^2 - a^2)}{(x_1^2 - a^2 + b^2)^{3/2}}, \quad \sigma_{12} = 0, \\ \sigma_{22} &= \frac{T_{\infty} x_1 (x_1^2 - a^2 + 2b^2)}{(x_1^2 - a^2 + b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с характерной чертой линейной механики разрушения: у края ($x_1 = a$, $x_2 = 0$) прямолинейного разреза $-a < x_1 < a$, $x_2 = 0$, который можно рассматривать как предельное положение эллипса при $b \rightarrow 0$, напряжения сингулярны, причем, как следует из только что приведенных формул, напряжения σ_{11} и σ_{22} имеют корневую по расстоянию от края разреза особенность:

$$\sigma_{11} = \frac{T_{\infty} \sqrt{a}}{\sqrt{2} \sqrt{x_1 - a}} + \dots, \quad \sigma_{22} = \frac{T_{\infty} \sqrt{a}}{\sqrt{2} \sqrt{x_1 - a}} + \dots$$

Это свойство является важнейшей для механики разрушения характеристикой поля напряжений у края разреза нулевой толщины произвольной геометрической формы.

1.1.4. Концентрация напряжений при одноосном растяжении пластины с эллиптическим вырезом

Рассмотрим пластинку с эллиптическим отверстием, которая растягивается на бесконечности усилиями T_{∞} , направленными под углом θ_0 к оси x_1 (рис. 3).¹⁷

На контуре эллипса поле напряжений определяется формулами (см. [101], с. 318-320):

$$\sigma_{<rr>} = \sigma_{<r\theta>} = 0, \quad \sigma_{<\theta\theta>} = T_{\infty} \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\theta_0 - 2 \cos 2(\theta + \theta_0)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2},$$

¹⁷Решение этой задачи впервые было дано Инглисом (С. Е. Inglis) в 1913 г., [255]. Частный случай этой задачи (растяжение в направлении большой оси выреза) решен Г. В. Колосовым в 1909 г. По этой причине приводимое ниже решение обычно называют решением Колосова–Инглиса.

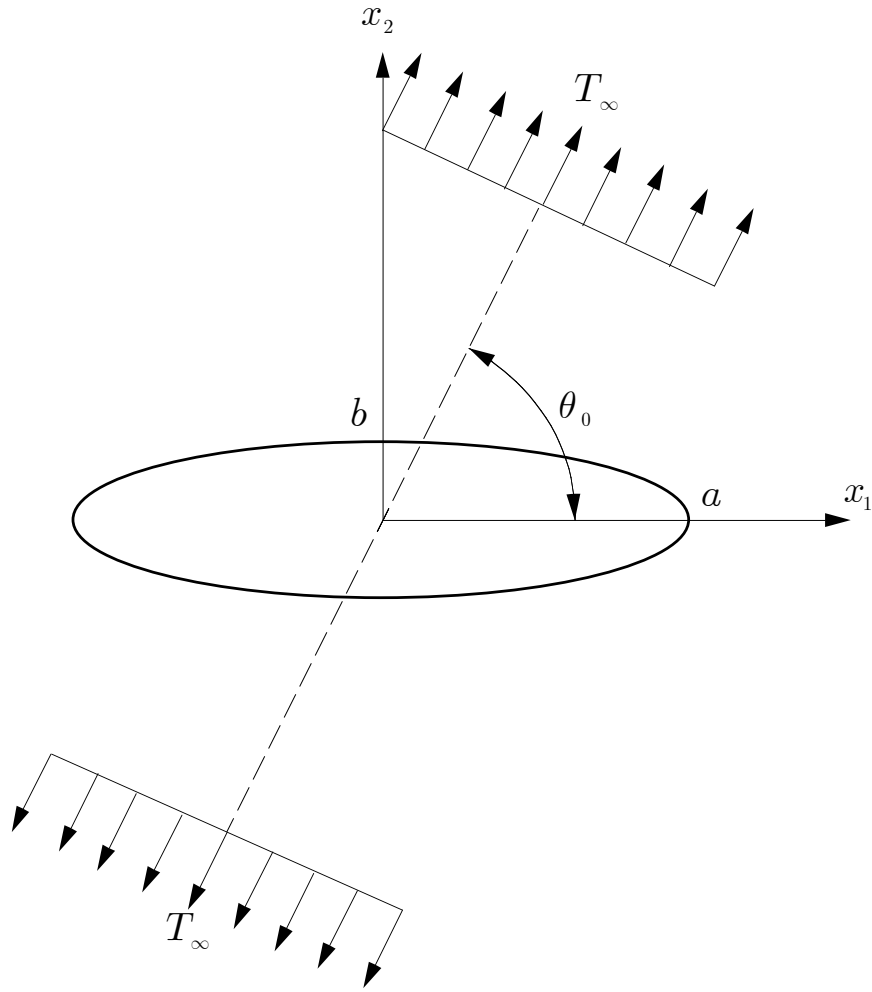


Рис. 3. Одноосное растяжение пластины с эллиптическим отверстием

где $0 < m = (a - b)/(a + b) < 1$; a, b — полуоси эллипса; r, θ — по-прежнему, эллиптические координаты, связанные с декартовыми координатами x_1, x_2 соотношениями

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \left(r + \frac{m}{r} \right) \cos \theta, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} \left(r - \frac{m}{r} \right) \sin \theta.$$

Если растяжение происходит вдоль вертикальной оси, то на контуре выреза распределение тангенциального напряжения есть

$$\sigma_{<\theta\theta>} = 2\sigma_{22}^{\infty} \frac{1 - m^2 - 2m + 2 \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}.$$

Максимум тангенциального напряжения оказывается равным

$$(\sigma_{<\theta\theta>})_{\max} = \sigma_{22}^{\infty} \left(1 + 2\frac{a}{b} \right).$$

Как и в предыдущем случае, при $b \rightarrow 0$, когда эллиптический вырез вырождается в прямолинейный разрез нулевой толщины, коэффициент концентрации напряжений обращается в бесконечность.

Задача о концентрации напряжений у края эллиптического выреза в анизотропной пластинке решена С. Г. Лехницким [82], [84]¹⁸ с помощью комплексного представления упругоанизотропных напряжений и перемещений.¹⁹

Оценка коэффициента концентрации напряжений у края эллиптического выреза в пластинке по соотношениям моментной теории упругости дана в [57], с. 285-291.

1.1.5. Концентрация напряжений у сферической полости в поле одноосного растяжения

Рассмотрим неограниченную изотропную упругую среду со сферической полостью радиуса R . В бесконечно удаленной точке напряженное состояние представляет собой одноосное растяжение $\sigma_{33} = \sigma_{33}^\infty$. Напряженное состояние в среде есть суперпозиция напряжений дальнего поля и местного напряженного состояния σ_{ij}^* .

Упругие смещения, соответствующие местному напряженному состоянию, имеют следующий вид (см. [24], с. 468-470):²⁰

$$\mathbf{u}^* = \frac{(1+\nu)\sigma_{33}^\infty R^3}{2(7-5\nu)Er^3} \left\{ 2 \left[5(1-2\nu) + \frac{3R^2}{r^2} \right] x_3 \mathbf{k} + \right. \\ \left. + \left[-6 + 5\nu + 15\frac{x_3^2}{r^2} + 3\frac{R^2}{r^2} \left(1 - 5\frac{x_3^2}{r^2} \right) \right] \mathbf{r} \right\}.$$

Полученная формула позволяет вычислить местные напряжения:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sigma_{33}^\infty \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \frac{\sigma_{33}^\infty R^3}{2(7-5\nu)r^3} \left\{ 2 \left[5(1-2\nu) + 3\frac{R^2}{r^2} \right] \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \right. \\ + 3 \left[-2 + 5\nu + 5(1-2\nu)\frac{x_3^2}{r^2} + \left(1 - 5\frac{x_3^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \right] \mathbf{I} + \\ + 3 \left[6 - 5\nu - 25\frac{x_3^2}{r^2} - 5 \left(1 - 7\frac{x_3^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \right] \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} + \\ \left. + 30 \left(\nu - \frac{R^2}{r^2} \right) \frac{x_3}{r^2} (\mathbf{k} \otimes \mathbf{r} + \mathbf{r} \otimes \mathbf{k}) \right\}.$$

¹⁸См. также перевод на английский язык [276] со второго издания этой книги.

¹⁹Им же ([83], с. 197-203) исследовался вопрос о концентрации напряжений у края сфероидальной полости в закрученном ортотропном цилиндре.

²⁰Решение этой задачи впервые было получено Леоном (А. Leon) в 1908 г. Проблема определения напряженного состояния у края сферической полости при заданных напряжениях "дальнего поля" σ_{ij}^∞ была полностью решена А. И. Лурье [87], с. 261, 262. Вектор перемещения, соответствующий местному напряженному состоянию, находится по формуле:

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{4G} R^3 \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty}{r^3} + \frac{1}{3} \mathbf{r} \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty}{r^3} \right) - \frac{4-10\nu}{7-5\nu} \mathbf{r} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty}{r^3} + \right. \\ \left. + \frac{5\nu-1}{3(7-5\nu)} r^2 \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty}{r^3} + \frac{r^2-R^2}{7-5\nu} \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\infty}{r^3} \right].$$

Физические компоненты тензора напряжений в сферической системе координат есть:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{33}^{\infty} \cos^2 \theta + \frac{\sigma_{33}^{\infty} R^3}{(7-5\nu)r^3} \left\{ 6 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \left[5(5-\nu) - 18 \frac{R^2}{r^2} \right] \cos^2 \theta \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{33}^{\infty} \sin^2 \theta + \frac{\sigma_{33}^{\infty} R^3}{(7-5\nu)r^3} \left\{ 4 - 5\nu + 9 \frac{R^2}{r^2} + \left[5(1-2\nu) - 21 \frac{R^2}{r^2} \right] \cos^2 \theta \right\}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{3\sigma_{33}^{\infty} R^3}{(7-5\nu)r^3} \left[-2 + 5\nu + \frac{R^2}{r^2} + 5 \left(1 - 2\nu - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos^2 \theta \right], \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma_{33}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{R^3}{2(7-5\nu)r^3} \left[5(1+\nu) - 12 \frac{R^2}{r^2} \right] \right\} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Отличные от нуля компоненты на границе полости

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{3\sigma_{33}^{\infty}}{2(7-5\nu)}(9-5\nu-10\cos^2\theta), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{3\sigma_{33}^{\infty}}{2(7-5\nu)}(-1+5\nu-10\nu\cos^2\theta)\end{aligned}$$

достигают максимума на экваторе:

$$\begin{aligned}(\sigma_{\theta\theta})_{\max} &= \frac{3(9-5\nu)}{2(7-5\nu)}\sigma_{33}^{\infty}, \\ (\sigma_{\varphi\varphi})_{\max} &= \frac{3(-1+5\nu)}{2(7-5\nu)}\sigma_{33}^{\infty}.\end{aligned}$$

Для меридиональных тангенциальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ имеет место концентрация напряжений. При этом они могут вдвое превосходить напряжения "дальнего поля" σ_{33}^{∞} . Эффект концентрации напряжений — существенно "местный": на расстояниях порядка утроенного радиуса полости возмущения напряженного состояния практически исчезают.

1.1.6. Концентрация напряжений у сферической полости в поле чистого сдвига

Рассматривается изотропная неограниченная упругая среда со сферической полостью радиуса R . В бесконечно удаленной точке напряженное состояние представляет собой чистый сдвиг $\sigma_{12} = \sigma_{12}^{\infty}$. Напряженное состояние в среде есть суперпозиция напряжений дальнего поля и местного напряженного состояния σ_{ij}^* .

Упругие смещения, соответствующие местному напряженному состоянию, имеют следующий вид ([86], с. 460-462):

$$\mathbf{u}^* = \frac{\sigma_{12}^\infty R^3}{4G} \left[\mathbf{Q} + \frac{1}{3} \mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{Q} - \frac{4\nu^{-1} - 10}{7\nu^{-1} - 5} \mathbf{r} \text{div} \mathbf{Q} + \right. \\ \left. + \frac{5 - \nu^{-1}}{3(7\nu^{-1} - 5)} r^2 \text{grad div} \mathbf{Q} + (r^2 - R^2) \frac{\nu^{-1}}{7\nu^{-1} - 5} \text{grad div} \mathbf{Q} \right],$$

где

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{r^3} (x_2 \mathbf{i} + x_1 \mathbf{j}).$$

Производя необходимые вычисления, находим

$$u_1^* = \frac{\sigma_{12}^\infty R^3}{2G(7\nu^{-1} - 5)} \frac{x_2}{r^5} \left[\left(20\nu^{-1} - 10 - 12\nu^{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) x_1^2 + \right. \\ \left. + \left(5\nu^{-1} - 10 + 3\nu^{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) (x_2^2 + x_3^2) \right], \\ u_2^* = \frac{\sigma_{12}^\infty R^3}{2G(7\nu^{-1} - 5)} \frac{x_1}{r^5} \left[\left(20\nu^{-1} - 10 - 12\nu^{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) x_2^2 + \right. \\ \left. + \left(5\nu^{-1} - 10 + 3\nu^{-1} \frac{R^2}{r^2} \right) (x_1^2 + x_3^2) \right], \\ u_3^* = \frac{\sigma_{12}^\infty R^3 \nu^{-1}}{2G(7\nu^{-1} - 5)} \frac{15x_1 x_2 x_3}{r^5} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Полученные формулы позволяют вычислить местные напряжения σ_{ij}^* , складывая которые с напряжениями дальнего поля, можно получить результирующее распределение напряжений и найти коэффициент концентрации напряжений. Так для сдвиговых напряжений у северного полюса $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = R$ сферического дефекта имеет место концентрация напряжений:

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^\infty \frac{15(\nu^{-1} - 1)}{7\nu^{-1} - 5}.$$

1.2. Метод Эшелби

Серия работ Эшелби (J. D. Eshelby) [223], [224], [225] посвящена развитию изящного метода определения напряженно-деформированного состояния в неограниченной упругой среде с эллипсоидальным включением. С помощью этого метода может быть решена, в частности, проблема концентрации напряжений у эллипсоидального дефекта и затем путем предельного перехода решение для эллиптического в плане разреза.

Аналогичная задача может быть решена и многими другими методами.²¹

²¹Впервые проблема концентрации напряжений у эллипсоидального дефекта была исследована в [331]. В этой работе использовались эллиптические координаты, и решение было выражено через эллиптические функции. Оригинальный и более простой метод решения был предложен А. И. Лурье (см. [87], с. 292-306).

Непосредственное переизложение работ Эшелби довольно затруднительно, поскольку стиль автора в значительной мере ориентирован на физическую интуицию, поэтому мы будем в основном следовать варианту этого метода, предложенному в [240], pp. 184-220.

1.2.1. Тензорная формализация метода Эшелби

Метод Эшелби допускает тензорную формализацию и в связи с этим достаточно ясную схему изложения. Ковариантность всех уравнений метода Эшелби лишний раз демонстрирует и его довольно широкую общность, и возможность достаточно компактного и замкнутого изложения.

Рассмотрим неограниченную изотропную упругую среду с дефектом в форме эллипсоида Ω , которая деформируется под действием напряжений "дальнего поля" σ_{ij}^∞ .²²

Согласно Эшелби, поле перемещений следует искать в форме

$$u_i = k_{ij}x_j + g\tau_{ij}\partial_j\varphi + g^*\tau_{jk}\partial_i\partial_j\partial_k\varphi^*,$$

где симметричный тензор k_{ij} определяется из уравнения

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^\infty &= \lambda k_{ss}\delta_{ij} + 2\mu k_{ij}; \\ g &= -\frac{1}{4\pi\mu}, \quad g^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}; \\ \varphi(x_k) &= \int_{\Omega} \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3}{||x - x'||}, \\ \varphi^*(x_k) &= \int_{\Omega} ||x - x'|| dx'_1 dx'_2 dx'_3\end{aligned}$$

— соответственно Ньютонов и бигармонический потенциалы эллипсоида.²³

²²Оригинальное изложение метода также имеется в книге [184] (см. Эшелби Дж. Определение поля упругих напряжений, создаваемого эллипсоидальным включением, и задачи, связанные с этой проблемой).

²³В декартовой системе координат, связанной с главными осями эллипсоида, потенциалы вычисляются как

$$\begin{aligned}\varphi(x_k) &= \pi a_1 a_2 a_3 \int_r^\infty \frac{U(q) dq}{D(q)}, \\ \varphi^*(x_k) &= -\frac{1}{4} \pi a_1 a_2 a_3 \int_r^\infty \frac{U^2(q) dq}{D(q)} + \text{const},\end{aligned}$$

где a_s — полуоси эллипсоида ($a_1 > a_2 > a_3$),

$$\begin{aligned}D(q) &= \sqrt{(a_1^2 + q)(a_2^2 + q)(a_3^2 + q)}, \\ U(q) &= 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + q} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + q} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + q},\end{aligned}$$

r — наибольший корень уравнения $U(r) = 0$.

Известно, что в случае эллипсоида внутренние потенциалы φ и φ^* есть полиномы второй и четвертой степеней, следовательно, внутри эллипсоида Ω

$$-N_{ij} = \partial_i \partial_j \varphi \quad -M_{ijkl} = \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l \varphi^*_{ijkl}$$

с постоянными компонентами N_{ij} и M_{ijkl} .²⁴

Вычисляя компоненты тензора напряжений, находим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \lambda k_{ss} \delta_{ij} + 2\mu k_{ij} + \lambda \delta_{ij} (g + 2g^*) \tau_{kl} \partial_k \partial_l \varphi + \\ & + 2\mu g \partial_i \partial_{(i} \varphi \tau_{j)l} + 2\mu g^* \tau_{lm} \partial_i \partial_j \partial_l \partial_m \varphi^*, \end{aligned}$$

где по индексам, заключенным в круглые скобки, производится симметризация.

Прямым подсчетом можно показать, что

$$\partial_j \sigma_{ij} = [\lambda(g + 2g^*) + \mu(g + 4g^*)] \tau_{kl} \partial_i \partial_k \partial_l \varphi,$$

и так как

$$\lambda(g + 2g^*) + \mu(g + 4g^*) = 0,$$

то уравнения равновесия удовлетворяются.

Тензор τ_{ij} определяется из граничных условий на поверхности эллипсоида и удовлетворяет уравнению

$$\tau_{kl} P_{klj} = -\lambda k_{ss} \delta_{ij} - 2\mu k_{ij},$$

где тензор четвертого ранга P_{klj} вычисляется по формуле

$$P_{klj} = -\delta_{ki} \delta_{lj} + \frac{\lambda}{4\pi(\lambda + 2\mu)} N_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{2\pi} \delta_{k(i} N_{j)l} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)} M_{ijkl}.$$

Проще всего вычислить компоненты тензоров M_{ijkl} и N_{kl} в декартовой системе координат, связанной с главными осями эллипсоида. Будем использовать прописные латинские буквы для записи индексов у этих тензоров в указанной системе координат. Можно показать, что

²⁴ Нетрудно проверить, опираясь на свойства потенциалов φ и φ^* , что справедливы следующие равенства:

$$N_{ss} = 4\pi, \quad M_{sskl} = 2N_{kl}, \quad M_{ssll} = 8\pi.$$

$$\begin{aligned}
N_{II} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_I^2 + q)D(q)}, \\
N_{IJ} &= 0 \quad (I \neq J), \\
M_{III} &= 6\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_I^2 + q)^2 D(q)}, \\
M_{IIJJ} &= M_{IJJJ} = M_{IJJI} = \\
&= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{dq}{(a_I^2 + q)(a_J^2 + q)D(q)} \quad (I \neq J).
\end{aligned}$$

Все не выписанные компоненты равны нулю; по индексам I, J суммирование в приведенных выше формулах отсутствует. Фигурирующие в этих формулах квадратуры приводятся к эллиптическим. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_1^2 - a_2^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \{F(\vartheta, k) - E(\vartheta, k)\}, \\
N_{33} &= \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(a_2^2 - a_3^2)\sqrt{a_1^2 - a_3^2}} \left\{ \frac{a_2(a_1^2 - a_3^2)}{a_1 a_3} - E(\vartheta, k) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$F(\vartheta, k) = \int_0^\vartheta \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}, \quad E(\vartheta, k) = \int_0^\vartheta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} d\omega$$

есть неполные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода соответственно,

$$\vartheta = \arcsin \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}},$$

и, кроме того,

$$N_{22} = 4\pi - N_{11} - N_{33},$$

$$M_{IIJJ} = \frac{N_{II}a_I^2 - N_{JJ}a_J^2}{a_I^2 - a_J^2} \quad (I \neq J; \quad \text{по } I, J \text{ не суммировать}),$$

$$M_{III} = 2N_{II} - M_{IILL} - M_{IIJJ}$$

$$(I \neq J, I \neq L, J \neq L; \quad \text{по } I, J, L \text{ не суммировать}).$$

Введем тензор Q_{mnij} , обратный к P_{klij} :

$$Q_{mnij}P_{klij} = \delta_{mk}\delta_{ln}, \quad Q_{klmn}P_{klij} = \delta_{im}\delta_{jn}.$$

Тензор τ_{ij} тогда вычисляется как

$$\tau_{ij} = -Q_{ijkl}(\lambda k_{ss}\delta_{kl} + 2\mu k_{kl}).$$

Если тензор Q_{mnij} известен, то решение задачи можно считать завершённым.

1.2.2. Иголообразный и дискообразный дефекты в упругой среде

Рассмотрим иголообразный дефект²⁵ ($a_1 = a_2 \ll a_3$) в неограниченной упругой среде. Если вектор l_k характеризует ориентацию иглы (в данном случае этот вектор направлен вдоль оси x_3), то можно показать, что

$$N_{ij} = 2\pi(\delta_{ij} - l_i l_j),$$

$$M_{ijkl} = \pi(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \pi(l_i l_j \delta_{kl} + l_i l_k \delta_{jl} + l_i l_l \delta_{jk} + l_j l_k \delta_{il} + l_j l_l \delta_{ik} + l_k l_l \delta_{ij}) + 3\pi l_i l_j l_k l_l.$$

Тензор Q_{mnij} находится в форме

$$Q_{mnij} = A_1 \delta_{mn}(\delta_{ij} - l_i l_j) + A_2 \delta_{mi} \delta_{nj} + A_3 (\delta_{mj} \delta_{ni} - \delta_{mi} l_n l_j - \delta_{ni} l_m l_j) + A_4 (\delta_{nj} l_m l_i + \delta_{mj} l_n l_i) + A_5 \delta_{ij} l_n l_m + A_6 l_i l_j l_n l_m,$$

где константы A_s ($s = 1, \dots, 6$) определены следующими равенствами

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\lambda + 2\mu)(2\lambda\mu - \mu(\lambda + \mu))}{2h\mu}, \quad A_2 = \frac{\mu(3\lambda + 5\mu)}{2h}, \\ A_3 &= \frac{\mu(\lambda + 3\mu)}{2h}, \quad A_4 = \frac{\lambda\mu - \mu^2}{2h}, \\ A_5 &= \frac{\mu^2}{h}, \quad A_6 = -2A_4 - A_5, \\ h &= -\mu(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

Как показывают расчеты, напряжения и смещения оказываются невозмущенными наличием иголообразного дефекта.

В случае дискообразного дефекта ($a_1 = a_2 \gg a_3$, $\varepsilon = \pi a_3/a_1 \rightarrow 0$) имеем

$$N_{11} = N_{22} = \frac{2\pi a_1^2 a_3}{(a_1^2 - a_3^2)^{3/2}} \left\{ \arccos \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_3}{a_1} \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \right\}$$

и тензор Q_{mnij} имеет вид

$$Q_{mnij} = A_1 n_j (n_m \delta_{jn} + n_n \delta_{im}) + A_2 n_m n_n n_i n_j + A_3 \delta_{mn} n_i n_j + o(1),$$

²⁵Под иголообразным дефектом мы понимаем вырез, граница которого есть сильно вытянутый сфероид.

где

$$A_1 = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{3\lambda + 4\mu}\varepsilon^{-1}, \quad A_2 = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{8}{3\lambda + 4\mu} - \frac{2}{\lambda + \mu} \right) \varepsilon^{-1},$$

$$A_3 = -\frac{\lambda(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)}\varepsilon^{-1}$$

и n_k — нормаль к плоскости диска.

Перемещения верхнего берега дискообразного дефекта определяются формулами

$$u_i^+ = k_{ij}x_j + \frac{2\mu}{3\lambda + 4\mu}k_{jk}n_kn_i\delta_{lj}x_l + b\frac{8(\lambda + 2\mu)}{3\lambda + 4\mu}(k_{ik}n_k - k_{kl}n_kn_ln_i) +$$

$$+ \frac{1}{4(\lambda + \mu)}(-\lambda k_{ss} - 2\mu k_{kl}n_kn_l) \left(x_i - 4bn_i\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right),$$

где $b \equiv n_kx_k\varepsilon^{-1}$.

Расчет по приведенным формулам показывает, что при растяжении напряжениями "дальнего поля" упругого тела с дискообразным разрезом в направлении, перпендикулярном плоскости разреза, сам разрез раскрывается в направлении растяжения и одновременно сжимается в двух других направлениях.

Приведем еще выражения для упругих перемещений местного поля при растяжении вдоль оси x_3 пространства с дисковидной трещиной $x_3 = 0$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a$. Эти выражения в цилиндрических координатах r, z имеют вид

$$Gu_r^* = -\frac{\sigma_{33}^\infty}{\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{2}r \left(\text{arccctgs} - \frac{s}{1 + s^2} \right) - \frac{rz}{s^3(1 + s^2)^2\omega} \right],$$

$$Gu_z^* = \frac{\sigma_{33}^\infty}{\pi} \left[(1 - 2\nu)z \left(\frac{1}{s} - \text{arccctgs} \right) - \frac{z^3}{s^5(1 + s^2)\omega} \right],$$

где

$$\omega = \frac{r^2}{(1 + s^2)^2} + \frac{z^2}{s^4}$$

и переменная s связана с r, z соотношением

$$r = \sqrt{1 + s^2}\sqrt{a^2 - s^2z^2}.$$

Нормальные напряжения в плоскости трещины ($r > a$) вычисляются как

$$\sigma_{zz}^* = -\frac{\sigma_{33}^\infty}{\pi} \left[(1 - \nu) \left(\text{arccctgs} - \frac{s}{1 + s^2} \right) - 2\nu \left(\frac{1}{s} - \text{arccctgs} \right) + \frac{\nu}{s(1 + s^2)} \right],$$

где $r = a\sqrt{1 + s^2}$.

При приближении к краю трещины $r \rightarrow a$ напряжения сингулярны. Главный член асимптотики имеет вид

$$\sigma_{zz}^* = \frac{2\sigma_{33}^\infty}{\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \dots$$

1.2.3. Конфигурационная сила, действующая на точечный дефект со стороны упругого поля

Пусть в неограниченной упругой среде имеется единственный сферически симметричный точечный дефект (точнее, неоднородность объема v_d , проявляющаяся через изменение жесткости среды), локализованный в месте $x_k = \tilde{x}_k$ — геометрическом центре дефекта.²⁶ Упругие константы неоднородного включения обозначим через $\lambda + \bar{\lambda}$, $\mu + \bar{\mu}$. Если $\bar{\lambda} = -\lambda$, $\bar{\mu} = \mu$, то дефект представляет собой дырку. Точечные дефекты типа дырок используются при моделировании вакансий в кристаллической решетке твердого тела, пор и пустот.

Пусть среда подвергается деформации. Поле деформации в среде, очевидно, искажается²⁷ наличием дефекта и результирующие смещения, деформации и напряжения можно представить как суперпозицию упругих полей в отсутствие дефекта (так называемые внешние поля) и полей, определяющих возмущение, обусловленное присутствием дефекта:

$$u_k = u_k^0 + u_k^*, \quad \varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^0 + \varepsilon_{jk}^*, \quad \sigma_{jk} = \sigma_{jk}^0 + \sigma_{jk}^*.$$

Поэтому плотность упругой энергии W можно представить в виде суммы плотности энергии поля W_0 в отсутствие дефекта и плотности энергии взаимодействия W^* дефекта с внешним полем.

С целью вычисления энергии взаимодействия $\overline{W^*}$ дефекта с внешним полем воспользуемся схемой Эшелби и заметим, что внешнее поле $\varepsilon_{jk}^0(x_s)$ для дефекта, локализованного в точке \tilde{x}_s , играет роль "дальнего поля". Согласно решению Эшелби, $\overline{W^*}$ можно представить в форме

$$\overline{W^*} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{jk}^0(\tilde{x}_s)S_{jkil}\varepsilon_{il}^0(\tilde{x}_s),$$

где тензор S_{jkil} имеет симметрию тензора упругих модулей (в данном случае изотропной упругой среды).²⁸

Ясно, что энергия взаимодействия зависит от положения дефекта, что и позволило Эшелби в конечном счете естественным образом ввести понятие силы

²⁶Точечными дефектами типа включений обычно моделируют атомы азота или водорода, проникающие при кристаллизации в решетку металла, атомы внедрения легирующих элементов, специально растворяемых в металле для придания ему тех или иных свойств.

²⁷Мы ограничимся случаем статического упругого равновесия.

²⁸Метод Эшелби позволяет вычислить компоненты тензора S_{jkil} с помощью эллиптических квадратур, которые в случае сферической симметрии дефекта упрощаются и выражаются в элементарных функциях. Не останавливаясь на деталях, заметим лишь, что для изотропной среды указанные компоненты имеют следующую структуру:

$$S_{jkil} = -\frac{v_d}{3}(s_1 - s_2)\delta_{jk}\delta_{il} - v_d s_2(\delta_{kl}\delta_{ji} + \delta_{kj}\delta_{li}).$$

Здесь v_d — объем дефекта, s_1 , s_2 — константы, которые можно выразить через упругие постоянные среды и включения:

$$s_1 = \frac{1}{3(\lambda + 2\mu)} + \frac{1}{3\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}},$$

$$s_2 = \frac{1}{15} \left(\frac{2}{\lambda + 2\mu} + \frac{3}{\mu} \right) + \frac{1}{2\bar{\mu}}.$$

f_m^{inh} , с которой внешнее упругое поле действует на дефект:

$$f_m^{\text{inh}} = -\frac{\partial \overline{W}^*}{\partial \tilde{x}_m} = S_{jkil} \varepsilon_{il}^0(\tilde{x}_s) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \varepsilon_{jk}^0(\tilde{x}_s),$$

где $\varepsilon_{jk}^0(\tilde{x}_s)$ — деформация, создаваемая внешним упругим полем в месте \tilde{x}_s .

Эффективное вычисление силы f_m^{inh} , с которой внешнее упругое поле действует на дефект, может быть реализовано с помощью инвариантных интегралов теории упругости (см. раздел 3.2.2). В приближении линейной теории упругости сила f_m^{inh} вычисляется по формуле

$$f_k^{\text{inh}} = \oint_{\Sigma} (W n_k + \sigma_{ij} n_j \partial_k u_i) d\Sigma,$$

где Σ — замкнутая поверхность, охватывающая дефект.

Несложный расчет показывает, что энергия взаимодействия \overline{W}^* дефекта с внешним полем вычисляется по формуле

$$\overline{W}^* = v_d \left[\frac{s_1}{6} (\varepsilon_{kk}^0(\tilde{x}_s))^2 + \frac{s_2}{2} e_{il}^0(\tilde{x}_s) e_{il}^0(\tilde{x}_s) \right],$$

в которой e_{il}^0 — девиатор тензора ε_{il}^0 .

Отсюда сила, действующая на дефект, равна

$$f_m^{\text{inh}} = -\frac{v_d s_1}{3} \varepsilon_{kk}^0(\tilde{x}_s) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \varepsilon_{kk}^0(\tilde{x}_s) - v_d s_2 e_{il}^0(\tilde{x}_s) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} e_{il}^0(\tilde{x}_s).$$

Конфигурационная сила f_m^{inh} не является силой в традиционном смысле этого слова: согласно определению, величина f_m^{inh} указывает изменение $\delta \overline{W}^*$ упругой энергии возмущения при перемещении центра дефекта на $\delta \tilde{x}_s$.

Конфигурационная сила f_m^{inh} отлична от нуля только если внешнее поле неоднородно в месте локализации дефекта, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m} \varepsilon_{ij}^0(\tilde{x}_s) \neq 0.$$

Можно доказать и более общий результат: если внешнее упругое поле однородно вблизи локализации дефекта, то сила, действующая на дефект произвольной формы, равна нулю.²⁹

1.3. Применение граничных интегральных представлений

Решение уравнений теории упругости внутри некоторой области может быть выражено через интегралы от значений напряжений и перемещений по поверхности, ограничивающей эту область. Поэтому речь можно вести о граничных

²⁹Этот результат аналогичен парадоксу Даламбера—Эйлера в гидродинамике.

представлениях упругих напряжений и перемещений, не забывая при этом о том, что в корректно поставленных задачах теории упругости граничные значения напряжений и перемещений одновременно никогда не задаются. Тем не менее граничные представления часто оказываются полезными при решении самых разных задач. Мы рассмотрим одно из применений граничных представлений для вывода асимптотики ”дальнего поля” распределения напряжений в неограниченной упругой среде с трещиной, берега которой расклиниваются нормальными усилиями.

1.3.1. Тензор Кельвина–Сомильяны

Рассмотрим известные из теории упругости граничные представления напряжений и перемещений.³⁰

Для удобства изложения введем следующие операторы:

$$\mathfrak{L}\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} + \frac{\mu}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{u},$$

$$\mathfrak{T}(\mathbf{n})\mathbf{u} = 2\mu(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \lambda\mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u}).$$

Оператор \mathfrak{L} называется оператором Ламе, а оператор \mathfrak{T} — оператором напряжений.

С помощью оператора \mathfrak{L} уравнение равновесия изотропного упругого тела (в случае отсутствия массовых сил) записывается как $\mathfrak{L}\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Оператор \mathfrak{T} паре \mathbf{n}, \mathbf{u} сопоставляет вектор напряжений \mathbf{t} в среде, деформированной полем перемещений \mathbf{u} , действующий на площадке, ориентированной нормально вектору \mathbf{n} .

Поле перемещений $\mathbf{u}^{(k)}$, индуцированное в месте x_s единичной сосредоточенной силой, направленной вдоль орта \mathbf{i}_k и приложенной в точке x'_s изотропной упругой среды, удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{L}\mathbf{u}^{(k)} = -\delta_3(x_s - x'_s)\mathbf{i}_k.$$

Компоненты тензора Кельвина–Сомильяны (Kelvin, C. Somigliana) определяются соотношением

$$G_{ik} = u_i^{(k)}$$

и вычисляются, как известно,³¹ в виде:

$$G_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ik} + \frac{(x_i - x'_i)(x_k - x'_k)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \right\}.$$

³⁰См., например, [195], pp. 97-107. Систематическое изложение имеется в [74]. См. также [87], с. 173-176; [115], с. 123-135.

³¹Приводимая ниже формула впервые была получена Кельвином в 1846 г. Этот результат воспроизводится во многих руководствах по теории упругости (см., например, [280], pp. 183-185; [330], pp. 484-485; [87], с. 175). В 1900 г. Фредгольмом (I. Fredholm) был предложен метод, который в принципе позволяет найти перемещения, индуцированные сосредоточенной силой в упругой среде, обладающей любым типом симметрии. Однако с помощью этого метода удалось получить лишь два новых аналитических решения (Кренером в 1953 г. для гексагонального кристалла и Эшелби также в 1953 г. для кубического кристалла (двумерный случай)).

С целью вычисления $u_i^{(m)}$ сначала заметим, что $u_i^{(m)}(x_i, x'_i) = u_i^{(m)}(x_i - x'_i)$, следовательно можно перенести источник в начало координат и искать решение уравнения

$$\mathfrak{L}\mathbf{u}^{(m)} = -\delta_3(x_s)\mathbf{i}_m.$$

Применяя преобразование Фурье

$$\mathbf{u}^{(m)*}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dx_1 dx_2 dx_3,$$

находим образ этого уравнения в следующем виде:

$$-\mu k^2 \mathbf{u}^{(m)*} - \mu(1 - 2\nu)^{-1}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}^{(m)*})\mathbf{k} + (2\pi)^{-3/2}\mathbf{i}_m = \mathbf{0},$$

где $k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$, откуда получаем, что

$$\mathbf{u}^{(m)*} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\mu} \frac{\mathbf{i}_m}{k^2} - \frac{1}{2(1 - \nu)(2\pi)^{3/2}\mu} \frac{k_m}{k^4} \mathbf{k}.$$

Поле перемещений $\mathbf{u}^{(m)}$ можно восстановить, применяя обратное преобразование Фурье:

$$\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}^{(m)*}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Покажем, что

$$\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right)^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2}.$$

Для этого воспользуемся обратным преобразованием Фурье и вычислим интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} dk_1 dk_2 dk_3.$$

В силу сферической симметрии³²

$$J = 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} e^{-ik\|\mathbf{x}\| \cos \theta^*} \sin \theta^* d\theta^* dk = \frac{4\pi}{\|\mathbf{x}\|} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{2\pi^2}{\|\mathbf{x}\|},$$

что и доказывает требуемое.

Учитывая следующие свойства преобразования Фурье

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right)^* = -ik_s f^*, \quad (ix_s f)^* = \frac{\partial f^*}{\partial k_s},$$

можно найти

$$\left(\frac{\delta_{lm}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{x_l x_m}{\|\mathbf{x}\|^3} \right)^* = \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}} \frac{k_l k_m}{k^4}.$$

Таким образом, перемещения $u_l^{(m)}$ восстанавливаются как

$$u_l^{(m)} = \frac{1}{16(1 - \nu)\pi\mu \|\mathbf{x}\|} \left((3 - 4\nu)\delta_{lm} - \frac{x_l x_m}{\|\mathbf{x}\|^2} \right).$$

³²По поводу преобразования Фурье радиальных функций см.: Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. с. 24-26.

Тензор G_{ik} часто называют тензором Грина (или тензором перемещений Грина) неограниченной изотропной упругой среды.

Заметим, что тензор Кельвина—Сомильяны симметричен:

$$G_{ik}(x_s, x'_s) = G_{ki}(x_s, x'_s).$$

Кроме того справедливо равенство

$$G_{ik}(x_s, x'_s) = G_{ik}(x'_s, x_s).$$

Обозначим через $\mathbf{t}^{(k)}$ вектор напряжения в точке x_s , действующего на площадку, ориентированную нормально вектору \mathbf{n} , индуцированного единичной сосредоточенной силой, направленной вдоль орта \mathbf{i}_k и приложенной в точке x'_s . Вектор $\mathbf{t}^{(k)}$ определяется по формуле ([87], с. 175):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(k)} = \mathfrak{T}(\mathbf{n})\mathbf{u}^{(k)} = & -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^3} \left\{ -(x_k-x'_k)\mathbf{n} + (x_h-x'_h)n_h\mathbf{i}_k + \right. \\ & \left. + n_k(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{3}{1-2\nu}(x_h-x'_h)(x_k-x'_k)n_h(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Определим тензор второго ранга $\mathcal{P}_{ik}(x_s, x'_s)$, полагая

$$\mathcal{P}_{ik}(x_s, x'_s) = t_i^{(k)},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ik}(x_s, x'_s) = & -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^3} \left\{ -(x_k-x'_k)n_i + (x_h-x'_h)n_h\delta_{ik} + \right. \\ & \left. + n_k(x_i-x'_i) + \frac{3}{1-2\nu}(x_h-x'_h)(x_k-x'_k)n_h(x_i-x'_i)\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathcal{P}_{ik}(x_s, x'_s) = \mathcal{P}_{ki}(x'_s, x_s).$$

Граничное представление поля перемещений имеет форму (\mathbf{n} — единичный вектор нормали к границе области, направленный во внешность области)

$$u_k(x'_s) = \oint\!\!\!\oint_S \left\{ \mathbf{u}^{(k)} \cdot (\mathfrak{T}(\mathbf{n})\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\mathfrak{T}(\mathbf{n})\mathbf{u}^{(k)}) \right\} dS,$$

или

$$u_k(x'_s) = \oint\!\!\!\oint_S \{ G_{ik}(x_l, x'_l) t_i(x_l) - u_i(x_l) \mathcal{P}_{ik}(x_l, x'_l) \} dS,$$

где интегрирование производится по поверхности S , содержащей внутри себя точку x'_s . Приведенную только что формулу часто называют формулой Сомильяны (С. Somigliana, 1889).³³

³³См., например, [330], pp. 492-497; [115], с. 123-135; [87], с. 179-181.

Граничное представление поля напряжений имеет форму

$$\sigma_{kh}(x'_s) = \oint\oint_S \{ D_i^{kh}(x_l, x'_l) t_i(x_l) - u_i(x_l) S_i^{kh}(x_l, x'_l) \} dS,$$

где

$$\begin{aligned} 2D_i^{kh} &= L_{lm}^{kh} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_m} G_{il} + \frac{\partial}{\partial x'_l} G_{im} \right\}, \\ 2S_i^{kh} &= L_{lm}^{kh} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_m} \mathcal{P}_{il} + \frac{\partial}{\partial x'_l} \mathcal{P}_{im} \right\}, \\ L_{lm}^{kh} &= \lambda \delta_{kh} \delta_{lm} + \mu (\delta_{kl} \delta_{hm} + \delta_{km} \delta_{hl}). \end{aligned}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} D_i^{kh} &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{1-2\nu}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^3} [\lambda\delta_{kh}(x_i-x'_i) + \mu(\delta_{ik}(x_h-x'_h) + \delta_{ih}(x_k-x'_k))] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu\delta_{kh}(x_i-x'_i)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^3} + \frac{3\mu(x_i-x'_i)(x_k-x'_k)(x_h-x'_h)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^5} \right\}, \\ -S_i^{kh} &= \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(\lambda+2\mu)\delta_{kh}n_i - 2\mu(\delta_{ik}n_h + \delta_{ih}n_k)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^3} + \right. \\ &\quad + \frac{3\mu(x_i-x'_i)[n_k(x_h-x'_h) + n_h(x_k-x'_k)]}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^5} - \\ &\quad - \frac{3n_i[\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2\delta_{kh} + 2\mu(x_k-x'_k)(x_h-x'_h)]}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^5} + \\ &\quad + \frac{3(x_j-x'_j)n_j[2\lambda(x_i-x'_i)\delta_{kh} + \mu(\delta_{ik}(x_h-x'_h) + \delta_{ih}(x_k-x'_k))]}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^5} - \\ &\quad - \frac{3\mu}{1-2\nu} \frac{(x_j-x'_j)n_j(\delta_{hi}(x_k-x'_k) + \delta_{ik}(x_h-x'_h)) + (x_i-x'_i)(n_h(x_k-x'_k) + n_k(x_h-x'_h))}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^5} + \\ &\quad \left. + \frac{6\mu}{1-2\nu} \frac{(x_j-x'_j)n_j(x_i-x'_i) [-\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^2\delta_{kh} + 5(x_k-x'_k)(x_h-x'_h)]}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\|^7} \right\}. \end{aligned}$$

Граничные представления теории упругости сохраняют свою силу и для бесконечных областей, если потребовать, чтобы перемещения убывали на бесконечности как r^{-1} , а напряжения — r^{-2} .

1.3.2. Асимптотика поля напряжений на значительном удалении от плоского разреза

Пользуясь граничными представлениями для напряжений, нетрудно получить³⁴ асимптотики "дальнего поля" для распределения напряжений в неограниченной упругой среде с дискообразной трещиной S , расположенной в плоскости

³⁴См., например, [34], с. 86-91.

$x_3 = 0$, берега которой расклиниваются нормальными усилиями. Контур края трещины $L = \partial S$ можно считать произвольной плоской кривой.

Прежде всего заметим, что нормали на верхнем S^+ и S^- нижнем берегу трещины различаются знаком. Далее, очевидно, что

$$t_3^+ = -t_3^-, \quad t_1^\pm = 0, \quad t_2^\pm = 0.$$

Пользуясь определениями тензоров D_i^{kh} и S_i^{kh} , заключаем, что

$$D_i^{kh+} = D_i^{kh-}, \quad S_i^{kh+} = -S_i^{kh-}.$$

Наконец, замечая, что берега разреза не сдвигаются друг относительно друга, получаем

$$\sigma_{ij}(x'_s) = - \int_{S^+} [u_3] S_3^{ij+} dS.$$

Учитывая, что величина S_3^{ij+} при $\|\mathbf{x}'\| \gg \|\mathbf{x}\|$ (положения x_k находятся на верхнем берегу разреза) асимптотически вычисляется как

$$S_3^{kh+} = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(\mu-\lambda)\delta_{kh} - 2\mu\delta_{3k}\delta_{3h}}{\|\mathbf{x}'\|^3} - 3 \frac{\mu x'_k x'_h - \lambda \delta_{kh} x'^2_3 - \mu x'_3 (\delta_{3k} x'_h + \delta_{3h} x'_k)}{\|\mathbf{x}'\|^5} - \right. \\ \left. - \frac{3\mu}{1-2\nu} \frac{x'_3 (\delta_{3k} x'_h + \delta_{3h} x'_k)}{\|\mathbf{x}'\|^5} + \frac{3\mu}{1-2\nu} \frac{x'^2_3 [5x'_k x'_h - \|\mathbf{x}'\|^2 \delta_{kh}]}{\|\mathbf{x}'\|^7} \right\},$$

выполняя интегрирование и заменяя x'_k на x_k , приходим к следующей асимптотической формуле:

$$\sigma_{kh} = \frac{-\bar{\kappa} v_c}{2\pi} \left\{ \frac{(\mu-\lambda)\delta_{kh} - 2\mu\delta_{3k}\delta_{3h}}{\|\mathbf{x}\|^3} - 3 \frac{\mu x_k x_h - \lambda \delta_{kh} x^2_3 - \mu x_3 (\delta_{3k} x_h + \delta_{3h} x_k)}{\|\mathbf{x}\|^5} - \right. \\ \left. - \frac{3\mu}{1-2\nu} \frac{x_3 (\delta_{3k} x_h + \delta_{3h} x_k)}{\|\mathbf{x}\|^5} + \frac{3\mu}{1-2\nu} \frac{x^2_3 [5x_k x_h - \|\mathbf{x}\|^2 \delta_{kh}]}{\|\mathbf{x}\|^7} \right\}.$$

где

$$v_c = \int_{S^+} [u_3] d\Sigma \quad ([u_3] = u_3^+ - u_3^-)$$

есть объем трещины,

$$\bar{\kappa} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.$$

Интересно отметить, что главный член асимптотики непосредственно не зависит ни от геометрии разреза, ни от распределения нормальных нагрузок на его берегах: существенным для характера затухания упругого поля напряжений оказывается лишь объем трещины.

В плоскости трещины $x_3 = 0$ асимптотика "дальнего поля" для нормального напряжения σ_{33} имеет вид

$$\sigma_{33}|_{x_3=0} = \frac{\mu v_c}{4\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}.$$

Напряжение σ_{33} на линии, нормальной берегам трещины, асимптотически вычисляется как

$$\sigma_{33}|_{x_1=0, x_2=0} = \frac{-2\mu v_c}{\pi(1-\nu)x_3^3}.$$

1.4. Различные дополнения и обобщения

1. Рассмотренные выше примеры напряженных состояний у края разрезов в упругих телах характеризуются одним замечательным свойством: при подходе к краю разреза поле напряжений сингулярно и характер сингулярности — корневой по расстоянию вдоль нормали к краю разреза.

Рассмотрим разрез нулевой толщины, расположенный в плоскости $x_3 = 0$, край разреза L — некоторая замкнутая кривая. Предположим, что у края разреза осуществляется напряженное состояние, которое можно охарактеризовать как нормальный отрыв: на продолжении трещины возникают только нормальные растягивающие напряжения.

Для анализа "местных" напряжений введем локальную декартову систему координат, как показано на рис. 4, направив две оси по нормали и касательной к контуру L , а третью — нормально плоскости разреза.

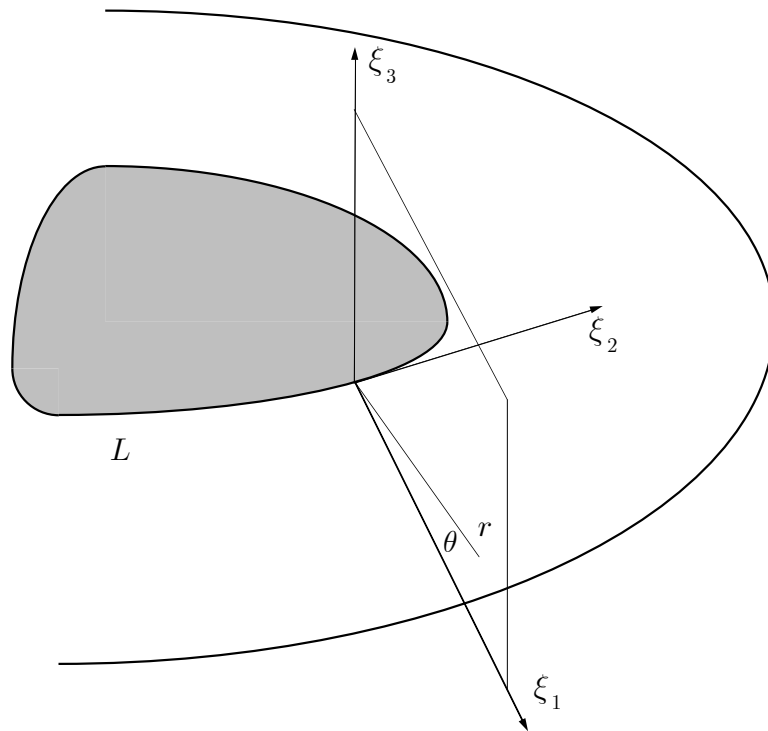


Рис. 4. Локальная система координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 у края трещины

Оказывается, что компоненты тензора напряжений у края разреза относительно локальных координатных осей представляются асимптотическими формулами:

$$\sigma_{j3} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{j3}(\theta) + \dots,$$

где коэффициент K_I , имеющий фундаментальное значение для механики разрушения, называется коэффициентом интенсивности напряжений. Эти асимптотики устанавливают характер сингулярности напряжений у края разреза — корневой. Здесь коэффициент интенсивности напряжений K_I , вообще говоря, зависит от кривизны края трещины. Заметим, что $\bar{\sigma}_{13}(\theta = 0) = \bar{\sigma}_{23}(\theta = 0) = 0$.

2. Вычислим энергию взаимодействия "дальнего" упругого поля, деформация которого однородна и задана компонентами ε_{ij}^∞ , с эллипсоидальной полостью.³⁵

Энергия взаимодействия \overline{W}^* может быть вычислена по формуле:

$$\overline{W}^* = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^\infty S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^\infty,$$

где компоненты тензора S_{ijkl} выражаются через эллиптические квадратуры. Более точно: тензор \mathbf{S} представим в форме

$$\mathbf{S} = -v_d(\mathbf{C} + \mathbf{A}^{-1}),$$

где v_d — объем эллипсоида, \mathbf{C} — тензор упругих модулей изотропной среды

$$C_{jkil} = \mu(\delta_{kl}\delta_{ji} + \delta_{kj}\delta_{li}) + \lambda\delta_{jk}\delta_{il},$$

тензор \mathbf{A} имеет симметрию эллипсоида и в системе координат, связанной с главными осями эллипсоида, имеет девять отличных от нуля компонент, три из которых приводятся ниже:

$$\begin{aligned} A_{1111} &= g^*[3I_{11} + (1 - 4\nu)I_1], \\ A_{1122} &= g^*(I_{21} - I_1), \\ A_{1111} &= \frac{1}{2}g^*[I_{12} + I_{21} + (1 - 2\nu)(I_1 + I_2)], \end{aligned}$$

$$I_s = \frac{3}{2}v_d \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a_s^2)D(\xi)}, \quad I_{ss'} = \frac{3}{2}v_d a_s^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a_s^2)(\xi + a_{s'}^2)D(\xi)},$$

$$g^* = \frac{1}{16\pi\mu(1 - \nu)},$$

а остальные отличные от нуля компоненты получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

В частности, если вырез имеет форму сфероида с осью вращения x_3 и находится в поле дилатации $\varepsilon_{ij}^\infty = \varepsilon^\infty \delta_{ij}$, то энергия взаимодействия есть

$$\overline{W}^* = \frac{v_d(\varepsilon^\infty)^2}{2g^*\Delta}(3p_\perp + p_3),$$

где

³⁵Решение этой проблемы приводится в книге [73], с. 343-344.

$$\begin{aligned}
p_{\perp} &= (5 - 4\nu)I_3 - 3I_{13} - 8\pi(1 - \nu), \\
p_3 &= 2(1 - 2\nu)(I_1 - I_3), \\
\Delta &= [4(1 - \nu)I_3 - 2I_{13} + 8\pi] \times \\
&\quad \times [(3 - 4\nu)I_1 - I_{31} + 8\pi(1 + \nu)] - \\
&\quad - 2[-I_3 + I_{13} + 8\pi\nu]^2.
\end{aligned}$$

3. Весьма интересным представляется вычисление энергии взаимодействия точечных сферически симметричных дефектов между собой.³⁶

Для энергии взаимодействия дефектов с внешним упругим полем и между собой можно получить выражение:

$$\overline{W^*} = -\frac{1}{2} \sum_{p', p''} \varepsilon_{ij}^0(\tilde{x}_s^{(p')}) K_{ijkl}^{(p'p'')} \varepsilon_{kl}^0(\tilde{x}_s^{(p'')}),$$

где $\tilde{x}_s^{(p)}$ — место локализации дефекта, занумерованного как p . Компоненты тензора $K_{ijkl}^{(p'p'')}$ зависят от разностей $\tilde{x}_s^{(p'')} - \tilde{x}_s^{(p')}$.

Сравнительно легко могут быть установлены асимптотические формулы для тензора $\mathbf{K}^{(p'p'')}$ в том случае, когда имеется два точечных дефекта, удаленных друг от друга на значительное расстояние $\rho_{12} = |\tilde{\mathbf{r}}^{(1)} - \tilde{\mathbf{r}}^{(2)}|$.³⁷

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^{(11)} &= \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{O}(\rho_{12}^{-6}), \quad \mathbf{K}^{(22)} = \mathbf{S}^{(2)} + \mathbf{O}(\rho_{12}^{-6}), \\
\mathbf{K}^{(12)}, \mathbf{K}^{(21)} &= \mathbf{O}(\rho_{12}^{-3}) + \mathbf{O}(\rho_{12}^{-9}).
\end{aligned}$$

4. Следуя [73], можно вычислить энергию взаимодействия двух эллипсоидальных полостей с упругим полем и между собой. В частности, для двух сфероидов с общей осью вращения x_3 в поле дилатации $\varepsilon_{ij}^{\infty} = \varepsilon^{\infty} \delta_{ij}$ можно найти:

$$\overline{W^*} = \overline{W^*}^{(1)} + \overline{W^*}^{(2)} + \overline{W^*}^{(12)} \rho_{12}^{-3} + \dots,$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{W^*}^{(i)} &= \frac{v_d^{(i)} (\varepsilon^{\infty})^2}{2g^* \Delta_{(i)}} (3p_{\perp}^{(i)} + p_3^{(i)}), \\
\overline{W^*}^{(12)} &= \frac{2v_d^{(1)} v_d^{(2)}}{g^* \Delta_{(1)} \Delta_{(2)}} ((1 - 2\nu)(p_{\perp}^{(1)} p_3^{(2)} + p_3^{(1)} p_{\perp}^{(2)}) - 2(1 - \nu) p_{\perp}^{(1)} p_{\perp}^{(2)}), \\
p_{\perp}^{(i)} &= (5 - 4\nu)I_3^{(i)} - 3I_{13}^{(i)} - 8\pi(1 - \nu), \\
p_3^{(i)} &= 2(1 - 2\nu)(I_1^{(i)} - I_3^{(i)}),
\end{aligned}$$

³⁶Решение этой проблемы и оригинальный метод приводятся в книге [73]. В настоящее время продолжают появляться публикации, посвященные выводу асимптотических формул для напряженно-деформированного состояния и потенциальной энергии деформации упругого поля, сингулярно возмущенного присутствием трещин, полостей и включений. Укажем на одну из последних публикаций подобного рода [103].

³⁷Последнее означает, что $\rho_{12} \gg \bar{r}$, где \bar{r} — радиус дырки. Практически достаточно считать, что $\rho_{12} > 4\bar{r}$.

$$\begin{aligned} \Delta_{(i)} = & \left[4(1 - \nu)I_3^{(i)} - 2I_{13}^{(i)} + 8\pi \right] \times \\ & \times \left[(3 - 4\nu)I_1^{(i)} - I_{31}^{(i)} + 8\pi(1 + \nu) \right] - \\ & - 2 \left[-I_3^{(i)} + I_{13}^{(i)} + 8\pi\nu \right]^2. \end{aligned}$$

Если оба эллипсоида — сферы, то $\overline{W}^{*(12)} = 0$ и асимптотика энергии взаимодействия дефектов между собой имеет более высокий порядок, чем куб расстояния между их центрами. Можно показать,³⁸ что энергия взаимодействия двух изотропных сферических вырезов имеет порядок ρ_{12}^{-6} по расстоянию между центрами вырезов.³⁹

³⁸См. Лифшиц И. М., Танатаров Л. В. Об упругом взаимодействии атомов примеси в кристалле // Физика металлов и металловедение. 1961. Т. 12. Вып. 3. С. 331-337.

³⁹Можно рассчитать также с помощью инвариантного интеграла механики разрушения конфигурационную силу, действующую на сферическую дырку радиуса \bar{r}_2 , помещенную в упругое поле одноосного растяжения напряжением σ_{33}^∞ , сингулярно возмущенного другим дефектом типа дырки радиуса \bar{r}_1 . Не останавливаясь здесь на деталях, приведем лишь результат вычислений ([176], с. 33):

$$\begin{aligned} f_{<r>}^{\text{inh}} &= \frac{45\lambda(\sigma_{33}^\infty)^2\bar{r}_1^3\bar{r}_2^3}{2(7-5\nu)Er_2^4}(-1 + 2\nu - 6\nu \cos^2 \theta_2 + 5 \cos^2 \theta_2), \\ f_{<\theta>}^{\text{inh}} &= \frac{15\lambda(\sigma_{33}^\infty)^2\bar{r}_1^3\bar{r}_2^3}{(7-5\nu)Er_2^4} \sin 2\theta_2(-1 - \nu + 5 \cos^2 \theta_2), \end{aligned}$$

где r_2, θ_2 — сферические координаты дырки радиуса \bar{r}_2 , причем центр сферической системы координат помещен в центр дырки радиуса \bar{r}_1 .

Основные понятия и уравнения механики разрушения

2.1. Поля напряжений и перемещений у вершины трещины в упругой среде

Для исследования напряжений и перемещений в линейно упругих телах в настоящее время обычно используются три метода: метод комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили [101], метод интегральных преобразований (см., например, [166]) и метод разложения по собственным функциям [342].⁴⁰

Метод комплексных потенциалов пригоден только для анализа плоских задач, но отличается высокой эффективностью. Метод интегральных преобразований может применяться для анализа трехмерных статических и динамических задач линейной механики разрушения, однако требует владения сложными математическими методами. Метод разложения по собственным функциям имеет более широкую область применимости, нежели линейная теория упругости (известны приложения этого метода к анализу напряжений и деформаций у вершины трещины в упрочняющихся телах и в условиях ползучести, в том числе и с учетом поля рассеянных повреждений). Мы полагаем, что метод разложения по собственным функциям, будучи, пожалуй, единственным общим методом анализа прикладных задач нелинейной механики разрушения, заслуживает того, чтобы акцентировать на нем внимание и в линейном случае.

Ниже, в 2.1.1, рассматривается метод комплексных потенциалов и его применение к анализу напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Затем, в 2.1.2, та же самая проблема изучается методом разложения по собственным функциям. Мы, таким образом, предоставляем читателю судить о достоинствах и недостатках каждого из них.

Ключевое для линейной механики разрушения понятие о коэффициенте интенсивности напряжений и общие формулы для его вычисления в плоских задачах о трещинах в неограниченных средах обсуждаются в 2.1.4 с помощью

⁴⁰Обзор методов и результатов линейной теории упругости дан в статье: Каландия А. И., Лурье А. И. и др. Линейная теория упругости/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 5-70.

комплексного представления.

Дополнительные результаты, некоторые замечания и обобщения приводятся в 2.1.5, где читатель может найти коэффициенты интенсивности напряжений для важнейших частных конфигураций трещин и нагрузок.

2.1.1. Полубесконечная трещина в упругой среде. Метод комплексных потенциалов

Рассмотрим случаи, когда все компоненты напряжений и деформаций зависят от двух декартовых координат x_1 и x_2 . Будем исследовать однородные и изотропные упругие материалы.⁴¹

2.1.1А. Плоская деформация и плоское напряженное состояние

Допустим, что $u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$. Это деформированное состояние, в котором $\varepsilon_{3i} = 0$, называется состоянием плоской деформации. Уравнения равновесия и совместности принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0 \quad (i, j = 1, 2), \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, если выразить компоненты напряжения через функцию напряжений Эри $F = F(x_1, x_2)$ (G. В. Airy, 1862 г.):

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} \Delta F \quad (i, j = 1, 2),$$

где $\Delta = \partial_k \partial_k$ — оператор Лапласа.

Выражая деформации через напряжения с учетом условия $\varepsilon_{3i} = 0$, получаем, что для выполнения уравнения совместности функция U должна быть бигармонической:

$$\Delta^2 F = 0.$$

Такие же уравнения получаются для плоского напряженного состояния тонких пластин, если σ_{ij} и ε_{ij} рассматривать как средние по толщине значения и допустить, что среднее по толщине значение σ_{33} пренебрежимо мало. Бигармонические функции на основании теоремы Гурса (E. Goursat, 1898 г.) также могут быть представлены через две аналитические функции комплексного переменного z :

$$F = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right],$$

⁴¹Изложение в основном следует [148], где дан анализ для случая полубесконечной прямолинейной трещины. В случае криволинейного разреза асимптотики напряжений и перемещений у его вершин также без труда определяются (см., например, [150], с. 18-24, где вывод осуществляется методом сингулярных интегральных уравнений).

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили, а черта означает комплексное сопряжение. Напряжения при этом выражаются следующим образом:⁴²

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4\operatorname{Re}[\varphi'(z)], \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)].\end{aligned}$$

В случае плоской деформации $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, а в случае плоского напряженного состояния $\sigma_{33} = 0$.

Для смещений имеем следующее комплексное представление:

$$2G(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ в случае плоского напряженного состояния.

2.1.1Б. Антиплоский сдвиг

Предположим, что $u_1 = u_2 = 0$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Тогда только напряжения σ_{31} , σ_{32} и деформации

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

будут отличны от нуля. В данном случае должно удовлетворяться единственное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} = 0,$$

а соотношение между напряжениями и деформациями имеет вид $\sigma_{3i} = 2G\varepsilon_{3i}$ ($i = 1, 2$). Таким образом, u_3 является гармонической функцией: $\Delta u_3 = 0$. Гармоническая функция от x_1 и x_2 может быть представлена как действительная или мнимая часть некоторой аналитической функции от $z = x_1 + ix_2$:

$$u_3 = G^{-1} \operatorname{Im} [\omega(z)],$$

где функция $\omega(z)$ является аналитической.

Тогда напряжения можно представить в виде:

$$\sigma_{32} + i\sigma_{31} = \omega'(z).$$

Таким образом осуществляется комплексное представление напряжений и перемещений в теории антиплоской деформации.

2.1.1В. Характер особенности распределения напряжений у вершины трещины

Можно обнаружить важные особенности распределения напряжений у вершины трещины, установив общую форму решений двумерных задач. Рассмотрим трещину, расположенную на части отрицательной полуоси x_1 , вершина

⁴²Приводимые ниже формулы (также, как и комплексное представление перемещений) были впервые получены Г. В. Колосовым в 1909 г. Генезис комплексного представления соотношений двумерной упругости обсуждается в [162].

которой расположена в начале координат. Обозначим через R малую область плоскости x_1x_2 , которая не содержит особых точек, за исключением вершины трещины в начале координат, и в которой функции напряжений аналитичны всюду, кроме линии трещины. Компоненты напряжений, входящие в граничное условие на свободной от нагрузок поверхности трещины, можно представить в виде

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \varphi'(z) + \overline{\Omega'(z)} + (z - \bar{z})\overline{\varphi''(z)},$$

где новая аналитическая функция Ω определена соотношением

$$\Omega(z) = z\varphi'(z) + \psi(z).$$

Далее индексы плюс и минус означают предельные значения аналитических функций при приближении к линии трещины из областей $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$ соответственно. Для точек на линии трещины принято обозначение $z = t$, где t вещественно и отрицательно. Тогда требование отсутствия напряжений на берегах трещины $\sigma_{j2}^+ = \sigma_{j2}^- = 0$ приводит к заключению

$$\varphi'(t)^+ + \overline{\Omega'(t)}^- = 0, \quad \varphi'(t)^- + \overline{\Omega'(t)}^+ = 0.$$

Вычитая из первого уравнение второе, получаем

$$[\varphi'(t) - \overline{\Omega'(t)}]^+ = [\varphi'(t) - \overline{\Omega'(t)}]^-.$$

Таким образом,

$$\varphi'(z) - \overline{\Omega'(z)} = 2g(z),$$

где функция $g(z)$ аналитична в R . Таким образом, получается задача Гильберта (D. Hilbert) с краевыми условиями

$$[\varphi'(t) + \overline{\Omega'(t)}]^+ + [\varphi'(t) + \overline{\Omega'(t)}]^- = 0.$$

Одно из решений, очевидно, имеет вид $z^{-1/2}$, т.к. $(t^{-1/2})^+ + (t^{-1/2})^- = 0$, если разрез проведен вдоль трещины. Поскольку все решения, за исключением решений с особенностями более высокого порядка, исключаемых требованием конечности смещений, могут быть представлены в виде произведения $z^{-1/2}$ на аналитическую в R функцию, имеем

$$\varphi'(z) + \overline{\Omega'(z)} = 2z^{-1/2}f(z),$$

где $f(z)$ аналитична в R . В результате получаются соотношения для напряжений:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4\operatorname{Re}[z^{-1/2}f(z) + g(z)],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = -4iz^{-1/2}\operatorname{Im}[f(z)] - 4\operatorname{Re}[g(z)] -$$

$$-4ix_2 \frac{d}{dz}[z^{-1/2}f(z) + g(z)],$$

где $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в окрестности вершины трещины. Аналогичный вывод показывает, что при антиплоской деформации напряжения представляются в виде

$$\sigma_{32} + i\sigma_{31} = z^{-1/2}h(z) + ik(z),$$

где функции $h(z)$ и $k(z)$ аналитичны в окрестности вершины трещины и вещественны на оси x_1 .

Из приведенных формул видно, что компоненты поля напряжений имеют вблизи вершины трещины особенность типа квадратного корня в знаменателе. Коэффициенты интенсивности напряжений определяются при плоской деформации значением $f(z)$ в начале координат, а при антиплоской — значением $h(z)$.

Удобно выделить три основных формы разрушения в зависимости от возникающих смещений (рис. 5): раскрытие трещины (нормальный отрыв, **тип I**), скольжение поверхностей трещины одна относительно другой в плоской деформации (поперечный сдвиг, **тип II**) или антиплоское их скольжение (продольный (антиплоский) сдвиг, **тип III**).

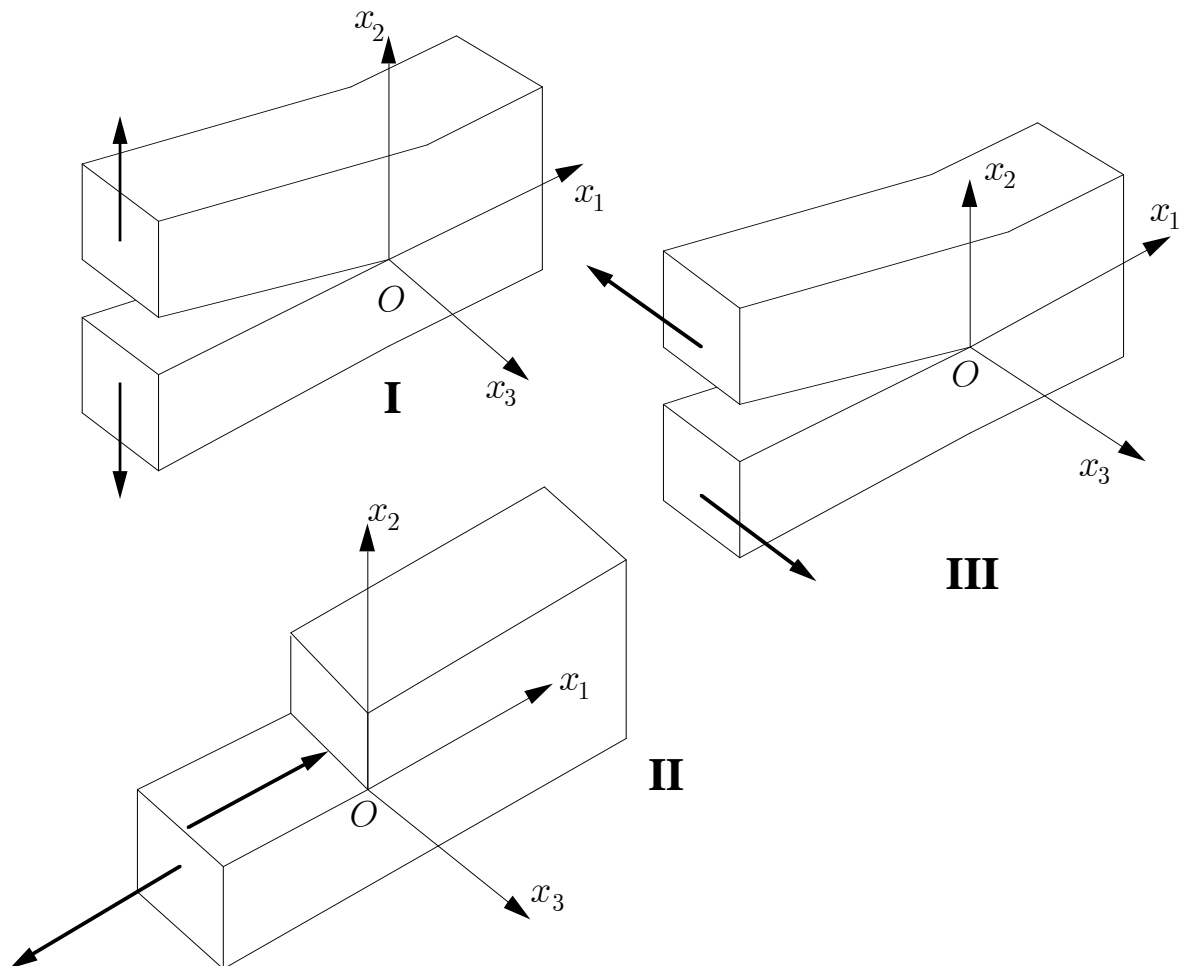


Рис. 5. Три основные формы разрушения: **I** — нормальный отрыв, **II** — поперечный сдвиг, **III** — продольный сдвиг

В случае трещины нормального отрыва значение $f(0)$ вещественно. Положим его равным $f(0) = K_I/(2\sqrt{2\pi})$, где постоянная K_I — коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва. Для трещин **типа**

II (трещин поперечного сдвига) значение $f(0)$ чисто мнимое. Положим его равным $f(0) = -iK_{II}/(2\sqrt{2\pi})$, где K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений для трещины поперечного сдвига. Если в соотношениях для напряжений в случае трещины антиплоского сдвига положить $h(0) = K_{III}/\sqrt{2\pi}$, то получится соответствующее сингулярное распределение напряжений для трещины **типа III**.

Распределения напряжений σ_{ij} и перемещений u_i , соответствующих комплексным потенциалам двумерной задачи о полубесконечной трещине, имеют вид (r, θ — полярные координаты с полюсом в вершине трещины):

Нормальный отрыв:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} [\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ \sin \frac{\theta}{2} [\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}] \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i(\theta),$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния.

Поперечный сдвиг:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} [2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}] \\ \cos \frac{\theta}{2} [1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}] \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} [\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}] \\ -\cos \frac{\theta}{2} [\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}] \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i(\theta).$$

Продольный (антиплоский) сдвиг:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta),$$

$$u_3 = 2 \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} = 2 \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_3(\theta).$$

Для полей первых двух классов $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ для плоской деформации и $\sigma_{33} = 0$ в случае плоского напряженного состояния.

Существенное значение имеет то, что двумерные распределения напряжений и перемещений вблизи вершины трещины всегда имеют одну и ту же структуру, т.е. одну и ту же функциональную зависимость в полярных координатах r, θ с началом в вершине трещины, независимо от формы тела, геометрии трещины и приложенных нагрузок.⁴³

2.1.2. Метод разложения по собственным функциям

Для исследования сингулярного поля напряжений вблизи вершины полубесконечной трещины $x_1 \leq 0$ можно воспользоваться следующей схемой [342].

Комплексное представление перемещений и напряжений в полярной системе координат $z = re^{i\theta}$ имеет вид

$$2G(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta} \left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \right],$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} [\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)].$$

Вблизи вершины трещины комплексные потенциалы разложим в ряды:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{\lambda_n}, \quad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^{\lambda_n+1},$$

где λ_n есть вещественные числа, имеющие смысл собственных значений.

Сформулируем далее граничное условие на берегах трещины:

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{r\theta} = 0 \quad (\theta = \pm\pi).$$

Подставляя разложения комплексных потенциалов в граничные условия, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^{\lambda_n-1} \left\{ \lambda_n e^{i(\lambda_n-1)\theta} A_n + e^{-i(\lambda_n-1)\theta} \overline{A_n} + (\lambda_n + 1) e^{i(\lambda_n+1)\theta} B_n \right\} = 0 \quad (\theta = \pm\pi).$$

Характеристическое уравнение

$$\sin 2\pi\lambda_n = 0$$

приводит к ряду собственных значений (характеристических чисел): $\lambda_n = n/2$ ($n = 1, 2, \dots$).

⁴³По поводу строгого доказательства см. [150], с. 18-24.

Отрицательные λ_n не подходят, поскольку приводят к бесконечным перемещениям при $r \rightarrow 0$.

Значение $\lambda_n = 0$ также не подходит, так как в этом случае напряжения и деформации при $r \rightarrow 0$ порядка r^{-1} , и поэтому упругая энергия любой области, примыкающей к вершине трещины, будет иметь бесконечно большое значение, что нереалистично. Следовательно, наименьшее собственное значение есть $\lambda_1 = 1/2$.

Так как

$$\lambda_n A_n + (-1)^n \overline{A_n} + (\lambda_n + 1) B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то при $n = 1$ и $\lambda_1 = 1/2$ находим асимптотики

$$\varphi(z) = A_1 z^{1/2}, \quad \chi(z) = B_1 z^{3/2},$$

где $3B_1 = 2\overline{A_1} - A_1$.

Таким образом, напряжения и перемещения вблизи вершины трещины определяются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left[a_1 \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + a_2 \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left[a_1 \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + a_2 \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left[a_2 \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) + a_1 \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]; \\ u_r &= \frac{\sqrt{r}}{4G} \left[a_1 \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + a_2 \left[-(2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right], \\ u_\theta &= \frac{\sqrt{r}}{4G} \left[a_1 \left[-(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] + a_2 \left[-(2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right], \end{aligned}$$

где $A_1 = a_1 - ia_2$.

Выделяя симметричные и антисимметричные (по отношению к оси x_1) члены и обозначая

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{2\pi}(a_1 - ia_2),$$

получим асимптотики для трещин типов **I** и **II**:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_I \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}} K_I \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\
u_\theta &= \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}} K_I \left[-(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right]; \\
\sigma_{rr} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_{II} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_{II} \left(-3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right), \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r}} K_{II} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right); \\
u_r &= \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}} K_{II} \left[-(2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\
u_\theta &= \frac{\sqrt{r}}{4G\sqrt{2\pi}} K_{II} \left[-(2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right].
\end{aligned}$$

Заметим, что члены разложений, соответствующие собственным числам $\lambda = 1, 3/2, 2, \dots$, дают конечные при $r \rightarrow 0$ вклады в напряжения.

Ясно, что с помощью метода разложения по собственным функциям могут быть найдены все последующие (несингулярные) члены разложений напряжений и перемещений у вершины трещины.

2.1.3. Асимптотика пространственного поля перемещений и напряжений у заостренного входящего края произвольного очертания

Установленные выше асимптотические формулы для полей напряжений и перемещений у вершины трещины трех основных типов могут быть обобщены на случай трещины, край которой представляет собой произвольную гладкую кривую.

Выберем локальную систему координат, направив ее оси по трем естественным направлениям репера Френе: ось ξ_1 будет иметь направление, противоположное направлению главной нормали, ось ξ_2 направим по касательной к краю, ось ξ_3 — вдоль бинормали.

Параметризуем край с помощью натурального параметра s . Известно, что уравнение края в локальных естественных координатах имеет вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -\frac{\kappa_1(\Delta s)^2}{2} + O((\Delta s)^3), \\
\xi_2 &= \Delta s + O((\Delta s)^3), \\
\xi_3 &= -\frac{\kappa_1\kappa_2(\Delta s)^3}{6} + \dots
\end{aligned}$$

Здесь κ_1 и κ_2 соответственно кривизна и кручение пространственной кривой L , представляющей край трещины.

Проекции кривой L на плоскости естественного трехгранника в окрестности его вершины задаются соответствующими парами этих уравнений и в случае, когда и кривизна, и кручение одновременно отличны от нуля, изображены на рис. 6.

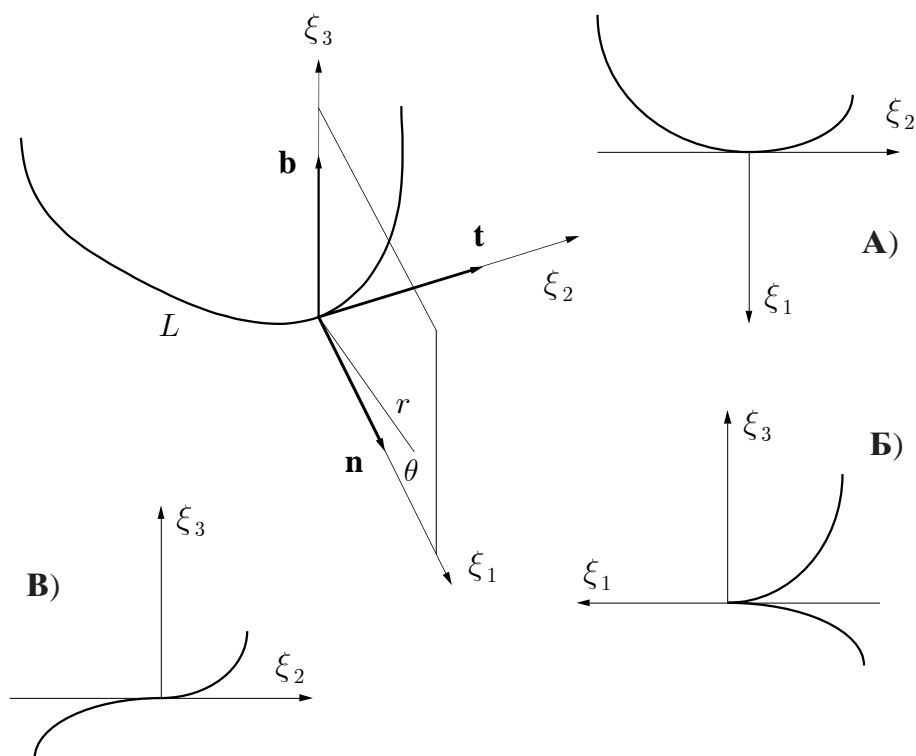


Рис. 6. Локальная система координат у края трещины и проекции края на грани естественного трехгранника Френе

Особенно интересна проекция на плоскость, опирающуюся на главную нормаль и бинормаль к краю: конфигурация края действительно представляет собой входящее заострение. Развитие трещины, поэтому, следует ожидать в соприкасающейся плоскости (плоскости, опирающейся на касательный вектор и вектор главной нормали).

Рассмотрим поведение напряжений и перемещений вблизи края L . Общий результат здесь состоит в следующем: исследование особенностей решений уравнений теории упругости в окрестности края трещины сводится к анализу двух двумерных задач в плоскости, нормальной краю L , о плоской деформации и антиплоском сдвиге. При этом в уравнениях теории упругости, сформулированных в локальной координатной системе, нужно удерживать лишь главные члены, не влияющие на характер особенности решения.⁴⁴

С учетом сказанного, можно воспользоваться асимптотическими формулами для плоской и антиплоской деформации у вершины трещины, приведенными в 2.1.1. Асимптотики пространственного распределения напряжений и перемещений у края произвольного очертания находятся в виде $(r, \theta$ — полярные

⁴⁴Исследование этой интересной проблемы приводится, например, в монографии [116], с. 305-325, где можно найти также указания на оригинальные работы. Отметим также работу [6], которая посвящена анализу напряженно-деформированного состояния вблизи вершины плоских и пространственных пикообразных включений и края вырезов.

координаты в нормальной плоскости (см. рис. 6)):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{<11>} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(7 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \dots, \\
 \sigma_{<22>} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \sin \frac{\theta}{2} + \dots, \\
 \sigma_{<33>} &= \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \dots, \\
 \sigma_{<23>} &= \frac{K_{III}}{4\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + \dots, \\
 \sigma_{<13>} &= -\frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) + \dots, \\
 \sigma_{<12>} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots; \\
 u_{<1>} &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \dots, \\
 u_{<2>} &= \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} + \dots, \\
 u_{<3>} &= \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \dots,
 \end{aligned}$$

где значения K_I , K_{II} , K_{III} зависят кроме всего прочего еще и от кривизны и кручения края трещины.

2.1.4. Коэффициенты интенсивности напряжений

В 2.1.1, 2.1.3 было показано, что в самом общем случае нагружения тела с трещиной для компонент тензора напряжений в окрестности края трещины справедливо асимптотическое представление ($\alpha = I, II, III$; $i, j = 1, 2, 3$):

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{\alpha} K_{\alpha} f_{ij}^{(\alpha)}(\theta) + \dots,$$

где K_I , K_{II} , K_{III} — коэффициенты интенсивности напряжений, зависящие от приложенной к телу нагрузки, геометрии тела и трещины. Поэтому в рамках линейной теории упругости изотропного тела напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины может быть представлено с помощью линейной суперпозиции трех независимых состояний, соответствующих трем основным типам трещин.

Конкретный вид зависимости коэффициентов интенсивности напряжений от приложенных нагрузок, геометрических характеристик тела и трещины определяется из решения соответствующих задач теории упругости. Оказывается, что в случае плоского напряженного или плоского деформированного состояния коэффициенты интенсивности напряжений для конкретного нагружения тела заданной геометрии с прямолинейной трещиной данной длины могут быть определены из общих формул для трех основных типов нагружения.

С целью выявления основных закономерностей рассмотрим растяжение тонкой упругой пластинки с трещиной нормального отрыва (**тип I**).

Пусть бесконечная тонкая пластина имеет сквозную трещину $|x_1| \leq l$, находящуюся в однородном поле растягивающего напряжения σ_{22}^∞ . Берега трещины свободны от нагрузок.

Граничные условия рассматриваемой краевой задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l), \\ u_2 &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l), \\ \sigma_{22} &\rightarrow \sigma_{22}^\infty & (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Решение сформулированной задачи можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: растяжения пластины без трещины напряжением σ_{22}^∞ , приложенным на бесконечности, и нагружение пластины с трещиной длины $2l$ напряжениями, действующими на берегах трещины так, чтобы суммарно выполнялись граничные условия исходной задачи. Поля напряжений и перемещений, соответствующие задаче с нулевыми граничными данными на бесконечности и представляющей основной интерес, обозначим σ_{ij}^* и u_i^* .

Для затухающих на бесконечности полей справедливо классическое представление Колосова—Мусхелишвили [101]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* &= 4\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)], \\ \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* &= 2[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)], \\ 2\mu(u_1^* + iu_2^*) &= \kappa\varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z) - \psi^*(z),\end{aligned}$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ — комплексные потенциалы, которые являются аналитическими функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ в верхней полуплоскости, черта сверху является знаком комплексного сопряжения, μ — модуль сдвига. Для плоского напряженного состояния $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Так как $\sigma_{12}^* = 0$ всюду на оси x_1 , то

$$\operatorname{Im} [\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)] = 0$$

при $x_2 = 0$. Этому условию можно удовлетворить, положив

$$\psi^*(z) = \varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию одной неизвестной функции $\varphi^*(z)$.

Из последних формул получаются следующие выражения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{12}^* &= -2x_2\operatorname{Re}[\varphi^{*''}(z)].\end{aligned}$$

Для компонент вектора перемещений справедливы формулы

$$\begin{aligned}2\mu u_1 &= (\kappa - 1)\operatorname{Re}[\varphi^*(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*'}(z)], \\ 2\mu u_2 &= (\kappa + 1)\operatorname{Im}[\varphi^*(z)] - 2x_2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)].\end{aligned}$$

Поэтому для определения функции $\varphi^{*'}(z)$ можно сформулировать следующую краевую задачу: на отрезке $|x_1| < l$ задана действительная часть функции $\varphi^{*'}(z)$

$$\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] = -\frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \quad (|x_1| < l),$$

а на оставшейся части оси x_1 известна мнимая часть этой функции

$$\operatorname{Im}[\varphi^{*'}(z)] = 0 \quad (|x_1| > l).$$

Решение сформулированной задачи можно получить, если использовать общие формулы смешанной задачи теории аналитических функций для полуплоскости [181].

Пусть на вещественной оси имеются n отрезков

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n),$$

на которых заданы значения σ_{22}^* (что означает задание на отрезках действительной части потенциала $\varphi^{*'}(z)$), вне этих отрезков $u_2 = 0$ (что означает равенство нулю мнимой части потенциала $\varphi^{*'}(z)$ вне указанных отрезков). На бесконечности напряжения и перемещения исчезают. Необходимо отметить, что если напряжения обращаются в нуль на бесконечности, то

$$\varphi^{*'}(z) = O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty).$$

Общее представление решения смешанной задачи теории упругости для полуплоскости имеет вид [181]:

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t - a_m)(t - b_m) \right|} \frac{\sigma_{22}^*(t) dt}{t - z} + P_{n-1}(z)}{2\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (z - a_m)(z - b_m)}},$$

где полином $P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ имеет вещественные коэффициенты.

Приведенная основная разрешающая формула смешанной задачи теории упругости в случае единственного отрезка на вещественной оси принимает вид

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{\sigma_{22}^*(t)\sqrt{l^2 - t^2}dt}{t - z},$$

где коэффициенты полинома обращаются в нуль вследствие условий на бесконечности. Таким образом решение задачи полностью определяется последней формулой.

Для выяснения поведения напряжений вблизи вершины трещины традиционно вводят полярную систему координат с центром в вершине трещины $z - l = re^{i\theta}$, $r \ll l$. Тогда для z , близких к l , можно получить, что

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi(z - l)}} + \dots,$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений для трещины **типа I**, который определяется равенством

$$K_I = -\frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_{22}^* \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} dt,$$

или

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_{22}^\infty \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} dt.$$

Соответствующую формулу для общего случая тела с трещиной, берега которой находятся под действием усилий T_2 , можно получить в форме

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l T_2(t) \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} dt.$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно получить следующие выражения для коэффициентов интенсивности напряжений для трещин **типа II** и **типа III**:

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l T_1(t) \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} dt$$

и

$$K_{III} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l T_3(t) \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} dt,$$

где T_1 и T_3 — приложенные к берегам трещины нагрузки.

Полученные формулы для коэффициентов интенсивности напряжений носят общий характер и позволяют определить коэффициент интенсивности напряжений для тела с трещиной, если известна его геометрия и приложенная нагрузка.

Для трех основных типов трещин коэффициенты интенсивности напряжений, как показывают простые вычисления, есть

$$K_I = \sigma_{22}^{\infty} \sqrt{\pi l} \quad (\text{рис. 7А}), \quad K_{II} = \tau_{12}^{\infty} \sqrt{\pi l} \quad (\text{рис. 7Б}),$$

$$K_{III} = \tau_{23}^{\infty} \sqrt{\pi l} \quad (\text{рис. 7В}).$$

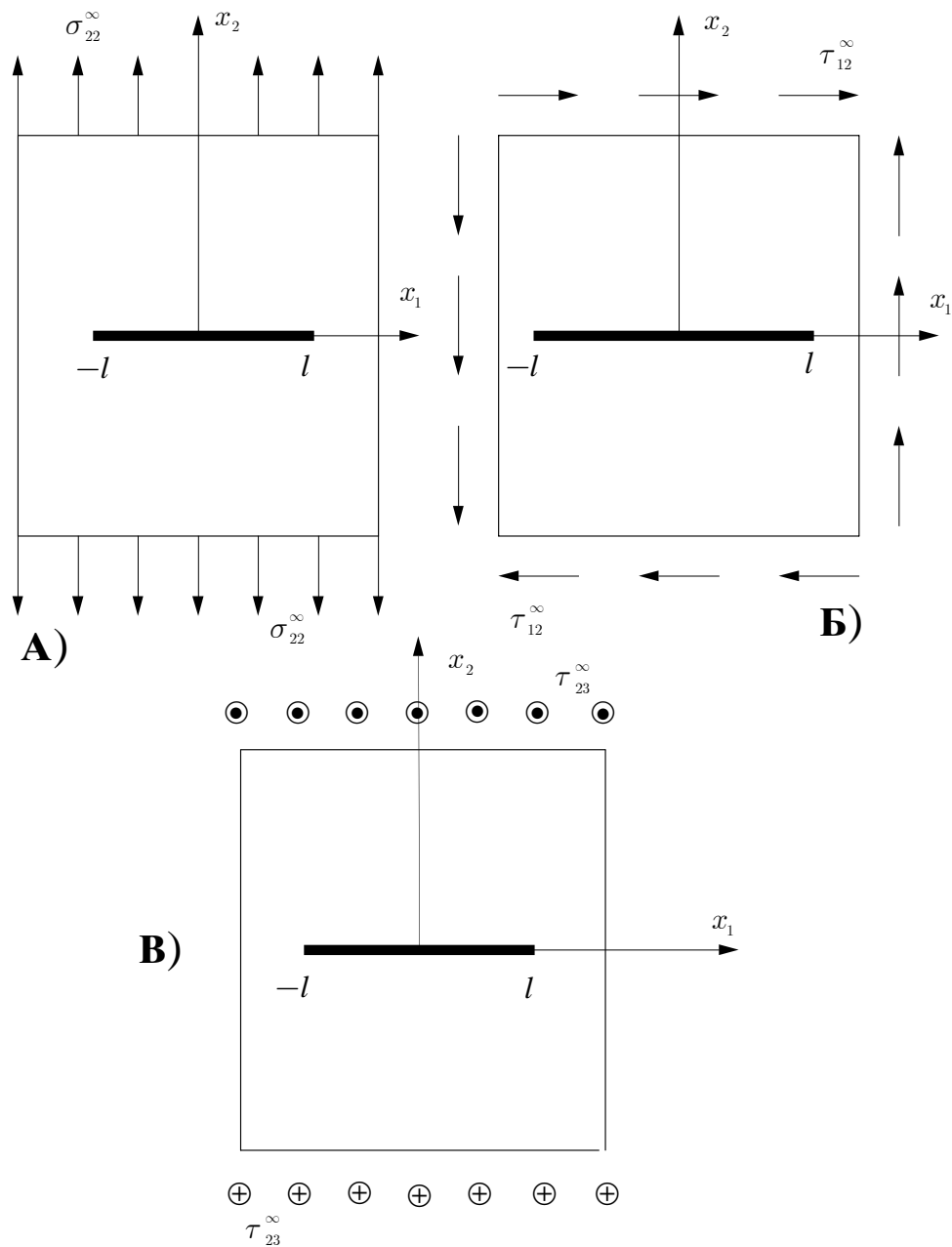


Рис. 7. Изолированная трещина в поле одноосного растяжения, поперечного и продольного (антиплоского) сдвига

Существуют справочники по коэффициентам интенсивности напряжений,⁴⁵

⁴⁵Одно из последних изданий такого рода на русском языке — двухтомный справочник [160].

в которых приводятся их значения для тел с трещинами различной геометрии и различных конфигурациях внешних нагрузок.

2.1.5. Различные замечания и результаты

1. В упругой плоскости с прямолинейной трещиной, берега которой свободны от нагрузок, нагруженной в точке (x'_1, x'_2) сосредоточенной силой с компонентами (P_1, P_2, P_3) и моментом $M_3 = M$ (рис. 8), коэффициенты интенсивности напряжений на правом конце трещины будут следующими:

$$K_I - iK_{II} = \frac{1}{2\sqrt{\pi l}(1 + \kappa)} \left\{ (P_1 + iP_2) \left[\frac{l + z'}{\sqrt{z'^2 - l^2}} - \frac{\kappa(l + \bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 - l^2}} - 1 + \kappa \right] + \frac{l(P_1 - iP_2)(\bar{z}' - z') + il(1 + \kappa)M}{(\bar{z}' - l)\sqrt{\bar{z}'^2 - l^2}} \right\},$$

$$K_{III} = \frac{P_3}{2\sqrt{2\pi l}} \frac{|z' + l|}{|z' - l|} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{(z' - l)(\bar{z}' + l) + (\bar{z}' - l)(z' + l)}{|z' + l||z' - l|}},$$

или

$$\begin{aligned} K_I + iK_{II} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi l}(\kappa + 1)} \times \\ &\times \left[(P_2 - iP_1) \left\{ \kappa - 1 + \sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}} \left[e^{i(\theta_A - \theta_B)/2} - \kappa e^{-i(\theta_A - \theta_B)/2} \right] \right\} + \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\rho_A \rho_B}} \{ 2x'_2(P_1 - iP_2) + i(\kappa + 1)M \} \left\{ e^{i(\theta_A + \theta_B)/2} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{\rho_B}{\rho_A} e^{-i(3\theta_A - \theta_B)/2} + \frac{l}{\rho_A} e^{-i(3\theta_A + \theta_B)/2} \right\} \right], \\ K_{III} &= \frac{P_3}{2\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}} \sin \frac{\theta_A - \theta_B}{2}, \end{aligned}$$

где $z' = x'_1 + ix'_2$, $\bar{z}' = x'_1 - ix'_2$, корень $\sqrt{x_1^2 - l^2}$ положителен при $|x_1| > l$, κ — постоянная плоской задачи теории упругости, ρ_A и ρ_B — расстояния от точки приложения силы до правого и левого концов трещины, θ_A и θ_B — углы между линией трещины и прямыми, соединяющими точку приложения силы с правым и левым концом трещины.

В случае полубесконечной трещины $x_1 < 0$ и сосредоточенной нагрузки P_1, P_2 , приложенной в точке x'_1, x'_2 , коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формуле

$$K_I - iK_{II} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\kappa + 1)} \left\{ (P_1 + iP_2) \left(\frac{1}{\sqrt{z'}} - \frac{\kappa}{\sqrt{\bar{z}'}} \right) + \frac{1}{2}(P_1 - iP_2) \frac{\bar{z}' - z'}{(\bar{z}')^{3/2}} \right\}.$$

Полученные выражения можно использовать в качестве функции Грина при определении коэффициентов интенсивности напряжений в случае изолированной трещины при любом распределении объемных и поверхностных нагрузок.

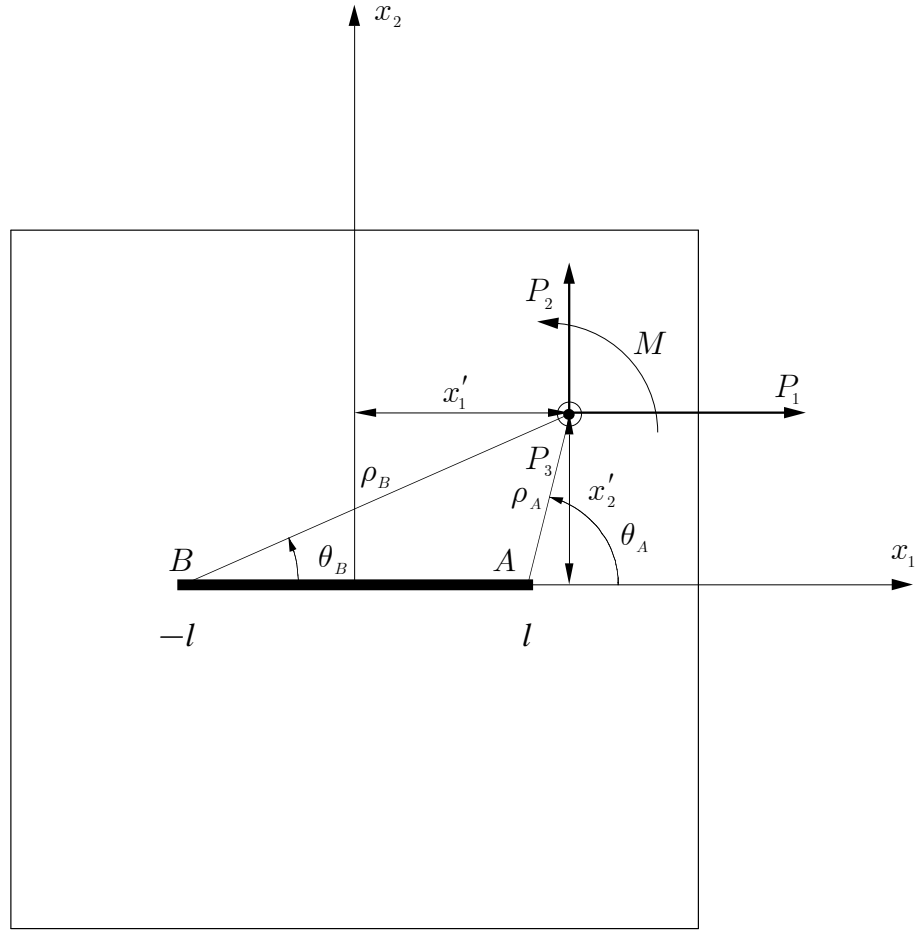


Рис. 8. Трещина в упругом силовом поле, создаваемом сосредоточенной силой и моментом, приложенными на некотором удалении от трещины

2. Если сосредоточенная сила ($P_1, P_2, P_3 = 0$) и момент $M_3 = M$ приложены к верхнему берегу трещины, т.е. $z' = x_1' + i0$, то коэффициенты интенсивности напряжений определяются выражениями

$$K_I = \frac{(\kappa - 1)P_1}{2(\kappa + 1)\sqrt{\pi l}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi l(l^2 - x_1'^2)}} \left[P_2(l + x_1') + \frac{Ml}{l - x_1'} \right],$$

$$K_{II} = -\frac{(\kappa - 1)P_2}{2(\kappa + 1)\sqrt{\pi l}} + \frac{P_1(l + x_1')}{2\sqrt{\pi l(l^2 - x_1'^2)}},$$

$$K_{III} = 0.$$

3. Для сосредоточенной силы (P_1, P_2, P_3) , приложенной симметрично в верхней и нижней полуплоскости (рис. 9), коэффициенты интенсивности напряжений имеют вид

$$K_I = \frac{P_2}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+x'_1}{l-x'_1}}, \quad K_{II} = \frac{P_1}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+x'_1}{l-x'_1}}, \quad K_{III} = \frac{P_3}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l+x'_1}{l-x'_1}}.$$

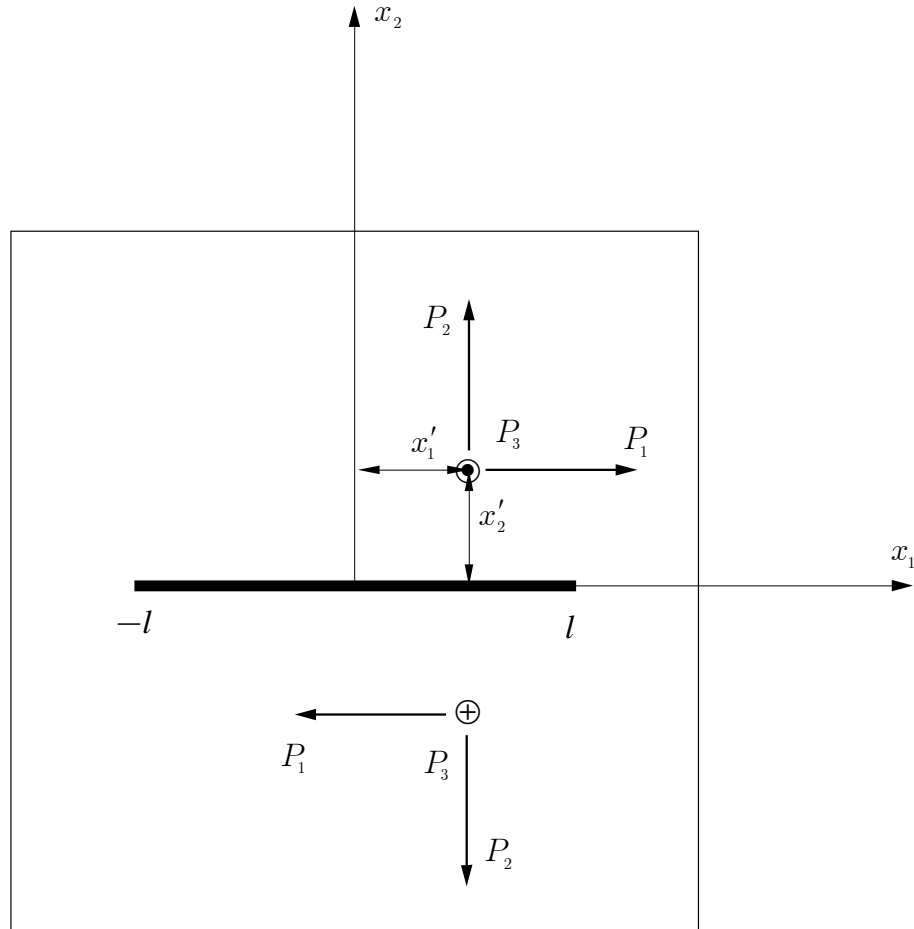


Рис. 9. Трещина в поле упругих напряжений, создаваемых сосредоточенными силами, приложенными симметрично на некотором удалении от трещины

4. Если сосредоточенная сила (P_1, P_2, P_3) и момент M приложены симметрично к верхнему и нижнему берегам трещины (рис. 10), то коэффициенты интенсивности напряжений вычисляются по формулам

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l(l^2 - x'^2_1)}} \left[P_2(l + x'_1) + \frac{Ml}{l - x'_1} \right], \quad K_{II} = \frac{P_1(l + x'_1)}{\sqrt{\pi l(l^2 - x'^2_1)}},$$

$$K_{III} = \frac{P_3}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{\frac{l + x'_1}{l - x'_1}}.$$

5. Для произвольных симметрично распределенных нагрузок плотностью $T_1(x_1)$, $T_2(x_1)$, $T_3(x_1)$ и момента плотностью $m(x_1)$ на берегах изолированной

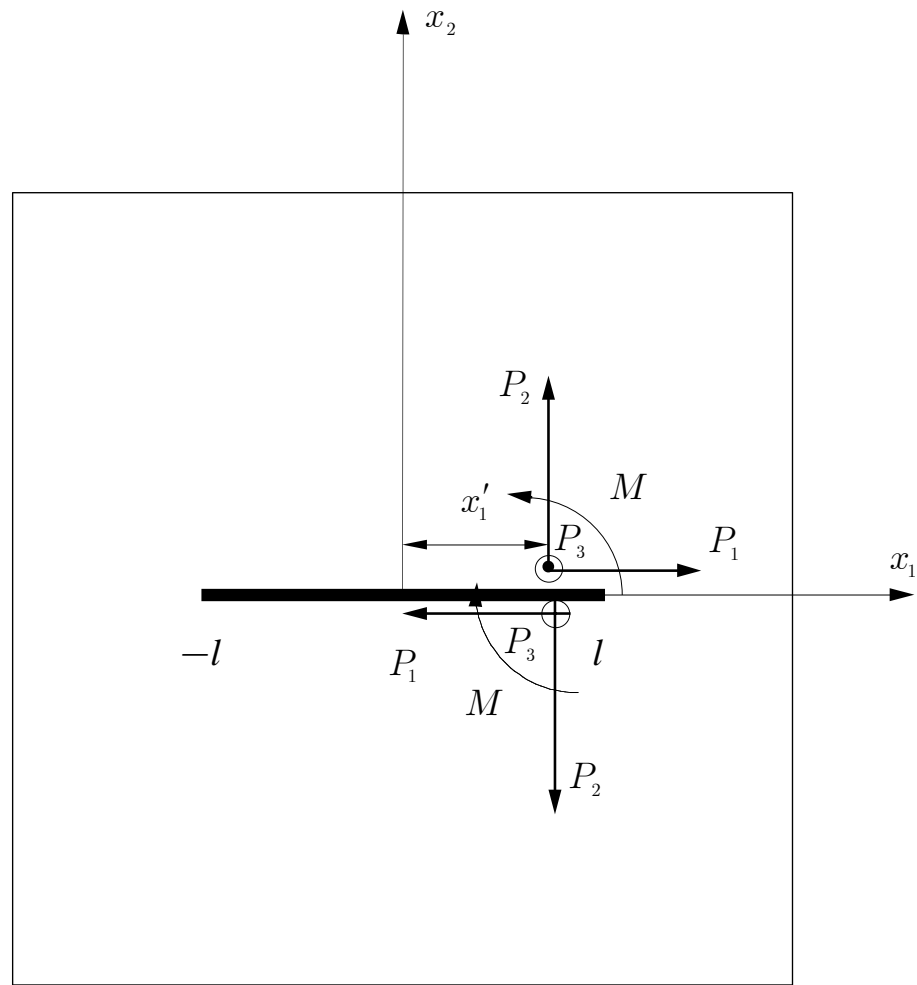


Рис. 10. Равновесие трещины под действием сосредоточенных сил (P_1, P_2, P_3) и момента M , симметрично приложенных к берегам трещины

трещины коэффициенты интенсивности напряжений определяются выражениями

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \left[\int_{-l}^l T_2(x_1) \sqrt{\frac{l+x_1}{l-x_1}} dx_1 + l \int_{-l}^l \frac{m(x_1) dx_1}{(l-x_1) \sqrt{l^2 - x_1^2}} \right],$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l T_1(x_1) \sqrt{\frac{l+x_1}{l-x_1}} dx_1,$$

$$K_{III} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l T_3(x_1) \sqrt{\frac{l+x_1}{l-x_1}} dx_1.$$

6. При постоянных нагрузках $\sigma_{22} = -T_2$, $\sigma_{12} = -T_1$, приложенных на некотором участке верхнего берега трещины (рис. 11), коэффициенты интенсивности

напряжений можно найти по формулам

$$K_I = \frac{T_2\sqrt{l}}{2\sqrt{\pi}} \left[\arcsin \frac{c}{l} - \arcsin \frac{b}{l} - \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right] + \frac{T_1(c-b)}{2\sqrt{\pi l}} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1},$$

$$K_{II} = \frac{T_1\sqrt{l}}{2\sqrt{\pi}} \left[\arcsin \frac{c}{l} - \arcsin \frac{b}{l} - \sqrt{1 - \frac{c^2}{l^2}} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} \right] + \frac{T_2(c-b)}{2\sqrt{\pi l}} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}.$$

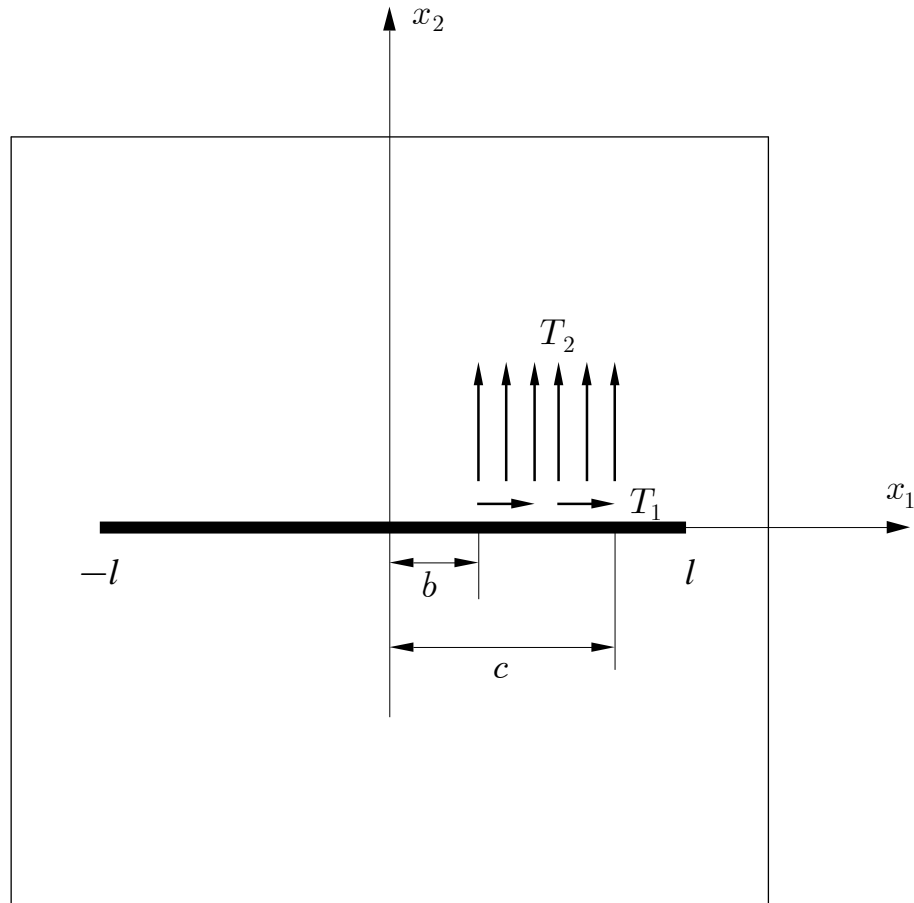


Рис. 11. Равновесие трещины под действием усилий, равномерно распределенных на участке верхнего берега трещины

7. Если трещина находится в равновесии под действием равномерно распределенных симметричных нагрузок, расклинивающих вершины трещины (см. рис. 12), то коэффициент интенсивности напряжений вычисляется по формуле:

$$K_I = T_2\sqrt{\pi l} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{l} \right).$$

8. Трещиновидный разрез в пластине больших размеров нагружается расклинивающей силой интенсивности P_2 на единицу толщины пластины (рис. 13). Коэффициент интенсивности напряжений в этом случае равен

$$K_I = P_2/\sqrt{\pi l}.$$

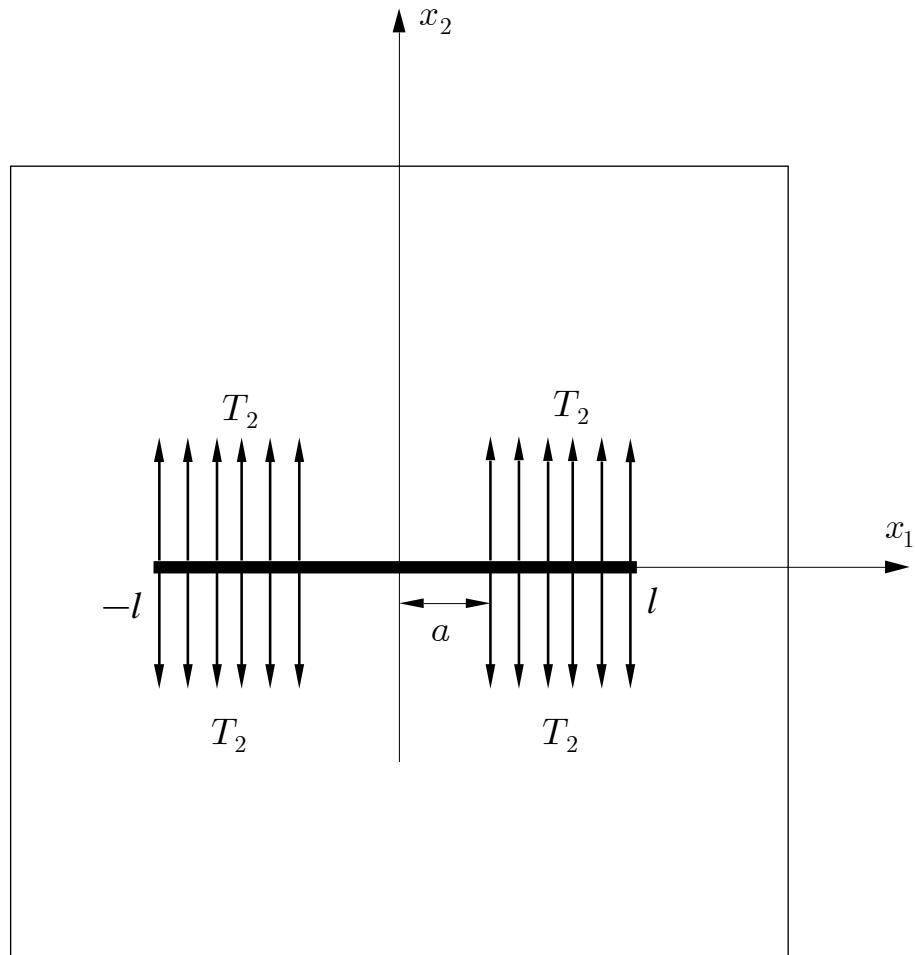


Рис. 12. Равновесие трещины под действием равномерно распределенных нагрузок, расклинивающих вершины трещины

9.1. Функция напряжений Φ при кручении призматического тела

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \Phi = -2G\omega,$$

где G — модуль сдвига, ω — крутка (угол закручивания в расчете на единицу длины вдоль оси кручения), всюду внутри области Ω (Ω — поперечное сечение скручиваемого призматического тела), и граничному условию $\Phi = 0$ на границе области Ω .

В полярной системе координат приведенные формулы приобретают следующий вид:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \sigma_{z\varphi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -2G\omega.$$

9.2. Рассмотрим область Ω с выходящим углом раствора α (рис. 14).

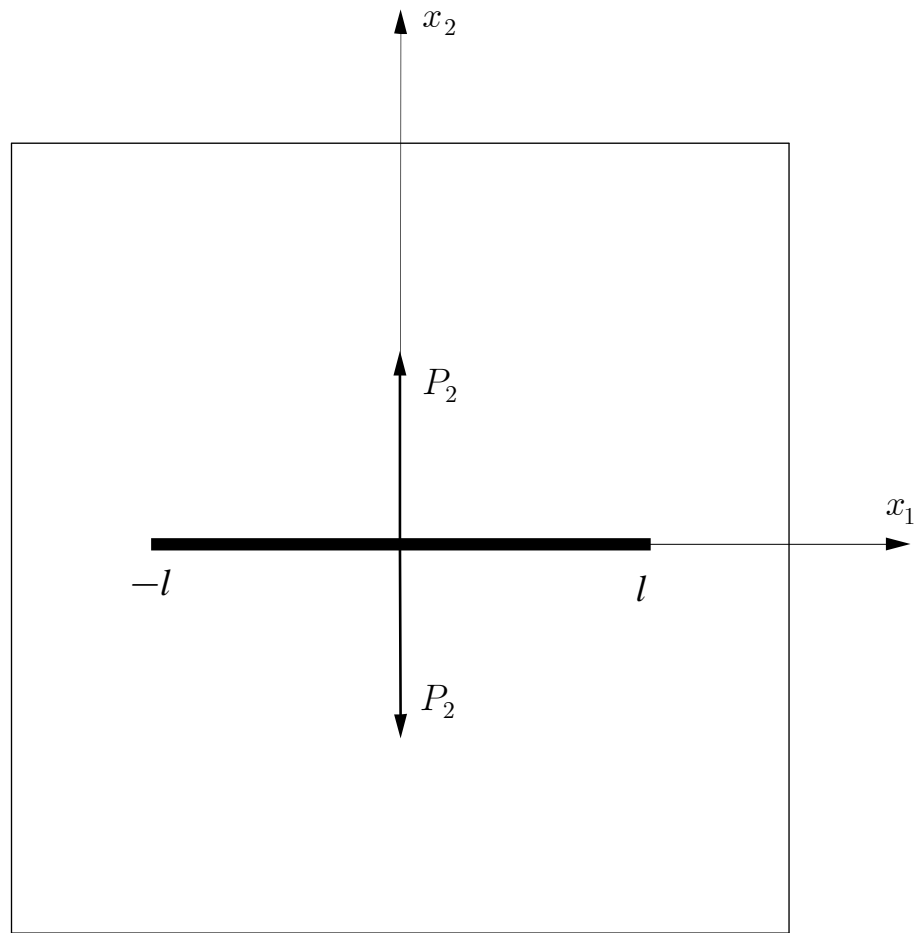


Рис. 13. Трещина под действием симметрично приложенных расклинивающих сил

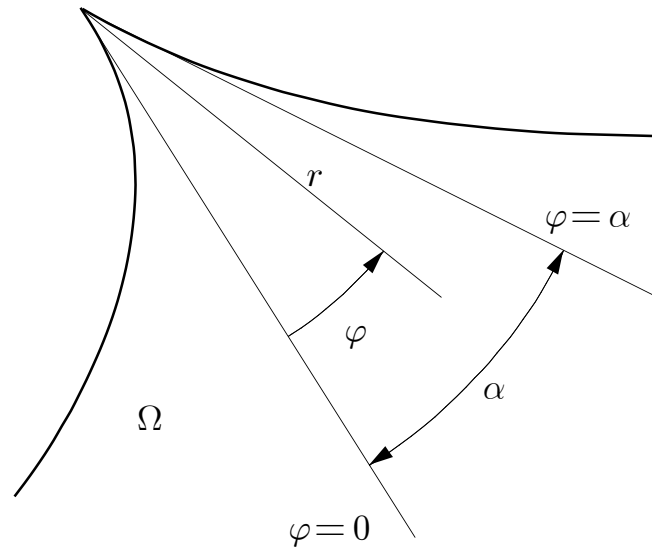


Рис. 14. Выбор полярной системы координат при анализе поля напряжений в окрестности выходящего угла контура поперечного сечения призматического тела (деформация кручения)

Выбирая полярные координаты, как показано на рис. 14, можно установить,

что функция напряжений Φ имеет разложение

$$(G\omega)^{-1}\Phi(r, \varphi) = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\cos(\alpha - 2\varphi)}{\cos \alpha} - 1 \right] + \sum_{k=0}^{\infty} r^{k\pi/\alpha} \left[A_k \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + B_k \cos \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right] + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k\pi/\alpha} \left[C_k \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + D_k \cos \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \right].$$

9.3. Функция напряжений Φ ограничена вплоть до границы Ω и в ее разложении следует принять $C_k = 0$, $D_k = 0$.

9.4. При $\alpha > \pi$ (входящий угол)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{13} = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{23} = \infty$$

и главные члены асимптотик напряжений есть:

$$\sigma_{rz} = \frac{\pi G\omega}{\alpha} A_1 r^{\pi/\alpha-1} \cos \frac{\pi\varphi}{\alpha}, \quad \sigma_{z\varphi} = -\frac{\pi G\omega}{\alpha} A_1 r^{\pi/\alpha-1} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}.$$

Следовательно, в случае трещины, когда $\alpha = 2\pi$, имеем для компонент тензора напряжений особенности корневого типа.

9.5. Круговой цилиндр, надрезанный в радиальном направлении вдоль образующей (рис. 15), подвергается кручению.⁴⁶

Функция напряжений Φ может быть вычислена в виде

$$\Phi(\rho, \vartheta) = \frac{a^2 G\omega}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_b^a S(r) G(r, \theta; \rho, \vartheta) |_{\theta=0} dr,$$

где

$$G(r, \theta; \rho, \vartheta) = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + r^2 \rho^2 / a^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \theta)}$$

есть функция Грина для круга (без трещины), а функция $S(r)$ есть решение интегрального уравнения

$$\int_b^a S(r) \ln \left| \frac{a(1 - r\rho/a^2)}{r - \rho} \right| dr = -\pi G\omega(a^2 - \rho^2) \quad (b < \rho < a).$$

Функция напряжений, в соответствующим образом подобранных биполярных координатах, может быть найдена в форме ряда [79], с. 230, 231.

⁴⁶Решения большого количества задач по кручению упругих призматических тел, содержащих пазы, зубцы, выточки и трещины, может быть найдено в известной монографии [4]. В этой монографии, в частности, приводится численный анализ задачи кручения эллиптического цилиндра, надрезанного вдоль образующей с противоположных сторон. Коэффициент интенсивности напряжений K_{III} при кручении цилиндра с внешним кольцевым надрезом вычислен в [116], с. 521-528. Задача кручения цилиндрического тела с радиальной трещиной рассмотрена в [107], и настоящее изложение следует [107], с. 441-449.

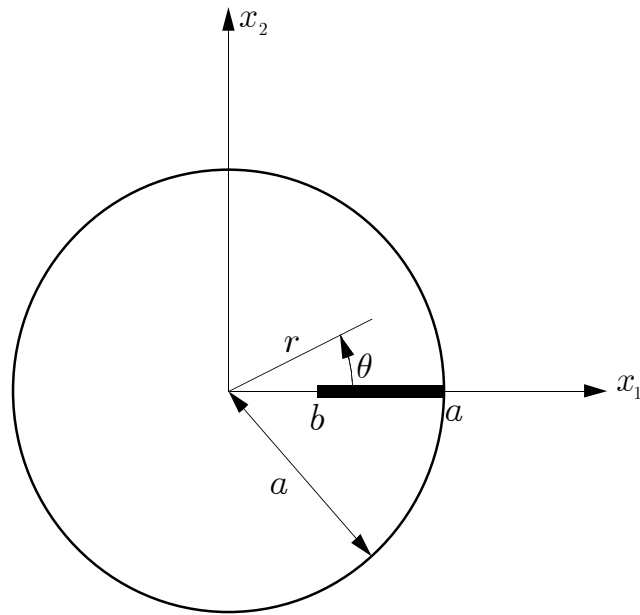


Рис. 15. Поперечное сечение цилиндрического тела, радиально надрезанного вдоль образующей

9.6. В случае $b = 0$ функция $S(r)$ при $r = 0$ обладает традиционной особенностью вида $r^{-1/2}$. Функцию напряжений в этом случае можно вычислить как сумму ряда (см. [79], с. 123, 124)

$$\Phi(r, \theta) = \frac{32a^2 G\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{-\frac{2n+1}{2}} r^{\frac{2n+1}{2}} - a^{-2} r^2}{(2n+1)[16 - (2n+1)(2n+1)^2]} \sin \frac{2n+1}{2} \theta.$$

9.7. Если сечение представляет собой эллипс с полуосями a и b , надрезанный вдоль большой полуоси двумя надрезами, достигающими до его фокусов $x_1 = c$, то в эллиптических координатах α, β ($x_1 + ix_2 = c \operatorname{ch}(\alpha + i\beta)$) функция напряжений вычисляется суммированием следующего ряда [79], с. 223, 224:

$$(G\omega)^{-1} \Phi(\alpha, \beta) = -c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta + \frac{8b^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\alpha}{\operatorname{ch}(2n+1)\alpha_0} \times \\ \times \frac{\sin(2n+1)\beta}{(2n+3)(1-4n^2)},$$

где $\operatorname{th} \alpha_0 = b/a$.

10. Пусть в пластине достаточно больших размеров имеется трещина, которая находится в поле растягивающих усилий "дальнего поля", действующих под углом α к линии трещины.

Для коэффициентов интенсивности напряжений справедливы следующие выражения:

$$K_I = T_{\infty} \sqrt{\pi l} \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = T_{\infty} \sqrt{\pi l} \sin \alpha \cos \alpha.$$

11. Для расчета траектории распространения трещины обычно применяют теорию разрушения, основанную на критерии максимальных нормальных напряжений.⁴⁷

Данная теория приводит к следующему уравнению для определения ориентации прорастания трещины

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \right),$$

или

$$[K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \cos(\theta/2) = 0,$$

откуда следует

$$\theta_1 = \pm \pi, \quad K_I \sin \theta_2 + K_{II}(3 \cos \theta_2 - 1) = 0.$$

Здесь значения θ_1 соответствуют условию $\sigma_{12} = 0$ на свободных берегах трещины, а значения θ_2 — углу, при котором тангенциальное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ максимально.⁴⁸ Угол θ_2 является функцией от коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} .

В случае наклонной трещины, расположенной в поле одноосных растягивающих напряжений, можно исключить коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} на основании равенств

$$K_I = T_\infty \sqrt{\pi l} \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = T_\infty \sqrt{\pi l} \sin \alpha \cos \alpha.$$

После исключения коэффициентов интенсивности напряжений уравнение для определения угла θ_2 приобретает вид

$$\sin \theta_2 + (3 \cos \theta_2 - 1) \operatorname{ctg} \alpha = 0 \quad (\alpha \neq 0).$$

Проблема определения траектории квазистатического развития трещины анализировалась в ряде работ (см., например, [117], с. 139-147; [150], с. 67-72).

2.2. Динамическое распространение трещин

Динамическое распространение трещины в упругом теле — одна из важнейших задач динамической механики разрушения. Процесс разрушения в заключительной его стадии характеризуется либо быстрым распространением магистральной трещины, либо ветвлением трещины и лавинообразным развитием всего семейства трещин. Ясно, что подобные процессы являются существенно

⁴⁷В данной теории предполагается, что трещина развивается вдоль площадки, на которую действует наибольшее нормальное растягивающее напряжение, таким образом, что напряжение сдвига на линии ожидаемого распространения трещины равно нулю [218].

⁴⁸Точнее главная часть тангенциального напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ достигает максимального (по всем ориентациям) значения.

динамическими и требуют отдельного исследования. К динамической механике разрушения относятся также задачи ветвления и расчета траектории распространения трещин. Методы и результаты динамической механики разрушения с достаточной полнотой изложены в монографиях [118], [119], [155], [231]. Эффекты, сопровождающие динамическое деформирование и разрушение металлов, освещаются в книге [147].

При анализе динамического распространения трещины, когда нельзя пренебрегать силами инерции, необходимо рассматривать динамическую задачу теории упругости для тела с движущейся трещиной. Учет сил инерции приводит к перераспределению напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Наиболее просто эти эффекты анализируются в следующих случаях, являющихся предельными случаями общего динамического роста трещины: на тело действует ударная нагрузка и фронт трещины распространяется в упругом теле с большой скоростью, сравнимой со скоростью звука, причем упругое поле стационарно в малой окрестности вершины трещины в движущейся системе координат, связанной с концом трещины; гармоническое упругое поле, когда край трещины неподвижен, внешние нагрузки, помимо постоянной составляющей, имеют компоненту, которая изменяется во времени с большой частотой. Гармонические задачи о трещинах можно разделить на два класса: в первом классе задач гармонические нагрузки прикладываются к берегам трещины, во втором — сингулярное поле напряжений образуется вследствие дифракции волны, падающей на трещину.

Ниже, в разделе 2.2.1, приводятся основные уравнения динамической теории упругости в трехмерном случае и для случая плоской деформации.⁴⁹ Далее, в 2.2.2, рассматривается структура полей напряжений и перемещений в вершине распространяющейся с постоянной скоростью прямолинейной трещины каждого из трех основных типов и вводятся динамические коэффициенты интенсивности напряжений. Мы использовали здесь комплексное представление локально стационарного поля [30], [311] и разыскивали комплексные потенциалы в виде суперпозиции собственных функций. В 2.2.3 решается аналогичная 2.2.2 задача о локальном стационарном поле у вершины трещины, но уже с помощью потенциалов Галина,⁵⁰ и определяются напряжения и деформации у вершины трещины. Некоторые важные факты, связанные с неустановившимся распространением трещины, обсуждаются в 2.2.4. Здесь мы не будем в полной мере приводить решения краевых задач о динамическом распространении трещин, отсылая читателя к специальным публикациям (см., например, [124]).

⁴⁹ Систематическое изложение динамической теории упругости имеется в монографии [124].

⁵⁰ Комплексное представление локально стационарного упругого поля было дано Л. А. Галиным в 1953 г. [30] в связи с исследованием задачи о давлении на упругую полуплоскость движущегося штампа. В этой же монографии вводятся новые потенциалы, более приспособленные для решения этой задачи.

2.2.1. Основные соотношения динамической теории упругости

Уравнения динамической теории упругости в общем трехмерном случае

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

имеют вид

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

где ρ — плотность, ∇ — оператор Гамильтона:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_3};$$

Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Решение уравнения (1.1) разыскивается в виде суммы потенциальной и вихревой части

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (1.2)$$

где φ — потенциал продольных волн, $\boldsymbol{\psi}$ — потенциал поперечных волн.

Подставляя приведенные выше представления в уравнение движения, получаем, что введенные потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$c_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad c_2^2 \Delta \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho} \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

есть скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

Уравнения динамической теории упругости для случая плоской деформации

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0$$

имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \mu \Delta u_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \mu \Delta u_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение рассматриваемой системы уравнений разыскивается в виде

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (1.5)$$

где $\varphi = \varphi(x_1, x_2, t)$ — потенциал продольных волн, $\psi = \psi(x_1, x_2, t)$ — потенциал поперечных волн.

Подставляя приведенные выше представления в уравнения движения, получаем, что введенные потенциалы также удовлетворяют волновым уравнениям

$$c_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.6)$$

Компоненты тензора напряжений определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= G \left[\kappa^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right], \\ \sigma_{22} &= G \left[\kappa^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right], \\ \sigma_{12} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

или через скалярные волновые потенциалы φ и ψ — в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \Delta \varphi + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ \sigma_{22} &= G \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \Delta \varphi + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ \sigma_{12} &= G \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right), \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

2.2.2. Структура локально стационарных полей напряжений и перемещений у вершины трещины. Динамические коэффициенты интенсивности напряжений

Упругое поле вблизи вершины распространяющейся трещины может быть локально стационарным.⁵¹

Рассмотрим динамическую задачу о распространение полубесконечной прямолинейной трещины с постоянной скоростью V в линейно упругой изотропной среде.⁵²

Пусть x_1, x_2 — система неподвижных декартовых координат так, что трещина развивается в направлении оси x_1 . Примем, что поля упругих перемещений

⁵¹Под термином "локально стационарное поле" понимается упругое поле перед вершиной трещины, когда трещина распространяется в упругом теле с большой скоростью, сравнимой со скоростью звука, однако упругое поле является стационарным в малой окрестности вершины трещины в движущейся системе координат, связанной с вершиной трещины.

⁵²Впервые распределение напряжений у вершины движущейся с постоянной скоростью трещины исследовалось Иоффе (Е. Н. Yoffe) в 1951 г.

и напряжений не зависят от x_3 . Введем подвижную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 с началом в некоторой точке, которая остается неподвижной для наблюдателя, находящегося в вершине трещины, т. е. примем $\xi_1 = x_1 - Vt$, $\xi_2 = x_2$, $\xi_3 = x_3$.

В движущейся системе координат напряжения и перемещения стационарны и могут быть представлены при помощи комплексных потенциалов в следующем виде [311]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi_1\xi_1} &= -\operatorname{Re}[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2)\varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2)], \\ \sigma_{\xi_2\xi_2} &= \operatorname{Re}[(1 + \beta_2^2)\varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2)], \\ \sigma_{\xi_1\xi_2} &= \operatorname{Im}[2\beta_1\varphi_1'(z_1) + 1 + \beta_2^2\beta_2^{-1}\varphi_2'(z_2)], \\ \sigma_{\xi_1\xi_3} &= \operatorname{Re}[\varphi_3'(z_2)], \quad \sigma_{\xi_2\xi_3} = -\operatorname{Im}[\beta_2\varphi_3'(z_2)], \\ \sigma_{\xi_3\xi_3} &= \begin{cases} 0 & (\text{плоское напряженное состояние}), \\ \nu(\sigma_{\xi_1\xi_1} + \sigma_{\xi_2\xi_2}) & (\text{плоская деформация}); \end{cases} \\ \mu u_{\xi_1} &= -\operatorname{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \quad \mu u_{\xi_2} = \operatorname{Im}[\beta_1\varphi_1(z_1) + \beta_2^{-1}\varphi_2(z_2)], \\ \mu u_{\xi_3} &= \operatorname{Re}[\varphi_3(z_2)].\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$, $\varphi_3(z_2)$ — комплексные потенциалы, являющиеся функциями комплексных переменных $z_j = \xi_1 + i\beta_j\xi_2 = r_j e^{i\theta_j}$ ($j = 1, 2$), где $\beta_j^2 = 1 - V^2/c_j^2$. Потенциалы φ_1 и φ_2 описывают плоскую деформацию, потенциал φ_3 — продольный сдвиг.

Общее решение для всех трех основных типов трещин будем разыскивать в виде суперпозиции собственных функций так же, как это было сделано выше в разделе 2.1.2 применительно к статической задаче.

Комплексные потенциалы представим сначала в форме разложений

$$\varphi_1(z_1) = \sum_n A_n z_1^{\lambda_n}, \quad \varphi_2(z_2) = \sum_n B_n z_2^{\lambda_n}, \quad \varphi_3(z_2) = \sum_n C_n z_2^{\lambda_n},\tag{2.2}$$

где A_n , B_n , C_n — неопределенные комплексные константы; собственные значения определяются из условия существования нетривиального решения прямой подстановкой этих разложений в граничные условия на берегах трещины; они оказываются равными $\lambda_n = n/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Собственному значению $\lambda_1 = 1/2$ отвечает сингулярное поле напряжений с характерной для механики разрушения корневой особенностью.

По аналогии со статическим случаем можно ввести динамические коэффициенты интенсивности напряжений

$$\begin{aligned}K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \Big|_{\theta=0}, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} \Big|_{\theta=0}, \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23} \Big|_{\theta=0}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Коэффициенты K_I , K_{II} , K_{III} называются соответственно динамическими коэффициентами интенсивности напряжений нормального отрыва, поперечного

и продольного сдвигов. Для стационарного упругого поля эти коэффициенты не будут зависеть от времени.

Отметим, что справедливы равенства

$$K_I = -\sqrt{2\pi} \frac{4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)}{2(1 + \beta_2^2)} \operatorname{Re} A_1,$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)}{4\beta_2} \operatorname{Im} A_1.$$

Сингулярные поля напряжений и соответствующие поля перемещений для трещин трех основных типов определяются формулами (см. [119], с. 17):

Нормальный отрыв:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_I B_I(V)}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - \frac{4\beta_1\beta_2 \cos(\theta_2/2)}{(1 + \beta_2^2)\sqrt{r_2}} \\ -(1 + \beta_2^2) \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + \frac{4\beta_1\beta_2 \cos(\theta_2/2)}{(1 + \beta_2^2)\sqrt{r_2}} \\ 2\beta_1 \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - 2\beta_1 \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I B_I(V)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{Bmatrix} \sqrt{r_1} \cos(\theta_1/2) - \frac{2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_2^2} \sqrt{r_2} \cos(\theta_2/2) \\ -\beta_1 \sqrt{r_1} \sin(\theta_1/2) + \frac{2\beta_1}{1 + \beta_2^2} \sqrt{r_2} \sin(\theta_2/2) \end{Bmatrix};$$

Поперечный сдвиг:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II} B_{II}(V)}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} -(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} + (1 + \beta_2^2) \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ (1 + \beta_2^2) \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - (1 + \beta_2^2) \frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ 2\beta_1 \frac{\cos(\theta_1/2)}{\sqrt{r_1}} - \frac{(1 + \beta_2^2) \cos(\theta_2/2)}{2\beta_2 \sqrt{r_2}} \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II} B_{II}(V)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{Bmatrix} \sqrt{r_1} \sin(\theta_1/2) - \frac{1 + \beta_2^2}{2} \sqrt{r_2} \sin(\theta_2/2) \\ \beta_1 \sqrt{r_1} \cos(\theta_1/2) - \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} \sqrt{r_2} \cos(\theta_2/2) \end{Bmatrix};$$

Продольный (антиплоский) сдвиг:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III} B_{III}(V)}{\sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} -\frac{\sin(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \\ \beta_2 \frac{\cos(\theta_2/2)}{\sqrt{r_2}} \end{Bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$u_3 = \frac{K_{III} B_{III}(V)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{r_2} \sin(\theta_2/2).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$B_I(V) = \frac{1 + \beta_2^2}{R^*(V)}, \quad B_{II}(V) = \frac{2\beta_2}{R^*(V)}, \quad B_{III}(V) = \frac{1}{\beta_2},$$

$$R^*(V) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2.$$

Уравнение $R^*(V) = 0$ является уравнением Рэлея (Rayleigh), положительный корень которого $V = c_R$ есть скорость поверхностных волн Рэлея (см., например, [81]).

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} играют исключительную роль в модели хрупкого разрушения, поскольку в силу универсальности асимптотик напряжений по углу только они определяют сингулярное поле у вершины трещины.

Альтернативный вывод локально стационарного сингулярного поля напряжений у вершины трещины приведен в книге [118], с. 15-20.

Выясним условия локальной стационарности упругого поля у вершины трещины. Для этого обратимся к представлению напряжений (1.8) через волновые потенциалы, удовлетворяющие волновым уравнениям (1.6).

В системе координат, связанной с вершиной трещины, волновой оператор может быть записан как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - \frac{V^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{V^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, если вторые производные $\partial^2/\partial \xi_1 \partial t$ и $\partial^2/\partial t^2$ от волновых потенциалов ограничены вблизи вершины трещины, то двумя последними членами в выражении волнового оператора можно пренебречь по сравнению с тремя первыми сингулярными членами, и тогда явная зависимость асимптотик от времени исчезает.

2.2.3. Комплексное представление Галина локально стационарного поля у вершины трещины

Исследованная выше, в 2.2.2, задача об определении локально стационарного поля у вершины трещины при ее динамическом распространении может

быть изучена также с помощью комплексных потенциалов, предложенных Л. А. Галиным [30]. Представление Галина приводит к значительно более симметричным формулам.

Начнем с несколько видоизмененного по сравнению с (2.1) комплексного представления [30]:

$$\begin{aligned}
 u_{\xi_1} &= \frac{2}{1-2\nu} \operatorname{Im}[\beta_1 \varphi_1(z_1) + \beta_2 \varphi_2(z_2)], \\
 u_{\xi_2} &= \frac{2}{1-2\nu} \operatorname{Re}[\beta_1^2 \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]; \\
 \sigma_{\xi_1 \xi_1} &= \frac{2E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{Im}[\beta_1 \beta_3 \varphi_1'(z_1) + \beta_2 \varphi_2'(z_2)], \\
 \sigma_{\xi_2 \xi_2} &= -\frac{2E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{Im}[\beta_1 \beta_4 \varphi_1'(z_1) + \beta_2 \varphi_2'(z_2)], \\
 \sigma_{\xi_1 \xi_2} &= \frac{2E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{Re}[\beta_1^2 \varphi_1'(z_1) + \beta_4 \varphi_2'(z_2)].
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2}, & \beta_2 &= \sqrt{1 - M^2}, \\
 \beta_3 &= 1 + \frac{\nu M^2}{2-2\nu}, & \beta_4 &= 1 - \frac{M^2}{2}, & M &= \frac{V}{c_2}.
 \end{aligned}$$

Напомним, что c_1 и c_2 — скорости распространения упругих продольных и поперечных волн соответственно. Через M обозначено число Маха (E. Mach).

Функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ представляют собой аналитические функции комплексных переменных.

Приведенные представления описывают плоское упругое поле, стационарное в системе координат $\xi_1 \xi_2$, движущейся в направлении неподвижной положительной оси x_1 со скоростью V , меньшей c_2 .

Потенциалы $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ можно представить через два новых потенциала по формулам:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1'(z_1) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)[\beta_4 w_1(z_1) - i\beta_2 w_2(z_1)]}{2\pi E R(M, \nu)}, \\
 \varphi_2'(z_2) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)[- \beta_1^2 w_1(z_2) + i\beta_4 \beta_1 w_2(z_2)]}{2\pi E R(M, \nu)},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 R(M, \nu) &= \beta_4^2 \beta_1 - \beta_2 \beta_1^2 = \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} M^2\right)^2 \sqrt{1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2} - \sqrt{1 - M^2} \left(1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} M^2\right)
 \end{aligned}$$

есть знаменатель Рэлея, $w_1(z)$ и $w_2(z)$ — аналитические функции (потенциалы Галина), которые определяются следующими интегралами Коши:

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\xi_2 \xi_2} \bigg|_{\xi_2=0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad w_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\xi_1 \xi_2} \bigg|_{\xi_2=0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Если интересоваться упругим полем только в непосредственной близости от вершины трещины, то можно сформулировать стандартную краевую задачу на собственные значения и искать главный член асимптотического разложения упругого поля. Для задачи о динамическом росте прямолинейной трещины нормального отрыва в неограниченном теле краевые условия на берегах трещины имеют вид

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_1 < 0 \quad \sigma_{\xi_2 \xi_2} = \sigma_{\xi_1 \xi_2} = 0.$$

Эти граничные условия позволяют сформулировать следующие граничные условия для потенциалов Галина:

$$\xi_2 = 0, \quad \xi_1 < 0 \quad \operatorname{Im} w_1(z) = 0, \operatorname{Im} w_2(z) = 0.$$

Решение сингулярной краевой задачи получается в виде

$$w_1(z) = -\frac{i\sqrt{\pi}K_I}{\sqrt{2z}}, \quad w_2(z) = -\frac{i\sqrt{\pi}K_{II}}{\sqrt{2z}}. \quad (3.3)$$

Здесь \sqrt{z} есть однозначная аналитическая функция в плоскости z , разрезанной вдоль положительной полуоси ξ_1 , причем $\sqrt{z} > 0$ на верхнем берегу разреза.

После того как определены комплексные потенциалы $w_1(z)$ и $w_2(z)$, на основании (3.1) и (3.2) находим

$$\frac{\partial u_{\xi_1}}{\partial \xi_1} = \frac{K_I(1+\nu)}{ER(M,\nu)\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{-\beta_1\beta_4 \cos \alpha_1}{(\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} + \frac{\beta_1\beta_2 \cos \alpha_2}{(\cos^2 \theta + \beta_2^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_{\xi_2}}{\partial \xi_1} = \frac{K_I(1+\nu)}{ER(M,\nu)\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{\beta_1^2 \sin \alpha_2}{(\cos^2 \theta + \beta_2^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} - \frac{\beta_4\beta_1^2 \sin \alpha_1}{(\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} \right];$$

$$\sigma_{\xi_1 \xi_1} = \frac{K_I}{ER(M,\nu)\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{\beta_2\beta_1^2 \cos \alpha_2}{(\cos^2 \theta + \beta_2^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} - \frac{\beta_1\beta_3\beta_4 \cos \alpha_1}{(\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} \right],$$

$$\sigma_{\xi_2 \xi_2} = \frac{K_I}{ER(M,\nu)\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{\beta_1\beta_4^2 \cos \alpha_1}{(\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} - \frac{\beta_1^2\beta_2 \cos \alpha_2}{(\cos^2 \theta + \beta_2^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} \right], \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\xi_1 \xi_2} = \frac{-K_I\beta_1^2\beta_4}{ER(M,\nu)\sqrt{2\pi r}} \left[\frac{\sin \alpha_1}{(\cos^2 \theta + \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} - \frac{\sin \alpha_2}{(\cos^2 \theta + \beta_2^2 \sin^2 \theta)^{1/4}} \right],$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\beta_1 \operatorname{tg} \theta), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\beta_2 \operatorname{tg} \theta).$$

2.2.4. Неустановившееся развитие трещины

Решение двумерной задачи о распространении прямолинейной полубесконечной трещины с переменной скоростью получено Б. В. Костровым в 1974 г. методом интегральных преобразований [69]. Изложение этого результата приводится, например, в книге [116], с. 492-502.

Асимптотическая структура поля напряжений у вершины прямолинейной трещины, распространяющейся с постоянной скоростью по прямолинейной траектории, проанализированная выше в 2.2.2, обладает достаточной общностью в том плане, что если рассматривать динамическое развитие трещины по криволинейной плоской траектории и с переменной скоростью $V(t)$, не превышающей скорость волн Рэлея, то, вводя локальную систему координат ξ_1, ξ_2 , связанную с вершиной трещины, можно показать [230], что угловое распределение сингулярных асимптотик напряжений не отличается от таковых при стационарном распространении прямолинейной трещины. Следовательно, асимптотики напряжений, приведенные в разделе 2.2.2, можно применять и для неустановившегося развития трещины, не забывая о том, что теперь динамические коэффициенты интенсивности напряжений зависят от t , а V — мгновенное значение скорости движения вершины трещины.

Если проанализировать распределение в зависимости от ориентации максимального нормального напряжения у вершины трещины, то выявляется одна интересная закономерность. Трещина **типа I** при скорости ее распространения выше некоторой критической будет стремиться разветвиться, поскольку направление максимального нормального напряжения смещается из плоскости трещины. Мы отложим исследование этого вопроса до 3.3.2.

2.3. Критерии разрушения

2.3.1. Энергетический критерий хрупкого разрушения Гриффитса. Скорость освобождения упругой энергии и трещинодвижущая сила

Энергетический аспект явления хрупкого разрушения начнем, следуя [284], pp. 150-153, с исследования простейшего модельного примера. Рассмотрим пластину с трещиной нормального отрыва длины $2l$. Нижняя кромка пластины жестко закреплена, на верхней кромке приложена растягивающая нагрузка t_2 . Объемные силы отсутствуют. Предполагается, что материал пластины является линейно упругим и подчиняется закону Гука. Впрочем все эти предположения не так существенны для последующего анализа.⁵³

Исследуем энергетические аспекты хрупкого разрушения тела с трещиной, опираясь на соотношение энергетического баланса. Полная диссипация энергии

⁵³Энергетический критерий хрупкого разрушения, а также баланс энергии для тела с распространяющейся трещиной при наиболее общих предположениях исследованы Б. В. Костровым и Л. В. Никитиным в статье [268].

\mathcal{D} системы тело + трещина есть мощность приложенных сил (скорость совершения работы внешними силами)⁵⁴

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \int_{(\partial\Omega)_T} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{(\partial\Omega)_T} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} ds \quad (1.1)$$

минус мощность самой системы (скорость совершения работы внутренними силами)

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dx_1 dx_2 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) dx_1 dx_2. \quad (1.2)$$

Заметим, что в приведенных только что формулах и в дальнейшем точка обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных координатах x_1, x_2 .

Следовательно, полная диссипация энергии системы определяется выражением

$$\mathcal{D} = \int_{(\partial\Omega)_T} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) dx_1 dx_2. \quad (1.3)$$

Если трещина не распространяется, то $\dot{l} = 0$, дифференцировать по времени в (1.3) можно под знаком интеграла и второй интеграл в правой части представляется как

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dx_1 dx_2. \quad (1.4)$$

Если трещина растет $\dot{l} > 0$, то этот последний результат не справедлив, поскольку интеграл справа в (1.4) расходится. Действительно, в линейно упругом теле $\varepsilon_{ij} \sim \rho^{-1/2}$ и $\sigma_{ij} \sim \rho^{-1/2}$ (ρ — расстояние от кончика трещины) при приближении к вершине трещины. Для вычисления производной по времени тензора деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ удобно перейти к системе координат, движущейся вместе с вершиной трещины, и учесть, что

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{x_1, x_2} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} - \dot{l} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_1} \right)_{X_2, t}, \quad (1.5)$$

где x_1, x_2 — неподвижная система координат; X_1, X_2 — подвижная система координат (с началом в вершине трещины); $X_1 = x_1 - l(t)$.⁵⁵ Поэтому производная $\partial \varepsilon_{ij} / \partial X_1 \sim \rho^{-3/2}$ и интеграл справа в формуле (1.4) в случае растущей трещины расходится (точка $\rho = 0$ включается в область интегрирования).

⁵⁴См., например, [165], с. 145; [283], с. 144. Мы не учитываем здесь массовые силы.

⁵⁵Заметим, что элементы площади в подвижной и неподвижной системах координат связаны соотношением $dx_1 dx_2 = dX_1 dX_2$.

Таким образом, при вычислении \mathcal{P}_{int} необходимо исключить начало координат $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ из области интегрирования, а затем совершить предельный переход, стягивая исключенную область в начало координат. Для этого введем контур C (рис. 16), охватывающий область V_C , окружающую вершину трещины (в двумерном случае контур охватывает область V_C на плоскости x_1, x_2), и перемещающийся вслед за вершиной трещины. Тогда скорость совершения

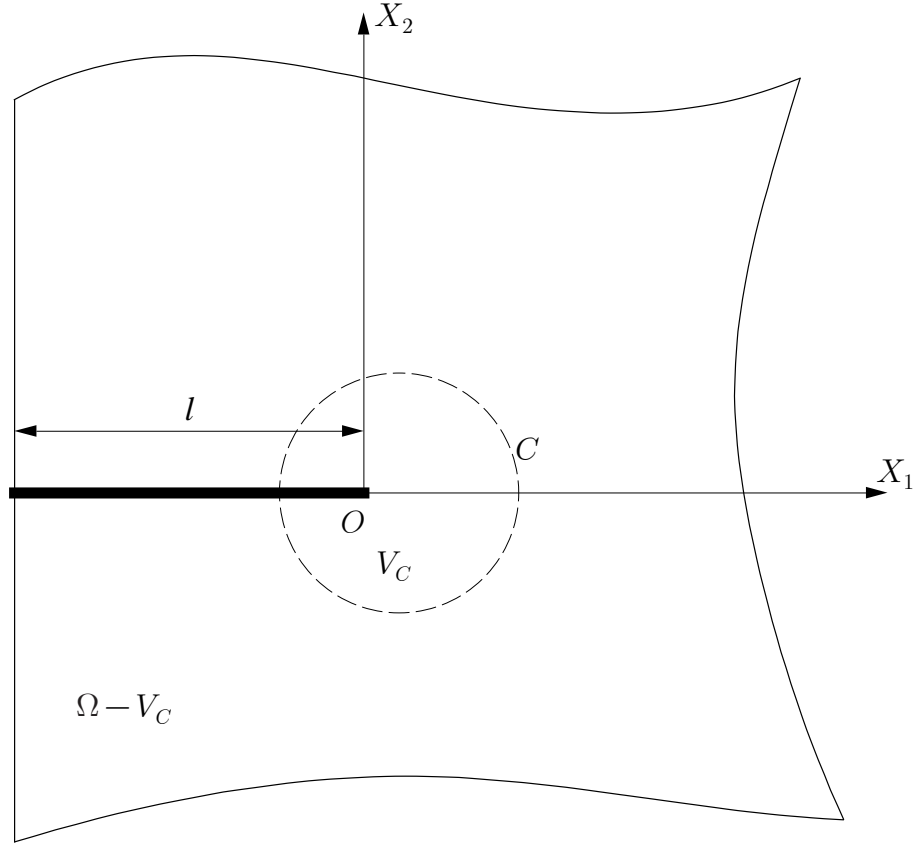


Рис. 16. Контур C , окружающий вершину трещины (неподвижный в системе координат X_1, X_2)

работы внутренними силами можно вычислить как

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W(\varepsilon) dx_1 dx_2 = \frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\varepsilon) dx_1 dx_2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega - V_C} W(\varepsilon) dx_1 dx_2. \quad (1.6)$$

Поскольку контур C неподвижен в системе координат X_1, X_2 , то после перехода к координатам X_1, X_2 дифференцировать можно под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_C} W(\varepsilon) dx_1 dx_2 = \int_{V_C} \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} dX_1 dX_2, \quad (1.7)$$

где

$$\sigma_{ij} \sim \rho^{-1/2}, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} \sim \rho^{-1/2} \quad (\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \rightarrow 0).$$

Следовательно, здесь особенность в подынтегральном выражении имеет порядок ρ^{-1} и поэтому является интегрируемой.⁵⁶

Для оценки второго интеграла в (1.6) можно заметить, используя формулу дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему [153], [42], что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega-V_C} W(\boldsymbol{\varepsilon}) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega-V_C} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dx_1 dx_2 - \int_C W(\boldsymbol{\varepsilon}) \dot{l}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (1.8)$$

где \mathbf{e}_1 — единичный вектор, указывающий направление распространения трещины. Обозначая $n_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}$, можно получить

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega-V_C} W(\boldsymbol{\varepsilon}) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega-V_C} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dx_1 dx_2 - \int_C W \dot{l} n_1 ds. \quad (1.9)$$

Преобразуем первый интеграл в правой части (1.9), учитывая при этом, что $\mathbf{n}(C) = -\mathbf{n}(\partial(\Omega - V_C))$,

$$\int_{\Omega-V_C} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dx_1 dx_2 = \int_{\partial(\Omega-V_C)} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds - \int_C \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (1.10)$$

Таким образом, полная диссипация энергии системы тело + трещина может быть представлена как

$$\mathcal{D} = \int_C \left(W \dot{l} n_1 + \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \right) ds - \int_{V_C} \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} dX_1 dX_2, \quad (1.11)$$

где второй интеграл справа имеет интегрируемую особенность.

Переходя к пределу в последнем выражении при $C \rightarrow 0$ (т.е. стягивая контур C к вершине трещины), получаем

$$\mathcal{D} = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C \left(W \dot{l} n_1 + \dot{\mathbf{u}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \right) ds. \quad (1.12)$$

Так как производная по времени при фиксированных x_1, x_2 от перемещений в подвижной системе координат X_1, X_2 определяется выражением

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)_{x_1, x_2} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} - \dot{l} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_1} \right)_{X_2, t}, \quad (1.13)$$

⁵⁶Заметим также, что при динамическом распространении трещины на основании 2.2.2 имеем

$$\sigma_{ij} \sim \rho^{-1/2}, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \right)_{X_1, X_2} \sim \rho^{-1} \quad (\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \rightarrow 0),$$

т.е. особенность в подынтегральном выражении (1.7) имеет порядок $\rho^{-3/2}$ и снова является интегрируемой.

в котором первое слагаемое не имеет особенностей при $\rho \rightarrow 0$, то уравнение (1.12) приобретает вид

$$\mathcal{D} = G\dot{l}, \quad (1.14)$$

где

$$G = \lim_{C \rightarrow 0} \int_C \left(W n_1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) ds. \quad (1.15)$$

Как показывает прямой расчет, величина интеграла

$$J = \int_C \left(W n_1 - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) ds \quad (1.16)$$

не зависит от выбора контура C , окружающего вершину трещины. В механике разрушения этот интеграл принято называть инвариантным J -интегралом Эшелби—Черепанова—Райса. Ясно, что инвариантность интеграла J относительно любых путей, охватывающих вершину трещины, означает что J можно рассматривать как параметр, характеризующий состояние концевой зоны трещины.

Гриффитс (А. А. Griffith) в своей классической работе [238] выдвинул предположение, согласно которому трещина получает возможность распространяться, если скорость освобождения упругой энергии (в расчете на единицу длины вновь образовавшейся свободной поверхности) достигает своего критического значения G_c , и поэтому, в силу приведенных рассуждений, критерий разрушения может быть сформулирован как

$$G = G_c. \quad (1.17)$$

Если рассмотреть изотропное линейно упругое тело, для которого объемная плотность энергии деформации есть $W = \lambda (\varepsilon_{kk})^2 / 2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$, и в качестве контура, охватывающего вершину трещины, выбрать окружность радиуса r ($r \rightarrow 0$), а затем использовать асимптотику поля напряжений у вершины трещины нормального отрыва из 2.1.1, то для скорости освобождения упругой энергии⁵⁷

⁵⁷Заметим, что скорость освобождения упругой энергии G обычно вводится как производная

$$G = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l},$$

где \mathcal{E} — потенциальная энергия упругого тела под нагрузкой T_i^Γ :

$$\mathcal{E} = \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_F} T_i^\Gamma u_i dS.$$

Вычисление производной $\partial \mathcal{E} / \partial l$ через инвариантный интеграл J , которое снова приводит к уравнению (1.15), читатель найдет во всех классических монографиях по механике разрушения (см., например, [63], с. 235, 236.).

$G = \mathcal{D}/\dot{l}$ можно получить [256], [257]

$$G = \lim_{r \rightarrow 0} \int_C \left(W n_1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) ds = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2. \quad (1.18)$$

В частности, для трещины нормального отрыва критерий разрушения Гриффитса представляется формулой

$$\frac{1}{E} K_I^2 = G_c. \quad (1.19)$$

Если в (1.19) ввести хорошо известный результат $K_I = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi l}$ для бесконечной пластины с трещиной длины $2l$, то приходим к формуле Гриффитса

$$\sigma_{22}^\infty = \sqrt{\frac{E G_c}{\pi l}}. \quad (1.20)$$

Соотношение (1.20) характеризует состояние критического равновесия трещины нормального отрыва в упругом теле. Если при данной нагрузке и данной длине трещины освобождающаяся энергия меньше G_c , то трещина не растет и поэтому энергетический критерий разрушения Гриффитса может быть сформулирован следующим образом: разрушение начинается и поддерживается, если освобождающаяся энергия достигает критического значения G_c .

Современные теории хрупкого разрушения были созданы на основе работ Гриффитса [238], [239], который сформулировал критерий роста трещины в хрупком теле в терминах баланса механической и поверхностной энергий. Он рассматривал неограниченную пластину толщины B с центральной трещиной длины $2l$, находящуюся под действием постоянного растягивающего напряжения σ_{22}^∞ . Гриффитс постулировал, что для образования единицы новой свободной поверхности под действием приложенной нагрузки уменьшение потенциальной энергии тела (вследствие подрастания трещины) должно быть равно поверхностной энергии, затраченной на образование новой свободной границы тела (вследствие приращения длины трещины). Таким образом, согласно Гриффитсу, трещина растет, если освобождающейся потенциальной энергии достаточно для преодоления взаимодействия слоев атомов и образования новой свободной поверхности.

Полное изменение энергии рассматриваемой системы: тело + трещина при образовании новой свободной поверхности есть сумма $\delta \mathcal{E} + \delta \Pi$, где $\delta \mathcal{E}$ — изменение потенциальной энергии тела при подрастании трещины (т.е. освободившаяся потенциальная энергия тела при образовании новой свободной поверхности трещины), $\delta \Pi$ — поверхностная энергия, которую необходимо затратить на преодоление межатомных связей соседних атомных слоев для образования новой свободной поверхности трещины.

Согласно Гриффитсу критическое условие для страгивания трещины и поддержания ее роста есть $\delta \mathcal{E} + \delta \Pi = 0$, или

$$\frac{\partial (\mathcal{E} + \Pi)}{\partial l} = 0. \quad (1.21)$$

В общем случае произвольного тела для образования трещины длины l поверхностная энергия на единицу толщины тела определяется как

$$\Pi = 2l\gamma, \quad (1.22)$$

где γ , согласно гипотезе Гриффитса, — энергия, затрачиваемая на образование единицы площади свободной поверхности тела, является постоянной материала при заданных внешних условиях (температура, внешняя среда и т. п.). Тогда уравнение энергетического баланса может быть представлено равенством

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = 2\gamma. \quad (1.23)$$

Следует отметить принципиальную для механики хрупкого разрушения особенность, вытекающую из равенства (1.20): критическое напряжение обратно пропорционально \sqrt{l} и, следовательно, после достижения критического значения напряжения для поддержания роста трещины не требуется увеличения прикладываемой нагрузки — рост трещины является лавинообразным. Такие трещины называются неравновесными, а рост трещины — неустойчивым. Математическое условие неустойчивого роста трещины имеет вид:

$$\frac{\partial^2 (\mathcal{E} + \Pi)}{\partial l^2} < 0; \quad (1.24)$$

противоположное неравенство

$$\frac{\partial^2 (\mathcal{E} + \Pi)}{\partial l^2} > 0 \quad (1.25)$$

определяет условие устойчивого роста трещины, когда требуется малое увеличение внешней нагрузки для малого увеличения длины трещины. Такие трещины называются равновесными.

Действительно, условие (1.21) определяет экстремум функции $\mathcal{E} + \Pi$, а условия (1.24) и (1.25) разделяют максимумы, когда положение равновесия тела с трещиной является неустойчивым (условие (1.24)), и минимумы, когда положение равновесия тела с трещиной является устойчивым (условие (1.25)), этой функции из всего множества экстремальных точек (рис. 17). Из рис. 17А следует, что после достижения критического состояния для дальнейшего продвижения трещины не требуется дополнительных затрат на преодоление межатомных связей, тогда как из рис. 17Б видно, что для поддержания роста трещины необходима дополнительная энергия и, следовательно, рост трещины является устойчивым. Случай, когда вторая производная функции $\mathcal{E} + \Pi$ обращается в нуль, требует, как это следует из основ дифференциального исчисления, дополнительного исследования.

Примером равновесной трещины может служить центральная трещина длины $2l$ под действием двух расклинивающих сосредоточенных сил величины P , приложенных к верхнему и нижнему берегам трещины (рис. 13).

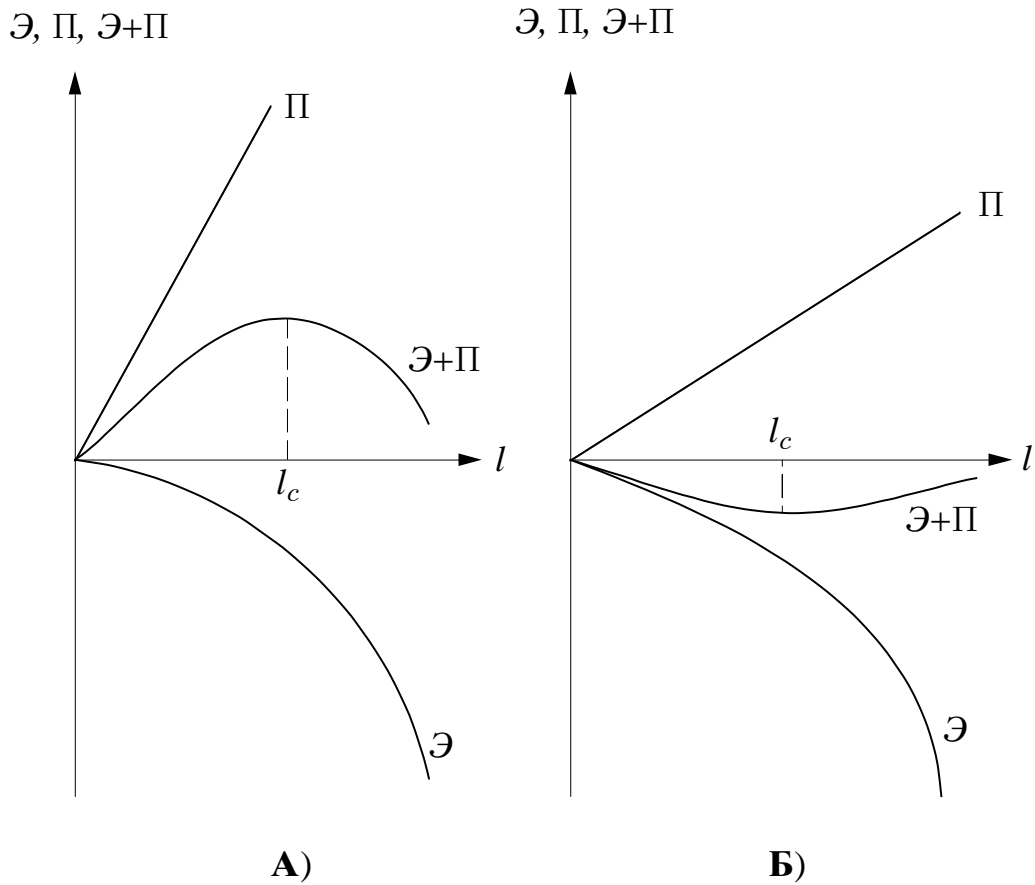


Рис. 17. Изменение суммарной энергии системы тело + трещина в случаях: **А)** неустойчивого роста трещины; **Б)** устойчивого роста трещины

Для данной конфигурации (см, например, [63])

$$\mathcal{E} = -\frac{2P_2^2}{\pi E} \ln l. \quad (1.26)$$

В этом случае из условия критического равновесия (1.21) следует, что

$$P_2 = \sqrt{2E\gamma\pi l}, \quad (1.27)$$

т.е. $P_2 \sim \sqrt{l}$ и для поддержания роста трещины следует увеличивать нагрузку.

В формулах (1.22), (1.23) используется константа γ — плотность поверхностной энергии, представляющая собой важную физическую прочностную характеристику материала. В соотношениях (1.17), (1.18) основная характеристика, входящая в критерий разрушения, есть величина G скорости освобождения в процессе роста трещины упругой энергии. Очевидно, что γ и G_c связаны между собой. Действительно, известно (см., например, [63], с. 235, 236), что

$$G = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}. \quad (1.28)$$

Таким образом, G представляет собой скорость освобождения потенциальной энергии упругого тела с трещиной. Из (1.28) и (1.23) вытекает, что

$$G_c = 2\gamma. \quad (1.29)$$

Идеализированный критерий хрупкого разрушения Гриффитса был предложен для острой трещины в линейно упругом теле. В большинстве инженерных материалах существенны процессы нелинейного деформирования в окрестности вершины трещины. Поэтому Орован (E. Orowan) [301] обобщил концепцию Гриффитса на случай металлов, где возникают необратимые деформации у вершины трещины, и ввел работу пластической деформации γ_p , так что плотность поверхностной энергии есть сумма $\gamma + \gamma_p$. В этом случае формула (1.20), обобщенная на случай пластических деформаций принимает форму:

$$\sigma_{22}^{\infty} = \sqrt{\frac{2E(\gamma + \gamma_p)}{\pi l}}. \quad (1.30)$$

Сформулируем энергетический критерий Гриффитса в терминах трещинодвижущей силы Ирвина (G. R. Irwin) [256], [257]. Мы введем определение трещинодвижущей силы, опираясь на два простейших эксперимента по квазистатическому росту трещины в пластине.⁵⁸

Пусть нижняя кромка упругой пластины единичной толщины с центральной трещиной длины $2l$ жестко закреплена, а к верхней кромке приложена сила F_2 . Обозначим перемещение точки приложения нагрузки через u_2 . Можно сказать, что F_2 и u_2 есть обобщенная сила и обобщенное перемещение соответственно. Для возможного перемещения δu_2 (трещина остается неподвижной) изменение удельной (на единицу толщины пластины) энергии упругой деформации \overline{W} определяется выражением

$$\delta \overline{W} = F_2 \delta u_2. \quad (1.31)$$

Для тела с трещиной $\overline{W} = \overline{W}(u_2, l)$ и вариация энергии упругой деформации при одновременном варьировании u_2 и l может быть вычислена следующим образом:

$$\delta_{u_2, l} \overline{W} = F_2 \delta u_2 - \mathcal{G} \delta l, \quad (1.32)$$

где

$$\mathcal{G} = - \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial l} \right|_{u_2 = \text{fixed}} \quad (1.33)$$

— трещинодвижущая сила Ирвина.

Следовательно, для трещины фиксированной длины и варьируемого перемещения

$$\delta_{u_2} \overline{W} = F_2 \delta u_2 \quad (1.34)$$

или

$$F_2 = \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial u_2} \right|_{l = \text{fixed}}. \quad (1.35)$$

⁵⁸Здесь необходимо помнить о том, что квазистатический рост трещины должен осуществляться либо в изотермических, либо в адиабатических условиях.

Наряду с удельной энергией упругой деформации \overline{W} рассмотрим также удельную дополнительную работу \overline{W}^* , которая определяется как преобразование Лежандра от \overline{W} по обобщенному перемещению:

$$\overline{W}^*(l, F_2) = F_2 u_2 - \overline{W}(l, u_2), \quad (1.36)$$

где вместо обобщенного перемещения u_2 необходимо подставить его выражение через обобщенную силу F_2 , обращая уравнение

$$F_2 = \left. \frac{\partial \overline{W}}{\partial u_2} \right|_{l=\text{fixed}}.$$

Для трещины фиксированной длины l и варьируемого обобщенного усилия имеем

$$\delta_{F_2} \overline{W}^* = u_2 \delta F_2, \quad (1.37)$$

т.е.

$$u_2 = \left. \frac{\partial \overline{W}^*}{\partial F_2} \right|_{l=\text{fixed}}. \quad (1.38)$$

Ясно, что вариация дополнительной работы \overline{W}^* при одновременном варьировании F_2 и l может быть вычислена следующим образом:

$$\delta_{F_2, l} \overline{W}^* = u_2 \delta F_2 + \mathcal{G} \delta l, \quad (1.39)$$

$$\mathcal{G} = \left. \frac{\partial \overline{W}^*}{\partial l} \right|_{F_2=\text{fixed}}. \quad (1.40)$$

Исследуем далее два случая.

1. На границе пластины, трещина в которой растет, удерживаются постоянными перемещения u_2 .

Для фиксированного перемещения и изменяющейся длины трещины, очевидно, находим

$$\delta_l \overline{W} = -\mathcal{G} \delta l. \quad (1.41)$$

Таким образом, трещиноподвижная сила \mathcal{G} — скорость уменьшения энергии упругой деформации \overline{W} при неизменном u_2 .

2. На границе пластины, трещина в которой растет, удерживаются постоянными усилия F_2 .

Для фиксированного усилия и изменяющейся длины трещины, очевидно, находим

$$\delta_l \overline{W}^* = \mathcal{G} \delta l. \quad (1.42)$$

Таким образом, трещиновдвижущая сила \mathcal{G} — скорость увеличения дополнительной работы \overline{W}^* при неизменном усилии F_2 .⁵⁹

Итак, скорость уменьшения потенциальной энергии упругого тела есть трещиновдвижущая сила:

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l}, \quad (1.43)$$

так как

$$\mathcal{E} = \overline{W}$$

для случая заданных перемещений; скорость уменьшения дополнительной потенциальной энергии упругого тела есть трещиновдвижущая сила:

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial l}, \quad (1.44)$$

так как

$$\mathcal{E}^* = -\overline{W}^*$$

для случая заданных усилий.

Уравнения (1.43) и (1.44) — проявление одного из важнейших принципов теории упругости — принципа двойственности.

Учитывая (1.43), критерий Гриффитса может быть переформулирован в терминах трещиновдвижущей силы Ирвина:

$$\mathcal{G} = 2\gamma. \quad (1.45)$$

Необходимо отметить, что в настоящем разделе были приведены различные формулировки критерия разрушения Гриффитса, основанные на понятиях трещиновдвижущей силы \mathcal{G} и скорости освобождения энергии G при образовании новой свободной поверхности. Оба рассмотренных подхода являются, по существу, лишь различными трактовками одного и того же представления об энергетическом барьере, который необходимо преодолеть для страгивания и поддержания роста трещины. Разумеется, справедливо соотношение $\mathcal{G} = G$.

2.3.2. Силовой критерий Ирвина и эквивалентность критериев разрушения

Ирвин установил [256], что для каждого типа трещин существует критическое значение коэффициента интенсивности напряжений K_{ac} , по достижении

⁵⁹Интересно отметить, что для линейно упругого тела

$$\overline{W}^* = \overline{W} = \frac{1}{2} F_2 u_2,$$

поэтому при заданных усилиях

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} F_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial l} \right|_{F_2=\text{fixed}}.$$

Следовательно, ровно половина работы, совершаемой над пластиной, расходуется на рост трещины. Оставшаяся половина расходуется на увеличение энергии деформации.

которого начинается рост трещины. Действительно, процесс разрушения материала при распространении трещины обуславливается напряженно-деформированным состоянием в окрестности вершины трещины, которое, в свою очередь, в линейно упругом теле определяется коэффициентом интенсивности напряжений, поскольку

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\varphi) + \dots \quad (r \rightarrow 0), \quad (2.1)$$

где $\alpha = I, II, III$; угловое распределение $\hat{\sigma}_{ij}(\varphi)$ не зависит от силовых факторов и универсально. Поэтому естественно предположить, что трещина получает возможность распространяться при достижении коэффициентом интенсивности напряжений некоторого критического значения. Этот критерий разрушения получил название силового критерия разрушения. Математическая формулировка этого критерия для каждого из трех типов трещин имеет вид:

$$K_\alpha = K_{\alpha c} \quad (\alpha = I, II, III). \quad (2.2)$$

Критические значения коэффициентов интенсивности напряжений являются, подобно плотности поверхностной энергии тела с трещиной, постоянными материала, характеризующими его трещиностойкость при заданных температуре, внешней среде и т.п. Чем выше критическое значение коэффициента интенсивности напряжений, тем лучше сопротивляется материал развитию в нем трещин и тем выше порог хрупкого разрушения. Текущие значения коэффициентов интенсивности напряжений являются функциями приложенной нагрузки, геометрии образца, длины трещины, тогда как критическое значение $K_{\alpha c}$ есть постоянная материала, подлежащая экспериментальному определению. Наиболее опасными, как правило, являются трещины нормального отрыва, поэтому особую роль играет критическое значение K_{Ic} , которое часто называют вязкостью разрушения.

Критерий хрупкого разрушения (2.2) позволяет решить две главные задачи прикладной механики разрушения: определить критическую нагрузку, которую может выдержать тело с трещиной заданной характерной длины; вычислить допустимую длину трещины, в конструкции, нагруженной заданными усилиями.

Ясно, что для трещин смешанного типа силовой критерий разрушения должен представляться уравнением

$$F(K_I, K_{II}, K_{III}, K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}) = 0. \quad (2.3)$$

Хорошо известно [63], [148], что критерии, основанные на понятии критического коэффициента интенсивности напряжений и критического значения скорости освобождения энергии, являются эквивалентными.

Действительно, вычисляя скорость освобождения энергии при продвижении

трещины в упругом теле,⁶⁰ можно найти, что

$$G = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = \frac{\beta}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2, \quad (2.4)$$

где $\beta = 1$ для плоского напряженного состояния, $\beta = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния.

Таким образом, можно утверждать, что в количественном отношении силовой критерий Ирвина эквивалентен (порознь для трех основных типов трещин) энергетическому критерию хрупкого разрушения Гриффитса.

Для трещины смешанного типа силовое предельное условие (2.3) может оказаться не эквивалентным комбинации коэффициентов интенсивности напряжений, которая устанавливается энергетическим соотношением (2.4). Следовательно, о полной эквивалентности силового и энергетического подходов в механике разрушения речи быть не может. К тому же, согласно энергетическому подходу, локальное разрушение описывается единственной определяющей константой — критической скоростью освобождения упругой энергии. В то же самое время силовой критерий (2.3) определенно указывает на три определяющие константы.

В механике упругопластического разрушения вводятся иные критерии разрушения, основанные на понятии инвариантного J -интеграла. Дело в том, что в металлах у вершины трещины практически всегда образуется зона пластических деформаций и в процессе роста трещины энергия, ассоциированная с локализованным полем пластических деформаций, значительно превышает поверхностную энергию, которую необходимо затратить, чтобы образовалась новая свободная поверхность. Тем не менее разрушение металлов часто тоже можно считать практически хрупким (квазихрупким), если размер пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины. Инвариантный J -интеграл (1.16), как уже было отмечено выше, можно рассматривать как параметр, характеризующий состояние концевой зоны трещины. Ясно, что критерий локального квазихрупкого разрушения должен включать интеграл J и его критическое значение J_c .

Следует отметить эквивалентность силового и энергетического критериев разрушения критерию J -интеграла, по крайней мере для упругих тел.

В самом деле, не зависящий от пути интегрирования J -интеграл определяется как

$$J = \int_C \left(W n_1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) ds. \quad (2.5)$$

Правая часть последнего выражения полностью совпадает с результатом (1.15) и, следовательно, представляет собой скорость освобождения в процессе роста трещины потенциальной энергии упругого тела.

⁶⁰Вычисление скорости освобождения потенциальной энергии упругого тела при увеличении длины трещины, т.е. значение производной $\partial \mathcal{E} / \partial l$, по традиции воспроизводится во всех учебниках и монографиях, посвященных механике разрушения (см., например, [63], с. 228-234; [64], с. 43-46).

В случае линейно упругого тела J -интеграл связан с коэффициентами интенсивности напряжений

$$J = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = \frac{\beta}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2, \quad (2.6)$$

где, по-прежнему, $\beta = 1$ для плоского напряженного состояния, $\beta = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния. Формула (2.6) получается в результате расчета J -интеграла по сингулярной асимптотике решения линейной механики разрушения (см. формулы раздела 2.1.1).

Таким образом, силовой критерий разрушения Ирвина, базирующийся на критическом значении коэффициента интенсивности напряжений, и критерий разрушения, основанный на критическом значении инвариантного J -интеграла, в случае линейного упругого тела эквивалентны.

Итак, критерий хрупкого разрушения Гриффитса, сформулированный в терминах J -интеграла, может быть распространен и на упругопластические тела, тем более, что независимость интеграла J от выбора контура интегрирования можно строго обосновать и в том случае, когда определяющий закон упругости нелинеен. Поскольку соотношения деформационной теории пластичности несколько (при условии, что в процессе развития текучести разгрузка элементов концевой зоны трещины невозможна) не отличаются от определяющих соотношений нелинейной упругости, инвариантность интеграла J можно считать доказанной.⁶¹

⁶¹Заметим, что в рамках теории пластичности типа теории течения обосновать инвариантность J -интеграла не удается.

Нелинейная механика разрушения: основные методы и результаты

3.1. Канонические законы сохранения и силы, действующие на дефекты в нелинейно упругих твердых телах

Канонический формализм нелинейной механики сплошных сред (т.е. представление на ассоциированном материальном многообразии) и канонические законы сохранения (баланс энергии и канонического импульса) позволяют не только дать вывод инвариантов механики разрушения в геометрически нелинейном случае, но и полнее понять и прояснить сущность инвариантных интегралов механики разрушения и их место в современной нелинейной теории упругости, рассматриваемой как физическая теория поля (см. ниже **3.2**).

Изложение в основном следует [284], [286], [288]. В **3.1.1** излагаются необходимые для дальнейшего исследования сведения из кинематики сплошных сред. Эти сведения минимальны. Затем, в разделе **3.1.2**, для нелинейно упругих сред (возможно, с внутренними параметрами состояния, и, возможно, с учетом вклада градиентов скрытых переменных состояния в свободную энергию) выводятся канонические законы сохранения энергии и импульса, вводятся тензор напряжений Эшелби и конфигурационная сила Эшелби. Там же устанавливается инвариантность потока тензора напряжений Эшелби через любую замкнутую поверхность в отсчетной конфигурации в случае материально однородных и бездефектных сред, и, таким образом, обосновывается независимость соответствующего поверхностного интеграла от выбора поверхности интегрирования. Затем (**3.1.3**) каноническое уравнение баланса импульса используется для вычисления конфигурационной силы, действующей на продвигающуюся трещину в нелинейно упругом теле. Эта конфигурационная сила вполне аналогична трещиноподвижной силе Ирвина. Наконец, в **3.1.4** вычисляется скорость освобождения энергии, обусловленного подрастанием трещины, и показывается, что в приближении линейной упругости конфигурационная сила есть не что иное, как инвариантный J -интеграл механики разрушения. В этом же разделе **3.1.4** показано, какое энергетическое уравнение служит источником вывода различных инвариантных интегралов динамической механики разрушения. Уравнения

раздела **3.1.4** служат основой для вывода инвариантных интегралов динамики, рассматриваемых в **3.3.3**.

Вопросы, которые обсуждаются в этом цикле разделов, следует рассматривать как достаточно компактное введение в собственно нелинейную механику разрушения, причем с самой широкой степенью общности.

3.1.1. Нелинейная кинематика

Мы будем рассматривать общий нелинейный случай и начнем с краткого анализа основных соотношений кинематики. Обозначения, используемые далее, в основном согласуются со схемой рациональной механики [336]. Компактное изложение теории конечных деформаций, необходимой для понимания данного раздела книги, читатель может найти в [284] и [137], систематическое — в духе рациональной механики Нолла—Труделла (W. Noll, C. Truesdell) — в монографии [329].

Следуя традиционной схеме рациональной механики, обозначим через \mathbf{x} положение (место) в пространстве в момент времени t материальной частицы \mathbf{X} . Ясно, что места \mathbf{x} составляют актуальную конфигурацию тела \mathcal{K} , а места \mathbf{X} — отсчетную конфигурацию \mathcal{K}_R .

Деформация тела, развивающаяся с течением времени, представляется как достаточно гладкое отображение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

отсчетной конфигурации на актуальную: $\mathcal{K}_R \rightarrow \mathcal{K}$.

Это отображение можно обратить и представить, таким образом, деформацию в виде обратного отображения

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

Здесь важно отдавать себе отчет в том, что уже на этом первоначальном этапе проявляется характерная для всей нелинейной механики сплошных сред двойственность: двойственность представления деформации (1.1) и (1.2) (прямое и обратное описания) влияет затем на выбор мер деформации и формулировку законов сохранения.

Градиент деформации

$$\mathbf{F} = (\nabla_R \otimes \mathbf{x})^T \quad (1.3)$$

является важнейшим конструктивным элементом кинематики континуума и основным "строительным материалом" теории конечных деформаций.

Обратный градиент, естественно, определяется как

$$\mathbf{F}^{-1} = (\nabla \otimes \mathbf{X})^T, \quad (1.4)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{I} есть единичный тензор.

Вектор скорости (Эйлера скорость) определяется как частная производная по времени прямого представления (1.1):

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}. \quad (1.6)$$

Материальная скорость определяется как частная производная по времени обратного представления (1.2):

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}}. \quad (1.7)$$

Оба типа скорости связаны соотношением:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.8)$$

3.1.2. Канонические законы сохранения

Два основных классических закона сохранения (массы и импульса) можно сформулировать в материальной форме (т.е. по отношению к конфигурации \mathcal{K}_R):

$$\left(\frac{\partial \rho_R}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - \nabla_R \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{p} = \rho_R \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \rho_R \mathbf{v} \quad (2.3)$$

есть физический импульс,

$$\mathbf{S}^T = J \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.4)$$

\mathbf{S} — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, \mathbf{T} — тензор напряжений Коши, $J = \det \mathbf{F}$. Мы подразумеваем отсутствие поля массовых сил и не учитываем их вклада в баланс импульса.

Баланс энтропии также сформулируем в материальной форме:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \nabla_R \cdot \mathbf{J} = \sigma_{\text{th}} + \sigma_{\text{intr}}, \quad (2.5)$$

где s — плотность (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии) энтропии, \mathbf{J} — материальный вектор потока энтропии. Производство энтропии — слагаемые в правой части последнего уравнения — складывается из двух частей: вклад σ_{th} , который обычно называют внешним производством энтропии, обусловлен теплопроводностью и поглощением ”лучистого тепла”, а σ_{intr} — внутренним производством энтропии при необратимых изменениях состояния.

Процесс теплопроводности описывается материальным уравнением притока тепла:

$$\vartheta \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h} = \vartheta \sigma_{\text{intr}}, \quad (2.6)$$

где ϑ — абсолютная температура, \mathbf{h} — материальный вектор потока тепла.

Введем две основные функции, необходимые для представления в рамках классической теории поля.

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = K - \psi \quad (2.7)$$

представляет собой разность кинетической

$$K = \frac{1}{2} \rho_{\mathbf{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad (2.8)$$

и свободной энергии Гельмгольца (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии)

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \vartheta, \alpha, \nabla_{\mathbf{R}} \alpha, \mathbf{X}), \quad (2.9)$$

где переменная α зарезервирована для внутренних (скрытых) переменных состояния, аргумент $\nabla_{\mathbf{R}} \alpha$ подразумевает возможность диффузии и локализации физической величины, представляемой скрытой переменной α , аргумент \mathbf{X} указывает на возможную материальную неоднородность тела.

Полная энергия (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии)

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} + K \quad (2.10)$$

есть сумма внутренней энергии \mathcal{E} и кинетической энергии K .

Внутренняя энергия \mathcal{E} и свободная энергия ψ связаны соотношением:

$$\mathcal{E} = s\vartheta + \psi. \quad (2.11)$$

Еще одну группу уравнений составляют определяющие уравнения:

$$\mathbf{S}^{\text{T}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}, \quad (2.12)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \quad (2.13)$$

$$\overline{\mathcal{A}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{M} = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla_{\mathbf{R}} \alpha)}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{h} = \vartheta \mathbf{J}, \quad \sigma_{\text{th}} = -\mathbf{J} \cdot (\nabla_{\mathbf{R}} \ln \vartheta), \quad \vartheta \sigma_{\text{intr}} = \mathcal{A} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}}, \quad (2.16)$$

где

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathcal{M} = -\frac{\delta \psi}{\delta \alpha} \quad (2.17)$$

есть обобщенная термодинамическая сила, сопряженная потоку внутренней переменной состояния α .

Канонические уравнения баланса импульса и энергии выводятся из уравнения баланса импульса (2.2) умножением слева соответственно на \mathbf{F}^T и \mathbf{v} :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{f}^{\text{inh}} - \mathbf{f}^{\text{th}} - \mathbf{f}^{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{\Gamma} = 0. \quad (2.19)$$

В этих уравнениях

$$\mathcal{P} = -\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{p} \quad (2.20)$$

— канонический импульс (псевдоимпульс),

$$\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F} + \mathcal{M} \otimes (\nabla_{\mathbf{R}}\alpha)) \quad (2.21)$$

— тензор напряжений Эшелби (тензор энергии—импульса);⁶²

$$\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{h} \quad (2.22)$$

— материальный вектор потока энергии;

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{M} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_{\mathbf{x}} \quad (2.23)$$

⁶² Тензор энергии—импульса был введен в механику Эшелби [221]. В современной литературе по нелинейной механике сплошных сред встречаются (в рамках одной и той же физической интерпретации) различные определения тензора энергии—импульса (см., например, монографии [284], [329]).

С точки зрения интегральных законов сохранения механики тензор напряжений Эшелби играет роль, аналогичную тензору \mathbf{S} , при формулировке баланса полной энергии внутри фиксированного контрольного объема в физическом пространстве. В этом случае соответствующий объем в отсчетной конфигурации будет подвижным. С помощью формулы дифференцирования интеграла по подвижному объему нетрудно проверить ([329], pp. 172, 173), что (мы пренебрегаем здесь внутренними степенями свободы)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{H} d\tau_R = \oint_{\partial} (\mathcal{N} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{h} \cdot \mathcal{N}) dS_R,$$

где тензор

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathcal{H}\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$$

не существенно отличается от тензора напряжений Эшелби $\mathbf{P} = -\mathcal{L}\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$. Тензор $\tilde{\mathbf{P}}$, как мы увидим в 3.1.4, играет главную роль при подсчете скорости освобождения энергии вследствие продвижения края трещины.

Отметим также, что в квазистатическом приближении (ср. [329], p. 172)

$$\mathbf{P}^T = -J\mathbf{F}^T \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \left(\frac{\psi}{J}\right).$$

Симметрия тензора напряжений Коши $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ влечет за собой равенство

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ — правый тензор деформации Коши—Грина (A. L. Cauchy, G. Green) согласно терминологии рациональной механики.

— материальный вектор Умова—Пойнтинга (Н. А. Умов, J. Н. Poynting);⁶³

$$\mathbf{f}^{\text{th}} = s(\nabla_{\mathbf{R}}\vartheta) \quad (2.24)$$

— термическая материальная сила, обусловленная неоднородностью распределения температуры;

$$\mathbf{f}^{\alpha} = \mathcal{A}(\nabla_{\mathbf{R}}\alpha) \quad (2.25)$$

— материальная сила, обусловленная неоднородностью распределения скрытой переменной α ;

$$\mathbf{f}^{\text{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\text{expl}} \quad (2.26)$$

— сила, действующая на материальную неоднородность (сила Эшелби).

Заметим также, что

$$\mathcal{H} = s\vartheta - \mathcal{P} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{v}) - \mathcal{L}, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{P} = \rho_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}), \quad (2.28)$$

$$K = \frac{1}{2} \rho_{\mathbf{R}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathcal{P} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{f}^{\text{inh}} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) (\nabla_{\mathbf{R}} \rho_{\mathbf{R}}) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\text{expl}}, \quad (2.30)$$

$$s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, \quad \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.31)$$

Следствием канонического уравнения баланса импульса (2.18) является (в квазистатическом приближении) соотношение

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{f}^{\text{inh}}, \quad (2.32)$$

или в случае материально однородного тела —

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (2.33)$$

Полученный результат устанавливает инвариантность интеграла

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathcal{N} \cdot \mathbf{P} d\mathcal{S}_R = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

(здесь интегрирование производится по любой поверхности \mathcal{S} , не содержащей внутри дефектов) в плане независимости значения интеграла от формы поверхности \mathcal{S} в отсчетной конфигурации \mathcal{K}_R .

⁶³При отсутствии скрытых степеней свободы α имеем $\gamma = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$. Вектор Умова—Пойнтинга правильнее было бы определить как $\gamma = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$ с тем, чтобы согласовать его трактовку как потока энергии внутрь контрольного объема.

В приближении малых деформаций инвариантный интеграл (2.34) приобретает вид

$$\oint_S n_k \left(W \delta_{ki} - \sigma_{kj} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dS = 0. \quad (2.35)$$

Аналогичный интеграл был использован выше (см. уравнение (1.15) раздела 2.3.1) при вычислении скорости освобождения упругой энергии при росте трещины.

3.1.3. Глобальный баланс канонического импульса для упругого тела с трещиной

Рассмотрим отсчетную конфигурацию \mathcal{K}_R упругого тела с вырезом (трещина — предельный случай выреза при сближении его берегов) (рис. 18).

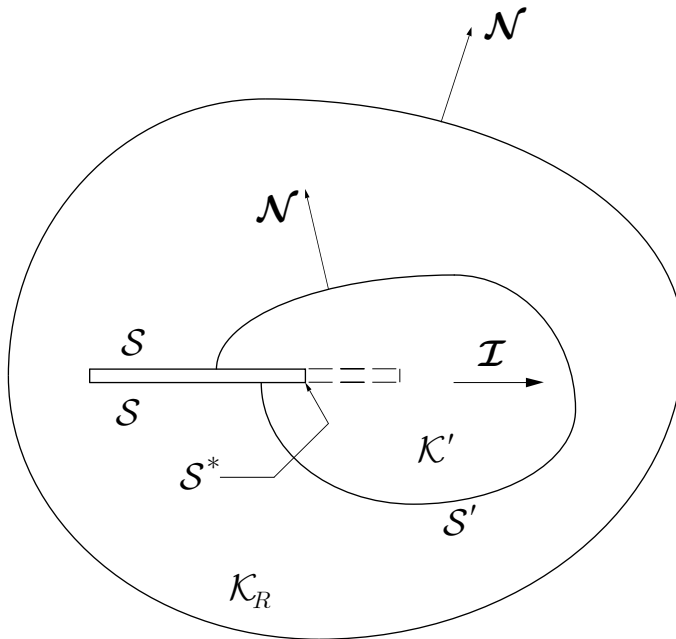


Рис. 18. Отсчетная конфигурация тела с продвигающейся трещиной—вырезом

Предположим также, что край выреза продвигается в соприкасающейся плоскости в направлении нормального вектора \mathcal{I} (рис. 19).

Обозначим через $\partial\mathcal{K}_R$ "видимую" часть границы тела в отсчетной конфигурации,⁶⁴ \mathcal{S} — свободную границу выреза (без концевых частей), \mathcal{S}^* — поверхность концевой части выреза (у продвигающегося конца выреза) или край трещины. Произведем также следующее построение: в нормальной к краю выреза плоскости построим кривую \mathcal{C}' , охватывающую край выреза, затем перпендикулярно нормальной плоскости проведем образующие высоты δs (δs — элемент длины края трещины—выреза) так, что образуется цилиндрическая поверхность, ограничивающая область $\mathcal{K}'(\delta s)$.

⁶⁴Под "видимой" частью границы тела мы понимаем поверхность, его ограничивающую, за вычетом той ее части, которую составляют поверхности дефектов — так называемая "невидимая" граница.

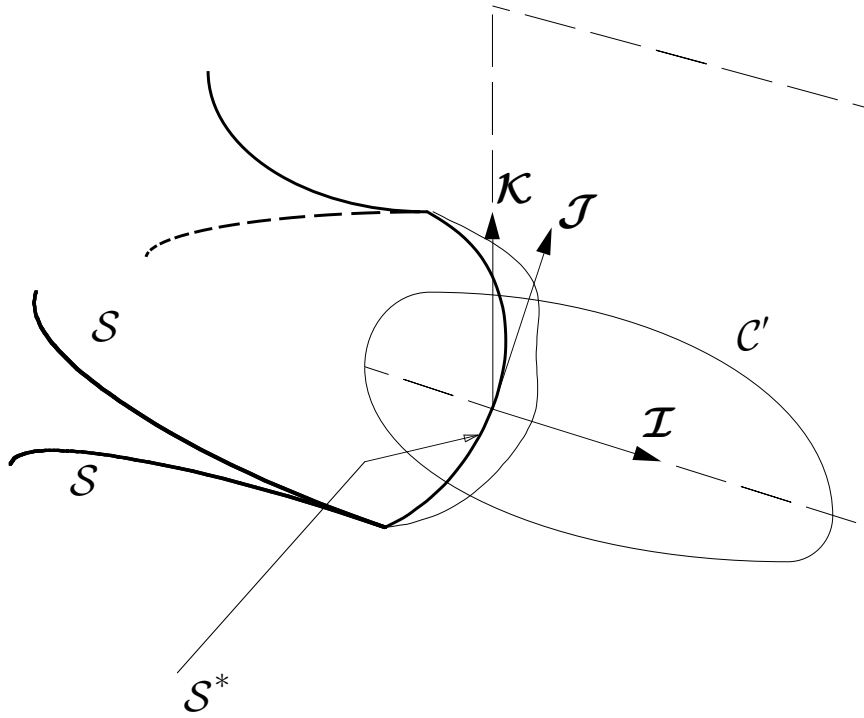


Рис. 19. Локальный базисный триэдр у края трещины в отсчетной конфигурации: $-\mathbf{I}$ — вектор главной нормали, \mathbf{J} — касательный вектор, \mathbf{K} — вектор бинормали

Пользуясь формулой дифференцирования интеграла с переменной областью интегрирования, можно получить, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'(\delta s)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{I} d\tau_R = \int_{\mathcal{K}'(\delta s)} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{I} d\tau_R + \oint_{\partial \mathcal{K}'(\delta s) + \mathcal{S}(\delta s) + \mathcal{S}^*(\delta s)} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{I}) C dS_R, \quad (3.1)$$

где $\partial \mathcal{K}'(\delta s)$ — ”видимая” поверхность рассматриваемого цилиндра, $\mathcal{S}(\delta s)$ — часть границы цилиндра, приходящаяся на свободные берега выреза, $\mathcal{S}^*(\delta s)$ — часть концевой поверхности выреза, пересекающая цилиндр, C — скорость распространения граничных поверхностей в направлении внешней по отношению к области $\mathcal{K}'(\delta s)$ нормали. Ясно, что $C = 0$ на $\partial \mathcal{K}'(\delta s)$ и $\mathcal{S}(\delta s)$. Если обозначить через C^* скорость распространения края выреза $\mathcal{S}^*(\delta s)$ в направлении \mathbf{I} , то $C = -C^*$.

Учитывая каноническое уравнение баланса импульса

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - \nabla_R \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

где

$$\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}), \quad (3.3)$$

а также

$$\mathcal{N} \cdot \mathbf{I} = 0 \quad (\text{на поверхности } \mathcal{S}(\delta s)), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{N} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (\text{на поверхностях } \mathcal{S}(\delta s), \mathcal{S}^*(\delta s)), \quad (3.5)$$

где \mathcal{N} — единичный вектор внешней нормали, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'(\delta s)} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\tau_R = \int_{\partial\mathcal{K}'(\delta s)} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} d\mathcal{S}_R + \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{L}(\mathcal{N} \cdot \mathcal{I}) d\mathcal{S}_R - \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} C^* d\mathcal{S}_R, \quad (3.6)$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ — проекция канонического импульса на направление \mathcal{I} .

Ясно, что это уравнение может быть также представлено в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'(\delta s)} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\tau_R + \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} C^* d\mathcal{S}_R - \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{L}(\mathcal{N} \cdot \mathcal{I}) d\mathcal{S}_R = \int_{\partial\mathcal{K}'(\delta s)} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} d\mathcal{S}_R. \quad (3.7)$$

Обозначая далее через $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ плотность (на единицу длины) конфигурационной силы,⁶⁵ действующей на вырез,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \delta s = - \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} (\mathcal{L}(\mathcal{N} \cdot \mathcal{I}) - \mathcal{P}_{\mathcal{I}} C^*) d\mathcal{S}_R \quad (3.8)$$

и переходя в уравнении (3.7) к пределу при $\delta s \rightarrow 0$, предварительно разделив левую и правую его части на δs , получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}'} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\mathcal{A}' + \mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{C}'} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} ds', \quad (3.9)$$

где \mathcal{A}' — плоская область, ограниченная кривой \mathcal{C}' , краем и берегами выреза.

Ясно, что контур \mathcal{C}' , охватывающий край выреза в отсчетной конфигурации, можно выбрать подвижным. В этом случае последнее уравнение следует модифицировать:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}'} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\mathcal{A}' + \mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{C}'} ((\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} + \mathcal{P}_{\mathcal{I}} C) ds'. \quad (3.10)$$

Глобальную конфигурационную силу $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}}$, действующую на все элементы края, можно, очевидно, вычислить как

⁶⁵Термин *конфигурационная сила* в настоящее время общепринят в механике разрушения. Величина $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \delta s$ имеет размерность силы, но не может быть истолкована в духе классической концепции Ньютона. Конфигурационные силы, как будет продемонстрировано ниже в 3.1.4, проявляют себя в форме диссипации энергии на упругой сингулярности и только в том случае, если перемещение сингулярности действительно произошло. В механике разрушения компоненты конфигурационной силы обычно интерпретируются как абсолютное значение отношения изменения упругой энергии тела к величине элементарного перемещения края трещины в соприкасающейся плоскости по направлению главной нормали к указанному краю. Подробнее вычисление конфигурационных сил будет также рассмотрено несколько позднее в 3.3.

Понятие о конфигурационных силах широко используется в монографии [284] для обозначения сил, которые в отличие от сил классической механики Ньютона действуют не в физическом пространстве, а на материальном многообразии, точки которого представляют тело. Конфигурационные силы несколько (в случае сингулярного упругого поля) "подправляют" баланс канонического импульса в плане включения сил, действующих на дефекты.

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} = \int \mathcal{F}_{\mathcal{I}} ds, \quad (3.11)$$

где интегрирование производится по всему краю трещины—выреза.

На основании (3.9) и (3.11) заключаем, что

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{S}'} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} d\mathcal{S}_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\tau_R. \quad (3.12)$$

Здесь \mathcal{K}' — трехмерная область, складывающаяся из плоских областей \mathcal{A}' , \mathcal{S}' — часть границы \mathcal{K}' , не включающая поверхности, приходящиеся на \mathcal{S} и \mathcal{S}^* и выражение в правой части не зависит от выбора поверхности \mathcal{S}' .

Заметим, что к области \mathcal{K}' можно добавить дополнительно области любой формы, не содержащие края выреза, не нарушая при этом уравнения (3.12). Поэтому в уравнении (3.12) под областью \mathcal{K}' можно понимать область произвольной формы, содержащую край выреза.

В квазистатическом приближении конфигурационная сила $\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{S}'} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} d\mathcal{S}_R, \quad (3.13)$$

причем поверхностный интеграл в правой части не зависит от выбора поверхности \mathcal{S}' . Таким образом достигается обобщение важнейшего инвариантного интеграла линейной механики разрушения на случай нелинейно упругого тела.⁶⁶

Если область \mathcal{K}' связана с кончиком выреза и изменяет свое положение в отсчетной конфигурации, продвигаясь вслед за вырезом, то уравнение (3.12) подлежит модификации:

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{S}'} ((\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} + \mathcal{P}_{\mathcal{I}} C) d\mathcal{S}_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\tau_R, \quad (3.14)$$

где C — скорость распространения поверхности \mathcal{S}' в направлении внешней нормали \mathcal{N} .

Последняя формула есть далеко идущее по разным направлениям обобщение классического \mathcal{J} -интеграла: нелинейность определяющего закона и геометрическая нелинейность, учет динамического вклада, трансляция области расчета инвариантного интеграла вслед за продвигающейся трещиной.

Поскольку аналогичные рассуждения могут быть проведены, если в качестве \mathcal{K}' выбрать все тело \mathcal{K}_R , то для конфигурационной силы можно получить выражение:

⁶⁶Справедливости ради следует заметить, что на возможность подобного обобщения указывалось еще в ранних исследованиях (см., например, [265]).

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} = \int_{\partial\mathcal{K}_R} (\mathcal{N} \cdot \mathbf{P})_{\mathcal{I}} dS_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}_R} \mathcal{P}_{\mathcal{I}} d\tau_R. \quad (3.15)$$

Это уравнение выражает также глобальный баланс импульса для нелинейно упругого тела с трещиной.

3.1.4. Глобальный баланс энергии для упругого тела с трещиной

Мы, по-прежнему, будем рассматривать упругое нетеплопроводящее тело и изотермический рост трещины—выреза.

Закон сохранения энергии (2.19) в этом случае имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (4.1)$$

Рассуждая также, как и при рассмотрении глобального баланса канонического импульса, приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}'} \mathcal{H} d\mathcal{A}' + \mathcal{D} = \int_{\mathcal{C}'} \mathcal{N} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) ds', \quad (4.2)$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\delta s} \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{H} C^* dS_R \quad (4.3)$$

есть скорость освобождения энергии,⁶⁷ обусловленного подрастанием элементарного участка края трещины.

Глобальная диссипация энергии $\overline{\mathcal{D}}$, обусловленная продвижением края трещины, есть сумма элементарных вкладов:

$$\overline{\mathcal{D}} = \int \mathcal{D} ds. \quad (4.4)$$

Ясно, что уравнение баланса энергии для материальной части тела \mathcal{K}' , содержащей продвигающийся край выреза, можно представить в форме:

$$\overline{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{S}'} \mathcal{N} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) dS_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H} d\tau_R. \quad (4.5)$$

Если область \mathcal{K}' сопровождает продвигающийся край выреза, то уравнение (4.5) необходимо модифицировать:

⁶⁷ Величина \mathcal{D} может быть названа также диссипацией энергии (в расчете на единицу длины края трещины), обусловленной ростом участка края трещины, и определена на основании уравнения

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{C}'} \mathcal{N} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) ds' - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}'} \mathcal{H} d\mathcal{A}'.$$

$$\overline{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{S}'} (\mathcal{N} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) + \mathcal{H}C) d\mathcal{S}_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H} d\tau_R, \quad (4.6)$$

где C — скорость распространения поверхности \mathcal{S}' в направлении внешней нормали \mathcal{N} .

Еще раз подчеркнем, что разность интегралов в правой части уравнения (4.6) не зависит от выбора поверхности \mathcal{S}' , охватывающей продвигающийся край трещины. Таким образом, правая часть уравнения (4.6) представляет собой далеко идущее обобщение инвариантных интегралов динамической упругости [186], [229], [175], [227], [187], [216].

Несколько преобразуем уравнение (4.6), вводя в него вектор материальной скорости \mathbf{v} и предполагая, что поверхность \mathcal{S}' движется с нормальной скоростью $\mathbf{v} \cdot \mathcal{N}$:

$$\overline{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{S}'} \{ -\mathcal{N} \cdot ((\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}) + \mathcal{H} \mathbf{v} \cdot \mathcal{N} \} d\mathcal{S}_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H} d\tau_R, \quad (4.7)$$

или (ср. с уравнением (4.5))

$$\overline{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{S}'} \mathcal{N} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{S}_R - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H} d\tau_R, \quad (4.8)$$

где тензор

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathcal{H}\mathbf{I} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{F} \quad (4.9)$$

в квазистатическом приближении совпадает с тензором напряжений Эшелби \mathbf{P} (см. уравнение (3.3)).

Заметим, что уравнение

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H} d\tau_R = \int_{\partial\mathcal{K}'} \mathcal{N} \cdot (\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}) d\mathcal{S}_R \quad (4.10)$$

выражает баланс энергии для фиксированной (Эйлеровой) области пространства, не содержащей дефектов и сингулярностей поля, сформулированный с помощью переменных отсчетной конфигурации.

Поверхностный интеграл

$$\Pi = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{N} \cdot \tilde{\mathbf{P}} d\mathcal{S}_R \quad (4.11)$$

— инвариантный интеграл установившегося динамического упругого поля. Он играет исключительную роль при вычислении потока энергии в вершину рас-

тущей с постоянной скоростью трещины, напряженно-деформированное состояние у края которой локально стационарно.⁶⁸

Покажем, что элементарная диссипация \mathcal{D} может быть вычислена по формуле (ср. с уравнением (1.14) раздела 2.3.1):

$$\mathcal{D} = C^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}}. \quad (4.12)$$

С этой целью зафиксируем некоторую точку \mathbf{X}^* , расположенную на поверхности края выреза \mathcal{S}^* . Введем новые материальные координаты \mathbf{X}' , полагая, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^* + \mathbf{X}',$$

т.е. \mathbf{X}' есть радиус вектор (в отсчетной конфигурации), отсчитываемый от положения \mathbf{X}^* на крае выреза. Нас будет интересовать элемент края выреза, локализованный возле положения \mathbf{X}^* .

Дифференцируя по времени соотношение

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', t),$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{X}^* + \mathbf{X}', t),$$

и полагая $\mathbf{X}' = \mathbf{0}$, получим

$$\mathbf{v} = -C^* \mathbf{F} \cdot \mathcal{I} + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}'=\mathbf{0}},$$

где \mathbf{v} и \mathbf{F} есть физическая скорость и градиент деформации в месте $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$.

Замечая, что для мест \mathbf{X}' на поверхности \mathcal{S}^*

⁶⁸Мы не случайно используем обозначение $\mathbf{\Pi}$ для интеграла (4.11). Этот интеграл для геометрически линейного случая был введен в монографии [175] (см. с. 228) и трактовался как вектор $\mathbf{\Pi}$ потока энергии через поверхность \mathcal{S} в расчете на единицу длины. В оригинальном определении [175] учитывается возможное действие на упругое тело массовых сил. В этой же монографии читатель может найти не совсем корректное доказательство (в геометрически линейном приближении) инвариантности этого интеграла: если поверхности \mathcal{S}' и \mathcal{S}'' опираются на один и тот же контур, то потоки через эти поверхности совпадают, т.е. $\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi}''$. Это утверждение справедливо только, если упругое динамическое поле установившееся. Формулу (5.21) на с. 229 монографии [175] никак оправдать нельзя.

Ясно, что для любой замкнутой поверхности, не содержащей внутри сингулярностей установившегося динамического упругого поля, имеем:

$$\oint_{\partial} \mathcal{N} \cdot \tilde{\mathbf{P}} dS_R = 0.$$

Последнее соотношение в приближении малых деформаций имеет форму

$$\oint_{\partial} [(W + K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds = 0$$

не зависимо от выбора контура интегрирования. Это равенство без труда проверяется прямым вычислением с использованием базовых уравнений линейной теории упругости.

Ниже, в разделе 3.3.3, мы подробно обсудим вопрос об инвариантных интегралах динамического упругого поля.

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}'=0} = \mathbf{0},$$

поскольку нет относительного (по отношению к материальной частице с меткой \mathbf{X}^*) движения близкой материальной частицы с меткой $\mathbf{X}^* + \mathbf{X}'$, получим

$$\mathbf{v} = C^* \mathcal{I}.$$

Но в этом случае

$$C^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} = -\frac{1}{\delta s} \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} (\mathcal{L} - \mathcal{P} \cdot \mathbf{v}) C^* d\mathcal{S}_R = \frac{1}{\delta s} \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} (\psi - K + 2K) C^* d\mathcal{S}_R$$

и, следовательно,

$$C^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} = \frac{1}{\delta s} \int_{\mathcal{S}^*(\delta s)} \mathcal{H} C^* d\mathcal{S}_R = \mathcal{D}.$$

Соотношение между глобальными количествами, очевидно, имеет следующий вид:

$$\overline{\mathcal{D}} = \int C^* \mathcal{F}_{\mathcal{I}} ds.$$

Применяя полученный результат к трещине, ориентированной вдоль координатной оси x_1 , в приближении линейной теории упругости имеем:

$$C^* = \dot{l}, \quad \mathcal{F}_1 = J,$$

где

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_1 - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) ds$$

— инвариантный J -интеграл Эшелби—Черепанова—Райса, который впервые появляется при расчете скорости энергостока в вершину трещины, приведенном выше в разделе **2.3.1**.

Таким образом, устанавливается, что конфигурационная сила $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ есть скорость освобождения энергии (в расчете на единицу длины края трещины) вследствие развития трещины в нелинейно упругой среде.

3.2. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля

Вариационная формулировка как средство математического представления физической теории часто рассматривается в качестве самого элегантного и экономичного (в духе принципа экономии мышления Маха (Е. Mach)) такого представления, по крайней мере для физических теорий, не претендующих на описание диссипативных процессов. Классическая механика Лагранжа и Гамильтона

является великолепным образцом теории, реализованной с помощью вариационного описания. Наконец, следует отметить, что вариационные принципы были положены в основу теории электромагнитного и гравитационного поля в [77].

Механика континуума, являясь классической теорией поля, не может быть исключением: исследование обобщенных симметрий и инвариантных групп для функционала действия есть, по-видимому, не только самое мощное средство проникновения в сущность самой механики континуума, но и регулярный метод вывода инвариантов, которые часто (как об этом убедительно свидетельствует опыт механики разрушения) могут иметь и важное прикладное значение. Читатель будет в состоянии сравнить два возможных способа⁶⁹ вывода инвариантных интегралов нелинейной механики разрушения: на основе канонического формализма и канонических законов сохранения и с помощью вариационных симметрий. Последний из них несомненно более эффективен в плане поиска новых законов сохранения и соответствующих им инвариантных интегралов.

Представленный здесь материал⁷⁰ будет излагаться в следующей последовательности: сначала рассматриваются (в рамках традиционной линейной теории упругости) три классических закона сохранения (импульса, энергии и момента импульса), затем с помощью теоремы Нетер выводятся (в квазистатическом приближении) три базовых инвариантных интеграла теории упругости и соответствующие им дивергентные законы сохранения, далее излагаются элементы теории поля и канонические определения всех важнейших векторных и тензорных полей нелинейной механики сплошных сред, необходимые для вывода нетривиальных законов сохранения в общем нелинейном случае (в том числе с учетом динамического вклада в функционал действия), и ограниченный вариант теории вариационных симметрий, развитый в [300]. В качестве важного дополнения следует рассматривать раздел 3.2.8, посвященный Лагранжиану пустого пространства (нулевому Лагранжиану). Добавление Лагранжиана пустого пространства к Лагранжиану физического поля не изменяет условий стационарности действия, хотя и может изменять выражения для канонических тензоров. Понятие о Лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и нетривиальных законов сохранения. В 3.2.8 приводится полная теория Лагранжиана пустого пространства для n -мерного многообразия (включая 4-мерное пространство-время Минковского). С помощью дивергентного представления Лагранжиана пустого пространства для звездообразной области получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого, в случае произвольного n -мерного многообразия. Показано, что в случае нелинейно упругого поля в трехмерном пространстве нулевой Лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда Лагранжиан

⁶⁹Первый способ подробно обсуждается в 3.1 и связан с расчетом баланса энергии и импульса тела с трещиной.

⁷⁰См. также: Радаев Ю.Н. Нелинейная теория упругости как физическая теория поля//Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. (Под ред. Д.М. Климова.) М.: Физматлит, 2003. С. 658-684.

пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин. Вычислены конфигурационные силы, соответствующие нулевому Лагранжиану и зависящие линейно или квадратично от первых градиентов поля.

В целом излагаемый в разделе 3.2 материал следует рассматривать как теоретическую основу нелинейной механики разрушения, поскольку она в значительной мере базируется в формальном плане на аппарате инвариантных интегралов, которые по существу представляют собой инвариантную формулировку основных физических законов сохранения в виде интегралов по контуру или поверхности, не зависящих от пути интегрирования.

Последовательное изложение затрагиваемого круга проблем заинтересованный читатель может найти также в известной монографии [284]. К сожалению, на русском языке имеется весьма ограниченный набор литературных источников по проблеме применения вариационных симметрий в нелинейной теории упругости. Так, в известной монографии [23] вообще нет никаких указаний на это.

По поводу формализма исчисления вариаций для функционалов с переменной областью интегрирования и доказательства теоремы Нетер см. [211], [121], [234], [109], [45]. Систематическое изложение теории вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных дано в четвертой главе монографии [111]. Законы сохранения теории упругости, следующие из теоремы Нетер, обсуждаются в [111], с. 355-358

Изложение теории Лагранжиана пустого пространства в основном следует [145].

3.2.1. Функционал действия и классические законы сохранения

Теория упругости как физическая полевая теория может быть построена, исходя из следующих выражений для Лагранжиана упругого тела и функционала действия:

$$\mathfrak{L} = \int \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k - W(\partial_j u_i, x_j) \right) dV, \quad (1.1)$$

$$\mathfrak{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L} dt. \quad (1.2)$$

Здесь используются следующие обозначения, традиционные для теории упругости: x_k — декартовы координаты, u_k — компоненты вектора упругого перемещения, ∂_j — сокращенное обозначение оператора частного дифференцирования по координате x_j , ρ — плотность упругого тела, W — объемная плотность энергии упругой деформации (упругий потенциал), t_1, t_2 — границы временного интервала, за который рассчитывается действие.

При этом речь может идти о Лагранжиане и действии как всего тела, так и любой его части. Именно поэтому мы не будем в дальнейшем явно указывать

в обозначениях область интегрирования в (1.1).⁷¹

Плотность Лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k - W(\partial_j u_i, x_j)$$

в самом общем виде можно представить как⁷²

$$L = L(\dot{u}_i, \partial_j u_i, x_k, t).$$

Вариационное уравнение, выражающее виртуальный баланс действия при варьировании поля упругих перемещений

$$\delta \mathfrak{S} = - \int_{t_1}^{t_2} \int \rho F_k \delta u_k dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial} t_i \delta u_k dS dt, \quad (1.3)$$

где F_k — массовые силы, t_k — поверхностные силы, и поверхностное интегрирование, в том случае, если рассматривается действие для всего тела, следует ограничить той частью его поверхности, на которой заданы поверхностные нагрузки,⁷³ сводится к

$$\int_{t_1}^{t_2} \int (-\dot{p}_i + \partial_j \sigma_{ij} + \rho F_i) \delta u_i dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial} (t_i - \sigma_{ji} n_j) \delta u_i dS dt = 0, \quad (1.4)$$

где, в свою очередь, физический импульс p_i и тензор напряжений σ_{ij} определяются формулами:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}, \quad \sigma_{ji} = - \frac{\partial L}{\partial (\partial_j u_i)}. \quad (1.5)$$

В силу произвольности вариаций δu_i внутри области интегрирования, из уравнения (1.4) получаем уравнение движения:

$$-\dot{p}_i + \partial_j \sigma_{ji} + \rho F_i = 0 \quad (1.6)$$

и, в случае незакрепленных на границе вариациях перемещений, также — естественное граничное условие:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j. \quad (1.7)$$

⁷¹Граница неспецифицированной области интегрирования (в данном случае — замкнутая поверхность в трехмерном пространстве) обозначается через ∂ .

⁷²Мы будем предполагать, что плотность Лагранжиана явно не зависит от самих перемещений, так как в противном случае нарушается традиционная для механики сплошных сред и теории упругости форма уравнения баланса импульса.

⁷³Если закрепить вариации поля перемещений на границе и полагать, что массовые силы отсутствуют (или обладают потенциалом, который следует добавить в качестве дополнительного слагаемого в выражение для плотности Лагранжиана), то правая часть вариационного уравнения обращается в нуль, т.е. выражает стационарность действия.

С помощью уравнения движения (1.6) нетрудно получить три классических уравнения баланса (импульса, энергии и момента импульса):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int p_i dV &= \int (\partial_j \sigma_{ji} + \rho F_i) dV = \\ &= \oint_{\partial} t_i dS + \int \rho F_i dV,\end{aligned}\quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int (\dot{u}_i p_i - L) dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k + W(\partial_j u_i, x_j) \right) dV \\ &= \oint_{\partial} t_i \dot{u}_i dS + \int \left(-\frac{\partial L}{\partial t} + \rho F_i \dot{u}_i \right) dV,\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int \varepsilon_{ijk} x_j p_k dV &= \int \rho \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \oint_{\partial} \varepsilon_{ijk} x_j T_k dS + \\ &+ \int \rho \varepsilon_{ijk} M_{jk} dV.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Тензор второго ранга

$$M_{jk} = \dot{u}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} + (\partial_s u_j) \frac{\partial L}{\partial (\partial_s u_k)} \quad (1.11)$$

симметричен (и соответствующее слагаемое исчезает), если плотность Лагранжиана инвариантна при поворотах упругого поля перемещений. Последнее справедливо для изотропного тела.

Действительно, при повороте поля перемещений

$$u'_i = R_{ij} u_j,$$

где R_{ij} — ортогональный тензор, плотность Лагранжиана изотропного тела не изменяется:

$$L(\dot{u}'_i, \partial_s u'_i, x_j, t) = L(\dot{u}_i, \partial_s u_i, x_j, t),$$

следовательно, плотность Лагранжиана должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R_{ij}} L(R_{ij} \dot{u}_j, R_{ij} \partial_s u_j, x_j, t) = 0$$

при ограничении

$$\phi_{sl} = R_{sk} R_{lk} - \delta_{sl} = 0.$$

Решая задачу на условный экстремум с помощью метода множителей Лагранжа, имеем (Λ^{lm} — неопределенные множители Лагранжа):

$$\frac{\partial L}{\partial R_{ij}} + \Lambda^{lm} \frac{\partial \phi_{lm}}{\partial R_{ij}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial R_{ij}} R_{kj} = -(\Lambda^{ik} + \Lambda^{ki}),$$

т.е. тензор

$$\frac{\partial L}{\partial R_{ij}} R_{kj}$$

симметричен.

Так как

$$\frac{\partial L}{\partial R_{ij}} R_{kj} = \left(\dot{u}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{u}'_i} + (\partial_s u_j) \frac{\partial L}{\partial (\partial_s u'_i)} \right) R_{kj} = M'_{ki},$$

где компоненты M'_{ki} построены по полю перемещений u'_i , то тензор M'_{ki} симметричен. Ясно, что $M'_{ki} = M_{ki}$, если $R_{ij} = \delta_{ij}$, и поэтому тензор M_{ki} также симметричен.

Заметим, что уравнение баланса энергии (1.9) приобретает традиционную форму, если плотность Лагранжиана явно не зависит от времени.

Инвариантность Лагранжиана изотропного тела относительно поворота вектора упругого перемещения означает, кроме того, что объемная плотность энергии деформации W зависит на самом деле не от девяти компонент градиента перемещений, а от шести компонент тензора деформации, который в приближении малых относительных удлинений и сдвигов есть просто симметричная часть градиента перемещений:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j).$$

Наконец, симметричность тензора M_{ki} , как известно, влечет симметрию тензора напряжений σ_{ji} .

Помимо трех классических законов сохранения (1.8)–(1.10) в теории упругости известны и другие нетривиальные законы сохранения, формулировка которых в квазистатическом приближении будет рассмотрена ниже.

3.2.2. Инвариантные интегралы теории упругости

Изложение этого круга вопросов читатель может найти в оригинальных статьях [242], [265], [297], [298], а также монографиях [195] (pp. 58-73), [284] (pp. 100-113). Инвариантные интегралы линейной теории упругости здесь не будут непосредственно выводиться из теоремы Нетер. Для понимания теории в принципе необходимо владеть исчислением вариаций для кратных интегралов с переменной областью интегрирования (см., например, [234]).

Мы начнем с рассмотрения линейно упругого изотропного тела. В этом случае Лагранжиан (в квазистатическом приближении) имеет вид:

$$\mathfrak{L} = - \int W(\varepsilon_{ij}) dV. \quad (2.1)$$

Плотность Лагранжиана L есть (с точностью до знака) объемная плотность энергии деформации W :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа для функционала \mathfrak{L} есть

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) = 0$$

и представляет собой уравнение упругого статического равновесия.

Будем варьировать не только вектор упругого перемещения, но и область интегрирования. Поэтому наряду с вариациями перемещений (так называемыми частичными вариациями)

$$\bar{\delta} u_i = u'_i(x_k) - u_i(x_k),$$

необходимо варьировать координаты

$$\delta x_i = x'_i - x_i.$$

Полная вариация перемещений

$$\delta u_i = u'_i(x'_k) - u_i(x_k),$$

обусловленная как изменением перемещения в данном месте, так и изменением положения самого места, очевидно, связана с частичной вариацией соотношением

$$\bar{\delta} u_i = \delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta x_k. \quad (2.2)$$

Варьируя Лагранжиан на основании формулы для вариации интегрального функционала с переменной областью интегрирования (см., например, [234], [211]), находим

$$-\delta \mathfrak{L} = \int \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{\delta} u_i dV + \int \frac{\partial}{\partial x_k} (W \delta x_k) dV,$$

или после ряда преобразований —

$$-\delta \mathfrak{L} = \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} \bar{\delta} u_i) dV + \oint_{\partial} W n_k \delta x_k dS. \quad (2.3)$$

Здесь уже учтены условия стационарности Лагранжиана:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik} = 0.$$

Воспользуемся далее формулой Остроградского—Гаусса и учтем соотношение (2.2), связывающее частичную и полную вариации перемещений. В результате формула (2.3) приобретает вид

$$-\delta\mathcal{L} = \oint_{\partial} \left(\sigma_{ik} \left(\delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \delta x_l \right) + W \delta x_k \right) n_k dS. \quad (2.4)$$

Из этой важной формулы, исходя из соображений инвариантности Лагранжиана любой части тела относительно однопараметрических групп преобразований, может быть выведен ряд инвариантных интегралов теории упругости и установлены новые нетривиальные законы сохранения.

В начале рассмотрим группу трансляций в пространстве, не подвергая при этом преобразованию упругие перемещения:

$$x'_i = x_i + \delta l_i, \quad \delta u_i = 0. \quad (2.5)$$

Направление и величина сдвига пространства определяется вектором δl_i .

Поскольку трансляция области интегрирования, очевидно, не изменяет величины Лагранжиана (что справедливо, если Лагранжиан не зависит явно от переменных x_i), то $\delta\mathcal{L} = 0$, следовательно, на основании (2.4) получим

$$\delta l_s \oint_{\partial} \left(-\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} + W \delta_{ks} \right) n_k dS = 0$$

для любой замкнутой поверхности, или в силу произвольности δl_s :

$$J_s = \oint_{\partial} n_k P_{ks} dS = 0, \quad (2.6)$$

где

$$P_{ks} = W \delta_{ks} - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_s} \quad (2.7)$$

есть тензор напряжений Эшелби.⁷⁴

Соответствующий закон сохранения:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

⁷⁴Напомним, что, согласно интерпретации Эшелби [221],

$$J_l = \oint_{\Sigma} n_k P_{kl} d\Sigma,$$

где Σ — замкнутая поверхность, охватывающая дефект, есть сила, действующая на дефект в упругой среде. Инвариантный интеграл J_l был открыт Эшелби в 1951 г. раньше, чем все остальные нетривиальные инварианты теории упругости. Тензор P_{ks} назывался в работах самого Эшелби тензором энергии—импульса. Ниже, в разделе 3.3, мы подробно рассмотрим применение этого инвариантного интеграла в нелинейной механике разрушения.

Рассмотрим группу преобразований бесконечно малого поворота пространства и вектора упругого перемещения:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + \varepsilon_{ijk} x_k \delta\omega_j, \\ \delta u_i &= \varepsilon_{ijk} u_k \delta\omega_j, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где вектор $\delta\omega_j$ определяет ось и малый угол поворота.

Поскольку Лагранжиан любой части изотропного упругого тела инвариантен относительно указанной группы преобразований, то $\delta\mathfrak{L} = 0$. Поэтому с помощью (2.4) можно заключить, что

$$\oint_{\partial} \varepsilon_{ijk} \left(\sigma_{js} n_s u_k - \sigma_{hl} n_l x_k \frac{\partial u_h}{\partial x_j} + W n_j x_k \right) dS = 0 \quad (2.10)$$

для любой замкнутой поверхности и, таким образом, вывести еще один инвариантный интеграл.

Ясно, что соотношение (2.10) можно также представить в форме

$$L_j = \oint_{\partial} n_k L_{kj} dS = 0, \quad (2.11)$$

где

$$L_{kj} = W \varepsilon_{kjh} x_h + \sigma_{ks} \left(\varepsilon_{sjh} u_h - \varepsilon_{ljh} x_h \frac{\partial u_s}{\partial x_l} \right). \quad (2.12)$$

Этот инвариантный интеграл пока не нашел широкого применения в теории упругости.

Соответствующий закон сохранения есть:

$$\nabla \cdot \mathbf{L} = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Наконец, рассмотрим группу преобразований

$$\begin{aligned} x'_i &= (1 + \delta\eta) x_i, \\ \delta u_i &= c u_i \delta\eta, \end{aligned} \quad (2.14)$$

действие которой сводится к изменению масштаба в пространстве и изменению длины вектора упругого перемещения.

Варьируя Лагранжиан (см. (2.4)), находим

$$-\delta\mathfrak{L} = \delta\eta \oint_{\partial} \left(-\sigma_{jk} \left(x_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - c u_j \right) + W x_k \right) n_k dS. \quad (2.15)$$

Действие группы (2.14), очевидно, изменяет величину Лагранжиана:

$$\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}',$$

однако можно подобрать значение параметра c так, чтобы Лагранжиан был инвариантен с точностью до малых, порядка высшего, чем $\delta\eta$:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + o(\delta\eta).$$

Действительно, строгая инвариантность Лагранжиана означает, что

$$WdV = W'dV',$$

или⁷⁵

$$(1 + c\delta\eta)^2(1 + \delta\eta) = 1.$$

Но это последнее равенство может быть удовлетворено с точностью до малых, порядка высшего, чем $\delta\eta$, если

$$2c + 1 = 0.$$

В этом случае также $\delta\mathcal{L} = 0$, и на основании (2.15) соответствующий инвариантный интеграл получается в форме:⁷⁶

$$\oint_{\partial} \left(-\sigma_{jk}n_k x_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \frac{1}{2}\sigma_{jk}n_k u_j + Wx_k n_k \right) dS = 0. \quad (2.16)$$

Заметим, что инвариантный интеграл этого последнего типа можно также представить в виде:

$$M = \oint_{\partial} n_k M_k dS = 0, \quad (2.17)$$

где

$$M_k = -\sigma_{jk} \left(x_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} - \frac{1}{2}u_j \right) + Wx_k. \quad (2.18)$$

Закон сохранения, соответствующий группе преобразований изменения масштаба, имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (2.19)$$

Таким образом могут быть выведены три нетривиальных инвариантных интеграла (2.6), (2.11), (2.17), которым соответствуют три нетривиальных дивергентных закона сохранения. Мы приводим также прямую инвариантную запись указанных интегралов:

$$\oint_{\partial} (W\mathbf{n} - \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}) dS = \mathbf{0},$$

⁷⁵С этого момента существенной становится размерность пространства, поскольку преобразование элемента объема $dV \rightarrow dV'$ зависит от размерности пространства.

⁷⁶Приведем также двумерный аналог:

$$\oint_{\partial} \left(-\sigma_{jk}n_k x_l \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + Wx_k n_k \right) ds = 0.$$

$$\oint_{\partial} [(W\mathbf{n} - \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \mathbf{t} \times \mathbf{u}] dS = \mathbf{0},$$

$$\oint_{\partial} \left[(W\mathbf{n} - \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \right] dS = 0,$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}).$$

В работах [297], [298] были найдены новые, не обнаруженные ранее симметрии уравнений теории упругости и соответствующие им законы сохранения.

Обобщение рассмотренных в этом разделе законов сохранения на общий нелинейный случай (в том числе с учетом динамического вклада в Лагранжиан) мы дадим несколько позже, предпослав этому необходимые сведения из общей теории поля.

3.2.3. Элементы теории поля

Ниже будут даны необходимые сведения (преимущественно формального плана) из современной теории поля, с помощью которых на единой основе могут быть получены уравнения поля, динамические инварианты поля (энергия, импульс, момент импульса) и инвариантные интегралы. Для понимания излагаемой ниже теории необходимо достаточно свободное владение исчислением вариаций (например, в рамках замечательного курса вариационного исчисления [234]). Компактное изложение имеется в [211] (см. pp. 260-264). Можно рекомендовать также монографию [284], pp. 96-115.

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия:

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (3.1)$$

где φ^k — упорядоченный массив физических полевых величин (или динамических переменных); X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты;⁷⁷ $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); $d^4 X$ — элемент объема; \mathcal{D} — область трехмерного пространства,⁷⁸ в пределах которой изменяются координаты X^1, X^2, X^3 ; t_1, t_2 — границы временного интервала.

⁷⁷Аналогия между пространством и временем была известна еще древним грекам. Аристотель включал время в число непрерывных величин наряду с линиями, поверхностями и телами. В современной физике равноправие пространственных координат и времени утверждалось в процессе становления теории относительности. Пространственно-временное многообразие — неотъемлемый элемент теории относительности. Геометрия пространства-времени как объект физической теории рассматривается, например, в [183], с. 457-472. С точки зрения классической механики сплошных сред переменные X^1, X^2, X^3 вполне аналогичны координатам Лагранжа, а оперирование с четырехмерным пространственно-временным многообразием исключительно удобно при описании динамических процессов в деформируемых средах.

⁷⁸В рамках классической нелинейной механики сплошных сред следует считать, что $\mathcal{D} = \mathcal{K}_R$ (\mathcal{K}_R — отсчетная конфигурация тела, деформацию которого обычно описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной), либо \mathcal{D} — подобласть \mathcal{K}_R .

Под d^4X мы понимаем "естественный" элемент объема

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4.$$

Поэтому \mathcal{L} — "естественная" плотность Лагранжиана. Лагранжиан предполагается локальным, т.е. его значение в точке X^β определяется значениями динамических переменных φ^k и конечного числа их частных производных по пространственно-временным координатам, вычисленных в той же самой точке.

Инвариантный элемент объема $d^4\tau$ пространственно-временного многообразия, параметризованного координатами \tilde{X}^β , определяется на основании

$$d^4\tau = \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{X}^1 d\tilde{X}^2 d\tilde{X}^3 d\tilde{X}^4,$$

где \tilde{g} — определитель (точнее, его абсолютная величина), составленный из метрических коэффициентов $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Поскольку метрика пространства-времени гиперболична, то обычно вместо $\sqrt{\tilde{g}}$ пишут $\sqrt{-\tilde{g}}$,⁷⁹ ибо в последнем случае величина под корнем будет положительной.

Итак, инвариант $\sqrt{-\tilde{g}} d\tilde{X}^1 d\tilde{X}^2 d\tilde{X}^3 d\tilde{X}^4$ — величина четырехмерного объема, измеренного в локальной координатной системе посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности. Инвариантный элемент объема следует отличать от "естественного" элемента объема $d^4\tilde{X} = d\tilde{X}^1 d\tilde{X}^2 d\tilde{X}^3 d\tilde{X}^4$, так как координатная система пространственно-временного многообразия может быть криволинейной, и в этом случае величина $\sqrt{-\tilde{g}}$ отлична от единицы.

При использовании криволинейной координатной системы в пространственно-временном многообразии функционал действия следует писать в форме

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) \sqrt{-g} d^4X.$$

Ясно поэтому, что часто характер координатной системы можно вообще не специфицировать, но тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не \mathcal{L} , а $\sqrt{-g}\mathcal{L}$, что и будет предполагаться в дальнейшем изложении, и мы, таким образом, возвращаемся к выражению действия в форме (3.1). Следует однако помнить, что \mathcal{L} в этом случае не будет плотностью по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия, но будет таковой по отношению к "естественному" элементу объема. Как уже отмечалось, величину \mathcal{L} можно поэтому называть "естественной" плотностью Лагранжиана.

Пространство-время является четырехмерным псевдоевклидовым пространством,⁸⁰ метрика которого задается знаконеопределенной квадратичной формой

$$ds^2 = \varepsilon_\beta (dX^\beta)^2 \quad (\beta = 1, 2, 3, 4),$$

⁷⁹Часто для краткости применяется также обозначение $\sqrt{}$ (см., например, [41], с. 39).

⁸⁰Геометрия псевдоевклидовых пространств и пространственно-временного многообразия в деталях изложена в книге: Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

где

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1.$$

Определенное подобным образом 4-пространство обычно называют пространством Минковского (Н. Minkowski).

В пространстве Минковского может быть с помощью замены $X^\beta \rightarrow \tilde{X}^\beta$ введена криволинейная координатная система; метрика в этом случае определяется как

$$ds^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{X}^\alpha d\tilde{X}^\beta.$$

Через ∂_β здесь и в дальнейшем обозначается оператор частного дифференцирования по пространственно-временным координатам X^β . Мы будем использовать этот оператор (вместо более удобной наблы Гамильтона ∇_β) с тем, чтобы изложение было выдержано в духе классического вариационного исчисления. Впрочем, все уравнения исчисления вариаций без труда представляются в прямой инвариантной записи, что позволяет сформулировать их в форме, инвариантной относительно преобразований пространственно-временных координат X^β . Прямая тензорная запись уравнений поля часто оказывается неудобной, так как она скрывает природу тензоров: при построении канонических тензоров теории поля заимствуются элементы как пространства-времени (греческий индекс), так и самих физических полей (латинский индекс).

Большинство современных физических теорий ограничивается градиентами первого порядка от полей φ^k .

Для классической механики сплошных сред физические поля φ^k — это закон движения (или деформирования) тела, представленный как зависимости координат Эйлера (т.е. координат в пространстве, которые выбираются наблюдателем для представления положений точек сплошной среды в процессе ее деформации) от координат Лагранжа (координаты Лагранжа, согласно традиционным представлениям механики сплошных сред, индивидуализируют точки континуума, являясь для каждой из них уникальной меткой⁸¹):

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, X^4).$$

Таким образом, в дальнейшем, интерпретируя развиваемую теорию в аспекте механики деформируемых сред, можно считать, что φ^k есть Эйлеравы координаты: $\varphi^k = x^k$.

В принципе деформацию сплошного тела можно описывать обратным отображением (так называемое обратное Лагранжево описание):

$$X^\beta = X^\beta(x^1, x^2, x^3, t).$$

Тогда роль физических полевых величин будут играть переменные Лагранжа. Ни одно из описаний — прямое Лагранжево и обратное Лагранжево — не имеет никаких преимуществ по сравнению с другим. Исторически сложилось так, что

⁸¹Различные представления деформации сплошного тела и теория тензоров конечных деформаций приводятся в известных монографиях [336], [88], [329]. Компактное изложение имеется в [137].

широкое распространение получило лишь прямое описание. И только в последнее время обратное описание стало проникать в работы по нелинейной теории упругости (см., например, монографию [284]).

Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона (или принцип наименьшего действия), который гласит, что поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль:

$$\delta \mathfrak{S} = 0. \quad (3.2)$$

Осознанное манипулирование с вариацией действия \mathfrak{S} подразумевает ясное и строгое определение различных видов варьирования как самих полей φ^k , так и пространственно-временных переменных X^β . Поэтому мы начнем с базовых понятий и определений.

Основным исходным элементом, необходимым для определения понятия вариации, является однопараметрическое семейство (группа) преобразований пространственно-временных координат и физических полей:

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k), \quad (3.3)$$

где

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$

причем

$$\mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, \mathcal{X}^\beta, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

В частности, можно вести речь только о преобразованиях пространственно-временных координат:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \varphi^k(X^\beta). \quad (3.4)$$

Величина ε — параметр группы, который может быть скалярным, векторным или тензорным.

Исключительный интерес представляют однопараметрические группы преобразований, которые не изменяют функционал действия (или изменение функционала действия является бесконечно малой величиной, порядка высшего чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Указанные группы обычно называют группами инвариантности функционала действия, а также абсолютными симметриями действия по Гамильтону (или просто — вариационными симметриями действия).

Если изменение функционала действия является бесконечно малой величиной, порядка более высокого чем ε , то говорят об инфинитезимальной инвариантности функционала действия под действием группы преобразований (3.3). Ясно, что инвариантность функционала действия влечет его инфинитезимальную инвариантность.

Следует обратить внимание на тот факт, что пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят в группу преобразований (3.3)

явно не симметрично, ибо закон преобразования (3.3) не допускает трансформацию переменных X^β , зависящую от полей φ^k . Впоследствии мы рассмотрим более широкий спектр преобразований с целью устранения указанной несимметричности.

Заметим, что инвариантность функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (3.3) означает, что⁸²

$$\tilde{\mathcal{L}} d^4 \tilde{X} = \mathcal{L} d^4 X,$$

где плотность Лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат \tilde{X}^β и физических полей $\tilde{\varphi}^k$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta),$$

должна совпадать с \mathcal{L} :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (3.5)$$

Ясно, что в результате преобразования группой (3.3), если только величина действия не изменяется, плотность Лагранжиана преобразуется (возможно, в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (3.3), с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε) как обычная скалярная плотность:

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (3.6)$$

Инвариантность функционала действия относительно группы преобразований (3.3) дополнительно к (3.6) означает еще, что выполняется (3.5), т.е.

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (3.7)$$

Инфинитезимальная инвариантность функционала действия (в отличие от абсолютной инвариантности, выражаемой соотношением 3.7) относительно группы преобразований (3.3) означает, что условие (3.7) выполняется с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε .

Условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия, к сожалению, не может быть выражено чисто как условие на "естественную" плотность Лагранжиана. Ниже условие инфинитезимальной инвариантности будет выражено как условие на вариации "естественной" плотности Лагранжиана и вариации пространственно-временных координат.

⁸²Или в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (3.3), приводимое ниже равенство должно удовлетворяться с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε .

Частичная (т.е. при неварьируемых пространственно-временных координатах X^β) вариация поля φ^k определяется как

$$\bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

Поскольку дифференцирования по пространственно-временным координатам и параметру ε перестановочны, операторы ∂_β и $\bar{\delta}$ также перестановочны:

$$\bar{\delta}\partial_\beta = \partial_\beta\bar{\delta}.$$

Вариациям физических полей φ^k , исчезающим как на границе пространственной области интегрирования, так и на границах временного интервала, отвечает вариация действия

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) \right\} d^4 X,$$

или

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right\} \bar{\delta}\varphi^k d^4 X. \quad (3.8)$$

Стационарность действия необходимо влечет уравнения Эйлера—Лагранжа (уравнения поля):

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} = 0. \quad (3.9)$$

Обобщение уравнений Эйлера—Лагранжа на тот случай, когда плотность Лагранжиана зависит от производных порядка выше первого, есть.⁸³

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0. \quad (3.10)$$

Оператор, определенный согласно (3.10), называется оператором Эйлера (или вариационной производной Лагранжиана). Вариационная производная Лагранжиана есть 1-ковариантный пространственный вектор.

Уравнения Эйлера—Лагранжа инвариантны относительно группы преобразований (3.4). Действительно, прямой расчет показывает, что⁸⁴

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} = \det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \tilde{\varphi}^k}.$$

Инвариантность оператора Эйлера относительно более широкой группы преобразований (см. ниже 6.2) рассмотрена, например, в [111], с. 323–327.

⁸³Мы не будем развивать далее теорию поля для Лагранжиана, зависящего от градиентов полевых величин φ^k , порядка выше первого. По поводу соответствующего обобщения см., например, [284], pp. 116, 117.

⁸⁴См., например, [75], с. 215, 216. Инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (3.4) при этом не требуется.

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (3.3) определены, как это следует ниже:

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0},$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= \left(\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\text{expl}} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \\ &+ \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\gamma, \varepsilon)}{\partial \tilde{X}^\lambda} \right) \Big|_{\tilde{X}^\gamma=X^\gamma, \varepsilon=0} \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\lambda(X^\mu, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Здесь мы используем обозначение вида

$$\left(\frac{\partial \Phi(\cdot, \cdot, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\text{expl}}$$

для производной функции $\Phi(\cdot, \cdot, \varepsilon)$ по аргументу, который выражает ее явную зависимость от той переменной, по которой осуществляется дифференцирование, т.е. для частной производной функции $\Phi(\cdot, \cdot, \varepsilon)$ по аргументу ε , считая при этом фиксированными все остальные аргументы даже несмотря на то, что они могут в свою очередь также зависеть от ε .

Полная и частичная вариации φ^k связаны соотношением

$$\delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha. \quad (3.11)$$

Как уже отмечалось, инфинитезимальная инвариантность функционала действия относительно группы преобразований (3.3) означает, что условие (3.7) выполняется с точностью до бесконечно малой величины, порядка высшего, чем ε . Так как

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) = 1 + \frac{\partial \delta X^\gamma}{\partial X^\gamma} + o(\varepsilon),$$

то условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \delta X^\gamma}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (3.12)$$

где $\delta \mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Полное варьирование действия (при условии, что "естественная" плотность Лагранжиана зависит от градиентов поля, порядка не выше первого) по пространственно-временным координатам X^β и физическим полям φ^k приводит к

следующему результату ([75], с. 246-248; [234], р. 176):

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta} (\mathcal{L}\delta X^\beta) \right\} d^4X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \bar{\delta}\varphi^k d^4X + \\ &+ \oint_{\partial} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} N_\beta dA,\end{aligned}\quad (3.13)$$

где N_β — единичная внешняя нормаль к трехмерной гиперповерхности, ограничивающей область интегрирования в четырехмерном пространственно-временном многообразии, dA — элемент площади указанной гиперповерхности.

Если функционал \mathfrak{S} инвариантен⁸⁵ относительно группы преобразований (3.3), то его первая вариация, соответствующая варьированию координат и полей по закону (3.3), очевидно, будет равна нулю.

Инфинитезимальный критерий инвариантности функционала действия (3.12) относительно группы преобразований (3.3) может быть заменено более слабым условием, следуя [190],

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial\delta X^\gamma}{\partial X^\gamma} = \varepsilon \frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma} \quad (3.14)$$

так, чтобы первая вариация действия, по-прежнему, обращалась в нуль. Здесь 1-контравариантный отсчетный вектор B^γ может зависеть от пространственно-временных координат и полей (включая и градиенты поля):

$$B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Группа преобразований (3.3) в этом случае называется дивергентной симметрией функционала действия (см. [111], с. 358).

Формула (3.13) остается справедливой и для более широкого класса преобразований, в которые пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят совершенно симметрично:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$

где, по-прежнему,

$$\mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, \tilde{X}^\beta, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Инвариантность функционала действия относительно обобщенных преобразований исследуется ниже, в разделах 3.2.6, 3.2.7.

⁸⁵Или, делая тем самым более общее предположение, — инфинитезимально инвариантен.

3.2.4. Теорема Нетер

Теорема Нетер (по поводу доказательства см. [75], с. 248-250; [234], pp. 176-178; [109], с. 377-386) устанавливает закон сохранения, соответствующий однопараметрической группе преобразований, не изменяющих функционала действия (или изменяющих его, но на бесконечно малую величину, порядка высшего, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Другими словами, инвариантность функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической группы преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

порождает некоторый дивергентный закон сохранения.⁸⁶

Требование инвариантности действия прежде всего выражает основные свойства пространства-времени, хотя отнюдь и не ограничивается лишь этими последними свойствами.

Априорно можно указать следующие преобразования пространства Минковского, относительно которых действие инвариантно, а уравнения поля ковариантны:

1. Трансляции начала координат (однородность 4-пространства-времени);
2. Вращения 4-пространства-времени, содержащие как обычные повороты в пространстве, так и преобразования Лоренца (Н. А. Lorentz) в собственном смысле этого слова (изотропия пространства и специальный принцип относительности);
3. Зеркальные отражения (инверсии) и обращение времени;
4. Произвольные точечные преобразования координат в пространстве Минковского, т.е. переход к криволинейным координатам (общий принцип относительности — отсутствие преимущественных систем отсчета).

Перечисленным преобразованиям, относительно которых уравнения поля ковариантны, соответствуют фундаментальные законы сохранения, имеющие смысл сохранения импульса, момента импульса и энергии (всего десять законов сохранения). Если удастся разыскать иные группы инвариантности функционала действия и получить дополнительный закон сохранения, то его принято называть нетривиальным.⁸⁷

Исходным пунктом рассуждений является полученная выше формула для полной вариации действия.

Поскольку физические полевые величины φ^k в любом случае обеспечивают

⁸⁶Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из вариационного принципа, излагается, например, в [45], с. 227-261. Дивергентный закон сохранения всегда имеет форму $\partial_\beta J^\beta = 0$, где J^β — пространственно-временной 4-вектор. Тривиальность закона сохранения означает, что уравнение $\partial_\beta J^\beta = 0$ удовлетворяется тождественно для любых физических полей φ^k .

⁸⁷Часто оказывается невозможным установить физический смысл нетривиальных законов сохранения. Что касается теории упругости, то уже не поддаются физической интерпретации законы сохранения, следующие из изотропии пространства и возможности преобразования масштаба координатных осей.

стационарность действия, то уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0$$

должны удовлетворяться и, следовательно, вариацию действия (3.13) можно вычислить в виде

$$\delta \mathfrak{S} = \oint_{\partial} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta} \varphi^k + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\} N_\beta dA, \quad (4.1)$$

или, учитывая связь (3.11) между частичной и полной вариацией поля φ^k , —

$$\delta \mathfrak{S} = \oint_{\partial} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta \varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\} N_\beta dA. \quad (4.2)$$

Вводя четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta \varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\}, \quad (4.3)$$

вариацию действия можно также представить в форме

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \oint_{\partial} J^\beta N_\beta dA. \quad (4.4)$$

Не составляет труда получить для вектора J^β вместо (4.3) следующее выражение:

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta \varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta X^\alpha \right\}. \quad (4.5)$$

Воспользуемся теперь предположением об инвариантности функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (3.3)⁸⁸

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k).$$

Ясно, что

$$\delta \mathfrak{S} = 0$$

и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \quad (4.6)$$

Теорема Нетер в принципе не может дать более общего закона сохранения, чем (4.6), где четырехмерный вектор J^β удобно представить в форме

$$-J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \delta \varphi^k + P_{\cdot \alpha}^{\beta \cdot} \delta X^\alpha \right\}, \quad (4.7)$$

⁸⁸Достаточно, однако, предположить, что функционал действия не изменяет своей величины с точностью до малых порядка высшего, чем ε .

обозначив через $S_{\cdot k}^{\beta\cdot}$ и $P_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot}$ противоположные величины коэффициентов при вариациях $\delta\varphi^k$ и δX^α соответственно.

Таким образом, поток 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве-времени, равен нулю:

$$\oint_{\partial} J^\beta N_\beta dA = 0.$$

Из каждого такого соотношения может быть получен инвариант поля, существующего в неограниченной среде, не изменяющий своего значения с течением времени. Действительно, рассмотрим четырехмерную область в форме цилиндра, основания которого $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ есть гиперплоскости, перпендикулярные оси времени. Поток 4-вектора J^β через границу этой области равен нулю. Если физические поля достаточно быстро затухают на бесконечности, то, удаляя боковую поверхность цилиндра в бесконечность, находим, что

$$\int_{X^4=C_1} J^\beta N_\beta d^3X + \int_{X^4=C_2} J^\beta N_\beta d^3X = 0.$$

Поскольку на гиперплоскостях $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ компоненты нормали $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ и соответственно $N_4 = -1$, $N_4 = 1$,

$$\int_{X^4=C_1} J^4 d^3X = \int_{X^4=C_2} J^4 d^3X,$$

т.е. интеграл по неограниченному пространству

$$\int J^4 d^3X$$

не зависит от времени.

Ясно, что полученный только что результат обобщается на случай произвольной гиперповерхности в пространстве Минковского

$$X^4 = X^4(X^1, X^2, X^3),$$

края которой уходят в бесконечно удаленную точку: интеграл

$$\int_{X^4=X^4(X^1, X^2, X^3)} J^\beta N_\beta dA \quad (4.8)$$

не зависит от формы указанной гиперповерхности.

Компоненты вектора J^β , очевидно, без проблем вычисляются по формуле (4.3), если известна однопараметрическая группа инвариантности функционала

действия:⁸⁹

$$J^\beta = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\mu, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \times \\ \times \left[\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\alpha(X^\mu, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \right], \quad (4.9)$$

где

$$\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left(\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\text{expl}} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \\ + \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\gamma, \varepsilon)}{\partial \tilde{X}^\lambda} \right) \Big|_{\tilde{X}^\gamma = X^\gamma, \varepsilon=0} \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\lambda(X^\mu, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}.$$

3.2.5. Основные группы инвариантности функционала действия

Мы рассмотрим две основные группы инвариантности Гамильтонова действия и формулировку соответствующих законов сохранения. Изложение в формальном плане будет в основном опираться на материал, представленный в [234], [77]. Законы сохранения для статического упругого поля, следующие из теоремы Нетер, обсуждаются также в [111], с. 355-358.

Зафиксируем четыре-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства-времени вдоль α -оси:

$$X^\beta \rightarrow \tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \delta_\alpha^\beta. \quad (5.1)$$

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия, очевидно, инвариантен относительно группы трансляций пространства-времени, если плотность Лагранжиана явно не зависит от координат X^β , следовательно, для направления α 4-вектор $J_{(\alpha)}^\beta = T_{\cdot\alpha}^\beta$, где

$$T_{\cdot\alpha}^\beta = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (5.2)$$

и канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства-времени, есть:

$$\partial_\beta T_{\cdot\alpha}^\beta = 0. \quad (5.3)$$

Полученный канонический закон сохранения может быть найден также с помощью следующего рассуждения. Если Лагранжиан явно не зависит от пространственно-временных координат X^β , то, вычисляя полную поизводную, находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^s)} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \frac{\partial \varphi^s}{\partial X^\gamma}$$

⁸⁹Т.е. известны функциональные зависимости

$\mathcal{X}^\beta(\cdot, \cdot), \Phi^k(\cdot, \cdot, \cdot).$

и заменяя в этом уравнении производную Лагранжиана по физической полевой величине согласно уравнениям Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)} \right),$$

откуда немедленно получаем

$$\frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\gamma - (\partial_\beta \varphi^j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)} \right) = 0.$$

Заметим, что тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ не симметричен, однако само его выражение (5.2), обеспечивающее выполнение закона сохранения (5.3), не уникально: трансформируя тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ по формуле

$$T_{\alpha}^{\beta\cdot} + \partial_\gamma T'^{\gamma\beta\cdot}_{\alpha},$$

где тензор $T'^{\gamma\beta\cdot}_{\alpha}$ антисимметричен при перестановке контравариантных индексов

$$T'^{\gamma\beta\cdot}_{\alpha} = -T'^{\beta\gamma\cdot}_{\alpha},$$

также получаем закон сохранения

$$\partial_\beta (T_{\alpha}^{\beta\cdot} + \partial_\gamma T'^{\gamma\beta\cdot}_{\alpha}) = 0.$$

Указанную трансформацию тензора $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ можно использовать для построения симметричного тензора, для которого будет справедлив закон сохранения вида (5.3).

Если плотность Лагранжиана зависит явно от пространственно-временных координат X^β , то свойство инвариантности потока 4-вектора $J_{(\alpha)}^\beta$ нарушается:

$$\partial_\beta T_{\alpha}^{\beta\cdot} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}}. \quad (5.4)$$

Для доказательства достаточно заметить, что, с одной стороны,

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int \partial_\beta J_{(\alpha)}^\beta d^4 X, \quad (5.5)$$

а с другой — непосредственное вычисление вариации действия приводит к

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} d^4 X. \quad (5.6)$$

Сравнивая (5.5) и (5.6), приходим к (5.4).

Компоненты канонического 4-тензора $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ имеют размерность плотности энергии.⁹⁰ Тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ часто называют тензором энергии—импульса (см., например, [77], с. 105-109, 345-349), поскольку канонические уравнения баланса энергии ($\alpha = 4$) и импульса являются непосредственным следствием канонического закона сохранения (ср. с уравнениями (2.19) и (2.18) из раздела 3.1.2):

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{\Gamma} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{\text{expl}}, \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} - \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{f}^{\text{inh}}, \quad (5.8)$$

где

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}).$$

Действительно, чтобы, например, вывести уравнение (5.8), заметим сначала, что три первых уравнения (5.4) можно представить как

$$\partial_4 T_{\alpha}^{4\cdot} - \partial_{\beta} P_{\alpha}^{\beta\cdot} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

где $P_{\alpha}^{\beta\cdot} = -T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) — тензор напряжений Эшелби, определенный в разделе 3.1.2 согласно (2.21). Затем преобразуем последнее уравнение к виду

$$-\rho_{\mathbf{R}} \partial_4 (v_k \partial_{\alpha} x^k) - \partial_{\beta} P_{\alpha}^{\beta\cdot} = f_{\alpha}^{\text{inh}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

обозначая при этом

$$v^k = \partial_4 \varphi^k,$$

что означает, что скорость есть 1-контравариантный пространственный вектор, и на основании определения (2.26) раздела 3.1.2 —

$$f_{\alpha}^{\text{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание далее, что (см. уравнение (2.20) того же раздела 3.1.2)

$$-\mathcal{P}_{\alpha} = \rho_{\mathbf{R}} v_k \partial_{\alpha} \varphi^k, \quad (5.9)$$

приходим к каноническому уравнению баланса импульса

$$\partial_t \mathcal{P}_{\alpha} - \partial_{\beta} P_{\alpha}^{\beta\cdot} = f_{\alpha}^{\text{inh}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Уравнение (5.9) ясно указывает на то, что канонический импульс — 1-ковариантный отсчетный вектор. Это уравнение можно также представить в виде

$$\mathcal{P}_{\alpha} = \rho_{\mathbf{R}} v_{\alpha},$$

⁹⁰Этот тензор называется каноническим тензором энергии ([92], с. 143, 144). Обратим внимание читателя на тот факт, что, согласно определению канонического тензора энергии, его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 1-ковариантное.

где

$$v_\alpha = -v_k \partial_\alpha \varphi^k$$

есть вектор материальной скорости, который в силу определения представляет собой 1-ковариантный отсчетный вектор.⁹¹

Опираясь на результаты, изложенные в 3.2.4, заключаем, что 1-ковариантный отсчетный вектор

$$P_\beta = - \int_{X^4=X^4(X^1, X^2, X^3)} T_{\beta}^{\gamma} N_\gamma dA$$

не зависит от координаты X^4 . Этот вектор обычно называют полным 4-импульсом поля (или волновым импульсом поля).

Определяя "естественную" плотность функции Гамильтона как

$$\mathcal{H} = (\partial_4 \varphi^j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^j)} - \mathcal{L}, \quad (5.10)$$

для компоненты P_4 полного 4-импульса поля находим

$$P_4 = \int_{X^4=\text{const}} \mathcal{H} d^3 X, \quad (5.11)$$

т.е. эта компонента представляет собой полную энергию поля и, поскольку значение интеграла не зависит от положения гиперповерхности $X^4 = \text{const}$, полная энергия поля сохраняется. Здесь $d^3 X$ — "естественный" элемент объема трехмерного пространства

На основании (5.10) можно заключить, что

$$T_{\cdot 4}^4 = -\mathcal{H}.$$

Рассмотрим далее группу бесконечно малых вращений пространственно-временного многообразия X^β . Функционал действия должен быть инвариантен относительно этой группы преобразований.

Поворот прямоугольной системы координат в 4-пространстве Минковского порождает некоторый псевдоортогональный оператор $\mathbf{\Lambda}$, представляемый псевдоортогональной матрицей. Признак псевдоортогональности оператора выражается соотношением:

$$\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E},$$

или

$$\Lambda_{\nu\alpha} g^{\alpha\lambda} \Lambda_{\mu\lambda} = g_{\nu\mu}.$$

Псевдоединичный оператор \mathbf{E} в прямоугольной системе координат пространства Минковского имеет компоненты (по α не суммировать)

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

⁹¹Не следует путать компоненты v^k и v_α , представляющие различные векторы — пространственную и материальную скорости соответственно.

Итак, конечный поворот пространственно-временного многообразия может быть задан псевдоортогональным тензором второго ранга:⁹²

$$X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma = \Lambda_{\nu}^{\gamma} X^\nu.$$

Повороты 4-пространства Минковского образуют группу по умножению,⁹³ зависящую от шести независимых вещественных параметров.

Бесконечно малое вращение пространства Минковского можно задать преобразованиями

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta + \sum_{\alpha=1}^4 \omega_{\alpha}^{\beta} X^\alpha, \quad (5.12)$$

где

$$\omega_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\gamma} \omega^{\beta\gamma}, \quad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$$

есть антисимметричный 4-тензор, компоненты которого выступают как параметры группы.

Двенадцать величин $\omega^{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) связаны соотношениями $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых.

Ясно, что вариации пространственно-временных координат вычисляются как

$$\delta X^\beta = \sum_{\alpha=1}^4 \omega_{\alpha}^{\beta} X^\alpha$$

или

$$\delta X^\beta = \sum_{\gamma < \alpha} \omega^{\gamma\alpha} (g_{\alpha\lambda} X^\lambda \delta_{\gamma}^{\beta} - g_{\gamma\mu} X^\mu \delta_{\alpha}^{\beta}).$$

Будем считать, что группа Лоренца действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы трактуем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и не действует на физические поля φ^k (координатное представление которых осуществляется в Эйлеровой системе координат). Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^β в виде

$$J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} [(\partial_\alpha \varphi^s) g_{\gamma\lambda} X^\lambda - (\partial_\gamma \varphi^s) g_{\alpha\mu} X^\mu] + \mathcal{L} (g_{\alpha\lambda} X^\lambda \delta_{\gamma}^{\beta} - g_{\gamma\mu} X^\mu \delta_{\alpha}^{\beta}). \quad (5.13)$$

Определим далее тензор третьего ранга $M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot}$ формулами

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = J^{\beta(\gamma\alpha)}. \quad (5.14)$$

Тензор $M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot}$ называется тензором момента количества движения. Он антисимметричен по индексам γ, α . Заметим, что каноническое определение тензора

⁹²Теория псевдоортогональных тензоров второго ранга в многомерном псевдоевклидовом пространстве изложена, например, в уже цитированной выше книге: Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

⁹³Эта группа называется группой Лоренца.

момента количества движения указывает также и на его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 2-ковариантное.

Заметим, что тензор момента количества движения выражается через тензор энергии—импульса по формуле

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot} = g_{\alpha\lambda} X^\lambda T_{\gamma}^{\beta\cdot} - g_{\gamma\mu} X^\mu T_{\alpha}^{\beta\cdot}. \quad (5.15)$$

Соответствующий группе бесконечно малых вращений пространства-времени закон сохранения есть

$$\partial_\beta M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot} = 0. \quad (5.16)$$

Группа Лоренца может действовать также и на физические поля φ^k :

$$\tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\gamma) = \varphi^k(X^\gamma) + \sum_{\alpha, s \neq \beta} S_{\cdot s, \beta}^{k\cdot, \alpha} \omega_{\alpha}^{\beta\cdot} \varphi^s(X^\gamma), \quad (5.17)$$

где тензор четвертого ранга $S_{\cdot s, \beta}^{k\cdot, \alpha}$ преобразует антисимметричные тензоры второго ранга снова в антисимметричные.

Вычисляя вариации φ^k , получаем

$$\delta\varphi^k = \sum_{\alpha, s \neq \beta} S_{\cdot s, \beta}^{k\cdot, \alpha} \omega_{\alpha}^{\beta\cdot} \varphi^s(X^\gamma).$$

В этом случае 4-вектор J^β находится в виде

$$-J^{\beta(\gamma\alpha)} = g_{\gamma\mu} X^\mu T_{\alpha}^{\beta\cdot} - g_{\alpha\lambda} X^\lambda T_{\gamma}^{\beta\cdot} - \sum_{k, s} S_{\cdot s, \gamma\alpha}^{k\cdot, \cdot} \varphi^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}. \quad (5.18)$$

Величины

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot} = J^{\beta(\gamma\alpha)}$$

образуют тензор третьего ранга, антисимметричный по индексам γ, α . Тензор $M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot}$ также называется тензором момента количества движения.

Соответствующий закон сохранения также имеет форму, аналогичную (5.16):

$$\partial_\beta M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot} = 0.$$

3.2.6. Обобщенные группы преобразований. Стандартные, внутренние и внешние вариации

Как было отмечено выше, пространственно-временные координаты и физические поля входят в группу преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

несимметрично.

С целью восстановления симметрии расширим определение однопараметрической группы, допуская преобразования вида:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon), \quad (6.1)$$

где, по-прежнему,

$$\mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, \tilde{X}^\beta, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Здесь пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^s уже симметрично входят в закон преобразования.⁹⁴

Ясно, что определяемая подобным образом однопараметрическая группа порождает попутно преобразование пространственно-временной 4-области. Действительно, подставляя формулу

$$\tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon)$$

в

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon),$$

получим уравнение

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\Phi^s(\varphi^k(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon), X^\gamma, \varepsilon),$$

неявно определяющее зависимость

$$\tilde{X}^\beta = \tilde{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon).$$

Подставив это последнее уравнение в

$$\tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$

получим соотношение

$$\tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon),$$

на основании которого преобразованные физические поля $\tilde{\varphi}^k$ могут быть представлены (правда, уже с помощью иных функций $\Phi^k(\cdot, \cdot, \cdot)$, чего мы не отражаем

⁹⁴Можно построить математическое представление упругого поля с помощью так называемого обратного описания деформации тела, развитого в работах Маженна (G. A. Maugin), которые подытожены в монографии [284] (см. также обзорную статью [285]). Обратное описание деформации сплошной среды и соответствующая вариационная формулировка нелинейной теории упругости (когда действие для упругого тела представлено на основе Эйлера описания и варьированию подвергается обратное отображение $X^\beta = X^\beta(x^k, t)$) неожиданно оказываются удобными для исследования сингулярного упругого поля и позволяют, в частности, с иных позиций взглянуть на энергетические соотношения нелинейной механики разрушения. Сам автор этого подхода называет обратное описание деформации описанием Пиола (G. Piola) и отмечает, что обратная вариационная формулировка в сущности совпадает с использованной Пиола еще в XIX в. [304] (затем забытой и никогда на деле не применявшейся). Ясно, что и два традиционных способа описания деформации сплошного тела (в духе Лагранжа и Эйлера), и возможность расширения понятия группы инвариантности функционала действия и обобщенного варьирования — следствия универсального принципа двойственности и полной равноправности отсчетной и актуальной конфигураций тела в состоянии его деформации, пронизывающих механику деформируемых тел как единую теорию.

в обозначениях) через исходные — φ^k и пространственно-временные координаты X^β . Подобное перепредставление ведет также к перепредставлению новых пространственно-временных координат \tilde{X}^β :

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

В итоге вместо преобразований вида (6.1) достаточно рассмотреть группу преобразований

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon). \quad (6.2)$$

Это позволяет менять ролями зависимые и независимые переменные (или в физической терминологии — пространственно-временные координаты и поля), не меняя вариационной природы всей полевой теории.

Действие

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) d^4 X$$

в результате обобщенного преобразования

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

трансформируется в

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}} \times [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X},$$

где

$$\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta)$$

есть преобразование плотности Лагранжиана.

Если

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta)$$

и кроме того⁹⁵

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S},$$

то функционал действия инвариантен относительно обобщенной группы преобразований (6.1) и для оценки изменения действия в результате применения обобщенной группы преобразований имеет место формула

$$o(\varepsilon) = \tilde{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S} = \delta \mathfrak{S} + o(\varepsilon),$$

т.е. первая вариация действия равна нулю.

Прежде чем вычислять первую вариацию действия, получим ряд необходимых для дальнейшего изложения формул.

⁹⁵Приводимое ниже равенство, как и выше, может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$-(\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \right),$$

откуда сразу же следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \delta X^\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \right) \right] \delta X^\alpha + \\ &\quad + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\alpha \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \delta X^\alpha - (\partial_\alpha \varphi^s) (\partial_\beta \delta X^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\alpha + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \delta X^\alpha \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вычисляя первую вариацию действия согласно (3.13) и учитывая (6.3), находим

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\beta + \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta + \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} \right) \partial_\alpha (\delta X^\beta) \right\} d^4 X, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\bar{\delta} X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s(X^\gamma), X^\alpha, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \bar{\delta} \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), X^\beta, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$$

— частичные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s , связанные с соответствующими полными вариациями соотношениями

$$\delta X^\beta = \bar{\delta} X^\beta + \frac{\partial X^\beta}{\partial \varphi^s} \delta \varphi^s, \quad \delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma, \quad (6.5)$$

формального различия между которыми (и способами варьирования которых) уже нет.⁹⁶

⁹⁶Иногда используется несколько другая терминология: например, в монографии [284] эти вариации называются соответственно Лагранжевой и Эйлеровой элементарными вариациями.

Дополнительно заметим, что с помощью соотношений (6.5) можно получить следующие формулы, связывающие частичные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s :

$$\bar{\delta}X^\beta + (\partial_s X^\beta)\bar{\delta}\varphi^s = 0, \quad \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma \varphi^k)\bar{\delta}X^\gamma = 0.$$

Если предположить, что частичные вариации полей φ^k и полные вариации пространственно-временных координат X^β исчезают на границе рассматриваемой 4-области, то очевидно полные вариации $\delta\varphi^k$ также обращаются в нуль на границе ∂ и, следовательно, последнюю формулу для вариации действия можно также представить в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \right) \delta\varphi^k + \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} - \partial_\alpha \left(\mathcal{L}\delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)} \right) \right) \delta X^\beta \right\} d^4X, \end{aligned}$$

или в следующей замечательной симметричной форме:

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta\cdot}) \right) \delta\varphi^k + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}) \right) \delta X^\beta \right\} d^4X, \quad (6.6)$$

где

$$-S_{\cdot k}^{\beta\cdot} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \quad (6.7)$$

$$-P_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \mathcal{L}\delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}. \quad (6.8)$$

Таким образом, можно ввести еще два канонических тензора с естественными 1-контравариантными и 1-ковариантными компонентами.⁹⁷

Следует еще раз подчеркнуть, что при выводе формулы (6.6) для вариации действия полные вариации пространственно-временных координат X^β и полей φ^k считались нулевыми на границе ∂ , для чего в свою очередь в силу соотношений (6.5) достаточно предполагать, что частичные вариации полей φ^k и полные вариации пространственно-временных координат X^β исчезают на границе ∂ .

Ясно также, что в применении к классической механике сплошных сред

$$S_{\cdot k}^{4\cdot} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)} = -\rho_R v_k \quad (v^k = \partial_t\varphi^k),$$

$$P_{\cdot\beta}^{4\cdot} = (\partial_\beta\varphi^k) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi^k)} = \rho_R v_k \partial_\beta\varphi^k \quad (\beta = 1, 2, 3),$$

$$P_{\cdot 4}^{4\cdot} = \mathcal{H},$$

⁹⁷Следует отметить, что канонический тензор $S_{\cdot k}^{\beta\cdot}$ 1-контравариантен по "отсчетному" индексу и 1-ковариантен по "пространственному".

где v^k — контравариантные компоненты Эйлеровой скорости, ρ_R — плотность среды в отсчетном состоянии, \mathcal{H} — ”естественная” плотность Гамильтониана, определенная согласно (5.10).

Заметим, что тензор $S_{\cdot k}^{\beta\cdot}$ ($\beta = 1, 2, 3$) аналогичен⁹⁸ отсчетному тензору напряжений (тензору напряжений Пиола—Кирхгофа)

$$\mathbf{S}^T = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{F}},$$

а тензор $P_{\cdot \beta}^{\alpha\cdot}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) — тензору напряжений Эшелби⁹⁹

$$\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}).$$

Для удобства приведем здесь известные из рациональной механики сплошных сред определения и соотношения: \mathbf{F} — градиент деформации,¹⁰⁰ $\mathbf{S}^T = J\mathbf{T}^T\mathbf{F}^{-T}$ — тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, $J = \det \mathbf{F}$, $\mathcal{L} = K - \psi$ — объемная (в расчете на единицу объема в отсчетной конфигурации) плотность Лагранжиана, представляющего собой разность кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца.

Обобщенное преобразование пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s :

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

естественно порождает три различных класса преобразований и три класса вариаций, к обсуждению которых мы и переходим.

Класс так называемых стандартных однопараметрических преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (X^\beta, \tilde{\varphi}^k),$$

где

$$\tilde{\varphi}^k = \varphi^k(X^\beta) + \varepsilon \psi^k(X^\beta)$$

и функции $\psi^k = \psi^k(X^\beta)$ исчезают на границе 4-области интегрирования, позволяет ввести стандартные вариации

$$\delta X^\beta = \bar{\delta} X^\beta = 0, \quad \delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k = \varepsilon \psi^k.$$

Опираясь на общую формулу вариации действия, нетрудно заметить, что

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta\cdot}) \right) \delta \varphi^k d^4 X \quad (6.9)$$

⁹⁸Под аналогией мы понимаем соответствие того или иного объекта традиционным определениям, известным из механики континуума.

⁹⁹Дополнительно заметим также, что

$$-P_{\cdot \alpha}^{\beta\cdot} = T_{\cdot \alpha}^{\beta\cdot},$$

где $T_{\cdot \alpha}^{\beta\cdot}$ — тензор энергии—импульса.

¹⁰⁰Градиент деформации в рамках классической теории поля определяется каноническим соотношением

$$F_{\cdot \beta}^{k\cdot} = \partial_\beta \varphi^k$$

и имеет 1-контравариантные пространственные и 1-ковариантные отсчетные естественные компоненты.

и на основании стационарности действия, в силу произвольности стандартных вариаций, — получить уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) = 0,$$

которые по-существу выражают баланс импульса при отсечном (т.е. в пространственно-временных координатах X^β) описании физических полей.

Рассмотрим далее преобразования вида ($k = 1, 2, 3$)

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (X^\beta, \tilde{\varphi}^k),$$

где

$$\tilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon \omega^k(\varphi^s, t).$$

Мы, по-прежнему, предполагаем, что функции $\omega^k(\varphi^s(X^\beta, t))$ исчезают на границе 4-области интегрирования ∂ .

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s принято в этом случае называть внешними вариациями:

$$\delta X^\beta = \bar{\delta} X^\beta = 0, \quad \delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k = \varepsilon \omega^k(\varphi^s, t).$$

Введем обозначения

$$x^k = \varphi^k, \quad x^4 = t$$

и будем трактовать x^k по аналогии с переменными Эйлера (пространственно-временные координаты X^β — переменные Лагранжа).

Для внешней вариации, выраженной через переменные Эйлера, зарезервируем обозначение:

$$\Delta \varphi^k = \varepsilon \omega^k(x^s, x^4). \quad (6.10)$$

Подсчитывая вариацию действия, находим¹⁰¹

$$\delta \mathfrak{Z} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) - \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} \right) \delta \varphi^k d^4 X, \\ (\beta = 1, 2, 3)$$

или

$$\delta \mathfrak{Z} = \varepsilon \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \varphi^k)} \right) \omega^k(\varphi^s, t) d^4 X = \\ = \varepsilon \int \left(J^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T_{\cdot k}^{l \cdot}) - J^{-1} \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} \right) \omega^k(x^s, x^4) d^4 x = \\ = \int \left(J^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T_{\cdot k}^{l \cdot}) - J^{-1} \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} \right) \Delta \varphi^k d^4 x, \quad (6.11)$$

¹⁰¹В приводимых ниже формулах следует различать операторы ∂_β и ∂_l : первый обозначает дифференцирование по пространственно-временным координатам X^β ($\beta = 1, 2, 3$), второй — по Эйлеровой координате x^l ($l = 1, 2, 3$). Греческий индекс всегда ассоциируется с пространственно-временными координатами и отсечным представлением векторных и тензорных полей, латинский — с Эйлеровыми координатами и актуальным (пространственным) представлением.

$$(l, k, s = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3)$$

где J — якобиан преобразования от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

$$J = \det(\partial_\beta x^s) \quad (\beta = 1, 2, 3),$$

$$T_{\cdot k}^l = J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) S_{\cdot k}^{\beta \cdot} = -J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (6.12)$$

Таким образом может быть найдено каноническое определение еще одного тензора — $T_{\cdot k}^l$. Ниже будет показано, что 1-контравариантный и 1-ковариантный пространственный канонический тензор $T_{\cdot k}^l$ есть тензор истинных напряжений (тензор напряжений Коши).

В силу произвольности выбора внешних вариаций $\Delta \varphi^k$ внутри 4-области интегрирования получим уравнение

$$-J^{-1} \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} + J^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + \partial_l T_{\cdot k}^l = 0, \quad (6.13)$$

выражающее баланс импульса в форме Эйлера. Действительно, так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} = \rho_R v_k, \quad \rho_R = \rho J,$$

то уравнение (6.13) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\rho \partial_t v_k = \partial_l T_{\cdot k}^l + |\partial_s X^\beta| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k},$$

или

$$\rho \partial_t v^k = \partial_l T^{lk}. \quad (6.14)$$

Здесь оператор ∂_t есть производная по времени при фиксированных первых трех координатах X^β , т.е. — Лагранжева (материальная) производная по времени. Следует также отметить, что в уравнении баланса импульса в форме Эйлера не следует пренебрегать слагаемым

$$|\partial_s X^\beta| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k},$$

поскольку как только пространственное описание ведется в криволинейной координатной сетке x^k , то, в частности, кинетическая энергия будет явным образом зависеть от переменных x^k , так как метрический тензор g_{ks} явно от них зависит.¹⁰²

Формулировка вариационного принципа стационарности действия для нелинейно упругого тела в переменных Эйлера и вывод уравнения баланса импульса из него на основе канонического определения тензора напряжений Коши приводятся в [23], с. 190-195.

¹⁰²Напомним также, что в выражение для "естественной" плотности Лагранжиана входит множитель \sqrt{g} .

На основании (6.14) нетрудно заключить, что тензор $T_{\cdot k}^{l\cdot}$ вполне аналогичен тензору истинных напряжений Коши.¹⁰³

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

Наконец, рассмотрим однопараметрическую группу преобразований

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \varphi^k),$$

где

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta + \varepsilon X'^\beta(X^\beta)$$

и функции

$$X'^\beta = X'^\beta(X^\beta)$$

исчезают на границе 4-области интегрирования.

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s принято в этом случае называть внутренними вариациями:

$$\delta X^\beta = \varepsilon X'^\beta(X^\beta), \quad \delta \varphi^k = 0.$$

Заметим, что для внутренних вариаций будут справедливы соотношения

$$\delta X^\beta = \bar{\delta} X^\beta, \quad \bar{\delta} \varphi^k = -\frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\gamma} \bar{\delta} X^\gamma.$$

Варьируя действие, находим

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}) \right) \delta X^\beta d^4 X.$$

Пользуясь произвольностью выбора внутренних вариаций внутри 4-области интегрирования, приходим к уравнениям Эйлера—Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}) = 0, \tag{6.15}$$

которые представляют собой по сути закон, найденный Эшелби [221].

¹⁰³Не следует отождествлять тензоры $T_{\cdot k}^{l\cdot}$ и $T_\alpha^{\beta\cdot}$, поскольку это — разные тензоры. Первый из них имеет естественное пространственное представление, а второй — отсчетное:

$$T_{\cdot \alpha}^{\beta \cdot} = T_\alpha^\beta = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T_{\cdot k}^{l\cdot} = -J^{-1} (\partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}.$$

В приведенных естественных выражениях "естественная" плотность Лагранжиана \mathcal{L} включает множитель \sqrt{g} .

3.2.7. Обобщенные группы инвариантности действия

Расширение класса однопараметрических преобразований позволяет установить еще более неочевидные законы сохранения.

Мы, по-прежнему, будем рассматривать обобщенные однопараметрические группы преобразований:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\tilde{\varphi}^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k(\tilde{X}^\beta, \varepsilon) = \Phi^k(\varphi^s(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon),$$

которые, как было показано в 3.2.6 (см. уравнения (6.2) указанного раздела), порождают также преобразования вида

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

Если функционал действия (для любой 4-области пространственно-временного многообразия) инвариантен относительно обобщенной однопараметрической группы преобразований

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S},$$

то такая группа, как указывалось выше, называется обобщенной группой инвариантности действия (или вариационной симметрией действия).¹⁰⁴

Обобщенная инвариантность функционала действия означает, что

$$\int_{\mathcal{D} \times [t_1, t_2]} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}} \times [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X},$$

где преобразование пространственно-временных координат

$$X^\beta \rightarrow \tilde{X}^\beta$$

определено неявно уравнением

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\Phi^s(\varphi^k(X^\gamma), \tilde{X}^\beta, \varepsilon), X^\gamma, \varepsilon).$$

Покажем, что каждая обобщенная группа инвариантности действия позволяет, при условии выполнения уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}) = 0, \quad (7.1)$$

сформулировать нетривиальный закон сохранения

$$\partial_\beta I^\beta = 0, \quad (7.2)$$

¹⁰⁴Достаточно, как всегда, предположить, что изменение действия имеет порядок более высокий, чем ε :

$$\tilde{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S} = o(\varepsilon).$$

где

$$I^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left(S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \delta \varphi^k + P_{\cdot \gamma}^{\beta \cdot} \delta X^\gamma \right). \quad (7.3)$$

Действительно, варьируя действие, находим (см. (6.4))

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\beta + \right. \\ &\quad \left. + \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) + \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} \right) \partial_\alpha (\delta X^\beta) \right\} d^4 X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k - S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta - P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \partial_\alpha (\delta X^\beta) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\beta + \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) \right\} d^4 X = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности 4-области интегрирования необходимо

$$\begin{aligned} (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^k} \delta X^\beta - \partial_\gamma ((\partial_\beta \varphi^k) S_{\cdot k}^{\gamma \cdot} \delta X^\beta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k - S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta - P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \partial_\alpha (\delta X^\beta) = 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \delta \varphi^k &= \bar{\delta} \varphi^k + (\partial_\beta \varphi^k) \delta X^\beta, \\ S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) &= \partial_\beta (S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \bar{\delta} \varphi^k) - (\bar{\delta} \varphi^k) (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}), \\ P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \partial_\alpha (\delta X^\beta) &= \partial_\alpha (P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \delta X^\beta) - (\delta X^\beta) (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}), \end{aligned}$$

уравнение (7.4) представим в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) \right) \delta \varphi^k + \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}) \right) \delta X^\beta - \\ - \partial_\beta (S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \bar{\delta} \varphi^k + P_{\cdot \gamma}^{\beta \cdot} \delta X^\gamma) - \partial_\beta ((\partial_\gamma \varphi^k) S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \delta X^\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если уравнения Эйлера—Лагранжа удовлетворяются, то можно сформулировать дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta (S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \delta \varphi^k + P_{\cdot \gamma}^{\beta \cdot} \delta X^\gamma) = 0. \quad (7.5)$$

Полученный результат,¹⁰⁵ кроме всего прочего, ясно указывает на то, что тензор напряжений Пиола—Кирхгофа и тензор напряжений Эшелби — основ-

¹⁰⁵Приведем также квазистатический аналог:

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{X}) = 0,$$

где, по-прежнему, \mathbf{S} — тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, \mathbf{P} — тензор напряжений Эшелби, и соответствующий инвариантный интеграл:

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{X}) d\mathcal{S} = \mathbf{0}$$

для любой замкнутой в отсчетной конфигурации поверхности \mathcal{S} , внутри которой упругое поле регулярно.

ные конструктивные элементы, необходимые для построения обобщенных законов сохранения.

Следует также отметить, что можно еще более расширить класс однопараметрических преобразований, допуская их зависимость также и от градиентов первого порядка (или более высоких порядков) физических полевых величин φ^k :

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha \varphi^k, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^l = \Phi^l(\varphi^s, \partial_\alpha \varphi^k, X^\gamma, \varepsilon).$$

Соответствующая теория приводится в книге [234]. Теория обобщенных симметрий для функционалов в деталях изложена также в [300].

3.2.8. Лагранжиан пустого пространства

Еще одно обобщение теории вариационных симметрий достигается путем аддитивной трансформации "естественной" плотности Лагранжиана

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}'$$

так, чтобы добавок

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)$$

не нарушал выполнения уравнений Эйлера—Лагранжа. Другими словами, добавление \mathcal{L}' к Лагранжиану \mathcal{L} не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий. Эта процедура часто называется калибровкой Лагранжиана. Лагранжианы \mathcal{L} и $\mathcal{L} + \mathcal{L}'$ оказываются физически эквивалентными.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta), \quad (8.1)$$

для которой уравнения Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0 \quad (8.2)$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k , называется Лагранжианом пустого пространства,¹⁰⁶ поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, "вмещающим" поля.

Понятие о Лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и нетривиальных законов сохранения. Теория Лагранжиана пустого пространства излагается, например, в [329] (pp. 224–226). Наше изложение следует [145].

¹⁰⁶Или нулевым Лагранжианом. Часто употребляется также термин "калибровочный Лагранжиан".

3.2.8А. Дивергентное представление нулевого Лагранжиана, регулярного в звездообразной области

Основной результат развиваемой теории состоит в том, что Лагранжиан пустого пространства (8.1) всегда представляется (при предположении о звездообразности области¹⁰⁷ изменения его аргументов) в форме полной дивергенции

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \frac{\partial \Phi^\alpha(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)}{\partial X^\alpha}. \quad (8.3)$$

Представимость Лагранжиана в форме полной дивергенции (8.3) является необходимым и достаточным условием того, чтобы он был нулевым. Достаточность проверяется прямым вычислением оператора Эйлера в применении к (8.3). Необходимость также без труда обосновывается. Мы приведем доказательство, существенно использующее звездообразную геометрию области определения Лагранжиана, следуя [111], с. 322, 323.

Предположим, что Лагранжиан

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

есть Лагранжиан пустого пространства, определенный и регулярный в некоторой области изменения аргументов $\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots$, звездообразной относительно нулевой точки.

Рассмотрим значения Лагранжиана на лучах, исходящих из нулевой точки. Для этого введем параметр ε , изменяющийся на отрезке $[0, 1]$. Пользуясь звездообразной геометрией области, можно заключить, что функция от ε

$$\mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

корректно определена и регулярна на отрезке $[0, 1]$.

Дифференцирование по параметру ε приводит к

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} \varphi^k + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) + \dots \end{aligned} \quad (8.4)$$

¹⁰⁷Область многомерного пространства называется звездообразной (или звездной (см. [177], с. 271; [59], с. 222)) относительно некоторой своей точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки. Понятие звездообразности области — обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему для поля P_γ , удовлетворяющего условиям совместности $\partial_\beta P_\gamma = \partial_\gamma P_\beta$, было справедливо заключение о том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint P_\gamma dX^\gamma = 0.$$

Требование о звездообразной форме области может быть несколько ослаблено (см., например, [177], с. 144-150). В частности речь может идти об областях, каждая точка которой достижима из некоторой фиксированной точки области по двузвенной ломанной, целиком расположенной внутри области: одно из звеньев ломанной всегда располагается в некоторой фиксированной гиперплоскости, а второе — перпендикулярно этой гиперплоскости.

Замечая, что

$$\begin{aligned} (\partial_\gamma \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \varphi^k)} \right), \\ (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \partial_\beta \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \\ &\quad - 2(\partial_\beta \varphi^k) \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) &= \partial_\beta \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta \partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \partial_\beta \left(2\varphi^k \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) + \\ &\quad + \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) \end{aligned}$$

или, вводя сокращенные обозначения для дифференциальных операторов

$$\partial_J = \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \dots, \quad (-\partial_J) = (-\partial_\alpha)(-\partial_\beta)(-\partial_\gamma) \dots,$$

$$J = (\alpha, \beta, \gamma, \dots),$$

находим формулу

$$(\partial_J \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_J \varphi^k)} \right) = \varphi^k (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_J \varphi^k)} \right) + \partial_\beta \Psi^\beta,$$

где Ψ^β — некоторое векторное поле, также зависящее от полей φ^k , их градиентов и пространственно-временных координат X^β .

Ясно, что оператор Эйлера (вариационная производная Лагранжиана \mathcal{L}) вычисляется в форме

$$\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \varphi^k} = (-\partial_J) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_J \varphi^k)} \right).$$

Для производной (8.4), следовательно, находим формулу

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\beta) &= \varphi^k \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \dots \right\} + \partial_\beta \Psi^\beta. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что \mathcal{L}' есть Лагранжиан пустого пространства, т.е. для любого поля φ^k его вариационная производная равна нулю, получим, интегрируя по ε на отрезке $[0, 1]$,

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) - \mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \tilde{\Psi}^\beta,$$

где

$$\tilde{\Psi}^\beta = \int_0^1 \Psi^\beta(\varepsilon\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\lambda) d\varepsilon.$$

Выбирая далее поле $\bar{\Psi}^\beta$ так, чтобы

$$\mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\alpha) = \partial_\beta \bar{\Psi}^\beta,$$

что заведомо возможно и многими способами,¹⁰⁸ и обозначая

$$\Phi^\beta = \tilde{\Psi}^\beta + \bar{\Psi}^\beta,$$

приходим к дивергентному представлению Лагранжиана пустого пространства:

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \Phi^\beta(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\lambda).$$

Плотность Лагранжиана в 4-пространстве-времени, таким образом, всегда определяется с точностью до аддитивной полной дивергенции 4-вектора, зависящего от переменных поля, включая и градиенты поля.¹⁰⁹ Поэтому приходится также учитывать то обстоятельство, что в результате подсчета указанная дивергенция на самом деле может зависеть от градиентов поля порядка более высокого, чем сам 4-вектор Φ^γ .

3.2.8Б. Вычисление нулевого Лагранжиана нелинейно упругого поля в трехмерном пространстве

Вычисление нулевого Лагранжиана, зависящего лишь от первых градиентов статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве, особенно интересно в связи с исследованием нелинейно упругого поля в деформируемом твердом теле.

Если размерность пространства X^β равна трем и $k = 1, 2, 3$, то Лагранжиан пустого пространства, зависящий от градиентов поля порядка не выше первого, всегда можно разложить в сумму

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, X^\beta) &= A(\varphi^k, X^\beta) + B_{k\cdot}^\beta(\varphi^k, X^\beta)\partial_\beta\varphi^k + \\ &+ C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta)J\partial_k X^\beta + D(\varphi^k, X^\beta)J, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где $A(\varphi^k, X^\beta)$, $B_{k\cdot}^\beta(\varphi^k, X^\beta)$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta)$, $D(\varphi^k, X^\beta)$ — некоторые поля, зависящие от пространственно-временных координат X^α и физических полей φ^k ,¹¹⁰ J — якобиан отображения $X^\beta \rightarrow x^k = \varphi^k$:

$$J = \det(\partial_\beta\varphi^k).$$

¹⁰⁸ Действительно, поле $\bar{\Psi}^\alpha$ по заданной дивергенции можно разыскивать в безвихревом виде. Для определения потенциала тогда имеется уравнение Пуассона, разрешимость которого гарантирована, если правая часть этого уравнения — непрерывная функция пространственно-временных координат X^β .

¹⁰⁹ Как следует из (8.3), естественное представление вектора Φ^γ — 1-контравариантное отсчетное.

¹¹⁰ Выражения для A , $B_{k\cdot}^\beta$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}$, D , как будет показано ниже, не могут быть выбраны произвольно.

Приведенное только что соотношение может быть переписано в прямую тензорную запись:

$$\mathcal{L}' = A + \text{tr}(\mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})) + J \text{tr}(\mathbf{C} \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})^{-1}) + JD, \quad (8.6)$$

где

$$(\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})_{\beta \cdot}^k = \partial_{\beta} \varphi^k.$$

Непосредственный расчет показывает, что полная дивергенция трехмерного векторного поля Φ^{γ} , зависящего от трех координат X^{β} , трех компонент поля φ^k и их градиентов порядка не выше первого, также будет зависеть от градиентов поля порядка не выше первого, только если

$$\begin{aligned} \Phi^{\gamma}(\varphi^k, \partial_{\beta} \varphi^k, X^{\beta}) &= L^{\gamma}(\varphi^s, X^{\beta}) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} (\partial_{\beta} \varphi^k) K_{k\lambda}(\varphi^s, X^{\beta}) + \\ &+ J(\partial_k X^{\gamma}) M^k(\varphi^s, X^{\beta}), \end{aligned} \quad (8.7)$$

где

$$L^{\gamma} = L^{\gamma}(\varphi^k, X^{\beta}), \quad K_{k\beta} = K_{k\beta}(\varphi^k, X^{\alpha}), \quad M^s = M^s(\varphi^k, X^{\beta})$$

— произвольные поля.

Прямая запись уравнения (8.7) есть:

$$\Phi = \mathbf{L} + ((\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{K})^{\times} + J(\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \boldsymbol{\varphi})^{-T} \cdot \mathbf{M},$$

где крестом (крест Гиббса (Gibbsian cross)) обозначается векторный инвариант тензора второго ранга: $(\mathbf{A}^{\times})^{\gamma} = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} A_{\beta\lambda}$.¹¹¹

С целью обоснования (8.7) вычислим полную дивергенцию поля $\Phi^{\gamma}(\varphi^k, \partial_{\beta} \varphi^k, X^{\beta})$ как

$$\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}} = \left(\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial \varphi^k} \right) (\partial_{\gamma} \varphi^k) + \left(\frac{\partial \Phi^{\gamma}}{\partial (\partial_{\beta} \varphi^k)} \right) \partial_{\gamma} (\partial_{\beta} \varphi^k). \quad (8.8)$$

Полная дивергенция не зависит от частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^1)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^3)^2},$$

только если

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8.9)$$

Но это означает, что компонента Φ^{β} не зависит от $\partial_{\beta} \varphi^k$ ($k = 1, 2, 3$).

Аналогично должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} &= 0, \end{aligned} \quad (8.10)$$

¹¹¹Заметим, что векторный инвариант диадного произведения двух векторов трехмерного пространства есть векторное произведение векторов, составляющих диаду:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{\times} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

чтобы была исключена зависимость от смешанных частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^2 \partial X^3}.$$

На основании (8.9), (8.10) можно заключить, что компоненты Φ^β выражаются через первые градиенты поля как

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= e_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + f_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= p_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_2 \varphi^{k''}) + q_k(\partial_1 \varphi^k) + s_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} &a_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \quad e_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \quad p_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta), \\ &b_k(\varphi^k, X^\beta), \quad f_k(\varphi^k, X^\beta), \quad q_k(\varphi^k, X^\beta), \\ &c_k(\varphi^k, X^\beta), \quad g_k(\varphi^k, X^\beta), \quad s_k(\varphi^k, X^\beta), \quad h^k(\varphi^k, X^\beta). \end{aligned}$$

Действительно, поскольку, например, компонента Φ^2 не зависит от частных производных $\partial_2 \varphi^k$, а Φ^3 — от $\partial_3 \varphi^k$, то два первых уравнения в (8.10) устанавливают, что Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_2 \varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_3 \varphi^k$, и, наоборот, Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_3 \varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_2 \varphi^k$. Учитывая еще, что компонента Φ^1 не зависит от градиентов $\partial_1 \varphi^k$, сразу же приходим к представлению (8.11) для Φ^1 .

Подставляя (8.11) в (8.10), находим, что для любых градиентов поля должны удовлетворяться соотношения

$$\begin{aligned} (e_{kk''} + a_{kk''})(\partial_3 \varphi^{k''}) + f_k + b_k &= 0, \\ (a_{k''k} + p_{k''k})(\partial_2 \varphi^{k''}) + c_k + q_k &= 0, \\ (e_{k'k} + p_{k'k})(\partial_1 \varphi^{k'}) + g_k + s_k &= 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} e_{kk'} &= -a_{kk'}, \quad p_{kk'} = -a_{k'k}, \quad a_{kk'} = -a_{k'k}; \\ f_k &= -b_k, \quad q_k = -c_k, \quad s_k = -g_k, \end{aligned}$$

пользуясь которыми формулы (8.11) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) - b_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_2 \varphi^{k''}) - c_k(\partial_1 \varphi^k) - g_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Вводя затем аксиальный вектор a^s , соответствующий антисимметричному тензору второго ранга a_{kj} согласно $2a^s = \varepsilon^{skj} a_{kj}$, получим

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a^3((\partial_2 \varphi^1)(\partial_3 \varphi^2) - (\partial_2 \varphi^2)(\partial_3 \varphi^1)) - a^2((\partial_2 \varphi^1)(\partial_3 \varphi^3) - (\partial_2 \varphi^3)(\partial_3 \varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_2 \varphi^2)(\partial_3 \varphi^3) - (\partial_2 \varphi^3)(\partial_3 \varphi^2)) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a^3((\partial_1 \varphi^1)(\partial_3 \varphi^2) - (\partial_1 \varphi^2)(\partial_3 \varphi^1)) + a^2((\partial_1 \varphi^1)(\partial_3 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_3 \varphi^1)) - \\ &\quad - a^1((\partial_1 \varphi^2)(\partial_3 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_3 \varphi^2)) - b_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a^3((\partial_1 \varphi^1)(\partial_2 \varphi^2) - (\partial_1 \varphi^2)(\partial_2 \varphi^1)) - a^2((\partial_1 \varphi^1)(\partial_2 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_2 \varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_1 \varphi^2)(\partial_2 \varphi^3) - (\partial_1 \varphi^3)(\partial_2 \varphi^2)) - c_k(\partial_1 \varphi^k) - g_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Наконец, учитывая, что

$$\left\| \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^1 & \partial_2 \varphi^1 & \partial_3 \varphi^1 \\ \partial_1 \varphi^2 & \partial_2 \varphi^2 & \partial_3 \varphi^2 \\ \partial_1 \varphi^3 & \partial_2 \varphi^3 & \partial_3 \varphi^3 \end{pmatrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{pmatrix} \partial_1 X^1 & \partial_2 X^1 & \partial_3 X^1 \\ \partial_1 X^2 & \partial_2 X^2 & \partial_3 X^2 \\ \partial_1 X^3 & \partial_2 X^3 & \partial_3 X^3 \end{pmatrix} \right\|,$$

т.е.

$$2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m),$$

или в развернутой записи

$$\begin{aligned} J\partial_1 X^1 &= (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ -J\partial_2 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ J\partial_3 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\ -J\partial_1 X^2 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ J\partial_2 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ -J\partial_3 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\ J\partial_1 X^3 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2), \\ -J\partial_2 X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1), \\ J\partial_3 X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1), \end{aligned}$$

и обозначая

$$h^\gamma = L^\gamma, \quad a^s = M^s, \quad b_k = K_{k3}, \quad c_k = -K_{k2}, \quad g_k = K_{k1},$$

формулы (8.14) сразу же приводятся к (8.7).

Как следует из проведенных рассуждений L^γ — контравариантный отсчетный вектор, M^s — аксиальный пространственный вектор, $K_{k\alpha}$ — 1-ковариантный пространственный и 1-ковариантный отсчетный тензор второго ранга.

Вычислим далее полную дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (8.7). Прежде всего находим

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \Phi^\gamma &= (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\gamma)(\partial_\gamma \varphi^k) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma K_{k\lambda})_{\text{expl}} + \\ &+ \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta \varphi^k)(\partial_\gamma \varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) + J(\partial_k X^\gamma)(\partial_\gamma M^k)_{\text{expl}} + \\ &+ \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)(\partial_\gamma \varphi^n). \end{aligned}$$

Здесь уже учтено, что

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) = 0,$$

и в силу

$$2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)$$

также равенство

$$\partial_\gamma (J\partial_k X^\gamma) = 0.$$

Замечая далее, что¹¹²

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}(\partial_\gamma \varphi^n)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m) &= J\varepsilon^{nlm}, \\ \varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm} &= 2\delta_k^n, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha \varphi^l)(\partial_\beta \varphi^m)(\partial_\gamma \varphi^n) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm}J(\partial_n M^k) = \\ &= J(\partial_k M^k). \end{aligned}$$

¹¹²Приводимые ниже формулы читатель может найти, например, в [90], с. 23, 24.

На основании (см., например, [90], с. 28)

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{rlk}\Delta_r^\lambda,$$

где Δ_r^λ — алгебраическое дополнение элемента $\partial_\lambda\varphi^r$ в определителе

$$\begin{vmatrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{vmatrix},$$

и учитывая

$$\Delta_r^\lambda = J(\partial_r X^\lambda),$$

имеем

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{rlk}J(\partial_r X^\lambda),$$

следовательно,

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) = \varepsilon^{klp}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta) = -\varepsilon^{kpl}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta),$$

что сразу же позволяет найти выражение (8.5) для Лагранжиана пустого пространства, причем поля A , $B_{k\cdot}^\beta$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}$, D , фигурирующие в этом представлении, определяются в следующем виде:

$$A(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial L^\gamma(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.15)$$

$$D(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial M^s(x^k, X^\beta)}{\partial x^s} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.16)$$

$$B_{k\cdot}^\beta(x^s, X^\beta) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\beta(x^s, X^\beta))_{\text{expl}}, \quad (8.17)$$

$$C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(x^s, X^\beta) = (\partial_\beta M^k(x^s, X^\gamma))_{\text{expl}} - \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.18)$$

Приведем также прямую запись соотношений (8.15)–(8.18):

$$A = \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L},$$

$$D = \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M},$$

$$\mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K} + (\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^T,$$

$$\mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M} - (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T$$

и необходимые для понимания формул определения дифференциальных операторов

$$\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L})_{\text{expl}}, \quad \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{M})_{\text{expl}},$$

$$\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K} = (\mathbf{K} \times \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, \quad (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^T)^T = (\mathbf{K}^T \times \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}^T,$$

$$\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L} = (\mathbf{L} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}}, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M} = (\mathbf{M} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})_{\text{expl}},$$

или в координатной записи

$$\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} = (\partial_{\gamma} L^{\gamma})_{\text{expl}}, \quad \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} = (\partial_k M^k)_{\text{expl}},$$

$$(\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K})_{k\cdot}^{\cdot\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^{\beta})}{\partial X^{\gamma}} \right)_{\text{expl}},$$

$$((\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}})_{\cdot\beta}^{k\cdot} = \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^{\gamma})}{\partial x^l} \right)_{\text{expl}},$$

$$((\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^{\text{T}})_{k\cdot}^{\cdot\gamma} = (\partial_k L^{\gamma})_{\text{expl}}, \quad (\text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M})_{\cdot\gamma}^{s\cdot} = (\partial_{\gamma} M^s)_{\text{expl}}.$$

В силу тождеств

$$\partial_k \partial_{\gamma} L^{\gamma} = \partial_{\gamma} \partial_k L^{\gamma},$$

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_s \partial_{\gamma} K_{k\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_{\gamma} \partial_s K_{k\alpha},$$

$$\partial_{\gamma} \partial_k M^k = \partial_s \partial_{\gamma} M^s$$

находим

$$\text{grad}_{\text{expl}} \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{L} = \text{Div}_{\text{expl}} (\text{grad}_{\text{expl}} \mathbf{L})^{\text{T}},$$

$$\text{rot}_{\text{expl}} (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{K})^{\text{T}} = (\text{Rot}_{\text{expl}} (\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}})^{\text{T}},$$

$$\text{Grad}_{\text{expl}} \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{M} = \text{div}_{\text{expl}} (\text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{M})^{\text{T}},$$

что приводит к соотношениям совместности¹¹³

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\text{expl}} A &= \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B}, \\ (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C})^{\text{T}} &= -\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{B}^{\text{T}}, \\ \text{Grad}_{\text{expl}} D &= \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^{\text{T}}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

где

$$\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}^{\text{T}})_{\text{expl}},$$

$$\text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^{\text{T}} = (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C})_{\text{expl}},$$

или для компонент

$$(\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B})_k = (\partial_{\alpha} B_{k\cdot}^{\alpha})_{\text{expl}},$$

$$(\text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^{\text{T}})_{\beta} = (\partial_k C_{\cdot\beta}^k)_{\text{expl}}.$$

Условия совместности (8.19) могут быть получены прямой подстановкой (8.5) в уравнения Эйлера—Лагранжа (8.2) и приравниванием нулю сумм коэффициентов при одинаковых степенях градиентов $\partial_{\beta} \varphi^k$.

3.2.8В. Вычисление нулевого Лагранжиана 4-мерного пространства-времени

¹¹³Соотношениям совместности необходимо должны удовлетворять поля A , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D в выражении (8.5) для Лагранжиана пустого трехмерного пространства.

Найдем выражение для Лагранжиана пустого пространства для случая, когда пространство-время четырехмерно, а число m физических полевых величин φ^k может быть произвольным. При этом будем считать, что Лагранжиан \mathcal{L}' и векторное поле Φ^γ в самом общем представлении Лагранжиана пустого пространства (8.3) зависят от градиентов полей φ^k порядка не выше первого.

Поскольку

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = \frac{\partial \Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}, \quad (8.20)$$

то, как и в трехмерном случае, необходимо исследовать условия, когда дивергенция в правой части не будет зависеть от вторых производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$.

Учитывая, во-первых, что в выражении для Лагранжиана пустого пространства \mathcal{L}' коэффициент при второй частной производной $(\partial_\beta \partial_\beta \varphi^k)$ (по β не суммировать) должен быть нулевым, можно заключить, что должны выполняться условия:

$$\frac{\partial \Phi^\beta}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0 \quad (\text{по } \beta \text{ не суммировать}),$$

т.е. компонента Φ^γ не зависит от $(\partial_\gamma \varphi^k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Во-вторых, Лагранжиан пустого пространства \mathcal{L}' не зависит от смешанных частных производных $(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^k)$ ($\alpha \neq \beta$) только при условии

$$\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial (\partial_\mu \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial (\partial_\lambda \varphi^k)} = 0 \quad (\mu \neq \lambda). \quad (8.21)$$

Положим $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ и, используя то обстоятельство, что Φ^{α_2} от производной $(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$ не зависит, получим, что Φ^{α_1} линейно зависит от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$, т.е.

$$\Phi^{\alpha_1} = a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2} + b^{\alpha_1} \quad (\text{по } \alpha_2, k_2 \text{ не суммировать}), \quad (8.22)$$

где коэффициенты $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} не зависят от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$.

Затем, подставляя выражение (8.22) для Φ^{α_1} в соотношение (8.21) при $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_3$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, получим, что $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} линейно зависят от производной $(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})$.

Продолжая рассуждения дальше, заключаем, что поле Φ^γ можно представить в виде многочлена по возрастающим степеням градиентов $\partial_\alpha \varphi^k$:

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma = & A^\gamma + B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + C_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ & + D_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \dots, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где коэффициенты A^γ , $B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$, $C_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$, $D_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ могут зависеть от X^β , φ^k , и не выписаны полиномиальные по градиентам слагаемые более высоких степеней.

Подставляя (8.23) в (8.21), получим

$$B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} = -B_{\cdot \cdot k_1}^{\alpha_1 \gamma \cdot},$$

т.е. коэффициенты $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по индексам γ, α_1 ; аналогично заключаем, что коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ, α_1 и γ, α_2 ; коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ, α_1 ; γ, α_2 ; γ, α_3 ; и т.д. для всех невыписанных в (8.23) коэффициентов.

Из антисимметричности коэффициентов $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ по индексам γ, α_1 и γ, α_2 получаются следующие равенства:

переставляя γ, α_1 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot};$$

переставляя α_1, α_2 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot};$$

переставляя γ, α_2 :

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot} = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}.$$

Откуда следует, что коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по паре греческих индексов α_1, α_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по любой паре греческих индексов,¹¹⁴ и все остальные коэффициенты в (8.23) также антисимметричны по любой паре греческих индексов.

Таким образом, для любого, отличного от нуля, коэффициента в (8.23) все греческие индексы должны быть различны, но у греческих индексов может быть всего четыре различных значения 1,2,3,4, и поэтому более четырех различных верхних индексов у коэффициентов в (8.23) быть не может, т.е. в разложении (8.23) невыписанные слагаемые на самом деле отсутствуют:

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma = A^\gamma + B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + \\ + D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Рассмотрим теперь индивидуальные суммы в (8.24). Переставляя в сумме

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})$$

у коэффициентов $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ индексы α_1, α_2 , находим:

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}),$$

и переименовывая по схеме $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_1, k_1 \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_1$ немые латинские и греческие индексы, приходим к следующим равенствам:

$$C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_2}) = -C_{\cdot\cdot k_1\cdot k_2}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}).$$

Следовательно, коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по паре латинских индексов k_1, k_2 .

¹¹⁴Последнее означает, что для коэффициентов $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ справедливо также следующее представление:

$$D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot} = D_{k_3k_2k_1}\varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1},$$

где $D_{k_3k_2k_1}$ — антисимметричный 3-ковариантный пространственный тензор.

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Резюмируя сказанное, имеем, что коэффициенты $B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}$ антисимметричны по греческим индексам, коэффициенты $C^{\gamma\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$, $D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре греческих и любой паре латинских индексов.

Вычисляя дивергенцию Φ^γ , после ряда преобразований получим выражение для Лагранжиана пустого пространства в случае 4-мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ & + \left(\frac{\partial C^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ & + \frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Последнее слагаемое в (8.25) в силу

$$D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = D_{k_3 k_2 k_1} \varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1}$$

и при условии, что число физических полевых величин также равно четырем, приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}) = \\ = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}) \varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial x^{k_4}} = \\ = J \varepsilon^{k_4 k_3 k_2 k_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial x^{k_4}}, \end{aligned}$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, X^3, X^4) \rightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

С целью оптимизации записи дальнейших рассуждений введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\ L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1} &= \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\ L^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1} &= \frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \\ L^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} &= \frac{\partial C^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \end{aligned}$$

$$L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = \frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}}$$

и представим Лагранжиан пустого 4-мерного пространственно-временного многообразия в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = A &+ L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ &+ L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ &+ L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Заметим, что в этом представлении нулевого Лагранжиана все коэффициенты могут быть антисимметризованы по нижним латинским индексам, поскольку, как нетрудно проверить, все они

$$L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \quad L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \quad L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$$

антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Формула (8.26), следовательно, может быть также записана в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = A &+ L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ &+ L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ &+ L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}), \end{aligned} \quad (8.27)$$

где квадратные скобки применяются для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам.

В дальнейшем можно считать, что

$$\begin{aligned} L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \\ L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \\ L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}. \end{aligned}$$

Подставляя (8.26) в уравнение Эйлера—Лагранжа (8.2) и приравнивая нулю последовательно суммы коэффициентов при одинаковых степенях градиентов полевых величин φ^k , можно получить условия совместности для коэффициентов в разложении (8.26).

Так, условие равенства нулю суммы коэффициентов при нулевой степени градиентов есть:

$$\frac{\partial A}{\partial x^{k_1}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (8.28)$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \quad (8.29)$$

Ясно, что это условие совместности тождественно удовлетворяется в силу

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} \right)_{\text{expl}}$$

и, поскольку тензор $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричен по верхним индексам,

$$\left(\frac{\partial^2 B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}}{\partial X^{\alpha_1} \partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = 0.$$

Следующим в ряду условий совместности будет

$$\frac{\partial L_{\cdot k_1}^{\alpha_1\cdot}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial L_{\cdot k_2}^{\alpha_1\cdot}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_1 \cdot k_2}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (8.30)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{k_2}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_2}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot\cdot k_1 \cdot k_2}^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot\cdot k_2}^{\gamma\alpha_1\cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Это условие тождественно удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования и антисимметрии тензора $C_{\cdot\cdot k_1 \cdot k_2}^{\gamma\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ по любой паре греческих индексов.

Используя, по-прежнему, квадратные скобки для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам, условие совместности (8.30) представим в форме

$$\frac{\partial L_{\cdot [k_1}^{\alpha_1\cdot}}{\partial x^{k_2]}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.32)$$

Аналогично могут быть найдены еще два условия совместности:

$$- \frac{\partial L_{\cdot [k_1 \cdot k_2}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_3]}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.33)$$

$$- \frac{\partial L_{\cdot [k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4]}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.34)$$

Приведем также необходимые для понимания формул (8.32)–(8.34) соотношения:

$$P_{k_1 k_2}^{\alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{[k_1}} = P_{[k_1 k_2]}^{\alpha_1} = \frac{1}{2}(P_{k_1 k_2}^{\alpha_1} - P_{k_2 k_1}^{\alpha_1});$$

$$P_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_3}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{[k_1}} = P_{[k_1 k_2 k_3]}^{\alpha_2 \alpha_1},$$

$$P_{[k_1 k_2 k_3]}^{\alpha_2 \alpha_1} = \frac{1}{3!}(P_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_1 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_2 k_1}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_3 k_2}^{\alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_3 k_1}^{\alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_1 k_2}^{\alpha_2 \alpha_1});$$

$$P_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{[k_1}} = P_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1},$$

$$\begin{aligned} P_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \frac{1}{4!} & (P_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_2 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_3 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_1 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_3 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_1 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + \\ & + P_{k_4 k_2 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_4 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_1 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_1 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_2 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_4 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - \\ & - P_{k_4 k_3 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_4 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_1 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_4 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_3 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_4 k_1 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + \\ & + P_{k_4 k_3 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_4 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_2 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_4 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_3 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_2 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}). \end{aligned}$$

3.2.8Г. Вычисление нулевого Лагранжиана пространства произвольной размерности

Приведенные в 3.2.8В рассуждения о форме Лагранжиана пустого пространства без труда обобщаются на случай произвольного числа пространственно-временных координат X^β ($\beta = 1, 2, \dots, n+1$): векторное поле Φ^γ определяется в виде

$$\begin{aligned} \Phi^\gamma = A^\gamma + A_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + A_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + \\ + A_{\cdot \cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}), \end{aligned} \quad (8.35)$$

где тензоры

$$A^\gamma(X^\beta, x^s), \quad A_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}(X^\beta, x^s), \quad A_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}(X^\beta, x^s), \quad A_{\cdot \cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}(X^\beta, x^s)$$

антисимметричны по любой паре латинских и любой паре греческих индексов.¹¹⁵

Вычисляя дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (8.35), находим выражение для Лагранжиана пустого пространства в случае $(n+1)$ -мерного

¹¹⁵Применительно к тензору $A_{\cdot \cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}$ антисимметричность по любой паре греческих индексов означает, что

$$A_{\cdot \cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot} = A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1},$$

где $A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}$ — антисимметричный n -ковариантный пространственный тензор.

пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\
 & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + \\
 & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_n}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) + \\
 & + \frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}).
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Здесь последнее слагаемое при условии, что число физических полевых величин в точности равно $n + 1$, может быть представлено в форме

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) = \\
 = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) \varepsilon^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} = \\
 = J \varepsilon^{k_{n+1} k_n k_{n-1} \dots k_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}},
 \end{aligned}$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, \dots, X^{n+1}) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$.

3.2.8Д. Нулевые Лагранжианы, инвариантные относительно сдвигов физических полей

Поставим далее задачу о разыскании наиболее общей формы Лагранжиана пустого пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых величин φ^s . Эта проблема особенно интересна в связи с представлением нелинейно упругого поля в поврежденной среде, когда Лагранжиан заведомо явно будет зависеть от материальных переменных X^β .

Сформулированная проблема сразу же решается в случае, когда число пространственно-временных координат X^β равно трем и имеется три полевых величины φ^s , которые в применении к нелинейной теории упругости мы, как обычно, отождествим с переменными Эйлера x^s .

Действительно, скалярные и тензорные поля $A, \mathbf{B}, \mathbf{C}, D$ в выражении (8.5) для Лагранжиана пустого трехмерного пространства необходимо должны удовлетворять соотношениям совместности (8.19)

$$\text{grad}_{\text{expl}} A = \text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B}, \quad (\text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C})^T = -\text{rot}_{\text{expl}} \mathbf{B}^T, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = \text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^T.$$

Учитывая, что $A, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ не зависят от переменных x^s , приходим к уравнениям

$$\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = 0,$$

из которых следует, что Лагранжиан пустого трехмерного пространства будет инвариантен относительно сдвигов Эйлеровых переменных x^s , только если $A = A(X^\beta)$, D есть некоторая постоянная, и найдутся 1-ковариантное пространственное 1-ковариантное отсчетное тензорное поле $E_{k\alpha} = E_{k\alpha}(X^\beta)$ и контравариантное пространственное векторное поле $A^k = A^k(X^\beta)$ такие, что

$$\mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}} \mathbf{E} = (\mathbf{E} \times \nabla_{\mathbf{X}})_{\text{expl}}, \quad \mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}} \mathbf{A} = (\mathbf{A} \otimes \nabla_{\mathbf{X}})_{\text{expl}}, \quad (8.37)$$

или в координатной записи —

$$B_{k\cdot}^{\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \frac{\partial E_{k\alpha}}{\partial X^\gamma}, \quad C_{\cdot\beta}^k = \partial_\beta A^k. \quad (8.38)$$

Таким образом, наиболее общая форма Лагранжиана пустого трехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов Эйлеровых переменных x^s , есть¹¹⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\partial_\beta \varphi^k, X^\beta) = & A(X^\lambda) + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \frac{\partial E_{k\alpha}(X^\lambda)}{\partial X^\gamma} \partial_\beta \varphi^k + \\ & + (\partial_\beta A^k(X^\lambda)) J \partial_k X^\beta + D_0 J. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Переходим к нахождению наиболее общей формы Лагранжиана пустого четырехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых величин φ^s .

Исходя из представления Лагранжиана (8.26) и учитывая условия совместности¹¹⁷

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \end{aligned} \quad (8.40)$$

сразу же заключаем относительно коэффициентов в разложении (8.26), что

$$\begin{aligned} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \varepsilon^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} M_{k_4 k_3 k_2 k_1}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

¹¹⁶Заметим, что тензор $E_{k\alpha}$ по существу совпадает с тензором $K_{k\alpha}$ в формуле (8.17).

¹¹⁷Коэффициент A в (8.26) может, очевидно, зависеть лишь от пространственно-временных координат X^β .

где все тензоры не зависят от полей φ^k ; $M_{\dots k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричен по верхним индексам; $M_{\dots k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричен по парам верхних индексов γ и α_2 , α_1 и α_2 ,¹¹⁸ и по паре нижних латинских индексов; $M_{\dots k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричен по паре верхних индексов γ и α_3 и любой паре верхних индексов, не содержащей индекс γ ,¹¹⁹ и по любой паре нижних латинских индексов; $M_{k_4 k_3 k_2 k_1}$ — постоянные величины, антисимметричные по любой паре нижних латинских индексов.

Полученные результаты позволяют вычислить конфигурационную силу f_λ^{inh} , обусловленную неоднородностью поля.

Если ограничиться силами, пропорциональными первым градиентам поля, то, поскольку

$$f_\lambda^{\text{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial X^\lambda} \right)_{\text{expl}},$$

для трех- и четырехмерного пространства соответственно имеем:

$$f_\lambda^{\text{inh}} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial^2 K_{k\alpha}}{\partial X^\gamma \partial X^\lambda},$$

$$f_\lambda^{\text{inh}} = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \frac{\partial^2 M_{\dots k_1}^{[\gamma\alpha_1] \cdot}}{\partial X^\gamma \partial X^\lambda},$$

причем все девять компонент $K_{k\alpha}$ независимы, а среди 64 компонент $M_{\dots k_1}^{[\gamma\alpha_1] \cdot}$ независимых лишь 24.

Квадратичные по градиентам поля конфигурационные силы вычисляются соответственно в форме

$$f_\lambda^{\text{inh}} = \frac{1}{2} (\partial_{\gamma\lambda}^2 A^k) \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{klm} (\partial_\alpha \varphi^l) (\partial_\beta \varphi^m),$$

$$f_\lambda^{\text{inh}} = (\partial_{\gamma\lambda}^2 M_{\dots [k_2\cdot k_1]}^{[\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1] \cdot}) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}).$$

3.3. Инвариантный J -интеграл Эшелби–Черепанова–Райса

3.3.1. Предварительные замечания и исторические сведения

Аппарат инвариантных интегралов нелинейной теории упругости в деталях рассматривался в разделе 3.2. Из них только один интеграл (2.6) нашел широкое применение в механике разрушения.

В этом разделе мы обсудим применение инвариантных интегралов в механике разрушения как с точки зрения их использования для анализа полей напряжений и перемещений у вершины трещины, так и в проблемах, связанных с формулировкой критериев, устанавливающих пределы докритического развития трещин. Подобное пристальное внимание к инвариантным интегралам объясняется тем, что они представляют собой одновременно и теоретическую

¹¹⁸И, следовательно, антисимметричен по индексам γ и α_1 .

¹¹⁹И, следовательно, антисимметричен по парам индексов γ и α_2 , γ и α_1 .

основу нелинейной механики разрушения, поскольку она в значительной мере базируется в формальном плане на аппарате инвариантных интегралов, которые по существу представляют собой инвариантную формулировку основных физических законов сохранения в виде интегралов по контуру или поверхности, не зависящих от пути интегрирования, и одновременно удобное аналитическое средство для решения большого количества прикладных задач механики разрушения.¹²⁰

Впервые инвариантные интегралы появились в классическом "Трактате об электричестве и магнетизме" Максвелла (J. C. Maxwell) в 1873 г. при определении напряжений в электростатическом поле.¹²¹ В статической линейной упругости аналогичные интегралы, используя метод Максвелла, ввел в 1951 г. Эшелби [221]. Фактически Эшелби использовал инвариантные интегралы для вычисления конфигурационной силы, действующей на упругую неоднородность эллипсоидальной формы.

Согласно Эшелби, сила f_k^{inh} , которая действует на дефект или включение в упругой среде, может быть вычислена с помощью не зависящего от пути интеграла

$$f_i^{\text{inh}} = \oint_{\Sigma} n_k P_{ki} d\Sigma,$$

где замкнутая поверхность Σ должна охватывать дефект или включение, P_{ki} — тензор напряжений Эшелби.

Эта же сила f_k^{inh} определяется также и через изменение глобальной энергии упругого поля (потенциальной энергии тела), обусловленное перемещением включения или развитием дефекта:

$$\delta \mathcal{E} = -f_k^{\text{inh}} \delta l_k,$$

где вектор δl_k определяет смещение центра дефекта.

Если упругое тело занимает объем V и ограничено внешней поверхностью S , то изменение потенциальной энергии определяется выражением

$$\delta \mathcal{E} = \int_V \delta W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_F} T_i^{\Gamma} \delta u_i dS,$$

где предполагается, что на части S_F поверхности заданы нагрузки T_i^{Γ} , а на оставшейся части заданы перемещения u_i^{Γ} ,

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl}$$

¹²⁰Справедливости ради необходимо отметить, что увлечение инвариантными интегралами часто приводит к их применению для решения проблем, когда заведомо можно утверждать о нарушении их инвариантности, что, естественно, ставит под сомнение достоверность полученных таким образом результатов.

¹²¹Дж. К. Максвелл. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. I. М.: Наука, 1989. 416 с. (т. I, с. 146-150). Речь идет о вычислении силы, действующей на электростатическую систему из-за наличия второй электростатической системы, в форме интеграла по поверхности, охватывающей всю первую систему, но ни одной части второй системы (уравнение (16) на стр. 148).

для упругой среды является однозначной функцией деформаций.

Данный анализ справедлив и для упругопластических тел, если используется деформационная теория пластичности и в процессе нагружения тела не происходит локальных разгрузок, в силу тождественности нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности при отсутствии разгрузки.

Ясно, что в силу теоремы Клапейрона (В. Р. Е. Clapeyron), для линейно упругого тела

$$\delta \mathcal{E} = -\frac{1}{2} \int_{S_F} T_i^\Gamma \delta u_i dS.$$

Изменение потенциальной энергии упругого тела с трещиной $\delta \mathcal{E}$ может быть выражено с помощью контурного интеграла (см., например, [63], с. 235, 236).

В 1968 г. Эшелби [186] также ввел силу, необходимую для распространения трещины, в форме интеграла, не зависящего от контура интегрирования. Этот интеграл вытекает из теории сил, действующих на дефекты в кристаллах, разработанной Эшелби на основе понятия тензора энергии—импульса [221]. В рамках механики разрушения эта теория модифицируется с тем, чтобы она могла быть использована для сплошной среды, содержащей дефекты и неоднородности, а не для кристаллов, содержащих дислокации.

Позднее инвариантный интеграл был выведен Гюнтером (W. Gunter) [242] с помощью теоремы Нетер (E. Noether) [296].

Как уже было отмечено, инвариантные интегралы в теории упругости появились впервые в работах Эшелби (1951 г.). Они были найдены с помощью специальной техники и вплоть до работы [242] (1962 г.) никак не связывались с вариационными симметриями энергетического функционала теории упругости. Обобщение инвариантных интегралов на динамический случай произошло еще позднее — в [186], [229], [175], [227], [187], [216].

Систематический вывод инвариантных интегралов теории упругости с помощью вариационной теоремы Нетер был дан в статье [265].

Наконец следует упомянуть работы [297], [298], [299], где большое количество нетривиальных законов сохранения было получено на базе теории обобщенных групповых симметрий.

Интенсивное применение J -интеграла в механике разрушения в качестве параметра, характеризующего напряженно-деформированное состояние трещины в упругопластических телах, восходит к 1968 г., когда инвариантный интеграл был сформулирован Райсом [313].

В 1967 г. Г. П. Черепанов [174] получил инвариантный Γ -интеграл механики

разрушения непосредственно из закона сохранения энергии:¹²²

$$\Gamma_1 = \int_C \left[\left(W(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k - H \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j \partial_1 u_i \right] ds,$$

где W — объемная плотность энергии упругой деформации, ось x_1 направлена вдоль трещины, u_i — перемещения, n_i — компоненты внешней единичной нормали к контуру C (C — контур, охватывающий вершину трещины),

$$H = \int_{x_1} \rho F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1.$$

Без потери общности контур C можно рассматривать как малую окружность с центром в вершине трещины [174] или узкий симметричный прямоугольник, вытянутый вперед вдоль линии трещины [201].

Величина Γ_1 и ее энергетический смысл могут быть найдены на основании результатов, изложенных в разделе 3.1.4, естественно, с поправкой на геометрическую линейность.

3.3.2. Вычисление потока энергии в вершину трещины

Поток энергии Γ_1 локально стационарного упругого поля в вершину распространяющейся с постоянной скоростью в направлении оси x_1 трещины может быть вычислен по формуле [175]:

$$\Gamma_1 = \int_C \left[\left(W(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - H \right) n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j \right] ds. \quad (2.1)$$

Если стягивать C в вершину трещины, то в пределе получается величина, в точности равная скорости освобождения упругой энергии поля (без ограничения локальной стационарности) при динамическом распространении трещины.¹²³ Так как край трещины представляет собой место стока энергии упругого поля, то возникает поток энергии в вершину трещины, величина которого в точности равна потере энергии поля за единицу времени. Поэтому расчет интеграла (2.1) особенно интересен для исчезающе малого контура C . Заметим, что поток энергии локально нестационарного динамического упругого поля в вершину распространяющейся трещины также может быть вычислен с помощью инвариантного интеграла (см. ниже формулу (3.16) раздела 3.3.3), гораздо более сложного, чем Γ_1 .

Можно показать, что формула (2.1) приобретает наиболее простой вид, если в качестве контура C взять узкий прямоугольный контур, вытянутый вдоль оси x_1 (рис. 20):

¹²²Подробный вывод приведенного ниже интеграла из закона сохранения энергии может быть найден в монографии [175]. Следует отметить, что речь об инвариантности этого интеграла можно вести только для

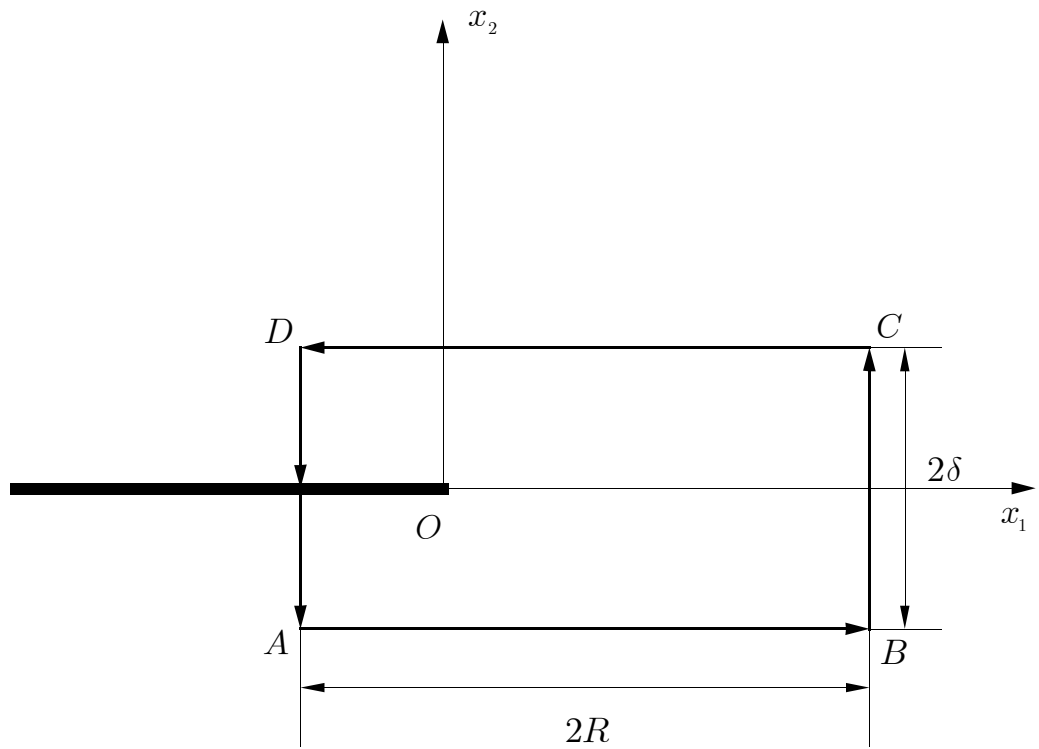


Рис. 20. Выбор контура интегрирования, охватывающего вершину трещины, при вычислении потока энергии

$$\Gamma_1 = - \lim_{\substack{C \\ (R \rightarrow 0, \delta/R \rightarrow 0)}} \int \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_j ds.$$

В случае трещины нормального отрыва эта формула представима в следующем виде

$$\Gamma_1 = -2 \lim_{\substack{AB \\ (R \rightarrow 0, \delta/R \rightarrow 0)}} \int \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1.$$

Пусть в линейно упругом теле распространяется трещина нормального отрыва и реализуется состояние плоской деформации. Предположим, что упругое поле у вершины трещины — локально стационарное (см. 2.2.2). На основании только что полученной формулы поток энергии в произвольную точку вершины

локально стационарного динамического упругого поля перед краем трещины, который распространяется с постоянной скоростью. Ниже, в разделе 3.3.3, мы дадим обоснование инвариантности интеграла Γ_1 и установим точные условия, ограничивающие справедливость вывода.

¹²³Доказательство этого факта будет дано ниже, в разделе 3.3.3.

трещины может быть вычислен как

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -2 \lim_{\substack{R \rightarrow 0, \\ \delta/R \rightarrow 0}} \int_{-R}^{+R} \sigma_{22} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=\delta} dx_1 = \\ &= \frac{K_I^2 (1 + \nu) M^2 \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} M^2}}{8E \left[\sqrt{(1 - M^2) \left(1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} M^2 \right)} - \left(1 - \frac{1}{2} M^2 \right)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $M = \dot{l}/c_2$.

Это соотношение выражает линейную плотность энергостока на крае движущейся трещины через локальный коэффициент интенсивности напряжений K_I [175]. В частности, в квазистатическом случае $M \rightarrow 0$ получается формула Ирвина

$$\Gamma_1 = \frac{(1 - \nu^2) K_I^2}{E}.$$

Знаменатель правой части уравнения (2.2) обращается в нуль при $M = M_R$, где M_R — корень уравнения Рэлея

$$R(M, \nu) = \sqrt{(1 - M^2) \left(1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} M^2 \right)} - \left(1 - \frac{1}{2} M^2 \right)^2 = 0. \quad (2.3)$$

Данное уравнение имеет единственный положительный корень, который меньше 1 и определяет скорость распространения волн по свободной поверхности упругого тела (см., например, [81]).

Ясно, что число Маха M не может превосходить M_R . Действительно, поток энергии Γ_1 в вершину трещины растет с увеличением скорости \dot{l} , обращаясь в бесконечность при $\dot{l} = c_R$. Если $M > M_R$, то поток энергии меняет знак. Но это означает, что вершина трещины должна излучать энергию для того, чтобы распространяться с такой скоростью. Это физически невозможно, поэтому скорость поверхностных волн Рэлея есть верхняя граница скорости распространения трещины нормального отрыва.

Проанализировав численно уравнение Рэлея, можно найти значения корня M_R в зависимости от значений коэффициента Пуассона $0 < \nu < 1/2$.

Для реальных материалов максимальная скорость распространения трещины ограничена некоторой величиной c^* , меньшей скорости поверхностных волн Рэлея c_R , так что $M < M_* < M_R$, и равной скорости, при которой происходит ветвление трещины, т.е. когда появляется два или больше направлений развития трещины.

Уравнение, определяющее значение M_* , легко получить следующим образом. Для этого, пользуясь формулами для компонент тензора напряжений в случае локально стационарного поля, приведенными в 2.2.3, нужно найти выражение для $\sigma_{\theta\theta}$ вблизи вершины трещины и исследовать эту функцию на предмет вычисления ее максимума по ориентациям.

Исследование функции угла $\sigma_{\theta\theta}$ показывает, что существует значение $M = M_*$ такое, что при $M < M_*$ максимум этой функции имеет место лишь при $\theta = 0$. При $M > M_*$ функция имеет два симметричных максимума при $\theta = \pm\theta_*$. В соответствии с теорией криволинейных трещин прямолинейное распространение трещины нормального отрыва при $M > M_*$ невозможно. Значение $M = M_*$ соответствует слиянию двух максимумов:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\theta = 0). \quad (2.4)$$

Это последнее уравнение может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}M^2\right) \left(1 + \frac{\nu M^2}{2 - 2\nu}\right) - \sqrt{(1 - M^2) \left(1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2\right)} + \\ & + \frac{3}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{2}M^2\right)^2 - \sqrt{(1 - M^2) \left(1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2\right)} \right] + \\ & + \frac{3}{8} \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}M^2\right)^2 \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2} - \sqrt{(1 - M^2)^3} \right] - \\ & - \sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2} \left(1 - \frac{1}{2}M^2\right) \left[\sqrt{1 - \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}M^2} - \sqrt{1 - M^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Необходимо отметить, что выражение (2.2) для потока энергии в вершину распространяющейся трещины остается справедливым и для упругого поля, которое не является локально стационарным, поскольку использованные для вычислений асимптотики формально пригодны и в случае общего динамического упругого поля (см. раздел 2.2.4). Правда, при установившемся распространении трещины величина динамического коэффициента интенсивности напряжений K_I будет неизменной. Обычно динамическое развитие трещины нельзя трактовать как установившееся ее распространение. При этом процесс развития трещины — самоускоряющийся, и поток энергии в вершину трещины возрастает с увеличением скорости. Если постоянная предельная скорость распространения трещины наблюдается на значительном интервале времени ее развития, то это явление можно объяснить только тем, что, начиная с некоторого значения скорости распространения трещины, величина энергозатрат, требуемых для ускорения развития трещины, превышает поток энергии Γ_1 в ее вершину.

3.3.3. Использование инвариантного J -интеграла для формулировки критерия распространения трещины

Для упругого тела с трещиной J -интеграл представляет собой с точностью до знака скорость изменения его потенциальной энергии при увеличении длины трещины (см. 2.3.1):

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = J, \quad (3.1)$$

где

$$J = \int_C \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds. \quad (3.2)$$

Ясно, что если в качестве контура взять окружность радиуса r с центром в вершине трещины и устремить r к нулю, то в подинтегральном выражении останется вклад лишь от сингулярных слагаемых в решении линейной задачи теории упругости для тела с трещиной. Сингулярные члены разложения напряжений у вершины трещины были приведены в 2.1.1.

Непосредственные вычисления с использованием этих сингулярных слагаемых дают:

$$J = \frac{\beta}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2, \quad (3.3)$$

где $\beta = 1$ для плоского напряженного состояния, $\beta = 1 - \nu^2$ для плоской деформации.

Последнее соотношение выражает связь между инвариантным J -интегралом и коэффициентами интенсивности напряжений и тем самым эквивалентность энергетического критерия хрупкого разрушения и силового критерия Ирвина.

Это соотношение можно считать справедливым для линейно упругих тел, а также для упругопластических тел в условиях маломасштабной пластичности, когда область пластического течения локализована в непосредственной окрестности вершины трещины.

Таким образом, можно сформулировать следующий критерий разрушения: трещина начнет распространяться, когда J -интеграл достигнет своего предельного значения J_c , являющегося характеристикой материала:

$$J(P, l, L, \dots) = J_c. \quad (3.4)$$

Величину J_c иногда называют упругопластической вязкостью разрушения.

Используя асимптотики напряжений и перемещений у криволинейного края трещины, приведенные в 2.1.3, можно вычислить компоненты J_k инвариантного интеграла

$$J_k = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} (W n_k - T_i \partial_k u_i) ds,$$

где γ^+ , γ^- — отрезки берегов трещины, заключенные между концами контура C и вершиной трещины,¹²⁴ относительно локального триэдра, связанного с краем трещины (см. рис. 6), для исчезающе малого контура C , расположенного в нормальной к краю трещины плоскости, и аналогично (3.3) получить:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2, \\ J_2 &= -\frac{1-\nu}{G} K_I K_{II}, \\ J_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

¹²⁴Мы используем составленный подобным образом контур интегрирования, чтобы учесть, в частности, тот случай, когда нагрузки прикладываются к берегам трещины. Составной контур $C+\gamma^++\gamma^-$ обходит против часовой стрелки так, что ограниченная им область остается все время слева.

Если тело подвергается динамическому нагружению, но сама трещина неподвижна, то на основании формулы (3.9) раздела 3.1.3 в линейном приближении малых деформаций можно заключить, что интеграл

$$\tilde{J}_k = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} (Wn_k - T_i \partial_k u_i) ds + \iint_S \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS, \quad (3.6)$$

где S — плоская область, ограниченная берегами трещины и контуром C , не зависит от выбора контура C . При этом значения инвариантного интеграла \tilde{J}_k выражаются через коэффициенты интенсивности напряжений по формулам, совершенно аналогичным (3.5), поскольку для неподвижной трещины величины \ddot{u}_i и $\partial_k u_i$ имеют порядки $O(r^{1/2})$ и $O(r^{-1/2})$ по расстоянию r от вершины трещины и, следовательно, двойной интеграл в (3.6) не является особенным и при стягивании контура C в вершину трещины не дает никакого вклада.

Рассмотрим динамическое нагружение и случай, когда трещина распространяется. Тогда член $\ddot{u}_i \partial_k u_i$ будет иметь порядок $O(r^{-2})$ по расстоянию от вершины трещины. Поэтому двойной интеграл в формуле (3.6) будет сингулярным и его следует понимать как предел интегралов вида

$$\iint_{S-\bar{S}} \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS$$

с малой исключенной областью \bar{S} , которая должна охватывать вершину трещины.

Мы, по-прежнему, будем рассматривать плоскость, нормальную краю распространяющейся трещины, и неподвижный контур C , охватывающий точку O края трещины — начало локальной естественной координатной системы, связанной с краем трещины. Обозначим

$$\tilde{J}_k = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} (Wn_k - T_i \partial_k u_i) ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS \quad (3.7)$$

и, пользуясь выражением (3.9) раздела 3.1.3 для конфигурационной (трещинодвижущей) силы с поправкой на малые деформации, введем инвариантный интеграл

$$J_k^* = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W - K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i \partial_k u_i) dS. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} J_k^* = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} (Wn_k - T_i \partial_k u_i) ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS - \\ - \lim_{\bar{C} \rightarrow O} \int_{\bar{C}} K n_k ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

или

$$J_k^* = \tilde{J}_k - \lim_{\bar{C} \rightarrow O} \int_{\bar{C}} K n_k ds. \quad (3.10)$$

Здесь \bar{C} — малый контур, окружающий точку O .

Будем стягивать контур C к \bar{C} , а последний — в точку O края трещины. С помощью асимптотик динамического поля у края трещины, рассмотренных выше, в разделе 2.2.2, и пригодных (см. раздел 2.2.4) для самого общего случая динамического упругого поля, можно показать, что за счет угловых распределений в главных членах асимптотик

$$\lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{\bar{S}} \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS = 0,$$

и, таким образом,

$$J_k^* = \lim_{\bar{C} \rightarrow O} \int_{\bar{C}} [(W - K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds. \quad (3.11)$$

Подставляя в последний интеграл асимптотики динамического поля у края трещины из раздела 2.2.2 и производя необходимые вычисления, находим

$$\begin{aligned} J_1^* &= \frac{1}{2G} [K_I^2 F_1(V) + K_{II}^2 F_2(V) + K_{III}^2 F_3(V)], \\ J_2^* &= -\frac{K_I K_{II}}{2G} F_4(V), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(V) &= \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{R^{*2}(V)} \left[4\beta_1 - \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{\beta_1} - 4 \frac{(\beta_1 - \beta_2)(1 + \beta_2^2)}{\sqrt{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}} \right], \\ F_2(V) &= \frac{\beta_2(1 - \beta_2^2)}{R^{*2}(V)} \left[4\beta_2 - \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{\beta_2} - 4 \frac{(\beta_2 - \beta_1)(1 + \beta_2^2)}{\sqrt{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}} \right], \\ F_3(V) &= \beta_2^{-2}, \\ F_4(V) &= \frac{4\beta_1\beta_2 + (1 + \beta_2^2)^2}{2R^{*2}(V)} \frac{(\beta_1^2 - \beta_2^2)(1 - \beta_2^2)}{\sqrt{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)}}. \end{aligned}$$

Величины β_1, β_2 были определены в разделе 2.2.2; V — скорость роста края трещины в направлении нормали; $R^*(V) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2$ — знаменатель Рэлея.

Рассмотрим далее вычисление скорости освобождения энергии динамического упругого поля при распространении трещины.

Предположим, что край трещины продвигается в соприкасающейся к его предшествующему положению плоскости с нормальной скоростью $\dot{l}_k = V\nu_k$, где $-\nu_k$ — компоненты единичного вектора главной нормали к краю трещины. Будем также сначала считать, что динамическое поле у вершины трещины — локально стационарное.

Для расчета скорости освобождения энергии воспользуемся уравнением (4.7) раздела 3.1.4 в приближении малых деформаций. Замечая, что в случае локально стационарного поля полная энергия поля в любой части тела у вершины трещины не изменяется, заключаем, что вклад второго слагаемого в правой части указанного уравнения в точности равен нулю. Поэтому сразу же можно заключить, что значение интеграла

$$G_k = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W + K)n_k - n_j \sigma_{ij} \partial_k u_i] ds \quad (3.13)$$

не зависит от выбора контура C . Следует напомнить, что в отличие от предыдущих рассмотрений, контур C расположен в нормальной к краю трещины плоскости и продвигается вслед за распространением края. Ясно также, что скорость освобождения энергии $G = \mathcal{D}/\dot{l}$ ($\dot{l}^2 = \dot{l}_k \dot{l}_k$) находится в виде

$$G = \nu_k G_k.$$

С помощью асимптотик локально стационарного динамического поля у края трещины, рассмотренных в разделе 2.2.2, можно вычислить инвариантный интеграл G_k в следующей форме:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2G} [K_I^2 A_1(V) + K_{II}^2 A_2(V) + K_{III}^2 A_3(V)], \\ G_2 &= -\frac{K_I K_{II}}{2G} A_4(V), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(V) &= \frac{\beta_1(1 - \beta_2^2)}{R^{*2}(V)}, \quad A_2(V) = \frac{\beta_2(1 - \beta_2^2)}{R^{*2}(V)}, \quad A_3(V) = \frac{1}{\beta_2}, \\ A_4(V) &= \frac{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_2^2)}{R^{*2}(V)} \left[\frac{[4\beta_1\beta_1 + (1 + \beta_2^2)^2](2 + \beta_1 + \beta_2)}{2\sqrt{(1 + \beta_1)^{-1}(1 + \beta_2)^{-1}}} - 2(1 + \beta_2^2) \right]. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к случаю произвольного (т.е. не обязательно локально стационарного) динамического упругого поля перед краем распространяющейся, возможно с переменной скоростью, трещины.

Рассмотрим инвариантный интеграл (3.8) и несколько преобразуем двойной интеграл в указанном соотношении сначала к виду

$$\begin{aligned} J_k^* &= \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W - K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} \rho \ddot{u}_i \partial_k u_i dS + \\ &\quad + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} \partial_k K dS, \end{aligned}$$

а затем —

$$J_k^* = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} [\rho \ddot{u}_i \partial_k u_i - \partial_k K] dS - \\ - \lim_{\bar{S} \rightarrow O} 2 \iint_{\bar{S}} \partial_k K dS.$$

Ясно, что тогда справедлива формула

$$J_k^* + \lim_{\bar{C} \rightarrow O} 2 \int_{\bar{C}} K n_k ds = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \\ + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} [\rho \ddot{u}_i \partial_k u_i - \partial_k K] dS.$$

На основании этого последнего соотношения и равенства (3.11), стягивая контур C к \bar{C} и оба контура — в точку O , заключаем, что

$$\lim_{\bar{C} \rightarrow O} \int_{\bar{C}} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds = \\ = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} [\rho \ddot{u}_i \partial_k u_i - \partial_k K] dS. \quad (3.15)$$

Этот фундаментальный результат устанавливает, что, во-первых, интеграл

$$J'_k = \int_{C+\gamma^++\gamma^-} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds + \lim_{\bar{S} \rightarrow O} \iint_{S-\bar{S}} [\rho \ddot{u}_i \partial_k u_i - \partial_k K] dS, \quad (3.16)$$

не зависит от выбора контура C , охватывающего точку O края трещины,¹²⁵ а, во-вторых, скорость освобождения энергии $G = \mathcal{D}/\dot{l}$ ($\dot{l}^2 = \dot{l}_k \dot{l}_k$), по-прежнему, вычисляется в форме $G = \nu_k G_k$, если величину G_k определить как (ср. с выражением (3.13) для локально стационарного поля)

$$G_k = \lim_{\bar{C} \rightarrow O} \int_{\bar{C}} [(W+K)n_k - T_i \partial_k u_i] ds. \quad (3.17)$$

Величины G_k , а следовательно и J'_k ,¹²⁶ можно вычислить через динамические коэффициенты интенсивности напряжений. Результат, естественно, совпадает с тем, что был установлен для локально стационарного поля (см. (3.14)).

¹²⁵Напомним, что C — плоский неподвижный контур, расположенный в нормальной к краю трещины плоскости и охватывающий точку O края трещины так, что в процессе своего распространения край трещины его не пересекает.

¹²⁶Поскольку выполняется равенство $G_k = J'_k$.

Выражение для скорости освобождения энергии динамического упругого поля через динамические коэффициенты интенсивности напряжений можно использовать для формулировки критерия страгивания трещины и вычисления скорости распространения трещины. Соответствующие примеры читатель найдет в монографиях [118], [119].

Заметим, что J -интеграл может быть вычислен экспериментально. Для этого выбирают надрезанный образец (l — глубина надреза), который нагружают растягивающей силой \bar{P} (\bar{P} — сила, отнесенная к толщине образца) так, что реализуется состояние **типа I**. Различают два типа испытаний.

В испытаниях первого типа увеличивают нагрузку \bar{P} и в момент подрастания трещины $l \rightarrow l + \Delta l$ перемещение в месте приложения нагрузки Δ удерживают постоянным $\Delta = \Delta_c$. Затем образец разгружают. Результатом испытания является диаграмма, изображенная на (рис. 21).

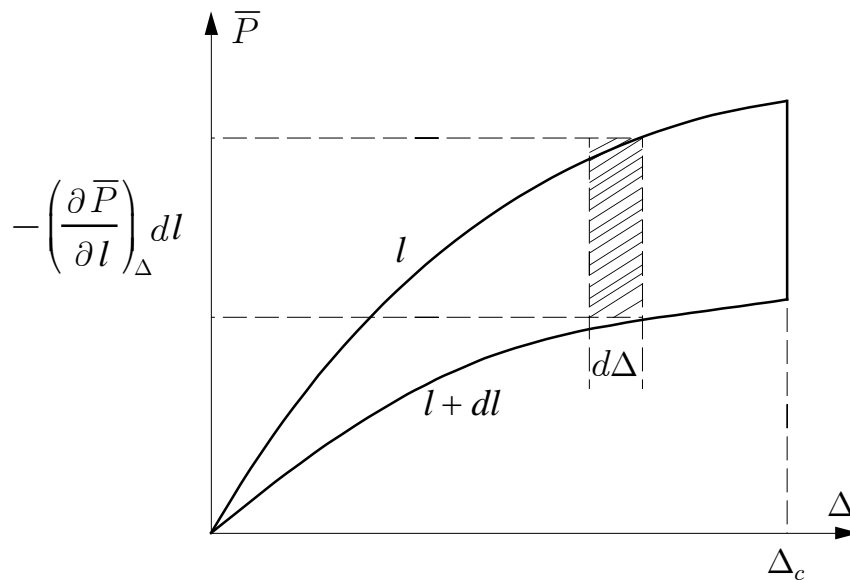


Рис. 21. Диаграмма для расчета инвариантного интеграла механики разрушения с помощью испытаний первого типа

Величина J -интеграла подсчитывается по формуле

$$J = - \int_0^{\Delta_c} \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial l} \right)_{\Delta} d\Delta. \quad (3.18)$$

В испытаниях второго типа совершается цикл нагружение—разгрузка, но в момент подрастания трещины удерживается постоянной нагрузка $\bar{P} = \bar{P}_c$. Типичная диаграмма для испытаний второго типа приведена на (рис. 22).

Величина J -интеграла в этом случае подсчитывается по формуле

$$J = \int_0^{\bar{P}_c} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial l} \right)_{\bar{P}} d\bar{P}. \quad (3.19)$$

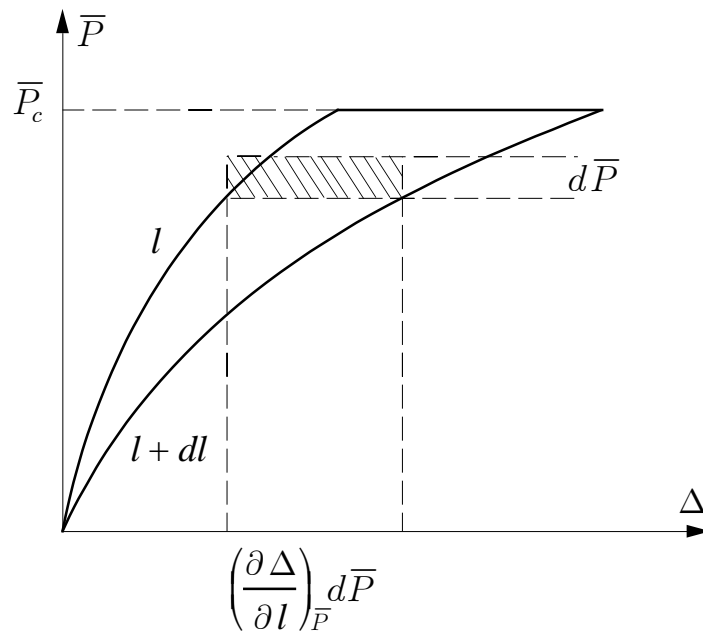


Рис. 22. Диаграмма для расчета инвариантного интеграла механики разрушения с помощью испытаний второго типа

К числу часто формулируемых критериев локального разрушения относится критерий критического раскрытия трещины [210], [340], [341],

$$\delta = \delta_c, \quad (3.20)$$

где δ_c — характерная константа материала при заданных внешних условиях.

Мы не будем останавливаться подробно на обсуждении этого критерия, отсылая читателя к соответствующей литературе.

Иногда критерий критического раскрытия трещины удастся сформулировать в терминах инвариантного J -интеграла.

Рассмотрим трещину нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния с узкой зоной Дагдейла локализации пластических деформаций, вытянутой вдоль линии трещины.

Если вычислить J -интеграл, выбрав в качестве контура интегрирования узкий прямоугольник, охватывающий пластическую зону, то можно показать, что

$$J = Y\delta, \quad (3.21)$$

где Y — предел текучести при растяжении, откуда следует эквивалентность двух критериев разрушения: критерия критического раскрытия трещины и критического значения J -интеграла.

После введения ставшего уже классическим J -интеграла и интенсивного приложения в механике разрушения энергетических методов и интегралов, не зависящих от пути интегрирования, было предложено целое множество других интегральных параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины и скорость ее роста [29].

Так обобщение инвариантного J -интеграла на случай линейной термоупругости приводится в [198].

Инвариантные интегралы для динамической деформации упругого тела, помещенного в электромагнитное поле, получены Г. П. Черепановым; их вывод приводится в книге [176], с. 273-278.

Голдмен (N. L. Goldman) и Хатчинсон (J. W. Hutchinson) [235] в 1975 г., Ландес (J. D. Landes) и Бегли (J. A. Begley) [272] в 1976 г., рассматривая установившуюся ползучесть, предложили новый параметр разрушения C^* . В условиях установившейся ползучести прослеживается полная аналогия с деформационной теорией пластичности. Основываясь на этой аналогии, Ландес и Бегли [272], Голдмен и Хатчинсон [235] определили величину C^* подобно тому, как в деформационной теории пластичности определяется J -интеграл:

$$C^* = \int_C W^* dx_2 - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1} ds, \quad (3.22)$$

где

$$W^* = \int_0^{\dot{\varepsilon}_{ij}} \sigma_{kl} d\dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (3.23)$$

3.3.4. Различные замечания и дополнения

1. Инвариантность J -интеграла в двумерном случае можно доказать прямым вычислением. Для доказательства инвариантности J -интеграла, т.е. его независимости от пути интегрирования, достаточно сравнить его значения на двух произвольных контурах, охватывающих вершину трещины. В качестве замкнутого контура интегрирования необходимо взять две произвольные кривые, охватывающие вершину трещины, и дополнить их участками берегов трещины, с тем чтобы результирующая кривая была замкнута, а область не содержала вершину трещины (рис. 23).

Затем к интегралу по составному контуру можно применить теорему Гаусса—Остроградского, поскольку внутри составного контура упругие поля регулярны, и установить, что

$$\oint_{\partial} \left(W n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds = 0.$$

Так как интегралы по отрезкам берегов трещины дают нулевой вклад, сразу приходим к выводу о независимости J -интеграла от выбора кривой, окружающей вершину трещины.

2. Предположим, что в объеме V упругого тела существует неоднородность или включение (полость, дислокация, трещина). Пусть Σ — замкнутая поверхность, охватывающая дефект. Внешнее упругое поле при наличии дефекта становится сингулярно возмущенным. Применяя доказанное в 3.2.2 равенство (2.6) к области, ограниченной замкнутыми поверхностями Σ, Σ' (см. рис. 24), находим:

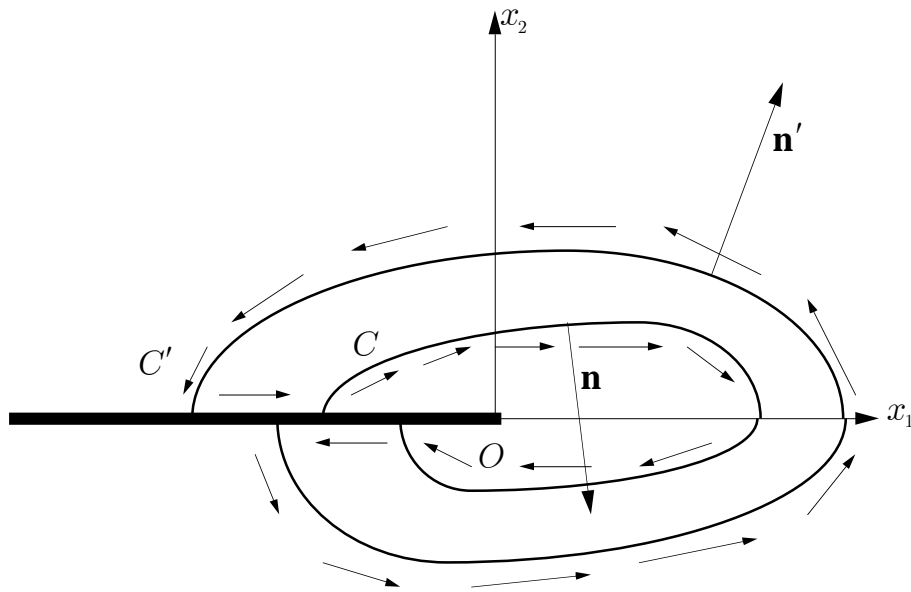


Рис. 23. Составной контур интегрирования, охватывающий вершину трещины

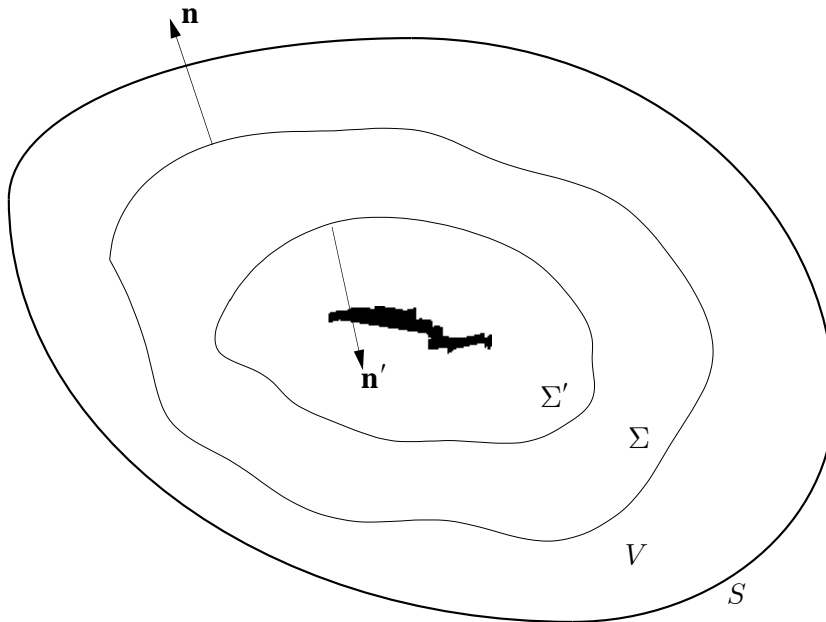


Рис. 24. Область, ограниченная замкнутыми поверхностями, охватывающими дефект

$$\oint_{\Sigma} n_k P_{ki} d\Sigma + \oint_{\Sigma'} n'_k P_{ki} d\Sigma' = 0,$$

т.е. интеграл

$$J_i = \oint_{\Sigma} n_k P_{ki} d\Sigma$$

не зависит от формы поверхности Σ .

Согласно интерпретации Эшелби, J_i есть сила, действующая на дефект со стороны внешнего упругого поля: $J_k = f_k^{\text{inh}}$. Эта сила стремится передвинуть дефект из менее напряженной в более напряженную часть тела.

3. Для кругового контура, охватывающего вершину трещины антиплоского сдвига, J -интеграл вычисляется по формуле

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} [W \cos \theta - (\tau_{rz} \gamma_{rz} \cos \theta - \tau_{rz} \gamma_{\theta z} \sin \theta)] r d\theta.$$

4. Для плоской задачи в случае кругового контура, охватывающего вершину трещины, J -интеграл вычисляется по формуле

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \{ W \cos \theta - \sigma_{rr} [\varepsilon_{rr} \cos \theta - (\gamma_{r\theta}/2 - \omega) \sin \theta] - \\ - \sigma_{r\theta} [(\gamma_{r\theta}/2 + \omega) \cos \theta - \varepsilon_{\theta\theta} \sin \theta] \} d\theta,$$

где

$$\omega = \frac{1}{r} u_{\theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

есть поворот.

5. В работах [196], [197], [195] введен двойственный к классическому J -интегралу так называемый I -интеграл:

$$I = \int_C \left[-W_*(\sigma_{ij}) n_1 + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_1} n_j \right] ds,$$

где $W_*(\sigma_{ij})$ — потенциал дополнительной работы, являющийся преобразованием Лежандра упругого потенциала $W(\varepsilon_{ij})$:

$$W_*(\sigma_{ij}) = \sigma_{ks} \varepsilon_{ks} - W(\varepsilon_{ij}),$$

причем вместо ε_{ij} в правой части следует подставить их выражения через σ_{ij} , обращая уравнения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Интеграл I также обладает свойством инвариантности.

Для случая трещин **типа I** и **II** инвариантные интегралы совпадают $J = I$.

Можно проверить также, что

$$I = -\frac{\partial \mathfrak{D}^*}{\partial l},$$

$$\mathfrak{D}^* = - \int_V W_*(\sigma_{ij}) dV + \int_{S_U} T_i u_i^{\Gamma} dS,$$

где \mathcal{E}^* — дополнительная потенциальная энергия упругого тела, S — поверхность, ограничивающая объем V , S_U — часть поверхности S , на которой заданы граничные перемещения u_i^Γ .

6. Для трещины антиплоского сдвига в случае линейно упругого материала J - и I -интегралы могут быть соответственно записаны в виде

$$J = \int_C \left[\frac{1}{2G} (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2) dx_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} (\sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2) ds \right],$$

$$I = \int_C \left[-\frac{1}{2G} (\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2) dx_2 + u_3 \left(n_1 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_1} \right) ds \right].$$

7. Применение метода инвариантных интегралов для определения характера особенности вблизи конца полубесконечной трещины в упрочняющейся по степенному закону среде при плоской деформации обсуждалось Райсом и Розенгреном [314], а также Хатчинсоном [253], который исследовал случай плоского напряженного состояния.

Вычисляя контурный интеграл по окружности радиуса r с центром в вершине трещины, имеем

$$J = r \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ W(\varepsilon(r, \theta)) \cos \theta - T_i(r, \theta) \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(r, \theta) \right\} d\theta.$$

Подынтегральное выражение при $r \rightarrow 0$ (по крайней мере, после осреднения по углу) должно иметь особенность вида $1/r$.

Поскольку все члены подынтегрального выражения являются величинами порядка произведения напряжения на деформацию, то

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rightarrow \frac{f(\theta)}{r} \quad (r \rightarrow 0).$$

Рассмотрим плоскую деформацию несжимаемого упругопластического тела со степенной связью

$$\Gamma = aT^n$$

между интенсивностью напряжений и деформаций в области упрочнения.

Асимптотическое поведение напряжений и деформаций вблизи вершины полубесконечной трещины без труда находится в форме степенной зависимости от расстояния до вершины трещины.¹²⁷

Инвариантный J -интеграл с успехом может быть применен для вычисления показателей в асимптотиках. В частности, для степенной связи между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} a T^{n-1} s_{ij},$$

¹²⁷Эти асимптотики подробно исследуются в разделе 3.8.1.

где a — постоянная материала, n — показатель упрочнения, в окрестности вершины трещины имеют место следующие асимптотические представления компонент тензора напряжений и деформаций:¹²⁸

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(r, \theta) &= \left(\frac{J}{aI_n}\right)^{1/(n+1)} \frac{1}{r^{1/(n+1)}} \bar{\sigma}_{ij}(n, \theta), \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= a \left(\frac{J}{aI_n}\right)^{n/(n+1)} \frac{1}{r^{n/(n+1)}} \bar{\varepsilon}_{ij}(n, \theta),\end{aligned}$$

где I_n — безразмерный инвариантный интеграл (см. 3.8.1, уравнение (1.25)), зависящий только от показателя n ; $\bar{\sigma}_{ij}(n, \theta)$, $\bar{\varepsilon}_{ij}(n, \theta)$ — функции, определяемые из уравнений соответствующей нелинейной задачи на собственные значения.

Численный анализ значений интеграла I_n дает следующие характерные его значения: $I_n = 3.16$ ($n = 3$), $I_n = 2.87$ ($n = 13$), $I_n \rightarrow 2.8$ ($n \rightarrow \infty$).

3.4. Локализованная пластичность

3.4.1. Основные понятия и уравнения математической теории пластичности

Теория пластичности является одним из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела. Она нашла широкое применение в области технологии обработки металлов давлением, оценки несущей способности конструкций, исследования распространения волн возмущений в металлах и грунтах, статике и динамике сыпучих сред. В основе математической теории пластичности лежит представление о поверхности нагружения, определяющей границу упругого поведения элемента тела в данном его состоянии, и ассоциированном законе течения, выражающем ортогональность приращения пластической деформации поверхности нагружения. Основные положения математической теории пластичности изложены в классических монографиях [158], [172], [125], [48], [62], [52], [27], [49]. Обратим внимание читателя на интересную обзорную статью [28].

3.4.1А. Концепция упругопластического тела

Пластичность — свойство твердых тел приобретать остаточные деформации, не изменяющиеся при постоянных внешних нагрузках. Основные эксперименты по изучению пластических свойств материалов проводятся над металлами, поэтому современная теория пластичности особенно связана со свойствами последних, хотя возможно ее применение к таким материалам, как горные породы, грунты, лед, сыпучие среды и т.д.

В процессе пластического течения мгновенные касательные модули материала уменьшаются, по сравнению с теми значениями, которые они имели в упругом состоянии.

¹²⁸Приводимые ниже асимптотики известны как асимптотики Хатчинсона—Райса—Розенгрена, или HRR-асимптотики. Эти асимптотики будут в деталях рассмотрены ниже, в разделе 3.8.

При испытаниях металлов наблюдаются такие явления, как эффект Баушингера (В. Bauschinger) (часто образец, первоначально нагруженный растяжением за предел упругости, при последующем сжатии течет при существенно меньшем значении напряжения), упрочнение (явление повышения предела текучести в результате предварительного пластического деформирования), циклическое упрочнение и др. Вообще при пластическом течении начально изотропные тела приобретают свойства анизотропии. Эффект Баушингера — следствие приобретенной анизотропии. Для учета возрастающего многообразия наблюдаемых явлений в теории пластичности применяются определяющие уравнения различного уровня сложности.

Эксперименты показывают разнообразие механической реакции металлов и других твердых тел при деформировании за пределом упругости. Существенным оказывается влияние скорости нагружения и температуры. В своем простейшем варианте теория пластичности должна формулироваться в квазистатическом (причем элемент времени может быть исключен из всех соотношений теории так, что масштаб времени оказывается несущественным и сами соотношения могут быть представлены в инкрементальной форме) и изотермическом приближениях.

Экспериментально доказано, что объемная деформация металлов в достаточно широком диапазоне изменения давления является чисто упругой. Следовательно, при пластическом течении металлов основным является сдвиговой механизм. Предполагается, что полная деформация аддитивно разлагается на упругую и пластическую составляющие

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^P.$$

Отсутствие остаточного изменения объема при пластическом течении, отмеченное выше, можно теперь выразить в форме уравнения

$$\varepsilon_{kk}^P = 0.$$

Часто, упругие деформации оказываются по величине значительно меньшими чем пластические. Ясно, что в этом случае упругой составляющей деформации следует пренебречь. Подобная модель пластического поведения называется жесткопластической. Она существенно проще, но часто возникает проблема с интерпретацией результатов расчетов по жесткопластической схеме, ибо соответствующая краевая задача имеет неединственное решение,¹²⁹ что не позволяет однозначно определить распределение напряжений и форму пластической зоны, а значит — корректно и полно исследовать проблему локализации пластических деформаций. Кроме всего прочего, надо отдавать себе отчет в том, что жесткопластическая схема часто вообще не дает удовлетворительного описания, вследствие пренебрежения упругими деформациями.

¹²⁹Имеет место ограниченная единственность решения: поле напряжений в зоне пластического течения определяется однозначно, при условии, что построено полное решение, т.е. определены напряжения и распределение скоростей и в жестких, и в пластических зонах.

Закон, определяющий границу упругого поведения элемента тела при любых возможных напряженных состояниях этого элемента, называется критерием текучести. Критерий текучести обычно можно представить в форме уравнения

$$f(\sigma_{ij}) = k^2,$$

где k есть (для данного состояния элемента) константа, имеющая смысл предела текучести.

Условие

$$f(\sigma_{ij}) < k^2$$

характеризует чисто упругую реакцию элемента на внешнее силовое воздействие.

Если величина k одна и та же для любого состояния элемента, то говорят, что элемент неупрочняющийся. В противном случае граница упругого поведения зависит от состояния элемента, а сам элемент в результате пластического течения может упрочняться.

Если тело изотропно, то критерий текучести можно представить в форме

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k^2,$$

где f — симметрическая функция своих аргументов (в противном случае критерий текучести зависел бы от нумерации главных осей тензора напряжений):

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = f(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1) = \dots ;$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Вводя три независимые симметрические функции главных напряжений

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3), \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{aligned}$$

известные как главные инварианты тензора напряжений, критерий текучести изотропного тела можно преобразовать также к виду

$$f(J_1, J_2, J_3) = k^2.$$

В теории пластичности предполагается (и это подтверждено экспериментально), что переход элемента в пластическое состояние не зависит от величины гидростатической составляющей напряжений. Последнее означает, что критерий текучести изотропного тела имеет вид

$$f(J'_2, J'_3) = k^2$$

где J'_2, J'_3 — главные инварианты девиатора тензора напряжений s_{ij} :¹³⁰

$$J'_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2), \quad J'_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3).$$

¹³⁰Не требует особых комментариев тот факт, что второй главный инвариант девиатора тензора напряжений может быть выражен через интенсивность напряжений T .

Справедливы также следующие представления:

$$J'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2],$$

$$J'_3 = \frac{1}{27} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2).$$

Исторически первым, на основании экспериментов по выдавливанию металлов через отверстие, был предложен критерий текучести Треска (Н. Tresca, 1864 г.): текучесть возникает тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения (которое, очевидно, является максимально возможным для данного материала).

Известно, что экстремальные значения касательных напряжений равны абсолютным значениям полуразностей главных напряжений и достигаются на площадках, делящих пополам угол между главными осями тензора напряжений. Следовательно, критерий текучести Треска может быть представлен в форме уравнения

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = Y,$$

в котором константа Y имеет смысл предела текучести при растяжении.

Условие текучести Треска, выраженное через инварианты девиатора тензора напряжений, будет иметь вид

$$4J_2'^3 - 27J_3'^2 - 9Y^2J_2'^2 + 6Y^4J_2' = Y^6.$$

Еще один широко применяемый критерий текучести, называемый критерием текучести Мизеса (R. von Mises, 1913 г.), формулируется условием

$$J_2' = k^2,$$

или условием

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 6k^2,$$

где константа k имеет смысл предела текучести при чистом сдвиге.

Существует несколько различных механических интерпретаций критерия текучести Мизеса.

Согласно интерпретации Надаи (A. Nadai, 1937 г.), критерий текучести Мизеса устанавливает, что пластическое течение наступает, если октаэдрическое касательное напряжение τ_{oct} (касательное напряжение на площадке, равнонаклоненной к главным осям тензора напряжений) достигает критического (и, очевидно, наибольшего возможного) для данного материала значения. Поскольку

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2},$$

то критерий текучести Мизеса можно представить также в форме условия

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} k.$$

Согласно интерпретации Генки (Н. Hencky, 1924 г.), критерий текучести Мизеса устанавливает, что пластическое течение наступает, когда упругая (т.е. восстанавливаемая) энергия формоизменения достигает критического (и при этом наибольшего) для данного материала значения (равного $k^2/(2G)$).

Энергия деформации упругого тела (в расчете на единицу объема) W может быть разложена на два слагаемых

$$W = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{12G} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K},$$

где G — модуль сдвига, K — объемный модуль, первое из которых есть упругая энергия формоизменения, а второе — упругая энергия объемной деформации.

Обе интерпретации связаны между собой, что становится также ясным, если рассмотреть соотношение

$$W = \frac{3}{4G}\tau_{oct}^2 + \frac{1}{2K}\sigma^2.$$

Согласно современным представлениям, идеально пластическое течение возникает как результат малых скольжений по определенным площадкам скольжения, и линии скольжения, наблюдаемые при пластическом течении металлов, суть частное проявление физического механизма скольжения. Именно условие пластичности Треска, как известно, позволяет развить математическую теорию пластичности, вполне соответствующую сдвиговому механизму пластического течения.

Необходимо также учитывать и следующее обстоятельство. Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны.¹³¹ Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев формально статически определимы и принадлежат к гиперболическому типу. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Однако экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Треска. Сомневаться в достоверности данных многочисленных экспериментов не приходится. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытным данным объясняется влиянием различных

¹³¹Так система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [334]; [163], с. 144-146).

посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Треска.

Таким образом, критерий текучести Треска, по-видимому, действительно, лучше чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной рафинированной пластичности.

Критерий текучести в приведенных выше формах задает границу упругого поведения только при первоначальном выходе за предел упругости и не учитывает изменения предела текучести (обычно, возрастания) с нарастанием пластической деформации. Учет упрочнения в математической теории пластичности осуществляется с помощью понятия о поверхности нагружения (W. Prager, 1949 г.).

В пространстве напряжений нагружение элемента изображается некоторой траекторией — траекторией нагружения. Для фиксированной точки траектории нагружения существует поверхность пределов упругости, все внутренние точки которой достижимы нагружениями из указанной точки, сопровождающимися только чисто упругими деформациями, по траекториям, расположенным внутри отмеченной предельной поверхности. Определенная таким образом поверхность называется поверхностью нагружения.

Уравнение поверхности нагружения обычно представляется в виде

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) = 0,$$

где $\chi_a^{(\alpha)}$ — параметры истории нагружения (индекс α нумерует параметры, символ a обозначает совокупность индексов параметра χ_a , который может быть скалярным или тензорным. Функция f называется функцией нагружения (или функцией текучести). Обычно требуется, чтобы поверхность нагружения была выпуклой, иначе не удастся обосновать ряд важнейших результатов, относящихся к единственности решения краевой задачи теории пластичности.

Понятие о поверхности нагружения дает возможность естественно сформулировать условия, определяющие, как пойдет процесс при малом смещении вдоль траектории нагружения.

Зафиксируем некоторую точку на траектории нагружения. Если для этого состояния элемента выполняется условие

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) < 0,$$

то при любом малом догружении элемента новые пластические деформации не возникнут

$$d\varepsilon_{ij}^P = 0,$$

где

$$d = d\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda},$$

и величина Λ есть любая монотонно возрастающая функция времени (так называемый параметр нагружения). Величину $d\Lambda$ часто называют догружением.

Если состояние элемента характеризуется условием

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) = 0,$$

то оказываются возможными три типа догрузений.

1. При догрузении $d\Lambda$ изображающая точка, сдвигаясь по траектории нагружения, выходит за пределы поверхности нагружения для того состояния элемента, из которого происходит догрузка. Такое нагружение элемента называется активным и сопровождается изменением пластических деформаций. Признаки активного нагружения аналитически формулируются в виде условий

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) = 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P + \frac{\partial f}{\partial \chi_a^{(\alpha)}} d\chi_a^{(\alpha)} = 0, \\ d'f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \end{aligned}$$

первое из которых выражает тот факт, что перед догрузением изображающая точка находилась на поверхности нагружения, второе — что при догрузении изображающая точка все время находится на поверхности нагружения, увлекая ее за собой, третье — что касательный к траектории нагружения вектор (направленный в сторону догрузки) в состоянии, из которого происходит догрузка, составляет острый угол с вектором внешней нормали к поверхности нагружения для этого состояния.

2. При догрузении $d\Lambda$ изображающая точка, сдвигаясь по траектории нагружения, не покидает поверхности нагружения для того состояния, из которого происходит догрузка. Такое нагружение элемента называется нейтральным. Естественно предположить, что при нейтральном нагружении поверхность нагружения не претерпевает изменения, т.е.

$$d\varepsilon_{ij}^P = 0, \quad d\chi_a^{(\alpha)} = 0$$

(это — так называемый постулат о нейтральном нагружении). Условия нейтрального нагружения аналитически формулируются в следующем виде:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) = 0, \quad d'f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0.$$

Второе из условий нейтрального нагружения устанавливает, что касательная к траектории нагружения в состоянии, из которого происходит догрузка, составляет прямой угол с нормалью к поверхности нагружения для этого состояния.

3. При догрузении $d\Lambda$ изображающая точка, сдвигаясь по траектории нагружения, покидает поверхность нагружения и перемещается внутрь этой поверхности. Такое нагружение элемента называется разгрузкой. Согласно закону упругой разгрузки, следует считать, что при этом пластические деформации и параметры истории не изменяются

$$d\varepsilon_{ij}^P = 0, \quad d\chi_a^{(\alpha)} = 0.$$

Аналитически признаки упругой разгрузки формулируются как

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_a^{(\alpha)}) = 0, \quad d'f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0.$$

Последнее условие устанавливает, что вектор, касающийся траектории нагружения и направленный в сторону догрузки, составляет тупой угол с вектором внешней нормали к поверхности нагружения.

Определяющее уравнение упругопластического тела не может, подобно закону Гука, связывать напряжения и деформации для данного состояния тела,

так как состояние упругопластического тела зависит от полной истории его нагружения. Ясно поэтому, что определяющее уравнение теории пластичности, если впоследствии его предполагается использовать для всех траекторий нагружения, должно иметь форму дифференциального не интегрируемого соотношения между напряжением и деформацией, т.е. связывать приращения тензора деформации и тензора напряжений при догружении. Это соотношение в теории пластичности называется законом течения.

Ассоциированный с функцией нагружения f закон течения имеет форму (Е. Melan, 1938 г.)

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} h d'f,$$

где h — некоторая определяющая функция (функция упрочнения), зависящая от напряжений, пластических деформаций и параметров истории, и устанавливает в регулярных точках поверхности нагружения ортогональность приращения пластической деформации (которое в пространстве напряжений изображается свободным вектором с компонентами $2G d\varepsilon_{ij}^P$) поверхности нагружения.

Если тело изотропно, то функция нагружения (это относится также и к функции упрочнения) зависит от компонент тензора напряжений только через посредство инвариантов J'_2, J'_3 . Учитывая, что

$$\frac{\partial J'_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}, \quad \frac{\partial J'_3}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J'_2 \delta_{ij},$$

из ассоциированного закона течения находим, что тензоры $d\varepsilon_{ij}^P$ и σ_{ij} соосны.

Таким образом, *полные* соотношения между приращениями напряжений и деформаций записываются в форме следующих уравнений:¹³²

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij}, \quad d\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma,$$

если $f < 0$ или $f = 0$ и $d'f < 0$;

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} h d'f,$$

$$d\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma,$$

если $f = 0, df = 0, d'f \geq 0$.

Приращения параметров истории связаны с приращением пластической деформации в общем случае неголономными соотношениями

$$d\chi_a^{(\alpha)} = \Omega_{a\ kl}^{(\alpha)}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_b^{(\beta)}) d\varepsilon_{kl}^P.$$

¹³²В приводимых ниже уравнениях мы используем обозначения $\varepsilon = \varepsilon_{jj}, \sigma = (1/3)\sigma_{jj}$.

Функция упрочнения h может быть найдена из условия непрерывности при смещении изображающей точки вдоль траектории нагружения и одновременной непрерывной трансформации поверхности нагружения:

$$h = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial \chi_b^{(\beta)}} \Omega_{b \ kl}^{(\beta)}\right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}.$$

С помощью этого соотношения нетрудно заключить, что

$$hd'f = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^P} + \frac{\partial f}{\partial \chi_b^{(\beta)}} \Omega_{b \ kl}^{(\beta)}\right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}.$$

При малой степени упрочнения (идеально пластическое поведение) последнее отношение становится неопределенным выражением типа $0/0$ и обозначается через $d\lambda$. Это — так называемый неопределенный множитель теории идеальной пластичности.

Определяющие уравнения идеального упругопластического тела с условием текучести $f(s_{ij}) = k^2$ формулируются в следующем виде:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij}, \quad d\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma,$$

если $f(s_{ij}) < k^2$ или $f(s_{ij}) = k^2$ и $(\partial f / \partial s_{ij}) ds_{ij} < 0$;

$$\begin{aligned} de_{ij} &= \frac{1}{2G} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} d\lambda, \\ d\varepsilon &= \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma, \end{aligned}$$

если $f(s_{ij}) = k^2$ и $(\partial f / \partial s_{ij}) ds_{ij} = 0$.

Частные формы определяющих уравнений теории течения получаются при конкретизации вида функции нагружения.

Рассмотрим модель Прандтля—Рейсса (L. Prandtl, 1924 г.; A. Reuss, 1930 г.) изотропного идеально упругопластического тела, подчиняющегося критерию текучести Мизеса. Полные соотношения в приращениях имеют в этом случае вид:

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} ds_{ij}, \quad d\varepsilon = \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma,$$

если $J'_2 < k^2$ или $J'_2 = k^2$ и $dJ'_2 < 0$;

$$\begin{aligned} de_{ij} &= \frac{1}{2G} ds_{ij} + s_{ij} d\lambda, \\ d\varepsilon &= \frac{3(1-2\nu)}{E} d\sigma, \end{aligned}$$

если $J'_2 = k^2$ и $dJ'_2 = 0$.

Пренебрегая упругими деформациями по сравнению с пластическими, получаем определяющие уравнения Леви—Мизеса (М. Levy, 1871 г.; R. von Mises, 1913 г.) для жесткопластического тела:

$$d\varepsilon_{ij} = 0,$$

если $J'_2 < k^2$ или $J'_2 = k^2$ и $dJ'_2 < 0$;

$$d\varepsilon_{ij} = s_{ij}d\lambda,$$

если $J'_2 = k^2$ и $dJ'_2 = 0$.

Определяющие уравнения теории течения чрезвычайно сложны и часто приходится в ущерб физической сущности теории пластичности пользоваться более простыми соотношениями деформационной теории пластичности.

Согласно деформационной теории, переход за границу упругого поведения определяется условием $J'_2 = k^2$. Активное нагружение характеризуется признаком $dJ'_2 > 0$. Определяющий закон при активном нагружении есть

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \Phi(J'_2)s_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{K}.$$

Определяющая функция $\Phi = \Phi(\tau)$ может быть найдена на основании гипотезы единой кривой из опытов на чистый сдвиг: если известна зависимость $\gamma = g(\tau)\tau$ между касательным напряжением τ и углом сдвига γ , то

$$\Phi(\tau) = \frac{g(\tau)}{2} - \frac{1}{2G}.$$

3.4.1Б. Краевая задача математической теории пластичности

Определяющие уравнения теории течения замыкают систему уравнений и граничных условий механики сплошных сред и тем самым позволяют корректно сформулировать и исследовать граничную задачу об изотермическом течении упругопластических тел.

Следует отметить, что замкнутая постановка граничной задачи должна включать формулировку дополнительных условий на границе раздела упругой и пластической зоны. В упругопластических задачах в качестве таких условий обычно принимается непрерывность полного тензора напряжений и ненарушение сплошности элемента при переходе через него границы раздела. Ниже приводится формулировка граничной задачи теории течения в приращениях (подобная формулировка лучше всего выражает суть дела и наиболее приспособлена как для последующего аналитического исследования, так и для численной реализации).

Приращения напряжений деформаций и перемещений при догрузении $d\Lambda$ должны в области, определяемой конфигурацией тела, удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial(d\sigma_{ij})}{\partial x_j} = 0,$$

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} \quad (\text{если } f < 0, \text{ или } f = 0 \text{ и } d'f < 0),$$

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + (hd'f) \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad (\text{если } f = 0, \quad df = 0, \quad d'f \geq 0),$$

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{K},$$

$$d\chi_a^{(\alpha)} = \Omega_a^{(\alpha)}{}_{kl}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, \chi_b^{(\beta)}) d\varepsilon_{kl}^P,$$

$$2d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i},$$

а также граничным условиям

$$du_k = du_k^\Gamma \quad (x_i \in S_U),$$

$$n_j d\sigma_{ij} = dT_i^\Gamma \quad (x_i \in S_F).$$

Характерной особенностью сформулированной граничной задачи является ее линейность относительно приращений $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{ij}$, du_i .

Если сформулированы начальные условия для напряжений, деформаций и перемещений, то разбивая интервал возрастания параметра нагружения на достаточно малые отрезки и решив на каждом шаге сформулированную выше линейную краевую задачу для приращений $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{ij}$, du_i , можно затем последовательным суммированием получить распределение напряжений, деформаций и перемещений по объему тела в любом его состоянии (метод пошагового догружения). Если характерный отрезок разбиения стремится к нулю, то в принципе можно получить точное решение задачи.

Только что описанная процедура метода пошагового догружения приводит к заключению: если для каждого шага догружения приращения $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{ij}$, du_i определяются однозначно, то поля напряжений, деформаций и перемещений в любом состоянии тела также определяются однозначно. Кроме того, ясно, что сформировавшиеся в результате внешнего нагружения напряжения, деформации и перемещения существенно зависят от полной истории нагружения и не могут быть, вообще говоря, определены только по конечным значениям T_i^Γ , u_i^Γ .

Первая из теорем единственности (Е. Melan, 1938 г.) устанавливает единственность решения граничной задачи теории упрочняющегося упругопластического тела в приращениях. Выпуклость поверхности нагружения при этом не требуется.

При отсутствии упрочнения приращения напряжений определяются однозначно, но приращения перемещений и деформаций однозначно определены быть не могут и поэтому в рамках математической теории остаются неопределенными.

Граничная задача о течении жесткопластического тела в отсутствии упрочнения может быть сформулирована в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

$$de_{ij} = 0 \quad (\text{если } f(s_{ij}) < k^2, \text{ или } f(s_{ij}) = k^2 \text{ и } \frac{\partial f(s_{ij})}{\partial s_{ks}} ds_{ks} < 0),$$

$$de_{ij} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} d\lambda, \quad d\lambda \geq 0 \quad (\text{если } f(s_{ij}) = k^2 \text{ и } \frac{\partial f(s_{ij})}{\partial s_{ks}} ds_{ks} = 0),$$

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$u_k = u_k^\Gamma \quad (x_i \in S_U),$$

$$n_j \sigma_{ij} = T_i^\Gamma \quad (x_i \in S_F).$$

В жесткой зоне граничная задача явно неопределенная. Еще одна особенность состоит в том, что нельзя ставить условие непрерывности напряжений и скоростей на жесткопластической границе, так как течение тела возможно, только если пластическая часть тела скользит по жесткой. Условия на возможных поверхностях разрыва ставятся следующим образом: на границе раздела жесткой и пластической зон равновесие элементов тела не нарушается, так же как и их сплошность.

Для жесткопластической модели можно доказать ограниченную единственность поля напряжений (J. F. W. Bishop, 1953 г.). Предположим, что всюду внутри жесткопластического тела построены альтернативные поля напряжений, деформаций и перемещений σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* и σ_{ij}^{**} , ε_{ij}^{**} , u_i^{**} , удовлетворяющие всем соотношениям граничной задачи и условиям сопряжения на границах (которые могут быть различными для этих наборов решений) раздела жестких и пластических зон, тогда, если поверхность текучести строго выпукла, то в зоне, где отличны от нуля скорости деформации хотя бы для одного решения, напряжения совпадают: $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{**}$.

Если поверхность текучести выпукла не строго, но кривая текучести (сечение поверхности, определяемой в пространстве главных напряжений уравнением $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k^2$, плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) выпукла строго, то в зоне, где отличны от нуля скорости деформации хотя бы для одного решения, напряжения σ_{ij}^* и σ_{ij}^{**} могут различаться не более чем на шаровой тензор вида $c\delta_{ij}$, где c — произвольная постоянная. Если, кроме того, указанная зона примыкает к границе тела и на этой части границы хотя бы в одной точке задан вектор граничного поверхностного усилия T_i^Γ , то $c = 0$ и $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{**}$ всюду в указанной зоне.

При исследовании течения жесткопластического тела ни пластическая, ни жесткая зоны, ни скорости перемещений и деформаций не определяются однозначно. Единственным образом определяется только поле напряжений в зоне пластического течения, да и то при условии, что поле напряжений определено всюду, включая жесткую зону, и по нему можно построить соответствующие согласованные поля деформаций и перемещений. Такое решение называется полным. На практике, однако, чаще всего удастся построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела

выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны.

Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство задач теории трещин решены по жесткопластической схеме не полно.

3.4.2. Приближенный анализ локализованного у вершины трещины пластического течения

В приближенной постановке¹³³ форма и размеры локализованной пластической области (критерий текучести Мизеса) в окрестности вершины трещины нормального отрыва для плоской деформации и плоского напряженного состояния определены по формулам ($r_p(\theta)$ — полярный радиус границы раздела упругой и пластической зоны, отсчитываемый от вершины трещины, в зависимости от полярного угла θ)

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{4\pi Y^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right],$$

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{4\pi Y^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta + 1 \right),$$

где Y — предел текучести при растяжении, ν — коэффициент Пуассона. Переходя к безразмерной величине

$$\tilde{r}_p(\theta) = \frac{4\pi Y^2 r_p(\theta)}{K_I^2},$$

можно построить упругопластическую границу (см. рис. 25, 26), определяемую этими формулами, для различных значений коэффициента Пуассона $0 < \nu < 1/2$.

Зона пластичности в случае плоской деформации заметно меньше таковой для плоского напряженного состояния. Особенно значительно отличаются их линейные размеры вдоль линии трещины.

Критерий текучести Треска приводит к несколько иной картине локализованного пластического течения.¹³⁴ Зоны пластичности, рассчитанные по крите-

¹³³Приближенная постановка задач о локализованном пластическом течении формулируется в рамках линейной механики разрушения и подразумевает, что решение в упругой области определяется только главными членами асимптотического разложения упругого решения в окрестности вершины трещины, решение в пластической зоне вообще не анализируется, а граница локализованного пластического течения определяется на основании упругого поля напряжений и критерия текучести. Ясно, что поскольку здесь вообще речь не идет ни о какой попытке упругопластического анализа, результаты, полученные таким образом, весьма далеки от реальности и не могут дать надежных оценок формы и размеров зоны текучести. Следует, поэтому, всегда помнить об ограниченной применимости результатов этого раздела.

¹³⁴Интересно построить соответствующие критерию текучести Треска упругопластические границы и сравнить их с расчетами по критерию Мизеса. Соответствующее сравнение приводится, например, в [26], с. 90-92.

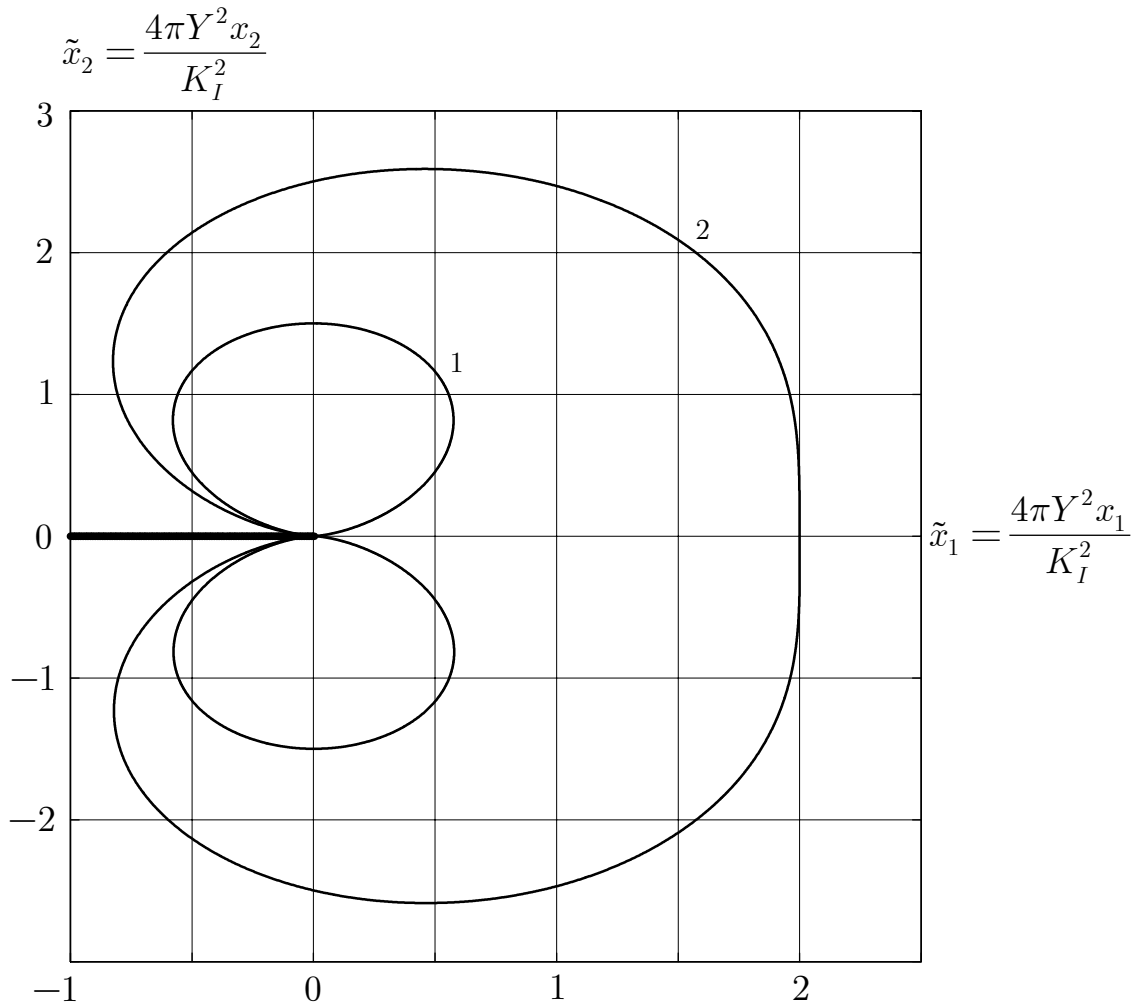


Рис. 25. Границы пластических зон у вершины трещины нормального отрыва. Приближенный анализ по критерию Мизеса: 1 — плоское деформированное состояние ($\nu = 1/2$); 2 — плоское напряженное состояние

рию текучести Треска имеют совсем другую форму и несколько большие размеры. Граница раздела упругой и пластической зон определяется уравнением

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi Y^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \max \left\{ 1, (1 - 2\nu + \sin(\theta/2))^2 \right\}$$

для плоского деформированного состояния и уравнением

$$r_p(\theta) = \frac{K_I^2}{2\pi Y^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2$$

— для плоского напряженного состояния.

В приближенной постановке форма и размеры локализованной пластической области (принимается критерий текучести Мизеса) в окрестности вершины трещины поперечного сдвига для плоской деформации и плоского напряженного состояния определены по формулам

$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi Y^2} \left[3 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right) + (1 - 2\nu^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

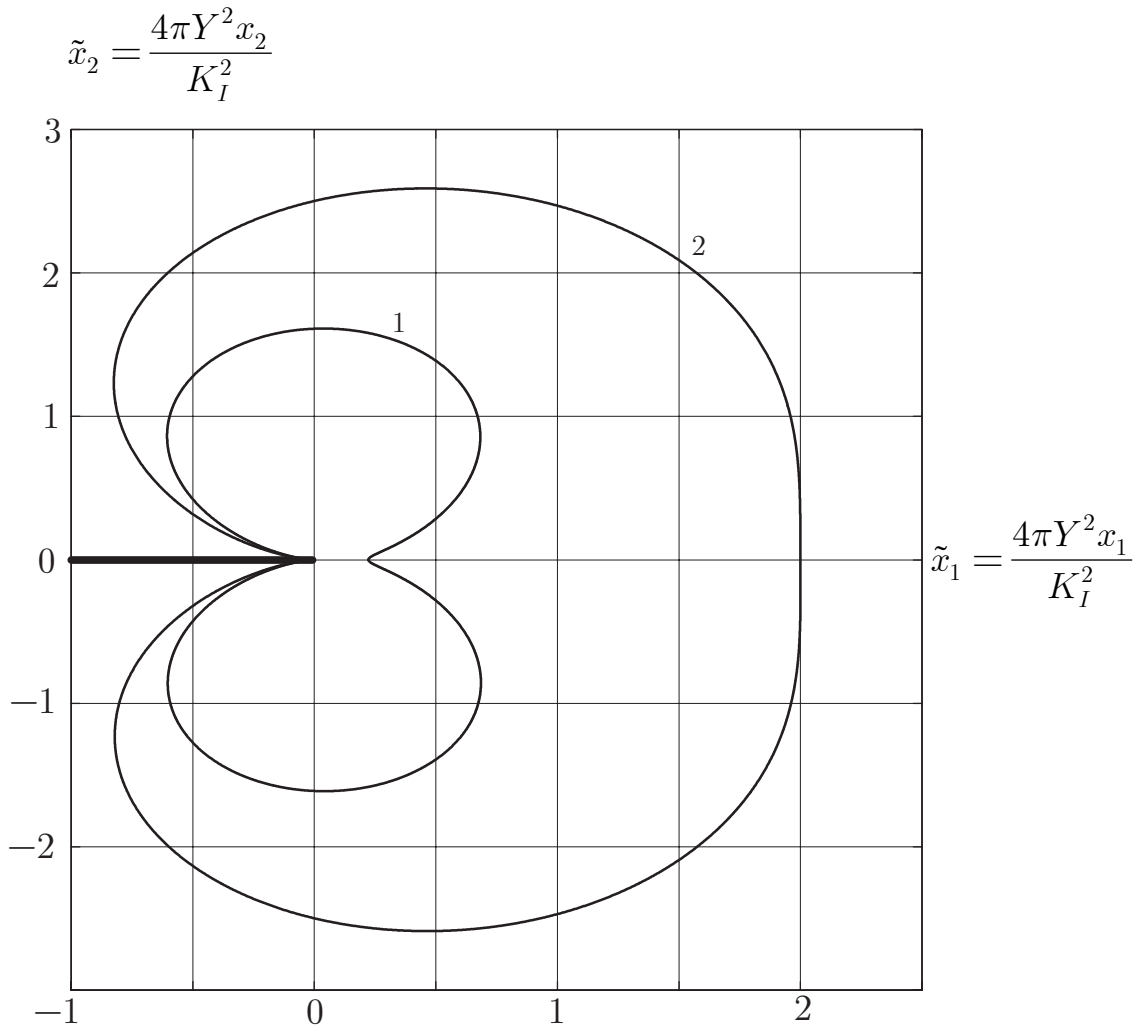


Рис. 26. Границы пластических зон у вершины трещины нормального отрыва. Приближенный анализ по критерию Мизеса: 1 — плоское деформированное состояние ($\nu = 1/3$); 2 — плоское напряженное состояние

$$r_p(\theta) = \frac{K_{II}^2}{2\pi Y^2} \left[3 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta \right) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Переходя к безразмерной величине

$$\tilde{r}_p(\theta) = \frac{2\pi Y^2 r_p(\theta)}{K_{II}^2},$$

можно также построить упругопластическую границу, определяемую этими формулами (см. рис. 27, 28) для различных значений коэффициента Пуассона $0 < \nu < 1/2$.

Оценка формы и размеров области локализованной пластичности в приближенной постановке для трещины антиплоского сдвига в идеально упругопластическом материале приводит к формуле

$$r_p(\theta) = \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2},$$

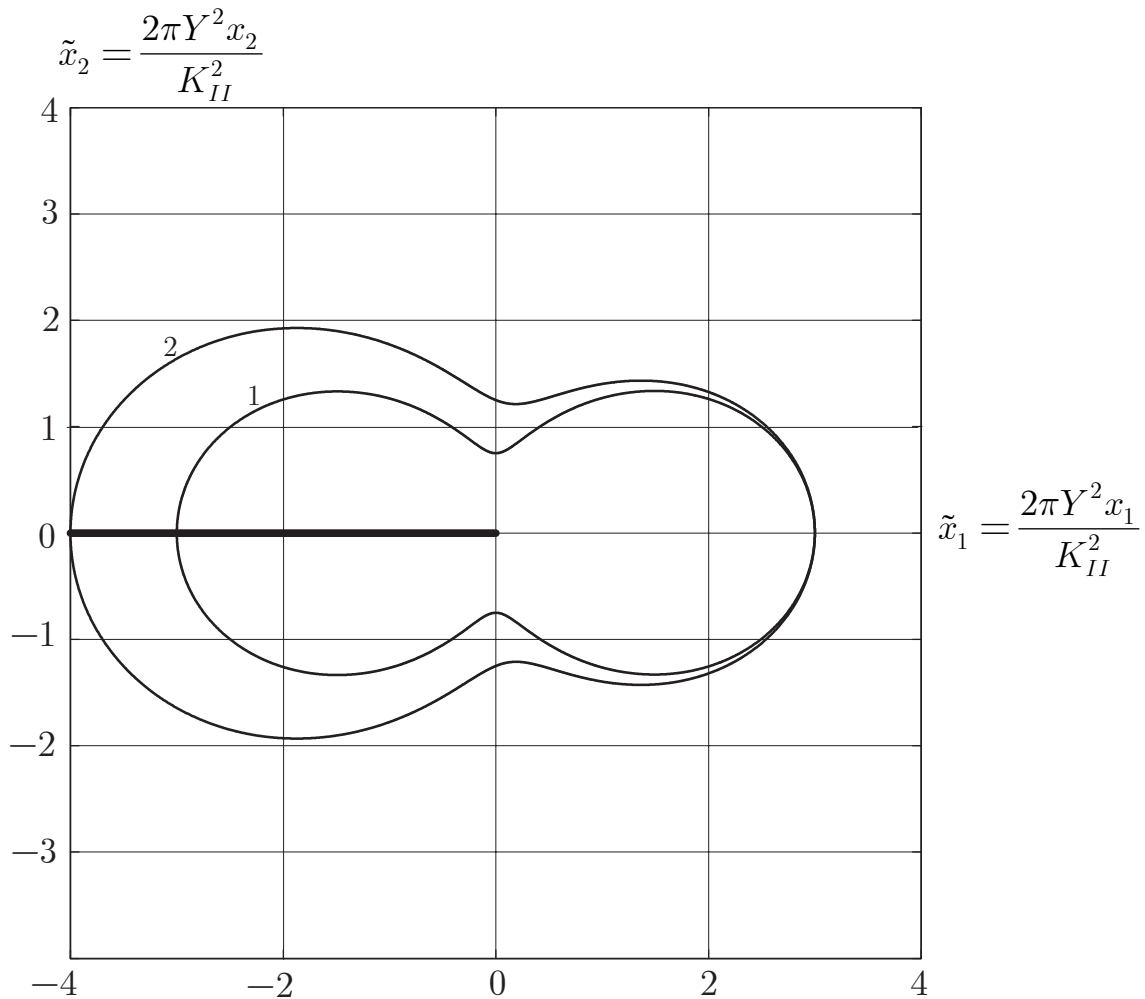


Рис. 27. Границы пластических зон у вершины трещины поперечного сдвига. Приближенный анализ по критерию Мизеса: 1 — плоское деформированное состояние ($\nu = 1/2$); 2 — плоское напряженное состояние

где k — предел текучести на сдвиг, т.е. граница между упругой и пластической областями — окружность с центром в вершине трещины.

3.4.3. Жесткопластический предельный анализ

Теория идеальной пластичности предлагает одну очень простую и удобную схему для оценки условий разрушения твердого тела — расчет по предельному равновесию. Ясно, что возрастание внешних нагрузок, действующих на тело, возможно лишь до определенного предела, поскольку внутренние напряжения в теле не могут превзойти предела текучести. Рано или поздно тело переходит в состояние, когда при постоянных внешних нагрузках пластические деформации неограниченно возрастают. Об этом состоянии принято говорить как о состоянии пластического разрушения или предельного равновесия. Соответствующую состоянию пластического разрушения систему внешних нагрузок обычно характеризуют как предельную. Не следует забывать, что в приближении малых деформаций не учитывается изменение геометрии границы тела а потому определение пластического разрушения и сам расчет предельных нагрузок относятся лишь к начальной стадии разрушения.

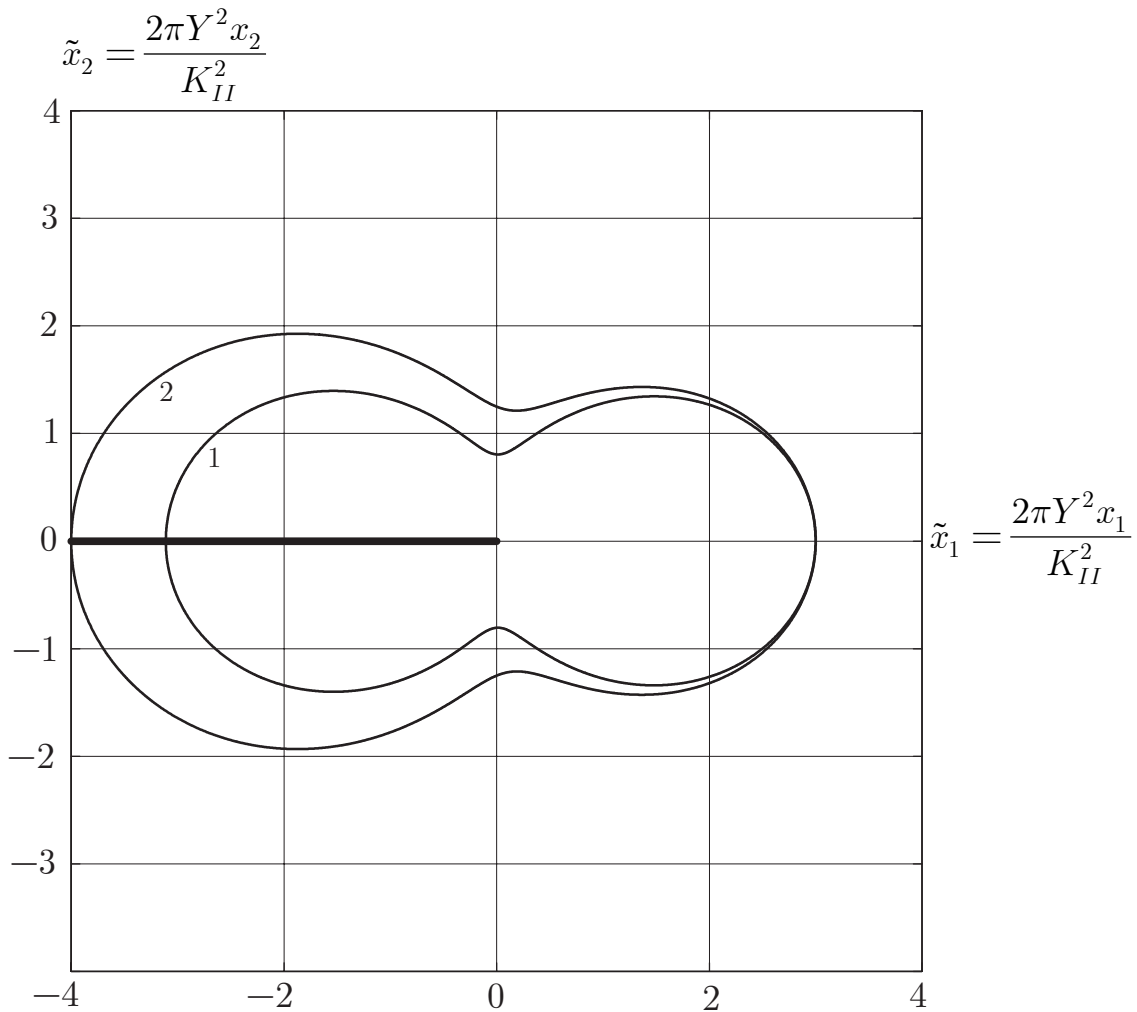


Рис. 28. Границы пластических зон у вершины трещины поперечного сдвига. Приближенный анализ по критерию Мизеса: 1 — плоское деформированное состояние ($\nu = 1/3$); 2 — плоское напряженное состояние

По большому счету для вычисления предельной нагрузки необходимо найти полное решение жесткопластической задачи. Построение полного решения жесткопластической задачи часто оказывается невозможным, так как не исследованным, как правило, остается вопрос о возможности продолжения напряжений в жесткие зоны так, чтобы не превышался предел текучести, или остается открытым вопрос об определении согласованного поля скоростей. Поэтому исключительное значение приобретает приближенный анализ предельного равновесия тела на основании неполных решений, статических или кинематических. В теории пластичности разработаны специальные методы расчета, основанные на двух основных теоремах теории предельного равновесия (см., например, [65], с. 41-53; [48], с. 36-41; [99], с. 52-60; [283], с. 121-135).

Статически допустимое распределение напряжений, сконструированное как в пластической, так и в жесткой зоне, позволяет дать оценку снизу для величины предельной нагрузки. Кинематически возможный механизм разрушения и дает возможность оценить предельную нагрузку сверху. Часто оценки сверху и снизу удастся сблизить, подбирая соответствующим образом статические и кинематические поля.

Большое количество разнообразных примеров оценки и расчета предельных нагрузок и богатый графический материал, представляющий сетки скольжения, читатель найдет в книге [40].

Для удобства приведем здесь основные соотношения для плоского деформированного и плоского напряженного состояния идеально пластического тела. Компактное изложение теории общей плоской задачи (включая, как частные случаи, теорию плоской деформации и плоского напряженного состояния) имеется в шестой главе монографии [48].

В случае плоской деформации любой критерий текучести изотропной среды приводится к виду

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2.$$

Соотношения ассоциированного закона течения можно получить в следующем виде:

$$\frac{2\partial_1 v_1}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{2\partial_2 v_2}{\sigma_{22} - \sigma_{11}} = \frac{\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1}{2\sigma_{12}}.$$

Поле напряжений в пластической зоне можно представить в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma + k \cos 2\theta, \\ \sigma_{22} &= \sigma - k \cos 2\theta, \\ \sigma_{12} &= k \sin 2\theta,\end{aligned}$$

где $\sigma = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, θ — угол наклона к оси x_1 главной оси напряжений, соответствующей наибольшему главному напряжению σ_1 .

Статические и кинематические уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\partial_1 \sigma - 2k(\sin 2\theta \partial_1 \theta - \cos 2\theta \partial_2 \theta) &= 0, \\ \partial_2 \sigma + 2k(\cos 2\theta \partial_1 \theta + \sin 2\theta \partial_2 \theta) &= 0; \\ -(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \operatorname{tg} 2\theta + (\partial_1 v_1 - \partial_2 v_2) &= 0, \\ \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 &= 0.\end{aligned}$$

Обе системы гиперболичны. Характеристики уравнений статики и кинематики совпадают. Дифференциальные уравнения характеристик (линий скольжения) есть:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right), \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right).$$

Вдоль характеристик можно получить конечные соотношения (интегралы Генки (Н. Генку, 1923 г.) для напряжений

$$\frac{\sigma}{2k} - \theta = \text{const}, \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = \text{const},$$

и не интегрируемые соотношения для скоростей

$$dv_1 + \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) dv_2 = 0, \quad dv_1 + \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) dv_2 = 0,$$

или, вводя физические компоненты скорости $v_{<1>}$, $v_{<2>}$ относительно локального базиса, образованного характеристическими направлениями, —

$$dv_{<1>} + v_{<2>}d\theta = 0, \quad dv_{<2>} - v_{<1>}d\theta = 0$$

вдоль характеристических линий.¹³⁵

Рассмотрим теперь плоское напряженное состояние.¹³⁶ Будем считать, что критерий текучести принят в форме Мизеса:

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 = 3k^2.$$

Соотношения ассоциированного закона течения имеют вид:

$$\frac{\partial_1 v_1}{2\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\partial_2 v_2}{2\sigma_{22} - \sigma_{11}} = \frac{\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1}{6\sigma_{12}}.$$

Поле напряжений в пластической зоне можно представить как

$$\sigma_{11} = k(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\theta),$$

$$\sigma_{22} = k(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\theta),$$

$$\sigma_{12} = k \sin \omega \sin 2\theta,$$

где, по-прежнему, θ — угол наклона главной оси напряжений, соответствующей наибольшему главному напряжению σ_1 , к оси x_1 ;

$$\sigma_{1,2} = 2k \cos \left(\omega \mp \frac{\pi}{6} \right).$$

Уравнения статики и кинематики:

$$(\sqrt{3} \sin \omega - \cos \omega \cos 2\theta) \partial_1 \omega - \cos \omega \sin 2\theta \partial_2 \omega + 2 \sin \omega (\sin 2\theta \partial_1 \theta - \cos 2\theta \partial_2 \theta) = 0,$$

$$-(\sqrt{3} \sin \omega + \cos \omega \cos 2\theta) \partial_2 \omega + \cos \omega \sin 2\theta \partial_1 \omega + 2 \sin \omega (\cos 2\theta \partial_1 \theta + \sin 2\theta \partial_2 \theta) = 0;$$

$$-(\cos \omega + \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + 2\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \partial_1 v_1 = 0,$$

$$-(\cos \omega - \sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta) (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) + 2\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \partial_2 v_2 = 0.$$

Уравнения плоского напряженного состояния гиперболичны при условии

$$\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6}$$

¹³⁵ Эти уравнения были получены Гейрингер (Н. Geiringer) в 1930 г. Оригинальное изложение теории плоской пластической деформации заинтересованный читатель сможет найти в книге [168].

¹³⁶ Уравнения плоского пластического напряженного состояния были получены и исследованы В. В. Соколовским в 1946 г. Изложение результатов имеется в его монографии [158], первое издание которой вышло в 1946 г.

и эллиптически, если

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \omega \leq \pi.$$

Рассмотрим далее лишь гиперболический случай.

Характеристики статической и кинематической систем совпадают и определяются дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta - \psi), \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta + \psi),$$

где

$$\operatorname{tg}^3 \psi = \operatorname{tg} \chi = \left[\frac{\sin(\omega + \pi/6)}{\sin(\omega - \pi/6)} \right]^{3/2}.$$

Заметим, что справедливо соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \omega = -\cos 2\psi \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Вдоль характеристик могут быть получены конечные соотношения для напряжений

$$\theta - \chi(\omega) = \operatorname{const}, \quad \theta + \chi(\omega) = \operatorname{const}$$

и не интегрируемые уравнения для скоростей

$$dv_1 + \operatorname{tg}(\theta - \psi) dv_2 = 0, \quad dv_1 + \operatorname{tg}(\theta + \psi) dv_2 = 0.$$

Вообще, краевые задачи теории пластического плоского напряженного состояния (в отличие от плоской деформации) не имеют достаточно эффективных методов аналитического решения, и связано это прежде всего с тем, что в пределах пластической зоны тип уравнений может изменяться, и не всегда уравнения плоского напряженного состояния сохраняют в этой зоне гиперболический тип, свойственный для уравнений плоской деформации.

3.4.3А. Оценка предельной нагрузки при растяжении прямоугольной пластины с надрезом

С помощью статической теоремы теории предельного равновесия можно быстро дать оценку снизу нагрузки, необходимой для разрыва пластины с надрезом на одной из сторон (рис. 29). Форма надреза не играет никакой роли.

Для этого достаточно построить статически допустимое поле напряжений: в части полосы $-h < x_1 < 0$ реализуется одноосное напряженное состояние $\sigma_{33} = Y$, а в боковой зоне $x_1 > 0$ напряжения равны нулю.

Этому статически допустимому распределению напряжений отвечает нагрузка $P_* = hY$.

3.4.3Б. Оценка предельной нагрузки при изгибе прямоугольной пластины с надрезом

Получим, следуя [237], оценку сверху для предельного изгибающего момента в случае изгиба прямоугольной пластины с надрезом вдоль одной из сторон (рис. 30).

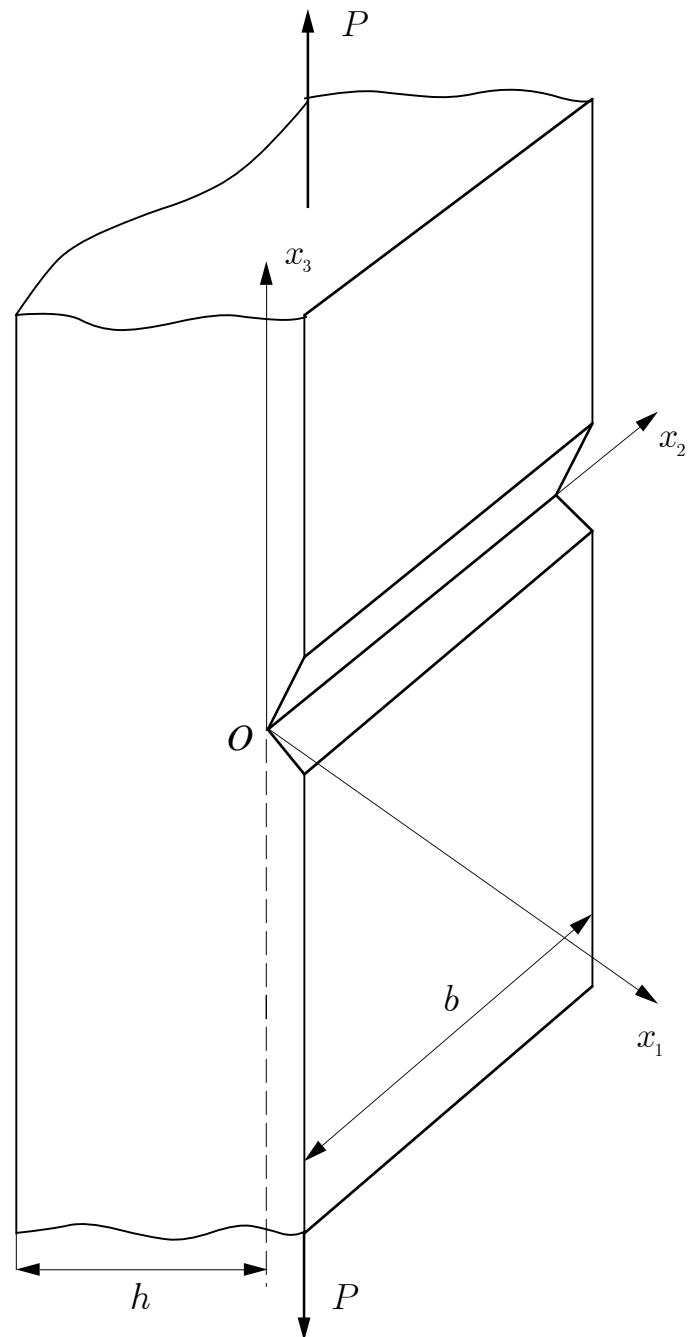


Рис. 29. Растяжение прямоугольной пластины, надрезанной вдоль одной из сторон

Для этого рассмотрим поле скоростей при вращении жестких частей пластины относительно неподвижного жесткого шарнира $ADBCA$ так, что скольжение происходит в тонком слое вдоль дуг окружностей ADB и ACB .

На основании кинематической теоремы теории предельного равновесия находим оценку сверху для предельного изгибающего момента (в расчете на единицу длины):

$$M_* = kl\rho,$$

где l , ρ — длина и радиус дуг ADB и ACB .

Минимизировать эту верхнюю границу можно, если минимизировать величину $l\rho$. Выражая l и ρ через центральный угол 2α указанных дуг, находим

$$l\rho = (h^2/2)\alpha / \sin^2 \alpha.$$

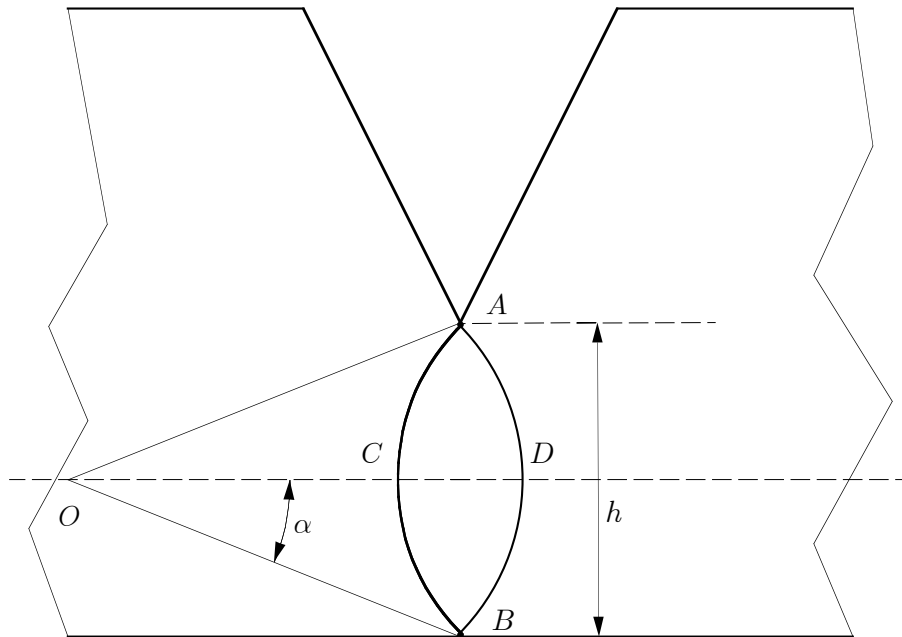


Рис. 30. Изолированные линии скольжения ACB и ADB как кинематически возможная система скольжения при расчете предельного состояния пластины с односторонним надрезом (деформация изгиба)

Минимизируя по α , имеем уравнение $2\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, решение которого есть $\alpha = 67^\circ$.

Оценка сверху для предельного изгибающего момента получается тогда в виде

$$M_* = 0.69kh^2.$$

Оценку снизу величины предельного момента получим с помощью статически допустимого распределения напряжений, предполагая, что в части пластины, расположенной ниже уровня надреза, имеются два слоя толщины $h/2$, причем в верхнем слое — поле одноосного сжатия величины $2k$, а в нижнем — одноосного растяжения величины $2k$.

Оценка снизу, отвечающая этому статически допустимому распределению, есть

$$M_* = 1/2kh^2.$$

3.4.3В. Оценка предельной нагрузки при растяжении прямоугольной пластины, надрезанной с двух сторон

С помощью кинематически возможного поля можно дать оценку сверху нагрузки, необходимой для разрыва пластины, надрезанной с противоположных сторон (рис. 31).

Кинематически возможный механизм разрушения построим, считая, что два полуцилиндра, изображенные на рис. 31, вращаются как жесткие тела. Читатель без труда найдет соответствующую верхнюю границу предельной нагрузки.

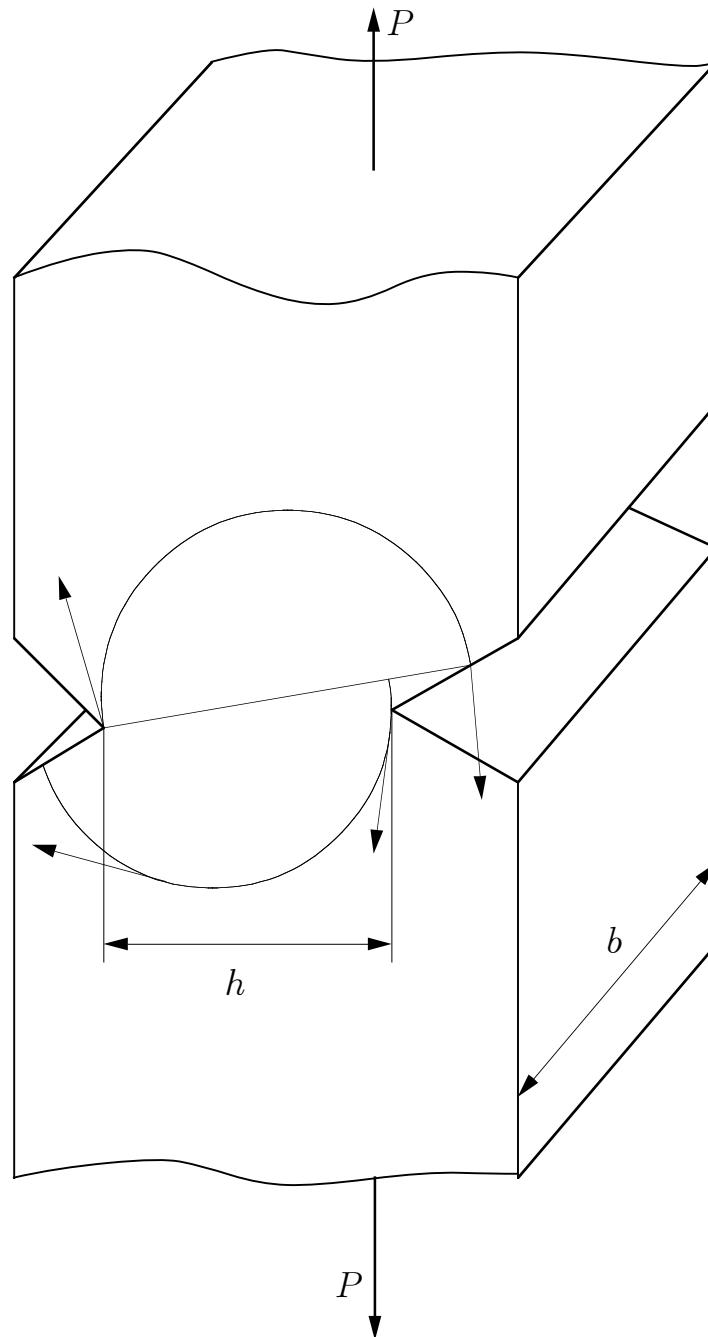


Рис. 31. Кинематически возможный механизм разрушения при растяжении прямоугольной пластины, симметрично надрезанной с двух сторон

3.4.3Г. Растяжение полосы, ослабленной угловыми вырезами и тонкими разрезами

Полоса, ослабленная симметричными глубокими тонкими разрезами, находится под действием растягивающей нагрузки в условиях плоского деформированного состояния (рис. 32). Расстояние между концами разрезов есть $2h$.

Поле линий скольжения элементарно. Распределение напряжений в каждой из характерных областей определяется без труда. Так в треугольной области COD компоненты тензора напряжений будут

$$\sigma_{11} = \pi Y/2, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = Y(1 + \pi/2).$$

Предельная нагрузка (в расчете на единицу длины) определяется выраже-

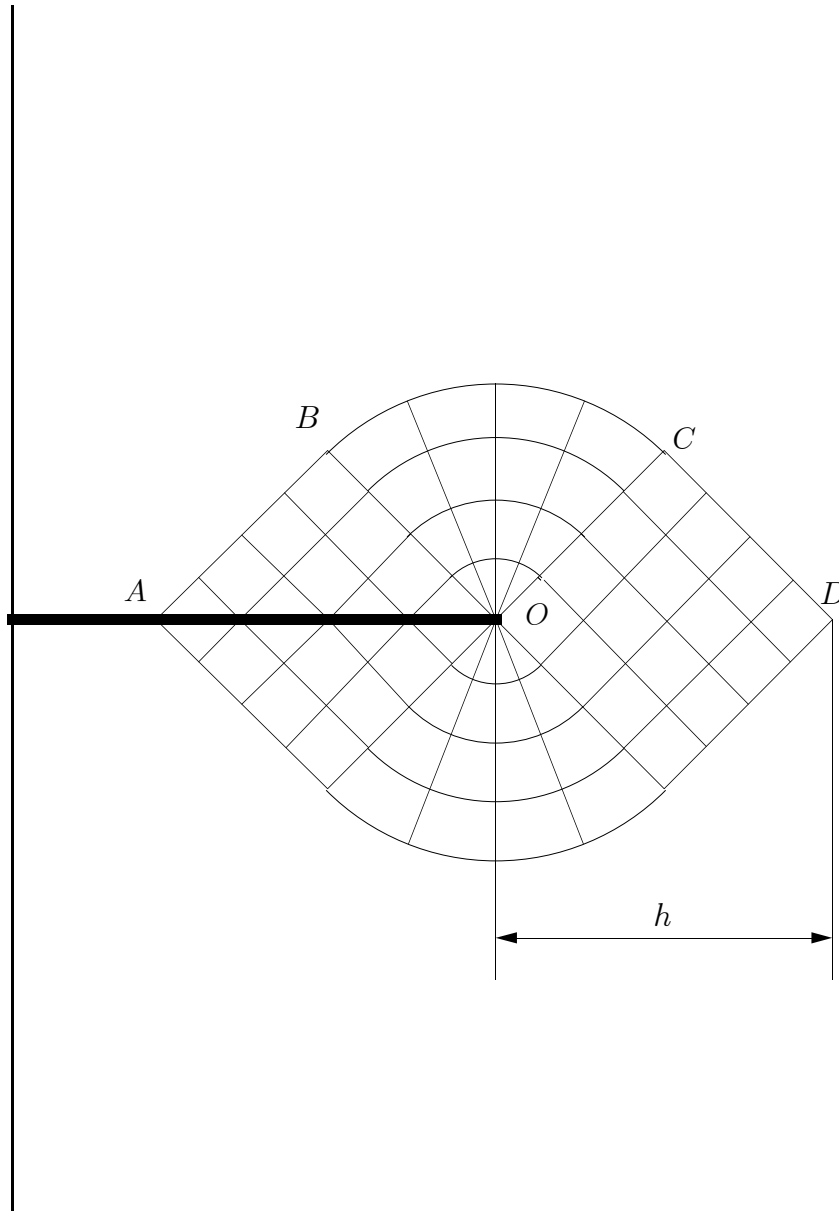


Рис. 32. Растяжение симметрично надрезанной с двух сторон полосы (плоская пластическая деформация). Изображена только симметричная часть полосы. Треугольные области ABO и OCD — зоны равномерного напряженного состояния — соединяются посредством централизованной зоны OBC с веерообразной сеткой скольжения

нием

$$P_* = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) 2Yh,$$

где Y — предел текучести тела при одноосном растяжении. Еще раз отметим, что это значение предельной нагрузки отвечает неполному статическому решению.

Кинематика течения также проста, и распределение скоростей может быть без труда построено (см., например, [62], с. 174).

Нетрудно заметить, что нагрузка $P_* = 2hY$ является нижней границей предельной нагрузки. Действительно, полагая, как и в **3.4.3А**, что в средней части полосы шириной $2h$ реализуется одноосное напряженное состояние ($\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = Y$), а в боковых зонах напряжения равны нулю, получаем ста-

тически допустимое распределение напряжений, которому отвечает нагрузка $P_* = 2hY$.

Можно показать, что в случае полосы с угловыми вырезами раствора 2α (рис. 33) значение предельной нагрузки, согласно неполному статическому решению, определяется формулой

$$P_* = \left(1 + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) 2Yh.$$

Сетка скольжения, изображенная на рис. 33, хорошо подтверждается экспериментальными наблюдениями.

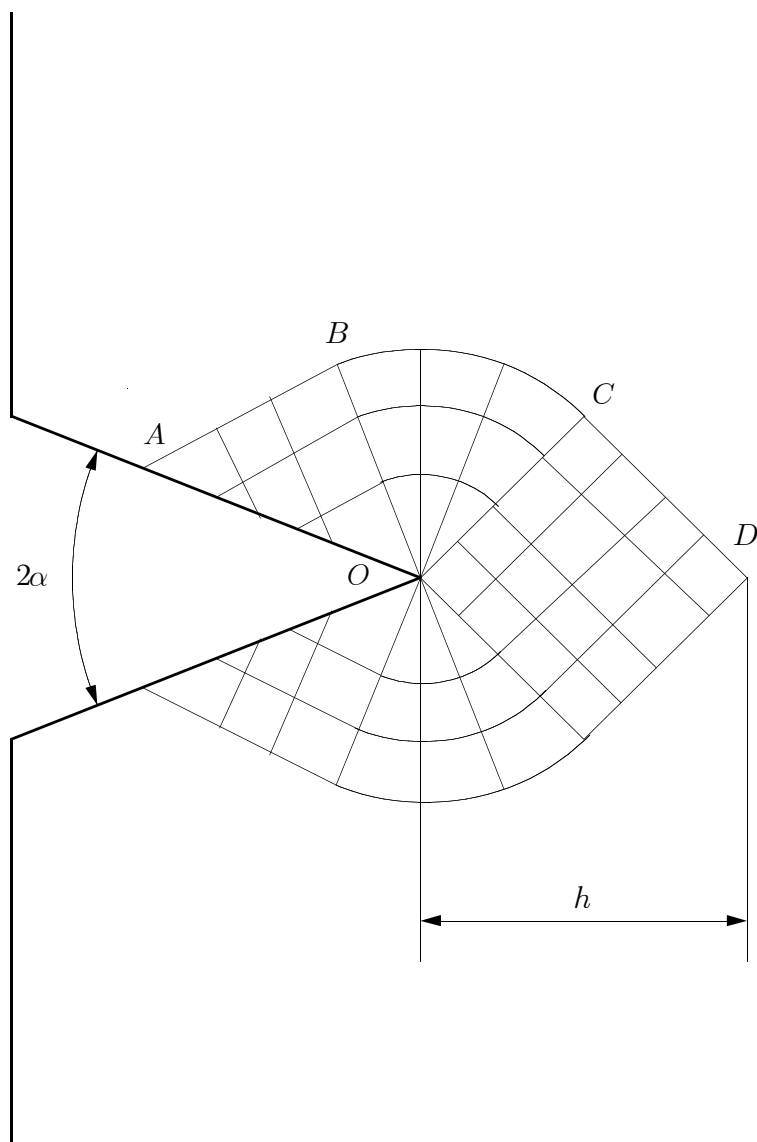


Рис. 33. Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами (плоская пластическая деформация). Изображена только симметричная часть полосы

Не представляет особых затруднений исследование пластического течения пластины с симметричными угловыми надрезами в условиях плоского напряженного состояния (см., например, [158], с. 386-388).

Перешеек полосы пронизывает пластическая зона. Причем если надрезы глубокие и не слишком острые, то пластические зоны от надрезов смыкаются в центре перешейка.

Пластическая зона у надреза состоит из трех характерных областей OAB , OBC , OCD (см. рис. 34).¹³⁷

В треугольных областях OAB и OCD реализуется одноосное растяжение:

$$\omega = \frac{\pi}{3}, \quad \chi = \arccos \frac{1}{3}, \quad \theta = \pi - \alpha;$$

$$\omega = \bar{\omega}, \quad \chi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \arccos \frac{1}{3}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Значение константы $\bar{\omega}$ определяется ниже.

Сетка характеристик в областях однородного растяжения состоит из двух семейств параллельных прямых. В области ABO равномерного растяжения, примыкающей к свободной границе надреза, прямолинейные характеристики наклонены к свободной границе под углом

$$\beta = \frac{1}{2}(\pi - \arccos \frac{1}{3}) = 54^\circ 44'.$$

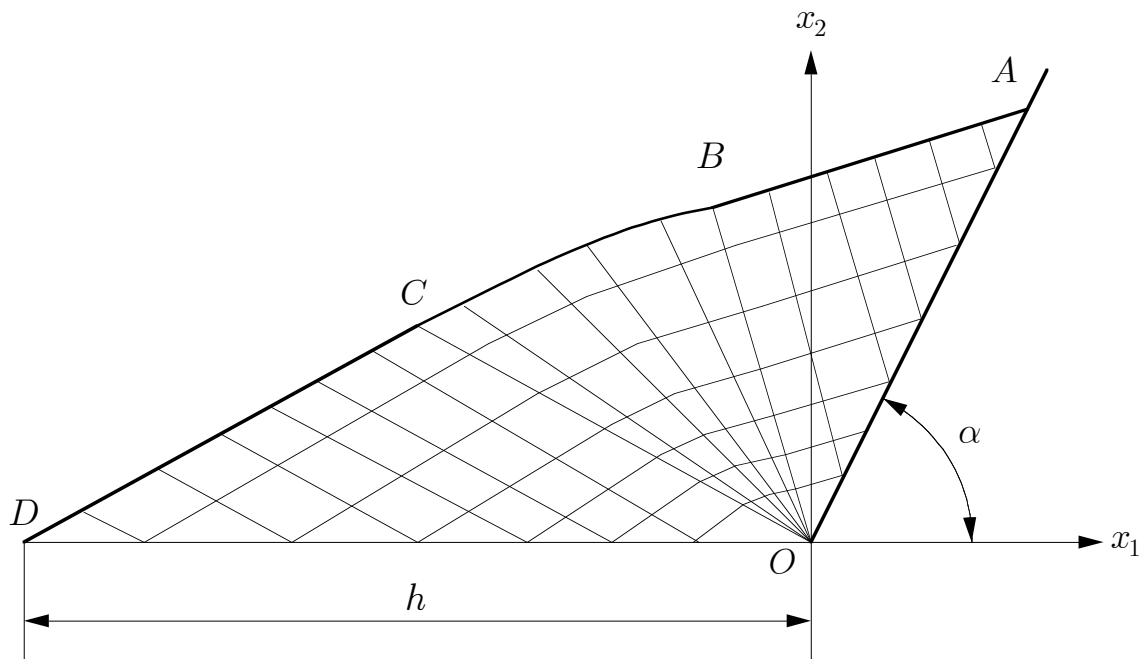


Рис. 34. Растяжение полосы с симметричными угловыми надрезами (плоское напряженное состояние). Изображена только правая верхняя четверть полосы

В области OBC сетка характеристик состоит из веера прямых, проходящих через точку O , и из семейства кривых линий. Решение в этой зоне имеет форму простой волны¹³⁸ и определяется формулами

$$\chi + \theta = \pi - \alpha + \arccos \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg}(\theta - \psi) = \frac{x_2}{x_1}.$$

¹³⁷Иная картина локализации пластических деформаций на перешейке у не слишком острых вырезов проанализирована в [62], с. 254-255.

¹³⁸Особые решения общей плоской задачи теории идеальной пластичности в форме простых волн, имеющие важнейшее прикладное значение, исследуются в [48], с. 133-140.

Криволинейные характеристики в зоне $ОВС$ могут быть построены следующим образом. Рассмотрим несколько более широкий веер с центром в точке O , примыкающий к зоне равномерного напряженного состояния $АВО$, угол раствора которого в точности равен $\beta = 54^\circ 44'$. Введем полярные координаты r' , φ' с центром в точке O так, что полярная ось опирается на удаленную от зоны $АВО$ границу веера, а полярный угол отсчитывается от указанной оси в направлении $АВО$. В подобранной таким образом полярной системе координат уравнения криволинейных характеристик есть

$$r'^2 \sin \varphi' = \text{const.}$$

Поле напряжений в этой системе координат определяется формулами

$$\sigma_r = k \cos \varphi', \quad \sigma_\varphi = 2k \cos \varphi', \quad \sigma_{r\varphi} = k \sin \varphi'.$$

Нормальные напряжения на перешейке равны

$$\sigma_{22} = 2k \cos(\bar{\omega} - \pi/6).$$

Поэтому предельная нагрузка получается как

$$P_* = 4kh \cos\left(\bar{\omega} - \frac{\pi}{6}\right),$$

где параметр $\bar{\omega}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\sin(\bar{\omega} - \pi/6)}{\sin(\bar{\omega} + \pi/6)} \right]^{2/3} = \text{tg}(\alpha - \arccos(1/3)).$$

Приведенное только что решение остается справедливым, если выполняется неравенство $\alpha \geq \arccos(1/3) = 70^\circ 32'$.

Если надрез достаточно острый ($\alpha < 70^\circ 32'$), то все построение вырождается в одну линию разрыва (шейку), изображенную на рис. 35, вдоль которой

$$\sigma_{11} = k, \quad \sigma_{22} = 2k.$$

Величина предельной нагрузки в этом случае оказывается равной $P_* = 4kh$.

Линии локализованных пластических деформаций наблюдаются также при растяжении узких прямоугольных пластин без вырезов. Если к пластине прикладывается медленно возрастающая нагрузка, то в момент, когда напряжения достигают предела текучести, в пластине внезапно появляется наклонная полоса, внутри которой материал пластически деформирован. В момент образования такой полосы (так называемая полоса Людерса—Чернова (Luders band), или полоса пластического скольжения¹³⁹) происходит некоторое уменьшение

¹³⁹Д. К. Чернов (1839–1921 гг.) — русский ученый, создавший научные основы обработки металлов давлением. По поводу вклада Д. К. Чернова в теорию пластичности см. предисловие к книге: Томленов А. Д. Теория пластических деформаций металлов. М.: Машгиз, 1951. 200 с.

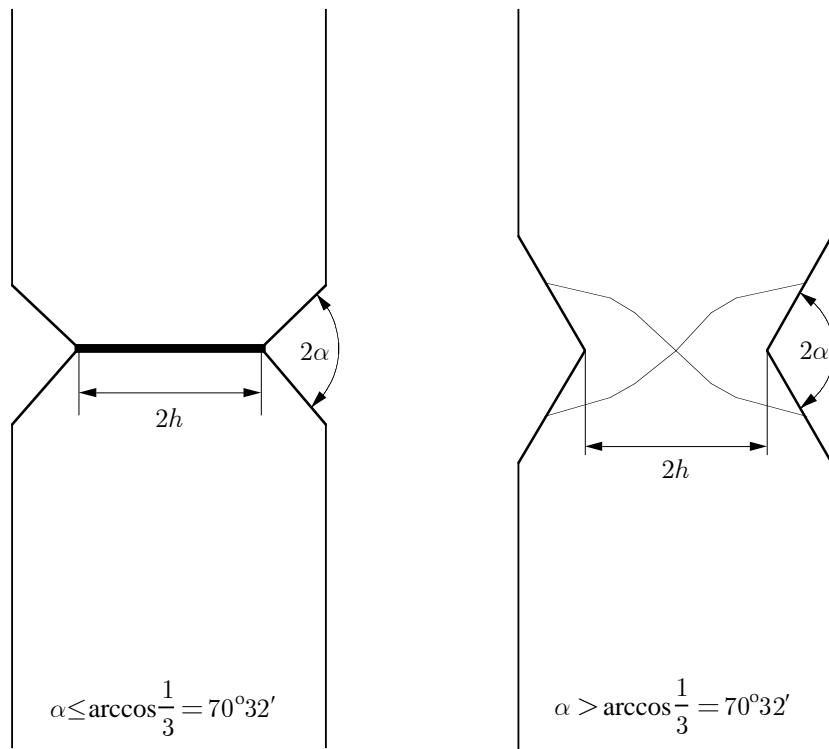


Рис. 35. Шейка при одноосном растяжении пластины с достаточно острыми угловыми надрезами и локализация пластических деформаций при менее остром вырезе (плоское напряженное состояние)

нагрузки, регистрируемое приборами. Если нагрузку увеличивать, то образуется вторая полоса, параллельная первой и обычно к ней примыкающая. Пластина непосредственно перед разрушением может полностью покрыться полосами Людерса. Статическая теория полос Людерса в рамках жесткопластической схемы предложена в [163], с. 124-134. Предсказания этой теории следующие: при условии пластичности Треска полосы пластического скольжения имеют наклон $\pm 35^\circ 16'$ или $\pm 50^\circ 46'$; при условии пластичности Мизеса полосы пластического скольжения должны иметь наклон $\pm 35^\circ 16'$. Результаты сравнения с экспериментом также приводятся в [163].

3.4.3Д. Полоса с затупленными надрезами

Пусть полоса, симметрично надрезанная с боков, находится в условиях плоского деформированного состояния. Затупление надрезов будем моделировать, полагая, что концы надрезов имеют круговое очертание.

Поле скольжения определяется отношением расстояния между вырезами $2h$ к радиусу закругления a .

Если

$$\frac{h}{a} \leq \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 3.81\dots,$$

то поле линий скольжения примыкает лишь к контуру закругления (рис. 36).

Это поле образовано логарифмическими спиралями (см., например, [62],

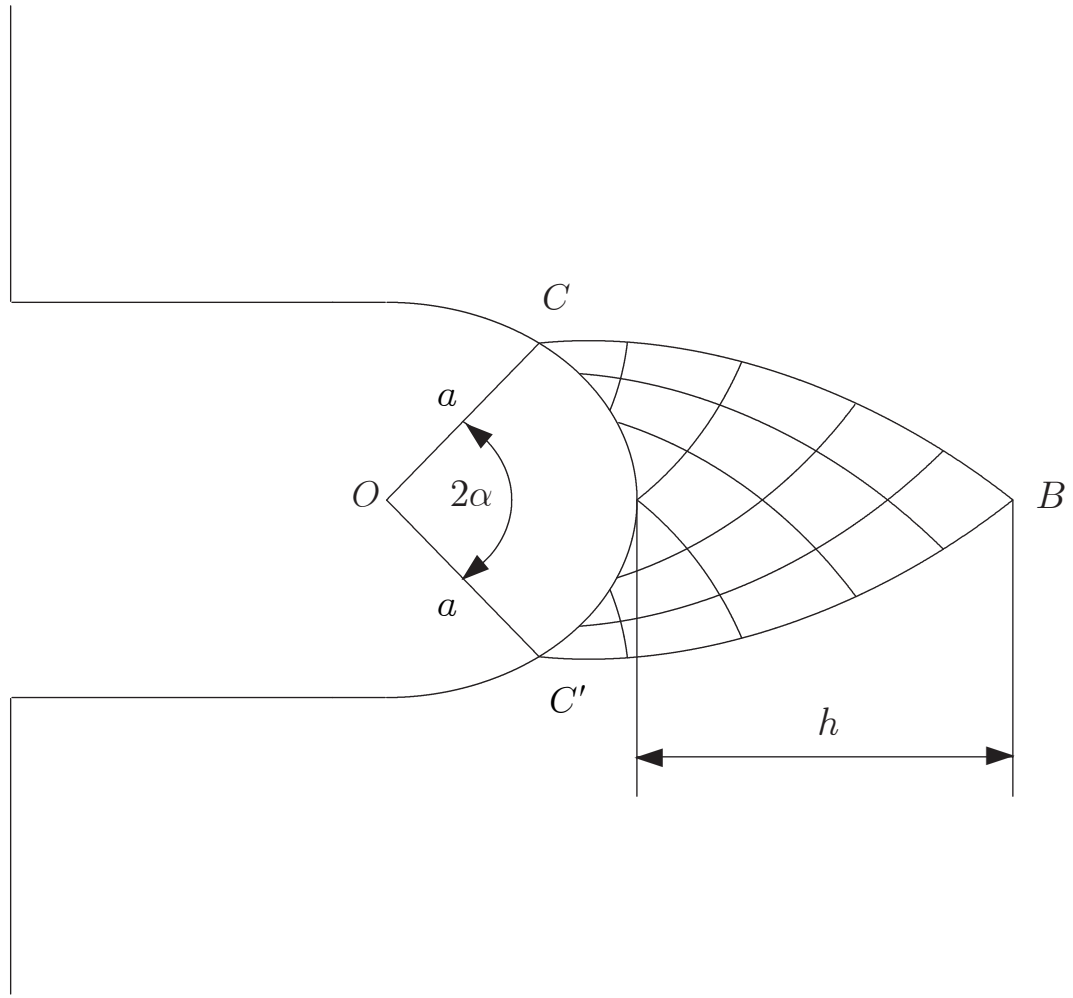


Рис. 36. Растяжение полосы с симметричными затупленными надрезами, имеющими круглые основания (плоская пластическая деформация). Изображена только симметричная часть полосы. Сетка скольжения BCB' образована логарифмическими спиралями

[158]):

$$r \exp(\pm \varphi) = \text{const},$$

где полярные координаты r, φ имеют полюс в центре закругления. На рис. 36 поле логарифмических спиралей точно построено в плоскости безразмерных переменных $x_1^* = x_1/a, x_2^* = x_2/a$ (это означает, что радиус затупления равен единице) для значения отношения $h/a = 2/3$.

Жесткопластическая граница пересекает контур закругления так, что соответствующий радиус наклонен под углом α . Этот угол связан с величиной h соотношением

$$\alpha = \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right).$$

Уравнение линии скольжения CB , отделяющей жесткую зону от зоны течения, есть

$$r = a \exp(\alpha - \varphi).$$

Поле напряжений в пластической зоне будет полярно-симметричным. Рас-

пределение напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ при $\varphi = 0$ определяется формулой

$$\sigma_{\varphi\varphi} = Y \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right),$$

где r — расстояние, отсчитываемое от центра закругления.

Предельная нагрузка согласно приведенному неполному статическому решению дается соотношением

$$P_* = \left(1 + \frac{a}{h} \right) \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) 2Yh.$$

По поводу построения поля скоростей см. [158], с. 247.

Можно построить, хотя при этом рассмотрение несколько усложняется, поле скольжения и в случае, когда выполняется неравенство

$$\frac{h}{a} > \exp \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 = 3.81... .$$

Логарифмическое поле скольжения ограничено значениями $\alpha = \pm\pi/2$.

Построение поля скольжения и распределение напряжений и скоростей приводится в [62], с. 176.

Предельная нагрузка в этом случае вычисляется по формуле:

$$P_* = \left[1 + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{h} \left(\exp \left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] 2Yh.$$

Аналогичная задача может быть решена и в случае плоского напряженного состояния (см., например, [158], с. 385, 386).

Поле напряжений в пластической зоне вблизи кругового контура полярно симметрично и в силу гиперболичности системы статических уравнений полностью определяется формой выреза:

$$\sigma_{rr} = 2k \cos(\omega + \pi/6), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \cos(\omega - \pi/6),$$

где параметр ω вычисляется через полярный радиус по формуле

$$r^2 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \omega} \exp \left[\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \omega \right) \right].$$

Сетка характеристик состоит из кривых, определяемых уравнениями

$$\varphi \pm \chi(\omega) = \text{const.}$$

Ясно, что пластические зоны уходят от края вырезов, сужаясь, вглубь перешейка. Очевидно, что пластические зоны подобной формы могут быть продолжены с каждой стороны не далее чем на расстояние \bar{h} , определяемое уравнением

$$\left(\frac{\bar{h}}{a} + 1 \right)^2 = \sqrt{3} \exp \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right).$$

Разрешив это уравнение, находим $\bar{h} = 1.07a$.

Если $\bar{h} < 1.07a$, то пластические зоны соединяются в центре перешейка. Предельная продольная сила вычисляется по формуле

$$P_* = 4k(a + h) \cos \left(\omega^* + \frac{\pi}{6} \right),$$

в которой ω^* — значение параметра ω в месте, где характеристики пересекает ось x_1 . Это значение определяется из уравнения

$$\left(\frac{h}{a} + 1 \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \omega^*} \exp \left[\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \omega^* \right) \right].$$

Если $\bar{h} > 1.07a$, т.е. ширина полосы больше чем та, которая необходима для соединения пластических зон, идущих от краев противоположных вырезов, то у вырезов образуются две пластические зоны указанной выше формы, соединенные шейкой.

Вдоль шейки напряжения постоянны:

$$\sigma_{11} = k, \quad \sigma_{22} = 2k.$$

Величина предельной нагрузки есть:

$$P_* = 2k(a + 2h - \bar{h}).$$

Описанное только что решение подвергалось экспериментальной проверке. Обычно отмечается, что шейка отчетливо видна при деформировании образца в стадии, предшествующей разрушению.¹⁴⁰

3.4.4. Оценка линейного размера зоны локализации по Ирвину

Методы механики разрушения находят применение при решении разнообразных задач о прочности тел с трещинами. Ясно, что характер разрушения определяется как типом материала, так и напряженно-деформированным состоянием вблизи вершины трещины. Для тел с выраженным пределом текучести у вершины трещины образуется зона локализации пластических деформаций и происходит перераспределение напряжений и деформаций так, что упругие асимптотики становятся непригодными. В частности, в случае трещины нормального отрыва это перераспределение существенным образом зависит от того, является ли состояние деформации плоским или же реализуется плоское напряженное состояние. В настоящее время существуют две простые схемы оценки линейного размера зоны локализации пластических деформаций у вершины трещины: схема Ирвина (G. R. Irwin) [258] и схема Леонова—Панасюка—Дагдейла [85], [214].

¹⁴⁰Приведенное решение с шейкой, соединяющей пластические зоны у краев вырезов, было подвергнуто критике Ю. Н. Работновым [133], с. 525, 526. В опытах на титановых сплавах, механическое поведение которых очень близко к идеально упругопластическому, шейка никогда не наблюдается. Вместо пластической перемычки в центре остается упругий ромб, стороны которого образуют углы 55° с осью растяжения.

Исторически модели Леонова—Панасюка—Дагдейла предшествовало следующее правило определения размера локализованной пластической зоны s в условиях маломасштабной текучести и величины раскрытия трещины δ (модель Ирвина).

Для трещины **типа I** в условиях плоского напряженного состояния перераспределение нормальных напряжений σ_{22} перед вершиной трещины согласно Ирвину приближенно можно получить, если сдвинуть сингулярную упругую асимптотику на расстояние ρ_2 вдоль линии трещины и затем срезать перенесенную кривую по пределу текучести $\sigma_{22} = Y$ (рис. 37).

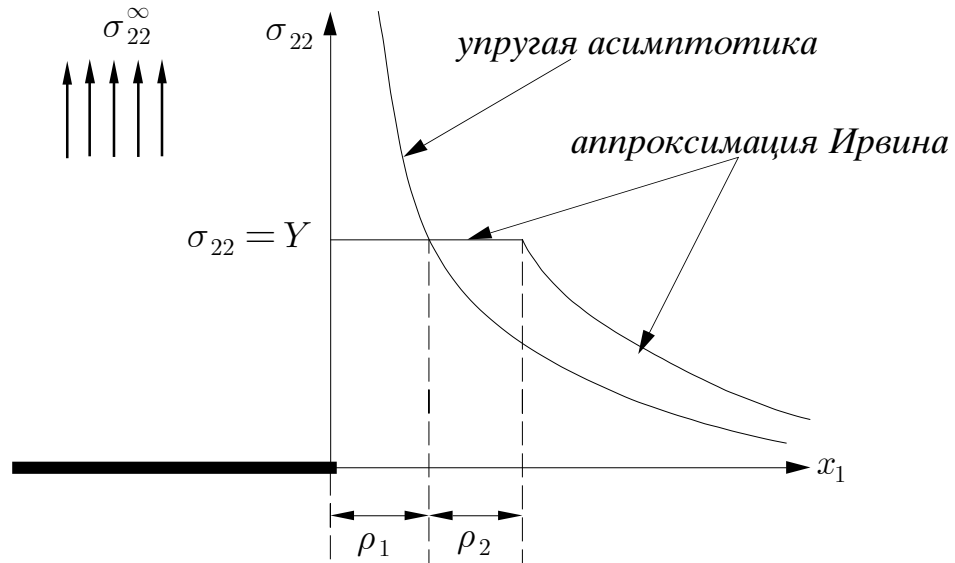


Рис. 37. Перераспределение нормальных напряжений в зоне маломасштабной текучести у вершины трещины **типа I** в условиях плоского напряженного состояния

Сохранение равновесия приводит к уравнению

$$\int_0^{\rho_1} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho}} - Y \right) d\rho = Y \rho_2,$$

в котором ρ_1 — расстояние от вершины трещины до точки пересечения упругой асимптотики с уровнем напряжений на пределе текучести Y :

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi\rho_1}} = Y,$$

или

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{Y} \right)^2.$$

Полученные соотношения позволяют заключить, что

$$\rho_2 = \rho_1.$$

Следовательно, характерный линейный размер пластической зоны перед вершиной трещины (плоское напряженное состояние) $c = \rho_1 + \rho_2$ есть

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{Y} \right)^2.$$

Для плоской деформации Ирвин ввел поправку [259]¹⁴¹:

$$c = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{K_I}{Y} \right)^2$$

и обосновал ее экспериментальными доказательствами, измеряя длину пластической зоны в толстых пластинах с трещиной.

Интересно сравнить размеры зоны локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния, рассчитанные на основе схемы Ирвина и Леонова—Панасюка—Дагдейла. В последнем случае

$$c = l \left(\sec \frac{\pi \sigma_{22}^{\infty}}{2Y} - 1 \right)$$

и в приближении маломасштабной текучести $\sigma_{22}^{\infty}/Y \ll 1$

$$c = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{Y} \right)^2.$$

Таким образом, расхождение заключается в разных множителях $1/\pi = 0.32$ и $\pi/8 = 0.39$ и не является столь существенным, особенно если учесть, что обе расчетные схемы базируются на совершенно разных подходах.

Заметим, что для трещины антиплоского сдвига подход Ирвина приводит к следующей оценке размера пластической зоны:

$$c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{III}}{k} \right)^2.$$

Величина ρ_2 , характеризующая сдвиг вперед упругой асимптотики нормальных напряжений, называется поправкой Ирвина на пластичность.¹⁴² Можно

¹⁴¹Схема Ирвина для случая плоской деформации формально состоит в замене в предыдущих формулах предела текучести при одноосном растяжении Y на величину $\sqrt{3}Y$.

¹⁴²Подчеркнем еще раз, что поправкой Ирвина можно пользоваться лишь в случае маломасштабной текучести. Концепция маломасштабного пластического течения восходит к Райсу (см., например, [148], с. 260–261). Пластическое течение называется маломасштабным, если область пластического течения мала по сравнению с характерными геометрическими размерами — длиной выреза, шириной ненадрезанного образца, характерным линейным размером самого тела. В этом случае для исследования локализации пластических деформаций у вершины трещины границу тела переносят в бесконечно удаленную точку, а саму трещину считают бесконечно протяженной в одном из направлений. Асимптотика напряжений в бесконечно удаленной точке в точности соответствует главному члену разложения в окрестности вершины трещины. При полномасштабной текучести исследование локализации пластических деформаций у вершины трещины следует проводить по схеме Леонова—Панасюка—Дагдейла. Оказывается, что схема Ирвина по сравнению с моделью Леонова—Панасюка—Дагдейла примерно на 20% недооценивает длину пластической зоны.

также вести речь об "эквивалентной" трещине, длина которой увеличивается на ρ_2 по сравнению с исходной. Для этой воображаемой "эквивалентной" трещины на основании формул теории упругости вычислим раскрытие её берегов в точке, совпадающей с вершиной исходной трещины. Найденное таким образом раскрытие трещины $\bar{\delta}$ полагается приближенно равным истинному раскрытию трещины δ .

Так предполагая, что пластическое течение является маломасштабным, и, используя формулу для вертикального перемещения u_2 из упругого решения (плоское напряженное состояние)

$$u_2^\pm = -u_\theta(\theta = \pm\pi) = \pm \frac{\kappa + 1}{2G} K_I \sqrt{\frac{-x_1}{2\pi}} \quad (x_1 \leq 0),$$

находим, что

$$\bar{\delta} = 4K_I^2/(\pi EY).$$

В случае плоской деформации аналогичная формула приобретает вид

$$\bar{\delta} = \frac{4(1 - \nu^2)}{3\pi E} \frac{K_I^2}{Y}.$$

3.4.5. Трещина антиплоского сдвига в идеально упругопластическом теле

Известно, что некоторые наблюдаемые особенности развития трещин нормального отрыва можно объяснить из более простых решений для антиплоской деформации. Анализ антиплоских состояний имеет важное значение и как самостоятельная задача, и для предсказания тех результатов, которые можно будет получить при исследовании более сложного случая трещины нормального отрыва.

Следуя [252], рассмотрим решение задачи о локализации пластических деформаций у вершины трещины антиплоского сдвига в неограниченном идеально упругопластическом теле.

Прежде всего заметим, что в пластической зоне, окружающей вершину трещины, должны удовлетворяться уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0,$$

условие текучести

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = k^2,$$

т.е. имеется ровно два уравнения для определения двух компонент тензора напряжений.

Полагая

$$\sigma_{13} = -k \sin \theta, \quad \sigma_{23} = k \cos \theta,$$

можно удовлетворить условию текучести, а из уравнения равновесия получить

$$\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0.$$

Это уравнение без труда интегрируется методом характеристик: угол θ не изменяется вдоль характеристики, характеристики есть прямые вида

$$x_2 = \operatorname{tg} \theta x_1 + \operatorname{const}.$$

Таким образом, поле характеристик в пластической зоне имеет веерообразный характер: характеристики выходят под различными углами из вершины трещины и — под прямым углом из ее берегов (см. рис. 38).

Соотношения ассоциированного закона течения

$$\dot{\gamma}_{13} = \dot{\lambda} \sigma_{13}, \quad \dot{\gamma}_{23} = \dot{\lambda} \sigma_{23},$$

где

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_1}, \quad \dot{\gamma}_{23} = \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_2}$$

и точка обозначает дифференцирование по параметру нагружения, позволяют получить уравнение для скорости \dot{u}_3 и установить, что характеристики статического поля совпадают с линиями скольжения и скорость \dot{u}_3 не изменяется вдоль характеристики.¹⁴³

Вводя полярные координаты с началом в вершине трещины, можно утверждать, что напряжения в пластической зоне вблизи вершины трещины постоянны вдоль радиусов (рис. 38) $\theta = \operatorname{const}$ и

$$\sigma_{\theta z} = k, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (5.1)$$

где k — предел текучести при сдвиге.

Тогда в силу того, что приращение смещения du_3 при нагружении постоянно вдоль радиусов $\theta = \operatorname{const}$, само перемещение в пластической зоне при монотонном нагружении также постоянно вдоль радиусов: $u_3 = u_3(\theta)$. Последнее означает, что в зоне текучести деформации сдвига вычисляются как

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_3}{\partial \theta}. \quad (5.2)$$

Обозначая через $R(\theta)$ расстояние до границы пластической зоны и замечая, что на границе, согласно определяющему закону упругости $\varepsilon_{\theta z} = k/2G$ (деформация, соответствующая началу текучести), получаем, что для деформаций сдвига на границе области текучести

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2R(\theta)} \frac{du_3}{d\theta} = \frac{k}{2G}. \quad (5.3)$$

¹⁴³Поскольку с развитием нагружения, как это следует из только что полученного статического решения, главные направления поля напряжений в зоне пластического течения не изменяют своей ориентации, то нагружение каждого элемента пластической зоны — простое. Поэтому соотношения ассоциированного закона течения могут быть проинтегрированы по параметру нагружения и полные соотношения между напряжениями и деформациями будут устанавливать просто их пропорциональность.

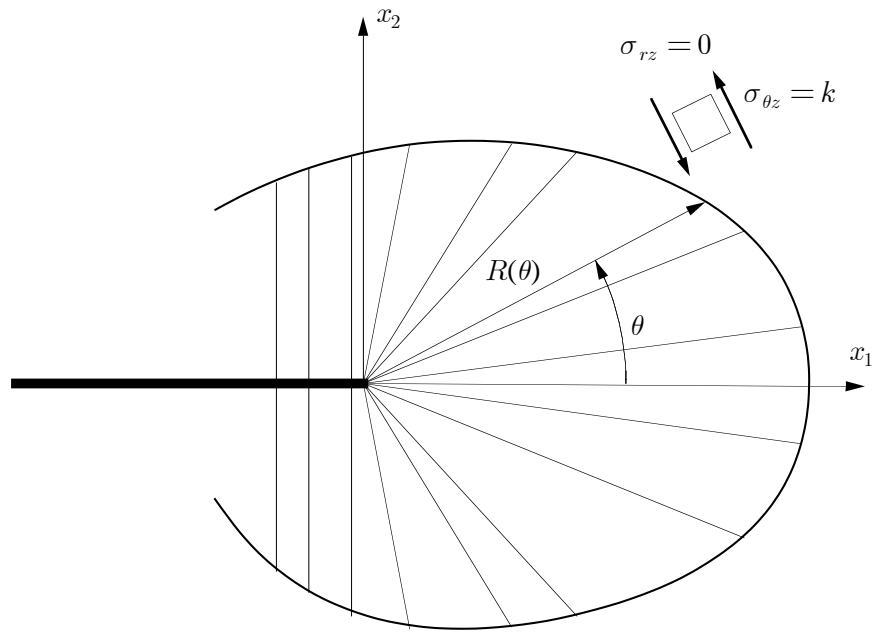


Рис. 38. Веерообразное поле скольжения у вершины трещины антиплоского сдвига в идеально упругопластическом теле

Производную $du_3/d\theta$ в (5.3) можно исключить, что приводит к

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{k}{G} \frac{R(\theta)}{r}, \quad (5.4)$$

подстановка которого в формулу (5.3) позволяет вычислить распределение перемещений в пластической зоне

$$u_3 = \frac{k}{G} \int_0^\theta R(\theta) d\theta. \quad (5.5)$$

Из соотношения (5.4) следует, что при наличии пластического течения сдвиговые деформации в вершине трещины имеют особенность более сильную, чем известная упругая сингулярность. Можно также ожидать, что в рассматриваемом случае имеется скачок перемещений; этот скачок должен равняться раскрытию трещины в направлении, перпендикулярном плоскости x_1x_2 , и определяться выражением

$$\delta = u_3\left(\frac{\pi}{2}\right) - u_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{G} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(\theta) d\theta, \quad (5.6)$$

вытекающим из соотношения (5.5).

Если известно расстояние вдоль радиуса до упругопластической границы $R(\theta)$, то можно полностью определить решение для пластической зоны. Это расстояние должно быть выбрано таким образом, чтобы существовало линейно

упругое поле напряжений, нигде не превосходящее предела текучести, соответствующее заданным нагрузкам и удовлетворяющее условиям непрерывности на границе раздела упругой и пластической зоны.

Вне зоны пластического течения перемещение u_3 удовлетворяет уравнению Лапласа. Перемещение u_3 — гармоническая функция переменной $z = x_1 + ix_2$, и ее можно представить как мнимую часть некоторой аналитической функции

$$u_3 = \frac{1}{G} \text{Im}[\Omega(z)]. \quad (5.7)$$

Из закона Гука для упругих деформаций

$$\varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G}, \quad \varepsilon_{32} = \frac{\sigma_{32}}{2G}$$

и из соотношений Коши

$$2\varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad 2\varepsilon_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

имеем

$$\sigma_{32} + i\sigma_{31} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \text{Im}[\Omega(z)] = \Omega'(z), \quad (5.8)$$

откуда следует, что комбинация $\sigma_{32} + i\sigma_{31}$ также является аналитической функцией переменной z .

Теперь целесообразно рассмотреть это уравнение как утверждение, что в упругой области z является аналитической функцией от $\sigma_{32} + i\sigma_{31}$:

$$x_1 + ix_2 = F(\xi), \quad (5.9)$$

где функция F аналитична, а безразмерное комплексное напряжение ξ равно

$$\xi = \frac{\sigma_{32} + i\sigma_{31}}{k}. \quad (5.10)$$

Такое преобразование особенно эффективно для учета граничного условия на линии раздела упругой и пластической зон $r = R(\theta)$.¹⁴⁴ На этой линии, если предположить напряжения непрерывными, должно выполняться граничное условие

$$\sigma_{31} = -k \sin \theta, \quad \sigma_{32} = k \cos \theta,$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$|\xi| = 1, \quad (5.11)$$

¹⁴⁴Справедливости ради следует отметить, что приводимая ниже оценка размера зоны локализации и величина раскрытия трещины в приближении маломасштабного пластического течения могут быть получены вполне элементарно (см. [63], с. 258, 259), не прибегая к конформному преобразованию упругой зоны.

из которого вытекает, что неизвестная граница пластической зоны, описываемая условием текучести $\sigma_{32}^2 + \sigma_{31}^2 = k^2$, отображается на дугу единичной окружности в плоскости ξ .

Граничные условия для $F(\xi)$ вдоль границы пластической зоны записываются следующим образом: в точке границы раздела, отвечающей полярному углу θ , $\xi = e^{-i\theta}$, а $x_1 + ix_2 = R(\theta)e^{i\theta}$.

Таким образом,

$$R(\theta) = e^{-i\theta} F(e^{-i\theta}), \quad (5.12)$$

что дает формулу для расстояния вдоль радиуса до границы раздела.

Заметим, что в плоскости переменной $\bar{\xi}$ берегам трещины $x_1 < 0$, $x_2 = 0$ соответствуют отрезки мнимой оси, так как на ней $\sigma_{32} = 0$. И наоборот, функция $F(\xi)$ должна быть вещественной и отрицательной, когда $\sigma_{32}/k = \operatorname{Re}\xi = 0$.

Величина $R(\theta)$ должна быть вещественной, следовательно

$$\operatorname{Im}\{e^{-i\theta} F(e^{-i\theta})\} = 0. \quad (5.13)$$

Дальнейшие рассуждения мы продолжим, предположив, что пластическое течение у вершины трещины является маломасштабным: напряженное состояние вдали от вершины трещины должно асимптотически описываться главным членом упругой асимптотики вблизи вершины трещины. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \sigma_{rz} \cos \theta - \sigma_{\theta z} \sin \theta \rightarrow -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \sigma_{32} &= \sigma_{rz} \sin \theta + \sigma_{\theta z} \cos \theta \rightarrow \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$, или иначе

$$\sigma_{32} + i\sigma_{31} = \xi k \rightarrow \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi z}} \quad (5.14)$$

при $|z| \rightarrow \infty$.

Это условие можно выразить через функцию $F(\xi)$, определенную соотношением (5.9), следующим образом:

$$x_1 - ix_2 = F(\xi) \rightarrow \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2 \xi^2} \quad (5.15)$$

при $|\xi| \rightarrow 0$.

При отображении физической плоскости $x_1 x_2$ (рис. 39) на плоскость $\bar{\xi}$ (рис. 40) бесконечно удаленные точки отображаются в начало координат, граница пластической зоны — в дугу полуокружности, берега трещины — в отрезки мнимой оси.

Поскольку на берегах трещины $x_2 = 0$, функция $F(\xi)$ должна быть вещественной на мнимой оси ξ .

Решение, удовлетворяющее условию (5.13) на границе пластической зоны и обеспечивающее правильное асимптотическое поведение в соответствии с (5.15), имеет вид

$$F(\xi) = \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2} \left(1 + \frac{1}{\xi^2} \right). \quad (5.16)$$

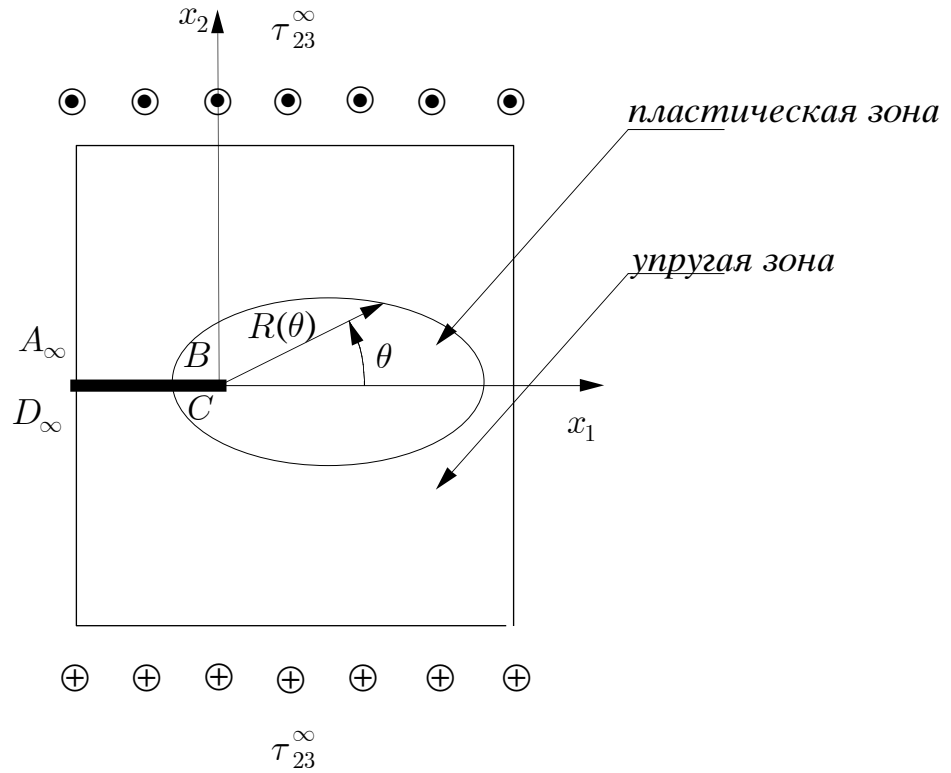


Рис. 39. Физическая z -плоскость

Подстановка этого выражения в формулу (5.12) дает

$$R(\theta) = c \cos \theta, \quad (5.17)$$

где

$$c = R(0) = \frac{K_{III}^2}{\pi k^2}$$

— диаметр пластической зоны.

С учетом соотношения (5.10) получаем выражение для напряжений в упругой зоне:

$$\sigma_{32} + i\sigma_{31} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \left(z - \frac{K_{III}^2}{2\pi k^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.18)$$

Деформации и смещения в пластической зоне и раскрытие трещины равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta z} &= \frac{K_{III}^2}{2\pi Gk} \frac{\cos \theta}{r}, & \varepsilon_{rz} &= 0, \\ u_z &= \frac{K_{III}^2}{\pi Gk} \sin \theta, & \delta &= \frac{2K_{III}^2}{\pi Gk} = 2\frac{k}{G} R(0). \end{aligned} \quad (5.19)$$

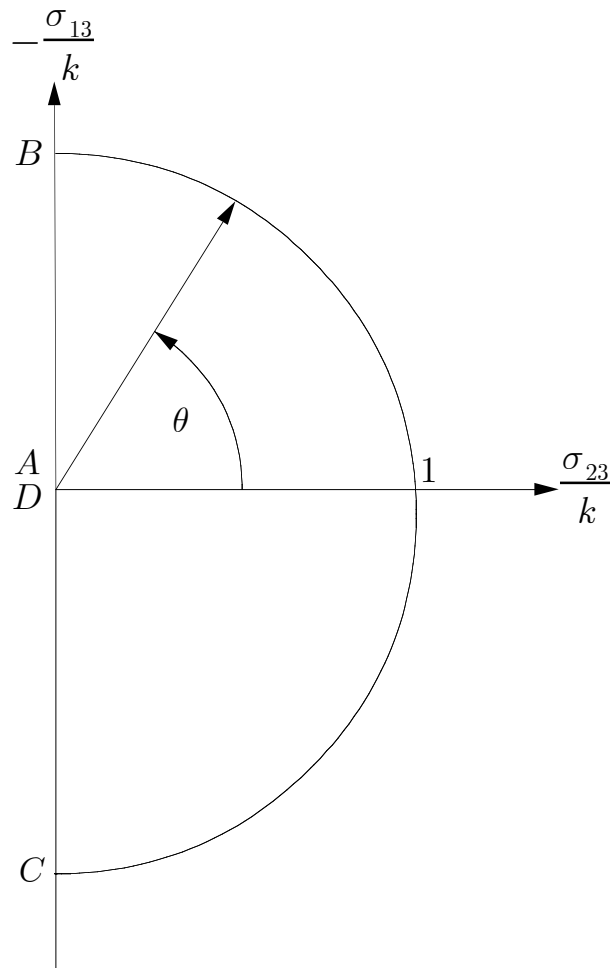


Рис. 40. $\bar{\xi}$ -плоскость "годографа". Полуокруг — образ упругой зоны при отображении $z \rightarrow \xi$; дуга — образ пластической зоны

Можно заметить, что пластическое течение приводит к появлению поля напряжений, совпадающего с тем же сингулярным упругим полем, но сдвинутым вперед на половину диаметра пластической зоны. Именно этот факт был установлен Ирвином для трещины **типа I**.

В работе [252] исследована задача о трещине антиплоского сдвига в полуплоскости без ограничений на нагрузки и размер пластической зоны. Размер пластической зоны в направлении линии трещины оказался равным

$$c = \frac{4l\lambda}{\pi(1-\lambda^2)} \int_0^\lambda \frac{t\sqrt{(\lambda^2-t^2)(\lambda^{-2}-t^2)}}{1-t^2} dt,$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma_{23}^\infty}{k}.$$

Подобная упругопластическая задача для выреза (и его предельного случая — разреза) в полосе исследована Райсом в 1966 г.¹⁴⁵ Основной характерной особенностью решения является то, что пластическая зона, развивающаяся от

¹⁴⁵Читатель может найти решения этого круга задач, например, в монографии [1], с. 25-33.

конца разреза, имеет тенденцию к сужению в поперечном направлении по мере продвижения ее края к свободной границе полосы. Дальнейшая схематизация такой геометрии пластической зоны позволяет предложить упрощенное представление пластической зоны в виде отрезка, примыкающего к концу разреза.

3.4.6. Трещина антиплоского сдвига с узкой зоной локализации пластических деформаций

Ниже с помощью метода годографа, следуя [68], будет дано решение задачи о трещине продольного сдвига $|x_1| \leq l$ в идеально упругопластической среде, когда под действием напряжений дальнего поля $\tau_\infty = \tau_{32}^\infty$ перед вершиной трещины образуется узкая зона локализации пластических деформаций, вытянутая вдоль линии трещины.

Напрашивается аналогия с моделью Леонова—Панасюка—Дагдейла [85], [214].¹⁴⁶ Представим зону локализации в виде отрезка длины s на продолжении трещины. В пределах этого отрезка должно выполняться условие текучести

$$\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2 = k^2.$$

Заметим, что схема Дагдейла базируется на другом критерии пластичности, а именно критерии Треска.

В упругой части среды напряжения и перемещения могут быть выражены через комплексный потенциал:

$$\tau_{32} + i\tau_{31} = \omega'(z), \quad u_3 = \frac{1}{G} \text{Im} \omega(z).$$

Введем новую комплексную переменную ξ по формуле

$$\xi = \tau_{32} + i\tau_{31} = \omega'(z),$$

задавая тем самым отображение физической плоскости на плоскость "годографа" (τ_{32}, τ_{31}) (рис. 41).

Ясно, что при $\xi \rightarrow \tau_{32}^\infty$ отображение $z = z(\xi)$ должно иметь особенность вида

$$z^2 = O\left(\frac{1}{\tau_{32}^\infty - \xi}\right).$$

Конформное преобразование $z = z(\xi)$ без труда определяется и имеет вид

$$z(\xi) = \frac{\xi l (\tau_\infty^2 + k^2)}{\sqrt{(k^4 - \tau_\infty^2 \xi^2)(\xi^2 - \tau_\infty^2)}}.$$

¹⁴⁶Возможность применения подхода Дагдейла к задаче о трещине продольного сдвига в идеально упругопластической среде оспаривается в статье [267] на том основании, что при этом в упругой зоне получаются напряжения, превосходящие предел текучести. В этой же работе приводится анализ формы пластической зоны у вершины трещины продольного сдвига согласно критерию Мизеса по уравнениям деформационной теории Генки при предположении, что в процессе нагружения не происходит локальных разгрузок.

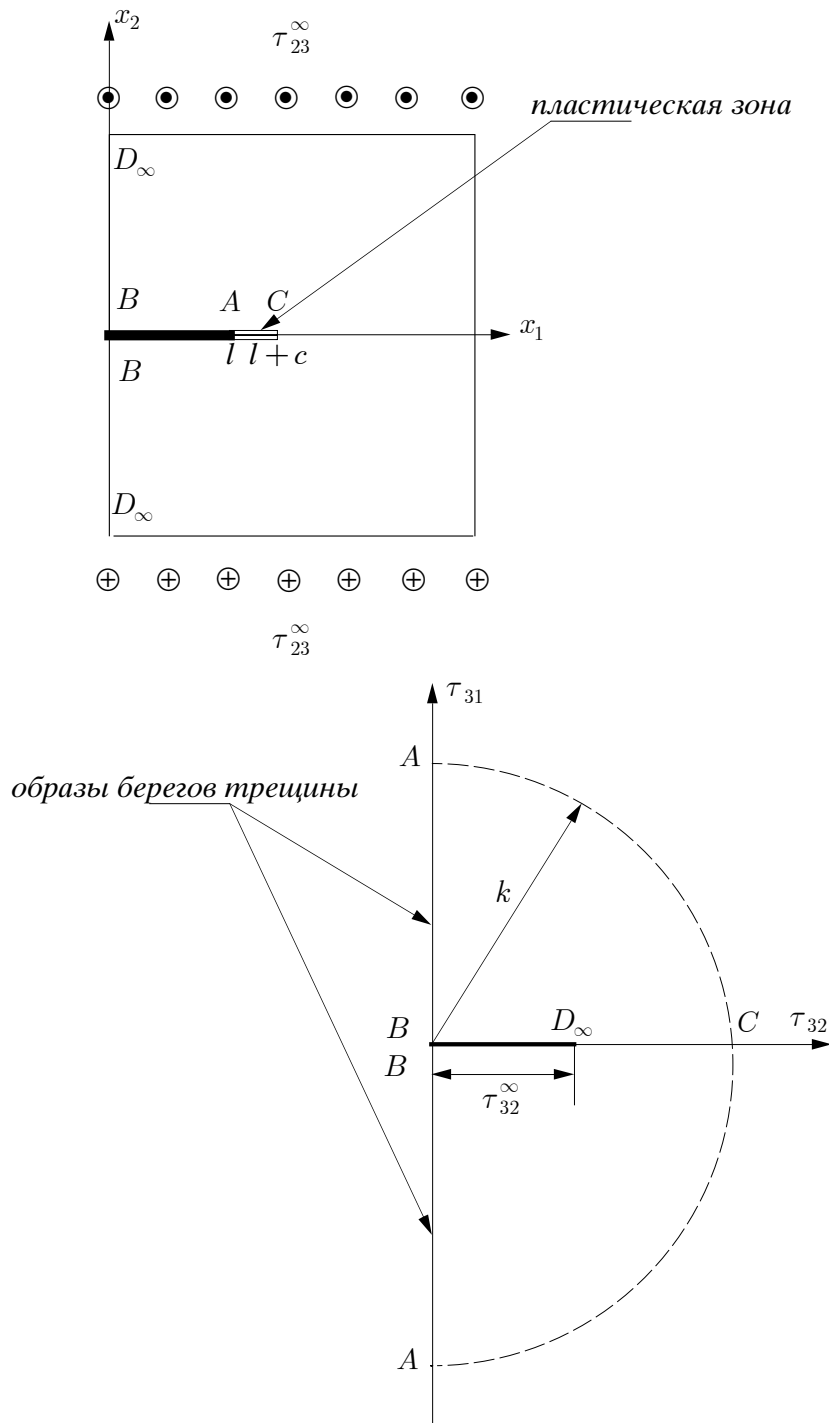


Рис. 41. Физическая плоскость и плоскость "годографа" в задаче об узкой зоне локализации пластических деформаций перед вершиной трещины **типа III**

Поскольку

$$z(k) = l + c = \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{k^2 - \tau_\infty^2},$$

то длина пластической зоны есть

$$c = l \frac{2\tau_\infty^2}{k^2 - \tau_\infty^2}.$$

Для раскрытия трещины получаем формулу

$$\delta = -l \frac{k^2 + \tau_\infty^2}{G\tau_\infty^2} \left(\ln \frac{k - \tau_\infty}{k + \tau_\infty} + \frac{2k\tau_\infty}{k^2 + \tau_\infty^2} \right).$$

Для малых значений отношения τ_{32}^∞/k , что соответствует маломасштабной текучести, длина пластической зоны вычисляется как

$$c = l \frac{2\tau_\infty^2}{k^2} = \frac{2K_{III}^2}{\pi k} \quad (K_{III} = \tau_{32}^\infty \sqrt{\pi l}).$$

3.4.7. Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния в идеально пластическом теле

Целью настоящего раздела будет исследование полей напряжений и деформаций в непосредственной окрестности вершины трещины в идеально пластическом теле в условиях плоской деформации.¹⁴⁷ Основные соотношения теории пластического плоского деформированного состояния были рассмотрены выше, в разделе 3.4.3.

Если упругие деформации несжимаемы и пластическая зона полностью окружает вершину трещины, то задача формально статически определима и можно использовать сетку скольжения (см. рис. 32), известную из жесткопластического анализа течения у разрезов (см. раздел 3.4.3Г), и построить, хотя бы частично, поле напряжений у вершины трещины. Правда не известно, до каких пределов можно использовать эту сетку, поскольку не известно положение границы раздела упругой и пластической зон. На самом деле задача о локализованном пластическом течении у вершины трещины нормального отрыва не является статически определимой.¹⁴⁸ Действительно, граница локализованного пластического течения, как показывают данные экспериментов,¹⁴⁹ может резко поворачивать по направлению к вершине трещины. Но это означает, что одна и та же характеристика в пределах одной и той же пластической зоны может дважды подходить к упругопластической границе. Последнее обстоятельство чрезвычайно важно, поскольку в этом случае, на основании теоремы Хилла ([172], с. 278), можно заключить, что одних лишь уравнений для напряжений недостаточно для определения напряжений и границы текучести.

¹⁴⁷В рамках такого подхода трещину можно считать полубесконечной, а истинные граничные условия нагружения тела с трещиной заменяются асимптотическими условиями в бесконечно удаленной точке.

¹⁴⁸По поводу термина "статически определимая задача" и смысла, который в него вкладывается разными авторами см. [172], с. 158-159, с. 278-280. В [62] (с. 259) используется термин "локально статически определимая задача".

¹⁴⁹Определение формы зоны текучести у вершины трещины нормального отрыва, несмотря на многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, нельзя считать завершенным. Интересная дискуссия и библиографические данные по этому поводу имеются в [26], с. 90-94. В целом можно считать установленным, что зона текучести у вершины трещины нормального отрыва по форме напоминает ухо (так называемое "пластическое ухо"). Наиболее удаленная от вершины трещины точка границы текучести расположена на луче, наклоненном под углом примерно 70°. Обзор результатов экспериментальных исследований дан в [117], с. 148-159.

Приводимый в этом разделе анализ (это относится также и к разделам 3.4.8, 3.4.9) следует рассматривать лишь как приближенный, поскольку речь не идет о полном решении упругопластической задачи: поле напряжений в упругой зоне, окружающей локализованную зону текучести вообще исследоваться не будет. Поэтому нет возможности определить, более или менее точно, границу локализованной текучести.

Численный анализ локализации пластических деформаций и форма зоны текучести у вершины полубесконечной трещины нормального отрыва в идеально пластическом теле, как в условиях плоского напряженного состояния, так и в условиях плоской деформации, проведен, например, в работе [117], с. 159-182. Это исследование реализовано методом конечных элементов по соотношениям деформационной теории пластичности. В этой работе читатель может найти богатый графический материал, иллюстрирующий результаты численного анализа.

Пусть среда в непосредственной окрестности вершины трещины находится в состоянии идеальной текучести. Любое условие текучести при плоском деформированном состоянии приводится, как известно, к условию текучести Мизеса

$$T = \sqrt{3}k. \quad (7.1)$$

Вычисляя интенсивность напряжений T , можно получить

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = 4k^2. \quad (7.2)$$

К условию текучести (7.2) следует присоединить также два дифференциальных уравнения равновесия, которые в предположении отсутствия объемных сил принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (7.3)$$

Если на границе тела заданы напряжения (в случае трещины необходимо задать условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины), то сформулирована полная система уравнений для определения напряженного состояния (независимо от деформаций). Краевые задачи такого типа называются статически определимыми.¹⁵⁰

Воспользуемся тем обстоятельством, что напряженное состояние может быть найдено без рассмотрения деформаций и исследуем его, переходя к полярной системе координат r, φ с центром в вершине трещины.

Дифференциальные уравнения равновесия и условие текучести в полярной

¹⁵⁰По этой причине в рассматриваемой задаче граничные условия на бесконечности не формулируются и исследуется лишь непосредственная окрестность вершины трещины. Здесь также необходимо отметить, что решение статически определимой задачи не является полным, поскольку не исследуется кинематика течения: условия совместности не формулируются, и после нахождения поля напряжений, вообще говоря, не известно, существует ли соответствующее ему совместное поле деформаций.

системе координат имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2 &= 4k^2.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Граничные условия есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pi) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pi) = 0.\tag{7.5}$$

В силу симметрии задачи можно перейти к изучению одной из полуплоскостей, дополняя граничные условия на одном из берегов трещины условиями симметрии:

$$\sigma_{r\varphi}(r, \varphi = 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \varphi}(r, \varphi = 0) = 0.\tag{7.6}$$

Решение краевой задачи (7.4)–(7.6) хорошо известно и приведено, например, в [62], [148].

Получим распределение напряжений иным способом. Поскольку в идеально пластическом материале напряжения ограничены и не могут превзойти предела текучести k (это обстоятельство исключает отрицательную степень r в асимптотическом разложении поля напряжений в окрестности вершины трещины, положительные степени должны отсутствовать, так как изучаемый материал является идеально пластическим и, следовательно, напряжения при $r \rightarrow 0$ должны стремиться к конечному пределу), то можно разыскивать напряжения в окрестности вершины трещины в виде разложения по собственным функциям:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sigma_{ij}^{(0)}(\varphi) + O(r^\alpha) \quad (\alpha > 0), \quad r \rightarrow 0.\tag{7.7}$$

Асимптотическое представление напряжений (7.7) на самом деле, после отбрасывания члена $O(r^\alpha)$, становится точным и устанавливает, что компоненты тензора напряжений не изменяются вдоль радиальных лучей, исходящих из вершины трещины, что соответствует действительному положению дел. Как известно, распределение напряжений в пластической зоне у вершины трещины получается компоновкой равномерных полей и поля, представляющего собой простую волну. В зоне простой волны радиальные лучи, исходящие из вершины трещины, являются характеристиками, вдоль которых напряжения не изменяются. Именно поэтому присутствие слагаемого $O(r^\alpha)$ в формуле (7.7) — чисто номинальное.

Подставляя (7.7) в разрешающую систему уравнений (7.4) и пренебрегая малыми при $r \rightarrow 0$ величинами, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{r\varphi}^{(0)}}{d\varphi} + \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= 0, \\ \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}}{d\varphi} + 2\sigma_{r\varphi}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

и алгебраическому условию

$$(\sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)})^2 + 4(\sigma_{r\varphi}^{(0)})^2 = 4k^2. \quad (7.9)$$

Условие текучести будет тождественно выполнено, если положить

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= \sigma^{(0)}(\varphi) - k \cos 2\theta^{(0)}(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \sigma^{(0)}(\varphi) + k \cos 2\theta^{(0)}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^{(0)} &= k \sin 2\theta^{(0)}(\varphi), \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $\sigma^{(0)}(\varphi)$ и $\theta^{(0)}(\varphi)$ — функции, подлежащие определению.

Исследование системы уравнений (7.8), (7.9) вместе с граничными условиями на берегу трещины, условиями симметрии на ее продолжении и представлением (7.10) приводит к следующему распределению напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4 \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\varphi + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (7.11)$$

$$\begin{cases} 3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi. \end{cases}$$

В приведенных формулах компоненты тензора напряжений отнесены к величине $2k$ и верхний символ $^{(0)}$ опущен, тем более, что первое слагаемое в (7.7) по существу дает точное распределение напряжений. Полученное распределение напряжений показано на рис. 42.

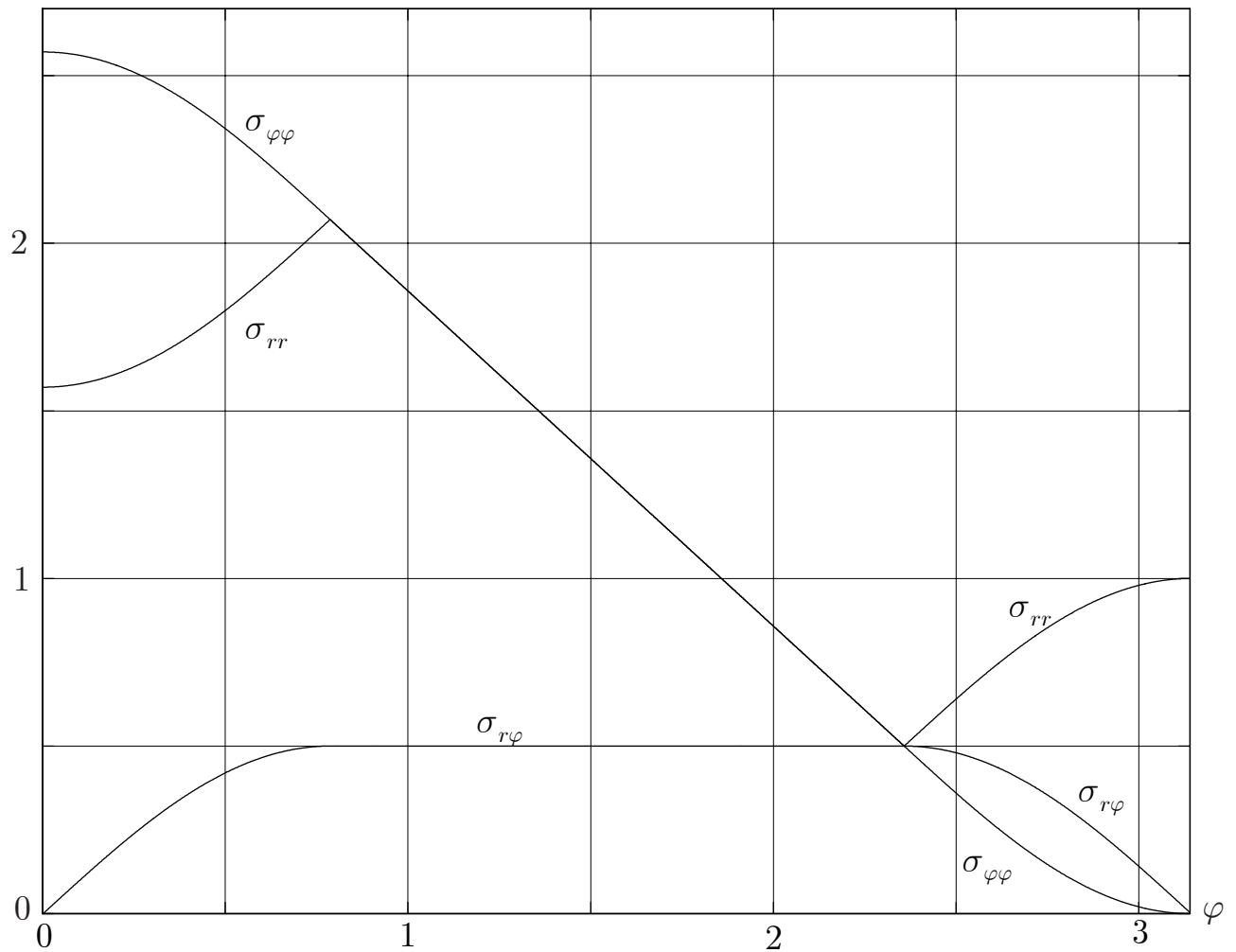


Рис. 42. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского деформированного состояния

Поле линий скольжения вблизи вершины трещины состоит из двух областей равномерного напряженного состояния, соединенных посредством центрированных зон OCB и $OB'C'$ с веерообразной сеткой скольжения (рис. 43).

Приближенный анализ поля деформаций по соотношениям деформационной теории пластичности в предположении несжимаемости материала приведен в [313]. Принятые предположения и найденное выше поле напряжений позволяют качественно исследовать деформации в веерообразной области (рис. 43), где концентрация деформаций будет наибольшей. Для $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ справедливо равенство $\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi}$. Откуда следует, что внутри этой области $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0$.

Следует также отметить, что в областях равномерного напряженного состояния распределение деформаций остается неизвестным. Тем не менее, в центрированной зоне из кинематических соотношений, связывающих деформации и перемещения, и условий $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0$ может быть найдена структура поля перемещений, а именно:

$$u_r = f'(\varphi), \quad u_\varphi = -f(\varphi) + g(r). \quad (7.12)$$

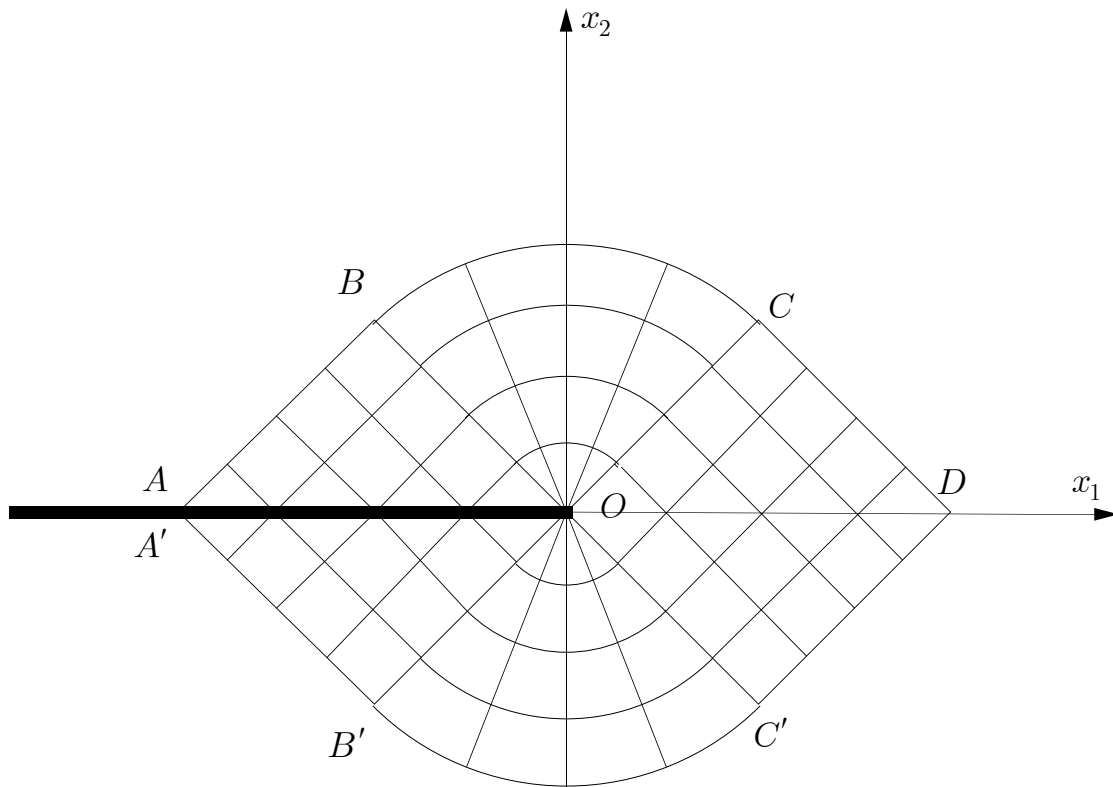


Рис. 43. Система скольжения (согласно неполной схеме анализа) в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского деформированного состояния

Сдвиговая деформация вычисляется по формуле

$$2\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = \frac{f''(\varphi) + f(\varphi)}{r} + g'(r) - \frac{g(r)}{r}. \quad (7.13)$$

Перейдем теперь к анализу деформаций и перемещений в непосредственной близости от вершины трещины. Ясно, что смещения стремятся к нулю при подходе к вершине трещины вдоль оси x_1 . Далее, предполагая, что деформации в области $OCDC'$ ограничены, находим, что $u_r \rightarrow 0$, $u_\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ вдоль луча $\varphi = \pi/4$. Следовательно, предположение о том, что сильная концентрация деформаций может быть только в веерообразной зоне,¹⁵¹ а в зоне $OCDC'$ деформации ограничены, приводит к тому, что деформация сдвига в этой зоне определяется выражением (в непосредственной окрестности вершины трещины $f(\pi/4) = f'(\pi/4) = 0$, а в самой вершине $g(0) = 0$ и значение $g'(0)$ конечно [148]):

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma_0 \frac{R(\varphi)}{r},$$

где Γ_0 есть интенсивность деформаций, соответствующая пределу пропорциональности (или пределу текучести k); функция $R(\varphi)$ определяется уравнением $\sqrt{3}\Gamma_0 R(\varphi) = f''(\varphi) + f(\varphi)$.

¹⁵¹Заметим, что данный в работе [313] анализ является приближенным (кинематика течения исследуется лишь в непосредственной окрестности вершины трещины и только в веерообразных зонах скольжения), а также не учитывает того, что в областях равномерного напряженного состояния вполне допустимо наличие некоторой более слабой особенности поля деформаций. Полное исследование кинематики течения у вершины трещины, по-видимому, отсутствует.

Вычислим далее инвариантный J -интеграл, производя интегрирование вдоль окружностей малого радиуса с центром в вершине трещины. Если предположить, что деформации ограничены в зонах равномерного напряженного состояния, примыкающих к свободным берегам трещины, то равномерные напряженные состояния не дают вклада в величину J -интеграла. Используя соотношения (7.11) для напряжений и формулы (7.12) для перемещений, вычислим инвариантный J -интеграл [313], [148]

$$J = 2\sqrt{3}k\Gamma_0 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R(\varphi) [\cos \varphi + (1 + 3\pi/2 - 2\varphi) \sin \varphi] d\varphi,$$

или

$$J = 2k \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du_2(r=0, \varphi)}{d\varphi} [\operatorname{ctg} \varphi + (1 + 3\pi/2 - 2\varphi)] d\varphi. \quad (7.14)$$

Если значение J -интеграла известно в зависимости от приложенных нагрузок, то полученную формулу можно использовать для приближенной оценки размера пластической зоны и величины раскрытия трещины.

3.4.8. Напряжения в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в идеально пластическом теле

Пластическая зона у вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния не всегда может моделироваться по схеме Дагдейла [214]¹⁵² узкой полосой на продолжении трещины, поскольку для некоторых металлов экспериментально наблюдалась иная картина локализации пластических деформаций. Кроме того, не стоит забывать, что схема Дагдейла основана на использовании критерия текучести Треска. Ясно, что интерес также представляет расчет локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва при условии текучести в форме Мизеса. В этом разделе обсуждается схема "диффузионного" пластического течения у вершины трещины, предложенная в [254].

Основные соотношения теории пластического плоского напряженного состояния были рассмотрены выше, в разделе 3.4.3. В разделе 3.4.3Г приведено решение задачи о распределении напряжений у вырезов в растягиваемой полосе в условиях плоского напряженного состояния.

Определим напряженное состояние в окрестности вершины трещины **типа I** в условиях плоского напряженного состояния, когда начало текучести соответствует условию Мизеса, исследуя вновь статически определимую задачу, со-

¹⁵²Модель Дагдейла локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва в упруго идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния в деталях будет рассмотрена ниже, в 3.6.

стоящую в отыскании решения системы дифференциальных уравнений раздела **3.4.3** для случая плоского напряженного состояния.

Условие текучести Мизеса при плоском напряженном состоянии имеет форму

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + 3\sigma_{r\varphi}^2 = 3k^2. \quad (8.1)$$

Условие текучести, в частности, удовлетворяется, если положить

$$\sigma_{rr} = k \cos \varphi, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k \cos \varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = k \sin \varphi. \quad (8.2)$$

Эти соотношения определяют решение для напряжений (см. [62], с. 237, 238) в веерообразной области простой волны с криволинейными характеристиками вида $r^2 \sin \varphi = \text{const}$, примыкающей к области равномерного напряженного состояния. Для декартовых компонент напряжений, связанных с физическими компонентами σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{r\varphi} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \sin 2\varphi + \sigma_{r\varphi} \cos 2\varphi, \end{aligned}$$

при этом справедливы формулы

$$\sigma_{11} = k \cos^3 \varphi, \quad \sigma_{22} = k \cos \varphi (2 + \sin^2 \varphi), \quad \sigma_{12} = -k \sin^3 \varphi. \quad (8.3)$$

Заметим, что полярная ось $\varphi = 0$ является асимптотической линией криволинейного семейства характеристик и соответствует параболическому вырождению уравнений статики плоского напряженного состояния. Компоненты напряжений на указанной оси вычисляются в виде $\sigma_{rr} = k$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 2k$.

Известно [254] и иное представление компонент тензора напряжений, позволяющее удовлетворить условию текучести

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a + b \cos 2\theta(\varphi) + c \sin 2\theta(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= a - b \cos 2\theta(\varphi) - c \sin 2\theta(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} &= -b \sin 2\theta(\varphi) + c \cos 2\theta(\varphi), \end{aligned} \quad (8.4)$$

где a , b , c — такие постоянные, что

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3k^2. \quad (8.5)$$

Полагая, что у вершины трещины напряжения имеют при $r \rightarrow 0$ асимптотику вида

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \sigma_{ij}^{(0)}(\varphi) + O(r^\alpha) \quad (\alpha > 0) \quad (8.6)$$

и подставляя (8.6) в дифференциальные уравнения равновесия и условие текучести, можно получить поле напряжений в окрестности вершины трещины в

идеально пластическом теле. На самом деле (ср. с (7.7)) первый член асимптотики (8.6) уже дает точное распределение напряжений и присутствие слагаемого $O(r^\alpha)$ в этой формуле чисто номинально.

Необходимо отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на продолжении трещины, используя лишь одно из представлений (8.2) или (8.4), не удастся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (8.2), или (8.4), в различных характерных областях¹⁵³ полуплоскости $0 \leq \varphi \leq \pi$. Границы областей определяются из условия непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ при переходе через эти границы. Компонента σ_{rr} может, в принципе, претерпевать разрыв.

Установлено, что существуют три характерные клинообразные области (см. рис. 44) с границами $\varphi = \varphi_{ob}$ и $\varphi = \varphi_{oc}$. В области $0 < \varphi < \varphi_{ob}$ решение имеет форму простой волны (8.2). В областях $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$ и $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$ реализуется равномерное напряженное состояние, и поле напряжений определяется формулами (8.4). В секторе $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$, примыкающем к свободному от нагрузок берегу трещины, напряжения без труда определяются и, следовательно, постоянные a , b , c известны. В секторе же $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$ необходимо определить другой набор констант a , b , c .

Условия непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ на лучах $\varphi = \varphi_{ob}$ и $\varphi = \varphi_{oc}$ выполняются за счет выбора постоянных a , b , c и положений φ_{ob} , φ_{oc} . Действительно, на пять постоянных a , b , c , φ_{ob} , φ_{oc} накладываются пять условий: требование (8.5) и четыре условия, следующих из непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ при переходе через границы $\varphi = \varphi_{ob}$ и $\varphi = \varphi_{oc}$ рассматриваемых характерных областей.

Если теперь удовлетворить двум условиям непрерывности при $\varphi = \varphi_{oc}$ за счет выбора постоянных a , b , c в решении для напряжений в секторе $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$, связанных также уравнением (8.5), то величины углов φ_{oc} и φ_{ob} в итоге находятся из условий непрерывности при $\varphi = \varphi_{ob}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_{ob} = \frac{1}{4} (-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) - \\ - \frac{1}{4} (1 + \cos 2\varphi_{oc}) \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi_{ob} = -\frac{1}{4} (1 + \cos 2\varphi_{oc}) \sin 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}) + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi_{ob} - \varphi_{oc}). \end{array} \right. \quad (8.7)$$

Численное решение приведенной системы тригонометрических уравнений есть $\varphi_{ob} = 79,7^\circ$ и $\varphi_{oc} = 151,4^\circ$.

Распределение напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в упругом идеально пластическом материале, подчиняющемся критерию текучести Мизеса, в каждой

¹⁵³Ясно, что решения уравнений в каждой из характерных областей должны иметь форму простых волн так, как это было при исследовании пластического течения у вырезов (см. раздел 3.4.3Г).

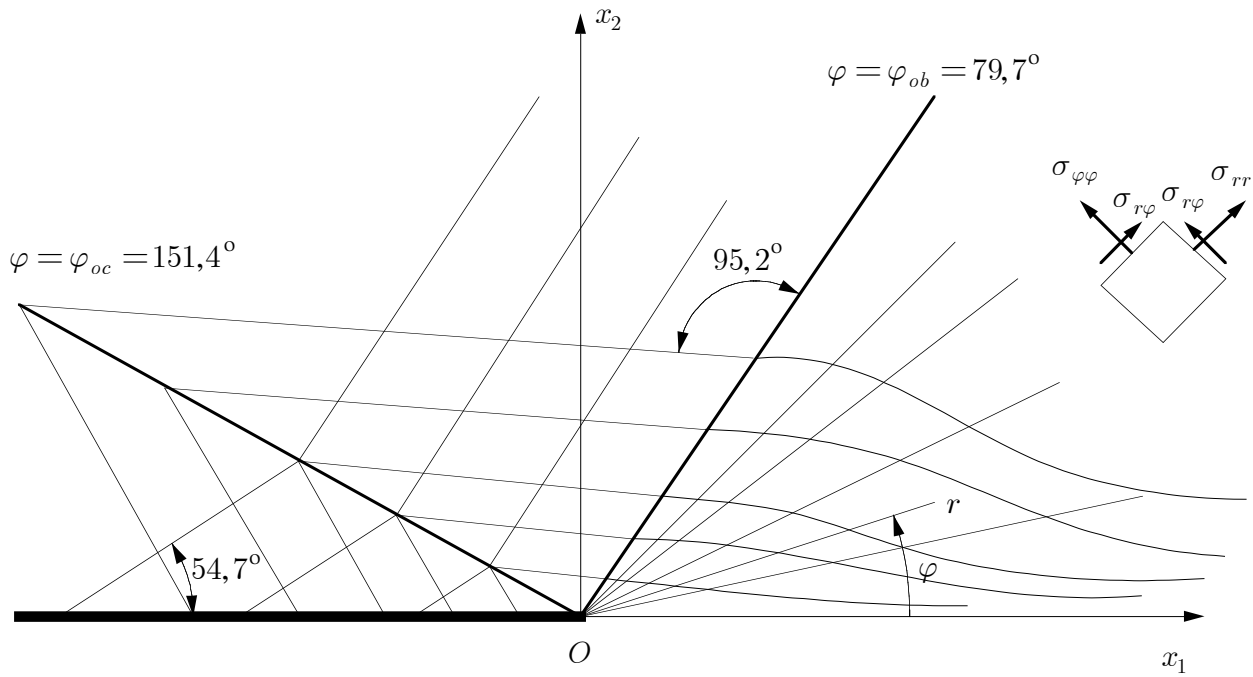


Рис. 44. Поле характеристик в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния (модель "диффузионного" течения)

из трех характерных клинообразных областей задается формулами (далее компоненты тензора напряжений относятся к величине $\sqrt{3}k$, где k — предел текучести на сдвиг и символ $^{(0)}$ опускается, тем более, что нулевое приближение и есть точное распределение напряжений) [254]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq \varphi_{ob}, \quad \varphi_{ob} = 79,7^\circ \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2\sigma_{rr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi; \\ \\ \varphi_{ob} \leq \varphi \leq \varphi_{oc}, \quad \varphi_{oc} = 151,4^\circ \\ \sigma_{rr} = \frac{1}{4}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}) + \\ + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \cos 2(\varphi - \varphi_{oc}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \sin 2(\varphi - \varphi_{oc}), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\sigma_{rr} + \frac{1}{2}(-1 + 3 \cos 2\varphi_{oc}), \\ \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi_{oc}) \sin 2(\varphi - \varphi_{oc}) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{oc} \cos 2(\varphi - \varphi_{oc}); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{oc} \leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 45. Видно, что напряжения σ_{rr} разрывны при $\varphi = \varphi_{oc}$.

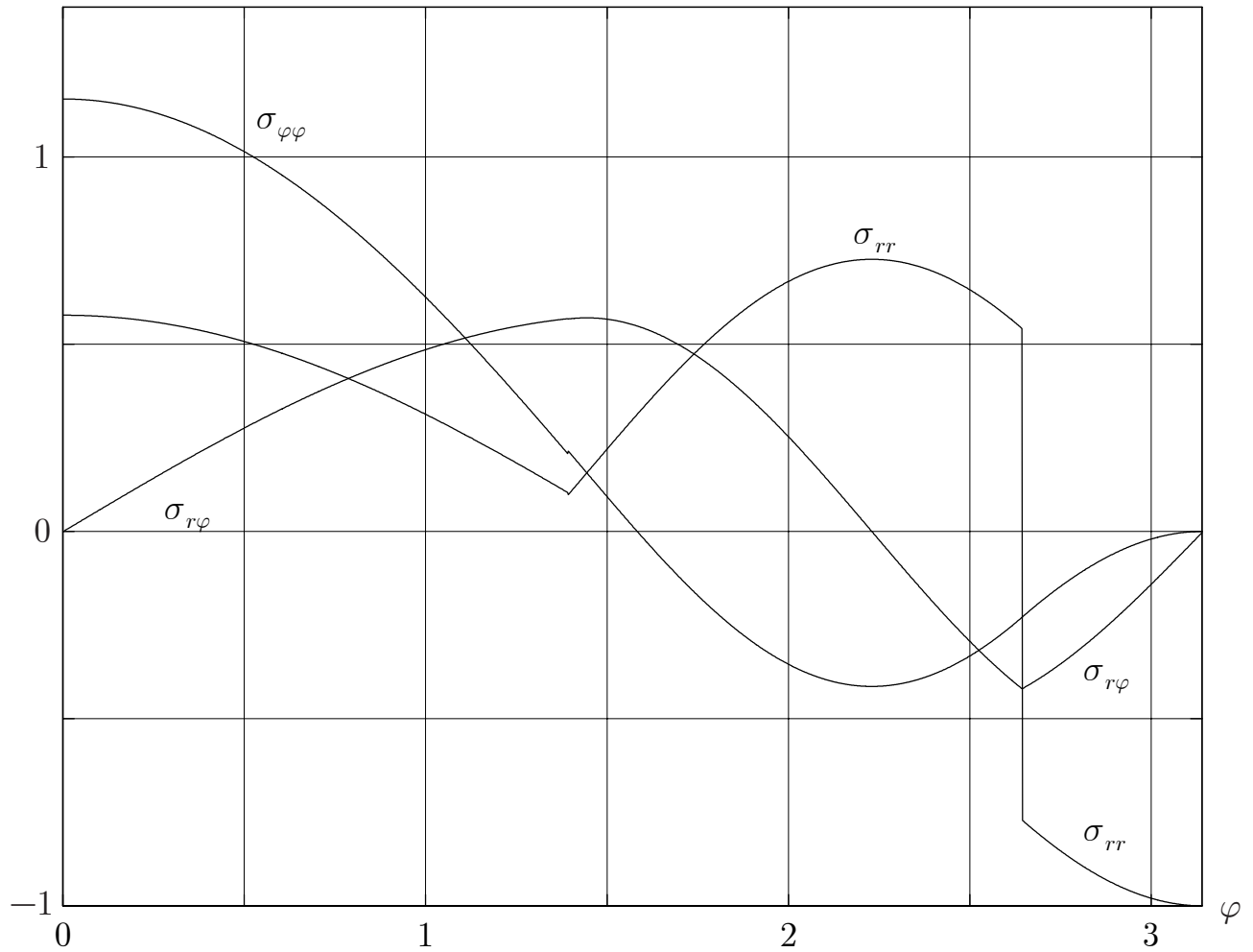


Рис. 45. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния (модель "диффузионного" течения)

Для декартовых компонент напряжений в секторах равномерного напряженного состояния $\varphi_{ob} < \varphi < \varphi_{oc}$ и $\varphi_{oc} < \varphi < \pi$ можно получить соответственно значения

$$\sigma_{11} = 0.0057k, \quad \sigma_{22} = 0.5307k, \quad \sigma_{12} = -0.9524k;$$

$$\sigma_{11} = -\sqrt{3}k, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0.$$

Поле характеристик, соответствующих локальному пластическому течению вблизи вершины трещины, изображено на рис. 44. Линия трещины является асимптотической линией криволинейных характеристик в области центрального поля $0 < \varphi < \varphi_{ob}$, для которого решение уравнений равновесия имеет форму простой волны.

Решение будет полным, если исследована также и кинематика течения. Однако даже при предположении о несжимаемости материала удастся получить асимптотику поля упругопластических деформаций только в секторе $0 \leq \varphi \leq \varphi_{ob}$, где концентрация пластических деформаций наибольшая. Внутри этого сектора деформации имеют особенность вида r^{-1} при приближении к вершине трещины. Определение поля деформаций в оставшихся зонах встречает большие трудности и до сих пор, по-видимому, не проведено.

3.4.9. Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского деформированного состояния в идеально пластическом теле

Для исследования напряженного состояния в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в идеально пластическом теле можно применить аналогичный ранее использованному подход. Очевидно, что разрешающая система уравнений будет идентичной рассмотренной в разделе 3.4.7, однако условия симметрии на продолжении линии трещины для этого типа трещины иные:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = 0) = 0, \quad u_r(r, \varphi = 0) = 0. \quad (9.1)$$

Условия симметрии можно сформулировать в напряжениях:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = 0) = 0, \quad \sigma_{rr}(r, \varphi = 0) = 0. \quad (9.2)$$

Распределение напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоской деформации в упругом идеальнопластическом материале задается формулами (компоненты тензора напряжений относятся к величине $2k$, где k — предел текучести на сдвиг) [254]:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \alpha_1, & \alpha_1 = \pi/8 + 1/4 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = -\varphi, & \sigma_{r\varphi} = 1/2; \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2, \quad \alpha_2 = 5\pi/8 + 1/4 \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cos \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \cos \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right), \\ \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin \left(2\varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \leq \varphi \leq 3\pi/4 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} = \varphi - \frac{1}{2} - \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_{rr} = -\frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi), \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 46.

Поле линий скольжения в окрестности вершины трещины изображено на рис. 47.

Для получения полного решения необходимо исследовать деформации в пластической области. Однако, как и в предыдущих случаях, удастся найти лишь асимптотику поля деформаций в веерообразных областях в случае несжимаемого материала. По аналогии с задачей о трещине нормального отрыва в условиях плоского деформированного состояния устанавливается, что наибольшая концентрация деформаций наблюдается в веерообразных областях скольжения. Пластические деформации в окрестности вершины трещины имеют особенность вида r^{-1} в секторах $0 \leq \varphi \leq \alpha_1$ и $\alpha_2 \leq \varphi \leq 3\pi/4$.

3.5. Применение канонического преобразования в задачах о локализованной плоской пластической деформации

Теория плоской деформации является одним из наиболее полно разработанных разделов теории пластичности.

Методы интегрирования уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности достаточно развиты и изложены, например, в монографиях [172], [48], [158], [62], [27]. Имеется широкий арсенал аналитических, приближенных и

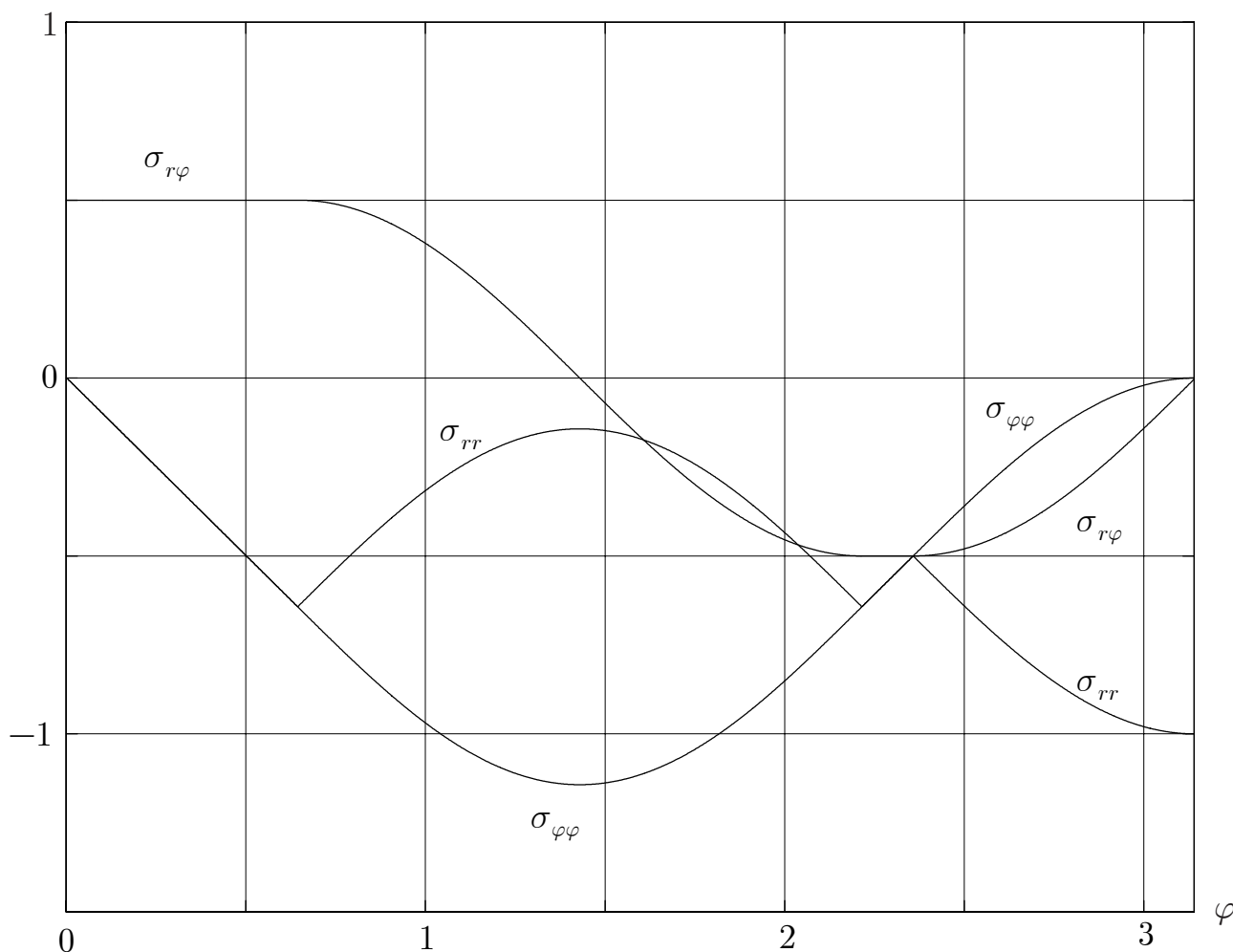


Рис. 46. Угловое распределение компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях пластического плоского деформированного состояния

численных методов решения краевых задач, к которым приводит расчет плоской пластической деформации. Именно поэтому попытка анализа локализации пластических деформаций в условиях плоского деформированного состояния имеет наибольшие шансы на успех.

Локализация пластических деформаций на перешейке в условиях плоского деформированного состояния может быть проанализирована на основе метода годографа, применение которого позволяет получить распределение напряжений в аналитической форме [134].¹⁵⁴ Эта же задача о концентрации напряжений у вырезов в полосе другим методом исследовалась В. В. Соколовским [158], с. 245-255.¹⁵⁵

¹⁵⁴Сущность этого метода заключается в преобразовании уравнений плоской задачи к криволинейным координатам, подобранным таким образом, что координатные линии совпадают с траекториями главных напряжений. Соотношения плоской задачи могут быть проинтегрированы вдоль линий главных напряжений, в результате чего может быть получено каноническое (сохраняющее площадь) отображение физической плоскости течения на вспомогательную плоскость, причем геометрия течения при этом становится очень простой. Каноническое преобразование определяется через посредство производящей функции, которая в свою очередь является интегралом одного точно линеаризуемого нелинейного уравнения в частных производных. Изложение в основном следует работе [134], которая по существу является проекцией на двумерный случай более общего подхода, предложенного в [135].

¹⁵⁵Как было указано В. В. Соколовским, применение модели жесткопластического тела при исследовании локализации пластических деформаций при растяжении полосы с вырезами допустимо далеко не всегда.

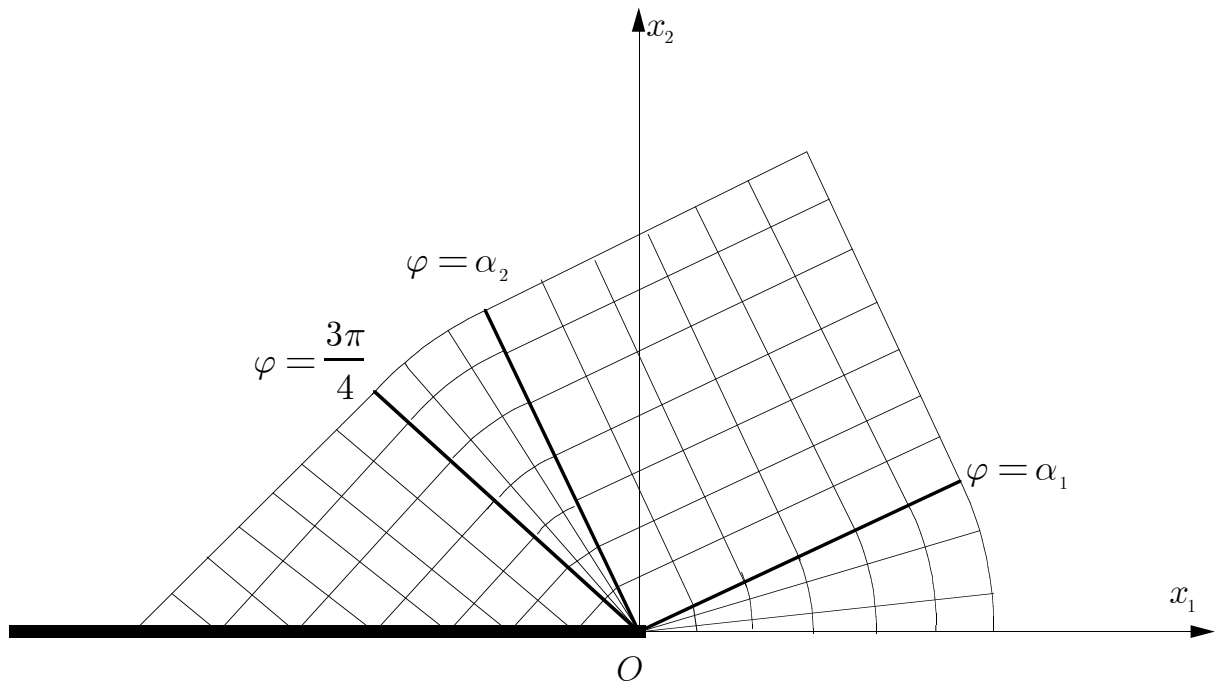


Рис. 47. Поле линий скольжения (согласно неполной схеме анализа) в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях пластического плоского деформированного состояния

Локализация пластических деформаций в пределах шейки растягиваемого образца в осесимметричной постановке исследовалась Н. Н. Давиденковым и Н. И. Спиридоновой (1945 г.), а также Бриджменом (P. W. Bridgman) примерно в это же время. Ими были получены приближенные формулы для оценки концентрации напряжений, включающие один неизвестный элемент — кривизну контура шейки в точке его пересечения с минимальным сечением. Изложение результатов по этому вопросу имеется в монографии [172], с. 312-316.

3.5.1. Канонические переменные плоской задачи теории пластичности

Основные уравнения теории плоской пластической деформации, их характеристики и соотношения вдоль характеристик уже приводились выше в разделе 3.4.3. Здесь мы ограничимся лишь минимально необходимыми общими уравнениями.

В условиях плоского деформированного состояния в пределах пластической зоны компоненты тензора напряжений определяются соотношениями Леви:

$$\sigma_{11} = \sigma + k \cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = \sigma - k \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k \sin 2\theta, \quad (1.1)$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, θ — угол наклона главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему собственному значению тензора напряжений, к оси x_1 , $k = Y/2$.

Расчет по жесткопластической схеме дает приемлемые результаты только когда жесткие зоны не затрудняют развитие пластических зон, а пластические деформации значительно превосходят упругие по величине.

Уравнения равновесия в случае плоской пластической деформации имеют вид [158]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x_1} - 2k \left[\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + 2k \left[\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

В области пластического течения введем ортогональные криволинейные координаты

$$x_1 = f(q^1, q^2), \quad x_2 = h(q^1, q^2)\tag{1.3}$$

так, чтобы линии $q^2 = \text{const}$ были фазовыми кривыми поля главных направлений, соответствующих наибольшему собственному значению тензора напряжений. Обозначив далее через h_1 , h_2 параметры Ламе указанной системы координат, можно показать, что в новых координатах уравнения равновесия (1.2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q^1} (\sigma + 2k \ln h_2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q^2} (\sigma - 2k \ln h_1) &= 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Эта система уравнений без труда интегрируется, и общий интеграл можно записать в форме: $h_1 h_2 = f_1(q^1) f_2(q^2)$.

Отображающие функции (1.3) необходимо удовлетворяют следующей нелинейной системе уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q^1} \frac{\partial f}{\partial q^2} + \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial h}{\partial q^2} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial q^1} \frac{\partial h}{\partial q^2} - \frac{\partial h}{\partial q^1} \frac{\partial f}{\partial q^2} &= \pm f_1(q^1) f_2(q^2).\end{aligned}$$

Можно затем подобрать замену независимых переменных $q^1 = q^1(\xi, \eta)$, $q^2 = q^2(\xi, \eta)$ так, чтобы в новых переменных ξ , η отображающие функции

$$x_1 = f(\xi, \eta), \quad x_2 = h(\xi, \eta)\tag{1.5}$$

удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} &= -1,\end{aligned}\tag{1.6}$$

которая, поскольку согласно второму из уравнений последней системы определитель Якоби отображения (1.5) по абсолютной величине равен единице, устанавливает каноничность отображения, определяемого формулами (1.5): отображение сохраняет площади и изменяет направления обхода контуров.

Заметим также, что система уравнений (1.6) антисимметрична при перестановке независимых переменных.

Введем производящую функцию $S(x_1, \eta)$ плоского канонического преобразования (1.5) [2]:

$$x_2 = \frac{\partial S(x_1, \eta)}{\partial x_1}, \quad \xi = -\frac{\partial S(x_1, \eta)}{\partial \eta}. \quad (1.7)$$

Без труда проверяется, что производящая функция $S(x_1, \eta)$ является интегралом следующего нелинейного уравнения второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} = \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}. \quad (1.8)$$

Это уравнение, нелинейность которого является несколько более сильной по сравнению с классическим уравнением Монжа—Ампера, выводится из первого уравнения системы (1.6), выражающего ортогональность криволинейной координатной сетки переменных ξ, η . Второе уравнение системы (1.6) удовлетворяется тождественно в силу (1.7). Заметим, что известен еще один метод (Е. Storchi, 1953) приведения уравнений плоской задачи, представленных через функцию напряжений Эри, к иному уравнению типа Монжа—Ампера в комплексной области (см. также [168], с. 265-266).

Принимая затем обозначение

$$W = \frac{\partial S}{\partial x_1}(x_1, \eta) \quad (1.9)$$

и переходя к тангенциальным координатам X, Y по формулам преобразования Лежандра¹⁵⁶

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial W}{\partial x_1}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ Z &= x_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} - W, \end{aligned}$$

относительно функции $Z = Z(X, Y)$ получается линейное уравнение второго порядка в частных производных

$$(1 + X^2) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - Y^2 \frac{1 - X^2}{1 + X^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0. \quad (1.10)$$

¹⁵⁶Необходимые сведения, касающиеся преобразования Лежандра, приводятся в **Приложении I**. Интересно отметить, что уравнение (1.8) инвариантно относительно преобразования Лежандра: замена в нем независимых переменных и функции S

$$x_1^* = \frac{\partial S}{\partial x_1}, \quad \eta^* = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad S^* = x_1 x_1^* + \eta \eta^* - S$$

приводит к точно такому же уравнению, что и (1.8):

$$\frac{\partial^2 S^*}{\partial \eta^{*2}} = \left[\left(\frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^* \partial \eta^*} \right)^2 - \frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^{*2}} \frac{\partial^2 S^*}{\partial \eta^{*2}} \right] \frac{\partial^2 S^*}{\partial x_1^{*2}}.$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, принадлежит к гиперболическому типу.

Преобразуем полученное уравнение к характеристическим переменным и новой неизвестной функции по формулам:

$$u = \operatorname{arctg} X, \quad v = \ln \sqrt{1 + X^2} - \ln Y, \quad F = Z \cos u. \quad (1.11)$$

В результате этого преобразования получается телеграфное уравнение относительно новой неизвестной функции $F(u, v)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + F = 0. \quad (1.12)$$

Нетрудно заметить, что переменная u есть угол наклона первого главного направления тензора напряжений к оси x_1 .

Так как преобразование Лежандра инволютивно (см., например, [2]), то можно выразить переменные x_1, x_2, η через переменные X, Y, Z :

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad x_2 = X \frac{\partial Z}{\partial X} + Y \frac{\partial Z}{\partial Y} - Z,$$

$$\eta = \frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Преобразуя последние выражения к переменным u, v и функции $F(u, v)$, получим формулы

$$x_1 = \cos u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin u \frac{\partial F}{\partial v} + F \sin u,$$

$$x_2 = \sin u \frac{\partial F}{\partial u} - \cos u \frac{\partial F}{\partial v} - F \cos u, \quad (1.13)$$

$$\eta = -e^v \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (1.14)$$

Ясно, что вместо декартовых координат в плоскости течения x_1, x_2 необходимо ввести новые координаты u, v согласно следующим формулам:

$$x_1 = \cos u \frac{\partial F}{\partial u} + \sin u \frac{\partial F}{\partial v} + F \sin u,$$

$$x_2 = \sin u \frac{\partial F}{\partial u} - \cos u \frac{\partial F}{\partial v} - F \cos u. \quad (1.15)$$

Уравнения равновесия в новых переменных без труда интегрируются: линии $\eta = \text{const}$ отображаются на траектории первого главного напряжения, а распределение σ вычисляется по формулам (опуская детали, сразу приведем результат [134]):

$$\sigma = 2k \ln \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)^2} + C, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} \right|^{-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial x_2}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} &= \left| \frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)} \right|^{-1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right),\end{aligned}\quad (1.17)$$

$|D(x_1, x_2)/D(u, v)|$ — якобиан отображения (1.15) плоскости годографа на плоскость течения, C есть константа интегрирования.

3.5.2. Пример: растяжение полосы с симметричными вырезами произвольного очертания

Возьмем уравнение контура выреза (см. рис. 48) в следующей общей форме:

$$x_1 = \mu_1(\beta, \delta), \quad x_2 = \mu_2(\beta, \delta),$$

где в качестве параметра β вдоль дуги $Q'PQ$ удобно выбрать угол наклона касательной к этой дуге к оси x_1 , δ есть некоторый параметр, который определяет форму контура.

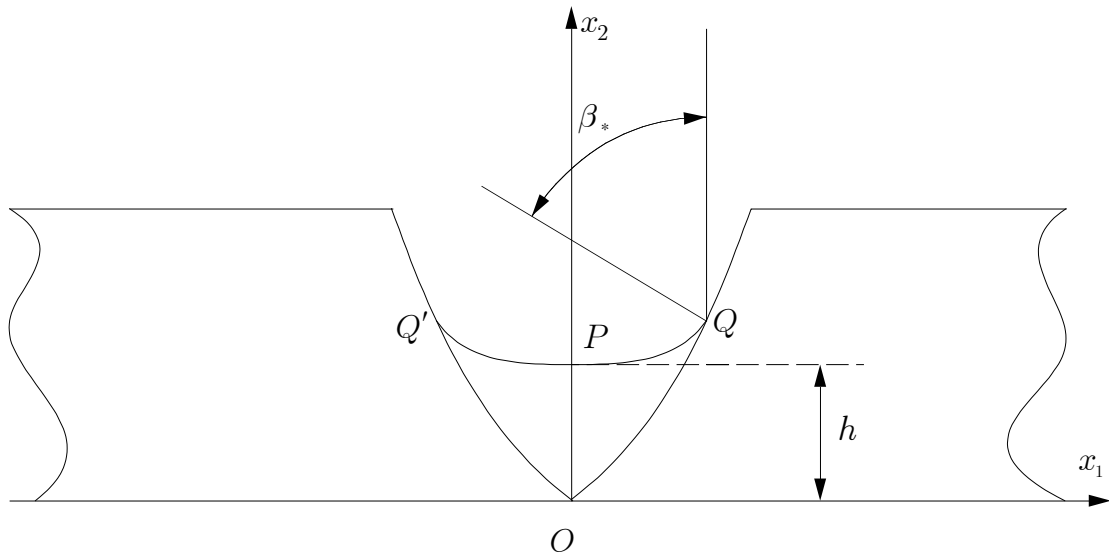


Рис. 48. Локализация пластических деформаций в случае растяжения полосы с симметричными вырезами произвольного очертания (жесткопластический анализ в приближении плоской деформации)

Для определения функции $F(u, v, \delta)$ помимо уравнения (1.12) необходимы еще и граничные условия.

Поскольку дуга $Q'PQ$ есть свободная граница, то она является траекторией главного напряжения и на этой дуге $\sigma = k$ и $\beta = u$.

Для того, чтобы отрезок $-\beta_*(\delta) \leq u \leq \beta_*(\delta)$, $v = 0$ плоскости годографа¹⁵⁷

¹⁵⁷Здесь следует отдавать себе отчет в том, что вспомогательная плоскость переменных u, v лишь условно может трактоваться как плоскость годографа, так как указанные переменные не имеют никакого отношения к скорости течения.

u, v отображался на дугу $Q'PQ$ необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{v=0} \cos u + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{v=0} \sin u + F(u, 0, \delta) \sin u &= \mu_1(u, \delta), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{v=0} \sin u - \left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{v=0} \cos u - F(u, 0, \delta) \cos u &= \mu_2(u, \delta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вводя обозначения

$$\Lambda(u, \delta) = F(u, 0, \delta), \quad \mu(u, \delta) = \left(\frac{\partial F(u, v, \delta)}{\partial v}\right)_{v=0},$$

систему уравнений (2.1) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \Lambda'(u, \delta) \cos u + \mu(u, \delta) \sin u + \Lambda(u, \delta) \sin u &= \mu_1(u, \delta), \\ \Lambda'(u, \delta) \sin u - \mu(u, \delta) \cos u - \Lambda(u, \delta) \cos u &= \mu_2(u, \delta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где штрихом обозначается частное дифференцирование по переменной u .

Найдем условие разрешимости этой системы уравнений, для чего, разрешив эти уравнения относительно Λ и Λ' ,

$$\begin{aligned} \Lambda(u, \delta) &= \mu_1(u, \delta) \sin u - \mu_2(u, \delta) \cos u - \mu(u, \delta), \\ \Lambda'(u, \delta) &= \mu_1(u, \delta) \cos u + \mu_2(u, \delta) \sin u, \end{aligned}$$

получим следующее соотношение:

$$\mu'(u, \delta) = \mu'_1(u, \delta) \sin u - \mu'_2(u, \delta) \cos u.$$

Так как

$$\operatorname{tg} u = \frac{\mu'_2(u, \delta)}{\mu'_1(u, \delta)},$$

то, очевидно, условие совместности удовлетворяется, если $\mu(u, \delta) = 0$.

Ясно, что тогда

$$\Lambda(u, \delta) = \mu_1(u, \delta) \sin u - \mu_2(u, \delta) \cos u.$$

Можно проверить, что краевое условие на σ удовлетворяется за счет выбора константы $C = k$, вычислив якобиан и производные в виде:

$$\begin{aligned} \left(\left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right|\right)_{v=0} &= -\sqrt{\mu'^2_1 + \mu'^2_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)_{v=0}, \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)_{v=0} &= -\mu'_2 \left(\left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right|^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)_{v=0}, \\ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right)_{v=0} &= \mu'_1 \left(\left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right|^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\right)_{v=0}. \end{aligned}$$

Итак, если $F(u, v, \delta)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция, определяемая как решение задачи Коши для телеграфного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + F &= 0 & (|u| < \beta_*(\delta), v > 0), \\ F(u, 0, \delta) &= \mu_1(u, \delta) \sin u - \mu_2(u, \delta) \cos u & (|u| < \beta_*(\delta), v = 0), \\ \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=0} &= 0 & (|u| < \beta_*(\delta), v = 0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

то зону пластического течения $Q'OQPQ'$ удастся отобразить на характеристический треугольник 123 в плоскости годографа (u, v) (см. рис. 49).

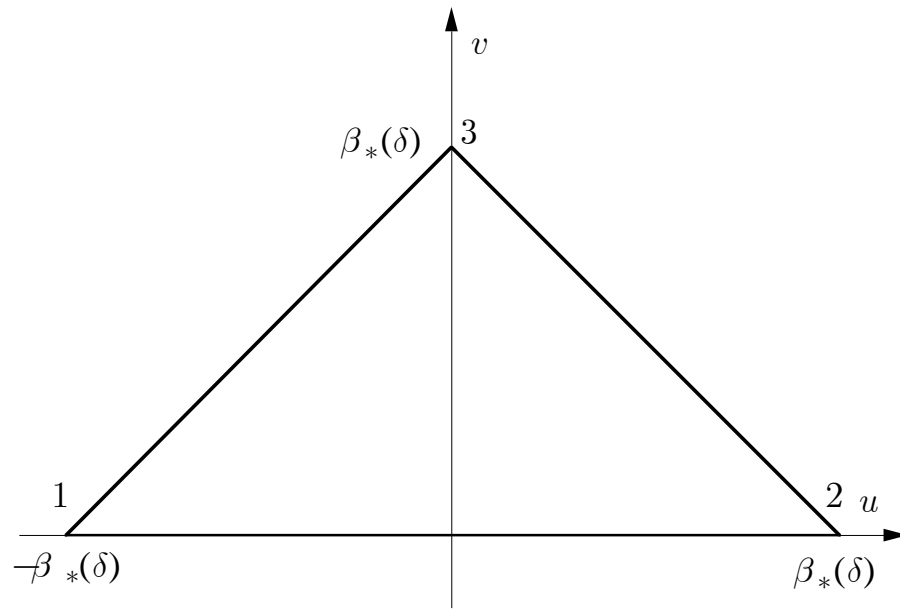


Рис. 49. Образ пластической зоны (плоское пластическое течение у симметричных вырезов) на плоскости характеристических переменных (u, v)

Угол $\beta_*(\delta)$ есть угол между нормалью к свободной границе и осью x_2 в точке, где свободная граница выреза стыкуется с жесткой зоной. Линии $\eta = \text{const}$ будут траекториями главных напряжений (и поэтому будут определять наклон θ), а величина σ будет определяться указанными выше формулами (1.16).

Уравнения равновесия могут быть проинтегрированы вдоль линии $x_1 = 0$. Заметим, что эта линия соответствует линии $u = 0$ на плоскости годографа (u, v) . Подсчитывая частные производные

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)_{u=0} = e^v,$$

сразу находим, что

$$\sigma|_{u=0} = k(2v + 1), \quad \theta|_{u=0} = 0 \quad (0 \leq v \leq \beta_*(\delta)).$$

Поскольку $u = \beta_*(\delta)$ есть угол наклона свободной границы в точке Q , то значения $u = 0, v = 0$ соответствуют точке P , а значения $u = 0, v = \beta_*(\delta)$ — началу координат O .

Компонента тензора напряжений σ_{11} находится из соотношений Леви (1.1) в виде

$$\sigma_{11} = 2k(1 + v) \quad (0 \leq v \leq \beta_*(\delta)). \quad (2.4)$$

Это уравнение позволяет заключить, что в зоне локализации пластических деформаций в самом узком месте полосы с вырезами нормальные напряжения σ_{11} превосходят предел текучести при растяжении, т.е. имеет место концентрация напряжений.¹⁵⁸

Угол наклона $\beta_*(\delta)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения $x_2(u, v)|_{u=0} = 0$, которое может быть также представлено в следующей форме:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v} + F \right) \Big|_{u=0} = 0.$$

Применяя метод Римана,¹⁵⁹ получим решение задачи Коши для телеграфного уравнения (2.3) в явном виде:

$$F(u, v, \delta) = \frac{1}{2} [\Lambda(u - v, \delta) + \Lambda(u + v, \delta)] - \frac{v}{2} \int_{-v}^v \Lambda(u - t, \delta) \frac{I_1(\sqrt{t^2 - v^2})}{\sqrt{t^2 - v^2}} dt, \quad (2.5)$$

где I_1 есть функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента¹⁶⁰ и

$$\Lambda(u, \delta) = \mu_1(u, \delta) \sin u - \mu_2(u, \delta) \cos u. \quad (2.6)$$

Заметим, что справедливо разложение:

$$\frac{I_1(\sqrt{t^2 - v^2})}{\sqrt{t^2 - v^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v^2 - t^2)^n}{2^{2n+1} n! (n+1)!}. \quad (2.7)$$

На основании (2.4) для предельной нагрузки $P_*(\delta)$ устанавливается формула

$$P_*(\delta) = 2Y \int_0^{\beta_*(\delta)} (1 + v) \frac{ds}{dv} dv, \quad (2.8)$$

и так как вдоль отрезка PO справедливо соотношение

$$\frac{ds}{dv} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) \Big|_{u=0},$$

¹⁵⁸Этот же эффект наблюдается и в зоне локализации пластических деформаций внутри осесимметричной шейки (см., например, [172], с. 312-316; [62], с. 274-276).

¹⁵⁹Метод Римана (см. [157], с. 63-77) является весьма эффективным средством решения задачи Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка, при условии, что удастся построить функцию Римана для этого уравнения. Функция Римана для телеграфного уравнения известна (см. [122], с. 343-345), и поэтому интегрирование задачи Коши (2.3) никаких трудностей не представляет.

¹⁶⁰По поводу определения и свойств функций Бесселя см., например, [43].

где ds есть элемент длины, то, вводя обозначение

$$\kappa(v, \delta) = \left(\frac{\partial F}{\partial v} + F \right) \Big|_{u=0},$$

можно представить выражение для предельной нагрузки в форме

$$P_*(\delta) = 2Y \int_0^{\beta_*(\delta)} (1+v) \frac{\partial \kappa(v, \delta)}{\partial v} dv,$$

или, после интегрирования по частям, — в форме

$$P_*(\delta) = 2Y \left\{ h(\delta) - \int_0^{\beta_*(\delta)} \kappa(v, \delta) dv \right\}. \quad (2.9)$$

Используя разложения в ряд для функции Бесселя первого порядка мнимого аргумента, функцию $\kappa(v, \delta)$ представим в виде разложения

$$\begin{aligned} \kappa(v, \delta) = \Lambda(v, \delta) + \frac{\partial \Lambda(v, \delta)}{\partial v} - (1+v) \int_0^v \Lambda(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v^2 - \tau^2)^n}{n!(n+1)!2^{2n+1}} d\tau - \\ - v^2 \int_0^v \Lambda(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v^2 - \tau^2)^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!2^{2n}} d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если вырезы имеют круговое очертание (R — радиус закругления), то $\mu_1(\psi) = R \sin \psi$, $\mu_2(\psi) = R + h - R \cos \psi$. Решение задачи Коши (2.3) имеет вид $F(u, v) = -(R+h) \cos u + R \chi v$. Функция $\kappa(v)$ в данном случае представляется в следующей форме: $\kappa(v) = -(R+h) + R \exp v$. Угол β_* определяется как корень уравнения $\kappa(v) = 0$ и равен $\beta_* = \ln(1 + h/R)$. Величина предельной нагрузки, согласно (2.9), равна $P_* = 4k(R+h) \ln(1 + h/R)$.

Таким образом завершается исследование проблемы концентрации напряжений вблизи симметричных вырезов в полосе. Приведенное здесь решение не является полным, в том смысле, который вкладывается в этот термин в математической теории пластичности, поскольку не исследована ни кинематика течения, ни возможность продолжения поля напряжений в жесткие зоны полосы.

3.6. Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла

В тонких металлических пластинах в условиях плоского напряженного состояния пластическое течение у вершины трещины нормального отрыва реализуется в виде локальных шеек, вытянутых вдоль линии трещины, скольжение в которых происходит в двух узких перекрещивающихся слоях, пронизывающих

пластину по толщине и наклоненных под углом 45° к плоскости пластины. Подобная конфигурация локализованных пластических зон позволяет применить одну из наиболее эффективных моделей нелинейной механики разрушения — модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [85], [214].

Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла используется в качестве эффективной расчетной схемы при анализе локализации пластических деформаций у вершины трещины нормального отрыва в упруго идеально пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния во всех случаях, когда пластическая зона представляет собой узкий отрезок, продолжающий трещину. В отличие от модели "диффузионного" пластического течения [254] (см. 3.4.8) в качестве условия текучести здесь выступает критерий Треска. Пластическое скольжение в зонах локальных шеек перед трещиной упрощенно описывается разрывом нормальной составляющей перемещения. Соответствующая подобной схеме краевая задача математической теории упругости допускает простое замкнутое решение.

В этом разделе исследуется также влияние очага локализации пластических деформаций и поврежденности, удаленного от кончика трещины нормального отрыва, на трещину в условиях плоского напряженного состояния.¹⁶¹ Удаленные локализованные зоны пластического течения, сопровождаемого развитием в этих зонах повреждений, могут зарождаться в процессе циклического нагружения или температурного воздействия.

В 3.6.1 мы приводим классическое решение Леонова–Панасюка–Дагдейла. Там же дано полное исследование первого цикла нагружение–разгрузка.

Нагружение трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в поле остаточных напряжений (связанных с предыдущим циклом нагружения) может приводит к образованию двух очагов пластического течения (двухзонная локализация пластических деформаций): непосредственно у кончика трещины и в зоне максимального остаточного растяжения, которое в случае циклического нагружения достигает одной трети предела текучести. Моделируя по схеме Леонова–Панасюка–Дагдейла пластические зоны отрезками, для определения трех безразмерных параметров, характеризующих положения пластических зон, получена (3.6.2) система нелинейных уравнений, которая анализируется с помощью оригинального численного алгоритма (3.6.4), разработанного специально для этой цели. Получена (3.6.3) точная формула для вычисления раскрытия трещины при двухзонно локализованных пластических деформациях. Асимптотический анализ величины раскрытия трещины для случая, когда линейный размер удаленной пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины, приводит к заключению, что влияние удаленной пластической зоны на трещину проявляется в форме ее дополнительного закрытия.

Циклическое нагружение трещины с локализованной у ее вершины пластической зоной активизирует процесс освобождения скрытой свободной энергии, связанной с микронеоднородным в пределах пластической зоны полем напряжений. На долю микронеоднородного распределения приходится до 15% от всей

¹⁶¹Изложение в основном следует [308], [144], [310].

работы, затраченной на пластическое деформирование [25], [108]. Освобождающаяся энергия является основным источником развития поврежденности в зонах локализации необратимых деформаций. Поврежденность, в свою очередь, искажая поле напряжений и геометрию локализованных зон, влияет на состояние трещины. Одной из характеристик подобного влияния может служить изменение раскрытия трещины, обусловленное перераспределением напряжений и изменением зон локализации пластических деформаций вследствие роста поврежденности.

3.6.1. Постановка задачи и основные уравнения

Исследование плоского напряженного состояния трещины нормального отрыва было впервые выполнено в работах [85], [214]. Аналогичная по существу схема была предложена Г. И. Баренблаттом [18], [19], [20] при исследовании сил сцепления в кончике трещины нормального отрыва.

Предполагалось, в соответствии с экспериментальными данными, что пластическая зона представляет собой отрезок, находящийся на продолжении линии трещины (см. [214], [243]).

С тех пор предложенная в [85], [214] модель, известная как модель Леонова—Панасюка—Дагдейла, широко используется для расчета напряженного состояния и вычисления раскрытия трещины в стальных пластинах [63]. Соответствующая подобной сильно локализованной у вершины трещины зоны текучести модель трещины основывается на следующих основных предположениях [146]:

1. Элементы пластической зоны подвержены воздействию только нормального растягивающего напряжения, равного пределу текучести Y ;
2. Толщина пластической зоны намного меньше, чем ее длина, так что внутренняя граница упругой зоны может рассматриваться как сильно сплюснутый эллипс с большой полуосью равной $2(l + c)$, где $2l$ — длина трещины, c — длина пластической зоны;
3. Длина пластической зоны в точности такова, что пластическая зона полностью поглощает сингулярность поля нормальных напряжений.

Рассматривается нагружение пластины с трещиной нормального отрыва, при котором возникает дополнительная, удаленная от кончика трещины, зона пластического растяжения. Подобная ситуация, как показывают расчеты, действительно реализуется при циклическом нагружении с переменной амплитудой напряжений. Разгрузка трещины сопровождается мгновенным образованием у кончика трещины сжатой пластической зоны, в то время как на некотором удалении от кончика трещины возникает зона остаточного растяжения, в которой напряжения могут достигать трети от предела текучести. В этой последней зоне в течении последующих циклов нагружения могут локализоваться пластические деформации, образуя новый очаг пластического течения.

Вычисление параметров, определяющих локализацию зон пластического течения, сопряжено с решением сложной системы двух нелинейных уравнений и поэтому реализовано численно. Величина раскрытия трещины при повторном

нагружении вычисляется с помощью полученной точной формулы, в которую входят только указанные параметры локализации. Эта формула тем самым позволяет оценить влияние удаленной пластической зоны на величину раскрытия трещины.

Поврежденность также считается локализованной в пределах пластической зоны, что несколько упрощает анализ, поскольку отпадает необходимость отдельного анализа локализации поврежденности.

Необходимо отметить, что анализ напряженно-деформированного состояния и поврежденности у вершины трещины Дагдейла был впервые выполнен в [260]. Рассматривалась трещина нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния. Предполагалось, что необратимые пластические деформации и поврежденность локализуются в узкой зоне перед вершиной трещины, в которой напряженное состояние считается однородным. За пределами указанной зоны локализации поврежденность рассматривалась как пренебрежимо малая и не влияющая на определяющее соотношение. Скалярный параметр поврежденности определялся как логарифм отношения геометрической площади элемента к его эффективной несущей нагрузке площади. Подобное определение при малых поврежденностях согласуется с классическим определением Л. М. Качанова. Напряжения и деформации связывались традиционной кусочно-линейной диаграммой, характерной для упруго идеально пластического тела. Предполагалось также, что скалярный параметр поврежденности связан с деформацией степенным соотношением. Целью работы было выяснение влияния поврежденности на длину пластической зоны. Было найдено, что решающим фактором, влияющим на размер локализованной у вершины трещины пластической зоны, выступает поврежденность, соответствующая состоянию, при котором эффективные напряжения достигают предела текучести. Поскольку это значение параметра поврежденности может быть выражено только через материальные константы, то результатом работы можно считать выявление материального параметра, который в наибольшей степени влияет на локализацию пластических деформаций и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва.

В работе [332] поврежденность у вершины трещины исследовалась на основе концепции эффективных пластических деформаций. Было установлено, что размер пластической зоны зависит от величины раскрытия трещины, критической деформации рекристаллизации и деформации в момент образования зоны поврежденности.

Распределение поврежденности у вершины трещины Дагдейла в упруго идеально пластической среде было предметом исследования [290]. Обобщение на случай среды со степенным деформационным упрочнением приведено в [291]. В качестве параметра поврежденности был использован логарифм квадратного корня отношения модуля Юнга к его эффективному значению для текущего состояния поврежденности. Параметр поврежденности, таким образом, оказывается пропорциональным логарифму отношения деформации к ее значению в момент начала текучести. Распределение нормальных напряжений предсказывалось авторами работы и проверялось на предмет соответствия FEM-анализом

этой же задачи. Выбор в конце концов был сделан в пользу степенной (сингулярной при приближении к вершине трещины) аппроксимации нормальных напряжений. Поврежденность, как следствие, получается логарифмически сингулярной при приближении к кончику трещины. Оказалось, что зона поврежденности несколько меньше, чем пластическая зона Дагдейла. При увеличении показателя в степенном законе упрочнения эта разница становится менее заметной.

Рассмотрим трещину нормального отрыва $|x_1| \leq l$ в пластине в условиях плоского напряженного состояния. Обозначим через Y предел текучести при одноосном растяжении. Напряжения и перемещения представляются через единственный комплексный потенциал по формулам Колосова—Мусхелишвили [101]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z^2 \varphi^*], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*] + 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z^2 \varphi^*],\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^* &= -2x_2 \operatorname{Re} [\partial_z^2 \varphi^*]; \\ 2Gu_1^* &= (\kappa - 1)\operatorname{Re} [\varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z \varphi^*], \\ 2Gu_2^* &= (\kappa + 1)\operatorname{Im} [\varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*],\end{aligned}\quad (1.2)$$

в которых

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= \sigma_{11}, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12}, \quad \sigma_{22}^* = \sigma_{22} - \hat{\sigma}_{22}^\infty, \\ u_1^* &= u_1, \quad u_2^* = u_2 - x_2 E^{-1} \hat{\sigma}_{22}^\infty, \\ \kappa &= (3 - \nu)/(1 + \nu),\end{aligned}$$

$\varphi^*(z)$ — комплексный потенциал, который является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функцией комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $\hat{\sigma}_{22}^\infty$ — нормальные растягивающие напряжения на бесконечности.

Обозначим через $\hat{\sigma}_{ij}$, \hat{u}_i напряжения и перемещения, а через $x_1 = l + \hat{c}$ — координату границы пластической зоны при первом нагружении напряжением $\hat{\sigma}_{22}^\infty$.

В соответствии с решением Леонова—Панасюка—Дагдейла (см. Приложение II) находим:

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y} = 1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} + \xi}{(1 + \xi) \sec \hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} - \xi}{(1 - \xi) \sec \hat{\beta}} \right\}, \quad (1.3)$$

$$(|\xi| \geq \sec \hat{\beta})$$

$$\begin{aligned}\frac{\pi E \hat{u}_2}{2Yl} &= -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln \cos \hat{\beta} + 2\ln(\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}) + \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \\ &+ \xi \ln \frac{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1}{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1},\end{aligned}\quad (1.4)$$

$$(1 \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta})$$

$$\frac{\hat{c}}{l} = \sec \hat{\beta} - 1, \quad (1.5)$$

где введены следующие безразмерные величины

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad \hat{\beta} = \frac{\pi}{2Y} \hat{\sigma}_{22}^{\infty}. \quad (1.6)$$

Распределение нормальных перемещений и напряжений на продолжении трещины для возрастающих значений отношения

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}^{\infty}}{Y} = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

представлены на рис. 50, 51.

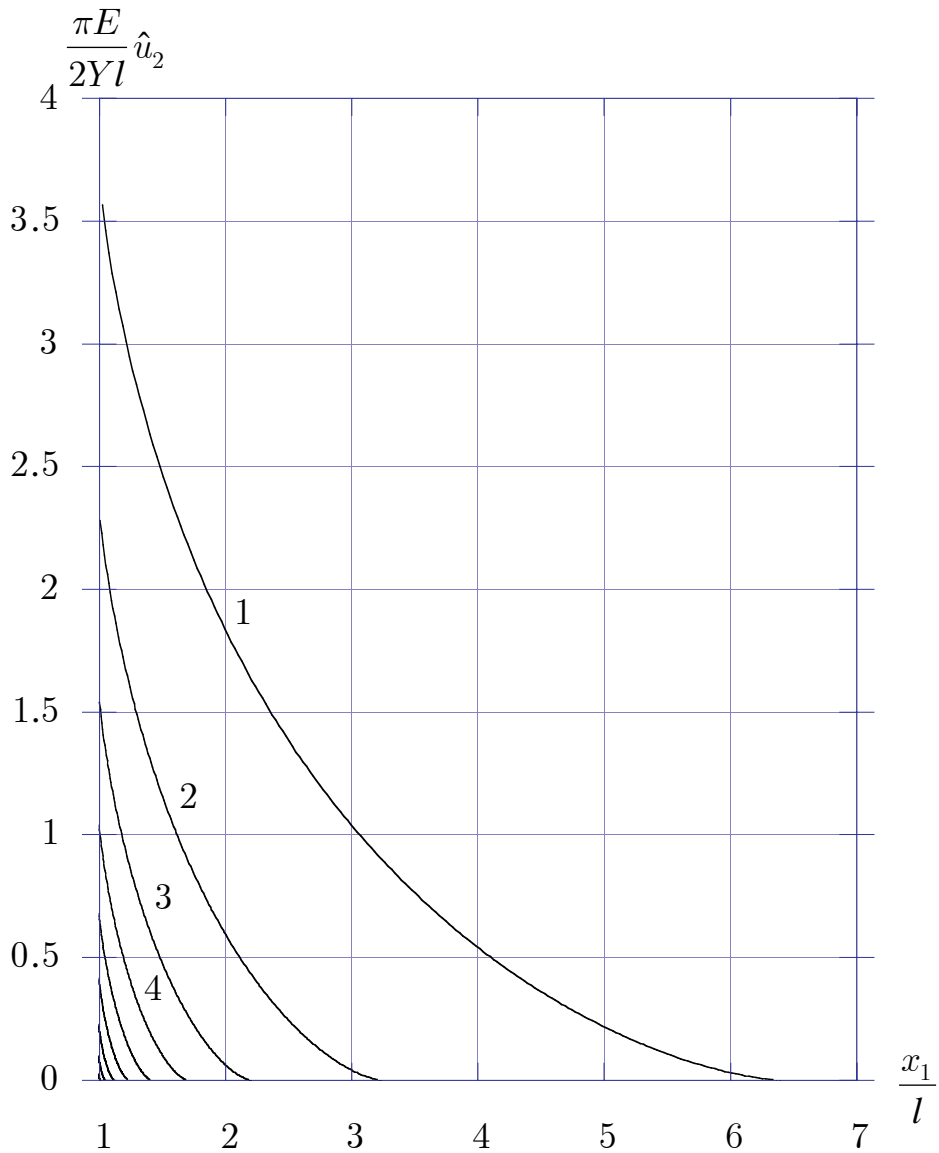


Рис. 50. Графики нормальных перемещений в зоне пластического течения (решение Леонова–Панасюка–Дагдейла)

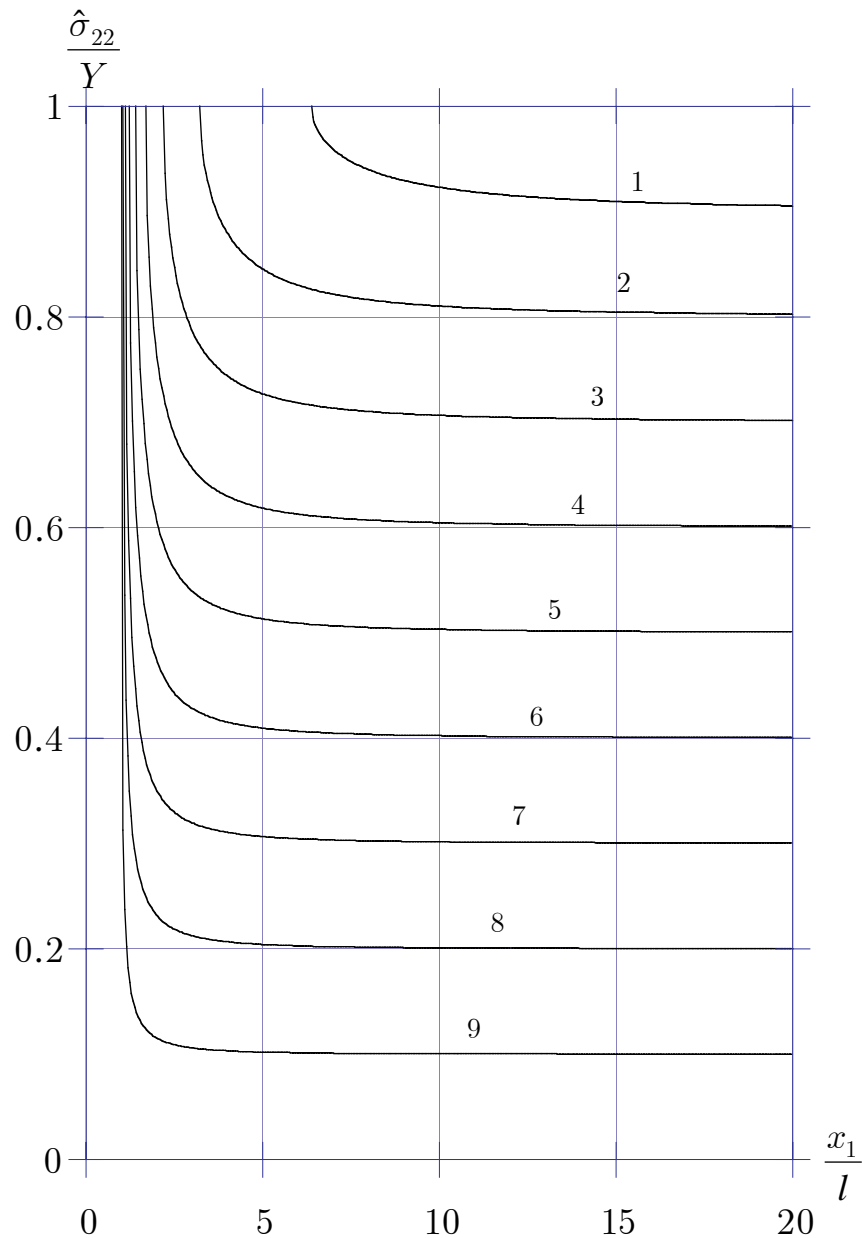


Рис. 51. Графики нормальных напряжений в зоне пластического течения (решение Леонова—Панасюка—Дагдейла)

Для исследования напряженно-деформированного состояния после разгрузки пластины введем следующие разности:

$$\Delta\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}, \quad \Delta u_i = \tilde{u}_i - \hat{u}_i,$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ и \tilde{u}_i — остаточные напряжения и перемещения, которые наблюдаются в пластине с трещиной после разгрузки.

Основой последующего анализа является предположение о том, что после снятия нагрузки у вершины трещины мгновенно происходит перераспределение напряжений: нормальные растягивающие напряжения на пределе текучести мгновенно сменяются сжимающими, равными пределу текучести при сжатии. Таким образом, поле остаточных напряжений сжимает вершину трещины, что приводит к ее закрытию. Что касается перемещений, то поскольку снятие

нагрузки за пределами локализованной зоны сжатия приводит к обратному переходу из пластичности в упругое состояние, то изменения нормальных перемещений вне указанной зоны остаточного сжатия не происходит.

Исходя из приведенного выше анализа, для определения комплексного потенциала $\Delta\varphi^*$ граничные условия могут быть сформулированы в виде:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{22}^* &= \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (|x_1| \leq l, \ x_2 = 0), \\ \Delta\sigma_{22}^* &= -2Y + \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (l \leq |x_1| \leq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\ \Delta u_2 &= 0 \quad (|x_1| \geq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\ \partial_z \Delta\varphi^*(z) &= O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty),\end{aligned}\tag{1.7}$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} + \hat{\sigma}_{22}^\infty$, $x_1 = l + \tilde{c}$ — координата остаточной сжатой пластической зоны.

Предполагается (и это подтверждается полученным решением), что при повторном нагружении пластины растягивающим напряжением $\tilde{\sigma}_{22}^\infty$ образуются две локализованные пластические зоны

$$\begin{aligned}l &\leq x_1 \leq l + \tilde{c}, \\ l + c' &\leq x_1 \leq l + c'',\end{aligned}$$

первая из которых примыкает к вершине трещины, а вторая — находится на некотором удалении от первой.

Относительно разностей

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij} &= \tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}, \\ \Delta u_i &= \tilde{u}_i - \tilde{u}_i\end{aligned}$$

снова получается упругая задача с граничными условиями вида:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{22}^* &= -\tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (|x_1| \leq l, \ x_2 = 0), \\ \Delta\sigma_{22}^* &= 2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (l \leq |x_1| \leq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\ \Delta\sigma_{22}^* &= Y - \tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (l + c' \leq |x_1| \leq l + c'', \ x_2 = 0), \\ \Delta u_2 &= 0 \quad (l + \tilde{c} \leq |x_1| \leq l + c', \ x_2 = 0; \quad |x_1| \geq l + c'', \ x_2 = 0), \\ \partial_z \Delta\varphi^*(z) &= O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty),\end{aligned}\tag{1.8}$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} - \tilde{\sigma}_{22}^\infty$.

Граничные задачи (1.7), (1.8) относительно потенциала $\Delta\varphi^*$ сводятся к смешанной задаче теории аналитических функций для верхней полуплоскости, которая может быть эффективно разрешена с помощью интегралов типа Коши [181], анализ которых в случае дополнительной пластической зоны представляет однако значительные трудности.

Решение граничной задачи (1.7) может быть получено в замкнутом виде. Для определения комплексного потенциала $\Delta\varphi^*$ краевой задачи относительно приращений может быть получено следующее уравнение:

$$\frac{d\Delta\varphi^*(z)}{dz} = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2}} \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{22}^\infty - 2Y}{2} J_1 + Y J_2 \right\}, \quad (1.9)$$

где приняты обозначения

$$J_1 = \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt,$$

$$J_2 = \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt,$$

и аналитическая ветвь корня определяется условием

$$\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} = z - \frac{(l + \tilde{c})^2}{2z} + \dots \quad (z \rightarrow \infty).$$

Интегралы в формуле (1.9), по существу аналогичные тем, которые входят в схему Леонова—Панасюка—Дагдейла, вычисляются явно, как это приводится ниже:

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt = -\pi (\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} - z), \quad (1.10)$$

$$(z \notin [-l - \tilde{c}, l + \tilde{c}])$$

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -\pi x_1 \quad (x_1 \in [-l - \tilde{c}, l + \tilde{c}]), \quad (1.11)$$

$$\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - z} dt = -2z \arcsin \frac{l}{l + \tilde{c}} + \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} \ln \frac{z - l}{z + l} +$$

$$+ \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} \ln \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} + (l + \tilde{c})^2 + zl}{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l + \tilde{c})^2 - z^2} + (l + \tilde{c})^2 - zl}, \quad (1.12)$$

$$(z \notin [-l, l])$$

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} + \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} \ln \left| \frac{x_1 - l}{x_1 + l} \right| + \\
+ \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} \ln \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} + (l+\tilde{c})^2 + x_1 l}{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} + (l+\tilde{c})^2 - x_1 l}, \quad (1.13)
\end{aligned}$$

($|x_1| \leq l + \tilde{c}$)

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} + \sqrt{x_1^2 - (l+\tilde{c})^2} \times \\
\times \left\{ \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 + x_1 l}{(l+x_1)(l+\tilde{c})} + \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 - x_1 l}{(l-x_1)(l+\tilde{c})} \right\}. \quad (1.14)
\end{aligned}$$

($|x_1| \geq l + \tilde{c}$)

В приведенных выше формулах

$$\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2}$$

обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные положительные значения, если $z \in (-l - \tilde{c}, l + \tilde{c})$, символ \ln обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные значения, если $l < z < l + \tilde{c}$.

Длина остаточной пластической зоны вычисляется по формуле

$$\frac{\tilde{c}}{l} = \sec \frac{\hat{\beta}}{2} - 1. \quad (1.15)$$

Поле остаточных напряжений определяется в виде:

$$\begin{aligned}
Y^{-1} \tilde{\sigma}_{22} = -1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} + \xi}{(1+\xi) \sec \hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} - \xi}{(1-\xi) \sec \hat{\beta}} \right\} + \\
+ \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + \xi}{(1+\xi) \sec(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - \xi}{(1-\xi) \sec(\hat{\beta}/2)} \right\}, \quad (1.16)
\end{aligned}$$

($|\xi| \geq \sec \hat{\beta}$)

$$Y^{-1} \tilde{\sigma}_{22} = -1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + \xi}{(1+\xi) \sec(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - \xi}{(1-\xi) \sec(\hat{\beta}/2)} \right\}. \quad (1.17)$$

$$(\sec(\hat{\beta}/2) \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta})$$

Остаточные перемещения определяются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\pi E \tilde{u}_2}{2Yl} = & 2\ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + 2\ln \frac{\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}}{[\sin(\hat{\beta}/2) + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)}]^2} - \\ & - \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \ln(\xi^2 - 1) + \xi \ln \frac{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1}{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1} + \\ & + \xi \ln \frac{(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} - \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}{(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} + \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}, \\ & (1 \leq |\xi| \leq \sec(\hat{\beta}/2)) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi E \tilde{u}_2}{2Yl} = & -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln \cos \hat{\beta} + 2\ln(\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}) + \\ & + \xi \ln \frac{(\xi - 1)(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)}{(\xi + 1)(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)}. \\ & (\sec(\hat{\beta}/2) \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Как следует из приведенного решения, вблизи кончика трещины поле остаточных напряжений является сжимающим и стремится закрыть трещину. По мере удаления от трещины сжимающие напряжения сменяются растягивающими. Максимум остаточного растягивающего напряжения достигается у правой границы пластической зоны, сформировавшейся непосредственно перед разгрузкой, и равен

$$\max \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y} = -1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}. \quad (1.20)$$

При малых значениях отношения $\hat{\sigma}_{22}^\infty/Y$ этот максимум достигает значительной величины, равной одной трети предела текучести.

Распределение остаточных напряжений и перемещений для возрастающих значений отношения

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}^\infty}{Y} = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

представлено на рис. 52, 53.

Безразмерная координата точки, в окрестности которой остаточное сжатие переходит в остаточное растяжение, есть

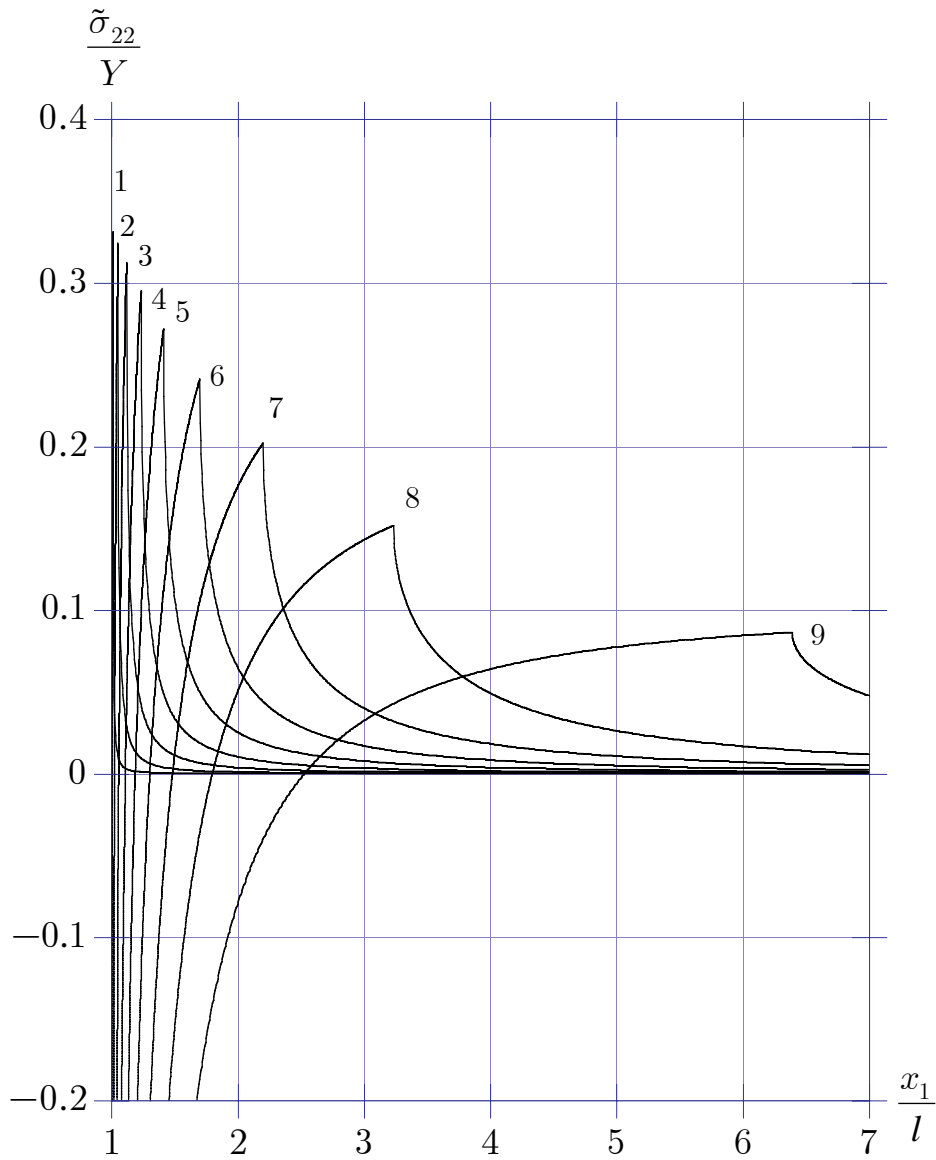


Рис. 52. Распределение остаточных напряжений вдоль линии трещины после первого цикла нагружения—разгрузка

$$\xi = \sqrt{\sec \hat{\beta}}. \quad (1.21)$$

Локализация максимального остаточного перемещения определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\pi E}{2Yl} \tilde{u}_2(\xi, 0) = 0 \quad (1 < \xi < \sec \hat{\beta}),$$

которое можно привести к эквивалентному —

$$\frac{(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} - \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}{(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} + \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2} - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = 0.$$

Численный анализ этого уравнения для значений безразмерного параметра $0 < \hat{\beta} < \pi/2$ позволяет построить график зависимости безразмерной координаты локализации максималь-

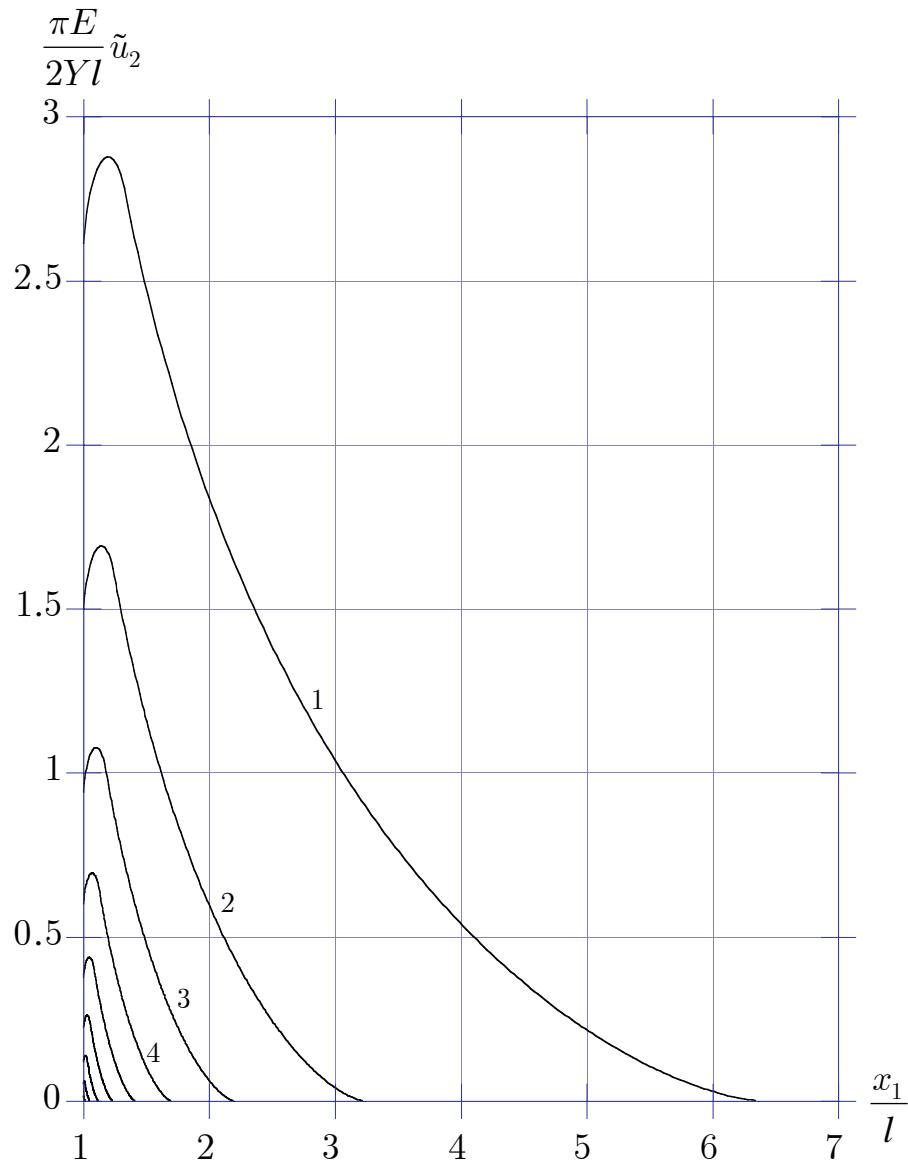


Рис. 53. Распределение остаточных перемещений вдоль линии трещины после первого цикла нагружения—разгрузки

ного остаточного растяжения $\tilde{\xi}_{\max}$ в зависимости от безразмерного отношения $\tilde{\sigma}_{22}/Y$. Этот график изображен на рис. 54.

Если $\hat{\beta} \rightarrow \pi/2$, то уравнение, определяющее локализацию максимального остаточного перемещения, приводится к кубическому уравнению

$$5\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1 = 0 \quad (1 < \xi < \sqrt{2}).$$

Корень этого уравнения (результат численного анализа) есть $\xi = 1.301317\dots$

Решению, таким образом, подлежит краевая задача с условиями (1.8), в которых остаточное поле напряжений вычисляется по формулам (1.16), (1.17).

3.6.2. Локализация пластических деформаций при повторном нагружении

Анализ повторного нагружения связан с решением смешанной граничной задачи (1.8). Эта задача значительно сложнее, чем (1.7), поскольку вследствие

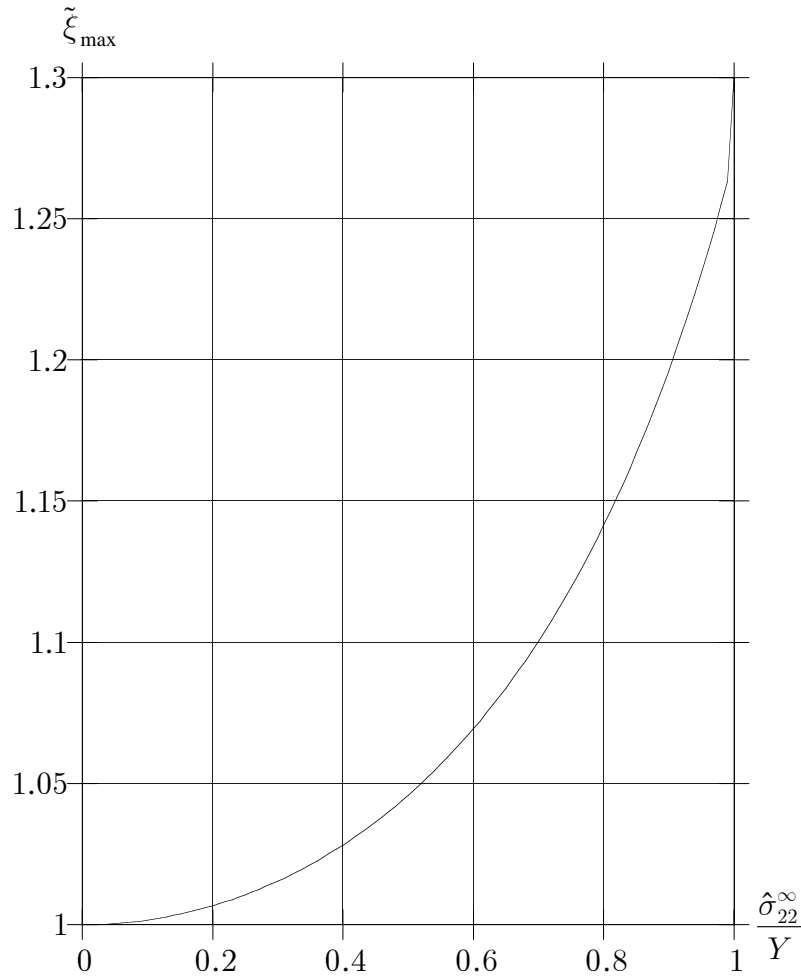


Рис. 54. График зависимости безразмерной координаты локализации максимального остаточного растяжения от отношения растягивающего напряжения к пределу текучести

двухзонной локализации пластических деформаций увеличивается число точек смены граничных условий, что, в свою очередь, существенно затрудняет анализ решения, которое формально сразу же может быть выписано (см. [181]). Заметим также, что в формальном решении граничной задачи (1.8) будет присутствовать дополнительная константа, подлежащая определению.

Решение граничной задачи (1.8) имеет вид [181]:

$$\begin{aligned}
 2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^* = & -(2Y - \tilde{\sigma}_{22}^{\infty}) \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z} dt + 4zY \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t^2-z^2} dt + \\
 & + 2Y \int_{-l}^l \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z} dt + C_1 z.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

В последней формуле использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= [z^2 - (l + c'')^2][z^2 - (l + c')^2][z^2 - (l + \tilde{c})^2], \\
 2Yh(x_1) &= Y - \tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0) - \tilde{\sigma}_{22}^{\infty}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Помимо неизвестных параметров локализации пластических деформаций, определению подлежит также и константа C_1 .

Аналитические ветви корня фиксируются условиями:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{G(z)} &= -\sqrt{[x_1^2 - (l + c'')^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}, \\
 &\quad (z \in (-\infty, -l - c'')) \\
 \sqrt{G(z)} &= -i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}, \\
 &\quad (z \in (-l - c'', -l - c')) \\
 \sqrt{G(z)} &= +\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}, \\
 &\quad (z \in (-l - c', -l - \check{c})) \\
 \sqrt{G(z)} &= +i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][(l + \check{c})^2 - x_1^2]}, \\
 &\quad (z \in (-l - \check{c}, l + \check{c})) \\
 \sqrt{G(z)} &= -\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}, \\
 &\quad (z \in (l + \check{c}, l + c')) \\
 \sqrt{G(z)} &= -i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}, \\
 &\quad (z \in (l + c', l + c'')) \\
 \sqrt{G(z)} &= +\sqrt{[x_1^2 - (l + c'')^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \check{c})^2]}. \\
 &\quad (z \in (l + c'', +\infty))
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Устраняя сингулярность в формуле (2.1), приходим к условиям на границах пластических зон:

$$\lim_{z \rightarrow l + \check{c}} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow l + c'} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow l + c''} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0.$$

Эти условия могут быть представлены также в следующем виде:

$$(2Y - \check{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l + \check{c})}^{l + \check{c}} \sqrt{\frac{[(l + \check{c}) + t][(l + c')^2 - t^2][(l + c'')^2 - t^2]}{(l + \check{c}) - t}} dt -$$

$$\begin{aligned}
& -2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l + \check{c}) + t][(l + c')^2 - t^2][(l + c'')^2 - t^2]}{(l + \check{c}) - t}} dt + \\
& + 2(l + \check{c}) \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2 - (l + c')^2][(l + c'')^2 - t^2]}{t^2 - (l + \check{c})^2}} dt + (l + \check{c})C_1 = 0, \\
& (2Y - \check{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\check{c})}^{l+\check{c}} \sqrt{\frac{[(l + \check{c})^2 - t^2][(l + c') + t][(l + c'')^2 - t^2]}{(l + c') - t}} dt - \\
& - 2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l + \check{c})^2 - t^2][(l + c') + t][(l + c'')^2 - t^2]}{(l + c') - t}} dt + \\
& + 2(l + c') \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2 - (l + \check{c})^2][(l + c'')^2 - t^2]}{t^2 - (l + c')^2}} dt + (l + c')C_1 = 0, \\
& (2Y - \check{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\check{c})}^{l+\check{c}} \sqrt{\frac{[(l + \check{c})^2 - t^2][(l + c'') + t][(l + c')^2 - t^2]}{(l + c'') - t}} dt - \\
& - 2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l + \check{c})^2 - t^2][(l + c'') + t][(l + c')^2 - t^2]}{(l + c'') - t}} dt - \\
& - 2(l + c'') \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2 - (l + \check{c})^2][t^2 - (l + c')^2]}{(l + c'')^2 - t^2}} dt + (l + c'')C_1 = 0.
\end{aligned}$$

Введем три безразмерных параметра, характеризующих положение очагов пластических деформаций,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{l + \check{c}}{l}, \quad \frac{1}{\Delta'} = \frac{l + c'}{l + \check{c}}, \quad \frac{1}{\Delta''} = \frac{l + c''}{l + \check{c}} \quad (2.4)$$

и еще одно безразмерное отношение

$$\Sigma = \frac{\check{\sigma}_{22}^\infty}{2Y}. \quad (2.5)$$

Условия устранения сингулярностей в граничных точках пластических зон примут тогда форму:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}} dq + \\ & + \frac{1}{\Delta^2\Delta''^2} \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1-\Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta'^{-2}-q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}} dq + \\ & + \frac{1}{\Delta^2\Delta''^2} \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2)}{q(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1-\Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}} dq - \\ & - \frac{1}{\Delta^2\Delta''^2} \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})(q-\Delta''^2)}{q(1-q)}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0, \end{aligned}$$

где

$$h(q) = 1 - \Sigma,$$

$$((\Delta\Delta''\sec(\hat{\beta}/2))^2 \geq q)$$

$$\begin{aligned} h(q) = 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} + \right. \\ \left. + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} \right\}, \end{aligned}$$

$$((\Delta\Delta''\sec(\hat{\beta}/2))^2 \leq q \leq (\Delta\Delta''\sec\hat{\beta})^2)$$

$$\begin{aligned}
h(q) = 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} + \right. \\
\left. + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} \right\} + \\
+ \frac{1}{2\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2\hat{\beta} + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2\hat{\beta} - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat{\beta}} \right\}.
\end{aligned}$$

$$(q \geq (\Delta\Delta''\sec\hat{\beta})^2)$$

Полученная система уравнений после вычитания второго уравнения из третьего, а третьего уравнения из первого приобретает вид (первое уравнение сохраняется неизменным, но становится последним по порядку следования):

$$\begin{aligned}
(1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - q}{q(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} - q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq + \\
+ \int_{\Delta'^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta'^{-2}\Delta''^2)}} dq = 0, \\
(1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta'^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq + \\
+ \int_{\Delta'^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta''^2)}} dq = 0, \tag{2.6} \\
\frac{1 - \Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1 - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq + \\
+ \frac{1}{\Delta^2\Delta''^2} \int_{\Delta'^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1 - q)(q - \Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0.
\end{aligned}$$

Полученная система уравнений (2.6) может быть также представлена в сжатой форме:

$$\begin{aligned}
(1 - \Sigma)J_{13} - J_{11} + L_{12} &= 0, \\
(1 - \Sigma)J_{23} - J_{21} + L_{22} &= 0, \\
(1 - \Sigma)I_{33} - \Delta^2 I_{31} + \Delta''^{-2} S_{32} + (2Y)^{-1} l^{-2} \Delta^2 C_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

или, предполагая, что длина удаленной пластической зоны значительно меньше длины трещины и заменяя функцию $h(q)$ ее максимальным значением,

$$\begin{aligned}
(1 - \Sigma)J_{13} - J_{11} + h_c J_{12} &= 0, \\
(1 - \Sigma)J_{23} - J_{21} + h_c J_{22} &= 0, \\
(1 - \Sigma)I_{33} - \Delta^2 I_{31} + \Delta''^{-2} h_c I_{32} + (2Y)^{-1} l^{-2} \Delta^2 C_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} - q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq, \\
J_{12} &= \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta'^{-2}\Delta''^2)}} dq, \\
L_{12} &= \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta'^{-2}\Delta''^2)}} dq, \\
J_{13} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - q}{q(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq, \\
J_{21} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq, \\
J_{22} &= \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta''^2)}} dq, \quad L_{22} = \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta''^2)}} dq, \\
J_{23} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta'^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq, \\
I_{31} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq, \\
S_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq, \\
I_{33} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1-q)}} dq, \\
h_c &= 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Для определения константы C_1 (или безразмерного отношения $\Delta^2 C_1 / (2Yl^2)$) необходимо дополнительное уравнение. Наиболее простой путь получить это дополнительное условие описывается ниже.

Прежде всего заметим, что из непрерывности нормальных перемещений на границах $x_1 = l + c'$, $x_1 = l + c''$ удаленной от вершины трещины пластической зоны следуют условия:

$$\Delta u_2^*(l + c', 0) = 0, \quad \Delta u_2^*(l + c'', 0) = 0. \quad (2.9)$$

Интегрируя частную производную

$$\frac{\partial \Delta u_2^*}{\partial x_1}(x_1, 0)$$

вдоль удаленной пластической зоны и учитывая формулы (2.9), получим уравнение

$$\int_{l+c'}^{l+c''} \frac{\partial \Delta u_2^*}{\partial x_1} dx_1 = 0, \quad (2.10)$$

в котором в силу (1.2) подынтегральное выражение представляется через производную от комплексного потенциала $\Delta \varphi^*(z)$ как следует ниже:

$$\frac{\partial \Delta u_2^*}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \operatorname{Im} [\partial_z \Delta \varphi^*]. \quad (2.11)$$

Подставляя в это последнее уравнение выражение (2.1) для производной по z комплексного потенциала $\Delta \varphi^*$ и затем интегрируя (2.11) вдоль удаленной пластической зоны $l + c' < x_1 < l + c''$, находим с помощью формулы (2.10), что безразмерное отношение

$$\frac{\Delta^2 C_1}{2Yl^2}$$

должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta^2 C_1}{2Yl^2} \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} + \\
& + \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \frac{1}{\theta' - \theta} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \times \\
& \times \left\{ \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta' h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}{\theta'}} + \right. \\
& + \int_0^{\Delta^2} d\theta' \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} - \\
& \left. - (1 - \Sigma) \int_0^1 d\theta' \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} \right\} = 0. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Так как (см. [199], формулы 235.00, 235.17)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} = \frac{2\mathbf{K}(s)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}, \\
& \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \frac{d\theta}{\theta' - \theta} = \\
& = \frac{2}{(1 - \theta')\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left[(\Delta'^{-2} - 1)(\Delta'^{-2} - \theta')^{-1} \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s) \right],
\end{aligned}$$

где

$$s^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - 1}, \quad \alpha^2 = s^2 \frac{1 - \theta'}{\Delta'^{-2} - \theta'}$$

и полные эллиптические интегралы первого и третьего рода определяются, как обычно, формулами

$$\mathbf{K}(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

$$\Pi(\alpha^2, s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

то уравнение (2.12) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^2 \mathbf{K}(s) C_1}{2Yl^2} + \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})}{\theta'(\theta' - 1)}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) + \mathbf{K}(s)] d\theta' - \\ & - \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(1 - \theta')}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s)] d\theta' + \\ & + (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(1 - \theta')}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s)] d\theta' = 0, \\ & S(\theta', \Delta') = \frac{\Delta'^{-2} - 1}{\theta' - \Delta'^{-2}}, \end{aligned}$$

или после ряда преобразований — к виду:

$$\begin{aligned} \frac{C_1 \Delta^2}{2Yl^2} = & -\frac{\Delta'^{-2} - 1}{\mathbf{K}(s)} \left\{ \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} \Pi(\alpha_2^2, s) dq + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} \Pi(\alpha_1^2, s) dq - \right. \\ & \left. \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} \Pi(\alpha^2, s) dq \Bigg\} - \\
& - \frac{1}{\Delta''^2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1 - q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq - \\
& - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1 - q)}} dq + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= s^2 \frac{1 - q}{\Delta'^{-2} - q}, \quad \alpha_1^2 = s^2 \frac{\Delta^{-2} - q}{\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q}, \quad \alpha_2^2 = s^2 \frac{q - \Delta''^2}{q - \Delta''^2 \Delta'^{-2}}, \\
s^2 &= \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - 1}.
\end{aligned}$$

Альтернативное представление может быть получено с помощью формулы ([126], формула 1.2.27.5)

$$\int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \frac{d\theta}{\theta' - \theta} = - \frac{2}{(\Delta''^{-2} - \theta') \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \Pi(\omega^2, s),$$

где

$$\omega^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - \theta'}.$$

В результате преобразований вместо (2.13) получается уравнение (см. также [199], формула 235.00):

$$\begin{aligned}
& \frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} - \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\theta' - 1)(\theta' - \Delta'^{-2})}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' - \\
& - \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(1 - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' + (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' = 0,
\end{aligned}$$

которое затем приводится к виду

$$\begin{aligned}
\frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} = & \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1 - q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq + \\
& + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$\omega^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - q}, \quad \omega_1^2 = \frac{1 - \Delta''^2 \Delta'^{-2}}{1 - q}, \quad \omega_2^2 = \frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - \Delta'^{-2} \Delta^{-2}}{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}.$$

С учетом уравнения (2.13) третье уравнение системы (2.7) примет вид

$$-(1 - \Sigma) J_{33} + J_{31} + L_{32} = 0, \tag{2.15}$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны,

$$-(1 - \Sigma) J_{33} + J_{31} + h_c J_{32} = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
J_{31} &= \int_0^1 \Pi(\alpha_1^2, s) \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} dq, \\
J_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\
L_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\
J_{33} &= \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq.
\end{aligned}$$

Константа C_1 при этом вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\frac{C_1 \Delta^2}{2Yl^2} = & -\Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq + \\
& + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq - \\
& - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1 - q)}} dq.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Уравнения (2.15), (2.16) заменяют третье уравнение систем (2.7), (2.8) соответственно.

Из полученных таким образом систем уравнений может быть исключен параметр $1 - \Sigma$, а параметр Δ может быть принят в качестве независимого параметра нагружения.

Итак, решению относительно параметров локализации пластических деформаций Δ' , Δ'' подлжит система уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{J_{31} - \Lambda_{32}}{J_{33} - J_{32}} &= \frac{J_{21} + \Lambda_{22}}{J_{23} + J_{22}}, \\
\frac{J_{11} + \Lambda_{12}}{J_{13} + J_{12}} &= \frac{J_{21} + \Lambda_{22}}{J_{23} + J_{22}},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_{12} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\
\Lambda_{22} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2 \Delta'^{-2}}{q(1-q)(q - \Delta''^2)}} dq, \\
\Lambda_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq,
\end{aligned}$$

$$H(q) = 1 - \Sigma - h(q),$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, — система

$$\frac{J_{31} - \hat{h}J_{32}}{J_{33} - J_{32}} = \frac{J_{21} + \hat{h}J_{22}}{J_{23} + J_{22}},$$

$$\frac{J_{11} + \hat{h}J_{12}}{J_{13} + J_{12}} = \frac{J_{21} + \hat{h}J_{22}}{J_{23} + J_{22}},$$
(2.19)

где

$$\hat{h} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}.$$

Укажем ряд канонических представлений интегралов, с помощью которых формулируются разрешающие системы уравнений через эллиптические интегралы Лежандра:

$$J_{11} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - 1) F(\Omega, \Delta's) \right\},$$

([126], формула 1.2.39.7)

$$J_{21} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta's) \right\},$$

([126], формула 1.2.39.6)

$$J_{12} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \Pi(s^2, \Delta's),$$

([126], формула 1.2.35.7)

(2.20)

$$J_{22} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left[\Pi(s^2, \Delta's) - \mathbf{K}(\Delta's) \right],$$

([126], формула 1.2.35.6)

$$J_{13} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -\Pi(s^2, \Delta's) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}} \right\},$$

([126], формула 1.2.38.7; [199], формула 117.02)

$$J_{23} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -\Pi(s^2, \Delta's) + \mathbf{K}(\Delta's) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}} \right\},$$

([126], формула 1.2.38.6; [199], формула 117.02)

где

$$\sigma^2 = \frac{-1}{\Delta''^{-2} - 1}, \quad \sin^2 \Omega = \frac{\Delta''^{-2} - 1}{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - 1},$$

и неполные эллиптические интегралы Лежандра определены формулами:

$$F(\varphi, s) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, s) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Стоит отметить также следующие соотношения:

$$J_{22} - J_{12} = -\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \mathbf{K}(\Delta's),$$

$$J_{11} - J_{21} = -\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} F(\Omega, \Delta's),$$

$$J_{22} + J_{23} = J_{12} + J_{13} = \frac{\pi\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \sqrt{\frac{1}{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}.$$

С помощью канонических представлений (2.20) и первых двух уравнений системы (2.8) находим

$$1 - \Sigma - h_c = \frac{2\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - 2(\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) - (\Delta'^{-2} - 1)h_c\pi S(s, \Delta')}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + \pi S(s, \Delta')]} -$$

$$-\frac{2(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta's)}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + \pi S(s, \Delta')]},$$

$$1 - \Sigma - h_c = \frac{2\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - 2(\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) - (\Delta'^{-2} - 1)h_c\pi S(s, \Delta')}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + 2\mathbf{K}(\Delta's) + \pi S(s, \Delta')]},$$

$$S(s, \Delta') = \sqrt{\frac{1}{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}.$$

Полученные уравнения затем, после ряда преобразований, приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{K}(\Delta's)\hat{h} = F(\Omega, \Delta's), \quad (2.21)$$

$$1 - \Sigma - \hat{h} = \frac{2\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)} \times \right.$$

$$\times \left[\mathbf{K}(\Delta's) - \Pi(s^2, \Delta's) + \frac{\pi}{2} \sqrt{(1 - s^2)^{-1}(1 - \Delta'^2)^{-1}} \right] +$$

$$\left. + \Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) \right\}. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.16) на основании (2.22) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \Pi(\alpha_1^2, s) \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} dq - \\
 & - \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq = \\
 & = \frac{2\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
 & + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \Big\} \times \\
 & \times \left\{ \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq - \right. \\
 & \left. - \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq \right\}, \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

где использовано следующее обозначение:

$$L(s, \Delta') = \mathbf{K}(\Delta' s) - \Pi(s^2, \Delta' s) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}.$$

Таким образом, уравнения (2.21), (2.23) образуют систему уравнений для определения параметров локализации пластического течения, пригодную для использования в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, т. е. $\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1$.

Напомним также, что величина Δ должна выступать в качестве параметра нагружения.

С помощью уравнения (2.22) уравнение (2.14) в случае $\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1$ сводится к следующему:

$$\frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} = \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \\
& -\frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
& + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \left. \right\} \times \\
& \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \right. \\
& \left. - \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1-q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq \right\}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Численный анализ локализации пластических деформаций проводился в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны. Система (2.19) была заменена эквивалентной системой уравнений

$$\frac{\hat{h}J_{22} + J_{21}}{J_{22} + J_{23}} = \frac{\hat{h}I_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\hat{h}J_{32} - J_{31}}{J_{32} - J_{33}} = \frac{\hat{h}I_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \tag{2.26}$$

в которой

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\
I_{22} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}} dq, \\
I_{23} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2}-q)}} dq.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Канонические представления интегралов (2.27) имеют вид:

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{2\Delta'}{\Delta'' \sqrt{1-\Delta''^2}} \{ \mathbf{K}(\Delta' s) - \Pi(\lambda^2, \Delta' s) \} = \\
&= \frac{2\Delta' \Delta''}{\sqrt{1-\Delta''^2}} \left\{ (1-\Delta'^{-2}) \Pi(s^2, \Delta' s) - (1-\Delta''^{-2}) \mathbf{K}(\Delta' s) \right\},
\end{aligned}$$

$$(\lambda^2 = 1 - \Delta'^2 \Delta''^{-2})$$

([126], формулы 1.2.34.5, 1.2.39.5)

$$\begin{aligned} I_{22} &= \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ (\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\Delta'^2, \Delta's) + (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})\mathbf{K}(\Delta's) \right\} = \\ &= \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(s^2, \Delta's) + (\Delta''^{-2} - 1)\mathbf{K}(\Delta's) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2}\Delta'^{-2}\sqrt{(1 - \Delta'^2)(1 - s^2)^{-1}} \right\}, \end{aligned}$$

([126], формула 1.2.38.5 и [199], формула 117.02)

$$I_{23} = \frac{2\Delta'}{\Delta''^2 \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's).$$

([126], формулы 1.2.39.5)

Численное решение системы уравнений (2.25) и (2.26) относительно параметров локализации Δ' и Δ'' сопряжено со значительными трудностями и требует значительных затрат времени. Для оптимизации счета был специально разработан алгоритм ускоренного вычисления входящих в уравнения квадратур, основанный на разложении эллиптических интегралов в ускоренно сходящиеся ряды Фурье (см. **Приложение III**). Численные расчеты, которые проводились для случая, когда линейный размер удаленной локализованной пластической зоны значительно меньше длины трещины, подтверждают разрешимость указанной системы и, таким образом, также обосновывают предлагаемую схему локализации пластических деформаций.

Если характерный линейный размер удаленной пластической зоны нельзя считать малым по сравнению с длиной трещины, то система уравнений (2.25) и (2.26) должна быть заменена на

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{22} + J_{21}}{J_{22} + J_{23}} &= \frac{\Lambda_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \\ \frac{\Lambda_{32} - J_{31}}{J_{32} - J_{33}} &= \frac{\Lambda_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{21} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq.$$

3.6.3. Вычисление раскрытия трещины при двухзонной локализации пластических деформаций

Раскрытие трещины — один из важнейших параметров механики разрушения. Поэтому оценка влияния удаленной пластической зоны на трещину может быть выполнена на основе вычисления изменения раскрытия трещины, обусловленного влиянием второго очага локализации пластических деформаций.

В принципе, для точного определения раскрытия трещины необходимо дополнительно учесть изменение геометрии берегов трещины, искаженных остаточными перемещениями. Однако перенос граничных условий на деформированные берега трещины делает невозможным аналитический анализ проблемы. В дальнейшем предполагается, что граничные условия формулируются на неискаженных берегах трещины (что вносит погрешность порядка величины раскрытия трещины). Ясно, что приближенность формулировки краевых задач о разгрузке и повторном нагружении практически не влияет на расчет локализации пластических деформаций, поскольку на линии продолжения трещины на расстояниях от вершины трещины порядка величины раскрытия влияние погрешности формулировки граничных условий несущественно.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*], \quad (3.1)$$

интегрируя которое вдоль пластической зоны, примыкающей к кончику трещины, получим

$$-\Delta u_2(l, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1. \quad (3.2)$$

Раскрытие трещины, поэтому, может быть вычислено по формуле:

$$\frac{\pi E \tilde{u}_2}{4Yl} = \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} - \frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1. \quad (3.3)$$

Второе слагаемое в правой части полученного уравнения

$$J = -\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 \quad (3.4)$$

может быть вычислено только через три параметра локализации пластических деформаций Δ , Δ' , Δ'' как показано ниже.

Подставляя формулу (2.1) в (3.4), получим

$$-\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{C_1}{2Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{[(l+c'')^2 - x_1^2][(l+c')^2 - x_1^2][(l+\tilde{c})^2 - x_1^2]}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][(l + \tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\
& \times \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{[(l + c'')^2 - t^2][t^2 - (l + c')^2][t^2 - (l + \tilde{c})^2]} dt + \\
& + \frac{2}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][(l + \tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\
& \times \int_0^l \sqrt{[(l + c'')^2 - t^2][(l + c')^2 - t^2][(l + \tilde{c})^2 - t^2]} dt - \\
& - 2 \frac{1 - \Sigma}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][(l + \tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\
& \times \int_0^{l+\tilde{c}} \sqrt{[(l + c'')^2 - t^2][(l + c')^2 - t^2][(l + \tilde{c})^2 - t^2]} dt,
\end{aligned}$$

или, после ряда преобразований, —

$$\begin{aligned}
& - \frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{C_1 \Delta}{4Yl^2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} + \\
& + \frac{\Delta}{2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}{\theta'}} d\theta' + \\
& + \frac{\Delta}{2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} d\theta' - \\
& - \frac{\Delta}{2} (1 - \Sigma) \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} d\theta'.
\end{aligned}$$

Первый из интегралов в правой части полученного уравнения и внешние интегралы могут быть идентифицированы. Действительно, поскольку ([126], формулы 1.2.31.1, 1.2.31.6)

$$\int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} = \frac{2F(\gamma, s)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}},$$

$$\int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta)\sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} =$$

$$= \frac{2}{(\theta' - \Delta'^{-2})\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \frac{1 - \Delta'^{-2}}{\theta' - 1} \Pi(\gamma, \beta^2, s) + F(\gamma, s) \right\},$$

где

$$\beta^2 = \frac{\theta' - \Delta'^{-2}}{\theta' - 1}, \quad \sin^2 \gamma = \frac{1 - \Delta^2}{\Delta'^{-2} - \Delta^2},$$

то можно заключить, что

$$-\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) - \right.$$

$$- \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}} \left[(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s) \right] d\theta' -$$

$$- \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}} \left[(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s) \right] d\theta' -$$

$$\left. - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}} \left[(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s) \right] d\theta' \right\}.$$

Полученное уравнение, следовательно, преобразуется к следующему виду:

$$-\frac{\pi \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}{Y \Delta l} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) -$$

$$- \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq -$$

$$- \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq -$$

$$- (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq,$$

(3.5)

где

$$\beta^2 = \frac{q - \Delta'^{-2}}{q - 1}, \quad \beta_1^2 = \frac{q - \Delta^{-2}\Delta'^{-2}}{q - \Delta^{-2}}, \quad \beta_2^2 = \frac{q - \Delta''^2\Delta'^{-2}}{q - \Delta''^2}.$$

Отметим также формулу

$$\beta^2 = \frac{s^2}{\alpha^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{s^2}{\alpha_1^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{s^2}{\alpha_2^2}.$$

Подставляя формулу (3.5) в (3.3) и выражение для $1 - \Sigma$ согласно уравнению (2.22), предполагая тем самым малым размер удаленной пластической зоны, после многочисленных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi E \tilde{u}_2 \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}{4 \Delta Y l} = \Delta^{-1} \sqrt{\Delta''^{-2} - 1} \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \frac{C_1}{2 Y l^2} F(\gamma, s) - \\ & - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq - \\ & - \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq - \\ & - \frac{2 \sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ - \frac{(\Delta'^{-2} - 1) F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\ & \left. + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \right\} \times \\ & \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq + \right. \\ & \left. + \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если исключить теперь константу C_1 из последнего уравнения с помощью соотношения (2.24), то для вычисления раскрытия трещины при повторном нагружении можно получить формулу:

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi E \tilde{u}_2 \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}{4 \Delta Y l} = \Delta^{-1} \sqrt{\Delta''^{-2} - 1} \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \\
& + \frac{F(\gamma, s)}{\mathbf{K}(s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq - \\
& - \frac{F^2(\gamma, s)}{\Delta^2 \mathbf{K}^2(s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \\
& - \frac{2F(\gamma, s)}{\pi \Delta^2 \mathbf{K}(s)} \frac{\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ - \frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
& + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \Big\} \times \\
& \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \right. \\
& - \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1 - q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq \Big\} - \quad (3.7) \\
& - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq - \\
& - \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q) F(\gamma, s)] dq - \\
& - \frac{2\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ - \frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
& + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \Big\} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq + \right. \\ \left. + \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq \right\}.$$

Уравнение (3.7) позволяет вычислить раскрытие трещины, если три безразмерных параметра локализации пластических деформаций Δ , Δ' , Δ'' определены или заданы. Тем самым может быть охарактеризовано влияние удаленной пластической зоны на трещину.

В случае, если характерный линейный размер удаленной пластической зоны сравним с длиной трещины, то на основании формул (3.3), (3.5) и (2.17) находим

$$\frac{\pi E \tilde{u}_2(l, 0)}{4Yl} = \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \times \\ \times \left\{ \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) - V_1 + \bar{V}_2 - (1 - \Sigma)(V + V_2) \right\}, \quad (3.8)$$

где

$$V = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq,$$

$$V_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq,$$

$$\bar{V}_2 = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} \times \\ \times [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq,$$

$$V_2 = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)]dq,$$

$$\frac{C_1}{2Yl^2} = \Delta''^{-2} \Delta^{-2} \bar{S}_{32} + I_{31} - (1 - \Sigma) \Delta^{-2} (I_{33} + \Delta''^{-2} I_{32}),$$

$$\bar{S}_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq,$$

$$1 - \Sigma = \frac{J_{11} + \Lambda_{12}}{J_{13} + J_{12}}.$$

Таким образом, если параметры локализации определены, то формула (3.8) позволяет вычислить раскрытие трещины при любой протяженности удаленной пластической зоны (для этого необходимо вычислить только приведенные выше квадратуры).

Асимптотический анализ величины раскрытия трещины при малой (по сравнению с длиной трещины) длине удаленной пластической зоны приводит к простой зависимости

$$\frac{\pi E}{4Yl} \Delta u_2 = -\gamma [2 - (4Y)^{-1} \pi \sqrt{(\Delta'^{-2} - 1)^{-1} \tilde{\sigma}_{22}^\infty}] \quad (\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1 - 0) \quad (3.9)$$

для дополнительного закрытия трещины при повторном нагружении.

Таким образом, возникновение нового очага пластического течения при повторном нагружении проявляется в форме дополнительного закрытия трещины, асимптотическое значение которого может быть вычислено по формуле (3.9).

Следует отметить, что предлагаемая методика оценки влияния удаленных от вершины трещины локализованных очагов пластических деформаций на равновесие трещины нормального отрыва может быть использована и при иных источниках подобной локализации (локальное возрастание напряжений вследствие термического воздействия, накопления повреждений в условиях водородного охрупчивания и нейтронного облучения и т.п.). Формально вид поля остаточных напряжений учитывается только через функцию $H(q)$, которая, согласно определению, вычисляется в виде

$$2H(q) = 1 + \frac{\tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0)}{Y} \Big|_{x_1 = \Delta^{-1} \Delta''^{-1} l \sqrt{q}}.$$

Никаких дополнительных модификаций предложенная в работе схема не требует.

3.6.4. Пример численного анализа

Для анализа локализации пластических деформаций во время повторного нагружения необходимо получить численное решение системы уравнений (2.25), (2.26).

Использование традиционных методов решения систем нелинейных уравнений (метода наискорейшего спуска, метода Ньютона, итерационных методов) наталкивается на значительные трудности, связанные, например, с дифференцированием функций, определяемых в данном случае интегралами. Поэтому использован численный алгоритм, заключающийся в следующем.

Для решения системы двух нелинейных уравнений разыскивается точка пересечения двух кривых на плоскости (Δ', Δ'') , задаваемых исследуемыми уравнениями (2.25) и (2.26) (кривые (I) и (II) соответственно). После выделения области на плоскости (Δ', Δ'') возможного нахождения решения системы уравнений задается значение одной из переменных, например, Δ' , и определяется точка пересечения с кривой (I). Если точка пересечения с данной кривой при фиксированном значении Δ' отсутствует, то находится точка пересечения с другой кривой. Если нет пересечений как с первой кривой, так и со второй, то задаваемое значение переменной Δ' делится пополам и процедура повторяется до определения значения Δ'' . Затем полученное значение переменной Δ'' фиксируется и осуществляется переход на другую кривую: если значение Δ'' найдено при пересечении с первой кривой, то разыскивается пересечение со второй кривой при фиксированном значении Δ'' , и наоборот. Тем самым определяется новое значение переменной Δ' и процедура повторяется. Таким образом, осуществляется обход точки пересечения кривых по "закручивающейся" ломаной, звеньями которой являются отрезки, параллельные координатным осям. Следует отметить, что процесс поиска точки пересечения кривых будет сходящимся, если биссектриса противоположных углов, составленных касательными в точке пересечения, имеет отрицательный угол наклона к горизонту. В противном случае процесс будет расходящимся.

В случае "раскручивающейся" ломаной необходимо изменить направление обхода на противоположное. Используемый алгоритм также учитывает возможные частные случаи, такие как касание кривых, пересечение кривых с почти горизонтальной биссектрисой указанных углов.

Область поиска решения определяется неравенствами:

$$l + \check{c} < l + c' \leq l + c,$$

$$l + c' < l + c'' \leq 2(l + c) - (l + \check{c}).$$

Первое неравенство означает, что левый конец удаленной пластической зоны лежит строго правее конца прилегающей к вершине трещины пластической области и левее точки, в которой остаточные напряжения достигают максимума.

Условие в левой части второго неравенства очевидно, а условие в правой части подразумевает, что правый конец удаленной пластической области не может находиться от точки максимума остаточных напряжений далее, чем на длину отрезка от конца примыкающей к вершине трещины пластической области до точки, где находился конец пластической области при начальном нагружении.

Для безразмерных параметров Δ' и Δ'' эти неравенства приобретают следующий вид:

$$\cos \hat{\beta} \leq \Delta' < 1,$$

$$\frac{1}{2\Delta \sec \hat{\beta} - 1} \leq \Delta'' < \Delta'.$$

Параметр Δ выбирался из интервала

$$\Delta = \cos(\hat{\beta}/2) + R(1 - \cos(\hat{\beta}/2)) \quad (0 < R < 1)$$

с тем, чтобы, фиксируя R , можно было бы задавать все возможные значения Δ . Для расчета было принято $R = 0.95$, т.е. длина пластической области, прилегающей к трещине, очень мала по сравнению с длиной трещины.

Количество точек разбиения при вычислении интегралов в первом уравнении выбиралось равным $N = 10^6$. При вычислении интегралов, входящих во второе уравнение, содержащее повторные интегралы, полагалось, что число точек разбиения для внутренних интегралов равно $N = 10^4$, для внешних — $N = 10^3$, поскольку более сильное измельчение отрезков интегрирования, а также увеличение числа итераций в подпрограмме, определяющей корень нелинейного уравнения на заданном отрезке, ведет к многократному увеличению времени работы программы.

При

$$\frac{l + \check{c}}{l} = \frac{1}{\Delta} = 1.00003,$$

$$\frac{l + c}{l} = \sec \hat{\beta} = 1.00309$$

были получены следующие результаты:

$$\frac{l + c'}{l} = \frac{1}{\Delta\Delta'} = 1.00012,$$

$$\frac{l + c''}{l} = \frac{1}{\Delta\Delta''} = 1.0014,$$

что доказывает исходное предположение о возникновении удаленной пластической зоны.

Кривые (I) и (II) в окрестности их пересечения для указанных значений Δ , $\hat{\beta}$ изображены на рис. 55.

3.7. Методы континуальной теории дислокаций в задачах о трещинах

3.7.1. Основные понятия теории дислокаций

Значительное расхождение критериев прочности кристаллических тел, установленных экспериментально и вычисленных теоретически, объясняется несовершенствами в построении кристаллических решеток.

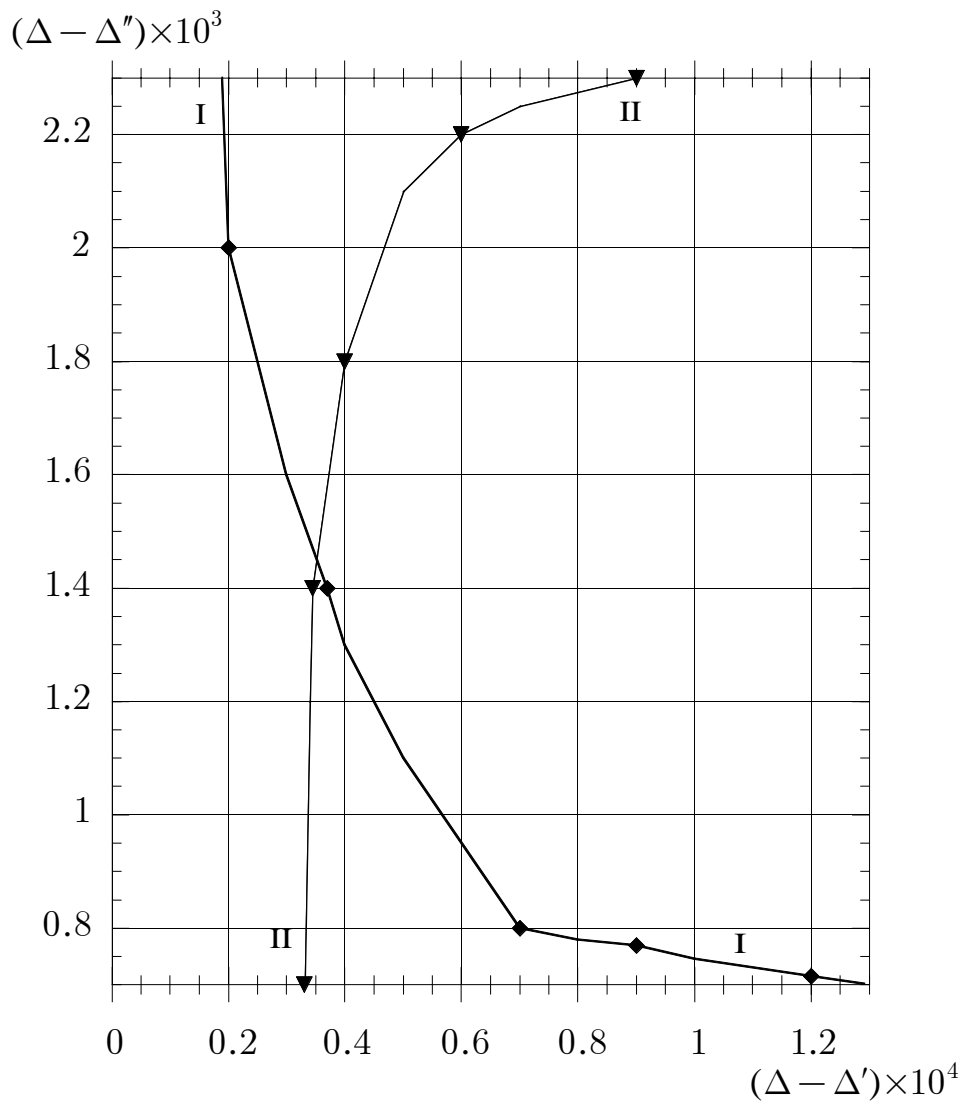


Рис. 55. Кривые I и II в окрестности их пересечения

Дислокации — линейные несовершенства кристаллических решеток, существенно влияющие на механические свойства кристаллов. В реальных кристаллах дислокации могут иметь протяженность до тысяч и даже десятков тысяч периодов решетки.

Дислокации были впервые исследованы в работах Вольтерра (V. Volterra), Сомильяны (C. Somigliana) и Лява (A. E. H. Love), относящихся к самому началу двадцатого столетия, в связи с деформациями упругих тел с многозначными полями перемещений.

Простейшим примером подобной деформации является относительный сдвиг в радиальном направлении стенок трубчатого образца, разрезанного вдоль одной из образующих. Образуется так называемая краевая дислокация (рис. 56А).

Этот сдвиг можно реализовать, прикладывая к поверхностям среза равные и противоположно направленные усилия. Если теперь склеить смещенные друг относительно друга стенки и удалить все поверхностные нагрузки, то составленное таким образом тело будет напряжено и не свободно от деформаций. Поле перемещений будет неоднозначным, поскольку при обходе вдоль любого конту-

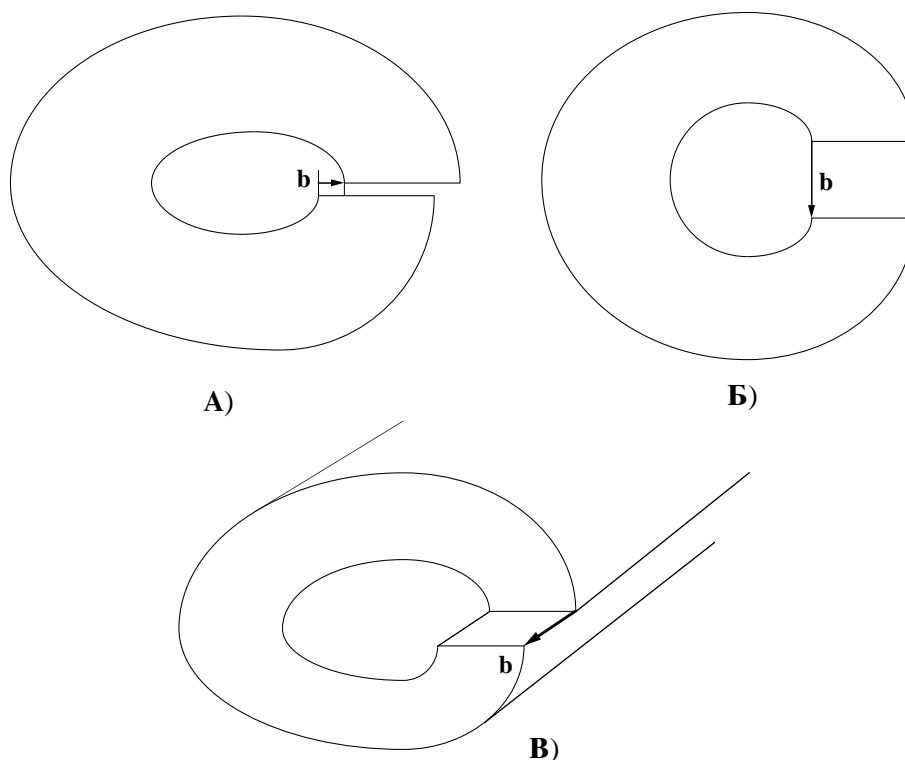


Рис. 56. Дислокации Вольтерра: **А** и **Б** — краевые дислокации, **В** — винтовая дислокация

ра, охватывающего ось трубки, можно выявить изменение вектора перемещения (на величину, равную относительно смещению берегов разреза). Приращение вектора перемещения, очевидно, имеет радиальное направление.

Другая разновидность краевой дислокации (рис. 56Б) получается, если разомкнуть стенки разрезанной вдоль образующей трубки и, заполнив образовавшееся пространство дополнительным материалом, осуществить склейку. При обходе вдоль любого контура, охватывающего ось трубки, также можно выявить изменение вектора перемещения (на величину, равную относительно смещению берегов разреза). Приращение вектора перемещения, очевидно, имеет направление, перпендикулярное направлению разреза.

Третий тип дислокации (винтовая дислокация) получается при относительном сдвиге разрезанной трубки в осевом направлении (рис. 56В). При обходе вдоль любого контура, охватывающего ось трубки, можно выявить изменение вектора перемещения (на величину, равную относительно смещению берегов разреза). Приращение вектора перемещения имеет осевое направление. Это осевое направление (так же как и в случае краевой дислокации) принято называть линией дислокации.

Указанные типы дислокаций в сплошных упругих телах принято называть дислокациями Вольтерра.

В рамках континуальной модели дислокация порождает деформацию сплошной среды, обладающую следующим свойством: при обходе по любому замкнутому контуру, охватывающему линию дислокации, вектор упругого смещения

\mathbf{u} получает определенное конечное приращение \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \oint d\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{final}} - \mathbf{u}_{\text{initial}}. \quad (1.1)$$

Контур интегрирования должен охватывать линию дислокации и обходить-ся против хода часовой стрелки, если смотреть на этот контур с той стороны, в которую направлен вектор $\boldsymbol{\tau}$, определяющий по выбору наблюдателя положительное направление на линии дислокации.¹⁶²

Постоянный вектор \mathbf{b} также называется вектором Бюргерса (J. M. Burgers) данной дислокации.¹⁶³ Простым случаям краевой и винтовой дислокаций отвечают прямые линии дислокаций, вдоль которых $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{b}$.

В рамках континуальной теории линия дислокации может быть и криволинейной, но всегда — гладкой кривой. Известно [67], что линия дислокации не может начинаться или заканчиваться внутри тела: она должна выходить концами на его поверхность, либо должна представлять собой замкнутую петлю. Из этого свойства дислокации следует, что вектор Бюргерса постоянен вдоль линии дислокации.

На русском языке имеется обширная литература по механическим свойствам дислокаций. Упомянем лишь некоторые источники: [94] [173], [64], [67], [73], [78], [110], [133].

Краевые и винтовые дислокации являются также наиболее распространенным видом несовершенств кристаллических решеток. Краевая и винтовая дислокации как несовершенства кристаллической структуры могут быть представлены следующим образом.

Пусть в правильную кристаллическую решетку (рис. 57А) вдвинута "лишняя" кристаллическая полуплоскость (рис. 57Б) так, что правильная структура решетки искажается: образуется краевая дислокация, обозначаемая символом \perp . Край этой экстра полуплоскости (перпендикулярная плоскости рисунка ось x_3) называется линией дислокации. Краевой дислокации можно приписать определенный знак: если вдвинуть экстраплоскость снизу, то образуется точно такая же дислокация, но обратного знака, обозначаемая символом \top . Искажение структуры решетки в непосредственной близости к дислокации велико, но уже на расстояниях порядка нескольких периодов кристаллические плоскости смыкаются друг с другом почти правильным образом. Внедрение экстраплоскости приводит к упругой деформации решетки: сверху решетка сжата, а снизу — растянута.

Другой тип дислокации (винтовая дислокация) можно представить как результат разреза решетки по полуплоскости, после чего части решетки по обе стороны разреза сдвигаются относительно друг друга на один период параллельно краю разреза (рис. 58).

Дислокации кристаллических структур также характеризуются вектором Бюргерса, который замыкает разрыв петли особого рода, называемой контуром Бюргерса, охватывающей линию дислокации.

Рассмотрим построение вектора Бюргерса для краевой дислокации \perp . При этом необходимо сравнивать обходы в несовершенной и совершенной решетках (рис. 57). В несовершенной решетке выберем замкнутый контур обхода $ab\dots v = a$ и шаг за шагом построим соответствующий контур в совершенной решетке $AB\dots V$. Ясно, что обход в совершенной решетке заканчивается не в том месте, откуда он начинался. Дополнительный вектор, необходимый для того, чтобы замкнуть обход в совершенной решетке, и будет вектором Бюргерса (или истинным вектором Бюргерса). В рассматриваемом примере краевой дислокации это есть

¹⁶²Заметим также, что (см. [86], с. 22) $d\mathbf{u} = d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (d\mathbf{r}) \cdot [\boldsymbol{\varepsilon} - (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^T \times \mathbf{r}]$.

¹⁶³Иногда вектор Бюргерса определяют прямо противоположным значением [67], с. 10.

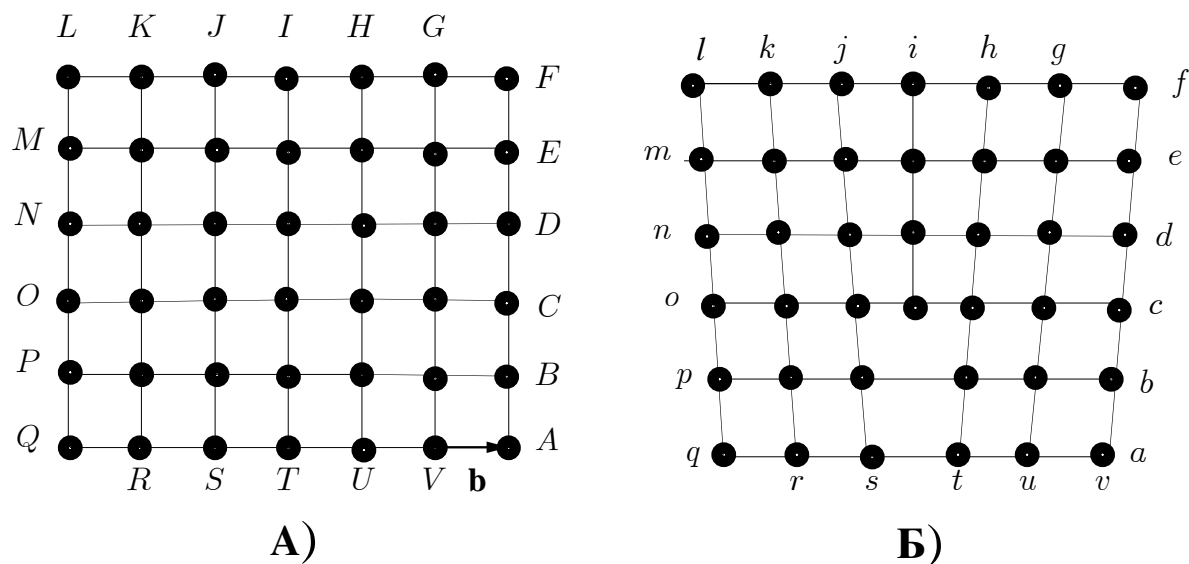


Рис. 57. Краевая дислокация: А) идеальная кристаллическая решетка, $AB...V$ — контур обхода, замыкающийся с помощью вектора Бюргерса \mathbf{b} ; Б) кристаллическая решетка с экстра полуплоскостью, $ab...v = a$ — замкнутый контур обхода

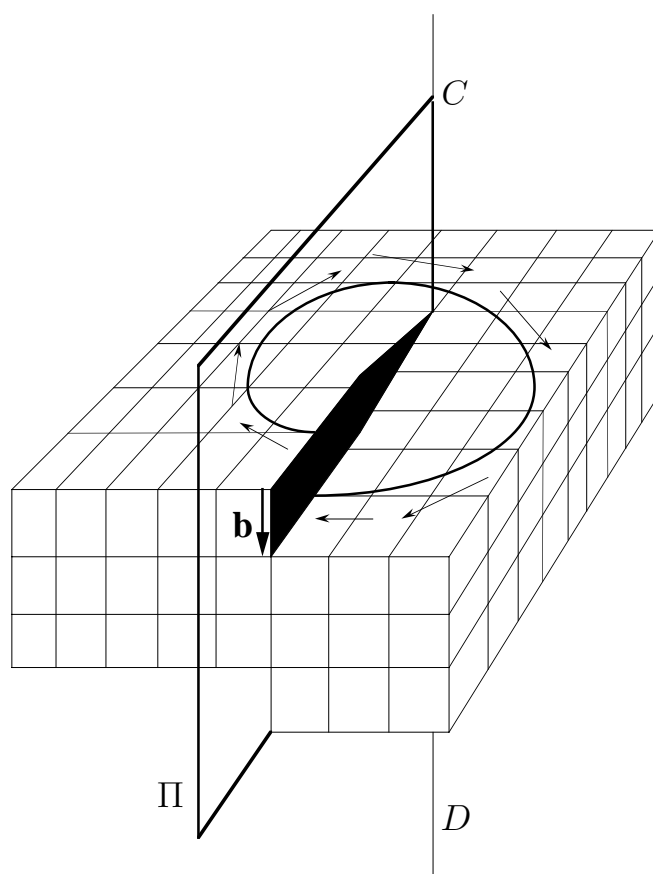


Рис. 58. Образование винтовой дислокации при сдвиге частей кристалла в плоскости Π . Линия дислокации CD параллельна направлению сдвига, \mathbf{b} — вектор Бюргерса

вектор с началом в точке V и концом A . Длина вектора Бюргерса всегда равна периоду совершенной решетки.

Вектор Бюргерса часто ассоциируют с несовершенной конфигурацией решетки, перенося истинный вектор Бюргерса в эту конфигурацию. В этом случае говорят о локальном векторе

Бюргерса.¹⁶⁴

В случае винтовой дислокации, образованной в результате скольжения одной части решетки относительно другой ее части (рис. 59), вектор Бюргерса ориентирован вдоль направления скольжения (так же как и вектор τ). Контур обхода в несовершенной решетке $abc...lmn = a$ соответствует незамкнутый контур $ABC...LMN$ в совершенной решетке. Истинный вектор Бюргерса в данном случае есть вектор с началом в точке N и концом в точке A .

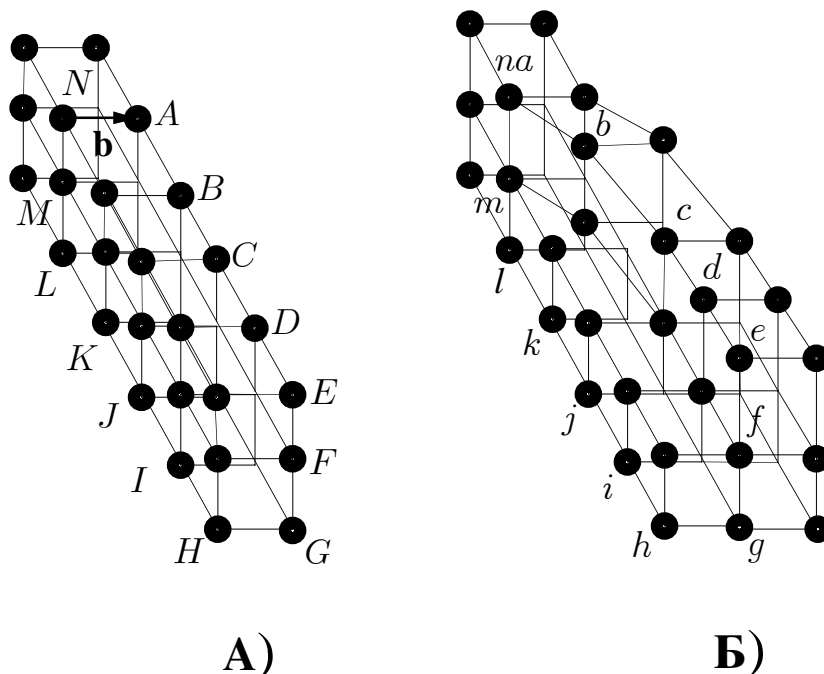


Рис. 59. К определению истинного вектора Бюргерса винтовой дислокации: А) идеальная кристаллическая решетка, $AB...N$ — контур обхода, замыкающийся с помощью вектора Бюргерса b ; Б) кристаллическая решетка, верхняя часть которой сдвинута относительно нижней вправо на один период, $ab...n = a$ — замкнутый контур обхода

3.7.2. Представление трещин скоплениями дислокаций

Приведем (см., например, [273]) необходимые для дальнейшего формулы для распределения напряжений, индуцированных изолированными винтовыми и краевыми прямолинейными дислокациями.¹⁶⁵ Напряжения и деформации, индуцированные изолированной прямолинейной дислокацией, имеют порядок r^{-1} при приближении к линии дислокации.

Изолированная прямолинейная винтовая дислокация (линия которой совпадает с осью x_3), характеризуемая вектором Бюргерса $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$, индуцирует поле напряжений:

$$\sigma_{13} = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \sigma_{23} = \frac{Gb}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (2.1)$$

¹⁶⁴Приведенное определение вектора Бюргерса несовершенной кристаллической решетки страдает одним недостатком: направление вектора Бюргерса зависит от начальной точки обхода.

¹⁶⁵Расчет упругого поля, индуцированного петлей дислокации произвольной формы, приводится, например, в [67], с. 18-30. Там же читатель найдет асимптотики "дальнего поля" для возмущения упругого поля, вызванного наличием в теле петли дислокации.

Изолированная прямолинейная краевая дислокация (линия которой совпадает с осью x_3), характеризуемая вектором Бюргерса $b_1 = b$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, индуцирует поле напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{33} = -\frac{Gb\nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Перейдем теперь к представлению трех основных типов трещин как скоплений дислокаций.

3.7.2А. Трещина типа I

Рассмотрим трещину нормального отрыва $|x_1| \leq l$, берега которой находятся под действием нормальной нагрузки $T_2 = T_2(x_1)$.

Будем моделировать влияние трещины, представляя ее как непрерывное на отрезке $|x_1| \leq l$ распределение краевых дислокаций. Вектор Бюргерса каждой дислокации параллелен оси x_2 : $b_1 = 0$, $b_2 = -b$, $b_3 = 0$. Суммарный вектор Бюргерса скопления дислокаций должен быть, очевидно, нулевым, чтобы исключить многозначность поля перемещений.

Каждая краевая дислокация, расположенная в точке $x_1 = t$, и характеризуемая вектором Бюргерса $b_1 = 0$, $b_2 = -b$, $b_3 = 0$, индуцирует напряжения, которые на оси x_1 могут быть вычислены в виде:

$$\sigma_{11} = -\frac{2Gb_2}{\pi(\kappa+1)} \frac{1}{x_1 - t}, \quad \sigma_{22} = \frac{2Gb_2}{\pi(\kappa+1)} \frac{1}{x_1 - t}, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что непрерывное распределение дислокаций с плотностью распределения вектора Бюргерса $bf(x_1)$ на отрезке $|x_1| \leq l$ порождает на оси x_1 напряжения:

$$\sigma_{11} = \frac{2Gb}{\pi(\kappa+1)} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{x_1 - t} dt, \quad \sigma_{22} = -\frac{2Gb}{\pi(\kappa+1)} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{x_1 - t} dt, \quad \sigma_{12} = 0, \quad (2.4)$$

поскольку $-bf(t)dt$ есть в точности db_2 в месте $x_1 = t$. Здесь и в дальнейшем сингулярные интегралы понимаются в смысле их главного значения.

Граничное условие на верхнем берегу трещины:

$$-\frac{2Gb}{\pi(\kappa+1)} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - x_1} dt = T_2(x_1). \quad (2.5)$$

Из этого сингулярного интегрального уравнения первого рода должна быть определена плотность распределения $bf(x_1)$.¹⁶⁶

¹⁶⁶Решение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши рассматривается, например, в [96], с. 149-154.

Необходимо также принять условие

$$\int_{-l}^l f(t)dt = 0, \quad (2.6)$$

т.е. суммарный вектор Бюргерса скопления дислокаций должен быть равен нулю, что гарантирует однозначность поля перемещений.

Решение указанного сингулярного интегрального уравнения имеет вид (см., например, [273], pp. 185-192):

$$f(x_1) = \frac{2(1-\nu)}{\pi Gb} \frac{1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{t - x_1} T_2(t) dt. \quad (2.7)$$

Здесь учтено, что в случае плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$.

Для трещины нормального отрыва, деформируемой напряжениями дальнего поля σ_{22}^∞ , имеем (плоская деформация):

$$f^*(x_1) = -\frac{2(1-\nu)\sigma_{22}^\infty}{Gb} \frac{x_1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}}. \quad (2.8)$$

Нормальные напряжения на оси x_1 :

$$\sigma_{11} = \frac{x_1 \sigma_{22}^\infty}{\sqrt{x_1^2 - l^2}}, \quad (2.9)$$

следовательно,

$$K_I = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi l}. \quad (2.10)$$

Скачок нормального перемещения (относительное смещение берегов трещины¹⁶⁷) вдоль трещины вычисляется как:

$$[u_2] = u_2^+ - u_2^- = -b \int_{x_1}^l f^*(t) dt = \frac{2(1-\nu)\sigma_{22}^\infty}{G} \sqrt{l^2 - x_1^2}. \quad (2.11)$$

Распределение напряжений в среде может быть определено следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \sigma_{22}^\infty + \frac{\sigma_{22}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - x'_1) [(x_1 - x'_1)^2 + 3x_2^2]}{[(x_1 - x'_1)^2 + x_2^2]^2} \frac{x'_1}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx'_1, \\ \sigma_{11} &= \frac{\sigma_{22}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - x'_1) [(x_1 - x'_1)^2 - x_2^2]}{[(x_1 - x'_1)^2 + x_2^2]^2} \frac{x'_1}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx'_1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹⁶⁷Относительное смещение берегов трещины обычно называют раскрытием трещины. В механике разрушения традиционно особый интерес представляет раскрытие вершины трещины.

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_{22}^{\infty} x_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - x'_1)^2 - x_2^2}{[(x_1 - x'_1)^2 + x_2^2]^2} \frac{x'_1}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx'_1.$$

Для трещины нормального отрыва $|x_1| \leq l$, берега которой находятся под действием нормальной нагрузки $T_2 = T_2(x_1)$, поле напряжений можно получить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t'') [(x_1 - t'')^2 - x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t'') [(x_1 - t'')^2 + 3x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \times \\ &\quad \times \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' \int_{-l}^l \frac{x_2 [(x_1 - t'')^2 - x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Внутреннее интегрирование в этих формулах может быть выполнено:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= -\frac{2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t') \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt', \\ \sigma_{12} &= -\frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{[(x_1 - t')^2 + x_2^2] \sin \vartheta + 2x_2(x_1 - t') \cos \vartheta}{[(x_1 - t')^2 + x_2^2]^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' + \\ &\quad + \frac{x_2}{\pi \rho^3} \int_{-l}^l \frac{(x_1^2 + x_2^2 - x_1 t') \sin 3\vartheta + t' x_2 \cos 3\vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt', \\ \sigma_{11} &= -\frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{[(x_1 - t')^2 + x_2^2] \cos \vartheta - 2x_2(x_1 - t') \sin \vartheta}{[(x_1 - t')^2 + x_2^2]^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' - \\ &\quad - \frac{x_2}{\pi \rho^3} \int_{-l}^l \frac{-(x_1^2 + x_2^2 - x_1 t') \cos 3\vartheta + t' x_2 \sin 3\vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt' - \\ &\quad - \frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t') \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_2(t') dt', \end{aligned} \quad (2.14)$$

где введены переменные ρ, ϑ : $\sqrt{l^2 - z^2} = \rho e^{i\vartheta}$, причем $\vartheta = 0$, если $-l < x_1 < l, x_2 = 0 + 0$.

Вдоль луча $x_1 > l, x_2 = 0$ имеем $\vartheta = -\pi/2$ и

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2} T_2(t)}{x_1 - t} dt \quad (2.15)$$

и, следовательно,

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} T_2(t) dt. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь полубесконечную трещину **типа I** ($x_1 < 0$, $x_2 = 0$). Берега трещины находятся под действием нормальных усилий, так что на верхнем берегу трещины выполняется краевое условие $\sigma_{22} = -T_2(x_1)$.

Можно, как и выше, определить плотность распределения вектора Бюргерса скопления дислокаций, индуцирующее поле напряжений, аналогичное тому, которое существует в среде с трещиной, и показать, что коэффициент интенсивности напряжений вычисляется по формуле

$$K_I = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{T_2(x'_1)}{\sqrt{-x'_1}} dx'_1. \quad (2.17)$$

3.7.2Б. Трещина типа II

Рассмотрим трещину поперечного сдвига $|x_1| \leq l$, берега которой находятся под действием касательной нагрузки $T_1 = T_1(x_1)$. На верхнем берегу трещины $\sigma_{12} = -T_1(x_1)$. Трещина моделируется линейным распределением краевых дислокаций. Вектор Бюргерса каждой дислокации параллелен оси x_1 : $b_1 = b$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$.

Плотность распределения вектора Бюргерса $b f(x_1)$ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - x_1} dt = \frac{2\pi(1 - \nu)}{Gb} T_1(x_1), \quad (2.18)$$

решение которого имеет вид

$$f(x_1) = -\frac{2(1 - \nu)}{\pi G b \sqrt{l^2 - x_1^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2} T_1(t)}{t - x_1} dt. \quad (2.19)$$

Поле напряжений представляется, следовательно, как

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' \int_{-l}^l \frac{x_2 [(x_1 - t'')^2 + x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \times \\
 &\quad \times \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}, \\
 \sigma_{22} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' \int_{-l}^l \frac{x_2 [(x_1 - t'')^2 - x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \times \\
 &\quad \times \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}, \\
 \sigma_{12} &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-l}^l \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t'') [(x_1 - t'')^2 - x_2^2]}{[(x_1 - t'')^2 + x_2^2]^2 (t' - t'')} \times \\
 &\quad \times \frac{dt''}{\sqrt{l^2 - t''^2}}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Внутреннее интегрирование может быть выполнено. Опуская детали, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} + \sigma_{22} &= -\frac{2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t') \cos \vartheta - x_2 \sin \vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt', \\
 \sigma_{22} &= -\frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{[(x_1 - t')^2 + x_2^2] \sin \vartheta + 2x_2(x_1 - t') \cos \vartheta}{[(x_1 - t')^2 + x_2^2]^2} \times \\
 &\quad \times \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' + \\
 &\quad + \frac{x_2}{\pi \rho^3} \int_{-l}^l \frac{(x_1^2 + x_2^2 - x_1 t') \sin 3\vartheta + t' x_2 \cos 3\vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt', \\
 \sigma_{12} &= -\frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{[(x_1 - t')^2 + x_2^2] \cos \vartheta - 2x_2(x_1 - t') \sin \vartheta}{[(x_1 - t')^2 + x_2^2]^2} \times \\
 &\quad \times \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' - \\
 &\quad - \frac{x_2}{\pi \rho^3} \int_{-l}^l \frac{-(x_1^2 + x_2^2 - x_1 t') \cos 3\vartheta + t' x_2 \sin 3\vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt' - \\
 &\quad - \frac{x_2}{\pi \rho} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - t') \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta}{(x_1 - t')^2 + x_2^2} \sqrt{l^2 - t'^2} T_1(t') dt',
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

где введены переменные ρ, ϑ : $\sqrt{l^2 - z^2} = \rho e^{i\vartheta}$, причем $\vartheta = 0$, если $-l < x_1 < l, x_2 = 0 + 0$.

Вдоль луча $x_1 = l + \lambda, x_2 = 0$ имеем ($\lambda \ll l$):

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} \sim \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \tag{2.22}$$

где

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} T_1(t) dt. \tag{2.23}$$

Плотность распределения вектора Бюргерса $bf^*(x_1)$ в случае деформации напряжением дальнего поля σ_{12}^∞ есть (плоская деформация):

$$f^*(x_1) = \frac{2(1-\nu)\sigma_{12}^\infty}{Gb} \frac{x_1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}}. \quad (2.24)$$

Относительное смещение берегов трещины (раскрытие трещины):

$$[u_1] = u_1^+ - u_1^- = b \int_{x_1}^l f^*(t) dt = \frac{2(1-\nu)\sigma_{12}^\infty}{G} \sqrt{l^2 - x_1^2}. \quad (2.25)$$

Распределение напряжений определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{\sigma_{12}^\infty x_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{3(x_1 - x_1')^2 - x_2^2}{[(x_1 - x_1')^2 + x_2^2]^2} \frac{x_1'}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx_1', \\ \sigma_{22} &= \frac{\sigma_{12}^\infty x_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - x_1')^2 - x_2^2}{[(x_1 - x_1')^2 + x_2^2]^2} \frac{x_1'}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx_1', \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}^\infty + \frac{\sigma_{12}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x_1 - x_1') [(x_1 - x_1')^2 - x_2^2]}{[(x_1 - x_1')^2 + x_2^2]^2} \frac{x_1'}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx_1'. \end{aligned} \quad (2.26)$$

3.7.2В. Трещина типа III

Рассмотрим трещину антиплоского сдвига $|x_1| \leq l$, берега которой находятся под действием нагрузки $T_3 = T_3(x_1)$. На верхнем берегу трещины $\sigma_{23} = -T_3(x_1)$. Трещина моделируется линейным распределением винтовых дислокаций. Вектор Бюргерса каждой дислокации параллелен оси x_3 : $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$.

Плотность распределения вектора Бюргерса $bf(x_1)$ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - x_1} dt = \frac{2\pi}{Gb} T_3(x_1), \quad (2.27)$$

решение которого имеет вид

$$f(x_1) = -\frac{2}{\pi Gb \sqrt{l^2 - x_1^2}} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2} T_3(t)}{t - x_1} dt. \quad (2.28)$$

Распределение напряжений находится как

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \frac{Gb}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{(x_1 - t) + ix_2} dt. \quad (2.29)$$

Вводя переменные ρ, ϑ : $\sqrt{l^2 - z^2} = \rho e^{i\vartheta}$, причем $\vartheta = 0$, если $-l < x_1 < l$, $x_2 = 0 + 0$, получим также

$$\sigma_{23} + i\sigma_{13} = \frac{i}{\pi\rho} e^{-i\vartheta} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{l^2 - t^2} T_3(t)}{t - z} dt. \quad (2.30)$$

Вдоль луча $x_1 = l + \lambda \cos \alpha$, $x_2 = \lambda \sin \alpha$ справедлива асимптотика ($\lambda \ll l$):

$$\sigma_{23} \sim \frac{K_{III} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \quad \sigma_{13} \sim -\frac{K_{III} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi\lambda}}, \quad (2.31)$$

где

$$K_{III} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{l+t}{l-t}} T_3(t) dt. \quad (2.32)$$

Относительное смещение берегов трещины (раскрытие трещины):

$$[u_3] = u_3^+ - u_3^- = b \int_{x_1}^l f(t) dt. \quad (2.33)$$

Плотность распределения вектора Бюргерса $bf^*(x_1)$ в случае деформации напряжением дальнего поля σ_{23}^∞ есть:

$$f^*(x_1) = \frac{2\sigma_{23}^\infty}{Gb} \frac{x_1}{\sqrt{l^2 - x_1^2}}. \quad (2.34)$$

Относительное смещение берегов трещины:

$$[u_3] = u_3^+ - u_3^- = b \int_{x_1}^l f^*(t) dt = \frac{2\sigma_{23}^\infty}{G} \sqrt{l^2 - x_1^2}. \quad (2.35)$$

Распределение напряжений определяется по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= -\frac{\sigma_{23}^\infty x_2}{\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{(x_1 - x_1')^2 + x_2^2} \frac{x_1'}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx_1', \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}^\infty + \frac{\sigma_{23}^\infty}{\pi} \int_{-l}^l \frac{x_1 - x_1'}{(x_1 - x_1')^2 + x_2^2} \frac{x_1'}{\sqrt{l^2 - x_1'^2}} dx_1'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Интегралы без труда вычисляются с помощью вычетов:

$$\sigma_{13} = -\sigma_{23}^\infty \operatorname{Re} \frac{z}{\sqrt{l^2 - z^2}}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^\infty \operatorname{Im} \frac{z}{\sqrt{l^2 - z^2}}. \quad (2.37)$$

3.7.3. Модель Билби–Коттрелла–Свиндена

Задачи о трещинах поперечного и продольного сдвига в идеально упруго-пластических телах, когда пластическое течение локализуется в узких областях перед кончиками трещины, могут быть исследованы при предположении, что сама трещина и пластические области, расположенные у вершин трещин, заменяются некоторым фиктивным распределением дислокаций. Остается только подобрать плотность распределения дислокаций¹⁶⁸ таким образом, чтобы создавалось упругое поле, идентичное возмущению упругого поля, индуцированному трещиной и пластическими зонами под действием напряжений "дальнего поля". Для определения плотности распределения дислокаций получается сингулярное интегральное уравнение первого рода с ядром Коши, которое, как известно, может быть эффективно разрешено.

В рассматриваемой модели [193] трещина и узкие пластические области, прилегающие к ее кончикам, представлены непрерывным множеством дислокаций на отрезке $2a$ (рис. 60А, 60Б).

Рассматриваемые скопления дислокаций должны создавать упругое поле, в точности идентичное возмущению упругого поля, индуцированному трещиной и пластическими зонами под действием напряжений дальнего поля σ_{12}^∞ и σ_{23}^∞ для трещин поперечного и продольного сдвига соответственно. В областях $-a < x_1 < -l$ и $l < x_1 < a$ напряжения σ_{12}^∞ и σ_{23}^∞ равны k — пределу текучести при сдвиге.

Приведем распределение напряжений в упругой среде, индуцированных единичной дислокацией (см., например, [78], с. 155-157).

Винтовая дислокация с вектором Бюргерса, направленным вдоль оси x_3 , порождает напряжения

$$\sigma_{31} = -\frac{Gb}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \sigma_{23} = \frac{Gb}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad (b = b_3). \quad (3.1)$$

Краевая дислокация с вектором Бюргерса, направленным вдоль оси x_1 , порождает напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\beta}{2} \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{22} = -\frac{\beta}{2} \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{\beta}{2} \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \sigma_{33} = \nu\beta \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\beta = -Gb/(\pi(1-\nu))$, $b = b_1$.

Пусть $b f(x_1) dx_1$ — изменение соответствующей компоненты вектора Бюргерса для распределения дислокаций между x_1 и $x_1 + dx_1$.

Из условия равновесия сил, обусловленных существованием дислокаций и напряжений дальнего поля, можно получить следующие сингулярные интеграль-

¹⁶⁸Под плотностью распределения дислокаций фактически понимается плотность распределения вектора Бюргерса.

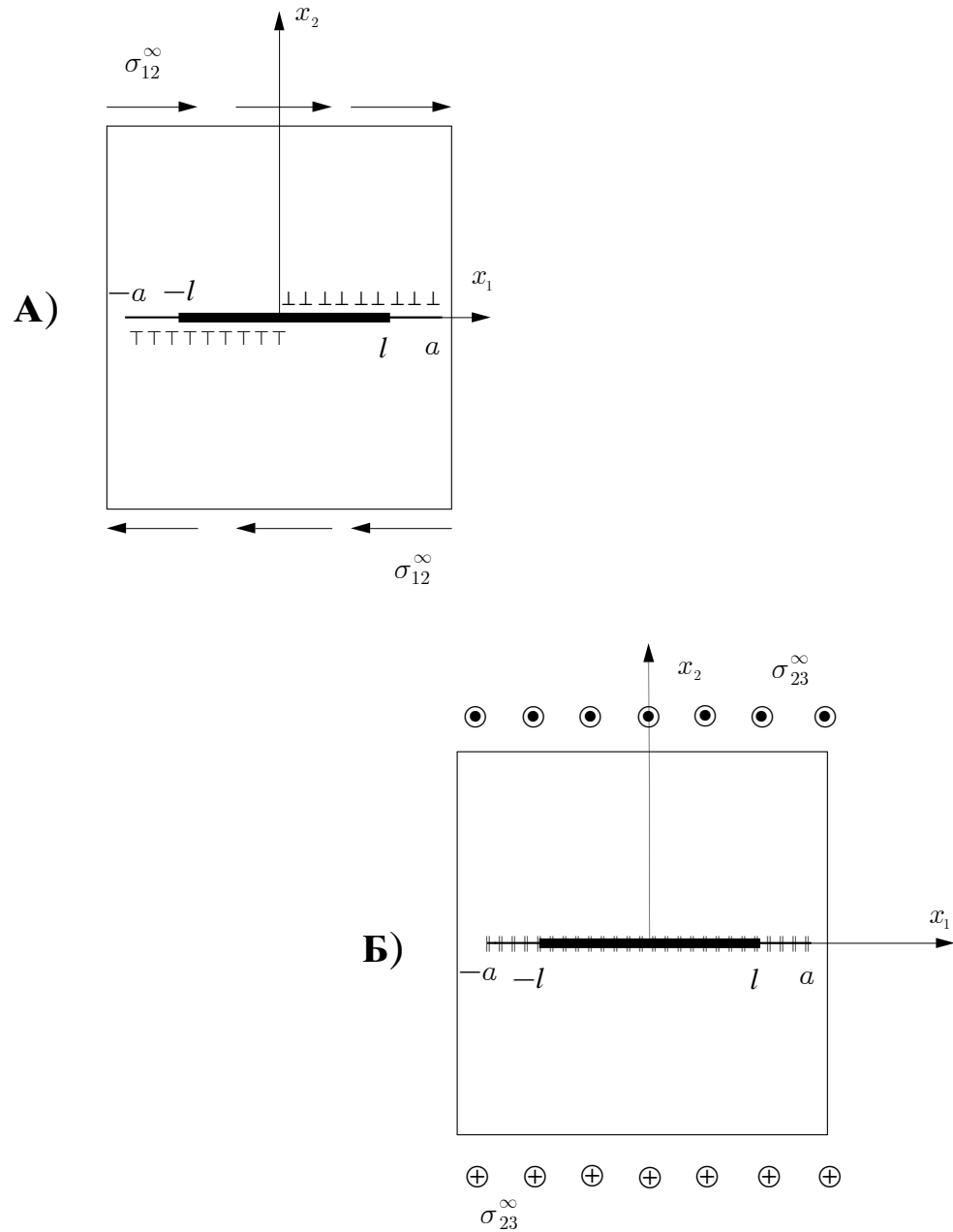


Рис. 60. Представление пластических зон в форме распределения дислокаций в модели Билби—Коттрелла—Свиндена (БКС): **А)** трещина в поле поперечного сдвига; **Б)** трещина в поле антиплоского сдвига

ные уравнения относительно неизвестной плотности распределения вектора Бюргера:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x'_1) dx'_1}{x_1 - x'_1} = \frac{\sigma_{12}^*(x_1)}{A}, \quad \int_{-a}^a \frac{f(x'_1) dx'_1}{x_1 - x'_1} = \frac{\sigma_{23}^*(x_1)}{A}, \quad (3.3)$$

для трещин **типа II** и **типа III** соответственно, где A — параметр, определяемый равенствами

$$A = \frac{Eb}{4\pi(1 + \nu)}, \quad A = \frac{Eb}{4\pi(1 - \nu^2)} \quad (3.4)$$

для винтовых и краевых дислокаций соответственно; σ_{12}^* и σ_{23}^* — распределения напряжений (за вычетом напряжений дальнего поля) на оси x_1 для трещин

поперечного и антиплоского сдвигов соответственно:

$$\sigma_{12}^*(x_1, x_2 = 0) = \begin{cases} k - \sigma_{12}^\infty & (l < |x_1| < a), \\ -\sigma_{12}^\infty & (0 < |x_1| < l); \end{cases}$$

$$\sigma_{23}^*(x_1, x_2 = 0) = \begin{cases} k - \sigma_{23}^\infty & (l < |x_1| < a), \\ -\sigma_{23}^\infty & (0 < |x_1| < l). \end{cases}$$

Условие отсутствия особенности у напряжений может быть сформулировано для трещины поперечного и продольного сдвига соответственно в следующем виде:

$$\int_{-a}^a \frac{\sigma_{12}^*(x'_1) dx'_1}{\sqrt{b^2 - x_1'^2}} = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_{-a}^a \frac{\sigma_{23}^*(x'_1) dx'_1}{\sqrt{b^2 - x_1'^2}} = 0. \quad (3.6)$$

Плотность распределения дислокаций определяется в результате решения сингулярных интегральных уравнений (3.3) для трещин **типа II** и **типа III** соответственно выражениями¹⁶⁹

$$f(x_1) = \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{\pi^2 A} \int_{-a}^a \frac{\sigma_{12}^*(x'_1)}{(x'_1 - x_1) \sqrt{a^2 - x_1'^2}} dx'_1, \quad (3.7)$$

$$f(x_1) = \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{\pi^2 A} \int_{-a}^a \frac{\sigma_{23}^*(x'_1)}{(x'_1 - x_1) \sqrt{a^2 - x_1'^2}} dx'_1. \quad (3.8)$$

Оба интеграла вычисляются через элементарные функции:

$$f(x_1) = \frac{2(1 - \nu)k}{\pi Gb} \ln \left| \frac{x_1 \sqrt{a^2 - l^2} + l \sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2 - l^2} - l \sqrt{a^2 - x_1^2}} \right|, \quad (3.9)$$

$$f(x_1) = \frac{2k}{\pi Gb} \ln \left| \frac{x_1 \sqrt{a^2 - l^2} + l \sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 \sqrt{a^2 - l^2} - l \sqrt{a^2 - x_1^2}} \right|. \quad (3.10)$$

Раскрытие трещины и линейные размеры пластических зон, на основании

$$\delta = b \int_l^a f(x'_1) dx'_1, \quad (3.11)$$

¹⁶⁹Решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши рассматривается, например, в [96], с. 149-154. Приводимые ниже интегралы понимаются в смысле главного значения.

вычисляются по формулам

$$\frac{\pi^2 A \delta}{2lbk} = \ln \frac{a}{l}, \quad \arccos \frac{a}{l} = \frac{\pi \sigma_{12}^\infty}{2k}, \quad \arccos \frac{a}{l} = \frac{\pi \sigma_{23}^\infty}{2k}. \quad (3.12)$$

Модель Билби—Котрелла—Свиндена, которая отличается от модели Дагдейла лишь терминологией, привнесенной теорией дислокаций, в применении к задаче о трещине продольного сдвига в идеально упругопластической среде подвергнута критике в статье [267] на том основании, что при этом в упругой зоне получаются напряжения, превосходящие предел текучести. В этой работе дан анализ формы пластической зоны у вершины трещины продольного сдвига согласно критерию Мизеса по уравнениям деформационной теории Генки при предположении, что в процессе нагружения не происходит локальных разгрузок.

3.8. Влияние физической нелинейности

В рамках теории малых деформаций отклонения от закона Гука при достаточно больших деформациях приводят к перераспределению напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Пусть рассматриваемый нелинейно упругий материал несжимаем и связь между напряжениями и деформациями описывается степенной зависимостью.¹⁷⁰ Будем искать решение для полубесконечной трещины в неограниченной плоскости в условиях плоского напряженного состояния (или плоской деформации). Данная задача впервые была решена в работах [253], [314].

3.8.1. Сингулярное решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена (HRR-асимптотики)

Рассмотрим полубесконечную трещину в нелинейно упругой среде в условиях плоского напряженного (или плоского деформированного) состояния.

В полярной системе координат r, φ , связанной с вершиной трещины, основные соотношения имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0; \quad (1.1)$$

формулы Коши, связывающие перемещения и деформации,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \\ 2\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

¹⁷⁰В случае степенной зависимости переменные в уравнениях нелинейной теории упругости, деформационной теории пластичности и установившейся теории ползучести разделяются в декартовых и полярных координатах, что позволяет найти аналитическое решение ряда задач.

условие совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\varphi}}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\varphi^2}-r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r}+r\frac{\partial^2(r\varepsilon_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}; \quad (1.3)$$

определяющее уравнение

$$e_{ij}=\frac{3}{2}aT^{n-1}s_{ij}, \quad (1.4)$$

где

$$\Gamma^2=\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}, \quad T^2=\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}$$

есть соответственно интенсивность деформации сдвига и интенсивность напряжений, связанные, как это следует из определяющего закона, степенной зависимостью

$$\Gamma=aT^n. \quad (1.5)$$

Как показывают эксперименты, типичное значение показателя нелинейности n для металлов находится в пределах от 3 до 8, для некоторых видов сплавов оно может достигать значений 10–13.

Примем также условие несжимаемости.

Объемная плотность энергии деформации есть:

$$W=\frac{an}{n+1}T^{n+1}. \quad (1.6)$$

Интенсивность напряжений определяется формулой

$$T^2=\sigma_{rr}^2+\sigma_{\varphi\varphi}^2-\sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi}+3\sigma_{r\varphi}^2 \quad (1.7)$$

в случае плоского напряженного состояния и формулой

$$T^2=\frac{3}{4}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})^2+3\sigma_{r\varphi}^2 \quad (1.8)$$

в случае плоской деформации.

Определяющие соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= aT^{n-1}\left(\sigma_{rr}-\frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi}\right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= aT^{n-1}\left(\sigma_{\varphi\varphi}-\frac{1}{2}\sigma_{rr}\right), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{3}{2}aT^{n-1}\sigma_{r\varphi} \end{aligned} \quad (1.9)$$

в случае плоского напряженного состояния и

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{3}{4}aT^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{3}{4}aT^{n-1}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \\
\varepsilon_{r\varphi} &= \frac{3}{2}aT^{n-1}\sigma_{r\varphi}
\end{aligned} \tag{1.10}$$

в случае плоской деформации.

Ясно, что

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}aT^{n-1}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})$$

для плоского напряженного состояния и

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

для плоской деформации.

В полярных координатах компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри в следующем виде:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \tag{1.11}$$

где Δ — оператор Лапласа, который в полярной системе координат r, φ представляется как

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение совместности деформаций, выраженное через функцию напряжений F , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[T^{n-1} \left(2r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{6}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left[T^{n-1} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[T^{n-1} \left(-\frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[T^{n-1} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
T^2 &= (2r^{-3} \partial_r F + r^{-4} \partial_\varphi \partial_\varphi F - r^{-2} \partial_r \partial_r F) \partial_\varphi \partial_\varphi F + \\
&\quad + (r^{-2} \partial_r F - r^{-1} \partial_r \partial_r F) \partial_r F - \\
&\quad - 3(2r^{-3} \partial_\varphi F - r^{-2} \partial_r \partial_\varphi F) \partial_r \partial_\varphi F + \\
&\quad + (\partial_r \partial_r F)^2 + 3r^{-4} (\partial_\varphi F)^2,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

в случае плоского напряженного состояния;

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[T^{n-1} \left(r \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[T^{n-1} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial r} \left[T^{n-1} \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right) \right] - \\
& \quad - \frac{4}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[T^{n-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial r} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
2T^2 = & (6r^{-3} \partial_r F + 3r^{-4} \partial_\varphi \partial_\varphi F - 6r^{-2} \partial_r \partial_r F) \partial_\varphi \partial_\varphi F + \\
& + (3r^{-2} \partial_r F - 6r^{-1} \partial_r \partial_r F) \partial_r F - \\
& - 12(2r^{-3} \partial_\varphi F - r^{-2} \partial_r \partial_\varphi F) \partial_r \partial_\varphi F + \\
& + 3(\partial_r \partial_r F)^2 + 12r^{-4} (\partial_\varphi F)^2,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

в случае плоской деформации.

Собственные функции напряжений будем разыскивать в форме

$$F = Kr^\lambda f(\varphi), \tag{1.16}$$

где K и λ есть некоторые постоянные, последняя из которых имеет смысл собственного значения.

Компоненты напряжений и интенсивность напряжений получаются в форме:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= Kr^{\lambda-2}(\lambda f + f'') = Kr^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{rr}(\varphi), \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= Kr^{\lambda-2} \lambda(\lambda - 1) f = Kr^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi), \\
\sigma_{r\varphi} &= Kr^{\lambda-2} (1 - \lambda) f' = Kr^{\lambda-2} \hat{\sigma}_{r\varphi}(\varphi),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

$$T = Kr^{\lambda-2} \hat{T}, \tag{1.18}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{T}^2 = & \lambda^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3) f^2 + 3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \left(\frac{df}{d\varphi} \right)^2 + \\
& + \lambda(3 - \lambda) f \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + \left(\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.19}$$

в случае плоского напряженного состояния и

$$\begin{aligned}
\hat{T}^2 = & \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) f^2 + 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \left(\frac{df}{d\varphi} \right)^2 + \\
& + 2\lambda(2 - \lambda) f \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + \left(\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

в случае плоской деформации.

Относительно функции f получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} & \left[n(\lambda - 2) - \frac{d^2}{d\varphi^2} \right] \left[\hat{T}^{n-1} \left(\lambda(\lambda - 3)f - 2\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right) \right] + \\ & + (n(\lambda - 2) + 1)n(\lambda - 2)\hat{T}^{n-1} \left[\lambda(2\lambda - 3)f - \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] + \\ & + 6(n(\lambda - 2) + 1)(\lambda - 1)\frac{d}{d\varphi} \left(\hat{T}^{n-1} \frac{df}{d\varphi} \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & n(\lambda - 2)\hat{T}^{n-1} \left[(\lambda(3 - 7n) + 2n(\lambda^2 + 3) - 6)\lambda f + (2n - 3 - \lambda n)\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] + \\ & + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left[\hat{T}^{n-1} \left(\lambda(3 - \lambda)f + 2\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right) \right] - \quad (1.21) \\ & - 6((\lambda - 2)(n - 1) + \lambda - 1)(1 - \lambda)\frac{d}{d\varphi} \left[\hat{T}^{n-1} \frac{df}{d\varphi} \right] = 0 \end{aligned}$$

в случае плоского напряженного состояния и

$$\begin{aligned} & n(\lambda - 2)\hat{T}^{n-1} \left[\lambda(\lambda - 2)(2(1 - n) + \lambda n)f + (2(n - 1) - \lambda n)\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] + \\ & + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left[\hat{T}^{n-1} \left(-\lambda(\lambda - 2)f + \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right) \right] - \quad (1.22) \\ & - 4((\lambda - 2)(n - 1) + \lambda - 1)(1 - \lambda)\frac{d}{d\varphi} \left[\hat{T}^{n-1} \frac{df}{d\varphi} \right] = 0 \end{aligned}$$

в случае плоской деформации.

Ясно, что к этим уравнениям следует добавить краевые условия, соответствующие тому или иному типу нагружения трещины (нормальный отрыв или поперечный сдвиг).

Итак, необходимо решать нелинейную задачу на собственные значения относительно функции f , т.е. разыскивать такие значения λ , при которых указанное уравнение будет иметь нетривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям. Ниже (см. 3.8.2 и 3.8.3) мы подробно опишем алгоритм численного решения.

Собственное значение λ находится с помощью инвариантного J -интеграла. Независимость J -интеграла от контура интегрирования возможна только при условии

$$\lambda = \frac{2n + 1}{n + 1}. \quad (1.23)$$

Константу K также можно также выразить через инвариантный J -интеграл:

$$J = aK^{n+1}I_n, \quad (1.24)$$

где интеграл I_n зависит только от показателя n :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{n}{n+1} \hat{T}^{n+1} \cos \varphi - \sin \varphi \left[\hat{\sigma}_{rr} \left(\hat{u}_{\varphi} - \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \varphi} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \hat{\sigma}_{r\varphi} \left(\hat{u}_r + \frac{\partial \hat{u}_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \right] - (n(\lambda - 2) + 1) \cos \varphi (\hat{\sigma}_{rr} \hat{u}_r + \hat{\sigma}_{r\varphi} \hat{u}_{\varphi}) \right) d\varphi. \quad (1.25)$$

Таким образом, сингулярное решение для полубесконечной трещины в среде со степенным определяющим законом имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{J}{a I_n r} \right)^{\frac{1}{1+n}} \bar{\sigma}_{ij}(n, \varphi), \\ \varepsilon_{ij} = a \left(\frac{J}{a I_n r} \right)^{\frac{n}{1+n}} \bar{\varepsilon}_{ij}(n, \varphi), \\ u_i = a \left(\frac{J}{a I_n} \right)^{\frac{n}{1+n}} r^{\frac{1}{1+n}} \bar{u}_i(n, \varphi).$$

Эти асимптотические формулы часто называют HRR-асимптотиками.

Дополнительные результаты по затронутой проблематике могут быть найдены в работах [302], [235], [248].

3.8.2. Численный анализ задачи на собственные значения в случае горизонтальной трещины

Напряженное состояние вблизи вершины трещины в плоской задаче традиционно представляется для двух стандартных типов нагружения — нормального отрыва (**тип I**) и поперечного сдвига (**тип II**). На рис. 5 показаны данные типы нагружения.

На берегах трещины должны выполняться условия отсутствия поверхностных усилий, т.е. при $\varphi = \pm\pi$: $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$.

Кроме того, для этих типов трещин должны выполняться следующие условия симметрии: в случае трещины нормального отрыва функция u_{φ} — нечетная, а u_r — четная относительно оси x_1 , т.е.

$$u_{\varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0;$$

в случае трещины поперечного сдвига наоборот, функция u_r — четная, а u_{φ} — нечетная, т.е.

$$u_r|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0.$$

Сформулированная краевая задача допускает группу преобразований $f' = C_1 f$, $\varphi' = \varphi$, $r' = C_2 r$, где под f подразумеваются напряжения (или деформации), C_1 и C_2 — параметры группы.

Из группового свойства и из общего решения уравнений равновесия при помощи функции напряжений Эри $F(r, \varphi) = Kr^\lambda f(\varphi)$ можно найти, что сингулярное решение краевой задачи имеет вид (1.17):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= Kr^{\lambda-2}(\lambda f + f'') = Kr^{\lambda-2}\hat{\sigma}_{rr}(\varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= Kr^{\lambda-2}(\lambda(\lambda-1)f) = Kr^{\lambda-2}\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi} &= Kr^{\lambda-2}(1-\lambda)f' = Kr^{\lambda-2}\hat{\sigma}_{r\varphi}(\varphi).\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначается частное дифференцирование по полярному углу φ ; λ — собственное число; $f(\varphi)$ — безразмерная функция, определяемая из уравнения (1.21) в случае плоского напряженного состояния и — уравнения (1.22) в случае плоской деформации;¹⁷¹ K — множитель пропорциональности.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины определяются в виде $f(\pm\pi) = f'(\pm\pi) = 0$. Вследствие симметрии получаются также следующие дополнительные условия:

$$f'(0) = f'''(0) = 0 \quad (\text{тип I}),$$

$$f(0) = f''(0) = 0 \quad (\text{тип II}).$$

Таким образом, на отрезке $[0, \pi]$ для уравнения четвертого порядка относительно функции $f(\varphi)$ получается двухточечная краевая задача, в ходе решения которой определяется собственное значение λ и функция $f(\varphi)$. Для любого заданного значения n можно получить численное решение этой задачи. Упругая постоянная a в данной краевой задаче не присутствует, т.к. она появляется только при вычислении компонент тензора деформаций.

Собственное значение λ может быть найдено двумя способами: решением непосредственно краевой задачи или из условия независимости от контура интегрирования J -интеграла, имеющего следующий вид для определяющих соотношений в виде степенной зависимости [171]:

$$J = \int_C \left(a \frac{n}{n+1} T^{n+1} \cos \varphi - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) ds.$$

Для того, чтобы J -интеграл, вычисляемый по окружностям, охватывающим вершину трещины, не зависел от контура интегрирования при $r \rightarrow 0$, необходимо положить

$$\lambda = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Для нахождения численного решения приведенных выше краевых задач удобно использовать метод пристрелки.

¹⁷¹ Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно подлежащей определению функции $f(\varphi)$ уже обсуждалось выше (см. уравнение (1.21) при плоском напряженном состоянии и уравнение (1.22) при плоской деформации). В этих уравнениях безразмерную интенсивность напряжений следует вычислять по соответственно по формулам (1.19), (1.20).

Сущность метода пристрелки заключается в сведении решения краевой задачи к решению задачи Коши, для этого граничные условия на одном из концов временно убирают, заменяя их недостающими условиями на другом конце. Если, например, исключить условия в точке $\varphi = \pi$, то в точке $\varphi = 0$ получатся следующие условия:

$$f'(0) = f'''(0) = 0, \quad f(0) = c_1, \quad f''(0) = c_2 \quad (\text{тип I});$$

$$f(0) = f''(0) = 0, \quad f'(0) = c_1, \quad f'''(0) = c_2 \quad (\text{тип II}).$$

В общем решении для компонент тензора напряжений присутствует неопределенный множитель K . Появление множителя K обусловлено однородностью краевой задачи на собственные значения. Таким образом, без ограничения общности можно положить значение константы c_1 равным какому-либо ненулевому числу. Пусть $c_1 = 1$. В результате формально получается, что с помощью подбора только одной константы c_2 необходимо удовлетворить сразу двум условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины. Однако в силу симметрии задачи одно этих условий будет заведомо выполняться. Так, для трещины нормального отрыва необходимо удовлетворить только условию $f'(\pi) = 0$, а для трещины поперечного сдвига — условию $f(\pi) = 0$.

То граничное условие на правом конце интервала $(0, \pi)$, которое должно выполняться при реализации метода пристрелки, обозначим через f_1 : $f_1 = f'(\pi)$ для трещины нормального отрыва, $f_1 = f(\pi)$ для трещины поперечного сдвига.

Для определения неизвестного граничного значения необходимо решить задачу Коши со следующими начальными данными:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = c_2, \quad f'''(0) = 0 \quad (\text{тип I});$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = c_2 \quad (\text{тип II}).$$

Таким образом, значение граничного условия f_1 фактически определяется только константой c_2 : $f_1 = f_1(c_2)$.

В результате, для решения исходной задачи необходимо найти решение нелинейного алгебраического уравнения: $f_1(c_2) = 0$. С целью решения данного уравнения можно использовать различные численные методы: метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательных (метод Ньютона) и др. Как показала практика, для данной задачи предпочтительнее использовать итерационные методы, поскольку с их помощью задача решается быстрее всего. Один из них — метод Ньютона, отличающийся своей простотой и достаточно быстрой сходимостью при удачном выборе начального приближения. Метод Ньютона в применении к решению уравнения $f_1(c_2) = 0$ предполагает на $k + 1$ -ом шаге решение относительно c_2 следующего линейного уравнения:

$$(c_2 - c_2^k) \frac{df_1(c_2^k)}{dc_2} + f_1(c_2^k) = 0,$$

где c_2^k — решение аналогичного уравнения на k -ом шаге, $k = 1, 2, \dots$.

Для реализации метода Ньютона необходимо задать начальное значение c_2^0 , а также знать производную функции $df_1(c_2^k)/dc_2$. В нашем случае аналитический вид функции f_1 неизвестен, однако ее значения можно вычислить, решая соответствующую задачу Коши, поэтому будем вычислять производную с помощью конечноразностных отношений.

Для вычислений можно использовать различные разностные схемы, например, правую, согласно которой производная аппроксимируется конечноразностным отношением

$$\frac{df_1(c_2^k)}{dc_2} \approx \frac{f_1(c_2^k + h) - f_1(c_2^k)}{h},$$

где h — некоторое малое число, или центральную, согласно которой

$$\frac{df_1(c_2^k)}{dc_2} \approx \frac{f_1(c_2^k + h) - f_1(c_2^k - h)}{2h}.$$

Центральная разностная схема более предпочтительна, т.к. она имеет второй порядок аппроксимации, в то время как правая разностная схема имеет только первый порядок.

Нетрудно видеть, что при реализации метода Ньютона для нахождения следующего приближения c_2^{k+1} значения параметра c_2 необходимо будет решать три задачи Коши со следующими начальными условиями:

Тип I:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= c_2^k - h, & f'''(0) &= 0, \\ f(0) &= 1, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= c_2^k, & f'''(0) &= 0, \\ f(0) &= 1, & f'(0) &= 0, & f''(0) &= c_2^k + h, & f'''(0) &= 0; \end{aligned}$$

Тип II:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(0) &= c_2^k - h, \\ f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(0) &= c_2^k, \\ f(0) &= 0, & f'(0) &= 1, & f''(0) &= 0, & f'''(0) &= c_2^k + h. \end{aligned}$$

Для решения данных задач Коши можно использовать один из стандартных методов Рунге—Кутта (С. Runge, 1895 г.; W. Kutta, 1901 г.).¹⁷² Эти методы различаются по точности и скорости вычислений. Так, метод Рунге—Кутта первого порядка (метод Эйлера) имеет высокую скорость вычислений, но только первый порядок аппроксимации, в то время как методы Рунге—Кутта четвертого порядка имеют четвертый порядок аппроксимации. Для решения задач Коши мы предлагаем использовать метод Рунге—Кутта—Фельдберга, который является модификацией метода Рунге—Кутта четвертого порядка и имеет пятый порядок аппроксимации. Работа выполнялась с помощью пакета символьных вычислений Maple V. В этом пакете величина шага по переменной φ задается автоматически в зависимости от желаемой точности вычислений.

¹⁷²Метод Рунге—Кутта — один из наиболее употребительных методов повышенной точности, применяемых для решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений (см., например, [66], с. 31-45; [93], с. 80-82.).

Итерационный процесс метода Ньютона заканчивается тогда, когда будет выполняться неравенство $|f_1(c_2^{k+1})| < \varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений.

Как было отмечено выше, метод Ньютона сходится к решению только при удачном выборе начального приближения. Вычисления показывают, что чем больше значение показателя нелинейности n , тем ближе должно располагаться начальное приближение c_2^0 к истинному значению c_2 . Возникает проблема выбора начального приближения. Для линейного случая ($n = 1$) выбор начального приближения вообще не влияет на сходимость метода. Естественным предположить, что для материалов с близкими значениями показателя нелинейности константы c_2 для них также будут близкими по значению, что подтверждается вычислительным экспериментом. Поэтому, получив значение c_2 для линейного случая, его можно использовать как начальное приближение для $n = 2$ и т.д. Кроме того, по найденным значениям константы c_2 для случаев $n = 1, 2, 3, \dots$ можно выявить закономерность изменения значений c_2 в зависимости от показателя n и использовать ее для задания начального приближения c_2^0 при других значениях n . Таким образом, чтобы задать начальное приближение в задаче для случая, например, $n = 10$, требуется последовательно решать несколько аналогичных задач для меньших значений показателя n , чтобы тем самым как можно точнее его определить.

После того как найдена сеточная функция f , получившееся решение следует перенормировать. Это необходимо сделать, чтобы устранить произвол при выборе значения константы c_1 . Необходимо выбрать некоторое характерное напряжение. Обычно в качестве такового выбирают максимальное значение интенсивности напряжений. Таким образом, необходимо удовлетворить условию $\max_{\varphi} \hat{T}(\varphi) = 1$. Для процедуры нормировки необходимо сначала решить задачу описанным выше методом, определить максимальное значение интенсивности напряжений и затем разделить на него значения сеточной функции f во всех узлах.

Описанный выше алгоритм решения краевых задач для трещин нормально-го отрыва и поперечного сдвига в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации был реализован с помощью пакета символьных вычислений Maple V для значений показателя $n = 1, 3, 5, 7, 13$. Точность вычислений задавалась $\varepsilon = 10^{-5}$. Величина приращения h принималась равной $h = 10^{-3}$. На время вычислений она не влияет, т.к. необходима только для аппроксимации производной. Кроме того, точность вычислений от величины приращения не зависит, при проверке задача решалась при $h = 10^{-2}$ и $h = 10^{-5}$, результаты практически совпадали. Это является косвенным подтверждением устойчивости алгоритма.

Таким образом были определены зависимости от полярного угла величин $\hat{\sigma}_{rr}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{r\varphi}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi)$, $\hat{T}(\varphi)$, $\hat{\sigma}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ вблизи вершины горизонтальной трещины в условиях плоского напряженного состояния и плоской деформации для различных значений показателя нелинейности n . Здесь $\hat{\sigma}(\varphi) = (\hat{\sigma}_{rr} + \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} + \hat{\sigma}_{zz})/3$ — угловое распределение среднего напряжения, а $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ — угловое распределение максимального нормального напряжения.

Результаты численного анализа сравнивались с точными результатами для случая $n = 1$.¹⁷³

Были исследованы на экстремум функции $\hat{T}(\varphi)$, $\hat{\sigma}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ для трещины нормального отрыва в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации.¹⁷⁴

Ниже приведены графики типичных зависимостей от полярного угла пронормированных компонент тензора напряжений и пронормированных величин $\hat{\sigma}_e(\varphi) = \hat{T}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_0(\varphi)$ и $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации при $n = 3$ (см. рис. 61–68). Полученное численное решение для компонент тензора напряжений практически совпадает с результатами, приведенными в [120].

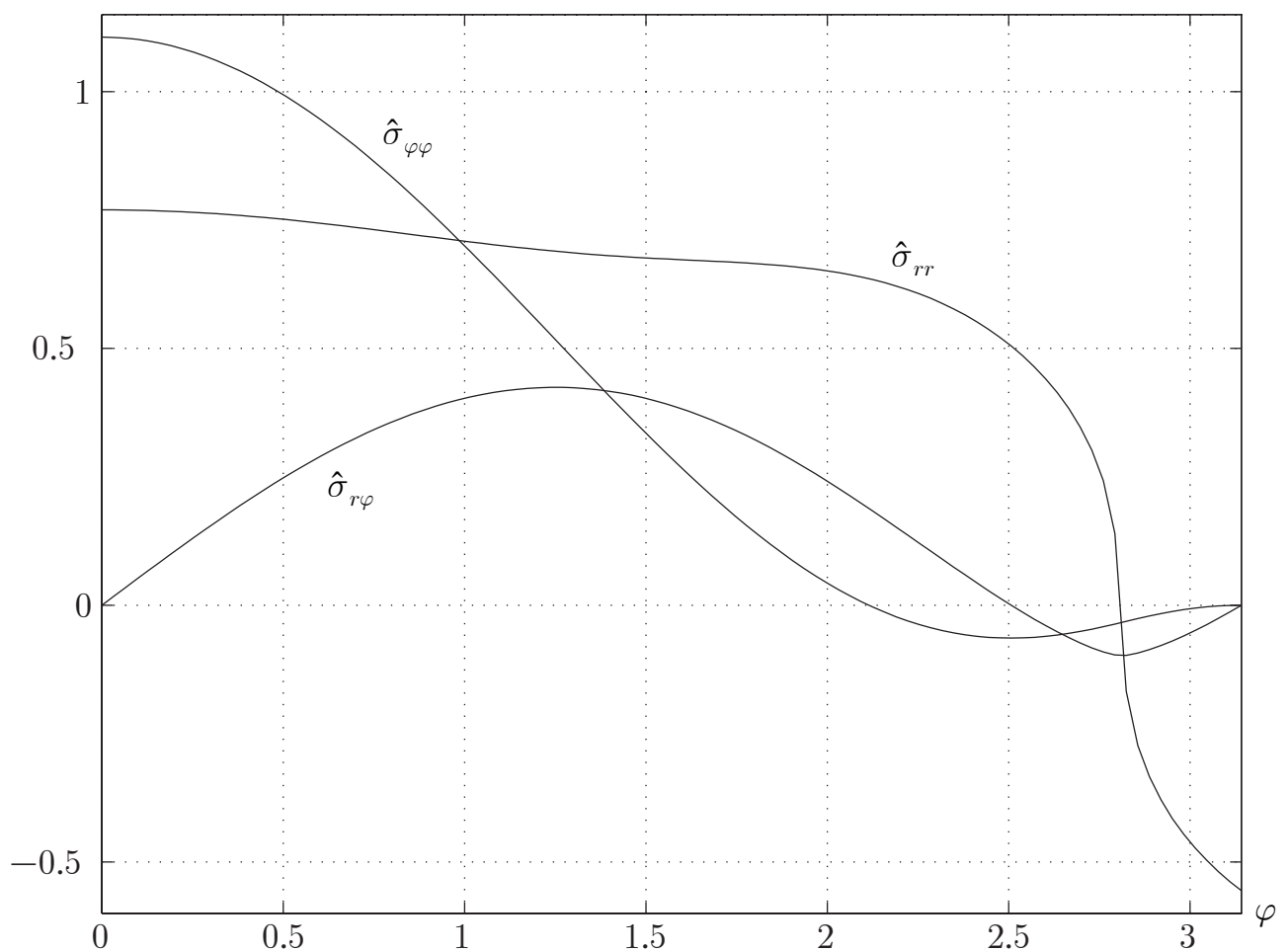


Рис. 61. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для $n = 3$

¹⁷³Результаты для случая $n = 1$ приведены в книге [171].

¹⁷⁴Оказывается, что при плоском напряженном состоянии максимальное нормальное напряжение $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ и интенсивность напряжений $\hat{T}(\varphi)$ принимают максимальные значения не при $\varphi = 0$, а в некоторых симметричных относительно оси x_1 точках. Для случая плоского напряженного состояния функция $\hat{\sigma}(\varphi)$ принимает максимальное значение в точке $\varphi = 0$ при любых значениях n . В случае же плоской деформации $\hat{\sigma}(\varphi)$ принимает максимальное значение в точке $\varphi = 0$ только при $n = 1$.

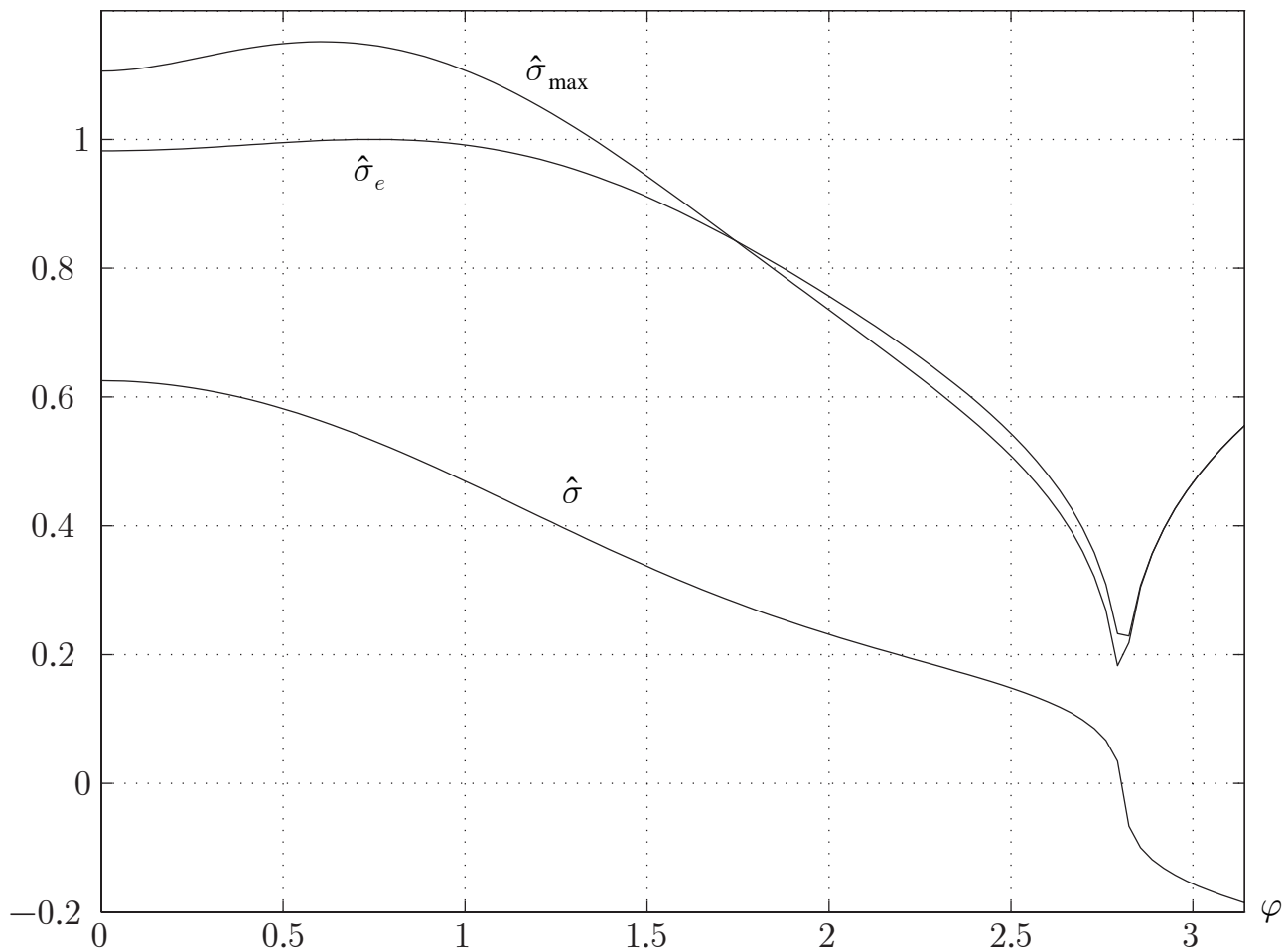


Рис. 62. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_e$ от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоском напряженном состоянии для $n = 3$

3.8.3. Численный анализ задачи на собственные значения в случае наклонной трещины

До настоящего времени был достаточно хорошо изучен только случай горизонтальной трещины [253], [314]. Однако в реальных конструкциях из-за начальных внутренних микродефектов при изготовлении материала или дефектов, приобретенных за время эксплуатации конструкции, трещина в материале может располагаться произвольным образом по отношению к оси растяжения. Для моделирования траектории развития наклонной трещины необходимо знать напряженное состояние вблизи ее вершины. Для этого можно использовать описанный в 3.8.2 метод решения.

Пусть бесконечная пластина из нелинейно упругого материала с трещиной длины $2l$, расположенной под углом α к оси x_1 , растягивается на бесконечности напряжениями σ_{22}^∞ (рис. 69). Требуется определить напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины для плоского напряженного состояния и плоской деформации.

Задача об одноосном растяжении наклонной трещины статически эквивалентна задаче о совместном растяжении и сдвиге горизонтальной трещины, т.е. трещины, ортогональной направлению растяжения и параллельной направлению сдвига (рис. 69).

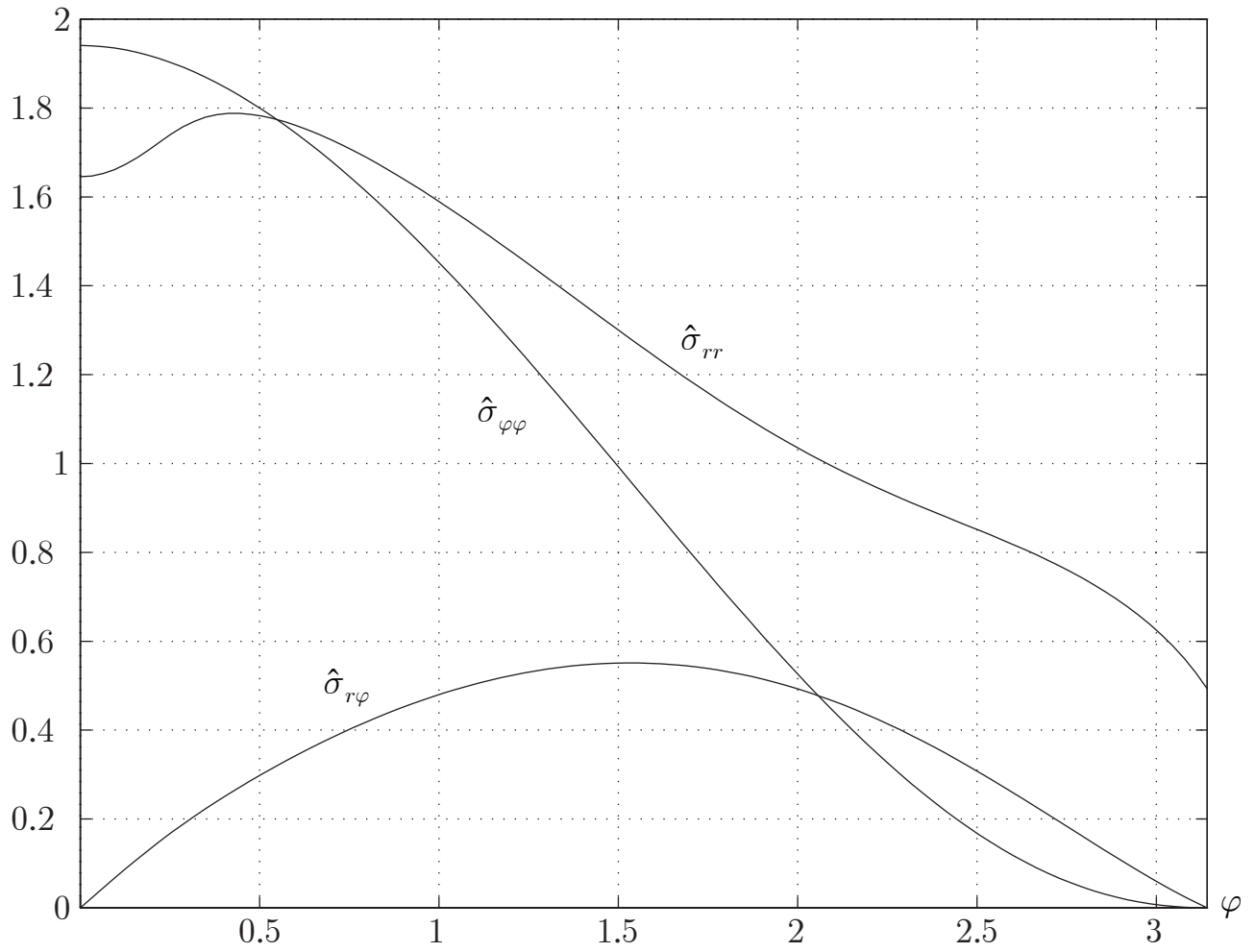


Рис. 63. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоской деформации для $n = 3$

Дифференциальное уравнение для функции f в этой задаче совпадает с уравнениями, полученными выше в, **3.8.2**, различия будут лишь в граничных условиях.

В линейном случае ($n = 1$) напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины можно представить в виде суперпозиции полей **типа I** и **II**, т.е.

$$f = [K_I f_I(\varphi) + K_{II} f_{II}(\varphi)] r^\lambda = K_I r^\lambda (f_I(\varphi) + \eta f_{II}(\varphi)),$$

где f_I и f_{II} — решение задачи из **3.8.2** для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига соответственно, $K_I = \tilde{K} \cos^2 \alpha$, $K_{II} = \tilde{K} \sin \alpha \cos \alpha$, $\tilde{K} = \sigma_{22}^\infty \sqrt{\pi l}$,

$$\eta = \frac{K_{II}}{K_I} = \frac{K \sin \alpha \cos \alpha}{K \cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

В нелинейном случае ($n > 1$) принцип суперпозиции не выполняется и необходимо задавать некоторые неопределенные данные Коши

$$f(0) = c, \quad f'(0) = c_0, \quad f''(0) = c_1, \quad f'''(0) = c_2,$$

с тем, чтобы выполнялись условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины. В силу статической эквивалентности задачи об одноосном растяже-

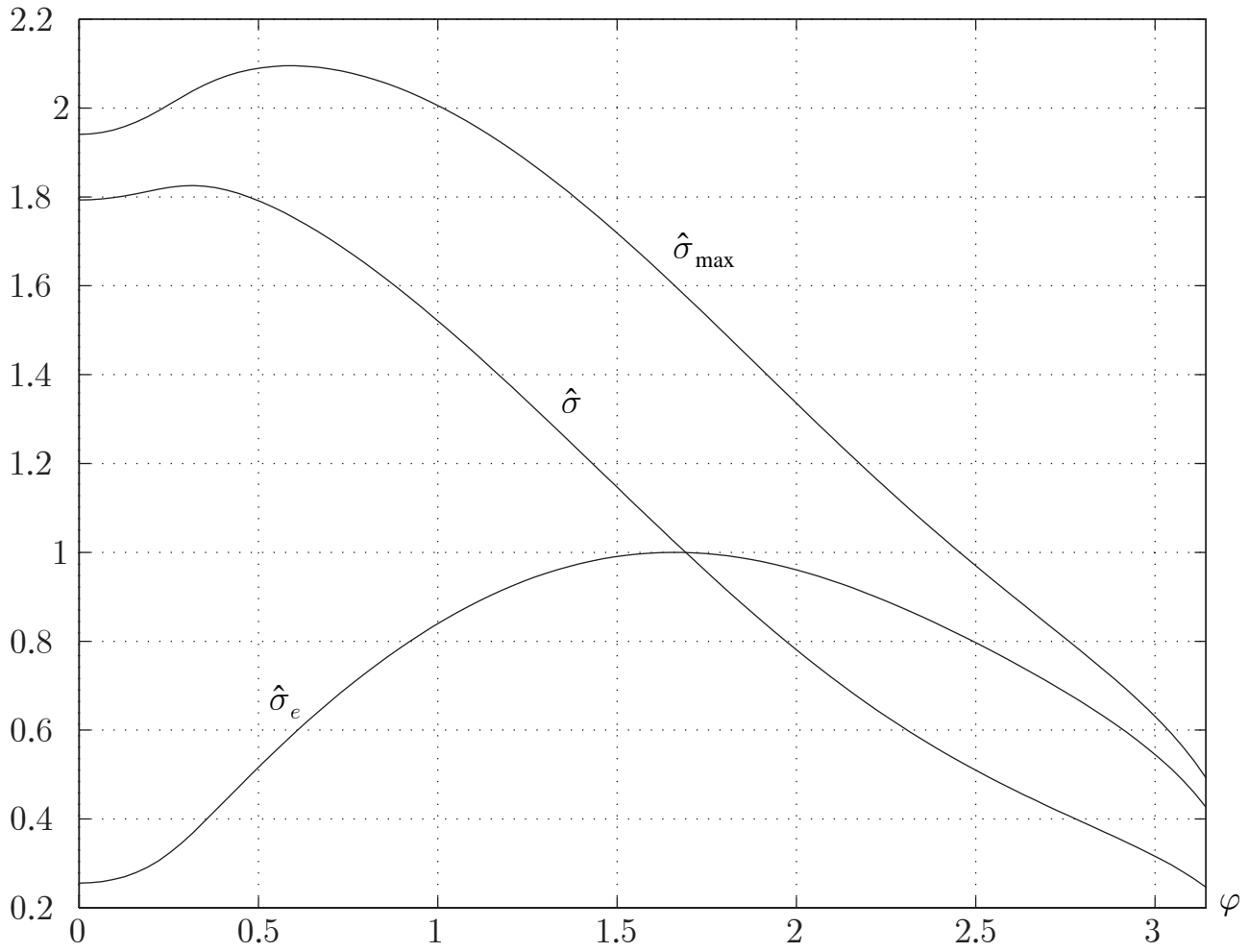


Рис. 64. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_\epsilon$ от полярного угла в случае трещины нормального отрыва при плоской деформации для $n = 3$

нии наклонной трещины и задачи о совместном растяжении и сдвиге горизонтальной трещины следует, что при $\varphi = 0$ напряжения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{r\varphi}|_{\varphi=0} &= Kr^{\lambda-2}C \sin \alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} &= Kr^{\lambda-2}C \cos \alpha,\end{aligned}$$

где C — неопределенный множитель. Из этих представлений получаются следующие начальные данные Коши:

$$f(0) = \frac{C \cos \alpha}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad f'(0) = \frac{C \sin \alpha}{1 - \lambda}, \quad f''(0) = c_1, \quad f'''(0) = c_2.$$

В общем решении для компонент тензора напряжений присутствует неопределенный множитель K (задача является однородной). Таким образом, без ограничения общности можно положить значение функции f в нуле равным какому-либо ненулевому числу. В частности, положим $f(0) = 1$, тогда граничные условия для наклонной трещины можно представить в виде

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha, \quad f''(0) = c_1, \quad f'''(0) = c_2.$$

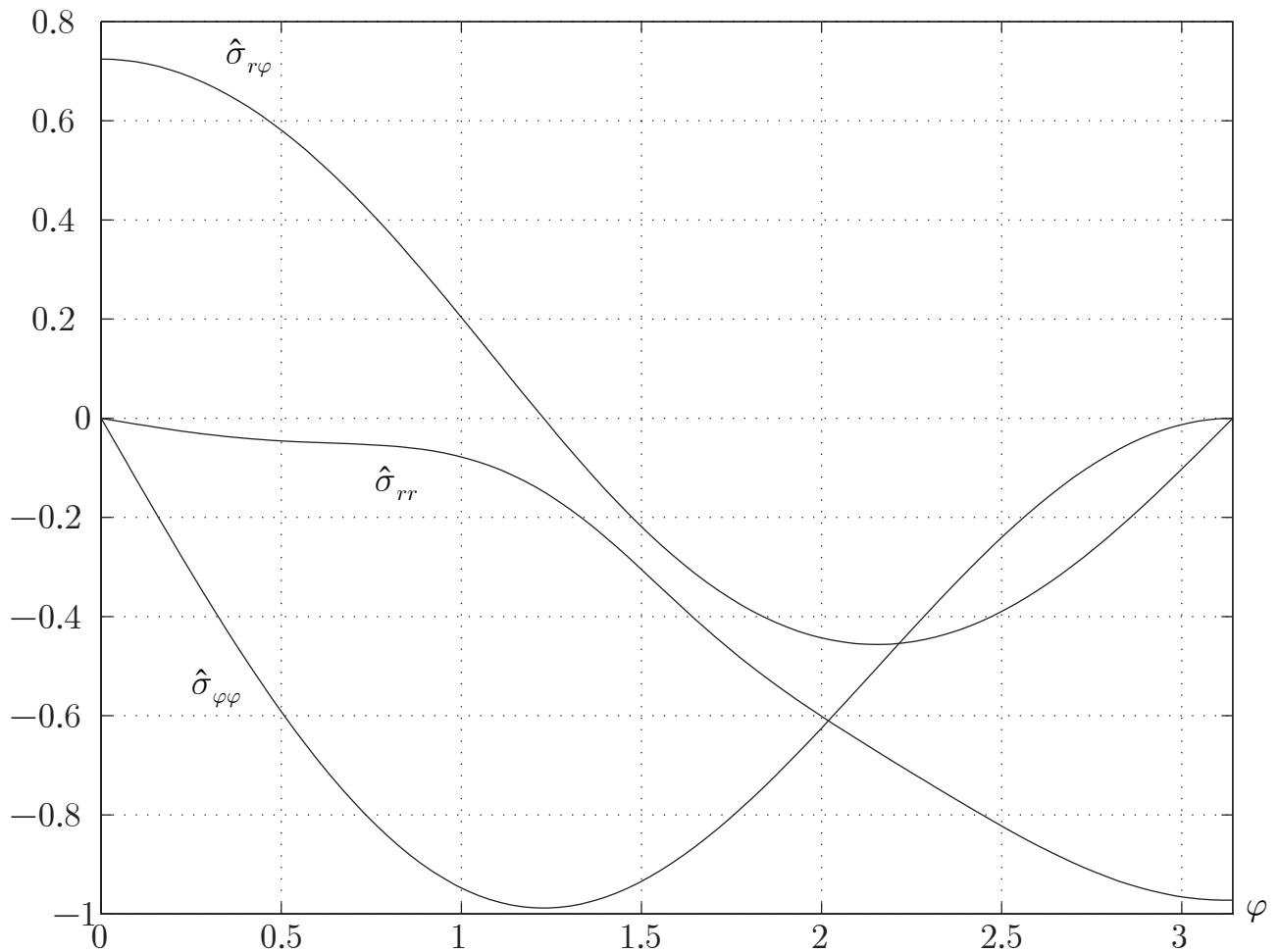


Рис. 65. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины поперечного сдвига при плоском напряженном состоянии для $n = 3$

Следовательно, осталось подобрать два параметра c_1 и c_2 таким образом, чтобы на правом конце отрезка $[0, \pi]$ выполнялись два условия, выражающие отсутствие поверхностных усилий.

Введем следующие обозначения: $f_1 = f(\pi)$, $f_2 = f'(\pi)$. Ясно, что граничные условия f_1 и f_2 будут зависеть от параметров c_1 и c_2 .

В результате для нахождения значений c_1 и c_2 необходимо найти решение системы двух нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} f_1(c_1, c_2) = 0, \\ f_2(c_1, c_2) = 0. \end{cases}$$

Функции $f_1(c_1, c_2)$ и $f_2(c_1, c_2)$ не заданы в аналитическом виде, однако могут быть найдены численно путем решения задачи Коши с начальными значениями c_1 и c_2 .

Получившуюся систему нелинейных уравнений можно решать многими способами. Так же как и для случая горизонтальной трещины, для решения данной задачи удобно использовать метод Ньютона, который сводится на каждом шаге

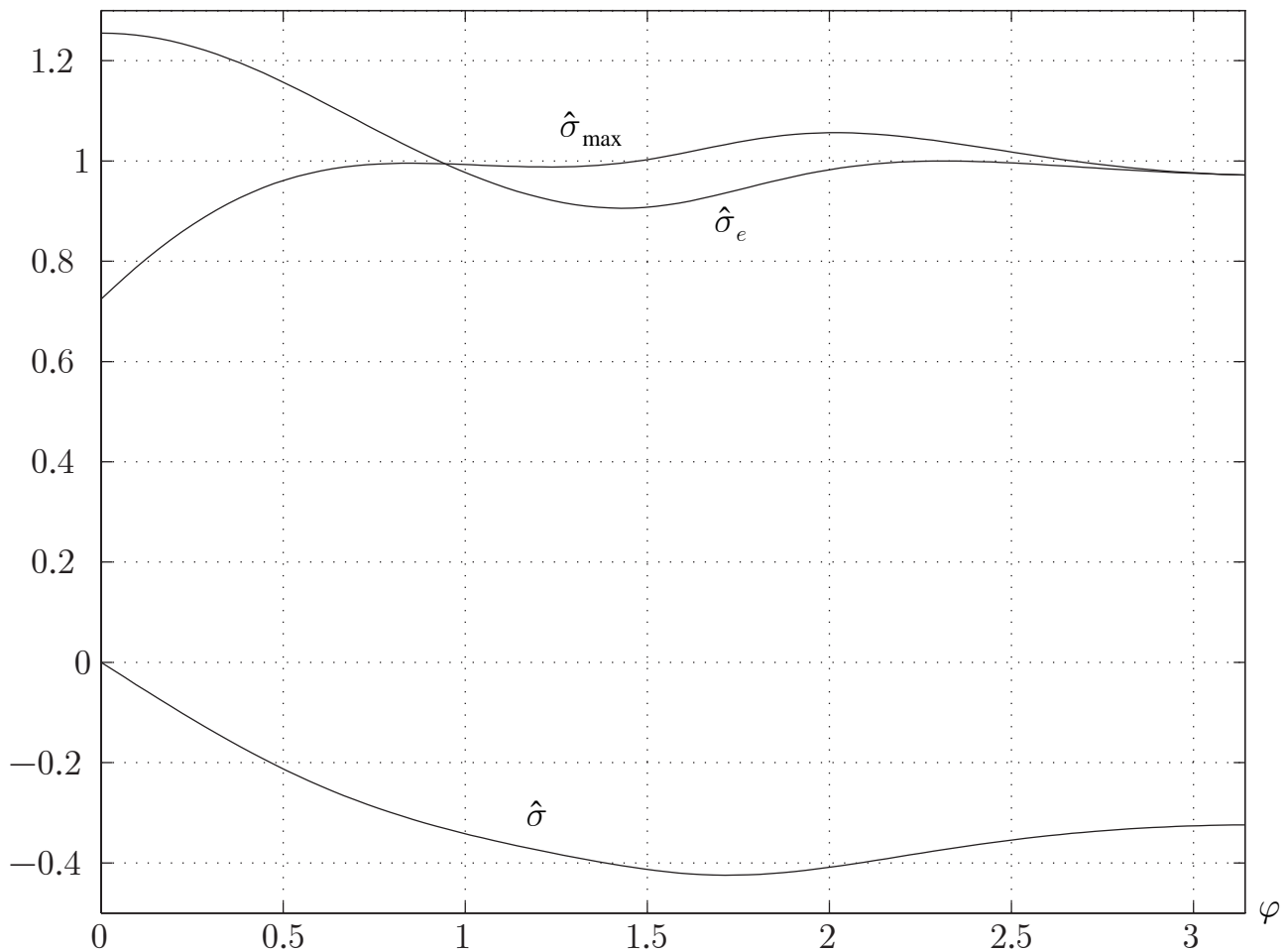


Рис. 66. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_e$ от полярного угла в случае трещины поперечного сдвига при плоском напряженном состоянии для $n = 3$

к решению следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^2 (c_j - c_j^k) \frac{\partial f_i(c_1^k, c_2^k)}{\partial c_j} + f_i(c_1^k, c_2^k) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

где c_j^k — решение данной системы на k -той итерации, $k = 1, 2, \dots$. Как видно из приведенной формулы метода Ньютона, для его реализации необходимо знать производные функций $\partial f_i(c_1^k, c_2^k)/\partial c_j$. Так как в нашем случае аналитический вид функций f_1 и f_2 неизвестен, то и производные $\partial f_1/\partial c_1$, $\partial f_1/\partial c_2$, $\partial f_2/\partial c_1$, $\partial f_2/\partial c_2$ приходится определять численно.

Представим общую формулу метода Ньютона в виде:

$$\begin{cases} f_{1,1}^k c_1^{k+1} + f_{1,2}^k c_2^{k+1} = f_{1,1}^k c_1^k + f_{1,2}^k c_2^k - f_1^k, \\ f_{2,1}^k c_1^{k+1} + f_{2,2}^k c_2^{k+1} = f_{2,1}^k c_1^k + f_{2,2}^k c_2^k - f_2^k, \end{cases}$$

где

- c_i^k — значение параметра c_i на k -том шаге, $i = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots$;
- $f_{i,j}^k$ — производная функции f_i по переменной c_j , вычисленная на k -том шаге, $i, j = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots$;
- f_i^k — значение функции f_i , вычисленное на k -том шаге.

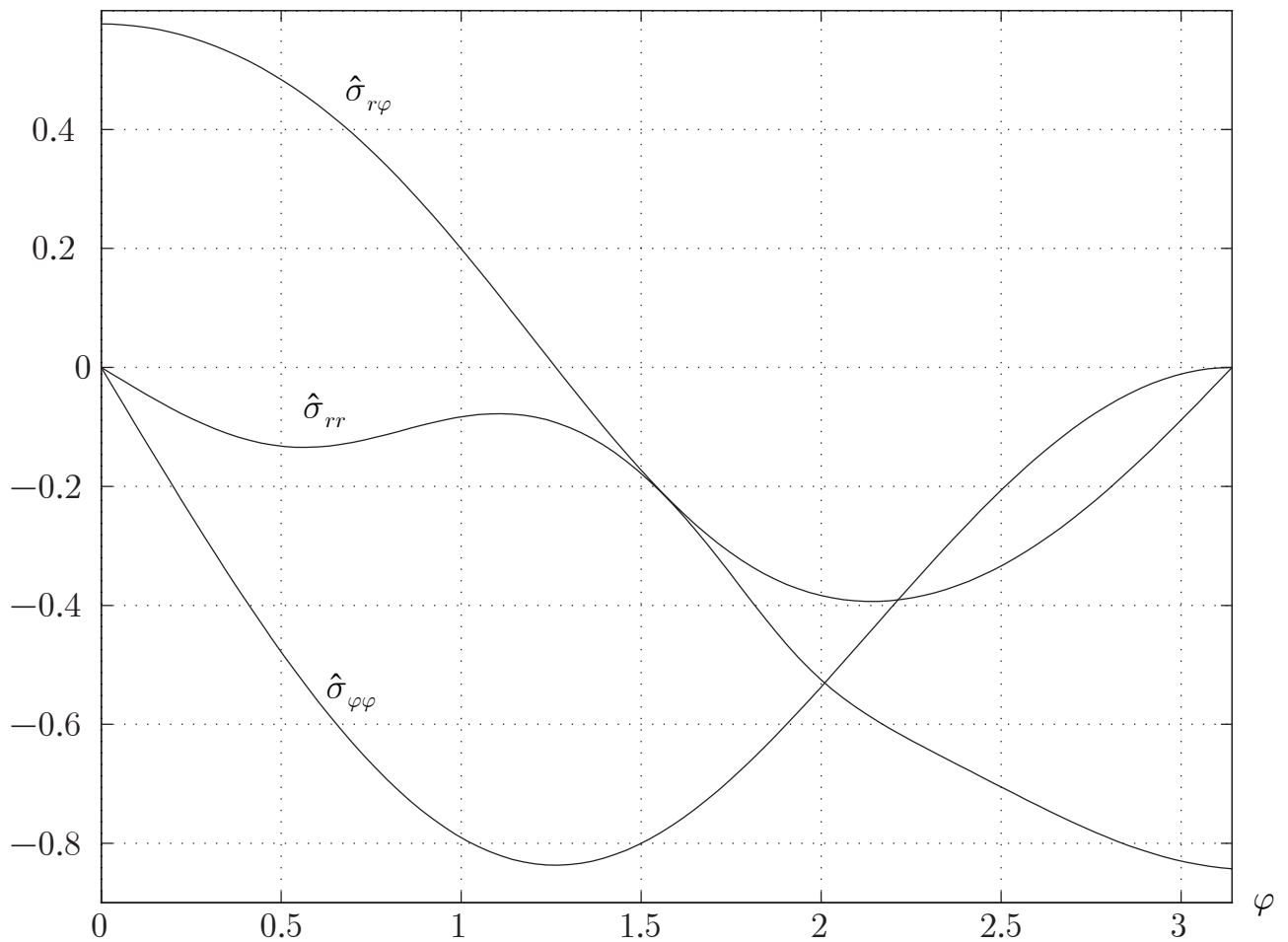


Рис. 67. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла в случае трещины поперечного сдвига при плоской деформации для $n = 3$

Приведенную систему уравнений необходимо решать относительно неизвестных c_1^{k+1} и c_2^{k+1} . Для этого необходимо задать начальное приближение c_1^0 , c_2^0 .

Для аппроксимации производных можно использовать, например, правую разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1,1}^k \approx \frac{f_1(c_1^k + h, c_2^k) - f_1(c_1^k, c_2^k)}{h}, \\ f_{1,2}^k \approx \frac{f_1(c_1^k, c_2^k + h) - f_1(c_1^k, c_2^k)}{h}, \\ f_{2,1}^k \approx \frac{f_2(c_1^k + h, c_2^k) - f_2(c_1^k, c_2^k)}{h}, \\ f_{2,2}^k \approx \frac{f_2(c_1^k, c_2^k + h) - f_2(c_1^k, c_2^k)}{h}, \end{array} \right.$$

где h — некоторое малое число.

Нетрудно видеть, что при реализации метода Ньютона для нахождения следующего приближения (c_1^{k+1}, c_2^{k+1}) значений параметров c_1 и c_2 будет необходимо решать три задачи Коши со следующими начальными условиями:

$$\begin{array}{llll} f(0) = 1, & f'(0) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha, & f''(0) = c_1^k, & f'''(0) = c_2^k, \\ f(0) = 1, & f'(0) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha, & f''(0) = c_1^k + h, & f'''(0) = c_2^k, \\ f(0) = 1, & f'(0) = -\lambda \operatorname{tg} \alpha, & f''(0) = c_1^k, & f'''(0) = c_2^k + h. \end{array}$$

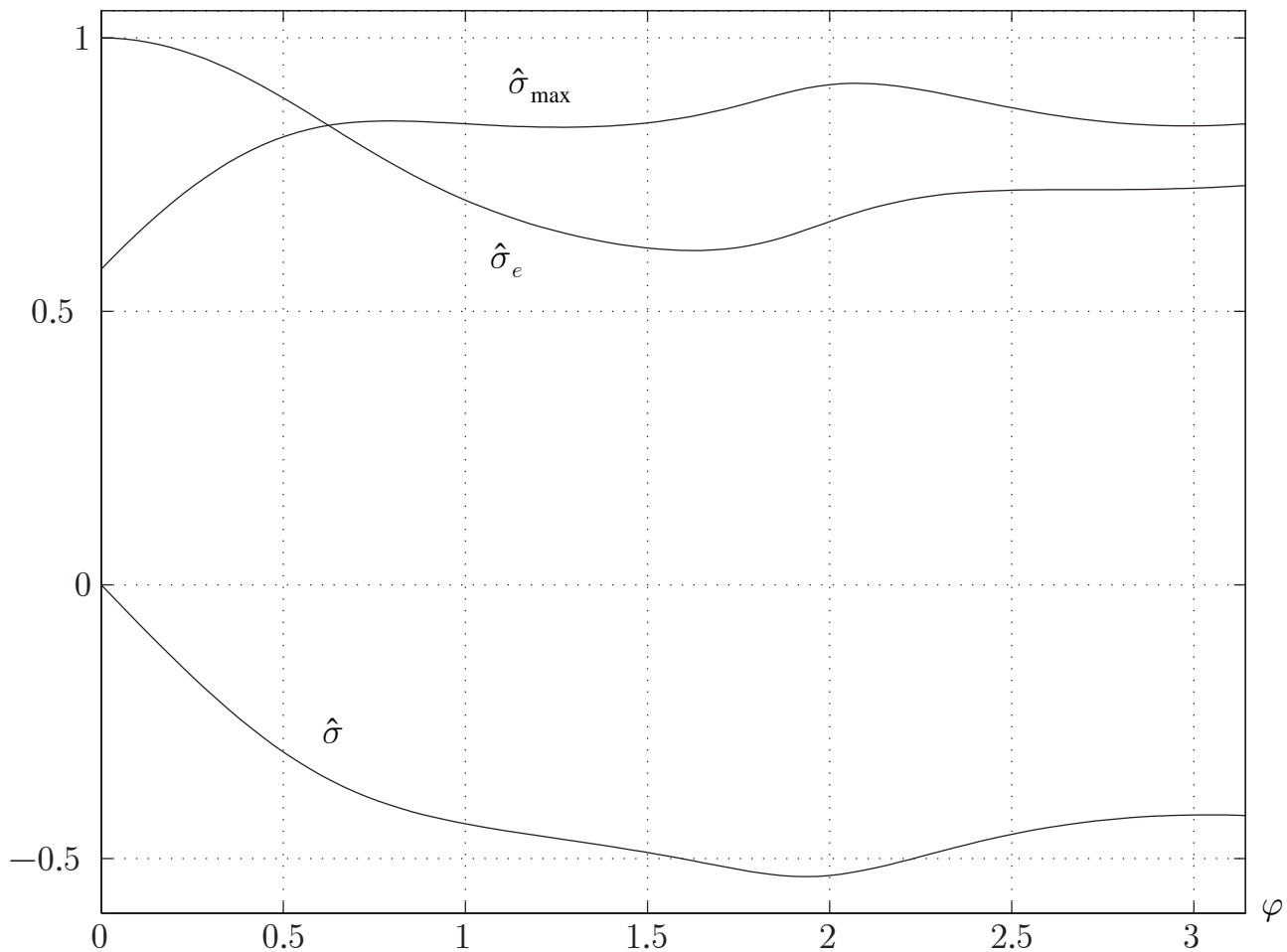


Рис. 68. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_\epsilon$ от полярного угла в случае трещины поперечного сдвига при плоской деформации для $n = 3$

Безусловно, можно использовать более точные разностные схемы для вычислений производных, например, центральную, но в этом случае придется на каждой итерации решать пять задач Коши, что увеличит время вычислений почти вдвое, не сказываясь принципиально на конечном результате.

Итерационный процесс метода Ньютона следует прекращать, когда будет выполняться неравенство $\sqrt{f_1^2(c_1, c_2) + f_2^2(c_1, c_2)} < \varepsilon$, где ε — заданная точность вычислений.

Выбор начального приближения для данной задачи осуществляется аналогично случаю горизонтальной трещины. Сначала находятся значения c_1 и c_2 для случая $n = 1$ (их можно определить с помощью принципа суперпозиции). Найденные значения можно использовать в качестве начальных параметров для случая $n = 2$. Однако в отличие от горизонтальной трещины, в данном случае выбор начальных параметров зависит не только от показателя нелинейности n , но и от угла наклона трещины α . Значения c_1 и c_2 , найденные для горизонтальной трещины, можно использовать как начальное приближение для близких углов наклона. Таким образом, чтобы корректно задать начальное приближение, например, для случая $n = 10$ и $\alpha = \pi/3$, необходимо сначала найти начальное приближение для $n = 10$ и $\alpha = 0$, а затем последовательно решить задачи для $n = 10$, $\alpha = \pi/6$, и $n = 10$, $\alpha = \pi/4$.

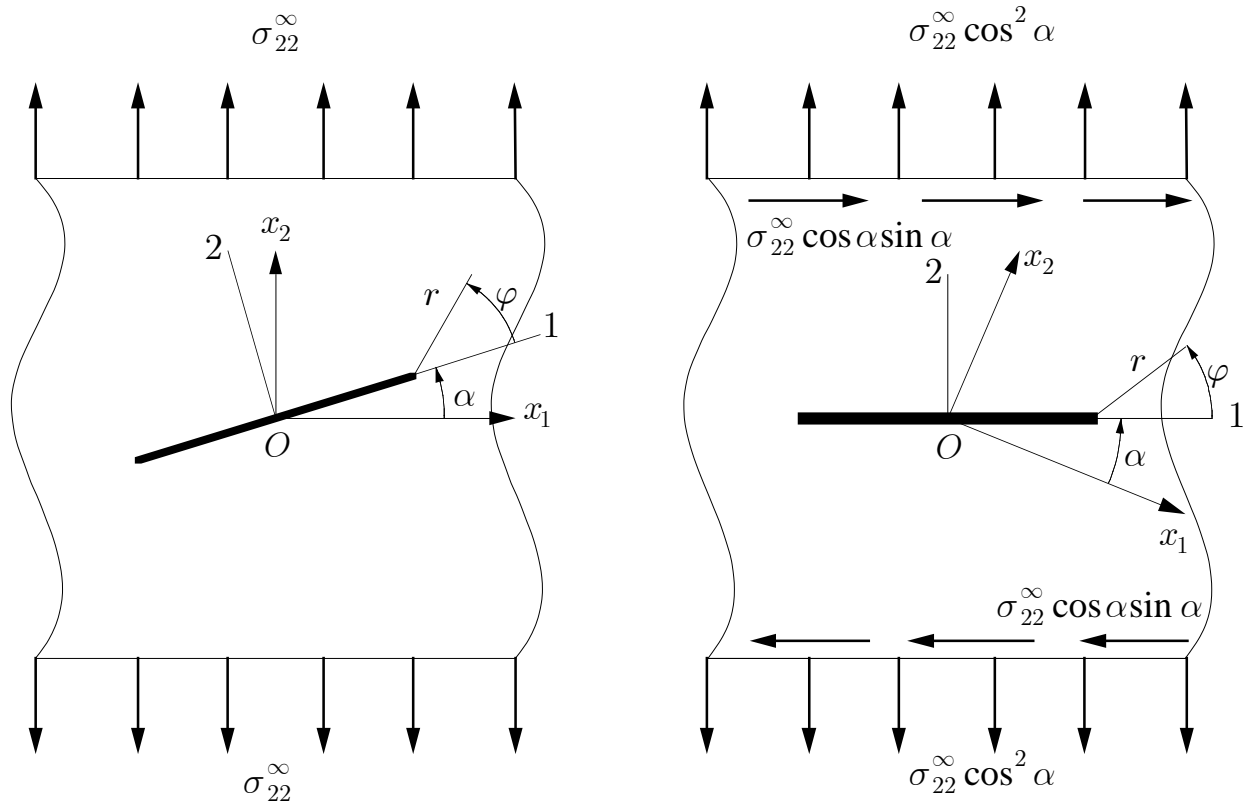


Рис. 69. Статически эквивалентные задачи: задача об одноосном растяжении наклонной трещины и задача о нормальном отрыве и поперечном сдвиге горизонтальной трещины

Удается выявить закономерность изменения значений c_1 и c_2 в зависимости от показателя нелинейности n при одинаковых углах наклона трещины α и зависимость c_1 и c_2 для различных углов наклона трещины, но при одинаковых значениях показателя n . Получившиеся зависимости можно использовать для задания начального приближения при других значениях n или при других значениях угла наклона трещины.

Таким образом, с помощью метода Ньютона определяются значения параметров c_1 и c_2 , к которым сходится итерационный процесс Ньютона, и по найденным значениям c_1 и c_2 находится численное решение для функции $f(\varphi)$ посредством интегрирования задачи Коши методом Рунге—Кутты.

После того, как найдена сеточная функция f , получившееся решение следует перенормировать. Это необходимо сделать, чтобы устранить произвол при выборе значения функции $f(\varphi)$ в нуле. Необходимо выбрать некоторое характерное напряжение. Обычно в качестве него берут значение максимальной интенсивности напряжений. Таким образом, необходимо удовлетворить условию $\max_{\varphi} \hat{T}(\varphi) = 1$. Для процедуры нормировки необходимо решить задачу описанную выше методом, определить максимальное значение интенсивности напряжений и затем разделить на него значения сеточной функции f во всех узлах.

Описанный выше алгоритм решения краевых задач для наклонной трещины в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации был реализован с помощью математического пакета Maple V для значений показателя $n = 1, 3, 5, 7, 13$ и углов наклона трещины $\alpha = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$. Точность

вычислений задавалась $\varepsilon = 10^{-5}$. Величина приращения h принималась равной $h = 10^{-3}$, на время вычислений шаг не влияет, т.к. он необходим только для аппроксимации производных. Кроме того, точность вычислений от величины приращения не зависит, при проверке задача решалась при $h = 10^{-2}$ и $h = 10^{-5}$, результаты практически совпадали. Это является косвенным подтверждением устойчивости алгоритма.

С помощью описанного выше алгоритма решения задачи на собственные значения были определены зависимости от полярного угла величин $\hat{\sigma}_{rr}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{r\varphi}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi)$, $\hat{T}(\varphi)$, $\hat{\sigma}(\varphi)$, $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ вблизи вершины наклонной трещины для плоского напряженного состояния и плоской деформации.

Ниже приведены графики типичных зависимостей от полярного угла компонент тензора напряжений и величин $\sigma_e(\varphi) = \hat{T}(\varphi)$, $\hat{\sigma}(\varphi)$ и $\hat{\sigma}_{\max}(\varphi)$ для наклонной трещины при $\alpha = \pi/4$ в случае плоского напряженного состояния и плоской деформации при $n = 3$.

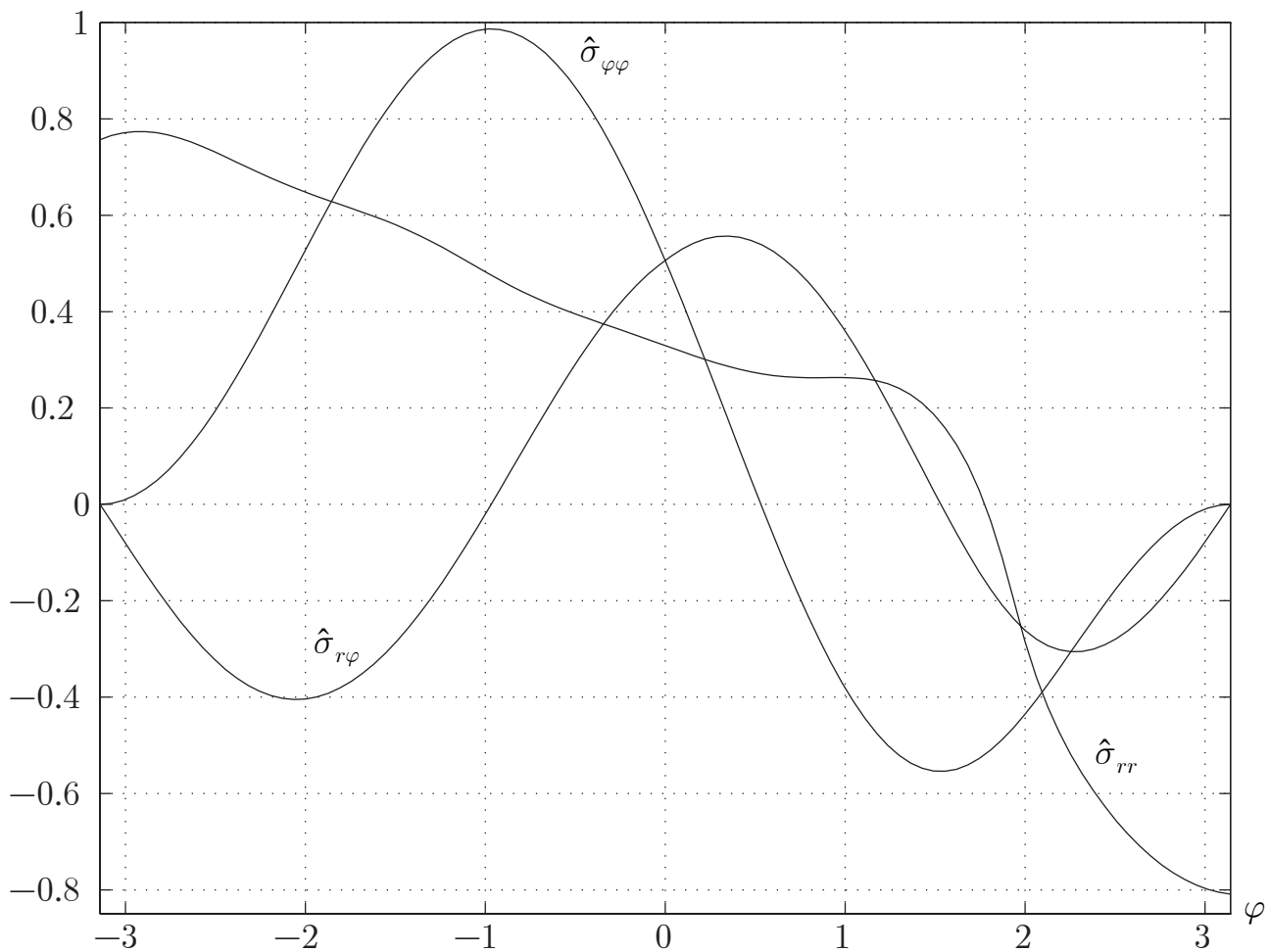


Рис. 70. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для наклонной трещины при $\alpha = \pi/4$ в случае плоского напряженного состояния при $n = 3$

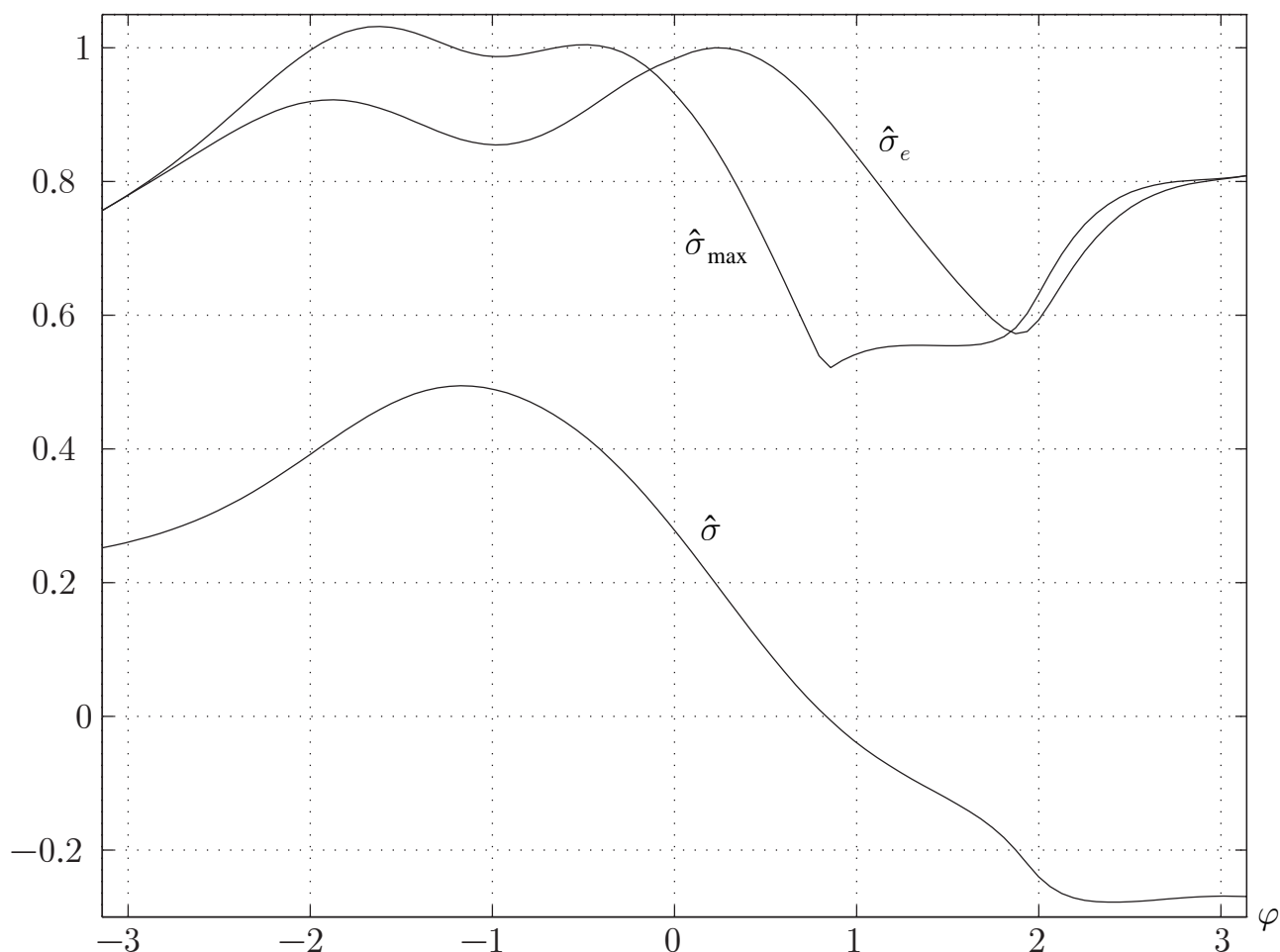


Рис. 71. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_e$ от полярного угла для наклонной трещины при $\alpha = \pi/4$ в случае плоского напряженного состояния при $n = 3$

3.9. Метод годографа Нейбера–Райса (антиплоский сдвиг трещины в упрочняющемся упругопластическом теле)

3.9.1. Общая схема метода годографа

Уравнения, описывающие поведение упругопластических упрочняющихся тел с трещиной при антиплоской деформации, были изучены на основе деформационной теории пластичности Нейбером [106] и Райсом [312]. Фундаментальной проблемой здесь является определение неизвестной границы раздела упругой и пластической зоны, локализованной у вершины трещины или выреза.¹⁷⁵ Для исследования ими был использован метод годографа, с помощью которого удастся перейти от нелинейных в общем случае уравнений задачи к линейным уравнениям на плоскости годографа. Успешное применение такого преобразования зависит от возможности формулировки граничных условий рассматриваемой

¹⁷⁵Прикладные науки почти полтора столетия назад поставили перед математикой проблему решения не только дифференциальных уравнений, но и нахождения границы (или части границы) области определения решения этих уравнений. Подобные задачи называются задачами со свободными границами. К ним относятся струйные задачи гидродинамики, упругопластические задачи, задачи о фазовых переходах. Последовательное и ясное изложение проблематики краевых задач со свободными границами читатель может найти в книге: Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.

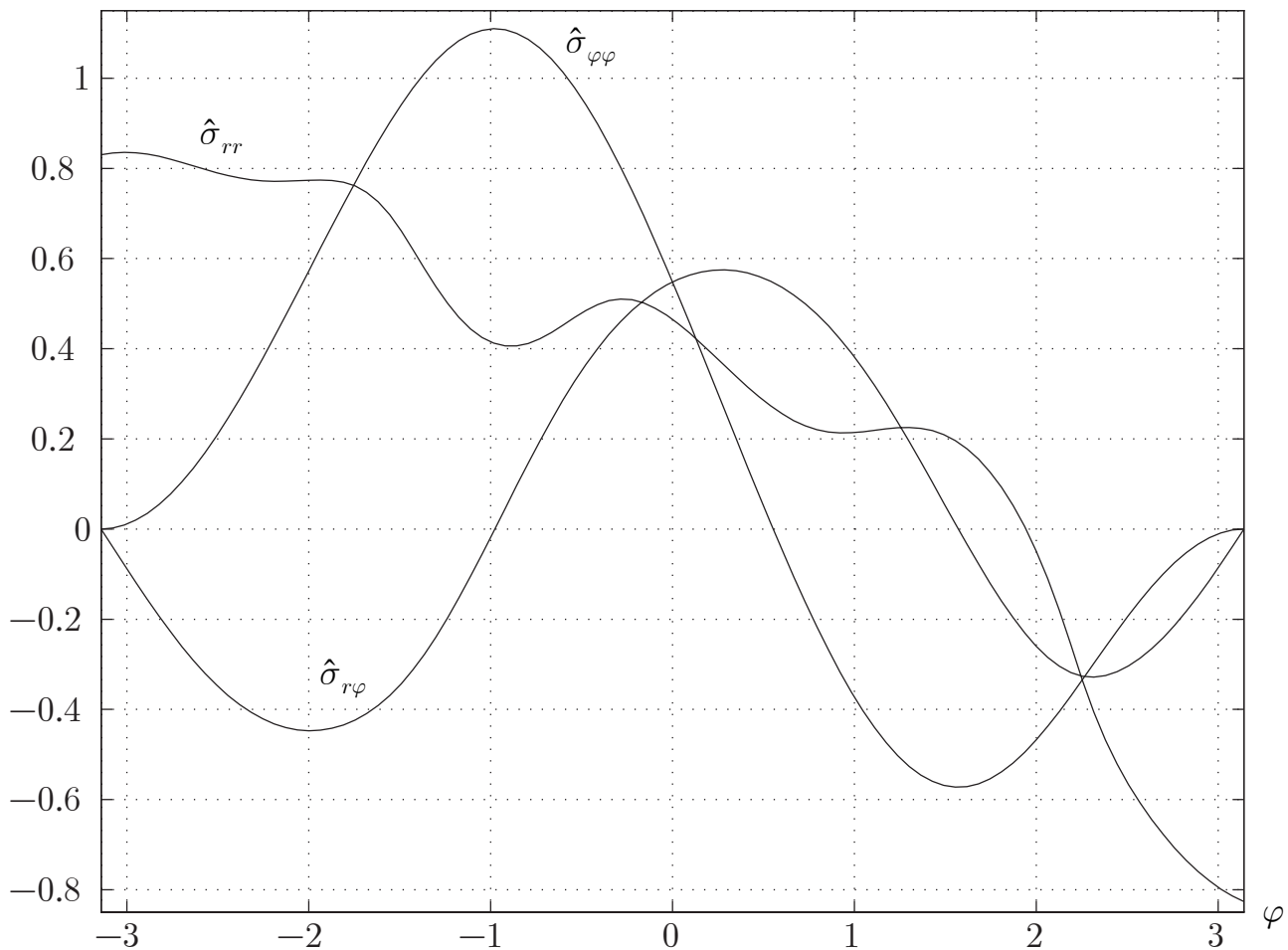


Рис. 72. Графики зависимости компонент тензора напряжений от полярного угла для наклонной трещины при $\alpha = \pi/4$ в случае плоской деформации при $n = 3$

задачи при переходе от физической плоскости к плоскости годографа и вообще от существования взаимно однозначного соответствия при отображении.

Метод годографа был разработан Кирхгофом (G. R. Kirchhoff) в 1869 г. и использован при решении задач гидродинамики идеальной жидкости об обтекании пластинки плоским потоком с образованием за ней зоны мертвой воды и об определении форм свободных струй.¹⁷⁶ Сущность метода годографа состоит в отыскании преобразования области течения с неизвестными границами на некоторую область на плоскости годографа, но уже с известной границей, и переформулировке граничных условий.

Применительно к задачам механики деформируемого твердого тела метод годографа, вполне аналогичный тому, который применяется в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости, был развит Треффтцем (E. Trefftz) в работах 1922, 1925 гг.¹⁷⁷ В частности, с помощью метода годографа им было получено решение задачи об определении пластической зоны при кручении стержня уголкового профиля при маломасштабном идеально пластическом течении

¹⁷⁶Перевод на русский язык оригинального исследования Кирхгофа имеется в книге: Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 243-256. Эти результаты воспроизводятся также во многих других книгах, посвященных гидродинамике, где читатель может найти указания на оригинальные статьи Кирхгофа (см., например, Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954, с. 269-288).

¹⁷⁷Изложение результатов Треффтца и указание на его оригинальные работы имеется в книге [1] на с. 22-25.

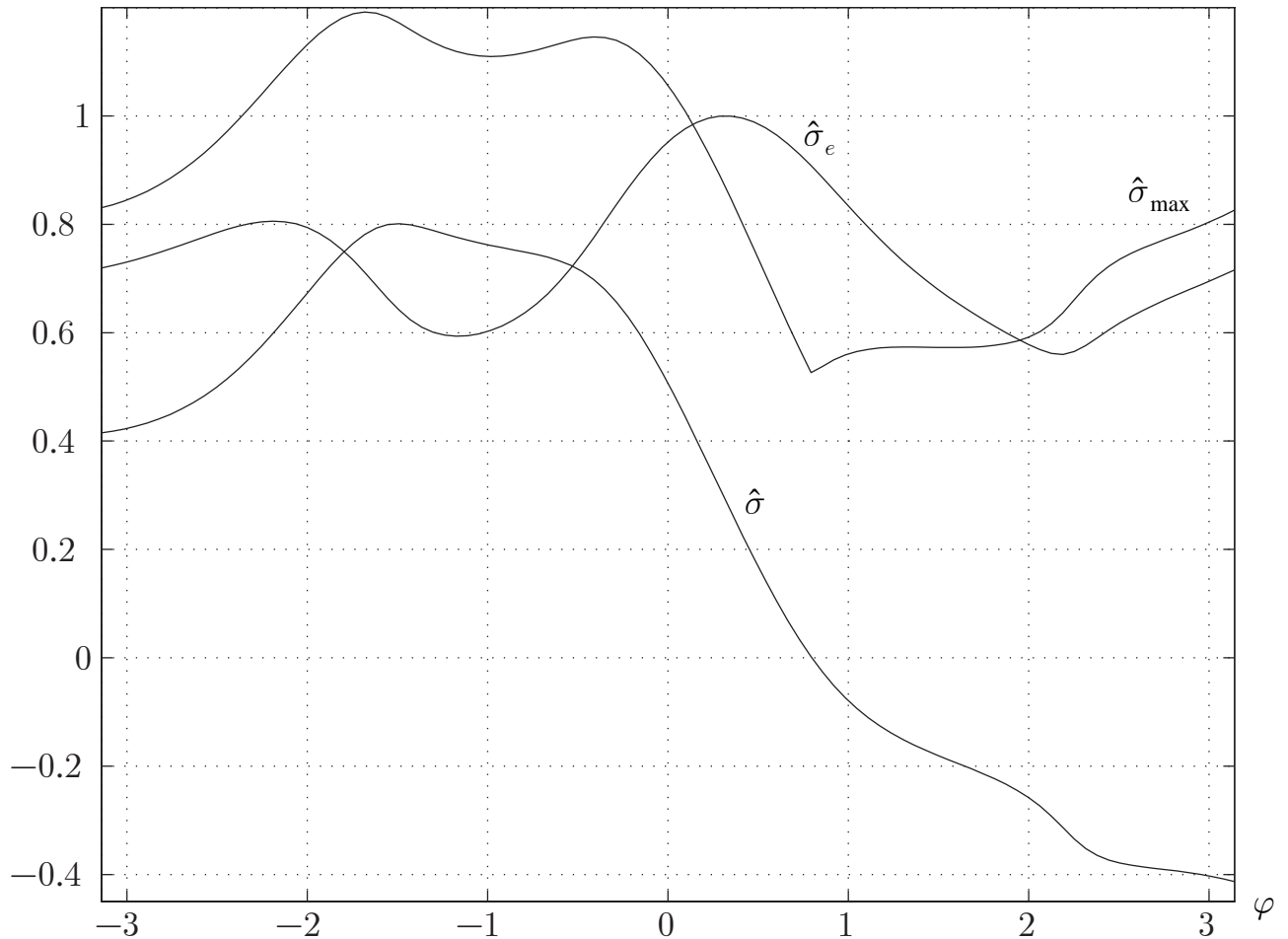


Рис. 73. Графики зависимости величин $\hat{\sigma}_{\max}$, $\hat{\sigma}$ и $\hat{\sigma}_e$ от полярного угла для наклонной трещины при $\alpha = \pi/4$ в случае плоского деформированного состояния при $n = 3$

вблизи входящего прямого угла.¹⁷⁸

Рассмотрим применение метода годографа для решения задач об упругопластических упрочняющихся телах с трещинами при антиплоской деформации.

Предполагается, что соотношение между интенсивностью касательных напряжений τ и интенсивностью деформаций сдвига γ , где

$$\tau = (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2)^{1/2}, \quad \gamma = (\gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^2)^{1/2}, \quad (1.1)$$

остается линейным вплоть до достижения предела текучести τ_0 , а затем представляется изотропным нелинейным соотношением

$$\tau = (\tau_0/\gamma_0)\gamma \quad (\gamma < \gamma_0), \quad \tau = \tau(\gamma) \quad (\gamma > \gamma_0). \quad (1.2)$$

Здесь $\tau = \tau(\gamma)$ — функция, описывающая связь между напряжениями и деформациями при упрочнении.

В индексной форме записи определяющие соотношения принимают следую-

¹⁷⁸Trefftz E. Über die Spannungsverteilung in tordierten Stäben bei teilweiser Überschreitung der Fließgrenze// Z. Angew. Math. und Mech. 1925. Bd. 5. H. 1. S. 64-73.

Перевод на русский язык этой статьи имеется в книге: Галин Л. А. Упруго-пластическая задача. М.: Наука, 1984, с. 105-115.

щую форму

$$\tau_{31} = \frac{\tau(\gamma)}{\gamma} \gamma_{31}, \quad \tau_{32} = \frac{\tau(\gamma)}{\gamma} \gamma_{32}. \quad (1.3)$$

Нелинейные уравнения задач антиплоского сдвига приводятся к линейным уравнениям при переходе к плоскости годографа, при котором физические координаты рассматриваются как функции компонент тензора напряжений

$$x_1 = x_1(\tau_{31}, \tau_{32}), \quad x_2 = x_2(\tau_{31}, \tau_{32}), \quad (1.4)$$

или, что эквивалентно, как функции компонент тензора деформаций

$$x_1 = x_1(\gamma_{31}, \gamma_{32}), \quad x_2 = x_2(\gamma_{31}, \gamma_{32}). \quad (1.5)$$

Преобразования (1.4) и (1.5) переводят уравнение равновесия и условие совместности в

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau_{31}} + \frac{\partial x_2}{\partial \tau_{32}} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_{32}} - \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_{31}} = 0 \quad (1.6)$$

соответственно.

Условие совместности будет выполнено, если ввести функцию компонент тензора деформации $\Phi(\gamma_{13}, \gamma_{23})$, такую что

$$x_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{31}}, \quad x_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{32}}. \quad (1.7)$$

Теперь необходимо совершить переход в уравнении равновесия от переменных τ_{31}, τ_{32} к независимым переменным γ_{31}, γ_{32} . Используя определяющие соотношения

$$\gamma_{31} = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_{31}, \quad \gamma_{32} = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_{32}$$

и соотношения (1.7), можно получить для Φ линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Это уравнение имеет наиболее простой вид в полярных координатах γ, φ на плоскости годографа:

$$\gamma e^{i\varphi} = \gamma_{32} - i\gamma_{31}, \quad \tau e^{i\varphi} = \tau_{32} - i\tau_{31}, \quad (1.8)$$

где γ — интенсивность деформаций сдвига, φ — угол между направлением γ и осью γ_{32} .

В полярной системе координат соотношения (1.7) представляются в виде

$$x_1 = -\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \frac{\cos \varphi}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad x_2 = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \frac{\sin \varphi}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (1.9)$$

Уравнение равновесия в полярной системе координат на плоскости годографа удовлетворяется, если

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma \tau'(\gamma)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (1.10)$$

где $\tau'(\gamma) = d\tau/d\gamma$.

Для области плоскости годографа, соответствующей упругой зоне $\tau = (\tau_0/\gamma_0)\gamma$, уравнение (1.10) преобразуется к уравнению Лапласа в полярной системе координат на плоскости годографа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1.11)$$

Таким образом, в плоскости годографа уравнения задачи становятся линейными. Если оказывается возможным переформулировать физические граничные условия на плоскость годографа, то решение можно будет получить аналитически.

Перемещение u_3 и потенциал Φ связаны преобразованием Лежандра

$$u_3 = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \Phi, \quad \Phi = r \frac{\partial u_3}{\partial r} - u_3, \quad (1.12)$$

где r — полярный радиус на физической плоскости.

Возвращаясь к уравнению (1.10), следует отметить, что его частное решение, найденное методом разделения переменных, определяется формулой

$$\Phi = \Phi(\gamma, \varphi) = \gamma \left[\int \frac{d\gamma}{\tau(\gamma)\gamma^2} + C \right] (A \sin \varphi + B \cos \varphi), \quad (1.13)$$

где C, A, B — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий конкретной краевой задачи.

3.9.2. Маломасштабное пластическое течение в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига

Рассмотрим решение задачи о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в предположении маломасштабного пластического течения [312]. Суть концепции маломасштабного течения заключается в предположении о низком уровне нагрузок, приложенных к упругопластическому телу с трещиной и, как следствие, малости зоны пластического течения в окрестности вершины трещины по сравнению с характерными линейными размерами: длиной трещины, шириной ненадрезанного образца. Тогда можно считать, что на расстояниях, больших по сравнению с характерным размером области пластического течения, но малых по сравнению с длиной трещины и характерным линейным размером тела, напряжения определяются главным членом асимптотического разложения поля напряжений задачи об упругом теле с трещиной:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\varphi) + \dots \quad (\alpha = I, II, III). \quad (2.1)$$

В [312], где была выдвинута концепция маломасштабного пластического течения, отмечается, что, принимая предположение о малости области пластического течения, можно считать реальную трещину конечных размеров полубесконечной, рассматривая лишь окрестность ее вершины, а истинные граничные

условия задачи для тела конечных размеров заменить асимптотическим условием стремления к упругому решению (2.1) для бесконечного тела.¹⁷⁹

Решения, полученные в предположении маломасштабного течения, являются математически строгими только в предельном случае исчезающе малой пластической области [312]. Тем не менее, результаты данного решения оказались близкими к имеющимся решениям вплоть до значительных нагрузок.

Применим метод годографа для задачи о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в условиях маломасштабного пластического течения.

Для этого к уравнению (1.10) следует добавить граничные условия. Поскольку на берегу трещины $x_2 = 0$, из (1.9) следует, что $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$ при $\varphi = \pm\pi/2$. Деформации в окрестности вершины трещины в пластической области имеют особенность, поэтому начало координат физической плоскости отображается в бесконечно удаленную точку плоскости деформаций (рис. 74). Следовательно, производные от функции Φ должны стремиться к нулю на бесконечности, так как в вершине трещины $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Асимптотическое условие сближения искомого решения и решения для упругого материала

$$\tau_{31} \rightarrow -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \tau_{32} \rightarrow \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (2.2)$$

приводит к особенности в начале координат плоскости деформаций — образу бесконечно удаленной точки физической плоскости

$$x_1 - ix_2 = -e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + i \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma} \right) \rightarrow \frac{K_{III}^2 \gamma_0^2 e^{-2i\varphi}}{2\pi\tau_0^2 \gamma^2} \quad (\gamma \rightarrow 0), \quad (2.3)$$

или

$$\Phi \rightarrow -\frac{K_{III}^2 \gamma_0^2}{2\pi\tau_0^2} \frac{\sin \varphi}{\gamma} \quad (\gamma \rightarrow 0). \quad (2.4)$$

Определяя неизвестные константы в частном решении (1.13) линейного уравнения в частных производных с переменными коэффициентами (1.10) из сформулированных граничных условий, можно найти решение задачи как в пластической, так и в упругой областях:

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{K_{III}^2 \gamma_0}{\pi\tau_0} \left[\gamma \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right] \sin \varphi & (\gamma > \gamma_0), \\ -\frac{K_{III}^2 \gamma_0^2}{2\pi\tau_0^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma_0^2} \left[2\gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} - 1 \right] \right\} \sin \varphi & (\gamma < \gamma_0). \end{cases} \quad (2.5)$$

¹⁷⁹В [175] введен аналогичный принцип — ”принцип микроскопа”, согласно которому ”под микроскопом” рассматривается непосредственная окрестность вершины конечной трещины в теле конечных размеров. В рамках такого подхода трещину можно считать полубесконечной, тело бесконечным, а граничные условия могут быть заменены требованием асимптотического сближения (при $r \rightarrow \infty$) с особым упругим решением (2.1).

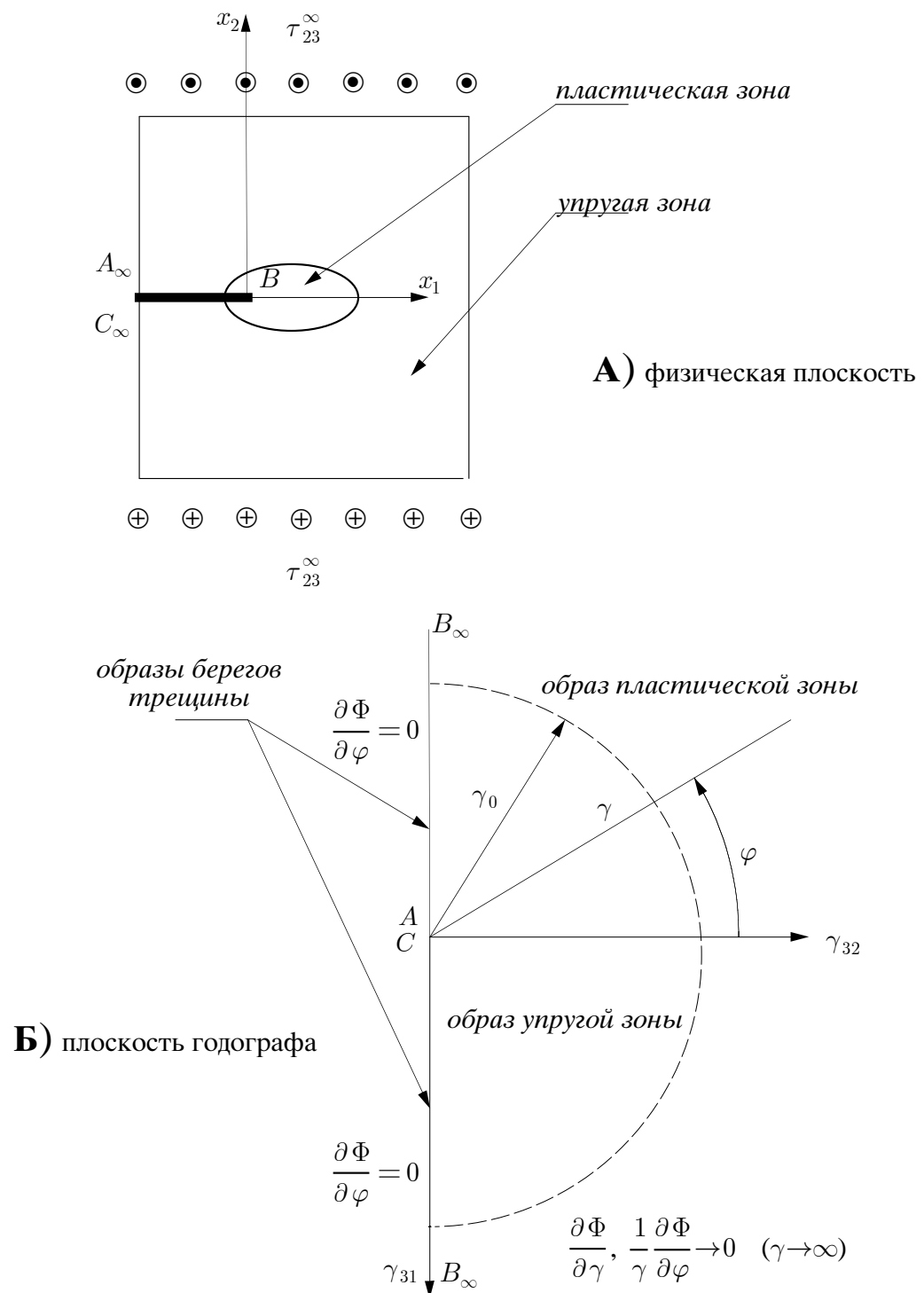


Рис. 74. Отображение физической плоскости на плоскость годографа по методу Нейбера—Райса

Таким образом, в приближении маломасштабного пластического течения физические декартовы координаты связаны с полярными координатами на плоскости годографа соответственно в пластической и упругой зонах посредством уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= X(\gamma) + R(\gamma) \cos 2\varphi, \\ x_2 &= R(\gamma) \sin 2\varphi; \end{aligned} \quad (\gamma > \gamma_0)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= X(\gamma_0) + R(\gamma) \cos 2\varphi, \\ x_2 &= R(\gamma) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (0 < \gamma < \gamma_0)$$
(2.6)

Здесь введены следующие обозначения:

$$R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)},$$

$$X(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left[2\gamma_0\tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \right].$$

В пластической зоне кривые постоянных значений деформаций есть окружности радиуса $R(\gamma)$ с центром, расположенным на расстоянии $X(\gamma)$ от вершины трещины (рис. 75). Граница пластической области является окружностью с центром в точке $X(\gamma_0)$ и радиусом $R(\gamma_0) = K_{III}^2/(2\pi\tau_0^2)$ и, очевидно, что этот радиус не зависит от вида соотношения между напряжениями и деформациями при упрочнении.

Из (2.6) можно определить, что в условиях маломасштабного пластического течения поле напряжений в упругой области вычисляется по формуле

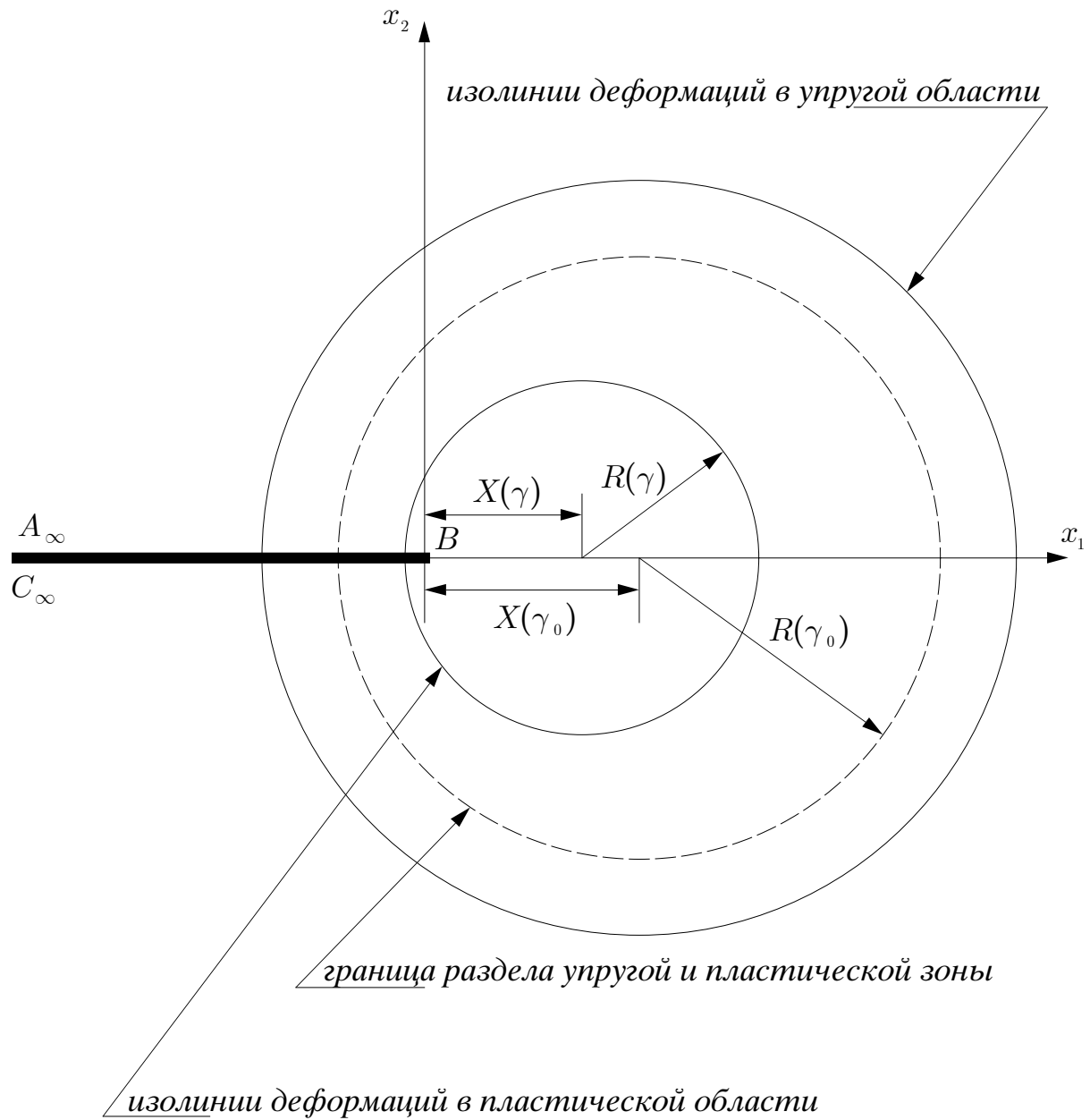
$$\tau_{32} - i\tau_{31} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi[z - X(\gamma_0)]}},$$

где $X(\gamma_0)$ — координата центра пластической области, т.е. влияние пластичности при любом законе упрочнения $\tau(\gamma)$ сводится к сдвигу упругого решения вперед таким образом, что вершина "эквивалентной" упругой трещины находится в центре пластической области $x_1 = X(\gamma_0)$, $x_2 = 0$.

Используя решение (2.5), можно найти асимптотики полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига для соотношения между напряжениями и деформациями с упрочнением по степенному закону

$$\gamma = \gamma_0(\tau/\tau_0) \quad (\tau \leq \tau_0), \quad \gamma = \gamma_0(\tau/\tau_0)^n \quad (\tau > \tau_0)$$

(значение $n = \infty$ отвечает идеальной пластичности, а $n = 1$ — идеальной упругости).



$$R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)}, \quad X(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left[2\gamma_0\tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2\tau(u)} - \frac{\gamma_0\tau_0}{\gamma\tau(\gamma)} \right]$$

Рис. 75. Геометрия области пластического течения на физической плоскости

Радиус и координата центра окружности постоянной деформации определяются формулами

$$R(\gamma) = \frac{K_{III}^2}{2\pi\tau_0^2} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{(n+1)/n}, \quad X(\gamma) = \frac{n-1}{n+1} R(\gamma). \quad (2.7)$$

Деформации в пластической области на расстоянии x_1 от вершины трещины

Учитывая (1.9), сформулируем граничные условия на плоскости годографа:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= -l \quad (\gamma_{\infty} > \gamma > 0), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi/2-\alpha} &= 0 \quad (\gamma > 0), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi/2+\alpha} &= 0 \quad (\gamma > 0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где γ_{∞} — значение интенсивности деформации сдвига γ на бесконечности.

Для текущего значения τ_{∞} часть сечения тела будет находиться в состоянии пластического течения, а часть будет упругой (рис. 76). На плоскости годографа образом упругой зоны будет сектор с разрезом (рис. 77).

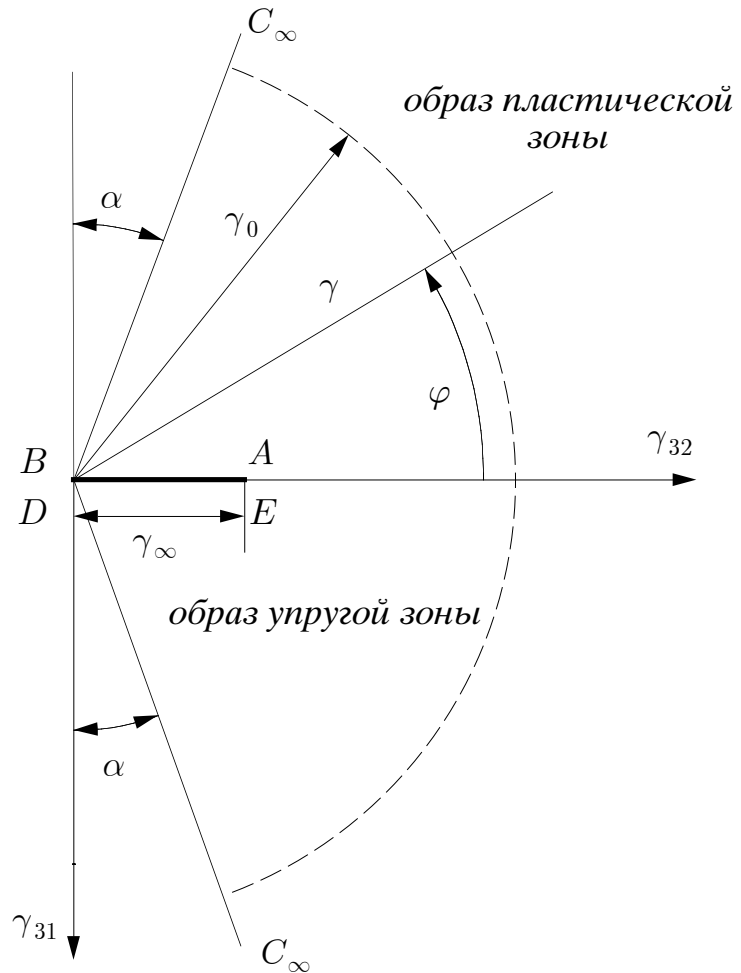


Рис. 77. Образ физической плоскости на плоскости годографа при антиплоской деформации полупространства с вырезом

Таким образом, внутри сектора с разрезом функция $\Phi(\gamma, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям (3.2).

Рассмотрим вспомогательную плоскость комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$.

Конформное отображение

$$\zeta = \left(\frac{\gamma_{23} - i\gamma_{13}}{\gamma_0} \right)^\lambda = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^\lambda e^{i\lambda\varphi}, \quad \left(\lambda = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha} \right) \quad (3.3)$$

преобразует указанный сектор с разрезом в полукруг единичного радиуса $|\zeta| < 1$, $\operatorname{Re}\zeta > 0$ с разрезом $0 \leq \xi \leq s$, где

$$s = \left(\frac{\tau_\infty}{\tau_0} \right)^\lambda = \left(\frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} \right)^\lambda.$$

Принимая во внимание формулы (1.9), имеем

$$-x_1 + ix_2 = e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + i \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right) = \frac{\lambda}{\gamma_0} \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right). \quad (3.4)$$

Поскольку Φ — гармоническая функция, то существует аналитическая в указанном полукруге с разрезом функция $f(\zeta) : \Phi = \operatorname{Im} f$. Тогда равенство (3.4) можно представить в виде

$$-x_1 + ix_2 = \frac{\lambda}{\gamma_0} \zeta^{(\lambda-1)/\lambda} f'(\zeta), \quad (3.5)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ζ .

Граничные условия (3.2), преобразованные к переменным ξ, η , в частности, дают:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (-1 < \eta < 1), \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \frac{\gamma_0}{\lambda} \xi^{-(\lambda-1)/\lambda} l \quad (0 < \xi < s).$$

Заметим далее, что справедливо следующее равенство

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (s < \xi < 1). \quad (3.7)$$

Действительно, отрезок $s \leq \xi \leq 1$ соответствует той части оси x_1 , которая расположена в упругой зоне. Поэтому, полагая в (3.4) $x_2 = 0, \eta = 0$, получим (3.7).

Поскольку функция $f'(\zeta)$ в силу первого из условий (3.6) на оси η принимает вещественные значения, то ее можно аналитически продолжить на весь круг $|\zeta| < 1$ с разрезом $-s \leq \xi \leq s$. При этом симметричным относительно оси η точкам соответствуют сопряженные значения функции $f'(\zeta) : f'(-\bar{\zeta}) = \overline{f'(\zeta)}$. Отметим также, что в силу (3.7), используя принцип симметрии, получим $f'(\bar{\zeta}) = \overline{f'(\zeta)}$. Таким образом, функция $f'(\zeta)$ является четной.

Воспользуемся очевидным равенством:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = f'(\zeta) + \overline{f'(\zeta)}, \quad (3.8)$$

которое с учетом условий симметрии приобретает вид:

$$2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = f'(\zeta) + f'(\bar{\zeta}). \quad (3.9)$$

В последнем равенстве положим $\eta = 0$ (устремляя ζ к точкам интервала $-s < \xi < s$) по точкам верхней полуплоскости. Учитывая также четность функции $f'(\zeta)$, получим:

$$f'^+(\xi) + f'^-(\xi) = \frac{2l\gamma_0}{\lambda} |\xi|^{-(\lambda-1)/\lambda} \quad (-s < \xi < s), \quad (3.10)$$

где знаками плюс и минус обозначены предельные значения при стремлении ζ к оси ξ сверху и снизу соответственно.

Таким образом, необходимо найти функцию $f'(\zeta)$, аналитическую внутри круга $|\zeta| < 1$ с разрезом $-s \leq \operatorname{Re}\zeta \leq s$ такую, чтобы выполнялось условие (3.10).

Решая соответствующую задачу Римана, при условии, что в силу (3.5) функция $f'(\zeta)$ неограничена при $\zeta = \pm s$, можно получить [101]

$$f'(\zeta) = \frac{\gamma_0 l}{\pi \lambda \sqrt{\zeta^2 - s^2}} \int_{-s}^s \frac{\sqrt{s^2 - \mu^2} |\mu|^{-(\lambda-1)/\lambda}}{\mu - \zeta} d\mu + \frac{\zeta g(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}}, \quad (3.11)$$

где $g(\zeta)$ — произвольная четная аналитическая в круге $|\zeta| < 1$ функция.

Формула (3.11) позволяет преобразовать равенство (3.5) к следующему виду:

$$\frac{-x_1 + ix_2}{\lambda \zeta^{(2\lambda-1)/\lambda}} = \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{\zeta^2 - s^2}} \left[g(\zeta) + \frac{2l\gamma_0 s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^{2\lambda}}}{s^2 t^{2\lambda} - \zeta^2} dt \right]. \quad (3.12)$$

Образом пластической зоны на плоскости годографа будет бесконечная область, изображенная на рис. 77. В этой области функция Φ должна удовлетворять уравнению (1.10) и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right|_{\varphi=\pi/2-\alpha} = 0, \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right|_{\varphi=-\pi/2+\alpha} = 0 \quad (\gamma_0 < \gamma < \infty).$$

Решение уравнения (1.10), удовлетворяющее граничным условиям (3.13), будем искать методом разделения переменных:

$$\Phi(\gamma, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m f_m(\gamma) \sin(2m-1)\lambda\varphi, \quad (3.14)$$

тем самым выполняются условия (3.13).

Подставляя разложение (3.14) в уравнение (1.10), приходим к уравнениям:

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma\tau'(\gamma)}f_m'' + \frac{1}{\gamma}f_m' - \frac{(2m-1)^2\lambda^2}{\gamma^2}f_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.15)$$

которые необходимо проинтегрировать при условиях:

$$f_m(\gamma_0) = 1, \quad f_m'(\infty) = 0. \quad (3.16)$$

Упругопластическая граница имеет своим образом на плоскости годографа дугу окружности $\gamma = \gamma_0$, $-\pi/2 + \alpha \leq \varphi \leq \pi/2 - \alpha$. Из уравнений (1.10) и разложения (3.14) находим уравнение упругопластической границы:

$$(-x_1 + ix_2)|_{\gamma=\gamma_0} = \frac{e^{-i\varphi}}{2\gamma_0} \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left\{ [(2m-1)\lambda + \gamma_0 f_m'(\gamma_0)] e^{i(2m-1)\lambda\varphi} + \right. \\ \left. + [(2m-1)\lambda - \gamma_0 f_m'(\gamma_0)] e^{-i(2m-1)\lambda\varphi} \right\}. \quad (3.17)$$

С другой стороны, уравнение упругопластической границы можно получить, полагая в уравнении (3.12) $\gamma = \gamma_0$:

$$\frac{-x_1 + ix_2}{\lambda e^{i(2\lambda-1)\varphi}} = \frac{1}{\gamma_0 \sqrt{e^{2i\lambda\varphi} - s^2}} \left[g(e^{i\lambda\varphi}) + \frac{2l\gamma_0 s^{(\lambda+1)/\lambda}}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^{2\lambda}}}{s^2 t^{2\lambda} - e^{i2\lambda\varphi}} dt \right]. \quad (3.18)$$

Приравнявая правые части уравнений (3.17) и (3.18), можно получить ($\sigma = e^{i\lambda\varphi}$):

$$g(\sigma) = \frac{2l}{\pi} \gamma_0 s^{(1+\lambda)/\lambda} \sigma^{-2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^{2\lambda}}}{1-s^2\sigma^{-2}t^{2\lambda}} dt + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{1-s^2\sigma^{-2}} \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left\{ [(2m-1)\lambda + \gamma_0 f_m'(\gamma_0)] \sigma^{2(m-1)} + \right. \\ \left. + [(2m-1)\lambda - \gamma_0 f_m'(\gamma_0)] \sigma^{-2m} \right\}. \quad (3.19)$$

Правая часть последнего равенства может быть разложена в ряд по четным степеням $\sigma^{\pm 2m}$. Но левая часть не должна содержать члены с отрицательными степенями σ , поскольку функция $g(\sigma)$ не может иметь особенностей (функция

$g(\sigma)$ аналитична внутри круга $|\zeta| < 1$ и ее разложение в ряд Тейлора содержит только положительные четные степени аргумента). Полагая равными нулю коэффициенты при степенях σ^{-2} , σ^{-4} , ... в разложении правой части формулы (3.19), получим бесконечную систему линейных уравнений для определения коэффициентов D_m . Если эти коэффициенты найдены, то затем по формуле (3.19) находится функция $g(\sigma)$, затем замена σ на ζ приводит к определению $g(\zeta)$.

Таким образом, решение задачи может быть доведено до конца. В силу математических затруднений точное решение данной бесконечной системы алгебраических уравнений в настоящее время не построено. Анализ полученной бесконечной системы алгебраических уравнений проведен в [312] с помощью метода последовательных приближений для малых значений параметра $s = (\tau_\infty/\tau_0)^\lambda$. В [312] дано решение этой системы с точностью до s^{12} и приведены таблицы численных данных для материалов, упрочняющихся по степенному закону. Отмечается, что решение, определенное с любой заранее заданной точностью, удовлетворяет всем граничным условиям и основным уравнениям на плоскости годографа, за исключением условия непрерывности вдоль дуги $\gamma = \gamma_0$, которое удовлетворяется с выбранной точностью.

Рассмотрим случай, когда отношение $s = (\tau_\infty/\tau_0)^\lambda$ мало, т.е. малы размеры области пластического течения по сравнению с глубиной выреза l (концепция маломасштабного пластического течения). Тогда можно найти приближенные равенства:

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{\lambda\gamma_0 l B_0 s^{(1+\lambda)\cdot\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)}, \quad D_k = 0 \quad (k \geq 2), \\ \Phi &= -\frac{\lambda\gamma_0 l B_0 s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)} f_1(\gamma) \sin \lambda\varphi, \\ B_0 &= \frac{\Gamma(\lambda/2)}{\lambda\sqrt{\pi}\Gamma(3/2 + \lambda/2)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для физических координат x_1 , x_2 в пластической области имеем равенства:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\lambda\gamma_0 l B_0 s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)} \left[\frac{\lambda f_1(\gamma)}{\gamma} \cos \varphi \cos \lambda\varphi + f'_1 \sin \varphi \sin \lambda\varphi \right], \\ x_2 &= \frac{\lambda\gamma_0 l B_0 s^{(1+\lambda)/\lambda}}{\lambda - \gamma_0 f'_1(\gamma_0)} \left[\frac{\lambda f_1(\gamma)}{\gamma} \sin \varphi \cos \lambda\varphi - f'_1 \cos \varphi \sin \lambda\varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Если положить $\alpha = 0$, то получается задача о трещине длины l . В этом случае $\lambda = 1$. Из уравнений (3.15) и (3.16) функция определяется с помощью квадратур и имеет следующий вид:

$$f_1(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[\int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right]^{-1} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в (3.20), для функции Φ имеем выражение

$$\Phi = -\gamma_0 \tau_0 s^2 l \left[\gamma \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right] \sin \varphi. \quad (3.23)$$

Вводя коэффициент интенсивности напряжений для бесконечного тела с трещиной длины $2l$ формулой $K_{III} = \tau_{\infty} \sqrt{\pi l} = \tau_0 s \sqrt{\pi l}$, можно получить, что

$$\Phi = -\frac{\gamma_0}{\pi \tau_0} K_{III} \left[\gamma \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} \right] \sin \varphi. \quad (3.24)$$

Физические координаты, соответствующие деформациям в пластической области, вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2} \left\{ \frac{\gamma_0 \tau_0}{\gamma \tau(\gamma)} \cos 2\varphi + \left[2\gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} - \frac{\gamma_0 \tau_0}{\gamma \tau(\gamma)} \right] \right\}, \quad (3.25)$$

$$x_2 = \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2} \frac{\gamma_0 \tau_0}{\gamma \tau(\gamma)} \sin 2\varphi,$$

что полностью совпадает с решением задачи о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в предположении маломасштабного течения (2.6).

Упругопластическая граница представляет собой окружность с центром, находящимся на расстоянии

$$X(\gamma_0) = \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2} \left[2\gamma_0 \tau_0 \int_{\gamma}^{\infty} \frac{du}{u^2 \tau(u)} - \frac{\gamma_0 \tau_0}{\gamma \tau(\gamma)} \right]_{\gamma=\gamma_0} \quad (3.26)$$

впереди вершины трещины, радиуса

$$R(\gamma_0) = \frac{K_{III}^2}{2\pi \tau_0^2}. \quad (3.27)$$

Приведем численные результаты [312], [95] для материалов, упрочняющихся по степенному закону $\tau(\gamma) = \tau_0 (\gamma/\gamma_0)^N$ ($N = 1/n$). Для рассматриваемых определяющих соотношений решение уравнений (3.15) имеет вид:

$$f_m(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-\mu_m}, \quad (3.28)$$

где принято следующее обозначение:

$$\mu_m = \sqrt{\frac{(1-N)^2}{4} + (2m-1)^2 \lambda^2 N} - \frac{1-N}{2}. \quad (3.29)$$

В этом случае можно численно найти постоянные D_m . В [312] исследована упругопластическая граница при двух значениях напряжения на бесконечности: $\tau_\infty = 0,6\tau_0$ и $\tau_\infty = 0,8\tau_0$. Для этих уровней напряжений установлен переход от круговых локализованных областей пластического течения к сильно вытянутым зонам при приближении к напряжениям развитого пластического течения [312], [95].

Заключая, следует отметить, что аналитические решения приведенных упругопластических задач о трещине антиплоского сдвига, найденные с помощью метода годографа, не являются в полной мере точными решениями, поскольку при исследовании полубесконечной трещины формулируется асимптотическое условие сближения с упругим решением. Таким образом, это решение можно считать лишь асимптотически точным; исследование напряженно-деформированного состояния полупространства с вырезом конечной глубины при антиплоском сдвиге сводится к анализу бесконечной системы алгебраических уравнений, строгое исследование которой, по всей видимости, не проводилось. Тем не менее данный анализ позволяет: 1) сделать ряд важных выводов о геометрии области пластического течения, существующей в окрестности вершины трещины; 2) получить асимптотики компонент тензора напряжений и деформаций в пластической области для заданного закона упрочнения.

3.9.4. Асимптотики скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига для дробно-линейного определяющего закона

Используя метод годографа, можно изучить поля напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига при использовании дробно-линейной аппроксимации определяющего закона $\tau(\gamma)$ [180]

$$\gamma = \gamma_0 \frac{\tau}{\tau_* - \tau},$$

где τ_* , γ_0 — постоянные материала, определяемые экспериментально.¹⁸¹ Постоянная τ_* может трактоваться как величина предела прочности на сдвиг и находится из опытов на одноосное растяжение.

Удобно перейти к безразмерным величинам по формулам:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ij} &= \frac{\tau_{ij}}{\tau_*}, & \hat{\tau} &= \frac{\tau}{\tau_*}, & \hat{\gamma}_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{\gamma_0}, & \hat{\gamma} &= \frac{\gamma}{\gamma_0}, \\ \hat{x}_1 &= \frac{x_1}{L}, & \hat{x}_2 &= \frac{x_2}{L}, & \hat{r} &= \frac{r}{L}, & L &= \left(\frac{K_{III}}{\tau_*} \right)^2, \end{aligned}$$

(для сокращения записи уравнений вместо обозначения \hat{f} будем использовать f).

¹⁸¹Дробно-линейная зависимость $\tau(\gamma)$ была предложена в [180] для случая установившейся ползучести. Решение для упрочняющегося упругопластического тела могут быть использованы в теории установившейся ползучести путем замены деформации на скорость деформации, а перемещений — на их скорости.

Применение метода годографа приводит к следующим соотношениям, связывающим безразмерные физические координаты x_1 , x_2 и полярные координаты на плоскости годографа γ , φ :

$$x_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \cos 2\varphi \right], \quad x_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \sin 2\varphi.$$

Из этих соотношений, переходя к полярным координатам на физической плоскости, можно получить алгебраическое уравнение относительно интенсивности скоростей деформации γ

$$\gamma^4 r^2 - 2Cr \cos \varphi \gamma^3 - 2C^2 \gamma - C^2 = 0,$$

где $C = 1/2\pi$, и определить характер особенности деформаций по r при различных углах φ , где φ — полярный угол системы координат на физической плоскости, установив следующие соотношения:

при $0 \leq \varphi < \pi/2$

$$\gamma = \frac{2C \cos \varphi}{r};$$

при $\varphi = \pi/2$

$$\gamma = \left(\frac{\sqrt{2}C}{r} \right)^{2/3};$$

при $\pi/2 < \varphi \leq \pi$

$$\gamma = \sqrt{\frac{C}{|\cos \varphi| r}}.$$

Из полученных асимптотик скоростей деформаций сдвига видно, что, в отличие от наиболее часто используемого степенного закона ползучести, скорости деформации имеют разную особенность при приближении к вершине трещины в зависимости от значения полярного угла, по которому мы приближаемся к вершине. Причем показатель сингулярности меняется дискретным образом: $k = 1$ для $0 \leq \varphi < \pi/2$; $k = 2/3$ для $\varphi = \pi/2$; $k = 1/2$ для $\pi/2 < \varphi \leq \pi$.

3.10. Трещины в условиях ползучести

В настоящем разделе приводятся основные результаты механики разрушения, полученные для тел с трещинами в условиях ползучести. Ползучесть существенно влияет на прочность и устойчивость, а значит и на условия разрушения.

Рассматриваются модели нелинейно вязкого и упругого нелинейно вязкого поведения, а также асимптотики полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины стационарной и растущей трещины для дан-

ных типов поведения.¹⁸² Обсуждается сравнительно новое соотношение установившейся ползучести — дробно-линейный закон ползучести. Получены решения ряда краевых задач по определению напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины для этого определяющего соотношения. Рассматривается C^* -интеграл — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести и его применение к решению конкретных краевых задач.

3.10.1. Феноменологические уравнения установившейся ползучести

Под ползучестью в широком смысле понимают всю совокупность явлений, связанных с влиянием времени на зависимость между напряжениями и деформациями в твердых телах. Основные положения теории ползучести изложены в монографиях [110], [61],¹⁸³ [130], [102]. Интересная обзорная работа [131] также целиком посвящена теории ползучести.

Деформации ползучести в металлах и сплавах при повышенной температуре могут быть описаны как нелинейно вязкие деформации. Изменение деформации во времени при постоянном напряжении традиционно описывается кривой ползучести, обычно состоящей из трех участков: неустановившаяся ползучесть, характеризующаяся постепенным уменьшением скорости деформации; установившаяся ползучесть, протекающая при постоянной скорости деформации; ускоренная ползучесть, главным признаком которой является возрастание скорости деформации и параллельное накопление повреждений, еще больше ускоряющее ползучесть. С точки зрения разрушения ползучесть металлов с увеличивающейся скоростью нельзя считать опасной до тех пор, пока это увеличение не слишком отражается на его структуре. Опасной становится та стадия ускоренной ползучести, когда происходит значительное изменение структуры материала, достигается высокий уровень его поврежденности и наблюдается прогрессивное его разрушение.

Для описания кривых ползучести был предложен целый ряд уравнений, описывающих процесс ползучести при заданных условиях. Анализ кривых ползучести читатель может найти в специальных руководствах, посвященных теории ползучести (см., например, [110], с. 111-134).

Если ограничиться только этапом установившейся ползучести, то механическое поведение материалов можно трактовать как нелинейно вязкое течение, характеризующееся в общем случае нелинейной зависимостью между скоростью деформации ползучести и напряжением

$$\dot{\epsilon}^c = f(\sigma). \quad (1.1)$$

¹⁸²За пределами данной книги оказались результаты, связанные с анализом напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в вязкоупругих стареющих средах, определяющие зависимости для которых были предложены Н. Х. Арутюняном [3]. Этот круг вопросов освещен в монографии [5]. При решении задач теории ползучести стареющих сред необходимо знакомство с теорией интегральных уравнений (см. [96], [164]). Мы рекомендуем также оригинальные издания [91], [123].

¹⁸³См. также более раннюю версию: Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 164 с.

Были предложены многочисленные эмпирические зависимости для конкретизации последнего соотношения, к числу наиболее распространенных из которых относятся:

степенной закон Нортона (F. H. Norton, 1929 г.)

$$\dot{\varepsilon}^c = B\sigma^n, \quad (1.2)$$

где B и n — постоянные материала, подбираемые экспериментально; экспоненциальная зависимость Людвики (P. Ludwick, 1909 г.)

$$\dot{\varepsilon}^c = B \exp(\sigma/\sigma_0); \quad (1.3)$$

закон гиперболического синуса Надаи (A. Nadai, 1938 г.)

$$\dot{\varepsilon}^c = B \operatorname{sh}(\alpha\sigma). \quad (1.4)$$

Сравнительно новой зависимостью является степенное дробно-линейное соотношение [180]:

$$\dot{\varepsilon}^c = B \left(\frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma} \right)^n, \quad (1.5)$$

где σ_a — напряжение, с которого начинается ползучесть, σ_b — напряжение типа предела прочности, B — скоростная характеристика (ее размерность совпадает с размерностью скоростей деформаций), n — показатель нелинейности.

Эти соотношения соответствуют второму участку кривой ползучести — установившейся ползучести, когда упругими деформациями и деформациями ползучести, накопленными на первой стадии, можно пренебречь. Несмотря на то, что реальные материалы не проявляют чисто нелинейно вязкого поведения, результаты расчетов, полученные на основе модели нелинейно вязкого тела, являются хорошей аппроксимацией действительного поведения металлов и сплавов при высоких температурах.

Дальнейшим обобщением определяющей зависимости (1.1) может служить уравнение

$$\dot{\varepsilon}^c = B(t)f(\sigma), \quad (1.6)$$

содержащее явную зависимость от времени.

Для описания ползучести часто используются уравнения теории старения

$$\varepsilon^c = f(\sigma, t), \quad (1.7)$$

или даже уравнения деформационной теории пластичности

$$\varepsilon^c = f(\sigma). \quad (1.8)$$

Наконец, имеется еще один класс определяющих законов ползучести — законы наследственного типа

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t K(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (1.9)$$

где $K(t - \tau)$ — ядро последдействия.

Основной недостаток приведенных выше определяющих законов ползучести состоит в том, что они, во-первых, не отображают реальный механизм ползучести, а во-вторых, отвечают экспериментальным данным только на сравнительно небольшом интервале времени. Поэтому понятно стремление многих исследователей к поиску определяющих законов ползучести, которые отображали бы физическую природу этого явления.

Рассмотренные выше определяющие законы ползучести в случае сложного напряженного состояния приобретают форму квазилинейных уравнений типа течения

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{f(T)}{T} s_{ij}, \quad (1.10)$$

типа старения

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{f(T, t)}{T} s_{ij}, \quad (1.11)$$

деформационного типа

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{3}{2} \frac{f(T)}{T} s_{ij} \quad (1.12)$$

и наследственного типа

$$\varphi(\Gamma) e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \int_0^t s_{ij}(\tau) K(t - \tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Линейный вариант уравнений (1.13) выражает определяющий закон наследственной упругости (употребляется также термин "линейная вязкоупругость"). Механика наследственно упругих сред изложена в классических монографиях [70], [132].

3.10.2. Инвариантный C^* -интеграл установившейся ползучести

В нелинейной механике разрушения для тел с трещинами в условиях ползучести предложен [272] инвариантный C^* -интеграл. В этой же работе обоснована его инвариантность. Для двумерного случая C^* -интеграл определяется как контурный интеграл по кривой C , охватывающей вершину трещины

$$C^* = \int_C \left[W^* dx_2 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_1} ds \right], \quad (2.1)$$

где

$$W^* = \int \sigma_{ij} d\dot{e}_{ij}.$$

Инвариантный C^* -интеграл может быть определен экспериментально посредством сравнения двух идентичных образцов, с трещиной длины l и $l + dl$. Определяя зависимость нагрузка—скорость перемещения для двух рассматриваемых образцов, C^* -интеграл вычисляется дифференцированием по длине трещины площади под кривой нагрузка—скорость перемещения:

$$C^* = -\frac{\partial}{\partial l} \int \bar{P} d\Delta, \quad (2.2)$$

где \bar{P} — приложенная нагрузка, отнесенная к толщине образца, $\dot{\Delta}$ — скорость перемещения точек приложения нагрузки.

Альтернативно C^* -интеграл может быть вычислен непосредственно по формуле (2.1), его определяющей. Однако это требует знания напряженно-деформированного состояния для рассматриваемой конфигурации образца с трещиной, для чего обычно используется конечно-элементный анализ. Этот подход является особенно продуктивным для степенной зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (2.3)$$

где $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность напряжений; B , n — постоянные материала.

Степенной закон ползучести упрощает описание полей напряжений и скоростей деформаций вследствие "масштабного" свойства данного определяющего соотношения: все компоненты тензора напряжений в любой точке тела возрастают пропорционально приложенной нагрузке, тогда как компоненты тензора скоростей деформаций увеличиваются пропорционально n -ой степени нагрузки. В конфигурациях, симметричных относительно плоскости трещины, удобно ввести напряжение в нетто-сечении σ_{net} , определяемое как нагрузка, отнесенная к площади неповрежденного сечения образца впереди трещины. Тогда "масштабные" свойства могут быть представлены как

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x_k; l, L, P, n) &= \sigma_{\text{net}} \bar{\sigma}_{ij}(x_k/l; l/L, n), \\ \dot{\epsilon}_{ij}(x_k; l, L, P, n, B) &= B \sigma_{\text{net}}^n \bar{\epsilon}_{ij}(x_k/l; l/L, n), \\ \dot{u}_i(x_k; l, L, P, n, B) &= l B \sigma_{\text{net}}^n \bar{u}_i(x_k/l; l/L, n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где L — характерный линейный размер тела, $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$, \bar{u}_i — безразмерные функции, зависящие только от безразмерных параметров l/L и n , но не от нагрузки и материального параметра B . Подставляя последние представления для напряжений, скоростей деформаций и скоростей перемещений в определение C^* -интеграла, можно получить

$$C^* = l B \sigma_{\text{net}}^{n+1} I_n(l/L, n), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} I_n(l/L, n) &= \int_C \left[\bar{W}^* d\bar{x}_2 - \bar{\sigma}_{ij} n_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_1} d\bar{s} \right], \\ \bar{W}^* &= \int \bar{\sigma}_{ij} d\bar{\epsilon}_{ij}, \quad \bar{x}_i = x_i/l, \quad d\bar{s} = ds/l. \end{aligned} \quad (2.6)$$

К настоящему времени накоплены многочисленные оценки интеграла (2.6) для различных конфигураций образцов. Наиболее полная коллекция результатов вычислений собрана в [271]. Следует отметить, что вычисление напряженно-деформированного состояния во всем образце обычно требует использования

метода конечных элементов, тогда как асимптотические поля в окрестности вершины трещины могут быть определены аналитически. Это — так называемое распределение Хатчинсона—Райса—Розенгрена [314] (см. раздел 3.8.1):

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \left(\frac{C^*}{I_n B r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (2.7)$$

Приведенное асимптотическое поле напряжений справедливо для малых расстояний от вершины трещины $r \ll l$. Необходимо отметить, что в силу инвариантности C^* -интеграл может быть вычислен по контуру, расположенному в непосредственной окрестности вершины трещины, и по контуру, удаленному от ее вершины, так что нагрузка и геометрия образца влияют на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины только посредством C^* -интеграла. Следовательно, в нелинейно вязких телах рост трещины описывается C^* -интегралом, что остается справедливым даже при существовании достаточно малой области в окрестности вершины трещины, где поведение материала заведомо отклоняется от закона Нортон.

Описанный подход позволяет охарактеризовать поля напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Однако он не позволяет прогнозировать рост трещины. Понимание причин страгивания трещин, их распространения требует знания микромеханизмов деформирования и разрушения, ведущих к росту трещин.

К настоящему времени предложены многочисленные критерии распространения трещин, определяющие условия страгивания и роста трещин [319], [189], [270]. Например, модель зарождения, роста и слияния пор, согласно которой трещина начинает распространяться и растет с такой скоростью, что на расстоянии d_c впереди трещины выполняется условие слияния пор, или критерий роста, основанный на критическом значении деформации ε_c на заданном расстоянии d_c впереди трещины. Последнее условие ведет к уравнению движения вершины трещины и к степенной зависимости скорости роста трещины от величины C^* -интеграла.

3.10.3. Асимптотика напряжений у вершины стационарной трещины в упруго нелинейно вязком теле

Расширяя рассматриваемую модель на тот случай, когда упругими деформациями пренебрегать нельзя, приходим к упругому нелинейно вязкому материалу с определяющими соотношениями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (3.1)$$

которое в случае одноосного растяжения преобразуется к виду

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B \sigma^n. \quad (3.2)$$

Это соотношение описывает упругое поведение материала для сравнительно коротких времен после приложения нагрузки и установившуюся ползучесть как предельное поведение материала при больших временах после приложения нагрузки.

Инвариантный C^* -интеграл установившейся ползучести может быть обобщен. Результат подобного обобщения — $C(t)$ -интеграл [322].

Рассмотрим стационарную трещину **типа I** в упругом нелинейно вязком теле. Пусть в момент времени $t = 0$ к образцу с трещиной внезапно прикладывается растягивающая нагрузка $P = \text{const}$. Мгновенный отклик упруго нелинейно вязкого тела является чисто упругим и, поле напряжений у вершины трещины в начальный момент времени описывается стандартной упругой асимптотикой

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\varphi) + \dots, \quad (3.3)$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва, функции $\hat{\sigma}_{ij}(\varphi)$ хорошо известны из решения задачи линейной теории упругости для тела с трещиной, приведенного выше, в **2.1.1**.

С течением времени деформации ползучести, возрастающие непрерывно, становятся доминирующими по сравнению с упругими. В предельном случае (для больших времен, прошедших с момента приложения нагрузки) поведение материала чисто нелинейно вязкое. Следовательно, напряжения определяются асимптотическими формулами Хатчинсона—Райса—Розенгрена:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi) = \left(\frac{C^*}{I_n B r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (3.4)$$

Более того, из определяющих соотношений упругого нелинейно вязкого тела можно заключить, что в непосредственной окрестности вершины трещины упругими деформациями можно пренебречь по сравнению с деформациями ползучести для любого $t > 0$ и $n > 1$. Как следствие, можно предположить существование асимптотической зависимости

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = \left(\frac{C(t)}{I_n B r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (3.5)$$

обобщающей распределение Хатчинсона—Райса—Розенгрена на случай произвольного $t > 0$. Значения $C(t)$ остаются неопределенными в рамках асимптотического анализа, однако следует указать, что

$$C(t) \rightarrow C^* \quad (t \rightarrow \infty). \quad (3.6)$$

В работе [318] установлено характерное время перехода от момента приложения нагрузки до возникновения развитых деформаций ползучести

$$t_1 = \frac{\alpha K_I^2 (1 - \nu^2)}{(n + 1) E C^*}, \quad (3.7)$$

где величина α определяется численно. Значение $C(t)$ вычисляется по формуле

$$C(t) = (1 + t_1/t)C^*. \quad (3.8)$$

3.10.4. Автомодельность в задачах о трещинах в упругих нелинейно вязких телах

Для прогнозирования докритического подрастания трещины и оценки скорости ее роста в условиях высокотемпературной ползучести представляется важным анализ полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. С практической точки зрения важно ответить на вопрос: какой из макроскопических параметров в основном определяет скорость роста трещины?¹⁸⁴ В механике разрушения к числу таких параметров относятся коэффициент интенсивности напряжений K_I , напряжение в нетто-сечении σ_{net} , инвариантный интеграл установившейся ползучести C^* , а также скорость раскрытия вершины трещины $\dot{\delta}$.

Этот вопрос особенно интересен для упругих нелинейно вязких материалов, поскольку для коротких времен после приложения нагрузки к телу с трещиной мгновенный отклик материала является чисто упругим и деформации ползучести локализуются в непосредственной окрестности вершины. В этой ситуации для оценки скорости роста может быть использован коэффициент интенсивности напряжений, определяющий упругое поле у вершины трещины. С другой стороны, для достаточно больших времен (но все еще малых по сравнению со временем до разрушения t_f), прошедших с момента приложения нагрузки, деформации ползучести доминируют над упругими. В данном предельном случае естественно применение C^* -интеграла.

В настоящем разделе рассматривается трещина в упругом нелинейно вязком материале и исследуются параметры, которые можно использовать для описания напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины тре-

¹⁸⁴Определению параметров, характеризующих рост трещины в упругих нелинейно вязких материалах, посвящено большое число как теоретических, так и экспериментальных работ. Лишь малая их часть может быть представлена исследованиями [320], [319], [213], [322], [323], [325], [326], [205], [241], [264]. Так в [241] приведен обзор параметров, используемых для описания роста трещин в упругих нелинейно вязких материалах. В случае упругих нелинейно вязких сред только один параметр, например, коэффициент интенсивности напряжений K или J -интеграл, не может использоваться для характеристики скорости роста трещины, поскольку существуют три характерных режима: маломасштабная ползучесть, развитая ползучесть и переходный режим от первого предельного случая ко второму. Переходный режим устанавливается в зависимости от характерного размера области ползучести по сравнению с размерами образца. Исторически первым инвариантным параметром, введенным для случая установившейся ползучести, является C^* -интеграл (см. 3.10.2).

К преимуществам C^* -интеграла относятся: 1) его инвариантность; 2) возможность его экспериментального определения; 3) асимптотика поля напряжений у вершины трещины полностью определяется значением C^* -интеграла. Для случая упругого нелинейно вязкого тела, когда C^* -интеграл утрачивает свойство инвариантности, он обобщается на переходный режим [318] в форме интеграла $C(t)$, так что при развитых деформациях ползучести $C(t) \rightarrow C^*$ (это обобщение собственно и является предметом дискуссии в этой части книги).

Однако интеграл $C(t)$ до сих пор не получил никакой физической интерпретации и не может быть определен экспериментально, что ограничивает его практическое применение. Для того чтобы преодолеть недостатки параметра $C(t)$, в [325] введен параметр C_t . Методы экспериментального определения C_t обсуждаются в [241].

щины, а в случае растущей трещины — для оценки скорости роста трещины. Следует отметить, что определение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины стационарной трещины являлось предметом анализа в **3.10.3**, где по существу используется HRR-асимптотика, полученная с помощью метода разложения по собственным функциям. Причем разложение осуществлялось по степеням переменной r (радиус в полярной системе координат с началом в вершине трещины), а коэффициенты разложения есть функции от полярного угла. Вообще говоря, в процессе ползучести компоненты тензора напряжений — функции трех независимых переменных r, φ, t . Однако в разрешающей системе уравнений слагаемые, содержащие производные по времени, являются величинами более высокого порядка малости при $r \rightarrow 0$ и ими пренебрегают. Вследствие этого в рамках данного подхода не удастся определить зависимость решения от времени: коэффициенты разложения оказываются функциями, зависящими только от полярного угла, но не от времени.

В данном разделе указанный спектр задач исследуется с помощью автомодельных переменных.

Процесс, развивающийся во времени, называется автомодельным, если распределение его характеристик в разные моменты времени получается одно из другого преобразованием подобия [152], [22]. Свойство автомодельности, если его удастся обнаружить, часто существенно упрощает исследование и математическое описание процесса.

В механике разрушения при исследовании стационарного состояния трещины и ее роста в упругом нелинейно вязком теле автомодельность впервые установлена в работах Риделя (Н. Riedel, 1978 г.) [318], [322], [251].

Введение автомодельной переменной упрощает с математической точки зрения поиск решения, поскольку уменьшается число независимых переменных. Более того, введение автомодельной переменной позволяет связать два предельных режима состояния трещины в упругом нелинейно вязком теле: случай коротких времен после приложения нагрузки, когда деформации ползучести локализованы в непосредственной ее окрестности, и случай достаточно больших времен, соответствующий обширным областям, в которых развиваются деформации ползучести.

Таким образом, с физической точки зрения с помощью автомодельной переменной удастся описать переходный период от первого предельного состояния ко второму и получить решение (т.е. распределение напряжений), справедливое в течение переходного режима, а также оценить время перехода.

3.10.4А. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим трещину **типа I** в упругом нелинейно вязком материале, определяющие соотношения которого имеют вид

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (4.1)$$

где $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ — интенсивность напряжений, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, e_{ij} — компоненты девиатора деформаций; μ, B, n — по-

стоянные материала.

Сформулируем разрешающую систему уравнений. Уравнения равновесия при условии отсутствия массовых сил имеют вид

$$\nabla \cdot \sigma = 0. \quad (4.2)$$

Условия совместности деформаций в случае плоской задачи принимают форму

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{e}) = \frac{2}{3} \Delta \varepsilon_{kk} - \Delta \varepsilon_{33}, \quad (4.3)$$

где \mathbf{e} — девиатор тензора малых деформаций.

Как известно, $\varepsilon_{33} = 0$ в случае плоского деформированного состояния и $\sigma_{33} = 0$ для плоского напряженного состояния.

Начальные условия задачи таковы: в момент времени $t = 0$ к телу прикладывается нагрузка и в силу определяющих соотношений (4.1) мгновенный отклик тела — линейно упругий. Поэтому распределение напряжений в теле описывается классическими формулами линейной теории упругости (см. раздел 2.1).

Также необходимо сформулировать условия на берегах трещины $\mathbf{n} \cdot \sigma = 0$. В условиях маломасштабной ползучести трещина может трактоваться как полубесконечная и, следовательно, должны быть заданы некоторые условия в бесконечно удаленной точке — требование асимптотического сближения решения с сингулярным решением линейной теории упругости.

При отыскании полей напряжений и деформаций удобно перейти к функции напряжений Эри Φ (см. также 3.10.5Б, 3.10.5В), что приводит к тождественному выполнению уравнений равновесия.

В случае плоского деформированного состояния имеется единственное уравнение, выражающее совместность деформаций, и условие $\dot{\varepsilon}_{33} = 0$:

$$\begin{aligned} 2 \frac{1-\nu}{E} \Delta (\Delta \dot{\Phi} + \dot{s}_{33}) - \\ - B \nabla \cdot \{ \nabla \cdot [(\mathbf{I}(\Delta \Phi - s_{33}) - 2 \nabla \otimes (\nabla \Phi)) \sigma_e^{n-1}] \} = 0, \\ \left(\frac{1-2\nu}{3E} \Delta \dot{\Phi} + \frac{1}{E} \dot{s}_{33} \right) + B s_{33} \sigma_e^{n-1} = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где \mathbf{I} — двумерный единичный тензор; интенсивность напряжений определяется выражением

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2((\nabla \otimes \nabla \Phi) : (\nabla \otimes \nabla \Phi)) - (\Delta \Phi)^2 + 3s_{33}^2}. \quad (4.5)$$

Для плоского напряженного состояния уравнения совместности приводят к единственному уравнению относительно функции напряжений Эри:

$$\frac{2}{E} \Delta^2 \dot{\Phi} - B \nabla \cdot \{ \nabla \cdot [(\mathbf{I} \Delta \Phi - 3 \nabla \otimes (\nabla \Phi)) \sigma_e^{n-1}] \} = 0, \quad (4.6)$$

где интенсивность напряжений определяется выражением

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3((\nabla \otimes \nabla \Phi) : (\nabla \otimes \nabla \Phi)) - (\Delta \Phi)^2}. \quad (4.7)$$

Уравнения (4.4) и (4.6) относительно функции напряжений Φ представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, причем функция напряжений есть функция трех независимых переменных $\Phi = \Phi(r, \theta, t)$.

Вследствие сложности полученных уравнений нельзя ожидать в общем случае построения аналитических решений. С другой стороны, при реализации численных методов также возникают проблемы, связанные с быстрым перераспределением полей напряжений у вершины трещины в упругом нелинейно вязком материале. В связи с этим повышается ценность асимптотического решения задачи.

В непосредственной окрестности вершины стационарной трещины ($r \rightarrow 0$) скоростями упругих деформаций можно пренебречь по сравнению со скоростями деформаций ползучести при $n > 1$ в случае степенной зависимости скоростей деформаций ползучести от напряжений.¹⁸⁵ Действительно, поскольку n для большинства материалов изменяется от 3 до 12, то скорости деформаций ползучести, которые пропорциональны σ_e^n , в окрестности вершины трещины, где $\sigma_e \sim r^\alpha$ ($\alpha < 0$), много больше, чем скорости упругих деформаций, которые пропорциональны $\dot{\sigma}_e$. Поэтому линейными слагаемыми в уравнениях (4.4) и (4.6) можно пренебречь, что приводит к решению HRR и асимптотике

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = A(t) \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n) r^{-1/(n+1)}. \quad (4.8)$$

Скорости деформаций ползучести имеют особенность типа $r^{-n/(n+1)}$. Амплитуда $A(t)$ есть функция времени. Амплитуда не может быть непосредственно определена из асимптотического анализа в окрестности вершины трещины. Однако в предельном случае обширных деформаций ползучести (т.е. когда нельзя считать ползучесть маломасштабной) амплитуда $A(t)$ выражается через инвариантный интеграл установившейся ползучести C^* -интеграл:

$$A(t \rightarrow \infty) = \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{1/(n+1)}. \quad (4.9)$$

3.10.4Б. Маломасштабная ползучесть

Пусть область развития деформаций ползучести мала по сравнению с длиной трещины, характерным линейным размером образца. В этом случае говорят о маломасштабной ползучести. Такая ситуация реализуется для коротких времен после приложения нагрузки.

Отметим, что компоненты тензора напряжений σ_{ij} являются функциями следующего множества независимых переменных и материальных параметров

$$r, \theta, t, K_I, E, B, \nu, n. \quad (4.10)$$

¹⁸⁵Отметим, что в случае $n = 1$ скорости деформаций ползучести и скорости упругих деформаций имеют одинаковую особенность при $r \rightarrow 0$ и, следовательно, последними пренебрегать нельзя.

Из уравнений (4.4) и (4.6) следует, что параметры E , B , t могут входить в решение только в качестве произведения EBt . Анализ размерностей рассматриваемых величин показывает, что комбинация $(EBt)^{-1/(n-1)}$ имеет размерность напряжения. Поэтому из традиционного анализа размерностей для напряжений можно заключить, что

$$\sigma_{ij}(r, \theta, t) = (EBt)^{-1/(n-1)} F \left[(EBt)^{-2/(n-1)} r / K_I^2, \theta, n, \nu \right], \quad (4.11)$$

где F — безразмерная функция безразмерных аргументов.

Таким образом, число независимых переменных уменьшается вследствие введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r}{K_I^2 (EBt)^{2/(n-1)}}. \quad (4.12)$$

3.10.4В. Автомодельное решение

В случае плоского деформированного состояния функция напряжений Эри Φ и компонента девиатора напряжений s_{33} , удовлетворяющие уравнению (4.4), а также начальным и граничным условиям задачи, должны иметь вид

$$\Phi(r, \theta, t) = \frac{E}{1-\nu} \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\frac{(1-\nu)K_I}{E} \right]^4 \phi(R, \theta) T^{3/(n-1)} \quad (4.13)$$

$$s_{33}(r, \theta, t) = \frac{E}{1-\nu} S_{33}(R, \theta) T^{-1/(n-1)}. \quad (4.14)$$

Безразмерные время и радиальная координата определяются выражениями

$$T = \frac{n-1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu} \right)^n Bt, \quad R = \frac{2\pi E^2 r}{(1-\nu)^2 K_I^2 T^{2/(n-1)}}. \quad (4.15)$$

Безразмерные функции $\phi(R, \theta)$ и $S_{33}(R, \theta)$ находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} & -2\Delta \left(\frac{1}{2} + R \frac{\partial}{\partial R} \right) (\Delta \phi + S_{33}) + \\ & + \nabla \cdot \left\{ \nabla \cdot \left[(2\nabla \otimes (\nabla \phi) - \mathbf{I}(\Delta \phi - S_{33})) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left(\frac{3}{2} ((\nabla \otimes \nabla \phi) : (\nabla \otimes \nabla \phi)) - \frac{3}{4} (\Delta \phi)^2 + \frac{9}{4} S_{33}^2 \right)^{(n-1)/2} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2} + R \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{(1-2\nu)\Delta \phi + 3S_{33}}{3(1-\nu)} + \\ & + S_{33} \left[\frac{3}{2} ((\nabla \otimes \nabla \phi) : (\nabla \otimes \nabla \phi)) - \frac{3}{4} (\Delta \phi)^2 + \frac{9}{4} S_{33}^2 \right]^{(n-1)/2} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В случае плоского напряженного состояния представление для функции напряжений Эри (4.13) посредством безразмерных переменных (4.15) остается справедливым, однако множитель $1 - \nu$ везде должен быть заменен единицей.

Таким образом, дифференциальное уравнение в частных производных (4.6) для функции напряжений, выраженной через автомодельную переменную R , принимает форму

$$\begin{aligned} -2\Delta \left(\frac{1}{2} + R \frac{\partial}{\partial R} \right) \Delta \phi + \nabla \cdot \left\{ \nabla \cdot \left[(3\nabla \otimes (\nabla \phi) - \mathbf{I} \Delta \phi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{3}{2} ((\nabla \otimes \nabla \phi) : (\nabla \otimes \nabla \phi)) - \frac{1}{2} (\Delta \phi)^2 \right)^{(n-1)/2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Граничное условие в бесконечно удаленной точке есть условие асимптотического сближения с упругим решением. В безразмерных переменных это условие принимает форму

$$\phi(R \rightarrow \infty) = \frac{4}{3} R^{3/2} \cos^3 \frac{\theta}{2}. \quad (4.19)$$

Для плоского деформированного состояния следует добавить граничное условие в бесконечно удаленной точке для компоненты S_{33} девиатора напряжений

$$S_{33}(R \rightarrow \infty) = -\frac{2}{3}(1 - 2\nu)R^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (4.20)$$

Примем, что решения уравнений (4.16) и (4.18) определены численно с учетом граничных условий на берегах трещины. Тогда напряжения вычисляются посредством формулы

$$\sigma_{ij}(R, \theta, T) = \frac{E}{1 - \nu} T^{-1/(n-1)} \Sigma_{ij}(R, \theta), \quad (4.21)$$

где $\Sigma_{ij}(R, \theta)$ восстанавливается по решению уравнения (4.16) (или (4.18) в случае плоского напряженного состояния).

Характерной особенностью данного решения является то, что, как это следует из формулы (4.8), компоненты Σ_{ij} при $R \rightarrow 0$ имеют асимптотику вида $R^{-1/(n+1)}$.

Упругие деформации ε_{ij}^e вычисляются с помощью (4.21) и закона Гука.

Деформации ползучести ε_{ij}^c также могут быть выражены посредством функций Σ_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}^c = T^{-1/(n-1)} E_{ij}^c(R, \theta), \quad (4.22)$$

где

$$E_{ij}^c(R, \theta) = \frac{3}{2\sqrt{R}} \int_R^\infty S_{ij} \left(\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl} \right)^{(n-1)/2} \frac{dR}{\sqrt{R}}. \quad (4.23)$$

Полная деформация вычисляется по формуле $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^c$.

Следуя [318], приведем качественное описание полей напряжений и деформаций в условиях маломасштабной ползучести, когда область ползучести мала по сравнению с длиной трещины. Применяя (4.8) и (4.21), можно определить зависимость напряжений от r и t поля HRR в непосредственной окрестности вершины трещины:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \alpha_n \left[\frac{nK_I^2}{\pi(n+1)^2 EB} \right]^{1/(n+1)} (rt)^{-1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta), \\ e_{ij} &= \frac{3}{2} B(n+1) \alpha_n^n \left[\frac{nK_I^2}{\pi(n+1)^2 EB} \right]^{n/(n+1)} [\tilde{\sigma}_e(\theta)]^{n-1} \frac{t^{1/(n+1)}}{r^{n/(n+1)}} \tilde{e}_{ij}(\theta).\end{aligned}\quad (4.24)$$

Таким образом, известны асимптотика вблизи вершины трещины (4.24) и в бесконечно удаленной точке (решение линейной теории упругости).

Сравним два решения: решение HRR в непосредственной окрестности вершины трещины и решение линейной механики разрушения, предполагая, что существует геометрическое место точек $r = r_1(\theta, t)$, определяемое путем приравнивания интенсивности напряжений удаленного упругого решения и интенсивности напряжений решения HRR (4.24). Это определение ведет к следующей оценке геометрии области, в которой справедливо решение HRR:

$$r_1(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{E} \right)^2 \left[\frac{(n+1)^2 E^n B t}{2n\alpha_n^{n+1}} \right]^{2/(n-1)} F_1(\theta) \quad (4.25)$$

с угловым распределением

$$F_1(\theta) = \left\{ \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]}{[\tilde{\sigma}_e(\theta)]^2} \right\}^{(n+1)/(n-1)}. \quad (4.26)$$

В случае плоского напряженного состояния множитель $1-2\nu$ следует заменить единицей.

Геометрия области локализации области деформаций ползучести может быть получена сращиванием интенсивности деформаций ползучести, определяемой по распределению HRR и интенсивности упругих деформаций, что приводит к выражению

$$r_c(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{E} \right)^2 \left[\frac{(n+1)^2 E^n B t}{2n\alpha_n^{n+1}} \right]^{2/(n-1)} F_c(\theta). \quad (4.27)$$

В соответствии с формулой (4.27), зона ползучести расширяется с течением времени как $t^{2/(n-1)}$. Угловые функции $F_1(\theta)$ и $F_c(\theta)$ найдены в [318], там же приведены графики, иллюстрирующие поведение данных функции для различных значений показателя нелинейности n .

Необходимо отметить, что множитель α_n является неопределенным и может быть найден лишь в ходе решения уравнений (4.16) и (4.18) при выполнении требований отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины (амплитуда сингулярного поля напряжений есть часть численного решения задачи). Однако можно оценить величину α_n с помощью не зависящего от контура интегрирования J -интеграла. Вообще говоря, J -интеграл не является инвариантным в задачах теории ползучести для определяющих соотношений вида (4.1). Однако можно предположить, что в непосредственной окрестности вершины трещины, где локализованы деформации ползучести, упругими деформациями можно пренебречь и решение HRR является хорошей аппроксимацией реального распределения напряжений вблизи вершины при $r \rightarrow 0$. Следовательно, можно потребовать инвариантность J -интеграла, что в свою очередь выполняется при существовании единой зависимости $W = W(\varepsilon_{ij})$, где W — объемная плотность энергии деформаций ползучести. Для найденных полей напряжений и деформаций (4.24) такая зависимость будет существовать, если положить (и это действительно следует из автомодельного решения (4.24))

$$e_{ij} = \frac{3}{2} B(n+1) t \sigma_e^{n-1} s_{ij}. \quad (4.28)$$

Для зависимости (4.28) значение J -интеграла вычисляется по формуле

$$J_0 = (n+1) B t I_n [A(t)]^{n+1} \quad (4.29)$$

(инвариантный интеграл вычислен по контуру, расположенному в зоне ползучести).

Значение не зависящего J -интеграла по контуру, удаленному от вершины трещины и, следовательно, расположенному в упругой зоне, хорошо известно

$$J_\infty = \begin{cases} K^2(1-\nu^2)/E & \text{(плоское деформированное состояние),} \\ K^2/E & \text{(плоское напряженное состояние).} \end{cases} \quad (4.30)$$

Предполагая приближенную независимость J -интеграла от пути ($J_0 \approx J_\infty$), можно получить

$$A(t) \approx \left[\frac{K_I^2(1-\nu^2)}{(n+1) B I_n t E} \right]^{1/(n+1)} \quad (4.31)$$

и в соответствии с (4.8) и (4.24) множитель α_n вычисляется как

$$\alpha_n \approx \left[\frac{n+1}{n} \frac{\pi(1-\nu^2)}{I_n} \right]^{1/(n+1)}. \quad (4.32)$$

Для случая плоского напряженного состояния необходимо заменить множитель $1-\nu^2$ единицей.

Из представленного анализа следует, что коэффициент интенсивности напряжений K_I и C^* -интеграл характеризуют поле напряжений в двух предельных случаях: маломасштабная ползучесть (случай коротких времен после приложения нагрузки) и развитая ползучесть (большие времена после приложения нагрузки). С практической точки зрения важно знать характерное время перехода от одного предельного случая до другого.

Сначала, в качестве примера, оценим продолжительность инкубационного периода (характерное время от момента приложения нагрузки к образцу с трещиной до ее страгивания). Предполагается, что трещина начинает расти как только интенсивность деформаций достигает своего критического значения ε_c на заданном расстоянии r_c от вершины трещины. Время до начала роста трещины вычисляется посредством второго соотношения из группы формул (4.24):

$$t_i = \varepsilon_c^{n+1} \frac{1}{E^n B(n+1)} \left[\frac{n+1}{2n\alpha_n^{n+1}} \frac{2\pi E^2 r_c}{K_I^2} \right]^n. \quad (4.33)$$

Если наблюдается развитая ползучесть, то деформации определяются путем подстановки (4.8) и (4.9) в (4.1). В этом случае время инкубационного периода зависит от C^* -интеграла:

$$t_i = \varepsilon_c B^{-1/(n+1)} \left[\frac{I_n r_c}{C^*} \right]^{n/(n+1)}. \quad (4.34)$$

Характерное время переходного режима t_1 ($t_1 \ll t_f$) может быть определено аналитически:

$$t_1 = \frac{K_I^2(1-\nu^2)}{(n+1)C^*E}. \quad (4.35)$$

К этому результату приводит сравнение соотношений (4.9) и (4.24).

Таким образом, в [318] получено поле напряжений в окрестности вершины трещины в упругом нелинейно вязком материале:

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow 0, \theta, t) = \left(\frac{C(t)}{BI_n r} \right) \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n). \quad (4.36)$$

Вслед за [318] отметим ограничения, в рамках которых проведено данное исследование.

Предполагалось, что рассматриваемый материал является упругим нелинейно вязким, причем в качестве определяющих соотношений выбран степенной закон установившейся ползучести, тогда как деформациями ползучести, накопленными на первой стадии, пренебрегают.

Данная теория изучает лишь два предельных случая: локализованную и развитую ползучесть, а соотношение (4.36) интерполирует два предельных случая на переходный период.

3.10.5. Асимптотическое исследование полей напряжений и деформаций у вершины растущей в условиях ползучести трещины

Рост трещин в условиях ползучести является предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований. Интерпретация экспериментальных наблюдений требует анализа полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Поэтому задача определения напряженно-деформированного состояния в окрестности стационарной и растущей вершин трещин в различных материалах была и остается актуальной проблемой. Так, стали уже классическими результатами механики разрушения асимптотики полей напряжений и деформаций у кончика трещины в линейно упругом теле и решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена для нелинейно упругого материала со степенным законом, связывающим деформации и напряжения. Хорошо известно, что и в теории пластичности для упрочняющихся по степенному закону упругопластических тел для полей напряжений и скоростей деформаций вблизи вершины покоящейся трещины также имеет место асимптотика Хатчинсона—Райса—Розенгрена. В теории установившейся ползучести для степенных определяющих соотношений вновь справедлива асимптотика $n > 1$

$$\sigma_{ij} \sim r^{-1/(n+1)}, \dot{\epsilon}_{ij} \sim r^{-n/(n+1)}.$$

Также установлено [317], что для упругих нелинейно вязких материалов с определяющим соотношением вида

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_e}{E} + B\sigma_e^n \quad (5.1)$$

у вершины неподвижной трещины справедливо решение Хатчинсона—Райса—Розенгрена и, следовательно, скоростями упругих деформаций можно пренебречь по сравнению со скоростями деформаций ползучести при $n > 1$.

Ситуация принципиально меняется в случае растущей трещины, когда скорости упругих деформаций сравнимы со скоростями деформаций ползучести [250]. Остановимся на изучении установившегося роста трещины более подробно, следуя [250].

3.10.5А. Антиплоский сдвиг растущей полубесконечной трещины в упруго нелинейно вязком теле

Рассмотрим асимптотики полей напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины растущей с постоянной скоростью полубесконечной трещины антиплоского сдвига в теле, определяющие соотношения которого имеют вид

$$\dot{\gamma}_s = \frac{\dot{\tau}_s}{G} + \bar{B}\tau_s^{n-1}\tau_s, \quad (5.2)$$

или для интенсивностей касательных напряжений и скоростей деформации сдвига —

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + B\tau^n, \quad (5.3)$$

где $\overline{B} = 3^{(n+1)/2}B$, символический индекс $s = 1, 2$ в декартовой и $-s = r, \varphi$ в полярной системе координат.

Уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ (где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательного напряжения с компонентами τ_s) тождественно выполняется, если ввести функцию напряжений:

$$\tau_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \tau_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad (5.4)$$

или в полярной системе координат

$$\tau_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \tau_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (5.5)$$

В случае установившегося роста трещины производная по времени от функции напряжений определяется выражением

$$\dot{\Phi} = -\dot{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad (5.6)$$

где \dot{l} — скорость роста трещины (постоянная величина в случае установившегося роста), x_1, x_2 — подвижная система координат, начало которой движется вместе с вершиной трещины со скоростью \dot{l} .

Исключая из условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций,

$$\frac{\partial \dot{\gamma}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{\gamma}_2}{\partial x_1} = 0 \quad (5.7)$$

с помощью определяющих соотношений (5.2) скорости деформаций и учитывая (5.4), можно получить одно нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для функции напряжений $\Phi(x_1, x_2)$:

$$-\frac{\dot{l}}{G} \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \overline{B} \nabla \cdot (\tau^{n-1} \nabla \Phi) = 0, \quad (5.8)$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\tau = |\nabla \Phi|$.

Условие отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(r, \varphi = \pm \pi)}{\partial r} = 0. \quad (5.9)$$

В случае стационарной трещины в упругом нелинейно вязком материале скорости деформаций ползучести превалируют над скоростями упругих деформаций и поэтому последними пренебрегают. Вследствие этого напряжения у вершины трещины имеют особенность решения HRR: $\tau \sim r^{-1/(n+1)}$, $\Phi \sim r^{n/(n+1)}$.

Покажем, что скорости упругих деформаций в случае растущей трещины при $r \rightarrow 0$ сравнимы со скоростями деформаций ползучести и ими нельзя пренебрегать.

Действительно, предположим, что нелинейное слагаемое в определяющем соотношении (5.2) является доминирующим, что необходимо влечет за собой асимптотику HRR, для которой $\Phi \sim r^{n/(n+1)}$. Подставляя $\Phi \sim r^{n/(n+1)}$ в (5.8), можно найти, что первое слагаемое (скорости упругих деформаций) имеет особенность ($r \rightarrow 0$) типа $\dot{l}r^{-(2n+3)/(n+1)}$, тогда как второе слагаемое (скорости деформаций ползучести) имеет особенность вида $\bar{B}r^{-(2n+1)/(n+1)}$. Более сильная особенность линейного слагаемого приводит к противоречию с принятым предположением о преобладании скоростей деформаций ползучести.

Предположим, что скорости упругих деформаций доминируют в окрестности вершины трещины. Данное предположение ведет к классической асимптотике для линейно упругого тела $\tau \sim r^{-1/2}$. В этом случае линейное слагаемое уравнения (5.8) будет порядка $\dot{l}r^{-5/2}$, тогда как нелинейное слагаемое ведет себя как $\bar{B}r^{-(n+2)/2}$. Если $n < 3$, линейное слагаемое имеет более сильную особенность по сравнению с нелинейным. Это не приводит к противоречию с принятым предположением. Однако для $n > 3$ более сильную особенность имеют скорости деформаций ползучести. Следовательно, для $n > 3$ линейное и нелинейное слагаемые вносят одинаковый вклад в результирующую скорость деформаций. Таким образом, скоростями упругих деформаций нельзя пренебрегать при $r \rightarrow 0$ и $n > 3$.

Для $n < 3$ функция напряжений Φ определяется равенством

$$\Phi = A\sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (5.10)$$

Для $n \geq 3$ решение будет иным. Поскольку скорости упругих деформаций и деформаций ползучести вместе определяют асимптотику скоростей деформаций, то полагая

$$\Phi \sim r^\alpha f(\varphi, n) \quad (5.11)$$

и приравнявая степени линейного и нелинейного слагаемых в уравнении (5.8), можно найти

$$\alpha = (n - 2)/(n - 1) \quad (5.12)$$

и, следовательно, асимптотическое решение задачи следует разыскивать в виде (С. Y. Hui, Н. Riedel, 1981)

$$\Phi(r, \varphi) = \left(\frac{\dot{l}}{BG} \right)^{1/(n-1)} r^\alpha f(\varphi, n), \quad (5.13)$$

где r, φ — полярные координаты (напомним, что начало полярной системы координат движется вместе с вершиной трещины).

Безразмерная функция $f(\varphi, n)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка, следующему из уравнения (5.8)

$$f''' \sin \varphi + (2 - \alpha)f'' \cos \varphi + \alpha^2 f' \sin \varphi + \alpha^2 (2 - \alpha)f \cos \varphi + \\ + (\alpha^2 f^2 + f'^2)^{(n-3)/2} \left[f'' (\alpha^2 f^2 + n f'^2) + \alpha f f'^2 (1 + 2n\alpha - \alpha - n) + \right. \\ \left. + \alpha^3 f^3 (1 + \alpha n - n) \right] = 0, \quad (5.14)$$

где штрих означает производную по полярному углу φ .¹⁸⁶

Уравнение (5.14) должно быть решено с учетом условия отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины

$$f(\pi, n) = 0, \quad (5.15)$$

условия симметрии

$$f'(0, n) = 0, \quad (5.16)$$

и требованием отсутствия сингулярности у функции $f(\varphi, n)$ (условие регулярности функции $f(\varphi, n)$) при $\varphi = 0$:

$$f''(0, n) = \alpha f(0, n) \frac{n\alpha - (\alpha f(0, n))^{n-1}}{n + (n-1)(\alpha f(0, n))^{n-1}}. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.14) вместе с граничными условиями (5.15)–(5.17) полностью определяет функцию $f(\varphi, n)$.

Таким образом, функция напряжений $\Phi(r, \varphi)$ определяется посредством (5.13) единственным образом. Из (5.13) следует, что главный член асимптотических разложений напряжений и скоростей деформаций не зависит от приложенной нагрузки и полностью определяется скоростью роста трещины \dot{l} .

Для решения уравнения (5.14) с граничными условиями (5.15)–(5.17) был использован метод пристрелки. Подбирались пробные значения для $f(0, n)$ с целью удовлетворения граничного условия на берегу трещины.

Для $n \geq 3$ главный член асимптотического разложения для напряжений представляется как:

$$\tau_s(r, \varphi) = \beta_n \left(\frac{\dot{l}}{\overline{BGr}} \right)^{1/(n-1)} \bar{\tau}_s(\varphi, n), \\ \tau(r, \varphi) = \beta_n \left(\frac{\dot{l}}{\overline{BGr}} \right)^{1/(n-1)} \bar{\tau}(\varphi, n), \quad (5.18)$$

где $\beta_n = \alpha f(0, n)$.

¹⁸⁶Уравнение (5.14) является сингулярно возмущенным в окрестности $\varphi = 0$, поскольку множитель при старшей производной обращается в нуль при $\varphi = 0$.

Значения β_n были получены для значений показателя n в диапазоне $3 \leq n \leq 1000$. Численные результаты могут быть аппроксимированы с точностью 0,2% соотношением $\beta_n = [0.29(n-3)]^{1/(n-1)}$.

Таким образом, напряжения имеют при $r \rightarrow 0$ особенность вида $r^{-1/(n-1)}$ вместо $r^{-1/(n+1)}$ для стационарной трещины. Безразмерные функции $\bar{\tau}_s(\varphi)$ связаны с $f(\varphi, n)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_r(\varphi) &= -f'(\varphi, n)/\beta_n, & \bar{\tau}_\varphi(\varphi) &= \alpha f(\varphi, n)/\beta_n, \\ \bar{\tau}_e(\varphi) &= (f'^2 + \alpha^2 f^2)^{1/2}/\beta_n.\end{aligned}\tag{5.19}$$

В [250] представлены графики функций $\bar{\tau}_s$ для различных значений n . Установлено, что результаты для $n = 100, 300, 500, 1000$ сходятся к некоторым предельным значениям, соответствующим случаю $n \rightarrow \infty$, что в свою очередь соответствует идеально пластическому материалу. Установившийся рост трещины в идеально пластическом материале был исследован ранее [203]. В [250] отмечается, что результаты для идеально пластического материала, полученные в [203] и в рассматриваемом анализе, для больших n должны совпадать, однако этого не происходит. Тем не менее качественно кривые, иллюстрирующие поведение функций $\bar{\tau}_s$, подобны полученным непосредственно для идеально пластического материала.

3.10.5Б. Растущая трещина типа I в упруго нелинейно вязком теле (плоское напряженное состояние)

Рассмотрим неограниченную плоскость, находящуюся под действием растягивающей нагрузки, с полубесконечной трещиной в упруго нелинейно вязком теле, определяющие соотношения которого принимаются в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}.\tag{5.20}$$

Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, если ввести функцию напряжений Эри так, что

$$\sigma_{ij} = -\partial_i \partial_j \Phi + \delta_{ij} \Delta \Phi \quad (i, j = 1, 2),\tag{5.21}$$

или в полярной системе координат

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{\Phi}{r} \right).\tag{5.22}$$

Условие совместности деформаций в терминах функции напряжений Φ представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных пятого порядка

$$\frac{2\dot{l}}{E} \Delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + B \partial_i \partial_j (\delta_{ij} \Delta \Phi - 3 \partial_i \partial_j \Phi) \left[\frac{3}{2} (\partial_k \partial_l \Phi)^2 - \frac{1}{2} (\Delta \Phi)^2 \right]^{(n-1)/2} = 0.\tag{5.23}$$

Здесь использована следующая сокращенная запись:

$$(\partial_k \partial_l \Phi)^2 = (\partial_k \partial_l \Phi)(\partial_k \partial_l \Phi)$$

для суммы квадратов всех возможных вторых частных производных от функции напряжений.

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины задаются известными соотношениями

$$\frac{\partial^2 \Phi(r, \varphi = \pm \pi)}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(r, \varphi = \pm \pi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.24)$$

Как и в случае антиплоского сдвига, асимптотическое решение в окрестности вершины трещины для $n \geq 3$ разыскивается в виде¹⁸⁷

$$\Phi(r, \varphi, t) = \left(\frac{\dot{l}(t)}{EB} \right)^{1/(n-1)} r^\alpha f(\varphi, n). \quad (5.25)$$

Показатели асимптотик линейного и нелинейного слагаемых в уравнении (5.23) будут совпадать, если

$$\alpha = (2n - 3)/(n - 1). \quad (5.26)$$

Подставляя (5.25) в (5.23), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\varphi, n)$:

$$2L[f] - \{n(\alpha - 2)[q_2 + (n\alpha - 2n + 1)q_1] - q_2'' - 6(n\alpha - 2n + 1)q_3'\} = 0, \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} L[f] &= (4 - \alpha)k(\varphi) \cos \varphi + k'(\varphi) \sin \varphi, \\ k(\varphi) &= f'''' + 2(\alpha^2 + 2)f'' + \alpha^2(\alpha - 2)^2 f, \\ p(\varphi) &= \left\{ \left[f'' + \frac{\alpha}{2}(3 - \alpha)f \right]^2 + 3(\alpha - 1)^2 \left[f'^2 + \left(\frac{\alpha f}{2} \right)^2 \right] \right\}^{(n-1)/2}, \\ q_1(\varphi) &= p(\varphi) [f'' + \alpha(3 - 2\alpha)f], \\ q_2(\varphi) &= p(\varphi) [2f'' + \alpha(3 - \alpha)f], \\ q_3(\varphi) &= (\alpha - 1)p(\varphi)f'. \end{aligned} \quad (5.28)$$

¹⁸⁷Отметим, что в случае неустойчившегося роста трещины полная производная по времени в движущейся системе координат x_1, x_2 , начало которой находится в вершине трещины и движется вместе с трещиной, вычисляется по формуле

$$\dot{\Phi} = -\dot{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Если в последнее выражение подставить асимптотическое разложение для функции напряжений (5.13), то можно заключить, что второе слагаемое есть величина более высокого порядка малости при $r \rightarrow 0$ по сравнению с первым. Поэтому изложенные в разделе 3.10.5А результаты для трещины антиплоского сдвига справедливы и для неустойчившегося роста трещины, и в дальнейшем можно полагать, что $\dot{l} = \dot{l}(t)$, т.е. рост трещины — неустойчившийся.

Следует отметить, что дифференциальный оператор $L[f]$ является линейным дифференциальным оператором пятого порядка.

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (5.27) должно быть проинтегрировано с учетом следующих граничных условий на берегах трещины и условий симметрии на ее продолжении:

$$f'(\pi, n) = 0, \quad f(\pi, n) = 0, \quad f'(0, n) = 0, \quad f'''(0, n) = 0. \quad (5.29)$$

Вновь, как и в случае антиплоского сдвига, необходимо сформулировать условие регулярности решения при $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} -2(3 - \alpha)k(0) + \{n(\alpha - 1)[q_2(0) + (n\alpha - n - 1)q_1(0)] - \\ - q_2''(0) - 6(n\alpha - n - 1)q_3'(0)\} = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Численное решение уравнения (5.27) вместе с граничными условиями (5.29), (5.30) строилось методом Рунге—Кутта в сочетании с методом пристрелки: подбирались пробные значения $f(0, n)$ и $f''(0, n)$ с тем, чтобы выполнялись граничные условия на берегу трещины.

Для компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений справедливы формулы

$$\sigma_{ij} = \beta_n \left(\frac{\dot{l}(t)}{BEr} \right)^{1/(n-1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad \sigma_e = \beta_n \left(\frac{\dot{l}(t)}{BEr} \right)^{1/(n-1)} \bar{\sigma}_e(\varphi, n), \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_n \bar{\sigma}_{rr}(\varphi) = \alpha f(\varphi, n) + f''(\varphi, n), \quad \beta_n \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\varphi) = \alpha(\alpha - 1)f(\varphi, n), \\ \beta_n \bar{\sigma}_{r\varphi}(\varphi) = -(\alpha - 1)f'(\varphi, n), \quad \bar{\sigma}_e(\varphi) = \sqrt{\bar{\sigma}_{rr}^2 + \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^2 - \bar{\sigma}_{rr}^2 \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^2 + 3\bar{\sigma}_{r\varphi}^2}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Графики, иллюстрирующие угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивностей напряжений для различных показателей n , приведены в [250].

Таким образом, компоненты тензора напряжений имеют при $r \rightarrow 0$ особенность вида $r^{-1/(n-1)}$, как и в случае антиплоского сдвига.

3.10.5В. Растущая трещина типа I в упруго нелинейно вязком теле (плоское деформированное состояние)

Рассмотрим плоское деформированное состояние пространства с растущей полубесконечной трещиной нормального отрыва в упругом нелинейно вязком теле, определяющие соотношения которого имеют вид (5.20).

Вводя функцию напряжений Эри и учитывая, что $s_{33} = 0$ для случая плоского деформированного состояния, можно получить нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\dot{l}}{E} \Delta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + B \partial_i \partial_j (\delta_{ij} \Delta \Phi - 2 \partial_i \partial_j \Phi) \left[\frac{3}{2} (\partial_k \partial_l \Phi)^2 - \frac{3}{4} (\Delta \Phi)^2 \right]^{(n-1)/2} = 0. \quad (5.33)$$

Граничные условия (5.24) остаются прежними. Полагая, что функция напряжений представляется в форме (5.25), где α определяется выражением (5.26), получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f(\varphi, n)$:

$$2L[f] - [n(\alpha - 2)(n\alpha - 2n + 2)q_1 - q_1'' - 4(n\alpha - 2n + 1)q_3'] = 0, \quad (5.34)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(\varphi) &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n-1)/2} [f'' + \alpha(2 - \alpha)] p(\varphi), \\ q_3(\varphi) &= (\alpha - 1)f'p(\varphi), \\ p(\varphi) &= \left\{ [f'' + \alpha(2 - \alpha)f]^2 + 4(\alpha - 1)^2 f'^2 \right\}^{(n-1)/2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Дифференциальное уравнение (5.34) вместе с граничными условиями (5.29) и соответствующим условием регулярности интегрировалось численно методом Рунге—Кутты в сочетании с методом пристрелки. Напряжения находятся по формулам (5.31), за исключением интенсивности напряжений, определяемой соотношением

$$\bar{\sigma}_e(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\bar{\sigma}_{rr}^2 - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^2)^2 + 4\bar{\sigma}_{r\varphi}^2}. \quad (5.36)$$

В [250] приведены угловые распределения безразмерных функций $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$, $\bar{\sigma}_{r\varphi}$ для различных значений показателя n . Так, было найдено, что $\beta_4 = 1.042$ и $\beta_6 = 1.237$.

В заключение следует отметить, что:

1) Скорости упругих деформаций существенны в окрестности растущей трещины и обладают такой же особенностью, что и скорости деформаций ползучести. Найден новый тип асимптотики полей напряжений и скоростей деформаций: $\sigma_{ij} \sim r^{-1/(n-1)}$, $\dot{\epsilon}_{ij} \sim r^{-n/(n-1)}$;

2) Главные члены асимптотических разложений компонент тензора напряжений и скоростей деформаций явно не зависят от приложенной нагрузки и, следовательно, любой критерий роста трещины, включающий комбинации коэффициентов главных членов асимптотик напряжений и скоростей деформаций, будет вести к скорости распространения трещины, не зависящей от приложенной нагрузки, что противоречит экспериментальным наблюдениям.

Данное противоречие может быть объяснено несколькими путями, один из которых — предположение о зависимости от приложенной нагрузки следующего несингулярного слагаемого асимптотических разложений (аналогичное предположение использовано, например, в [315]).

3.11. Трещины в средах с дробно-линейным определяющим законом

3.11.1. Предварительные замечания

В теории ползучести большое внимание уделяется как построению общих соотношений для неупругих сред, так и выбору конкретных определяющих зависимостей. Проблема состоит в том, чтобы определяющие уравнения не только достаточно хорошо описывали наблюдаемые в экспериментах явления, но и были удобны при практическом использовании в расчетах. В теории ползучести существует несколько подходов построения общих соотношений. Одним из наиболее развитых подходов является теория механического уравнения состояния, развитая в монографии Ю. Н. Работнова [130]. В этом варианте теории ползучести скорость деформации ползучести выражается в явном виде как функция напряжения, температуры и параметров, характеризующих структурные особенности материалов.

Проведенный в [180] анализ большого числа экспериментальных данных для различных металлов показывает, что если для установившейся ползучести принять соотношение вида

$$\dot{\varepsilon}^c = A \left(\frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma} \right)^n \quad (\sigma > \sigma_a), \quad (1.1)$$

где σ_a — напряжение, ниже которого ползучесть практически не наблюдается, σ_b — напряжение типа предела прочности, то удастся достаточно хорошо одним набором констант, входящих в этот определяющий закон, аппроксимировать скорость деформации ползучести для всего диапазона изменения σ . В этой же работе отмечается, что для многокомпонентных сплавов во многих случаях n можно принять равным единице; для чистых металлов $n \approx 3$.

Для каждого конкретного определяющего закона ползучести необходимо разработать методы решения краевых задач при расчете элементов конструкций. Наиболее изученными здесь безусловно являются соотношения степенного закона. Поэтому интерес представляет дробно-линейная зависимость. В данном разделе книги изучаются поля напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершин трещин различных типов при использовании частного случая определяющего закона — дробно-линейного закона ползучести.

3.11.2. Трещина антиплоского сдвига. Решение методом разложения по собственным функциям

Известно, что нелинейные уравнения задачи о продольном сдвиге можно привести к линейным уравнениям с переменными коэффициентами, используя преобразование годографа (см., например, [1]). Применение этого метода часто позволяет решить задачу аналитически. Это обстоятельство было использовано в [161] и [185] при изучении асимптотик полей напряжений и скоростей дефор-

маций ползучести в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига для дробно-линейного закона ползучести.

В 3.9.4 с помощью метода годографа были получены асимптотики скоростей деформации ползучести у вершины трещины антиплоского сдвига в среде, подчиняющейся дробно-линейному определяющему закону. Естественным продолжением исследований для дробно-линейного закона ползучести в задачах о трещинах является изучение полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига. Метод годографа для задач такого класса не развит и следует отыскать другой способ исследования напряженно-деформированного состояния. В случае, если новый метод будет давать результаты, совпадающие с точным решением для трещины антиплоского сдвига, то разумно будет затем применить его для трещин двух других типов. Одним из самых простых и эффективных методов определения полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины является метод построения асимптотических разложений по параметру r , где r есть расстояние от вершины трещины, что дает возможность найти асимптотики полей скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины. Заметим, что для дробно-линейного закона ползучести, в отличие от степенных определяющих соотношений, напряжения в окрестности вершины трещины ограничены и не имеют особенности. Следовательно, главный член асимптотических разложений для компонент тензора напряжений есть константа τ_* .

Далее будут построены асимптотические разложения для компонент вектора скорости перемещений, тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений. Причем следует отметить, что сначала, исходя из вида самого определяющего соотношения, строится разложение компонент тензора напряжений, по ним восстанавливаются разложения скоростей деформаций, а затем — скоростей перемещений.

С другой стороны, поскольку скорости перемещений не могут быть сингулярными в окрестности вершины трещины, то можно построить асимптотическое разложение скорости перемещения, по которому восстановить асимптотическое разложение скоростей деформаций и, далее, разложение компонент тензора напряжений.

Таким образом, будут получены две группы асимптотических разложений, представляющих собой, очевидно, решение одной и той же задачи. Сравнение построенных разложений по собственным функциям приводит к отысканию неизвестных собственных значений задачи.

Рассмотрим антиплоскую деформацию пространства с полубесконечной трещиной. Для определяющей связи между напряжениями и скоростями деформаций ползучести используется дробно-линейное соотношение [180]

$$\dot{\gamma} = A \frac{\tau}{\tau_* - \tau}, \quad (2.1)$$

где τ , $\dot{\gamma}$ — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформаций сдвига соответственно; A , τ_* — константы материала.

Основными уравнениями рассматриваемой задачи являются: уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial\varphi} = 0, \quad (2.2)$$

условие совместности, сформулированное для скоростей деформаций сдвига

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\dot{\gamma}_{\varphi z}) = \frac{\partial\dot{\gamma}_{rz}}{\partial\varphi}, \quad (2.3)$$

которые дополняются определяющими соотношениями, связывающими скорости деформаций ползучести и напряжения¹⁸⁸

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{3}{2}A \frac{\tau_{rz}}{\tau_* - \tau}, \quad \dot{\gamma}_{\varphi z} = \frac{3}{2}A \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_* - \tau}, \quad (2.4)$$

где

$$\tau^2 = \tau_{rz}^2 + \tau_{\varphi z}^2, \quad \dot{\gamma}^2 = \dot{\gamma}_{rz}^2 + \dot{\gamma}_{\varphi z}^2. \quad (2.5)$$

Условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины имеют вид

$$\tau_{\varphi z} = 0 \quad (\varphi = \pm\pi). \quad (2.6)$$

При решении задачи можно рассматривать одну из полуплоскостей, учитывая условие симметрии на продолжении трещины

$$\tau_{rz} = 0 \quad (\varphi = 0). \quad (2.7)$$

Для рассматриваемых определяющих соотношений характерна следующая особенность: при малых уровнях напряжений ($\tau/\tau_* \ll 1$) дробно-линейный закон задает линейную связь между напряжениями и скоростями деформаций, тогда как для больших уровней напряжений (напряжения близки к величине τ_* — напряжению типа предела прочности) дробно-линейный закон описывает неограниченный рост скоростей деформаций при постоянном уровне напряжений. По аналогии с маломасштабным пластическим течением данная ситуация может быть названа маломасштабной ползучестью: нелинейность определяющих соотношений оказывается существенной вблизи вершины трещины, тогда

¹⁸⁸Напомним, что в теории установившейся ползучести при сложном напряженном состоянии обычно используются квазилинейные уравнения установившейся ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij},$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk}\delta_{ij}/3$ — компоненты девиатора напряжений; $\sigma_e = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — интенсивность касательных напряжений.

Этот определяющий закон подразумевает следующее соотношение между интенсивностью скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}^c = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^c\dot{\varepsilon}_{ij}^c}/3$ и интенсивностью касательных напряжений:

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma_e).$$

Квазилинейные уравнения установившейся ползучести являются тензорно линейными соотношениями, вся нелинейность этих определяющих выражений заключена в функции $f(\sigma_e)$.

как на больших расстояниях от вершины связь между напряжениями и скоростями деформаций линейна.

Поэтому на бесконечности формулируется асимптотическое условие выхода на решение задачи для линейно вязкого материала [185]

$$\tau_{rz} \rightarrow \sqrt{\frac{C^* \tau_*}{AI}} \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{\varphi z} \rightarrow \sqrt{\frac{C^* \tau_*}{AI}} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (r \rightarrow \infty), \quad (2.8)$$

где

$$C^* = \int_{-\pi}^{\pi} [W^* \cos \varphi - (\tau_{rz} \dot{\gamma}_{rz} \cos \varphi - \tau_{\varphi z} \dot{\gamma}_{\varphi z} \sin \varphi)] r d\varphi \quad (2.9)$$

— инвариантный интеграл теории ползучести,

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \varphi - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) \right] d\varphi = \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

— безразмерный интеграл (аналог параметра I_n для степенных определяющих соотношений).

Для решения задачи удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \frac{\tau}{\tau_*}, \quad \hat{\tau}_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\tau_*}, \quad \hat{\tau}_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_*}, \quad \hat{\gamma} = \frac{2\dot{\gamma}}{3A}, \quad \hat{\gamma}_{rz} = \frac{2\dot{\gamma}_{rz}}{3A}, \\ \hat{\gamma}_{\varphi z} &= \frac{2\dot{\gamma}_{\varphi z}}{3A}, \quad \hat{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \hat{x}_2 = \frac{x_2}{L}, \quad \hat{r} = \frac{r}{L}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $L = C^*/(AI\tau_*)$.

В безразмерных переменных уравнение равновесия, условие сплошности, граничные условия на берегах трещины и на ее продолжении сохраняются в прежней форме, а определяющие соотношения и асимптотическое условие на бесконечности принимают вид

$$\hat{\gamma}_{rz} = \frac{\hat{\tau}_{rz}}{1 - \hat{\tau}}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \frac{\hat{\tau}_{\varphi z}}{1 - \hat{\tau}}; \quad (2.12)$$

$$\hat{\tau}_{rz} \rightarrow \frac{\sin(\varphi/2)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \hat{\tau}_{\varphi z} \rightarrow \frac{\cos(\varphi/2)}{\sqrt{2\pi r}} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.13)$$

соответственно.

В дальнейшем знак $\hat{}$ над символом и индекс z у компонент тензора напряжений и скоростей деформаций опускаются.

Точное решение поставленной задачи, приведенное в [161], показывает, что скорости деформаций ползучести имеют особенность при приближении к вершине трещины ($r \rightarrow 0$). Поэтому предполагается, что интенсивность напряжений достигает своего критического значения τ_* только в одной точке — вершине

трещины. В силу этого будем искать асимптотическое разложение при $(r \rightarrow 0)$ компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины в виде

$$\tau_s(r, \varphi) = \tau_s^{(0)}(\varphi) + r^\alpha \tau_s^{(1)}(\varphi) + r^\beta \tau_s^{(2)}(\varphi) + \dots, \quad (2.14)$$

где $s = r, \varphi$; $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$ — положительные константы, подлежащие определению, причем интенсивность напряжений при $r = 0$ должна достигать своего критического значения τ_* , следовательно, в безразмерных переменных

$$\left(\tau_r^{(0)}\right)^2 + \left(\tau_\varphi^{(0)}\right)^2 = 1. \quad (2.15)$$

При использовании дробно-линейной зависимости напряжения являются ограниченными величинами, а скорости деформаций ползучести, в принципе, могут иметь особенность. Ясно, что представления (2.14) и (2.15) позволяют моделировать такое поведение напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины.

В силу (2.14) и (2.15) интенсивность напряжений в окрестности вершины трещины будет иметь вид

$$\tau(r, \varphi) = 1 + r^\alpha \omega_1 + r^{2\alpha} \omega_2 + r^\beta \omega_3 + \dots, \quad (2.16)$$

где

$$\omega_1 = \omega_1 \left(\tau_s^{(0)}, \tau_s^{(1)} \right), \quad \omega_2 = \omega_2 \left(\tau_s^{(0)}, \tau_s^{(1)} \right), \quad \omega_3 = \omega_3 \left(\tau_s^{(0)}, \tau_s^{(2)} \right).$$

Поэтому асимптотическое разложение компонент тензора скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины будет следующим:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_s = & -\frac{\tau_s^{(0)}}{r^\alpha \omega_1} - \frac{\tau_s^{(1)}}{\omega_1} - \tau_s^{(0)} \frac{\omega_2}{\omega_1^2} - r^{\beta-\alpha} \frac{\tau_s^{(2)}}{\omega_1} + r^\alpha \tau_s^{(1)} \frac{\omega_2}{\omega_1^2} + r^\beta \tau_s^{(2)} \frac{\omega_2}{\omega_1^2} + \\ & + r^{\beta-2\alpha} \tau_s^{(0)} \frac{\omega_3}{\omega_1^2} + r^{\beta-\alpha} \tau_s^{(1)} \frac{\omega_3}{\omega_1^2} + r^{2(\beta-\alpha)} \tau_s^{(2)} \frac{\omega_3}{\omega_1^2} + \dots \quad (s = r, \varphi). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Необходимо отметить, что коэффициенты нулевого приближения в (2.14) определяются из уравнения равновесия и условия предельного состояния (2.15):¹⁸⁹

$$\frac{\partial \tau_\varphi^{(0)}}{\partial \varphi} + \tau_r^{(0)} = 0, \quad \left(\tau_r^{(0)}\right)^2 + \left(\tau_\varphi^{(0)}\right)^2 = 1. \quad (2.18)$$

Решение системы уравнений (2.18), удовлетворяющее граничным условиям (2.6) и условиям симметрии (2.7), имеет вид

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2 : \quad \tau_r^{(0)} = 0, \quad \tau_\varphi^{(0)} = 1; \quad (2.19)$$

$$\pi/2 \leq \varphi \leq \pi : \quad \tau_r^{(0)} = -\cos \varphi, \quad \tau_\varphi^{(0)} = \sin \varphi.$$

¹⁸⁹Под предельным состоянием понимается достижение интенсивностью касательных напряжений своего критического значения τ_* . В безразмерных переменных это критическое значение равно единице.

Коэффициенты следующих приближений $\tau_s^{(k)}(\varphi)$ определяются из уравнения равновесия и условия совместности.

Таким образом, для определения коэффициентов первого приближения формулируются уравнение равновесия и условие совместности

$$\frac{\partial \tau_\varphi^{(1)}}{\partial \varphi} + (1 + \alpha) \tau_r^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tau_r^{(0)}}{\omega_1} \right) = (1 - \alpha) \frac{\tau_\varphi^{(0)}}{\omega_1}. \quad (2.20)$$

Для определения нулевого приближения в асимптотическом разложении скоростей деформаций достаточно получить решение второго уравнения последней группы уравнений, из которого вытекает, что постоянная $\alpha = 1$ ($0 \leq \varphi < \pi/2$) при произвольной функции ω_1 . Для $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ упомянутое уравнение принимает форму

$$-\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\omega_1} \right) = (1 - \alpha) \frac{\sin \varphi}{\omega_1},$$

откуда легко вычисляется функция $\omega_1(\varphi)$:

$$\omega_1 = C (-\cos \varphi)^\alpha \quad (\pi/2 < \varphi \leq \pi), \quad (2.21)$$

определяющая нулевое приближение для скоростей деформаций ползучести:

$$\pi/2 < \varphi \leq \pi \quad (2.22)$$

$$\dot{\gamma}_r = r^{-\alpha} C \cos \varphi (-\cos \varphi)^{-\alpha}, \quad \dot{\gamma}_\varphi = r^{-\alpha} C \sin \varphi (-\cos \varphi)^{-\alpha}.$$

Следующим шагом будет нахождение второго приближения. Для чего необходимо найти в (2.17) наименьшую степень r . При этом следует рассмотреть различные случаи:

1) $\beta - 2\alpha > 0$. Тогда наименьшая степень (за исключением $r^{-\alpha}$) равна нулю. Но коэффициент при этой степени $\tau_s^{(0)} \omega_2 / \omega_1^2$ не содержит неизвестных функций, поэтому данный случай должен быть исключен из рассмотрения;

2) Если $\beta - 2\alpha < 0$, то в разложении (2.17) появляется еще одно слагаемое с особенностью при $r \rightarrow 0$. Однако из точного решения известно, что асимптотики скоростей деформаций ползучести имеют лишь одно сингулярное слагаемое, поэтому в данном исследовании случай $\beta - 2\alpha < 0$ исключается;

3) $\beta = 2\alpha$. Это — единственно возможный в рассматриваемой задаче случай, когда получается система уравнений для определения коэффициентов асимптотических разложений (2.15) и (2.17).

Поэтому напряжения следует искать в виде ряда по степеням r^α :

$$\tau_s(r, \varphi) = \tau_s^{(0)}(\varphi) + r^\alpha \tau_s^{(1)}(\varphi) + r^{2\alpha} \tau_s^{(2)}(\varphi) + \dots \quad (\alpha > 0). \quad (2.23)$$

С другой стороны, поля напряжений и скоростей деформаций можно получить, разыскивая асимптотическое разложение для скоростей перемещений и используя затем формулы

$$\dot{\gamma}_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \dot{\gamma}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad (2.24)$$

$$\tau_r = \frac{1}{1 + \omega} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \tau_\varphi = \frac{1}{1 + \omega} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad (2.25)$$

где

$$\omega^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2.$$

Подстановка последней группы формул в уравнение равновесия позволяет получить дифференциальное уравнение в частных производных для скорости перемещения $w(r, \varphi)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial w}{\partial r} + r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2} + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^3 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial r} + \\ & + r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для того, чтобы получить напряжения в окрестности вершины трещины в виде (2.14), необходимо искать скорость перемещения в виде ряда

$$w(r, \varphi) = f^{(0)}(\varphi) + r^\mu f^{(1)}(\varphi) + \dots, \quad (2.27)$$

где $\mu > 0$.

Подставляя (2.27) в (2.26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях r , можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для собственных функций $f^{(k)}$. Коэффициент при отрицательной степени r имеет вид

$$f^{(1)}(\varphi) \frac{df^{(0)}(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (2.28)$$

Следует рассмотреть два случая:

1) $f^{(1)}(\varphi) = 0$, $\frac{d}{d\varphi} f^{(0)}(\varphi) \neq 0$. Из (2.24) можно найти, что

$$\dot{\gamma}_r^{(0)} = 0, \quad \dot{\gamma}_\varphi^{(0)} = \frac{1}{r} \frac{df^{(0)}(\varphi)}{d\varphi};$$

2) $f^{(1)}(\varphi) \neq 0$, $\frac{d}{d\varphi} f^{(0)}(\varphi) = 0$. В этом случае для определения $f^{(1)}(\varphi)$ необходимо найти в уравнении (2.26) минимальную степень r (учитывая условие (2.28)) и приравнять нулю коэффициент при данной степени. Получившееся уравнение имеет вид:

$$\mu \frac{d^2 f^{(1)}}{d\varphi^2} f^{(1)} + (1 - \mu) \left(\frac{df^{(1)}}{d\varphi} \right)^2 + \mu^2 \left(f^{(1)} \right)^2 = 0, \quad (2.29)$$

решением которого является функция ([58], уравнение 6.128)

$$f^{(1)}(\varphi) = C_1 \cos^\mu(\varphi - C_2). \quad (2.30)$$

Граничное условие на берегу трещины и условие симметрии на ее продолжении для функций $f^{(k)}$ принимают вид

$$\begin{aligned} f^{(0)} = 0, \quad f^{(1)} = 0 \quad (\varphi = 0); \\ \frac{df^{(0)}}{d\varphi} = 0, \quad \frac{df^{(1)}}{d\varphi} = 0 \quad (\varphi = \pi). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Удовлетворить условиям (2.31) можно, разбив полуплоскость на две области:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi < \pi/2 \\ \frac{df^{(0)}}{d\varphi} = f(\varphi), \quad f^{(1)} = 0, \\ \dot{\gamma}_r^{(0)} = 0, \quad \dot{\gamma}_\varphi^{(0)} = \frac{f(\varphi)}{r}, \quad \tau_r^{(0)} = 0, \quad \tau_\varphi^{(0)} = 1; \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \pi/2 < \varphi \leq \pi \\ \frac{df^{(0)}}{d\varphi} = 0, \quad f^{(1)} = C_1 \cos^\mu \varphi, \\ \dot{\gamma}_r^{(0)} = r^{\mu-1} C \mu \cos \varphi (-\cos \varphi)^{\mu-1}, \quad \dot{\gamma}_\varphi^{(0)} = -r^{\mu-1} C \mu \sin \varphi (-\cos \varphi)^{\mu-1}, \\ \tau_r^{(0)} = -\cos \varphi, \quad \tau_\varphi^{(0)} = \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Следует отметить, что асимптотические разложения для компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести определялись двумя способами: **1)** разыскивалось асимптотическое разложение для напряжений, по которому впоследствии восстанавливалось асимптотическое представление для скоростей деформаций; **2)** по найденному приближенному решению для компоненты вектора перемещения определялись асимптотики скоростей деформаций и напряжений. Однако и (2.22), и (2.33) представляют собой решения одной и той же задачи и, следовательно, упомянутые формулы должны приводить к одной и той же зависимости скоростей деформаций от r и тому же угловому распределению. А это возможно лишь при $\alpha = \mu = -1/2$.

Итоговое распределение скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi < \pi/2 \\ \dot{\gamma}_r^{(0)} = 0, \quad \dot{\gamma}_\varphi^{(0)} = \frac{f(\varphi)}{r}; \\ \pi/2 < \varphi < \pi \\ \dot{\gamma}_r^{(0)} = \frac{1}{2} r^{-1/2} C \cos \varphi (-\cos \varphi)^{-1/2}, \quad \dot{\gamma}_\varphi^{(0)} = -\frac{1}{2} r^{-1/2} C \sin \varphi (-\cos \varphi)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Формулы (2.32) и (2.34) дают асимптотическое решение задачи о полубесконечной трещине антиплоского сдвига в окрестности её вершины и содержат пока неопределенные константы, которые определяются из склейки полученного "ближнего поля" и условий на бесконечности — "дальнего поля", учитывающего приложенную нагрузку и геометрию тела с трещиной. В нелинейной механике разрушения сращивание "ближнего" и "дальнего" полей обычно осуществляется с помощью инвариантных интегралов — J -интеграла при наличии пластических деформаций и C^* -интеграла в условиях ползучести, определяемого согласно равенству [272]

$$C^* = \oint_C \left[W^* dx_2 - \sigma_{ij} n_i \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right] ds, \quad (2.35)$$

где

$$W^* = \int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}$$

— потенциал напряжений, выраженный через скорости деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$.¹⁹⁰

Предварительно вычислим интеграл

$$W^* = \int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij},$$

используя определяющие соотношения теории установившейся ползучести [130]:

$$\int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \int \dot{\varepsilon}_{ij} d\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij} - \frac{3}{2} \int \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij} d\sigma_{ij}.$$

Поскольку $\sigma_{ij} s_{ij} = \sigma_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij}/3) = \sigma_{ij} \sigma_{ij} - 3(\sigma_{kk}/3)^2 = 2\sigma_e^2/3$, то предыдущее выражение можно преобразовать к виду

$$\int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_e f(\sigma_e) - \int f(\sigma_e) d\sigma_e.$$

Переходя к дробно-линейной зависимости, можно вычислить (в безразмерных переменных)

$$W^* = \dot{\gamma} - \ln(1 + \dot{\gamma}). \quad (2.36)$$

Процедура сращивания "ближнего" и "дальнего" полей предусматривает вычисление C^* -интеграла по приближенному решению в окрестности вершины трещины и приравнивание его значению C^* , вычисленному по окружности, целиком расположенной в области, занимаемой линейно вязким материалом. Это

¹⁹⁰Функция W^* является однозначной функцией от $\dot{\varepsilon}_{ij}$, точно также как $W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, используемая при выводе J -интеграла на основании деформационной теории пластичности, является однозначной функцией деформаций. Дискуссия, посвященная исследованию физического смысла введенной величины W^* и в целом инвариантных интегралов, приведена, например, в [17].

значение C^* -интеграла считается известным и определяется геометрией образца и приложенной нагрузкой. Условие срачивания принимает вид

$$\begin{aligned}
 C^* &= \int_{-\pi}^{\pi} [W^* \cos \varphi - \tau_{rz} (\dot{\gamma}_{rz} \cos \varphi - \dot{\gamma}_{\varphi z} \sin \varphi)] r d\varphi = \\
 &= \tau_* AL \int_{-\pi}^{\pi} \left[W^* \cos \varphi - \hat{\tau}_{rz} (\hat{\gamma}_{rz} \cos \varphi - \hat{\gamma}_{\varphi z} \sin \varphi) \right] \hat{r} d\varphi = \\
 &= \tau_* AL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\hat{\gamma} \cos \varphi - \frac{\hat{\gamma}_{rz}}{\hat{\gamma}} (\hat{\gamma}_{rz} \cos \varphi - \hat{\gamma}_{\varphi z} \sin \varphi) \right] \hat{r} d\varphi = \\
 &= \tau_* AL \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi,
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

откуда следует, что на одну константу, содержащуюся в выражении для функции $f(\varphi)$, накладывается условие

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) \cos \varphi d\varphi = I.$$

Постоянная в (2.34) должна быть определена из условия непрерывности компоненты тензора скоростей деформации $\dot{\gamma}_{\varphi z}$. Так как скорости деформаций имеют различную асимптотику по r в областях $0 \leq \varphi < \pi/2$ и $\pi/2 < \varphi \leq \pi$, то непосредственно приравнивать значения скоростей деформаций $\dot{\gamma}_{\varphi z}$ по их значениям внутри рассматриваемых областей нельзя. Необходимо отметить, что задача срачивания двух решений на границе $\varphi = \pi/2$ имеет ряд особенностей. С одной стороны, возникает проблема, связанная с различной асимптотикой по r при $r \rightarrow 0$. С другой стороны, появляется особенность в функциях, зависящих от угла φ при $\varphi \rightarrow \pi/2$. Для того, чтобы найти связь между функцией $f(\varphi)$ и постоянной C в (2.34), необходимо построить решение, справедливое на самой прямой $\varphi = \pi/2$, и уже затем ставить условия асимптотического срачивания полученного решения с имеющимися решениями внутри областей, что даст значение константы C .

Соотношения (2.32) и (2.34) представляют асимптотики полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига. Как видно из асимптотических разложений, скорости деформаций ползучести имеют особенность $\dot{\gamma} \rightarrow r^{-k}$ при приближении к вершине трещины, причем характер сингулярности меняется дискретным образом от $k = 1$ ($0 \leq \varphi < \pi/2$) до $k = 1/2$ ($\pi/2 < \varphi < \pi$). Сравнение полученного приближенного решения с имеющимся точным решением показывает, что поведение скоростей деформаций ползучести при $\varphi = \pi/2$ в рамках приближенного

решения остается неопределенным, несмотря на то, что асимптотически распределения напряжений и скоростей перемещений при данном значении полярного угла непрерывны.

Очевидно, что построенное приближенное решение задачи методом разложения в степенные ряды хорошо согласуется с имеющимся точным решением для полубесконечной трещины антиплоского сдвига, приведенном в разделе 3.9.4: асимптотики скоростей деформаций сдвига точного и приближенного решений совпадают. Поэтому этот метод может быть применен к анализу более сложных задач о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига.

3.11.3. Трещина нормального отрыва (плоское деформированное состояние). Решение методом разложения по собственным функциям

Рассматривается растяжение неограниченного нелинейно вязкого тела с полубесконечной трещиной **типа I** в условиях плоской деформации.¹⁹¹ Для связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями используется дробно-линейное соотношение¹⁹²

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{3}{4}A \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_* - \sigma_e}, \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{3}{4}A \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{\sigma_* - \sigma_e}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{3}{2}A \frac{\sigma_{r\varphi}}{\sigma_* - \sigma_e} \quad (3.1)$$

или в терминах интенсивностей скоростей деформаций ползучести и напряжений

$$\dot{\varepsilon} = A \frac{\sigma_e}{\sigma_* - \sigma_e}, \quad (3.2)$$

где

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{2} \sqrt{\dot{\varepsilon}_{rr}^2 + \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^2}$$

и

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2}$$

— интенсивности скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно; A , σ_* — постоянные дробно-линейного закона ползучести.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\varphi}) + \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (3.3)$$

Условие совместности, сформулированное для скоростей деформаций ползучести, принимается в форме

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} = \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi}. \quad (3.4)$$

¹⁹¹Решение этой задачи методом разложения по собственным функциям получено в [161].

¹⁹²Как и в предыдущей задаче скоростями упругих деформаций можно пренебречь по сравнению со скоростями деформаций ползучести, поэтому $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e$.

Соотношения, связывающие скорости деформаций и напряжения

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{1 - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{1 - \sigma_e}, \quad \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \frac{2\sigma_{r\varphi}}{1 - \sigma_e}, \quad (3.5)$$

замыкают определяющую систему уравнений. Здесь и далее все величины записаны в безразмерном виде.

Из зависимостей (3.5) следует условие несжимаемости $\dot{\epsilon}_{rr} = -\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi},$$

где v_r и v_φ — физические компоненты вектора скорости перемещения.

Уравнения (3.3)–(3.5) должны быть решены с учетом следующих граничных условий. Берега трещины должны быть свободны от поверхностных усилий:

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \quad (\varphi = \pm\pi). \quad (3.6)$$

В силу симметрии задачи можно рассматривать одну из полуплоскостей, сформулировав условие на продолжении трещины

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad u_\varphi = 0 \quad (\varphi = 0). \quad (3.7)$$

Условие симметрии $u_\varphi(\varphi = 0) = 0$ может быть также сформулировано в напряжениях

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \varphi} = 0 \quad (\varphi = 0). \quad (3.8)$$

Асимптотические условия сближения с решением задачи для линейно-вязкого материала на больших расстояниях ($r \rightarrow \infty$) от вершины трещины имеют вид [161]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &\rightarrow \sqrt{\frac{C^*\sigma_*}{AI}} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &\rightarrow \sqrt{\frac{C^*\sigma_*}{AI}} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{3\varphi}{2} \right), \\ \sigma_{r\varphi} &\rightarrow \sqrt{\frac{C^*\sigma_*}{AI}} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из уравнения несжимаемости вытекает, что компоненты вектора скорости могут быть представлены через одну функцию:

$$v_r = \frac{1}{r} \Phi'_\varphi(r, \varphi), \quad v_\varphi = -\Phi'_r(r, \varphi). \quad (3.10)$$

Используя соотношения, связывающие скорости деформаций с компонентами скорости

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \quad 2\dot{\epsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r},$$

можно получить

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2}\Phi'_\varphi - \frac{1}{r}\Phi''_{r\varphi} = g_1(r, \varphi), \\ 2\dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2}\Phi''_{\varphi\varphi} - \Phi''_{rr} + \frac{1}{r}\Phi'_r = 2g_2(r, \varphi).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Учитывая, что

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}}{1 + \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^2}}, \quad 2\sigma_{r\varphi} = \frac{\dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{1 + \sqrt{\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^2}}, \quad (3.12)$$

и преобразуя уравнения равновесия к одному уравнению, содержащему разность $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$ и компоненту $\sigma_{r\varphi}$, можно получить

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})}{\partial r \partial \varphi} + r \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} + 3 \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.13)$$

Подставляя (3.11) в (3.12) и результат подстановки в (3.13), можно получить нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка для функции $\Phi(r, \varphi)$, которое в силу его громоздкости приводится для функций $g_1(r, \varphi)$ и $g_2(r, \varphi)$:

$$\begin{aligned}& \left[(g_1)''_{r\varphi} + r \frac{(g_2)''_{rr}}{2} - \frac{(g_2)''_{\varphi\varphi}}{2r} + 3 \frac{(g_2)'_r}{2} + \frac{(g_1)'_\varphi}{r} \right] \left(1 + \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right)^2 (g_1^2 + g_2^2)^{3/2} - \\& - \left(1 + \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right) (g_1^2 + g_2^2)^{3/2} \left\{ [g_1(g_1)'_r + g_2(g_2)'_r] \left[(g_1)'_\varphi + r(g_2)'_r + 3 \frac{g_2}{2} \right] + \right. \\& + [g_1(g_1)'_\varphi + g_2(g_2)'_\varphi] \left[(g_1)'_r - \frac{(g_2)'_\varphi}{r} + \frac{g_1}{r} \right] + g_1 [g_1(g_1)'_\varphi + g_2(g_2)'_\varphi]'_r + \\& + r \frac{g_2 [g_1(g_1)'_r + g_2(g_2)'_r]'_r}{2} - g_2 [g_1(g_1)'_\varphi + g_2(g_2)'_\varphi]'_\varphi \left. \right\} + \left(1 + 3\sqrt{g_1^2 + g_2^2} \right) \times \\& \times \left\{ g_1 [g_1(g_1)'_\varphi + g_2(g_2)'_\varphi] [g_1(g_1)'_r + g_2(g_2)'_r] + r \frac{g_2 [g_1(g_1)'_r + g_2(g_2)'_r]^2}{2} - \right. \\& \left. - \frac{g_2 [g_1(g_1)'_\varphi + g_2(g_2)'_\varphi]^2}{2r} \right\} = 0.\end{aligned}\quad (3.14)$$

По аналогии с задачей о трещине антиплоского сдвига приближенное решение в окрестности вершины трещины разыскивается в виде

$$\Phi(r, \varphi) = r f_0(\varphi) + r^{\alpha+1} f_1(\varphi) + r^{2\alpha+1} f_2(\varphi) + \dots \quad (r \rightarrow 0), \quad (3.15)$$

где $\alpha > 0$.

Представление (3.15) задает поведение компонент тензора напряжений как функций, не обладающих особенностью при $r \rightarrow 0$, и сингулярное поведение скоростей деформаций у вершины трещины. Асимптотическое разложение (3.15) приводит к следующим разложениям для скоростей деформаций:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -r^{\alpha-1} \alpha f'_1 + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{1}{2r} [f''_0 + f_0 + r^\alpha (f''_1 + (1 - \alpha^2) f_1)] + \dots.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Обозначая

$$a(\varphi) = -\alpha f_1', \quad b(\varphi) = \frac{1}{2} (f_0'' + f_0), \quad c(\varphi) = \frac{1}{2} (f_1'' + (1 - \alpha^2) f_1), \quad (3.17)$$

скорости деформаций можно представить как

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = r^{\alpha-1} a + \dots, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{1}{r} (b + r^\alpha c) + \dots \quad (3.18)$$

Нелинейное уравнение в частных производных (3.14) для функции $\Phi(r, \varphi)$ после подстановки (3.15) и учета (3.17) и выделения коэффициента при минимальной степени r принимает форму

$$b(ba' - ab') = 0, \quad (3.19)$$

которое может быть выполнено либо в случае 1) $b = 0$, либо 2) $(ba' - ab') = 0$. В случае 2) $b \neq 0$ скорости деформаций ползучести в окрестности вершины трещины описываются формулами (3.18), а для напряжений из (3.12) можно получить

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = r^\alpha \frac{a}{b} - r^{\alpha+1} \frac{a}{b^2} - r^{2\alpha} \frac{ac}{b^2} + \dots, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - r \frac{1}{b} - r^{\alpha+1} \frac{c}{b^2} - r^{2\alpha} \frac{c^2}{b^2} \right) + \dots$$

Функции a , b , c определяются из уравнений равновесия и условия совместности, что дает

$$a'' - (\alpha^2 - 1)a + 2\alpha c' = 0. \quad (3.21)$$

Уравнения равновесия должны дать недостающие два уравнения для определения функций, зависящих от полярного угла (На самом деле одно из соотношений уже получено — (3.19) в случае $b \neq 0$. Тем не менее при построенных асимптотических разложениях для компонент тензора напряжений (3.20) можно непосредственно пользоваться уравнениями равновесия.). При этом если $\alpha < 1$, то минимальная степень r в уравнении (3.13), как это следует из (3.20), будет α , и уравнение будет давать слагаемое $r^\alpha a/b$ в разложении для $\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}$. Это уравнение легко находится

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{b} \right) = 0.$$

Третье уравнение для определения функций a , b , c можно вывести из уравнения (3.13), приравнявая коэффициент при следующей степени r . В случае $\alpha < 1$ это уравнение будет давать слагаемое r/b в разложении для $\sigma_{r\varphi}$. Однако коэффициенты следующих членов ряда не содержат новые неизвестные функции. Приравнявая нулю коэффициенты при следующих степенях r , например, при тех, которые будут давать слагаемые $r^{\alpha+1} a/b^2$ и $r^{\alpha+1} c/b^2$, будем получать

новые уравнения для ранее определенных функций. В случае $\alpha > 1$ ситуация аналогична описанной. И только в случае $\alpha = 1$, когда

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = r \frac{a}{b} - r^2 \left(\frac{a}{b^2} + \frac{ac}{b^2} \right) + \dots, \quad (3.22)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - r \frac{1}{b} - r^2 \left(\frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} \right) \right) + \dots,$$

удается получить систему уравнений для определения функций a , b , c .

Таким образом, в случае $b \neq 0$ асимптотическое разложение для функции имеет вид

$$\Phi(r, \varphi) = r f_0(\varphi) + r^2 f_1(\varphi) + r^3 f_2(\varphi) + \dots \quad (3.23)$$

Следует отметить, что условиям на берегах трещины и на ее продолжении поле напряжений, определяемое асимптотическим разложением (3.22), не удовлетворяет. Поэтому область, в которой решение описывается формулами (3.22) и (3.18), не примыкает к лучам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

В случае $b = 0$ асимптотическое разложение для компонент тензора скоростей деформаций ползучести имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = r^{\alpha-1} a + \dots, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi} = r^{\alpha-1} c + \dots \quad (3.24)$$

Напряжения в окрестности вершины трещины в этом случае определяются выражениями

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.25)$$

Тогда из условия совместности (3.4) и первого из уравнений равновесия (3.3) следует система двух уравнений

$$a'' - (\alpha^2 - 1)a + 2\alpha c' = 0, \quad \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right) - 2 \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0. \quad (3.26)$$

Заменой

$$a(\varphi) = \rho(\varphi) \cos \theta(\varphi), \quad c(\varphi) = \rho(\varphi) \sin \theta(\varphi)$$

второе уравнение системы (3.26) приводится к соотношению

$$\cos \theta (\theta' - 2) = 0,$$

которое удовлетворяется при:

1) $\theta = \pi n/2$, $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Этот случай исключается из рассмотрения, поскольку невозможно удовлетворить граничным условиям и условиям симметрии;

2) $\theta = 2\varphi + C$. Из первого уравнения системы (3.26) получается уравнение для определения функции ρ :

$$\rho'' + 2(\alpha - 2) \operatorname{tg}(2\varphi + C) \rho' + (-\alpha^2 + 4\alpha - 3) \rho = 0, \quad (3.27)$$

решением которого является функция

$$\rho(\varphi) = A \cos^{\alpha-1}(\varphi + C/2 + \pi/4) + B \sin^{\alpha-1}(\varphi + C/2 + \pi/4). \quad (3.28)$$

В силу (3.25), (3.26) и (3.28) поле напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_1 - \frac{1}{2} \cos(2\varphi + C), & \sigma_{\varphi\varphi} &= C_1 + \frac{1}{2} \cos(2\varphi + C), \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \sin(2\varphi + C). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Удовлетворяя граничным условиям, условиям симметрии на продолжении трещины и условиям непрерывности компонент $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ на границах областей $\varphi = \pi/4$, $\varphi = 3\pi/4$, можно получить поле напряжений в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} &0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \\ &\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi; \\ &\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4 \\ \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} &= -\varphi + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}, & \sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{2}; \\ &3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi, \\ &\sigma_{r\varphi} = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Полученные поля напряжений (3.30) совпадают с полями напряжений для жесткопластического материала [148].

Соответствующее найденному распределению напряжений поле скоростей деформаций определяется формулами

$$\begin{aligned} &0 \leq \varphi < \pi/4 \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -\dot{\varepsilon}_{rr} = r^{\alpha-1} \cos 2\varphi [A \cos^{\alpha-1}(\varphi + \pi/4) + B \sin^{\alpha-1}(\varphi + \pi/4)], \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= r^{\alpha-1} \sin 2\varphi [A \cos^{\alpha-1}(\varphi + \pi/4) + B \sin^{\alpha-1}(\varphi + \pi/4)]; \\ &\pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\varepsilon}_{rr} &= 0, & \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{f(\varphi)}{r}; \\ &3\pi/4 < \varphi \leq \pi \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = -\dot{\varepsilon}_{rr} &= -r^{\alpha-1} \cos 2\varphi [C \cos^{\alpha-1}(\varphi + 3\pi/4) + D \sin^{\alpha-1}(\varphi + 3\pi/4)], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\varphi} = -r^{\alpha-1} \sin 2\varphi \left[C \cos^{\alpha-1}(\varphi + 3\pi/4) + D \sin^{\alpha-1}(\varphi + 3\pi/4) \right].$$

С другой стороны, при построении приближенного решения задачи можно задавать асимптотическое разложение для компонент тензора напряжений, определяя затем асимптотические разложения скоростей деформаций ползучести и скоростей перемещений. Поскольку, в силу рассматриваемых определяющих соотношений, напряжения являются ограниченными величинами и не могут превышать предельной величины σ_* , а скорости деформаций могут иметь особенность в окрестности вершины трещины, то асимптотическое разложение для напряжений можно разыскивать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \varphi) &= \sigma_{rr}^{(0)}(\varphi) + r^\mu \sigma_{rr}^{(1)}(\varphi) + r^{2\mu} \sigma_{rr}^{(2)}(\varphi) + \dots, \\ \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^\mu \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(\varphi) + r^{2\mu} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(\varphi) + \dots, \\ \sigma_{r\varphi}(r, \varphi) &= \sigma_{r\varphi}^{(0)}(\varphi) + r^\mu \sigma_{r\varphi}^{(1)}(\varphi) + r^{2\mu} \sigma_{r\varphi}^{(2)}(\varphi) + \dots,\end{aligned}\tag{3.32}$$

а интенсивность напряжений в окрестности вершины трещины будет иметь вид

$$\sigma_e = 1 - r^\mu \sigma(\varphi) + \dots.\tag{3.33}$$

Следовательно, принимается предположение о том, что интенсивность напряжений достигает своего критического значения лишь в одной точке — вершине трещины $r = 0$. Поэтому нулевое приближение для напряжений (функции $\sigma_{rr}^{(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\sigma_{r\varphi}^{(0)}$) определяется из уравнений равновесия и условия предельного состояния

$$\left(\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} - \sigma_{rr}^{(0)} \right)^2 + 4 \left(\sigma_{r\varphi}^{(0)} \right)^2 = 1.\tag{3.34}$$

Таким образом, задача определения нулевого приближения для компонент тензора напряжений является статически определимой и ее решение есть (3.30).

Используя (3.5) и (3.33), для скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины можно получить

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = -\dot{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} - \sigma_{rr}^{(0)}}{r^\mu \sigma(\varphi)} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} - \sigma_{rr}^{(1)}}{\sigma(\varphi)} + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= 2 \frac{\sigma_{r\varphi}^{(0)}}{r^\mu \sigma(\varphi)} + 2 \frac{\sigma_{r\varphi}^{(1)}}{\sigma(\varphi)} + \dots.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Поскольку нулевое приближение для компонент тензора напряжений найдено, то скорости деформаций ползучести в непосредственной окрестности вершины трещины определяются соотношениями

$$0 \leq \varphi < \pi/4, \quad 3\pi/4 < \varphi \leq \pi$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = \frac{\cos(2\varphi + C)}{r^\mu \sigma(\varphi)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{\sin(2\varphi + C)}{r^\mu \sigma(\varphi)},$$

где $C = 0$ для $0 \leq \varphi < \pi/4$ и $C = \pi$ для $3\pi/4 < \varphi \leq \pi$;

$$\begin{aligned} \pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{f(\varphi)}{r}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Функция $\sigma(\varphi)$ находится из условия совместности скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} [\cos(2\varphi + C)Y(\varphi)]'' - \mu(\mu - 2)\cos(2\varphi + C)Y(\varphi) + \\ + 2(1 - \mu)[\sin(2\varphi + C)Y(\varphi)]' = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$Y(\varphi) = \frac{1}{\sigma(\varphi)}.$$

Решением уравнения (3.37) является функция

$$\begin{aligned} Y(\varphi) = C_1 \cos^{-\mu} \left(\varphi + \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C_2 \sin^{-\mu} \left(\varphi + \frac{C}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \\ C = 0 \quad (0 \leq \varphi < \pi/4); \quad C = \pi \quad (3\pi/4 < \varphi \leq \pi). \end{aligned} \quad (3.38)$$

В итоге главный член асимптотического разложения скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi < \pi/4 \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = \frac{\cos 2\varphi}{r^\mu} \left[A_1 \cos^{-\mu} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + B_1 \sin^{-\mu} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{\sin 2\varphi}{r^\mu} \left[A_1 \cos^{-\mu} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + B_1 \sin^{-\mu} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \\ \pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{f(\varphi)}{r}; \\ 3\pi/4 < \varphi \leq \pi \\ \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = -\frac{\cos 2\varphi}{r^\mu} \left[C_1 \cos^{-\mu} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) + D_1 \sin^{-\mu} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) \right], \\ \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^\mu} \left[C_1 \cos^{-\mu} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) + D_1 \sin^{-\mu} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Однако скорости деформаций ползучести, определяемые полученными выше формулами (3.37) и (3.31), представляют собой решение одной и той же задачи и поэтому должны совпадать. Следовательно, для собственных значений двух различных асимптотических разложений справедливы равенства $\alpha = \mu = 1/2$.

Искомое поле скоростей деформаций имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq \varphi < \pi/4 \\
 & \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = \frac{\cos 2\varphi}{r^{1/2}} \left[A_1 \cos^{-1/2} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + B_1 \sin^{-1/2} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right], \\
 & \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{\sin 2\varphi}{r^{1/2}} \left[A_1 \cos^{-1/2} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + B_1 \sin^{-1/2} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right]; \\
 & \pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \\
 & \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = \frac{f(\varphi)}{r}; \\
 & 3\pi/4 < \varphi \leq \pi \\
 & \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(0)} = -\dot{\varepsilon}_{rr}^{(0)} = -\frac{\cos 2\varphi}{r^{1/2}} \left[C_1 \cos^{-1/2} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) + D_1 \sin^{-1/2} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) \right], \\
 & \dot{\varepsilon}_{r\varphi}^{(0)} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^{1/2}} \left[C_1 \cos^{-1/2} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) + D_1 \sin^{-1/2} \left(\varphi + \frac{3\pi}{4} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Таким образом, найдены асимптотические разложения компонент тензора напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины. Полученное "ближнее" поле необходимо срастить с "дальним" полем — напряжениями, фигурирующими в условии на бесконечности. Для этого снова необходимо вычислить значение C^* -интеграла по полученному решению при малых r и приравнять это значение величине C^* -интеграла, определяемому условиями нагружения и геометрией реального образца. Для рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned}
 C^* = r \int_{\pi}^{\pi} \{ & W^* \cos \varphi - \sigma_{rr} [\dot{\varepsilon}_{rr} \cos \varphi - (\dot{\varepsilon}_{r\varphi} - \dot{\omega}) \sin \varphi] - \\
 & - \sigma_{r\varphi} [(\dot{\varepsilon}_{r\varphi} + \dot{\omega}) \cos \varphi - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sin \varphi] \} d\varphi,
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

где

$$\dot{\omega} = \frac{v_{\varphi}}{r} + \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \quad W^* = \dot{\varepsilon} - \ln(1 + \dot{\varepsilon}).$$

При $r \rightarrow 0$, $\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 C^* &= 2r \int_{\pi/4}^{3\pi/4} [W^* \cos \varphi + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\varphi} \sin \varphi] d\varphi = \\
 &= 2r \int_{\pi/4}^{3\pi/4} [\dot{\varepsilon} \cos \varphi + \sigma_{rr} \dot{\varepsilon}_{r\varphi} \sin \varphi] d\varphi =
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$= 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\varphi)(\cos \varphi + \sigma_{rr} \sin \varphi) d\varphi.$$

При $r \rightarrow \infty$, $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$

$$C^* = r \int_{\pi}^{\pi} \left\{ (\sigma_* \dot{\varepsilon}^2 \cos \varphi) / (2A) - \sigma_{rr} [\dot{\varepsilon}_{rr} \cos \varphi - (\dot{\varepsilon}_{r\varphi} - \dot{\omega}) \sin \varphi] - \right. \quad (3.43)$$

$$\left. - \sigma_{r\varphi} [(\dot{\varepsilon}_{r\varphi} + \dot{\omega}) \cos \varphi - \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sin \varphi] \right\} d\varphi,$$

где напряжения определяются соотношениями (3.9) и данным напряжениям соответствуют следующие поля скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = -\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{A}{\sigma_*} \sqrt{\frac{C^* \sigma_*}{AI}} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right),$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \frac{A}{\sigma_*} \sqrt{\frac{C^* \sigma_*}{AI}} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$$

и скоростей

$$v_r = 2 \frac{A}{\sigma_*} \sqrt{\frac{C^* \sigma_*}{AI}} \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right),$$

$$v_{\varphi} = -2 \frac{A}{\sigma_*} \sqrt{\frac{C^* \sigma_*}{AI}} \sqrt{r} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} \right).$$

Приравнивая значения C^* -интеграла, вычисленные по контуру, расположенному в окрестности вершины трещины, и контуру, удаленному от вершины трещины, можно найти

$$2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\varphi) \left[\cos \varphi + \left(-\varphi + \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) \sin \varphi \right] d\varphi = I, \quad (3.44)$$

где

$$I = 2 \int_0^{\pi} \left\{ 4(1 - \cos 2\varphi) \cos \varphi - \left(5 \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \cos \varphi - 2 \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \sin \varphi \right] -$$

$$\left. - \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \cos \frac{3\varphi}{2} \right) \sin \varphi \right\} d\varphi = 10\pi$$

— безразмерная величина, являющаяся аналогом интеграла I_n , фигурирующего при вычислении J -интеграла для степенного закона связи между деформациями и напряжениями.

Соотношение (3.44) представляет собой условие на функцию $f(\varphi)$, которая остается произвольной в рамках приближенного решения. Константы A_1 , B_1 , C_1 , D_1 должны быть определены из условия непрерывности компонент тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}$ и $\dot{\epsilon}_{r\varphi}$ при $\varphi = \pi/4$ и $\varphi = 3\pi/4$ — при переходе через лучи, разделяющие три введенные области. Однако, как видно из формул (3.40), скорости деформаций имеют особенность не только по r при приближении к вершине трещины, но и по углу φ при $\varphi \rightarrow \pi/4$ и $\varphi \rightarrow 3\pi/4$, что показывает (как и в случае трещины антиплоского сдвига) следующее: найденные асимптотики скоростей деформаций ползучести справедливы лишь внутри областей, тогда как на их границах построенные разложения непригодны и существует иная асимптотика, которая не может быть найдена в рамках данного приближенного анализа.¹⁹³

¹⁹³ Такая ситуация не является исключительной в теории асимптотических методов. Например, при изучении дифференциальных уравнений с большим параметром известно решение Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна (ВКБ-приближение) [104]. ВКБ-приближения становятся непригодными в так называемых точках поворота (точках, где асимптотическое решение имеет особенность.) Для того, чтобы построить разложение, пригодное в окрестности точки поворота, в теории асимптотических методов вводят растягивающее преобразование независимой переменной в окрестности точки поворота, а затем строится решение, пригодное в данной окрестности. Поэтому для нахождения асимптотики в окрестности $\varphi = \pi/2$ необходимо провести дополнительное исследование.

Связанные задачи нелинейной механики разрушения

4.1. Связанная постановка (упругость–поврежденность, ползучесть–поврежденность) задач о трещинах

В настоящем разделе рассмотрен цикл задач, посвященных оценке влияния поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины, в связанной постановке (в связках упругость–поврежденность, ползучесть–поврежденность), когда скалярный параметр поврежденности D входит в определяющие уравнения в отличие от несвязанной постановки, в рамках которой параметр поврежденности не входит в определяющий закон и, поэтому, сначала отдельно рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния, а затем по найденным полям напряжений и деформаций (либо скоростей деформаций) восстанавливается распределение поврежденности путем интегрирования кинетического уравнения.

В рамках связанной постановки процесс накопления повреждений оказывает влияние на напряжения и деформации, возникающие в твердом теле, и в то же время напряжения и деформации в зонах локализации поврежденности в значительной мере определяют характер ее распределения и ее уровень.

Учет влияния поврежденности приводит к качественно новым асимптотикам напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины: в принципе отсутствует свойственная для теории хрупкого разрушения сингулярность полей напряжений и деформаций, или эти сингулярности существенно ослабляются.

Особенностям постановки и решения связанных краевых задач и будет посвящен весь этот раздел.

4.1.1. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины растущей трещины антиплоского сдвига при ползучести

Рассмотрим задачу антиплоского сдвига для полубесконечной трещины в условиях ползучести для среды с поврежденностью.¹⁹⁴ Определяющие соотношения теории ползучести для среды с поврежденностью, предложенные Л. М. Качановым [60] и Ю. Н. Работновым [130], имеют в случае антиплоского сдвига следующий вид:

$$\dot{\gamma}_\alpha = B \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\tau_\alpha}{\psi}, \quad (1.1)$$

где $\alpha = 1, 2$; $\dot{\gamma}_\alpha$ — скорости деформаций сдвига, $\tau = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$ — интенсивность касательных напряжений; B , n — константы материала.

Мы пренебрегаем упругими деформациями и деформациями ползучести, накопленными на первой стадии ползучести.

Параметр сплошности материала $\psi = 1 - D$ изменяется в соответствии с кинетическим уравнением [60], [130], [244]

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\tau}{\psi} \right)^m, \quad \psi(t=0) = 1, \quad (1.2)$$

где d/dt — материальная производная по времени; A , m — константы материала.

В начальном неповрежденном состоянии $\psi = 1$, распределение напряжений у вершины трещины известно и имеет вид [253], [314]

$$\tau_\alpha(r, \varphi, t=0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\tau}_\alpha(n, \varphi), \quad (1.3)$$

где r, φ — полярные координаты с центром в вершине трещины, C^* — не зависящий от контура инвариантный интеграл теории ползучести, I_n — значение безразмерного C^* -интеграла для степенного закона связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями, зависящее только от n , функции $\bar{\tau}_\alpha(n, \varphi)$ численно определены в [253]. В случае трещины, движущейся с некоторой скоростью $v(t)$ в направлении оси x_1 ($x_1 O x_2$ — декартова система координат с центром в вершине трещины), материальная производная по t имеет вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (1.4)$$

Начальные распределения (1.3) будут одновременно и граничными условиями на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) для любого $t > 0$. Граничные условия на берегу трещины и на ее продолжении имеют вид

$$\tau_\varphi(r, \varphi = \pi) = 0, \quad \tau_r(r, \varphi = 0) = 0. \quad (1.5)$$

¹⁹⁴Изложение следует [14].

Анализ размерностей физических величин позволяет представить решение в виде

$$\tau_\alpha = \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/(n+1-m)} \Sigma_\alpha(R, \varphi, T), \quad (1.6)$$

$$\psi = \Psi(R, \varphi, T),$$

где Σ_α и Ψ — безразмерные функции от безразмерных переменных $R = r/r_0$ и $T = tv/r_0$,

$$r_0 = \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{p/(p-1)} \left(\frac{A}{v} \right)^{1/(p-1)} \quad (p = m/(n+1) < 1). \quad (1.7)$$

Уравнение равновесия, условие совместности, записанное в напряжениях, кинетическое уравнение и граничное условие на бесконечности в безразмерных переменных будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_r}{\partial R} + \frac{\Sigma_r}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\Sigma^{n-1} \Sigma_r}{\Psi^n} \right] - \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{R \Sigma^{n-1} \Sigma_\varphi}{\Psi^n} \right] = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} - \cos \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} &= - \left(\frac{\Sigma}{\Psi} \right)^m, \\ \Sigma_\alpha &= \frac{1}{R^{1/(n+1)}} \bar{\tau}_\alpha(n, \varphi) \quad (R \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Sigma_r(R, \varphi = 0) = 0, \quad \Sigma_\varphi(R, \varphi = \pi) = 0,$$

где $\Sigma = (\Sigma_r^2 + \Sigma_\varphi^2)^{1/2}$.

Асимптотическое решение краевой задачи (1.8) можно найти, положив

$$\Psi = R^\mu g(\varphi, T) + \dots, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\Psi} = R^\lambda f_\alpha(\varphi, T) + \dots, \quad (1.9)$$

где неизвестные показатели λ и μ связаны соотношением $\mu = 1 + m\lambda$, что следует из кинетического уравнения, а функции f_α, g ($\alpha = r, \varphi$) находятся из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} f'_\varphi &= -(\lambda + \mu + 1)f_r - \frac{f_\varphi g'}{g}, \\ f'_r &= \frac{(n\lambda + 1)f^2 f_\varphi - (n-1)f_r f_\varphi f'_\varphi}{nf_r^2 + f_\varphi^2}, \\ g' &= \frac{\mu g \cos \varphi - f^m}{\sin \varphi}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $f = (f_\varphi^2 + f_r^2)^{1/2}$ и штрихом обозначается дифференцирование по φ .

Данная система уравнений должна быть решена с учетом граничного условия на верхнем берегу трещины

$$f_\varphi(\varphi = \pi) = 0 \quad (1.11)$$

и условия симметрии на продолжении трещины

$$f_r(\varphi = 0) = 0, \quad (1.12)$$

а также условия регулярности решения

$$g(\varphi = 0) = f^m(\varphi = 0)/\mu. \quad (1.13)$$

Система (1.10) с граничными условиями (1.11)–(1.13) приводит к следующей задаче на собственные значения: найти такое собственное число λ , чтобы данная система уравнений с однородными граничными условиями имела ненулевое решение.

Из однородности системы (1.10) следует, что наряду с функциями $f_r(\varphi)$, $f_\varphi(\varphi)$, $g(\varphi)$ функции $\kappa(T)f_r(\varphi)$, $\kappa(T)f_\varphi(\varphi)$, $\kappa^m(T)g(\varphi)$, где $\kappa(T)$ — масштабирующий множитель, также являются решением. Поэтому может быть сформулировано условие нормировки

$$f_\varphi(\varphi = 0) = 1. \quad (1.14)$$

Система уравнений (1.10) с граничными условиями (1.12)–(1.14) представляет собой задачу Коши и может быть проинтегрирована численно при любом значении λ . Численное решение задачи Коши для $\lambda \in [-1, 0]$ с помощью стандартной процедуры метода Рунге—Кутты показало, что ни одно из значений λ не приводит к выполнению условия (1.12) на верхнем берегу трещины. Более того, начиная с некоторого значения $\varphi = \varphi_d$, функция g , входящая в асимптотическое разложение параметра сплошности, становилась отрицательной, что противоречит ее физическому смыслу. Для устранения этого парадокса была предложена модифицированная постановка задачи на собственные значения.

Предполагается, что на некотором отрезке $[\varphi_d, \pi]$ решение для f_φ , f_r , g нулевое¹⁹⁵ и разыскивается ненулевое решение уравнений (1.10), удовлетворяющее граничным условиям (1.12)–(1.14), на отрезке $[0, \varphi_d]$.

Требование непрерывности решения при $\varphi = \varphi_d$ приводит к дополнительным условиям

$$g(\varphi = \varphi_d) = 0, \quad f_\varphi(\varphi = \varphi_d) = 0. \quad (1.15)$$

Требование $f_r(\varphi = \varphi_d) = 0$ переопределяет сформулированную задачу, однако непрерывность f_r не является непременным условием и решение с разрывной функцией f_r не противоречит основным законам механики сплошных сред.

¹⁹⁵Строго обосновать это предположение в рамках модели [14] не удастся. Ясно, однако, что при $\varphi_d < \varphi < \pi$ уже нельзя пользоваться уравнениями (1.8), например, из-за возможной несовместности деформаций в зоне полностью поврежденного материала.

Численное интегрирование модифицированной задачи показало, что решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.15), существует лишь для $\lambda = 0$ и $\varphi_d = \pi/2$. Анализ системы (1.10) показал, что на отрезке $[0, \pi/2]$ при $\lambda = 0$ для данной системы можно найти аналитическое решение

$$g = \cos \varphi, \quad f_\varphi = \cos \varphi, \quad f_r = \sin \varphi. \quad (1.16)$$

Возвращаясь к размерным переменным, асимптотику решения задачи при $r \rightarrow 0$ можно представить как

$$\psi = \kappa^m \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{m/(n+1-m)} \left(\frac{A}{v} \right)^{(n+1)/(n+1-m)} rg(\varphi) \quad (0 < \varphi < \pi/2), \quad (1.17)$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\psi} = \kappa \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/(n+1-m)} f_\alpha(\varphi) \quad (0 < \varphi < \pi/2), \quad (1.18)$$

где κ — неопределенный множитель (вообще говоря, зависящий от t), возникающий вследствие однородности задачи. Зависимость κ от t можно найти при полном решении задачи во всем диапазоне изменения переменных $0 < r < \infty$, $0 < t < \infty$.

Представленное решение модельной задачи о росте трещины антиплоского сдвига в связанной постановке для случая ползучести с поврежденностью показало следующее:

1) У вершины трещины отсутствует характерное для теории трещин сингулярное поле напряжений (эффективные напряжения τ_α/ψ ограничены, а сами напряжения τ_α и сплошность линейно спадают до нуля в вершине трещины), что соответствует результатам конечно-элементных решения для трещин отрыва [200], [245];

2) К свободным от нагрузок берегам трещины $\varphi = \pm\pi$ вблизи ее вершины примыкает область полностью поврежденного материала $\pi/2 < \varphi < \pi$ и $\pi < \varphi < 3\pi/2$, в которой $\tau_\alpha = 0$, $\psi = 0$;

3) Связанность проявляется в исчезновении сингулярности компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций у вершины трещины (что в целом соответствует реальному положению дел) и приводит к относительным меньшим значениям скорости ее роста.¹⁹⁶

¹⁹⁶Следует отметить, что в [14], кроме приведенных здесь результатов, дана также оценка скорости роста трещины и сделан вывод о более низкой скорости распространения трещины по сравнению с результатами, полученными в несвязанной постановке [270], [8], [9], [11]. Однако при анализе был применен C_ψ^* -интеграл, введенный в статье [10] и трактуемый как инвариантный интеграл механики разрушения. Более поздние исследования показали, что этот интеграл свойством инвариантности не обладает. Поэтому вопрос оценки скорости роста трещины в связанной постановке отстает от открытым и требует дополнительного изучения.

4.1.2. Анализ распределения напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины типа I и II (связанная постановка)

Рассмотрим продвигающуюся прямолинейную полубесконечную трещину с началом координат в ее вершине.¹⁹⁷ Пусть трещина движется со скоростью $v(t)$ в направлении оси x_1 . Материальная производная по времени t в движущейся системе координат, связанной с вершиной трещины, определяется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (2.1)$$

где x_1, x_2 — декартовы; r, φ — полярные координаты.

Определяющие соотношения связанной задачи теории ползучести и механики поврежденности имеют вид [130]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (2.2)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и σ_{ij} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений соответственно; σ_e — интенсивность напряжений; ψ — параметр сплошности Качанова—Работнова; B, n — константы степенного закона ползучести.

Кинетическое уравнение для параметра сплошности материала в случае сложного напряженного состояния принимает вид [130], [63], [244]:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\mathcal{E}}}{\psi} \right)^m, \quad (2.3)$$

где $\sigma_{\mathcal{E}}$ — эквивалентное напряжение, которое при одноосном растяжении совпадает с величиной растягивающего напряжения; A, m — константы степенного закона длительной прочности.

В [244] была предложена следующая зависимость эквивалентного напряжения $\sigma_{\mathcal{E}}$ от интенсивности напряжений σ_e , максимального главного напряжения σ_1 и гидростатического напряжения σ_{kk} :

$$\sigma_{\mathcal{E}} = \alpha \sigma_1 + \beta \sigma_e + (1 - \alpha - \beta) \sigma_{kk}. \quad (2.4)$$

Константы α и β в формуле (2.4) находятся экспериментально по серии изохронных кривых длительной прочности.

В начальный момент времени $t = 0$ параметр сплошности $\psi = 1$, а распределение напряжений описывается решением Хатчинсона—Райса—Розенгрена (HRR) для степенных определяющих соотношений [253], [314]:

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, 0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(n, \varphi), \quad (2.5)$$

¹⁹⁷Изложение следует [15].

где C^* -интеграл — не зависящий от пути интегрирования контурный интеграл теории установившейся ползучести, аналогичный J -интегралу, безразмерные I_n и $\bar{\sigma}_{ij}(n, \varphi)$ численно определены в [253].

На верхнем берегу распространяющейся трещины должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi = \pi, t) = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(r, \varphi = \pi, t) = 0. \quad (2.6)$$

Для полубесконечной трещины условие (2.5) при $t > 0$ есть также условие затухания напряжений на бесконечности ($r \rightarrow \infty$).

Решение краевой задачи для определяющих соотношений (2.2), начальных и граничных условий (2.5), (2.6) является функцией следующего множества переменных и материальных параметров задачи: $r, \varphi, t, A, v, C^*/BI_n$.

Анализ размерностей показывает, что можно перейти к следующим безразмерным функциям:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \varphi, t) &= \left(\frac{AC^*}{vBI_n} \right)^{1/q} \Sigma_{ij}(R, \varphi, T), \quad q = n + 1 - m, \\ \psi(r, \varphi, t) &= \Psi(R, \varphi, T), \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad T = \frac{tv}{r_0}, \\ r_0 &= \left(\frac{C^*}{BI_n} \right)^{p/(p-1)} \left(\frac{A}{v} \right)^{1/(p-1)}, \quad p = \frac{m}{n+1} < 1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где Σ_{ij}, Ψ, R, T — безразмерные компоненты тензора напряжений, параметр сплошности, безразмерные полярный радиус и время.

Уравнения равновесия, условие совместности в напряжениях и кинетическое уравнение в полярных координатах для безразмерных величин принимают вид:

$$\frac{\partial \Sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{\Sigma_{RR} - \Sigma_{\varphi\varphi}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma_{R\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Sigma_{R\varphi}}{\partial R} + 2 \frac{\Sigma_{R\varphi}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} &2 \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\Sigma_e^{n-1} \Sigma_{R\varphi}}{\Psi^n} \right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\Sigma_e^{n-1} S_{RR}}{\Psi^n} \right) + \\ &+ R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\Sigma_e^{n-1} S_{RR}}{\Psi^n} \right) - R \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(R \frac{\Sigma_e^{n-1} S_{\varphi\varphi}}{\Psi^n} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} - \cos \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = - \left(\frac{\Sigma_*}{\Psi} \right)^m, \quad (2.11)$$

$$\Sigma_* = \alpha \Sigma_1 + \beta \Sigma_e + (1 - \alpha - \beta) \Sigma_{kk},$$

где $S_{RR} = -S_{\varphi\varphi} = (\Sigma_{RR} - \Sigma_{\varphi\varphi})/2$, $\Sigma_e = (S_{\varphi\varphi}^2 + \Sigma_{R\varphi}^2)^{1/2}$ для случая плоского деформированного состояния; $S_{RR} = (2\Sigma_{RR} - \Sigma_{\varphi\varphi})/3$, $S_{\varphi\varphi} = (2\Sigma_{\varphi\varphi} - \Sigma_{RR})/3$, $\Sigma_e = (S_{RR}^2 + S_{\varphi\varphi}^2 + S_{RR}S_{\varphi\varphi} + \Sigma_{R\varphi}^2)^{1/2}$ для случая плоского напряженного состояния.

Начальные условия в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\Sigma_{ij}(R, \varphi, 0) = R^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(n, \varphi), \quad \Psi(R, \varphi, 0) = 1. \quad (2.12)$$

Асимптотическое решение системы уравнений (2.8)–(2.11) с начальными условиями (2.12) и граничными условиями

$$\Sigma_{\varphi\varphi}(R, \pi, T) = 0, \quad \Sigma_{R\varphi}(R, \pi, T) = 0 \quad (2.13)$$

разыскивается в виде

$$\begin{aligned} \Psi(R, \varphi, T) &= R^\mu \left(g^{(1)}(\varphi, T) + Rg^{(2)}(\varphi, T) + \dots \right), \\ \frac{\Sigma_{ij}}{\Psi} &= R^\lambda \left(f_{ij}^{(1)}(\varphi, T) + Rf_{ij}^{(2)}(\varphi, T) + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставив представление (2.14) в уравнения (2.8)–(2.11), можно получить последовательность систем дифференциальных уравнений для неизвестных функций

$$f_{ij}^{(1)}, g^{(1)}; \quad f_{ij}^{(2)}, g^{(2)}; \dots; \quad f_{ij}^{(k)}, g^{(k)}; \dots$$

Из кинетического уравнения (2.11), в частности, следует, что $\mu = 1 + \lambda m$.

Принимая обозначения $y_1 = g^{(1)}$, $y_2 = f_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $y_3 = f_{R\varphi}^{(1)}$, $y_4 = f_{RR}^{(1)}$ и вводя вспомогательную переменную

$$y_5 = 4(n\lambda + 1)y_3 + (y_2 - y_4)' + (n - 1)(y_2 - y_4)y'/y,$$

где $y = \sqrt{y_3^2 + (y_2 - y_4)^2/4}$, уравнения (2.8)–(2.11) при $R \rightarrow 0$ и уравнение для y_5' можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\mu y_1 \cos \varphi - y_e^m}{\sin \varphi}, \\ y_2' &= -(\lambda + \mu + 2)y_3 - \frac{y_2 y_1'}{y_1}, \\ y_3' &= y_2 - (\lambda + \mu + 1)y_4 - \frac{y_3 y_1'}{y_1}, \\ y_4' &= y_2' - \frac{(y_5 - 4(n\lambda + 1)y_3)y^2 + (n - 1)(y_4 - y_2)y_3 y_3'}{n y^2 - (n - 1)y_3^2}, \\ y_5' &= n\lambda(n\lambda + 2)(y_2 - y_4) - \frac{(n - 1)y_5 y'}{y}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В случае плоского деформированного состояния функция y_e является линейной комбинацией функций $(y_2 + y_4)$ и y вида

$$y_e = (3 - 2\alpha - 3\beta)(y_2 + y_4)/2 + (\alpha + \beta)y.$$

Уравнения (2.15) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений со следующими граничными условиями:

условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$y_2(\varphi = \pi) = 0, \quad y_3(\varphi = \pi) = 0; \quad (2.16)$$

условия симметрии на продолжении трещины

$$y_3(\varphi = 0) = 0, \quad y_4'(\varphi = 0) = 0; \quad (2.17)$$

условие регулярности решения

$$y_1(\varphi = 0) = y_e^m(\varphi = 0)/\mu. \quad (2.18)$$

Следует отметить, что условие симметрии $y_4'(\varphi = 0) = 0$ эквивалентно условию $y_5(\varphi = 0) = 0$.

Система дифференциальных уравнений (2.15) с граничными условиями (2.16)–(2.18) представляет собой классическую нелинейную задачу на собственные значения для неизвестного собственного числа λ и неизвестных собственных функций $y_1(\varphi), \dots, y_5(\varphi)$. Из однородности системы уравнений (2.15) и граничных условий (2.16)–(2.18) следует, что функции $\kappa(T)y_2(\varphi), \dots, \kappa(T)y_5(\varphi)$ и $\kappa^m(T)y_1(\varphi)$ также являются решениями, т.е. амплитуда решения κ не может быть найдена при анализе асимптотического поведения решения при $R \rightarrow 0$. Поэтому для нормировки решения полагаем¹⁹⁸

$$y(\varphi = 0) = 1. \quad (2.19)$$

Для реализации численного решения системы дифференциальных уравнений (2.15) формулируется дополнительное пробное граничное условие при $\varphi = 0$:

$$y_2(0) = Y_2, \quad (2.20)$$

где Y_2 — некоторая константа.

Численное решение сформулированной краевой задачи осуществлялось методом пристрелки: подбирались пробные значения λ и Y_2 , для которых решение системы уравнений (2.15) с граничными условиями (2.17)–(2.20) при $\varphi = 0$ (задача Коши) удовлетворяло бы оставшимся граничным условиям (2.16) при $\varphi = \pi$.

¹⁹⁸Заметим, что данное условие, по-видимому, не является полным, поскольку исключает возможность обращения в нуль интенсивности напряжений при $\varphi = 0$. Априорно исключать возможность обращения в нуль интенсивности напряжений на продолжении трещины нельзя. Поэтому условие $y(\varphi = 0) = 1$ следует признать ограничивающим общность анализа. Корректным условием нормировки, по-видимому, будет условие

$$\max_{0 \leq \varphi \leq \pi} y(\varphi) = 1.$$

Численное решение задачи Коши разыскивалось методом Рунге—Кутта 4-го порядка с автоматическим изменением шага на отрезке $[0, \pi]$. В случае, когда полученное численное решение удовлетворяло условию

$$\sqrt{y_2^2(\pi) + y_3^2(\pi)} < \varepsilon,$$

пробные значения λ и Y_2 считались подобранными верно, а решение найденным.

Результаты решения данной задачи методом пристрелки и методом Рунге—Кутта показали, что никакая пара значений λ и Y_2 не позволяет удовлетворить условиям (2.16) с заданной точностью ε . Более того, оказалось, что независимо от численной реализации метода пристрелки, функция y_1 , начиная с некоторого значения φ_d , становилась отрицательной, что противоречит физическому смыслу сплошности Ψ .

Теоретический анализ поведения решения вблизи точки $\varphi = \pi$ показал, что функция y_1 при $\varphi \rightarrow 0$ ведет себя как $y_1 = C\xi^\mu - y_e^m(\pi)/\mu$, где $\xi = \pi - \varphi$, C — константа. Таким образом, действительно существует некоторое значение $\varphi_d < \pi$, при котором функция y_1 обращается в нуль и на отрезке $[\varphi_d, \pi]$ становится отрицательной.

Для устранения данного противоречия была предложена модифицированная постановка задачи, согласно которой решение разыскивается на отрезке $[0, \varphi_d]$, в оставшейся части полуплоскости все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Очевидно, что такое доопределение функций на отрезке $[\varphi_d, \pi]$ не противоречит условиям непрерывности решения, если потребовать выполнения условий

$$y_1(\varphi = \varphi_d) = 0, \quad y_2(\varphi = \varphi_d) = 0, \quad y_3(\varphi = \varphi_d) = 0. \quad (2.21)$$

Требование непрерывности для y_4 и y_5 не является обязательным при постановке краевых задач механики сплошных сред.

Поэтому для системы (2.15) на отрезке $[0, \varphi_d]$ получаем модифицированную постановку задачи для определения собственных значений и собственных функций, для которых неизвестные значения λ , Y_2 , φ_d находятся из дополнительных условий (2.21).

Численное решение задачи в модифицированной постановке методом пристрелки (интегрирование системы (2.15) осуществляется методом Рунге—Кутта) показало, что такое решение существует для $\lambda = 0$, $\varphi_d = \pi/2$ и $Y_2 = 2$. Более того, для данных значений параметров систему удалось проинтегрировать и найти аналитическое решение задачи

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_0 \cos \varphi, & y_2 &= 2 \cos^2 \varphi, & y_3 &= \sin 2\varphi \\ y_4 &= 2 \sin^2 \varphi, & y_5 &= 0, & y &= 1, & y_e &= 3 - 2\beta - \alpha \\ \psi_0 &= (3 - 2\beta - \alpha)^m. \end{aligned} \quad (2.22)$$

На отрезке $[\pi/2, \pi]$ в соответствии с модифицированной постановкой задачи система (2.15) имеет нулевое решение. Численное решение модифицированной

задачи методом пристрелки показало отсутствие другого решения задачи, удовлетворяющего всем указанным граничным условиям.

Уравнения равновесия и кинетическое уравнение для параметра сплошности в случае плоского напряженного состояния идентичны соответствующим уравнениям для плоской деформации, но условие совместности в напряжениях будет иным. В случае плоского напряженного состояния вспомогательная функция y_5 имеет вид

$$y_5 = 6(n\lambda + 1)y_3 + (y_2 - 2y_4)' + (n - 1)(y_2 - 2y_4)z'/z,$$

где $z = \sqrt{y_3^2 + (y_2^2 + y_4^2 - y_2y_4)/3}$, а система уравнений для $y_1(\varphi), \dots, y_5(\varphi)$ принимает форму

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\mu y_1 \cos \varphi - y_e^m}{\sin \varphi}, \\ y_2' &= -(\lambda + \mu + 2)y_3 - \frac{y_2 y_1'}{y_1}, \\ y_3' &= y_2 - (\lambda + \mu + 1)y_4 - \frac{y_3 y_1'}{y_1}, \\ y_4' &= \frac{y_2'}{2} - \frac{(y_5 - 6(n\lambda + 1)y_3)z^2 + (n - 1)(2y_4 - y_2)(y_3 y_3' + y_2 y_2'/4)}{2nz^2 - 2(n - 1)(y_3^2 + y_2^2/4)}, \\ y_5' &= n\lambda [(2n\lambda + 3)y_2 - (n\lambda + 3)y_4] - \frac{(n - 1)y_5 z'}{z}, \\ y_e &= (2 - \alpha - 2\beta)\frac{y_2 + y_4}{2} + \alpha y + \beta z. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Аналогично решению задачи для плоского деформированного состояния, при нахождении решения системы (2.23) с граничными условиями (2.17)–(2.20) была использована модифицированная постановка задачи на интервале $[0, \varphi_d]$ с дополнительными условиями (2.21). Численное решение задачи для плоского напряженного состояния методом пристрелки показало, что решение также существует лишь для $\lambda = 0$, $\varphi_d = \pi/2$ и $Y_2 = \sqrt{3}$. Для данных значений параметров удалось найти аналитическое решение задачи в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_0 \cos \varphi, \quad y_2 = \sqrt{3} \cos^2 \varphi, \quad y_3 = \sqrt{3} \sin 2\varphi, \quad y_4 = \sqrt{3} \sin^2 \varphi, \\ y_5 &= 0, \quad y = \sqrt{3}/2, \quad z = 1, \quad y_e = \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\beta, \\ \psi_0 &= \left(\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\beta \right)^m. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На отрезке $[\varphi_d, \pi]$ решение, в соответствии с модифицированной постановкой, доопределялось нулевыми значениями.

Возвращаясь к размерным переменным, решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \psi &= \kappa^m (C^*/BI_n)^{m/q} (A/v)^{(n+1)/q} r g^{(1)}(\varphi), \\ \frac{\sigma_{ij}}{\psi} &= \kappa (AC^*/vBI_n)^{1/q} f_{ij}^{(1)}(\varphi), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $f_{ij}^{(1)}$ и $g^{(1)}$ определяются выражениями (2.22) и (2.24) в зависимости от вида задачи.

Следует отметить, что безразмерный параметр κ и текущая скорость трещины $v(t)$ являются неопределенными и могут быть найдены в результате численного решения задачи во всем диапазоне изменения переменных $0 < r < \infty$, $0 < t < \infty$, $0 < \varphi < \pi$.

Полученные результаты означают следующее: к берегам развивающейся в процессе ползучести трещины примыкает область полностью разрушенного материала, в котором (с точностью до членов второго порядка малости относительно расстояния от берегов трещины) поля напряжений и сплошность нулевые. Такое поле напряжений принципиально отличается от соответствующего сингулярного поля напряжений в несвязанной постановке задачи и является результатом влияния поврежденности на процесс ползучести.

Полностью разрушенная область у берегов растущей трещины может быть интерпретирована как область микроветвления, когда вдоль всей траектории развития магистральной трещины возникают ортогонально ориентированные к ней микротрещины, т.е. ортогональное берегам трещины поле микротрещин — преимущественная форма существования поврежденности. Ясно также, что подобная ярко выраженная анизотропность ориентации микротрещин может ставить под сомнение адекватность использованной скалярной меры поврежденности. В разделе 4.3 мы обсудим тензорные меры поврежденности, которые в состоянии учесть анизотропию распределения микротрещин в поврежденной зоне.

4.1.3. Асимптотический анализ усталостного роста трещины в среде с поврежденностью

По сравнению с традиционной механикой деформируемого твердого тела механика поврежденности учитывает изменение свойств материала вследствие накопления различного рода повреждений, что делает необходимым использование определяющих соотношений, включающих параметр поврежденности.

В настоящее время появляются многочисленные исследования, посвященные изучению как стационарной, так и растущей трещины в связанной постановке задачи (в связках упругость—поврежденность, пластичность—поврежденность, ползучесть—поврежденность). Несмотря на то, что единой математически развитой и завершенной теории роста трещин в сплошной среде с учетом процесса накопления повреждений к настоящему моменту не существует, можно выделить характерные особенности, присущие этому классу задач.

Мы попытаемся сделать это на примере асимптотического анализа усталостного роста трещины в среде с поврежденностью [343].

Для линейно упругого материала с рассеянным полем микродефектов уравнения, связывающие напряжения и деформации, имеют вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\psi\varepsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

σ_{ij} , ε_{ij} и C_{ijkl} есть компоненты тензора напряжений, деформаций и начальной жесткости, ψ — сплошность.

Пусть для рассматриваемого материала параметр ψ эволюционирует согласно закону

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m \frac{1}{\psi^{n-m}} & (\sigma_e \geq \sigma_{th} \psi^\gamma), \\ 0 & (\sigma_e < \sigma_{th} \psi^\gamma), \end{cases} \quad (3.2)$$

где N — число циклов; c , m , n ($n > m$), γ и σ_{th} — положительные постоянные материала;

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad (3.3)$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$$

есть компоненты девиатора напряжений.

Если ψ интерпретируется как отношение площади поперечного сечения образца, не занятой повреждениями, к его начальной площади, то можно положить $\gamma = 1$.

Рассмотрим развитие усталостной трещины нормального отрыва (l — текущая длина трещины) в среде с поврежденностью в условиях плоского напряженного состояния.

После введения функции напряжений Эри $F(r, \theta)$:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (3.4)$$

и предположения, что

$$F(r, \theta) = \alpha r^{\lambda+2} f(\theta), \quad \psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta), \quad (3.5)$$

так что

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta), \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\theta) = (\lambda+2)f + f'', \quad \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) = (\lambda+2)(\lambda+1)f, \quad \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) = -(\lambda+1)f'; \quad (3.7)$$

задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, вытекающего из условия совместности деформаций:

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{g'}{g}, \quad \bar{G} = 2E^2 - \frac{g''}{g}; \\ b_1 &= e_1 + c_2 - c_3\nu + c_1e_3, \quad b_2 = 2e_1 + c_1e_3, \quad b_3 = c_2e_1 + c_3e_2, \\ c_1 &= -2(\lambda - \mu + 1), \quad c_2 = \mu - \lambda, \quad c_3 = (\lambda - \mu)(\lambda - \mu + 1); \\ e_1 &= (\lambda + 2)(1 - \nu\lambda - \nu), \quad e_2 = (\lambda + 2)(\lambda - \nu + 1), \\ e_3 &= -(1 + \nu)(1 + \lambda); \end{aligned} \quad (3.9)$$

и уравнения, следующего из кинетического уравнения накопления повреждений:

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda - \mu n} \tilde{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (3.10)$$

где

$$\tilde{\sigma}_e = \sqrt{\tilde{\sigma}_{rr}^2 - \tilde{\sigma}_{rr}\tilde{\sigma}_{\theta\theta} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 + 3\tilde{\sigma}_{r\theta}^2}.$$

Замечание 1. Следует отметить, что последнее соотношение справедливо только при условии

$$\alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_e \geq \sigma_{\text{th}} \beta r^\mu g, \quad (3.11)$$

или

$$q(r, \theta) \geq 1, \quad (3.12)$$

где

$$q(r, \theta) = \frac{\alpha}{\beta \sigma_{\text{th}}} r^{\lambda - \mu} \frac{\tilde{\sigma}_e}{g}. \quad (3.13)$$

Замечание 2. Очевидно также, что необходимо выполнение условия $\lambda - \mu < 0$, поскольку при $r \rightarrow 0$ последнее требование гарантирует существование области, где происходит накопление повреждений.

Производная сплошности по числу циклов $d\psi/dN$ вычисляется по формуле

$$\frac{d\psi}{dN} = \beta \frac{dl}{dN} r^{\mu-1} (-\mu g \cos \theta + g' \sin \theta). \quad (3.14)$$

Действительно, представив производную как

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{d\psi}{dl} \frac{dl}{dN}, \quad (3.15)$$

и воспользовавшись асимптотическим представлением $\psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta)$ и формулами

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dl} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl}, \quad (3.16)$$

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{d\beta}{dl} r^\mu g + \mu \beta r^{\mu-1} g \frac{dr}{dl} + \beta r^{\mu-1} g' \frac{d\theta}{dl}, \quad (3.17)$$

а также (см. рис. 78)

$$\frac{dr}{dl} = -\cos \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = \frac{1}{r} \sin \theta, \quad (3.18)$$

можно получить

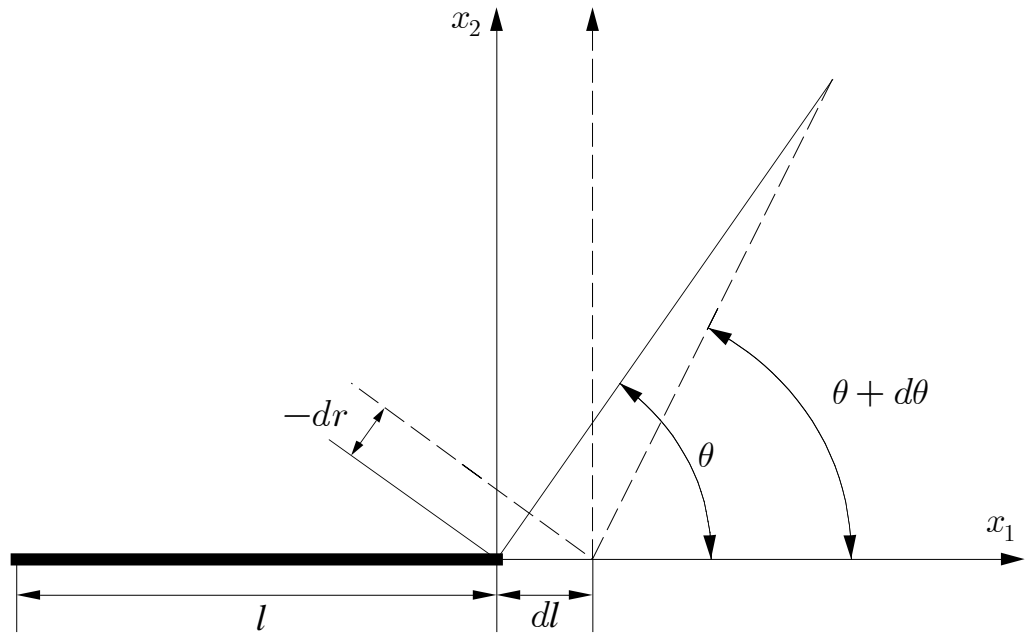


Рис. 78. Выбор системы координат в окрестности вершины продвигающейся трещины

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{d\beta}{dl} r^\mu g + \beta r^{\mu-1} (-\mu g \cos \theta + g' \sin \theta), \quad (3.19)$$

или, отбрасывая первое слагаемое в правой части, имеющее при $r \rightarrow 0$ более высокий порядок малости по сравнению с оставшимся, —

$$\frac{d\psi}{dl} = \beta r^{\mu-1} (-\mu g \cos \theta + g' \sin \theta). \quad (3.20)$$

Пользуясь асимптотическими формулами для напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины, можно установить, что

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda-\mu n} \tilde{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (3.21)$$

откуда, сравнивая с выражения для $d\psi/dN$, полученным ранее, можно заключить

$$\frac{dl}{dN} = c\alpha^m \beta^{-(n+1)}, \quad (3.22)$$

$$\lambda = \frac{\mu(n+1)-1}{m}, \quad (3.23)$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}. \quad (3.24)$$

Поскольку неизвестные постоянные λ и μ связаны друг с другом, то рассматриваемая проблема сводится к задаче на собственные значения для значения μ и системы двух дифференциальных уравнений

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (3.25)$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}. \quad (3.26)$$

В силу симметрии при $\theta = 0$ выполняются следующие условия:

$$f'(0) = f'''(0) = 0, \quad g'(0) = 0. \quad (3.27)$$

Заметим, что в силу однородности уравнений можно положить

$$f(0) = 1. \quad (3.28)$$

На продолжении трещины справедливы условия вида

$$\begin{cases} g(0) = \left[\frac{\tilde{\sigma}_e^m(0)}{\mu} \right]^{1/(n+1)}, \\ g''(0) = F(\mu, f''(0)), \end{cases} \quad (3.29)$$

где $F(\mu, f''(0))$ — некоторая функция.¹⁹⁹

Традиционные условия для напряжений на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \pi) = \sigma_{r\theta}(r, \pi) = 0. \quad (3.30)$$

Кроме того, может быть сформулировано естественное условие на берегах трещины

$$\psi(r, \pi) = 0.$$

Этим условиям, вообще говоря, невозможно удовлетворить, располагаясь только двумя параметрами μ и $f''(0)$, так как если все сформулированные условия на берегах трещины выполняются, то имеем $\sigma_{rr}(r, \pi) = 0$ и, следовательно, имеются три условия и лишь два подбираемых параметра.

Поэтому необходимо перейти к модифицированной постановке задачи, вводя новый неизвестный угол θ_d , такой что

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta_d) = \sigma_{r\theta}(r, \theta_d) = 0, \\ \psi(r, \theta_d) = 0 \quad (0 < \theta_d \leq \pi), \end{cases} \quad (3.31)$$

или

$$\begin{cases} f(\theta_d) = f'(\theta_d) = 0, \\ g(\theta_d) = 0 \quad (0 < \theta_d \leq \pi). \end{cases} \quad (3.32)$$

¹⁹⁹Можно показать, что

$$g''(0) = \frac{2\mu g(0) + mh_1 [g(0)]^{-n} [\tilde{\sigma}_e(0)]^{m-2}}{[2\mu(n+1) - 4] g(0) - mh_2 [g(0)]^{-(n+1)} [\tilde{\sigma}_e(0)]^{m-2}},$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= 2s_1 f''(0) + (s_2 + 2s_3) [f''(0)]^2 - [s_2 + 2f''(0)] [b_1 f''(0) + b_3], \\ h_2 &= [s_2 + 2f''(0)] [f''(0) + e_1], \\ s_1 &= (\lambda + 2)^2 (\lambda^2 + \lambda + 1), \quad s_2 = (\lambda + 2)(1 - \lambda), \quad s_3 = 3(1 + \lambda). \end{aligned}$$

Численное решение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $f(\theta)$, $g(\theta)$

$$f'''' - 2\bar{E}f''' + (b_1 + \bar{G})f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (3.33)$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (3.34)$$

получено с помощью метода Рунге—Кутта при задании значений μ и $f''(0)$ и проверки выполнения граничных условий при $\theta = \theta_d$.

Рассматривались следующие значения материальных констант: $\nu = 0.3$, $\gamma = 1$, $m = 2, 4, 7$ и $n = 2, 4, 7$.

Приведем полученную в [343] таблицу значений найденных показателей λ , μ и углов θ_d для различных значений материальных констант.

m	n	μ	λ	θ_d
2	2	0.331	−0.003	130.7°
2	4	0.251	0.128	95.7°
2	7	0.152	0.106	92.1°
4	4	0.257	0.071	113.5°
4	7	0.158	0.067	97.2°
7	7	0.168	0.049	107.8°

Для приведенных значений констант материала построены [343] области, в которых происходит накопление повреждений.

Контуров этих областей определяются уравнением $\omega^{-1}r = \tilde{r}_d(\theta)$, где

$$\tilde{r}_d(\theta) = \frac{r_d(\theta)}{\omega}, \quad \omega = r_d(0), \quad (3.35)$$

причем $r_d(\theta)$ находится из уравнения

$$q(r_d, \theta) = 1 \quad (q(\omega, 0) = 1). \quad (3.36)$$

Скорость роста усталостной трещины будет теоретически найдена после определения констант α и β в (3.22). Для этих целей необходимо исследовать характеристики поля, окружающего область, в которой существенен процесс накопления повреждений. Самая простая схема — предположить, что поле напряжений вне области накопления повреждений определяется сингулярным слагаемым классического упругого решения. Таким образом, по аналогии с маломасштабным пластическим течением данное предположение можно назвать гипотезой о маломасштабной поврежденности, согласно которой считается, что зона, где процесс накопления повреждений существенен, мала по сравнению с длиной макроскопической трещины, с характерным линейным размером образца. Более сложная схема — предположение о существовании промежуточной

области, разделяющей зону накопления повреждений и удаленную зону доминирования чисто упругого решения. Напряжения внутри промежуточной области определяются выражением:

$$\sigma_{ij}^*(r, \theta) = \tilde{K}_I r^{-1/p} \delta_{ij}^*(\theta), \quad (3.37)$$

где \tilde{K}_I — аналог коэффициента интенсивности напряжений для промежуточной области. В силу влияния процесса накопления повреждений особенность напряжений должна быть более слабой по сравнению с особенностью упругого решения, поэтому $p > 2$.

В [343] дан качественный анализ введенной промежуточной области с целью определения α и β . Рассмотрим условия непрерывности на границе области накопления повреждений и переходной зоны в точке $\theta = 0$ и $r = \omega$ (см. (3.35) и (3.36)).

Необходимо сформулировать условие непрерывности напряжения σ_{rr} :

$$\sigma_{rr}(\omega, 0) = \sigma_{rr}^*(\omega, 0), \quad (3.38)$$

непрерывность параметра сплошности:

$$\psi(\omega, 0) = 1, \quad (3.39)$$

а также условие, определяющее область накопления повреждений:

$$q(\omega, 0) = 1. \quad (3.40)$$

Разрешая систему последних трех уравнений (3.38)–(3.40) относительно ω , α и β , можно найти

$$\begin{aligned} \omega &= \left[\frac{\tilde{K}_I \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p, \\ \alpha &= \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}(0)}{\tilde{K}_I \bar{\sigma}_e(0) \bar{\sigma}_{rr}^*(0)} \right]^{p\lambda} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\lambda+1}, \\ \beta &= \frac{1}{\tilde{\varphi}(0)} \left[\frac{\sigma_{th} \bar{\sigma}_{rr}(0)}{\tilde{K}_I \bar{\sigma}_{rr}^*(0) \bar{\sigma}_e(0)} \right]^{p\mu}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Учитывая полученные результаты, можно оценить скорость роста трещины

$$\frac{dl}{dN} = c \tilde{K}_I^p, \quad (3.42)$$

где

$$c = \tilde{c} [\bar{\varphi}(0)]^{n+1} \left[\frac{\sigma_{th}}{\bar{\sigma}_e(0)} \right]^{m-p} \left[\frac{\bar{\sigma}_{rr}^*(0)}{\bar{\sigma}_{rr}(0)} \right]^p. \quad (3.43)$$

Последняя формула представляет собой соотношение, по своей структуре аналогичное закону роста усталостной трещины Париса—Эрдогана (P. S. Paris,

Ф. Erdogan, 1963 г.). В частности, если $p = 2$ (что соответствует предположению о том, что зона накопления повреждений окружена K_I -доминантной областью), имеет место формула

$$\frac{dl}{dN} = cK_I^2. \quad (3.44)$$

4.2. Автомодельные решения задач теории трещин в связанной постановке (связка ползучесть—поврежденность)

Вопросам определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины как стационарной, так и растущей трещины в связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности в последнее время посвящается большое количество исследований [14], [15], [343], [275], [274], [338], [322]. Основным интерес представляет оценка влияния процесса накопления повреждений на распределение напряжений и скоростей деформаций ползучести. С практической точки зрения важно определить скорость докритического подрастания трещины.

Можно выделить ряд характерных черт, свойственных двумерным задачам о стационарной и растущей полубесконечных трещинах в неограниченном теле в связанной постановке (упругость—поврежденность, ползучесть—поврежденность).

В [14], [15], [343] показано, что влияние накопления повреждений проявляется либо в полном исчезновении особенности напряжений в окрестности вершины трещины, либо в значительном ослаблении сингулярности поля напряжений (показатель степени α в $r^{-\alpha}$ уменьшается).

В [14] установлено, что эффективные напряжения σ_{ij}/ψ , где ψ — параметр сплошности Качанова—Работнова, ограничены при приближении к вершине трещины, а параметр сплошности и сами компоненты тензора напряжений линейным образом спадают до нуля при $r \rightarrow 0$.

В [343] представлен асимптотический анализ полей напряжений и деформаций в окрестности растущей усталостной трещины в связанной постановке для линейно упругих определяющих соотношений. Численное исследование полученной системы уравнений для различных значений определяющих констант m и n , входящих в кинетическое уравнение, задающее степенной закон накопления повреждений, показало, что связанность постановки задачи приводит к слабой сингулярности (по сравнению с классической асимптотикой линейной механики разрушения) поля напряжений для малых значений m и n , тогда как при возрастании значений данных параметров особенность вообще исчезает.

В [275], [274], где представлено асимптотическое исследование стационарной трещины нормального отрыва в упругом нелинейно вязком теле со степенной зависимостью между напряжениями и скоростями деформаций ползучести, учет влияния поврежденности также приводит к устранению особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины.

Следующей характерной чертой, присущей этому типу задач, является наличие области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль [14], [15]. В данных работах при численном определении коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности оказалось, что, начиная с некоторого значения полярного угла φ_d (значение $\varphi = \pi$ соответствует верхнему берегу трещины, $\varphi = 0$ — ее продолжению) функция, определяющая главный член асимптотического разложения параметра сплошности, начинает принимать отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу этой величины. Данное обстоятельство привело к модифицированной постановке задачи, согласно которой решение разыскивалось лишь для значений $0 \leq \varphi \leq \varphi_d$. Оставшаяся область $\varphi_d \leq \varphi \leq \pi$, локализованная в окрестности вершины распространяющейся трещины, есть полностью разрушенная зона, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю. На границе же введенных областей должны выполняться условия непрерывности функции сплошности и компонент тензора напряжений. В [343] авторы апеллируют к невозможности выполнения граничных условий на берегах трещины и переходят к модифицированной постановке задачи, вводя область полностью разрушенного материала, примыкающую к берегам трещины.

Необходимо отметить, что вместе с асимптотическим изучением полей в окрестности вершины трещины в связанной постановке использовались и иные методы. Например, для анализа растущей трещины антиплоского сдвига в [338] сделана попытка использования метода годографа. Однако авторы вообще отказываются от проблемы интегрирования кинетического уравнения и оперируют с предполагаемым результатом интегрирования, полагая, что параметр сплошности (или поврежденности) есть функция лишь от напряжений, но не физических координат x_1, x_2 , что, вообще говоря, неверно. Явная зависимость параметра сплошности от координат x_1, x_2 вносит сложности в процедуру метода годографа и ставит под сомнение возможность его использования для движущейся трещины.

Для анализа распространяющейся трещины в среде с поврежденностью для степенных определяющих соотношений в [322] предложена автомодельная переменная, что позволяет снизить число независимых переменных (в данной задаче время может быть исключено из числа независимых переменных). Однако полное решение задачи и даже полная математическая постановка задачи отсутствуют.

К числу еще неразрешенных задач, требующих детального изучения, относится оценка скорости роста трещины в условиях ползучести в среде с поврежденностью и связанная с данным вопросом проблема срачивания "ближнего поля" (т.е. решения, полученного в окрестности вершины трещины) с "дальним полем", определяемым заданными граничными условиями на бесконечности.²⁰⁰ Стандартным приемом срачивания "ближнего" и "дальнего" полей является использование инвариантных интегралов механики разрушения: J -интеграла,

²⁰⁰Здесь имеется ввиду задача о росте полубесконечной трещины в неограниченной среде.

C^* -интеграла и некоторых иных инвариантных интегралов, полученных обобщением упомянутых. Однако такие параметры не обладают свойством инвариантности в рамках связанной постановки задачи теории ползучести и механики поврежденности.

В данном разделе приведено новое исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности в окрестности трещины антиплоского сдвига в связанной постановке с помощью автомодельной переменной, предложенной в [322], определена геометрия области полностью разрушенного материала.

4.2.1. Автомодельная переменная в задаче о трещине в среде с поврежденностью

Рассмотрим стационарную полубесконечную трещину в неограниченном теле в материале с определяющими соотношениями, построенными на основе степенной связи между скоростями деформаций ползучести и напряжениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2}B \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\psi}, \quad (1.1)$$

где ψ — параметр сплошности; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; s_{ij} — компоненты девиатора напряжений; σ_e — интенсивность напряжений; B , n — константы материала.

Начальные условия имеют вид

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t = 0) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n), \quad (1.2)$$

где C^* — инвариантный интеграл теории установившейся ползучести; I_n — функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный C^* -интеграл; $\bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n)$ — функции, известные из решения Хатчинсона, Райса и Розенгрена (HRR-асимптотика); r , φ — полярные координаты.

Асимптотическое условие при $r \rightarrow \infty$ определяется решением аналогичной задачи без учета процесса накопления повреждений ($\psi = 1$):

$$\sigma_{ij}(r \rightarrow \infty, \varphi, t) = \left(\frac{C^*}{BI_n r} \right)^{1/(n+1)} \bar{\sigma}_{ij}(\varphi, n). \quad (1.3)$$

Заметим, что начальное условие при $t = 0$ (1.2) и граничное условие в бесконечно удаленной точке (1.3) совпадают, поскольку они задаются решением задачи для $\psi = 1$.

Необходимо отметить, что асимптотическое условие (1.3) справедливо для всех $n > 1$, так как это условие есть, ставшее уже классическим, решение HRR для степенных соотношений, связывающих скорости деформаций ползучести и напряжения. В случае $n = 1$ оказывается, что скоростями упругих деформаций

даже для неподвижной трещины пренебрегать нельзя и определяющий закон должен иметь вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B s_{ij}. \quad (1.4)$$

Поэтому распределение напряжений (1.3) не является решением задачи для определяющего закона (1.4). В силу этого дальнейшие рассмотрения справедливы для всех $n > 1$.

В [322] установлено, что для определяющих соотношений (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3) существует автомодельная переменная

$$R = \frac{r}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad (1.5)$$

где $k(n) = C^*/(BI_n)$; A , m — постоянные кинетического уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\vartheta}}{\psi} \right)^m, \quad (1.6)$$

или в декартовой системе координат — автомодельные переменные

$$X_1 = \frac{x_1}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}, \quad X_2 = \frac{x_2}{k(n) (At)^{(n+1)/m}}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.5) и само существование автомодельной переменной R без труда обосновывается с помощью анализа размерностей.

Перейдем к безразмерным величинам согласно формулам

$$\hat{r} = \frac{r}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T}, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}}, \quad (1.8)$$

где L — некоторая характерная длина, T — характерное время. Характерные длина и время могут быть связаны с помощью анализа кинетического уравнения накопления повреждений, позволяющего установить, что

$$T = \frac{1}{A} \left(\frac{k(n)}{L} \right)^{-m/(n+1)}. \quad (1.9)$$

В этом случае безразмерные напряжения $\hat{\sigma}_{ij}$ как функции от безразмерных переменных могут быть представлены в следующей форме

$$\hat{\sigma}_{ij}(\hat{r}, \varphi, \hat{t}) = \frac{1}{(k(n)/L)^{1/(n+1)}} \sigma_{ij}(r/L, \varphi, tA (k(n)/L)^{m/(n+1)}). \quad (1.10)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче отсутствует характерный линейный размер L , то необходимо его исключить из аргументов функции $\hat{\sigma}_{ij}$, что достигается с помощью введения автомодельной переменной

$$R = \frac{r/L}{\left[tA (k(n)/L)^{m/(n+1)} \right]^{(n+1)/m}}. \quad (1.11)$$

В результате имеем автомодельную переменную (1.5).

В этом случае напряжения и параметр сплошности представляются в виде

$$\sigma_{ij}(r, \varphi, t) = (At)^{(n+1)/m} \hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi), \quad \psi(r, \varphi, t) = \hat{\psi}(R, \varphi), \quad (1.12)$$

где $\hat{\sigma}_{ij}(R, \varphi)$ и $\hat{\psi}(R, \varphi)$ являются безразмерными функциями безразмерных переменных R, φ и подлежат определению в ходе решения конкретных краевых задач.

4.2.2. Антиплоский сдвиг пространства с полубесконечной трещиной (автомодельное решение связанной задачи)

4.2.2А. Постановка задачи в автомодельных переменных

В механике деформируемого твердого тела часто оказывается удобным начинать изучение явления с наиболее простой с математической точки зрения задачи антиплоского сдвига. Поэтому сначала рассматривается проблема стационарного состояния полубесконечной трещины антиплоского сдвига в условиях ползучести в среде с поврежденностью. На основе результатов исследований [14], [15], [343] принимается, что у вершины трещины существует область полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль.

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений, состоящей из уравнения равновесия

$$\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{\sigma}_{Rz}) + \frac{\partial \hat{\sigma}_{\varphi z}}{\partial \varphi} = 0; \quad (2.1)$$

условия совместности, сформулированного для скоростей деформаций ползучести $\hat{\gamma}_{\varphi z}$ и $\hat{\gamma}_{Rz}$,

$$\frac{\partial}{\partial R} (R \hat{\gamma}_{\varphi z}) = \frac{\partial \hat{\gamma}_{Rz}}{\partial \varphi}, \quad (2.2)$$

где

$$\hat{\gamma}_{Rz} = \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_{Rz}}{\hat{\psi}}, \quad \hat{\gamma}_{\varphi z} = \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}} \right)^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_{\varphi z}}{\hat{\psi}}; \quad (2.3)$$

$$\hat{\gamma}_{Rz}(R, \varphi) = \frac{2\gamma_{Rz}(r, \varphi, t)}{3B} (At)^{n(n+1)/m},$$

$$\hat{\gamma}_{\varphi z}(R, \varphi) = \frac{2\gamma_{\varphi z}(r, \varphi, t)}{3B} (At)^{n(n+1)/m};$$

и кинетического уравнения

$$R \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R} = \frac{m}{n+1} \left(\frac{\hat{\sigma}_e}{\hat{\psi}} \right)^m. \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) должно удовлетворять следующим граничным условиям: условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\hat{\sigma}_{\varphi z}(R, \varphi = \pi) = 0; \quad (2.5)$$

условию симметрии на ее продолжении

$$\hat{\sigma}_{Rz}(R, \varphi = 0) = 0. \quad (2.6)$$

Асимптотическое условие сближения разыскиваемого решения с распределением HRR при $R \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\hat{\sigma}_{Rz}(R, \varphi) = R^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{Rz}(\varphi, n), \quad \hat{\sigma}_{\varphi z}(R, \varphi) = R^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{\varphi z}(\varphi, n) \quad (2.7)$$

(граничное условие в бесконечно удаленной точке).

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4), подчиняющееся граничным условиям (2.5)–(2.7), разыскивается во всей плоскости за исключением поврежденной зоны, внутри которой материал не удовлетворяет сформулированной системе уравнений. Предполагается, что внутри области полностью разрушенного материала все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, а на границе области полностью поврежденной зоны разыскиваемое решение должно удовлетворять условиям непрерывности:

$$\hat{\psi} = 0, \quad \hat{\sigma}_{Rz} = 0, \quad \hat{\sigma}_{\varphi z} = 0. \quad (2.8)$$

4.2.2Б. Асимптотическое решение автомодельной задачи

Для построения асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности в окрестности вершины трещины необходимо перейти к новой системе координат (рис. 79), смещенной на расстояние ξ относительно вершины трещины вправо $x_1 = x'_1 + \xi$, $x_2 = x'_2$, где ξ — протяженность области разрушенного материала по горизонтальной оси ($\rho = r'$):²⁰¹

$$R \cos \varphi = \xi + \rho \cos \theta, \quad R \sin \varphi = \rho \sin \theta. \quad (2.9)$$

В противном случае, разыскивая асимптотические разложения в окрестности вершины трещины (при малых R), пришлось бы исследовать систему уравнений в той области, где она не описывает состояния тела.

В системе координат ρ, θ система уравнений (2.1)–(2.4) принимает форму:²⁰² уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{\rho z}) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0; \quad (2.10)$$

условие совместности

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \gamma_{\theta z}) = \frac{\partial \gamma_{\rho z}}{\partial \theta}; \quad (2.11)$$

²⁰¹ Величина ξ также подлежит определению.

²⁰² В дальнейшем символ $\hat{}$ при записи уравнений опускается.

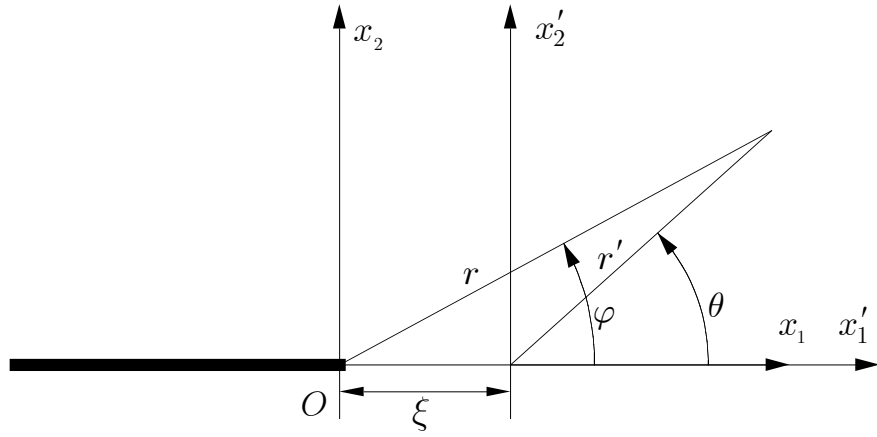


Рис. 79. Новая система координат, смещенная на расстояние ξ вправо относительно вершины трещины

определяющие уравнения

$$\gamma_{\rho z} = \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{\rho z}}{\psi}, \quad \gamma_{\theta z} = \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{\sigma_{\theta z}}{\psi}, \quad (2.12)$$

кинетическое уравнение

$$(\rho + \xi \cos \theta) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \xi \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{n+1} \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m. \quad (2.13)$$

Граничное условие на верхнем берегу трещины есть

$$\sigma_{\theta z}(\rho, \theta = \pi) = 0. \quad (2.14)$$

Условие симметрии на линии трещины

$$\sigma_{\rho z}(\rho, \theta = 0) = 0 \quad (2.15)$$

сохраняет свою форму.

Асимптотическое условие (2.7) при $\rho \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\sigma_{sz}(\rho, \theta) = \rho^{-1/(n+1)} \bar{\sigma}_{sz}(\theta, n) \quad (s = \rho, \theta). \quad (2.16)$$

Решение системы уравнений (2.10)–(2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.16) в окрестности вершины трещины $r' = 0$ (т.е. $\rho \rightarrow 0$) разыскивается в форме степенных разложений

$$\frac{\sigma_{sz}}{\psi} = \rho^\alpha f_{sz}(\theta) + \dots, \quad \psi = \rho^\mu g(\theta) + \dots, \quad (2.17)$$

где $\mu > 0$, α — неизвестные показатели, подлежащие определению. Функции $f_{sz}(\theta)$, $g(\theta)$ находятся из решения системы уравнений (2.10)–(2.13) с граничными условиями (2.14)–(2.16).

Подстановка главных членов асимптотических разложений (2.17) в уравнение равновесия и условие совместности приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta} (f_{\theta z} g) + (1 + \mu + \alpha) f_{\rho z} g = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{d\theta} (f^{n-1} f_{\rho z}) = (\alpha n + 1) f^{n-1} f_{\theta z}, \quad (2.19)$$

где $f = \sqrt{f_{\rho z}^2 + f_{\theta z}^2}$.

Кинетическое уравнение принимает вид

$$(\rho + \xi \cos \theta) \mu \rho^{\mu-1} g - \xi \sin \theta \rho^{\mu-1} \frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1} \rho^{\alpha m} f^m. \quad (2.20)$$

При $\rho \ll \xi$ первое слагаемое в левой части последнего уравнения есть величина более высокого порядка малости по сравнению с оставшимися двумя слагаемыми и им можно пренебречь. Поэтому для $\rho \ll \xi$ кинетическое уравнение упрощается:

$$\xi \cos \theta \mu \rho^{\mu-1} g - \xi \sin \theta \rho^{\mu-1} \frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1} \rho^{\alpha m} f^m. \quad (2.21)$$

Анализ этого уравнения показывает, что $\mu - 1 = \alpha m$.

Таким образом, для главных членов асимптотических разложений компонент тензора напряжений и сплошности можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.18), (2.19) и (2.21), решение которой необходимо подчинить граничным условиям

$$f_{\rho z}(\theta = 0) = 0, \quad f_{\theta z}(\theta = \pi) = 0, \quad (2.22)$$

причем для устранения особенности функции $g(\theta)$ при $\theta = 0$ следует добавить условие регулярности решения, вытекающее из кинетического уравнения:

$$g(\theta = 0) = \frac{m}{n+1} \frac{1}{\mu \xi} [f(\theta = 0)]^m. \quad (2.23)$$

Вводя новые функции

$$h(\theta) = \sqrt[n]{\frac{m}{(n+1)\xi}} f(\theta), \quad h_s(\theta) = \sqrt[n]{\frac{m}{(n+1)\xi}} f_{sz}(\theta), \quad (2.24)$$

можно исключить характерный линейный размер ξ области полностью разрушенного материала перед вершиной трещины из разрешающей системы урав-

нений. В результате получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}(h_\theta g) + (1 + \mu + \alpha)h_\rho g = 0, \\ \frac{d}{d\theta}(h^{n-1}h_\rho) = (\alpha n + 1)h^{n-1}h_\theta, \\ \mu \cos \theta g - \sin \theta \frac{dg}{d\theta} = h^m \end{cases} \quad (2.25)$$

с граничными условиями

$$h_\rho(\theta = 0) = 0, \quad h_\theta(\theta = \pi) = 0, \quad \mu g(\theta = 0) = h(\theta = 0). \quad (2.26)$$

Полученная система уравнений полностью совпадает с исследованной ранее системой уравнений [14], и можно сразу же дать результаты ее анализа (ср. 3.10.5, система уравнений (1.10)).

Установлено [14], что:

1) Система (2.25) является однородной системой уравнений, так что, если функции $h_s(\theta)$, $g(\theta)$ есть решение системы, то и $\kappa h_s(\theta)$, $\kappa^m g(\theta)$ есть также решение той же системы. Это обстоятельство ведет к возможности нормировки граничного условия на продолжении трещины

$$h_\theta(\theta = 0) = 1. \quad (2.27)$$

2) Краевая задача (2.25)–(2.27) (без учета условия на берегу трещины) есть задача Коши, и система (2.25) может быть проинтегрирована численно при любом значении параметра α ($\mu = 1 + \alpha m$). Дополнительное условие при $\theta = \pi$ позволяет из множества всех α найти искомое собственное число.

3) Численное решение задачи Коши с помощью метода Рунге–Кутты показало, что ни одно из значений α не приводит к выполнению условия на берегах трещины. Более того, установлено, что, начиная с некоторого $\theta = \theta_d$, функция $g(\theta)$, входящая в асимптотическое разложение для параметра сплошности принимает отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу данной величины. Для устранения этого противоречия была введена модифицированная постановка задачи, согласно которой на отрезке $[\theta_d, \pi]$ решение нулевое, а на отрезке $[0, \theta_d]$ необходимо искать ненулевое решение системы уравнений (2.25) с граничными условиями

$$g(\theta = \theta_d) = 0, \quad h_\theta(\theta = \theta_d) = 0, \quad (2.28)$$

выражающими требования непрерывности решения при $\theta = \theta_d$.

4) Численное решение модифицированной задачи показало, что функции, удовлетворяющие сформулированным уравнениям и граничным условиям, существуют лишь для $\alpha = 0$ и $\theta_d = \pi/2$. Таким образом, решение поставленной краевой задачи имеет вид

$$g = \cos \theta, \quad h_\theta = \cos \theta \quad h_\rho = \sin \theta. \quad (2.29)$$

Возвращаясь к исходным функциям, искомое решение можно представить в виде

$$f_{\theta z}(\theta) = \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} \cos \theta, \quad f_{\rho z}(\theta) = \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} \sin \theta, \quad (2.30)$$

$$g(\theta) = \kappa^m \cos \theta.$$

Выражения

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) &= \kappa^m \rho \cos \theta, \\ \frac{\sigma_{sz}(\rho, \theta)}{\psi} &= \kappa \sqrt[m]{\frac{(n+1)\xi}{m}} h_s \end{aligned} \quad (2.31)$$

дают распределение сплошности и компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины (вне области полностью разрушенного материала). Следовательно, областью полностью разрушенного материала являются зоны $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ и $-\pi \leq \theta \leq -\pi/2$, локализованные в окрестности вершины трещины.

Для определения конфигурации области полностью поврежденного материала необходимо рассмотреть значения ρ , сравнимые с характерным линейным размером данной зоны ξ . Действительно, анализ $\rho \ll \xi$ позволяет лишь установить наличие вертикальной касательной к границе рассматриваемой области при $\theta = 0$.

Кинетическое уравнение (2.20) показывает, что на расстояниях $\rho \sim \xi$ первое слагаемое в левой части уравнения не является малым более высокого порядка по сравнению с остальными и его необходимо учитывать. Так, при $\rho = \xi$ кинетическое уравнение (2.20) принимает форму

$$(1 + \cos \theta) \mu \xi^{\mu-\alpha m} g - \sin \theta \xi^{\mu-\alpha m} \frac{dg}{d\theta} = \frac{m}{n+1} f^m. \quad (2.32)$$

Таким образом, в дальнейшем исследуется обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(C + \cos \theta) \mu g_1 - \sin \theta \frac{dg_1}{d\theta} = \frac{m}{n+1} f^m, \quad (2.33)$$

полученное из кинетического уравнения (2.20) путем задания значений $\rho = C\xi$ и последующей заменой

$$g_1 = \xi (C\xi)^{\mu-1-\alpha m} g,$$

с вытекающим из него условием регулярности

$$g_1(0) = \frac{m (f(0))^m}{(n+1)(C+1)\mu}. \quad (2.34)$$

Полагая $h_s = \sqrt[n]{m/(n+1)}f_s$, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}(h_\theta g_1) + (1 + \mu + \alpha)h_\rho g_1 = 0, \\ \frac{d}{d\theta}(h^{n-1}h_\rho) = (\alpha n + 1)h^{n-1}h_\theta, \\ (C + \cos \theta)\mu g_1 - \sin \theta \frac{dg_1}{d\theta} = h^m \end{cases}$$

с граничными условиями $h_\rho(0) = 0$, $h_\theta(0) = 1$ и условием регулярности $g_1(0) = 1/(\mu(C+1))$, решение которой осуществлялось методом Рунге—Кутты.

В ходе построения решения задавались расстояния $\rho = C\xi$ и подбирались значения параметров α и μ , которые в данном случае не связаны друг с другом,²⁰³ с тем чтобы выполнились граничные условия²⁰⁴

$$g_1(\theta = \theta_d) = 0, \quad h_\theta(\theta = \theta_d) = 0. \quad (2.35)$$

Для случая $n = 2$, $m = 0.7n$ значения этих параметров приведены в таблице.

Найденные значения углов θ_d позволяют исследовать геометрию зоны полностью разрушенного материала (см. рис. 80–81): полностью разрушенная область примыкает к берегам трещины, охватывая ее вершину и простираясь на расстояние, равное приблизительно 4ξ ($n = 2$, $m = 0.7n$) вдоль ее берегов.

В рассматриваемой задаче численное исследование полей напряжений, скоростей деформаций ползучести и сплошности позволяет утверждать, что область полностью поврежденного материала примыкает к берегам трещины на расстояниях $-4\xi \leq X_1 \leq 0$. За пределами этой зоны решение выходит на решение HRR и параметр поврежденности принимает постоянное значение (что соответствует асимптотическому условию на бесконечности).

²⁰³Отметим, что из полученного решения в непосредственной окрестности вершины трещины, где $\alpha = 0$ и $\mu = 1$, а также из граничного условия в бесконечно удаленной точке, указывающего, что $\alpha = -1/(n+1)$ и $\mu = 0$ при больших ρ , можно предположить, что показатели степеней удовлетворяют неравенствам $-1/(n+1) \leq \alpha \leq 0$ и $0 \leq \mu \leq 1$ и в отличие от случая малых ρ , когда из кинетического уравнения удастся определить связь между показателями α и μ , в случае, когда расстояния ρ и ξ сравнимы друг с другом, не удастся определить связь между показателями степеней α и μ .

²⁰⁴Анализ кинетического уравнения при $\theta \rightarrow \pi$ с учетом естественного граничного условия на берегу трещины $g_1(\theta = \pi) = 0$ показывает, что $h(\theta = \pi) = 0$, следовательно, не только $h_\theta(\theta = \pi) = 0$, но и $h_\rho(\theta = \pi) = 0$. Поэтому вновь можно прийти к гипотезе о существовании области полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность обращаются в нуль, что, в свою очередь, делает необходимым введение дополнительного угла θ_d . Таким образом, имеются три неизвестные величины μ , α и θ_d , подлежащие определению всего из двух условий $g_1(\theta = \theta_d) = 0$, $h_\theta(\theta = \theta_d) = 0$. В ходе численного анализа была предложена следующая процедура нахождения неизвестных показателей степеней и угла θ_d . Поскольку отрезок изменения параметра α известен ($\alpha \in [-1/(n+1), 0]$), то, назначая α из данного отрезка, всегда можно подобрать два оставшихся параметра из сформулированных граничных условий. Следует отметить существующий произвол при назначении α , так как фактически задавая C и α , априори выбирается характер поведения эффективных напряжений для указанного ρ и по нему восстанавливается промежуточная асимптотика параметра сплошности (асимптотика решения на достаточно больших расстояниях ρ по сравнению с нулем, но все еще малых по сравнению с бесконечностью). В ходе построения численного решения исследовались различные комбинации показателей α и μ , для которых значения угла θ_d оказывались в нужном диапазоне $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Численный эксперимент показал, что существует вполне определенный интервал значений показателей α и μ для выбранного значения C (с точностью до 0.01 для значений α и μ).

C	α	μ	θ_d
0.1	-0.10	0.787947	108, 18°
0.3	-0.11	0.666503	113, 04°
0.5	-0.12	0.579088	117, 18°
0.7	-0.13	0.513216	120, 91°
1	-0.15	0.438834	126, 76°
1.5	-0.175	0.358035	134, 14°
2	-0.2	0.304887	140, 94°
2.2	-0.21	0.288359	143, 59°
2.5	-0.225	0.267102	147, 51°
2.8	-0.24	0.249113	151, 42°
3	-0.265	0.235920	157, 63°
3.5	-0.32	0.199433	172, 12°
4	-0.333	0.0001	180.00°

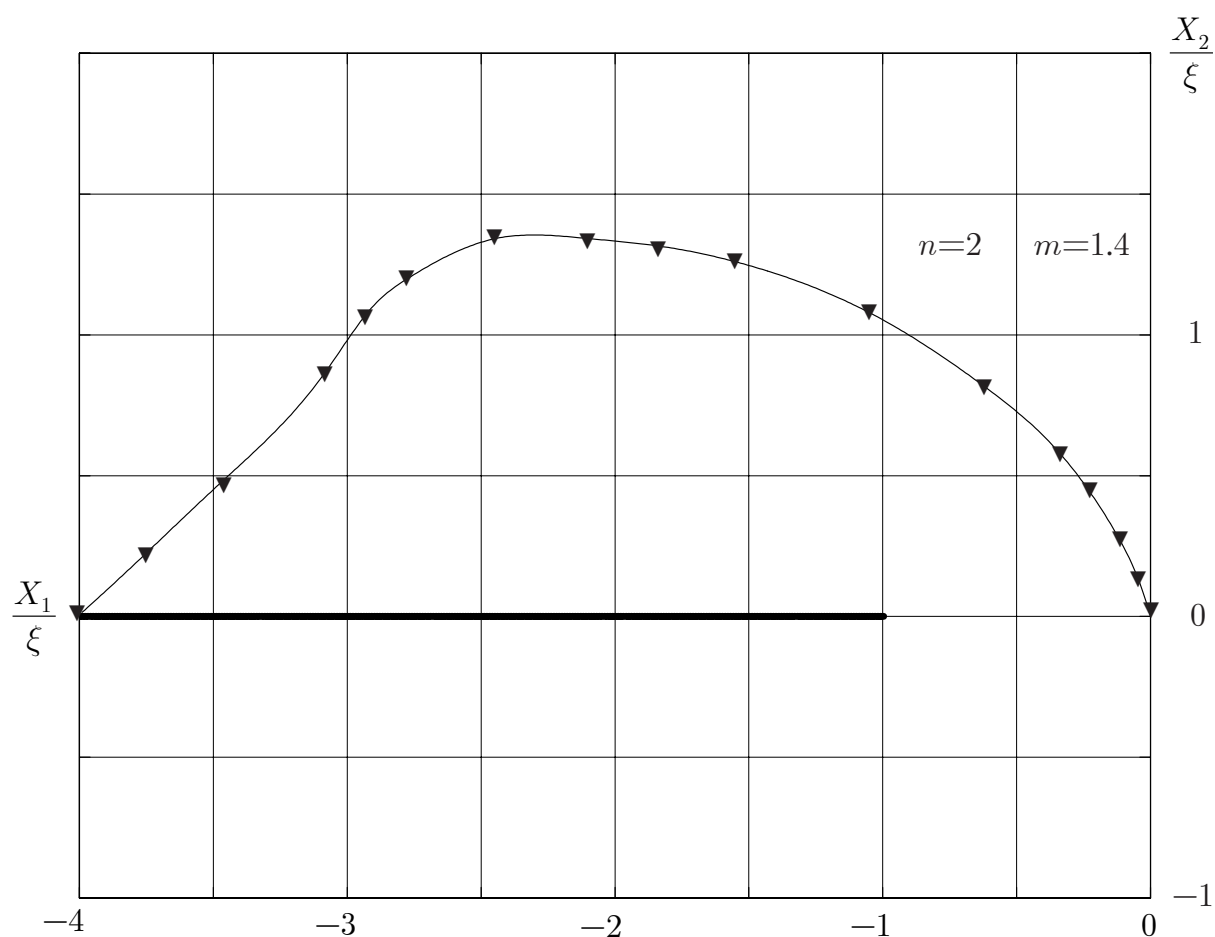


Рис. 80. Геометрия зоны полностью поврежденного материала в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига в плоскости автомодельных переменных X_1/ξ , X_2/ξ . Метками обозначены точки, полученные в ходе численного анализа. Точка с координатами $X_1/\xi = -1$, $X_2/\xi = 0$ есть вершина трещины. Точка с координатами $X_1/\xi = 0$, $X_2/\xi = 0$ — начало новой системы координат, сдвинутой на расстояние ξ вперед от вершины трещины

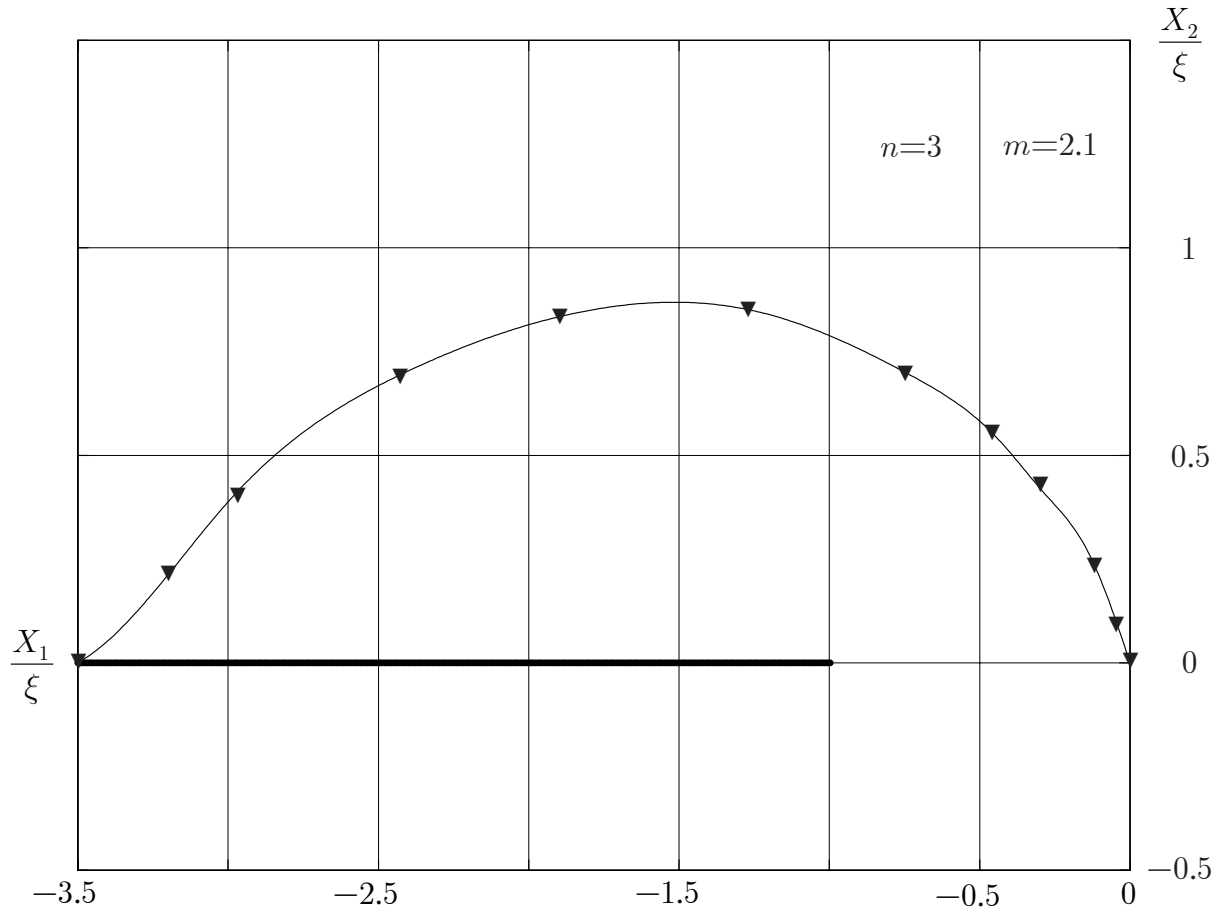


Рис. 81. Геометрия зоны полностью поврежденного материала в окрестности вершины трещины антиплоского сдвига в плоскости автомодельных переменных

Таким образом, установлено, что на расстояниях, больших 4ξ , от вершины трещины, влияние процесса накопления поврежденности не является существенным. Внутри круговой области радиуса 4ξ с центром в вершине трещины влияние процесса накопления повреждений нельзя игнорировать. Действительно, в непосредственной близости к вершине распространяющейся трещины существует область полностью разрушенного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. За пределами этой области имеется так называемая "область процесса", в которой происходит накопление рассеянных повреждений, что оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние. В данной области справедливы промежуточные асимптотики с собственными значениями, приведенными в (2.34).

На рис. 82–85 показаны угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в промежуточной области для различных значений C .

Таким образом, установлено, что у границы области полностью поврежденного материала поля напряжений и сплошности линейно падают до нуля при $\rho \rightarrow 0$. По мере удаления от этой области поля напряжений и сплошности перераспределяются: показатели α и μ принимают промежуточные значения из интервалов своего изменения, сближаясь затем с асимптотикой для $\rho \rightarrow \infty$. На рис. 82–85 видно, что качественно изменяется характер углового распреде-

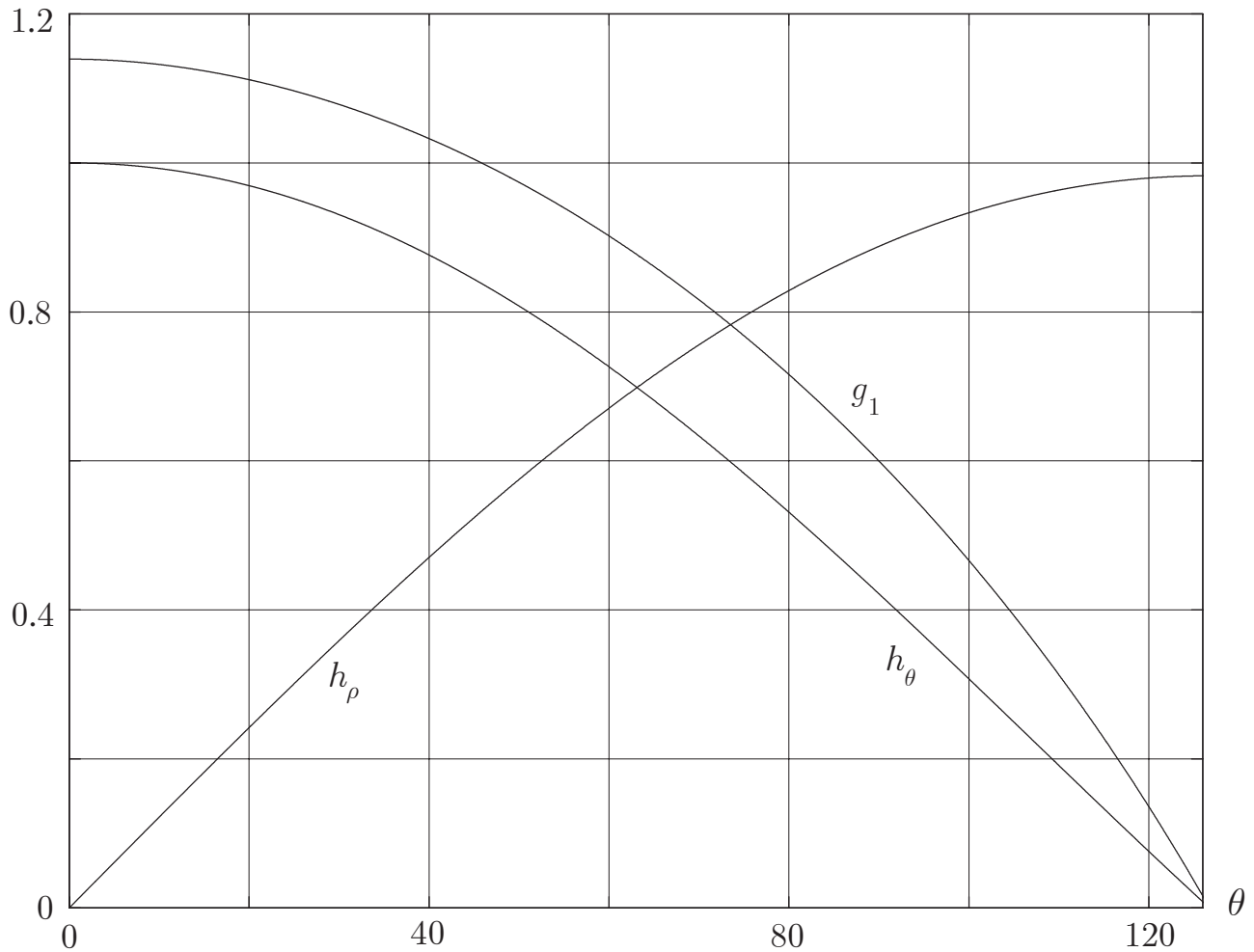


Рис. 82. Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^\alpha \kappa [(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi = \rho^\mu \kappa^m \xi (C\xi)^{1-\alpha m - \mu} g_1(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ (измеряемого в градусах) для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 1$.

ления функции $g_1(\theta)$. Угловые распределения компонент тензора напряжений при удалении от полностью поврежденной зоны выходят на решение HRR. Действительно, на рис. 85 кривые, иллюстрирующие угловые распределения компонент тензора напряжений для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3.8$, полностью совпадают с решением HRR, что указывает на достоверность полученного решения.

Следует отметить, что характерный линейный размер ξ области полностью поврежденного материала не определяется в рамках приведенного асимптотического анализа полей напряжений, скоростей деформаций и параметра сплошности и для его оценки необходимы дополнительные условия.

Для оценки ξ воспользуемся следующими рассуждениями. Характерной особенностью данной задачи является то, что после введения автомодельной переменной R формально задачи о стационарном состоянии трещины и ее росте не различимы. Однако эти два состояния следует различать и необходимо еще сформулировать критерий роста трещины. Естественно воспользоваться критерием роста трещины, учитывающим структурные изменения материала. Можно принять, что рост трещины начинается (и поддерживается), если на некотором расстоянии d_c от вершины трещины сплошность достигает своего критического значения ψ_{cr} . Однако в рамках настоящего исследования уже введена область,

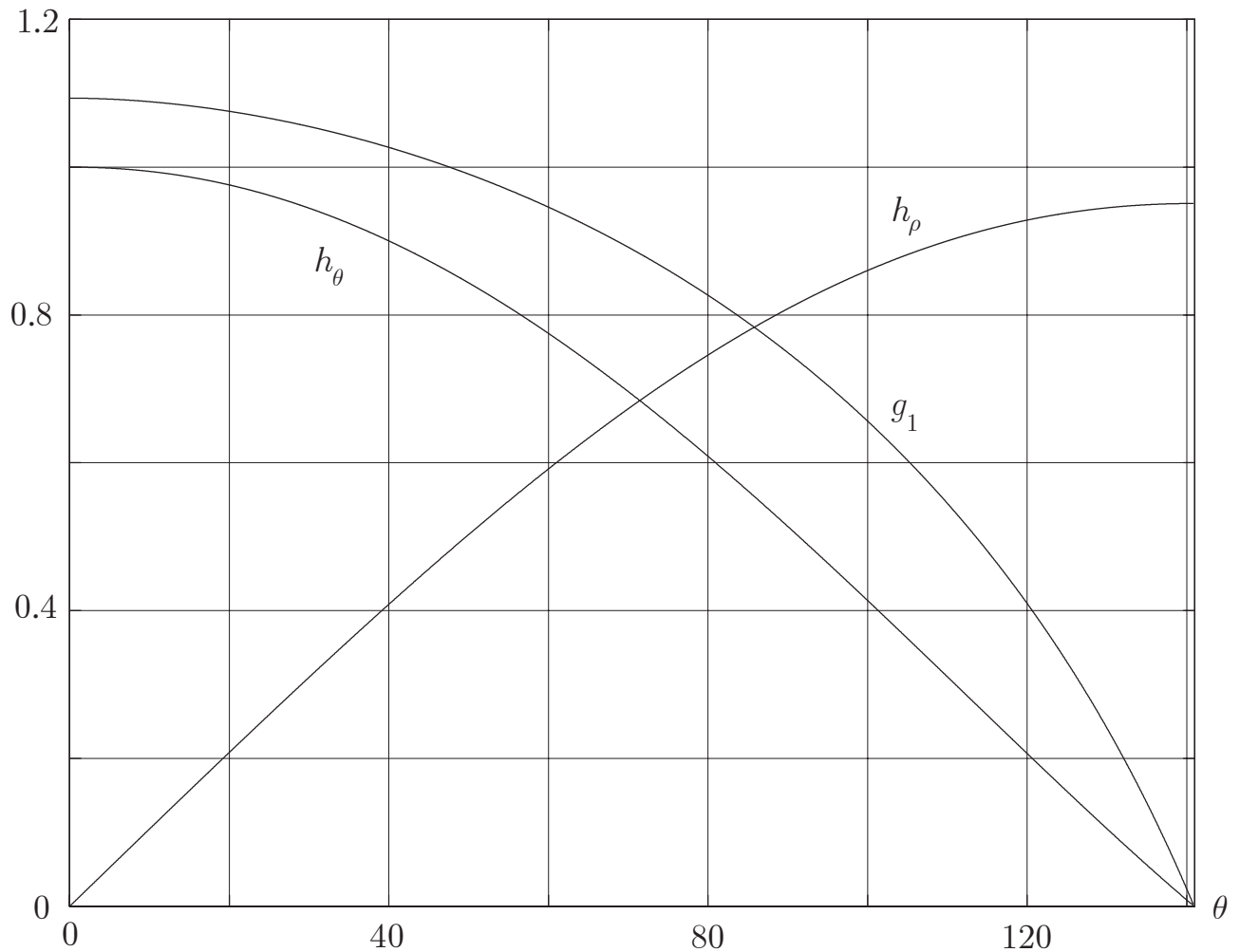


Рис. 83. Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^\alpha \kappa [(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi = \rho^\mu \kappa^m \xi (C\xi)^{1-\alpha m - \mu} g_1(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ (измеряемого в градусах) для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 2$

в которой сплошность принимает критическое значение (равное нулю), следовательно, под ξ можно понимать величину d_c и считать, что $\xi = d_c$.

4.3. Представление анизотропной поврежденности тензором поврежденности второго ранга

Под **поврежденностью** мы, следуя [283], понимаем сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины — в упругости, дислокации — в пластичности, микропоры — при ползучести, поверхностные микротрещины — при усталости).

Поврежденность за редким исключением нельзя непосредственно наблюдать и измерять так, как в физике и механике измеряются скорость, сила или температура. Деградация механических свойств тела может быть обнаружена в результате анализа реакции тела на различные внешние воздействия. Наличие поля повреждений в твердых телах согласно современной экспериментальной

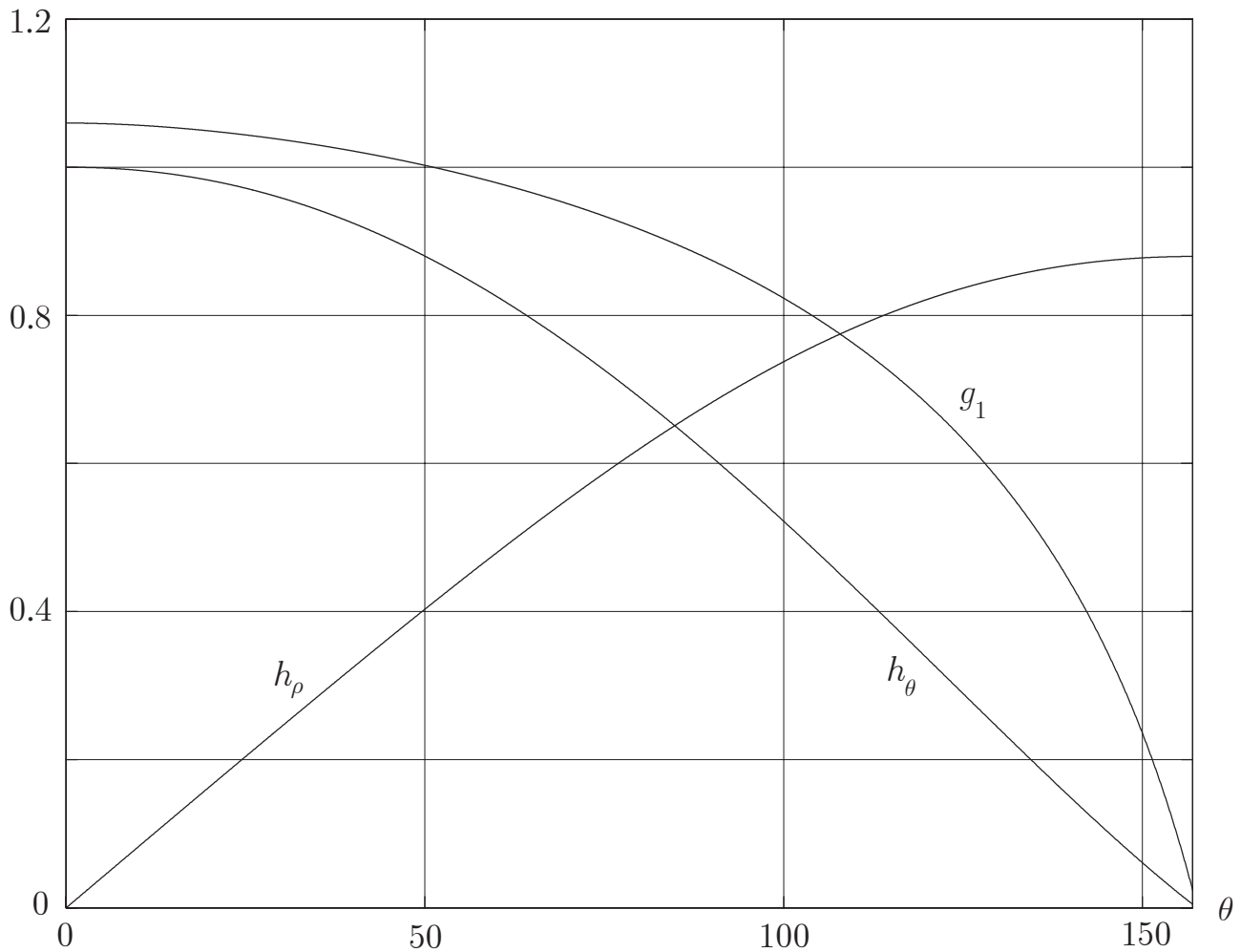


Рис. 84. Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^\alpha \kappa [(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi = \rho^\mu \kappa^m \xi (C\xi)^{1-\alpha m - \mu} g_1(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ (измеряемого в градусах) для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3$

практике может быть косвенно обнаружено и отчасти количественно представлено через уменьшение модуля Юнга, уменьшение скорости прохождения ультразвукового сигнала, уменьшение плотности, изменение твердости, падение электрического потенциала, падение амплитуды напряжений при циклическом испытании, ускорение ползучести в третьей стадии. Методы акустической эмиссии позволяют достаточно определенно выявлять зоны локализации поврежденности.

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л. М. Качанова [60] и Ю. Н. Работнова [129]. Ценность этих первых работ, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы представления поврежденности для описания поврежденности в упругих и упругопластических телах, а также ее развития в условиях ползучести. Сущность нового подхода заключалась в использовании новой мезо-переменной — параметра поврежденности, — отражающей присутствие в теле поврежденности (или различных видов повреждений) — феномена совершенно другого масштаба — микро-масштаба. Последующее развитие теории происходило, в частности, по пути обобщения основных положений ме-

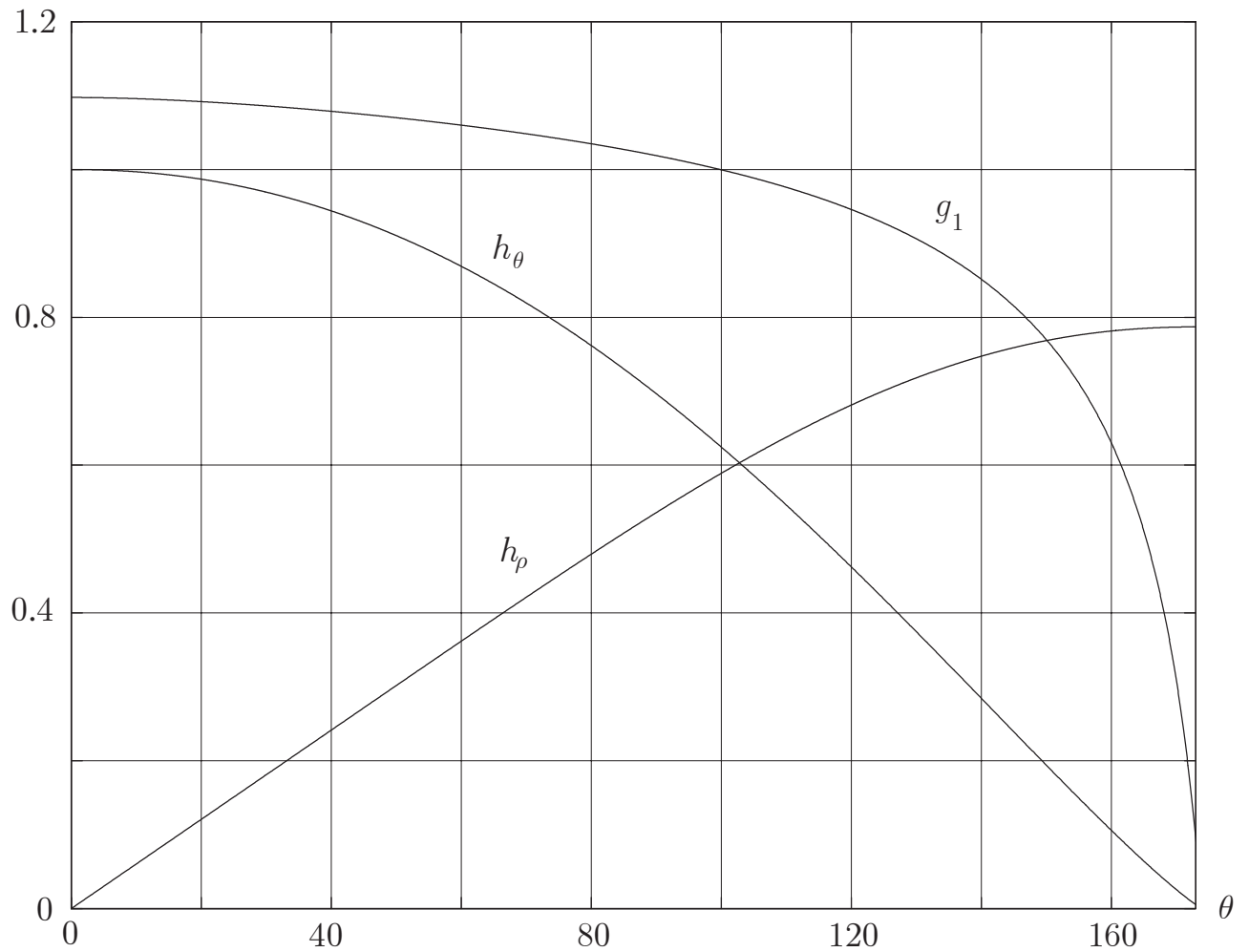


Рис. 85. Угловые распределения компонент тензора эффективных напряжений $\sigma_{sz}/\psi = \rho^\alpha \kappa [(n+1)\xi/m]^{1/m} h_s(\theta)$ и параметра сплошности $\psi = \rho^\mu \kappa^m \xi (C\xi)^{1-\alpha m - \mu} g_1(\theta)$ в зависимости от полярного угла θ (измеряемого в градусах) для $n = 2$, $m = 0.7n$, $C = 3.8$

ханики поврежденного континуума для случая трехмерного состояния анизотропной поврежденности.

В этом разделе развивается так называемый геометрический подход механики поврежденности, изложенный впервые в работе [294], где на основе представления об эквивалентной конфигурации континуума как собрания элементов, поврежденность которых некоторым воображаемым образом элиминирована, приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности), которая обладает фундаментальным свойством симметрии. Дальнейшее обоснование и разработку эта теория получила в работах [305], [100], [138], [139]. По существу аналогичная схема представления поврежденности была использована в [13].

Геометрический подход [294] естественно возникает при попытке обобщения первых классических представлений о поврежденности, восходящих к Л. М. Качанову [60] и Ю. Н. Работнову [129], и в то же самое время позволяет в самой простейшей форме учесть анизотропию состояния поврежденности. Одним из главных преимуществ этого подхода является возможность достаточно простого и естественного представления эффекта возрастания внутренних напряже-

ний в среде с повреждениями с помощью понятия эффективного напряжения, что открывает возможность применения механики поврежденности в классических разделах механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и теории ползучести. В разделе 4.4 геометрический подход [294] выступает в качестве основы для вывода связанных уравнений теории пластичности и поврежденности.

Отметим, что мы применяем тензор поврежденности второго ранга, определение которого отлично от приведенного в [294] и впервые дано в [305]. Новая тензорная мера анизотропной поврежденности, в силу определения являясь мерой сокращения, вследствие распределенных микродефектов, реально несущей нагрузку площади поверхностного элемента в зависимости от его ориентации, с самого начала вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Показано также, что эквивалентная конфигурация, введенная в работе [294], может быть корректно определена только как трехмерное риманово многообразие, при этом тензор поврежденности выступает как изометрический инвариант указанного многообразия. Можно даже пойти дальше и трактовать эквивалентную конфигурацию как многообразие с кривизной и кручением, тем более что такого рода пространства (с неевклидовой внутренней геометрией) уже давно применяются механиками для моделирования дефектных структур — дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов, — начиная с классических работ 50-х годов К. Кондо и Б. Билби (изложение этого чрезвычайно интересного круга вопросов и соответствующая библиография (в том числе с указаниями на оригинальные работы Кондо, опубликованные на японском языке) имеются в книге [112]). Применение методов дифференциальной геометрии для построения параметров состояния тела с полем повреждений и в настоящее время представляется актуальной задачей, несмотря на то, что, по-видимому, уже сформировались основные принципы соответствия между аффинно-метрическими теориями и дефектными структурами. Действительно, не могут считаться до конца преодоленными проблемы, связанные с построением термодинамических потенциалов сред, внутренняя геометрия которых определяется не только тензором кривизны, но и тензором кручения, и с формулировкой граничных условий для неевклидовых характеристик тела. Из всего сказанного можно заключить, что геометрическая модель с тензором поврежденности второго ранга может и дальше с успехом развиваться в плане учета микроструктуры тела с помощью методов дифференциальной геометрии.

Изложение данного раздела книги в основном следует работам [305], [100]. Мы не затрагиваем здесь термодинамику возрастания поврежденности и теорию определяющих уравнений твердого тела с рассеянной поврежденностью, отсылая читателя к оригинальным исследованиям [306], [307], [136], [309].

4.3.1. Модель Качанова–Работнова. Параметр поврежденности. Эффективные напряжения

Как уже отмечалось, геометрический подход [294] естественно возникает при попытке обобщения первых классических представлений о поврежденности, восходящих к Л. М. Качанову и Ю. Н. Работнову, и в то же самое время позволяет в самой простейшей форме учесть анизотропию состояния поврежденности.

Сущность этого подхода к математическому моделированию процессов накопления повреждений может быть достаточно ясно продемонстрирована на примере простейшего одномерного состояния поврежденности одноосно растянутого образца.

Рассмотрим цилиндрический образец, растягиваемый силой P . Обозначим через A_0 и A площади поперечных сечений образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно.

В соответствии с классической теорией Качанова–Работнова, текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности) D , который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени $0 \leq D \leq 1$, причем $D = 0$ для начального неповрежденного состояния и $D = 1$ для конечного состояния разрушения.

Обычно параметр поврежденности D интерпретируется как относительное сокращение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площади поперечного сечения. Поэтому, деградация материала объясняется как постепенное уменьшение эффективной площади, которая реально несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца растяжению. В силу такой интерпретации текущая несущая нагрузка площадь оказывается равной не A , а некоторому меньшему значению A^* и для параметра D имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - D = \frac{A^*}{A}. \quad (1.1)$$

Ясно, что определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой чисто геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности, однако его эволюция определяется, конечно же, и свойствами материала, и историей внешнего нагружения.

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение площади, несущей растягивающую нагрузку, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными повреждениями. Действительно, наряду с напряжением

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (1.2)$$

очевидно следует рассмотреть эффективное напряжение

$$\sigma^* = \frac{P}{A^*}, \quad (1.3)$$

которое в силу формулы (1.1) можно также представить в виде

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (1.4)$$

Последняя формула выражает эффект повышения уровня напряжений в поврежденном материале, поскольку $0 \leq D \leq 1$.

Таким образом, мы можем представить себе вместо исходного образца другой, воображаемый неповрежденный образец, площадь поперечного сечения которого равна A^* и который растягивается той же самой силой P (см. рис. 86). Механическое состояние подобного образца полностью эквивалентно текущему состоянию поврежденного образца, а изменение геометрии полностью описывается параметром поврежденности D .

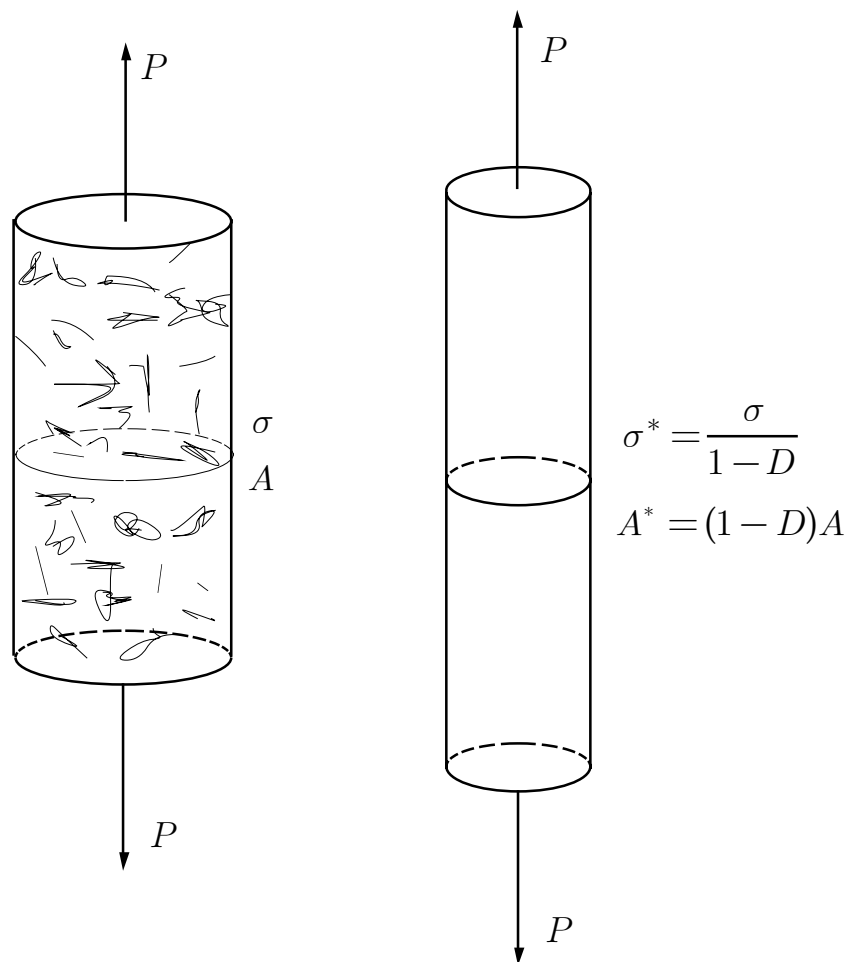


Рис. 86. Поврежденный и эквивалентный неповрежденный образец

Изложенные выше понятия, несмотря на свою простоту, являются достаточными предпосылками для дальнейшего развития механики поврежденного континуума. Ясно, однако, что понятия о геометрической мере поврежденности, выражающей сокращение несущей способности поверхностных элементов внутри деградирующего континуума, и об эффективных напряжениях нуждаются в корректном обобщении на случай произвольного трехмерного состояния анизотропной поврежденности. Такое обобщение было выполнено в работах [292], [293], [294].

То, что поврежденность чаще всего носит ярко выраженный анизотропный характер, доказывают многочисленные эксперименты по измерению хрупкой поврежденности, существующей в форме полей микротрещин различной ориентации, коррозионной поврежденности в металлах, а также поврежденности при ползучести.

В качестве примера рассмотрим двумерное распределение поврежденности в концевой зоне коррозионной трещины в низколегированной стали 30G2 после 400 часов выдержки в водородсодержащей среде.²⁰⁵

Для оценки поврежденности в концевой зоне трещины брались пробы микротвердости по Кнупу (Кноор microhardness), численные значения H которой обычно выражаются в условных единицах твердости.

Испытания микротвердости проводились (см. рис. 87) в трех направлениях под углами -30° , 0° , $+45^\circ$ к линии трещины в пределах зоны с характерным линейным размером $250\mu\text{m}$ от вершины коррозионной трещины, вне которой микротвердость практически не отличается от таковой для неповрежденной стали.

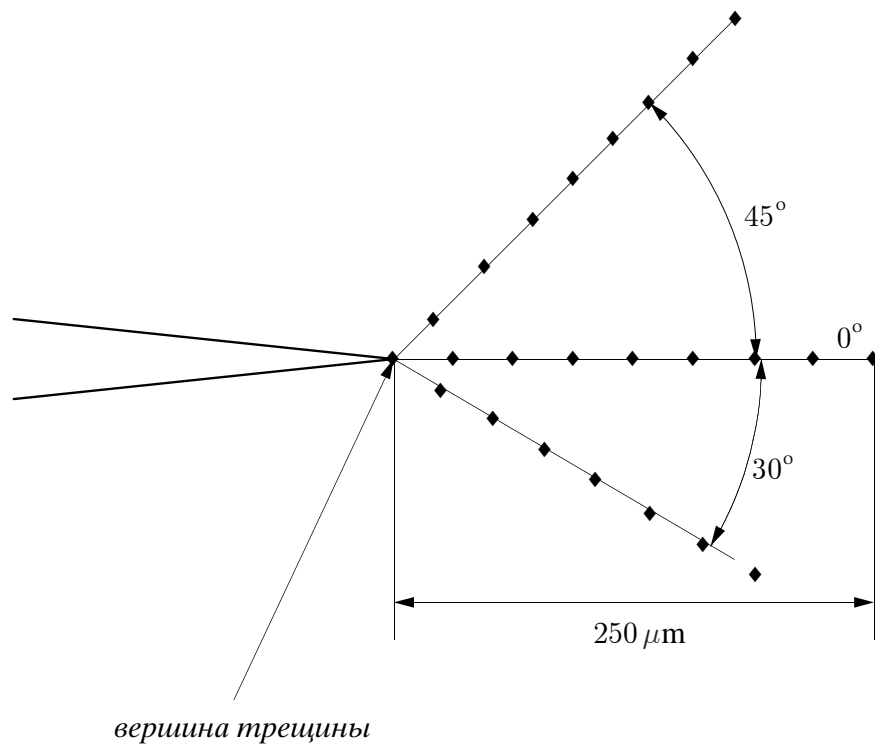


Рис. 87. Концевая зона трещины и ориентации проб микротвердости

Результаты испытаний графически изображены на рис. 88. По горизонтальной оси измеряется расстояние (в микрометрах), по вертикальной — в условных единицах изменение $\Delta H = H - H_0$ микротвердости по отношению к микротвердости неповрежденного материала H_0 , значение которой равно ста условным единицам.²⁰⁶

Определяя ориентационную поврежденность ς как абсолютную величину

²⁰⁵Приводимые ниже экспериментальные данные получены в работе: Ботвина Л. Р., Тетюева Т. В., Иоффе А. В. Стадийность множественного разрушения сталей в среде сероводорода// Металловедение и термиче-

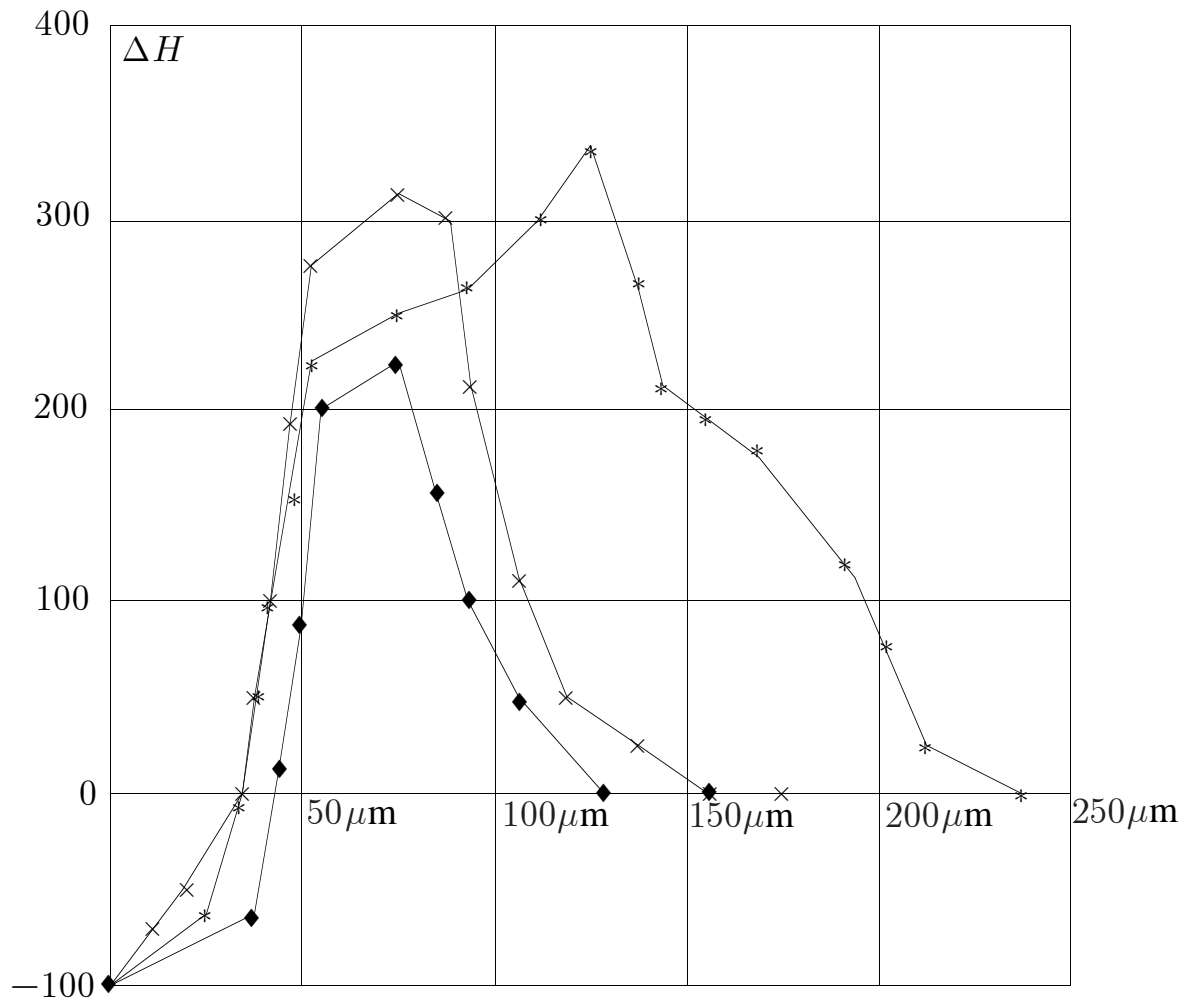


Рис. 88. Результаты испытаний микротвердости низколегированной стали 30G2 по трем направлениям в концевой зоне коррозионной трещины после 400 часов выдержки в водородсодержащей среде. Ориентациям -30° , 0° , $+45^\circ$ по отношению к линии трещины соответствуют данные, отмеченные крестиками, черными ромбиками и звездочками

относительного изменения микротвердости вдоль каждого из направлений, исходящего из вершины трещины, на характерном расстоянии, когда анизотропия поврежденности ярче всего выражена, порядка одной десятой линейного размера поврежденной концевой зоны (т.е. $25\mu\text{m}$), для сплошности находим выражение

$$\varsigma(\mathbf{n}) = 1 + \frac{H(\mathbf{n}) - H_0}{H_0}.$$

Согласно приведенным экспериментальным данным, ориентационное распределение сплошности $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ можно представить в форме полярной диаграммы, изображенной на рис. 89.

Ниже мы попытаемся с одной стороны дать строгое формальное обоснование и уточнение основных положений трехмерной теории анизотропной по-

ская обработка металлов. 1998. №2. С. 14-22.

²⁰⁶По поводу измерения твердости и микротвердости тел, а также единицах измерения твердости см. Политехнический словарь. Гл. ред. А. Ю. Ишлинский. М.: Советская энциклопедия, 1989, с. 305, 518, 63, 81, 458.

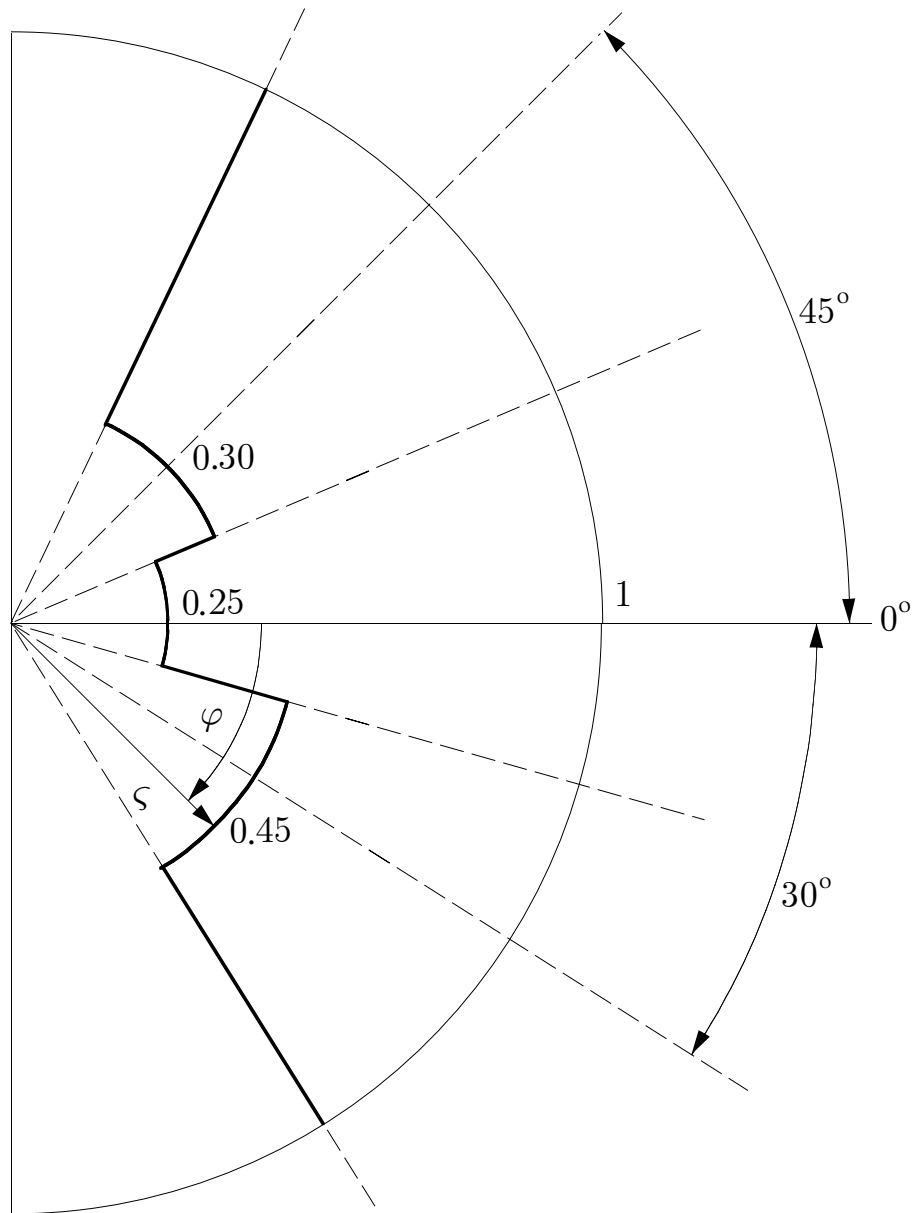


Рис. 89. Полярная диаграмма распределения сплошности по ориентациям в концевой зоне коррозионной трещины. Горизонтальная ось, от которой отсчитывается полярный угол, соответствует линии трещины. Величина сплошности вычисляется как полярный радиус кусочно-постоянного распределения

врежденности, а с другой — ее дальнейшее развитие на основе нового подхода к моделированию анизотропии, вызванной трехмерным распределением повреждений. Отличительной чертой предлагаемого подхода к тензорному представлению поврежденности также является и то, что, с одной стороны, возможность строго определить и ясно интерпретировать тензорную меру поврежденности (в этом плане предлагаемая схема является отчасти формализацией подхода [294]), а с другой — явно вычислять тензор поврежденности по экспериментальным диаграммам ориентационного распределения поврежденности. На основе развиваемой ниже теории появляется возможность ввести новую симметричную тензорную меру возрастания внутренних напряжений в анизотропно поврежденном теле, интерпретация собственных элементов которой согласуется с геометрической и механической интерпретацией собственных элементов как

тензора поврежденности, так и тензора напряжений Коши.

Аккуратное аналитическое описание поврежденного состояния представляет собой довольно сложную проблему. Не вдаваясь здесь в детальное обсуждение всего многообразия подходов к моделированию анизотропной поврежденности, укажем только на монографию [269], где имеется достаточно полный список работ, посвященных тензорным мерам поврежденности.

4.3.2. Эквивалентная конфигурация континуума с внутренним распределением повреждений

Как было указано выше, распределение микродефектов внутри континуума приводит с феноменологической точки зрения к сокращению реальной несущей способности поверхностных элементов континуума. В рамках математической модели это сокращение, зависящее очевидно от ориентации элемента, может быть описано, как это будет показано ниже, с помощью симметричного тензора второго ранга, имеющего простой геометрический смысл. Мы, поэтому, следуя [294], начнем с геометрического рассмотрения текущего состояния поврежденного континуума.

Рассмотрим континуум с внутренним распределением повреждений в текущем деформированном состоянии \mathcal{K} . Обозначим через \mathbf{x} положение в пространстве материальной точки континуума, которая до деформации занимала положение \mathbf{X} в отсчетной (которую также будем считать неповрежденной) конфигурации \mathcal{K}_R .

Отображение $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ определяет деформацию континуума. Обозначим через \mathbf{F} градиент деформации:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = (\nabla_R \otimes \mathbf{x})^T. \quad (2.1)$$

Если через \mathbf{I}_k и \mathbf{i}_k обозначить локальные базисные векторы конвективной системы координат в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, то справедлива также формула

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{F} \mathbf{I}_k. \quad (2.2)$$

Выберем произвольно объемный элемент $d\tau_R$, локализованный в окрестности точки \mathbf{X} отсчетной конфигурации, а через $d\tau$ обозначим его деформированный образ, локализованный в окрестности точки \mathbf{x} текущей конфигурации. Вследствие трехмерного распределения микродефектов, несущая нагрузку площадь плоского элемента, выбранного произвольно внутри объемного элемента $d\tau$, будет меньше геометрической площади этого элемента. Поэтому, поврежденный плоский элемент можно заменить на неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами и считать оба элемента эквивалентными. Если элементарный объем $d\tau$ разложить на множество плоских поврежденных элементов, а затем заменить каждый поврежденный элемент ему эквивалентным, то собрав уже неповрежденные элементы, получим эквивалентный неповрежденный объемный элемент.

Искажение геометрии поврежденного элемента при описанной выше его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент определяет тензор второго ранга, который будем называть фиктивной дисторсией поврежденного элемента и обозначать через \mathbf{G} .

Если теперь каждый элемент континуума в его текущем поврежденном состоянии заменить эквивалентным неповрежденным элементом, а затем осуществить сборку эквивалентных элементов в одно тело, то получим конфигурацию, которую, следуя [294], будем называть эквивалентной конфигурацией поврежденного континуума \mathcal{K}^* .

Обозначим через \mathbf{x}^* положение в эквивалентной конфигурации материальной точки, которая в текущей поврежденной конфигурации занимала положение \mathbf{x} , а через $d\tau^*$ — деформированный в результате перехода в эквивалентное неповрежденное состояние элемент объема $d\tau$.

Отметим два важных для дальнейших рассуждений обстоятельства. Прежде всего ясно, что введенная выше эквивалентная конфигурация не определена однозначно, ибо сборка эквивалентных объемных элементов в единое тело может быть произведена многими способами. Можно даже указать степень такого произвола: положение эквивалентного элемента определяется с точностью до вращения его как жесткого целого. И второе важное замечание. Поскольку, вообще говоря, фиктивные дисторсии поврежденных объемных элементов несовместны, то не существует непрерывного поля перемещений из текущей конфигурации в эквивалентную и отображение $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ не является гладким.

Чтобы восстановить гладкость этого отображения, необходимо рассматривать эквивалентную конфигурацию как трехмерное риманово многообразие [149], метрика которого $g_{\alpha\beta}^*$ определяется фиктивной дисторсией \mathbf{G} :

$$g_{\alpha\beta}^* = \mathbf{i}_\alpha^* \cdot \mathbf{i}_\beta^*, \quad (2.3)$$

где векторы \mathbf{i}_α^* ($\alpha = 1, 2, 3$) являются образами базисных векторов \mathbf{i}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) при трансформации в эквивалентное состояние:

$$\mathbf{i}_\alpha^* = \mathbf{G}\mathbf{i}_\alpha. \quad (2.4)$$

Еще раз подчеркнем, что метрика $g_{\alpha\beta}^*$, в отличие от метрики текущего поврежденного состояния $g_{\alpha\beta}$, не является евклидовой, поэтому тензор Римана—Кристоффеля (B. Riemann, E. B. Christoffel) не исчезает [182]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \neq 0. \quad (2.5)$$

4.3.3. Определение и координатное представление тензора поврежденности второго ранга

Определенные выше понятия об эквивалентной конфигурации и фиктивной дисторсии поврежденных элементов являются ключевыми для корректного построения тензорной меры анизотропной поврежденности и ее последующей механической интерпретации. Как сейчас будет показано, тензор поврежденности может быть определен только через тензор фиктивной дисторсии \mathbf{G} .

Рассмотрим тензор фиктивной дисторсии \mathbf{G} . Равенства (2.4) можно рассматривать как формальное определение тензора \mathbf{G} и получить, как следствие, следующее выражение:

$$\mathbf{G} = \mathbf{i}_\alpha^* \otimes \mathbf{i}^\alpha. \quad (3.1)$$

Чтобы вычислить изменение площади поврежденного плоского элемента при его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент, рассмотрим внутри объема $d\tau$ произвольно ориентированный плоский элемент PQR (см. рис. 90), который будем представлять с помощью вектора $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали, dA — площадь элемента PQR .

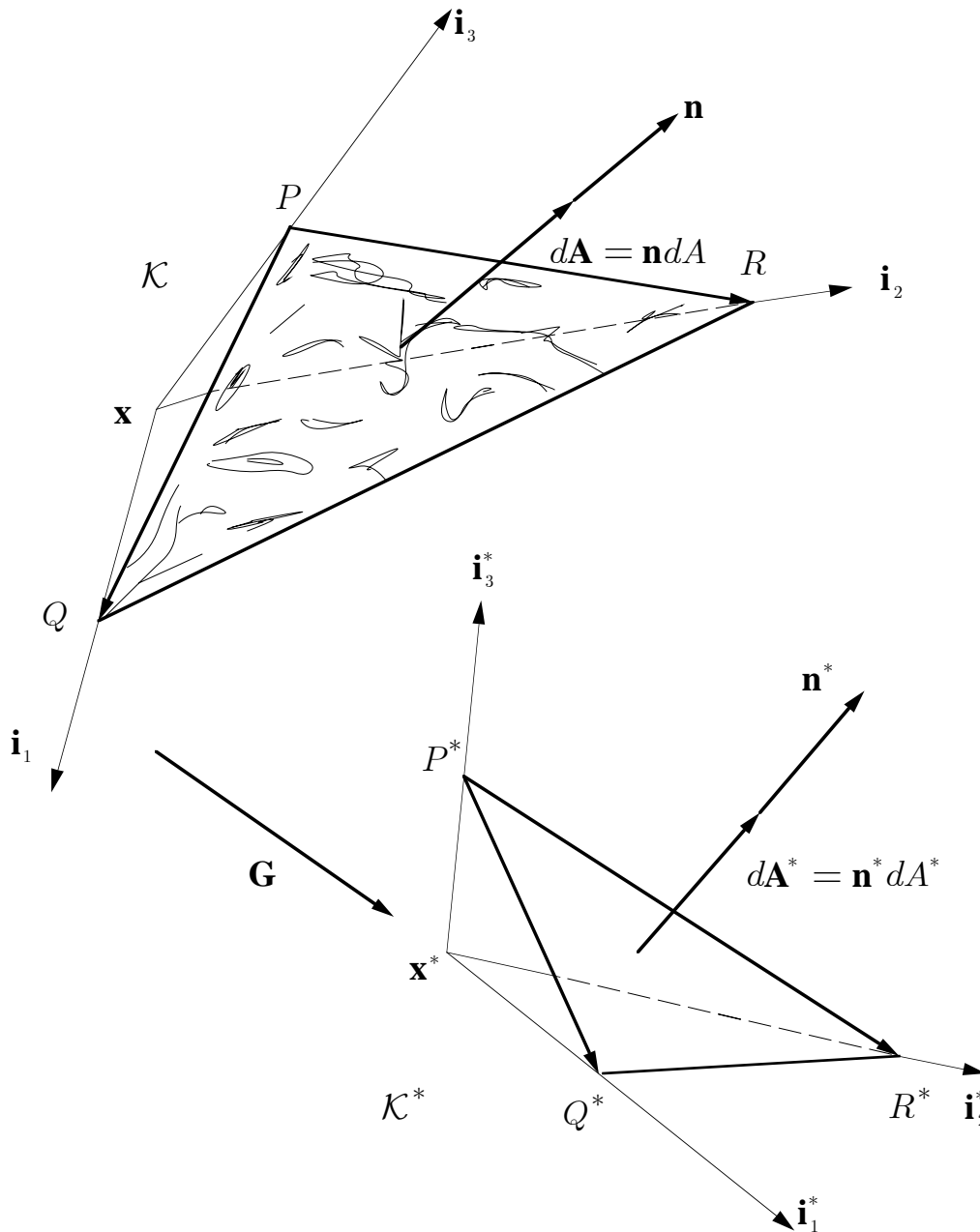


Рис. 90. Изменение площади поврежденного плоского элемента при его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент

Эквивалентный неповрежденный элемент $P^*Q^*R^*$ в свою очередь представляется вектором $d\mathbf{A}^* = \mathbf{n}^*dA^*$.

В соответствии с определением тензора \mathbf{G} справедливы следующие соотношения:

$$\overline{P^*Q^*} = \mathbf{G}\overline{PQ}, \quad \overline{P^*R^*} = \mathbf{G}\overline{PR}. \quad (3.2)$$

Далее, следуя [294] и используя последнюю формулу, с помощью теоремы Нансона можно получить следующее уравнение, связывающее векторные элементы площади $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$:

$$d\mathbf{A}^* = \frac{1}{2}\overline{P^*Q^*} \times \overline{P^*R^*} = \frac{1}{2}(\mathbf{G}\overline{PQ}) \times (\mathbf{G}\overline{PR}) = (\det \mathbf{G})\mathbf{G}^{-T}d\mathbf{A}. \quad (3.3)$$

Определяя тензор \mathbf{D} посредством соотношения [294]

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = (\det \mathbf{G})\mathbf{G}^{-T}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор, уравнение (3.3) может быть представлено в форме

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A}. \quad (3.5)$$

Последнее уравнение показывает, что тензор \mathbf{D} полностью определяет ориентацию и площадь эквивалентного неповрежденного элемента и в принципе может быть принят в качестве тензорной меры поврежденности, как это было сделано в работе [294]. Однако, как следует из определения (3.4), тензор \mathbf{D} , вообще говоря, несимметричен, что вызывает значительные трудности при его интерпретации. Поэтому мы продолжим рассуждения, чтобы найти более подходящую меру.

Как было отмечено выше, эквивалентное неповрежденное тело может быть собрано в одно целое из эквивалентных элементарных объемов многими способами. Ясно также, что вращения эквивалентных элементов в процессе сборки следует исключить, что равносильно требованию симметричности тензора фиктивной дисторсии \mathbf{G} . Можно, однако, считать тензор \mathbf{G} несимметричным и учесть указанную инвариантность относительно вращений эквивалентных элементов следующим образом.

Умножим скалярно левую и правую части уравнения (3.3) сами на себя. В результате получим соотношение

$$d\mathbf{A}^* \cdot d\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{G})^2 (dA)^2 |\mathbf{G}^{-T}\mathbf{n}|^2, \quad (3.6)$$

подставляя в которое следующее очевидное равенство

$$|\mathbf{G}^{-T}\mathbf{n}|^2 = \text{tr} [\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})], \quad (3.7)$$

получим

$$\frac{dA^*}{dA} = (\det \mathbf{G}) \sqrt{\text{tr} [\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.8)$$

Последнее уравнение выражает сокращение эффективной, несущей нагрузку площади в зависимости от ориентации плоского поврежденного элемента и позволяет корректно ввести симметричный тензор поврежденности.

Введем в уравнение (3.8), пользуясь формулой (3.4), тензор \mathbf{D} , в результате получим следующее уравнение:

$$\frac{dA^*}{dA} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T(\mathbf{I} - \mathbf{D})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.9)$$

Определим тензор второго ранга $\overline{\mathbf{D}}$ посредством следующего соотношения:

$$\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}} = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T(\mathbf{I} - \mathbf{D})}. \quad (3.10)$$

Подобное определение является корректным, поскольку под корнем находится симметричный положительно определенный тензор.

В силу определения тензор $\overline{\mathbf{D}}$ является симметричным и положительно определенным, поэтому его собственные значения $\overline{D}_{(\alpha)}$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$1 - \overline{D}_{(\alpha)} > 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.11)$$

Покажем, что вращательная составляющая тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ оказывается исключенной.

Рассмотрим полярное разложение Коши тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — ортогональный тензор, $\mathbf{\Sigma}$ — симметричный положительно определенный тензор. Подставляя это разложение в формулу (3.10), получим

$$\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}} = \sqrt{\mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Sigma}. \quad (3.13)$$

Следовательно, разложение (3.12) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}). \quad (3.14)$$

Исключая вращательную часть, т. е. полагая

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I},$$

получим равенство двух тензорных мер поврежденности

$$\mathbf{D} = \overline{\mathbf{D}}. \quad (3.15)$$

Тензор \mathbf{D} в работе [294] был назван тензором поврежденности. Мы сохраним это название, но за тензором $\overline{\mathbf{D}}$. В дальнейшем для сокращения записи уравнений вместо обозначения $\overline{\mathbf{D}}$ будем использовать более короткое — \mathbf{D} .

Тензор поврежденности определяет сокращение несущей нагрузку площади плоского элемента с нормалью \mathbf{n} по формуле (см. уравнения (3.9), (3.10)):

$$\frac{dA^*}{dA} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.16)$$

Сравнивая выражения (3.8) и (3.16) для отношения площадей поврежденного и эквивалентного элементов, можно получить следующее представление тензора поврежденности через фиктивную дисторсию:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}}. \quad (3.17)$$

Как следует из последнего уравнения, тензор $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2$ вполне аналогичен тензорной мере деформации Фингера (J. Finger) [336].

Рассмотрим координатное представление тензора поврежденности. Для этого симметричный тензор, находящийся под корнем в уравнении (3.17), представим, пользуясь тождеством Гамильтона—Кэли [220], в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{I}, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ и $\Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ — главные инварианты тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$.

В силу формулы (3.1) имеем

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}^* \mathbf{i}^\alpha \otimes \mathbf{i}^\beta. \quad (3.19)$$

Подстановка последнего выражения в (3.18) и подсчет инвариантов тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ приводят к следующей формуле для компонент тензора $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2$ относительно конвективной системы координат текущего поврежденного состояния:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})_{\gamma\lambda}^2 = g_{\gamma\beta}^* g_{\mu\lambda}^* g^{\beta\mu} - g_{\gamma\lambda}^* g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}] g_{\gamma\lambda}. \quad (3.20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.16), получим также

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} n^\nu n^\alpha - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\alpha\beta} n^\mu n^\nu + \\ &+ \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Формулы (3.20), (3.21) показывают, что тензор поврежденности является изометрическим инвариантом как текущей поврежденной, так и эквивалентной неповрежденной конфигурации, т. е. не изменяется при любых трансформациях указанных конфигураций, при которых метрики $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^*$ остаются неизменными.

Таким образом, эквивалентная неповрежденная конфигурация определена также с точностью до ее изометрической трансформации.

Заканчивая на этом исследование формальных свойств тензора поврежденности, переходим к содержательной интерпретации собственных элементов тензора поврежденности.

4.3.4. Главные поврежденности и главные оси поврежденности. Геометрическая и механическая интерпретация собственных элементов тензора поврежденности

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности \mathbf{D} имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности).

Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора \mathbf{D} будем обозначать через $\mathbf{d}_{(\alpha)}$, а собственные значения, как указывалось выше, — через $D_{(\alpha)}$.

Для содержательной интерпретации тензор поврежденности удобно представить в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^3 D_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации \mathcal{K} , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (см. рис. 91).

Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$.

В силу уравнений (3.5), (3.15) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением:

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A}, \quad (4.2)$$

подставляя в которое спектральное разложение (4.1), получим

$$d\mathbf{A}^* = \sum_{\alpha=1}^3 (1 - D_{(\alpha)}) dA_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (4.3)$$

где $dA_{(\alpha)} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{(\alpha)}$ есть площади граней тетраэдра $OPQR$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Умножая обе части уравнения (4.3) скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(\beta)}$, получим

$$dA_{(\beta)}^* = (1 - D_{(\beta)}) dA_{(\beta)}, \quad (4.4)$$

(по β не суммировать $\beta = 1, 2, 3$)

где $dA_{(\alpha)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{(\alpha)}$ есть площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности, так как это определяется простыми формулами (4.4).

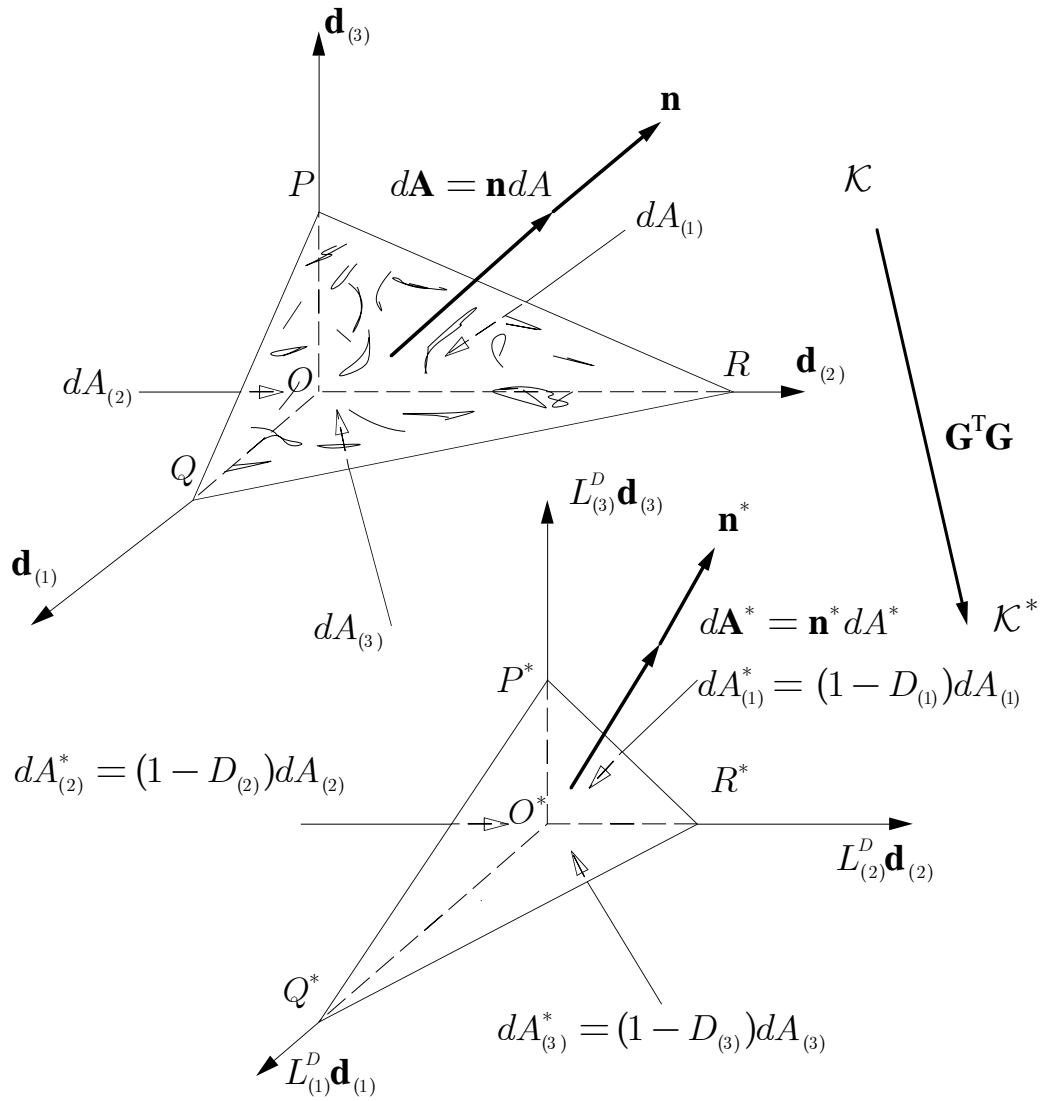


Рис. 91. Трансформация поврежденного объемного элемента, опирающегося на главные оси поврежденности, в эквивалентное неповрежденное состояние

Формула (4.4) в простейшей форме выражает количественно эффект сокращения эффективной площади элементов континуума с внутренним распределением повреждений.

Возможна также и другая интерпретация главных поврежденностей через сокращение линейных размеров тетраэдра $OPQR$ при его трансформации в эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$.

Действительно, поскольку тензоры $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ и $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ соосны, то справедливы соотношения

$$\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} \mathbf{d}_{(\alpha)} = L_{(\alpha)}^D \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (4.5)$$

(по α не суммировать $\alpha = 1, 2, 3$)

где $L_{(\alpha)}^D$ есть фиктивные удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное неповрежденное состояние.

Воспользовавшись уравнениями (3.17), (4.5), находим соотношения, связы-

вающие главные поврежденности с главными фиктивными удлинениями:

$$1 - D_{(\alpha)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(\alpha)}^D}. \quad (4.6)$$

Разрешив последние уравнения относительно $L_{(\alpha)}^D$, находим также

$$\begin{aligned} L_{(1)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(2)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(2)})}{(1 - D_{(3)})}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, главные поврежденности $D_{(\alpha)}$ определяют удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное состояние \mathcal{K}^* в соответствии с формулами (4.7) и позволяют вычислить приведенные длины поврежденности. При этом, очевидно, что при переходе в эквивалентное состояние объем элемента может изменяться, т.е. поврежденность может иметь ненулевую объемную меру.

4.3.5. Экстремальные свойства главных поврежденностей. Вычисление тензора поврежденности по экспериментальным диаграммам

Главные поврежденности $D_{(\alpha)}$ обладают важным экстремальным свойством, которое может также служить их определением. Кроме того, тензор поврежденности и главные поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения ориентационного распределения поврежденности, что дает возможность прямого вычисления тензорной меры поврежденности, исходя из полученных экспериментально диаграмм распределения поврежденности по ориентациям.

Формула (3.16), переписанная в главных осях поврежденности, имеет вид

$$\frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} = (1 - D_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - D_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - D_{(3)})^2 n_{(3)}^2. \quad (5.1)$$

Занумеровав главные поврежденности в порядке их убывания

$$D_{(1)} \geq D_{(2)} \geq D_{(3)}$$

и подставляя равенство

$$n_{(1)}^2 = 1 - n_{(2)}^2 - n_{(3)}^2$$

в формулу (5.1), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= (1 - D_{(1)})^2 + [(1 - D_{(2)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(2)}^2 + \\ &+ [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(3)}^2 \geq (1 - D_{(1)})^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично может быть получена оценка сверху для отношения площадей поврежденного и неповрежденного плоских элементов:

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= (1 - D_{(3)})^2 - [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(2)})^2] n_{(2)}^2 - \\ &- [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(1)}^2 \leq (1 - D_{(3)})^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Объединяя оценки (5.2) и (5.3), получим следующую двустороннюю оценку:

$$1 - D_{(1)} \leq \frac{dA^*}{dA} \leq 1 - D_{(3)}, \quad (5.4)$$

которая показывает, что наибольшее и наименьшее сокращение несущей нагрузки площади происходит в первом и третьем главных направлениях поврежденности.

Экстремальные значения относительного сокращения эффективной площади равны $D_{(1)}$ и $D_{(3)}$, как это следует из оценки

$$D_{(3)} \leq \frac{dA - dA^*}{dA} \leq D_{(1)}. \quad (5.5)$$

Таким образом, главные поврежденности устанавливают границы относительного уменьшения эффективной площади плоских элементов в континууме с внутренним распределением повреждений.

Обратимся теперь к исходному определению тензора поврежденности (3.16).

Уравнение (3.16) может быть разрешено относительно тензора поврежденности в виде [100], [138], [141]:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint_S \varsigma^2(\mathbf{n}) [\mathbf{5n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}] dS}, \quad (5.6)$$

где интегрирование производится по сфере единичных направлений S и введено обозначение

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})}.$$

Таким образом, тензор поврежденности второго ранга может быть вычислен, исходя из известного (в том числе, определенного экспериментально) локального распределения поврежденности в зависимости от направления $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$.

Формула (5.6) в главных осях поврежденности приобретает следующий вид:

$$D_{(\alpha)} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint_S \varsigma^2(\mathbf{n}) [5n_{(\alpha)}^2 - 1] dS} \quad (5.8)$$

и может быть использована для прямого подсчета главных поврежденностей.

Наиболее типичны получаемые экспериментально кусочно-постоянные на сфере единичных направлений диаграммы поврежденности. Если обозначить через ς_i значение сплошности для участка сферы малой площади δA_i , в пределах которого поврежденность можно считать постоянной, то тензор поврежденности вычисляется по формуле

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \sum_l \varsigma_l^2 [5\mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l - \mathbf{I}] \delta A_l}, \quad (5.9)$$

которая связывает теоретическую модель с экспериментальным измерением поврежденности.

4.3.6. Возрастание напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений. Тензор эффективных напряжений

Как было отмечено, вследствие сокращения эффективной площади элементов поврежденного континуума, уровень напряжений в поврежденном континууме должен возрастать. Для моделирования этого эффекта обычно вводится соответствующий тензор, который затем используется также при формулировке определяющих уравнений поврежденного континуума, заменяя тензор истинных напряжений Коши.

Прежде всего определим вектор эффективных напряжений \mathbf{t}^* , полагая, что поверхностные усилия, действующие на поврежденный плоский элемент и эквивалентный неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами, равны:

$$\mathbf{t} dA = \mathbf{t}^* dA^*. \quad (6.1)$$

Пользуясь формулой (3.16), последнее уравнение можно также представить в форме

$$\mathbf{t}^* = \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}}. \quad (6.2)$$

Ясно, что вектор эффективного поверхностного усилия \mathbf{t}^* имеет то же направление, что и вектор истинного поверхностного усилия \mathbf{t} , превосходя его по абсолютной величине.

Вводя в уравнение (6.1) тензор напряжений Коши \mathbf{T} и используя формулу (4.2), получим

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{T} \frac{d\mathbf{A}}{dA^*} = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \frac{d\mathbf{A}^*}{dA^*} = \mathbf{T}^* \mathbf{n}^*, \quad (6.3)$$

где тензор \mathbf{T}^* определен следующим равенством

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}. \quad (6.4)$$

Мы будем называть тензор \mathbf{T}^* тензором эффективных напряжений.

Как следует из определения, тензор \mathbf{T}^* , вообще говоря, не является симметричным, поэтому система эффективных поверхностных усилий, действующих на эквивалентный неповрежденный объемный элемент $d\tau^*$, не будет самоуравновешенной.

Так как поверхностные усилия, действующие на элемент $d\tau$, самоуравновешены, то

$$\mathbf{t}dA + \mathbf{t}^1dA_1 + \mathbf{t}^2dA_2 + \mathbf{t}^3dA_3 = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{t} , \mathbf{t}^1 , \mathbf{t}^2 , \mathbf{t}^3 — поверхностные усилия, действующие на грани тетраэдра $OPQR$, образованного плоским элементом PQR , опирающимся на векторы \mathbf{i}_α конвективного базиса (см. рис. 92).

В силу уравнения (6.1) из уравнения равновесия (6.5) следует также

$$\mathbf{t}^*dA^* + \mathbf{t}^{*1}dA_1^* + \mathbf{t}^{*2}dA_2^* + \mathbf{t}^{*3}dA_3^* = \mathbf{0}, \quad (6.6)$$

т. е. главный вектор эффективных поверхностных усилий, действующих на грани эквивалентного неповрежденного тетраэдра, равен нулю. Поэтому эквивалентный объемный элемент будет находиться только под действием неуравновешенной пары сил.

Последнее обстоятельство чрезвычайно затрудняет использование тензора \mathbf{T}^* для представления напряжений в поврежденном континууме, поэтому мы сначала обсудим условия симметрии тензора.

Так как тензор напряжений Коши симметричен, то из уравнения (6.4) следует

$$\mathbf{T}^{*\Gamma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}\mathbf{T}^*(\mathbf{I} - \mathbf{D}). \quad (6.7)$$

Полученное уравнение позволяет сформулировать условие симметрии

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{*\Gamma} \quad (6.8)$$

в виде

$$\mathbf{T}^*\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{T}^* \quad (6.9)$$

или также в виде

$$\mathbf{T}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{T}. \quad (6.10)$$

Таким образом, тензор \mathbf{T}^* симметричен тогда и только тогда, когда тензор поврежденности перестановочен с тензором напряжений Коши. Перестановка двух симметричных тензоров второго ранга возможна в свою очередь тогда и

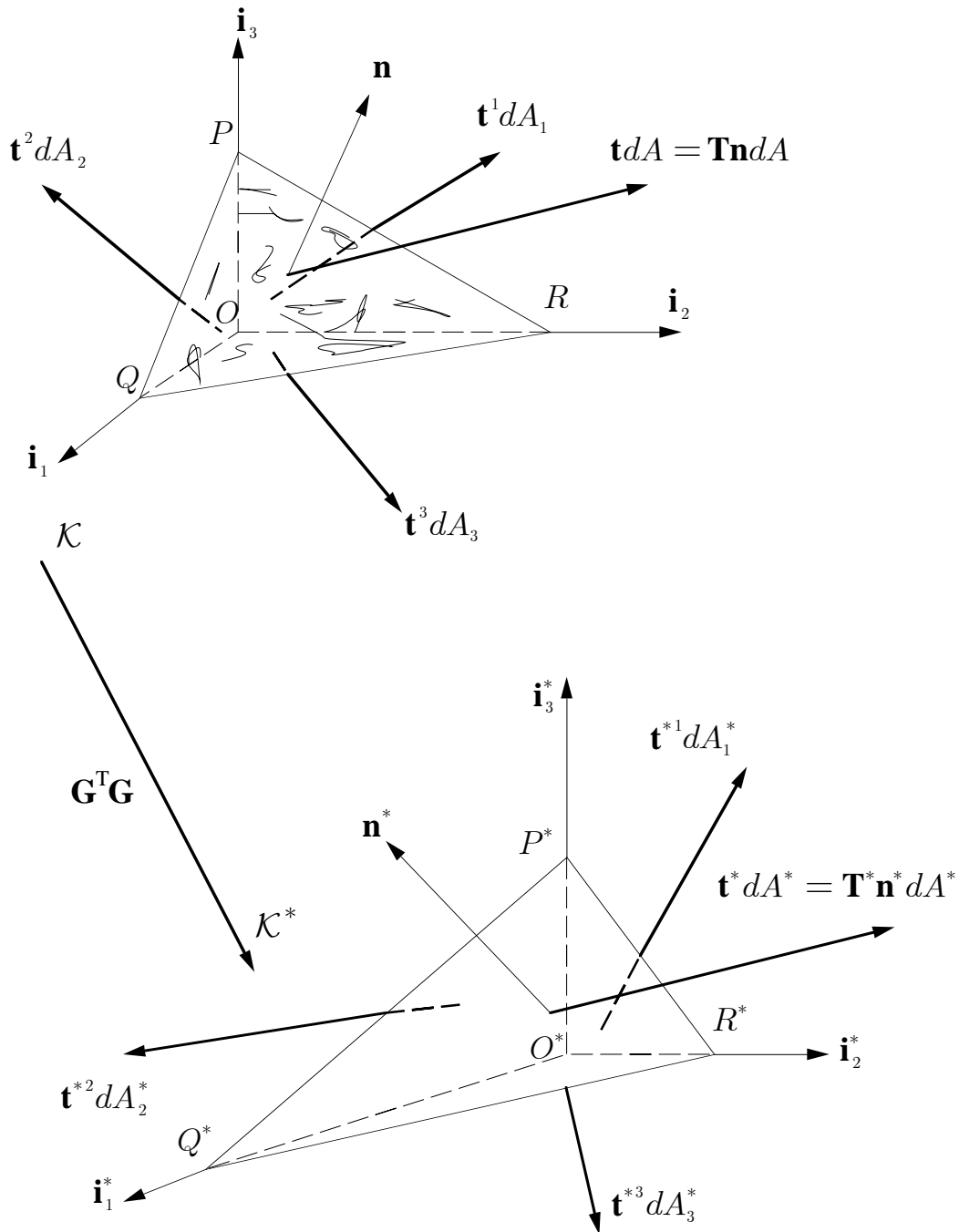


Рис. 92. Равновесие поврежденного и эквивалентного неповрежденного элемента

только тогда, когда эти тензоры соосны (точнее имеют по крайней мере одну общую тройку главных направлений).

Если тензоры \mathbf{T} и \mathbf{D} соосны, то тензор \mathbf{T}^* также им соосен, так что в главных осях поврежденности имеем следующее равенство (см. уравнение (6.4)):

$$T_{(\alpha)}^* = \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}}. \quad (6.11)$$

(по α не суммировать $\alpha = 1, 2, 3$)

Полученная формула в простейшей, согласующейся с геометрическим смыслом тензора поврежденности форме, описывает эффект возрастания напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений.

Становится также ясно, что тензор \mathbf{T}^* необходимо симметризовать таким образом, чтобы выполнялось соотношение, аналогичное (6.11). Необходимость симметризации тензора эффективных напряжений была осознана давно и были предложены различные схемы симметризации (см., например, [328], [292], [208], [191], [281], [337]).

4.4. Связанные (пластичность–поврежденность) уравнения теории пластичности и методы связанного анализа

В этом разделе книги рассматриваются трехмерные уравнения равновесия упругопластической среды с рассеянными повреждениями при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения. Напряженное состояние может соответствовать как грани, так и ребру поверхности текучести. Распределение повреждений в среде представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга (см. раздел 4.3), главные оси которого предполагаются коориентированными главным осям напряжений.

Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности. В качестве уравнений кинематики пластического течения приняты уравнения совместности (сплошности) приращений малых деформаций. Выведены статические и кинематические соотношения связанной задачи вдоль траекторий главных напряжений, которые представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, найдены такие канонические криволинейные координаты, при преобразовании к которым уравнения равновесия, сформулированные для ребра поверхности текучести, приводятся к трем уравнениям, допускающим при некоторых ограничениях точные интегралы. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения при продвижении вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями. Построены канонические координаты плоской задачи и найдены инвариантные отношения, устанавливающие баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений.

Получены соотношения для скоростей пластических деформаций вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями.

Основные уравнения теории пластичности представляются сначала в традиционной тензорной записи в декартовой системе координат. Затем они переформулируются в инвариантную безындексную запись. В части, касающейся вывода условий совместности приращений малых деформаций в изостатической

криволинейной сетке, все соотношения приводятся в физических компонентах по отношению к локальному базису, связанному с линиями главных напряжений. При этом мы сочли необходимым отойти от соглашения, согласно которому индексы у физических компонент тензора должны заключаться в треугольные скобки, чтобы упростить запись довольно сложных тензорных уравнений.

Представление условий совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке линий главных напряжений представляет собой довольно трудную задачу ввиду большого количества труднообозримых соотношений. Однако если пренебречь упругими деформациями, то, согласно ассоциированному закону течения, тензор приращения полных деформаций оказывается соосным тензору напряжений, что существенно упрощает дело. Тем не менее и в этом случае приходится отказываться от важного преимущества идеально пластического течения — его несжимаемости — с тем, чтобы учесть влияние поля повреждений на него, которое может проявляться прежде всего в возможной сжимаемости пластического течения. Влияние поля микродефектов на кинематику пластического течения может быть учтено и в форме несовместности деформаций, и в наиболее общей форме — в рамках неклассической кинематики. Рассеянное поле микродефектов настолько искажает картину деформирования, что часто требует отхода от классической евклидовой схемы (в частности, появляется дополнительная тензорная мера деформации третьего ранга в форме тензора кручения) и оперирования с несовместным полем деформаций (см., например, [72], [73], [39], [112]). Ясно, что несовместность поля деформаций из-за присутствия рассеянного поля микродефектов проявляется как неоднородность (в форме тензора четвертого ранга) в уравнениях совместности (точнее, несовместности) деформаций. Подробное изложение этого круга вопросов заинтересованный читатель может найти в книге [112].

Специально исследуется важная проблема учета влияния упругой деформации на кинематику пластического течения в среде с повреждениями.

Общие соотношения теории идеальной пластичности при условии пластичности Треска анализировались в цикле оригинальных работ [46], [47], [48] и достаточно хорошо изучены.²⁰⁷ Однако связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, вообще не подвергалась анализу с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к интегрированию более сложных, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности, связанных уравнений.

Изложение этого раздела будет в основном следовать работам [141], [142], [143].

²⁰⁷ Две первые из указанных работ воспроизводятся в книге [50], с. 5-19.

4.4.1. Основные уравнения модели упругопластического тела с условием пластичности Треска

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (М. Levy, 1870 г.) [80], который принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скорости деформации.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [172], [125], [158], [27]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения и ввести представление о системе скольжения как механизме пластического течения, согласующееся с многочисленными экспериментальными данными по геометрии пластического течения металлов. Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими [46].

Исследованию уравнений осесимметричной и пространственной задачи теории пластичности посвящены работы [32], [170], [53], [54], [334], [335], [212], [219].

Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Naar, Th. von Karman) выдвинули условие полной пластичности [170], которое по существу устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Треска, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1944 г. А. Ю. Ишлинский [53] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара—Кармана, доказав, статическую определимость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А. Ю. Ишлинским [54], который также использовал обобщенный закон пластического течения, не предполагающий столь жесткие ограничения на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений.

Результаты А. Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д. Д. Ивлева [46], [47], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара–Кармана для всей теории пластичности и развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу, нормали к характеристическим поверхностям совпадают с нормальными к площадкам максимальных касательных напряжений (площадкам скольжения). Было доказано, что именно состояние полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определимых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования.

Ассоциированный закон течения для ребра призмы Треска не фиксирует направление вектора, представляющего тензор приращения пластической деформации [65]. Поэтому появляется дополнительная функция — угол, определяющий положение вектора приращения пластической деформации между нормальными к граням призмы, — которой можно воспользоваться для построения согласованного поля скоростей. Именно поэтому на ребре призмы Треска часто можно отыскать решения прикладных задач о течении пластических тел.

Необходимо также отметить то обстоятельство, что решения уравнений статики, полученные в известных работах [32], [53], соответствуют именно ребру призмы Треска.

Принципиально важным также является тот факт, что соотношения пространственной и осесимметричной задачи вдоль характеристик являются неинтегрируемыми в отличие от случая плоской пластической деформации. Конечные соотношения можно получить, как будет показано ниже, только вдоль линий главных напряжений. Поэтому отличительной чертой предлагаемого подхода является то, что уравнения пространственной задачи исследуются не методом характеристик, а с помощью канонических преобразований, естественно определяемых с помощью сетки линий главных напряжений. Последовательное проведение такого подхода подразумевает представление всех уравнений в криволинейной сетке линий главных напряжений (изостат). Ясно, что изостаты исключительно удобны при анализе статических уравнений и записи соотношений ассоциированного кусочно-линейному условию пластичности закона течения, поскольку в главных осях напряжений вообще удастся получить так называемые полные соотношения в главных приращениях девиаторов напряжений и деформаций, но переформулировка уравнений кинематики в изостатические координаты сопряжена со значительными трудностями.

Связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, вообще не подвергалась анализу с точки зрения

общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к интегрированию более сложных, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности, связанных уравнений.

Несколько слов необходимо сказать о выборе представления анизотропной поврежденности. Мы использовали модель, предложенную в [100] (см. также раздел 4.3), и ограничились тензором эффективных напряжений построенным как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Это условие соосности, как было установлено в [100], действительно выполняется только если в процессе нагружения влиянием упругой деформации на состояние поврежденности можно пренебречь. Заметим, что достаточно полное изложение современной механики поврежденности может быть найдено в книге [269].

Формулировки связанных уравнений теории пластичности и поврежденности могут быть получены на основе микромеханического подхода.

В. Н. Кукуджановым в работе [71] предложена микромеханическая модель упруговязкопластической среды с поврежденностью и дано ее приложение к исследованию процессов локализации пластических деформаций. Согласно концепции В. Н. Кукуджанова, пластическое течение и разрушение есть единый процесс, вызванный движением дислокаций, а на более поздней стадии — зарождением и развитием микродефектов (микропор различной геометрии). Модель может учитывать форму микропор: эллипсоидальную или сферическую. В случае эллипсоидальных микропор поврежденность тела представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга. В этой же работе предложено условие пластичности пористого материала с кинематическим упрочнением, сформулирован соответствующий ассоциированный закон течения и получена определяющая зависимость для пористости.

Еще раз следует подчеркнуть, что все основные соотношения связанной задачи будут представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

Рассмотрим, следуя [46], уравнения равновесия для тела, подчиняющегося условию пластичности Треска. Предположим, что реализуется напряженное состояние, соответствующее ребру призмы Треска. Обозначим через σ_{ij} тензор напряжений; l_i, m_i, n_i — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — соответствующие собственные значения (главные напряжения).

Спектральное разложение тензора напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j. \quad (1.1)$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска для тела без повреждений представляется правильной шестигранной призмой с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k,$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге.

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Поскольку базис l_i, m_i, n_i предполагается ортонормированным, то

$$\delta_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j. \quad (1.2)$$

Учитывая уравнения (1.1) и (1.2), а также уравнение ребра призмы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\sigma_{ij} = (\sigma_3 \pm 2k)\delta_{ij} \mp 2kn_i n_j. \quad (1.3)$$

Таким образом, напряжения в неповрежденном жесткопластическом теле определяются скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем n_i .

Традиционное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

после подстановки в него разложения (1.3) может быть представлено в следующей инвариантной форме

$$\text{grad} \sigma_3 \mp 2k \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Следовательно, задача о равновесии жесткопластического тела для ребра призмы Треска статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора n_i), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Вводя обозначение

$$\Sigma = \frac{\sigma_3}{\mp 2k},$$

уравнение (1.4) приведем к виду:

$$\text{grad} \Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

В декартовых координатах уравнение (1.5) эквивалентно системе уравнений:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) принадлежит к гиперболическому типу, так как в каждой точке существует три характеристических направления (нормали к характеристическим поверхностям).

Если обозначить через $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ единичные нормали к характеристическим поверхностям в данной точке, то

$$\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{n}^{(2)} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{n}^{(3)} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.7)$$

Заметим, что характеристиками являются не только поверхности скольжения, но и поверхности, составленные из интегральных линий векторного поля \mathbf{n} .

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.5):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n},$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}.$$

В дальнейшем мы будем использовать также следующее равенство:

$$((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}) \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0.$$

Любопытно отметить, что уравнения статики плоской пластической деформации (см., например, [158])

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $p = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$, θ — угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению σ_1 к оси x_1 , по форме являются двумерным аналогом уравнений (1.6).

Действительно, вводя обозначения $\Sigma = p/(2k)$ и определяя единичное плоское векторное поле \mathbf{n} с помощью соотношений

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta,$$

систему (1.9) можно представить в форме (1.6).

В дальнейшем особую роль будут играть расслоенные векторные поля \mathbf{n} . Векторное поле, определенное в некоторой области пространства, называется

расслоенным, если существует семейство поверхностей, заполняющих эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства совпадает с полем \mathbf{n} .

Для того, чтобы векторное поле \mathbf{n} было расслоенным в некоторой области пространства, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0. \quad (1.10)$$

Здесь мы опускаем детали вывода этого далеко не очевидного условия.

Слои векторного поля \mathbf{n} состояются из векторных линий поля $\text{rot } \mathbf{n}$ следующим образом: сначала выбирается поверхность, так чтобы векторы \mathbf{n} касались ее в каждой точке, затем на этой поверхности строится семейство траекторий, ортогональных векторам \mathbf{n} , и из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля $\text{rot } \mathbf{n}$, образуя слой векторного поля \mathbf{n} .

Для единичного векторного поля \mathbf{n} введем углы ϑ , ψ , определяющие его ориентацию в пространстве:

$$\mathbf{n} = \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}. \quad (1.11)$$

Тогда условие расслоенности поля напряжений, следующее из (1.10), можно получить в виде:

$$\begin{aligned} \cos \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что любое плоское и осесимметричное векторное поле является расслоенным.

Таким образом, для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, которое, кроме того, является расслоенным в некоторой области пространства, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением \mathbf{n} должно удовлетворять уравнениям:

$$\text{rot div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (1.13)$$

Векторное уравнение (1.5) имеет инвариантную форму, исключительно удобную для преобразования к криволинейным координатам. Преобразуем его к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Ковариантные компоненты векторного поля $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ определяются как следует ниже (см., например, [159]):

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} n^k n^m) + n^r n^s [rs, l], \quad (1.14)$$

где g_{kl} — компоненты метрического тензора, $g = \det g_{ij}$, $[rs, l] = \Gamma_{rs, l}$ — символы Кристоффеля первого рода, через n^m обозначены контравариантные компоненты единичного векторного поля \mathbf{n} .

Используя формулу (1.14), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} n^k n^m) + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (1.15)$$

Ниже мы воспользуемся последним уравнением для преобразования уравнений пластического равновесия к специальным образом подобранным криволинейным координатам.

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_2 \delta_{ij} - (\sigma_2 - \sigma_3) n_i n_j + 2k l_i l_j. \quad (1.16)$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (1.5))

$$\begin{aligned} \text{grad} \Sigma_2 + \text{div}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)] \mathbf{n} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$.

Аналогом векторного уравнения (1.8) будет выступать уравнение

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] + \\ + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} (\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Векторное уравнение (1.8) представим также в форме проекций на характерные ориентации, связанные с полем напряжений: проектируя на направление \mathbf{n} , находим

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \nabla \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (1.19)$$

проектируя на любое ортогональное вектору \mathbf{n} направление (задаваемое ортом $\boldsymbol{\tau}$), получим

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] = 0. \quad (1.20)$$

Проектируя векторное уравнение (1.18) на главные оси тензора напряжений, находим:

направление \mathbf{n} :

$$\frac{\partial \Sigma_3}{\partial n} + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (1.21)$$

направление \mathbf{l} :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial l} + (\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0; \quad (1.22)$$

направление \mathbf{m} :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0. \quad (1.23)$$

Обратимся теперь к соотношениям, связывающим приращения напряжений и деформаций. Известно, что одним из важнейших преимуществ кусочно-линейных условий пластичности (к которым относится и условие пластичности Треска) является возможность для напряженных состояний, соответствующих грани поверхности текучести, выразить главные значения тензора приращения пластических деформаций $d\varepsilon_j^P$ через "полные" приращения $de_j = de_j^E + d\varepsilon_j^P$. Здесь de_j^E — приращение главного значения девиатора тензора упругих деформаций e_{is}^E . Ясно, что принципиально иная ситуация наблюдается в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру: приращение пластической деформации здесь принципиально определить нельзя ни по величине, ни по направлению.

В дальнейшем мы будем часто оперировать с величинами $d\sigma_j$, $d\varepsilon_j$, $d\varepsilon_j^E$, $d\varepsilon_j^P$. Не следует забывать об их точном определении.

Так, $d\sigma_j$ есть приращение главного напряжения σ_j , вообще говоря, отличное от главного приращения тензора напряжений, т.е. собственного значения тензора σ . То же самое относится и к величине $d\varepsilon_j$.

Величина $d\varepsilon_j^P$ есть главное значение тензора приращения пластических деформаций; $d\varepsilon_j^E$ — приращение главного значения тензора упругих деформаций ε_{is}^E .

Значение $d\varepsilon_j$, вообще говоря, не является приращением главных полных деформаций, а используются лишь для обозначения суммы

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_j^E + d\varepsilon_j^P.$$

Тем не менее мы будем иногда говорить о величинах $d\varepsilon_j$ как о главных приращениях "полных" деформаций. Именно в этом смысле величины $d\varepsilon_j$ входят в запись уравнений совместности полных деформаций, рассматриваемых ниже.

Искомые соотношения (как для граней, так и для ребер призмы Треска) без труда выводятся с помощью разложения приращения пластической деформации на три части

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}^{P(1)} + d\varepsilon_{ij}^{P(2)} + d\varepsilon_{ij}^{P(3)}, \quad (1.24)$$

каждая из которых соответствует одной из трех функций текучести

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k, \end{aligned} \quad (1.25)$$

составляющих условие пластичности Треска, и ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = 0, & f^{(\alpha)} < 0 \text{ или } f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \\ d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda^{(\alpha)}, & f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad d\lambda^{(\alpha)} > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ясно также, что достаточно получить только три соотношения, связывающих приращения главных напряжений $d\sigma_j$ и главные приращения "полных" деформаций $d\varepsilon_j$, поскольку ассоциированный закон течения устанавливает лишь

соосность тензора приращения пластических деформаций и тензора напряжений и не дает никаких дополнительных соотношений для определения ориентаций \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} в пространстве.²⁰⁸

Опуская детали вывода, приведем итоговые соотношения

$$\begin{aligned}
 ds_1 &= 2G\Delta \left[(4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\
 &\quad + (2\gamma^{(1)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\
 &\quad \left. + (2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right], \\
 ds_2 &= 2G\Delta \left[(2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\
 &\quad + (4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\
 &\quad \left. + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right], \\
 ds_3 &= 2G\Delta \left[(2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_1 + \right. \\
 &\quad + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_2 + \\
 &\quad \left. + (4 - 2\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})de_3 \right],
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

где G — упругий модуль сдвига,

$$\gamma^{(1)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_2| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_2)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_2) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_2 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_2 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(3)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\Delta = (4 - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})^{-1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, для нагружений вдоль ребра призмы Треска, которое определяется условиями

$$\begin{aligned}
 f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\
 f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k = 0, \\
 f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_3| - 2k < 0, \\
 d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0, \quad d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0,
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

²⁰⁸Напомним, что векторы, задающие ориентацию главных осей тензора напряжений, присутствуют в уравнениях равновесия для ребра (1.5) и грани (1.17) и неизбежно появляются в кинематических уравнениях — уравнениях совместности для приращений полной деформации.

находим

$$ds_1 = 0, \quad ds_2 = 0, \quad ds_3 = 0. \quad (1.29)$$

Для нагружений, соответствующих смещению изображающей напряжения точки вдоль грани призмы

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k < 0, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k < 0, \\ d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

получим полные соотношения в форме

$$\begin{aligned} ds_1 &= ds_2 = G(de_1 + de_2), \\ ds_3 &= 2Gde_3. \end{aligned} \quad (1.31)$$

К уравнениям равновесия и определяющим уравнениям, очевидно, необходимо присоединить еще кинематические уравнения. В качестве таковых вместо уравнений для скоростей перемещений, традиционно использующихся в теории пластичности, исключительно удобными оказываются уравнения сплошности (см., например, [33], [86]) для главных приращений полных деформаций, сформулированные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения кинематики будут рассмотрены несколько ниже.

4.4.2. Канонические инварианты уравнений пластического равновесия

Рассмотрим класс напряженных состояний с расслоенными полями \mathbf{n} . Как было отмечено выше, все плоские и осесимметричные пластические поля напряжений заведомо входят в этот класс.

Воспользуемся предположением о расслоенности векторного поля \mathbf{n} и выберем криволинейные координаты ξ^m специальным образом: поверхности $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля \mathbf{n} , а поверхности $\xi^1 = \text{const}$, $\xi^2 = \text{const}$ — интегральные поверхности векторного поля \mathbf{n} .

При таком выборе криволинейных координат имеем:

$$g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad n^1 = 0, \quad n^2 = 0,$$

что позволяет существенно упростить уравнения (1.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2} (n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} (n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} (n^3)^2 g_{33} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln(g_{33}g) + g_{33} \frac{\partial}{\partial \xi^3} (n^3)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как

$$(n^3)^2 = \frac{1}{g_{33}},$$

то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} + \frac{1}{2} \ln g \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) интегрируются вдоль линий главных напряжений: инвариант $I_{1,2} = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$ сохраняет свое значение на каждом из слоев поля \mathbf{n} , инвариант $I_3 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$ не изменяется вдоль векторной линии поля \mathbf{n} . Инварианты I_s будем называть каноническими инвариантами пространственной задачи теории пластичности.

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась в работе [261] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [327], [278], [279]. Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [135]. В этой же работе была установлена связь между преобразованием области пластического течения с помощью координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время Пуанкаре (H. Poincare) [127], [128] (см. также [2]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью производящих функций. Как было показано в [134], [135], уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, обладают важными свойствами инвариантности относительно преобразований Лежандра и Ампера.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (2.2) состоит в возможности разложения детерминанта g на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3)G_2(\xi^1, \xi^2). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является одновременно и общим интегралом уравнений (1.13): если задаться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы $g_{13} = 0, g_{23} = 0$ и выполнялось уравнение (2.3), то векторное поле

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad} \xi^3}{|\text{grad} \xi^3|}$$

будет тождественно удовлетворять уравнениям (1.13).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое

осесимметричное и плоское векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты r, φ, z , то слоями осесимметричного поля \mathbf{n} будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю \mathbf{n} траекторий, расположенных в плоскости $\varphi = 0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля \mathbf{n} .

Система уравнений (2.2) может быть также выведена из известных уравнений Ламе (G. Lamé) — уравнений равновесия, представленных в ортогональной криволинейной сетке изостат.²⁰⁹ Изостаты отнюдь не всегда образуют сетку, которая допускает подбор криволинейных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы изостаты совпадали с координатными линиями.²¹⁰ Но если такая возможность существует, то уравнения равновесия сводятся к трем соотношениям вдоль изостат ([24], с. 230-232; [280], р. 91):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_{12}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{r_{13}} + \rho F_{<1>} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{r_{23}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_{21}} + \rho F_{<2>} &= 0, \\ \frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r_{31}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{r_{32}} + \rho F_{<3>} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где L_1, L_2, L_3 — натуральные параметры, измеряемые вдоль взаимно ортогональных изостат; $F_{<1>}, F_{<2>}, F_{<3>}$ — физические компоненты поля массовых сил по отношению к локальному ортонормированному базису, связанному с изо-

²⁰⁹Напомним, что изостатой (или линией главного напряжения) называется кривая, касательная к которой направлена вдоль главной оси тензора напряжений.

²¹⁰Необходимое и достаточное условие этого — одновременное выполнение равенств

$$\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l} = 0, \mathbf{m} \cdot \text{rot } \mathbf{m} = 0, \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0.$$

Если \mathbf{n} — слоистое векторное поле и поверхности уровня функции $\omega(x_1, x_2, x_3)$ задают слои поля \mathbf{n} , то условие того, чтобы семейство поверхностей уровня могло быть дополнено до трижды ортогональной системы поверхностей, выражается уравнением Кэли—Дарбу (A. Cayley, 1872; G. Darboux, 1898) (см.: Математическая энциклопедия. Т. 3. (Гл. ред. И. М. Виноградов). М.: Советская Энциклопедия, 1982. с. 159.)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ \partial_{11}^2 \omega & \partial_{22}^2 \omega & \partial_{33}^2 \omega & 2\partial_{12}^2 \omega & 2\partial_{23}^2 \omega & 2\partial_{31}^2 \omega \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_1 \omega & 0 & 0 & \partial_2 \omega & 0 & \partial_3 \omega \\ 0 & \partial_2 \omega & 0 & \partial_1 \omega & \partial_3 \omega & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \omega & 0 & \partial_2 \omega & \partial_1 \omega \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 [(\partial_k \omega)(\partial_{ijk}^3 \omega) - 2(\partial_{ik}^2 \omega)(\partial_{jk}^2 \omega)].$$

статами;

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{13}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}}, & \frac{1}{r_{23}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}}, \\ \frac{1}{r_{31}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}}, & \frac{1}{r_{32}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}}, \\ \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}}, & \frac{1}{r_{21}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заметим, что $r_{ij} \neq r_{ji}$.

Следует отметить, что изостатические сетки, использованные для формулировки уравнений (2.2) и (2.4), различны, поскольку в первом случае $g_{12} \neq 0$, а во втором — недиагональные компоненты метрического тензора равны нулю.

Коэффициенты $1/r_{ij}$ в уравнениях (2.4) легко могут быть выражены через кривизны изостат в соответствующих локальных координатных плоскостях. Действительно, преобразуя уравнение равновесия

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \sigma_3) = \mathbf{0}$$

к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \frac{\partial \sigma_1}{\partial l} + \mathbf{m} \frac{\partial \sigma_2}{\partial m} + \mathbf{n} \frac{\partial \sigma_3}{\partial n} + \sigma_1 [\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + \sigma_2 [\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] + \\ + \sigma_3 [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{l} &= \kappa_{32} + \kappa_{23}, & \nabla \cdot \mathbf{m} &= \kappa_{13} + \kappa_{31}, & \nabla \cdot \mathbf{n} &= \kappa_{12} + \kappa_{21}, \\ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{21}, \end{aligned}$$

где κ_{ij} есть кривизна изостаты с номером i в локальной координатной плоскости, перпендикулярной направлению j ,²¹¹ находим

$$\frac{1}{r_{12}} = \kappa_{23}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \kappa_{13}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \kappa_{32}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \kappa_{12}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \kappa_{31}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \kappa_{21}.$$

Обозначая через d_k производную по направлению изостатической траектории

$$\frac{d}{dL_k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial \xi^k}$$

(по k не суммировать ($k = 1, 2, 3$))

²¹¹Речь идет о кривизне проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению.

и вводя кривизны κ_{ij} , приведем уравнения Ламе (2.4) к виду

$$\begin{aligned}d_1\sigma_1 + \kappa_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32}(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0, \\d_2\sigma_2 + \kappa_{31}(\sigma_2 - \sigma_3) + \kappa_{13}(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0, \\d_3\sigma_3 + \kappa_{12}(\sigma_3 - \sigma_1) + \kappa_{21}(\sigma_3 - \sigma_2) &= 0.\end{aligned}$$

Заметим далее, что значения кривизн κ_{ij} вдоль изостат можно, пользуясь деривационными формулами (см., например, [282], р. 649), связать уравнениями

$$\begin{aligned}d_1\kappa_{32} + d_3\kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}\kappa_{31} &= 0, \\d_1\kappa_{23} + d_2\kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21}\kappa_{12} &= 0, \\d_1\kappa_{31} + d_3\kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32}\kappa_{23} &= 0, \\d_2\kappa_{12} &= \kappa_{13}(\kappa_{21} - \kappa_{12}), \\d_3\kappa_{23} &= \kappa_{21}(\kappa_{32} - \kappa_{23}), \\d_1\kappa_{31} &= \kappa_{32}(\kappa_{13} - \kappa_{31}),\end{aligned}$$

или, что эквивалентно, — уравнениями

$$\begin{aligned}d_1\kappa_{32} + d_3\kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13}\kappa_{31} &= 0, \\d_1\kappa_{23} + d_2\kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21}\kappa_{12} &= 0, \\d_1\kappa_{31} + d_3\kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32}\kappa_{23} &= 0, \\d_3\kappa_{13} &= \kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}), \\d_1\kappa_{21} &= \kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}), \\d_2\kappa_{32} &= \kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}).\end{aligned}$$

Для напряженных состояний на ребре призмы Треска с максимальным третьим собственным значением в случае отсутствия массовых сил уравнения Ламе приобретают весьма простой вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} - \frac{2k}{r_{13}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} - \frac{2k}{r_{23}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{2k}{r_{31}} + \frac{2k}{r_{32}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Чтобы преобразовать уравнения (2.6) к форме (2.2), достаточно воспользоваться (2.5).

В двумерном случае аналогом уравнений (2.4) являются уравнения Ламе—Максвелла [169]:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} &= 0,\end{aligned}\tag{2.7}$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.7) приобретают вид соотношений

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{2k}{\rho_2} &= 0, \\ \frac{d\sigma_1}{dL_2} + \frac{2k}{\rho_1} &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Заметим также, что двумерные дифференциальные уравнения равновесия вдоль линий наибольших касательных напряжений имеют вид [169]:

$$\begin{aligned}\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_1} - \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_2} + \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{R_1} &= 0, \\ \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_2} - \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_1} - \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{R_2} &= 0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

где s_1, s_2 — натуральные параметры, измеряемые вдоль линий наибольших касательных напряжений, R_1, R_2 — радиусы кривизны, причем считается установленным сформулированное выше правило выбора знаков кривизн.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.9) существенно упрощаются

$$\begin{aligned}\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_1} + \frac{4k}{R_1} &= 0, \\ \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_2} - \frac{4k}{R_2} &= 0\end{aligned}\tag{2.10}$$

и непосредственно приводят к интегралам Генки вдоль линий скольжения.

Обратимся теперь к уравнениям кинематики. Как было подчеркнуто выше, в качестве таковых удобно взять уравнения совместности главных приращений полных деформаций, представленные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения совместности деформаций пригодны при любой определяющей зависимости и в инвариантной форме представляются тензорным уравнением

$$\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

где тензор второго ранга \mathbf{P} есть с точностью до знака ротор тензора полных деформаций (или тензора приращения полных деформаций).

Согласно соотношениям ассоциированного закона течения, приращение пластических деформаций есть тензор, соосный тензору напряжений, что оказывается, вообще говоря, неверным для приращения упругих деформаций. Ясно,

поэтому, что преобразование уравнений совместности деформаций к главным осям напряжений проще всего осуществляется в том случае, когда упругими деформациями можно пренебречь. Заметим также, что при выводе уравнений совместности мы с самого начала не будем предполагать несжимаемость пластического деформирования, чтобы получить соотношения, пригодные и в случае учета анизотропной поврежденности (влияние анизотропной поврежденности проявляется, в частности, и в том, что пластическое течение становится сжимаемым).

С целью вывода уравнений сплошности рассмотрим сначала инвариантное представление этих уравнений для главных приращений деформаций (приращениями упругих деформаций будем пренебрегать, но откажемся от требования несжимаемости):

$$\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Замечая, что²¹²

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1) &= [(\nabla d\varepsilon_1) \times \mathbf{l}] \otimes \mathbf{l} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\Gamma_{11}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \Gamma_{11}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{12}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{13}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

а также два аналогичных выражения

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2) &= [(\nabla d\varepsilon_2) \times \mathbf{m}] \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (-\Gamma_{22}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \Gamma_{22}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{21}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{23}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3) &= [(\nabla d\varepsilon_3) \times \mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} (\Gamma_{33}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} - \Gamma_{33}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{31}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{32}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \right\} d\varepsilon_3, \end{aligned}$$

матрицу тензора

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T$$

в главных осях напряжений можно получить в виде

²¹²Для ортогональной криволинейной сетки мы определяем Γ -символы как коэффициенты в разложениях частных производных от **единичных** локальных базисных векторов \mathbf{i}_α :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{i}_\gamma,$$

где

$$|\mathbf{i}_\gamma| = 1.$$

Тем самым в этой части книги мы отступаем от традиционного определения символов Кристоффеля [159].

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{r_{31}} & -d_2 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{r_{21}} \\ -d_3 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{r_{32}} & 0 & d_1 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{r_{12}} \\ d_2 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{r_{23}} & -d_1 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{r_{13}} & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.12)$$

Таким образом, уравнения совместности есть

$$\nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

где тензор $\nabla \times d\mathbf{P}$ в главных осях тензора напряжений представляется матрицей (мы опускаем детали вывода и опускаем для краткости символ d в записи тензора $d\mathbf{P}$), элементы которой приводятся ниже:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{11} = & d_2 P_{31} - d_3 P_{21} + \frac{1}{r_{23}} P_{31} - \frac{1}{r_{32}} P_{21} + \\ & + \frac{1}{r_{13}} P_{23} - \frac{1}{r_{12}} P_{32}, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2 P_{32} + \frac{1}{r_{23}} (P_{32} + P_{23}) + \frac{1}{r_{12}} P_{31},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = -d_3 P_{23} - \frac{1}{r_{32}} (P_{23} + P_{32}) - \frac{1}{r_{13}} P_{21},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1 P_{31} - \frac{1}{r_{13}} (P_{31} + P_{13}) - \frac{1}{r_{21}} P_{32},$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{22} = & d_3 P_{12} - d_1 P_{32} + \frac{1}{r_{31}} P_{12} - \frac{1}{r_{13}} P_{32} + \\ & + \frac{1}{r_{21}} P_{31} - \frac{1}{r_{23}} P_{13}, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = d_3 P_{13} + \frac{1}{r_{31}} (P_{13} + P_{31}) + \frac{1}{r_{23}} P_{12},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 P_{21} + \frac{1}{r_{12}}(P_{21} + P_{12}) + \frac{1}{r_{31}}P_{23},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 P_{12} - \frac{1}{r_{21}}(P_{12} + P_{21}) - \frac{1}{r_{32}}P_{13},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_1 P_{23} - d_2 P_{13} + \frac{1}{r_{12}}P_{23} - \frac{1}{r_{21}}P_{13} + \\ + \frac{1}{r_{32}}P_{12} - \frac{1}{r_{31}}P_{21}.$$

Подставляя элементы матрицы (2.12) в матрицу тензора $\nabla \times \mathbf{P}$, находим физические компоненты этого тензора в форме:

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = d_2 d_2 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_2 + d_2 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - d_3 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] + \\ + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \\ + \kappa_{32} \kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32} \kappa_{23}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = -d_2 d_1 d\varepsilon_3 + d_2 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_2 d\varepsilon_3 + \\ + \kappa_{31} \kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{31} \kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{23} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = -d_3 d_1 d\varepsilon_2 - d_3 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_2 - \\ - \kappa_{23} \kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32} \kappa_{21}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21} \kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1 d_2 d\varepsilon_3 - d_1 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{13} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1 - \\ - \kappa_{31} \kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13} \kappa_{32}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{13} \kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_1 d_1 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - d_1 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] + \\ + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \\ - \kappa_{32}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{13} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{31} \kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = -d_3 d_2 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{12} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{12} \kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{31} \kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = -d_1 d_3 d\varepsilon_2 + d_1 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_2 + \\ + \kappa_{23} \kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{23} \kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{23} \kappa_{12}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{13} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1 - \\ - \kappa_{12} \kappa_{13} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21} \kappa_{13} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13} \kappa_{21} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_1 d_1 d\varepsilon_2 + d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - d_2 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] + \\ + \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ - \kappa_{13}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{12} \kappa_{21} (d\varepsilon_1 - 2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_2).$$

Для удобства обозначим через \mathbf{S} симметричный тензор второго ранга, определяемый соотношением

$$\mathbf{S} = \nabla \times (d\boldsymbol{\varepsilon}) \times \nabla. \quad (2.14)$$

Поскольку $-\mathbf{P} = (d\boldsymbol{\varepsilon}) \times \nabla$, тензор $-\mathbf{S}$ в точности равен тензору $\nabla \times \mathbf{P}$.

Нетрудно видеть, что приведенные выше девять компонент тензора $-\mathbf{S} = \nabla \times \mathbf{P}$ можно получить по следующей схеме: выражения для компонент с индексами 22 и 33 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты 11; выражения для компонент с индексами 23 и 31 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты 12.

Равенство нулю всех приведенных выше компонент тензора $\nabla \times \mathbf{P}$ и дает условия совместности деформаций. Обычно считается, что независимых уравнений совместности должно быть шесть (т.к. тензор $\mathbf{S} = \nabla \times \mathbf{P}$ симметричен).²¹³

На самом деле ситуация несколько сложнее. Действительно, оказывается, что тензор \mathbf{S} удовлетворяет соотношению $\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}$, следовательно, независимых условий должно быть всего три.

Доказать справедливость этого соотношения проще всего, используя декартову систему координат, в которой, как известно, компоненты тензора \mathbf{S} вычисляются по формулам

$$S_{lp} = e_{nrl} e_{mkp} \partial_n \partial_k d\varepsilon_{rm},$$

или

$$\begin{aligned} -S_{33} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ -S_{11} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ -S_{22} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ -S_{23} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -S_{31} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -S_{12} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

²¹³Следует отметить, что полученные выше выражения для S_{21} , S_{31} , S_{32} отличны соответственно от S_{12} , S_{13} , S_{23} . Тем не менее в силу симметрии тензора \mathbf{S} должны быть справедливы соотношения $S_{21} = S_{12}$, $S_{31} = S_{13}$, $S_{32} = S_{23}$.

Прямым подсчетом затем можно показать, что

$$\begin{aligned}\partial_1 S_{11} + \partial_2 S_{12} + \partial_3 S_{31} &= 0, \\ \partial_1 S_{12} + \partial_2 S_{22} + \partial_3 S_{23} &= 0, \\ \partial_1 S_{31} + \partial_2 S_{23} + \partial_3 S_{33} &= 0.\end{aligned}$$

На первый взгляд может показаться, что три независимых условия могут составить либо три уравнения $S_{11} = 0$, $S_{22} = 0$, $S_{33} = 0$, либо три уравнения $S_{23} = 0$, $S_{31} = 0$, $S_{12} = 0$. Однако, ни три условия первой группы, ни три условия второй группы по отдельности использовать нельзя (см., например, [339]). Известно [289], что если три условия первой группы удовлетворяются внутри некоторой односвязной области, а вторая тройка условий — на границе этой области, то все три условия второй группы будут удовлетворяться внутри области. Аналогичное утверждение будет справедливо, если поменять группы условий ролями.

В изостатической координатной сетке уравнение $\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}$ приобретает форму

$$\begin{aligned}d_1 S_{\langle 11 \rangle} + \kappa_{23}(S_{\langle 11 \rangle} - S_{\langle 22 \rangle}) + \kappa_{32}(S_{\langle 11 \rangle} - S_{\langle 33 \rangle}) + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2)S_{\langle 12 \rangle} + \\ + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)S_{\langle 13 \rangle} &= 0, \\ d_2 S_{\langle 22 \rangle} + \kappa_{31}(S_{\langle 22 \rangle} - S_{\langle 33 \rangle}) + \kappa_{13}(S_{\langle 22 \rangle} - S_{\langle 11 \rangle}) + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)S_{\langle 21 \rangle} + \\ + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)S_{\langle 23 \rangle} &= 0, \\ d_3 S_{\langle 33 \rangle} + \kappa_{12}(S_{\langle 33 \rangle} - S_{\langle 11 \rangle}) + \kappa_{21}(S_{\langle 33 \rangle} - S_{\langle 22 \rangle}) + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)S_{\langle 31 \rangle} + \\ + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)S_{\langle 32 \rangle} &= 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим далее различные частные формы представлений условий сплошности деформаций.

Плоская, возможно сжимаемая, пластическая деформация. В случае плоской сжимаемой пластической деформации (при пренебрежимо малых упругих деформациях) матрица тензора \mathbf{P} в главных осях напряжений есть

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -d_2 d\varepsilon_1 + \frac{1}{r_{21}}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \\ 0 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 + \frac{1}{r_{12}}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.15)$$

Поэтому уравнение совместности в главных приращениях полных деформаций получается как

$$d_1 P_{23} - d_2 P_{13} + \frac{1}{r_{12}} P_{23} - \frac{1}{r_{21}} P_{13} = 0, \quad (2.16)$$

или

$$\begin{aligned}d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 d_1 d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \left(d_1 \frac{1}{r_{12}} - d_2 \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{r_{21}^2} \right) + \\ + \frac{1}{r_{12}} d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \frac{1}{r_{21}} d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая, что $r_{12} = \rho_2$, $r_{21} = -\rho_1$, получим также

$$\begin{aligned} d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 d_1 d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \left(d_1 \frac{1}{\rho_2} + d_2 \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) + \\ + \frac{1}{\rho_2} d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \frac{1}{\rho_1} d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пространственное несжимаемое пластическое течение при нагружении вдоль грани призмы Треска. Для нагружений жесткопластического тела вдоль грани (1.30) имеем $d\varepsilon_3 = 0$, $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$, следовательно, матрица (2.12) приобретает вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{12} d\varepsilon_1 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{21} d\varepsilon_1 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ \kappa_{31} d\varepsilon_1 & \kappa_{32} d\varepsilon_1 & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.19)$$

Тензор $\nabla \times \mathbf{P}$ при этом в главных осях напряжений имеет компоненты

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{11} = -d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_2 (\kappa_{31} d\varepsilon_1) - d_3 (\kappa_{21} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + (\kappa_{31}^2 - 3\kappa_{32}\kappa_{23} - \kappa_{21}^2) d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2 (\kappa_{32} d\varepsilon_1) - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} (\kappa_{32} - \kappa_{23}) d\varepsilon_1,$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{13} = d_3 d_1 d\varepsilon_1 + 2d_3 (\kappa_{23} d\varepsilon_1) + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + 2\kappa_{21} (\kappa_{23} - \kappa_{32}) d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1 (\kappa_{31} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{32} (\kappa_{13} - \kappa_{31}) d\varepsilon_1,$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 (\kappa_{12} d\varepsilon_1) - d_1 (\kappa_{32} d\varepsilon_1) + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1 + \\ + (\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 + 2\kappa_{31}\kappa_{13}) d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{P})_{23} = -d_3 d_2 d\varepsilon_1 - 2d_3 (\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + 2\kappa_{12} (\kappa_{31} - \kappa_{13}) d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 d_3 d\varepsilon_1 + d_1(\kappa_{21} d\varepsilon_1) + 2\kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - 2\kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_2 d_2 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_1 - 2d_1(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + 2d_2(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + 2(\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2) d\varepsilon_1,$$

или, пренебрегая квадратами кривизн для слабо искривленных траекторий главных напряжений,

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = -d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_2(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - d_3(\kappa_{21} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2(\kappa_{32} d\varepsilon_1) - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = d_3 d_1 d\varepsilon_1 + 2d_3(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - d_1(\kappa_{32} d\varepsilon_1) + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = -d_3 d_2 d\varepsilon_1 - 2d_3(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 d_3 d\varepsilon_1 + d_1(\kappa_{21} d\varepsilon_1) + 2\kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - 2\kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_2 d_2 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_1 - 2d_1(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + 2d_2(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1.$$

Плоское несжимаемое пластическое течение. В случае плоской несжимаемой пластической деформации при пренебрежимо малых упругих деформациях матрица (2.15) и уравнение совместности деформаций (2.18), соответственно, приобретают форму

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad (2.20)$$

$$(d_2 d_2 - d_1 d_1) d\varepsilon_1 - 2(d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2) d\varepsilon_1 - 3\kappa_2 d_1 d\varepsilon_1 - 3\kappa_1 d_2 d\varepsilon_1 = 0. \quad (2.21)$$

Пренебрегая в последнем уравнении квадратами кривизн линий главных напряжений, получим

$$(d_2 d_2 - d_1 d_1) d\varepsilon_1 - 2(d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1) d\varepsilon_1 - 3\kappa_2 d_1 d\varepsilon_1 - 3\kappa_1 d_2 d\varepsilon_1 = 0. \quad (2.22)$$

Далее рассмотрим уравнения совместности деформаций в приращениях с учетом вклада упругой составляющей $d\varepsilon_{ij}^E$. Как и прежде, в качестве координатной сетки выберем сетку изостат. Поскольку главные оси тензора $d\varepsilon_{ij}^E$, вообще говоря, отличаются от главных осей тензора напряжений, то вычисление компонент тензора \mathbf{S} , определяемого согласно уравнению (2.14), в изостатических координатах является гораздо более сложной задачей, чем в предшествующем рассмотрении.

Для описания поворота главных осей напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} при догрузке введем вектор $d\boldsymbol{\omega}$ так, что

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}, \\ d\mathbf{m} &= d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}, \\ d\mathbf{n} &= d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

После ряда довольно сложных преобразований можно получить следующие формулы для вычисления компонент тензора \mathbf{S} .²¹⁴

$$\begin{aligned} S_{<11>} &= -d_2 d_2 d\varepsilon_3 - d_3 d_3 d\varepsilon_2 + (\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \\ &\quad + d_3 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - d_2 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \\ &\quad - \kappa_{23} \kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_3 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 + \\ &\quad + (4\kappa_{31} \kappa_{21} + 2d_2 \kappa_{21} + 2d_3 \kappa_{31} + d_2 d_3 + d_3 d_2 + 3\kappa_{31} d_3 + 3\kappa_{21} d_2) [(\varepsilon_2^E - \varepsilon_3^E) d\omega_1] + \\ &\quad + (2\kappa_{23} \kappa_{12} + \kappa_{32} \kappa_{21} + \kappa_{23} \kappa_{21} + d_3 \kappa_{23} + 2\kappa_{23} d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega_2] + \\ &\quad + (2\kappa_{32} \kappa_{13} + \kappa_{23} \kappa_{31} + \kappa_{31} \kappa_{32} + d_2 \kappa_{32} + 2\kappa_{32} d_2) [(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E) d\omega_3], \end{aligned}$$

²¹⁴Ниже приводятся только выражения для физических компонент $S_{<11>}$ и $S_{<12>}$. Остальные компоненты можно получить, пользуясь следующей схемой: выражения для компонент с индексами 22 и 33 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты $S_{<11>}$; выражения для компонент с индексами 23 и 31 получаются циклической перестановкой индексов в выражении для компоненты $S_{<12>}$.

$$\begin{aligned}
S_{<12>} = & d_2 d_1 d\varepsilon_3 + d_2 [\kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)] + \kappa_{31} d_1 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \\
& - \kappa_{23} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} (\kappa_{32} - \kappa_{23}) (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1) + \\
& + (\kappa_{23} \kappa_{21} - \kappa_{21} \kappa_{32} - d_3 \kappa_{32} - d_3 d_1 + \kappa_{23} d_3 - 2\kappa_{21} d_1 - \kappa_{32} d_3) [(\varepsilon_2^E - \varepsilon_3^E) d\omega_1] + \\
& + (2\kappa_{21} \kappa_{13} - 2\kappa_{31} \kappa_{12} - 2d_2 \kappa_{12} + d_3 \kappa_{13} - d_3 \kappa_{31} - d_2 d_3 + \kappa_{21} d_2 - \\
& - 2\kappa_{31} d_3 - 2\kappa_{12} d_2 + \kappa_{13} d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega_2] + \\
& + (\kappa_{23} \kappa_{32} + 2\kappa_{31} \kappa_{13} + 2\kappa_{21} \kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + d_3 \kappa_{12} - d_2 \kappa_{31} + \\
& + d_3 d_3 + \kappa_{21} d_3 + \kappa_{12} d_3) [(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E) d\omega_3].
\end{aligned}$$

Напомним, что величины $d\varepsilon_j$, вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются как обозначение для суммы $d\varepsilon_j^E$ и $d\varepsilon_j^P$, причем $d\varepsilon_j^E$ — приращение главного значения ε_j^E тензора упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^E$, $d\varepsilon_j^P$ — собственное значение тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Если пренебречь упругими деформациями, то величина $d\varepsilon_j$ представляет собой главное значение тензора приращения полной деформации.

Следует также заметить, что аналогичная по сути процедура может быть использована для вывода уравнений равновесия в приращениях главных напряжений в изостатической координатной системе. Не останавливаясь на деталях, приведем окончательный результат

$$\begin{aligned}
d_1 d\sigma_1 + \kappa_{23}(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \kappa_{32}(d\sigma_1 - d\sigma_3) + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2) [(\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3] + \\
+ (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3) [(\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2 d\sigma_2 + \kappa_{31}(d\sigma_2 - d\sigma_3) + \kappa_{13}(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1) [(\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3] + \\
+ (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3) [(\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_3 d\sigma_3 + \kappa_{12}(d\sigma_3 - d\sigma_1) + \kappa_{21}(d\sigma_3 - d\sigma_2) + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1) [(\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2] + \\
+ (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2) [(\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1] = 0.
\end{aligned}$$

Все основные уравнения плоской (плоское деформированное состояние) и осесимметричной задачи, сформулированные в изостатической сетке, читатель может найти в **Приложении IV**.

4.4.3. Учет анизотропной поврежденности

Мы, по-прежнему, будем рассматривать упругопластическое тело, подчиняющееся критерию текучести Треска, но предметом исследования будет являться учет анизотропного распределения поврежденности в основных уравнениях. Ограничимся простейшим вариантом: поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга \mathbf{D} , определенного выше, в разделе 4.3, главные оси которого считаются коориентированными главным осям тензора напряжений.

Рассеянное поле микродефектов довольно сильно искажает картину деформирования, что часто требует отхода от классической евклидовой схемы (в частности, появляется дополнительная тензорная мера деформации третьего ранга

в форме тензора кручения) и оперирования с несовместным полем деформаций (см., например, [112]). Ясно, что несовместность поля деформаций из-за присутствия рассеянного поля микродефектов проявляется как неоднородность (в форме тензора второго ранга) в уравнениях совместности (точнее, несовместности) деформаций.

Подробное изложение этого круга вопросов заинтересованный читатель может найти в упомянутой выше книге [112], где достаточно подробно обсуждаются неевклидовы характеристики деформации и модификация уравнений совместности деформаций. Здесь мы лишь отметим, что вместо уравнения совместности деформаций (2.11) следует рассматривать уравнение с тензором несовместности в правой части:

$$\nabla \times d\mathbf{P} = d\boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — тензор расхождения Кренера, который выражается через тензор плотности дислокаций.

Микронапряжения χ_{ij} , обусловленные сопротивлением несовместности, определяются, как обычно, термодинамической производной

$$\chi_{ij} = \frac{\partial \psi_D}{\partial \eta_{ij}},$$

где ψ_D — объемная плотность свободной энергии Гельмгольца тела с рассеянными микроповреждениями, и могут быть включены в определяющие зависимости согласно схеме, изложенной в монографии [108].

Несколько слов следует сказать и о постановке условий на границах зон локализации пластических деформаций и поврежденности. Традиционное для постановок задач математической теории пластичности условие непрерывности всех компонент тензора напряжений при переходе через границу локализованного пластического течения нуждается в особой проверке и может быть заменено более общим граничным условием [7].

Ключевой принцип, позволяющий сформулировать основные уравнения модели, состоит в использовании тензора эффективных напряжений вместо тензора истинных напряжений во всех определяющих зависимостях.

Сначала будем считать, что эффективные напряжения находятся на ребре призмы Треска и занумеруем главные оси так, чтобы третье главное эффективное напряжение было максимальным (или минимальным), а два других главных эффективных напряжения принимаются равными друг другу:

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} = \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = \frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k, \quad (3.1)$$

причем главные поврежденности D_1, D_2 также считаются равными (их общее значение обозначим через \tilde{D}).

Тензор напряжений тогда представляется в форме (ср. (1.3)):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \right) (1 - \tilde{D}) \delta_{ij} + \left[\left(1 - \frac{1 - \tilde{D}}{1 - D_3} \right) \sigma_3 \mp 2k(1 - \tilde{D}) \right] n_i n_j. \quad (3.2)$$

Уравнение равновесия имеет вид (ср. (1.5)):

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[(1 - \tilde{D}) \left(-1 + \frac{\Sigma}{1 - D_3} \right) \right] + \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} \left\{ \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \right] \right\} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где по-прежнему используется обозначение $\Sigma = \sigma_3/(\mp 2k)$.

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(-\frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \right] - \\ - \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Более простые соотношения получаются в том случае, если поврежденность, соответствующая ориентациям \mathbf{l} и \mathbf{m} , пренебрежимо мала. На основании

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \quad (3.5)$$

получим следующее представление напряжений:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \right) \delta_{ij} + \left[\left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \sigma_3 \mp 2k \right] n_i n_j, \quad (3.6)$$

и уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\Sigma}{1 - D_3} + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \Sigma \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} \left\{ \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \Sigma \right] \right\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \left[\left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \Sigma + 1 \right] (\nabla \cdot \mathbf{n}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\Sigma}{1 - D_3} + \left[\left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \Sigma + 1 \right] \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Наконец, изотропное по ориентациям распределение поврежденности подразумевает соотношение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k(1 - D), \quad (3.9)$$

которое приводит к тензору напряжений вида

$$\sigma_{ij} = (\sigma_3 \pm 2k(1 - D)) \delta_{ij} \mp 2k(1 - D) n_i n_j \quad (3.10)$$

и уравнению равновесия

$$\begin{aligned} \text{grad}(\Sigma - (1 - D)) + (1 - D) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(1 - D)] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + (1 - D)(\nabla \cdot \mathbf{n}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\Sigma - (1 - D)) + (1 - D) \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим теперь основные соотношения для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, уравнение которой в терминах эффективного напряжения имеет вид

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = 2k. \quad (3.13)$$

Тензор напряжений в этом случае представим в форме:

$$\sigma_{ij} = \sigma_2 \delta_{ij} + 2k(1 - D_1) l_i l_j + \left(\frac{1 - D_1}{1 - D_2} - 1 \right) \sigma_2 l_i l_j + (\sigma_3 - \sigma_2) n_i n_j. \quad (3.14)$$

Уравнение равновесия, следовательно, может быть получено как

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\Sigma_3 - \Sigma_2) [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] + \mathbf{n} [\mathbf{n} \cdot \nabla (\Sigma_3 - \Sigma_2)] + \\ + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l})] + \\ + \mathbf{l} \left\{ \mathbf{l} \cdot \nabla \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \right\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направления \mathbf{n} , \mathbf{l} , \mathbf{m} , находим:

$$\frac{\partial \Sigma_3}{\partial n} + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial l} + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] (\nabla \cdot \mathbf{l}) + \\ + \frac{\partial}{\partial l} \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = 0. \quad (3.18)$$

Из полученных соотношений для грани призмы Треска непосредственно могут быть выведены основные уравнения пластического плоского деформированного состояния, на которое накладывается поле рассеянной поврежденности. Условие пластичности выражается уравнением (3.13).

Опуская детали вывода, приведем уравнение равновесия в случае плоского деформированного состояния

$$\begin{aligned} \omega [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l})] + \mathbf{l}[\mathbf{l} \cdot \nabla \omega] + \Sigma_2 [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m} + \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m})] + \\ + \mathbf{m}[\mathbf{m} \cdot \nabla \Sigma_2] = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\omega = 1 - D_1 + \frac{1 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2, \quad \Sigma_2 = \frac{\sigma_2}{2k}.$$

Ясно, что с помощью этого уравнения, имеющего инвариантную форму, без труда могут быть получены переформулировки для любой нужной координатной системы. Ясно, что наибольший интерес представляет уравнение (3.19), записанное в криволинейной координатной сетке изостат. С этой целью спроектируем уравнение (3.19) соответственно на главные направления \mathbf{l} , \mathbf{m} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial l} + \omega(\nabla \cdot \mathbf{l}) + \Sigma_2 \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] = 0, \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + \Sigma_2(\nabla \cdot \mathbf{m}) + \omega \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пользуясь затем геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \nabla \cdot \mathbf{m}, \quad \kappa_2 = \nabla \cdot \mathbf{l}, \\ -\kappa_1 = \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}], \quad -\kappa_2 = \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}], \end{aligned} \quad (3.21)$$

где κ_1, κ_2 — кривизны соответственно первого и второго семейства изостатических траекторий, уравнения (3.20) представим в форме, которая является обобщением уравнений (2.8) на случай пластической среды с рассеянными повреждениями (L_1, L_2 — натуральные параметры вдоль изостатических траекторий):

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dL_1} - (\Sigma_2 - \omega)\kappa_2 &= 0, \\ \frac{d\Sigma_2}{dL_2} + (\Sigma_2 - \omega)\kappa_1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Ясно также, что кривизны изостатических траекторий κ_1, κ_2 выражаются (с учетом сформулированного правила знаков) через радиусы кривизны ρ_1, ρ_2 по формулам:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\rho_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}.\tag{3.23}$$

Отметим также следующие формулы:

$$\frac{1}{\rho_1} = d_2 \ln \frac{d\xi^1}{dL_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -d_1 \ln \frac{d\xi^2}{dL_2}.$$

Нам осталось еще рассмотреть соотношения ассоциированного закона течения для тела с рассеянными повреждениями.

Начнем с соотношений для грани (3.13). Ассоциированный закон течения здесь имеет форму двух соотношений

$$d\varepsilon_1^P = \frac{d\lambda}{1 - D_1}, \quad d\varepsilon_2^P = -\frac{d\lambda}{1 - D_2}, \quad d\varepsilon_3^P = 0.\tag{3.24}$$

Множитель $d\lambda$ определяется из условия непрерывности

$$d\left(\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_2}{1 - D_2}\right) = 0,$$

которое в результате преобразований и с учетом уравнений роста повреждений, которые мы примем в достаточно общей форме,

$$dD_k = F_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon_1^P, \varepsilon_2^P, \varepsilon_3^P, D_1, D_2, D_3)d\gamma \quad (k = 1, 2, 3),\tag{3.25}$$

где γ — длина траектории пластического деформирования

$$\gamma = \int \sqrt{d\varepsilon_j^P d\varepsilon_j^P},\tag{3.26}$$

приводит к соотношению

$$d\lambda = \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)}{\sqrt{(1 - D_1)^2 + (1 - D_2)^2}} d\gamma,$$

или

$$d\lambda = \frac{(1-D_1)(1-D_2)}{\sqrt{(1-D_1)^2 + (1-D_2)^2}} \frac{(1-D_1)d\sigma_2 - (1-D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k[(1-D_2)F_1 + (1-D_1)F_2]}.$$

Ясно, что с помощью последнего соотношения уравнения ассоциированного закона течения для грани (3.24) могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} (1-D_1)d\varepsilon_1^P + (1-D_2)d\varepsilon_2^P = 0, \\ d\varepsilon_1^P = \frac{1-D_2}{\sqrt{(1-D_1)^2 + (1-D_2)^2}} \frac{(1-D_1)d\sigma_2 - (1-D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k[(1-D_2)F_1 + (1-D_1)F_2]}, \\ d\varepsilon_3^P = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Таким образом, приращения пластической деформации однозначно определены.

Заметим, что пластическое течение при нагружениях на грани призмы Треска из-за влияния анизотропной поврежденности становится сжимаемым.

Рассмотрим соотношения на ребре. Предположим, что ребро образовано пересечением граней

$$\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{\sigma_2}{1-D_2} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k. \quad (3.28)$$

Приращение полной главной деформации в соответствии с нумерацией функций текучести (1.25) тогда есть

$$d\varepsilon_k^P = d\varepsilon_k^{P(2)} + d\varepsilon_k^{P(3)},$$

где согласно ассоциированному закону течения

$$\begin{cases} (1-D_2)d\varepsilon_2^{P(2)} + (1-D_3)d\varepsilon_3^{P(2)} = 0, \\ d\varepsilon_2^{P(2)} = \frac{1-D_3}{\sqrt{(1-D_2)^2 + (1-D_3)^2}} \frac{(1-D_2)d\sigma_3 - (1-D_3)d\sigma_2}{\sigma_3 F_2 - \sigma_2 F_3 + 2k[(1-D_3)F_2 + (1-D_2)F_3]}, \\ d\varepsilon_1^{P(2)} = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} (1-D_1)d\varepsilon_1^{P(3)} + (1-D_3)d\varepsilon_3^{P(3)} = 0, \\ d\varepsilon_1^{P(3)} = \frac{1-D_3}{\sqrt{(1-D_1)^2 + (1-D_3)^2}} \frac{(1-D_1)d\sigma_3 - (1-D_3)d\sigma_1}{\sigma_3 F_1 - \sigma_1 F_3 + 2k[(1-D_3)F_1 + (1-D_1)F_3]}, \\ d\varepsilon_2^{P(3)} = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Соотношения ассоциированного закона течения однозначно определяют все три приращения $d\varepsilon_1^P$, $d\varepsilon_2^P$, $d\varepsilon_3^P$. Действительно,

$$d\varepsilon_1^P = d\varepsilon_1^{P(3)}, \quad d\varepsilon_2^P = d\varepsilon_2^{P(2)}, \quad -d\varepsilon_3^P = \frac{1 - D_1}{1 - D_3} d\varepsilon_1^{P(3)} + \frac{1 - D_2}{1 - D_3} d\varepsilon_2^{P(2)},$$

где приращения $d\varepsilon_1^{P(3)}$, $d\varepsilon_2^{P(2)}$, в свою очередь, однозначно определены (3.29), (3.30).

В двумерном случае полная система уравнений плоской пластической деформации включает два уравнения равновесия (3.22), условие пластичности (3.13), уравнение совместности (2.18) в формулировке, не исключающей возможную сжимаемость течения, два соотношения ассоциированного закона течения (3.27) и два уравнения (см. (3.25)), определяющих изменение главных поврежденностей D_1 , D_2 с возрастанием пластических деформаций. Всего имеется восемь уравнений для определения восьми неизвестных величин: двух главных напряжений σ_1 , σ_2 , двух приращений $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, двух главных поврежденностей D_1 , D_2 , и двух уравнений, определяющих преобразование декартовых координат в изостатические координаты. Ясно, что определение напряжений не может быть проведено независимо от поврежденности и поля деформаций. Плоская задача в принципе статически неопределима.

Укажем далее случаи, когда соотношения вдоль изостат могут быть точно проинтегрированы.

4.4.4. Инварианты плоской и пространственной связанной (пластичность–поврежденность) задачи

Ниже приводятся инварианты плоской и пространственной связанной задачи, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Все инварианты непосредственно находятся из уравнений равновесия (3.4), (3.8), (3.12) и (3.22), сформулированных в проекциях на главные оси напряжений, при условии (для трехмерных уравнений) расслоенности векторного поля \mathbf{n} .

1. Пространственная задача (ребро (3.1), две различных главных поврежденности). При условии, что Σ , \tilde{D} , D_3 не изменяются на слое векторного поля \mathbf{n} , величина

$$I = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} = \Sigma + \ln \frac{d\xi^3}{dL_3} \quad (4.1)$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение

$$d_3 \Sigma = \Gamma d_3 \left(\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln \frac{d\xi^2}{dL_2} \right), \quad (4.2)$$

где

$$\Gamma = \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}).$$

2. Пространственная задача (ребро (3.5), одноосная поврежденность). При условии, что Σ , D_3 не изменяются на слое векторного поля \mathbf{n} , величина (4.1) является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение (4.2), в котором следует считать

$$\Gamma = \Sigma - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1.$$

3. Пространственная задача (ребро (3.9), изотропная поврежденность). При условии, что поврежденность D не изменяется на слое векторного поля \mathbf{n} , величина

$$I = \frac{\Sigma}{1 - D} + \ln \frac{d\xi^3}{dL_3} \quad (4.3)$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение

$$d_3 \Sigma = (1 - D) d_3 \left(\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln \frac{d\xi^2}{dL_2} \right). \quad (4.4)$$

4. Плоская пластическая деформация (условие пластичности (3.13), двумерное распределение поврежденности). В случае, когда Σ_2 не изменяется вдоль изостат первого семейства, отношение

$$I_1 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\frac{d\xi^2}{dL_2}} \quad (4.5)$$

также не изменяется вдоль изостат первого семейства.

В случае, когда ω не изменяется вдоль изостат второго семейства, отношение

$$I_2 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\frac{d\xi^1}{dL_1}} \quad (4.6)$$

также не изменяется вдоль изостат второго семейства.

Заметим также, что

$$\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} = \int \frac{dL_2}{\rho_1}, \quad -\ln \frac{d\xi^2}{dL_2} = \int \frac{dL_1}{\rho_2}. \quad (4.7)$$

И в первом, и во втором случае ξ^1 , ξ^2 есть аналоги канонических переменных, введенных в [134] посредством преобразования

$$x_1 = x_1(\xi^1, \xi^2), \quad x_2 = x_2(\xi^1, \xi^2)$$

области пластического течения, не изменяющего площади любого элемента пластической зоны.

Общие соотношения вдоль линий главных напряжений для первых из трех перечисленных выше случаев имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d_3\Sigma + \Gamma(d_1\vartheta_{12} + d_2\vartheta_{21}) &= 0, \\ d_1(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{31} &= 0, \\ d_2(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь ϑ_{ik} — угол между касательной к проекции изостаты с номером i на плоскость, нормальную изостате с номером k , и фиксированным направлением в этой плоскости.

Для напряженного состояния, соответствующего грани (3.13), общие соотношения вдоль линий главных напряжений есть

$$\begin{aligned} d_3\Sigma_3 + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(d_1\vartheta_{12} + d_2\vartheta_{21}) - \Gamma d_1\vartheta_{12} &= 0, \\ d_1(\Gamma + \Sigma_2) - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3\vartheta_{32} + \Gamma(d_3\vartheta_{32} + d_2\vartheta_{23}) &= 0, \\ d_2\Sigma_2 - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3\vartheta_{31} - \Gamma d_1\vartheta_{13} &= 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$\Gamma = 1 - D_1 + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2}\Sigma_2.$$

Приложение I

Ниже приводятся основные сведения, относящиеся к определению, свойствам и применению преобразований Лежандра и Ампера (см. также [38], с. 140-142; [23], с. 95-104). Эти преобразования широко используются в математической физике, в частности, для точной линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $f(x_k)$, определенную в некоторой области пространства n измерений.

Установим соответствие между переменными x_k и x_k^* на основании уравнений

$$\partial_i f(x_k) = x_i^*. \quad (\text{A})$$

Переменные x_i^* часто называют также тангенциальными координатами.

Если для некоторых значений переменных x_i^* решение системы уравнений (A) есть x_i , и в точке x_i определитель Гесса отличен от нуля

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0,$$

то по теореме о неявных функциях существует некоторая окрестность точки x_i , в которой между переменными x_k и x_k^* имеется взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие:

$$x_i = x_i(x_k^*). \quad (\text{B})$$

Преобразованием Лежандра функции $f(x_k)$ называется функция $f^*(x_k^*)$, определяемая уравнением

$$f^*(x_s^*) = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* - f(x_k), \quad (\text{C})$$

в котором переменные x_k выражены через переменные x_k^* с помощью соотношений (B).

Согласно построению преобразование Лежандра корректно определено только в достаточно малой окрестности точки x_k . Однако если функция $f(x_k)$ строго выпукла в некоторой выпуклой области, то преобразование Лежандра корректно определено всюду в этой области.

Действительно, тогда между переменными x_k и x_k^* имеется взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое соответствие: если бы такого соответствия не было, то нашлись бы две различные точки x'_k и x''_k , в которых значения производных $\partial_i f$ одинаковы и, следовательно,

$$((\partial_i f)_{x_s=x'_s} - (\partial_i f)_{x_s=x''_s})(x'_i - x''_i) = 0,$$

что противоречит строгой выпуклости функции $f(x_k)$:

$$((\partial_i f)_{x_s=x'_s} - (\partial_i f)_{x_s=x''_s})(x'_i - x''_i) > 0$$

при условии $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \neq 0$.

Одним из важнейших свойств преобразования Лежандра является свойство взаимности. Чтобы установить это свойство продифференцируем функцию f^* , определенную уравнением (C), по x_k , рассматривая ее как сложную функцию:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

В силу того, что определитель Гесса функции f отличен от нуля из последнего соотношения находим

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} = x_i, \quad (D)$$

и кроме того

$$f(x_s) = \sum_{i=1}^n x_i^* x_i - f^*(x_k^*). \quad (E)$$

Таким образом, восстановить исходную функцию по ее преобразованию Лежандра очень просто: достаточно применить еще раз это же преобразование. Ясно, поэтому, что преобразование Лежандра инволютивно, т.е. его квадрат есть тождественное преобразование. Это свойство преобразования Лежандра обычно называют свойством взаимности.

Рассмотрим далее преобразование Лежандра от функции двух независимых переменных $f(x_1, x_2)$. Будем пользоваться классическими обозначениями Монжа p, q, r, s, t для первых и вторых частных производных от функции f . Соответствующие производные от f^* обозначим через p^*, q^*, r^*, s^*, t^* .

Согласно свойству взаимности имеем:

$$p^* = x_1, \quad q^* = x_2. \quad (F)$$

Вычислим теперь вторые частные производные r^*, s^*, t^* .

Ясно, что

$$\begin{aligned} dp^* &= r^* dx_1^* + s^* dx_2^*, \\ dq^* &= s^* dx_1^* + t^* dx_2^*, \end{aligned}$$

или, благодаря свойству взаимности,

$$\begin{aligned} dx_1 &= r^*(r dx_1 + s dx_2) + s^*(s dx_1 + t dx_2), \\ dx_2 &= s^*(r dx_1 + s dx_2) + t^*(s dx_1 + t dx_2), \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности дифференциалов dx_1, dx_2 можно заключить, что

$$\begin{aligned} r^* r + s^* s &= 1, & r^* s + s^* t &= 0, \\ s^* r + t^* s &= 0, & s^* s + t^* t &= 1. \end{aligned}$$

С помощью последней группы формул находим:

$$r^* = \frac{t}{rt - s^2}, \quad s^* = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad t^* = \frac{r}{rt - s^2} \quad (G)$$

и обратно

$$r = \frac{t^*}{r^* t^* - s^{*2}}, \quad s = \frac{-s^*}{r^* t^* - s^{*2}}, \quad t = \frac{r^*}{r^* t^* - s^{*2}}. \quad (H)$$

Из этих соотношений можно заключить, что

$$(rt - s^2)(r^* t^* - s^{*2}) = 1.$$

Формулы (A) и (H) позволяют утверждать, что нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$A(p, q)r + 2B(p, q)s + C(p, q)t = 0 \quad (I)$$

после применения преобразования Лежандра и при условии

$$rt - s^2 \neq 0 \quad (J)$$

изображается как

$$A(x_1^*, x_2^*)t^* - 2B(x_1^*, x_2^*)s^* + C(x_1^*, x_2^*)r^* = 0, \quad (K)$$

т.е. становится линейным.

Еще одним примером преобразования, обладающего свойством взаимности, является преобразование Ампера функции f :

$$f^*(x_1^*, x_2^*) = x_2 x_2^* - f(x_1, x_2), \quad (\text{L})$$

где в правой части переменные x_1, x_2 следует выразить через переменные x_1^*, x_2^* на основании уравнений

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = \frac{\partial f}{\partial x_2}. \quad (\text{M})$$

Дифференцируя левую и правую части уравнения (L) по x_1 и x_2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_2^*} - x_2 \right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда, при условии

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \neq 0$$

сразу же находим

$$x_2 = \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f^*}{\partial x_1^*}, \quad (\text{N})$$

т.е. преобразование Ампера обладает свойством взаимности:

$$f(x_1, x_2) = x_2 x_2^* - f^*(x_1^*, x_2^*), \quad (\text{O})$$

$$x_1 = x_1^*, \quad x_2 = \frac{\partial f^*}{\partial x_2^*}. \quad (\text{P})$$

На основании (M) и (N) для первых производных от преобразования Ампера функции f имеем

$$p^* = -p, \quad q^* = x_2, \quad (\text{Q})$$

а также — обратные зависимости

$$p = -p^*, \quad q = x_2^*, \quad (\text{R})$$

а для вторых, как показывает несложный расчет, —

$$r^* = \frac{s^2 - rt}{t}, \quad s^* = -\frac{s}{t}, \quad t^* = \frac{1}{t}, \quad (\text{S})$$

и обратно

$$r = \frac{s^{*2} - r^* t^*}{t^*}, \quad s = -\frac{s^*}{t^*}, \quad t = \frac{1}{t^*}. \quad (\text{T})$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} dp^* &= r^* dx_1 + s^* dx_2^*, \\ dq^* &= s^* dx_1 + t^* dx_2^*, \end{aligned}$$

и кроме того

$$dp^* = -dp = -r dx_1 - s dx_2, \quad dq^* = dx_2, \quad dx_2^* = s dx_1 + t dx_2,$$

находим, что

$$\begin{aligned} (r + r^* + s s^*) dx_1 + (s + s^* t) dx_2 &= 0, \\ (s^* + t^* s) dx_1 + (t t^* - 1) dx_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда в силу независимости дифференциалов dx_1 и dx_2 сразу следуют формулы (S) и (T).

Изображение по Амперу уравнений в частных производных уже не требует выполнения условия (J), но, очевидно, возможно только при условии $t \neq 0$. Заметим также, что уравнение $rt - s^2 = 0$ с успехом интегрируется с помощью преобразования Ампера (см., например, [38], с. 142).

Применение преобразований Лежандра и Ампера к уравнениям математической теории пластичности читатель может найти в работах [134], [135].

Приложение II

На основании схемы Леонова—Панасюка—Дагдейла граничные условия краевой задачи, соответствующей плоскому напряженному состоянию неограниченной пластины с трещиной **типа I**, имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l), \\ \sigma_{22} &= Y & (x_2 = 0, \quad l < |x_1| < l + c), \\ \sigma_{12} &= 0 & (x_2 = 0, \quad -\infty < x_1 < +\infty), \\ u_2 &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l + c), \\ \sigma_{22} &\rightarrow \sigma_{22}^\infty & (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty),\end{aligned}$$

где Y — предел текучести при одноосном растяжении, σ_{22}^∞ — напряжения дальнего поля.

Длина пластической зоны c неизвестна и должна быть определена в процессе решения задачи из условия непрерывности напряжений на продолжении трещины.

Решение сформулированной задачи можно представить в виде суперпозиции решений двух задач: растяжения пластины без трещины напряжениями σ_{22}^∞ , приложенными на бесконечности, и нагружение пластины с трещиной длины $2l$ напряжениями $-\sigma_{22}^\infty$, действующими на берегах трещины так, что суммарно выполняются приведенные выше краевые условия. Напряжения, соответствующие каждой из задач, в дальнейшем обозначены через σ_{ij}^I и σ_{ij}^* , поэтому напряжения исходной задачи имеют вид $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^*$.

Решение первой задачи очевидно:

$$\sigma_{11}^I = 0, \quad \sigma_{12}^I = 0, \quad \sigma_{22}^I = \sigma_{22}^\infty, \quad u_1^I = 0, \quad u_2^I = \frac{x_2 \sigma_{22}^\infty}{E},$$

где E — модуль Юнга, поэтому интерес представляет вторая задача с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^* &= -\sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad |x_1| < l), \\ \sigma_{22}^* &= Y - \sigma_{22}^\infty & (x_2 = 0, \quad l < |x_1| < l + c), \\ \sigma_{12}^* &= 0 & (x_2 = 0, \quad -\infty < x_1 < +\infty), \\ u_2^* &= 0 & (x_2 = 0, \quad |x_1| > l + c), \\ \sigma_{22}^* &\rightarrow 0 & (|x_1 + ix_2| \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Решение сформулированной задачи можно получить с помощью формул Колосова—Мусхелишвили

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* &= 4\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)], \\ \sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* &= 2[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)], \\ 2\mu(u_1^* + iu_2^*) &= \kappa\varphi^*(z) - z\overline{\varphi^{*'}(z)} - \overline{\psi^*(z)},\end{aligned}\tag{A}$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ — комплексные потенциалы, которые являются аналитическими функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ в верхней полуплоскости, черта сверху является знаком комплексного сопряжения, μ — модуль сдвига. Для рассматриваемой задачи $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Так как $\sigma_{12}^* = 0$ всюду на оси x_1 , то

$$\operatorname{Im}[\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)] = 0\tag{B}$$

при $x_2 = 0$.

Этому условию можно удовлетворить, положив

$$\psi^*(z) = \varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z). \quad (C)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию одной неизвестной функции $\varphi^*(z)$.

Из формул (A) в силу (C) получаются следующие выражения для компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*''}(z)], \\ \sigma_{12}^* &= -2x_2\operatorname{Re}[\varphi^{*''}(z)] \end{aligned} \quad (D)$$

и для компонент вектора перемещений

$$\begin{aligned} 2\mu u_1 &= (\kappa - 1)\operatorname{Re}[\varphi^*(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi^{*'}(z)], \\ 2\mu u_2 &= (\kappa + 1)\operatorname{Im}[\varphi^*(z)] - 2x_2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)]. \end{aligned} \quad (E)$$

Поэтому для определения функции $\varphi^{*'}(z)$ можно сформулировать следующую краевую задачу: на отрезке $|x_1| < l + c$ задана действительная часть функции $\varphi^{*'}(z)$

$$\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)] = \begin{cases} -\frac{\sigma_{22}^\infty}{2} & (|x_1| < l), \\ \frac{Y - \sigma_{22}^\infty}{2} & (l < |x_1| < l + c), \end{cases} \quad (F)$$

а на оставшейся части оси x_1 определена мнимая часть этой функции, поскольку последнее соотношение из (E) при $x_2 = 0$ приводит к заключению, что

$$\operatorname{Im}[\varphi^{*'}(z)] = 0 \quad (|x_1| > l + c). \quad (G)$$

Решение сформулированной задачи можно получить, если использовать общие формулы смешанной задачи теории аналитических функций для полуплоскости.

Пусть на вещественной оси имеется n отрезков

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n),$$

на которых заданы значения σ_{22}^* (что означает задание на отрезках действительной части потенциала $\varphi^{*'}(z)$), вне этих отрезков $u_2 = 0$ (что, в свою очередь, означает равенство нулю мнимой части потенциала $\varphi^{*'}(z)$) вне указанных отрезков). На бесконечности напряжения и перемещения исчезают.

Решение этой задачи будет содержать n произвольных постоянных, которые определяются из условия $u_2 = 0$, выполняющегося вне данных отрезков. Необходимо отметить, что если напряжения обращаются в нуль на бесконечности, то

$$\varphi^{*'}(z) = O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty).$$

Решение смешанной задачи для полуплоскости имеет вид [181]:

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{\sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{a_m}^{b_m} \sqrt{\left| \prod_{m=1}^n (t - a_m)(t - b_m) \right|} \frac{\sigma_{22}^*(t) dt}{t - z} + P_{n-1}(z)}{2\pi \sqrt{\prod_{m=1}^n (z - a_m)(z - b_m)}}, \quad (H)$$

где полином $P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ имеет вещественные коэффициенты.

Решение краевой задачи для верхней полуплоскости с граничными условиями (F), (G) в силу формулы (H) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{*'}(z) = & -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2-(l+c)^2}} \left\{ -\frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{Y-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-(l+c)}^{-l} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi + \frac{Y-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_l^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi \right\} = \\ = & \frac{1}{\pi\sqrt{z^2-(l+c)^2}} \left\{ \frac{Y-\sigma_{22}^\infty}{2} \int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi - \frac{Y}{2} \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (I)$$

Полином P_{n-1} исчезает в силу условия на бесконечности.

Вычисление первого из интегралов, входящих в последнее выражение, приводит к формуле

$$\int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{z-\xi} d\xi = -\{\sqrt{z^2-(l+c)^2}-z\}\pi \quad (z \notin [-l-c, l+c]),$$

где ветвь корня на бесконечности имеет разложение

$$\sqrt{z^2-(l+c)^2} = z - \frac{(l+c)^2}{2z} + \dots$$

Если $t \in [-l-c, l+c]$, то

$$\int_{-(l+c)}^{l+c} \frac{\sqrt{(l+c)^2-\xi^2}}{\xi-t} d\xi = -\pi t. \quad (J)$$

Для вычисления последнего интеграла в (I) можно воспользоваться формулами ([126], с. 105, формулы 9, 13)

$$\int \frac{\sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} d\xi = \int \frac{-\xi-p}{\sqrt{\omega^2-\xi^2}} d\xi + (\omega^2-p^2) \int \frac{d\xi}{(\xi-p)\sqrt{\omega^2-\xi^2}} + C$$

и

$$\int \frac{d\xi}{(\xi-p)\sqrt{\omega^2-\xi^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega^2-p^2} + \sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} - \frac{p}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \right| + C. \quad (\omega^2-p^2 > 0)$$

Здесь и в дальнейшем C — константа интегрирования; ω, p — вещественные переменные. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} d\xi = & -p \arcsin \frac{\xi}{\omega} + \sqrt{\omega^2-\xi^2} - \\ & -\sqrt{\omega^2-p^2} \ln \left| \frac{\sqrt{\omega^2-p^2} + \sqrt{\omega^2-\xi^2}}{\xi-p} - \frac{p}{\sqrt{\omega^2-p^2}} \right| \quad (\omega^2 > p^2). \end{aligned}$$

Возвращаясь к последнему интегралу из (I), можно заключить

$$\begin{aligned}
 \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2 - \xi^2}}{\xi - p} d\xi &= -2p \arcsin \frac{l}{l+c} - \\
 &- \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \left(\frac{\sqrt{(l+c)^2 - p^2} + \sqrt{(l+c)^2 - l^2}}{l-p} - \frac{p}{\sqrt{(l+c)^2 - p^2}} \right) + \\
 &+ \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \left(\frac{\sqrt{(l+c)^2 - p^2} + \sqrt{(l+c)^2 - l^2}}{-l-p} - \frac{p}{\sqrt{(l+c)^2 - p^2}} \right) = \\
 &= -2p \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \times \\
 &\times \ln \frac{\frac{\sqrt{(l+c)^2 - p^2} + \sqrt{(l+c)^2 - l^2}}{l+p} + \frac{p}{\sqrt{(l+c)^2 - p^2}}}{\frac{\sqrt{(l+c)^2 - p^2} + \sqrt{(l+c)^2 - l^2}}{l-p} - \frac{p}{\sqrt{(l+c)^2 - p^2}}} = \\
 &= -2p \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \frac{p-l}{p+l} + \\
 &+ \sqrt{(l+c)^2 - p^2} \ln \frac{(l+c)^2 + \sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - p^2} + pl}{(l+c)^2 + \sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - p^2} - pl} \quad (l < p < l+c)
 \end{aligned}$$

Для комплексных значений переменной p значения исследуемого интеграла следует получать как результат аналитического продолжения. Поэтому приведенная выше формула будет справедлива и для комплексных значений p , при условии, что ветвь корня выбрана так, чтобы ее значение было вещественным и положительным, если $p \in [-l-c, l+c]$, а ветвь логарифма такова, что при $p \in [-l-c, l+c]$ ее следует рассматривать как соответствующую вещественную функцию.

Если учесть, что

$$\int \frac{d\xi}{(\xi - p)\sqrt{\omega^2 - \xi^2}} = \frac{-1}{\sqrt{p^2 - \omega^2}} \arcsin \frac{\omega^2 - p\xi}{(\xi - p)\omega} + C \quad (p^2 > \omega^2 > \xi^2),$$

то выражение для значений исследуемого интеграла, когда параметр пробегает всю вещественную ось, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+c)^2 - \xi^2}}{\xi - x_1} d\xi = \\
 &= \begin{cases} -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} \ln \left| \frac{l-x_1}{l+x_1} \right| + \\ \quad + \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} + x_1 l + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - x_1 l + (l+c)^2}, & (|x_1| \leq l+c) \\ \\ -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} \times \\ \quad \times \left[\arcsin \frac{(l+c)^2 + x_1 l}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - x_1 l}{(l-x_1)(l+c)} \right]. & (|x_1| \geq l+c) \end{cases} \quad (K)
 \end{aligned}$$

Следовательно, для комплексного потенциала справедливо выражение

$$\varphi^{*'}(z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - (l+c)^2}} \left\{ \frac{Y - \sigma_{22}^\infty}{2} \pi(z - \sqrt{z^2 - (l+c)^2}) - \right. \\ \left. - \frac{Y}{2} \left[2z \arcsin \frac{l}{l+c} - \sqrt{z^2 - (l+c)^2} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lz}{(l+z)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lz}{(l-z)(l+c)} \right) \right] \right\},$$

где корень имеет арифметическое значение, а арксинус следует рассматривать как соответствующую вещественную функцию, если $l+c < z = x_1$.

Значение комплексного потенциала $\varphi^{*'}(z)$ на отрезке $z \in [-l-c, l+c]$ можно получить как результат аналитического продолжения (при этом используются соответствующие формулы для интегралов (J) и (K)).

В вершине трещины напряжения не могут иметь особенности, поэтому выражение в фигурных скобках должно обращаться в нуль при $z \rightarrow \pm(l+c)$, что приводит к условию, позволяющему определить длину области пластического течения

$$\frac{1 - \sigma_{22}^\infty/Y}{2} \pi = \arcsin \frac{l}{l+c},$$

откуда

$$\frac{c}{l} = \sec \frac{\pi \sigma_{22}^\infty}{2Y} - 1. \quad (L)$$

Для определения компонент вектора перемещений необходимо найти комплексный потенциал $\varphi^*(z)$. Для вычисления потенциала воспользуемся соотношениями (E) и формулой

$$\psi^{*'}(z) = -z\varphi^{*''}(z), \quad (M)$$

а также проведём следующие дополнительные вычисления.

Если $l < t < l+c$, то

$$\lim_{z \rightarrow t} \varphi^{*'}(z) = \frac{i}{\pi\sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \left\{ -\frac{Y - \sigma_{22}^\infty}{2} \left(-\pi t + i\pi\sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) + \right. \\ + \frac{Y}{2} \left(-2t \arcsin \frac{l}{l+c} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \ln \frac{t-l}{t+l} + \right. \\ \left. \left. + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2} \right) \right\}.$$

Откуда следует, что

$$\varphi^{*''}(z)|_{z \rightarrow t} = -i \left(-\frac{Y - \sigma_{22}^\infty}{2} + \frac{Y}{\pi} \arcsin \frac{l}{l+c} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{(l+c)^2 - t^2}} + \right. \\ \left. + \frac{t^2}{((l+c)^2 - t^2)\sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \right] + \frac{iYl}{\pi} \frac{1}{t^2 - l^2} + \\ + \frac{i(c+l)^2 Y l}{\pi \sqrt{(l+c)^2 - t^2}} \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2}}{\left[\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + (l+c)^2 \right]^2 - l^2 t^2}.$$

Первое слагаемое в последнем выражении исчезает в силу условия (L), поэтому после упрощений можно получить

$$\varphi^{*''}(z)|_{z \rightarrow t} = \frac{iYl}{\pi} \left[\frac{1}{t^2 - l^2} + \frac{1}{\sqrt{(l+c)^2 - t^2}(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2})} \right].$$

Связь между потенциалами (М) позволяет найти потенциал ψ^* :

$$\psi^*(t) = \frac{iYl}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \ln(t^2 - l^2) + \ln \left(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) \right]$$

и, поэтому при $l < t < l+c$ потенциал $\varphi^*(t)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \psi^*(t) + t\varphi'^*(t) = \\ &= \frac{iYl}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \ln(t^2 - l^2) + \ln \left(\sqrt{(l+c)^2 - l^2} + \sqrt{(l+c)^2 - t^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{2l} \ln \frac{t-l}{t+l} - \frac{i(Y - \sigma_{22}^\infty)t\pi}{2Yl} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t}{2l} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2} \right]. \end{aligned}$$

Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) &= \psi^* + t\varphi'^*(t) = -\frac{iYl}{2\pi} \ln(t^2 - l^2) + \frac{(Y - \sigma_{22}^\infty)t}{2} + \\ &\quad + \frac{iYl}{2\pi} \ln \left[2(l+c)^2 - t^2 + 2l \sqrt{\sec^2 \frac{\pi\sigma_{22}^\infty}{2Y} - 1} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - l^2 \right] + \\ &\quad + \frac{iYt}{2\pi} \ln \frac{t-l}{t+l} + \frac{iYt}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} + tl + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - t^2} - tl + (l+c)^2}. \end{aligned}$$

В силу этого для компоненты вектора перемещений u_2 на продолжении трещины можно получить

$$\begin{aligned} 2\mu u_2(x_1, 0) &= (\kappa + 1) \operatorname{Im} \varphi^*(z) = \\ &= (\kappa + 1) \left\{ -\frac{Yl}{2\pi} \ln(x_1^2 - l^2) + \frac{Yx_1}{2\pi} \ln \frac{x_1 - l}{x_1 + l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Yl}{2\pi} \ln \left[2(l+c)^2 - x_1^2 + 2l \sqrt{\sec^2 \frac{\pi\sigma_{22}^\infty}{2Y} - 1} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - l^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Yx_1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} + x_1l + (l+c)^2}{\sqrt{(l+c)^2 - l^2} \sqrt{(l+c)^2 - x_1^2} - x_1l + (l+c)^2} \right\}, \end{aligned}$$

где $l < x_1 < l+c$.

После введения обозначений $\xi = x_1/l$ и $\cos \beta = l/(l+c)$ последнее выражение переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\mu}{Y(\kappa+1)} \frac{u_2}{l} &= \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \\ &\quad + \ln \frac{2 \cos^{-2} \beta - \xi^2 + 2 \sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} - 1}{\xi^2 - 1} + \\ &\quad + \xi \ln \frac{\sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} + \xi + \cos^{-2} \beta}{\sqrt{\cos^{-2} \beta - 1} \sqrt{\cos^{-2} \beta - \xi^2} - \xi + \cos^{-2} \beta}, \end{aligned}$$

где $1 < \xi < \cos^{-1} \beta$.

Поскольку

$$\frac{\kappa + 1}{2\mu} = \frac{4}{E},$$

то после ряда преобразований можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{2Y} \frac{u_2}{l}(\xi, 0) = & -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln \cos \beta + 2\ln \left(\sin \beta + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} \right) + \\ & + \xi \ln \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \frac{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} + \xi \cos^2 \beta + 1}{\sin \beta \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \beta} - \xi \cos^2 \beta + 1} \right). \\ & (1 < \xi < \cos^{-1} \beta) \end{aligned}$$

Напряжение σ_{22}^* вычисляется по формуле

$$\sigma_{22}^* = 2\operatorname{Re}[\varphi^{*'}(z)]|_{x_2=0}.$$

Так как при $|x_1| > l + c$ производная комплексного потенциала $\varphi^{*'}(z)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \varphi^{*'}(x_1, 0) = & -\frac{1}{\pi \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2}} \left\{ -\frac{(Y - \sigma_{22}^\infty)\pi}{2} \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{Y}{2} \sqrt{x_1^2 - (l+c)^2} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+c)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

то напряжение σ_{22} находится по формуле

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = Y - \frac{Y}{\pi} \left(\arcsin \frac{(l+c)^2 + lx_1}{(l+x_1)(l+c)} + \arcsin \frac{(l+c)^2 - lx_1}{(l-x_1)(l+c)} \right) \quad (|x_1| \geq l+c).$$

Приложение III

Эллиптические интегралы Лежандра и эллиптические функции Якоби часто необходимы для решения важнейших прикладных задач механики и физики. Этим специальным функциям математической физики посвящена обширная литература.²¹⁵ Имеется также ряд замечательных справочных руководств,²¹⁶ лучшим из которых является книга [199].

Ниже приводятся разложения эллиптических интегралов Лежандра и эллиптических функций Якоби в ряды Фурье, пригодные для быстрого вычисления их значений.

Любой эллиптический интеграл

$$\int R(z, w) dz,$$

где R — рациональная функция своих аргументов, $w^2 = a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4$ — многочлен четвертой или третьей степени без кратных корней, всегда можно выразить через три канонических эллиптических интеграла, известных как эллиптические интегралы Лежандра. Канонические эллиптические интегралы Лежандра определяются формулами (k — модуль эллиптического интеграла)

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \\ E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta, \\ \Pi(\varphi, \omega^2, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \omega^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}. \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Эллиптические интегралы (A), взятые в пределах от 0 до $\pi/2$, называются полными эллиптическими интегралами:

$$\mathbf{K}(k) = F(\pi/2, k), \quad E(k) = E(\pi/2, k), \quad \mathbf{K}'(k) = F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2}). \quad (\text{B})$$

Эллиптические функции Якоби определяются равенствами

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, \quad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, \quad \operatorname{dn} u = \frac{d \operatorname{am} u}{du}, \quad (\text{C})$$

где $\varphi = \operatorname{am} u$ есть обращение интеграла с переменным верхним пределом

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

²¹⁵Теория эллиптических интегралов и функций изложена, например, в монографиях: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье. М.: Наука, 1967. 300 с.;

Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

²¹⁶Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.;

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.

С целью вычисления эллиптических интегралов Лежандра воспользуемся аппаратом тэта-функций, определяемых как суммы рядов Фурье (q — параметр тэта-функции):

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \sin(2m-1)z = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\ \vartheta_2(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \cos(2m-1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\ \vartheta_3(z) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz}, \\ \vartheta_4(z) &\equiv \vartheta_0(z) \equiv \vartheta(z) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}.\end{aligned}\tag{D}$$

Для логарифмов и логарифмических производных тэта-функций имеем следующие Фурье-разложения ([199], 1050.02):

$$\begin{aligned}\ln \vartheta_1(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \sin z) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\ \ln \vartheta_2(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \cos z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\ \ln \vartheta_3(z) &= \ln \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\ \ln \vartheta_0(z) &= \ln \xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz,\end{aligned}\tag{E}$$

где $\xi = 0.57721566\dots$ — число Эйлера;

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta'_1(z)}{\vartheta_1(z)} &= \operatorname{ctg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\ \frac{\vartheta'_2(z)}{\vartheta_2(z)} &= -\operatorname{tg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\ \frac{\vartheta'_3(z)}{\vartheta_3(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\ \frac{\vartheta'_0(z)}{\vartheta_0(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nz.\end{aligned}\tag{F}$$

Эллиптический интеграл второго рода выражается через тэта-функцию по формуле ([217], 13.20.16)

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{d}{du} \ln \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\mathbf{K}}\right) \quad (q = \exp(-\pi \mathbf{K}'/\mathbf{K})),$$

которая в силу (F) может быть представлена в виде

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin \frac{m\pi u}{\mathbf{K}}.\tag{G}$$

Вычисление эллиптического интеграла третьего рода распадается на несколько случаев. Вводя переменные

$$v = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}}, \quad t = \frac{\pi \gamma}{2\mathbf{K}},\tag{H}$$

имеем ([217], формулы 13.20.21, 13.20.25, 13.20.22; 13.20.19, 13.20.24, 13.20.23; 13.20.20, 13.19.19.4, 13.19.18.1; 13.20.18, 13.19.19.1, 13.19.18.4):

Круговой случай I: $\omega^2 = -k^2 \text{sn}^2(\gamma, k') \text{cn}^{-2}(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$)

$$\begin{aligned} \frac{\text{dn}(\gamma, k')}{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')} \Pi(u, -k^2 \frac{\text{sn}^2(\gamma, k')}{\text{cn}^2(\gamma, k')}, k) &= \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v+it)}{\vartheta_0(v-it)} + i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} v, \\ \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v+it)}{\vartheta_0(v-it)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nv \text{sh} 2nt, \\ i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} &= \text{ctht} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \text{sh} 2nt. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

Круговой случай II: $\omega^2 = \text{dn}^2(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$)

$$\begin{aligned} k'^2 \frac{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')}{\text{dn}(\gamma, k')} \Pi(u, \text{dn}^2(\gamma, k'), k) &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v+it)}{\vartheta_2(v-it)} - i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} v, \\ \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v+it)}{\vartheta_2(v-it)} &= -\text{arctg}(\text{tg} v \cdot \text{tht}) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nv \text{sh} 2nt, \\ i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \text{sh} 2nt. \end{aligned} \quad (\text{J})$$

Гиперболический случай I: $\omega^2 = k^2 \text{sn}^2(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$)

$$\begin{aligned} \frac{\text{cn}(\gamma, k) \text{dn}(\gamma, k)}{\text{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, k^2 \text{sn}^2(\gamma, k), k) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} + \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} v, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\ \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} &= \text{ctgt} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nt. \end{aligned} \quad (\text{K})$$

Гиперболический случай II: $\omega^2 = \text{sn}^{-2}(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$)

$$\begin{aligned} \frac{\text{cn}(\gamma, k) \text{dn}(\gamma, k)}{\text{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, \text{sn}^{-2}(\gamma, k), k) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| > t \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t+v)}{\vartheta_1(t-v)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| < t \end{cases} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(v+t)}{\sin(v-t)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\ \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nt. \end{aligned} \quad (\text{L})$$

Оперирование с приведенными формулами (в плане вычисления значений эллиптических функций Якоби $\text{sn}u$, $\text{sn}u$, $\text{dn}u$, sdu) упрощается, если воспользоваться (Е) и разложениями эллиптических функций Якоби в ряды Фурье ([236], формулы 8.146.4, 8.146.1, 8.146.2, 8.146.3;

[199], формула 908.10)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{am} u &= \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}}, \\
 \operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
 \operatorname{cn} u &= \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
 \operatorname{dn} u &= \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
 \operatorname{sd} u &= \frac{2\pi}{kk'\mathbf{K}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}},
 \end{aligned} \tag{M}$$

где, по-прежнему, используются обозначения v и q для аргумента и параметра тэта-функции, причем при вычислениях значений эллиптических функций следует положить

$$v = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}}, \quad q = \exp(-\pi \mathbf{K}'/\mathbf{K}), \tag{N}$$

и полный эллиптический интеграл первого рода находится, например, как сумма ряда по степеням модуля k ([236], формула 8.113.1)²¹⁷

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} k^2 + \frac{(1 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 4)^2} k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}, \tag{O}$$

а также следующими Фурье-разложениями, позволяющими организовать ускоренное вычисление некоторых комбинаций эллиптических функций Якоби, встречающихся в формулах (I)–(L) (см. [236], формулы 8.146.7, 8.146.8, 8.146.11, 8.146.26, 8.146.27):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{nd} u &= \frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{2\pi}{k'\mathbf{K}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
 \operatorname{tn} u &= \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{\pi}{2k'\mathbf{K}} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
 \operatorname{cd} u &= \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = -\frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
 \operatorname{sn}^2 u &= \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2k^3} \left[1 + k^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4\mathbf{K}^2} \right] \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
 \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} &= \frac{\pi^2}{4\mathbf{K}^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + \frac{\mathbf{K} - \mathbf{E}}{\mathbf{K}} - \frac{2\pi^2}{\mathbf{K}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{2\mathbf{K}},
 \end{aligned} \tag{P}$$

²¹⁷Приводимый ниже ряд не позволяет реализовать быстрое вычисление $\mathbf{K}(k)$ для значений модуля k , незначительно отличающихся от единицы. Здесь стоит также напомнить, что полный эллиптический интеграл первого рода $\mathbf{K}(k) \rightarrow \infty$, если $k \rightarrow 1$.

и, кроме того ([236], формулы 8.146.15, 8.146.16, 8.146.17)

$$\begin{aligned} \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u &= \frac{\pi}{2\mathbf{K}} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + (-1)^n q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\ \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u &= \frac{4\pi^2}{k^2 \mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2(2n-1)}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{\mathbf{K}}, \\ \operatorname{tn} u \operatorname{nd} u &= \frac{\pi}{2k'^2 \mathbf{K}} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Q})$$

Использование приведенных выше формул (I)–(L) для вычисления эллиптического интеграла Лежандра третьего рода требует решения уравнения вида

$$\operatorname{sn} \gamma = f(u) \quad (\text{R})$$

с целью определения параметра γ .

Решение уравнения (R) может быть найдено в форме интеграла Лежандра первого рода, а затем вычислено с помощью разложения в ряд ([236], формула 8.117):

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \operatorname{am} \gamma - \operatorname{sn} \gamma \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \gamma} \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \operatorname{sn}^2 \gamma + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \operatorname{sn}^4 \gamma + \dots \right), \\ a_0 &= \frac{2\mathbf{K}}{\pi} - 1, \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}. \end{aligned} \quad (\text{S})$$

Приложение IV

Ниже приводятся основные уравнения плоской и осесимметричной задачи теории пластичности, сформулированные в изостатических координатах, в обозначениях, соответствующих 4.4.2.

Плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние характеризуется условием $\varepsilon_{33} = 0$. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. Если считать, что σ_1 — наибольшее главное напряжение, то любое условие пластичности в состоянии плоской деформации выражается уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, где k есть предел текучести при сдвиге.

Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta.$$

Деривационное соотношение в этом случае имеет форму

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0.$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0. \end{aligned} \tag{A}$$

В пределах пластической зоны в уравнениях (A) следует учесть, что $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$.

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений $d\sigma_j$, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в виде

$$\begin{aligned} d_1 + \kappa_2(d\sigma_1 - d\sigma_2) + (2\kappa_1 + d_2)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \\ d_2d\sigma_2 + \kappa_1(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_2 + d_1)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] &= 0, \end{aligned} \tag{B}$$

где $d\omega = d\omega_3$ — малый поворот главных осей напряжений при догрузении.

Условия совместности деформаций в главных приращениях деформаций $d\varepsilon_j$ ²¹⁸ сводятся к одному уравнению²¹⁹

$$\begin{aligned} S_{<33>} &= -d_1d_1d\varepsilon_2 - d_2d_2d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_2d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) + \\ &\quad + (d_1d_2 + d_2d_1 + 3\kappa_1d_1 + 3\kappa_2d_2)[(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E)d\omega] + \\ &\quad + 2(2\kappa_1\kappa_2 + d_1\kappa_1 + d_2\kappa_2)(\varepsilon_1^E - \varepsilon_2^E)d\omega = 0, \end{aligned} \tag{C}$$

²¹⁸Напомним, что величины $d\varepsilon_j$, вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются как обозначение для суммы $d\varepsilon_j^E$ и $d\varepsilon_j^P$, причем $d\varepsilon_j^E$ — приращение главного значения ε_j^E тензора упругих деформаций ε^E , $d\varepsilon_j^P$ — собственное значение тензора $d\varepsilon^P$. Если пренебречь упругими деформациями, то величина $d\varepsilon_j$ представляет собой главное значение тензора приращения полной деформации.

²¹⁹Заметим, что в случае плоского деформированного состояния

$$S_{<33>} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \varepsilon) - \Delta \varepsilon_{jj}.$$

или, пренебрегая в (С) вкладом упругой деформации, —

$$S_{<33>} = -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 - (d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_2 d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1 d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \quad (D)$$

Осесимметричная деформация

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа:²²⁰ 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k,$$

характеризующему состояние "полной пластичности". В дальнейшем примем также, что главное напряжение σ_1 — наибольшее из меридиональных главных напряжений. Это означает, что в приведенном выше соотношении следует выбрать положительный знак.

В случае осесимметричной деформации удобно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z .

В меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий, соответствующих первому и третьему главным направлениям. Введем угол χ так, чтобы наклон (к горизонтальной оси) траектории первого семейства был равен $\pi - \chi$.

Ясно, что справедливы следующие соотношения:

$$d_2 = 0, \quad \kappa_{23} = \frac{\cos \chi}{r}, \quad \kappa_{21} = \frac{\sin \chi}{r}, \quad \kappa_{31} = 0, \quad \kappa_{13} = 0.$$

Деривационные соотношения выражаются либо группой уравнений

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_3 \kappa_{23} &= \kappa_{21} (\kappa_{32} - \kappa_{23}), \end{aligned}$$

либо группой —

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_1 \kappa_{21} &= \kappa_{23} (\kappa_{12} - \kappa_{21}). \end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений можно задать в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{<rr>} &= p + \tau \cos 2\chi, \\ \sigma_{<zz>} &= p - \tau \cos 2\chi, \\ \sigma_{<\varphi\varphi>} &= \sigma_2, \\ \sigma_{<rz>} &= -\tau \sin 2\chi, \end{aligned} \quad (E)$$

²²⁰Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.

где

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3),$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3),$$

и следует учесть, что $\tau = k$ в пределах зоны пластического течения.

Главные напряжения определяются как

$$\sigma_1, \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{<rr>} + \sigma_{<zz>}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{<rr>} - \sigma_{<zz>})^2 + 4\sigma_{<rz>}^2}. \quad (\text{F})$$

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{<rr>}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{<rz>}}{\partial z} + \frac{\sigma_{<rr>} - \sigma_{<\varphi\varphi>}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{<rz>}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{<zz>}}{\partial z} + \frac{\sigma_{<rz>}}{r} = 0,$$

сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$d_1\sigma_1 + \kappa_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0,$$

$$d_3\sigma_3 + \kappa_{21}(\sigma_3 - \sigma_2) + \kappa_{12}(\sigma_3 - \sigma_1) = 0. \quad (\text{G})$$

В пределах пластической зоны в этих уравнениях следует положить $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ и $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$, а также $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$.

Принимая во внимание, что

$$\kappa_{12} = \frac{\text{ctg}\chi}{r}d_1r + d_1\chi - \frac{\cos\chi\text{ctg}\chi}{r} = d_1\chi,$$

$$\kappa_{32} = \frac{\text{tg}\chi}{r}d_3r - d_3\chi - \frac{\sin\chi\text{tg}\chi}{r} = -d_3\chi,$$

уравнения равновесия (G) можно также представить в форме

$$d_1\sigma_1 + \frac{\cos\chi}{r}(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_3)d_3\chi = 0,$$

$$d_3\sigma_3 + \frac{\sin\chi}{r}(\sigma_3 - \sigma_2) - (\sigma_1 - \sigma_3)d_1\chi = 0. \quad (\text{H})$$

Уравнения равновесия в приращениях главных напряжений, сформулированные в изостатической сетке, можно получить в следующем виде:

$$d_1d\sigma_1 + \kappa_{23}(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \kappa_{32}(d\sigma_1 - d\sigma_3) + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)[(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega] = 0,$$

$$d_3d\sigma_3 + \kappa_{21}(d\sigma_3 - d\sigma_2) + \kappa_{12}(d\sigma_3 - d\sigma_1) + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)[(\sigma_3 - \sigma_1)d\omega] = 0, \quad (\text{I})$$

где $d\omega = d\omega_2$ — поворот главных осей напряжений 1 и 3 (в плоскости $\varphi = \text{const}$) при догрузке. В пределах пластической зоны в этих уравнениях следует положить $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ и $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$, а также $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$.

Компоненты осесимметричного тензора приращения деформации можно задать в форме

$$d\varepsilon_{<rr>} = d\lambda + d\mu \cos 2\chi,$$

$$d\varepsilon_{<\varphi\varphi>} = d\varepsilon_2,$$

$$d\varepsilon_{<zz>} = d\lambda - d\mu \cos 2\chi,$$

$$d\varepsilon_{<rz>} = -d\mu \sin 2\chi, \quad (\text{J})$$

где

$$d\lambda = \frac{1}{2}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_3),$$

$$d\mu = \frac{1}{2}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3).$$

Главные приращения деформаций вычисляются по формуле

$$d\varepsilon_1, d\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(d\varepsilon_{\langle rr \rangle} + d\varepsilon_{\langle zz \rangle}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(d\varepsilon_{\langle rr \rangle} - d\varepsilon_{\langle zz \rangle})^2 + 4(d\varepsilon_{\langle rz \rangle})^2}. \quad (K)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$d\varepsilon_2 = \frac{du_{\langle r \rangle}}{r}.$$

Соотношения Коши, связывающие приращения деформаций и перемещений, в осесимметричном случае сводятся к

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\langle rr \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial r}, \quad d\varepsilon_{\langle \varphi\varphi \rangle} = \frac{du_{\langle r \rangle}}{r}, \quad d\varepsilon_{\langle zz \rangle} = \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial z}, \\ 2d\varepsilon_{\langle rz \rangle} &= \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial z} + \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (L)$$

Несжимаемость течения и принцип соосности тензора напряжений и тензора приращения деформаций выражаются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial r} + \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial z} + \frac{du_{\langle r \rangle}}{r} &= 0, \\ \frac{\frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial z} + \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial r}}{\frac{\partial du_{\langle r \rangle}}{\partial r} - \frac{\partial du_{\langle z \rangle}}{\partial z}} &= -\operatorname{tg} 2\chi. \end{aligned}$$

Условия совместности приращений деформаций выражаются тремя уравнениями (из которых в силу $\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}$ независимы только два, например, первое и третье) относительно изостатических координат

$$\begin{aligned} S_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} \kappa_{32} (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 + \\ &\quad + (2\kappa_{23} \kappa_{12} + \kappa_{21} \kappa_{32} + \kappa_{21} \kappa_{23} + d_3 \kappa_{23} + 2\kappa_{23} d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega] = 0, \\ S_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\ &\quad - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] + \\ &\quad + (4\kappa_{32} \kappa_{12} + 2d_3 \kappa_{32} + 2d_1 \kappa_{12} + d_3 d_1 + d_1 d_3 + 3\kappa_{12} d_1 + 3\kappa_{32} d_3) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega] = 0, \\ S_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ &\quad - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 + \\ &\quad + (2\kappa_{21} \kappa_{32} + \kappa_{12} \kappa_{23} + \kappa_{21} \kappa_{23} + d_1 \kappa_{21} + 2\kappa_{21} d_1) [(\varepsilon_3^E - \varepsilon_1^E) d\omega] = 0. \end{aligned} \quad (M)$$

Заметим, что условия $S_{\langle 12 \rangle} = 0$, $S_{\langle 23 \rangle} = 0$, $S_{\langle 31 \rangle} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $d\omega_1 = 0$, $d\omega_3 = 0$, $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $d_2 = 0$.

Пренебрегая вкладом упругих деформаций, уравнения совместности в приращениях (M) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} S_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} \kappa_{32} (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 = 0, \\ S_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\ &\quad - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] = 0, \\ S_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ &\quad - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (N)$$

Наконец, учитывая, что

$$\kappa_{12} = d_1\chi, \quad \kappa_{32} = -d_3\chi, \quad \kappa_{21} = \frac{\sin \chi}{r}, \quad \kappa_{23} = \frac{\cos \chi}{r},$$

а также

$$\begin{aligned} d_3\kappa_{21} &= \kappa_{23}d_3\chi - \kappa_{21}^2, \\ d_1\kappa_{23} &= -\kappa_{21}d_1\chi - \kappa_{23}^2, \end{aligned}$$

получаем условия совместности в виде

$$\begin{aligned} S_{<11>} &= -d_3d_3d\varepsilon_2 + \kappa_{23}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)d_3\chi + \kappa_{21}(d_3d\varepsilon_3 - d_3d\varepsilon_2) - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &\quad - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3 = 0, \\ S_{<22>} &= -d_3d_3d\varepsilon_1 - d_1d_1d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - d_1d_3\chi - d_3d_1\chi)(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{12}d_3d\varepsilon_1 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_3 + \\ &\quad + \kappa_{32}(d_1d\varepsilon_1 - d_1d\varepsilon_3) - \kappa_{12}(d_3d\varepsilon_1 - d_3d\varepsilon_3) = 0, \\ S_{<33>} &= -d_1d_1d\varepsilon_2 + \kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)d_1\chi - \kappa_{23}(d_1d\varepsilon_2 - d_1d\varepsilon_1) - \kappa_{21}\kappa_{12}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ &\quad - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_1 - \kappa_{12}d_3d\varepsilon_2 = 0. \end{aligned}$$

Уравнения ассоциированного закона течения

Рассмотрим уравнения ассоциированного с условием пластичности Треска²²¹ закона течения. Нас будет интересовать определяющая зависимость главных приращений пластической деформации от приращений напряжений в поврежденной среде.

Сначала предположим, что напряженное состояние соответствует грани условия текучести. Перенумеровав, если потребуется, главные напряжения, грань призмы Треска всегда можно задать уравнением

$$\sigma_1^{\mathcal{J}} - \sigma_2^{\mathcal{J}} = 2k.$$

Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости есть

$$d\varepsilon_1^P = \frac{d\Lambda}{1 - D_1}, \quad d\varepsilon_2^P = -\frac{d\Lambda}{1 - D_2}, \quad d\varepsilon_3^P = 0. \quad (\text{O})$$

Множитель $d\Lambda$ без труда исключается с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения. Предполагая также, что приращения главных поврежденностей и главные приращения пластической деформации связаны определяющими зависимостями вида

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P) d\varepsilon_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P) d\varepsilon_2^P, \quad (\text{P})$$

где определяющие функции K_1, K_2 не зависят от приращений напряжений и деформаций, находим

$$d\Lambda = \frac{(1 - D_1)^2(1 - D_2)^2[(\beta - 1)d\sigma_2 - d\sigma_1]}{K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P)\sigma_1 - (\beta - 1)K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P)\sigma_2},$$

где

$$\beta - 1 = \frac{1 - D_1}{1 - D_2},$$

и, таким образом, —

$$\frac{d\varepsilon_1^P}{F} = (\beta - 1)d\sigma_2 - d\sigma_1. \quad (\text{Q})$$

Здесь F обозначает следующее отношение:

$$F = \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)^2}{K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P)\sigma_1 - (\beta - 1)K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P)\sigma_2}.$$

²²¹Условие пластичности Треска для поврежденной среды формулируется в терминах главных эффективных напряжений $\sigma_j^{\mathcal{J}}$.

Ясно, что в силу ассоциированного закона течения на грани (О)

$$d\varepsilon_2^P = -(\beta - 1)d\varepsilon_1^P, \quad (\text{R})$$

поэтому

$$\frac{d\varepsilon_2^P}{F} = -(\beta - 1)^2 d\sigma_2 + (\beta - 1)d\sigma_1. \quad (\text{S})$$

Рассмотрим далее уравнения ассоциированного закона течения для ребра поверхности текучести. Всегда, после подходящей перенумерации главных осей напряжений, можно считать, что ребро задается уравнениями

$$\sigma_1^{\mathcal{J}} - \sigma_3^{\mathcal{J}} = 2k, \quad \sigma_2^{\mathcal{J}} - \sigma_3^{\mathcal{J}} = 2k.$$

Ясно, что, как и выше, главные приращения пластических деформаций $d\varepsilon_1^P$ и $d\varepsilon_2^P$ выражаются через приращения напряжений определяющими зависимостями вида

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1^P}{F_1} &= (\beta_1 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_1, \\ \frac{d\varepsilon_2^P}{F_2} &= (\beta_2 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_2, \end{aligned} \quad (\text{T})$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 - 1 &= \frac{1 - D_1}{1 - D_3}, \quad \beta_2 - 1 = \frac{1 - D_2}{1 - D_3}, \\ F_1 &= \frac{(1 - D_1)(1 - D_3)^2}{K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P)\sigma_1 - (\beta_1 - 1)K_3 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_3^P)\sigma_3}, \\ F_2 &= \frac{(1 - D_2)(1 - D_3)^2}{K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P)\sigma_2 - (\beta_2 - 1)K_3 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_3^P)\sigma_3}. \end{aligned}$$

Для приращения $d\varepsilon_3^P$ имеем формулу

$$-d\varepsilon_3^P = (\beta_1 - 1)d\varepsilon_1^P + (\beta_2 - 1)d\varepsilon_2^P,$$

или

$$-\frac{d\varepsilon_3^P}{F_1 F_2} = \left[\frac{(\beta_1 - 1)^2}{F_2} + \frac{(\beta_2 - 1)^2}{F_1} \right] d\sigma_3 - \frac{\beta_1 - 1}{F_2} d\sigma_1 - \frac{\beta_2 - 1}{F_1} d\sigma_2. \quad (\text{U})$$

Уравнения ассоциированного закона течения для грани (Q), (S) и ребра (T), (U) не позволяют, в силу линейной зависимости правых частей, найти обратные соотношения, т.е. выразить приращения напряжений через главные приращения пластических деформаций.

Методы голографической интерферометрии в экспериментальном анализе деформаций твердых тел²²²

Экспериментальные методы исследований, интенсивно развивающиеся в последние годы, позволяют находить с высокой точностью действительные значения деформаций, возникающих в деталях машин и элементах конструкций при различных условиях их работы. Ясно, что высокоточные экспериментальные методики часто оказываются единственным средством верификации различных теорий механики деформируемого твердого тела и механики разрушения, как одной из ее составных частей.

В настоящее время особое место среди экспериментальных методов занимают оптические методы, позволяющие получать полную информацию о напряженно-деформированном состоянии конструкции. Среди оптических методов следует выделить методы голографической интерферометрии.

Голографическая интерферометрия — высокочувствительный метод, позволяющий исследовать предметы сложной формы. Он, во-первых, не предъявляет строгих требований к качеству оптики и исследуемой поверхности, а, во-вторых, дает возможность сравнивать световые волны, рассеянные объектом в разные моменты времени и в разных направлениях в пределах телесного угла, который охватывает голограмма.

Для количественной расшифровки интерферограмм необходимо проведение определенного объема экспериментальных и расчетных операций. Существуют различные методы расчета вектора смещения с помощью метода голографической интерферометрии [1]–[7]. Основными являются метод многих голограмм [7] и метод Александрова—Бонч-Бруевича [2], которые за счет наличия многих голограмм на стадии записи информации, или за счет изменения направлений наблюдений на стадии восстановления, по изменению интерференционных картин, позволяют определять поля перемещений. Эти методы базируются на стандартной двухлучевой оптической схеме записи голограмм. Представляет интерес использование оптических схем записи голограмм с несколькими предметными и опорными лучами для расшифровки голографических интерферограмм.

Рассмотрим метод расшифровки двухэкспозиционных голографических интерферограмм по трехлучевой схеме с двумя произвольно расположенными в пространстве предметными световыми пучками, которые имеют линейную поляризацию с взаимно ортогональным расположением плоскостей поляризации.

²²²Текст настоящего добавления написан по просьбе авторов канд. физ.-мат. наук М. Н. Осиповым.

Распределение интенсивности в интерференционной картине в этом случае определяется выражением [7]:

$$I \approx I_0 [\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi'] \quad (\text{A})$$

где I_0 — суммарная интенсивность света, φ — разность фаз между двумя восстановленными волнами, несущими информацию о смещении поверхности между экспозициями и связанными с первым предметным пучком; φ' — разность фаз между двумя восстановленными волнами, связанными со вторым предметным пучком.

Из физических соображений, а также предварительного теоретического анализа, следует, что для определения полной информации о смещении поверхности необходимо также иметь и несколько направлений наблюдения.

Для определения разности фаз рассмотрим ход световых лучей, как показано на рис. 93, для произвольно выбранной точки на исследуемой поверхности и произвольно выбранных точек освещения и наблюдения.

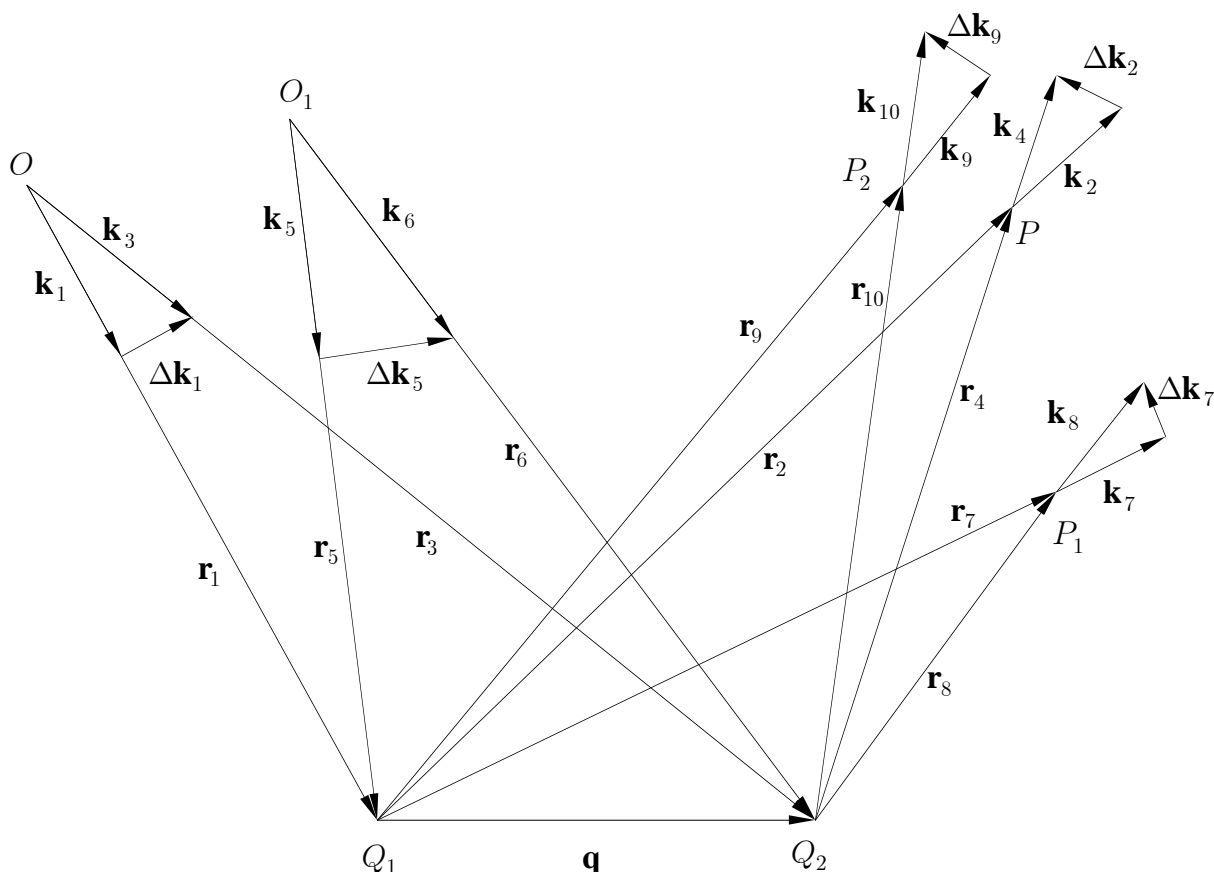


Рис. 93. Схема пространственного расположения векторов при расчете интерференционных картин (Q_1, Q_2 — исходное и соответственно новое положение точки в результате деформации поверхности)

В точках O и O_1 располагаются источники освещения, а в точках P и P_1 исследуется образование интерференционной картины, или, с другой стороны, эти точки являются точками наблюдения. Предположим, что исследуемый эле-

мент поверхности между экспозициями смещается из точки Q_1 в точку Q_2 на вектор \mathbf{q} .

Волновые векторы световых лучей, представляющие направление освещения и наблюдения для данной оптической схемы, согласно рис. 93, обозначим как \mathbf{k}_i ; $|\mathbf{k}_i| = 2\pi\lambda^{-1}$, где λ — длина волны лазерного излучения, используемого для записи голограмм. Расстояние от источника освещения до исследуемой точки, и далее до точки наблюдения, обозначим как \mathbf{r}_i .

Используя введенные обозначения, определим величину фазового набегу лучей, интерферирующих в точках P и P_1 :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2, & \varphi_2 &= \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3 + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4, \\ \varphi_3 &= \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_7 \cdot \mathbf{r}_7, & \varphi_4 &= \mathbf{k}_8 \cdot \mathbf{r}_8 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3, \\ \varphi_5 &= \mathbf{k}_5 \cdot \mathbf{r}_5 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2, & \varphi_6 &= \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_6 + \mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4, \\ \varphi_7 &= \mathbf{k}_5 \cdot \mathbf{r}_5 + \mathbf{k}_7 \cdot \mathbf{r}_7, & \varphi_8 &= \mathbf{k}_6 \cdot \mathbf{r}_6 + \mathbf{k}_8 \cdot \mathbf{r}_8.\end{aligned}\tag{B}$$

При изменении направлений наблюдения и освещения между волновыми векторами \mathbf{k}_i выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_3 &= \mathbf{k}_1 + \Delta\mathbf{k}_1, & \mathbf{k}_4 &= \mathbf{k}_2 + \Delta\mathbf{k}_2, \\ \mathbf{k}_6 &= \mathbf{k}_5 + \Delta\mathbf{k}_5, & \mathbf{k}_8 &= \mathbf{k}_7 + \Delta\mathbf{k}_7.\end{aligned}\tag{C}$$

Тогда, используя уравнения (B) и (C), разности фаз двух интерферирующих лучей в точках P и P_1 запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2) + \Delta\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + \Delta\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_4, \\ \varphi' &= \varphi_4 - \varphi_3 = \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \mathbf{k}_7 \cdot (\mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_8) + \Delta\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_3 + \Delta\mathbf{k}_7 \cdot \mathbf{r}_8, \\ \varphi'' &= \varphi_6 - \varphi_5 = \mathbf{k}_5 \cdot (\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5) - \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) + \Delta\mathbf{k}_5 \cdot \mathbf{r}_6 + \Delta\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_4, \\ \varphi''' &= \varphi_8 - \varphi_7 = \mathbf{k}_5 \cdot (\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5) - \mathbf{k}_7 \cdot (\mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_8) + \Delta\mathbf{k}_5 \cdot \mathbf{r}_6 + \Delta\mathbf{k}_7 \cdot \mathbf{r}_8.\end{aligned}\tag{D}$$

В реальных экспериментальных исследованиях обычно выполняются следующие условия:

$$|\mathbf{q}| = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4| = |\mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_8| \ll |\mathbf{r}_i|\tag{E}$$

Тогда с большой степенью точности можно считать, что $\Delta\mathbf{k}_1 \perp \mathbf{r}_3$, $\Delta\mathbf{k}_5 \perp \mathbf{r}_6$, $\Delta\mathbf{k}_2 \perp \mathbf{r}_4$, $\Delta\mathbf{k}_7 \perp \mathbf{r}_8$, и поэтому (D) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi &= (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}, & \varphi' &= (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_7) \cdot \mathbf{q}, \\ \varphi'' &= (\mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{q}, & \varphi''' &= (\mathbf{k}_5 - \mathbf{k}_7) \cdot \mathbf{q}.\end{aligned}\tag{F}$$

Рассмотрим расшифровку интерферограмм для двух обобщенных случаев: 1) номер интерференционной полосы при восстановлении интерферограммы известен; 2) номер интерференционной полосы неизвестен.

1. Номер интерференционной полосы известен. В этом случае из выражения (A) следует, что светлые полосы в интерференционных картинах, наблюдаемых в точках P и P_1 для двух предметных лучей освещения, будут образованы при разности фаз, удовлетворяющей следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2\pi N_1, & \varphi' &= 2\pi N_2, \\ \varphi'' &= 2\pi N_3, & \varphi''' &= 2\pi N_4,\end{aligned}\tag{G}$$

где N_1, N_2 — номера интерференционных полос, наблюдаемых в точках P и P_1 соответственно для первого предметного пучка; N_3, N_4 — номера интерференционных полос, наблюдаемых в точках P и P_1 соответственно для второго предметного пучка.

Тогда систему уравнений (F) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\pi N_1 &= |\mathbf{k}_1| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}) - |\mathbf{k}_2| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_2, \mathbf{q}), \\ 2\pi N_2 &= |\mathbf{k}_1| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}) - |\mathbf{k}_7| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_7, \mathbf{q}), \\ 2\pi N_3 &= |\mathbf{k}_5| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_5, \mathbf{q}) - |\mathbf{k}_2| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_2, \mathbf{q}), \\ 2\pi N_4 &= |\mathbf{k}_5| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_5, \mathbf{q}) - |\mathbf{k}_7| |\mathbf{q}| \cos(\mathbf{k}_7, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (\text{H})$$

Введем произвольно ориентированную систему координат (см. рис. 94), которая связана с исследуемой точкой поверхности, и относительно нее расположим векторы наблюдения, освещения и перемещения.

Используя обозначения углов согласно рис. 94, введенные для расположения указанных векторов относительно координатных осей (x, y, z) , для $\cos(\mathbf{k}_i, \mathbf{q})$ получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}) &= \cos \alpha_1 \cos \theta_1 + \cos \beta_1 \cos \theta_2 + \cos \gamma_1 \cos \theta_3, \\ \cos(\mathbf{k}_2, \mathbf{q}) &= \cos \alpha_2 \cos \theta_1 + \cos \beta_2 \cos \theta_2 + \cos \gamma_2 \cos \theta_3, \\ \cos(\mathbf{k}_5, \mathbf{q}) &= \cos \alpha_3 \cos \theta_1 + \cos \beta_3 \cos \theta_2 + \cos \gamma_3 \cos \theta_3, \\ \cos(\mathbf{k}_7, \mathbf{q}) &= \cos \alpha_4 \cos \theta_1 + \cos \beta_4 \cos \theta_2 + \cos \gamma_4 \cos \theta_3. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — значения углов расположения вектора освещения \mathbf{k}_1 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — значения углов расположения вектора наблюдения \mathbf{k}_2 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ — значения углов расположения вектора освещения \mathbf{k}_5 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно; $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ — значения углов расположения вектора наблюдения \mathbf{k}_7 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — значения углов расположения вектора смещения \mathbf{q} относительно координатных осей (x, y, z) соответственно.

Отметим также, что справедливы соотношения

$$q_x = |\mathbf{q}| \cos \theta_1, \quad q_y = |\mathbf{q}| \cos \theta_2, \quad q_z = |\mathbf{q}| \cos \theta_3. \quad (\text{J})$$

Тогда, используя соотношения (I), (J) и учитывая, что $|\mathbf{k}_i| = 2\pi\lambda^{-1}$, систему уравнений (H) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_x (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + q_y (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) + \\ + q_z (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) &= N_1 \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_4) + q_y (\cos \beta_1 - \cos \beta_4) + \\ + q_z (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_4) &= N_2 \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_2) + q_y (\cos \beta_3 - \cos \beta_2) + \\ + q_z (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_2) &= N_3 \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_4) + q_y (\cos \beta_3 - \cos \beta_4) + \\ + q_z (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_4) &= N_4 \lambda. \end{aligned} \quad (\text{K})$$

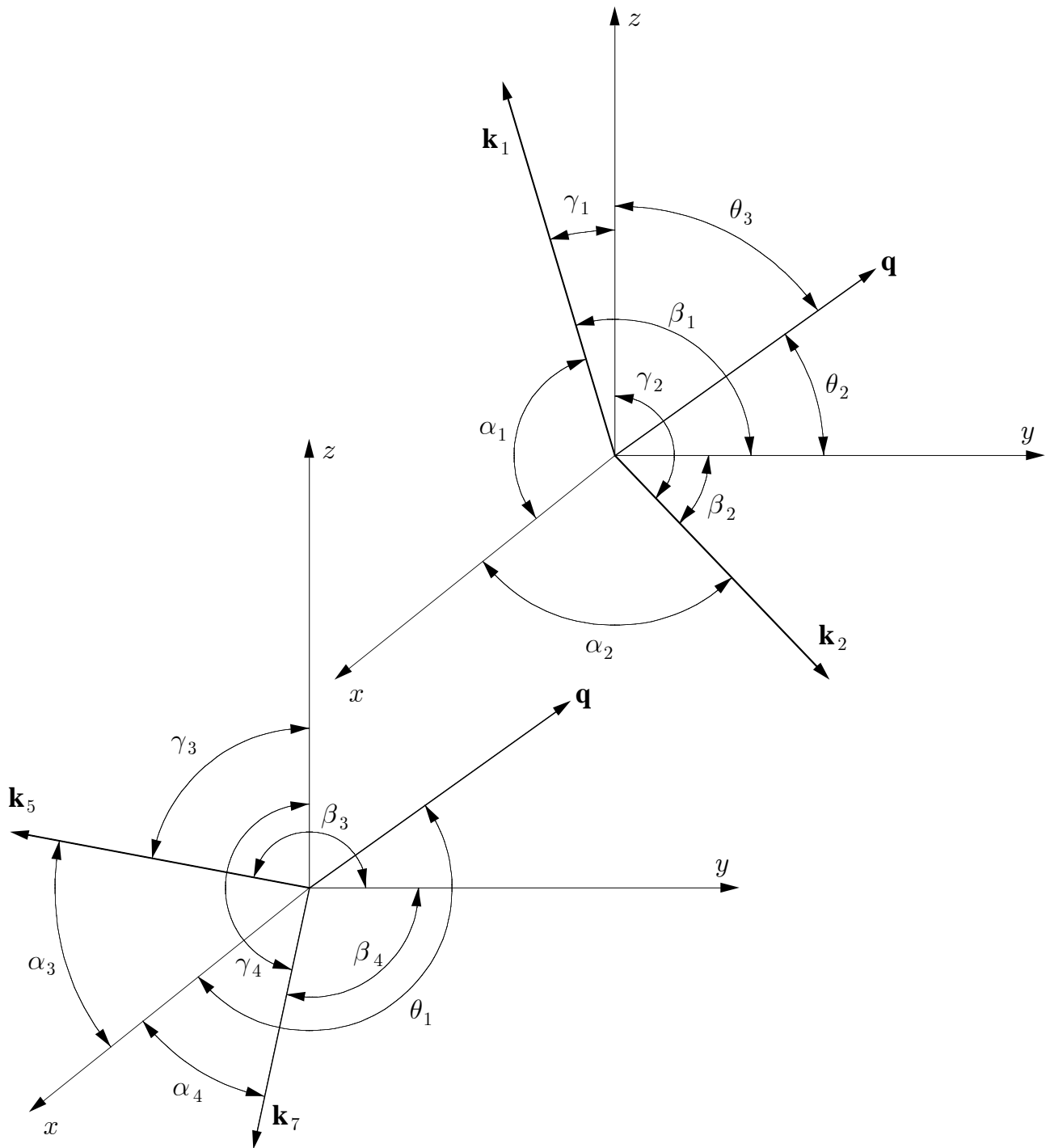


Рис. 94. Схема углового расположения вектора перемещения \mathbf{q} , векторов наблюдения \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_7 и освещения \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_5 относительно произвольно ориентированной системы координат

Решение системы уравнений (К) позволяет найти компоненты q_x , q_y , q_z вектора смещения \mathbf{q} . Следовательно, используя соотношения (Н) или (К), можно определить величину и направляющие косинусы вектора смещения \mathbf{q} :

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}, \quad \cos \theta_1 = \frac{q_x}{|\mathbf{q}|}, \quad \cos \theta_2 = \frac{q_y}{|\mathbf{q}|}, \quad \cos \theta_3 = \frac{q_z}{|\mathbf{q}|}. \quad (\text{L})$$

Система уравнений (К) переопределена, однако это условие необходимо для однозначного определения вектора смещения \mathbf{q} . Кроме того, отметим, что знак

вектора смещения \mathbf{q} по данному методу однозначно определить нельзя. Тот, или иной знак вектора смещения \mathbf{q} обычно определяется из условий эксперимента и физических соображений.

2. Номер интерференционной полосы неизвестен. Этот случай основан на методе Александрова—Бонч-Бруевича по расшифровке голографических интерферограмм [2]. Рассмотрим физические основы метода. Так как номер интерференционной полосы неизвестен, то предлагается определять изменение порядка интерференционной полосы при изменении направления наблюдения и изменении направления освещения. Теоретический анализ, проведенный аналогично первому случаю, показывает, что при освещении исследуемой поверхности одним пучком необходимо произвести измерения изменения порядка интерференционной полосы в трех различных направлениях относительно выбранного направления наблюдения. При освещении исследуемой поверхности двумя пучками под различными направлениями необходимо произвести измерения изменения порядка интерференционной полосы только в двух различных направлениях относительно выбранного направления наблюдения.

Выполняя аналогичные расчеты, как и в первом случае, сформулируем систему уравнений, которая описывает изменения порядка интерференционных полос при изменении направления наблюдения. Эта система уравнений имеет вид, аналогичный системе уравнений (K):

$$\begin{aligned} q_x (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + q_y (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) + \\ + q_z (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) &= \Delta N_{11} \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_4) + q_y (\cos \beta_1 - \cos \beta_4) + \\ + q_z (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_4) &= \Delta N_{21} \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_2) + q_y (\cos \beta_3 - \cos \beta_2) + \\ + q_z (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_2) &= \Delta N_{12} \lambda, \\ q_x (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_4) + q_y (\cos \beta_3 - \cos \beta_4) + \\ + q_z (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_4) &= \Delta N_{22} \lambda, \end{aligned} \quad (\text{M})$$

где ΔN_{11} , ΔN_{21} — изменение порядка интерференционных полос при изменении направления наблюдения из точки P в точки P_1 и P_2 соответственно для первого предметного пучка; ΔN_{12} , ΔN_{22} — изменение порядка интерференционных полос, при изменении направления наблюдения из точки P в точки P_1 и P_2 соответственно, для второго предметного пучка; для значений углов α_1 , β_1 , γ_1 и α_3 , β_3 , γ_3 сохраняются прежние (как и в первом случае) обозначения; α_2 , β_2 , γ_2 — значения углов расположения вектора наблюдения \mathbf{k} из точки P_1 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно; α_4 , β_4 , γ_4 — значения углов расположения вектора наблюдения \mathbf{k} из точки P_2 относительно координатных осей (x, y, z) соответственно.

Таким образом, решая систему уравнений (M) и используя соотношения (L), можно определить величину и направляющие косинусы вектора смещения \mathbf{q} , как и в первом случае. Замечания, сделанные относительно переопределенности системы уравнений и знака вектора смещения \mathbf{q} , остаются в силе.

Проведенный теоретический анализ показывает, что трехлучевые оптические схемы записи и восстановления голографических интерферограмм дают дополнительную информацию, позволяющую ускорить процесс расшифровки интерференционных картин и повысить точность измерений по сравнению с двухлучевыми оптическими схемами.

В качестве примера представлены фотографии (см. рис. 95) интерферограмм, восстановленных с голограмм (записанных по трехлучевой оптической схеме с двумя предметными световыми лучами) при четырех различных углах наблюдения, для изгиба дюралевой полосы, защемленной с одного конца. Эксперимент проводился с тонкой дюралевой полосой (длина — 85 мм, ширина — 15 мм, толщина — 1,5 мм), защемленной снизу и нагруженной на свободном конце силой 10 Г, направленной перпендикулярно плоскости полосы.

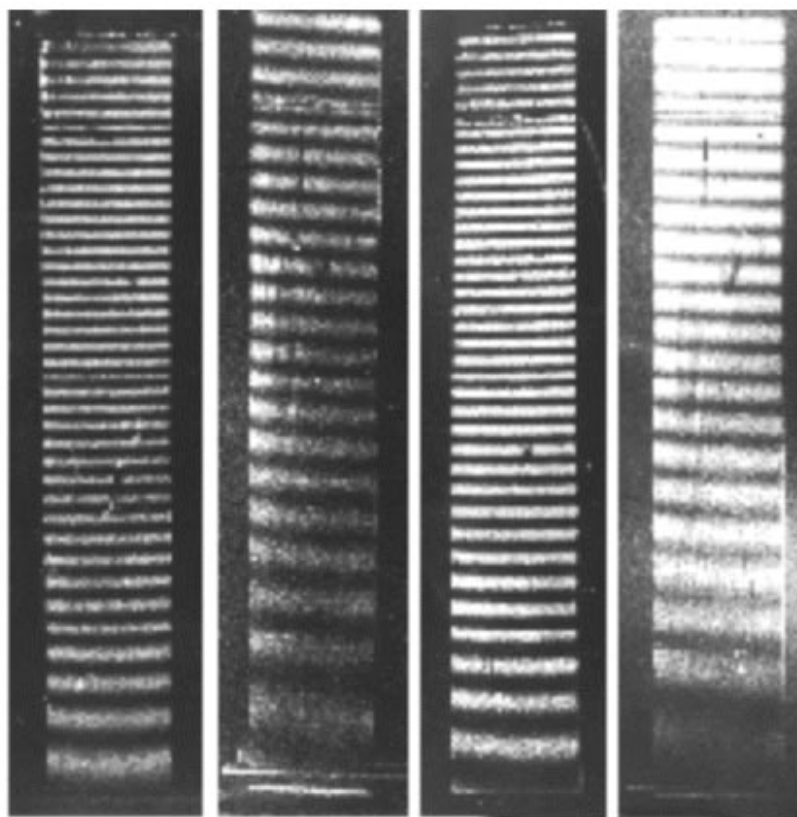


Рис. 95. Фотографии восстановленных интерферограмм (для четырех различных углов наблюдения) в эксперименте с изгибом. Относительные смещения, обусловленные изгибом, точек поверхности образца, расположенных в центрах двух смежных черных полос, пропорциональны $\lambda/2$

Процесс расшифровки голографических интерферограмм, полученных по многолучевой оптической схеме, связан с исследованием диффузно отражающих объектов. При исследовании фазовых объектов с использованием многолучевых оптических схем возникают дополнительные особенности. Например, теоретический анализ записи и восстановления голографических интерферограмм диффузно отражающих объектов ведется в рамках скалярной теории электромагнитных волн, в то время как при исследовании фазовых объектов

необходимо во многих случаях учитывать векторный характер электромагнитных волн.

Рассмотрим процесс записи и восстановления голографических интерферограмм фазовых объектов и методику расшифровки получаемых интерферограмм для многолучевых оптических схем. Для теоретического анализа воспользуемся методом Джонса (R. C. Jones, 1941 г.) [3], учитывающим в комплексной форме векторный характер электромагнитных волн. В данном методе плоская световая волна (точнее вектор электрической напряженности) представляется в комплексной форме в виде вектор-столбца:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi} \\ A_y e^{i\gamma} \end{bmatrix} e^{-ikz}, \quad (\text{N})$$

где A_x , A_y — компоненты амплитуды вектора напряженности электрического поля световой волны вдоль осей x и y соответственно для произвольно выбранной декартовой системы координат, ось z которой совпадает с направлением распространения световой волны; φ и γ — соответствующие начальные фазы компонент амплитуды вектора напряженности электрического поля световой волны относительно осей x и y .

В зависимости от разности фаз $\varphi - \gamma$ и отношения компонент амплитуды A_x/A_y световая волна будет иметь линейную, круговую или эллиптическую поляризацию. Следует также отметить, что в данном выражении опущен временной множитель, так как он не влияет на окончательные результаты вычислений.

Интенсивность световой волны по методу Джонса определяется следующим выражением:

$$I = \mathbf{E}^+ \mathbf{E} = [A_x e^{-i\varphi}, A_y e^{-i\gamma}] e^{ikz} \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi} \\ A_y e^{i\gamma} \end{bmatrix} e^{-ikz} = A_x^2 + A_y^2 \quad (\text{O})$$

где знак плюс обозначает, что вектор столбец транспонирован и комплексно сопряжен.

В общем случае, при прохождении световой волны через слабо поглощающий фазовый объект происходит изменение не только фазы волны, но и изменение состояния поляризации. По методу Джонса, вектор электрической напряженности \mathbf{E} световой волны, прошедшей через фазовый объект, записывается следующим образом:

$$\mathbf{E} = M \mathbf{E}_0, \quad (\text{P})$$

где \mathbf{E}_0 — световая волна при входе в фазовый объект, M — матрица Джонса для фазового объекта.

В общем случае матрица Джонса для анизотропного фазового объекта имеет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_1} \cos^2 \beta + e^{-i\varphi_2} \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta (e^{-i\varphi_1} - e^{-i\varphi_2}) \\ \sin \beta \cos \beta (e^{-i\varphi_1} - e^{-i\varphi_2}) & e^{-i\varphi_1} \sin^2 \beta + e^{-i\varphi_2} \cos^2 \beta \end{bmatrix}, \quad (\text{Q})$$

где φ_1 и φ_2 — изменение фаз для компонент амплитуды прошедшей световой волны, связанных с квазиглавными оптическими осями поперечного сечения

эллипсоида Френеля фазового объекта относительно направления распространения волны; β — ориентация одной из квазиглавных осей относительно оси x для произвольно выбранной системы координат, ось z которой совпадает с направлением распространения световой волны в фазовом объекте.

В каждой точке анизотропной фазовой среды можно построить собственный эллипсоид Френеля с тремя главными осями, соответствующими трем главным значениям показателей преломления среды n_1, n_2, n_3 .²²³ Оптическая анизотропия среды вызывает эффект двойного лучепреломления при прохождении луча света. Двойное лучепреломление обусловлено векторной природой световой волны, т.е. тем фактом, что волна полностью описывается вектором электрической и магнитной напряженности, и показывает, что в среде, вообще говоря, распространяются с разными скоростями две линейно поляризованные волны, плоскости поляризации которых взаимно ортогональны. Величины указанных скоростей в каждой точке среды связаны с двумя квазиглавными значениями показателей преломления n_1^*, n_2^* , соответствующими центральному эллиптическому сечению эллипсоида Френеля, нормальному направлению распространения светового луча.

При исследовании задач механики деформируемого твердого тела в приближении линейной теории упругости, главные оси эллипсоида Френеля и эллипсоида напряжений Коши совпадают. Следовательно, совпадают и центральные сечения этих эллипсоидов, что позволяет определить взаимосвязь между оптическими (показатели преломления) и механическими (главные напряжения) величинами. Квазиглавные значения показателей преломления n_1^*, n_2^* связаны с квазиглавными значениями тензора напряжений σ_1^*, σ_2^* соотношениями Максвелла (см., например, первый том монографии [8]):

$$\begin{aligned} n_1^* - n_0 &= C_1 \sigma_1^* + C_2 \sigma_2^*, \\ n_2^* - n_0 &= C_2 \sigma_1^* + C_1 \sigma_2^*, \end{aligned} \quad (R)$$

где n_0 — показатель преломления фазового объекта в ненапряженном состоянии; C_1 и C_2 — оптические коэффициенты фазовой среды, связывающие значения напряжений с показателями преломления этой среды.

Применим метод Джонса для описания записи двухэкспозиционных голограмм фазовых объектов по трехлучевой схеме с двумя опорными пучками света. Распределение амплитудного пропускания голограммы за счет интерференции всех световых волн в общем случае представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_n^0)^+ (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_n^0) t_1 + \\ &+ (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_n^s)^+ (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_n^s) t_2, \end{aligned} \quad (S)$$

где \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — векторы опорных световых волн; \mathbf{E}_n^0 и \mathbf{E}_n^s — векторы предметных световых волн, прошедших через фазовый объект во время первой и второй

²²³Излагаемые здесь и далее базовые понятия теории поляризационно-оптических методов в деталях изложены в первом томе известной монографии [8]. Имеется также русский перевод: Фрохт М. М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. I. М., Л.: Гостехтеориздат, 1948. 432 с.

экспозиций соответственно; t_1 и t_2 — время первой и второй экспозиций при регистрации голограммы.

При восстановлении голограмма освещается одним из опорных пучков света. Опорная световая волна за счет дифракции на голограмме восстановит волновой фронт, в котором заложена информация об изменениях с исследуемым фазовым объектом между двумя экспозициями.

Амплитуда световой волны за голограммой в общем случае будет описываться следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^j = T\mathbf{E}_j = B\mathbf{E}_j + \\ + (t_1\mathbf{E}_1^+\mathbf{E}_n^0 + t_2\mathbf{E}_1^+\mathbf{E}_n^s)\mathbf{E}_j + (t_1\mathbf{E}_2^+\mathbf{E}_n^0 + t_2\mathbf{E}_2^+\mathbf{E}_n^s)\mathbf{E}_j + \\ + (t_1\mathbf{E}_n^{0+}\mathbf{E}_1 + t_2\mathbf{E}_n^{s+}\mathbf{E}_1)\mathbf{E}_j + (t_1\mathbf{E}_n^{0+}\mathbf{E}_2 + t_2\mathbf{E}_n^{s+}\mathbf{E}_2)\mathbf{E}_j, \end{aligned} \quad (\text{T})$$

где $j = 1, 2$, что соответствует восстановлению голограммы первым или вторым опорным пучком света; B — почернение фотоматериала за счет суммарной интенсивности света от всех трех пучков без образования интерференционной картины.

Анализ выражения (Т) показывает, что первое слагаемое является не дифрагированной световой волной, которая не несет информации об исследуемом объекте. Второе и третье слагаемые дают мнимое изображение исследуемого объекта. Четвертое и пятое слагаемые дают действительное изображение исследуемого объекта.

Восстановленные изображения фазовых объектов будут покрыты интерференционными полосами, в которых заложена информация об изменениях, произошедших с объектом между двумя экспозициями. Для пространственного разделения восстановленных изображений необходимо реализовать следующие условия: опорные световые пучки должны располагаться во взаимно ортогональных плоскостях относительно предметного светового пучка и иметь взаимно ортогональное состояние поляризации.

Рассмотрим образование интерференционных картин для оптической схемы с линейно поляризованным излучением во всех трех световых пучках, причем плоскости поляризации в опорных пучках взаимно ортогональны, а плоскость поляризации предметного пучка расположена под углом θ к одной из плоскостей поляризации опорных пучков.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось x совпадала по направлению с плоскостью поляризации первого опорного светового пучка. Тогда распределение интенсивности в восстановленном изображении первым опорным пучком света будет описываться следующим выражением:

$$\begin{aligned} I_1 = S \left\{ \cos^2 \theta (\eta + 1)^2 - \sin(2\beta - 2\theta) \sin 2\beta \sin^2 \frac{\Delta}{2} - \right. \\ \left. - 4\eta \cos \theta \cos \beta \cos(\beta - \theta) \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} - \right. \\ \left. - 4\eta \cos \theta \sin \beta \sin(\beta - \theta) \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{U})$$

где S — некоторый постоянный множитель, характеризующий постоянную освещенность исследуемого объекта; $\eta = t_1 t_2^{-1}$ — отношение времен экспозиций; Δ — относительная разность фаз, возникающая при прохождении светового луча через фазовый объект; Δ_1 — абсолютная разность фаз относительно квазиглавно-ного значения показателя преломления n_1^* , или соответственно квазиглавно-ного значения тензора напряжений σ_1^* ; Δ_2 — абсолютная разность фаз относительно квазиглавно-ного значения показателя преломления n_2^* , или соответственно квази-главного значения тензора напряжений σ_2^* .

Распределение интенсивности в восстановленном изображении вторым опор-ным пучком света будет описываться следующим выражением:

$$I_2 = S \left\{ \sin^2 \theta (\eta + 1)^2 + \sin(2\theta - 2\beta) \sin 2\beta \sin^2 \frac{\Delta}{2} - \right. \\ \left. - 4\eta \sin \theta \sin \beta \cos(\theta - \beta) \sin^2 \frac{\Delta_1}{2} - \right. \\ \left. - 4\eta \sin \theta \cos \beta \sin(\theta - \beta) \sin^2 \frac{\Delta_2}{2} \right\}. \quad (\text{V})$$

В общем случае для разностей фаз Δ , Δ_1 , Δ_2 соотношения через квазиглав-ные значения показателей преломления и квазиглавные значения компонент тензора напряжений определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi_2 - \varphi_1 = k (n_2^* - n_1^*) h_s = k (C_2^* - C_1^*) (\sigma_2^* - \sigma_1^*) h_s, \\ \Delta_1 &= \varphi_1 - \varphi_0 = k [(n_1^* - n_0) h_0 + (n_1^* - n) \delta h] = \\ &= k (C_1^* \sigma_1^* + C_2^* \sigma_2^*) h_0, \\ \Delta_2 &= \varphi_2 - \varphi_0 = k [(n_2^* - n_0) h_0 + (n_2^* - n) \delta h] = \\ &= k (C_2^* \sigma_1^* + C_1^* \sigma_2^*) h_0, \end{aligned} \quad (\text{W})$$

где φ_0 — фаза волны, прошедшей объект в ненагруженном состоянии; h_s , h_0 — толщина исследуемого фазового объекта в направлении распространения све-тового луча в напряженном и ненапряженном состоянии соответственно; δh — изменение толщины фазового объекта при приложении нагрузки; n_0 — пока-затель преломления фазового объекта в ненапряженном состоянии; n — пока-затель преломления окружающей среды;

$$C_j^* = C_j - \frac{\nu}{E} (n_0 - n) \quad (j = 1, 2);$$

ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга.

Из анализа выражений (U) и (V) следует, что при использовании линей-но поляризованного света интерференционные картины имеют в общем случае сложную структуру, которая состоит из суперпозиции нескольких интерферен-ционных картин известных из теории фотоупругости: полос изохром²²⁴ (второе

²²⁴Изохромами в фотоупругости называют полосы, в которых происходит гашение световых волн (составля-ющих луч падающего на модель белого цвета) определенной длины. Вдоль изохромы сохраняется постоянной разность главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$. Для обозначения геометрического места точек, в которых сумма глав-ных напряжений $\sigma_1 + \sigma_2$ имеет одно и то же значение, используется термин "изопахика".

слагаемое с множителем $\sin^2(\Delta/2)$), полос изодром²²⁵ относительно значений напряжений σ_1^* и σ_2^* (третье и четвертое слагаемое с множителями $\sin^2(\Delta_1/2)$ и $\sin^2(\Delta_2/2)$ соответственно), полос изоклин,²²⁶ описываемых множителями, содержащими угол β .

Если использовать для исследований фазовые среды с малой оптической чувствительностью, то выражения (U) и (V) можно преобразовать к следующему виду:

$$I_1 \cong \cos^2 \frac{\Delta_1}{2}, \quad (X)$$

$$I_2 \cong \cos^2 \frac{\Delta_2}{2}. \quad (Y)$$

Для расшифровки интерференционных картин, описываемых данными выражениями, можно воспользоваться методом определения порядка полос в исследуемой точке.

В качестве примера на рис. 96, 97 представлены фотографии интерференционных картин полос изодром Δ_1 и Δ_2 , которые получены с голограммы записанной по трехлучевой оптической схеме с линейно поляризованным светом и восстановлены первым и вторым опорными пучками света соответственно.

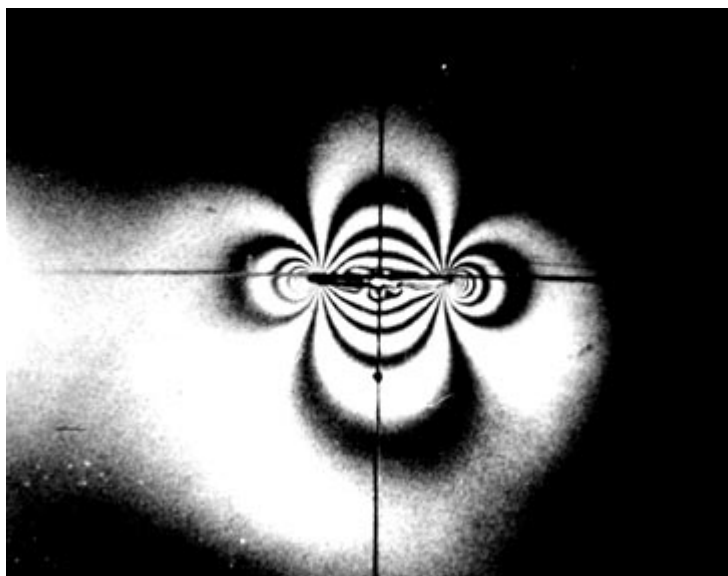


Рис. 96. Интерференционная картина изодром Δ_1 в окрестности трещины нормального отрыва в органическом стекле

Интерференционные картины получены для пластины из органического стекла с центральным надрезом, подверженной растяжению усилием 120кГ . Размеры исследуемой модели были следующими: длина пластины — 200мм , ширина — 80мм , толщина — 4мм . Длина центрального надреза составляла 12мм , ширина — 0.3мм . Радиус закругления в вершине пропила — 0.15мм .

²²⁵Изодрома — геометрическое место точек, оптическая разность хода в которых имеет одно и то же значение.

²²⁶Изоκлина — геометрическое место точек, направления главных осей напряжений в которых параллельны.

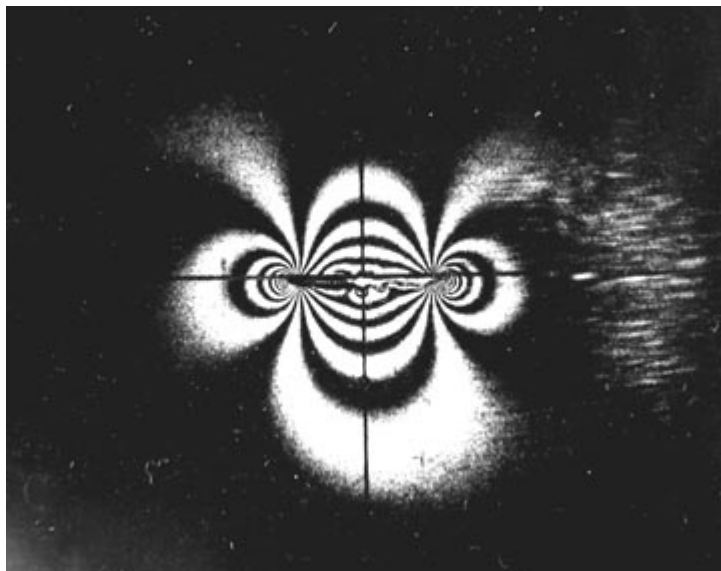


Рис. 97. Интерференционная картина изодром Δ_2 в окрестности трещины нормального отрыва в органическом стекле

Распределение интенсивности света в интерференционных картинах для такой модели будет описываться выражениями (X) и (Y). На фотографии (рис. 96) представлены интерференционные картины изодром Δ_1 относительно σ_1^* , а на фотографии (рис. 97) — интерференционные картины изодром Δ_2 относительно σ_2^* .

Для расшифровки интерференционных картин использовался метод определения порядка полос в исследуемой точке. Определив порядок полос изодром Δ_1 и Δ_2 в исследуемой точке и используя соотношения (W), можно найти следующие выражения для квазиглавных значений компонент тензора напряжений σ_1^* , σ_2^* :

$$\begin{aligned}\sigma_1^* &= \frac{\lambda}{2h_0} \frac{C_1^*(2l+1) - C_2^*(2m+1)}{(C_1^*)^2 - (C_2^*)^2}, \\ \sigma_2^* &= \frac{\lambda}{2h_0} \frac{C_2^*(2l+1) - C_1^*(2m+1)}{(C_1^*)^2 - (C_2^*)^2},\end{aligned}\tag{Z}$$

где l — порядок полосы изодромы Δ_1 в исследуемой точке, m — порядок полосы изодромы Δ_2 в исследуемой точке.

Заметим, что методика определения порядка полос изодром Δ_1 и Δ_2 аналогична методике определения порядка полос изохром в фотоупругости.

Проведенный теоретический анализ и экспериментальные исследования показывают, что трехлучевые оптические схемы записи и восстановления голографических интерферограмм фазовых объектов, также как и для диффузных объектов, дают дополнительную информацию, позволяющую ускорить процесс расшифровки интерференционных картин и повысить точность измерений по сравнению с двухлучевыми оптическими схемами.

Литература

1. Григоровский Н. Н. Развитие экспериментальных методов исследования деформаций и напряжении// В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1983. С. 3-32.
2. Александров Е. Б., Бонч-Бруевич А. М. Исследование поверхностных деформаций тел с помощью голографической техники// ЖТФ. 1967. Т. 37. С. 360-365.
3. Jones R. C. A new calculus for the treatment of optical systems// J. Optical Soc. Amer. 1941. V. 31. No. 7. P. 488-500.
4. Индисов В. О., Писарев В. С., Щепиков В. П., Яковлев В. В. Сравнение способов интерпретации голографических интерферограмм по абсолютным и относительным порядкам полос при измерении деформаций// В кн.: Деформация и разрушение материалов и конструкций атомной техники. М.: Энергоатомиздат, 1983. С. 45-54.
5. Писарев В. С., Яковлев В. В., Щепиков В. П., Индисов В. О. Использование критерия *C*-оптимальности при выборе схемы голографического интерферометра для определения деформаций// ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 4. С. 869-871.
6. Гузь А. Н., Вологжанинов С. И. Определение напряжений на основе ограниченного объема экспериментальных измерений// Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, №3. С. 563-565.
7. Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В. Голографическая интерферометрия. М.: Наука, 1977. 257 с.
8. Frocht M. M. Photoelasticity. Vol. I, II. New York: Wiley, 1949, 1948. 411 pp., 505 pp.

Основные обозначения

Общая система обозначений, используемая в настоящей работе и принятая во многих статьях и монографиях по нелинейной механике, в основном подобна [336], [329]. Незначительные отклонения подробно описаны в [137].²²⁷

Светлые курсивные буквы (латинские или греческие, прописные или строчные) обозначают скаляры и скалярные поля.

Жирные прямые строчные и прописные буквы (латинские, в том числе и каллиграфического начертания, или греческие) применяются для обозначения векторов и векторных полей.

Жирные прямые прописные буквы (латинские, в том числе и каллиграфического начертания, или греческие) как правило используются для обозначения тензоров и тензорных полей (обычно второго ранга).

В той части, где изложение касается прикладных задач механики разрушения, мы сочли необходимым придерживаться традиционных обозначений, что подразумевает, например, применение символов σ_{ij} и ε_{ij} для обозначения напряжений и малых деформаций.

Ниже следует список основных обозначений, которые используются в работе. Символы (сначала латинские, а затем греческие) располагаются в алфавитном порядке.

A, m	постоянные кинетического уравнения накопления повреждений;
\mathbf{b}	вектор Бюргерса;
B, n	постоянные степенного закона установившейся ползучести;
C^*	инвариантный интеграл теории ползучести;
c_1, c_2	скорости распространения упругих волн расширения и сдвига соответственно;
d_k	производная по направлению координатной линии с номером k ;
D	скалярный параметр поврежденности;

²²⁷Указанная работа: Радаев Ю. Н. Теория конечных деформаций сплошных сред. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с. может быть найдена на сервере Самарского гос. университета по адресу: <http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/FiniteStrainsTheory.zip>

\mathbf{D}	тензор поврежденности;
\mathcal{D}	диссипация энергии;
$D_{(\alpha)}$	главные поврежденности (собственные значения тензора поврежденности второго ранга);
$\mathbf{d}_{(\alpha)}$	ортонормированные собственные векторы тензора поврежденности второго ранга;
dA	геометрическая площадь плоского элемента поврежденной среды в актуальном деформированном состоянии;
$dA_{(\gamma)}$	геометрическая площадь плоского элемента поврежденной среды, ориентированного перпендикулярно главной оси тензора поврежденности \mathbf{D} с номером γ ;
dA^*	эффективная площадь плоского элемента поврежденной среды;
$dA_{(\gamma)}^*$	эффективная площадь плоского элемента поврежденной среды, ориентированного перпендикулярно главной оси тензора поврежденности \mathbf{D} с номером γ ;
E	модуль Юнга;
$E(\vartheta, k)$	неполный эллиптический интеграл второго рода;
e_{ij}	компоненты девиатора деформаций;
\mathcal{E}	объемная плотность внутренней энергии;
\mathbf{F}	градиент деформации;
F_i	компоненты вектора массовых сил;
$F(\vartheta, k)$	неполный эллиптический интеграл первого рода;

$F(r, \theta)$	функция напряжений Эри в полярной системе координат;
f	функция текучести;
\mathbf{f}^{inh}	сила, действующая на материальную неоднородность (сила Эшелби);
\mathbf{f}^{th}	термическая материальная сила;
$f(z), \omega(z)$	комплексный потенциал смещения в задаче антиплоского сдвига;
$\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$	конфигурационная сила;
\mathbf{G}	градиент фиктивной деформации, преобразующей поврежденный элемент в эквивалентный неповрежденный;
G, μ	модуль сдвига;
G_{ij}	компоненты тензора Кельвина—Сомильяны;
\mathcal{G}	трещинодвижущая сила Ирвина;
$g_{\alpha\beta}$	метрика конвективной системы координат;
$g_{\alpha\beta}^*$	метрика эквивалентной неповрежденной конфигурации;
\mathbf{h}	материальный вектор потока тепла;
\mathcal{H}	объемная плотность Гамильтониана;
\mathbf{I}	единичный тензор;
I_n	безразмерный инвариантный интеграл степенного упрочнения или установившейся ползучести;
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$	локальный базис конвективной системы координат;

$\mathbf{i}_1^*, \mathbf{i}_2^*, \mathbf{i}_3^*$	локальный (неголономный) базис эквивалентной конфигурации;
\mathfrak{S}	функционал действия;
\mathbf{J}	материальный вектор потока энтропии;
J J	инвариантный интеграл механики разрушения; Якобиан отображения отсчетной конфигурации тела на его текущую деформированную конфигурацию;
J'_2, J'_3	инварианты девиатора напряжений;
K	кинетическая энергия тела;
k	предел текучести на сдвиг;
$\mathbf{K}(k)$	полный эллиптический интеграл первого рода;
K_I, K_{II}, K_{III}	коэффициенты интенсивности напряжений;
K_{Ic}	трещиностойкость;
\mathcal{K}	актуальная конфигурация тела;
\mathcal{K}_R	отсчетная конфигурация тела;
L	контур края трещины;
l	половина длины трещины;
\dot{l}	скорость распространения края трещины в направлении нормали к контуру трещины L ;
\mathcal{L}	плотность Лагранжиана;
\mathfrak{L}	Лагранжиан;
$L_{(\alpha)}^D$	главные удлинения поврежденности (собственные значения тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$);

L_1, L_2, L_3	натуральные параметры (переменные длины дуг) вдоль линий главных напряжений;
$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$	ортонормированный базис, ориентированный вдоль главных осей напряжений;
M	число Маха;
n_k	компоненты вектора внешней единичной нормали;
\mathbf{p}	импульс;
\mathbf{P}	тензор напряжений Эшелби;
\mathbf{P}	транспонированный вихрь тензора малых деформаций;
P_β	4-импульс поля;
\mathcal{P}	канонический импульс;
$R(M, \nu)$	знаменатель Рэлея;
R_1, R_2	радиусы кривизны линий максимальных касательных напряжений в состоянии плоской деформации;
$r, \theta; r, \varphi$	полярные координаты на плоскости;
\mathbf{r}	радиус-вектор;
\mathbf{S}	первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа;
S	поверхность, ограничивающая область V ;
s	объемная плотность энтропии;
s_{ij}	компоненты девиатора напряжений;
\mathbf{T}	тензор напряжений Коши;

t	время;
\mathbf{T}^*	тензор эффективных напряжений;
T, σ_e	интенсивность напряжений;
T_∞	величина усилия, приложенного в бесконечно удаленной точке;
T_i, t_i	компоненты вектора напряжений;
$T_{(\alpha)}$	собственные значения тензора напряжений Коши (главные истинные напряжения);
$T_{(\alpha)}^*$	собственные значения тензора эффективных напряжений (главные эффективные напряжения);
$T_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$	тензор энергии—импульса поля;
u_i	компоненты вектора перемещений;
V	область в пространстве, являющаяся конфигурацией тела;
\mathbf{v}	Эйлерова скорость;
v_c	объем трещины;
\mathbf{v}	материальная скорость;
W	объемная плотность энергии деформации (упругий потенциал);
W_*	потенциал дополнительной работы;
\mathbf{X}	положение (место) в отсчетной конфигурации;
\mathbf{x}	положение (место) в актуальной конфигурации;
\mathbf{x}^*	положение (место) в эквивалентной неповрежденной конфигурации;

x_i	декартовы прямоугольные координаты на плоскости;
Y	предел текучести материала при одноосном растяжении;
z	комплексная переменная;
α	внутренняя (скрытая) переменная состояния;
$\mathbf{\Gamma}$	материальный вектор потока энергии;
$\boldsymbol{\gamma}$	материальный вектор Умова—Пойнтинга;
Γ	интенсивность деформаций;
γ	энергия, затрачиваемая на образование единицы площади свободной поверхности тела; длина дуги траектории пластических деформаций;
$\Gamma_{ij,k}$	символ Кристоффеля первого рода;
Γ_{ij}^k	символ Кристоффеля второго рода;
δ	раскрытие трещины в ее вершине;
δ_{ij}	символ Кронекера;
ε_{ijk}	кососимметричный тензор Леви—Чивита;
ε_{ij}	компоненты тензора малых деформаций;
$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta\theta}$	физические компоненты тензора деформаций в полярной системе координат;
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	главные деформации;
ε_{ij}^E	тензор упругих деформаций;
ε_{ij}^P	тензор пластических деформаций;

ϑ	абсолютная температура;
κ	постоянная плоской теории упругости;
κ_{ij}	кривизна линии главного напряжения с номером i в локальной координатной плоскости, нормальной линии главного напряжения с номером j ;
λ, μ	упругие постоянные Ламе;
$d\lambda$	неопределенный множитель теории идеальной пластичности;
ν	коэффициент Пуассона;
$\Pi(\varphi, \omega^2, k)$	канонический неполный эллиптический интеграл третьего рода;
ρ	плотность тела;
ρ_R	плотность тела в отсчетном состоянии;
ρ_1, ρ_2	радиусы кривизны линий главных напряжений в состоянии плоской деформации;
σ_{ij}	компоненты тензора напряжений;
$\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$	физические компоненты тензора напряжений в полярной системе координат;
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	главные напряжения;
σ_{\max}	максимальное нормальное напряжение (максимальное собственное значение тензора напряжений);
σ	среднее напряжение (среднее арифметическое главных нормальных напряжений);
$\varsigma(\mathbf{n})$	ориентационное распределение сплошности;

ψ	сплошность; объемная плотность свободной энергии Гельмгольца;
$\psi(z), \varphi(z)$	комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили;
$d\tau$	элемент объема в актуальной деформированной конфигурации тела;
$d\tau_R$	элемент объема в отсчетной конфигурации тела;
ω	крутка (угол закручивания на единицу длины);
ω_{ij}	компоненты кососимметричного тензора вращения;
\mathfrak{E}	потенциальная энергия упругого тела;
\mathfrak{E}^*	дополнительная потенциальная энергия упругого тела;
∇	пространственный оператор Гамильтона;
∇_R	отсчетный оператор Гамильтона;
Δ	оператор Лапласа.

Замечания об использовании индексов

В книге отдается предпочтение прямой тензорной записи используемых соотношений механики и термодинамики сплошных сред в духе классического сочинения [76] и рациональной механики [165]. Прямая тензорная запись, будучи чрезвычайно ясной и экономной в плане получения и осмысления нового знания, часто скрывает природу тензора, которая скрыта за одним единственным символом. Особенно это касается тензоров, определение которых заимствует элементы как отсчетного, так и пространственного описаний. Классическая теория поля, изложенная в 3.2, естественно, по крайней мере в формульном плане, представляется именно в индексной записи и прямая запись здесь будет лишь скрывать естественные и канонические представления тензоров и тензорных уравнений поля.

Использование различных классов индексов для трех систем координат (пространственной, отсчетной и конвективной) совершенно естественно и необходимо для сознательного оперирования такими понятиями, как градиент деформации и тензоры конечной деформации.

Иногда тензор может наиболее просто и естественно представляться в смешанном диадном базисе, когда векторы диады принадлежат различным базисным системам, и в этом случае компоненты тензора имеют индексы различных классов. Так, градиент деформации наиболее просто и естественно представляется (просто частной производной) в диадном базисе, левый множитель которого есть пространственный базисный вектор, а правый — отсчетный. Это естественное представление тензора градиента деформации влияет затем на координатную запись полярного разложения и, таким образом, на все координатное оформление теории конечных деформаций. Термин "естественное представление тензора" (см. [137]) широко используется в настоящей работе.

1. Латинские индексы применяются при записи компонент тензорных полей относительно пространственного (Эйлерова) базиса \mathbf{i}_k .

2. Греческие индексы применяются для записи компонент тензорных полей относительно конвективного базиса \mathbf{i}_α .

3. Греческие индексы с предшествующим символом \mathbf{R} применяются для записи компонент тензорных полей относительно отсчетного базиса $\mathbf{i}_{\mathbf{R}\alpha}$. Сам отсчетный базис для сокращения записи иногда обозначается \mathbf{I}_α .

4. Действие символа \mathbf{R} распространяется на все греческие индексы, расположенные за ним. Сам символ \mathbf{R} никогда индексом не является.²²⁸

5. Индексы, заключенные в треугольные скобки, используются для обозначения физических компонент тензора относительно данной ортогональной криволинейной координатной системы.

6. Индекс, заключенный в круглые скобки, указывает на представление в собственном ортонормированном базисе симметричного тензора второго ранга.

²²⁸ Мы сочли возможным опустить в разделе 3.2 символ \mathbf{R} перед греческими индексами канонических тензоров теории поля.

В зависимости от смысла тензора этот индекс может быть как греческим, так и латинским.

7. Два и более индексов, заключенных в круглые скобки, обозначают симметризацию по этим индексам:

$$A_{(i_1 i_2 \dots i_k)} = \frac{1}{k!} \sum_P A_{i_{P(1)} i_{P(2)} \dots i_{P(k)}}.$$

Здесь символ P обозначает произвольную перестановку множества натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, k$.

Так, например:

$$A_{(\kappa\lambda\mu)} = \frac{1}{6}(A_{\kappa\lambda\mu} + A_{\lambda\mu\kappa} + A_{\mu\kappa\lambda} + A_{\kappa\mu\lambda} + A_{\lambda\kappa\mu} + A_{\mu\lambda\kappa}).$$

Замечания об алгебраических и дифференциальных операторах

1. Скалярное умножение векторов и внутреннее умножение тензоров обозначается точкой (\cdot). При внутреннем умножении тензоров второго ранга (закон композиции) и при умножении тензора второго ранга справа на вектор знак умножения для сокращения записи иногда опускается.

2. Векторное умножение векторов и внешнее умножение тензоров обозначается крестом (\times).

3. Тензорное (диадное) умножение обозначается крестом, обведенным окружностью (\otimes).

4. След тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом $\text{tr}\mathbf{A}$:

$$\text{tr}\mathbf{A} = A_{k\cdot}^{\cdot k} = A_{\cdot k}^{k\cdot}.$$

След диадного произведения двух векторов равен их скалярному произведению:

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

5. Векторный инвариант тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается через \mathbf{A}^\times :

$$(\mathbf{A}^\times)^\gamma = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} A_{\beta\lambda}.$$

Заметим, что векторный инвариант диадного произведения двух векторов трехмерного пространства есть векторное произведение векторов, составляющих диаду:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

6. Симметричная и антисимметричная части тензора второго ранга \mathbf{A} обозначаются соответственно символами sym и asym : $\text{sym}\mathbf{A}$, $\text{asym}\mathbf{A}$.

7. Операция транспонирования тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом T вверху справа: \mathbf{A}^{T} .

8. Операция обращения тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом -1 вверху справа: \mathbf{A}^{-1} .

9. Определитель тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается через $\det\mathbf{A}$.

10. Для обозначения двух возможных вариантов полной свертки по всем индексам двух тензоров второго ранга используются следующая символика: $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} : \mathbf{B}$.

Напомним, что согласно определению

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_{ks} B^{sk},$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\text{T}}) = A_{ks} B^{ks}.$$

Эти операции называются также двойным скалярным умножением тензоров.

11. Пространственный оператор Гамильтона определяется формулой

$$\nabla = \mathbf{i}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Отметим также представление пространственного оператора Гамильтона в конвективном локальном базисе:

$$\nabla = \mathbf{i}^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

12. Отсчетный оператор Гамильтона определяется формулой

$$\nabla_R = \mathbf{i}^{R\alpha} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

13. Пространственные градиенты скалярного, векторного и тензорного поля определяются соответственно формулами:

$$\text{grad} f = \nabla f,$$

$$\text{grad} \mathbf{v} = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T,$$

$$\text{grad} \mathbf{A} = (\nabla \otimes \mathbf{A})^T.$$

14. Пространственная дивергенция векторного и тензорного поля определяется соответственно формулами:

$$\text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}^T.$$

15. Пространственный ротор векторного поля \mathbf{v} определяется формулой

$$\text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Аналогичным образом определяется пространственный ротор тензора второго ранга \mathbf{P}

$$\text{rot} \mathbf{P} = \mathbf{P} \times \nabla.$$

Заметим, что справедливо равенство

$$-\text{rot} \mathbf{P} = (\nabla \times \mathbf{P})^T.$$

16. Ковариантная (контравариантная) производная векторного поля \mathbf{v} определяется как коэффициент в разложении тензора второго ранга $\text{grad} \mathbf{v}$ по базисным диадам одного из четырех возможных типов:

$$\text{grad} \mathbf{v} = v_{k|l} \mathbf{i}^k \otimes \mathbf{i}^l = v_{\cdot|l}^k \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^l = v^{k|l} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l = v_{\cdot}^{\cdot|l} \mathbf{i}^k \otimes \mathbf{i}_l,$$

где, в частности,

$$v_{\cdot|l}^k = \frac{\partial v^k(x^s, t)}{\partial x^l} + v^j \Gamma_{jl}^k,$$

$$v_{k|l} = \frac{\partial v_k(x^s, t)}{\partial x^l} - v_j \Gamma_{kl}^j.$$

Аналогично определяется ковариантная производная тензора второго ранга \mathbf{A} . В частности, градиент тензора второго ранга может быть разложен по базисным полиадам в виде

$$\begin{aligned} \text{grad} \mathbf{A} &= A_{ij|k} \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^k = A_{\dots|k}^{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}^k = \\ &= A_{\dots}^{i\cdot\cdot}{}_{j|k} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^k, \end{aligned}$$

где коэффициенты разложения

$$A_{ij|k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_{lj} - \Gamma_{jk}^l A_{il},$$

$$A_{\dots|k}^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A^{lj} + \Gamma_{lk}^j A^{il},$$

$$A_{\dots}^{i\cdot\cdot}{}_{j|k} = \frac{\partial A^{i\cdot\cdot}{}_{j\cdot}}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A^{l\cdot\cdot}{}_{j\cdot} - \Gamma_{jk}^l A_{\dots}^{i\cdot\cdot}{}_{l\cdot}$$

суть ковариантные производные.

17. При использовании символа

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

аргументы дифференцируемой функции почти всегда указываются, поэтому всегда ясно, какие именно переменные следует считать фиксированными при выполнении дифференцирования. Так, например, в выражении

$$\frac{\partial v^k(x^s, t)}{\partial t}$$

при выполнении дифференцирования следует считать постоянными переменные Эйлера x^s .

Как правило, оператор используется для обозначения локальной производной по времени, т.е. производной при постоянных координатах x^s .²²⁹

18. Полная (материальная) производная, т.е. производная при постоянных координатах Лагранжа X^α , обозначается точкой над дифференцируемой функцией или полем:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \otimes \mathbf{A})^T \mathbf{v}.$$

19. Если $f(\cdot, \cdot, X^\beta)$ — некоторая функция, то через

$$\left(\frac{\partial f(\cdot, \cdot, X^\beta)}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}}$$

²²⁹Это соглашение иногда нарушается (см., например, раздел 3.1).

обозначается частная производная по переменной X^α при фиксированных значениях всех остальных аргументов (в том числе и не указанных явно), несмотря на то, что некоторые из них могут, в свою очередь, зависеть от X^α . Эту производную обычно называют явной производной по времени.

20. Инвариантное интегрирование в недеформированном и деформированном состояниях осуществляется с помощью элементов объема

$$d\tau_R = \sqrt{|g_{R\alpha\beta}|} dX^1 dX^2 dX^3,$$

$$d\tau = \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} dX^1 dX^2 dX^3.$$

Некоторые специальные тензоры и символы

1. Символ Кронекера δ_i^j определяется как

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

независимо от рассматриваемой координатной системы.

2. Дискриминантные символы (символы Леви-Чивита (T. Levi-Civita)) e_{ijk} и e^{ijk} равны и вычисляются как

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

а остальные e_{ijk} равны нулю, независимо от выбора системы координат.

3. Ковариантный и контравариантный дискриминантные тензоры ε_{ijk} и ε^{ijk} , определяемые в правоориентированной координатной системе следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= \sqrt{g} e_{ijk}, \\ \varepsilon^{ijk} &= \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk}, \end{aligned}$$

где $g = |g_{ij}|$, — широко используются для записи векторного произведения:

$$\begin{aligned} c^k &= \varepsilon^{ijk} a_i b_j, \\ c_k &= \varepsilon_{ijk} a^i b^j. \end{aligned}$$

Отметим также следующие формулы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= \mathbf{i}_i \cdot (\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k), \\ \varepsilon^{ijk} &= \mathbf{i}^i \cdot (\mathbf{i}^j \times \mathbf{i}^k), \\ \mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s &= \varepsilon_{rst} \mathbf{i}^t, \\ \mathbf{i}^r \times \mathbf{i}^s &= \varepsilon^{rst} \mathbf{i}_t. \end{aligned}$$

4. Символы Кристоффеля первого и второго рода определяются как коэффициенты в разложениях частных производных от векторов локального базиса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_i}{\partial x^j} &= \Gamma_{ij,k} \mathbf{i}^k, \\ \frac{\partial \mathbf{i}_i}{\partial x^j} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{i}_k \end{aligned}$$

и могут быть вычислены также по формулам

$$2\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ij,h}.$$

5. Тензор Римана—Кристоффеля определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \mathbf{i}_j}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \mathbf{i}_j}{\partial x^l \partial x^k} = R_{\cdot jkl}^{i\cdots} \mathbf{i}_i$$

и вычисляется с помощью дифференцирования уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{i}_j}{\partial x^s} = \Gamma_{js}^r \mathbf{i}_r.$$

Равенство нулю тензора Римана—Кристоффеля есть условие голономности базиса \mathbf{i}_j и возможности ввести декартову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$. Смешанные и ковариантные компоненты тензора Римана—Кристоффеля могут быть вычислены с помощью определителей [159], [182]:

$$R_{\cdot jkl}^{i\cdots} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{jk}^i & \Gamma_{jl}^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{sk}^i & \Gamma_{sl}^i \\ \Gamma_{jk}^s & \Gamma_{jl}^s \end{vmatrix},$$

$$R_{ijkl} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{jk,i} & \Gamma_{jl,i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{jk}^s & \Gamma_{jl}^s \\ \Gamma_{ik,s} & \Gamma_{il,s} \end{vmatrix}.$$

Ковариантные компоненты тензора Римана—Кристоффеля могут быть вычислены также по формуле

$$2R_{ijkl} = \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} +$$

$$+ 2g^{rs}(\Gamma_{jk,s}\Gamma_{il,r} - \Gamma_{jl,s}\Gamma_{ik,r}).$$

В трехмерном пространстве имеется всего шесть существенных компонент тензора Римана—Кристоффеля: R_{1212} , R_{1313} , R_{2323} , R_{1213} , R_{2123} , R_{3132} , равенство которых нулю и выражает условие сплошности (совместности) деформаций [36].

Несовместность поля деформаций, обусловленная микроструктурой пластического течения, выражается также через тензор Римана—Кристоффеля, который уже не будет нулевым. Конкретные представления тензора несовместности имеются, например, в монографии [112].

В случае малых деформаций условие сплошности имеет следующий вид [86]: $\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$, где тензор \mathbf{P} есть с точностью до знака ротор тензора малых деформаций.

Заметим, что физические компоненты тензора второго ранга $\nabla \times \mathbf{P}$ в ортогональной криволинейной сетке могут быть вычислены по следующим формулам:

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 31 \rangle}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{\langle 21 \rangle}}{\partial \xi^3} \right) + P_{\langle 23 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} - \\ - P_{\langle 32 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 32 \rangle}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{\langle 22 \rangle}}{\partial \xi^3} \right) + P_{\langle 31 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}} + \\ + P_{\langle 33 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} + P_{\langle 23 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 33 \rangle}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{\langle 23 \rangle}}{\partial \xi^3} \right) - P_{\langle 32 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} - \\ - P_{\langle 21 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} - P_{\langle 22 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{\langle 11 \rangle}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 31 \rangle}}{\partial \xi^1} \right) - P_{\langle 13 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} - \\ - P_{\langle 32 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - P_{\langle 33 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{\langle 12 \rangle}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 32 \rangle}}{\partial \xi^1} \right) + P_{\langle 31 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - \\ - P_{\langle 13 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{\langle 13 \rangle}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{\langle 33 \rangle}}{\partial \xi^1} \right) + P_{\langle 12 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}} + \\ + P_{\langle 11 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} + P_{\langle 31 \rangle} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<21>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<11>}}{\partial \xi^2} \right) + P_{<23>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}} + \\ + P_{<22>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} + P_{<12>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<22>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<12>}}{\partial \xi^2} \right) - P_{<21>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - \\ - P_{<13>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} - P_{<11>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<23>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<13>}}{\partial \xi^2} \right) + P_{<12>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} - \\ - P_{<21>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}}.$$

В декартовой системе координат в геометрически линейном приближении уравнения совместности деформаций приобретают форму:

$$e_{kij} e_{lmn} \partial_m \partial_i \varepsilon_{jn} = 0.$$

Несовместность пластической деформации выражается уравнением (см., например, [112]):

$$e_{kij} e_{lmn} \partial_m \partial_i d\varepsilon_{jn}^P = d\eta_{kl},$$

где тензор несовместности η_{kl} , который также часто называют тензором расхождения Кренера (Е. Krenner), связан с тензором плотности дислокаций α_{lk} посредством соотношения

$$\eta_{kl} = -\frac{1}{2}(e_{kij} \partial_i \alpha_{lj} + e_{lij} \partial_i \alpha_{kj}).$$

Тензор плотности дислокаций определяется уравнением

$$b_k = \alpha_{lk} dS_l,$$

где b_k — вектор Бюргерса, dS_l — векторный элемент площади, ограниченный контуром Бюргерса, через который проходит достаточно много линий дислокаций.

Отметим уравнение неразрывности дислокаций:

$$\partial_l \alpha_{lk} = 0.$$

Если на единицу площади приходится p параллельных линий дислокаций, то тензор плотности дислокаций вычисляется в виде:

$$\alpha_{lk} = p n_l b_k.$$

Литература

- [1] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.
- [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [3] Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1952. 324 с.
- [4] Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688 с.
- [5] Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
- [6] Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. Поведение решений задач теории упругости в неограниченных областях с параболоидальными и цилиндрическими включениями или полостями// Успехи механики. 1987. Вып. 4. С. 3-91.
- [7] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Об условиях на границах раздела в упругопластических телах// Докл. АН Армении. 1990. Т. 91. №1. С. 35-39.
- [8] Астафьев В. И. О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины// Прикл. механики и техн. физики. 1979. №6. С. 154-158.
- [9] Астафьев В. И. Влияние нестационарности поля напряжений на рост трещин при ползучести// Прикл. механики и техн. физики. 1983. №3. С. 148-152.
- [10] Астафьев В. И. Асимптотика напряжений у вершины растущей в процессе ползучести трещины с учетом накопления поврежденности// Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. №6. С. 1327-1330.
- [11] Астафьев В. И. Докритическое подрастание трещины при ползучести под действием переменной нагрузки// Прикл. механики и техн. физики. 1985. №3. С. 152-157.
- [12] Астафьев В. И. Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1986. №1. С. 127-134.
- [13] Астафьев В. И. Описание процесса разрушения в условиях ползучести// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1986. №4. С. 164-169.
- [14] Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести// ФХММ. 1992. Т. 28. №1. С. 5-11.
- [15] Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. №3. С. 160-166.

- [16] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Задача о разгрузке для трещины Дагдейла// Вестник Самарского гос. университета.²³⁰ 1997. №4(6). С. 103-114.
- [17] Атлури С. Применение в механике разрушения энергетических методов и интегралов, не зависящих от пути интегрирования/ В кн.: Вычислительные методы в механике разрушения. М.: Мир, 1990. С. 129-179.
- [18] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные задачи// Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434-444.
- [19] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах// Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 706-721.
- [20] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин// Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 893-900.
- [21] Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении// Прикл. механики и техн. физики. 1961. №4. С. 3-53.
- [22] Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеопиздат, 1982. 256 с.
- [23] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [24] Блох В. И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. 484 с.
- [25] Большанина М. А., Панин В. Е. Скрытая энергия деформации/ Сб. статей: Исследования по физике твердого тела. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 193-234.
- [26] Броек Д. Основы механики разрушения. М.: Высш. школа, 1980. 368 с.
- [27] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [28] Вакуленко А. А., Качанов Л. М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.
- [29] Вычислительные методы в механике разрушения. (Под ред. С. Атлури) М.: Мир, 1990. 392 с.
- [30] Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 264 с.
- [31] Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
- [32] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах// Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80-101.
- [33] Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
- [34] Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.

²³⁰Вестник Самарского государственного университета — регулярное научное издание Самарского государственного университета, которое доступно как в печатной так и электронной форме. Электронная версия журнала находится на сервере Самарского гос. университета по адресу: <http://www.ssu.samara.ru/science/vestnik>

- [35] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
- [36] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
- [37] Гринфельд М. А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [38] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. I. М., Л.: ОНТИ, 1936. 592 с.
- [39] де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
- [40] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М: Машиностроение, 1979. 567 с.
- [41] Дирак П. А. М. Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978. 64 с.
- [42] Жермен П. Курс механики сплошной среды. М.: Высш. школа., 1983. 399 с.
- [43] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Факториал, 1997. 304 с.
- [44] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Факториал, 1997. 512 с.
- [45] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [46] Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред// Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
- [47] Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях// Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.
- [48] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [49] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [50] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [51] Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
- [52] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [53] Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля// Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224.²³¹
- [54] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости// Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108.²³²

²³¹Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 17-42.

²³²Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. С. 62-83.

- [55] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. I. Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхностей. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 512 с.
- [56] Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. II. Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 408 с.
- [57] Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости М.: Наука, 1973. 304 с.
- [58] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
- [59] Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
- [60] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести// Изв. АН СССР. ОТН. 1958. С. 26-31.
- [61] Качанов Л. М. Основы теории ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.²³³
- [62] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.²³⁴
- [63] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [64] Ключников В. Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во Московского университета, 1994. 189 с.
- [65] Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 78 с.
- [66] Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 460 с.
- [67] Косевич А. М. Дислокации в теории упругости. Киев: Наукова думка, 1978. 220 с.
- [68] Костров Б. В., Никитин Л. В. Трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной// Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 32. Вып. 2. С. 334-336.
- [69] Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью// Прикл. матем. и механика. 1974. Т. 38. Вып. 3. С. 551-567.
- [70] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.
- [71] Кукуджанов В. Н. Способ расчета эффективных характеристик пористых нелинейно-упругих материалов при конечных деформациях// IX Конференция по прочности и пластичности. Москва, 22-26 января 1996. Труды конференции. Т. 2. М., 1996. С. 118-125.
- [72] Кунин И. А. Теория дислокаций/ В кн.: Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 373-443.
- [73] Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 416 с.
- [74] Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.

²³³См. также более ранний источник: Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 164 с.

²³⁴Первое издание этой книги: Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 324 с. Более ранний источник: Качанов Л. М. Механика пластических сред. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 216 с.

- [75] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 528 с.
- [76] Лагалли М. Векторное исчисление. М., Л.: ОНТИ, 1936. 344 с.
- [77] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М: Наука, 1973. 504 с.
- [78] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М: Наука, 1987. 248 с.
- [79] Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 420 с.
- [80] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости// Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23.
- [81] Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 464 с.
- [82] Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 356 с.
- [83] Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
- [84] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [85] Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле// Прикладная механика. 1959. Т. 5. №4. С. 391-401.
- [86] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 492 с.
- [87] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [88] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [89] Мавлютов Р. Р. Концентрация напряжений в элементах конструкций. М.: Наука, 1996. 240 с.
- [90] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.
- [91] Манжиров А. В., Полянин А. Д. Методы решения интегральных уравнений: Справочник. М.: Изд-во Факториал, 1999. 272 с.
- [92] Меллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
- [93] Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 290 с.
- [94] Миркин Л. И. Физические основы прочности и пластичности. М: Изд-во Московского университета, 1968. 538 с.
- [95] Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М.: Наука, 1987. 256 с.
- [96] Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 380 с.
- [97] Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
- [98] Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1999. 544 с.

- [99] Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
- [100] Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. №4. С. 93-110.
- [101] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
- [102] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [103] Назаров С. А. Тензор и меры поврежденности. 1. Асимптотический анализ анизотропной среды с дефектами// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №3. С. 113-124.
- [104] Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [105] Нейбер Г. Концентрация напряжений. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 204 с.
- [106] Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации/ Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. периодич. лит-ры, 1961. №4. С. 116-130.
- [107] Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
- [108] Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
- [109] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [110] Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминев В. Н. Теория ползучести и длительной прочности металлов. М: Металлургиздат, 1959. 488 с.
- [111] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.
- [112] Онами М., Ивасимидзу С. и др. Введение в микромеханику. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
- [113] Папкович П. Ф. Теория упругости. М., Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
- [114] Партон В. З., Черепанов Г. П. Механика разрушения/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 365-467.
- [115] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 320 с.
- [116] Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
- [117] Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с. ²³⁵
- [118] Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 264 с.
- [119] Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.

²³⁵Второе издание книги: Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.

- [120] Плювинаж Г. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Мир, 1993. 448 с.
- [121] Полак Л. С. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 600 с.
- [122] Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 560 с.
- [123] Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения. М.: Изд-во Факториал, 1998. 432 с.
- [124] Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
- [125] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.
- [126] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [127] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 3/ В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 9-445.
- [128] Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме/ В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 775-807.
- [129] Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения/ Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
- [130] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [131] Работнов Ю. Н. Теория ползучести/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 119-154.
- [132] Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
- [133] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
- [134] Радаев Ю. Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. №6. С. 69-75.
- [135] Радаев Ю. Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [136] Радаев Ю. Н. Термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах/ IX Конференция по прочности и пластичности. Москва, 22-26 января 1996. Труды конференции. Т. 2. М., 1996. С. 148-153.
- [137] Радаев Ю. Н. Теория конечных деформаций сплошных сред. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с.
- [138] Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. №2(8). С. 79-105.
- [139] Радаев Ю. Н. Точное усреднение тонкой структуры поврежденности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1999. №2(12). С. 71-96.
- [140] Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. О влиянии удаленной локализованной пластической зоны на раскрытие трещины нормального отрыва// Вестник Самарского гос. технического университета.²³⁶ 1999. Вып. 7, серия "Физико-математические науки". С. 70-85.

²³⁶Вестник Самарского гос. технического университета — регулярное научное издание Самарского государственного технического университета, которое доступно как в печатной, так и в электронной форме. Электронная версия журнала находится на сервере Самарского гос. технического университета по адресу: <http://www.star.sstu.samara.ru>

- [141] Радаев Ю. Н. Континуальные модели поврежденности твердых тел/ Диссертация на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Институт проблем механики РАН. М., 1999. 380 с.
- [142] Радаев Ю. Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1999. №4(14). С. 70-93.
- [143] Радаев Ю. Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №5. С. 27-45.
- [144] Радаев Ю. Н. О влиянии удаленной пластической зоны на раскрытие трещины нормального отрыва/ В сб.: Проблемы механики деформируемых тел и горных пород (под ред. А. Ю. Ишлинского). М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2001. С. 251-262.
- [145] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О вычислении нулевых Лагранжианов нелинейно упругого поля// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Специальный выпуск. 2002. С. 39-56.
- [146] Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. (Под ред. Г. Либовица). М.: Мир, 1975. 768 с.
- [147] Райнхарт Дж. С., Пирсон Дж. Поведение металлов при импульсивных нагрузках. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1958. 296 с.
- [148] Райс Дж. Математические методы в механике разрушения/ Разрушение (под ред. Г. Либовица). Т. 2. Математические основы теории разрушения. М.: Мир, 1975. С. 204-335.
- [149] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664 с.
- [150] Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
- [151] Салганик Р. Л. О хрупком разрушении склеенных тел// Прикл. матем. и механика. 1963. Т. 27. Вып. 5. С. 957-962.
- [152] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Л.: Наука. 1972. 440 с.
- [153] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. II. М.: Наука, 1994. 560 с.
- [154] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. М.: Факториал, 1997. 464 с.
- [155] Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.²³⁷
- [156] Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний/ В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.: ОНТИ, 1937.
- [157] Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 442 с.
- [158] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.²³⁸
- [159] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.

²³⁷См. также первое издание: Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.

²³⁸Это последнее третье издание; второе издание: Соколовский В. В. Теория пластичности. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 396 с.

- [160] Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. Т. 1, 2. (Под ред. Ю. Мураками) М.: Мир, 1990. 448 с., 1016 с.
- [161] Степанова Л. В. О трещинах в нелинейно вязкой среде/ Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. НИИ механики МГУ. М., 1995. 131 с.
- [162] Толоконников Л. А., Пеньков В. Б. Метод граничных представлений в двумерных задачах механики. Тула: Изд-во ТВАИУ, 1997. 378 с.
- [163] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
- [164] Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 300 с.
- [165] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- [166] Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. Ленингр. отд., 1967. 402 с.
- [167] Фешпль А., Фешпль Л. Сила и деформация. Т. I. М., Л.: Гостехтеориздат, 1938. 420 с.
- [168] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
- [169] Фрохт М. М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. I. М., Л.: Гостехтеориздат, 1948. 432 с.²³⁹
- [170] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах// Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41-56.
- [171] Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
- [172] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с.
- [173] Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.
- [174] Черепанов Г. П. О распространении трещин в сплошной среде// Прикл. матем. и механика. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476-488.
- [175] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [176] Черепанов Г. П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. М.: Недра, 1987. 308 с.
- [177] Шварц Л. Анализ. Т. II. М.: Мир, 1972. 528 с.
- [178] Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов/ В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980, С. 3-104.
- [179] Шестериков С. А., Степанова Л. В. Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины для дробно-линейного закона ползучести// Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. №1. С. 96-103.
- [180] Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1984. №1. С. 86-91.
- [181] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Л.: Гостехтеориздат, 1949. 272 с.

²³⁹См. также оригинальное издание на английском языке [232].

- [182] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [183] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. I. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. 700 с.
- [184] Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 247 с.
- [185] Astafjev V. I., Shesterickov S. A., Stepanova L. V. Crack tip asymptotic character of anti-plane stress and strain rate for linear-fractional constitutive relations// Theor. and Appl. Fracture Mech. 1996. V. 24. No. 3. P. 263-268.
- [186] Atkinson C., Eshelby J. D. The flow of energy into the tip of a moving crack// Int. J. Fracture Mechanics. 1968. V. 4. No. 1. P. 3-18.
- [187] Atluri S. N., Nishioka T. Path-independent integrals, energy release rates and general solutions of near-tip fields in mixed mode dynamic fracture mechanics// Engn. Fracture Mechanics. 1983. V. 18. P. 1-22.
- [188] Atkinson C., Craster R. V. Invariant Integrals, Stress Concentrations and Energy Release Rates/ In: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G. P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 476-493.
- [189] Bassani J. L. Creep Crack Extension by Grain-Boundary Cavitation/ In: Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures. Swansea: Pineridge Press, 1981. P. 329-344.
- [190] Bessel-Hagen E. Uber die Erhaltungssatze der Elektrodynamik// Math. Ann. 1921. V. 84. P. 258-276.
- [191] Betten J. Damage tensors in continuum mechanics// J. de Mecanique Theorique et Appliquee. 1983. V. 2. No. 1. P. 13-32.
- [192] Bilby B. A., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: A new application of the methods of non-Riemannian geometry// Proc. Roy. Society. 1955. Ser. A. V. 231. P. 263.
- [193] Bilby B. A., Cottrell A. H., Swinden K. H. The spread of plastic yield from a notch// Proc. Roy. Society. 1963. Ser. A. V. 272. P. 272-304.
- [194] Broek D. Elementary Engineering Fracture Mechanics. Leyden: Nordhoff Int. Publishing, 1974. 408 pp.²⁴⁰
- [195] Bui H. D. Mecanique de la Rupture Fragile. Paris: Masson, 1978. 216 pp.
- [196] Bui H. D. Dualite entre les integrales independantes du contour dans la theorie des solides fissures// C. R. Acad. Sci. Paris. 1973. V. 276A. P. 1425-1428.
- [197] Bui H. D. Dual path independent integrals in the boundary value problems of cracks// Engn. Fracture Mech. 1974. V. 6. P. 287.
- [198] Bui H. D. A Path-Independent Integral for Mixed Modes of Fracture in Linear Thermoelasticity/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 597-604.
- [199] Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicist. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. 355 pp.

²⁴⁰См. русский перевод [26].

- [200] Chaboche J. L. Phenomenological aspects of continuum mechanics/ In: Theor. and Applied Mechanics. Eds. P. German, M. Pian, D. Gailleri. London: Elsevier Applied Science Publishers, 1989. P. 41-56.
- [201] Cherepanov G. P. Cracks in solids// Int. J. Solids Structures. 1968. V. 4. P. 811-831.
- [202] Cherepanov G. P. Point Defects in Solids/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 605-623.
- [203] Chitaley A. D., McClintock F. A. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear// J. Mech. and Phys. of Solids. 1971. V. 19. P. 147-163.
- [204] Christensen R. M. Theory of Viscoelasticity. New York, London: Academic Press, 1971. 246 pp.
- [205] Chun-Pok Leung, McDowell D. Inclusion of primary creep in the estimation of the C_t parameter// Int. J. of Fracture. 1990. V. 46. P. 81-104.
- [206] Cioclov P. Mecanica Ruperi Materialelor// Edition de l'Academie de la Republique Socialiste Roumaine, 1977.
- [207] Cocks A. C. F., Ashby M. F. The growth of dominant crack in a creeping material// Scr. Metall. 1982. V. 16. P. 109-114.
- [208] Cordebois J. P., Sidoroff F. Anisotropic damage in elasticity and plasticity// J. de Mecanique Theorique et Appliquee. 1982. Numero Special. P. 45-60.
- [209] Cottrell A. H. Dislocations and Plastic Flow in Crystals. Oxford: Clarendon Press, 1953. 224 pp.
- [210] Cottrell A. H. Theoretical aspects of radiation damage and brittle fracture in steel pressure vessels/ Special Report 691, Iron and Steel Institute, London, 1961. P. 281-296.
- [211] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. New York: Interscience Publishers, 1953. 562 pp.²⁴¹
- [212] Craggs J. W. Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions// Quart. J. Mech. Appl. Math. 1945. V. 7. No. 1. P. 35-31.
- [213] Curbishley I., Pilkington R., Lloyd G. J. Macroscopic creep crack growth in tipe 316 stainless steel. III. Application to linear and nonlinear elastic fracture mechanics// Engineering Fracture Mechanics. 1986. V. 23. No. 2. P. 401-422.
- [214] Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits// J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. No. 2. P. 100-104.
- [215] Ehlers R., Riedel H. A Finite Element Analysis of Creep Deformation in a Specimen Containing a Macroscopic Crack/ In: Advances in Fracture Research. Oxford, New York: Pergamon Press, 1980. V.2. P. 691-698.
- [216] Ehrlacher A. Path-independent Integral for the Calculation of the Energy-release Rate in Elastodynamics/ In: Advances in Fracture Research. CFA Paris, Fracture 81, 1981. Ed. D. Francois. V. 5. P. 2187-2194.
- [217] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol. I, II, Vol. III. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1953, 1955. 302 pp., 396 pp., 292 pp.

²⁴¹Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 528 с.

- [218] Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear// Trans. ASME. J. of Basic Engineering. 1963. V. 85D. P. 519-527.
- [219] Ericksen J. L. Singular surfaces in plasticity// J. Math. Physics. 1955. V. 34. No. 1. P. 74-79.
- [220] Ericksen J. L. Tensor Fields/ In: Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 794-858.
- [221] Eshelby J. D. The Force on an Elastic Singularity// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1951. V. A244. P. 87-112.²⁴²
- [222] Eshelby J. D. The Continuum Theory of Lattice Defects/ In: Prog. Solid States Physics. Ed. F. Seitz and D. Turnbull. V. 3. New York: Academic Press, 1956. P. 79-114.
- [223] Eshelby J. D. The Determination of the Elastic Field of an Elliptical Inclusion, and Related Problems// Proc. Roy. Soc. 1957. V. A241. P. 376-396.
- [224] Eshelby J. D. The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion// Proc. Roy. Soc. 1959. V. A252. P. 561-569.
- [225] Eshelby J. D. Elastic Inclusions and Inhomogeneities/ In: Progress in Solid Mechanics. V. 2. Eds. I. N. Sneddon and R. Hill. Amsterdam: North-Holland, 1961. P. 89-140.
- [226] Fett T., Munz D. Stress Intensity factors and Weight Functions. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1997. 392 pp.
- [227] Fletcher D. C. Conservation laws in linear elastodynamics// Arch. Rat. Mech. Anal. 1976. V. 60. P. 329-353.
- [228] Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G.P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. 874 pp.
- [229] Freund L. B. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic body// J. Elasticity. 1972. V. 2. P. 341-349.
- [230] Freund L. B., Clifton R. J. On the uniqueness of plane elastodynamic solutions for running cracks// J. Elasticity. 1974. V. 4. No. 4. P. 293-299.
- [231] Freund L. B. Dynamic Fracture Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 564 pp.
- [232] Frocht M. M. Photoelasticity. Vol. I, II. New York: Wiley, 1949, 1948. 411 pp., 505 pp.
- [233] Gdoutos E. E. Fracture Mechanics Criteria and Application. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1990. 314 pp.
- [234] Gelfand I. M., Fomin S. V. Calculus of Variations. Englrwood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 232 pp.²⁴³
- [235] Goldman N. L., Hutchinson J. W. Fully plastic crack problems: The center-cracked strip under plane strain// Int. J. Solids Structures. 1975. V. 11. P. 575-591.
- [236] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series and Products. New York, London: Academic Press, 1965. 1086 pp.²⁴⁴

²⁴²См. также: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G. P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 2-29.

²⁴³См. оригинальное издание [31].

²⁴⁴См. также оригинальное издание на русском языке [35].

- [237] Green A. P. The Plastic Yielding of Notched Bars Due to Bending// Q. J. Mech. Appl. Maths. 1953. V. 6. P. 223.
- [238] Griffith A. A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1920. V. A221. P. 162-198.²⁴⁵
- [239] Griffith A. A. The Theory of Rupture// Proc. of First Int. Congress of Applied Mechanics. Delft, 1924. P. 55-63.
- [240] Grinfeld M. Thermodynamic methods in the theory of heterogeneous systems. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1991. 400 pp.²⁴⁶
- [241] Grover P., Saxena A. Creep crack growth in a power plant materials// Sadhana. 1995. V. 20, Part I, Feb. P. 53-85.
- [242] Gunter W. Uber einige Randintegrale der Elasto-Mechanik// Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 1962. H. 14. S. 53-72.
- [243] Hanh G. T., Rosenfield A. R. Local yielding and extension of crack under plane stress// Acta Met. 1969. V. 13. P. 292-306.
- [244] Hayhurst D. R. Creep rupture under multi-axial states of stress// J. Mech. and Phys. Solids. 1972. V. 20. P. 381-390.
- [245] Hayhurst D. R., Dimmer P. R., Morrison C. J. Development of continuum damage in creep rupture of the notched bars// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1984. A311. P. 103-129.
- [246] Hayhurst D. R., Brown P. R., Morrison C. J. The role of continuum damage in creep crack growth// Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1984. V. A311. P. 131-158.
- [247] Hayhurst D. R., Dimmer P. R., Chernuka M. W. Estimates of the creep rupture lifetime of structures using finite element method// J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 335-355.
- [248] He M. Y., Hutchinson J. W. The penny-shaped crack and the plane strain crack in an infinite body of a power-law material// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. P. 830-840.
- [249] Heady R. B. Evaluation of Sulfide Corrosion Cracking Resistance in Low Alloy Steels// Corrosion. 1977, No. 3. V. 33. P. 98-107.
- [250] Hui C. Y., Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions// Int. J. of Fracture. 1981. V. 17. P. 409-425.
- [251] Hui C. Y. The mechanics of self-similar crack growth in an elastic power-law creeping material// Int. J. Solids Structures. 1986. V. 22. No. 4. P. 357-372.
- [252] Hult J. A. H., McClintock F. A. Elastic-plastic stress and strains distribution around sharp notches under repeated shear// Proc. 9th Int. Congress on Applied Mechanics. 1956. V. 8. P. 51-58.
- [253] Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13-31.
- [254] Hutchinson J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 337-347.
- [255] Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners// Trans. Institute of Naval Architects. 1913. V. 55. P. 219-241.

²⁴⁵См. также: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G. P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 452-475.

²⁴⁶См. оригинальное издание [37].

- [256] Irwin G. R. Analysis of Stress and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 361-364. ²⁴⁷
- [257] Irwin G. R. Fracture/ In: Springer Encyclopedia of Physics. V. 6. 1958. P. 551-590.
- [258] Irwin G. R. Plastic zone near a crack tip and fracture toughness/ Proc. of the Seventh Sagamore Ordnance Conference. 1960. P. IV63-IV78.
- [259] Irwin G. R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control// Engn. Fracture Mechanics. 1968. V. 1. P. 241-257.
- [260] Janson J. Dugdale-crack in a material with continuous damage formation// Engn. Fracture Mechanics. 1977. V. 9. P. 891-899.
- [261] Jenne W. Raumliche Spannungsverteilungen in festen Korpern bei plastischer Deformation// ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18-44.
- [262] Kachanov L. M. Foundations of the Theory of Plasticity. Amsterdam, London: North-Holland, 1971. 482 pp. ²⁴⁸
- [263] Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135 pp.
- [264] Kim K. S., Van Stone R. H. Time-dependent crack growth characterisation using rate integrals// Int. J. of Fracture. 1995. V. 70. P. 167-181.
- [265] Knowles J. K., Sternberg E. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics// Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44. P. 187-211.
- [266] Kondo K. Non-holonomic geometry of plasticity and yielding/ In: Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry (ed. K. Kondo). Tokyo Gakujutsu Bunkei Fukyukai, 1955. V. 1. P. 453.
- [267] Kostrov B. V., Nikitin L. V. The elasto-plastic crack under longitudinal shear// Geophys. J. R. astr. Soc. 1967. V. 14. P. 101-112.
- [268] Kostrov B. V., Nikitin L. V. Some general problems of mechanics of brittle fracture// Archiwum Mechaniki Stosowanej. 1970. V. 22. P. 749-776.
- [269] Krajcinovic D. Damage Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1996. 762 pp.
- [270] Kubo S., Ohji K., Ogura K. An analysis of creep crack propagation on the basis of the plastic singular stress field// Engn. Fracture Mechanics. 1979. V. 11. P. 315-329.
- [271] Kumar V., German M. D., Shih C. F. An engineering approach for elastic-plastic fracture analysis// Report NP-1931 on Project 1237-1 for Electric Power Research Institute. Palo Alto, California, 1981.
- [272] Landes J. D., Begley J. A. A fracture mechanics approach to creep crack growth/ In: Mechanics of Crack Growth. ASTM STP 590. 1976. P. 128-148.
- [273] Lardner R. W. Mathematical Theory of Dislocations and Fracture. Toronto: University of Toronto Press, 1974. 364 pp.
- [274] Lee S. B., Lu M., Kim J. Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage – Part II. Large damage region very near the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V. 34. No. 10. P. 1183-1197.

²⁴⁷См. также: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G.P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 30-40.

²⁴⁸См. оригинальное издание [62].

- [275] Lee S. B., Lu M., Kim J. Y. An asymptotic analysis of a tensile crack in creeping solids coupled with cumulative damage – Part I. Small damage region around the crack tip// Int. J. Solids Structures. 1997. V. 34. No. 24. P. 3163-3178.
- [276] Lekhnitskii S. G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. San-Francisco: Holden-Day, 1963. 404 pp.²⁴⁹
- [277] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 210 pp.
- [278] Lippman H. Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation// J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 2. P. 111-122.
- [279] Lippman H. Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow// J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 1. P. 29-39.
- [280] Love A. E. H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York: Dover Publications, 1944. 643 pp.
- [281] Lu T. J., Chow C. L. On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage// Theor. and Appl. Fracture Mech. V. 14. 1990. P. 187-218.
- [282] Malvern L. Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice – Hall, 1969. 714 pp.
- [283] Maugin G. A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 350 pp.
- [284] Maugin G. A. Material Inhomogeneities in Elasticity. London: Chapman & Hall, 1993. 276 pp.
- [285] Maugin G. A. Material forces: Concepts and applications// Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48. P. 213-245.
- [286] Maugin G. A. Thermomechanics of inhomogeneous-heterogeneous systems: application to irreversible progress of two- and three-dimensional defects// ARI. 1997. V. 50. P. 41-56.
- [287] Maugin G. A. On shock waves and phase-transition fronts in continua// ARI. 1998. V. 50. 50:P. 141-150.
- [288] Maugin G. A. Variations on a Theme of A. A. Griffith/ In: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G. P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 494-509.
- [289] Moriguti S. Fundamental theory of dislocations of elastic bodies// Oyo Sugaku Rikigaku. 1947. V. 1. P. 87-90.
- [290] Mou Y., Han R. P. S. Damage zones based on Dugdale model for materials// Int. J. of Fracture. 1995. V. 68. P. 245.
- [291] Mou Y., Han R. P. S. Damage zones in strain-hardening materials// Mech. Materials. 1996. V. 2. P. 131-147.
- [292] Murakami S., Ohno N. A Continuum Theory of Creep and Creep Damage/ In: Creep in Structures. Eds. A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 422-444.
- [293] Murakami S. Anisotropic Aspects of Material Damage and Application of Continuum Damage Mechanics/ In: Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications. Eds. D. Krajcinovic and J. Lemaitre. Wien: Springer-Verlag, 1987. P. 91-133.

²⁴⁹См. второе издание оригинального источника [84].

- [294] Murakami S. Mechanical modeling of material damage// J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 2. P. 280-286.
- [295] Nishioka T. On the Dynamic J Integral in Dynamic Fracture Mechanics/ In: Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Ed. by G. P. Cherepanov. Malabar, Florida: Krieger Publishing Company, 1998. P. 575-617.
- [296] Noether E. Invariante Variationsprobleme// Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Gottingen. Math.-Physik. Kl. 2. 1918. S. 235-257.²⁵⁰
- [297] Olver P. J. Conservation laws in elasticity I. General results// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 119-129.
- [298] Olver P. J. Conservation laws in elasticity II. Linear homogeneous isotropic elastostatics// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 131-160.
- [299] Olver P. J. Symmetry Groups and Path-Independent Integrals/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 57-71.
- [300] Olver P. J. Application of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1986.²⁵¹
- [301] Orowan E. Fundamentals of brittle behaviour of metals/ In: Fatigue and Fracture of Metals. New York: Wiley, 1952. P. 139-167.
- [302] Pan J., Shih C. F. Plane-strain crack-tip fields for power-law hardening orthotropic materials// Mechanics of Materials. 1986. V. 5. P. 299-316.
- [303] Piola G. Nuovo analisi per tutti le questioni della meccanica molecolare// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1835. V. 21. P. 155-321.
- [304] Piola G. Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono considerati secondo la naturale loro forma e costituta// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1848. V. 24(1). P. 1-186.
- [305] Radayev Y. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics// Trans. Japan Soc. Mech. Engn. 1994. V. 60A. No. 580. P. 68-76.
- [306] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State// J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. V. 21. No. 2. P. 129-152.
- [307] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part II. Canonical Damage Growth Rate Equations and Theory of Damage Invariants// J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. V. 21. No. 3. P. 197-222.
- [308] Radayev Y. N. On the Crack Opening Displacement in a Cracked Sheet After a Loading-Unloading Cycle/ Proc. 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics. Shanghai: Shanghai University Press, 1998. P. 347-352.
- [309] Radayev Y. N. Constitutive Models of Anisotropic Damage Growth and Modeling of Damaging Processes in Solids/ Proc. 1st Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics, Victoria, B. C., Canada, June 16-20, 1999. V. 1. P. 294-303.

²⁵⁰Имеется русский перевод: Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи/ В сб.: Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611-630.

²⁵¹Имеется русский перевод этой книги [111].

- [310] Radayev Y. N., Stepanova L. V. On the Effect of the Residual Stresses on the Crack Opening Displacement in a Cracked Sheet// Int. J. of Fracture. 2001. V. 107. No. 4. P. 329-360.
- [311] Radok J. R. M. On the solution of problems of dynamic plane elasticity// Q. Appl. Math. 1956. V. 14. P. 289-298.
- [312] Rice J. R. Stress due to a sharp notch in a workhardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear// Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech. 1967. V. 34. P. 287-298.
- [313] Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1968. No. 35. P. 379-386.
- [314] Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material// J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1-12.
- [315] Rice J. R., Sorensen E. P. Continuing crack-tip deformation and fracture for plane-strain crack growth in elastic-plastic solids// J. Mech. Phys. Solids. 1978. No. 26. P. 163-186.
- [316] Rice J. R. Conserved Integrals and Energetic Forces/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 33-56.
- [317] Riedel H., Rice J. R. Tensile crack in creeping solids/ Division of Engineering, Brown University Tech. Report E(11-1)3084/64, Feb. 1979.
- [318] Riedel H., Rice J. R. Tensile crack in creeping solids/ In: Fracture Mechanics. Twelfth Conference ASTM STP 700. 1980. P. 112-130.
- [319] Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the growth and coalescence of microvoids/ In: Creep in Structures. Berlin: Springer, 1981. P. 504-519.
- [320] Riedel H. Creep deformation at crack tips in elastic-viscoplastic solids// J. Mech. Phys. Solids. 1981. V. 29. P. 35-49.
- [321] Riedel H. A Continuum Damage Approach to Creep Crack Growth/ In: Fundamentals of Deformation and Fracture. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2-5 April, 1984. Eds. B. A. Bilby et al. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 293-309.
- [322] Riedel H. Fracture at High Temperature. Berlin: Springer, 1987. 418 pp.
- [323] Riedel H., Detamel V. Creep crack growth in ductile, creep-resistant steels// Int. J. of Fracture. 1987. V. 33. P. 239-262.
- [324] Sanders J. L. On the Griffith-Irwin fracture theory// ASME. J. Appl. Mech. 1960. V. 27. P. 352-353.
- [325] Saxena A., Han J. Evaluation of crack-tip parameters for characterizing crack growth behavior in creep materials/ ASTM Task Group Report. Georgia Institute of Technology, 1986.
- [326] Saxena A. Creep-fatigue crack growth in power-plant materials and components// Advances in Fracture Research. ICF 9. Sydney, Australia, 1997, P. 51-62.
- [327] Shield R. T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry// Proc. Roy. Soc., London. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.²⁵²

²⁵²Имеется русский перевод: Шилд Р. Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии// Сб. переводов "Механика". 1957. №1. С. 102-122.

- [328] Sidoroff F. Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity/ In: Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids (No. 295 Comportement Mechanique Des Solides Anisotropes). Ed. J. -P. Boehler. Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1979.
- [329] Silhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997. 506 pp.
- [330] Solomon L. Elasticite Lineaire. Masson: Paris, 1968. 742 pp.
- [331] Sternberg E., Sadowsky M. A. Stress Concentration around a Triaxial Ellipsoidal Cavity// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1949. V. 16. No. 2. P. 149.
- [332] Tai W. H. Plastic damage and ductile fracture in mild steels// Engn. Fracture Mechanics. 1990. V. 37. P. 853.
- [333] Theocaris P.S., Gdoutos E. E. The modified Dugdale–Barenblatt model adapted to various configurations in metals// Int. J. of Fracture. 1964. V. 10. No. 4. P. 549-564.
- [334] Thomas T. Y. On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations// J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. No. 3. P. 343-357.
- [335] Thomas T. Y. Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity// J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. No. 2. P. 339-381.
- [336] Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories/ Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226-793.
- [337] Voyiadjis G. Z., Park T. Anisotropic damage effect tensors for the symmetrization of the effective stress tensor// Trans. of the ASME. J. Applied Mechanics. 1997. V. 64. P. 106-110.
- [338] Wang T., Kishimoto K. Higher order fields for damaged nonlinear antiplane shear notch, crack and inclusion problems// Eng. J. Mech. A/Solids. 1999. No.18. P. 963-986.
- [339] Washizu K. A note on the conditions of compatibility// J. Math. Phys. 1958. V. 36. P. 306-312.
- [340] Wells A. A. Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture/ Symposium on Crack Propagation. V. 1. College of Aeronautics, Cranfield, England, 1961. P. 210-230.
- [341] Wells A. A. Application of fracture mechanics at beyond general yielding// British Welding J. Nov. 1963. P. 563-570.
- [342] Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack// Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1975. V. 24. P. 109-114.
- [343] Zhao Jun, Zhang Xing. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics// Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. No. 1. P. 131-141.

Предметный указатель

- Г-символы, 457
θ-функции, 486
абсолютная температура, 104
антиплоский сдвиг, 56, 58
асимптотика
 Хатчинсона—Райса—Розенгрена (J.W.Hutchinson, J.R.Rice, G.F.Rosengren), 186, 304, 346, 347
 Хьюи—Риделя (C.Y.Hui, H.Riedel), 359
 дальнего поля, 48
 динамического упругого поля, 83
 напряжений у края разреза, 62
 напряжений у вершины трещины
 типа I, 59
 напряжений у вершины трещины
 типа III, 59
 перемещений у края разреза, 62
 перемещений у вершины трещины
 типа I, 59
автомодельная переменная, 406, 407
автомодельность, 349, 404
число
 Эйлера (L.Euler), 486
 Маха (E.Mach), 85, 173
 характеристическое, 60
 собственное, 307, 310
дефект
 дискообразный, 41
 эллипсоидальный, 37
 иглообразный, 41
 точечный, 52
деформационная теория пластичности, 195
деформация
 нелинейно вязкая, 342
 пластическая, 187
 ползучести, 342
динамический коэффициент интенсивности напряжений, 81, 82, 180
дислокация, 289
 Вольтерра (V.Volterra), 290
 краевая, 289
 винтовая, 290
диссипация энергии, 88
дивергенция, 522
догружение, 191
 активное, 192
 нейтральное, 192
долговечность, 21
дополнительная потенциальная энергия, 185
двойное скалярное умножение, 521
двойственность представления деформации, 102, 141
естественные
 направления у края разреза, 62
 уравнения края разреза, 62
эффект Баушингера (B.Bauschinger), 187
эффективная площадь, 418
энергетический критерий разрушения, 87
энергия
 дополнительная потенциальная, 185
 кинетическая, 104
 полная, 104
 потенциальная упругого тела, 91
 поверхностная, 93
 скрытая свободная, 251
 свободная, 104
 упругая формоизменения, 190
 упругая объемной деформации, 190
 внутренняя, 104
 взаимодействия эллипсоидальных полостей, 52
 взаимодействия сферических вырезов, 53
 взаимодействия точечных дефектов, 52
энтропия, 103
фиктивная дисторсия, 428
физические полевые величины, 124
физический импульс, 103, 117
формула
 Гурса (E.Goursat), 55
 Сомильяны (C.Somigliana), 47
функции Якоби (K.Jacobi), 485
функционал действия, 116, 124
функция
 Бесселя (F.W.Bessel), 249
 Гамильтона (W.R.Hamilton), 138
 Грина для круга, 76
 Лагранжа (J.L.Lagrange), 104
 Римана (B.Riemann), 249
 нагружения, 191
 напряжений Эри (G.B.Airy), 55, 306
 напряжений при кручении, 74
 производящая, 244
 текучести, 191
 упрочнения, 193
главные
 фиктивные удлинения, 435
 инварианты тензора напряжений, 188
 оси поврежденности, 433
 поврежденности, 433
глобальная диссипация энергии, 111
глобальный баланс

- энергии, 111
- импульса, 107, 111
- градиент, 522
- градиент деформации, 102, 145, 427
- граничное представление
 - напряжений, 48
 - перемещений, 47
- граничное условие
 - естественное, 117
 - на берегах трещины, 60
- группа
 - Лоренца (H.A.Lorentz), 139
 - инвариантности действия, 135
 - инвариантности действия обобщенная, 149
 - инвариантности функционала действия, 127
 - малых вращений пространства-времени, 138
 - преобразований изменения масштаба, 122
 - преобразований малого поворота, 122
 - преобразований обобщенная, 141, 142, 149
 - трансляций пространства-времени, 135
 - трансляций пространства, 121
- характеристические
 - числа, 60
 - переменные, 245
- инкубационный период, 356
- интегралы
 - эллиптические, 485
 - эллиптические полные, 485
- интегралы Генки (H.Hencky), 203, 456
- интенсивность напряжений, 345
- инвариантные интегралы, 123
- инвариантный
 - элемент объема, 125
 - интеграл $C(t)$, 347, 348
 - интеграл C^* , 182, 344–348, 351, 368, 373
 - интеграл G_k , 178
 - интеграл I_n , 186, 309
 - интеграл J , 176
 - интеграл J'_k , 179
 - интеграл J_k^* , 176
 - интеграл J_s , 121
 - интеграл L_j , 122
 - интеграл M , 123
 - интеграл Γ , 170
 - интеграл \tilde{J}_k , 176
 - интеграл I , 184
- инвариантный J -интеграл Эшелби—Черепанова—Райса, 91, 114, 168
- изоклины, 32
- изостата, 453
- изостатические траектории, 32
- канонический
 - импульс, 105
 - инвариант, 452
- каноническое уравнения
 - баланса энергии, 105
 - баланса импульса, 105, 137
- коэффициент
 - интенсивности напряжений K_I , 51
 - интенсивности напряжений, 58, 64
 - интенсивности напряжений K_{III} , 67
 - интенсивности напряжений динамический, 82
- концентрации напряжений, 30
- комплексное представление
 - Галина, 84
 - антиплоского сдвига, 56
 - функции напряжений, 55
 - напряжений, 56
 - перемещений, 56
 - в полярной системе координат, 60
- концентрация напряжений, 29
- конфигурационная сила, 109
- конфигурация
 - актуальная, 102
 - эквивалентная, 428
 - отсчетная, 102
- координаты
 - Эйлера (L.Euler), 126
 - Лагранжа (J.L.Lagrange), 124
 - естественные, 62
 - эллиптические, 32
 - изостатические, 453
- краевая задача
 - двухточечная, 310
 - математической теории пластичности, 195
 - со свободной границей, 324
 - связанная (ползучесть—поврежденность), 386
 - связанная (упругость—поврежденность), 386
- крест Гиббса (G.W.Gibbs), 155
- критерий
 - хрупкого разрушения Гриффитса (A.A.Griffith), 87, 91, 97
 - критического раскрытия трещины, 181
 - максимальных нормальных напряжений, 78
 - расслоенности векторного поля, 447
 - разрушения энергетический, 87
 - разрушения силовой, 97
 - текучести, 188
 - текучести Мизеса (R.von Mises), 189
 - текучести Треска (H.Tresca), 189, 442
- кривизна края трещины, 62
- кручение края трещины, 62
- крутка, 74
- квасихрупкое разрушение, 99
- лагранжиан
 - пустого пространства, 151
 - упругого тела, 116, 119
- линия
 - дислокации, 290
 - скольжения, 190
- локализация
 - двухзонная пластических деформаций, 251, 257, 263
 - поврежденности, 386
- локально стационарное поле, 81, 178
- лучистое тепло, 103
- маломасштабное пластическое течение, 175, 328
- материальный вектор
 - Умова—Пойнтинга (J.H.Poynting), 106
 - потока энергии, 105
 - потока энтропии, 103
 - потока тепла, 104
- метод
 - Эшелби (J.D.Eshelby), 37

- Ньютона, 311
 Римана (B.Riemann), 249
 Рунге—Кутта (C.Runge, W.Kutta), 312
 фотоупругости, 32
 годографа Нейбера—Райса (H.Neuber, J.R.Rice), 324
 интегральных преобразований, 54
 комплексных потенциалов, 55
 множителей Лагранжа (J.L.Lagrange), 118
 пошагового догружения, 196
 пристрелки, 310
 разложения по собственным функциям, 60, 365, 375
 сингулярных интегральных уравнений, 55
 микронапряжения, 466
 микротвердость, 424
 множитель неопределенный теории пластичности, 194
 модель
 Билби—Коттрелла—Свиндена (B.A.Bilby, A.H.Cottrell, K.H.Swinden), 301
 Леонова—Панасюка—Дагдейла (D.S.Dugdale), 250
 Прандтля—Рейсса (L.Prandtl, A.Reuss), 194
 диффузионного пластического течения, 234
 накопление повреждений, 386
 напряжение
 эффективное, 422
 эквивалентное, 391
 местное, 29
 нетто, 348
 напряжения
 дальнего поля, 32
 номинальные, 32
 остаточные, 259
 неполные эллиптические интегралы Лежандра, 40
 нулевой Лагранжиан, 151
 объем трещины, 49
 объемная плотность
 энергии деформации, 91, 116, 119
 область
 K_I -доминантная, 404
 микроветвления, 397
 односвязная, 152
 полностью поврежденного материала, 390
 полностью разрушенного материала, 397, 405
 звездообразная, 152
 обратный градиент деформации, 102
 октаэдрическое касательное напряжение, 189
 оператор
 Эйлера (L.Euler), 129
 Лапласа (P.S.Laplace), 55, 80
 Лапласа в полярной системе координат, 306
 псевдоединичный, 138
 псевдоортогональный, 138
 оператор Гамильтона (W.R.Hamilton)
 отсчетный, 522
 пространственный, 522
 описание
 обратное, 126
 прямое, 126
 описание деформации
 обратное, 102, 141
 прямое, 102
 параболическое вырождение, 235
 параметр
 истории нагружения, 191
 нагружения, 191
 поврежденности, 386, 422
 сплошности, 387
 параметры
 Ламе (G.Lame), 243
 натуральные, 453
 переменная состояния
 скрытая, 104
 внутренняя, 104
 перемещения
 обобщенные, 95
 остаточные, 260
 возможные, 95
 первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа (G.Piola, G.Kirchhoff), 103
 пластическое уxo, 228
 пластичность, 186
 идеальная, 191
 локализованная, 186
 плоская деформация, 55
 плоское напряженное состояние, 55
 площадка скольжения, 190
 плотность
 Лагранжиана, 117, 120
 поверхностной энергии, 93, 94
 полная энергия поля, 138
 полный 4-импульс поля, 138
 полоса
 Людерса (Luders), 212
 пластического скольжения, 212
 ползучесть, 342
 локализованная, 356
 маломасштабная, 351, 356
 неустановившаяся, 342
 развитая, 356
 ускоренная, 342
 установившаяся, 342
 поправка Ирвина (G.R.Irwin), 218
 постоянная плоской теории упругости, 59
 постулат о нейтральном нагружении, 192
 потенциал
 Ньютонов эллипсоида, 38
 бигармонический эллипсоида, 38
 дополнительной работы, 184
 поперечных волн, 80
 продольных волн, 80
 потенциалы
 Галина, 86
 Колосова—Мусхелишвили, 56
 потенциальная энергия упругого тела, 91, 169
 поверхностные волны Рэлея (Rayleigh), 173
 поверхность нагружения, 191
 поврежденность, 418
 анизотропная, 423
 ориентационная, 424
 в локализованной зоне, 252, 253

- правый тензор деформации Коши—Грина (A.L.Cauchy, G.Green), 105
- предел текучести, 188
 - при чистом сдвиге, 189
 - при растяжении, 189
- предельная нагрузка, 201
- предельное равновесие, 201
- представление
 - Галина, 84
 - Колосова—Мухелишвили, 65, 254, 478
- представление деформации
 - обратное, 102
 - прямое, 102
- преобразование
 - Ампера (A.Ampere), 475
 - Лежандра (A.M.Legendre), 244, 475
 - каноническое, 244
 - обобщенное, 145
- преобразования Лоренца (H.A.Lorentz), 132
- принцип Гамильтона (W.R.Hamilton), 127
- признак
 - активного нагружения, 192
 - нейтрального нагружения, 192
 - разгрузки, 192
- прочность, 20
- продольный сдвиг, 58
- производная
 - контравариантная, 522
 - ковариантная, 522
 - локальная по времени, 523
 - материальная по времени, 523
 - по направлению изостаты, 454
 - явная по времени, 524
- производство энтропии, 103
 - внешнее, 103
 - внутреннее, 103
- простая волна, 211, 235
- пространственно-временные координаты, 124
- пространственно-временное многообразие, 124
- пространство Минковского (H.Minkowski), 126
- псевдоимпульс, 105
- раскрытие трещины, 295
 - при двухзонной локализации, 280
 - типа III, 300
 - типа II, 299
 - типа I, 295
- разгрузка, 192
- разложение
 - полярное Коши (A.L.Cauchy), 431
 - спектральное, 433
- разрушение
 - длительное, 20
 - хрупкое, 20
 - пластическое, 20, 201
 - усталостное, 20
- ребро призмы Треска (H.Tresca), 445
- репер Френе, 62
- решение
 - Кирша (G.Kirsch), 31
 - Колосова—Инглиса (C.E.Inglis), 33
 - Леона (A.Leon), 35
 - полное, 197, 202
 - смешанной задачи для полуплоскости, 66
- рост трещины
 - динамический, 78
 - неустановившийся, 87
 - неустойчивый, 93
 - усталостный, 397
 - установившийся, 358
 - устойчивый, 93
- ротор (вихрь), 522
- схема
 - Баренблатта, 252
 - Ирвина (G.R.Irwin), 216
 - Леонова—Панасюка—Дагдейла (D.S.Dugdale), 216, 250, 478
 - диффузионного пластического течения, 234
- сила
 - Эшелби (J.D.Eshelby), 106
 - действующая на дефект, 44, 169, 183
 - конфигурационная, 43, 44
 - обобщенная, 95
 - трещиновдвижущая, 95, 97
- силовой критерий Ирвина (G.R.Irwin), 97
- символ
 - Кroneкера (δ -символ), 525
 - дискриминантный (ϵ -символ), 525
- символы
 - Кристоффеля (E.B.Christoffel), 447, 525
- скорость
 - Эйлера (L.Euler), 103
 - материальная, 103
 - освобождения потенциальной энергии, 94, 169, 174
 - освобождения упругой энергии, 92
 - поперечной волны, 80
 - поверхностных волн Рэлея (Rayleigh), 84, 173
 - продольной волны, 80
 - раскрытия вершины трещины, 348
 - распространения поверхности, 108
 - совершения работы внешними силами, 88
 - совершения работы внутренними силами, 88
- след тензора второго ранга, 521
- смешанная задача для полуплоскости, 479
- собственные значения, 60
- соотношения
 - Гейрингера (H.Geiringer), 204
 - Коши (A.L.Cauchy), 493
 - Леви (M.Levy), 242
 - деривационные, 490, 491
 - неголономные теории пластичности, 193
 - полные теории пластичности, 193
- свертка полная тензоров второго ранга, 521
- тензор
 - Кельвина—Сомиглианы (Kelvin, C.Somigliana), 45
 - Римана—Кристоффеля (B.Riemann, E.B.Christoffel), 428, 526
 - деформации, 119
 - деформации Фингера (J.Finger), 432
 - дискриминантный (ϵ -тензор), 525
 - единичный, 103
 - эффективных напряжений, 438
 - энергии—импульса, 105, 121, 137

- момента количества движения, 139, 140
- начальной жесткости, 397
- напряжений, 117
- плотности дислокаций, 528
- поврежденности, 430
- расхождения Кренера (E.Krener), 466, 528
- упругих модулей, 51
- тензор напряжений
 - Эшелби (J.D.Eshelby), 105, 121, 137, 145, 150, 169
 - Коши (A.L.Cauchy), 103
 - Пиола—Кирхгофа (G.Piola, G.Kirchhoff), 145, 150
- теорема
 - Гурса (E.Goursat), 55
 - Хилла (R.Hill), 228
 - Клапейрона (B.P.E.Clapeyron), 170
 - Нансона, 430
 - Нетер (E.Noether), 14, 132, 170
 - единственности Мелана (E.Melan), 196
- теплопроводность, 104
- термическая материальная сила, 106
- термодинамическая сила, 105
- термодинамический поток, 105
- тождество Гамильтона—Кэли (A.Cayley, W.R.Hamilton), 432
- трещина
 - антиплоского сдвига (типа III), 58
 - нормального отрыва (типа I), 58
 - поперечного сдвига (типа II), 58
 - равновесная, 93
 - смешанного типа, 98
- трещиноподвижная сила Ирвина (G.R.Irwin), 95
- трещиностойкость, 98
- три формы разрушения, 58
- твердость, 21
- упрочнение, 187
- упругий потенциал, 116
- упругопластическая вязкость разрушения, 175
- уравнение
 - Эйлера—Лагранжа (L.Euler, J.L.Lagrange), 120, 129, 133, 146, 148, 151
 - Монжа—Ампера (G.Monge, A.Ampere), 244
 - Пуассона (S.Poisson), 74
 - Рэля (Rayleigh), 84, 173
 - баланса энергии, 118
 - баланса энтропии, 103
 - баланса импульса, 103, 118
 - баланса массы, 103
 - баланса момента импульса, 118
 - бигармоническое, 55
 - движения, 117
 - характеристическое, 60
 - кинетическое Качанова—Работнова, 391
 - неразрывности дислокаций, 528
 - определяющее, 104
 - поверхности нагружения, 191
 - притока тепла, 104
 - телеграфное, 245
 - волновое, 80
- уравнения
 - Ламе (G.Lame), 453
 - Ламе—Максвелла (G.Lame, J.C. Maxwell), 455
 - Ламе—Максвелла (G.Lame, J.C. Maxwell), 490
 - Леви—Мизеса (M.Levy, R.Mises), 195
 - Прандтля—Рейсса (L.Prandtl, A.Reuss), 194
 - дериационные, 455
 - квазилинейные установившейся ползучести, 367
 - несовместности пластических деформаций, 528
 - определяющие деформационной теории, 195
 - определяющие теории течения, 194
 - равновесия в изостатических координатах, 453
 - совместности (сплошности) деформаций, 456, 528
 - связанные определяющие, 391
 - теории пластического плоского напряженного состояния, 204
 - теории плоской пластической деформации, 203
- условие
 - неустойчивого роста трещины, 93
 - полной пластичности Хаара—Кармана (A.Naam, Th.Karman), 442
 - устойчивого роста трещины, 93
- вариация
 - Лагранжиана, 120
 - частичная, 120, 130
 - действия, 129, 133, 143
 - элементарная, 143
 - элементарная Эйлера (L.Euler), 143
 - элементарная Лагранжева (J.L.Lagrange), 143
 - незакрепленная, 117
 - полная, 120, 130
 - стандартная, 140, 145
 - внешняя, 140, 146
 - внутренняя, 140, 148
 - закрепленная, 117
- вектор
 - эффективных напряжений, 437
 - материальной скорости, 103
 - напряжения, 47
 - скорости, 103
- вектор Бургерса (J.M.Burgers), 291
 - истинный, 293
 - локальный, 293
- векторное поле
 - расслоенное, 446
- ветвление трещины, 173
- виртуальный баланс действия, 117
- вязкость разрушения, 98
- ядро
 - Коши (A.L.Cauchy), 294
 - последствия, 344
- задача
 - Гильберта (D.Hilbert), 57
 - Римана (B.Riemann), 336
 - на собственные значения, 309
- закон
 - Людвика (P.Ludwick), 343
 - Нортон (F.H.Norton), 343
 - гиперболического синуса Надаи (A.Nadai), 343
 - наследственной упругости, 344
 - определяющий дробно-линейный, 340, 342
 - определяющий степенной, 305
 - ползучести деформационного типа, 343

- ползучести дробно-линейный, 342, 343
- ползучести наследственного типа, 343
- ползучести типа старения, 343
- ползучести типа течения, 344
- роста усталостной трещины Париса—Эрдогана (P.S.Paris, F.Erdogan), 404
- течения, 193
- течения ассоциированный, 193
- упругой разгрузки, 192
- закон(ы) сохранения
 - импульса, 103
 - канонические, 103, 105
 - классические, 103
 - массы, 103
- знаменатель Рэля (Rayleigh), 86, 177
- зона
 - Дагдейла (D.S.Dugdale), 181
 - концевая трещины, 424
 - локализации поврежденности, 386
 - остаточная пластическая, 259
 - полностью поврежденного материала, 389
- жесткость, 21
- ”естественная” плотность Лагранжиана, 125
- ”естественная” плотность Гамильтониана, 145

Non-Linear Fracture Mechanics

V.I. Astafiev, Y.N. Radayev, L.V. Stepanova

The book²⁵³ contains an in-depth study and a comprehensive presentation of the classical and recently developed concepts, methods and application of non-linear fracture mechanics.

The classical problems and script of the equations related to the linear fracture mechanics with the objective of establishing a reference framework of concepts, notations and terminology are given.

A wide range of topics and problems is discussed within the framework of non-linear fracture mechanics. Canonical conservation laws and configurational forces, elements of the field theory, the Noether theorem, basic and generalized invariant groups of the Hamiltonian action are studied.

Non-linear elasticity is considered from the physical viewpoint as a field theory. Field equations of finite-strain elasticity in their canonical forms are derived. In view of practical application to fracture, special attention is paid to the construction and immediate consequences of the canonical equations of energy and pseudomomentum balance, thus demonstrating the wealth of the framework, and allowing readily introduce Eshelby's stress tensor, the path-independent integral and Eshelby's force, acting on an elastic inhomogeneity. Then the field-theoretic concept is used in order to define the tensors of non-linear elasticity and reveal their natural co-ordinate representation. The variational formulation and Noether's theorem are chosen to derive conservation laws and additional path-independent integrals. Inverse-motion description granted by G.Piola and variational symmetries of the Hamiltonian action are shown to provide a true field theory of non-linear inhomogeneous elasticity. It should be noted that these problems are not usually reviewed in monographs and books on fracture. Nevertheless recent theoretical developments in fracture mechanics require they to be highlighted.

A set of new results related to application of the hodograph method and canonical transformation technique to analysis of the plastic flow localization, estimations of the effect of the distant plastic flow zone on the crack is given. Along with classical general scheme of the hodograph method for antiplane deformation of a crack in workhardening elastic-plastic solid, creep strain rate asymptotics near a mode III crack tip for linear-fractional constitutive law are studied.

Special attention is paid to cracks in creeping solids. Stress and strain asymptotics near a crack tip for stationary and growing cracks in elastic non-linear viscous media are presented. Along with traditional power law creeping solids, cracks in linear-fractional law creeping solids are analyzed by the eigenfunction method.

New results related to coupling between damage and creep revealing the effect of damage on stress-strain state near a crack tip are included. The self-similar solution of mode III crack problems in power-law creeping damaged solids is discussed. The damage parameter is introduced in the power stress-strain-rate constitutive relation made known by L.M.Kachanov and Y.N.Rabotnov. Thus, the coupled equations of creep–damage theory are derived.

The similarity variable has been proposed by H.Riedel for the case, but by now a general solution of the problem has not been constructed yet. The present contribution is an attempt to obtain stress, strain rate and damage distributions near a crack tip by means of the similarity variable under the assumption of the existence of a totally damaged zone near the crack tip. It is assumed that the totally damaged zone near the crack tip where the damage parameter reaches its critical value and all components of the stress tensor are equalled to zero exists. Geometry and characteristic length of the totally damaged zone, in fact, are not known and should be obtained as a part of the solution. Asymptotic solution for the stress and damage fields in the vicinity of the crack outside of the totally damaged zone (where the governing system of equations is surely not valid) are sought.

A series of examples is studied numerically. Characteristic length and geometry of the totally damaged zone for different values of the material constants are presented. Some new facts, such

²⁵³E-version is located at:

<http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/fracture.html>

as near crack tip stress and damage distributions, existence of the totally damaged zone, are thoroughly studied.

A general analysis of three-dimensional static and kinematic equations of the strain–damage coupled model for ductile deformation processes is presented in an attempt to find approaches for analytic study of the damage effect on the plastic flow. The damage is represented by a symmetric second-rank damage tensor. The modified by anisotropic damage effect Tresca yield criterion, associated flow and damage rules are used to formulate the strain–damage coupled constitutive equations, thus allowing to take account of effect of anisotropic damage on the plastic flow and vice versa. The separate analysis for the loading paths going along the facets and edges of the Tresca prism is given.

As a contribution to non-linear fracture mechanics the monograph gives an expedient framework for study of fracture and contains numerous results related to applied problems of fracture.

Contents

Chapter I. Introduction to Fracture Mechanics

I.1 Stress concentration

- I.1.1 Stress concentration at a circular hole in a plate under all-around tension
- I.1.2 Stress concentration at a circular hole in a plate under uniaxial tension
- I.1.3 Stress concentration at an elliptic hole in a plate under all-around tension
- I.1.4 Stress concentration at an elliptic hole in a plate under uniaxial tension
- I.1.5 Stress concentration at a nappe of spherical surface under uniaxial tension
- I.1.6 Stress concentration at a nappe of spherical surface under shear

I.2 Eshelby's method

- I.2.1 Tensor formalisation of Eshelby's method
- I.2.2 Needle-shaped and disk-shaped defects in elastic media
- I.2.3 Configurational force acting on a defect or elastic inhomogeneity

I.3 Boundary-integral representations of the linear elasticity

- I.3.1 The Kelvin–Somigliana tensor
- I.3.2 "Far field" asymptotics of singular elastic field

I.4 Some additions and generalizations

Chapter II. Fundamental Concepts and Equations of Fracture Mechanics

II.1 Elastic near crack tip stress and displacement fields

- II.1.1 Semi-infinite crack in elastic media. The Kolosoff–Muskhelishvili complex potential method
- II.1.2 Eigenfunction method for crack problems
- II.1.3 Asymptotics of three-dimensional displacement and stress fields near an edge of an arbitrary shape
- II.1.4 Stress intensity factors
- II.1.5 Some remarks and additional results

II.2 Dynamic crack propagation

- II.2.1 Basics of the dynamic elasticity
- II.2.2 Near crack tip stationary stress and displacement fields. Dynamic stress intensity factors
- II.2.3 Galin's complex representation of the near crack tip stationary elastic field
- II.2.4 Non-steady dynamic crack propagation

II.3 Fracture criteria

- II.3.1 Griffith's energy brittle fracture criterion. Energy release

rate and Irwin's crack driving force

II.3.2 Irwin's criterion and equivalence of fracture criteria

Chapter III. Non-Linear Fracture Mechanics Criteria, Methods and Application

III.1 The canonical conservation laws and configurational forces acting on defects and inhomogeneities in non-linear elastic media

III.1.1 Reminder of the non-linear kinematics

III.1.2 The canonical balance laws

III.1.3 Global balance of canonical momentum in an elastic solid with a crack

III.1.4 Global balance of energy

III.2 Non-linear elasticity as a physical field theory

III.2.1 The Hamiltonian action and classical conservation laws

III.2.2 Path-independent integrals of the linear elasticity

III.2.3 Elements of field theory

III.2.4 The Noether theorem

III.2.5 Basic invariant groups of the Hamiltonian action

III.2.6 Generalized groups of transformations. The standard, internal and external variations

III.2.7 Generalized groups of invariance (variational symmetries) of the Hamiltonian action

III.2.8 Null Lagrangian

III.3 The Eshelby–Cherepanov–Rice path-independent J -integral

III.3.1 Energy inflow into a crack tip

III.3.2 Path-independent J -integral and fracture criteria formulation

III.3.3 Some remarks and additions

III.4 Localized plasticity

III.4.1 General notions and script of elastoplasticity equations

III.4.2 Approximate analysis of the localized plastic strains near a crack tip

III.4.3 Limit analysis

III.4.4 Irwin's plasticity adjustment factor

III.4.5 Mode III crack in perfectly plastic material

III.4.6 Mode III crack with a narrow yielded zone

III.4.7 Stress field near a mode I crack tip under plane strain in perfectly plastic material

III.4.8 Stress field near a mode I crack tip under plane stress in perfectly plastic material

III.4.9 Stress field near a mode II crack tip under plane strain in perfectly plastic material

III.5 The canonical transformation technique

III.5.1 The canonical variables for plane strain analysis

III.5.2 Example: tension of a strip with arbitrary shaped notches

III.6 The Leonov–Panasuyk–Dugdale model

III.6.1 Statement of the problem and script of basic equations

III.6.2 Repeating loading of the Dugdale crack

III.6.3 Crack opening displacement in the model with two-zone localized plastic flow

III.6.4 A sample of numerical analysis

III.7 Application of the dislocation theory to fracture mechanics

III.7.1 Reminder of the continual dislocation theory

III.7.2 Representation of a crack by a dislocation array

III.7.3 The Bilby–Cottrell–Swinden dislocation model

III.8 Effect of physical non-linearity on a crack

III.8.1 The Hutchinson–Rice–Rosengren singular solution

III.8.2 Numerical analysis of the eigenvalue problem for the horizontal crack

III.8.3 Numerical analysis of the eigenvalue problem for the inclined crack

III.9 The Neuber–Rice hodograph method (antiplane deformation of a crack in a workhardening elastic-plastic solid)

III.9.1 General scheme of the hodograph method

III.9.2 Small scale yielding near a mode III crack tip

III.9.3 Stresses near a sharp notch in workhardening elastic-plastic material under antiplane shear

III.9.4 Creep strain rate asymptotics near a mode III crack tip for the linear-fractional constitutive law

III.10 Cracks in creeping solids

III.10.1 Phenomenological constitutive equations of steady-state creep

III.10.2 Path-independent C^* -integral

III.10.3 Asymptotic near crack tip solution for a stationary crack in elastic non-linear viscous media

III.10.4 Self-similarity of near crack tip stationary fields in an elastic power-law creeping solid

III.10.5 Near crack tip stress and strain field asymptotics of a growing crack under creep conditions

III.11 Cracks in linear-fractional law creeping solids

III.11.1 Preliminary remarks

III.11.2 Mode III crack. The eigenfunction method

III.11.3 Mode I crack (plane strain condition). The eigenfunction method

Chapter IV. Coupled Analysis in Non-Linear Fracture Mechanics

IV.1 Coupled statement of crack problems (creep–damage,

elasticity–damage coupling)

IV.1.1 Effect of damage on stress-strain state near a mode III crack tip under creep conditions

IV.1.2 Effect of damage on stress-strain state near mode I and II crack tip under creep conditions

IV.1.3 Asymptotic coupled analysis of fatigue crack growth in damaged elastic media

IV.2 Self-similar solutions of coupled crack problems (creep–damage coupling)

IV.2.1 The self-similar variable in coupled creep crack growth problem

IV.2.2 The self-similar solution of antiplane creep crack problem

IV.3 The second rank damage tensor representation of anisotropic damage state

IV.3.1 The Kachanov–Rabotnov model. Scalar damage parameter. Effective stresses

IV.3.2 Equivalent undamaged state

IV.3.3 The second rank damage tensor: co-ordinate representation

IV.3.4 The principal damages and the principal axes of damage. Geometrical and mechanical interpretation

IV.3.5 Derivation of the damage tensor from experimental rosette histograms

IV.3.6 Stress magnifying effect in a damaged solid. Effective stress tensor

IV.4 Strain–damage coupled equations and methods of coupled analysis

IV.4.1 Basic equations of elastic-plastic model with the Tresca yield condition

IV.4.2 The canonical invariants of the three-dimensional plastic equilibrium equations

IV.4.3 Anisotropic damage effect on plastic flow

IV.4.4 Principal line invariants of the two- and three-dimensional coupled equations

Appendix I**Appendix II****Appendix III****Appendix IV****Supplement****Nomenclature****On conventions in index notations****Remarks on algebraic and differential operators****Some special tensors and symbols****Bibliography****Index**

Vladimir I Astafiev²⁵⁴ (vlast@ssu.samara.ru)

Vladimir I Astafiev was born in Velsk, Arkhangelsk Province, Russia, on November 30, 1948.

He is a Mechanics and Applied Mathematics graduate (1972) of Moscow State University. In 1975 he graduated from the Research Institute of Mechanics of Moscow State University and received a Ph.D. in Solid Mechanics from Moscow State University. Since then he has been working at the Department of Solid (later — Continuum) Mechanics of Samara State University first as Assistant and later Associate Professor. In 1987 he was awarded the Doctor of Science (Phys.&Math.) Degree from Sibirian Branch of Russian Academy of Science and became the Head of the Continuum Mechanics Department of Samara State University. Since 1994 he is working as Vice-Rector for Research of Samara State University.

Vladimir I Astafiev is the member of EUROMECH, ESIS (European Structural Integrity Society) and RANS (Russian Academy of Natural Sciences), he is the Head of Samara Branch of RANS.

The main area of his research is creep and fracture of materials at elevated temperatures, the mathematical theory of fracture and damage of materials. He has published over a hundred articles and books on the subject.

Yuri N Radayev²⁵⁵ (radayev@ssu.samara.ru)

Yuri N Radayev was born in Samara, Russia, on February 10, 1962.

He is a Mechanical Engineering graduate (1984) of Samara State University. After serving in the USSR Air Forces he joined (1986) the Laboratory of Viscoelastic Solids of the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science. In 1989 he graduated from the Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Science and received Ph.D. in Applied Mechanics from the Russian Academy of Science. Since then he has been working in Samara State University first as Assistant Prof. at the Department of Solid Mechanics (1989–1995) and later as Associate Prof. at the same Department (1995–2000). He was also working as a visiting researcher at Department of Mechanical Engineering, Nagoya University (1993–1995) and Laboratoire de Modelisation en Mecanique, Universite Pierre et Marie Curie (Paris VI)/CNRS (1999–2000). In 2000 he received the Doctor of Science (Phys.&Math.) Degree from the Russian Academy of Science for his dissertation work "Continuum Models of the Material Damage". He is the Head of Department of Continuum Mechanics (since 2002) and Prof. of the same Department (since 2000).

The main area of his research is continuum mechanics and thermodynamics, the mathematical theory of plasticity, fracture and damage of materials. He has

²⁵⁴See also the personal web page at the address:

<http://www.ssu.samara.ru/campus/teachers/astafiev/astafiev.asp>

²⁵⁵See also the personal web page at the address:

<http://www.ssu.samara.ru/~radayev/>

published nearly a hundred articles and books (both research and educational) on the subject.

Larisa V Stepanova²⁵⁶ (lst@ssu.samara.ru)

Larisa V Stepanova was born in Samara, Russia, on May 21, 1969.

She is a Mechanical Engineering graduate (1991) of Department of Continuum Mechanics of Samara State University. Master degree thesis "Boundary value problem for fractional-linear creep law" was written under supervision of Prof. V. I. Astafjev. She entered (1991) Department of Theory of Plasticity of Moscow State University. In 1995 she graduated from Moscow State University and received a Ph. D. in Applied Mechanics. Doctor degree thesis "On Cracks in Non-Linear Viscous Solids" was supervised by Prof. S. A. Shesterickov. Since then she has been working at the Department of Continuum Mechanics of Samara State University first as Assistant and then as Associate Professor. She was also working as a visiting researcher at Department of Solid Mechanics, Royal Institute of Technology, Sweden (1995).

The main area of her research is continuum mechanics, especially, fracture mechanics and damage of materials, creep and plasticity of metals.

²⁵⁶See also the personal web page at the address:

<http://www.ssu.samara.ru/campus/teachers/stepanova/>

Владимир Иванович Астафьев
Юрий Николаевич Радаев
Лариса Валентиновна Степанова

НЕЛИНЕЙНАЯ МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Typeset by L^AT_EX 2_ε

Редактор Е. А. Краснова
Корректор Е. А. Будячевская
Компьютерная верстка, макет Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова

ЛР 020316 от 04.12.96. Подписано в печать 30.11.00. Формат 60 × 84/16.
Бумага офсетная. Усл.-печ. л. 36,7. Уч.-изд. л. 39,5.
Тираж 400 экз. Заказ 1/26.
Издательство "Самарский университет", 443011, г. Самара. ул. Акад. Павлова, 1.
Отпечатано в типографии ООО "Издательский дом "АГНИ" ",
443110, г. Самара, ул. Мичурина, 23, тел.: (8462) 703287, 703289.

