

ГОУ ВПО «Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Глызин Сергей Дмитриевич

Бифуркационные процессы
и хаотические колебания
в цепочках связанных осцилляторов

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физ.-мат. наук,
профессор Колесов А.Ю.

ЯРОСЛАВЛЬ – 2009

Оглавление

Введение	5
1. Диффузионное взаимодействие двух близких осцилляторов	19
1.1. Слабое диффузионное взаимодействие двух близких осцилляторов	20
1.1.1. Постановка задачи	20
1.1.2. Динамические свойства нормальной формы	21
1.1.3. Обоснование результатов	31
1.1.4. Динамика пары диффузионно связанных уравнений Хатчинсона	40
1.2. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа	42
1.2.1. Постановка задачи	42
1.2.2. Построение нормальной формы системы	43
1.2.3. Сценарии фазовых перестроек нормальной формы	46
1.2.4. Численный анализ системы из двух связанных нейронов	53
2. Нерегулярные колебания в цепочках из трех однонаправленно связанных колебательных систем	63
2.1. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных осцилляторов	64
2.1.1. Локальная постановка проблемы	64
2.1.2. Анализ нормальной формы	67
2.1.3. Нелокальные случаи	74
2.2. Колебания в кольце из трех однонаправленно связанных разностных генераторов	83
2.2.1. Алгоритм нормализации отображений в окрестности неподвижной точки	83
2.2.2. Построение отображения, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов	84
2.2.3. Нормальная форма отображения	86

2.2.4.	Динамические свойства нормальной формы отображения	87
3.	Цепочки диффузионно слабо связанных осцилляторов	98
3.1.	Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов	101
3.1.1.	Постановка задачи	101
3.1.2.	Построение системы фазовых уравнений	102
3.1.3.	Динамические свойства фазовой системы в случае отрезка	106
3.1.4.	Численные оценки старшего ляпуновского показателя и ляпуновской размерности фазовой системы при $n > 4$	108
3.1.5.	Фазовая система диффузионно связанных осцилляторов на окружности	113
3.2.	Численный анализ разностных аппроксимаций уравнения Гинзбурга – Ландау при стремлении коэффициента диффузии к нулю	123
3.2.1.	Случай граничных условий Неймана	124
3.2.2.	Случай краевой задачи на окружности	132
4.	Нелинейные волновые уравнения и их дискретные аналоги	138
4.1.	Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов	139
4.1.1.	Постановка задачи	140
4.1.2.	Основной результат	141
4.1.3.	Случай граничных условий Неймана	144
4.1.4.	Построение цепочек с хаотической буферностью	150
4.2.	Об одной модели явления хаотической буферности	152
4.2.1.	Постановка задачи	153
4.2.2.	Основной результат	154
4.2.3.	Выводы	158
4.3.	К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау	160
4.3.1.	Введение	161
4.3.2.	Общие свойства модели	163
4.3.3.	Нелокальный случай	173
5.	Системы с полутора степенями свободы	178
5.1.	Явление буферности в системах с полутора степенями свободы	178
5.1.1.	Физическая постановка задачи	179
5.1.2.	Исследование квазилинейного осциллятора	184

5.1.3.	Анализ уравнений маятникового типа	188
5.1.4.	Результаты численного анализа	198
5.2.	О предельных значениях функций	
	Мельникова на периодических орбитах	204
5.2.1.	Постановка задачи и описание результатов	204
5.2.2.	Обоснование результатов	209
5.2.3.	Случай уравнения маятникового типа	216
5.2.4.	Анализ примера	223
6.	Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона	233
6.1.	Постановка задачи и линейный анализ	235
6.2.	Метод квазинормальных форм и результаты его применения .	240
6.3.	Анализ модельных краевых задач	246
	Заключение	255
	Литература	257
А.	Особенности динамики простейших нелинейных дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями	273
A.1.	Постановка задачи	273
A.2.	Локальный анализ	274
	A.2.1. Исследование характеристического квазимногочлена .	275
	A.2.2. Построение нормальной формы	280
A.3.	Численный анализ исследуемой системы	286
Б.	Устойчивые режимы системы (6.3.30)	295
B.1.	Случай $N = 20$	295
B.2.	Случай $N = 30$	300
B.3.	Случай $N = 31$	311

Введение

Математическое моделирование процессов, протекающих во времени, как правило, связано с построением некоторой совокупности колебательных систем, каким-либо способом связанных друг с другом. Диссертационная работа посвящена изучению динамики их взаимодействия.

Сами по себе системы взаимодействующих нелинейных осцилляторов могут возникать, во-первых, как результат моделирования реальных объектов, состоящих из нескольких парциальных колебательных систем, и, во-вторых, как математическая модель для приближенного описания динамики пространственно распределенных задач или уравнений с запаздыванием по времени.

Проблема регулярной и хаотической динамики взаимодействующих осцилляторов очень широка и нуждается в некотором сужении. В качестве такого сужения выступает предположение о том, что отдельные взаимодействующие осцилляторы близки.

Общая схема работы такова: сначала изучается система из минимально возможного числа (двух) осцилляторов. Причем для формулировки строгих результатов предполагается, что каждый из осцилляторов находится вблизи бифуркации Андронова - Хопфа, а связь между ними слабая. На основе полученных асимптотических формул делаются выводы о поведении решений нескольких конкретных систем из нейродинамики, а затем численными методами устанавливаются границы применимости этих асимптотик. Затем изучается поведение бóльшего числа осцилляторов. Речь идет о трех однонаправленно связанных в кольцо колебательных системах. Далее рассматривается уже сколь угодно большое число диффузионно связанных осцилляторов, в случае когда их амплитуды близки, а общее поведение описывается системой дифференциальных уравнений для разностей фаз. В этой ситуации обнаруживается явление, составляющее один из главных результатов работы: ляпуновская размерность аттрактора соответствующей системы монотонно растет по почти линейному закону с ростом числа осцилляторов. В последних частях работы рассмотрены в одном случае краевые задачи

гиперболического типа, которые при разложении по модам дают счетную систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений, а в другом — сингулярно возмущенное уравнение с двумя запаздываниями, также сводящееся, в конечном итоге, к модельной системе из счетного числа осцилляторов. Для того, чтобы показать, что сложность поведения решений динамической системы не обязательно является результатом взаимодействия большого числа осцилляторов, в работе рассмотрены несколько моделей с полутора степенями свободы и показано наличие у них явления мультистабильности и буферности.

Коротко остановимся на источниках происхождения задач о связанных осцилляторах и соответственно на актуальности темы исследований. Сразу отметим довольно большое число моделей такого рода, возникающих как результат изучения взаимодействующих механических, электрических, биологических систем (см. [2, 3, 102, 119]). Основные усилия направлены в этом случае на проблему синхронизации колебаний (см. ключевые в этом вопросе статьи [137, 153]). Одним из характерных примеров, особенно активно изучаемых в последнее время, является задача о взаимодействии нервных клеток, на решение которой в значительной мере направлены усилия в области нейродинамики (см., например, [1, 134, 146, 154]). С другой стороны, источником систем диффузионно взаимодействующих осцилляторов являются, очевидно, различные краевые задачи, в частности краевая задача типа “реакция-диффузия”

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \Delta u + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad (0.0.1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (0.0.2)$$

которая представляет собой важный объект исследований в проблеме изучения механизмов пространственно-временных флуктуаций в моделях биологических и физических систем [7, 21, 22]. В системе (0.0.1) вектор-функция $u(t, x) \in R^n$ определена в области Ω с достаточно гладкой границей Γ , D — диагональная матрица с положительными элементами, Δ — оператор Лапласа, ν — положительный параметр. Будем считать, что собственные числа матрицы A_0 за исключением одной пары лежат в левой комплексной полуплоскости, достаточно гладкая вектор-функция векторного аргумента $F(u)$ имеет в нуле порядок малости выше, чем первый, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Вещественную часть первой ляпуновской величины, вычисленной при $\varepsilon = 0$, полагаем отрицательной, а матрицу A_1 такой, что пара собственных чисел матрицы $A_0 + \varepsilon A_1$ переходит при $\varepsilon > 0$ в правую комплексную

полуплоскость. Эти условия обеспечивают существование пространственно однородных периодических режимов краевой задачи (0.0.1)-(0.0.2), которые устойчивы при достаточно большом ν . Важной задачей при изучении структуры распределенных устойчивых решений задачи (0.0.1)-(0.0.2) является проблема определения характера потери устойчивости пространственно однородного решения и исследование ветвящихся при этом режимов. Непосредственный анализ краевой задачи (0.0.1)-(0.0.2) приводит к серьезным трудностям, поэтому имеет смысл рассмотреть упрощенную модель, которая бы сохраняла существенные свойства исходной краевой задачи. В этом смысле не до конца исследованными остаются разностные аппроксимации по пространственным переменным, простейшие из которых мы и рассмотрим.

Для этого предположим, что область $\Omega = [0, 1]$, а размерность вектора $u(t, x)$ равна двум, тогда краевая задача (0.0.1)-(0.0.2) сводится к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad (0.0.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (0.0.4)$$

заменяем в краевой задаче (0.0.3)-(0.0.4) оператор дифференцирования по пространственной переменной разностным так, что

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \nu DN^2(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F(u_j), \quad (0.0.5)$$

узлы аппроксимации выберем в точках $x_j = (j - 1/2)/N$, ($j = 1 \dots N$). Краевые условия (0.0.4) заменим на

$$u_0 = u_1, \quad u_N = u_{N+1}. \quad (0.0.6)$$

Таким образом, получена система связанных идентичных друг другу осцилляторов с диффузионной связью. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (0.0.5), (0.0.6) является в настоящей работе одним из основных объектов исследования. Важным обобщением данной системы является задача о диффузионном взаимодействии колебательных систем с бесконечномерным фазовым пространством. В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений для парциального осциллятора из (0.0.5)

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u) \quad (0.0.7)$$

заменяется краевой задачей или уравнением с запаздыванием. В случае когда эта краевая задача имеет единственный аттрактор (например, цикл или

тор), ее исследование, как правило, не значительно отличается от исследования задачи (0.0.5), (0.0.6). Однако каждая из таких парциальных задач может иметь большое, даже счетное число аттракторов. Динамические свойства диффузионно связанных колебательных систем, у каждой из которых имеется несколько аттракторов, также являются одним из объектов исследования работы.

Отметим, что для динамических систем с распределенными параметрами ситуация, в которой в ее фазовом пространстве сосуществуют устойчивые режимы с узкими областями притяжения, встречается достаточно часто. Именно с этим связано явление мультистабильности, проявляющееся в том, что траектория динамической системы в зависимости от начальных условий приходит к различным аттракторам, чему предшествует длительный переходный процесс. Одним из проявлений мультистабильности является феномен буферности, о котором принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа **однотипных** аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.).

Из результатов известной работы А. А. Витта [17], а также из значительно более поздних работ [84–88, 115] следует, что буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания: радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики, теории горения и т. д. Поэтому весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накопления аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени удалось выявить три таких сценария: в первую очередь это сценарий Витта, являющийся наиболее распространенным, а также тьюрингский и гамильтонов механизмы накопления аттракторов.

Ситуация, в которой реализуется механизм Витта, заключается в следующем. Предположим, что в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия некоторой динамической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении каких-либо входящих в эту систему параметров происходит последовательное смещение точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как установлено в уже упоминавшихся работах [17, 84–88, 115], чаще всего в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накопление устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде.

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении управляющих параметров сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, хотя общее число аттракторов и увеличивается, но их состав постоянно обновляется. Как показано в монографии [115], данная ситуация реализуется главным образом в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии, но может возникать и в системах с запаздыванием при неограниченном увеличении времени запаздывания. В частности, с ней сталкиваемся при рассмотрении известной модели "брюсселятор", изучавшейся еще А. Тьюрингом [158] (отсюда и название – тьюрингский механизм).

Описанные сценарии накопления аттракторов характерны, естественно, только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. Что же касается конечномерных систем, то в них простейшим механизмом возникновения буферности является, по всей видимости, так называемый гамильтонов сценарий, проиллюстрированный в [115] на ряде двумерных отображений из механики. Суть этого сценария состоит в том, что в гамильтоновых или консервативных системах с полутора или больше степенями свободы хаотические движения сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. При возмущении такой системы малыми диссипативными добавками часть из состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю.

Следует заметить, что гамильтонов механизм, несмотря на его простоту, до сих пор оставался наименее изученным, так как кроме уже упоминавшихся двумерных отображений (см. [115]) он не был подкреплен какими-либо другими содержательными примерами. В четвертой главе данной работы устанавливается ряд результатов о наличии буферности в некоторых классических механических задачах, описываемых уравнениями маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками (именно такого типа уравнения в физической литературе принято называть системами с полутора степенями свободы).

Перейдем теперь к используемым в работе методам исследования. Во всей работе нами предпринималась попытка сочетания аналитических и численных методов. Очевидно, что эти методы должны дополнять друг друга. Среди аналитических методов, используемых при работе с динамическими системами, ведущую роль играет построение различного рода асимптотик.

Особо выделим метод нормальных форм в случае конечномерных вырождений и метод квазинормальных форм — в случае бесконечных.

На протяжении всей работы в различных вариациях использовались высокоэффективные асимптотические методы исследования динамики, базирующиеся на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм [5, 15, 106, 108, 130, 131]. Эти методы, восходящие к работам Пуанкаре [122] и методу усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского [13, 100, 111], применимы лишь в случае, когда при критическом значении параметра в спектре устойчивости исследуемой системы оказывается конечное число точек, лежащих на мнимой оси.

При исследовании распределенных систем и уравнений с запаздыванием оказалось, что для них могут реализовываться такие ситуации, в которых спектральная задача имеет счетное число значений на мнимой оси. В связи с этим в начале 80-х для случая, близкого к бесконечномерному вырождению, Ю.С. Колесовым [16, 99] был предложен специальный асимптотический метод, названный впоследствии методом квазинормальных форм. Не останавливаясь подробно на истории вопроса, напомним, что к настоящему времени этот метод обоснован в ряде модельных ситуаций как для параболических [76, 114, 115], так и для гиперболических [84, 91] краевых задач. В случае дифференциально-разностных уравнений второго порядка с большим запаздыванием алгоритмические аспекты метода квазинормальных форм разработаны в статьях [75, 79].

Существенным ограничением асимптотических методов является в первую очередь их локальность как по бифуркационному параметру, так и по области фазового пространства. Как правило, не известно, что происходит с решениями динамической системы, не лежащими в окрестности некоторого особого решения, и для параметров не близких к критическим. Численное интегрирование в этой ситуации позволяет отчасти прояснить проблему и продолжить по параметру найденное асимптотическими методами решение, тем самым позволяя оценить границы применимости асимптотических формул.

Особо отметим, что численные методы сами по себе без предварительного асимптотического анализа не могут дать ответ на вопросы качественного поведения исследуемой модели. Выполним обзор некоторых из численных методов, применяемых в работе.

Численный анализ нелинейных динамических систем с неупорядоченным поведением представляет собой достаточно сложную задачу. Одна из основных проблем, возникающих в этом случае, состоит в том, что численные методы, используемые при решении эволюционных уравнений, дают в

определенном смысле гарантированную точность вычислений лишь на конечных промежутках изменения переменной времени. На практике же численные методы часто применяют на больших временных отрезках, когда решение исходной задачи и разностной схемы, ее моделирующей, уже не имеют никакого отношения друг к другу. Более того, в случае исследования систем с хаотической динамикой в силу экспоненциального разбегания траекторий, решения с близкими начальными условиями начинают отличаться друг от друга на величину порядка единицы за относительно короткий промежуток времени. Особенно серьезные проблемы возникают, когда моделируемая динамическая система не является структурно устойчивой (отметим, что хаотические аттракторы для систем с непрерывным временем часто негиперболически). В этой ситуации для анализа качественных характеристик решений вычисляются различные размерностные показатели, наиболее известные и надежно вычислительно реализуемые из них это ляпуновские показатели и ляпуновская размерность, корреляционный интеграл, энтропия. В условиях, когда динамическая система задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно небольшой размерности и удастся построить систему в вариациях вдоль траектории, лежащей на аттракторе, наиболее уместно вычисление ляпуновских показателей.

Учитывая, что определению этих показателей отводится в работе значительное место, коротко остановимся на алгоритме их вычисления (подробно см. [23]). Для нахождения старшего ляпуновского показателя хаотического аттрактора нами используется некоторая модификация известного алгоритма Бенеттина [136]. Напомним, что в упомянутом алгоритме при интегрировании системы в вариациях на траектории из аттрактора через равные промежутки времени заданной длины $T > 0$ производится перенормировка вектора начальных условий. Основная идея нашего метода состоит в том, чтобы "заставить" систему динамически выбирать моменты перенормировок.

В пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ рассмотрим произвольную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \tag{0.0.8}$$

с гладкой правой частью f и будем считать, что она имеет компактный аттрактор A с хаотическим поведением траекторий. Последнее означает, что, во-первых, для множества A предполагается существование так называемой поглощающей окрестности, т.е. такого ограниченного открытого множества $\mathcal{U} \supset A$, что замыкание $\overline{\varphi^t(\mathcal{U})} \subset \mathcal{U}$ при всех $t > 0$ и $\bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}) = A$ (здесь

$\varphi^t(x_0)$, $\varphi^0(x_0) = x_0$ – поток, задаваемый системой (0.0.8)). Во-вторых, предполагаем существование подмножества $\tilde{A} \subset A$ со следующими свойствами:

а) \tilde{A} – вероятностный аттрактор [150], т. е. наименьшее замкнутое множество, содержащее ω -предельные множества для почти всех точек из \mathcal{U} ;

б) множество \tilde{A} является хаотическим в смысле определения Девани [135, 138], т.е. в \tilde{A} плотны периодические траектории системы (0.0.8) и сужение на \tilde{A} ее фазового потока φ^t обладает свойством топологической транзитивности. Как показано в [135], из этих двух требований вытекает неустойчивость по Ляпунову каждой отдельно взятой траектории, принадлежащей множеству \tilde{A} , или, иными словами, существенная зависимость от начальных условий.

Приведенное определение хаотического аттрактора не является единственно возможным. Например, можно считать, что A – стохастический аттрактор в смысле определения Я.Г. Синая [125], сформулированного в терминах инвариантной меры. Существует также определение хаоса по Ли-Йорке (см., например, [12]) и т.д. В любом случае, однако, важным, на наш взгляд, представляется лишь свойство существенной зависимости от начальных условий, которое, собственно говоря, и служит синонимом самого понятия ”хаос”. Что же касается практической стороны вопроса, то общепринятый эвристический критерий наличия требуемого свойства состоит в существовании хотя бы одного положительного показателя в ляпуновском спектре аттрактора. Таким образом, естественно возникает проблема разработки различных алгоритмов расчета наибольшего ляпуновского показателя λ_{max} аттрактора A .

Приступим к описанию нашего варианта алгоритма Бенеттина, который уместно назвать методом динамической перенормировки. С этой целью фиксируем некоторую точку x_0 из хаотического аттрактора A , выпустим из нее траекторию $x = x_0(t)$, $x_0(0) = x_0$ системы (0.0.8) и рассмотрим систему в вариациях на данной траектории:

$$\dot{h} = A(t)h, \quad h|_{t=0} = h_0, \quad (0.0.9)$$

где $A(t) = f'(x)|_{x=x_0(t)}$, а h_0 , $\|h_0\| = 1$ (здесь и ниже $\|*\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n), – произвольный вектор. Единственное условие, которому должны удовлетворять начальная точка $x_0 \in A$ и начальная вариация h_0 и которое всюду ниже считаем выполненным, состоит в требовании их ”типичности”. Последнее означает, что

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \|h(t)\|/t, \quad (0.0.10)$$

где $h(t)$ – решение задачи Коши (0.0.9), а λ_{max} – старший ляпуновский показатель аттрактора A , который в силу известной мультипликативной эргодической теоремы Оселедца [121] не зависит от x_0 (точнее говоря, одинаков для почти всех $x_0 \in A$ по некоторой инвариантной мере). Кроме того, предположим сначала, что реализуется самый интересный случай $\lambda_{max} > 0$.

На следующем этапе фиксируем произвольно некоторое число $u_{max} > 1$ и наряду с системой (0.0.9) рассмотрим отвечающую ей релейную систему

$$\dot{h}_* = R(t, h_*), \quad h_*|_{t=0} = h_0 \quad (0.0.11)$$

с тем же начальным вектором h_0 , решение $h_*(t)$ которой определим конструктивно. А именно, сначала положим $h_*(t) = h(t)$ и будем считать, что это равенство справедливо до тех пор, пока $\|h(t)\| < u_{max}$. Далее заметим, что $\|h(t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$ в силу (0.0.10) и условия $\lambda_{max} > 0$. Поэтому обязательно найдется такой первый момент времени $t_1 > 0$, что $\|h_*(t_1)\| = u_{max}$. В этот момент происходит переключение и при $t \geq t_1$ функция $h_*(t)$ определяется уже как решение задачи Коши

$$\dot{h}_* = A(t)h_*, \quad h_*|_{t=t_1} = h_*(t_1 - 0)/\|h_*(t_1 - 0)\|. \quad (0.0.12)$$

Закон (0.0.12) изменения $h_*(t)$, в свою очередь, справедлив до очередного момента переключения t_2 , когда первый раз (после момента t_1) норма $\|h_*(t)\|$ достигнет порогового значения u_{max} (такой момент времени обязательно наступит по тем же причинам, что и выше). При $t \geq t_2$ снова имеем дело с задачей Коши (0.0.12), в которой, естественно, t_1 заменяется на t_2 , и т. д.

Таким образом, получаем бесконечную последовательность моментов переключений t_m , $m \geq 1$, где t_m – наименьший положительный корень уравнения

$$\|h(t)\| = (u_{max})^m, \quad (0.0.13)$$

а само решение $h_*(t)$ релейной системы (0.0.11) на любом промежутке $t_m \leq t < t_{m+1}$ задается формулой $h_*(t) = h(t)/(u_{max})^m$. Обозначим, далее, через $m = m(t)$ количество переключений на промежутке времени $[0, t]$.

Сформулируем основной результат, позволяющий построить алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя с автоматическим выбором моментов переключения.

Теорема 0.1. *Справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) \ln(u_{max}) / t = \lambda_{max}. \quad (0.0.14)$$

Не останавливаясь на доказательстве данного факта (оно приведено в [23]) сделаем некоторые замечания.

Во-первых, при численной реализации предложенного алгоритма, как и в алгоритме Бенеттина, здесь не возникает компьютерных проблем, связанных с переполнением. Расчетная же формула для λ_{max} имеет в данном случае вид

$$\lambda_{max} \cong m(t) \ln(u_{max})/t. \quad (0.0.15)$$

Во-вторых, в случае $\lambda_{max} > 0$ вместо (0.0.15) можно пользоваться расчетной формулой

$$\lambda_{max} \cong m(t) \ln(u_{max})/t_m, \quad (0.0.16)$$

дающей более точный результат.

В-третьих, предельное равенство (0.0.14) остается справедливым и при $\lambda_{max} = 0$, т.е. для регулярного аттрактора.

И наконец, в-четвертых, формула (0.0.16), вообще говоря, не работает при $\lambda_{max} = 0$. Действительно, в случае конечного числа переключений она выдаст ненулевое значение. В отличие от (0.0.16) первоначальная формула (0.0.15) лишена этого недостатка, но обе они заведомо не пригодны в случае $\lambda_{max} < 0$, когда аттрактор A – состояние равновесия. В связи с этим возникает необходимость внесения некоторых поправок в описанный алгоритм.

Для описания исправленного алгоритма фиксируем два пороговых значения $u_{max} > 1$ и $u_{min} \in (0, 1)$ и будем считать, что переключения в релейной системе (0.0.11) происходят в моменты времени, когда $||h_*(t)||$ принимает любое из значений u_{max} или u_{min} . Обозначим, далее, через $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – количества переключений на отрезке $[0, t]$, связанные с достижением u_{max} и u_{min} соответственно.

Следующее утверждение позволяет получить расчетную формулу алгоритма, работающего для значений λ_{max} любого знака.

Теорема 0.2. *Вне зависимости от знака λ_{max} справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [m_1(t) \ln(u_{max}) + m_2(t) \ln(u_{min})]/t = \lambda_{max}. \quad (0.0.17)$$

Следует отметить, что аналоги теорем 0.1, 0.2 можно получить и для точечных отображений.

Описанный выше алгоритм реализован программно Глызиным Д.С. в пакете Трасер (см. [24]), который и используется для получения значительной части представленных в работе численных результатов.

Структура диссертационной работы

Диссертация содержит введение, шесть глав, заключение и приложения. В первой главе рассмотрена система из двух близких осцилляторов вида (0.0.5). Для исследования этой системы применяется метод нормальных форм, за счет чего на асимптотически устойчивом интегральном многообразии модели строится трехмерная система медленных переменных (две амплитудные переменные и разность фаз).

Для полученной системы удалось выделить три параметра-инварианта, вычисляемых по нелинейности и матрице связи. Изменение этих величин определяет характер фазовых перестроек полученной нормальной формы. Считая силу связи (определяется матрицей D) бифуркационным параметром, удается построить разбиение плоскости оставшихся параметров на области с одинаковыми сценариями фазовых перестроек. В разделе 1.1.1 приводится данное разбиение и описываются два типичных сценария. Как оказалось, первый из них связан с бифуркациями циклов и торов, а второй — с нерегулярными колебаниями.

Одним из наиболее любопытных результатов этой части является обнаруженный у нормальной формы квазифейгенбаумовский каскад бифуркаций. В нем переход к циклу условно двойного по сравнению с исходным периода происходит не в результате обычной бифуркации удвоения, а после каскада фазовых перестроек, включающих как классические фейгенбаумовские удвоения периода, так и рождение и перестройки странных аттракторов.

В разделе 1.1.2 приводится обоснование результатов из раздела 1.1.1. При этом кривые разбиения строятся аналитически, а для некоторых из бифуркационных значений параметра связи используются численные методы.

Раздел 1.2 посвящен применению полученных в предыдущих пунктах результатов к задаче электрического взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа. Непосредственный численный анализ системы исходных уравнений взаимодействия нейронов показал, что в достаточно широкой окрестности критических значений параметров эта система демонстрирует динамику, предсказанную посредством анализа нормальной формы. Найдены границы применимости описанных в разделе 1.1 качественных результатов, рассмотрен характер разрушения сценариев, существование которых обосновано для нормальной формы.

Во второй главе рассматривается задача о динамике трех однонаправленно связанных осцилляторов. Каждая из трех парциальных динамических систем представляет собой некоторую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений с единственным аттракто-

ром – положением равновесия или циклом. Затем рассматривается кольцо из этих осцилляторов. Удастся показать, что при наличии однонаправленной связи эти осцилляторы при подходящем выборе параметров могут демонстрировать совместное хаотическое поведение. В первой части главы рассмотрена система осцилляторов, моделями которых служат обыкновенные дифференциальные, а во второй части — разностные уравнения. По результатам проведенных исследований может быть предложен простой и эффективный способ создания генераторов хаотических колебаний.

В третьей главе происходит переход от рассмотрения свойств небольшого числа связанных колебательных систем к исследованию динамики произвольного их количества. Изучаются системы нелинейных слабо связанных осцилляторов, возникающие при применении разностных аппроксимаций к некоторым классам краевых задач. В предположении, что связь между осцилляторами мала, строится нормальная форма задачи, а по ней система фазовых уравнений, определяющая качественное поведение решений. Аналитическое и численное исследование полученных фазовых уравнений выполнено для различного числа осцилляторов и различных значений параметра, выраженного в инвариантах исходной системы. Численный анализ полученной модели показал, что в широком диапазоне изменения параметров увеличение числа осцилляторов при наличии между ними слабой связи приводит к возникновению хаотических колебаний растущей ляпуновской размерности. Данный результат находит подтверждение в численном эксперименте, выполненном для классической модели такого типа — уравнения Гинзбурга – Ландау.

Четвертая глава тесно связана с двумя предыдущими — в ней, как и ранее, рассматриваются цепочки связанных колебательных систем. При этом, однако в качестве отдельно взятого звена цепочки (парциальной системы) в разделе 4.1 рассматривается не система обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным устойчивым циклом, а колебательная система с распределенными параметрами, каждая из которых имеет достаточно большое или счетное число устойчивых циклов (т.е. реализуется феномен буферности в простейшем его варианте). В итоге получается система, имеющая (при определенных дополнительных условиях) достаточно большое число сосуществующих хаотических аттракторов. При рассмотрении конкретных примеров показано, что для получения требуемого эффекта вовсе не обязательно брать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно делается в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством. В случае однонаправленной связи рассматривается модельная система из трех связанных в кольцо обоб-

щенных уравнений Шредингера с кубической нелинейностью. Данная задача моделируется бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Во втором разделе данной главы устанавливается, что при изменении управляющего параметра в такой системе могут наблюдаться две принципиально различные ситуации:

- 1) сосуществует счетное число конечномерных хаотических аттракторов;
- 2) существует хаотический аттрактор бесконечной размерности.

В третьей части главы предлагается феноменологическая модель развития турбулентности, представляющая собой нелинейное уравнение Клейна – Гордона, возмущенное неконсервативными добавками. С помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается, что переход к турбулентности в этом уравнении может происходить как по сценарию Ландау, так и в соответствии со сценарием Ландау – Селла. Первый из упомянутых сценариев связан, как известно, с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей. Во втором же случае имеем дело с хаотическим аттрактором, ляпуновская размерность которого при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет. Как и в двух предыдущих разделах, изучаемая краевая задача моделируется цепочкой связанных колебательных систем, на основе численного анализа которых делается вывод о наличии у системы бифуркаций по сценарию Ландау – Селла.

В пятой главе работы рассматриваются консервативные системы второго порядка с малыми периодическими добавками, называемые обычно системами с полутора степенями свободы. В таких системах, так же как и в более сложных системах из предыдущих глав, может реализоваться сложное поведение, обусловленное накоплением однотипных аттракторов. Рассмотрен механизм такого накопления.

Исходя из того, что хаотические движения в гамильтоновых или консервативных системах сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам, в первом разделе главы рассмотрена задача о перестройках этих режимов при наличии малых добавок, обеспечивающих диссипативность системы. Показано, что некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и их количество может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю.

Во втором разделе главы для системы с полутора степенями свободы строится последовательность $M_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ функций Мельникова, вычисленная на резонансных циклах, периоды которых находятся в отношении

$n : 1$ с периодом внешнего воздействия. Основное предположение заключается в том, что упомянутые циклы располагаются внутри некоторого замкнутого контура Γ , составленного из двух сепаратрис и двух седел, и при $n \rightarrow \infty$ стремятся к Γ . Показывается, что в отличие от случая, когда Γ состоит из одной сепаратрисной петли и седла, здесь $M_n(t)$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, возникает проблема отыскания всех частичных пределов этой последовательности, которая и решается в данном разделе. Полученные результаты используются для исследования феномена буферности в слабо возмущенных гамильтоновых системах. Проводится анализ конкретного примера – классического уравнения колебаний нелинейного маятника с вибрирующей точкой подвеса.

В последней, шестой главе работы рассматривается логистическое уравнение с двумя запаздываниями (обобщенное уравнение Хатчинсона) в случае асимптотически большого одного и единичного второго запаздывания. В этой задаче при надлежащем выборе параметров может наблюдаться бесконечномерное вырождение и в качестве квазинормальных форм приходится рассматривать различные краевые задачи с антипериодическими краевыми условиями. В свою очередь, динамика краевой задачи, полученной на этапе нормализации, может быть промоделирована с помощью системы связанных осцилляторов. Аналитическое исследование данной задачи дополняется численным счетом, показавшим, что при надлежащем выборе параметров исследуемая краевая задача, а значит, в силу теоремы о соответствии, и исходное уравнение с запаздыванием имеет большое число сосуществующих режимов различной природы. Показано также, что их число растет с ростом числа взаимодействующих осцилляторов в модели.

Приложения А и Б содержат дополнительный материал к главе 6. В приложении А представлен обзор динамических свойств обобщенного уравнения Хатчинсона при условии, что запаздывания имеют порядок единицы. В приложении Б приводятся начальные условия и проекции фазовых портретов устойчивых режимов для аппроксимаций квазинормальной формы задачи из главы 6.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в [23], [25-62], [141, 142].

Глава 1.

Диффузионное взаимодействие двух близких осцилляторов

Введение

Изучение связанных динамических систем колебательного типа естественно начинать с простейшего случая, когда таких систем только две. В связи с этим первая глава работы посвящена динамике слабого диффузионного взаимодействия пары идентичных нелинейных динамических систем, каждая из которых имеет устойчивый предельный цикл, возникающий в результате бифуркации Андронова – Хопфа. Использование метода нормальных форм позволяет проследить за фазовыми перестройками совокупной динамической системы при изменениях коэффициента диффузии. Оказалось, что общий сценарий таких перестроек существенно меняется при изменении первой ляпуновской величины, определяющей характеристики периодических синхронных колебаний. На плоскости параметров динамической системы выделены области значений, с различными сценариями фазовых перестроек, в частности, найдена область, в которой нормализованная динамическая система имеет каскад бифуркаций хаотических аттракторов. Следует сразу отметить, что доказательство утверждения о соответствии между решениями исходной и нормализованной систем удастся получить лишь для грубых циклов и торов и при достаточно малой надкритичности. В случае, когда надкритичность велика, или нормализованная система имеет хаотические аттракторы, необходим численный анализ. Во втором разделе

данной главы описаны результаты численного эксперимента, выполненного для системы из двух уравнений с запаздыванием из нейродинамики.

Полученные результаты, очевидным образом, применимы к широкому классу физических и биологических моделей.

1.1. Слабое диффузионное взаимодействие двух близких осцилляторов

1.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему (0.0.5)-(0.0.6) в простейшем случае $N = 2$, тогда приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon D(u_2 - u_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_1 + F(u_1), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon D(u_1 - u_2) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_2 + F(u_2), \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где $4D$ обозначено снова D . Система (1.1.1) соответствует разбиению отрезка изменения x на две части. Понятно, что система (1.1.1), так же как и система (0.0.5)-(0.0.6), для других разбиений имеет важное самостоятельное значение, поскольку описывает взаимодействие двух или большего числа слабо связанных осцилляторов.

Уточним некоторые предположения. Пусть матрица A_0 имеет единственную пару чисто мнимых собственных значений, при этом ее остальные собственные значения лежат в левой комплексной полуплоскости, пусть ее чисто мнимому собственному числу $i\omega$ соответствует собственный вектор a , а собственному числу $-i\omega$ сопряженной матрицы A_0^* соответствует собственный вектор b , пронормируем эти векторы так, что $(a, b) = 1$. Предположим, что нелинейность $F(u)$ представляется в виде $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$, где вектор-функции F_2, F_3 линейны по каждому аргументу.

Нормализация системы (1.1.1) позволяет выделить амплитудные и фазовые переменные и исследовать характер потери устойчивости пространственно однородного (синхронного $u_1(t) \equiv u_2(t)$) периодического решения. Наша цель состоит в выделении параметров, определяющих динамику (1.1.1), и исследовании областей бифуркаций циклов, торов и странных аттракторов этой системы.

1.1.2. Динамические свойства нормальной формы

В соответствии со стандартным алгоритмом нормализации (см., например, [57, 99, 130]) система (1.1.1) с помощью замены

$$u_j(t, s) = \sqrt{\varepsilon}u_{0j}(t, s) + \varepsilon u_{1j}(t, s) + \varepsilon^{3/2}u_{2j}(t, s) + \dots \quad j = 1, 2, \quad s = \varepsilon t, \quad (1.1.2)$$

где $u_{0j}(t, s) = z_j(s) \exp(i\omega t)a + \bar{z}_j(s) \exp(-i\omega t)\bar{a}$, а $u_{1j}(t, s)$ и $u_{2j}(t, s)$ — $2\pi/\omega$ -периодические по t функции, может быть сведена к системе для медленно меняющихся комплексных амплитуд $z_1(s)$ и $z_2(s)$.

Подставим (1.1.2) в (1.1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$. Тогда при $\sqrt{\varepsilon}$ получим, очевидно, верное тождество, а при ε имеем систему вида

$$\frac{\partial u_{1j}}{\partial t} = A_0 u_{1j} + e^{2i\omega t} z_j^2 F_2(a, a) + |z_j|^2 (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)) + e^{-2i\omega t} \bar{z}_j^2 F_2(\bar{a}, \bar{a}), \quad j = 1, 2. \quad (1.1.3)$$

Решение системы (1.1.3) выберем так, чтобы оно не содержало первых гармоник $e^{i\omega t}$

$$u_{1j} = e^{2i\omega t} z_j^2 (2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(a, a) + e^{-2i\omega t} \bar{z}_j^2 (-2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(\bar{a}, \bar{a}) - |z_j|^2 A_0^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)), \quad j = 1, 2. \quad (1.1.4)$$

Наконец, при $\varepsilon^{3/2}$ получаем систему

$$\frac{\partial u_{2j}}{\partial t} + \frac{dz_j}{ds} e^{i\omega t} a + \frac{d\bar{z}_j}{ds} e^{-i\omega t} \bar{a} = A_0 u_{2j} + F_2(u_{0j}, u_{1j}) + F_2(u_{1j}, u_{0j}) + F_3(u_{0j}, u_{0j}, u_{0j}) + A_1 u_{0j} + D(u_{0j+1} - u_{0j}), \quad (1.1.5)$$

где $j = 1, 2$ и $u_{03} = u_{01}$. Учитывая формулу (1.1.4), из условий разрешимости задачи (1.1.5) в классе $2\pi/\omega$ -периодических по t функций получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $z_j(s)$

$$\begin{aligned} z_1' \cdot (a, b) &= (A_1 a, b) z_1 + (d_0 + ic_0) |z_1|^2 z_1 + (Da, b)(z_2 - z_1), \\ z_2' \cdot (a, b) &= (A_1 a, b) z_2 + (d_0 + ic_0) |z_2|^2 z_2 + (Da, b)(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

представляющую собой нормальную форму системы (1.1.1) с отброшенными членами более высокого по ε порядка малости. В системе (1.1.6) штрихом

обозначена производная функций $z_j(s)$ по s , а коэффициент $d_0 + ic_0$ при кубической нелинейности задается формулой (см. [77])

$$d_0 + i\omega c_0 = (F_3(\bar{a}, a, a) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(a, v_0) + F_2(v_0, a) + F_2(v_1, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, v_1), b), \quad (1.1.7)$$

где $v_0 = -A_0^{-1} (F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a))$, $v_1 = (2i\omega E - A_0)^{-1} F_2(a, a)$.

Ниже считаем, что

$$\operatorname{Re}(A_1 a, b) > 0 \text{ и } d_0 < 0. \quad (1.1.8)$$

Это означает, что при $\varepsilon > 0$ собственные числа матрицы $A_0 + \varepsilon A_1$ переходят в правую комплексную полуплоскость, а величина $\operatorname{Re}(A_1 a, b)$ определяет скорость этого перехода. Отрицательность первой ляпуновской величины d_0 , в свою очередь, гарантирует возникновение у каждой парциальной системы (1.1.1) в результате бифуркации Андронова – Хопфа орбитально асимптотически устойчивого цикла.

Будем называть *автомодельным циклом* системы (1.1.6) ее периодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0 \exp(i\sigma s), \quad j = 1, 2, \quad (1.1.9)$$

где $z_j^0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ – некоторые постоянные. В свою очередь *двумерным автомодельным тором* системы (1.1.6) будем называть ее квазипериодическое решение вида

$$z_j(s) = z_j^0(s) \exp(i\sigma s), \quad j = 1, 2, \quad (1.1.10)$$

где σ – вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(s)$, $j = 1, 2$ периодичны по s с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (1.1.10) не приводится к виду (1.1.9).

Для автомодельных циклов и торов системы (1.1.6) выполнена следующая стандартная теорема о соответствии (см., например, [11, 91])

Теорема 1.1. *Предположим, что система (1.1.6) имеет некоторый автомодельный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (1.1.1) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (1.1.2), (1.1.4) с учетом равенств (1.1.9) или (1.1.10) соответственно.*

Впервые система (1.1.6) была выписана и исследована для двух уравнений Хатчинсона в [29], затем в статье [134] для этой системы были выписаны условия существования и устойчивости синхронного цикла и цикла, соответствующего колебаниям в противофазе. Общие результаты для автомоделных циклов и торов системы были получены в статье автора [40].

Для упрощения анализа системы (1.1.6) выполним в ней полярную замену

$$z_j(s) = \sqrt{-\frac{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}{d_0}} \xi_j(s) \exp(i\tau_j(s)) \quad (1.1.11)$$

и нормирующую замену времени $\operatorname{Re}(A_1 a, b)s \rightarrow s$, в результате имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varkappa \xi_2 \cos(\tau_2 - \tau_1 + \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \varkappa \xi_1 \cos(\tau_2 - \tau_1 - \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2, \\ \tau_1' &= \psi_0 - \varkappa \sin \delta + \varkappa \frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\tau_2 - \tau_1 + \delta) - b_0 \xi_1^2, \\ \tau_2' &= \psi_0 - \varkappa \sin \delta + \varkappa \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\tau_1 - \tau_2 + \delta) - b_0 \xi_2^2, \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

где $\psi_0 = \frac{\operatorname{Im}(A_1 a, b)}{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}$, $\varkappa = \frac{|(Da, b)|}{\operatorname{Re}(A_1 a, b)}$, $\delta = \arg((Da, b))$, $b_0 = \frac{c_0}{d_0}$.

От полученной четырехмерной системы может быть отщеплена трехмерная система относительно переменных ξ_1, ξ_2 и $\alpha = \tau_2 - \tau_1$

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \varkappa \xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1, \\ \xi_2' &= \varkappa \xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2, \\ \alpha' &= -\varkappa \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b_0 (\xi_1^2 - \xi_2^2). \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Сразу отметим несколько простейших свойств системы (1.1.13).

Во-первых, имеется симметрия фазового пространства (1.1.13), состоящая в том, что замена

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad \alpha \rightarrow -\alpha \quad (1.1.14)$$

переводит исследуемую систему в себя.

Во-вторых, система (1.1.13) инвариантна относительно следующего преобразования:

$$\xi_1 \rightarrow \xi_2, \quad \xi_2 \rightarrow \xi_1, \quad \delta \rightarrow -\delta, \quad b_0 \rightarrow -b_0. \quad (1.1.15)$$

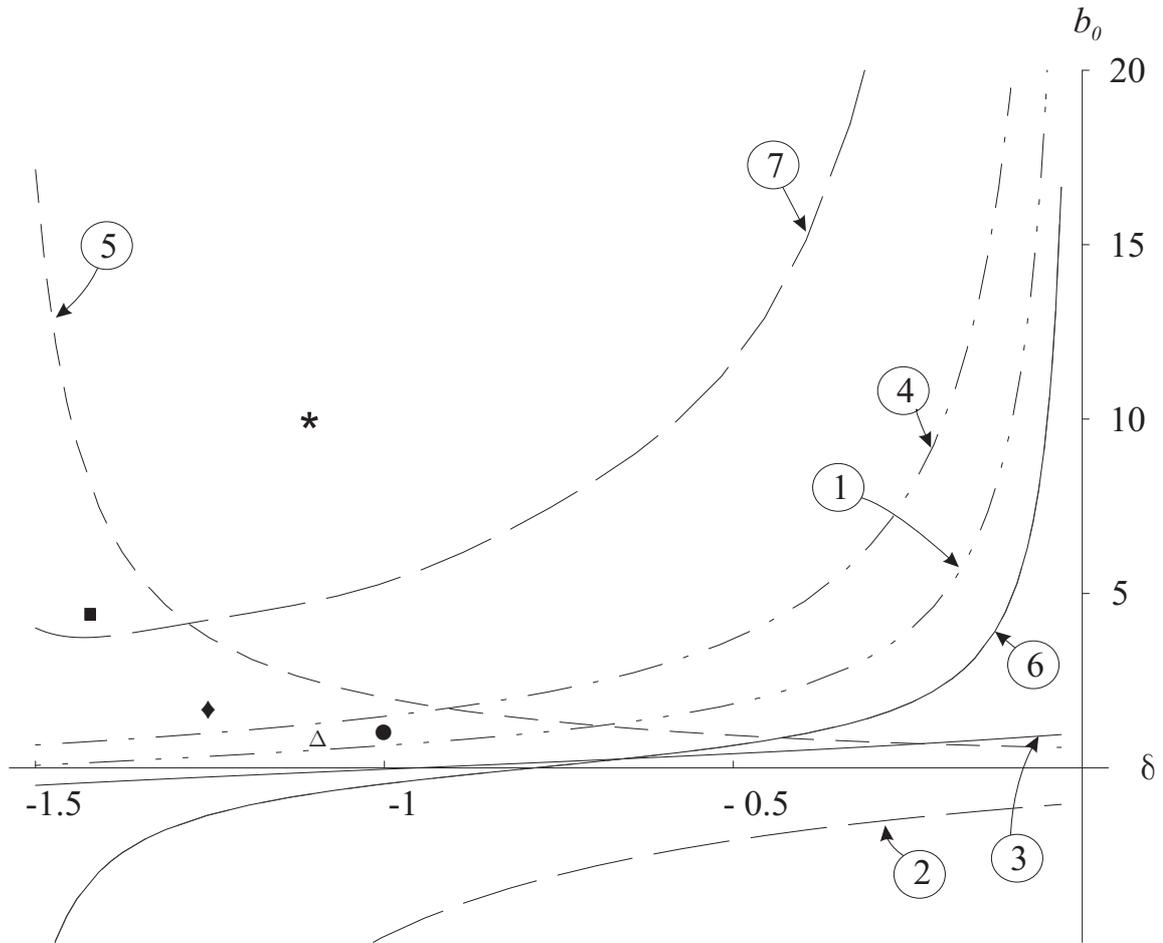


Рис. 1.1.

Наконец, фазовое пространство системы (1.1.13) является цилиндрическим в силу 2π -периодичности ее правых частей по α .

Соотношение (1.1.15) и периодичность правых частей (1.1.13) по δ позволяет ограничиться рассмотрением на плоскости параметров δ, b_0 полосы $-\pi \leq \delta \leq 0$. Более того, далее будем рассматривать лишь полосу $-\pi/2 \leq \delta \leq 0$, поскольку вне ее состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$, соответствующее однородному циклу системы (1.1.1), оказывается неустойчивым при достаточно больших \varkappa .

Рассмотрим поведение системы (1.1.13) при фиксированных δ, b_0 и изменении параметра связи \varkappa . На плоскости параметров δ и b_0 можно выделить две области с принципиально разными сценариями качественных перестроек динамической системы (1.1.13). На рис. 1.1 эти области разделяют верхние ветви кривых. Основные бифуркации, происходящие с системой (1.1.13), связаны с рождением и потерей устойчивости ее состояний

равновесия, с бифуркациями потери симметрии и удвоения периода циклов системы, а также с бифуркациями расщепления сепаратрис. Для унификации обозначений критические значения \varkappa , соответствующие одинаковым бифуркациям, будем обозначать одинаково. Удалось получить бифуркационные значения \varkappa , $\varkappa_{\text{кр}} \equiv \varkappa_{\text{кр}}(\delta, b_0)$, $\varkappa_{\pi, j} \equiv \varkappa_{\pi, j}(\delta, b_0)$, $j = 1, 2, 3$; $\varkappa_{AC} \equiv \varkappa_{AC}(\delta, b_0)$; $\varkappa_C \equiv \varkappa_C(\delta, b_0)$; $\varkappa_S \equiv \varkappa_S(\delta, b_0)$; $\varkappa_{A, 1} \equiv \varkappa_{A, 1}(\delta, b_0)$; $\varkappa_j^S \equiv \varkappa_j^S(\delta, b_0)$, $j = 1 \dots \infty$; $\varkappa_j^A \equiv \varkappa_j^A(\delta, b_0)$, $j = 1 \dots \infty$; $\varkappa_j^H \equiv \varkappa_j^H(\delta, b_0)$, $j = 1 \dots \infty$, при которых происходят перестройки фазового портрета исследуемой системы. Сценарии фазовых перестроек проиллюстрируем на примере двух типичных случаев:

1) $\delta = -\arctg \frac{\pi}{2} \approx -1.00388$, $b_0 = \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \approx 1.23123$ (на рис. 1.1 отмечен точкой),

2) $\delta = \frac{\pi}{3}$, $b_0 = 10$ (на рис. 1.1 отмечен звездочкой),

при которых реализуются соответственно первый и второй из них. Первый из случаев соответствует системе диффузионно слабо связанных уравнений Хатчинсона:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1(t) &= r[1 - N_1(t-1)]N_1(t) + d(N_2(t) - N_1(t)), \\ \dot{N}_2(t) &= r[1 - N_2(t-1)]N_2(t) + d(N_1(t) - N_2(t)), \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

при значениях $r = \pi/2 + \varepsilon$ и $d = \varepsilon \varkappa \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}}$ (см. [29]). Рассмотрим полученные для этой задачи результаты подробнее.

Теорема 1.2. Пусть в системе (1.1.13) $\delta = -\arctg \frac{\pi}{2}$, $b_0 = \frac{\pi + 6}{3\pi - 2}$, тогда в ней при уменьшении параметра \varkappa происходят следующие фазовые перестройки:

- 1) При значениях параметра $\varkappa > \varkappa_{\pi, 1} \approx 0.931$ глобально устойчивым является единственное состояние равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ (соответствует синхронному периодическому режиму у исходной системы).
- 2) При $\varkappa < \varkappa_{\pi, 1}$ к глобально устойчивому состоянию равновесия $(1, 1, 0)^T$ добавляется неустойчивое $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, где $\xi^* = \sqrt{1 - 2\varkappa \cos \delta}$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы).
- 3) При уменьшении \varkappa до значения $\varkappa = \varkappa_{AC} \approx 0.544$ из “воздуха” рождаются еще два устойчивых состояния равновесия – точки $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*, 0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и

два неустойчивых — $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $D = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*, 0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того $\eta_1^* > \xi_1^*, \xi_2^* > \eta_2^*$ (соответствуют не синхронизированным периодическим режимам у исходной системы). Состояния равновесия A и B устойчивы при уменьшении параметра κ вплоть до значения $\kappa_C \approx 0.524$. Формулы для определения величин $\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*$ даются ниже.

- 4) При $\kappa = \kappa_C$ состояния A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова-Хопфа). (Этим устойчивым периодическим решениям системы (1.1.13) соответствуют не синхронизированные квазипериодические колебания системы (1.1.1).)
- 5) При $\kappa = \kappa_{кр} \approx 0.5015$ (критическое для пространственно однородных режимов значение) неустойчивые неподвижные точки C и D сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают его устойчивость.
- 6) При дальнейшем изменении параметра κ устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из точек A и B , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $\kappa = \kappa_S \approx 0.481$ не сожмутся в точке $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$. (Обратная бифуркация расщепления сепаратрис.) В результате происходит объединение пары циклов в один C_U , который остается устойчивым вплоть до значения $\kappa = \kappa_{\pi,3} \approx 0.429$.
- 7) При $\kappa = \kappa_{\pi,2} \approx 0.466$ от неустойчивого состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа ответвляется неустойчивый цикл C_{Π} , который при $\kappa = \kappa_{\pi,3}$ сливается с устойчивым циклом C_U и исчезает.
- 8) При $\kappa_{\pi,3} > \kappa > 0$ система имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе системы (1.1.1).

При других значениях δ, b_0 , расположенных в нижней части области параметров (см. рис. 1.1), но выше кривой, отмеченной единицей, не происходит существенных изменений в вышеизложенном сценарии. Лишь для точек плоскости, лежащих выше кривой, отмеченной числом 5, последняя из описанных бифуркаций упрощается: устойчивый цикл не аннигилирует с неустойчивым, а стягивается при $\kappa = \kappa_{\pi,2}$ в состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ — бифуркация Андронова-Хопфа. Кроме того, для точек области, расположенных выше кривой, отмеченной четверкой, при потере устойчивости однородного состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$ от него ответвляются устойчивые

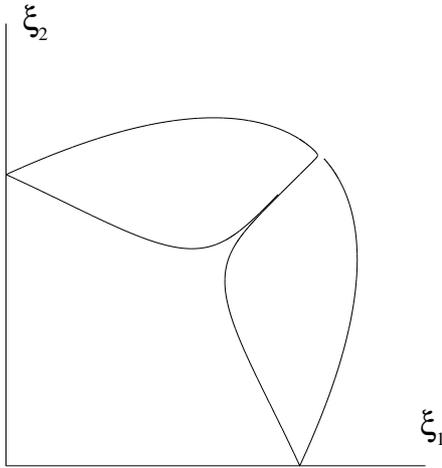


Рис. 1.2. Петля сепаратрисы при $\varkappa = 2.89667$

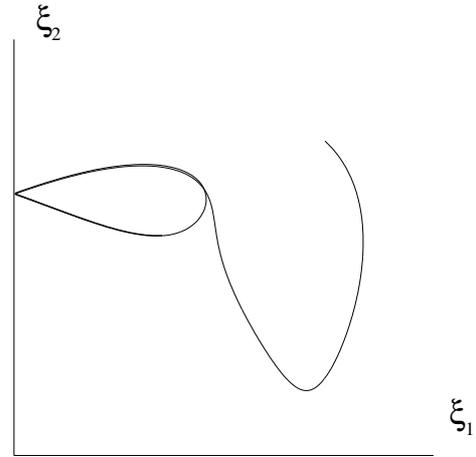


Рис. 1.3. Сепаратриса состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$, наматывающаяся на неустойчивый цикл, при $\varkappa = 2.059$

неподвижные точки A и B , а докритических устойчивых режимов не существует. Во втором разделе главы приводятся последовательности фазовых перестроек для двух точек из данной области.

Увеличение параметра b_0 приводит к существенно иным результатам. Рассмотрим систему (1.1.12) при $\delta = \frac{\pi}{3}$, $b_0 = 10$. Эти значения δ и b_0 лежат в области параметров, соответствующих второму сценарию, и дают типичный пример такого рода.

Теорема 1.3. Пусть параметры системы (1.1.13) принимают значения $\delta = -\pi/3$ и $b_0 = 10$, тогда имеются следующие бифуркационные значения параметра \varkappa :

- 1) Система (1.1.13) в этом случае ни при каких значениях \varkappa не имеет устойчивых докритических режимов и при $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}} \approx 8.16$ однородное состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ – глобально устойчиво.
- 2) Уменьшение \varkappa приводит к ответвлению при $\varkappa = \varkappa_{\text{кр}}$ пары состояний равновесия A и B , наследующих устойчивость однородного режима.

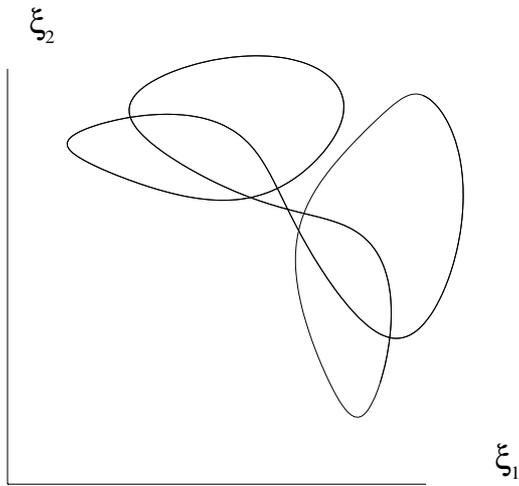


Рис. 1.4. Устойчивый цикл C_2^T при $\mu = 1.506$

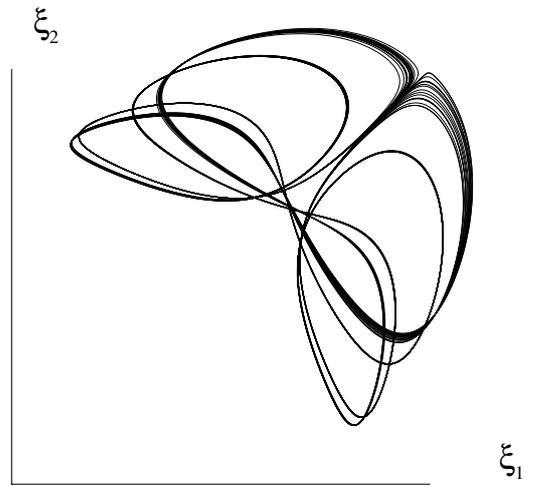


Рис. 1.5. Странный аттрактор A_2^T при $\mu = 1.508$

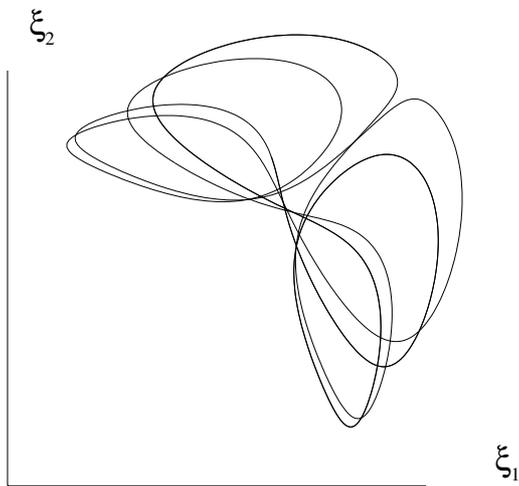


Рис. 1.6. Устойчивый цикл C_3^S при $\mu = 1.5097$

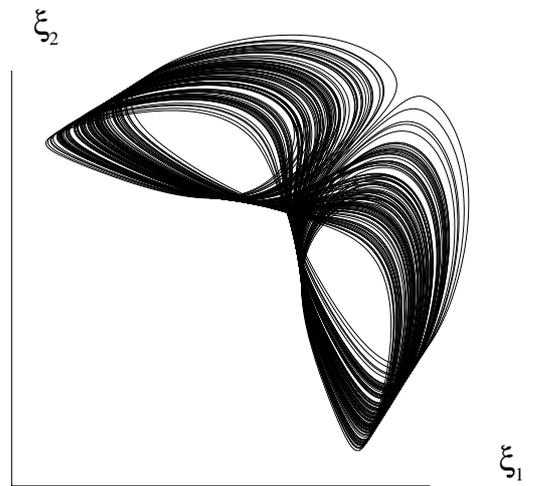


Рис. 1.7. Странный аттрактор A_∞^S при $\mu = 1.7$

- 3) При $\kappa_{кр} > \kappa > \kappa_{S,2} \approx 2.059$ эти состояния равновесия остаются единственными устойчивыми режимами системы.
- 4) При $\kappa = \kappa_S \approx 2.898$ сепаратрисы, выходящие из седлового однородного состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$, возвращаются в него, образуя две симметричные петли, из которых при дальнейшем уменьшении κ рождается пара неустойчивых симметричных циклов C_A и C_B (см. рис. 1.2).
- 5) При $\kappa = \kappa_{A,1}$ неустойчивые направления седлового однородного состояния равновесия попадают на устойчивые многообразия неустойчивых предельных циклов C_A и C_B (см. рис. 1.3). Отметим, что состояния равновесия A и B остаются по-прежнему устойчивыми.
- 6) При $\kappa < \kappa_{A,1}$ фазовая картина резко меняется: колебания становятся неупорядоченными, рождается странный аттрактор.
- 7) При $\kappa = \kappa_C \approx 1.94$ неподвижные точки A и B теряют устойчивость в результате обратной бифуркации Андронова-Хопфа: в них стягиваются неустойчивые циклы C_A и C_B .
Бифуркации, происходящие с системой (1.1.13), при $\kappa_C > \kappa > 0$ удобнее описывать при возрастающем κ .
- 8) При $0 < \kappa < \kappa_{\pi,2} = 0.5$ глобально устойчиво состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$.
- 9) При $\kappa = \kappa_{\pi,2}$ от состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ ответвляется самосимметричный устойчивый цикл C_{Π} (бифуркация Андронова-Хопфа). Под самосимметричностью цикла C_{Π} будем понимать его инвариантность относительно замены (1.1.14).
- 10) При $\kappa = \kappa_{\pi,1}$ состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ пропадает.
- 11) При $\kappa = \kappa_1^S \approx 1.4$ указанная симметрия цикла C_{Π} теряется, он расщепляется на два симметричных цикла C_1^T, \bar{C}_1^T (бифуркация потери симметрии).
- 12) При $\kappa = \kappa_{1,1} \approx 1.4589, \kappa_{1,2} \approx 1.4594 \dots \kappa_{1,\infty} \approx 1.45955$ с каждым из циклов C_1^T, \bar{C}_1^T происходят бифуркации удвоения периода. В результате при $\kappa > \kappa_{1,\infty}$ имеем два симметричных странных аттрактора A_1^T, \bar{A}_1^T , возникших по фейгенбаумовскому сценарию.

13) При $\varkappa = \varkappa_1^H \approx 1.4596$ пара симметричных странных аттракторов A_1^T, \bar{A}_1^T объединяется в один самосимметричный A_1^S , который при $\varkappa = \varkappa_1^A \approx 1.46$ превращается в самосимметричный двухобходный цикл C_1^S , условно “двойного” по сравнению с C_Π периода.

14) При увеличении \varkappa процесс повторяется: при $\varkappa = \varkappa_2^S \approx 1.5$ теряется симметрия цикла C_2^S , затем с каждым из пары родившихся циклов C_2^T, \bar{C}_2^T при $\varkappa = \varkappa_{2,1} \approx 1.507, \varkappa_{2,2} \approx 1.5072 \dots \varkappa_{2,\infty} \approx 1.5073$ происходят бифуркации удвоения, завершающиеся рождением симметричных странных аттракторов A_2^T, \bar{A}_2^T и т.д.

Таким образом, имеем каскад бифуркаций странных аттракторов $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S$ и циклов $C_j^T, \bar{C}_j^T; C_j^S$, $j = 1, 2 \dots$ сопровождающийся усложнением их структуры. Вычислена оценка значения $\varkappa_\infty \approx 1.527$, к которому сходятся последовательности $\varkappa_n^H, \varkappa_n^A, \varkappa_n^S, \varkappa_{n,\infty}$ при $n \rightarrow \infty$.

При описании сценариев для обозначения одинаковых бифуркаций использовались одинаковые номера \varkappa_j . Во втором сценарии последовательность общих бифуркаций изменилась, поэтому приведем для сравнения цепочки неравенств, связывающих критические значения, для первого и второго случая соответственно

$$\begin{aligned} \varkappa_{\pi,1} &> \varkappa_{AC} > \varkappa_C > \varkappa_{кр} > \varkappa_S > \varkappa_{\pi,2} > \varkappa_{\pi,3} > 0, \\ \varkappa_{кр} &> \varkappa_S > \varkappa_{A,1} > \varkappa_C > \dots > \varkappa_\infty > \dots > \varkappa_{2,\infty} > \dots > \varkappa_{2,1} > \\ &> \varkappa_2^S > \varkappa_1^A > \varkappa_1^H > \varkappa_{1,\infty} > \dots > \varkappa_{1,1} > \varkappa_1^S > \varkappa_{\pi,1} > \varkappa_{\pi,2} > 0. \end{aligned}$$

Для иллюстрации бифуркаций второго сценария на рисунках 1.4, 1.6 изображены проекции предельных циклов C_2^T и C_3^S системы (1.1.13) на плоскость $\alpha = 0$ при значениях $\varkappa = 1.506$ и $\varkappa = 1.5097$ соответственно. Масштаб изменений переменных ξ_1, ξ_2 равен 1. Наблюдаемые при $\varkappa_\infty < \varkappa < \varkappa_{S,2}$ неупорядоченные колебания имеют в качестве притягивающего множества странный аттрактор (см. рис. 1.7), более сложной структуры, чем $A_j^T, \bar{A}_j^T; A_j^S$ $j = 1, 2 \dots$ (см. рис. 1.5 с проекцией на плоскость $\alpha = 0$ траектории, лежащей, в качестве примера, на аттракторе A_2^T при $\varkappa = 1.508$). Вычисления показали, что одна из ляпуновских экспонент аттрактора A_∞^S положительна, вторая равна нулю, а третья — отрицательна. В частности, при $\varkappa = 1.7$ имеем $\lambda_1 \approx 0.41, \lambda_2 \approx 0.00, \lambda_3 \approx -5.58$ и ляпуновская размерность аттрактора оказывается равной $d_L \approx 2.07$. Более подробно результаты численного анализа представлены в следующем пункте.

1.1.3. Обоснование результатов

Перейдем к описанию способов получения бифуркационных значений параметра \varkappa при различных δ и b_0 .

Относительно простым оказалось определение величин $\varkappa_{\pi,1}$, \varkappa_{AC} , \varkappa_C , $\varkappa_{кр}$, $\varkappa_{\pi,2}$, связанных с появлением и устойчивостью состояний равновесия системы (1.1.13). Введем три многочлена:

$$\begin{aligned} G(u) &\equiv 4(2(1 - \varkappa \cos \delta) - u)^2 + 16 \cos^2 \delta (1 - \varkappa \cos \delta)u + \\ &\quad 2\varkappa^2(8 \cos^4 \delta - 8 \cos^2 \delta + 1) - 16 \cos^2 \delta (1 - \varkappa \cos \delta)^2, \\ H(u) &\equiv (2(1 - \varkappa \cos \delta) - u)^2 + b_0^2 u^2 - 2\varkappa^2(2 \cos^2 \delta - 1), \\ R(u) &\equiv (b_0^2 G(u) - 4 \cos^2 \delta H(u))(b_0^2(2\varkappa - H(u) + G(u)) - \\ &\quad - 8\varkappa \cos \delta^2) + 2\varkappa^2(b_0^2 - 4 \cos^2 \delta)^2(2b_0^2 u^2 - H(u)). \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Имеет место следующее утверждение технического характера.

Лемма 1.1. *Множество неподвижных точек системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1.12) принадлежит множеству решений алгебраической системы*

$$\begin{aligned} \xi_1^2 \xi_2^2 G(\xi_1^2 + \xi_2^2) &= \varkappa^2(\xi_1^4 + \xi_2^4) + 16 \cos^2 \delta \xi_1^4 \xi_2^4, \\ R(\xi_1^2 + \xi_2^2) &= 0, \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{(b_0 \xi_2^2 \cos^2 \delta - (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2)(1 - \cos^2 \delta))(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{b_0 \xi_2(\xi_1^2 - \xi_2^2)(1 - \cos^2 \delta) - \cos^2 \delta (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

где многочлены G и R определяются по формулам (1.1.17).

Для определения состояний равновесия (1.1.13) имеем систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \varkappa \xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_1^2) \xi_1 &= 0, \\ \varkappa \xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - \varkappa \cos \delta - \xi_2^2) \xi_2 &= 0, \\ -\varkappa \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b_0(\xi_1^2 - \xi_2^2) &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

исключая в ней переменную α , получим систему (1.1.18).

Фигурирующий в приведенном утверждении многочлен четвертого порядка по u $R(u)$ имеет корни $u = 2$ и $u = 2 - 4\varkappa \cos \delta$, которые соответствуют состояниям равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1$, $\alpha = 0$ и $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 - 2\varkappa \cos \delta}$, $\alpha = \pi$. Из условия существования второго из них имеем

$$\varkappa_{\pi,1} = \frac{1}{2 \cos \delta}.$$

После деления многочлена $R(u)$ на $u^2 + 4(\varkappa \cos \delta - 1)u + 4(1 - 2\varkappa \cos \delta)$ получается квадратный трехчлен

$$\alpha_1(\delta, b_0, \varkappa)u^2 + \alpha_2(\delta, b_0, \varkappa)u + \alpha_3(\delta, b_0, \varkappa), \quad (1.1.20)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(\delta, b_0, \varkappa) &= (b_0^2 - 3)(b_0^2 - \cos^2 \delta - \cos^2 \delta b_0^2), \\ \alpha_2(\delta, b_0, \varkappa) &= 4 \left((-4 \cos^4 \delta (b_0^2 + 1) + 7 \cos^2 \delta b_0^2 - 3(b_0^2 - \cos^2 \delta))(1 - \varkappa \cos \delta) \right), \\ \alpha_3(\delta, b_0, \varkappa) &= \varkappa^2 (16 \cos^4 \delta - 4b_0^2 \cos^2 \delta + 3b_0^2 - 12 \cos^2 \delta) + \\ &\quad (4(b_0^2 + 1) \cos^4 \delta - 7b_0^2 \cos^2 \delta + 3(b_0^2 - \cos^2 \delta))(1 - 2\varkappa \cos \delta), \end{aligned}$$

корни которого определяют состояния равновесия A, B, C, D . Из положительности дискриминанта многочлена (1.1.20) получаем значение \varkappa_{AC} как большего корня квадратичного по \varkappa уравнения

$$\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0.$$

При известном $u = \xi_1^2 + \xi_2^2$ первое уравнение (1.1.18) представляет собой квадратный трехчлен относительно $\xi_1^2 \xi_2^2$, тем самым удается определить первые две компоненты состояний равновесия A, B, C, D , а затем из третьего уравнения (1.1.18) и компоненту α^* .

Следующее утверждение позволяет выяснить, в каких случаях от состояния равновесия $\xi_1 = \xi_2 = 1, \alpha = 0$ ответвляется пара состояний равновесия при $\varkappa > \varkappa_{кр}$, а в каких – при $\varkappa < \varkappa_{кр}$.

Лемма 1.2. Пусть $(\varkappa - \varkappa_{кр})c > 0$, где

$$\begin{aligned} c = c(\delta, b_0) &\equiv \frac{1}{\varkappa_{кр}} \left(2b_0 \sqrt{1 - \cos^2 \delta} (b_0^2 \cos \delta - 5 \cos \delta + 2) + \right. \\ &\quad \left. + 2(3 \cos^2 \delta - 1)(b_0^2 + 1) \right), \quad \varkappa_{кр} = -\cos \delta - b_0 \sin \delta, \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

тогда в достаточно малой окрестности неподвижной точки $(1, 1, 0)^T$ имеются два состояния равновесия $(\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha^*)^T$ и $(\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha^*)^T$ которые устойчивы при $\varkappa - \varkappa_{кр} < 0$ и $c < 0$ и неустойчивы при $\varkappa - \varkappa_{кр} > 0$ и $c > 0$. Величины $\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha^*$ допускают при $|\varkappa - \varkappa_{кр}| \ll 1$ асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \xi_1^* &= 1 + \sqrt{(\varkappa - \varkappa_{кр})/c} + O(\varkappa - \varkappa_{кр}), \\ \xi_2^* &= 1 - \sqrt{(\varkappa - \varkappa_{кр})/c} + O(\varkappa - \varkappa_{кр}), \\ \alpha^* &= -2(1 + \varkappa \cos \delta) \sqrt{\frac{\varkappa - \varkappa_{кр}}{c(1 - \cos^2 \delta)}} + O(\varkappa - \varkappa_{кр}). \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Утверждение леммы получается путем разложения правых частей системы (1.1.13) в ряд по степеням $\sqrt{|\varkappa - \varkappa_{\text{кр}}|}$. При этом коэффициент разложения при $\sqrt{|\varkappa - \varkappa_{\text{кр}}|}$ определяется из условий разрешимости алгебраической системы на третьем шаге при $|\varkappa - \varkappa_{\text{кр}}|^{3/2}$.

В соответствии формулой с (1.1.21) из леммы 1.2 выражение $c(\delta, b_0)$ представляет собой кубический по b_0 многочлен и уравнение

$$c(\delta, b_0) = 0, \quad (1.1.23)$$

определяет на плоскости параметров δ, b_0 три кривые, которые на рис. 1.1 помечены числами два, три и четыре. Данные кривые делят плоскость на области так, что между кривыми два и три, а также выше кривой четыре расположены значения δ, b_0 , для которых система (1.1.13) не имеет при $\varkappa - \varkappa_{\text{кр}} > 0$ неоднородных состояний равновесия A, B, C, D , а для значений δ, b_0 из остальных областей такие состояния равновесия имеются.

Перейдем к условиям устойчивости состояний равновесия, с помощью которых определяются величины $\varkappa_C, \varkappa_{\text{кр}}, \varkappa_{\pi,2}$. Условия устойчивости неподвижной точки $(1, 1, 0)^T$ дают

$$\varkappa_{\text{кр}} = -\cos \delta - b_0 \sin \delta.$$

По смыслу рассматриваемой задачи $\varkappa_{\text{кр}} > 0$, кроме того, при $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}}$ состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ не должно терять устойчивость. Эти условия выполнены при $b_0 > -\text{ctg} \delta$ и $-\pi/2 < \delta < 0$. На рис. 1.1 график кривой $b_0 = -\text{ctg} \delta$ отмечен единицей.

Условия устойчивости точки $\xi_1 = \xi_2 = \sqrt{1 - 2\varkappa \cos \delta}$, $\alpha = \pi$ позволят определить

$$\varkappa_{\pi,2} = \frac{1}{4 \cos \delta} \quad (1.1.24)$$

так, что при $\varkappa > \varkappa_{\pi,2}$ данная неподвижная точка неустойчива, а при $\varkappa < \varkappa_{\pi,2}$ — устойчива.

Обозначим $\sigma = \varkappa - \varkappa_{\pi,2}$ и рассмотрим характер потери устойчивости данного состояния равновесия, в частности, докажем следующую лемму.

Лемма 1.3. Пусть $b_0 > -\text{ctg} 2\delta$ и $\sigma d_{\pi,0} < 0$, где

$$d_{\pi,0} = -\frac{3(-3 + 3b^2 + (1 + 3b^2) \cos 2\delta + 2b \sin 2\delta)}{8(-2b \cos \delta + \sin \delta)^2}, \quad (1.1.25)$$

тогда при $d_{\pi,0} < 0$ ($d_{\pi,0} > 0$) найдется такое $\sigma_0 > 0$, что для любого $0 < \sigma \leq \sigma_0$ ($-\sigma_0 \leq \sigma < 0$) в достаточно малой окрестности неподвижной точки $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ имеется орбитально асимптотически устойчивый

(неустойчивый) цикл, асимптотика которого задается формулой

$$(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \alpha(\tau))^T = \sqrt{-\frac{\sigma\phi_{\pi,0}}{d_{\pi,0}}} \times \\ \times \left(\exp \left(\left(i\omega + \sigma \left(\psi_{\pi,0} - \frac{\phi_{\pi,0}c_{\pi,0}}{d_{\pi,0}} \right) \right) \tau \right) (a_1, -a_1, 1)^T + \kappa.c. \right) + O(\sigma), \quad (1.1.26)$$

где

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{-1 - 2b \operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg}^2 \delta}, \quad a_1 = -\frac{2i\omega + \sec^2 \delta - 2b \operatorname{tg} \delta}{4\sqrt{2}(1 + i\omega)(2b - \operatorname{tg} \delta)}, \quad (1.1.27)$$

$$\phi_{\pi,0} + i\psi_{\pi,0} = 2 \cos \delta \left(2 - \frac{2i\omega}{\cos 2\delta + b \sin 2\delta} \right), \quad (1.1.28)$$

$$c_{\pi,0} = -\frac{3\omega \cos \delta ((3 - 13b^2) \cos \delta + (1 + b^2) \cos 3\delta + 8b \sin \delta)}{8(-2b \cos \delta + \sin \delta)^2 (\cos 2\delta + b \sin 2\delta)}. \quad (1.1.29)$$

Для доказательства данного утверждения при $|\sigma| \ll 1$ в системе (1.1.13) выполняется стандартная замена метода нормальных форм

$$(\xi_1(s, \tau), \xi_2(s, \tau), \alpha(s, \tau))^T = (\xi^*, \xi^*, \pi)^T + \sqrt{|\sigma|} (\eta(\tau) e^{i\omega s} (a_1, -a_1, 1)^T + \kappa.c.) + \\ + \sigma w_1(s, \tau) + |\sigma|^{3/2} w_2(s, \tau) + \dots, \quad \tau = |\sigma|s.$$

Из условий разрешимости задачи, возникающей при $|\sigma|^{3/2}$ для $w_2(s, \tau)$, в классе $2\pi/\omega$ -периодических по s функций получается уравнение

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \operatorname{sign}(\sigma) (\phi_{\pi,0} + i\psi_{\pi,0}) \eta + (d_{\pi,0} + ic_{\pi,0}) |\eta|^2 \eta \quad (1.1.30)$$

относительно комплекснозначной функции $\eta(\tau)$. Утверждение леммы получается из требования существования и устойчивости (неустойчивости) автомоделных циклов уравнения (1.1.30).

На рис. 1.1 числом шесть отмечен график зависимости $b_0 = -\operatorname{ctg} 2\delta$, для значений δ, b_0 выше которого выполнено первое условие леммы и состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ теряет устойчивость колебательным образом. Кривая, отмеченная числом пять, соответствует значениям параметров, при которых вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной в точке $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ при $\varkappa = \varkappa_{\pi,2}$, обращается в нуль, тем самым, в соответствии с леммой 1.3 при значениях δ, b_0 выше этой кривой происходит рождение устойчивого

цикла ($\varkappa > \varkappa_{\pi,2}$), а ниже кривой – неустойчивого ($\varkappa < \varkappa_{\pi,2}$). Формула зависимости, следующая из соотношения $d_{\pi,0} = 0$, имеет вид

$$b_0 = \frac{-\sin 2\delta + \sqrt{9 + 6 \cos 2\delta - 3 \cos^2 2\delta + \sin^2 2\delta}}{3(1 + \cos 2\delta)}. \quad (1.1.31)$$

Условия устойчивости состояний равновесия A и B дают величину \varkappa_C . Потеря устойчивости состояниями равновесия A и B происходит колебательным образом, и для того чтобы определить, какие при этом появляются режимы, следует найти ляпуновскую величину $d_{A,0} + ic_{A,0}$ в этой точке. Применим для этого формулы (1.1.7) к системе (1.1.13) в точке A или B . В силу того, что формулы для состояний равновесия A, B, C, D крайне громоздки, не удалось получить компактного аналитического выражение как для \varkappa_C , так и для ляпуновской величины $d_{A,0} + ic_{A,0}$. При этом численное определение этих величин не представляет труда. В приложении к пособию [57] приведена программа для программного пакета Mathematica, с помощью которой могут быть получены значения $d_{A,0}(b_0, \delta)$. Кривая с номером семь на рис. 1.1 представляет график корня уравнения $d_{A,0}(b_0, \delta) = 0$. При этом для значений δ, b_0 ниже этой кривой потеря устойчивости состояний равновесия A и B происходит мягко с рождением устойчивых циклов C_A и C_B ($\varkappa < \varkappa_C$), а выше кривой – жестко. В последнем случае при $\varkappa > \varkappa_C$ в данные состояния равновесия стягиваются неустойчивые циклы.

Основной результат данной главы состоит в том, что кривая с номером семь на рис. 1.1 разделяет области параметров, соответствующие хаотическому и нехаотическому сценариям фазовых перестроек, а верхние ветви кривых с номерами шесть и семь выделяют область хаотического сценария с каскадом бифуркаций хаотических аттракторов, описанных в теореме 1.3.

Обоснование данного результата возможно лишь с применением численных методов. Перейдем к описанию этих методов и способов определения бифуркационных значений параметра \varkappa из тех, которые не удалось найти аналитически.

Сразу отметим, что при вычислениях существенно использовалось следующее свойство системы (1.1.13).

Лемма 1.4. *При любых начальных условиях траектории системы (1.1.13) начиная с некоторого момента s_1 остаются в области $\xi_1^2(s) + \xi_2^2(s) \leq 2$, $0 \leq \alpha(s) \leq 2\pi$ фазового цилиндра данной системы.*

Доказательство. Обозначим $V = \xi_1^2 + \xi_2^2$, тогда из (1.1.13) имеем

$$\frac{dV}{ds} = 2V - 2\xi_1^4 - 2\xi_2^4 - 2d \cos \delta (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 \xi_2 \cos \alpha).$$

Выражение $-2\xi_1^4 - 2\xi_2^4$ представляется в виде $-(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$, а следовательно, оценивается сверху величиной $-V^2$, кроме того, для всех ξ_1, ξ_2, α выполнено неравенство $\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos \alpha \geq 0$. Отсюда в случае $-\pi/2 \leq \delta \leq 0$, очевидно, имеем $\frac{dV}{ds} \leq 2V - V^2$, а значит, и утверждение леммы.

Лемма (1.4) позволяет выполнить численную проверку утверждений 1 и 8 теорем 1.2 и 1.3 о глобальной устойчивости состояний равновесия. Для этого при значениях параметров, удовлетворяющих утверждениям 1 и 8, из области фазового пространства

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 2, \quad \xi_1 \leq \xi_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

случайным образом и на равномерной сетке выбирались 20 000 начальных условий, для каждого из которых параллельно строились траектории системы (1.1.13) до их приближения с заданной точностью к однородному состоянию равновесия в первом случае и к состоянию $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ — во втором.

В теореме 1.2 осталось только одно значение, которое не удается найти аналитическими методами, это величина \varkappa_S , при которой происходит бифуркация расщепления сепаратрис и два устойчивых симметричных цикла системы (1.1.13) C_A и C_B объединяются в один самосимметричный C_U . Численное определение этой величины осуществляется достаточно просто: для устойчивого цикла C_A или C_B системы (1.1.13) вычисляется длина траектории, при переходе через критическое значение \varkappa_S получаем устойчивый цикл C_U , длина траектории которого примерно вдвое больше длины траектории цикла C_A . Определенную трудность вызывает лишь вычисление этой величины с высокой точностью, поскольку при приближении \varkappa к \varkappa_S период цикла неограниченно растет.

Таким образом, описаны способы получения всех бифуркационных значений параметра \varkappa , приведенных в теореме 1.2.

Перейдем теперь к задаче определения величин $\varkappa_n^S, \varkappa_{n,j}, \varkappa_{n,\infty}, \varkappa_n^H, \varkappa_n^A$, $j = 1, \dots, n = 1, \dots$ из теоремы 1.3.

Все эти величины оказалось удобно оценивать на основе вычислений ляпуновских экспонент $\lambda_{max}(\varkappa), \lambda_2(\varkappa), \lambda_3(\varkappa)$ на аттракторе системы (1.1.13).

Напомним, что для экспоненциально орбитально асимптотически устойчивых циклов системы (1.1.13) ляпуновские экспоненты должны удовлетворять следующим неравенствам: $\lambda_{max}(\varkappa) = 0, \lambda_2(\varkappa) < 0, \lambda_3(\varkappa) < 0$. В точках бифуркаций потери симметрии \varkappa_n^S и бифуркаций удвоения периода $\varkappa_{n,j}$, наряду с условием $\lambda_{max}(\varkappa) = 0$, величина $\lambda_2(\varkappa)$ также должна обращаться в нуль. Последнее условие позволяет вычислить $\varkappa_n^S, \varkappa_{n,j}, j = 1, \dots, \varkappa_n^A, n = 1, \dots$, в случае если эти величины удастся локализовать. Проблема локализации точек бифуркаций усугубляется с ростом номеров j и n ,

поскольку эти точки сгущаются к некоторым предельным значениям $\varkappa_{n,\infty}$, которые в свою очередь имеют точкой сгущения величину \varkappa_∞ .

На рис. 1.8 приведен график зависимости $\lambda_{max}(\varkappa)$ на промежутке изменения \varkappa от 1.45 до 2.1 с шагом 0.0001. Данный промежуток выбран из тех соображений, что на нем наблюдается сложная динамика системы (1.1.13), а величина $\lambda_{max}(\varkappa)$ может оказаться положительной.

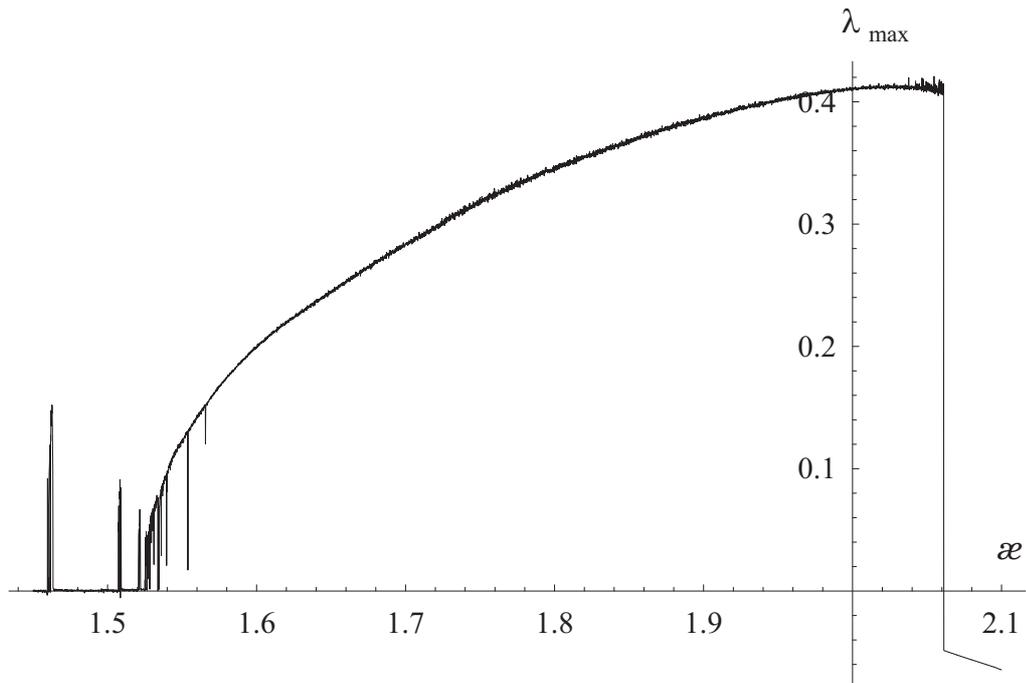


Рис. 1.8. График зависимости $\lambda_{max}(\varkappa)$ на промежутке [1.45, 2.1]

Для иллюстрации представленного в теореме 1.3 каскада каскадов бифуркаций рассмотрим подробнее начальный участок [1.4, 1.5265] представленной выше области изменения \varkappa . На рисунках 1.9–1.11 изображены графики зависимостей $\lambda_{max}(\varkappa)$, $\lambda_2(\varkappa)$, $\lambda_3(\varkappa)$ для первых четырех каскадов бифуркаций. Для первых двух каскадов легко локализуются и определяются точки $\varkappa_1^S, \varkappa_{1,1}, \varkappa_{1,2}, \varkappa_{1,3}$ из первого каскада и $\varkappa_2^S, \varkappa_{2,1}, \varkappa_{2,2}, \varkappa_{2,3}$ из второго, которые и представлены в утверждениях 11–14 теоремы 1.3.

На рисунках 1.12, 1.13 для иллюстрации масштабной инвариантности графика зависимости $\lambda_2(\varkappa)$ представлены участки графика для первого и второго каскадов бифуркаций, причем масштаб по \varkappa подобран так, чтобы первая и последняя бифуркации в соответствующих каскадах были на одном уровне.

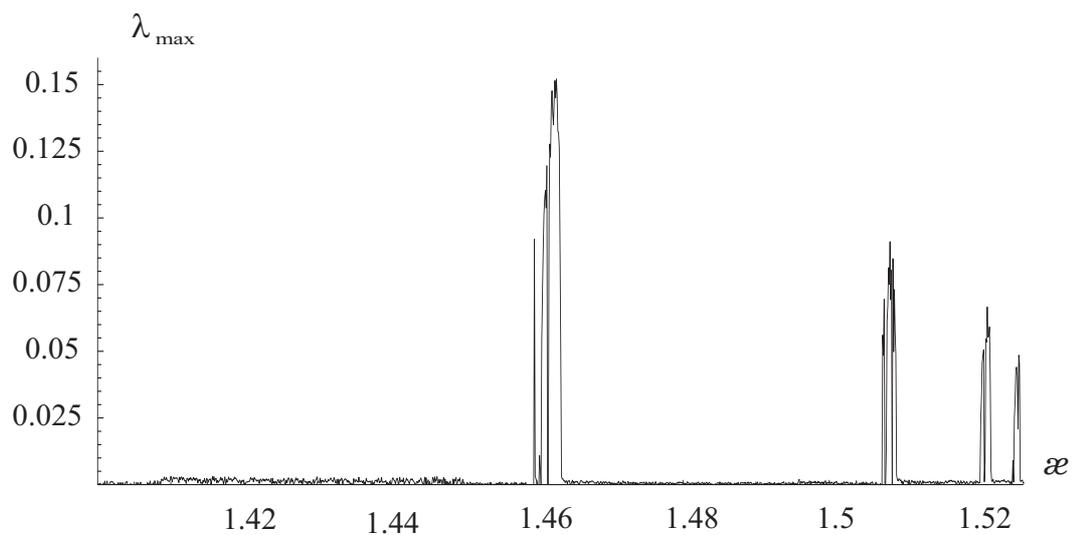


Рис. 1.9. График зависимости $\lambda_{max}(z)$ на промежутке $[1.4, 1.5265]$

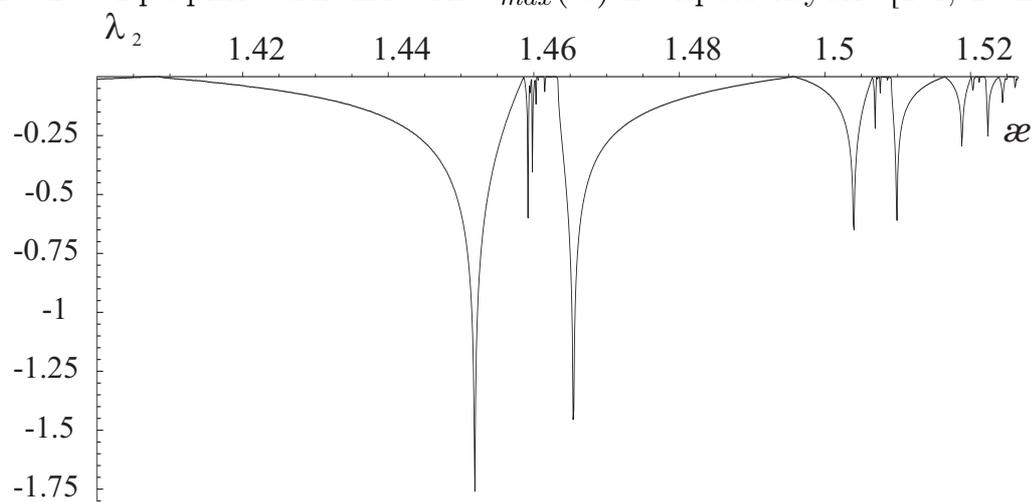


Рис. 1.10. График зависимости $\lambda_2(z)$ на промежутке $[1.4, 1.5265]$

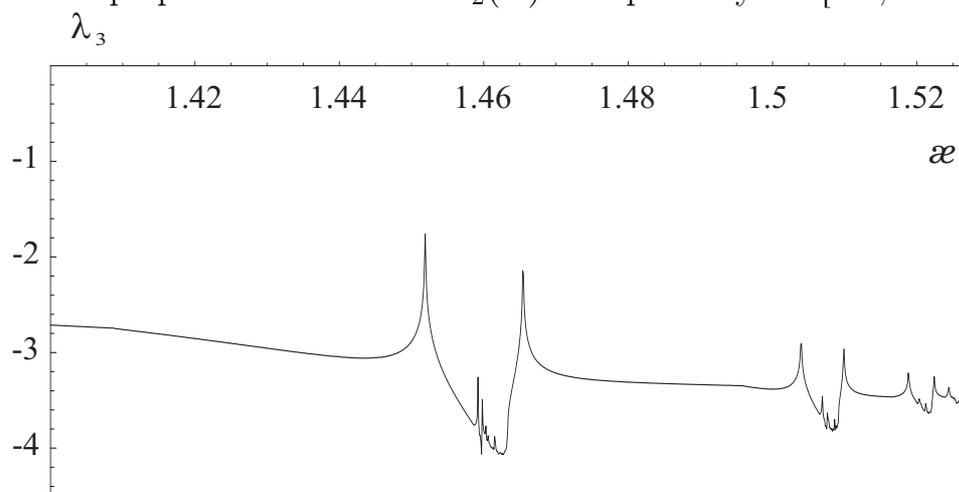


Рис. 1.11. График зависимости $\lambda_3(z)$ на промежутке $[1.4, 1.5265]$

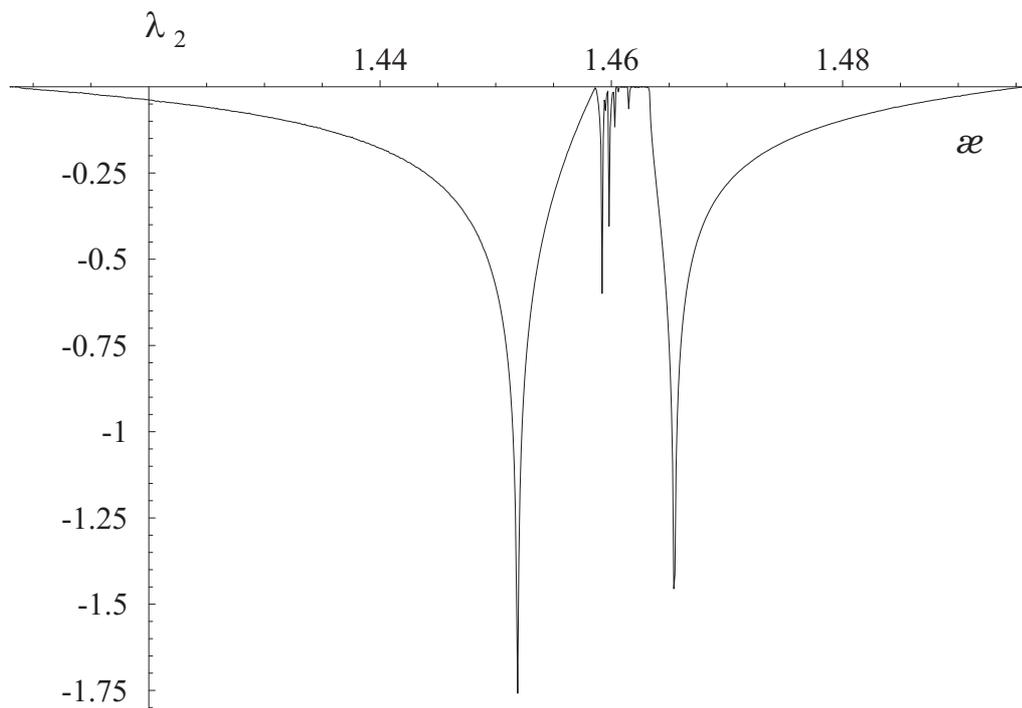


Рис. 1.12. График зависимости $\lambda_2(\alpha)$ на промежутке $[1.408, 1.4956]$

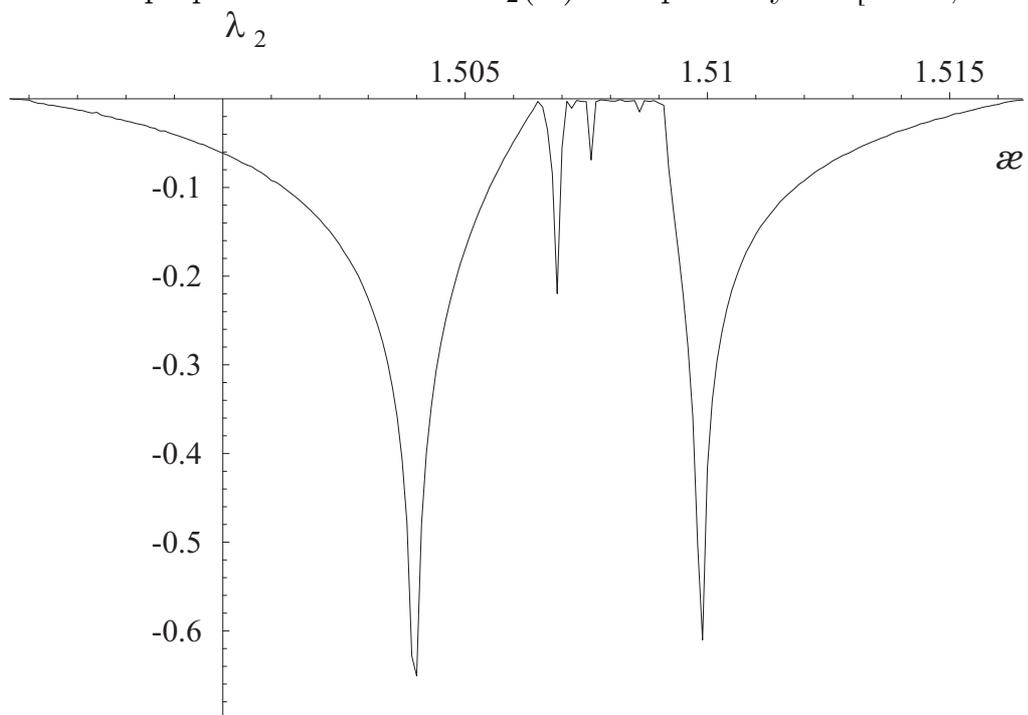


Рис. 1.13. График зависимости $\lambda_2(\alpha)$ на промежутке $[1.4956, 1.5165]$

Увеличение \varkappa сверх значения $\varkappa_\infty \approx 1.527$ приводит к постепенному росту значения λ_{max} , причем на начальном промежутке от \varkappa_∞ до приблизительно 1.566 в графике $\lambda_{max}(\varkappa)$ имеются многочисленные провалы до нулевого значения, соответствующие окнам периодичности. Начиная же с 1.567 окон периодичности обнаружить не удастся и величина $\lambda_{max}(\varkappa)$ монотонно растет для \varkappa от 1.567 вплоть до $\varkappa_{S,2} \approx 2.059$, при котором хаотические колебания исчезают.

1.1.4. Динамика пары диффузионно связанных уравнений Хатчинсона

Рассмотрим в этой части фазовые перестройки, происходящие с системой (1.1.16) диффузионно связанных уравнений Хатчинсона. Наша цель состоит в сопоставлении фазовых перестроек нормальной формы (1.1.13) и системы (1.1.16).

Пусть в (1.1.16) $h = 1$, а $r = 1.7$, тогда $\varepsilon = r - \pi/2 \approx 0.1292$. Учитывая равенство

$$d = \varepsilon \varkappa \frac{\pi}{\sqrt{4 + \pi^2}} \approx 0.10899 \cdot \varkappa, \quad (1.1.32)$$

можно по критическим значениям \varkappa оценить критические значения d , при которых должны происходить фазовые перестройки системы (1.1.16) в соответствии с локальной теорией. В первой строке приведенной ниже таблицы 1.1 содержатся значения параметра d , найденные с помощью формулы (1.1.32) из теоремы 1.2, а во второй — значения d , полученные в результате численного анализа системы (1.1.16). Нетрудно видеть, что представленные величины дают хорошую оценку бифуркационных параметров.

Таблица 1.1.

d_{AB}	d_C	$d_{кр}$	d_S	$d_{\pi 2}$	$d_{\pi 3}$
0.05929	0.05711	0.05466	0.05242	0.05079	0.04676
0.0538	0.0519	0.0535	0.0486	0.049	0.0443

Перечислим фазовые перестройки системы (1.1.16), происходящие при уменьшении параметра d .

- 1) при $d > d_{AB}$ устойчив только однородный цикл;
- 2) при $d = d_{AB}$ из уплотнения траекторий появляется пара симметричных друг другу устойчивых циклов;
- 3) при $d = d_C$ от симметричных циклов ответвляются симметричные устойчивые торы;

- 4) при $d = d_{кр}$ теряет устойчивость однородный цикл;
 5) при $d = d_S$ пара симметричных друг другу торов превращается в один самосимметричный тор;
 6) при $d < d_{\pi 2}$ становятся устойчивыми колебания в противофазе;
 7) при $d = d_{\pi 3}$ пропадает самосимметричный тор и остается устойчивым только цикл, соответствующий колебаниям в противофазе.

Пусть теперь в (1.1.16) $h = 1$, а $r = 2$, тогда $\varepsilon = r - \pi/2 \approx 0.4292$. Величина поправки, вычисленная для данного случая по формуле (1.1.32), приближенно равна 0.36206. В таблице 1.2, как и выше, приведены в первой строке оценки бифуркационных значений, полученные из локального анализа, а во второй строке представлены значения, найденные на основе численного исследования системы (1.1.16)

Таблица 1.2.

d_{AB}	d_C	$d_{кр}$	d_S	$d_{\pi 2}$	$d_{\pi 3}$
0.197	0.1897	0.1816	0.1742	0.1687	0.1553
0.159		0.1587		0.156	0.1145

Нетрудно видеть, что в данном случае система (1.1.16) оказывается вне области действия результатов локального анализа. Рождающиеся из уплотнения траекторий при $d = d_{AB}$ устойчивые циклы не теряют устойчивость с образованием устойчивых торов, а остаются устойчивыми вплоть до $d = d_{\pi 3}$, при котором сливаются с неустойчивыми циклами и исчезают.

В заключение раздела сформулируем его основной результат, который является основным результатом и всей главы.

На плоскости параметров нормальной формы b_0, δ могут быть выделены области, для значений b_0 и δ из которых при изменении параметра связи ε реализуются принципиально различные сценарии фазовых перестроек — хаотический и нехаотический.

В следующем разделе рассмотрим более сложную систему из пары колебательных систем, демонстрирующую при подходящем выборе параметров и изменении параметра связи сложные фазовые перестройки, укладывающиеся в рамки описанных в данном разделе сценариев. Сопоставление данных анализа нормальной формы с результатами численного интегрирования исходной системы позволяет выяснить границы применимости локальных асимптотических методов.

1.2. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа

В данном разделе изучается динамика диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов, возникающих при моделировании нервных клеток. Для значений параметров задачи, близких к критическим, строится нормальная форма для амплитудных и фазовых переменных. Анализируются фазовые перестройки нормальной формы при изменении параметра связи системы. Численный анализ исходной системы показывает, что в широкой области значений параметров локальные фазовые перестройки происходят в соответствии с фазовыми перестройками нормальной формы.

1.2.1. Постановка задачи

Моделирование электрической активности нервных клеток основано на построении уравнений баланса токов, возникающих в результате ионного обмена через границу нервной клетки (мембрану) [144]. Большую часть этих потоков составляют две разновидности ионов: натрия (Na^+) и калия (K^+). Поскольку концентрация этих ионов различна внутри и снаружи клетки, возникает ток.

Для описания электрической активности нервных клеток в [78, 107] предложено следующее дифференциальное уравнение с запаздыванием, учитывающее отмеченные свойства биологических клеток мозга:

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u. \quad (1.2.1)$$

Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона, функции

$$f_{\text{Na}}(u) = r_1 \exp(-u^2) \quad \text{и} \quad f_{\text{K}}(u(t-1)) = r_2 \exp(-u^2(t-1)) \quad (1.2.2)$$

характеризуют проводимости натриевых и калиевых каналов соответственно. Коэффициент $\lambda > 0$ определяется скоростью протекания электрических процессов в системе. Отметим, что калиевый ток зависит от мембранного потенциала, взятого с запаздыванием, при этом выбор единичного запаздывания — удобная нормировка.

Рассмотрим задачу слабого диффузионного взаимодействия пары одинаковых осцилляторов вида (1.2.1). В системе

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u_1) + f_{\text{K}}(u_1(t-1))]u_1 + D(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u_2) + f_{\text{K}}(u_2(t-1))]u_2 + D(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

коэффициент $D > 0$ характеризует связь нейронов между собой. Ниже считаем, что эта связь слабая и величина D мала. Наша задача состоит в изучении характера фазовых перестроек системы (1.2.3) при изменении параметра D .

1.2.2. Построение нормальной формы системы

Уравнение (1.2.1) при условии (1.2.2) и $r_2 - r_1 > 1$ имеет ненулевое состояние равновесия

$$u = u_* = \sqrt{\ln(r_2 - r_1)}, \quad (1.2.4)$$

устойчивость которого определяется характеристическим квазимногочленом

$$P(\mu) = \mu - \frac{2\lambda u_*^2 (r_1 - r_2 \exp(-\mu))}{(r_2 - r_1)}. \quad (1.2.5)$$

При фиксированных значениях параметров r_1, r_2 ($r_2 - r_1 > 1$) по формулам

$$\lambda_* = \frac{\omega_0(r_2 - r_1)}{2r_2 u_*^2 \sin \omega_0}, \quad \text{где } \omega_0 = \arccos(r_1/r_2), \quad (1.2.6)$$

определяется критическое значение параметра λ такое, что при $\lambda < \lambda_*$ решение (1.2.4) уравнения (1.2.1) асимптотически устойчиво, а при $\lambda = \lambda_*$ характеристический квазимногочлен (1.2.5) имеет пару чисто мнимых корней при том, что остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

В системе (1.2.3) сдвинем значения потенциалов $u_1(t), u_2(t)$ на u_* и предположим, что параметр λ близок к критическому значению так, что

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= (\lambda_* + \varepsilon) \left[-1 - r_1 \exp(-(u_1 + u_*)^2) + \right. \\ &\quad \left. + r_2 \exp(-(u_1(t-1) + u_*)^2) \right] (u_1 + u_*) + \varepsilon d(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 &= (\lambda_* + \varepsilon) \left[-1 - r_1 \exp(-(u_2 + u_*)^2) + \right. \\ &\quad \left. + r_2 \exp(-(u_2(t-1) + u_*)^2) \right] (u_2 + u_*) + \varepsilon d(u_1 - u_2), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Отметим, что в системе (1.2.7) параметр связи D выбран равным εd .

Учитывая, что в спектре устойчивости нулевого решения системы (1.2.7) при $\varepsilon = 0$ имеются две пары чисто мнимых собственных чисел, применим к ней стандартную замену метода нормальных форм (см. (1.1.2))

$$\begin{aligned} (u_1(t, s), u_2(t, s))^T &= \sqrt{\varepsilon} (z_1(s) \mathbf{e}_1 e^{i\omega_0 t} + z_2(s) \mathbf{e}_2 e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}) + \\ &\quad + \varepsilon w_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} w_2(t, s) + \dots, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, \mathbf{e}_j — единичные орты, $z_j(s)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды ($j = 1, 2$), $w_k(t, s)$ — подлежащие определению $2\pi/\omega_0$ -периодические по t функции ($k = 1, 2, \dots$), под к.с. подразумевается выражение, комплексно сопряженное данному в той же скобке.

На первом шаге построения нормальной формы получаем, очевидно, верное тождество. На втором этапе возникает система уравнений для $w_1(t, s) = (w_{11}(t, s), w_{12}(t, s))^T$, содержащих только нерезонансные гармоники

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{1j}(t, s)}{\partial t} = & \left[\frac{2\lambda_* u_*^2}{r_2 - r_1} (r_1 w_{1j}(t, s) - r_2 w_{1j}(t - 1, s)) - \right. \\ & - \frac{\lambda_* u_* (2u_*^2 - 1)}{r_2 - r_1} \left(r_1 (z_j^2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.} + 2|z_j|^2) - \right. \\ & \left. \left. - r_2 (z_j^2 \exp(2i\omega_0(t - 1)) + \text{к.с.} + 2|z_j|^2) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda_* u_*}{r_2 - r_1} \left(r_1 (z_j^2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.} + 2|z_j|^2) - r_2 (z_j^2 \exp(i\omega_0(2t - 1)) + \text{к.с.} + \right. \right. \\ & \left. \left. + |z_j|^2 (\exp(i\omega_0) + \exp(-i\omega_0))) \right) \right] \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$. Определяя его решение как сумму нулевой и второй гармоник, получаем следующее выражение для функции $w_1(t, s)$:

$$\begin{aligned} w_1(t, s) = & (v_0 |z_1|^2 + (v_1 z_1^2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.})) \mathbf{e}_1 + \\ & + (v_0 |z_2|^2 + (v_1 z_2^2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.})) \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

где

$$v_0 = 2u_* - \frac{1}{u_*}, \quad v_1 = \frac{2i\omega_0 - (2u_*^2 - 1)(2i\omega_0 - P(2i\omega_0))}{2u_* \cdot P(2i\omega_0)}. \quad (1.2.9)$$

На третьем шаге применения алгоритма получаем систему для $w_2(t, s) = (w_{21}(t, s), w_{22}(t, s))^T$

$$\begin{aligned}
& z'_j \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.} + \frac{\partial w_{2j}(t, s)}{\partial t} = \\
& = \frac{1}{r_2 - r_1} \left[-2\lambda_* u_*^2 (-r_1 w_{2j}(t, s) + r_2 w_{2j}(t-1, s) - r_2 (z'_1 \exp(i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.})) + \right. \\
& \quad + 2\lambda_* u_* (2u_*^2 - 1) \left(-r_1 w_1(t, s) (z_j \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}) + \right. \\
& \quad \quad \left. + r_2 w_1(t-1, s) (z_j \exp(i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) \right) + \\
& + \lambda_* (z_j \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}) \left(-r_1 (-2u_* w_1(t, s) + (2u_*^2 - 1)(z_j^2 \exp(2i\omega_0 t) + \text{к.с.} + 2|z_j|^2)) + \right. \\
& \quad \left. + r_2 (-2u_* w_1(t-1, s) + (2u_*^2 - 1)(z_j^2 \exp(2i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.} + 2|z_j|^2)) \right) + \\
& \quad + \lambda_* u_* (2u_* - 4/3u_*^3) \left(-r_1 (z_j^3 \exp(3i\omega_0 t) + 3|z_j|^2 z_j \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}) + \right. \\
& \quad \quad \left. + r_2 (z_j^3 \exp(3i\omega_0(t-1)) + 3|z_j|^2 z_j \exp(i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) \right) - \\
& - 2u_* (u_* + \lambda_* w_1(t, s)) \left(-r_1 (z_j \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}) + r_2 (z_j \exp(i\omega_0(t-1)) + \text{к.с.}) \right) + \\
& \quad \left. + d((z_{3-j} - z_j) \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.}) \right] \mathbf{e}_j,
\end{aligned}$$

где $j = 1, 2$. Из условий разрешимости данной задачи в классе $2\pi/\omega_0$ -периодических по t функций получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $z_j(s)$

$$\begin{aligned}
z'_1 &= \varphi_0 z_1 + (d_0 + ic_0) |z_1|^2 z_1 + d(z_2 - z_1) / P'(i\omega_0), \\
z'_2 &= \varphi_0 z_2 + (d_0 + ic_0) |z_2|^2 z_2 + d(z_1 - z_2) / P'(i\omega_0).
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Здесь штрихом обозначена производная функций $z_j(s)$ по s , под $P'(i\omega_0)$ понимается согласно (1.2.5) величина

$$P'(i\omega_0) = 1 - \frac{2\lambda_* u_*^2 r_2 \exp(-i\omega_0)}{(r_2 - r_1)}, \tag{1.2.11}$$

а остальные параметры выражаются следующими формулами:

$$\varphi_0 = \frac{i\omega_0}{\lambda_* P'(i\omega_0)}, \tag{1.2.12}$$

$$\begin{aligned}
d_0 + ic_0 = & \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left[\frac{i\omega_0}{u_*} \left(2(1 - u_*^2)v_0 + 2(u_* - v_1)u_*^2 - 3u_* \right) + \right. \\
& + \frac{\lambda_*}{(r_2 - r_1)} \left(r_1(2u_*(v_0 + v_1) - 3(2u_*^2 - 1)) + \right. \\
& \left. \left. + r_2((2u_*^2 - 1)(2 + \exp(-2i\omega_0)) - 2u_*(v_0 + v_1 \exp(-2i\omega_0))) \right) \right]. \quad (1.2.13)
\end{aligned}$$

Для нормальной формы (1.2.10) выполнено утверждение теоремы 1.1 о соответствии грубых режимов (1.2.10) решениям системы (1.2.7) той же устойчивости с асимптотикой (1.2.8). Обоснование данного утверждения в случае уравнений в банаховых пространствах дано в [91].

Следует отметить, однако, что в случае если система (1.2.10) обнаруживает сложное хаотическое поведение, такую теорему обосновать не удастся. В связи с этим уместно применение численных методов.

Для анализа системы (1.2.10) выполним в ней сначала полярную замену $z_j(s) = \eta_j(s) \exp(i\varphi_j(s))$, $\eta_j(s) > 0$, $j = 1, 2$, и перейдем к системе амплитудных и фазовых переменных

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \gamma\eta_1 + d_0\eta_1^3 + k(\eta_2 \cos(\alpha + \delta) - \eta_1 \cos \delta), \\
\eta_2' &= \gamma\eta_2 + d_0\eta_2^3 + k(\eta_1 \cos(\alpha - \delta) - \eta_2 \cos \delta), \\
\alpha' &= -k \left[\frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + c_0(\eta_2^2 - \eta_1^2),
\end{aligned} \quad (1.2.14)$$

где

$$\gamma = \operatorname{Re} \varphi_0, \quad \alpha = \varphi_2 - \varphi_1, \quad k \exp(i\delta) = \frac{d}{P'(i\omega_0)}. \quad (1.2.15)$$

Затем заменим время $\gamma s \rightarrow s$ и обозначим $\eta_j = \sqrt{-\gamma/d_0} \xi_j$, $\varkappa = k/\gamma$, $b_0 = c_0/d_0$. В результате получится система (1.1.13), которая исследовалась ранее в разделе 1.1. В частности, было продемонстрировано, что в зависимости от значений параметров b_0 и δ сценарии фазовых перестроек системы (1.1.13) при изменении параметра \varkappa существенно различаются.

1.2.3. Сценарии фазовых перестроек нормальной формы

Для определения значений параметров исходной системы (1.2.7), при которых реализуются различные фазовые перестройки нормальной формы (1.1.13), построим зависимости величин $b_0(r_1, r_2)$ и $\delta(r_1, r_2)$ от параметров r_1, r_2 . На рис. 1.14 представлен типичный вид графиков функций $b_0(r_1, r_2)$

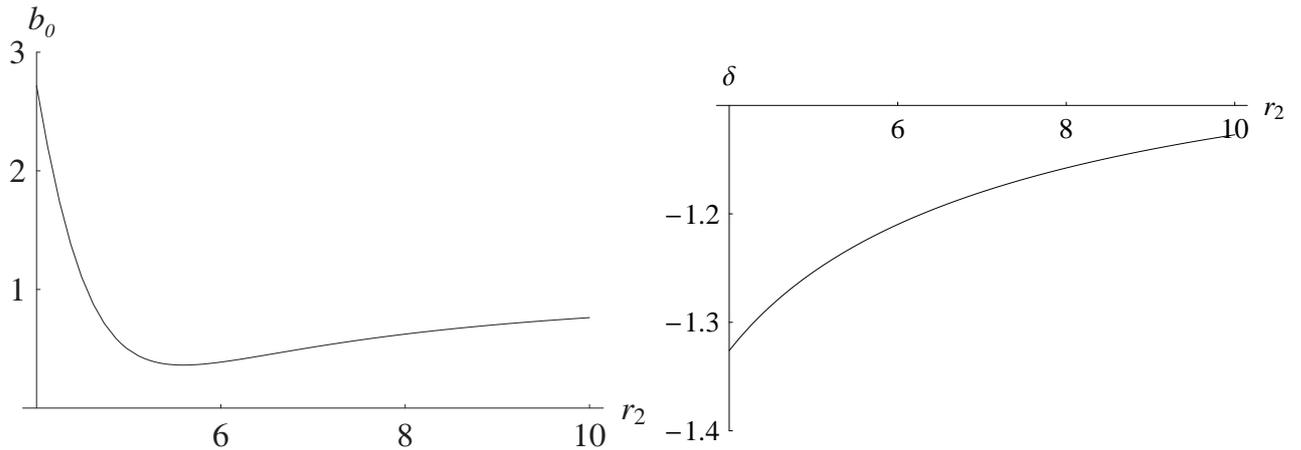


Рис. 1.14. Графики зависимостей величин b_0 и δ от параметра r_2 при $r_1 = 3$

и $\delta(r_1, r_2)$ при фиксированном r_1 (на рис. 1.14 выбрано значение $r_1 = 3$) и изменении r_2 от 4 до 10.

Отметим несколько полезных предельных соотношений для функций $b_0(r_1, r_2)$ и $\delta(r_1, r_2)$ при $r_2 \in (r_1 + 1, +\infty)$, стремящемся к левой или правой границам интервала изменения.

При $r_2 \rightarrow +\infty$ из формул (1.2.6), (1.2.11), (1.2.13) и (1.2.15) имеем

$$\omega_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \delta \rightarrow -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \approx -1.00388, \quad b_0 \rightarrow \frac{\pi + 6}{3\pi - 2} \approx 1.23123. \quad (1.2.16)$$

Значения параметров, задаваемые формулами (1.2.16), не зависят от r_1 и соответствуют хорошо известному уравнению Хатчинсона в близком к критическому случае. Задача о слабом взаимодействии пары таких осцилляторов была рассмотрена в [29, 40].

Рассмотрим теперь левую границу изменения r_2 . При фиксированном r_1 и $r_2 \rightarrow r_1 + 1 + 0$ из тех же формул, что и ранее, получаем следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_0 \rightarrow \omega_0^* &= \arccos \frac{r_1}{r_1 + 1}, & \delta \rightarrow \delta^* &= -\operatorname{arctg} \frac{\omega_0^*}{1 - \omega_0^* \operatorname{ctg} \omega_0^*}, \\ b_0 \rightarrow b^* &= \frac{\sqrt{1 + 2r_1}(3 + 5r_1) + (1 + r_1)^2 \omega_0^*}{3(1 + r_1)^2 \omega_0^* \sqrt{1 + 2r_1 - 6r_1^2 - 5r_1 - 1}}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Функция $b^*(r_1)$ при $r_1 > 0$ монотонно возрастает от уже приводившейся в формуле (1.2.16) величины $(\pi + 6)/(3\pi - 2)$ до бесконечности, а функция $\delta^*(r_1)$ — соответственно убывает от $-\operatorname{arctg}(\pi/2)$ до $-\pi/2$. Графики функций $b^*(r_1)$ и $\delta^*(r_1)$ при $r_1 \in [0, 10]$ приведены на рис. 1.15.

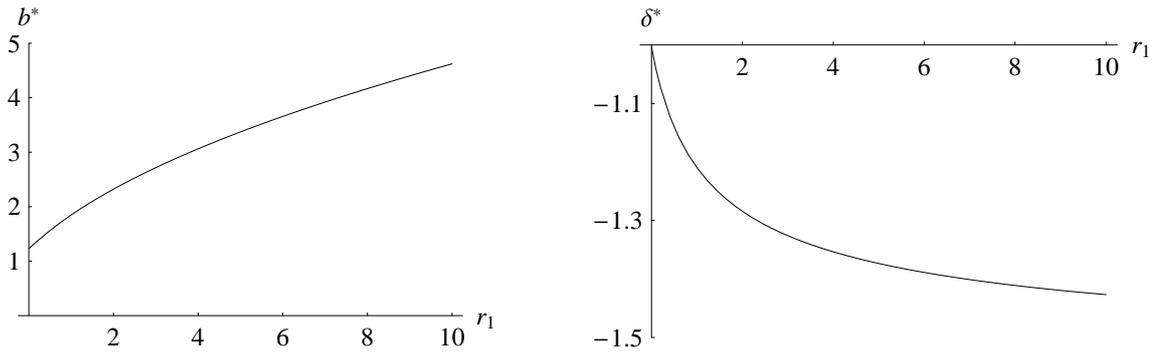


Рис. 1.15. Графики зависимостей величин b_0 и δ от параметра r_1 при $r_2 \rightarrow r_1 + 1$

В разделе 1.1 (теорема 1.2) показано, что для значений параметров b_0, δ , близких к полученным при $r_2 \rightarrow +\infty$ (см. формулы (1.2.16)), реализуется сценарий фазовых перестроек, не связанный с возникновением хаотических колебаний, причем для значений b_0 меньших указанных в формуле (1.2.16) это свойство системы (1.1.13) сохраняется. С другой стороны, нетрудно найти такие значения r_1, r_2 , при которых точка b_0, δ окажется выше кривой с номером семь на рис. 1.1. Для этих значений сценарий фазовых перестроек системы оказывается хаотическим.

Для иллюстрации различных сценариев выберем значения r_1, r_2 так, чтобы значения b_0, δ попадали в разные области.

I. Возьмем сначала величины $r_1 = 1, r_2 = 2.5$ вблизи минимума функции $b_0(r_1, r_2)$ по r_2 , тогда в соответствии с формулами (1.2.13), (1.2.15) имеем $b_0(1, 2.5) \approx 0.932733$ и $\delta(1, 2.5) \approx -1.16794$. Данная точка отмечена треугольником на рис. 1.1. Рассмотрим фазовые перестройки системы (1.1.13) при изменении параметра \varkappa . Используя результаты раздела 1.1, удастся выделить следующий набор бифуркаций.

- 1) При значениях параметра $\varkappa > \varkappa_{\pi 1} = 1/(2 \cos \delta) \approx 1.27534$ глобально устойчивым является единственное состояние равновесия $\eta_1 = \eta_2 = 1, \alpha = 0$ (соответствует пространственно однородному периодическому режиму у исходной системы (1.2.7)).
- 2) При $\varkappa < \varkappa_{\pi 1}$ к глобально устойчивому состоянию равновесия $(1, 1, 0)^T$ добавляется неустойчивое $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$, где $\eta^* = \sqrt{1 - 2\varkappa \cos \delta}$ (соответствует колебаниям в противофазе у исходной системы).

- 3) При $\varkappa = \varkappa_{\pi 2} = 1/(4 \cos \delta) \approx 0.637672$ от неустойчивого состояния равновесия $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$ в результате бифуркации Андронова – Хопфа ответвляется неустойчивый цикл C_π , а само состояние равновесия становится устойчивым. Отметим, что при $\varkappa < \varkappa_{\pi 2}$ и вплоть до значения $\varkappa = \varkappa_{кр} \approx 0.46601$ состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$ и $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$ сосуществуют и устойчивы (у системы (1.2.7) сосуществуют устойчивые однородные колебания и колебания в противофазе).
- 4) При уменьшении \varkappa до значения $\varkappa = \varkappa_{AB} \approx 0.50656$ из “воздуха” рождаются еще две пары симметричных (см. (1.1.14)) состояний равновесия: две устойчивые точки $A = (\xi_1^*, \xi_2^*, \alpha_1^*)^T$ и $B = (\xi_2^*, \xi_1^*, -\alpha_1^*)^T$, где $\xi_1^* > \xi_2^*, 0 < \alpha_1^* < \pi/2$, и две неустойчивые — $C = (\eta_1^*, \eta_2^*, \alpha_2^*)^T$ и $D = (\eta_2^*, \eta_1^*, -\alpha_2^*)^T$, где $\eta_1^* > \eta_2^*, 0 < \alpha_2^* < \pi/2$, кроме того, считаем, что $|\eta_j^* - \xi_j^*| \rightarrow 0, (j = 1, 2), |\alpha_1^* - \alpha_2^*| \rightarrow 0$ при $\varkappa \rightarrow \varkappa_{AB} - 0$. Полученные состояния равновесия соответствуют не синхронизированным периодическим режимам у исходной системы. Состояния равновесия A и B устойчивы при уменьшении параметра \varkappa вплоть до значения $\varkappa_C \approx 0.49328$.
- 5) При $\varkappa = \varkappa_C$ симметричные состояния A и B теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова-Хопфа). Заметим, что этим устойчивым периодическим решениям системы (1.1.13) соответствуют не синхронизированные квазипериодические колебания системы (1.2.7).
- 6) При дальнейшем изменении параметра \varkappa симметричные устойчивые циклы C_A и C_B , родившиеся из точек A и B , увеличиваются в размерах до тех пор, пока при $\varkappa = \varkappa_{S1} \approx 0.4760$ не сольются с петлями сепаратрис седловых точек C и D .
- 7) При $\varkappa = \varkappa_{S2} \approx 0.46697$ возникает сепаратрисный контур из седла C в D и, в силу симметрии (1.1.14), из D в C . При $\varkappa < \varkappa_{S2}$ данный сепаратрисный контур порождает устойчивый самосимметричный цикл C_U (бифуркация расщепления сепаратрис).
- 8) При $\varkappa = \varkappa_{кр} = -\cos \delta + b_0 \sqrt{1 - \cos^2 \delta} \approx 0.46601$ (критическое для пространственно однородного режима значение) неустойчивые неподвижные точки C и D сливаются с однородным состоянием равновесия и отбирают его устойчивость.

- 9) Наконец, при $\kappa = \kappa_{\pi 3} \approx 0.44775$ устойчивый и неустойчивый циклы C_U и C_π сливаются и пропадают. При $\kappa_{\pi 3} > \kappa > 0$ система имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$, соответствующее колебаниям в противофазе.

Сделаем некоторые выводы относительно динамических свойств системы (1.1.13) при $r_1 = 1, r_2 = 2.5$, вытекающих из описанных фазовых перестроек.

Во-первых, основная часть бифуркаций происходит при значениях параметра κ , больших критического $\kappa_{кр} = -\cos \delta + b_0 \sqrt{1 - \cos^2 \delta}$.

Во-вторых, у системы (1.1.13) может сосуществовать несколько устойчивых режимов. Например, на промежутке $\kappa_C < \kappa < \kappa_{S1}$ сосуществуют устойчивые состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$ и $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$, а также два симметричных устойчивых цикла C_A и C_B . Что означает, что у системы (1.2.7) сосуществуют устойчивый синхронный и асинхронный циклы и пара симметричных двумерных торов.

Для наглядности выпишем совместно последовательности бифуркационных значений параметра κ в полученном выше случае и случае, описанном в теореме 1.1 для значений параметров, задаваемых формулой (1.2.16).

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi 1}, \quad \kappa_{\pi 2}, \quad \kappa_{AB}, \quad \kappa_C, \quad \kappa_{S1}, \quad \kappa_{S2}, \quad \kappa_{кр}, \quad \kappa_{\pi 3}; \\ \kappa_{\pi 1}, \quad \kappa_{AB}, \quad \kappa_C, \quad \kappa_{кр}, \quad \kappa_S, \quad \kappa_{\pi 2}, \quad \kappa_{\pi 3}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Отметим, что вариант фазовых перестроек для значений (1.2.16) дает меньшую область существования докритических устойчивых режимов. Кроме того, синфазные и противофазные колебания в этом случае не могут сосуществовать.

Полученный сценарий работает для широкой области изменения параметров r_1, r_2 , следует, однако, отметить, что при изменении r_1, r_2 в сторону увеличения значения b_0 можно получить еще более простой сценарий, в котором отсутствуют докритические устойчивые режимы.

При $r_1 = 1.5, r_2 = 2.6$ формулы (1.2.13), (1.2.15) дают $b_0(1.5, 2.6) \approx 1.804988$ и $\delta(1.5, 2.6) \approx -1.2431671$. Точка отмечена на рис. 1.1 ромбом. Последовательность бифуркационных значений имеет в этом случае вид

$$\kappa_{\pi 1} > \kappa_{кр} > \kappa_C > \kappa_S > \kappa_{\pi 2} > \kappa_{\pi 3},$$

где $\kappa_{\pi 1} \approx 1.553764, \kappa_{кр} \approx 1.387177, \kappa_C \approx 0.9552, \kappa_S \approx 0.832967, \kappa_{\pi 2} \approx 0.776882, \kappa_{\pi 3} \approx 0.665421$.

Изменение параметров r_1, r_2 может привести как к увеличению, так и к уменьшению значения b_0 . Уменьшение b_0 , впрочем, не приводит к существенным изменениям в поведении системы (1.1.13), и ее фазовые перестройки происходят по описанному выше сценарию, а вот за счет увеличения b_0

можно добиться значительных изменений в сценарии вплоть до возникновения хаоса.

II. Рассмотрим теперь фазовые перестройки, характерные для хаотического сценария. Примем значения параметров равными $r_1 = 8.5$, $r_2 = 9.52$, им соответствуют $b_0(8.5, 9.52) \approx 4.12707$ и $\delta(8, 9.1) \approx -1.41406$ (данная точка отмечена на рис. 1.1 квадратом), для которых при подходящем выборе \varkappa реализуются хаотические колебания. Выделим основные особенности динамики системы (1.1.13) при изменении параметра \varkappa .

- 1) Система (1.1.13) не имеет в этом случае устойчивых докритических режимов и при $\varkappa > \varkappa_{кр} \approx 3.92039$ однородное состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ – глобально устойчиво.
- 2) Уменьшение \varkappa приводит к ответвлению при $\varkappa = \varkappa_{кр}$ пары симметричных состояний равновесия A и B , наследующих устойчивость однородного режима.
- 3) При $\varkappa_{кр} > \varkappa > \varkappa_C \approx 2.7423$ эти состояния равновесия остаются единственными устойчивыми режимами системы, а при $\varkappa = \varkappa_C$ колебательным образом теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B (бифуркация Андронова-Хопфа).
- 4) При $\varkappa = \varkappa_{S1} \approx 2.670362101$ сепаратрисы, выходящие из седлового однородного состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$, возвращаются в него, образуя две симметричные петли, из которых при дальнейшем уменьшении \varkappa рождаются два неустойчивых симметричных друг другу цикла C_A^U и C_B^U (бифуркация расщепления сепаратрис).
- 5) При $\varkappa = \varkappa_{A1} \approx 2.670303356$ неустойчивые направления однородного состояния равновесия попадают на устойчивые многообразия неустойчивых предельных циклов C_A^U и C_B^U .
- 6) При $\varkappa < \varkappa_{A1}$ возникают хаотические колебания.
- 7) При $\varkappa = \varkappa_{C2} \approx 2.6690$ устойчивые циклы C_A , C_B сливаются с неустойчивыми C_A^U , C_B^U и пропадают. Следует отметить, что при $\varkappa_{C2} < \varkappa < \varkappa_{A1}$ хаотический аттрактор сосуществует с устойчивыми циклами C_A и C_B .
- 8) На промежутке $\varkappa_{A2} < \varkappa < \varkappa_{A1}$, где $\varkappa_{A2} \approx 2.2380203$ динамическая система (1.1.13) имеет хаотический аттрактор. На рис. 1.16 представ-

лен график зависимости старшего ляпуновского показателя этого аттрактора от параметра \varkappa . Отделенность $\lambda_{max}(\varkappa)$ от нуля при указанных значениях параметра позволяет надеяться, что исходная система (1.2.7) также обладает сложными колебательными режимами.

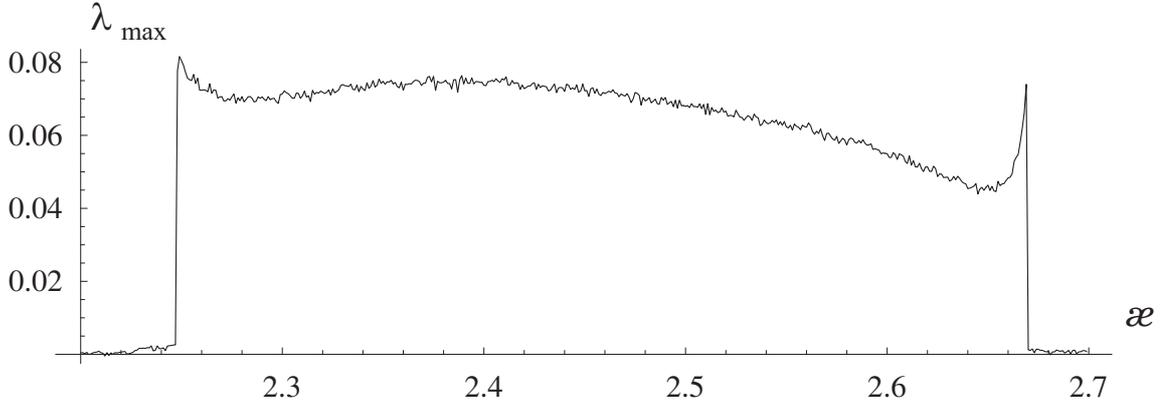


Рис. 1.16. Зависимость λ_{max} от \varkappa при $b_0 \approx 4.12707$ и $\delta \approx -1.41406$

Бифуркации, происходящие с системой (1.1.13) на промежутке $(0, \varkappa_{S3})$, удобнее описывать при возрастании параметра \varkappa .

- 9) При $0 < \varkappa < \varkappa_{\pi 3} \approx 1.40782$ глобально устойчиво состояние равновесия $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$.
- 10) При $\varkappa = \varkappa_{\pi 3}$ из уплотнения траекторий возникает два самосимметричных (в смысле замены (1.1.14)) цикла C_π^S и C_π^U , один из которых устойчив, а другой неустойчив.
- 11) При $\varkappa = \varkappa_{\pi 2} \approx 1.60162$ в состояние равновесия $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$ стягивается самосимметричный неустойчивый цикл C_π^U (бифуркация Андронова-Хопфа) и отбирает у него устойчивость.
- 12) При $\varkappa = \varkappa_1^S \approx 2.227$ указанная симметрия устойчивого цикла C_π^S теряется, он расщепляется на два симметричных друг другу устойчивых цикла C_1^S, \bar{C}_1^S (бифуркация потери симметрии).
- 13) При $\varkappa = \varkappa_1^U \approx 2.2351417$ сепаратрисы, выходящие из седлового состояния равновесия $(1, 1, 0)^T$, образуют два симметричных контура, из которых при дальнейшем увеличении \varkappa появляются два неустойчивых предельных цикла C_1^U, \bar{C}_1^U .

- 14) При $\kappa = \kappa_{A2} \approx 2.2380203$ неустойчивые направления однородного состояния равновесия попадают на устойчивые многообразия неустойчивых предельных циклов C_1^U, \bar{C}_1^U .
- 15) При дальнейшем увеличении $\kappa > \kappa_{A2}$ происходит рождение хаотических колебаний, а неустойчивые циклы C_1^U, \bar{C}_1^U при $\kappa \approx 2.247397$ сливаются с устойчивыми C_1^S, \bar{C}_1^S и исчезают.

Таким образом, в случае хаотического сценария все устойчивые режимы системы (1.1.13) возникают при значениях параметра $\kappa < \kappa_{кр}$.

1.2.4. Численный анализ системы из двух связанных нейронов

Перейдем к численному анализу исходной системы (1.2.3) с целью обнаружения аналогичных описанным выше для нормальной формы (1.1.13) фазовых перестроек.

I. Пусть сначала, как и в первом случае предыдущего пункта, $r_1 = 1$, $r_2 = 2.5$. Формула (1.2.6) дает $\lambda_* \approx 0.935872$, $\omega_0 \approx 1.15928$. Дальнейшие вычисления производились при $\lambda = 1$ и $\lambda = 1.1$.

Если $\lambda = 1$, то $\varepsilon = \lambda - \lambda_* \approx 0.0641284$. Учитывая вытекающее из формул (1.2.12) и (1.2.15) равенство

$$D = \varepsilon \kappa \gamma |P'(i\omega)| \approx 0.07308 \cdot \kappa, \quad (1.2.19)$$

можно оценить критические значения D , при которых происходят фазовые перестройки исходной системы (1.2.3). В первой строке приведенной ниже таблицы содержатся значения параметра D , найденные с помощью формулы (1.2.19), а во второй — значения D , полученные в результате численного анализа системы (1.2.3). Нетрудно видеть, что представленные величины дают хорошую оценку бифуркационных параметров.

Таблица 1.3.

$D_{\pi 2}$	D_{AB}	D_C	D_{S1}	D_{S2}	$D_{кр}$	$D_{\pi 3}$
0.0466	0.03702	0.03605	0.03486	0.03413	0.03405	0.03272
0.0460	0.0358	0.0346	0.0329	0.0328	0.0340	0.0316

Как и в случае анализа нормальной формы (1.1.13), у системы (1.2.3) при уменьшении параметра D происходят следующие бифуркации:

- при $D > D_{\pi 2}$ устойчив только однородный цикл;
- при $D < D_{\pi 2}$ становятся устойчивыми колебания в противофазе;
- при $D = D_{AB}$ из уплотнения траекторий появляется пара симметричных друг другу устойчивых циклов;
- при $D = D_C$ от циклов ответвляется пара устойчивых торов;
- при $D = D_{кр}$ теряет устойчивость однородный цикл;
- при $D = D_{S1}$ торы пропадают;
- при $D = D_{S2}$ вместо пропавшей пары торов возникает один самосимметричный тор;
- наконец, при $D = D_{\pi 3}$ пропадает самосимметричный тор и остается устойчивым только цикл, соответствующий колебаниям в противофазе.

Отметим, что уже при данных значениях ε находящиеся очень близко друг к другу по параметру D бифуркации потери устойчивости однородного цикла и перестроек двух симметричных торов в один самосимметричный поменялись местами. Точность вычисления бифуркационных параметров дана в первой строке вплоть до пятого знака, а во второй — лишь до четвертого, в связи с необходимостью многократного решения в последнем случае системы с запаздыванием (1.2.3).

В случае если $\lambda = 1.1$, величина $\varepsilon = \lambda - \lambda_* \approx 0.164128$ уже не достаточно мала и вычисленная для него формула (1.2.19) не дает хороших оценок бифуркационных параметров, однако общая последовательность бифуркаций сохраняется. Имеется лишь одно исключение: при увеличении параметра D и его прохождении через значение D_S самосимметричный тор распадается на два симметричных без промежуточных бифуркаций. Численный анализ системы (1.2.3) показал, что $D_{\pi 2} \approx 0.1267$, $D_{AB} \approx 0.0811$, $D_C \approx 0.0798$, $D_{кр} \approx 0.0774$, $D_S \approx 0.0769$, $D_{\pi 3} \approx 0.0744$. На рисунках 1.17 – 1.20 приведены проекции устойчивых фазовых траекторий системы (1.2.3) на плоскость $u_1 O u_2$. В частности, на рис. 1.17 представлены колебания в противофазе при $D = 0.1$, такой цикл существует и устойчив у системы (1.2.3) при $0 < D < D_{\pi 2}$; на рис. 1.18 изображена проекция устойчивого самосимметричного двумерного тора при $D = 0.0745$, этот тор, в свою очередь, устойчив при $D_{\pi 3} < D < D_S$; далее, на рис. 1.19 приведен один из

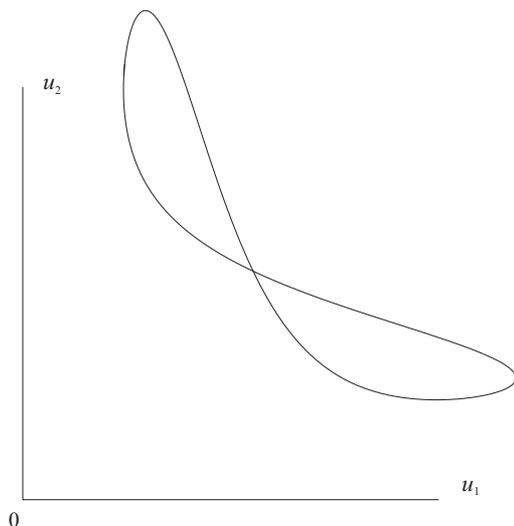


Рис. 1.17. Цикл при $D = 0.1$, $\lambda = 1.1$

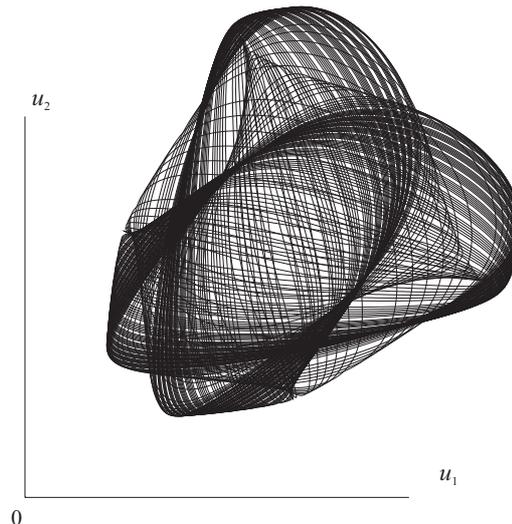


Рис. 1.18. Тор при $D = 0.0745$, $\lambda = 1.1$

пары симметричных друг другу торов при $D = 0.0773$, устойчивый на промежутке $D_S < D < D_C$; наконец, на рис. 1.20 представлен один из пары симметричных циклов, устойчивый соответственно при $D_C < D < D_{AB}$.

Важной особенностью динамики системы (1.2.3), которую удалось прояснить с помощью локального анализа, является сосуществование четырех различных устойчивых режимов: синхронного и асинхронного циклов, а также пары симметричных друг другу циклов или торов.

Сделаем одно замечание относительно выбора параметра λ . Он обусловлен тем, что при дальнейшем уходе от критического значения $\lambda = \lambda_* \approx 0.935872$ динамика системы (1.2.3) становится релаксационной и резко упрощается, например, при $\lambda > 1.5$ наблюдаются только циклы большой амплитуды с релаксационными свойствами.

II. Рассмотрим теперь динамические свойства системы (1.2.3) при $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$. В этом случае из (1.2.6) имеем $\lambda_* \approx 2.59729$, $\omega_0 \approx 0.95584$. Как и в предыдущем пункте, при достаточно малом $\varepsilon = \lambda - \lambda_*$ фазовые перестройки (1.2.3) оказываются такими же, как и у нормальной формы (1.1.13). Например, при $\lambda = 2.85$ ($\varepsilon \approx 0.252711$) получаем следующий набор фазовых перестроек:

- при $D > D_{кр}$, где $D_{кр} \approx 0.1400$, устойчив только однородный цикл;
- при $D = D_{кр}$ однородный цикл теряет устойчивость и от него ответвляются два симметричных друг другу устойчивых цикла;

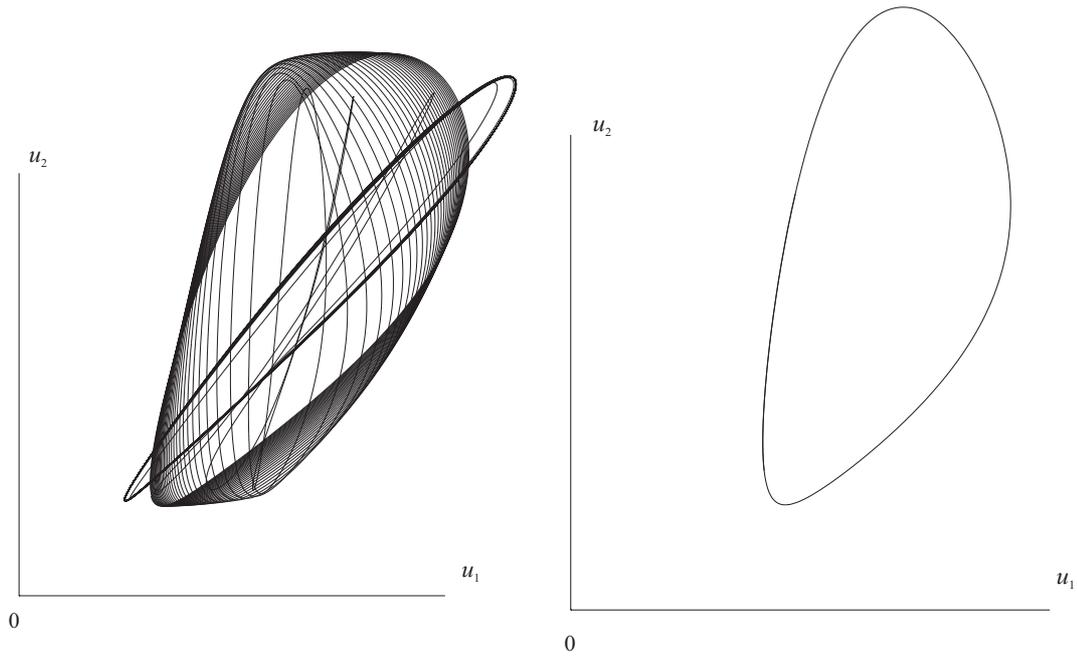


Рис. 1.19. Тор при $D = 0.0773$,
 $\lambda = 1.1$

Рис. 1.20. Цикл при $D = 0.08$,
 $\lambda = 1.1$

- при $D = D_C$, где $D_C \approx 0.0891$, от циклов ответвляется пара устойчивых торов;
- при $D = D_S$, где $D_S \approx 0.07388$, симметричные торы объединяются в один устойчивый самосимметричный тор;
- при $D = D_{\pi_2}$, где $D_{\pi_2} \approx 0.0446$, устойчивый самосимметричный тор стягивается в цикл, соответствующий колебаниям в противофазе;
- наконец, при $D < D_{\pi_2}$ устойчивыми остаются только колебания в противофазе.

Увеличение λ приводит к существенно иным по сравнению с предыдущим пунктом последствиям. Выберем сначала значение λ достаточно близким к λ_* так, чтобы работала локальная теория, и зафиксируем параметр D системы (1.2.3) в области устойчивости двухчастотных колебаний. Примером могут служить значения $\lambda = 2.85$, $D = 0.055$, входящие в приведенный выше промежуток. Будем увеличивать значение λ , сохраняя остальные параметры неизменными. На рис. 1.21 приведен график зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра λ .

Нетрудно видеть, что при $\lambda \approx 2.868$ показатель λ_{max} становится положительным, что свидетельствует о переходе от двухчастотных колебаний

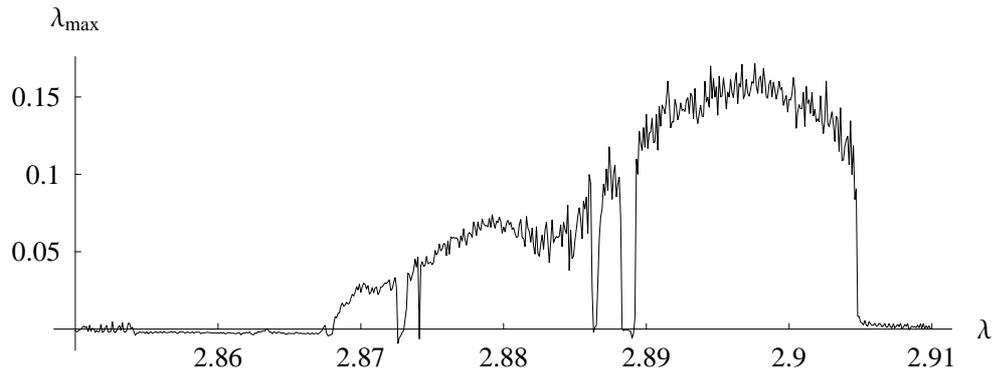


Рис. 1.21. Зависимость λ_{max} от λ при $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $D = 0.055$

к хаотическим. На промежутке изменения λ от 2.8683 до 2.8862 значение λ_{max} относительно невелико, а график зависимости $\lambda_{max}(\lambda)$ имеет несколько окон, в которых λ_{max} падает до нуля. Для этих окон решениями системы (1.2.3) являются устойчивые торы или лежащие на торе циклы большого периода. Размах колебаний устойчивого режима для данного промежутка остается относительно небольшим. На рис. 1.22 представлена зависимость от λ максимального значения переменных $u_1(t)$, $u_2(t)$ на аттракторе системы (1.2.3)

$$u_{max} = \sup_{t \geq t_0} \{ \max\{u_1(t), u_2(t)\} \}.$$

Здесь начальная точка $(u_1(t_0), u_2(t_0))^T$ лежит на аттракторе системы (1.2.3). В процессе вычислений величина t менялась от t_0 до $t_0 + T_*$, где $T_* = 10000$, а t_0 выбиралось так, чтобы подойти к аттрактору достаточно близко (использовалось $t_0 = 3000$). Длина промежутка изменения t выбрана, очевидным образом, с избытком, с тем, чтобы получить надежную оценку u_{max} . Понятно, однако, что в случае, если колебательный режим имеет очень редкие всплески, такого промежутка может не хватить для правильной оценки максимальной амплитуды колебаний. В связи с этим в окрестности точек с быстрым изменением u_{max} промежутков вычислений T_* увеличивался.

Вычисление величины $u_{max}(\lambda)$ производилось на промежутке от $\lambda = 2.85$ до $\lambda = 2.91$ с шагом 0.0001, при этом оказалось, что при переходе от точки $\lambda = 2.8840$ к точке $\lambda = 2.8841$ эта функция имеет скачок от $u_{max}(2.8840) \approx 1.3603$ до $u_{max}(2.8841) \approx 28.9202$. Затем, на промежутке $2.8842 < \lambda < 2.8893$ происходит еще четыре резких изменения $u_{max}(\lambda)$, пока, начиная с $\lambda = 2.8894$, оно не стабилизируется на значении близком к 30. Наконец, при $\lambda = 2.9049$, $u_{max}(\lambda)$ снова резко меняется и стабилизиру-

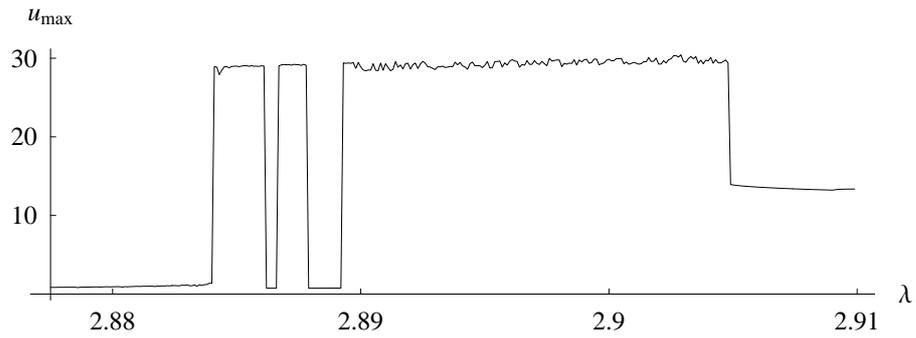


Рис. 1.22. Зависимость максимальных значений на аттракторе от λ при $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $D = 0.055$

ется уже на значении близком к 14. В частности, $u_{max}(2.9048) \approx 29.401$, а $u_{max}(2.9049) \approx 13.936$.

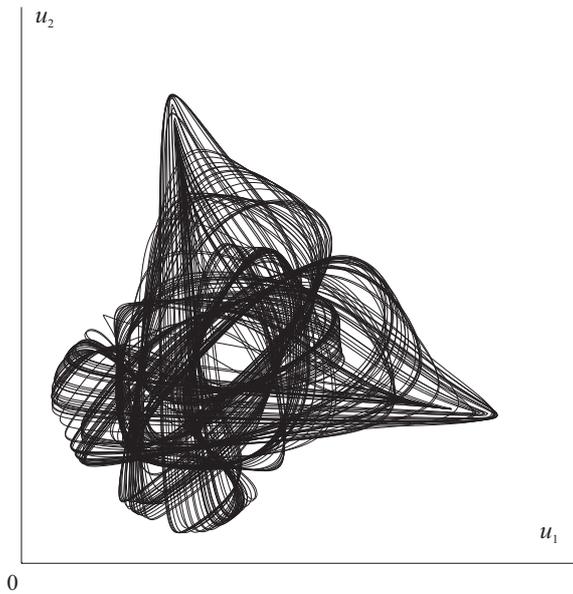


Рис. 1.23. Хаотические колебания при $\lambda = 2.87$

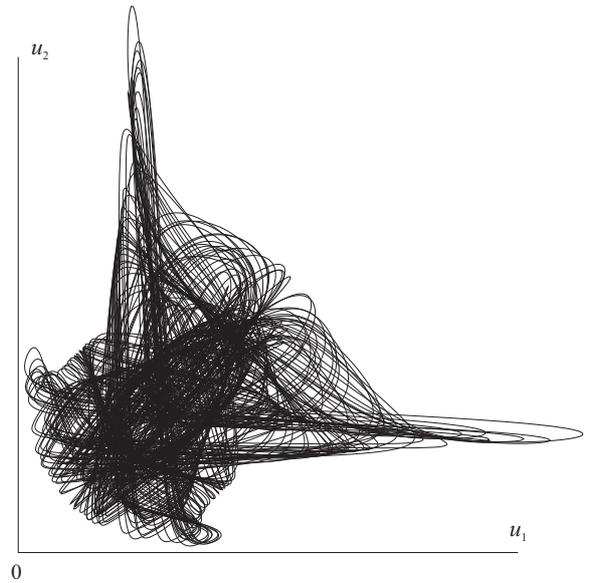


Рис. 1.24. Хаотические колебания при $\lambda = 2.883$

Анализируя зависимости $\lambda_{max}(\lambda)$ и $u_{max}(\lambda)$, можно выделить три области изменения λ , для которых поведение решений системы (1.2.3) принципиально различается. Первая из них ограничена значениями $\lambda \approx 2.868$, $\lambda \approx 2.884$ и связана с возникновением и развитием из устойчивого тора системы (1.2.3) хаотического аттрактора. Амплитуда колебаний решений (1.2.3) в этой области относительно мала и возрастает с ростом λ .

Вторая область изменения λ лежит на промежутке от $\lambda \approx 2.8894$ до $\lambda \approx 2.9048$ и характеризуется сочетанием колебаний малой и большой амплитуды. Между первой и второй областями находится переходная зона, в которой встречаются как колебания малой амплитуды, так и колебания большой амплитуды.

Третья область соответственно содержит значения $\lambda > 2.9048$. При этих значениях параметра λ система (1.2.3) имеет устойчивые циклы большой амплитуды, обладающие выраженными релаксационными свойствами. Отметим, что амплитуда колебаний решений системы (1.2.3) при переходе из второй области в третью, оставаясь относительно большой, убывает более чем вдвое. Учитывая, что минимальные значения решений (1.2.3) при данных значениях параметров близки к нулю, величина $u_{max}(\lambda)$ дает хорошую оценку для размаха колебаний этих решений.

Для иллюстрации изменений хаотического аттрактора в первой области на рисунках 1.23, 1.24 представлены проекции траектории системы (1.2.3) при $\lambda = 2.87$ и $\lambda = 2.883$ соответственно. Проекция хаотических колебаний системы (1.2.3) из второй области содержится на рис. 1.25 для $\lambda = 2.89$. На правом из рисунков изображена траектория с использованием масштаба колебаний большой амплитуды, а на левом выделена часть этой проекции, соответствующая масштабу колебаний малой амплитуды. Сравнение рисунков 1.23, 1.24 и 1.25 показывает, что колебания малой амплитуды в первом и втором случае носят одинаковый характер. Во втором случае на колебания малой амплитуды накладываются возникающие случайным образом последовательности импульсов большой амплитуды. На рис. 1.26 приводится график зависимости u_1, u_2 от t на промежутке изменения t длины 350. Представленные последовательности импульсов в нейродинамике обычно называются пачками или пакетами импульсов (burst) (см., например, [146]).

Суммируя результаты пункта, отметим, что в данном случае на границе области применимости локального анализа, в узком промежутке изменения параметров, реализуются сложные устойчивые режимы, характеризующиеся наличием разномасштабных колебаний, причем движения большой амплитуды представляют собой случайную последовательность импульсных пакетов.

III. Пусть теперь $r_1 = 8.5$, $r_2 = 9.52$. Рассмотрим фазовые перестройки системы (1.2.3) при изменении параметра связи D и различных значениях λ . В этом случае из (1.2.6) имеем $\lambda_* \approx 2.806226$, $\omega_0 \approx 0.467146$. Зафиксировав $\lambda = 2.844$ ($\varepsilon \approx 0.0377742$), получаем следующий набор фазовых перестроек:

- при $D > D_{кр}$, где $D_{кр} \approx 0.0301$, устойчив только однородный цикл;

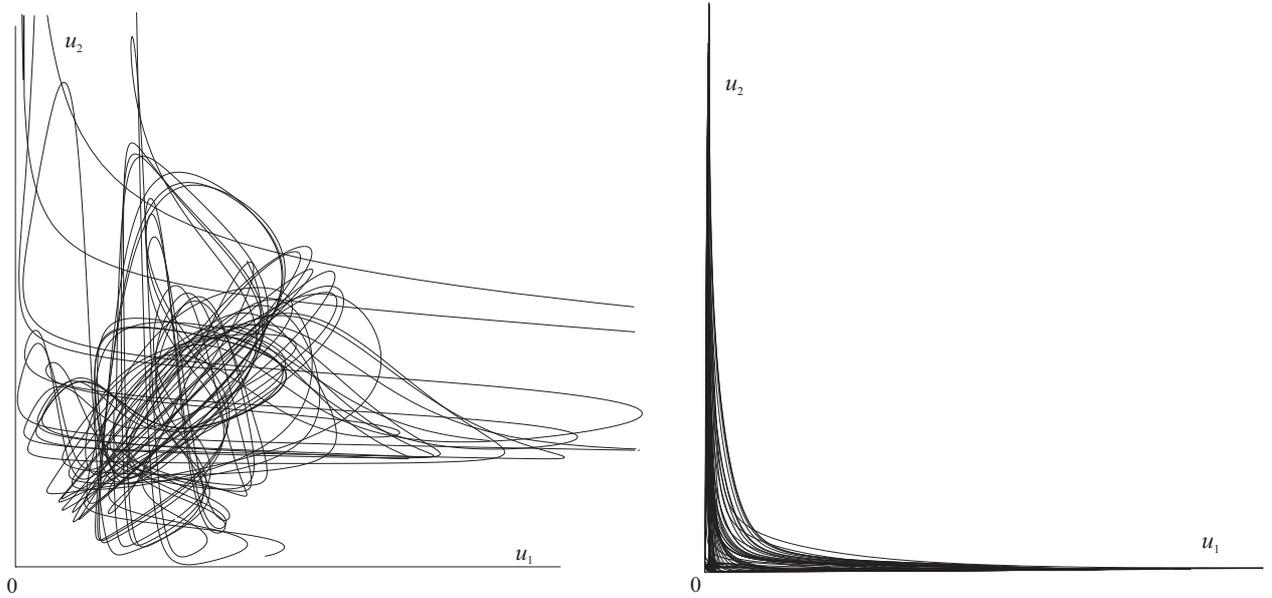


Рис. 1.25. Хаотические колебания при $\lambda = 2.89$

- при $D = D_{кр}$ однородный цикл теряет устойчивость и от него ответвляются два симметричных друг другу устойчивых цикла;
- при $D = D_C$, где $D_C \approx 0.0221$, от каждого из пары симметричных устойчивых циклов ответвляется по устойчивому тору;
- при $D = D_{A1}$, где $D_{A1} \approx 0.0209$, симметричные торы объединяются, возникают хаотические колебания;
- при $D = D_{A2}$, где $D_{A2} \approx 0.0123$, хаотические колебания сменяются двухчастотными;
- при $D = D_{\pi 2}$, где $D_{\pi 2} \approx 0.0067$, устойчивый самосимметричный тор стягивается в цикл, соответствующий колебаниям в противофазе;
- при $D < D_{\pi 2}$ устойчивыми остаются только колебания в противофазе.

Сразу отметим, что наблюдаемые на промежутке $D_{A1} < D < D_{A2}$ колебания имеют положительный старший ляпуновский показатель, величина которого лишь незначительно превосходит уровень вычислительных ошибок. В данном случае, однако, это вполне объяснимо. Учитывая, что λ_{max} для хаотического аттрактора нормальной формы (1.1.13) находился в пределах от 0.045 до 0.081 (см. рис. 1.16), а медленное время s , используемое в системе (1.1.13), связано с временем t системы (1.2.3) формулой $s = \varepsilon t / \gamma$,

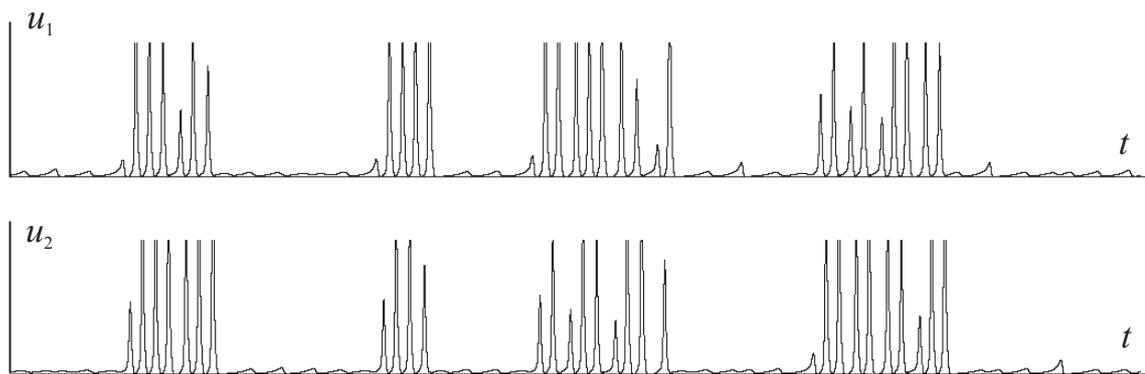


Рис. 1.26. Зависимость u_1 , u_2 от t при $\lambda = 2.89$

получаем коэффициент пропорциональности для ляпуновских показателей аттрактора $\varepsilon/\gamma \approx 0.10865$ и соответственно оценку самих показателей. Вычисления, выполненные для системы (1.2.3) на промежутке (D_{A1}, D_{A2}) , дают значения как раз в этих пределах. Увеличение параметра λ могло бы в данном случае привести к росту ляпуновского показателя, однако даже незначительное изменение этой величины сверх значения $\lambda = 0.844$ приводит к выходу из области применимости локальных методов. Так, например, уже при $\lambda = 0.845$ у системы (1.2.3) появляются, как и в рассмотренном выше примере, хаотические колебания с разномасштабными составляющими. Однако, в силу того, что параметры r_1 , r_2 и λ выбраны достаточно большими, колебания больших масштабов оказываются вблизи пределов применимости численных методов, используемых при решении (1.2.3).

Заключительные выводы

Сделаем некоторые выводы относительно динамики системы (1.2.3).

Во-первых, численный анализ системы связанных осцилляторов (1.2.3) показывает, что в широкой области значений параметров r_1 , r_2 и λ , близком к критическому значению λ_* , ее локальные фазовые перестройки происходят в соответствии с фазовыми перестройками нормальной формы (1.1.13).

Во-вторых, на основе анализа нормальной формы (1.1.13) найдены значения параметров системы (1.2.3), при которых у нее сосуществует несколько устойчивых решений, например, синхронные колебания, колебания в противофазе и пара симметричных двухчастотных режимов.

В-третьих, в случае, если фазовые перестройки нормальной формы приводят к возникновению хаотических колебаний, то и у исходной системы

возможны локальные хаотические колебания малой амплитуды. Отметим, что данное свойство реализуется в крайне узкой области параметров, граничащей с релаксационными колебаниями.

И, наконец, в-четвертых, найдена область значений параметров r_1 , r_2 , для которых при подходящим образом выбранном параметре связи D и увеличении λ от критического значения λ_* происходит переход к хаотическим двухмасштабным колебаниям с генерацией случайных импульсных пакетов большой амплитуды.

Последний результат позволяет эффективно отыскивать в пространстве параметров значения, для которых генерируются такие импульсные пакеты, и проясняет механизм их образования.

Заключение

Сформулируем основные результаты первой главы.

1. Исследование локальной динамики пары близких осцилляторов было сведено к изучению трехмерной системы медленных переменных на асимптотически устойчивом интегральном многообразии. Для полученной системы удалось выделить три параметра-инварианта, вычисляемых по нелинейности и матрице связи, изменение которых определяет характер фазовых перестроек нормальной формы.

2. При условии, что сила связи является бифуркационным параметром, удается построить разбиение плоскости оставшихся параметров на области с одинаковыми сценариями фазовых перестроек. Описываются два типичных сценария. Как оказалось, первый из них связан с бифуркациями циклов и торов, а второй — с нерегулярными колебаниями.

3. В области сценариев, включающих возникновение хаотических колебаний, был обнаружен квазифейгенбаумовский каскад бифуркаций, в котором переход к циклу условно двойного периода по сравнению с исходным происходит не в результате обычной бифуркации удвоения, а после каскада фазовых перестроек, включающих как классические фейгенбаумовские удвоения периода, так и рождение и перестройки странных аттракторов.

4. На примере задачи о взаимодействии пары осцилляторов нейронного типа показана область применимости результатов асимптотического анализа. Непосредственный численный анализ исходной системы уравнений показал, что в достаточно широкой окрестности критических значений параметров эта система демонстрирует динамику, предсказанную посредством анализа нормальной формы.

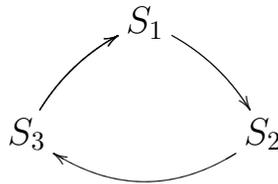
Глава 2.

Нерегулярные колебания в цепочках из трех однонаправленно связанных колебательных систем

Введение

В этой главе рассматривается система из трех осцилляторов специального вида. Пусть S_j , $j = 1, 2, 3$ — парциальные генераторы, каждый из которых моделируется некоторой нелинейной системой обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений с единственным аттрактором — положением равновесия или циклом (случай $S_1 = S_2 = S_3$ не исключается).

Далее рассматривается кольцо из этих осцилляторов вида



Удастся показать, что при наличии однонаправленной связи эти генераторы при подходящем выборе параметров могут демонстрировать совместное хаотическое поведение.

В первой части главы рассмотрена система осцилляторов, моделями которых служат обыкновенные дифференциальные, а во второй части — разностные уравнения.

По результатам проведенных исследований может быть предложен простой и эффективный способ создания генераторов хаотических колебаний.

2.1. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных осцилляторов

2.1.1. Локальная постановка проблемы

Реализуемость описанной выше общей идеи проектирования кольцевых хаотических генераторов проиллюстрируем на примере скалярного нелинейного уравнения

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + u = f(u, \dot{u}), \quad (2.1.1)$$

где ε – малый по модулю параметр произвольного знака, а тейлоровское разложение в нуле функции $f(u, v) \in C^\infty$ имеет вид

$$f(u, v) = a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + b_4 v^3 + \dots \quad (2.1.2)$$

Основное предположение, при котором будет рассматриваться это уравнение, состоит в выполнении неравенства

$$\operatorname{Re} d < 0, \quad (2.1.3)$$

где d – комплексная ляпуновская величина, отвечающая нулевому состоянию равновесия при $\varepsilon = 0$ и вычисляющаяся по формуле

$$d = \frac{1}{2} [a_2(a_1 + a_3) + b_2 + 3b_4] - \frac{i}{6} [10a_1(a_1 + a_3) + 4a_3^2 + a_2^2 + 9b_1 + 3b_3]. \quad (2.1.4)$$

Как известно (см., например, [130]), при условии (2.1.3) и при $\varepsilon > 0$ нулевое решение уравнения (2.1.1) экспоненциально устойчиво, а при $\varepsilon < 0$, $|\varepsilon| \ll 1$ из нуля рождается устойчивый цикл амплитуды порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$. В дальнейшем считаем, что каждый из упомянутых аттракторов глобально устойчив. В этом случае уравнение (2.1.1) удовлетворяет основным требованиям, которые мы предъявляем к парциальным системам. Другая причина, по которой наш выбор пал именно на это уравнение, состоит в том, что при различных правых частях f оно служит математической моделью для широкого класса автогенераторов с сосредоточенными параметрами [110].

При рассмотрении кольцевого генератора ограничимся простейшим случаем $S_1 = S_2 = S_3 = S$, а в качестве парциальной системы S возьмем уравнение (2.1.1). В итоге приходим к системе

$$\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j + \mu g(u_{j-1}) = f(u_j, \dot{u}_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.5)$$

где $u_0 = u_3$, а функция связи $g(u) \in C^\infty$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$ (смысл последнего требования в том, что связь должна гасить излишне интенсивные сигналы). Что же касается параметра $\mu > 0$, то его считаем хотя и малым, но подчиненным соотношению:

$$|\nu| \ll 1, \quad \text{где } \nu = \varepsilon/\mu. \quad (2.1.6)$$

Следуя изложенной в [91] методике, при условии (2.1.6) возможные автоколебательные режимы системы (2.1.5) будем искать в виде формальных рядов по целым степеням $\sqrt{\mu}$:

$$u_j = \sqrt{\mu} u_{j,1}(t, \tau) + \mu u_{j,2}(t, \tau) + \mu^{3/2} u_{j,3}(t, \tau) + \dots, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.7)$$

где $\tau = \mu t$, все функции $u_{j,k}$, $k \geq 1$ являются 2π -периодическими по t , причем

$$u_{j,1} = z_j(\tau) \exp(it) + \bar{z}_j(\tau) \exp(-it), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.8)$$

а z_j – некоторые пока неизвестные (подлежащие определению в ходе алгоритма) комплексные амплитуды.

Подставляя формулы (2.1.2), (2.1.7), (2.1.8) вместе с равенством $\varepsilon = \nu\mu$ в систему (2.1.5) и приравнивая коэффициенты при μ , для $u_{j,2}$ получаем линейные неоднородные уравнения вида:

$$\ddot{u}_{j,2} + u_{j,2} = c_{j,0}(\tau) + c_{j,1}(\tau) \exp(2it) + \bar{c}_{j,1}(\tau) \exp(-2it), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.9)$$

где, как и в (2.1.5), точкой обозначено дифференцирование по t , а переменная τ в данном случае рассматривается как параметр. Отсюда функции $u_{j,2}$ однозначно определяются в форме, аналогичной правым частям уравнений (2.1.9), т. е. в виде суммы нулевых и вторых гармоник по t .

После приравнивания коэффициентов при $\mu^{3/2}$ для $u_{j,3}$ получаем уравнения, подобные (2.1.9), но теперь их правые части $g_j(t, \tau)$ – суммы первых и третьих гармоник по t . Напомним, далее, что нас интересуют периодические по t решения этих уравнений. Тем самым, с необходимостью должны быть равными нулю коэффициенты при $\exp(\pm it)$ в неоднородностях $g_j(t, \tau)$, $j = 1, 2, 3$. Добиться же выполнения требуемых равенств можно за счет выбора имеющихся в запасе комплексных амплитуд $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$. Нетрудно убедиться, что на этом пути для упомянутых амплитуд выходит система

$$\frac{dz_j}{d\tau} = -\frac{\nu}{2} z_j + \frac{i}{2} z_{j-1} + d |z_j|^2 z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.10)$$

где $z_0 = z_3$, а комплексная постоянная d и вещественный параметр ν задаются соответственно равенствами (2.1.4) и (2.1.6).

В дальнейшем в силу малости $|\nu|$ вместо (2.1.10) будем работать с предельной системой

$$\frac{dz_j}{d\tau} = \frac{i}{2} z_{j-1} + d|z_j|^2 z_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.1.11)$$

Нам потребуются следующие два определения.

Определение 2.1. Автомоделным циклом системы (2.1.11) назовем ее периодическое решение вида

$$z_j(\tau) = z_j^0 \exp(i\sigma\tau), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.12)$$

где $z_j^0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ – некоторые постоянные.

Определение 2.2. Двумерным автомоделным тором системы (2.1.11) будем называть ее квазипериодическое решение вида

$$z_j(\tau) = z_j^0(\tau) \exp(i\sigma\tau), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.13)$$

где σ – вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(\tau)$, $j = 1, 2, 3$ периодичны по τ с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (2.1.13) не приводится к виду (2.1.12).

Из способа получения системы (2.1.11) вытекает, что она представляет собой укороченную нормальную форму исходной системы (2.1.5). Тем самым, справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии (см. например, [11, 91]).

Теорема 2.1. Предположим, что система (2.1.11) имеет некоторый автомоделный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдутся такие достаточно малые $\mu_0, \nu_0 > 0$, что при всех $\varepsilon, \mu : 0 < \mu \leq \mu_0$, $|\varepsilon|/\mu \leq \nu_0$ исходная система (2.1.5) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (2.1.7), (2.1.8) с учетом равенств (2.1.12) или (2.1.13) соответственно.

Численное исследование системы (2.1.11), результаты которого приводятся ниже, показывает, что при надлежащем выборе параметров она может иметь устойчивый автомоделный цикл или тор. Таким образом, область применимости сформулированной теоремы заведомо не пуста. Следует отметить, впрочем, что эта теорема носит вспомогательный характер и

фиксирует лишь тот объем информации об исходной системе (2.1.5), который допускает строгое математическое обоснование. Основным же результат данной главы получен в следующем разделе посредством численного анализа и состоит в существовании у системы (2.1.11) хаотического аттрактора при всех достаточно больших по модулю значениях параметра

$$c_0 = -\text{Im } d / \text{Re } d. \quad (2.1.14)$$

Показывается также, что в этом случае аналогичный аттрактор может иметь и исходная система (2.1.5).

2.1.2. Анализ нормальной формы

Сначала приведем систему (2.1.11) к виду, более удобному для численного интегрирования. С этой целью выполним в ней последовательно замены

$$\begin{aligned} z_j \sqrt{-2 \text{Re } d} &\rightarrow z_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \tau/2 \rightarrow \tau; \quad z_j = \xi_j \exp(i\varphi_j), \\ \xi_j &> 0, \quad 0 \leq \varphi_j \leq 2\pi, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В результате от получившейся в итоге шестимерной системы для $\xi_j, \varphi_j, j = 1, 2, 3$, отщепляется пятимерная система для $\xi_j, j = 1, 2, 3, \psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3, \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, имеющая вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_3 \sin \psi_1 - \xi_1^3, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 \sin \psi_2 - \xi_2^3, \\ \dot{\xi}_3 &= -\xi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) - \xi_3^3, \\ \dot{\psi}_1 &= c_0 (\xi_1^2 - \xi_3^2) + \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= c_0 (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \cos \psi_2 - \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

где c_0 – параметр (2.1.14), а точкой обозначено дифференцирование по τ .

Следует отметить, что любому автомодельному циклу (2.1.12) или тору (2.1.13) системы (2.1.11) в новой системе (2.1.15) отвечает состояние равновесия или цикл. Последняя, в частности, всегда имеет состояние равновесия

$$O = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0) : \xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = \sqrt[4]{12}/2, \quad \psi_1^0 = \psi_2^0 = 2\pi/3. \quad (2.1.16)$$

Несложный подсчет показывает, что за устойчивость состояния равновесия (2.1.16) отвечает расположение корней многочлена

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= 4\lambda^5 + 24\sqrt{3}\lambda^4 + (6\sqrt{3}c_0 + 174)\lambda^3 + 4(18c_0 + 54\sqrt{3})\lambda^2 + \\ &+ (9c_0^2 + 90\sqrt{3}c_0 + 423)\lambda + 9\sqrt{3}c_0^2 + 108c_0 + 117\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Заметим, далее, что полином (2.1.17) имеет корень $\lambda = -\sqrt{3}$ и, следовательно, после деления на $\lambda + \sqrt{3}$ принимает вид

$$P_1(\lambda) = 4\lambda^4 + 20\sqrt{3}\lambda^3 + (6\sqrt{3}c_0 + 114)\lambda^2 + (54c_0 + 102\sqrt{3})\lambda + 9c_0^2 + 36\sqrt{3}c_0 + 117. \quad (2.1.18)$$

Что же касается получившегося в итоге многочлена (2.1.18), то его гурвицевость эквивалентна выполнению неравенств

$$144c_0 + 1872\sqrt{3} > 0, \quad 143 + 24\sqrt{3}c_0 - c_0^2 > 0.$$

А отсюда, в свою очередь, заключаем, что состояние равновесия (2.1.16) экспоненциально устойчиво при $c_0 \in (c_-, c_+)$, где

$$c_- = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{23} \approx -3.19455, \quad c_+ = 12\sqrt{3} + 5\sqrt{23} \approx 44.7638, \quad (2.1.19)$$

и неустойчиво при $c_0 \in \mathbb{R} \setminus [c_-, c_+]$. Добавим еще, что при прохождении параметра c_0 через критические значения (2.1.19) потеря устойчивости происходит колебательным образом.

Численное интегрирование системы (2.1.15) проводилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом 10^{-4} с использованием пакета программ Tracer 3.7 [24]. Было предпринято исследование динамики этой системы при увеличении $|c_0|$ от нуля до бесконечности, результаты которого и приводятся ниже (точнее говоря, речь пойдет лишь о некоторых фрагментах динамики, которые удалось установить с той или иной степенью достоверности).

Обратимся сначала к случаю $c_0 \geq 0$. В первом приближении здесь наблюдаются следующие фазовые перестройки.

- 1) При $0 \leq c_0 < c_1^+$, где $c_1^+ = c_+$ (см. (2.1.19)), система (2.1.15) имеет единственное экспоненциально устойчивое состояние равновесия (2.1.16), которое при прохождении c_0 через критическое значение c_1^+ мягко теряет устойчивость с последующим рождением устойчивого предельного цикла C_0 .
- 2) При $c_1^+ < c_0 < c_2^+$, где $c_2^+ \approx 48.57$, цикл C_0 , о котором говорилось чуть выше, является единственным аттрактором рассматриваемой системы.
- 3) При $c_0 = c_2^+$ происходит бифуркация удвоения периода: цикл C_0 становится неустойчивым и от него ответвляется устойчивый цикл C_1 условно двойного по отношению к C_0 периода. Этот цикл сохраняет

устойчивость на интервале $c_2^+ < c_0 < c_4^+$, где $c_4^+ \approx 54.42$, а при прохождении c_0 через значение c_4^+ теряет ее жестко (т. е. не порождает других аттракторов при $c_0 > c_4^+$).

- 4) Первый хаотический аттрактор возникает нелокально при $c_0 = c_3^+$, где $c_3^+ \approx 54.37$, и на интервале $c_3^+ < c_0 < c_4^+$ сосуществует с устойчивым циклом C_1 .

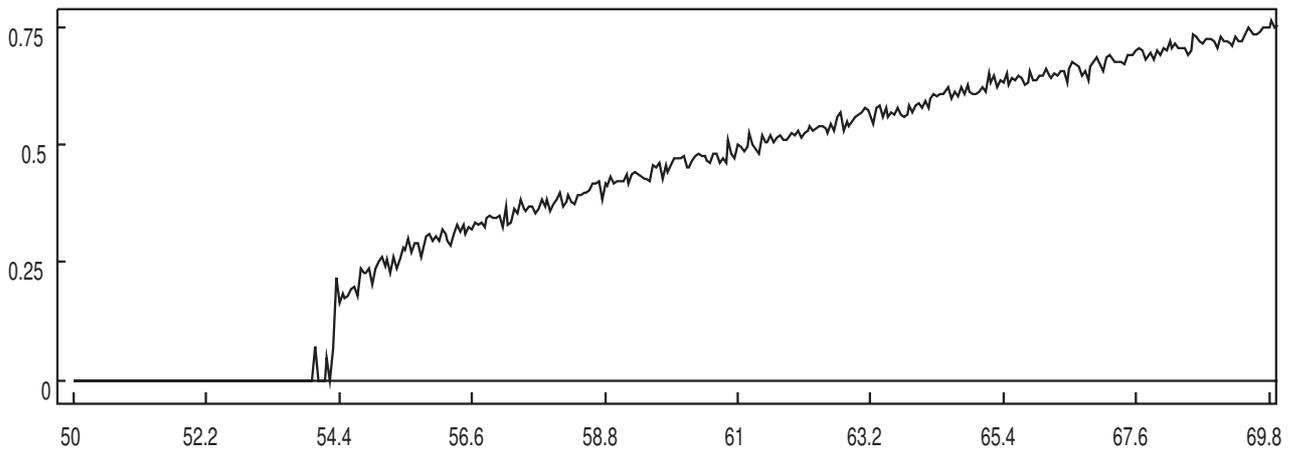


Рис. 2.1.

Приведенные факты иллюстрирует показанный на рис. 2.1 график старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(c_0)$ аттрактора системы (2.1.15), построенный на отрезке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом h по параметру c_0 , равным 0.05 (в случае $c_3^+ < c_0 < c_4^+$ этот показатель вычислялся, естественно, для хаотического аттрактора). Из вида данного графика можно

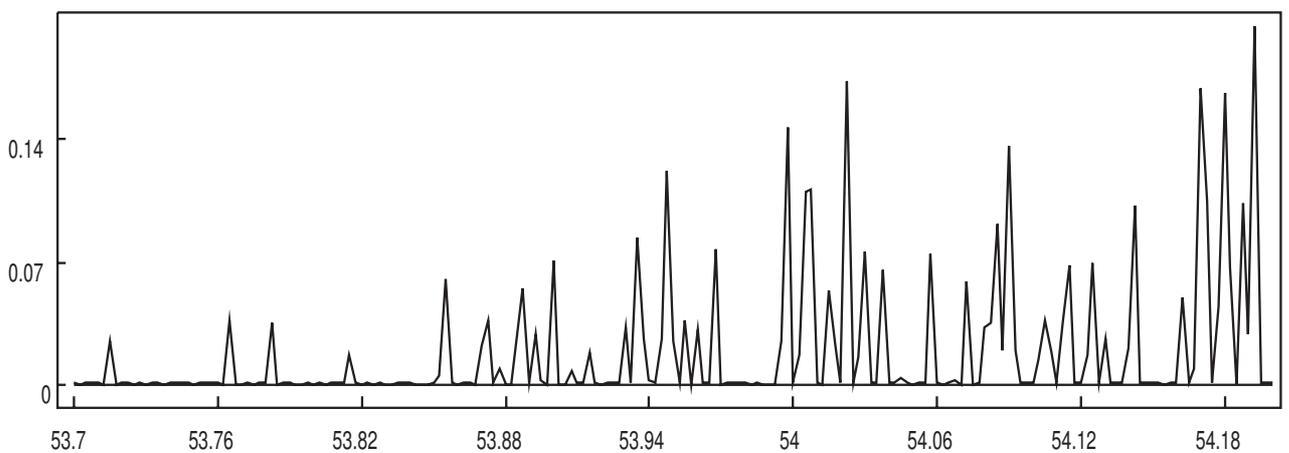


Рис. 2.2.

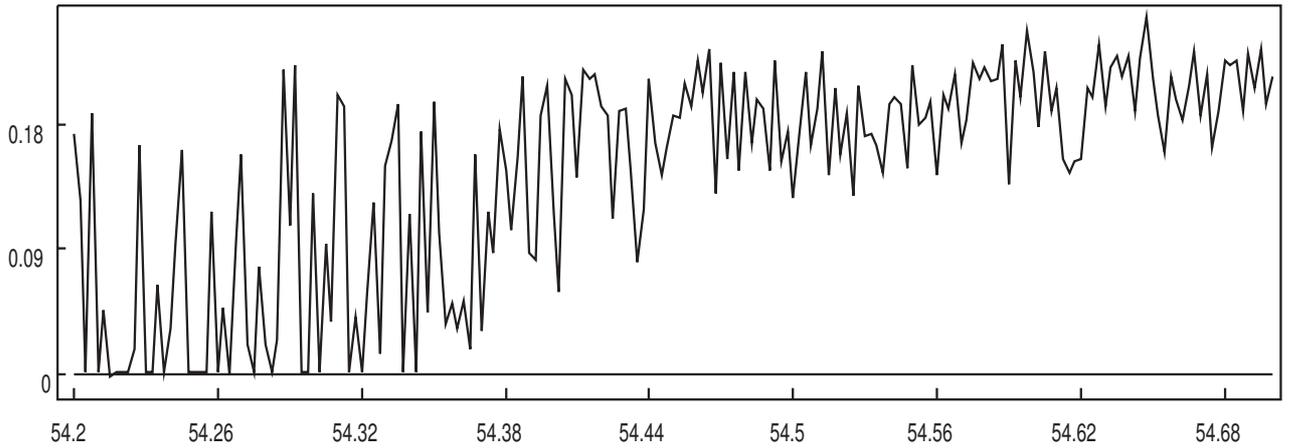


Рис. 2.3.

заклучить, что показатель $\lambda_{\max}(c_0)$ с увеличением c_0 растет, хотя и немонотонно, и при всех $c_0 \geq 54.7$ заведомо отделен от нуля (последний вывод сделан на основе контрольных расчетов, выполненных при

$$c_0 \in [54.7, 55.2], [54.803, 54.807], [54.8037, 54.8039], [54.9, 55.1]$$

с шагами h по c_0 , равными соответственно 0.0025, 0.0001, 0.00002 и 0.001).

Отдельно остановимся на динамических эффектах, сопровождающих переход от регулярных колебаний к хаотическим. В связи с этим обратимся к рис. 2.2, 2.3, где представлены графики $\lambda_{\max}(c_0)$ на отрезках $53.7 \leq c_0 \leq 54.2$ и $54.2 \leq c_0 \leq 54.7$, построенные по точкам с шагом 0.0025. Характерные "провалы" показателя λ_{\max} до нуля соответствуют так называемым "окнам периодичности", когда хаос сменяется устойчивым циклом. Из приведенных графиков видно, что таких окон существует достаточно большое (возможно счетное) число. Тем самым, отрезок $53.7 \leq c_0 \leq 54.7$ уместно назвать зоной "дышащего" хаоса. Что же касается промежутка $c_0 \geq 54.7$, то, как уже было сказано выше, на нем показатель λ_{\max} положителен и отделен от нуля. Следовательно, этот промежуток можно назвать зоной стабильного хаоса.

Перейдем теперь к случаю $c_0 < 0$. Здесь удалось выявить следующие фазовые перестройки.

- 1) При $c_1^- < c_0 < 0$, где $c_1^- = c_-$ (см. (2.1.19)), как и в предыдущем случае, система (2.1.15) имеет единственное устойчивое состояние равновесия (2.1.16).
- 2) При $c_2^- < c_0 < c_1^-$, где $c_2^- \approx -9.84$, аттрактором системы (2.1.15) является устойчивый цикл, ответвившийся от состояния равновесия (2.1.16) при $c_0 = c_1^-$.

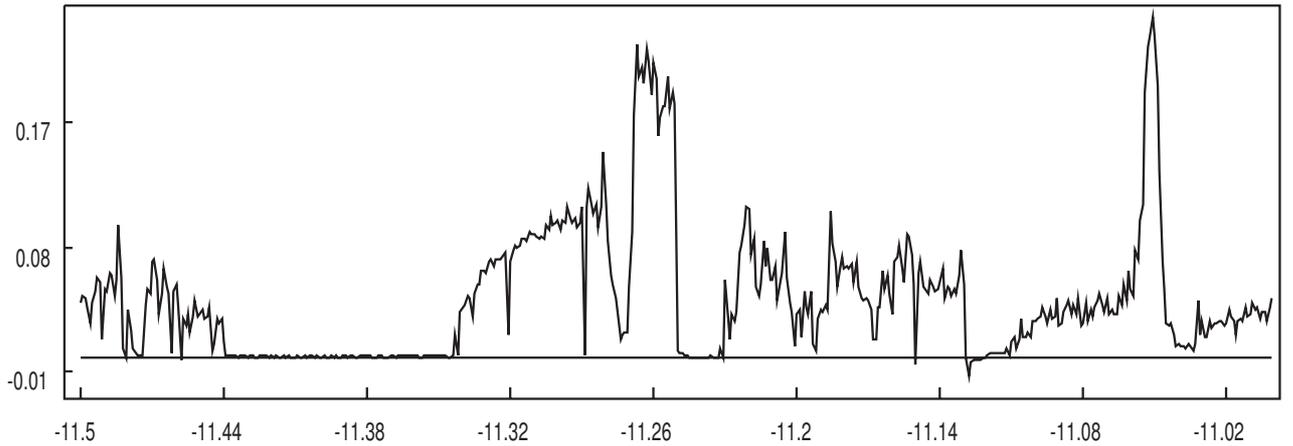


Рис. 2.4.

- 3) При $c_0 = c_2^-$ упомянутый выше цикл претерпевает первую бифуркацию удвоения, при $c_0 = c_3^- \approx -10.56$ – вторую и т. д. В результате при $c_0 \approx -10.95$ по фейгенбаумовскому сценарию возникает первый хаотический аттрактор.
- 4) При последующем уменьшении c_0 порядок и хаос многократно сменяют друг друга. В частности, здесь существуют по крайней мере две области дышащего хаоса: $-12 \lesssim c_0 \lesssim -10.95$ и $-52.6 \lesssim c_0 \lesssim -50.34$. Первой из этих областей отвечают показанные на рис. 2.4, 2.5 графики $\lambda_{\max}(c_0)$ при $-11.5 \leq c_0 \leq -11$ и $-12 \leq c_0 \leq -11.5$, построенные с шагом 0.001 по параметру c_0 . Представление о второй из областей дают графики $\lambda_{\max}(c_0)$ на отрезках $-50.5 \leq c_0 \leq -50.3$, $-52.64 \leq c_0 \leq -52.48$ (см. рис. 2.6, 2.7), построение которых проводилось с шагом 0.0005. Что же касается стабильного хаоса, то он наблюдается при всех $c_0 \lesssim -52.6$.

Проделанный численный анализ показывает богатое разнообразие динамических свойств системы (2.1.15), главное из которых – наличие в ней хаоса при всех $|c_0| \geq 54.7$. Действительно, это означает, что кольцевой хаотический генератор можно сконструировать, взяв за основу практически любой известный классический генератор периодических колебаний, моделирующийся уравнением (2.1.1). Единственная проблема заключается в том, чтобы добиться выполнения требуемой оценки для $|c_0|$ за счет надлежащего выбора параметров парциальной системы.

В качестве конкретного примера, к которому применима описанная выше локальная теория, возьмем уравнение Ван дер Поля – Дуффинга

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + u^2 \dot{u} + u + a u^3 = 0, \quad (2.1.20)$$

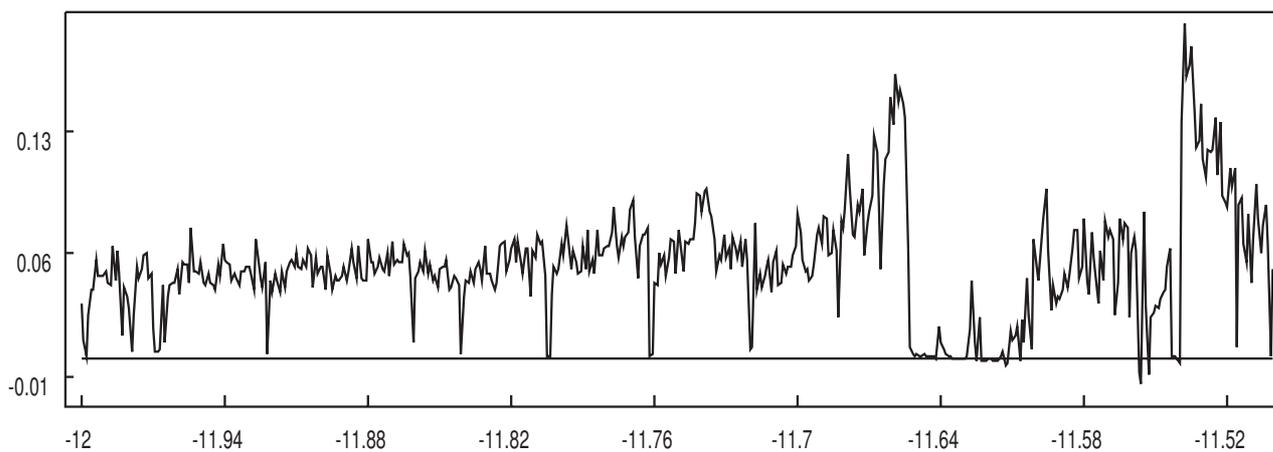


Рис. 2.5.

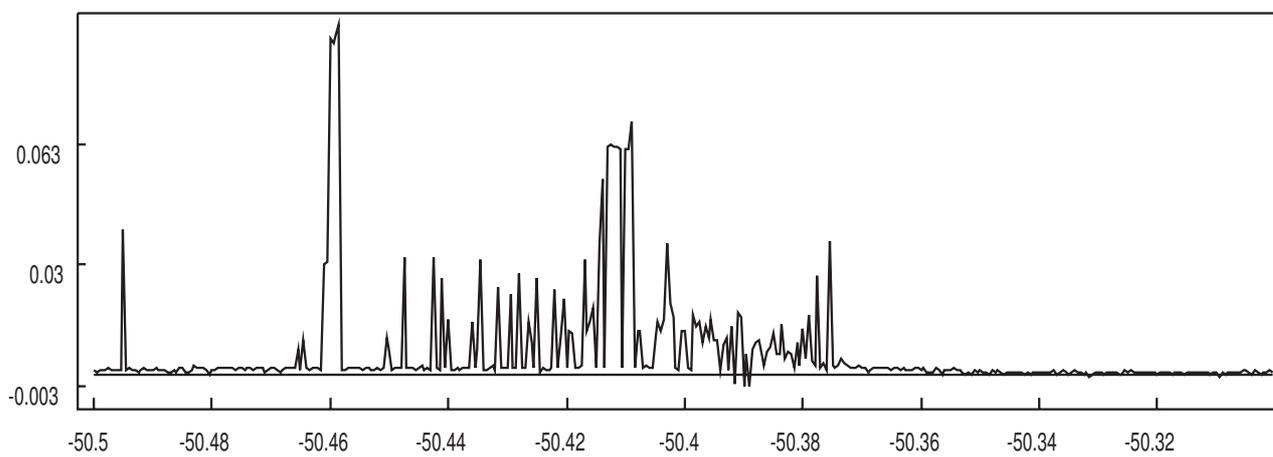


Рис. 2.6.

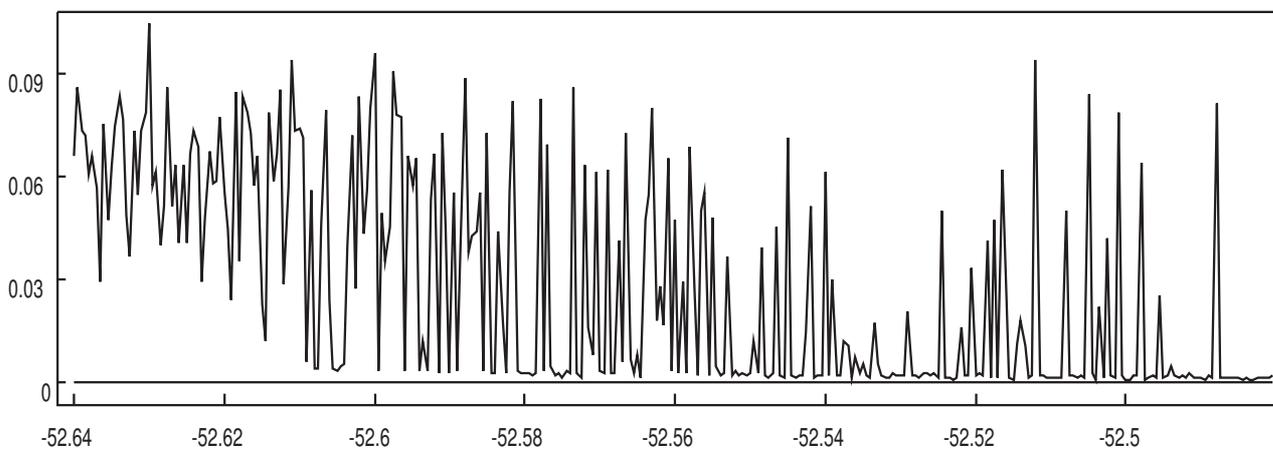


Рис. 2.7.

где $|\varepsilon| \ll 1$, $a = \text{const} > 0$. Это уравнение удовлетворяет всем требованиям, наложенным на парциальную систему в разделе 1, и, в частности, здесь

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} a, \quad c_0 = 3a. \quad (2.1.21)$$

Рассмотрим затем соответствующую уравнению (2.1.20) кольцевую систему

$$\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j^2 \dot{u}_j + u_j + a u_j^3 + \mu g(u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.22)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, а функцию связи $g(u)$ зададим формулой

$$g(u) = u/(1 + b u^4), \quad b > 0. \quad (2.1.23)$$

При исследовании получившейся системы (2.1.22), (2.1.23) ограничимся случаем

$$a = 60, \quad b = 4, \quad \varepsilon = 0.001. \quad (2.1.24)$$

В силу (2.1.21), (2.1.24) здесь $c_0 = 180$ и в соответствии с проделанным выше локальным анализом при достаточно малых $\mu > 0$ в рассматриваемой системе должна наблюдаться хаотическая динамика.

Таблица 2.1.

μ	0.01	0.05	0.1	0.3
λ_{\max}	0.005	0.018	0.0206	0.015

Численные расчеты, результаты которых представлены в таблице 2.1, полностью согласуются с теоретическими выводами. В этой таблице приведены значения старшего ляпуновского показателя λ_{\max} хаотического аттрактора системы (2.1.22) – (2.1.24) при различных μ .

Механизм возникновения хаоса в описанном выше примере удобнее проследить, меняя параметр μ от больших значений к малым. Как показывает численный анализ, здесь реализуется известный сценарий Рюэля-Тakens (см., например, [101]). А именно, сначала, т. е. при всех $\mu \gtrsim 16$, единственным аттрактором системы (2.1.22) – (2.1.24) является предельный цикл. При дальнейшем уменьшении μ этот цикл теряет устойчивость и от него ответвляется устойчивый двумерный тор. Последний наблюдается в диапазоне $0.4 \lesssim \mu \lesssim 16$, а затем на его месте возникает хаотический аттрактор, т. е. мы вступаем в область применимости локальной теории.

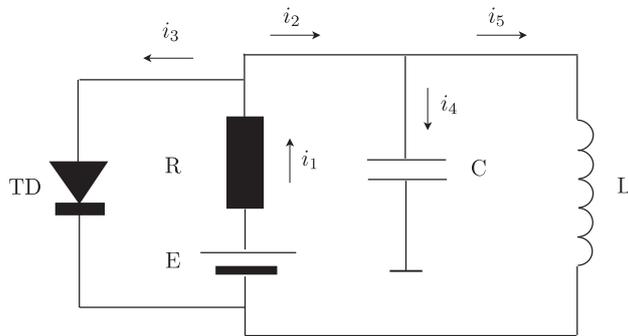


Рис. 2.8.

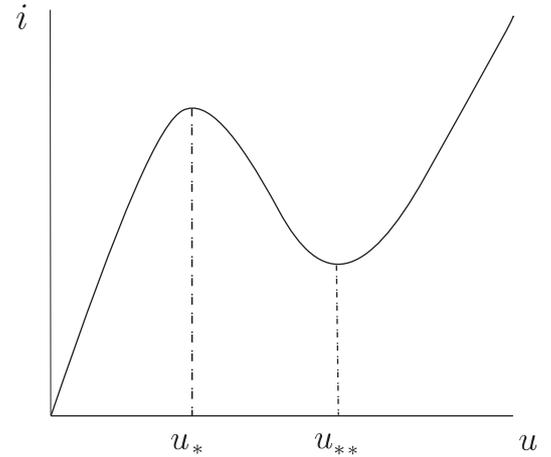


Рис. 2.9.

2.1.3. Нелокальные случаи

В этом разделе показывается, что хаотические режимы могут наблюдаться в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов и в случае, когда заведомо не работает описанная выше локальная теория. Изложение ведется на уровне рассмотрения двух содержательных примеров.

В первом примере в качестве парциальной системы возьмем автогенератор, блок-схема которого изображена на рис. 2.8. Здесь L , C , R – сосредоточенные индуктивность, емкость и активное сопротивление, а E – напряжение источника питания. Что же касается нелинейного элемента – туннельного диода TD, то его вольт-амперная характеристика имеет вид, представленный на рис. 2.9.

При выводе математической модели парциального генератора воспользуемся законами Ома и Кирхгофа, на основании которых для токов i_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, в нем (см. рис. 2.8) справедливы соотношения:

$$i_1 = \frac{E - u}{R}, \quad i_3 = f(u), \quad i_4 = C \frac{du}{dt}, \quad i_5 = -\frac{1}{L} \int (E - u) dt, \quad (2.1.25)$$

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad i_2 = i_4 + i_5,$$

где u – напряжение в контуре, $f(u)$ – нелинейная характеристика туннельного диода (см. рис. 2.9). Из равенств (2.1.25), в свою очередь, без труда получаем дифференциальное уравнение для $u = u(t)$:

$$C \ddot{u} + \left[\frac{1}{R} + f'(u) \right] \dot{u} + \frac{1}{L} u = \frac{E}{L}. \quad (2.1.26)$$

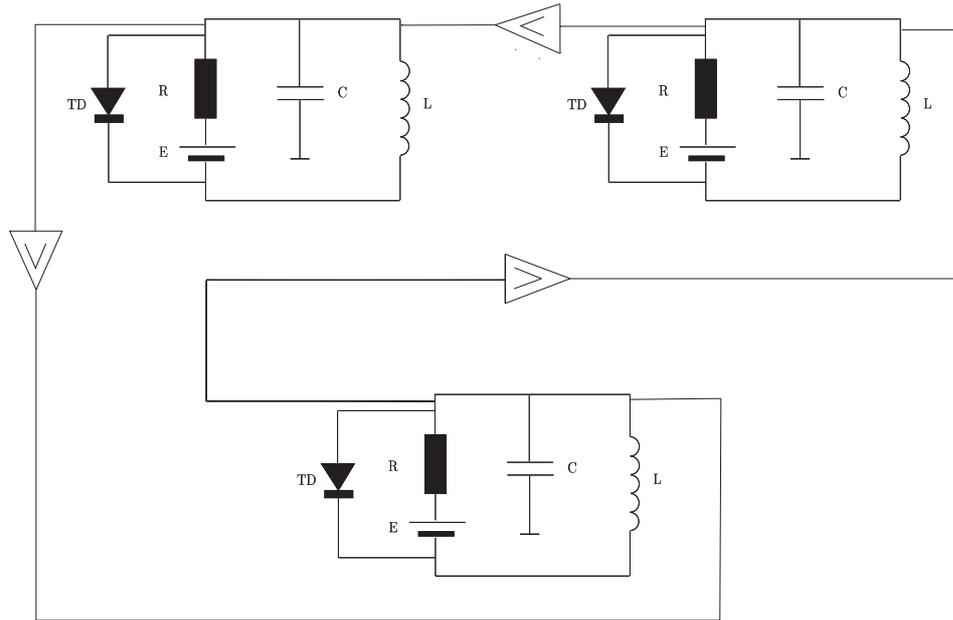


Рис. 2.10.

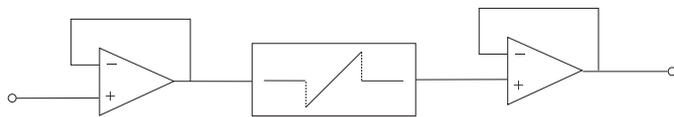


Рис. 2.11.

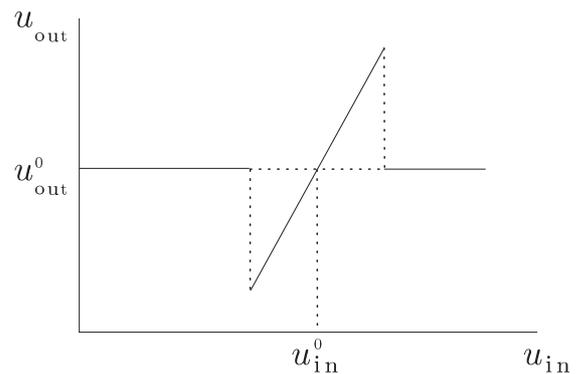


Рис. 2.12.

Нетрудно заметить, что уравнение (2.1.26) имеет состояние равновесия $u = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = E$, которое является устойчивым (неустойчивым) при

$$\frac{1}{R} + f'(\tilde{u}_0) > 0 \quad (< 0). \quad (2.1.27)$$

Всюду ниже предполагаем, что рабочая точка $A = (\tilde{u}_0, \tilde{i}_0)$, $\tilde{i}_0 = f(\tilde{u}_0)$ лежит на падающем участке нелинейной характеристики $i = f(u)$, т. е. $f'(\tilde{u}_0) < 0$. В этом случае в силу (2.1.27) добиться устойчивости или неустойчивости положения равновесия $u = \tilde{u}_0$ всегда можно только за счет изменения сопротивления R (при фиксированных прочих параметрах).

Перейдем теперь к соответствующему кольцевому генератору, схема которого показана на рис. 2.10. Как и в предыдущем разделе, мы считаем, что

все три парциальные системы идентичны и связи между ними установлены с помощью трех одинаковых блоков. Существенно же здесь то обстоятельство, что эти блоки носят принципиально нелинейный характер. А именно, каждый из них состоит из трех элементов (см. рис. 2.11): нелинейного преобразователя сигнала $u_{out} = g(u_{in})$, где u_{in} , u_{out} – входное и выходное напряжения соответственно, а график функции $g(u)$ изображен на рис. 2.12, и двух буферных каскадов, реализованных на операционных усилителях. Отметим, что буферные устройства должны иметь большое входное и малое выходное сопротивления, а также обладать единичным коэффициентом передачи в прямом направлении и нулевым в обратном. Практические способы реализации нелинейного блока, представленного на рис. 2.11, описаны в работах [66–69].

Для того чтобы вывести математическую модель интересующего нас кольцевого генератора учтем тот факт, что в силу однонаправленного характера связи парциальная система с номером j непосредственно влияет только на систему с номером $j + 1$ и, в свою очередь, сама испытывает влияние только со стороны $(j - 1)$ -ой системы. Таким образом, для j -ой ячейки имеем аналогичные (2.1.25) равенства

$$i_1 = \frac{E - u_j}{R}, \quad i_3 = f(u_j), \quad i_4 = C \frac{du_j}{dt}, \quad i_5 = -\frac{1}{L} \int (E - u_j - g(u_{j-1})) dt, \\ i_1 = i_2 + i_3, \quad i_2 = i_4 + i_5,$$

из которых после дифференцирования по t для парциальных напряжений u_j , $j = 1, 2, 3$ выходит система

$$C \ddot{u}_j + \left[\frac{1}{R} + f'(u_j) \right] \dot{u}_j + \frac{1}{L} (u_j + g(u_{j-1})) = \frac{E}{L}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.28)$$

где $u_0 = u_3$.

Получившуюся систему (2.1.28) будем изучать при двух дополнительных ограничениях. Во-первых, напряжение E источников питания считаем таковым, что $E = u_{in}^0 + u_{out}^0$, где $u_{out}^0 = g(u_{in}^0)$ (см. рис. 2.12). Во-вторых, предполагаем, что $u_* < u_{in}^0 < u_{**}$, где u_* , u_{**} – экстремумы нелинейной характеристики туннельного диода (см. рис. 2.9). В этом случае система (2.1.28) имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = u_3 = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = u_{in}^0$.

Последовательность дальнейших действий такова. Сначала выполним в системе (2.1.28) замену $u_j - \tilde{u}_0 \rightarrow u_j$, $j = 1, 2, 3$, переводящую упомянутое выше состояние равновесия в нулевое. После этого аппроксимируем функцию $f(u + \tilde{u}_0)$ полиномом третьей степени, а именно, положим $f(u + \tilde{u}_0) = -s_0 u + s_1 u^3$, где $s_0, s_1 > 0$. Разрывную же нелинейность

$g(u + \tilde{u}_0) - u_{out}^0$ для удобства численного анализа заменим непрерывной кусочно-линейной функцией. В результате после некоторых нормировок переменных u_j , $j = 1, 2, 3$, и времени интересующая нас система примет вид:

$$\ddot{u}_j + \frac{d}{dt}(\varepsilon u_j + u_j^3) + u_j + \mu g(u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.29)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, а знак параметра ε произволен. Что же касается функции связи $g(u)$, то теперь она задается равенствами

$$g(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 \leq u \leq b_1, \\ \frac{b_1}{b_2 - b_1} (b_2 - u) & \text{при } b_1 \leq u \leq b_2, \\ 0 & \text{при } u \geq b_2, \end{cases} \quad g(-u) = -g(u), \quad (2.1.30)$$

где параметры $0 < b_1 < b_2$ произвольно фиксированы.

Численный анализ системы (2.1.29), (2.1.30) проведем для случая, когда

$$\varepsilon = 0.001, \quad b_1 = 0.9, \quad b_2 = 1.1, \quad (2.1.31)$$

а параметр μ , возрастая, пробегает отрезок $0.1 \leq \mu \leq 20$. Точнее говоря, вместо (2.1.29) будем интегрировать эквивалентную систему первого порядка

$$\dot{u}_j = v_j - \varepsilon u_j - u_j^3, \quad \dot{v}_j = -u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.32)$$

где $u_0 = u_3$.

Необходимо добавить, что поскольку получившаяся система (2.1.32) инвариантна относительно замены $u_j \rightarrow -u_j$, $v_j \rightarrow -v_j$, $j = 1, 2, 3$, то все ее аттракторы разбиваются на два класса: симметричные парные (переходящие друг в друга при указанной замене) и самосимметричные (остающиеся неизменными).

При условиях (2.1.31) и при увеличении μ в системе (2.1.32) наблюдаются следующие фрагменты динамики.

1) При $0.1 \leq \mu < \mu_1$, где $\mu_1 \approx 0.82$, единственным ее аттрактором является устойчивый самосимметричный цикл. Добавим еще, что при малом μ , подчиненном условию (2.1.6), существование такого цикла гарантирует изложенная в разделе 2.1.1 локальная теория. Действительно, уравнению (2.1.29) соответствует нормальная форма (2.1.11), в которой $\text{Im } d = 0$. Таким образом, локальный хаос здесь заведомо невозможен, поскольку (см. раздел 2.1.2) при $c = 0$ единственный аттрактор системы (2.1.15) – состояние равновесия (2.1.16). В исходной же системе (2.1.32) этому состоянию равновесия отвечает устойчивый цикл.

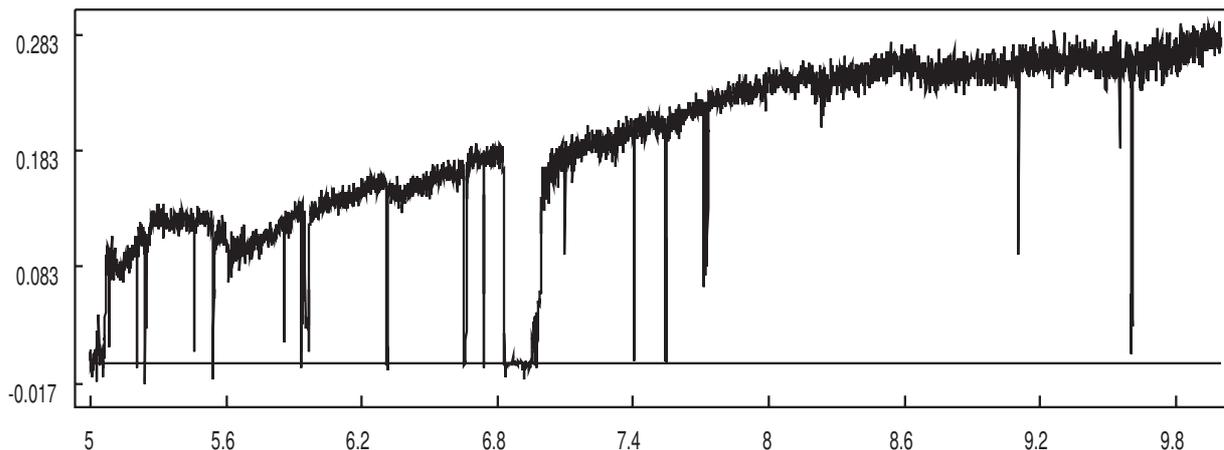


Рис. 2.13.

2) При прохождении параметра μ через критическое значение μ_1 упомянутый выше цикл претерпевает бифуркацию типа вилки, т. е. становится неустойчивым и порождает два устойчивых симметричных цикла. Последние сохраняются на интервале (μ_1, μ_3) , где $\mu_3 \approx 2.6108$, а при $\mu = \mu_3$ теряют устойчивость жестко.

3) При $\mu = \mu_2$, где $\mu_2 \approx 2.61$, нелокально возникают два симметричных хаотических аттрактора и при $\mu_2 < \mu < \mu_3$ эти аттракторы сосуществуют с устойчивыми симметричными циклами, о которых говорилось чуть выше.

4) При $\mu \approx 2.697$ симметричные хаотические аттракторы объединяются в один самосимметричный.

При последующем увеличении μ не удастся получить достоверного описания всех происходящих фазовых перестроек из-за наличия достаточно большого (возможно счетного) числа окон периодичности. Общее представление о динамике здесь дают лишь графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\mu)$ аттрактора системы (2.1.32) (см. рис. 2.13 – 2.16), построенные на отрезках

$$5 \leq \mu \leq 10, \quad 10 \leq \mu \leq 20, \quad 2.6 \leq \mu \leq 3.3, \quad 14.25 \leq \mu \leq 14.65 \quad (2.1.33)$$

по точкам с шагами h по μ , равными соответственно 0.001, 0.005, 0.002, 0.001. При этом в первых двух случаях (2.1.33) сама система (2.1.32) интегрировалась методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом 0.001 по времени, а в двух других — с шагом 0.0001.

В дополнение к приведенной на рис. 2.13 – 2.16 визуальной информации перечислим наиболее заметные окна периодичности, которые удалось обнаружить на отрезке $0.1 \leq \mu \leq 20$. К таковым относятся промежутки

$$[0.1, 2.61), \quad (2.853, 2.95), \quad (3.24, 4.582), \quad (4.67, 5.061), \quad (6.83, 6.96),$$

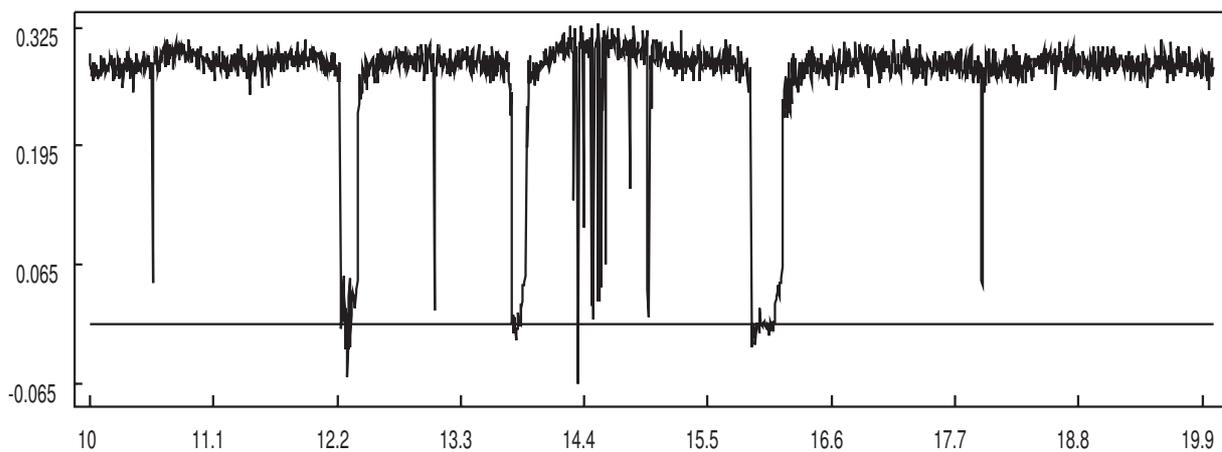


Рис. 2.14.

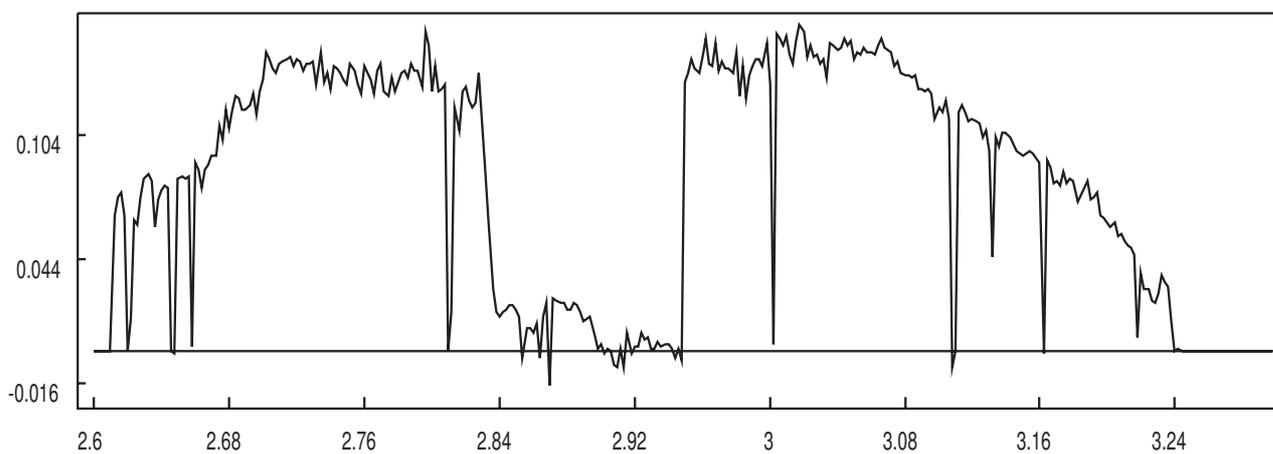


Рис. 2.15.

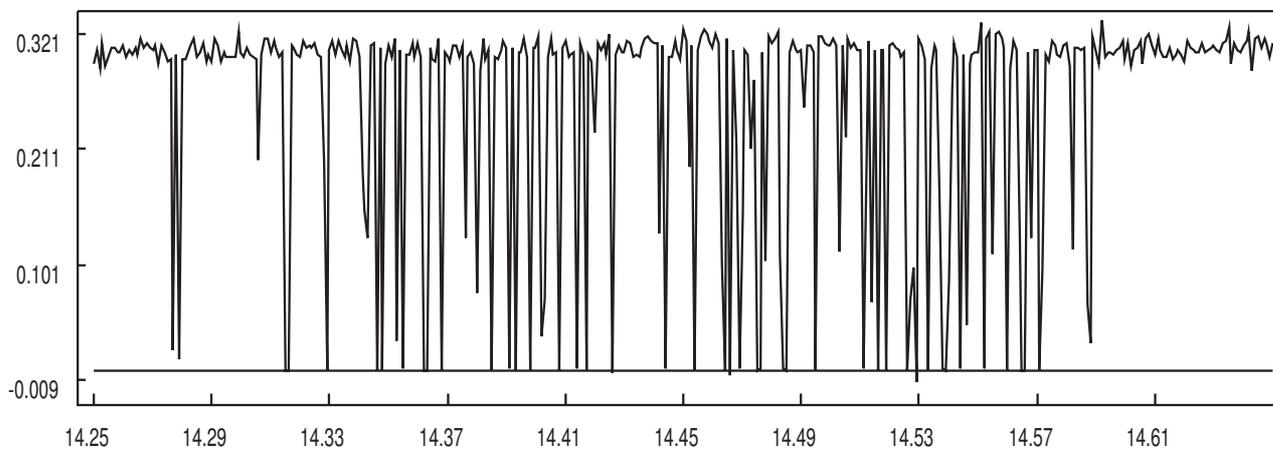


Рис. 2.16.

(12.235, 12.38), (13.755, 13.84), (15.89, 16.095).

Общее же количество всех окон, что характерно для дышащего хаоса, по всей видимости, счетно.

Еще одна характерная особенность системы (2.1.32) заключается в том, что при некоторых μ хаотические аттракторы и устойчивые циклы в ней сосуществуют. Например, при $\mu = 4.6$ она имеет два симметричных хаотических аттрактора и три устойчивых цикла – два симметричных и один самосимметричный.

Последняя из отмеченных особенностей, т. е. сосуществование порядка и хаоса, наиболее ярко проявляется в случае, если рассматриваемый кольцевой автогенератор несколько упростить. А именно, сделаем следующее. Сначала из контура, изображенного на рис. 2.8, удалим туннельный диод ТД и емкость C . В итоге приходим к парциальной системе, напряжение $u = u(t)$ в которой описывается уравнением (2.1.26) при $f(u) \equiv 0$, $C = 0$, т. е. уравнением

$$\frac{1}{R} \dot{u} + \frac{1}{L} u = \frac{E}{L}. \quad (2.1.34)$$

Получившийся контур с физической точки зрения представляет собой пассивную систему (т. е. систему, в которой невозможны собственные колебания). Далее, возьмем три одинаковых пассивных элемента такого вида и соединим в кольцо посредством блоков, показанных на рис. 2.11. В результате получим автогенератор, моделирующийся трехмерной системой

$$\dot{u}_j = -u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.35)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, $g(u)$ – функция (2.1.30).

Таблица 2.2.

μ	9.8	9.9	10.8	12.1	10.2	10.2	10.2
b_1	3	4	10	29	49	100	90
b_2	3.2	4.2	10.2	36	50	100.5	90.1
λ_{\max}	1.17	1.28	1.6	1.29	1.6	1.7	2.46

Вычисления, результаты которых приведены в таблице 2.2, показывают, что при надлежащем выборе параметров μ , b_1 , b_2 в системе (2.1.35) может существовать самосимметричный хаотический аттрактор с положительным старшим ляпуновским показателем λ_{\max} . Однако, что характерно для данной системы, вместе с хаосом она всегда имеет устойчивый самосимметричный цикл достаточно большой амплитуды.

Заключительные замечания

Суммируя проделанный анализ, можно утверждать, что предложенный в данной главе способ создания хаотических генераторов достаточно универсален. Действительно, как уже отмечалось в разделе 2.1.2, кольцевой генератор хаоса получается практически из любого известного генератора периодических колебаний, описывающегося уравнением (2.1.1). При этом в рамках локальной теории нелинейный характер связи между парциальными системами S_j , $j = 1, 2, 3$ несущественен (нормальная форма имеет вид (2.1.11) и в случае, когда в системе (2.1.5) функция связи является линейной, т. е. $g(u) = u$). Существенно же здесь наличие резонанса $1 : 1$ между собственными частотами систем S_j , $j = 1, 2, 3$. Последнего проще всего добиться, полагая $S_1 = S_2 = S_3$, что и было сделано выше.

Рассмотренные в разделе 2.1.3 нелокальные случаи позволили выявить другой аспект проблемы, а именно роль нелинейной связи между парциальными системами. В самом деле, было показано, что даже пассивные элементы, описывающиеся простейшим уравнением (2.1.34), будучи однонаправленно связанными в кольцо посредством нелинейной функции вида (2.1.30), могут демонстрировать совместное хаотическое поведение. Следует отметить, впрочем, что излишнее упрощение парциальных систем приводит к побочному эффекту – возникновению устойчивого цикла, сосуществующего с хаотическим аттрактором.

Один из способов борьбы с упомянутым выше паразитным циклом состоит в учете дополнительной нелинейной диссипации. Для того чтобы проиллюстрировать это, обратимся к системе

$$\dot{u}_j = -u_j - \nu u_j^3 - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.36)$$

получающейся из (2.1.35) при добавлении нелинейных членов $-\nu u_j^3$, $j = 1, 2, 3$, где $\nu > 0$. Предположим, далее, что параметры μ , b_1 , b_2 в ней заданы, к примеру, равенствами

$$\mu = 9.8, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 3.2. \quad (2.1.37)$$

Тогда (см. таблицу 2) при $\nu = 0$ в системе (2.1.36) сосуществуют самосимметричный хаотический аттрактор и устойчивый самосимметричный цикл. Если же при условиях (2.1.37) положить $\nu = 0.15$, то устойчивый цикл исчезает, а вместо одного самосимметричного хаоса появляются два симметричных хаотических аттрактора со старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max} \approx 1.01$.

Еще один способ избавиться от устойчивого цикла – переход от системы (2.1.35) к дискретному ее аналогу, т. е. к отображению вида

$$u_j \rightarrow a u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.1.38)$$

где $u_0 = u_3$, $a \in (0, 1)$, $\mu > 0$, $g(\mu)$ – функция (2.1.30). Контрольные вычисления, выполненные при $a = 0.5$, $\mu = 1$, $b_1 = 3.9$, $b_2 = 4.1$, показали, что в этом случае система (2.1.38) имеет единственный самосимметричный хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями $\lambda_1 \approx 0.319$, $\lambda_2 \approx 0.126$, $\lambda_3 \approx -1.038$. Аналогичная динамика реализуется в рассматриваемом отображении и при других значениях параметров a , μ , b_1 , b_2 .

В заключение добавим, что хаос в системе (2.1.35) может наблюдаться и при нелинейной характеристике, отличной от (2.1.30). Для примера рассмотрим функцию

$$g(u) = |u + b_1| - |u - b_1| + \frac{1}{2} (|u - b_2| - |u + b_2|), \quad b_1, b_2 > 0, \quad (2.1.39)$$

заимствованную из [69]. Численный анализ, проделанный при $\mu = 8$, $b_1 = 9.2$, $b_2 = 25.2$, обнаруживает у системы (2.1.35), (2.1.39) самосимметричный хаотический аттрактор со старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max} \approx 0.44$. Однако и здесь хаос сосуществует с регулярными аттракторами, а именно с двумя устойчивыми состояниями равновесия $(u_1, u_2, u_3) = \pm(54.4, 54.4, 54.4)$.

2.2. Колебания в кольце из трех однонаправленно связанных разностных генераторов

Во второй части главы изучается вопрос об аттракторах системы трех связанных двумерных отображений. Каждое парциальное отображение служит математической моделью автогенератора с релейным усилителем и с отрезком длиной линии без искажений в цепи обратной связи. Для модельного отображения построена нормализованная система обыкновенных дифференциальных уравнений, динамические свойства которой подробно изучены. Показано, что изучаемая система связанных осцилляторов имеет колебательные режимы разных масштабов.

2.2.1. Алгоритм нормализации отображений в окрестности неподвижной точки

Локальный анализ отображений в окрестности неподвижной точки обычно осуществляется путем построения некоторых нормализованных систем разностных уравнений. Общий алгоритм перехода изложен, например, в [113]. В ряде случаев, однако, такой анализ удобнее производить путем сведения исследуемого объекта к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые из этих случаев представлены в работах [127, 128, 132]. Опишем основную конструкцию общего вида, позволяющую получить нормальную форму отображения в виде системы дифференциальных уравнений, и приведем содержательный пример ее использования. Как и в [113], в пространстве \mathbb{R}^n рассмотрим отображение

$$u \rightarrow A_0 u + \varepsilon A_1 u + F_2(u, u) + F_3(u, u, u), \quad (2.2.1)$$

определяющее функцию $u(t+1)$, $t \in [-1, 0]$ через функцию $u(t)$. Здесь $u(t)$ при каждом t лежит в \mathbb{R}^n , $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, A_0 — $n \times n$ вещественная матрица, имеющая m пар собственных чисел на единичной окружности комплексной плоскости так, что $A_0 a_k = e^{i\omega_k} a_k$, $k = 1, \dots, m$. Остальные собственные числа A_0 лежат внутри единичного круга. Будем считать, что $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$ — линейные по каждому своему аргументу функции, определяющие квадратичную и кубическую нелинейности правой части.

Отображение (2.2.1) при каждом t определяет обычное разностное уравнение вида

$$u(t+1) = (A_0 + \varepsilon A_1)u(t) + F_2(u(t), u(t)) + F_3(u(t), u(t), u(t)). \quad (2.2.2)$$

Выполним в (2.2.2) замену

$$u(t) = \sqrt{\varepsilon}u_0(t, s) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2}u_2(t, s) + \varepsilon^2 u_3(t, s) + \varepsilon^{5/2}u_4(t, s) + \dots, \quad (2.2.3)$$

где $u_0(t, s) = \sum_{k=1}^m (\xi_k(s) \exp(i\omega_k t) a_k + \bar{\xi}_k(s) \exp(-i\omega_k t) \bar{a}_k)$, $s = \varepsilon t$. Приравнение коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ приводит на третьем шаге к уравнению

$$u_2(t+1, s) - A_0 u_2(t, s) = - \sum_{k=1}^m \left(\dot{\xi}_k(s) \exp(i\omega_k(t+1)) a_k + \dot{\bar{\xi}}_k(s) \exp(-i\omega_k(t+1)) \bar{a}_k \right) + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) + A_1 u_0. \quad (2.2.4)$$

В зависимости от того, какие резонансные соотношения связывают ω_k , могут быть получены различные условия разрешимости задачи (2.2.4), ясно, однако, что эти соотношения будут включать следующие слагаемые:

$$\dot{\xi}_k = \gamma_k \xi_k + \xi_k \sum_{j=1}^m d_{kj} |\xi_j|^2 + \dots, \quad (2.2.5)$$

где γ_k, d_{kj} – числа, определяемые правыми частями (2.2.2). Грубым режимам системы (2.2.5) будут соответствовать решения (2.2.2) той же устойчивости с асимптотикой (2.2.3).

2.2.2. Построение отображения, моделирующего динамику взаимодействия трех автогенераторов

Рассмотрим применение этого алгоритма на примере отображения, порождаемого системой трех связанных *RCLG*-генераторов. Исходная модель имеет вид (см., например, [87])

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial u_j}{\partial t} + \mu^2 u_j = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u_j \Big|_{x=0} + \varphi \left(K \left(u_j \Big|_{x=1} + \alpha u_{j-1} \Big|_{x=0} \right) \right) = 0, \quad u_0 = u_3. \quad (2.2.7)$$

Здесь $u_j(t, x)$ – нормированные напряжения в линиях соответствующих генераторов, 2μ – потери в линии, которые ниже предполагаются малыми, $K > 0$ – коэффициент усиления, а $|\alpha| \ll 1$ – параметр, характеризующий

связь между генераторами. Функция $\varphi(z)$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки в начало координат. Обычно предполагается, что (см. [87]) $\varphi'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ и, кроме того, выполнены следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\rightarrow q_1 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad \varphi(z) \rightarrow -q_2 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \\ z\varphi'(z) &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned}$$

где $q_1, q_2 > 0$. Учитывая, что ниже будут изучаться локальные свойства системы (2.2.6), (2.2.7), считаем, что в окрестности точки ноль $\varphi(z)$ допускает следующее разложение:

$$\varphi(z) = z - az^3 + bz^5 + \dots \quad (2.2.8)$$

Простейший пример функции, удовлетворяющей указанным условиям, задается формулой $\varphi(z) = z(1 + z^2)^{-1/2}$, для которой $a = 1/2$, $b = 3/8$.

При некоторых дополнительных ограничениях замена

$$u_j = e^{-\mu t} (h_j(t + (x - 1)) + h_j(t - (x - 1))) \quad (2.2.9)$$

приводит краевую задачу (2.2.6)-(2.2.7) к системе разностных уравнений

$$\begin{cases} v_j(t+1) = w_j(t) \\ w_j(t+1) = -(1-\varepsilon)v_j(t) - \varphi(Kw_j(t)) + \nu\varphi'(Kw_j(t))\varphi(Kw_{j-1}(t)), \end{cases} \quad (2.2.10)$$

где $w_j(t) = h_j(t) \exp(1 - \mu t)$, $v_j(t) = w_j(t - 1)$, $j = 1, 2, 3$, $v_0 = v_3$, $w_0 = w_3$, $\varepsilon = 1 - \exp(-2\mu)$, $\nu = \alpha K$, а величина $2K \exp(-\mu)$ снова обозначена K .

Разностная система (2.2.10) имеет самостоятельное значение, не связанное с краевой задачей (2.2.6), (2.2.7) (см. [87]). Рассмотрим возможность применения изложенного в предыдущем пункте алгоритма к данной задаче.

Матрица линейной части системы (2.2.10) имеет при $0 < K < 2$ и $\varepsilon = 0$ пару собственных чисел $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0)$, где $\omega_0 = \arccos(-K/2)$, кратности три, которая лежит на единичной окружности комплексной плоскости. Учитывая, что этим собственным числам соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова их кратность, можно утверждать, что при достаточно малых ε в окрестности нулевой неподвижной точки системы (2.2.10) имеется 6-мерное экспоненциально устойчивое локальное инвариантное многообразие (см. [87, 113]). Используя описанный выше алгоритм, построим нормальную форму отображения (2.2.10) и изучим ее динамические свойства.

2.2.3. Нормальная форма отображения

Обозначим $u(t)$ шестимерный вектор вида $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3)^T$ и будем считать, что $\nu = \varepsilon\nu_0$, тогда для нормализации системы разностных уравнений (2.2.10) можно выполнить замену (2.2.3). На третьем шаге применения алгоритма из условий разрешимости соответствующей алгебраической задачи на $u_2(t, s)$ получаем

$$\dot{\xi}_j = -id(e^{-i\omega_0}\xi_j + 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}), \quad \xi_0 = \xi_3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2.11)$$

где $d = \frac{1}{2 \sin \omega_0}$. Нормальная форма (2.2.11) может быть уточнена на пятом шаге слагаемыми порядка ε , на седьмом — порядка ε^2 и т.д. Предполагая, что

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= -id(e^{-i\omega_0}\xi_j - 3aK^3\xi_j|\xi_j|^2 + K\nu_0\xi_{j-1}) + \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}), \\ \xi_0 &= \xi_3, \quad \xi_{-1} = \xi_2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

из условий разрешимости системы, возникающей при $\varepsilon^{5/2}$, для $u_3(t, s)$ получаем функцию добавки

$$\begin{aligned} \varepsilon\Psi_j(\xi_j, \xi_{j-1}, \xi_{j-2}) &= \frac{\varepsilon}{2}d^2 \left[e^{-2i\omega_0}\xi_j + 3aK^3(3e^{-i\omega_0} - e^{i\omega_0})\xi_j|\xi_j|^2 + \right. \\ &+ \nu_0K\xi_{j-1}(2e^{-i\omega_0} + 3aK^2(K + 4i \sin \omega_0)(2|\xi_j|^2 + |\xi_{j-1}|^2)) - \\ &- 3\nu_0aK^3(K - 4i \sin \omega_0)\xi_j^2\bar{\xi}_{j-1} + K\nu_0^2\xi_{j-2}(K + 4i \sin \omega_0) + \\ &\left. + K^5 \left(9a^2K + 4i \frac{(3a^2K + 5b(K + 2 \cos 3\omega_0)) \sin \omega_0}{K + 2 \cos 3\omega_0} \right) \xi_j|\xi_j|^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Принимая во внимание развитую в [113] общую теорию, можно показать, что грубым режимам систем (2.2.11) или (2.2.12) соответствуют решения системы (2.2.10) с асимптотикой (2.2.3) той же устойчивости. Тем самым, возникает задача качественного анализа этих систем. Рассмотрим сначала систему (2.2.11) и в целях ее упрощения выполним замену $\xi_j = \sqrt{\frac{4 \sin \omega_0}{3K^3}} \exp\left(-t \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \omega_0\right) \eta_j$. Преобразованная система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= -\eta_1/2 - i(\gamma\eta_3 + |\eta_1|^2 \eta_1), \\ \dot{\eta}_2 &= -\eta_2/2 - i(\gamma\eta_1 + |\eta_2|^2 \eta_2), \\ \dot{\eta}_3 &= -\eta_3/2 - i(\gamma\eta_2 + |\eta_3|^2 \eta_3), \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где $\gamma = \frac{K\nu_0}{2 \sin \omega_0}$.

Сразу отметим, что при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (2.2.14) асимптотически устойчиво, а при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ — неустойчиво. Если же $|\gamma| = 1/\sqrt{3}$, то система (2.2.14) имеет в фазовом пространстве прямую, заполненную неподвижными точками.

2.2.4. Динамические свойства нормальной формы отображения

Качественный анализ системы (2.2.14) удобнее производить после перехода в ней к полярным координатам $\eta_j = p_j e^{i\varphi_j}$. Обозначая $\alpha_1 = \varphi_3 - \varphi_1$ и $\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1/2 + \gamma p_3 \sin \alpha_1, \\ \dot{p}_2 &= -p_2/2 + \gamma p_1 \sin \alpha_2, \\ \dot{p}_3 &= -p_3/2 - \gamma p_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_1 &= \gamma \left[\frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 - \frac{p_2}{p_3} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right] + p_1^2 - p_3^2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \gamma \left[\frac{p_1}{p_2} \cos \alpha_2 - \frac{p_3}{p_1} \cos \alpha_1 \right] + p_2^2 - p_1^2. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Остановимся сначала на простейших свойствах системы (2.2.15) аналитического характера. Прежде всего отметим свойство циклической симметрии, которое следует из того, что осцилляторы исходной системы разностных уравнений (2.2.10) идентичны друг другу. Как легко видеть, система (2.2.15) инвариантна относительно замен

$$p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, p_3 \rightarrow p_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow -\alpha_1 - \alpha_2 \quad (2.2.16)$$

и периодична по α_1, α_2 с периодом 2π . Тем самым, любая траектория системы (2.2.15) либо является самосимметричной, либо одновременно с ней в фазовом пространстве (2.2.15) сосуществуют еще две траектории, получающиеся из данной однократной или двукратной заменой (2.2.16).

Второе свойство системы (2.2.15) состоит в существовании в ее фазовом пространстве двух инвариантных прямых

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = 2\pi/3, \\ p_1 = p_2 = p_3 = p, \alpha_1 = \alpha_2 = -2\pi/3. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Система (2.2.15) сводится к уравнению

$$\dot{p} = (\gamma\sqrt{3} - 1)p/2,$$

на первой из прямых (2.2.17) и

$$\dot{p} = -(\gamma\sqrt{3} + 1)p/2$$

— на второй. Как уже отмечалось выше, при $|\gamma| < 1/\sqrt{3}$ нулевое решение (2.2.14) асимптотически устойчиво. Система (2.2.15) в силу выполненных замен уже не имеет нулевого решения, однако при указанных ограничениях ее траектории стремятся к нулю вдоль одного из инвариантных направлений. При $\gamma = 1/\sqrt{3}$ первая из инвариантных прямых (2.2.17) заполнена состояниями равновесия, а при $\gamma = -1/\sqrt{3}$ — вторая. Увеличение $|\gamma|$ приводит в обоих случаях к мягкому ответвлению периодических колебаний. Учитывая, что данные фазовые перестройки происходят в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых собственных чисел, при $\gamma = \pm(1/\sqrt{3} + \mu)$, где $0 < \mu \ll 1$, можно построить асимптотику устойчивого периодического режима системы (2.2.15). Данный критический случай подробно изучен, например, в книге [64]. В частности, при $\gamma = 1/\sqrt{3} + \mu$ имеем

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^+, p^+, p^+, \alpha^+, \alpha^+)^T + r^+ \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^+ \exp(\omega^+ t)] + O(\mu). \quad (2.2.18)$$

Здесь $p^+ = \sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$, $\alpha^+ = 2\pi/3$, $\omega^+ = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $r^+ \simeq 2.745$, а вектор w^+ приближенно записывается как $(-0.1997 - 0.2029i, -0.0758 + 0.2744i, 0.2756 - 0.0715i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$. Если же $\gamma = -1/\sqrt{3} - \mu$, то асимптотика устойчивого цикла становится следующей:

$$(p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2)^T = (p^-, p^-, p^-, \alpha^-, \alpha^-)^T + r^- \sqrt{\mu} \operatorname{Re} [w^- \exp(\omega^- t)] + O(\mu), \quad (2.2.19)$$

где $p^- = \sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$, $\alpha^- = -2\pi/3$, $\omega^- = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $r^- \simeq 2.33$, а $w^- \simeq (-0.21 + 0.2619i, 0.3318 + 0.051i, -0.1218 - 0.3129i, -0.5 + 0.866i, 1)^T$.

Численный анализ, выполненный с помощью программы Tracer 3.7 (см. [24]), показал, что при увеличении параметра $\gamma > 1/\sqrt{3}$ в системе (2.2.12) наблюдается следующая динамика (точнее говоря, речь пойдет о фрагментах динамики, которые удалось выявить с той или иной степенью достоверности).

1). При $\gamma_1^+ < \gamma < \gamma_2^+$ ($\gamma_1^+ = 1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$, $\gamma_2^+ \simeq 0.716$) устойчив цикл C_1 , ответвившийся при $\gamma = \gamma_1^+$ от состояния равновесия на инвариантной прямой (2.2.17) и допускающий при $0 < \gamma - \gamma_1^+ \ll 1$ асимптотику (2.2.18).

2). При $\gamma = \gamma_2^+$ с циклом C_1 происходит бифуркация удвоения и при $\gamma_2^+ < \gamma < \gamma_3^+$ ($\gamma_3^+ \simeq 0.7173$) устойчив условно двухобходный цикл C_2 .

3). При $\gamma = \gamma_3^+$ от периодического решения двойного периода бифурцируют двухчастотные колебания (двумерный тор), которые устойчивы на промежутке $\gamma_3^+ < \gamma < \gamma_4^+$.

4). При $\gamma > \gamma_4^+$ в системе наблюдаются неупорядоченные колебания, старший ляпуновский показатель которых растет (см. рис. 2.17).

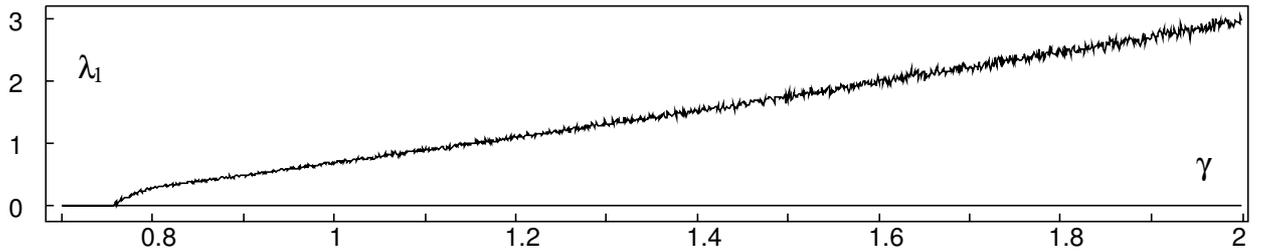


Рис. 2.17.

Величину γ_4^+ можно оценить лишь весьма приближенно, как точку, в которой старший ляпуновский показатель становится положительным, в соответствии с этим $0.75 \lesssim \gamma_4^+ \lesssim 0.758$. Способ перехода от двухчастотных колебаний к хаотическим также остается в данном случае неизвестным.

Рассмотрим теперь фазовые перестройки системы (2.2.12) при отрицательных γ . В этом случае реализуется сложная схема всевозможных бифуркаций циклов и хаотических режимов. Выделим область значений γ , примыкающую к $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_1^- = -1/\sqrt{3} \simeq 0.57735$. При этих значениях параметра возникают и претерпевают фазовые перестройки большое число различных режимов, которые удастся классифицировать по амплитуде колебаний. Выделим режимы условно малой, средней и большой амплитуды и будем обозначать буквами C и A соответственно циклы и хаотические аттракторы системы (2.2.15), добавляя индексы s , m и l (малый, средний, большой) для обозначения их амплитуды. Рассмотрим сначала бифуркации, происходящие в этой ситуации с циклом малой амплитуды.

1). Цикл малой амплитуды C_s мягко ответвляется при $\gamma = \gamma_1^-$ от состояния равновесия на второй инвариантной прямой (2.2.17) и имеет вблизи критического значения параметра γ асимптотику (2.2.19) (на рис. 2.18–2.21 этот цикл изображен жирной кривой).

2). При $\gamma_2^- < \gamma < \gamma_1^-$ ($\gamma_2^- \simeq -0.716$) цикл C_s устойчив, а при $\gamma = \gamma_2^-$ он претерпевает бифуркацию удвоения периода.

3). Цикл условно двойного периода C_s^2 остается устойчивым при $\gamma_3^- < \gamma < \gamma_2^-$ ($\gamma_3^- \simeq -1.272$).

4). При $\gamma < \gamma_3^-$ цикл C_s^2 теряет устойчивость и наблюдаются хаотические колебания с многочисленными окнами периодичности.

Отметим, что циклы C_s и C_s^2 самосимметричны, т.е. инвариантны относительно замены (2.2.16).

Ниже на рис. 2.18–2.21 приведены проекции траекторий системы (2.2.15) на плоскость $p_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ для некоторых характерных значений параметра γ . Для того чтобы получить устойчивые режимы изучаемой системы с относительно узкими областями притяжения, из 40000 случайно выбранных точек области $(0, 2] \times (0, 2] \times (0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ фазового пространства выпускались траектории, по местам сгущения которых можно судить о наличии в данной части фазового пространства какого-либо устойчивого режима.

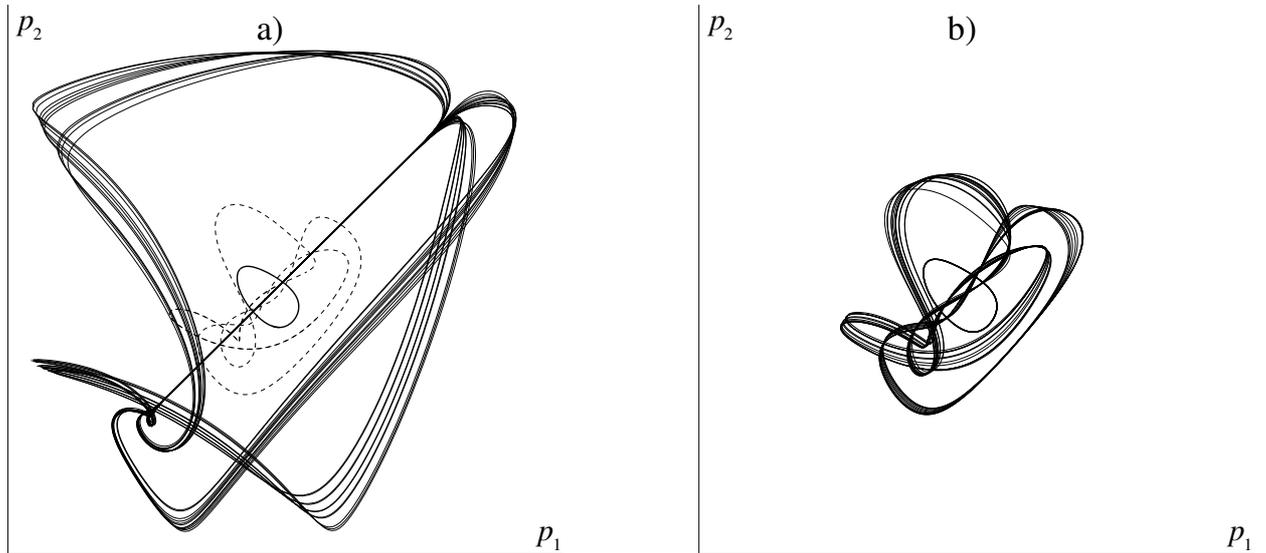


Рис. 2.18. а) $\gamma = -0.595$; б) $\gamma = -0.6022$.

Перейдем теперь к описанию фазовых перестроек, происходящих с циклами средней амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_m^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_m^- \simeq -0.765$. При этом на начальном промежутке $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_{m1}^-$, где $\gamma_{m1}^- \simeq -0.6483$ каскада бифуркаций нет. При $\gamma = \gamma_m^-$ у системы (2.2.15) появляются три симметричных устойчивых цикла C_m^0 , C_m^{0*} , C_m^{0**} , переходящих друг в друга в результате замены (2.2.16), а при $\gamma = \gamma_{m1}^-$ они теряют устойчивость. На рис. 2.21а, 2.18б эти циклы изображены пунктиром различной длины.

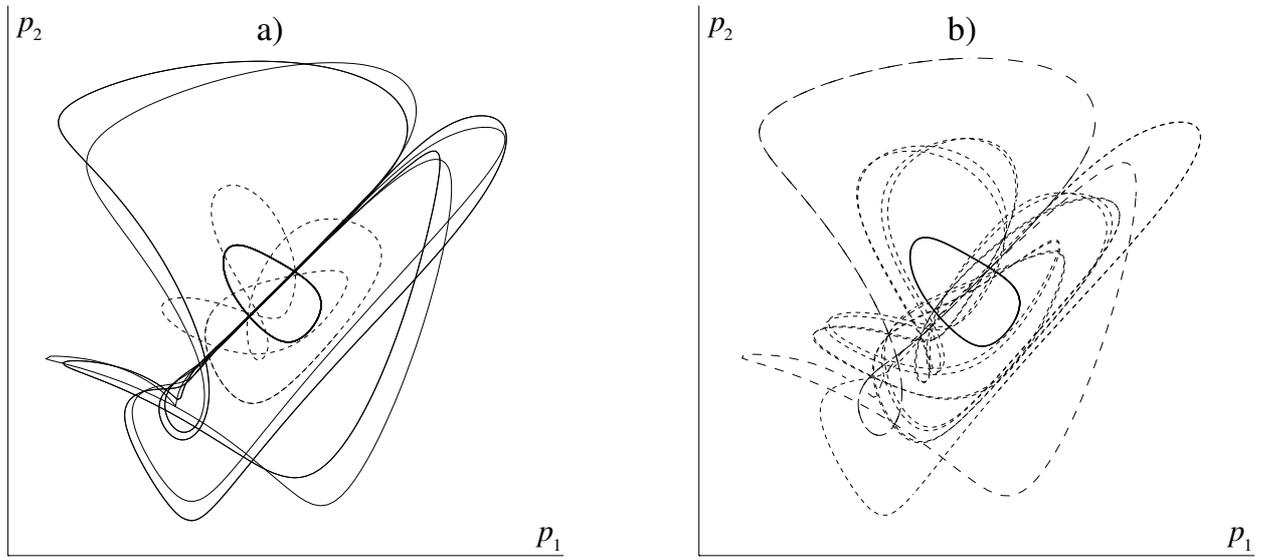


Рис. 2.19. а) $\gamma = -0.62$; б) $\gamma = -0.63$.

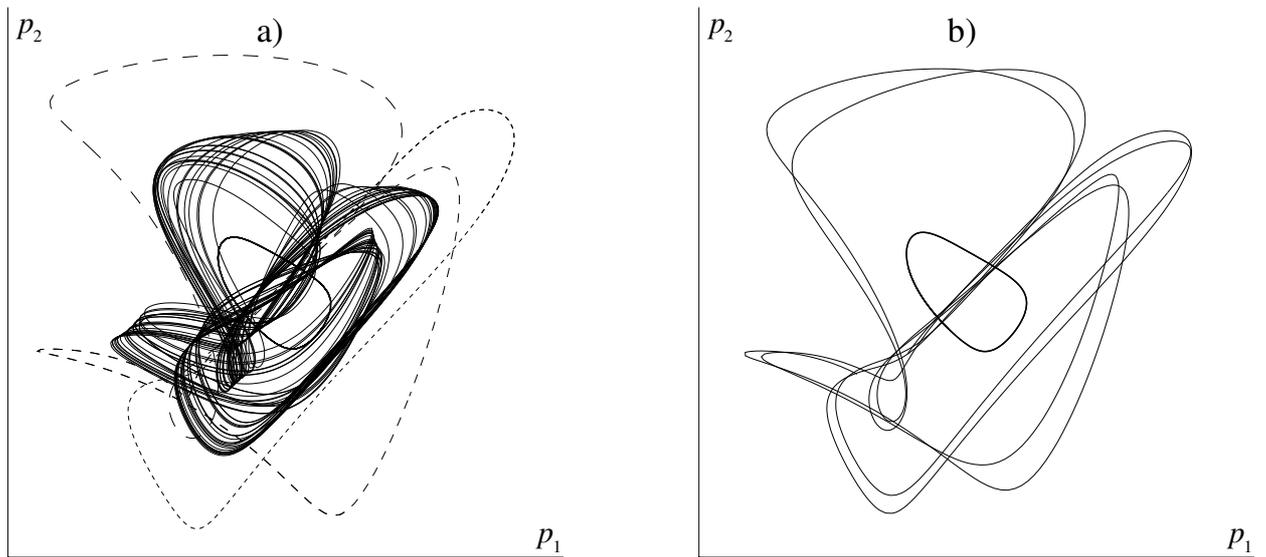


Рис. 2.20. а) $\gamma = -0.633$; б) $\gamma = -0.6395$.

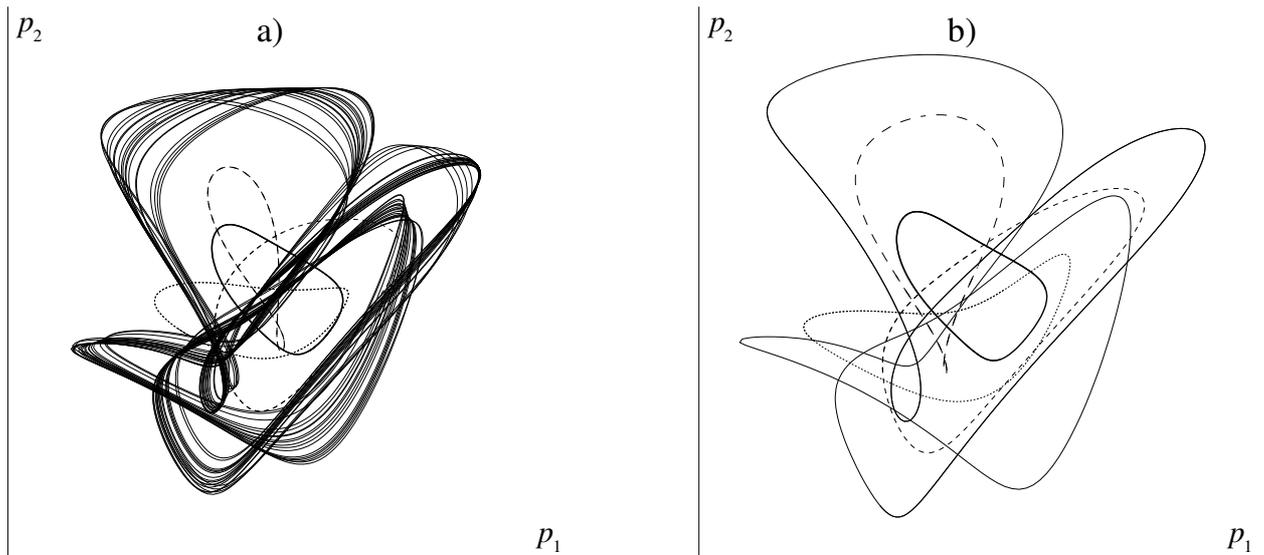


Рис. 2.21. а) $\gamma = -0.65$; б) $\gamma = -0.67$.

Будем следить за каскадами бифуркаций, происходящими с режимами средней амплитуды, увеличивая параметр $\gamma_m^- < \gamma < \gamma_1^-$. Важно отметить, что области, в которых происходят каскады бифуркаций, мы будем рассматривать при увеличении γ , а за бифуркациями внутри этих областей — при уменьшении этого параметра. Ниже приведены четыре промежутка, на которых происходят стандартные каскады бифуркаций удвоения и возникновения хаотических колебаний.

1). Первый каскад происходит на промежутке $\gamma_{m2}^- < \gamma < \gamma_{m3}^-$, где $\gamma_{m2}^- \simeq -0.6335$, $\gamma_{m3}^- \simeq -0.61913$ при уменьшении γ :

— при $\gamma = \gamma_{m3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^1 (на рис. 2.19а этот цикл изображен пунктиром);

— при $\gamma \simeq -0.6268$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_m^{12} удвоенного периода;

— при $\gamma \simeq -0.6296$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_m^{13} условно периода четыре (на рис. 2.19б пунктиром изображен цикл C_m^{13} при $\gamma = -0.63$);

— при $\gamma_{m2}^- < \gamma \lesssim -0.631$ система (2.2.15) имеет хаотические колебания средней амплитуды. (На рис. 2.20а изображен хаотический аттрактор A_m^1 при $\gamma = -0.633$).

2). Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{m4}^- < \gamma < \gamma_{m5}^-$, где $\gamma_{m4}^- \simeq -0.61172$, $\gamma_{m5}^- \simeq -0.60605$ также при уменьшении γ . Отметим значения параметра γ , при которых происходят бифуркации в этом случае:

— при $\gamma = \gamma_{m5}^-$ возникает самосимметричный цикл C_m^2 ;

– при $\gamma \simeq -0.61$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.611$ – вторая;

– при $\gamma_{m4}^- < \gamma \lesssim -0.6112$ система (2.2.15) имеет хаотические колебания средней амплитуды.

3). Третий каскад происходит на промежутке $\gamma_{m6}^- < \gamma < \gamma_{m7}^-$, где $\gamma_{m6}^- \simeq -0.60226$, $\gamma_{m7}^- \simeq -0.59902$. Отметим бифуркационные значения γ

– при $\gamma = \gamma_{m7}^-$ возникает 3 симметричных цикла $C_m^3, C_m^{3*}, C_m^{3**}$;

– при $\gamma \simeq -0.60143$ с каждым из них происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.60196$ – вторая;

– при $\gamma_{m6}^- < \gamma \lesssim -0.602$ система (2.2.15) имеет три симметричных хаоса средней амплитуды. (На рис. 2.17b изображены симметричные хаотические аттракторы A_m^3, A_m^{3*} и A_m^{3**} при $\gamma = -0.6022$).

4). Последний замеченный каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов средних размеров происходит на промежутке $\gamma_{m8}^- < \gamma < \gamma_{m9}^-$, где $\gamma_{m8}^- \simeq -0.59677$, $\gamma_{m9}^- \simeq -0.59475$. В этом случае самосимметричный цикл C_m^4 возникает при $\gamma = \gamma_{m9}^-$, при $\gamma \simeq -0.59627$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.5966$ – вторая.

В каждом из четырех описанных случаев вычислялись ляпуновские показатели соответствующего хаотического аттрактора. В таблице 2.3 приведены величины ляпуновских показателей и ляпуновской размерности для последних значений γ в каждом каскаде, при которых наблюдаются хаотические колебания ($\gamma = \gamma_{m2}^-, \gamma_{m4}^-, \gamma_{m6}^-, \gamma_{m8}^-$).

Таблица 2.3.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.6335	0.0224	$8 \cdot 10^{-5}$	-0.1635	-1.420	-1.439	2.137
-0.61172	0.0145	0.0005	-0.072	-1.460	-1.483	2.209
-0.60226	0.0108	$6 \cdot 10^{-6}$	-0.045	-1.483	-1.483	2.241
-0.59677	0.009	$-5 \cdot 10^{-5}$	-0.0335	-1.4818	-1.4935	2.267

Опишем теперь каскады бифуркаций, полученные для режимов большой амплитуды. Такие циклы наблюдаются на промежутке от $\gamma = \gamma_l^-$ до $\gamma = \gamma_1^-$, где $\gamma_l^- \simeq -0.67812$. Как и ранее, будем следить за фазовыми перестройками при увеличении параметра γ . Отметим, однако, что в отличие от предыдущего случая перестройки внутри каскадов происходят при увеличении γ .

1). Первый каскад бифуркаций режимов большой амплитуды наблюдается на промежутке $\gamma_{l1}^- < \gamma < \gamma_{l2}^-$, где $\gamma_{l1}^- \simeq -0.67812$, $\gamma_{l2}^- \simeq -0.64795$ при увеличении γ :

— при $\gamma = \gamma_{l1}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^1 (на рис. 2.21b этот цикл изображен тонкой сплошной линией при $\gamma = -0.67$);

— при $\gamma \simeq -0.6575$ происходит первая бифуркация удвоения периода, возникает цикл C_l^{12} удвоенного периода;

— при $\gamma \simeq -0.6531$ происходит вторая бифуркация удвоения периода и возникает цикл C_l^{13} условно периода четыре;

— при $-0.652 \lesssim \gamma < \gamma_{l2}^-$ система (2.2.15) имеет хаотические колебания большой амплитуды (на рис. 2.21a изображен хаотический аттрактор A_l^1 при $\gamma = -0.65$).

2). Второй каскад происходит на промежутке $\gamma_{l3}^- < \gamma < \gamma_{l4}^-$, где $\gamma_{l3}^- \simeq -0.64875$, $\gamma_{l4}^- \simeq -0.6367$. Отметим бифуркационные значения γ :

— при $\gamma = \gamma_{l3}^-$ возникает самосимметричный цикл C_l^2 ;

— при $\gamma \simeq -0.64016$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.6382$ — вторая (на рис. 2.20b изображен цикл большой амплитуды C_l^{21} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.6395$);

— при $-0.6379 \lesssim \gamma < \gamma_{l4}^-$ система (2.2.15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

3). Третий каскад происходит при $\gamma_{l5}^- < \gamma < \gamma_{l6}^-$, где $\gamma_{l5}^- \simeq -0.63306$, $\gamma_{l6}^- \simeq -0.62664$, с тремя сосуществующими режимами большой амплитуды, которые переходят друг в друга в результате замены (2.2.16). Отметим бифуркационные значения γ :

— при $\gamma = \gamma_{l5}^-$ возникает три симметричных друг другу цикла C_l^3 , C_l^{3*} , C_l^{3**} (на рис. 2.19b и 2.20a эти циклы изображены тонким пунктиром различной длины);

— при $\gamma \simeq -0.62866$ происходит первая бифуркация удвоения периода, а при $\gamma \simeq -0.62752$ — вторая;

— при $-0.6272 \lesssim \gamma < \gamma_{l6}^-$ система (2.2.15) имеет хаотические колебания большой амплитуды.

4). Четвертый каскад бифуркаций самосимметричных аттракторов большой амплитуды происходит на промежутке $\gamma_{l7}^- < \gamma < \gamma_{l8}^-$, где $\gamma_{l7}^- \simeq -0.62315$, $\gamma_{l8}^- \simeq -0.6193$. В этом случае самосимметричный цикл C_l^4 возникает при $\gamma = \gamma_{l7}^-$, при $\gamma \simeq -0.62066$ происходит первая бифуркация удвоения, а при $\gamma \simeq -0.6199$ — вторая (на рис. 2.19a изображен цикл большой амплитуды C_l^{41} после первой бифуркации удвоения при $\gamma = -0.62$). Хаотические колебания наблюдаются на промежутке $-0.6197 \lesssim \gamma < \gamma_{l8}^-$.

При дальнейшем увеличении параметра γ встречаются и другие каскады бифуркаций, разворачивающиеся на все более узких промежутках, с точкой сгущения, по-видимому, в $\gamma = \gamma_1^-$. Например, на рис. 2.18а представлен хаотический режим большой амплитуды, возникший в результате аналогичного описанным выше каскада бифуркаций.

Для хаотических режимов внутри полученных промежутков также вычислялись ляпуновские показатели и ляпуновская размерность соответствующего хаотического аттрактора большой амплитуды. В таблице 2.4 приведены эти величины для $\gamma = \gamma_{12}^-, \gamma_{14}^-, \gamma_{16}^-, \gamma_{18}^-$ и для $\gamma = -0.595$ (см. колебания большой амплитуды на рис. 2.18а).

Таблица 2.4.

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	d_L
-0.64795	0.0268	-0.0001	-0.1686	-1.381	-1.478	2.158
-0.6367	0.0186	0.0001	-0.1176	-1.3993	-1.5016	2.158
-0.62664	0.0153	$-2 \cdot 10^{-5}$	-0.094	-1.436	-1.485	2.163
-0.6193	0.0129	$9 \cdot 10^{-5}$	-0.077	-1.45	-1.486	2.168
-0.595	0.0059	-0.0005	-0.031	-1.473	-1.502	2.158

Отметим, что области устойчивости хаотического режима первого каскада A_1^1 и цикла C_1^2 второго каскада пересекаются, что позволяет предположить, что режимы большой амплитуды могут быть классифицированы более тонко. В целом система (2.2.15) демонстрирует при данных значениях параметров большое число сосуществующих устойчивых режимов. На рис. 2.18-2.21 можно наблюдать до пяти сосуществующих устойчивых циклов и хаотических режимов.

Фазовые перестройки, происходящие с аттракторами системы (2.2.15) при $\gamma < \gamma_3^-$, идентифицировать достаточно сложно, впрочем характер хаотических колебаний, которые возникают в этом случае у системы (2.2.15), может быть оценен по старшему ляпуновскому показателю, графики которого приведены на рис. 2.22-2.25. Нетрудно видеть, что области хаотических колебаний перемежаются в этом случае многочисленными окнами периодичности или квазипериодичности (старший показатель нулевой). На рис. 2.22 дана общая картина зависимости $\lambda_1(\gamma)$ на промежутке изменения γ от -10 до -1 . На рис. 2.23-2.25 более подробно рассмотрены сложные участки графика $\lambda_1(\gamma)$.

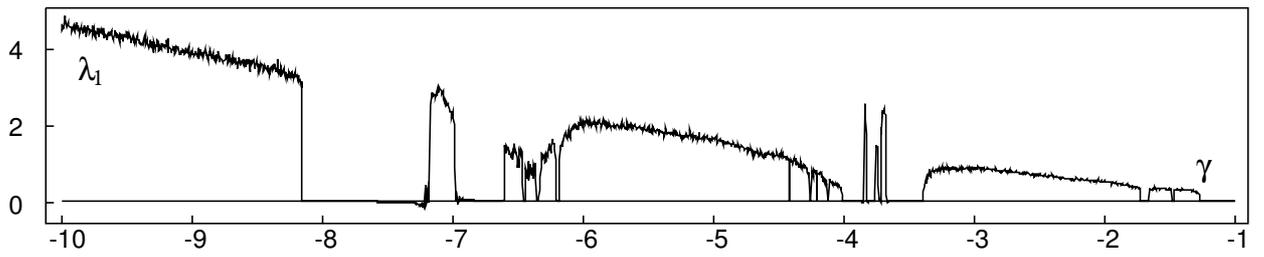


Рис. 2.22.

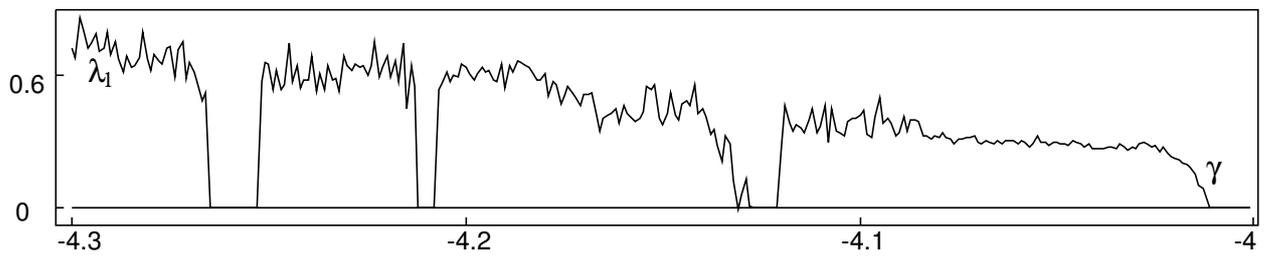


Рис. 2.23.

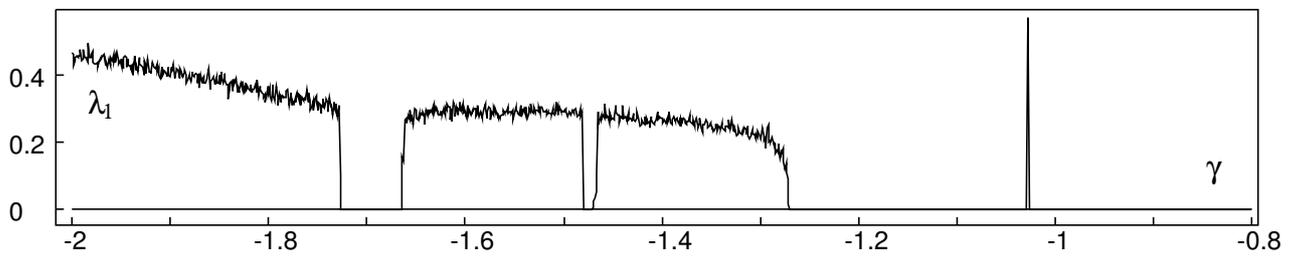


Рис. 2.24.



Рис. 2.25.

Таким образом, изучение динамических свойств решений системы (2.2.15) показало, что у нее может сосуществовать большое число устойчивых циклов или торов, которым соответствуют устойчивые торы исходной разностной системы (2.2.10) с асимптотикой (2.2.3). Следует, однако, заметить, что вдоль одного из инвариантных направлений (2.2.17) решения системы (2.2.15) стремятся при $|\gamma| > 1/\sqrt{3}$ к бесконечности. И, хотя при изучаемых значениях параметров инвариантные лучи (2.2.17) являются отталкивающими, наличие направления, по которому решение может уходить из области применимости асимптотических методов, требует вычисления следующего по порядку малости коэффициента в разложении (2.2.5) и дополнительного анализа соответствующей нормальной формы. При достаточно больших $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2$ слагаемым, определяющим поведение решений системы (2.2.12) с добавкой (2.2.13), является вещественная часть слагаемого при $|\xi_j|^4 \xi_j$. Эта величина согласно представлению (2.2.13) равна $\frac{9a^2 K^6}{8 \sin^2 \omega_0}$ и положительна, исходя из этого, масштаб применимости полученных в работе результатов имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Для начальных условий внутри шара радиуса порядка $\sqrt{\varepsilon}$ траектории системы (2.2.10) будут притягиваться к одному из режимов, определяемых нормальной формой (2.2.15), а вне некоторого шара радиуса порядка $\sqrt[4]{\varepsilon}$ траектории будут удаляться от нуля и, учитывая диссипативность исходной системы, попадут в область притяжения какого-либо нелокального режима. Это, в частности, означает, что у динамической системы (2.2.10) может сосуществовать большое число сложных колебательных режимов различных масштабов.

Глава 3.

Цепочки диффузионно слабо связанных осцилляторов

В данной главе перейдем от рассмотрения свойств небольшого числа связанных колебательных систем к исследованию динамики произвольного их количества. Изучаются системы нелинейных слабо связанных осцилляторов, возникающие при применении разностных аппроксимаций к некоторым классам краевых задач. В предположении, что связь между осцилляторами мала, строится нормальная форма задачи, а по ней система фазовых уравнений, определяющая качественное поведение решений. Аналитическое и численное исследование полученных фазовых уравнений выполнено для различного числа осцилляторов и различных значений параметра, выраженного в инвариантах исходной системы. Численный анализ полученной модели показал, что в широком диапазоне изменения параметров увеличение числа осцилляторов при наличии между ними слабой связи приводит к возникновению хаотических колебаний растущей ляпуновской размерности. Данный результат находит подтверждение в численном эксперименте выполненном для классической модели такого типа — уравнения Гинзбурга – Ландау.

Введение

Большое число физических и биохимических приложений связаны с задачей «реакция-диффузия», представляющей собой эволюционное уравнение, в котором пространственно-временные изменения изучаемой перемен-

ной обусловлены диффузией по пространственной переменной и нелинейным, обычно колебательным, поведением по времени (см. краевую задачу (0.0.1)-(0.0.2)). Ряд важных моделей биологии и физики сводится именно к уравнению типа «реакция-диффузия». При решении этих задач часто возникают существенные трудности вычислительного характера, в связи с чем требуется предварительный асимптотический анализ, который иногда позволяет определить качественную структуру пространства состояний изучаемых динамических систем и возможные фазовые перестройки при изменении параметров. Один из возможных методов изучения качественного поведения решений задачи типа «реакция-диффузия» состоит в замене соответствующих уравнений в частных производных системами связанных осцилляторов. Следует отметить, что изучение взаимодействия таких цепочек имеет и самостоятельное значение, не связанное с породившими их краевыми задачами (см., например, [1, 2, 21, 22, 102, 119, 154]). В данной главе рассматривается динамическая система, описывающая поведение разностей фаз близких диффузионно-связанных осцилляторов. Такие системы изучались ранее при некоторых конкретных значениях параметров (см. [45, 77, 83]). В данной главе изучение этой системы продолжено. С помощью вводимых фазовых систем может быть изучено явление так называемого «диффузионного хаоса» для краевой задачи (0.0.1)-(0.0.2) при некоторых специальных ограничениях.

Под термином «диффузионный хаос» будем понимать странный аттрактор краевой задачи (0.0.1)-(0.0.2), нетривиально зависящий от пространственной переменной. В настоящее время существуют две концепции диффузионного хаоса — маломодовый и многомодовый хаос. Первый из них может возникать в системе (0.0.1)-(0.0.2) при «средних» значениях параметра μ , а второй — при $\mu \rightarrow 0$.

Интерес к маломодовому хаосу инициирован известными работами Лоренца [147], а также Рюэля и Такенса [155], в которых был поставлен общий вопрос: можно ли связать стохастические режимы в распределенной системе, имеющей бесконечно много степеней свободы, с наличием странного аттрактора в системе небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющей упрощенную модель исходной системы. В ряде случаев это действительно удается сделать. Для примера сошлемся на известное уравнение Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa_0 \Delta u + \kappa_1 u - \kappa_2 u |u|^2, \quad (3.0.1)$$

для которого сформулированный вопрос был решен в статье [8]. Точнее говоря, в [8] численными методами был обнаружен странный аттрактор в трехмерной системе, получающейся из уравнения (3.0.1), дополненного граничными условиями Неймана на отрезке, в результате двухмодовой галеркинской аппроксимации. Другой пример — анализ странных аттракторов простейших конечно-разностных аппроксимаций краевых задач вида (0.0.3)-(0.0.4) на отрезке, выполненный в первой главе данной работы (см. также [40]).

Многомодовый диффузионный хаос сначала был предсказан теоретически в статье [83], посвященной исследованию динамики нелинейных осцилляторов, слабо связанных через диффузию. Подробный же его численный анализ проделан в работе автора [33], из результатов которой вытекает важное следствие: если в системе (0.0.3)-(0.0.4) при $\mu \rightarrow 0$ наблюдается диффузионный хаос, то его ляпуновская размерность неограниченно растет. Отметим также численный анализ уравнения Гинзбурга – Ландау, выполненный в [7, 20, 22] для периодических краевых условий.

Более того, становится понятной роль каждого из двух типов диффузионного хаоса в динамике биологической параболической системы (0.0.3)-(0.0.4) при уменьшении параметра μ . Действительно, как показано в статье [98] на типовом примере уравнения Хатчинсона с диффузией, при относительно больших значениях параметра μ в биологической системе наряду с устойчивым однородным циклом имеется некоторое количество устойчивых пространственно неоднородных режимов — так называемых режимов самоорганизации. При уменьшении же μ каждый из режимов самоорганизации порождает свой маломодовый странный аттрактор, а затем все эти аттракторы объединяются в некий единый мультиаттрактор высокой размерности, т. е. возникает многомодовый хаос.

Достаточно ясно, что исследование многомодового хаоса возможно только посредством численного эксперимента. На этом пути, однако, возникает существенная трудность, связанная с тем, что при $\mu \rightarrow 0$ для получения достоверной информации об аттракторах системы (0.0.3)-(0.0.4) необходимо использовать ее разностные аппроксимации со все более мелким шагом по пространственной переменной. В связи с этим становится актуальной проблема нахождения такой конечномерной феноменологической модели краевой задачи (0.0.3)-(0.0.4), которая, во-первых, уже не содержит малого параметра; во-вторых, отражает основные особенности исходной системы при $\mu \rightarrow 0$. Требуемая феноменологическая модель была предложена в статье [83]. Перейдем к описанию этой модели и ее свойств.

3.1. Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов

3.1.1. Постановка задачи

Для краевой задачи (0.0.3)-(0.0.4) уточним предположения относительно параметров и краевых условий. В пространстве непрерывных вектор-функций со значениями в R^2 рассмотрим краевую задачу

$$\dot{u} = \varepsilon \mu D u'' + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad (3.1.1)$$

с краевыми условиями непроницаемости

$$u'(t, 0) = u'(t, 1) = 0, \quad (3.1.2)$$

или периодическими

$$u(t, x) = u(t, x + 1). \quad (3.1.3)$$

Здесь $0 < \varepsilon, \mu \ll 1$, $D = \text{diag} \{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, $d_1 + d_2 = 1$, точкой обозначена производная по t , штрихом – по x . Как и в первой главе, ниже предполагаем, что $A_0 a = i\omega a$, $A_0^* b = -i\omega b$, $\omega > 0$, $(a, b) = 1$, F – гладкая нелинейная вектор-функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. Областью определения пространственной переменной x считаем отрезок $[0, 1]$ в случае краевых условий (3.1.2) и окружность единичной длины в случае периодической краевой задачи. В дальнейшем полагаем, что $\tau'_0 > 0$, где $\lambda'_0 = \tau'_0 + i\omega' = (A_1 a, b)$ и $\text{Re } d < 0$, где $d = d_0 + i\omega c_0$ – первая ляпуновская величина обыкновенного дифференциального уравнения (3.1.1) при $\varepsilon = 0$. При этих двух допущениях дифференциальное уравнение в R^2

$$\dot{u} = A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u)$$

имеет орбитально экспоненциально устойчивый цикл $u(t, \varepsilon)$ с амплитудой порядка $\sqrt{\varepsilon}$, являющийся одновременно однородным циклом краевых задач (3.1.1), (3.1.2) и (3.1.1), (3.1.3).

Представляет интерес задача о структуре и инвариантных числовых характеристиках аттрактора этих динамических систем.

3.1.2. Построение системы фазовых уравнений

В целях упрощения уравнения (3.1.1) заменим в нем оператор дифференцирования по пространственной переменной на разностный аналог. В результате получим систему диффузионно связанных близких осцилляторов, число которых соответствует числу промежутков разбиения области определения пространственной переменной. Будем считать, что нелинейная функция правой части уравнения (3.1.1) допускает разложение $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + O(\|u\|^4)$, где функции F_2 и F_3 линейны по своим аргументам. Уравнение (3.1.1) после этого превратится в систему следующего вида:

$$\dot{u}_j = \mu \varepsilon D(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + (A_0 + \varepsilon A_1)u_j + F_2(u_j, u_j) + F_3(u_j, u_j, u_j) + O(\|u_j\|^4), \quad (3.1.4)$$

где $u_j(t) \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, \dots, n$, n – число промежутков, на которые разбит отрезок $[0, 1]$ или окружность единичной длины, $D \cdot n^2$ снова обозначено D . Для переменных u_0 и u_{n+1} выполнены граничные условия непроницаемости

$$u_0 = u_1, \quad u_{n+1} = u_n, \quad (3.1.5)$$

или периодического типа

$$u_0 = u_n, \quad u_{n+1} = u_1. \quad (3.1.6)$$

Системы (3.1.4), (3.1.5) и (3.1.4), (3.1.6) допускают синхронные решения, т. е. решения вида $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u(t)$, и имеют, в частности, синхронный гармонический цикл

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_*(t, \varepsilon),$$

являющийся аналогом однородного цикла $u(t, x) = u_*(t, \varepsilon)$ задачи (3.1.1).

Таким образом, как и в случае краевой задачи (3.1.1), естественно возникает вопрос о существовании и устойчивости у системы (3.1.4) при условиях (3.1.5) или (3.1.6) «пространственно неоднородных», а точнее говоря, асинхронных стационарных режимов.

В статье [95], в которой развит специальный вариант асимптотического метода Крылова-Боголюбова-Митропольского, указан такой способ конструктивного построения замены переменных

$$u_j = \xi_j \left(\exp(i\omega\tau_j)a + \exp(-i\omega\tau_j)\bar{a} \right) + \sum_{k,l=1}^n \xi_k \xi_l u_{klj} + \dots \quad (3.1.7)$$

где u_{klj} — векторные тригонометрические полиномы аргументов $\omega\tau_1, \dots, \omega\tau_n$, что в результате этой замены на третьем шаге выполнения алгоритма после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости система (3.1.4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j = & \varepsilon\tau'_0\xi_j + d_0\xi_j^3 + \\ & + \varepsilon\mu g \left[\xi_{j+1} \cos(\tau_{j+1} - \tau_j + \gamma) - 2\xi_j \cos \gamma + \xi_{j-1} \cos(\tau_{j-1} - \tau_j + \gamma) \right], \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \omega\dot{\tau}_j = & \omega + \varepsilon\omega'_0 + c_0\xi_j^2 + \\ & + \varepsilon\mu g \left[\frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \sin(\tau_{j+1} - \tau_j + \gamma) - 2 \sin \gamma + \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} \sin(\tau_{j-1} - \tau_j + \gamma) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Здесь, как и ранее $\tau'_0 + i\omega'_0 = (A_1a, b)$, константы g и γ определяются матрицей связи D и равны $g = |(Da, b)|$, $\gamma = \arg(Da, b)$, соответственно, ляпуновская величина $d_0 + i\omega c_0$ находится по формуле (1.1.7), приведенной в первой главе работы, $j = 1, \dots, n$.

В зависимости от принятых краевых условий выполнено равенство

$$\xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{n+1} = \xi_n, \quad \tau_0 = \tau_1, \quad \tau_{n+1} = \tau_n \quad (3.1.10)$$

в случае условий непроницаемости или

$$\xi_0 = \xi_n, \quad \xi_{n+1} = \xi_1, \quad \tau_0 = \tau_n, \quad \tau_{n+1} = \tau_1 \quad (3.1.11)$$

для периодических условий.

Выполним в системе (3.1.8), (3.1.9) нормирующие замены

$$\frac{\xi_j}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow \xi_j, \quad \varepsilon t \rightarrow t,$$

и перейдем к системе медленных движений

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j = & \tau'_0\xi_j + d_0\xi_j^3 + \\ & + \mu g \left[\xi_{j+1} \cos(\alpha_j + \gamma) - 2\xi_j \cos \gamma + \xi_{j-1} \cos(\alpha_{j-1} - \gamma) \right], \\ \dot{\alpha}_j = & c_0(\xi_{j+1}^2 - \xi_j^2) + \mu g \left[\frac{\xi_{j+2}}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_{j+1} + \gamma) - \frac{\xi_{j+1}}{\xi_j} \sin(\alpha_j + \gamma) - \right. \\ & \left. - \frac{\xi_j}{\xi_{j+1}} \sin(\alpha_j - \gamma) + \frac{\xi_{j-1}}{\xi_j} \sin(\alpha_{j-1} - \gamma) \right], \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

где $\alpha_j = \omega(\tau_{j+1} - \tau_j)$.

Следует отметить, что к уравнению (3.1.1) может быть сначала применен метод квазинормальных форм, в частности, как показано в [99], решения краевой задачи (3.1.1) с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ приближаются решениями нормализованной системы

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \mu(Da, b) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \lambda_0 \xi + d\xi |\xi|^2, \quad (3.1.13)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 0) &= \frac{\partial \xi}{\partial x}(\tau, 1) = 0 \\ \text{или} \\ \xi(\tau, x) &= \xi(\tau, x + 1), \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а для решений краевой задачи (3.1.1) имеет место асимптотическое разложение

$$u(t, \tau, x) = \sqrt{\varepsilon} \left(\xi(\tau, x) e^{i\omega t} a + \bar{\xi}(\tau, x) e^{-i\omega t} \bar{a} \right) + \dots$$

Применение конечно-разностных аппроксимаций по пространственной переменной к краевой задаче (3.1.13), (3.1.14) и последующий переход к полярным координатам также приводят к формулам (3.1.8), (3.1.9). Легко видеть, что уравнение (3.1.13) представляет собой вариант уравнения Гинзбурга – Ландау (3.0.1) с пространственной переменной, определенной на отрезке $[0, 1]$.

При $\mu = 0$ система (3.1.12) имеет глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие

$$\eta_j = \left(-\frac{\tau'_0}{\text{Red}} \right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

поведение траекторий на котором описывают весьма простые уравнения

$$\dot{\alpha}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из общих утверждений монографии [111] следует, что при всех малых μ она имеет аналогичное глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие, задаваемое равенствами

$$\eta_j = \left(-\frac{\tau'_0}{\text{Red}} \right)^{1/2} \left(1 + \mu \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu) \right), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1.15)$$

где φ_j — гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по α_k функции. Для дальнейшего важно, что в силу структуры правых частей системы (3.1.12) для них справедливы асимптотические формулы

$$\varphi_j = \frac{g}{\tau_0'} (\cos(\alpha_{j+1} + \gamma) - 2 \cos \gamma + \cos(\alpha_{j-1} - \gamma)) + O(\mu). \quad (3.1.16)$$

В самом деле, если учесть равенства (3.1.15), (3.1.16) в системе (3.1.12), с точностью до слагаемых порядка μ получаем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j = & 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \\ & + \kappa (\cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}), \quad j = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

с граничными условиями

$$\alpha_0 = \alpha_n = 0, \quad (3.1.18)$$

в случае выполнения соотношений (3.1.10) и

$$\alpha_0 = \alpha_n = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}), \quad (3.1.19)$$

– в случае (3.1.11). Здесь

$$\kappa = \frac{x_0 + b_0}{x_0 b_0 - 1}, \quad x_0 = -\frac{\operatorname{Im}(Da, b)}{\operatorname{Re}(Da, b)}, \quad b_0 = \frac{c_0}{d_0}. \quad (3.1.20)$$

Поведение решений динамических систем (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10) и (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11) на многообразии (3.1.15) определяется по грубым устойчивым режимам систем (3.1.17), (3.1.18) и (3.1.17), (3.1.18) соответственно.

Суммируем изложенное выше в виде следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Существуют такие достаточно малые положительные числа ε_0, μ_0 и не зависящее от них положительное число r_0 , что при $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0, 0 < \mu \leq \mu_0$ системы (3.1.4), (3.1.5) и (3.1.4), (3.1.6) имеют n -мерный инвариантный тор, к которому при $t \rightarrow \infty$ стремятся все решения с ненулевыми начальными условиями из шара радиуса r_0 с центром в нуле. Характер поведения решений на этом торе с точностью до слагаемых порядка μ описывается системами фазовых уравнений (3.1.17), (3.1.18) и (3.1.17), (3.1.19) соответственно.*

3.1.3. Динамические свойства фазовой системы в случае отрезка

Аналитическое исследование системы (3.1.17), (3.1.18) легко проделать при $n = 2, 3$. При $n = 4$ качественное исследование системы (3.1.17), (3.1.18) сопряжено с определенными трудностями, а при $n > 4$ возможен лишь численный анализ.

Три и четыре осциллятора на отрезке

Рассмотрим динамику (3.1.17), (3.1.18) при $n = 3$ и $n = 4$ для различных значений параметра κ . Пусть сначала $n = 3$, тогда система (3.1.17), (3.1.18) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \kappa(\cos \alpha_1 - 1).\end{aligned}\tag{3.1.21}$$

Нетрудно убедиться, что с точностью до периода данная система имеет наряду с тривиальным $(0, 0)$ следующие состояния равновесия:

$$(-\gamma_1, \gamma_1), \text{ где } \gamma_1 = 2 \arcsin \left(3(9 + \kappa^2)^{-1/2} \right), \tag{3.1.22}$$

$$(\gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 + \pi, \gamma_2 - \gamma_3), (\gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4, \gamma_2 + \gamma_3 + \pi), \tag{3.1.23}$$

где $\gamma_2 = \arcsin \left(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-3/2}(\kappa^2 - 3) \right)$, $\gamma_3 = \arcsin \left(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-1/2} \right)$, $\gamma_4 = 2 \arcsin \left((\kappa^2 + 1)^{-1/2} \right)$.

Сразу отметим, что состояния равновесия (3.1.22) существуют лишь при $|\kappa| \leq 3/\sqrt{7}$. Из условий устойчивости этих состояний получаем:

1. Для любого положительного значения параметра κ нулевое состояние равновесия является неустойчивым узлом, а состояния равновесия вида (3.1.23) – седлами.

2. Состояние равновесия вида (3.1.22) существует при $0 < \kappa < 3/\sqrt{7}$ и представляет собой устойчивый узел.

Отметим одно простое свойство системы (3.1.21), позволяющее найти сепаратрисы, идущую из нулевого состояния равновесия в точку вида (3.1.22).

Лемма 3.1. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ является инвариантным множеством системы (3.1.21).*

Доказательство осуществляется прямой подстановкой выражения $\alpha_1 = -\alpha_2$ в систему (3.1.21). В результате оба уравнения (3.1.21) превращаются в соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 3 \sin \alpha_1 + \kappa(1 - \cos \alpha_1).$$

Отметим, что данное уравнение имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = 0$ и устойчивое $\alpha_1 = -\gamma_1$.

Суммируя, можно утверждать, что при значениях параметра $0 < \kappa < 3/\sqrt{7}$ на фазовом торе системы (3.1.21) имеется единственное глобально устойчивое состояние равновесия вида (3.1.22).

Изменение параметра κ приводит к тому, что при $\kappa = 3/\sqrt{7}$ состояния равновесия (3.1.23) сливаются с (3.1.22) и отбирают у него устойчивость. В результате указанной бифуркации у системы (3.1.21) при $\kappa > 3/\sqrt{7}$ остается только глобально орбитально асимптотически устойчивый однообходный цикл, существование которого обусловлено 2π -периодичностью системы (3.1.21) по α_1 и α_2 .

В случае четырех взаимодействующих осцилляторов фазовая система (3.1.17), (3.1.18) приобретает вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos \alpha_2 - 1).\end{aligned}\quad (3.1.24)$$

При определении состояний равновесия системы (3.1.24) центральное значение имеет уравнение

$$\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) \cdot \cos(\gamma_3 - (\alpha_1 - \alpha_3)/2) = 0, \quad (3.1.25)$$

где, как и прежде, $\gamma_3 = \arcsin(\kappa(\kappa^2 + 1)^{-1/2})$, получающееся после сложения всех правых частей системы (3.1.24). Учитывая 2π -периодичность переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ системы (3.1.24), из условия $\sin((\alpha_1 + \alpha_3)/2) = 0$ получаем следующие состояния равновесия:

$$(0, 0, 0), \quad (3.1.26)$$

$$(\pi, 0, \pi), \quad (3.1.27)$$

$$(-\arcsin(\kappa), \pi, \arcsin(\kappa)), \quad (3.1.28)$$

$$(\pi + \arcsin(\kappa), \pi, \pi - \arcsin(\kappa)), \quad (3.1.29)$$

последние два из которых существуют лишь при $|\kappa| \leq 1$. Анализ матрицы устойчивости позволяет заключить, что тривиальное решение системы при любых значениях κ – неустойчивый узел, состояние равновесия (3.1.27), соответствующее колебаниям в противофазе – седло-узел, состояние равновесия (3.1.28) – также седло-узел и, наконец, точка (3.1.29) является устойчивым узлом при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ и седло-узлом при

$\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} < \kappa < 1$, напомним, что при $\kappa > 1$ этого состояния равновесия не существует.

Все состояния равновесия, получающиеся в результате обнуления второго сомножителя уравнения (3.1.25), оказываются неустойчивыми, и их вид здесь приводиться не будет.

Система (3.1.24), так же как и (3.1.21), имеет инвариантные множества, позволяющие прояснить характер расположения траекторий системы. В частности, выполнено следующее простое утверждение:

Лемма 3.2. *Прямая $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$ является инвариантным множеством системы (3.1.24).*

Как и в двумерном случае, подстановка $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, превращает все уравнения системы (3.1.24) в одно соотношение:

$$\dot{\alpha}_1 = 2 \sin \alpha_1 + 2\kappa,$$

которое имеет два состояния равновесия: неустойчивое $\alpha_1 = -\arcsin(\kappa)$ и устойчивое $\alpha_1 = \pi - \arcsin(\kappa)$.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что состояние равновесия (3.1.29) является единственным устойчивым режимом исследуемой динамической системы при $0 < \kappa < \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$.

Увеличение κ приводит к усложнению динамики. Численный анализ системы (3.1.24) показал, что при $\kappa > \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ возникают устойчивые однообходные циклы, которые, по-видимому, остаются единственными устойчивыми режимами системы (3.1.24) при всех κ за исключением промежутка (κ_1, κ_2) , где $\kappa_1 \approx 1.13$, $\kappa_2 \approx 1.20$. В этом промежутке поведение решений системы носит неупорядоченный характер с относительно малым старшим ляпуновским показателем. Вычисленные в средней точке промежутка $\kappa_1 = 1.165$ значения ляпуновских показателей оказались равными $\lambda_1 \approx 0.0137$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -2.118$.

3.1.4. Численные оценки старшего ляпуновского показателя и ляпуновской размерности фазовой системы при $n > 4$

При достаточно большом κ и $n > 4$ система (3.1.17), (3.1.18) может демонстрировать неупорядоченное поведение решений. В связи с этим перейдем к численной оценке ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности

d_L притягивающего множества изучаемой системы для различных n и κ . Для определения величины d_L будем пользоваться стандартной формулой

$$d_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}, \quad (3.1.30)$$

где λ_i – выписанные в порядке возрастания ляпуновские экспоненты, а j – такой номер, что

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0.$$

Положительность старшего ляпуновского показателя часто рассматривается как признак хаотических колебаний, поэтому представляет интерес определение зависимости этого показателя от параметра. Следует отметить, что отрицательность величины λ_1 свидетельствует о том, что решение системы приближается к устойчивому состоянию равновесия, если же λ_1 близко к нулю, то решения изучаемой системы в ситуации общности положения приближаются к орбитально асимптотически устойчивому циклу. Ниже представлены графики зависимостей λ_1 от κ при $n = 5, \dots, 10$. Численное определение ляпуновских показателей было произведено, как и ранее, с помощью программы Tracer3.7 (см. [24]).

Графики зависимостей построены при $1 < \kappa < 4$. Такие значения параметра выбраны, поскольку при $0 < \kappa < 1$ система (3.1.17), (3.1.18) имеет устойчивое состояние равновесия, а при $\kappa > 4$ и $n = 6, \dots, 9$ единичные расчеты показали примерно ту же зависимость от κ , что и на изученном промежутке.

Представленные графики позволяют судить об общей динамике системы (3.1.17), (3.1.18) при изменении κ .

Для n равных пяти и шести (см. рис. 3.1, 3.2) сценарий фазовых перестроек следующий:

- 1) при достаточно малых κ глобально устойчиво ненулевое состояние равновесия системы;
- 2) при увеличении κ возникает устойчивый цикл (намотка на торе);
- 3) цикл теряет устойчивость с возникновением хаотических колебаний;
- 4) в зоне хаотических колебаний наблюдаются окна периодичности;
- 5) наконец, при достаточно больших κ снова устойчивым оказывается многообходный цикл.

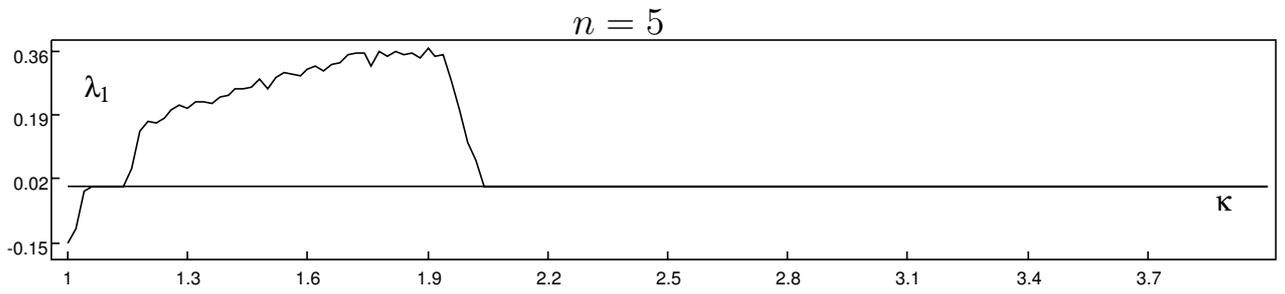


Рис. 3.1.

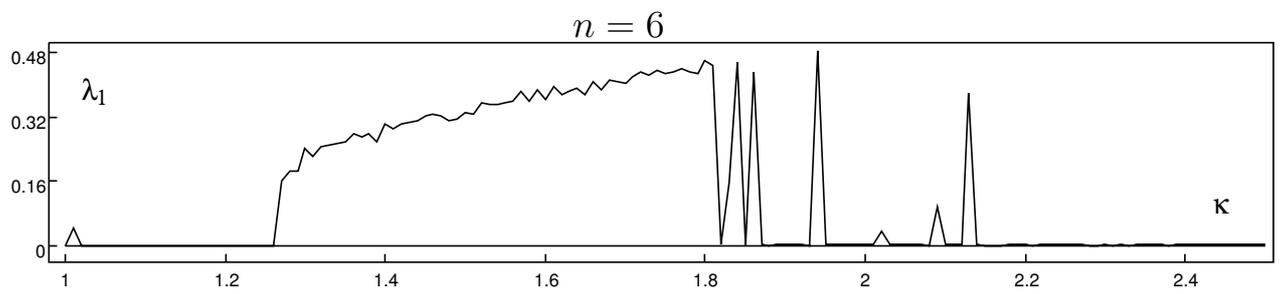


Рис. 3.2.

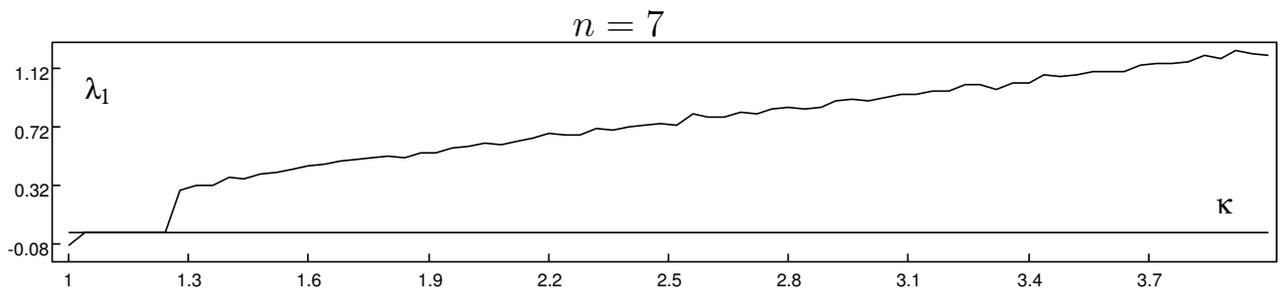


Рис. 3.3.

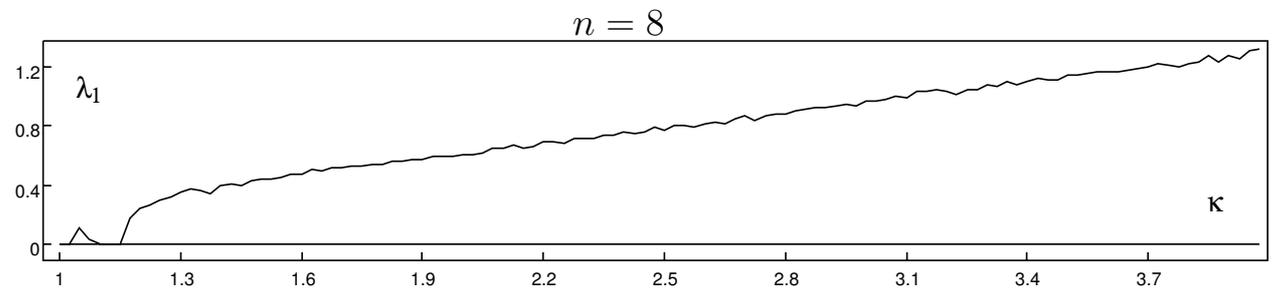
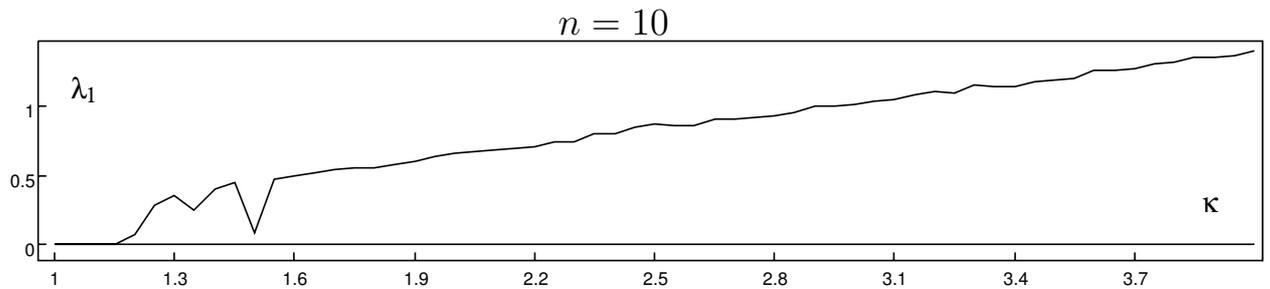
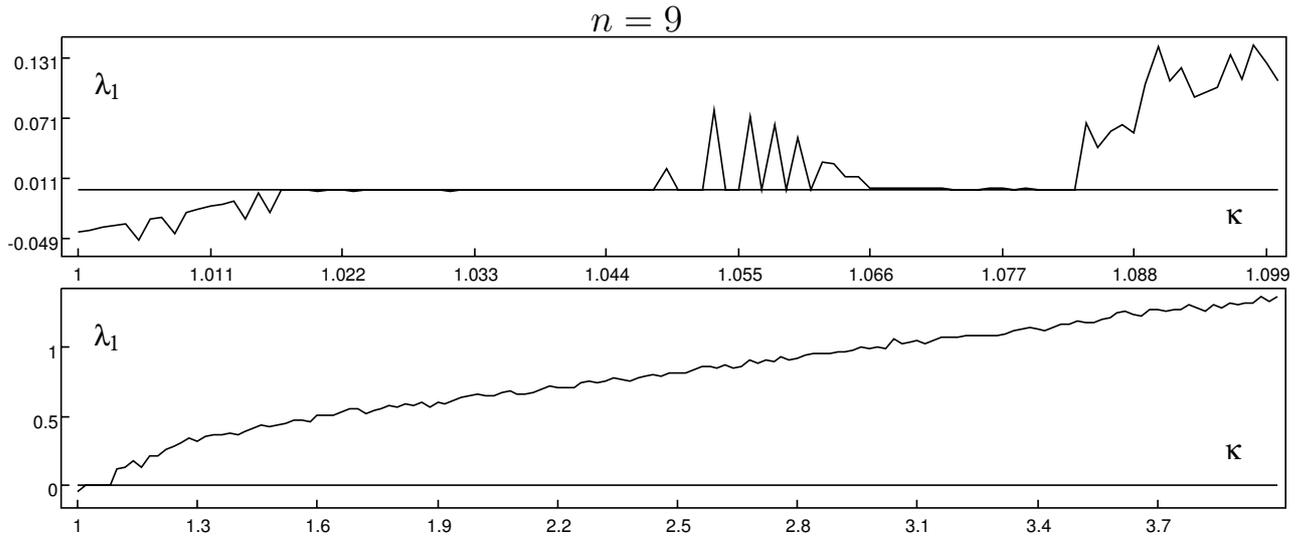


Рис. 3.4.



В случае если $n > 6$ при сохранении первых четырех пунктов приведенного сценария пятый существенно меняется (см. рис. 3.3-3.6). Как оказалось, увеличение κ в этих случаях не приводит к потере хаотических колебаний и возникновению циклов. Остановимся несколько подробнее на области значений κ , соответствующей переходу от регулярных колебаний к хаотическим. На рис. 3.5 представлены два графика для $n = 9$. На верхнем из них, как и в других случаях, представлена зависимость $\lambda_1(\kappa)$ на промежутке от $\kappa = 1$ до $\kappa = 4$, а на нижнем рисунке представлен промежуток от $\kappa = 1$ до $\kappa = 1.1$. Из этого графика видно, что в процессе перехода от периодических колебаний к хаотическим имеются многочисленные окна периодичности. Для других значений n окрестность точки перехода на графике зависимости λ_1 от κ имеет аналогичную структуру.

Рассмотрим теперь зависимость ляпуновской размерности d_L от числа осцилляторов n . Численные оценки этой величины, выполненные при различных значениях κ , приведены в следующей таблице:

Таблица 3.1.

	$\kappa = 1$	$\kappa = 1.5$	$\kappa = 2$	$\kappa = 2.5$	$\kappa = 3$	$\kappa = 3.5$	$\kappa = 4$
$n = 5$	0	3.042	2.558	1	1	1	1
$n = 6$	1.025	4.028	3.02	1	1	1	1
$n = 7$	1	4.729	4.997	5.049	5.101	5.134	5.207
$n = 8$	1	5.401	5.74	5.869	5.99	6.054	6.125
$n = 9$	0	6.127	6.521	6.735	6.913	6.965	7.046
$n = 10$	1	6.766	7.259	7.527	7.667	7.8	7.940
$n = 11$	1	7.383	8.05	8.362	8.505	8.657	8.809
$n = 12$	1	8.002	8.741	9.132	9.337	9.502	9.639
$n = 13$	1	8.502	9.395	9.926	10.164	10.31	10.481
$n = 14$	1	9.032	10.116	10.638	10.923	11.173	11.302
$n = 15$	1	9.564	10.74	11.349	11.691	11.946	12.145
$n = 16$	1	10.079	11.375	12.062	12.439	12.725	12.997
$n = 17$	1	10.572	12.011	12.753	13.203	13.506	13.74
$n = 18$	2.202	10.944	12.618	13.425	13.925	14.277	14.509
$n = 19$	1	11.35	13.244	14.076	14.636	15.055	15.322
$n = 20$	1	11.83	13.74	14.767	15.328	15.746	16.106

В графы таблицы вносился ноль, если у системы имеется устойчивое состояние равновесия, и единица, если устойчивый цикл. Зависимость d_L от n близка к линейной, о чем свидетельствуют приведенные ниже формулы, полученные по данным таблицы 3.1 при $7 \leq n \leq 20$ из условий наилучшего среднеквадратического приближения.

$$\begin{aligned}
d_L(n) &\approx 0.5416 \cdot n + 1.2794 \pm 0.48 && \text{при } \kappa = 1.5, \\
d_L(n) &\approx 0.6762 \cdot n + 0.481 \pm 0.25 && \text{при } \kappa = 2, \\
d_L(n) &\approx 0.7456 \cdot n + 0.05315 \pm 0.24 && \text{при } \kappa = 2.5, \\
d_L(n) &\approx 0.785512 \cdot n - 0.189 \pm 0.16 && \text{при } \kappa = 3, \\
d_L(n) &\approx 0.8159 \cdot n - 0.383026 \pm 0.14 && \text{при } \kappa = 3.5, \\
d_L(n) &\approx 0.8349 \cdot n - 0.45975 \pm 0.11 && \text{при } \kappa = 4.
\end{aligned}$$

В полученных формулах точность приближения увеличивается с ростом κ . Отметим, кроме того, что для $n = 7, \dots, 20$ значения d_L , представленные в таблице 3.1, медленно растут с увеличением κ .

3.1.5. Фазовая система диффузионно связанных осцилляторов на окружности

Как уже отмечалось, система (3.1.8), (3.1.9) описывает изменения амплитуд и фаз осцилляторов, помещенных в n равноотстоящих точках отрезка. Рассмотрим теперь модельную краевую задачу (3.1.1) на окружности, для этого заменим краевые условия Неймана (3.1.2) на условие периодичности по пространственной переменной (3.1.3), а граничные условия (3.1.18) фазовой системы (3.1.17) на условия (3.1.19). Очевидно, что при этих изменениях общий вид соотношений (3.1.17) не меняется, вместе с тем оказывается, что поведение решений системы (3.1.17), (3.1.19) изменяется существенно. В силу специфики пространственной области (окружность) система дифференциальных уравнений на интегральном многообразии (3.1.15) оказывается негрубой. В случае $n = 4$ удается найти общие интегралы системы (3.1.17), (3.1.19) и построить ее полный фазовый портрет. Для старших размерностей этот факт установлен численно. Более того, далее будет показано, что даже учет поправки порядка μ к системе (3.1.17), (3.1.19) на интегральном многообразии (3.1.15) оставляет ее негрубой.

При $n > 4$ численно удалось показать, что при увеличении n система (3.1.17), (3.1.19) обладает многочастотными колебаниями с растущим числом частот. Данный результат не позволяет сделать однозначных выводов относительно исходной краевой задачи (3.1.1), (3.1.3). Вместе с тем, показано, что фазовая система (3.1.17), (3.1.19) имеет растущее с ростом n число грубых состояний равновесия, которым у исходной краевой задачи соответствуют бегущие волны. Это показывает, что с уменьшением диффузионного члена сложность решений и этой задачи растет.

Три и четыре осциллятора на окружности

Рассмотрим систему (3.1.17) при условиях (3.1.19). При $n = 3$ и 4 (случай трех и четырех точек на окружности) эта система полностью исследуется аналитическими методами.

Пусть сначала $n = 3$, то есть рассматривается система

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_1 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)).\end{aligned}\quad (3.1.31)$$

Элементарно устанавливается, что состояниями равновесия этой системы с точностью до периода являются точки $(0, 0)$,

$$(\pi + \gamma, 0), (0, \pi - \gamma), (\pi - \gamma, \pi + \gamma), \quad (3.1.32)$$

где $\gamma = 2 \arcsin (\kappa(9 + \kappa^2)^{-1/2})$,

$$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right), \quad (3.1.33)$$

причем нулевое состояние равновесия – неустойчивый узел, точки вида (3.1.32) – седла, а состояния равновесия (3.1.33) при $\kappa > 0$ – устойчивые фокусы, а при $\kappa = 0$ – устойчивые узлы. Учитывая, что прямые вида $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi n$ и $\alpha_j = 2\pi m$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$ инвариантны относительно системы (3.1.31), легко построить ее фазовый портрет. Следует отметить, что замена $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_2$, $\alpha_2 \rightarrow 2\pi - \alpha_1$ переводит (3.1.31) в себя, а состояния равновесия (3.1.33) друг в друга. Отсюда следует, что в исходной задаче эти состояния равновесия описывают один и тот же режим.

Суммируя, получаем, что для трех слабосвязанных осцилляторов имеется единственный устойчивый пространственно неоднородный режим типа бегущей волны с разностью фаз между соседними осцилляторами $2\pi/3$.

Увеличение числа осцилляторов приводит к существенно иным выводам, благодаря более сложному поведению решений соответствующих систем. Пусть теперь $n = 4$. Система (3.1.17), (3.1.19) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin \alpha_2 + \\ &\quad + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 - \sin \alpha_3 + \kappa(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3), \\ \dot{\alpha}_3 &= 2 \sin \alpha_3 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \sin \alpha_2 + \\ &\quad + \kappa(\cos \alpha_2 - \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)). \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Для исследования (3.1.34) удобно сделать замены

$$x_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad (3.1.35)$$

после чего приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{4 + \kappa^2} \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \delta), \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{4 + \kappa^2} \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \delta), \\ \dot{x}_3 &= 4 \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3, \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

где $\delta = \arccos(2(4 + \kappa^2)^{-1/2})$. Для построения фазового портрета трехмерной системы (3.1.36) полезны следующие два утверждения, определяющие характер ее состояний равновесия и первые интегралы.

Лемма 3.3. *Состояния равновесия системы (3.1.36) лежат на прямых*

$$\begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_3 = -\delta \end{cases}, \begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_3 = \pi - \delta \end{cases}, \quad (3.1.37)$$

$$\begin{cases} x_2 = j\pi \\ x_3 = \delta \end{cases}, \begin{cases} x_2 = j\pi \\ x_3 = \delta - \pi \end{cases}, \quad j = 0, \pm 1,$$

$$\begin{cases} x_1 = j\pi \\ x_2 = k\pi \end{cases}, \quad j, k = 0, \pm 1, \quad (3.1.38)$$

и в точках

$$\left(j\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{2}, m\frac{\pi}{2}\right), \quad j, k, m = \pm 1, \pm 3. \quad (3.1.39)$$

Причем прямые вида (3.1.37) состоят из вырожденных седел (один нулевой характеристический показатель и два разных знака). Характер состояний равновесия на прямых (3.1.38) определяется неравенствами $|x_3| < \delta$, $\pi - \delta < |x_3| < \pi$, при выполнении которых имеем вырожденные седла, а в противном случае – особые точки типа центр (один нулевой и пара чисто мнимых характеристических показателей). Состояния равновесия (3.1.39) – узлы, которые устойчивы по Ляпунову, если сумма $\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{m}{2}\right]$ четна, и неустойчивы в противном случае. Здесь под $[\cdot]$ подразумевается целая часть числа.

Доказательство. Непосредственная подстановка точек из множеств (3.1.37)-(3.1.39) в правую часть системы (3.1.36) позволяет убедиться, что они – состояния равновесия. Анализируя матрицу устойчивости исследуемой системы, получаем вторую часть утверждения.

Отметим, что прямые (3.1.37) параллельны одной из осей Ox_1 или Ox_2 и ненулевые характеристические показатели седел, лежащих на них, равны $\pm 2\sqrt{2} \sin x_1$ и $\pm 2\sqrt{2} \sin x_2$ соответственно. Для седел, лежащих на прямых (3.1.38), характеристические показатели имеют вид $\pm [(4 + \kappa^2) \sin(x_3 + \delta) \sin(x_3 - \delta)]^{1/2}$, а для точек типа центр – $\pm i [-(4 + \kappa^2) \sin(x_3 + \delta) \sin(x_3 - \delta)]^{1/2}$.

Построение полного фазового портрета системы (3.1.36) существенно упрощается после доказательства следующего утверждения.

Лемма 3.4. *Система (3.1.36) имеет два линейно независимых первых интеграла вида*

$$\cos^2 x_1 = c_1 \exp\left(-\frac{\kappa x_3}{2}\right) \cos x_3, \quad (3.1.40)$$

$$\cos^2 x_2 = c_2 \exp\left(-\frac{\kappa x_3}{2}\right) \cos x_3. \quad (3.1.41)$$

Доказательство. Утверждение доказывается прямой подстановкой. Изложенные леммы позволяют доказать следующее предложение.

Теорема 3.2. *Окрестность вырожденных центров системы (3.1.36), лежащих на прямых (3.1.38), заполнена замкнутыми траекториями. Сепаратрисная поверхность, отделяющая замкнутые траектории, определяется из первых интегралов (3.1.40), (3.1.41) путем вариаций c_2 при фиксированном $c_1 = c^* \exp\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)$ и соответственно вариацией c_1 при $c_2 = c^*$, где $c^* = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2}\right)$.*

Доказательство. Для доказательства существования замкнутых траекторий системы (3.1.36) в равенствах (3.1.40), (3.1.41) перейдем к переменным $y_j = \cos x_j$, $j = 1, 2, 3$. Тогда соотношения для первых интегралов преобразуются к

$$y_1^2 = c_1 y_3 \exp\left(-\frac{\kappa}{2} \arccos y_3\right), \quad (3.1.42)$$

$$y_2^2 = c_2 y_3 \exp\left(\frac{\kappa}{2} \arccos y_3\right), \quad (3.1.43)$$

при $x_3 > 0$. Если $x_3 < 0$, то в формулах (3.1.42), (3.1.43) следует сменить знаки показателей экспонент на противоположные. Общий вид графиков функций (3.1.42), (3.1.43) при различных c_1, c_2 изображен на рис. 3.7, 3.8. В силу симметрии относительно оси Oy_3 и ограничений $|y_j| = 1$, $j = 1, 2, 3$ графики изображены в верхней полуплоскости и ограничены прямыми $|y_j| = 1$. Отметим, что при $x_3 < 0$ графики следует поменять местами. Кривые (3.1.42) при любом c_1 имеют в точке $y_3 = -y^* = -\left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{-1/2}$ экстремум, а в точке $y_3 = y^*$ – точку перегиба. Для кривых (3.1.43) – напротив $y_3 = y^*$ – точка экстремума, $y_3 = -y^*$ – точка перегиба. Среди всех равенств (3.1.42), (3.1.43) выделим те, графики которых касаются прямых $y_1 = 1$ и $y_2 = 1$ соответственно. В первом случае касание происходит при $c_1 = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\kappa(\pi-\delta)}{2}\right)$, во втором – при $c_2 = \left(1 + \frac{\kappa^2}{4}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\kappa\delta}{2}\right)$. Рассмотрим теперь качественное поведение траекторий системы (3.1.36), соответствующих кривым (3.1.42), (3.1.43). Все кривые на рис. 3.7, 3.8 можно условно разбить на два типа: попадающие и не попадающие в точку ноль. Кривая (3.1.42) при $c_1 = c^* \exp\left(\frac{\pi\kappa}{2}\right)$ и (3.1.43) при $c_2 = c^*$ разделяют области кривых разных типов. Точке ноль в переменных y_j соответствуют узлы (3.1.39), поэтому траектории системы (3.1.36), соответствующие кривым с точкой ноль, не могут быть замкнутыми. Кривые второго типа начинаются

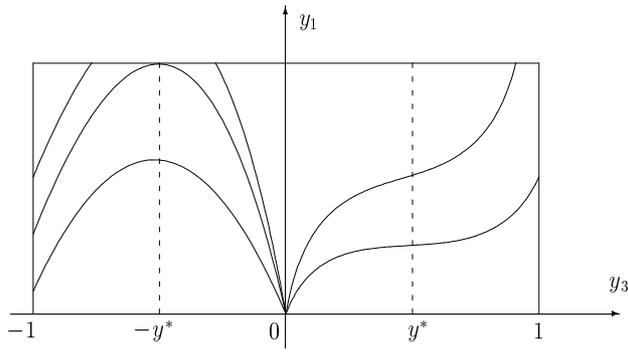


Рис. 3.7.

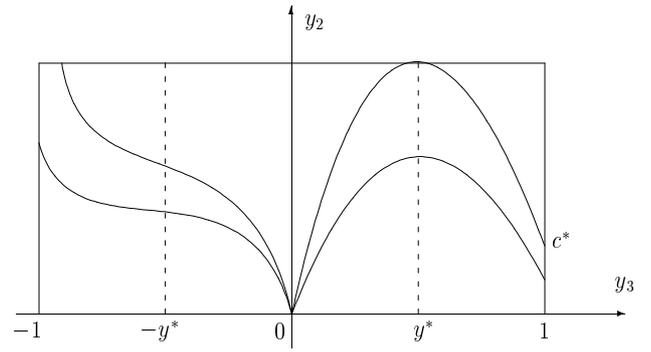


Рис. 3.8.

и кончаются на прямых $|y_j| = 1$ так, что граничным точкам не могут соответствовать состояния равновесия, то есть движение после граничной точки продолжается. Простые вычисления показывают, что замкнутым траекториям системы (3.1.36) соответствуют пара или четыре кривых указанного типа. Отсюда следует, что траектории, соответствующие экстремальным кривым, образуют поверхность, разделяющую замкнутые и незамкнутые траектории. Тем самым теорема доказана.

Перейдем к построению фазового портрета (3.1.36). В силу инвариантности системы (3.1.36) относительно замен $x_j \rightarrow x_j + 2\pi m$ и $x_j \rightarrow \pi - x_j$ ограничимся рассмотрением куба $|x_j| \leq \frac{\pi}{2}$, $j = 1, 2, 3$, трехмерного фазового пространства (3.1.36). В соответствии с теоремой 3.2 построим сепаратрисную поверхность, отделяющую вложенные циклы от траекторий, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к устойчивым узлам (3.1.38). Поверхность с указанными свойствами изображена на рис. 3.9, а на рис. 3.10 показаны сепаратрисные поверхности, разделяющие траектории, стремящиеся к различным состояниям равновесия. Варьирование параметра κ не приводит к качественным изменениям фазовой картины, меняется лишь размер области периодических режимов: большему значению κ соответствует бóльшая область, заполненная периодическими режимами. В предельном случае $\kappa = 0$ циклов нет, а при $\kappa \rightarrow \infty$ циклами заполнено все фазовое пространство за исключением сепаратрисных поверхностей. Негрубый характер полученных режимов не позволяет сделать каких-либо выводов относительно существования соответствующих режимов в системе (3.1.4). Возможной причиной негрубости результата может быть недостаточная точность вычисления интегрально-многообразия (3.1.15) и системы дифференциальных уравнений (3.1.17), (3.1.19) на нем. Покажем, что это не так.

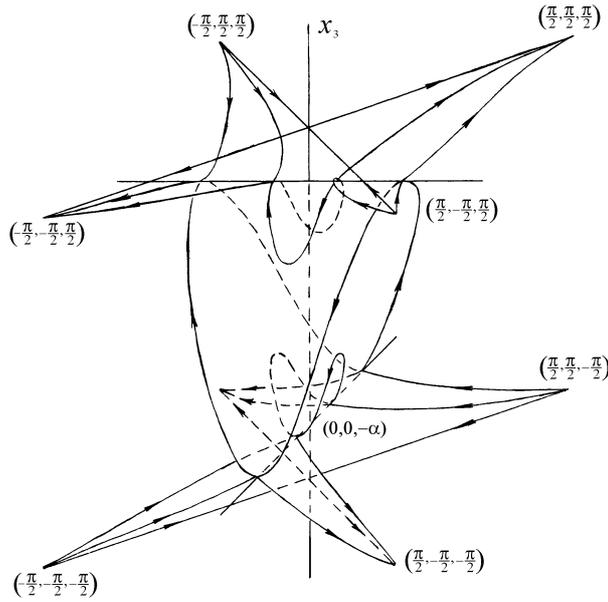


Рис. 3.9.

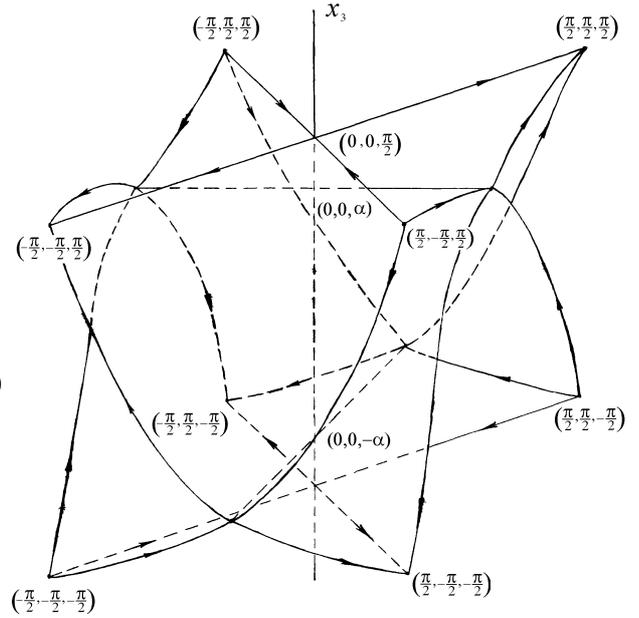


Рис. 3.10.

Учет слагаемых более высокого порядка малости

Рассмотрим снова систему (3.1.8)-(3.1.9) и построим асимптотические формулы для устойчивого интегрального многообразия (3.1.15) и системы (3.1.17), (3.1.19) на нем более высокой степени точности. Следующая теорема дает требуемые асимптотические формулы.

Теорема 3.3. *Глобально экспоненциально устойчивое интегральное многообразие системы (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11) с точностью до слагаемых порядка μ^3 представляется в виде*

$$\xi_j = \left(-\frac{\tau'_0}{d_0} \right)^{1/2} \left(1 + \mu \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \mu^2 \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + O(\mu^3) \right), \quad (3.1.44)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \frac{g}{2\tau'_0} \left(\cos(\alpha_j + \gamma) - 2 \cos \gamma + \cos(\gamma - \alpha_{j-1}) \right), \\ \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= -\frac{3}{2} \varphi_j^2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \frac{g}{2\tau'_0} \left(\varphi_{j+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos(\alpha_j + \gamma) - \right. \\ &\quad \left. - 2\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos \gamma + \varphi_{j-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cos(\gamma - \alpha_{j-1}) \right), \\ \gamma &= -\text{sign}(x_0) \arccos(1 + x_0^2)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поведение решений системы (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11) с точностью до слагаемых порядка μ^3 определяется грубыми устойчивыми режимами уточненной системы

$$\dot{\alpha}_j = 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \kappa(\cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}) + \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (3.1.45)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{4\tau_0'} \left(-\sin \alpha_{j+1}(\cos \alpha_{j+2} + x_0 \sin \alpha_{j+2}) + 2x_0 \sin^2 \alpha_{j+1} + \right. \\ \left. + x_0(-\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \sin \alpha_j + (\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - 2x_0 \sin^2 \alpha_{j-1} - \right. \\ \left. - \sin \alpha_{j-1}(\cos \alpha_{j-2} - x_0 \sin \alpha_{j-2}) + \kappa \left(-\cos \alpha_{j+1}(\cos \alpha_{j+2} + x_0 \sin \alpha_{j+2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4x_0 \sin 2\alpha_{j+1} + 3(\cos \alpha_{j+1} - \cos \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - 2x_0 (\sin \alpha_{j+1} + \sin \alpha_{j-1}) \cos \alpha_j - \right. \right. \\ \left. \left. - x_0 (\cos \alpha_{j+1} + \cos \alpha_{j-1}) \sin \alpha_j - x_0 \sin 2\alpha_j + x_0 \sin 2\alpha_{j-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \alpha_{j-1} (\cos \alpha_{j-2} - x_0 \sin \alpha_{j-2}) \right) \right), \quad (3.1.46) \end{aligned}$$

а для α_0 и α_n выполнены условия (3.1.19).

Доказательство. Как уже отмечалось выше, система (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11) при $\mu = 0$ имеет глобальное экспоненциальное устойчивое интегральное многообразие, поведение решений на котором описывается уравнением $\dot{\alpha}_j = 0$. Используя общие утверждения книги [111] о том, что при всех достаточно малых μ система (3.1.8), (3.1.9), (3.1.11) имеет аналогичное интегральное многообразие, получим разложение (3.1.44). Для нахождения $\varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достаточно подставить асимптотическую формулу (3.1.45) соответственно в уравнения (3.1.8) и (3.1.9), а затем приравнять коэффициенты при μ и μ^2 . Несложные, но трудоемкие вычисления приводят к формулам (3.1.45), (3.1.46). Отметим, что в (3.1.45) дополнительно выполнена нормировка времени $\mu(x_0 b_0 - 1)t \rightarrow 2t$. Теорема доказана.

Рассмотрим полученный результат в применении к случаю $n = 4$. Производя в (3.1.45) замены (3.1.35), приходим к системе

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (4 + \kappa^2)^{1/2} \cos x_1 \sin x_2 \sin(x_3 + \delta) - \\
&\quad - \frac{\mu}{2\tau'_0} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_2) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_2) \right) \right) \sin 2x_1, \\
\dot{x}_2 &= (4 + \kappa^2)^{1/2} \sin x_1 \cos x_2 \sin(x_3 - \delta) - \\
&\quad - \frac{\mu}{2\tau'_0} \left(\cos x_3 \left(\cos x_3 + x_0(\sin x_3 - 2 \sin x_3 \cos 2x_1) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x_3 + x_0(\cos^2 x_3 - \cos 2x_3 \cos 2x_1) \right) \right) \sin 2x_2, \\
\dot{x}_3 &= 4 \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 + \\
&\quad + \frac{\mu}{2\tau'_0} \kappa \left(\cos x_3 (\cos 2x_2 - \cos 2x_1) + \right. \\
&\quad \left. + x_0 \sin x_3 (2 \cos 2x_1 \cos 2x_2 - \cos 2x_1 - \cos 2x_2) \right) \cos x_3.
\end{aligned} \tag{3.1.47}$$

Учет слагаемых порядка μ , в системе (3.1.47) разрушает негрубую картину, полученную в теореме 3.2 для системы (3.1.36), однако и в этом случае фазовый портрет уточненной системы (3.1.47) остается негрубым. Ниже перечислены основные изменения качественной картины фазового пространства при переходе от системы (3.1.36) к системе (3.1.47).

1. Пропадают состояния равновесия вида (3.1.37).
2. Негрубые состояния равновесия (3.1.38) типа центр становятся вырожденными фокусами.
3. Циклы превращаются в спирали, стремящиеся к точкам прямой (3.1.38).
4. При разрушении области циклов часть из них не пропадает и заполняет некоторую полуустойчивую поверхность.

Первые два из перечисленных утверждений элементарно следуют из анализа правых частей системы (3.1.47) и ее матрицы устойчивости. Третье и четвертое предложение обосновываются с помощью численного анализа системы (3.1.47).

Случай n осцилляторов

Увеличение числа точек разбиений пространственной области затрудняет аналитическое исследование систем (3.1.17), (3.1.19) и (3.1.45), (3.1.19). Численный анализ этих систем при $n > 4$ показал, что их общие свойства

для четных n в целом остаются теми же, что и при $n = 4$. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

Пусть число осцилляторов n – четное, тогда существует такая окрестность $(n - 1)$ -мерного фазового пространства системы (3.1.17), (3.1.19), содержащая точку $(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$, что решение, выпущенное из любой точки этой области, лежит на торе, размерность которого растет с ростом n .

При $n = 4$ это утверждение следует из теоремы 3.2. Для $4 < n \leq 12$ обоснование производилось численно. В $(n - 1)$ -мерном кубе фазового пространства системы (3.1.17), (3.1.19) с центром в точке $(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ и ребром 0.5 случайным образом или на равномерной сетке выбирались начальные точки, затем из этих точек выпускались траектории. Оказалось, что полученные траектории либо приближаются к устойчивым состояниям равновесия, либо осциллируют. Далее, осциллирующие решения подвергались частотному анализу. Общий результат таков: при $n = 6$ – колебания близки к одночастотным, при $n = 8$ и 10 – двухчастотным и при $n = 12$ – трехчастотным колебаниям. Ляпуновские показатели системы (3.1.17), (3.1.19), вычисленные вдоль таких колебательных решений, оказываются с высокой точностью равны нулю, что также подтверждает квазипериодичность получаемых решений.

Для нечетного числа осцилляторов (четное число уравнений в системе (3.1.17), (3.1.19)) устойчивыми по Ляпунову остаются, в пределах точности численного счета, лишь неподвижные точки, причем среди них всегда имеются как грубые, так и негрубые состояния равновесия.

Важно отметить, что с ростом n (как в четном, так и в нечетном случае) растет число грубых устойчивых состояний равновесия, которым в исходной системе соответствуют решения типа бегущих волн. Бассейны притяжения этих состояний равновесия имеют сложную структуру, и переходные процессы при стремлении траекторий к этим точкам оказываются сколь угодно длительными.

Анализ уточненной системы (3.1.45), (3.1.19) при $n > 4$ показывает, что области негрубых колебательных режимов, как и в случае $n = 4$, превращаются в поверхности. Численное исследование таких поверхностей затруднительно из-за узких областей притяжения, поэтому приходится ограничиться численным обоснованием их существования.

Заключение

Непосредственный численный анализ краевых задач типа “реакция-диффузия” при достаточно малой диффузии показывает наличие у них

сложных пространственно неоднородных режимов, однако для расчета размерностных характеристик и даже старшего ляпуновского показателя требуются в этом случае значительные вычислительные мощности.

В случае если область изменения пространственной переменной – отрезок, нами показано, что с уменьшением диффузии размерность аттрактора фазовой системы растет. Это позволяет считать, что и у исходной краевой задачи происходит рост размерности притягивающего множества.

Случай краевой задачи на окружности оказался сложнее в силу специфики области, поскольку решения в этом случае определены с точностью до сдвига вдоль пространственной переменной. Поэтому полученным в данном разделе негрубым состояниям равновесия и квазипериодическим решениям может ничего не соответствовать в исходной краевой задаче. Вместе с тем, растущее число грубых состояний равновесия фазовой системы, которым соответствуют бегущие волны у исходной задачи, показывает, что с уменьшением диффузионного члена сложность решений данной задачи растет.

3.2. Численный анализ разностных аппроксимаций уравнения Гинзбурга – Ландау при стремлении коэффициента диффузии к нулю

В данном разделе с помощью численного анализа изучается вопрос об аттракторах уравнения Гинзбурга – Ландау (3.1.13)

$$\dot{w} = \mu(1 - ia)w'' + w - (1 + ib)w|w|^2, \quad (3.2.1)$$

на отрезке $[0, 1]$ изменения пространственной переменной x с условиями Неймана на границах

$$w'(t, 0) = w'(t, 1) = 0, \quad (3.2.2)$$

и на окружности единичной длины с периодическими по x краевыми условиями

$$w(t, x) = w(t, x + 1). \quad (3.2.3)$$

Здесь $w(t, x)$ — комплекснозначная функция своих аргументов, точкой обозначена производная по t , а штрихом — по x .

Обе краевые задачи рассматриваются в случае $\mu \rightarrow 0$, $\mu > 0$ и при условии, что все остальные параметры имеют порядок единицы. Отметим, что уравнение (3.2.1) может быть получено из (3.1.13) при условии, что $\tau'_0 > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$, с помощью нормирующих замен и переобозначения параметров системы.

Численный анализ краевых задач типа (3.2.1), (3.2.2) и (3.2.1), (3.2.3) многократно выполнялся для различных значений входящих параметров и коэффициенте диффузии μ порядка единицы (см., например, [4, 7–9, 20–22, 123]). При $\mu \rightarrow 0$ вычислительный процесс осложняется необходимостью брать с уменьшением μ все более мелкие разбиения пространственной переменной x . Прделанные в предыдущих разделах асимптотические исследования показывают, что в ситуации близкой к бифуркации Андронова – Хопфа и достаточно малом μ для системы фазовых уравнений с ростом их размерности (числа учитываемых осцилляторов) увеличивается размерность соответствующего притягивающего множества. Именно поэтому при малых μ требуется увеличивать число точек разбиения пространственной переменной. Наша задача численными методами проиллюстрировать построения предыдущего раздела.

3.2.1. Случай граничных условий Неймана

Обе краевые задачи (3.2.1), (3.2.2) и (3.2.1), (3.2.3), очевидным образом, имеют пространственно однородное периодическое решение

$$w(t, x) = \exp(-ib(t + \phi_*)), \quad (3.2.4)$$

где ϕ_* — произвольное число. При достаточно большом μ это решение орбитально асимптотически устойчиво, а при условии $ab > 1$ имеется критическое значение $\mu_{\text{кр}}$ такое, что при $\mu > \mu_{\text{кр}}$ пространственно однородное решение устойчиво, а при $\mu < \mu_{\text{кр}}$ — неустойчиво. Для краевой задачи Неймана эта величина имеет вид

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{2(ab - 1)}{\pi^2(1 + a^2)}. \quad (3.2.5)$$

Всюду ниже считаем, что параметры a, b фиксированы и заданы, к примеру, равенствами

$$a = 0.5, \quad b = 8. \quad (3.2.6)$$

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $w = u + iv$, перейдем от уравнения для комплексного переменного w из (3.2.1) к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu(u'' - av'') + u - (u - bv)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= \mu(au'' + v'') + v - (bu + v)(u^2 + v^2), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

с краевыми условиями

$$u'(t, 0) = u'(t, 1) = v'(t, 0) = v'(t, 1) = 0, \quad (3.2.8)$$

Заменим, далее, в (3.2.7) частные производные по x приближенными равенствами

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x) \Big|_{x=(j-\frac{1}{2})/N} &\approx N^2(u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)), \\ v_{xx}(t, x) \Big|_{x=(j-\frac{1}{2})/N} &\approx N^2(v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)), \end{aligned}$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число,

$$u_j(t) = u(t, x) \Big|_{x=(j-\frac{1}{2})/N}, \quad v_j(t) = v(t, x) \Big|_{x=(j-\frac{1}{2})/N}, \quad j = 1, \dots, N.$$

В результате для переменных u_j, v_j приходим к конечномерной модели вида

$$\begin{aligned}
\dot{u}_j &= \mu N^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} + a(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1})) + \\
&\quad + u_j - (u_j - bv_j)(u_j^2 + v_j^2), \\
\dot{v}_j &= \mu N^2 (v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1} - a(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})) + \\
&\quad + v_j - (v_j + bu_j)(u_j^2 + v_j^2), \quad j = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Для системы (3.2.9) выполнены краевые условия

$$u_0 = u_1, \quad v_0 = v_1, \quad u_{N+1} = u_N, \quad v_{N+1} = v_N. \tag{3.2.10}$$

Сразу отметим, что в системе (3.2.9), (3.2.10) имеется унаследованная от краевой задачи (3.2.1), (3.2.2) симметрия, состоящая в инвариантности относительно замены переменных

$$u_j \rightarrow u_{N-j+1}, \quad v_j \rightarrow v_{N-j+1}, \quad j = 1, \dots, N. \tag{3.2.11}$$

Кроме того, система (3.2.9), (3.2.10), так же как и исходная (3.2.1), (3.2.2), имеет пространственно однородный цикл

$$u_k(t) = \cos(bt + \phi_*), \quad v_k(t) = -\sin(bt + \phi_*), \tag{3.2.12}$$

который глобально экспоненциально устойчив при $\mu > \mu_{\text{кр}}(N)$ и неустойчив при $\mu < \mu_{\text{кр}}(N)$, где

$$\mu_{\text{кр}}(N) = \frac{ab - 1}{2(1 + a^2)N^2 \sin^2(\pi/2N)}. \tag{3.2.13}$$

При фиксированных в соответствии с (3.2.6) значениях параметров a, b имеем по формуле (3.2.5) $\mu_{\text{кр}} \approx 0.48634$, в свою очередь при $N = 20$ по формуле (3.2.13) получаем $\mu_{\text{кр}}(20) \approx 0.487343$. Нетрудно видеть, что величины $\mu_{\text{кр}}$ и $\mu_{\text{кр}}(20)$ отличаются друг от друга лишь в третьем знаке. Это означает, что при μ близких к $\mu_{\text{кр}}$ разностная модель (3.2.9), (3.2.10) вполне адекватно описывает исходную краевую задачу. Уменьшение величины $\mu < \mu_{\text{кр}}(N)$ приводит к появлению в результате бифуркации типа вилки пары орбитально асимптотически устойчивых симметричных друг другу в смысле замены (3.2.11) пространственно неоднородных циклов. Данные циклы остаются аттракторами системы (3.2.9), (3.2.10) вплоть до значения $\mu \approx 0.1183$ (вычислено для $N = 20$), при котором они объединяются в один самосимметричный пространственно неоднородный цикл. Затем при $\mu \approx 0.0351$ этот цикл теряет устойчивость и от него ответвляется пара симметричных друг другу

устойчивых циклов. Эти циклы колебательным образом теряют устойчивость при $\mu \approx 0.0338$ ($N = 20$), в результате чего возникает два устойчивых двумерных инвариантных тора. Устойчивыми движениями на полученных торах могут быть как квазипериодические, так и периодические колебания. Наконец, при $\mu \approx 0.033$ ($N = 20$) торы разрушаются и возникают хаотические колебания.

Для $N = 10$ и $N = 20$ на промежутке изменения μ от 0.03 до нуля с шагом 0.0005 был вычислен спектр ляпуновских экспонент и на их основе ляпуновская размерность аттрактора системы (3.2.9), (3.2.10). На рис. 3.11, 3.12 представлены графики зависимости от μ старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(\mu)$ и ляпуновской размерности $d_L(\mu)$ при $N = 10$, а на рис. 3.13, 3.14 — при $N = 20$.

На промежутке изменения параметра μ от 0.03 до примерно 0.015 графики зависимостей имеют многочисленные провалы, соответствующие окнам периодичности или квазипериодичности, значение λ_{max} при этом обращается в нуль, а d_L равно единице в случае циклов и двум в случае двумерных торов.

Графики зависимости $d_L(\mu)$ при $0.003 < \mu < 0.01$ для $N = 10$ и при $0.001 < \mu < 0.015$ для $N = 20$ близки к гиперболической, что, очевидным образом, соответствует выводам предыдущего пункта о росте размерности аттрактора системы (3.1.17), (3.1.18) с ростом ее размерности. Выбор μ на промежутке от 0 до 0.003 при $N = 10$ и от 0 до 0.001 при $N = 20$ приводит к тому, что соответствующая система (3.2.9), (3.2.10) уже не может адекватно описывать исходную краевую задачу (3.2.7), (3.2.8). Отметим, что при $N = 20$, как и следовало ожидать, промежуток близкого к гиперболическому изменения величины $d_L(\mu)$ шире, чем при $N = 10$. Максимальное значение размерности аттрактора достигается при $N = 10$ в точке $\mu \approx 0.00305$ и приблизительно равно 14.23, а при $N = 20$ — в точке $\mu \approx 0.00085$ и $d_L(0.00085) \approx 29.32$.

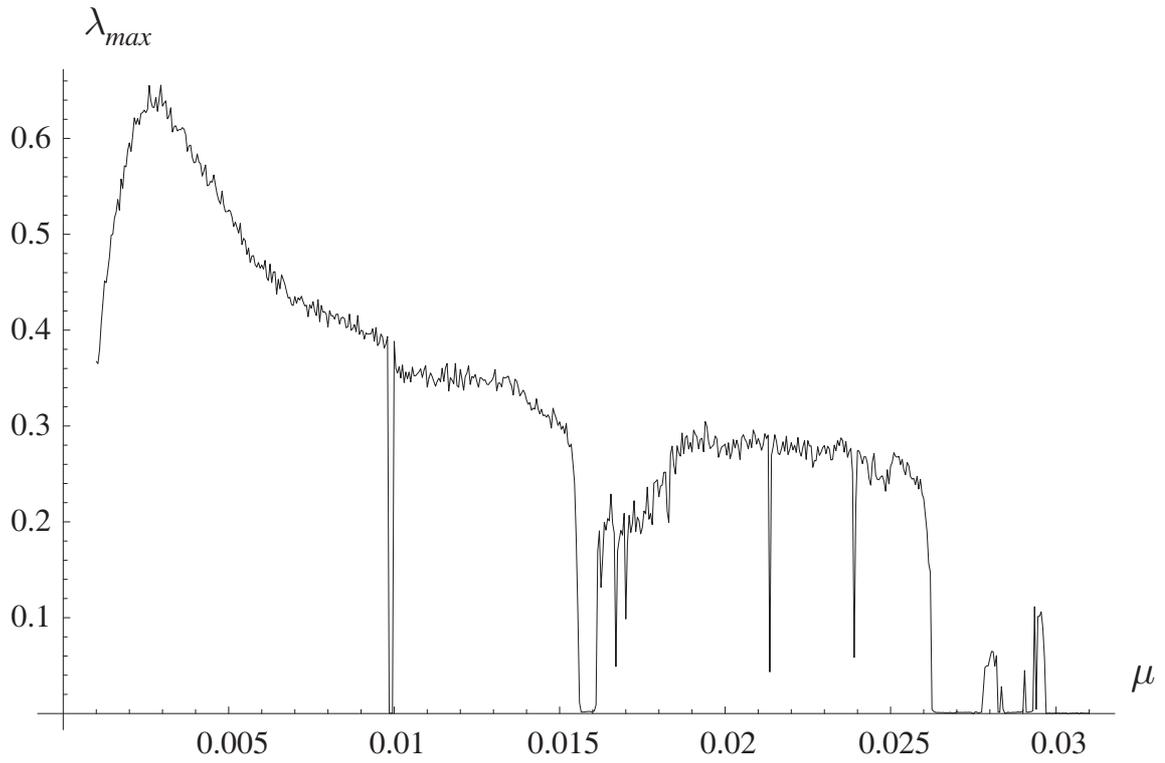


Рис. 3.11. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 10$

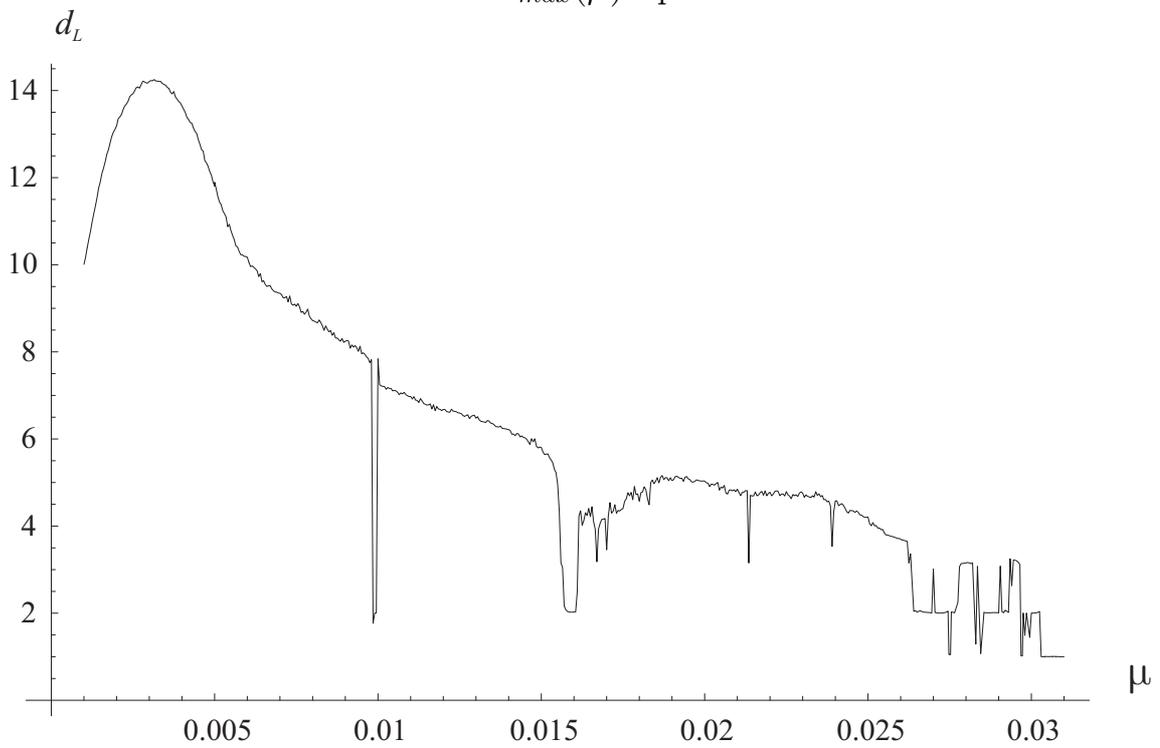


Рис. 3.12. $d_L(\mu)$ при $N = 10$

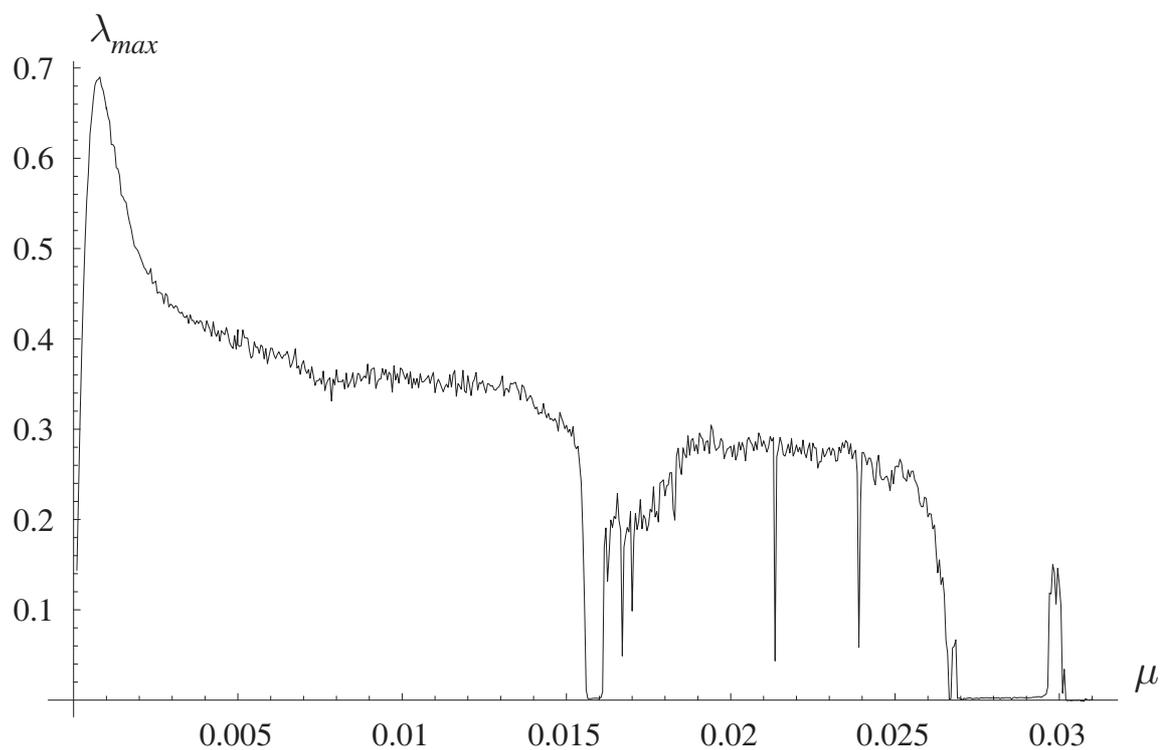


Рис. 3.13. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 20$

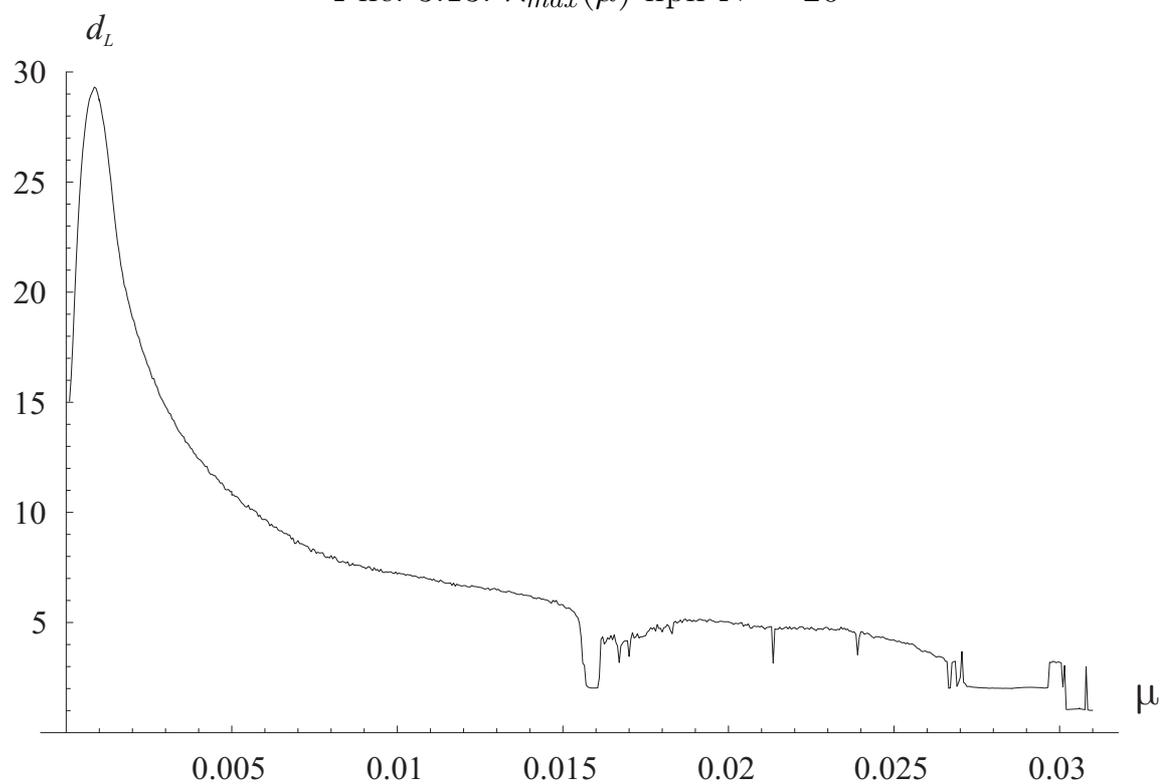


Рис. 3.14. $d_L(\mu)$ при $N = 20$

Для того, чтобы убедиться в том, что с ростом N разностные модели (3.2.9), (3.2.10) имеют аттракторы с близкими показателями, были выполнены расчеты для фиксированных $\mu = 0.02, 0.01, 0.005, 0.002$ и изменении величины N от 5 до 30. На рис. 3.15–3.22 представлены графики зависимостей $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$ при указанных выше значениях параметра μ . Нетрудно видеть, что увеличение N приводит к стабилизации величин $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$. При этом меньшим значениям параметра μ соответствуют большие предельные значения оцениваемых величин. Отметим также, что если в первых двух случаях ($\mu = 0.02$ и $\mu = 0.01$) значения $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$ стабилизируются на достаточно широком промежутке изменения N (начиная с $N = 15$), то в случае $\mu = 0.005$ этот промежуток существенно уже ($20 \leq N \leq 30$), а при $\mu = 0.002$ для получения приближений предельного по N значения необходимы дальнейшие вычисления с большим N .

Коротко остановимся на применяемых численных методах и точности вычислений. Для оценки ляпуновских экспонент использовался стандартный метод Беннетина (см. [105, 136, 159]) и метод динамической перенормировки [23]. В данной ситуации метод динамической перенормировки не имеет существенных преимуществ и использовался для выборочной проверки основного массива результатов, полученных стандартным способом.

Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2.9), (3.2.10) использовались методы Рунге – Кутты в их реализации Дорманда и Принса (8.3) [139] с контролем точности на шаге, шаг при этом был ограничен сверху величиной 0.001.

При вычислении ляпуновских величин методом Беннетина большое значение имеет определение промежутков изменения независимой переменной t , через которые производятся перенормировки текущих значений систем в вариациях вдоль траектории на аттракторе. Учитывая, что пространственно однородное решение (3.2.12) системы (3.2.9), (3.2.10) имеет период $T = 2\pi/b$, выберем эту величину в качестве исходного значения параметра перенормировки. При возникновении в колебательных режимах системы (3.2.9), (3.2.10) высокочастотных составляющих будем уменьшать его подходящим образом. Продолжительность вычислений в численном эксперименте с фиксированным N и изменении μ выбиралась равной $5000 \cdot T$ так, что среднее квадратичное отклонение всех ляпуновских показателей, вычисленное по последним пятиста точкам, оказывалось меньшим 10^{-3} . Во втором эксперименте вычисления производились на промежутке $10000 \cdot T$, соответственно отклонение показателей от среднего оказалось меньше 10^{-4} .

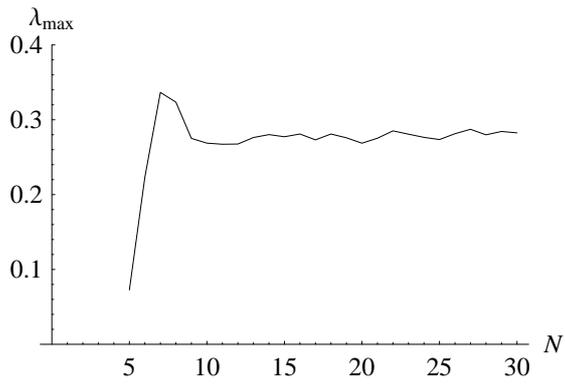


Рис. 3.15. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.02$

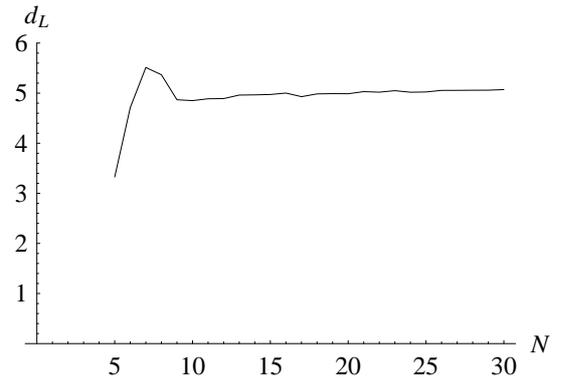


Рис. 3.16. $d_L(N)$ при $\mu = 0.02$

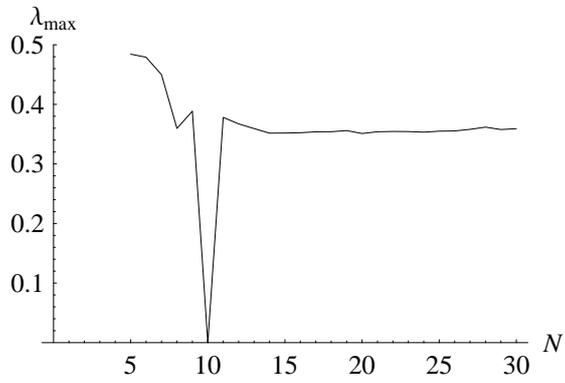


Рис. 3.17. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.01$

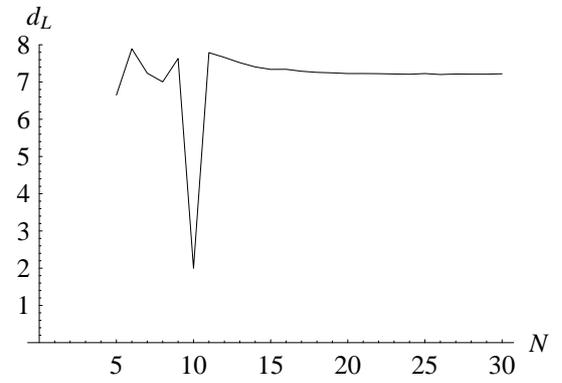


Рис. 3.18. $d_L(N)$ при $\mu = 0.01$

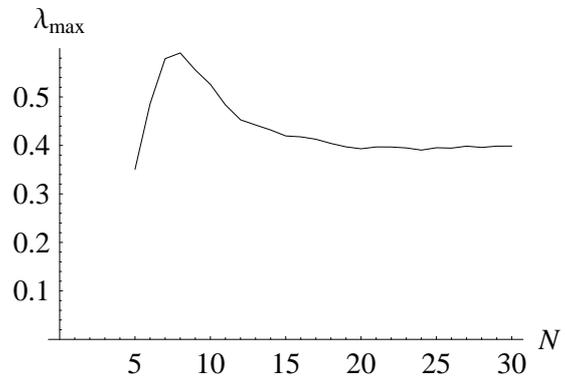


Рис. 3.19. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.005$

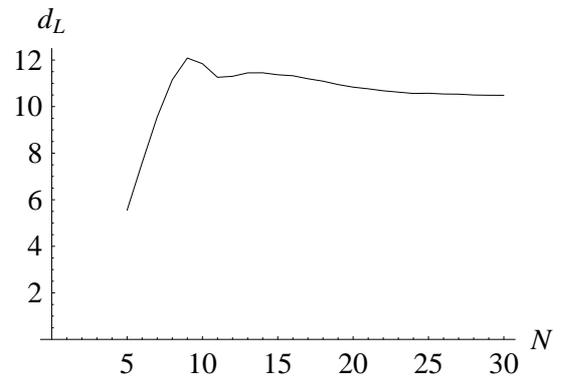


Рис. 3.20. $d_L(N)$ при $\mu = 0.005$

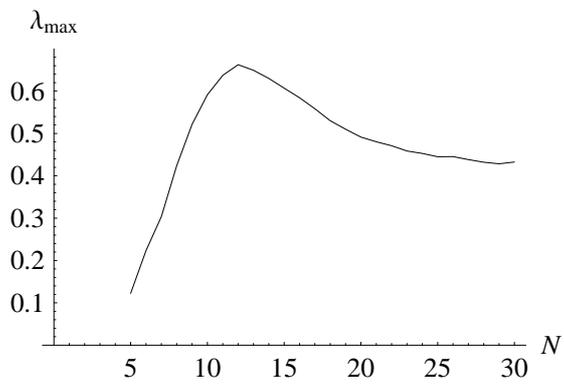


Рис. 3.21. $\lambda_{\max}(N)$ при $\mu = 0.002$

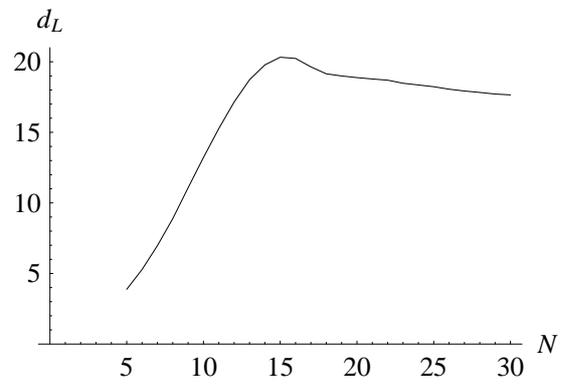


Рис. 3.22. $d_L(N)$ при $\mu = 0.002$

3.2.2. Случай краевой задачи на окружности

В этом пункте рассмотрим уравнение Гинзбурга – Ландау на окружности (3.2.1), (3.2.3). Переход к разностной модели в этом случае дает ту же систему (3.2.9), что и в предыдущем случае, с тем лишь отличием, что вместо (3.2.10) выполнены краевые условия

$$u_0 = u_N, \quad v_0 = v_N, \quad u_{N+1} = u_1, \quad v_{N+1} = v_1. \quad (3.2.14)$$

Система (3.2.9), (3.2.14) имеет такую же, как и система (3.2.9), (3.2.10), симметрию (3.2.11), однако наряду с ней имеется также инвариантность относительно циклических замен

$$\begin{aligned} u_j &\rightarrow u_{j+k}, & v_j &\rightarrow v_{j+k} & \text{при } j = 1, \dots, N-k, \\ u_j &\rightarrow u_{j+k-N}, & v_j &\rightarrow v_{j+k-N} & \text{при } j = N-k, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

где k — произвольное целое от единицы до $N-1$.

Пространственно однородный цикл

$$u_k(t) = \cos(bt + \phi_*), \quad v_k(t) = -\sin(bt + \phi_*),$$

системы (3.2.9), (3.2.14) глобально экспоненциально устойчив при $\mu > \mu_{\text{кр}}^c(N)$ и неустойчив при $\mu < \mu_{\text{кр}}^c(N)$, где

$$\mu_{\text{кр}}^c(N) = \frac{ab - 1}{2(1 + a^2)N^2 \sin^2(\pi/N)}. \quad (3.2.16)$$

Зафиксируем параметры a, b в соответствии с соотношением (3.2.6), тогда $\mu_{\text{кр}}^c(20) \approx 0.12184$, при этом предельное значение $\mu_{\text{кр}}^c$ для краевой задачи (3.2.1), (3.2.3) приближенно равно 0.12158.

При $\mu < \mu_{\text{кр}}^c(N)$ у системы (3.2.9), (3.2.14) в силу симметрий (3.2.11) и (3.2.15) появляется до $2N$ различных устойчивых циклов. При $\mu \approx 0.0433$ (вычислено для $N = 20$) делается устойчивым двумерный инвариантный тор.

Далее, при $\mu \approx 0.029$ ($N = 20$) тор разрушается и возникают хаотические колебания.

Для $N = 10$ и $N = 20$ на промежутке изменения μ от 0.03 до нуля с шагом 0.0005 был вычислен спектр ляпуновских экспонент и ляпуновская размерность аттрактора системы (3.2.9), (3.2.14). На рис. 3.23, 3.24 представлены графики зависимости от μ старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\text{max}}(\mu)$ и ляпуновской размерности $d_L(\mu)$ при $N = 10$, а на рис. 3.25, 3.26 — при $N = 20$.

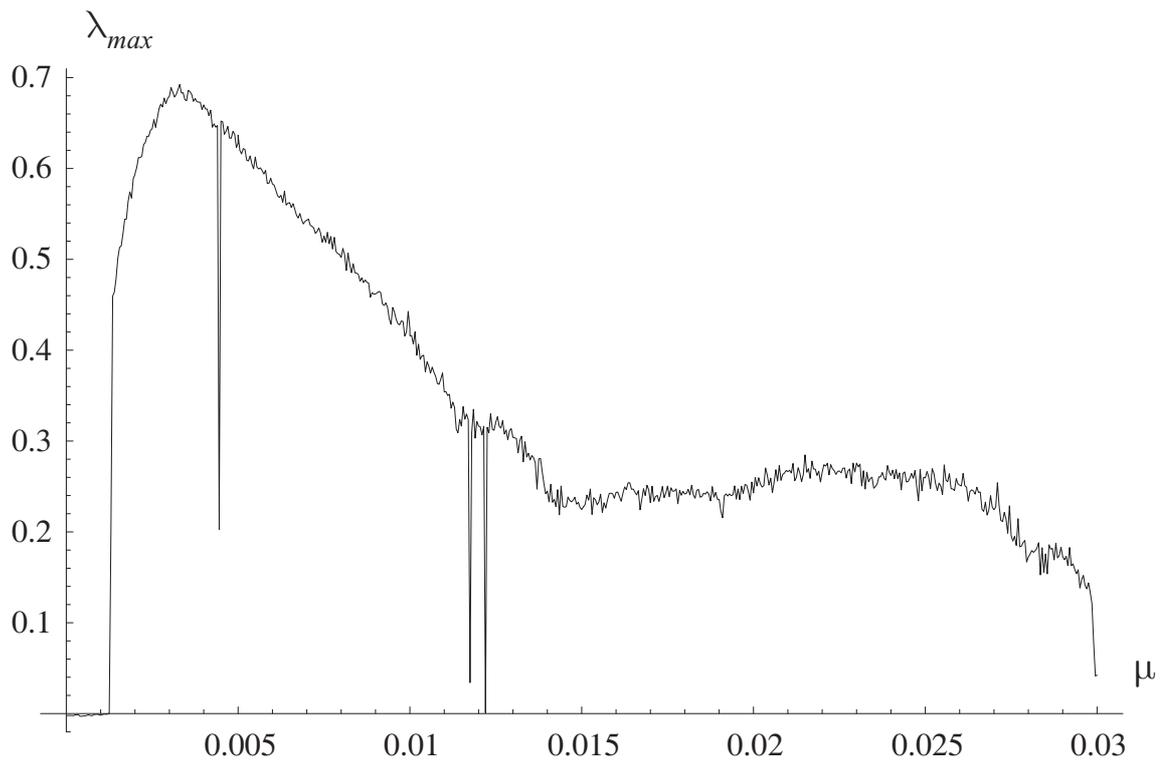


Рис. 3.23. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 10$

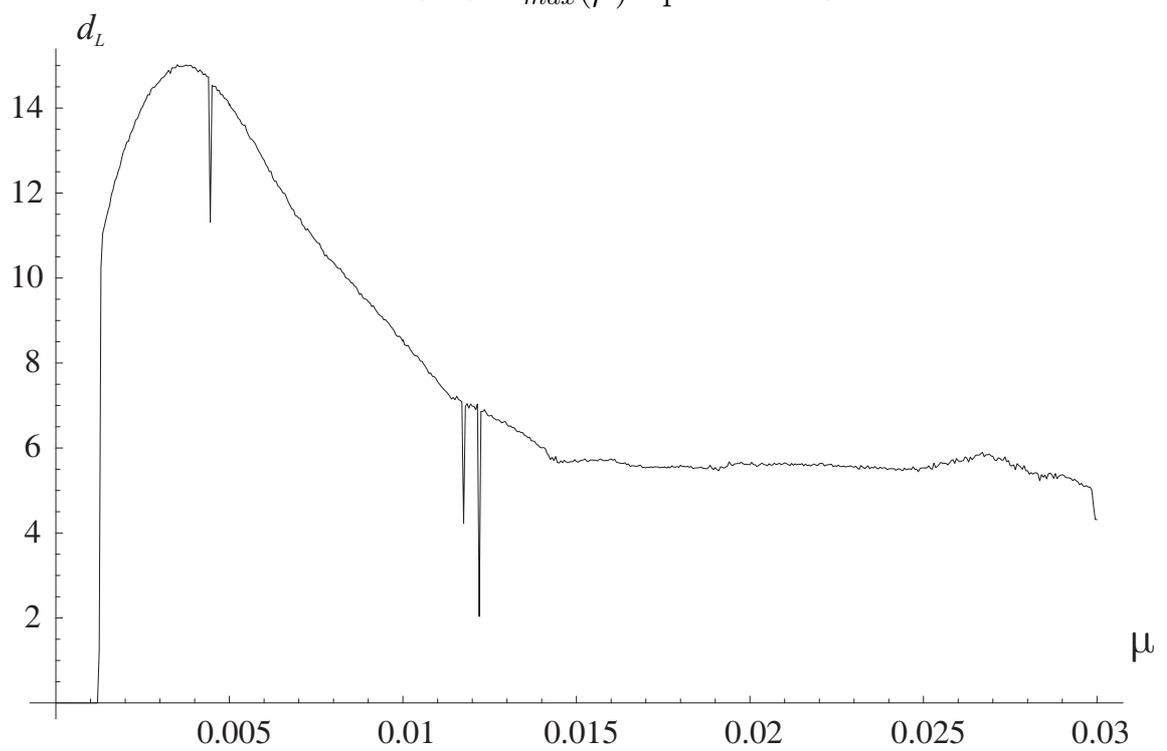


Рис. 3.24. $d_L(\mu)$ при $N = 10$

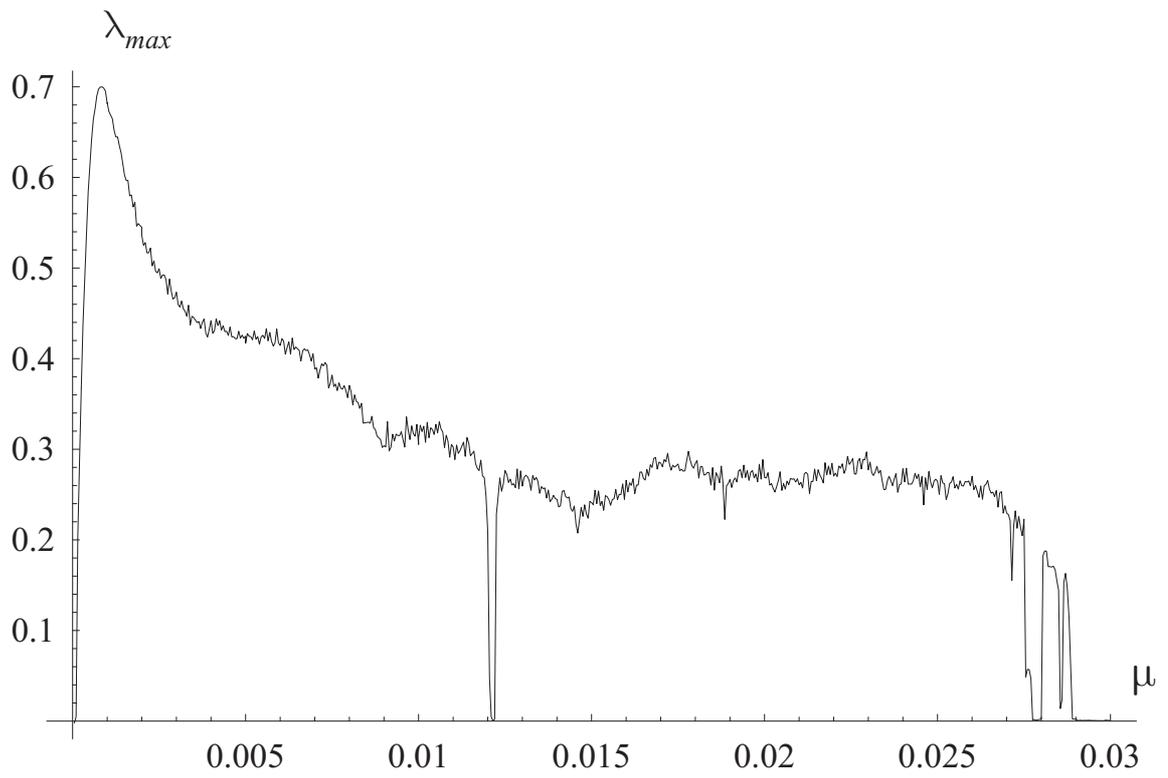


Рис. 3.25. $\lambda_{max}(\mu)$ при $N = 20$

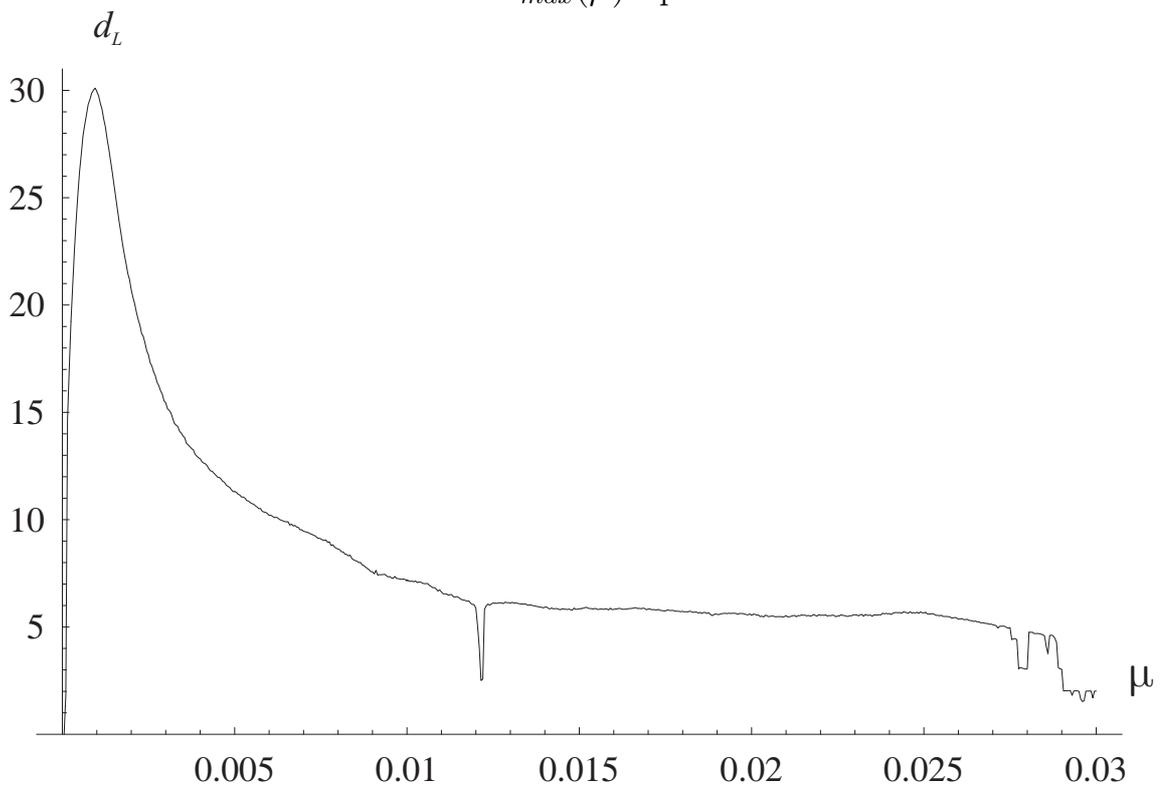


Рис. 3.26. $d_L(\mu)$ при $N = 20$

Как и в предыдущем пункте, были выполнены расчеты для фиксированных $\mu = 0.02, 0.01, 0.005, 0.002$ и изменении величины N от 5 до 30. На рис. 3.27–3.34 представлены графики зависимостей $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$ при указанных значениях параметра μ . Увеличение N и здесь приводит к стабилизации величин $\lambda_{max}(N)$ и $d_L(N)$. При этом меньшим значениям параметра μ соответствуют большие предельные значения оцениваемых величин.

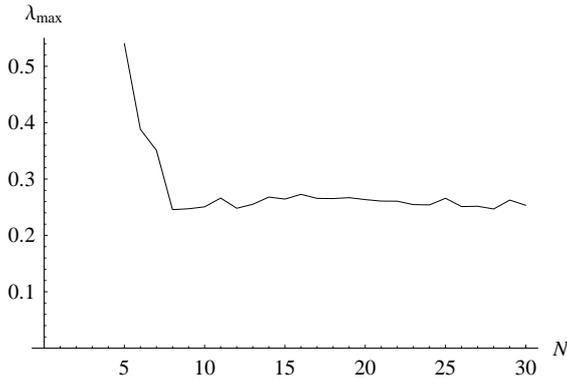


Рис. 3.27. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.02$

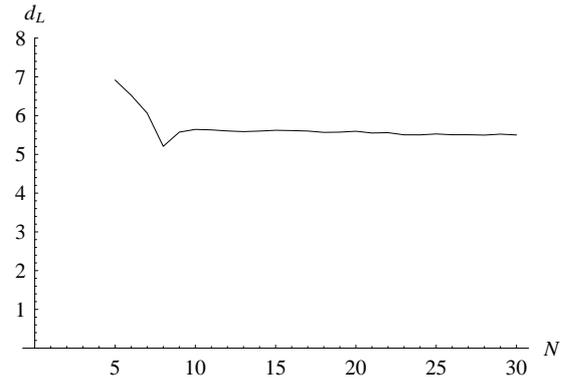


Рис. 3.28. $d_L(N)$ при $\mu = 0.02$

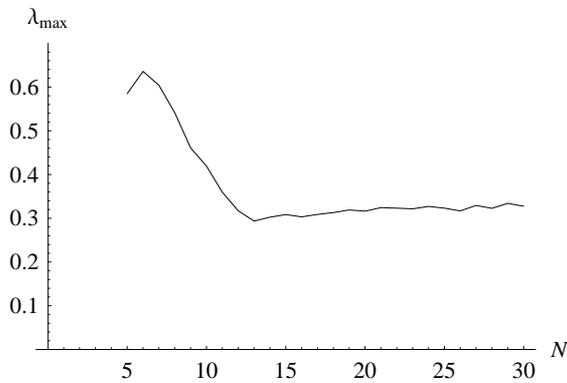


Рис. 3.29. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.01$

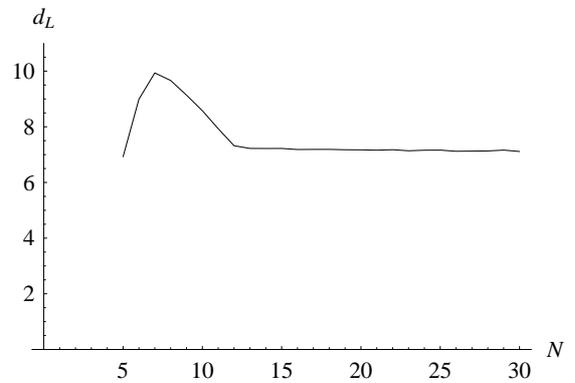


Рис. 3.30. $d_L(N)$ при $\mu = 0.01$

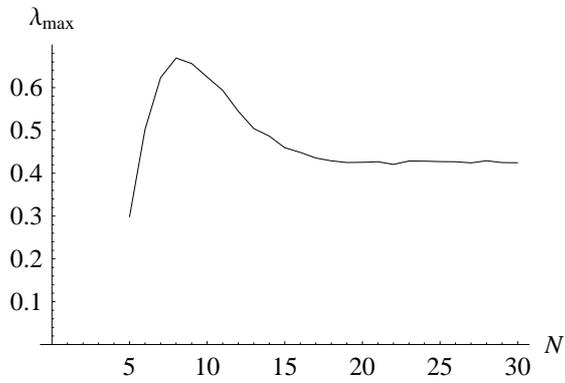


Рис. 3.31. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.005$

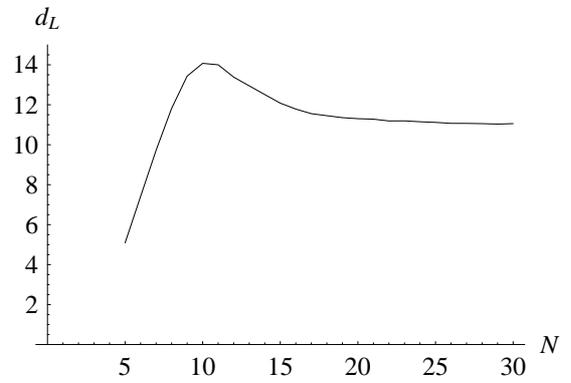


Рис. 3.32. $d_L(N)$ при $\mu = 0.005$

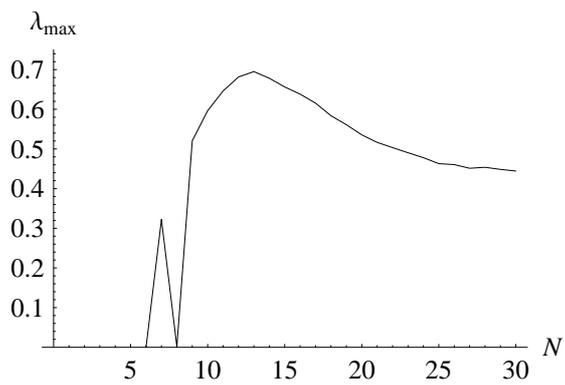


Рис. 3.33. $\lambda_{max}(N)$ при $\mu = 0.002$

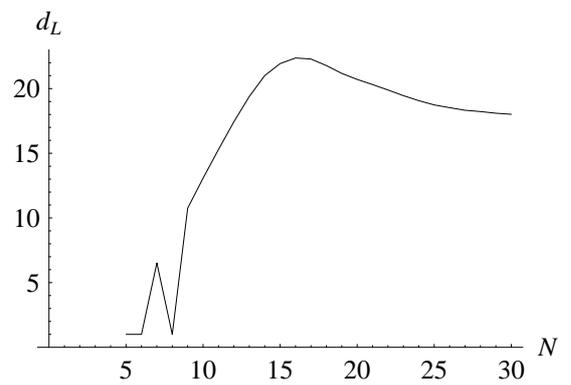


Рис. 3.34. $d_L(N)$ при $\mu = 0.002$

Заключение

Асимптотические методы, применяемые при анализе систем (3.1.4), (3.1.5) или (3.1.4), (3.1.6), дают укороченные системы фазовых уравнений (3.1.17), (3.1.18) и (3.1.17), (3.1.19). Относительно грубых решений этих систем доказаны теоремы 3.1 и 3.3 о соответствии, однако в случае, когда нормализованные системы имеют хаотический аттрактор, доказательство такого утверждения сопряжено с существенными трудностями, если вообще возможно, поскольку соответствующий аттрактор может оказаться не гиперболическим. Именно поэтому в такой ситуации необходим численный эксперимент. С этой точки зрения результаты выполненных в разделе 3.2 вычислений существенно дополняют утверждения раздела 3.1. Важно заметить, что результаты, полученные в 3.1.1 и касающиеся краевой задачи на отрезке, полностью соответствуют численному эксперименту из пункта 3.2.1. В случае же задачи на окружности система для разностей фаз (3.1.17), (3.1.19) оказывается негрубой и ее решения никак не соотносятся с результатами численного анализа. При этом, для краевой задачи как на отрезке, так и на окружности численный эксперимент демонстрирует одни и те же тенденции в изменения старшего ляпуновского показателя и размерности аттрактора системы при уменьшении параметра μ .

Основной вывод по результатам данной главы состоит в том, что при уменьшении коэффициента диффузии μ в задачах (3.2.1), (3.2.2) и (3.2.1), (3.2.3) возникают хаотические колебательные режимы растущей ляпуновской размерности. Асимптотический анализ при этом позволяет в некоторых случаях прояснить структуру бифурцирующих режимов.

Глава 4.

Нелинейные волновые уравнения и их дискретные аналоги

Введение

Цепочки и решетки связанных генераторов с сосредоточенными параметрами являются полезными физически содержательными моделями, позволяющими выяснить ряд закономерностей развития пространственно-временного хаоса в сплошных средах [2, 21, 22]. При этом, как правило, в качестве отдельно взятого звена цепочки (парциальной системы) рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным устойчивым циклом. В предыдущих главах рассматривались такие системы с диффузионной (глава 3) и однонаправленной связью (глава 2). Было установлено, что в обоих случаях в соответствующей системе может наблюдаться хаотическое поведение, обусловленное коллективным взаимодействием парциальных осцилляторов. Предположим теперь, что в цепочках (2.1.5) или (3.1.4) каждое звено заменено колебательной системой с распределенными параметрами, каждая из которых имеет достаточно большое или счетное число устойчивых циклов (т.е. реализуется феномен буферности в простейшем его варианте). В итоге получим систему, имеющую (при определенных дополнительных условиях) достаточно большое число сосуществующих хаотических аттракторов. Как будет показано ниже при рассмотрении конкретных примеров, для того, чтобы добиться требуемого эффекта, вовсе не обязательно брать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно де-

ляется в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством.

В случае однонаправленной связи рассматривается модельная система из трех связанных в кольцо обобщенных уравнений Шредингера с кубической нелинейностью. Данная задача моделируется бесконечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Во втором пункте данной главы устанавливается, что при изменении управляющего параметра в такой системе могут наблюдаться две принципиально различные ситуации:

- 1) сосуществует счетное число конечномерных хаотических аттракторов, т. е. имеет место хаотическая буферность;
- 2) существует хаотический аттрактор бесконечной размерности.

В третьей части главы предлагается феноменологическая модель развития турбулентности, представляющая собой нелинейное уравнение Клейна – Гордона, возмущенное неконсервативными добавками. С помощью сочетания аналитических и численных методов устанавливается, что переход к турбулентности в этом уравнении может происходить как по сценарию Ландау, так и в соответствии со сценарием Ландау – Селла. Первый из упомянутых сценариев связан, как известно, с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных тором все более высоких размерностей. Во втором же случае имеем дело с хаотическим аттрактором, ляпуновская размерность которого при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет. Как и в двух предыдущих разделах, изучаемая краевая задача моделируется цепочкой связанных колебательных систем, на основе численного анализа которых делается вывод о наличии у системы бифуркаций по сценарию Ландау – Селла.

4.1. Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов

В данном разделе предлагается общая идея, руководствуясь которой можно получать различные цепочки связанных осцилляторов с хаотической буферностью. В качестве конкретных примеров рассматриваются цепочки диффузионно связанных обобщенных кубических уравнений Шредингера и нелинейных телеграфных уравнений.

4.1.1. Постановка задачи

Приступим к математическому описанию проблемы. В качестве парциальной системы при построении интересующей нас цепочки осцилляторов возьмем обобщенное кубическое уравнение Шрёдингера и дополним его граничными условиями 2π -периодичности. В итоге получим краевую задачу

$$\dot{u}_t + i\sigma_0 u_{xx} = u - d|u|^2 u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (4.1.1)$$

где $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция, $d = 1 + ic_0$, а c_0, σ_0 — положительные параметры, связанные неравенством

$$\sigma_0 > 2c_0. \quad (4.1.2)$$

Приведенную задачу будем рассматривать как эволюционную систему в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, где E — гильбертово пространство 2π -периодических функций класса W_2^2 . Подчеркнем, что выбранная таким способом парциальная система обладает требуемым свойством буферности. Действительно, как показывает несложная проверка, краевая задача (4.1.1) имеет счетное число автомодельных циклов (бегущих волн)

$$u = \exp[i(\sigma_0 n^2 - c_0)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.1.3)$$

которые являются устойчивыми (в метрике $E \times E$) при условии (4.1.2) и неустойчивыми при выполнении строго противоположного неравенства. Рассмотрим, далее, цепочку диффузионно связанных осцилляторов (4.1.1), т.е. систему вида

$$\dot{u}_t + i\sigma_0 u_{xx} + i\mu \Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (4.1.4)$$

где $u = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_N)$, $|u|^2 = \operatorname{colon}(|u_1|^2, \dots, |u_N|^2)$; $u_j = u_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$ — комплекснозначные функции; натуральное $N > 5$ произвольно фиксировано; $\mu > 0$ — малый параметр; $*$ — операция покомпонентного умножения векторов, а $N \times N$ -матрица связи Λ является трехдиагональной матрицей с единичными над- и поддиагоналями и главной диагональю $(-1, -2, \dots, -2, -1)$. Как будет установлено ниже, при выполнении условия (4.1.2) эта система имеет счетное число устойчивых N -мерных торов, причем при некоторых дополнительных ограничениях на параметр c_0 каждый из них является носителем хаотического аттрактора.

4.1.2. Основной результат

Обратимся к отвечающей задаче (4.1.4) точечной модели, т.е. к системе

$$\dot{u} + i\mu\Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad (4.1.5)$$

и убедимся в том, что при всех достаточно малых $\mu > 0$ она имеет глобально экспоненциально устойчивый N -мерный инвариантный тор. Для этого сначала сделаем в ней замены $u_j = \rho_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, \dots, N$, где $\rho_j > 0$, $0 \leq \tau_j < 2\pi \pmod{2\pi}$. В результате она преобразуется к виду

$$\dot{\rho}_j = \rho_j - \rho_j^3 + \mu [\rho_{j+1} \sin \alpha_j - \rho_{j-1} \sin \alpha_{j-1}], \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1.6)$$

$$\dot{\alpha}_j = -c_0(\rho_{j+1}^2 - \rho_j^2) - \mu \left[\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \cos \alpha_{j+1} + \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} - \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \cos \alpha_j - \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \cos \alpha_{j-1} \right], \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1.7)$$

$$\dot{\tau}_N = -c_0 \rho_N^2 - \mu \left[\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} \cos \alpha_{N-1} - 1 \right], \quad (4.1.8)$$

где $\tau_0 = \tau_1$, $\tau_{N+1} = \tau_N$, $\rho_0 = \rho_1$, $\rho_{N+1} = \rho_N$, $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Система (4.1.6) – (4.1.8) с точностью до замены переменных совпадает с системой (3.1.12), что позволяет воспользоваться результатами предыдущего параграфа. Как и в системе (3.1.12), у системы (4.1.6)-(4.1.8) интересующий нас глобально устойчивый инвариантный тор заведомо существует при $\mu = 0$. Действительно, в этом случае он задается равенствами $\rho_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, а поведение траекторий на нем описывают уравнения $\dot{\alpha}_j = 0$ $j = 1, \dots, N - 1$, $\dot{\tau}_N = -c_0$. Как и ранее, из общих результатов работ [111] и [89] следует, что указанный тор сохраняется у системы (4.1.6)-(4.1.8) и при всех малых $\mu > 0$, причем теперь он имеет вид

$$\rho_j = 1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1.9)$$

где достаточно гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по α_k , $k = 1, \dots, N - 1$, функции ψ_j таковы, что

$$\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = \frac{1}{2}(\sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N \quad (4.1.10)$$

Что же касается движений на данном торе, то они описываются системой

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_j &= \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \\ \dot{\tau}_N &= -c_0 + \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu),\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

получающейся из (4.1.7), (4.1.8) при учете соотношений (4.1.9). Отметим еще вытекающие из (4.1.10) равенства

$$\begin{aligned}\Phi_j \Big|_{\mu=0} &= -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \\ & \quad j = 1, \dots, N-1; \\ \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) &= c_0 \sin \alpha_{N-1} - \cos \alpha_{N-1} + 1.\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

Лемма 4.1. *Найдется такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (4.1.4) имеет пространственно однородный (не зависящий от x) инвариантный тор*

$$u_j = \exp(i\tau_j) [1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)], \quad j = 1, \dots, N,\tag{4.1.13}$$

движения на котором задаются системой (4.1.11). Данный тор экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) в метрике фазового пространства $E^{2N} = E \times \dots \times E$ при $\sigma_0 - 2c_0 > 0 (< 0)$.

В части существования лемма уже доказана, поскольку найденный выше инвариантный тор (4.1.13) системы (4.1.5) является одновременно и пространственно однородным тором задачи (4.1.4). Для исследования же его свойств устойчивости достаточно положить $\mu = 0$. Действительно, в этом случае рассматриваемый тор представляет собой произведение N независимых циклов $u_j = \exp(-ic_0 t)$, $j = 1, \dots, N$, каждый из которых устойчив в своей парциальной системе

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad u_j(t, x + 2\pi) = u_j(t, x)$$

при выполнении условия (4.1.2) и неустойчив при строгом его нарушении. Проблему нахождения других аттракторов задачи (4.1.4), отличных от однородного тора (4.1.13), существенно облегчает так называемый принцип самоподобия [90]. Суть этого принципа заключается в следующем. Выполним в (4.1.4) замену $u(t, x) = T_n[v(t, x)]$, где

$$T_n[v(t, x)] = v(t, 2\sigma_0 n t + x) \exp[i(\sigma_0 n t + n x)],\tag{4.1.14}$$

n — произвольное целое число, а затем перейдем к новой пространственной переменной $\varphi = 2\sigma_0 n t + x$. В результате для функции $v = v(t, \varphi)$ с точностью до обозначений получим прежнюю краевую задачу

$$v_t + i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + i\mu\Lambda v = v - d|v|^2 * v, \quad v(t, \varphi + 2\pi) \equiv v(t, \varphi).$$

Иными словами, оператор (4.1.14) переводит решение $u(t, x)$ задачи (4.1.4) в решение $T_n[u(t, x)]$ той же самой краевой задачи. Из принципа самоподобия вытекают два важных следствия. Во-первых, пусть в фазовом пространстве E^{2N} краевой задачи (4.1.4) имеется компактное множество \mathcal{A} , инвариантное относительно ее траекторий

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) : \\ & \operatorname{Re} u = (\operatorname{Re} u_1, \dots, \operatorname{Re} u_N), \operatorname{Im} u = (\operatorname{Im} u_1, \dots, \operatorname{Im} u_N) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

(как обычно, это означает, что если $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in \mathcal{A}$ при $t = 0$, то аналогичное включение справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$). Тогда, применяя к каждой траектории (4.1.15) из \mathcal{A} оператор

$$\tilde{T}_n : (\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) \rightarrow (\operatorname{Re} T_n[u(t, x)], \operatorname{Im} T_n[u(t, x)]), \quad (4.1.16)$$

получим серию множеств

$$\mathcal{A}_n = \tilde{T}_n(\mathcal{A}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.1.17)$$

также инвариантных для траекторий задачи (4.1.4). Во-вторых, если в предыдущем случае \mathcal{A} — аттрактор краевой задачи (4.1.4), то ее аттракторами будут и все множества (4.1.17). Таким образом, если известен какой-либо один из аттракторов \mathcal{A} задачи (4.1.4), то "тиражируя" его с помощью оператора (4.1.16), получаем счетное их число.

Возвращаясь к интересующей нас проблеме, в качестве множества \mathcal{A} возьмем инвариантный тор (4.1.13) задачи (4.1.4) и применим к нему описанный выше принцип самоподобия. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.1. *При выполнении условия (4.1.2) существует такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при каждом $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (4.1.4) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых инвариантных торов*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n = \{ u_j = \exp[i(\tau_j + nx)] (1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), \\ j = 1, \dots, N \}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

движения на которых описываются системами

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_j &= \mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \dot{\tau}_N &= \sigma_0 n^2 - c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)\end{aligned}\quad (4.1.19)$$

где, подчеркнем, функции ψ_j, Φ_j, Ψ те же, что и в (4.1.9), (4.1.11).

Убедимся, наконец, что при определенном выборе параметра c_0 каждый тор (4.1.18) является носителем хаотического аттрактора. С этой целью рассмотрим отщепляющуюся от (4.1.19) систему для $\alpha_j, j = 1, \dots, N-1$, выполним в ней замену времени $\mu t \rightarrow t$ и отбросим в правых частях полученной системы слагаемые порядка малости μ и выше. В результате с учетом равенств (4.1.12) она преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_j &= -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2\sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \\ &\quad + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1,\end{aligned}\quad (4.1.20)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$.

При $c_0 > 0$ система (4.1.20) с помощью замены времени $c_0 t \rightarrow t$ и обозначения $1/c_0 = \kappa$ приводится к системе (3.1.17), (3.1.18).

Вычисления, сделанные в пункте 3.1 третьей главы, показали, что с ростом N ляпуновская размерность хаотического аттрактора системы (4.1.20) возрастает примерно по линейному закону.

4.1.3. Случай граничных условий Неймана

В этом пункте придадим полученным выше результатам некоторую общность. А именно, проиллюстрируем реализуемость феномена хаотической буферности в рамках краевой задачи

$$u_t + iu_{xx} + i\varepsilon\mu\Lambda u = \varepsilon[u - d|u|^2 * u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (4.1.21)$$

где $\varepsilon = 1/\sigma_0$, получающейся из (4.1.4) после нормировки времени $\sigma_0 t \rightarrow t$ и замены граничных условий. Наиболее просто динамические свойства краевой задачи (4.1.21) выявляются при дополнительном предположении о малости ε , которое всюду ниже считаем выполненным. Действительно, рассмотрим сначала отвечающую цепочке (4.1.21) парциальную систему, т.е. краевую задачу

$$u_t + iu_{xx} = \varepsilon[u - d|u|^2 u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (4.1.22)$$

в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, $E = \overset{\circ}{W}_2^2$, где $\overset{\circ}{W}_2^2$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Как установлено в монографии [84], при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ краевая задача (4.1.22) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых (в метрике $E \times E$) автомодельных циклов

$$u_n(t, x, \varepsilon) = u_n(x, \varepsilon) \exp[i\omega_n(\varepsilon)t], \quad n > 1, \quad \omega_n(\varepsilon) \in \mathbb{R}, \quad (4.1.23)$$

где достаточно гладкие по своим переменным функции u_n, ω_n таковы, что равномерно по $n > 1, x \in [0, \pi]$

$$u_n(x, \varepsilon) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cos nx + O(\varepsilon), \quad \omega_n(\varepsilon) = n^2 - c_0\varepsilon + O(\varepsilon). \quad (4.1.24)$$

Циклы (4.1.23), (4.1.24) играют здесь ту же роль, что и бегущие волны (4.1.3) в случае краевой задачи (4.1.4). А именно, как будет показано ниже, устойчивые циклы $u_j = u_n(t, x, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, N$ с одинаковыми номерами n , существующие при $\mu = 0$ в парциальных системах

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \varepsilon [u_j - d|u_j|^2 u_j], \quad \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0,$$

при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы. При этом, что самое главное, количество таких торов счетно и при надлежащем выборе параметра c_0 каждый из них содержит хаотический аттрактор. Последовательность дальнейших действий аналогична изложенному в п. 4.1.2: сначала устанавливается существование одного иницирующего инвариантного тора, а после этого осуществляется его "тиражирование" с помощью некоторого аналога описанного выше принципа самоподобия.

Остановимся сначала на алгоритмической части проблемы. Точнее говоря, убедимся, что система (4.1.21) имеет формальное интегральное многообразие вида

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \varepsilon^2 v_2(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \dots, \quad (4.1.25)$$

где $\xi = \operatorname{colon}(\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\bar{\xi} = \operatorname{colon}(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N)$, а комплексные параметры ξ_j , $j = 1, \dots, N$ на многообразии эволюционируют во времени по закону

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon \Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \varepsilon^2 \Delta_2(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \dots \quad (4.1.26)$$

Предполагаем еще, что вектор-функции $v_k, \Delta_k, k \geq 1$ удовлетворяют при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ дополнительным требованиям

$$v_k(x, \mu, \exp(i\alpha)\xi, \exp(-i\alpha)\bar{\xi}) = \exp(i\alpha) v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (4.1.27)$$

$$\Delta_k(\exp(i\alpha)\xi, \exp(-i\alpha)\bar{\xi}, \mu) = \exp(i\alpha)\Delta_k(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (4.1.28)$$

а также условию

$$\int_0^\pi v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) \cos x dx = 0. \quad (4.1.29)$$

Итак, подставим соотношения (4.1.25), (4.1.26) в (4.1.21) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате на первом шаге для отыскания v_1 приходим к краевой задаче

$$i \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} \right) + i \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (4.1.30)$$

Ее анализ существенно опирается на тот факт, что фигурирующие в (4.1.25) коэффициенты v_k должны удовлетворять равенствам (4.1.27). Действительно, дифференцируя указанные равенства по α и полагая затем $\alpha = 0$, убеждаемся, что

$$\frac{\partial v_k}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_k}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} = v_k, \quad k \geq 1. \quad (4.1.31)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что интересующая нас краевая задача (4.1.30) преобразуется к виду

$$iLv_1 = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \quad \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.1.32)$$

где $Lv = d^2v/dx^2 + v$, а переменные $\xi, \bar{\xi}$ рассматриваются как параметры. Исследование задачи (4.1.32) уже не вызывает затруднений и проводится по стандартной схеме: сначала из условия ее разрешимости определяем функцию

$$\Delta_1 = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4} d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (4.1.33)$$

а затем находим и само решение v_1 , для которого с учетом соответствующего равенства (4.1.29) получается формула

$$v_1 = -\frac{id}{32} \xi * \bar{\xi} * \xi \cos 3x. \quad (4.1.34)$$

Подчеркнем, что функции (4.1.33), (4.1.34) обладают требуемыми свойствами (4.1.27), (4.1.28) и, в частности, для v_1 справедливо соотношение

(4.1.31) при $k = 1$. Поэтому сделанный выше переход от задачи (4.1.30) к (4.1.32), носивший условный характер, оказывается правомерным. Отметим также, что хотя продолжение алгоритма нахождения коэффициентов рядов (4.1.25), (4.1.26) не вызывает затруднений, но для наших целей достаточно уже имеющейся информации.

На следующем этапе обратимся к построенной выше системе первого приближения

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon\Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu)$$

на многообразии (4.1.25) и выполним в ней последовательно замены $\xi \exp(-it) \rightarrow \xi$, $\bar{\xi} \exp(it) \rightarrow \bar{\xi}$ и $\varepsilon t \rightarrow t$. В результате приходим к системе

$$\dot{\xi} = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4}d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (4.1.35)$$

которая с точностью до нормировок и переобозначений совпадает с (4.1.5). А отсюда и из содержащегося в п. 4.1.2 анализа заключаем, что система (4.1.35) имеет глобально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\xi_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) (1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1.36)$$

где функции ψ_j те же, что и в (4.1.9).

Подведем некоторый итог. Из проделанных построений следует, что равенством

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (4.1.37)$$

в котором учтены соотношения (4.1.36), задается приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной задачи (4.1.21), а система уравнений на этом торе имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \varepsilon\mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \dot{\tau}_N &= 1 - \varepsilon c_0 + \varepsilon\mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

где функции Φ_j, ψ заимствованы из (4.1.11). Существование соответствующего точного инвариантного тора с главной асимптотикой (4.1.36) — (4.1.38) вытекает из общих результатов работы [89]. А именно, справедливо следующее утверждение, представляющее собой аналог леммы 4.1.

Лемма 4.2. *Найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (4.1.21) имеет экспоненциально*

орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\xi_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos x + \varepsilon H_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu, x) \right], \quad j = 1, \dots, N; \quad (4.1.39)$$

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon\mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon G_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu) \right], \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (4.1.40)$$

$$\dot{\tau}_N = \sigma_0 n^2 - c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon^2\Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu), \quad (4.1.41)$$

где все функции достаточно гладко зависят от своих переменных и являются 2π -периодическими по α_k , $k = 1, \dots, N-1$.

Сформулированная лемма нуждается в некоторых пояснениях. Отметим, во-первых, что система (4.1.21) не меняется при замене $\exp(i\alpha)u \rightarrow u$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Именно поэтому правые части формул (4.1.39) оказываются пропорциональными $\exp(i\tau_j)$, а все остальные фигурирующие в (4.1.39) - (4.1.41) функции зависят не от самих фазовых переменных τ_j , $j = 1, \dots, N$, а от их разностей $\alpha_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Во-вторых, при $\mu = 0$ тор (4.1.39) - (4.1.41) представляет собой прямое произведение N одинаковых устойчивых циклов $u_j = u_1(t, x, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, N$ (см. (4.1.23), (4.1.24) при $n = 1$), т.е. записывается в виде

$$u_j = u_1(\tau_j, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau}_j = \omega_1(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.1.42)$$

Тем самым становится понятной причина его устойчивости при малых $\mu > 0$, а также проясняется происхождение множителя μ в правых частях системы (4.1.40). Инвариантный тор, доставляемый леммой 4.2, является искомым иницирующим тором. Процедура же его "тиражирования" в данном случае такова. Пусть $u = u(t, x, \varepsilon)$ — произвольное решение краевой задачи (4.1.21). Продолжим его по переменной x сначала на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, при любом натуральном n функция $u(n^2t, nx, \varepsilon/n^2)$ также будет решением задачи (4.1.21). Применяя, далее, эту процедуру при каждом n ко всем решениям, лежащим на торе (4.1.39) - (4.1.41), получим счетное число N -мерных инвариантных торов. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. При всех достаточно малых независимых $\varepsilon, \mu > 0$ краевая задача (4.1.21) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых N -мерных инвариантных торов

$$u_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos nx + \frac{\varepsilon}{n^2} H_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu, nx) \right], \quad j = 1, \dots, N; \quad (4.1.43)$$

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon\mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon}{n^2} G_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu) \right], \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (4.1.44)$$

$$\dot{\tau}_N = n^2 - \varepsilon c_0 + \varepsilon\mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon^2}{n^2} \Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu), \quad (4.1.45)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а функции $\psi_j, H_j, G_j, \Psi, \Omega$ взяты из (4.1.39) - (4.1.41).

Причина, по которой все торы (4.1.43) - (4.1.45) оказываются устойчивыми, та же самая, что и в случае тора (4.1.39) - (4.1.40). Действительно, при $\mu = 0$ эти торы принимают аналогичный (4.1.42) вид

$$u_j = u_n(\tau_j, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau}_j = \omega_n(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N,$$

где функции $u_n, \omega_n, n \geq 1$ заимствованы из (4.1.23). Далее, как показано в [84], циклы (4.1.23) краевой задачи (4.1.22) обладают свойством равномерной устойчивости, т.е. существует такая не зависящая от ε и $n \geq 1$ постоянная $\gamma_0 > 0$, что все характеристические показатели этих циклов (за исключением, естественно, простых нулевых) лежат в комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq -\gamma_0\varepsilon\}$. И наконец, опираясь на развитую в [84] методику, можно показать, что свойство равномерной устойчивости, имеющее место для торов (4.1.43) - (4.1.45) при $\mu = 0$, сохраняется и при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Из проделанного анализа следует, что краевая задача (4.1.21) обладает интересующим нас свойством хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к системе (4.1.44), выполним в ней замену $\varepsilon\mu t \rightarrow t$ и отбросим асимптотически малые (равномерно по $n \geq 1$) слагаемые. В итоге она примет вид (4.1.20). Таким образом, остается сослаться на результаты численного счета, приведенные в разделе 3.1.

4.1.4. Построение цепочек с хаотической буферностью

Остановимся еще раз на общей идее конструирования цепочек осцилляторов с хаотической буферностью. Предположим, что в качестве парциальной системы выбрано некоторое эволюционное уравнение

$$\dot{v} = f(v, \lambda) \quad (4.1.46)$$

в вещественном банаховом пространстве V , правая часть которого зависит от вспомогательного параметра λ произвольной природы, принимающего значения в множестве Σ . Предположим, далее, что в уравнении (4.1.46) реализуется феномен буферности: сосуществуют различные устойчивые циклы

$$\begin{aligned} v &= v_{(m)}(\tau), \quad \tau = \omega_{(m)}t, \quad \omega_{(m)} > 0, \\ v_{(m)}(\tau + 2\pi) &= v_{(m)}(\tau), \quad m = 1, \dots, m_0, \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

количество $m_0 = m_0(\lambda)$ которых может быть сделано сколь угодно большим за счет подходящего выбора $\lambda \in \Sigma$. И наконец, рассмотрим цепочку диффузионно связанных осцилляторов (4.1.46), т.е. систему вида

$$v_j = f(v_j, \lambda) + \mu A(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.1.48)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $v_0 = v_1$, $v_{N+1} = v_N$, $A : V \rightarrow V$ — ограниченный линейный оператор.

При $\mu = 0$ система (4.1.48) имеет, очевидно, устойчивые N -мерные инвариантные торы

$$v_j = v_{(m)}(\tau_j), \quad \dot{\tau}_j = \omega_{(m)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

составленные из одинаковых циклов (4.1.47). В случае малых $\mu > 0$ эти торы, естественно, сохраняются, а так как они близки к резонансным, то движения на них описываются некоторыми системами для разностей фаз $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$, подобными системе (4.1.20). Как показано выше на конкретных примерах, все эти системы могут одновременно иметь хаотические аттракторы и, более того, количество $m_0 = m_0(\lambda)$ самих инвариантных резонансных торов (носителей хаоса) за счет выбора $\lambda \in \Sigma$ может быть сделано сколь угодно большим или даже счетным. А это как раз и означает, что в системе (4.1.48) возможна хаотическая буферность. Ситуация, с которой сталкиваемся в случае цепочек осцилляторов (4.1.4) и (4.1.21), может показаться излишне идеализированной, поскольку соответствующие им парциальные системы имеют счетное число устойчивых циклов. Однако данное

свойство вовсе не является необходимым для реализации феномена хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве парциальной системы возьмем простейшее нелинейное телеграфное уравнение с граничными условиями Неймана, т.е. краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - a^2 u_{xx} + u^2 u_t - bu^3 = 0, \quad u_x \Big|_{x=0} = u_x \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.1.49)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$; $a, b = \text{const} > 0$.

Из содержащихся в [84] результатов вытекает существование для каждого натурального m_0 такого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (4.1.49) имеет экспоненциально орбитально устойчивые (в метрике фазового пространства $(u, u_t) \in W_2^2(0, \pi) \times W_2^1(0, \pi)$) циклы

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_m(\tau, x, \varepsilon), \quad d\tau/dt = \omega_m(1 + \varepsilon \delta_m(\varepsilon)), \quad m = 1, 2, \dots, m_0. \quad (4.1.50)$$

Здесь $\omega_m = \sqrt{1 + a^2 m^2}$, а достаточно гладкие по своим переменным функции $\delta_m(\varepsilon)$, $u_m(\tau, x, \varepsilon)$, $u_m(\tau + 2\pi, x, \varepsilon) \equiv u_m(\tau, x, \varepsilon)$ удовлетворяют равенствам

$$u_m(\tau, x, 0) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos \tau \cos mx, \quad \delta_m(0) = -\frac{3b}{2\omega_m}.$$

Таким образом, в краевой задаче (4.1.49) наблюдается явление буферности, но количество сосуществующих устойчивых циклов (4.1.50) здесь заведомо конечно (как следует из [84], оно имеет порядок ε^{-1} при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Рассмотрим, далее, цепочку связанных осцилляторов (4.1.49), т.е. систему вида

$$L(u_j) = \varepsilon \mu (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad (4.1.51)$$

где $j = 1, \dots, N$, через $L(u)$ обозначена левая часть уравнения из (4.1.49), $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$, а $\mu > 0$ — вспомогательный малый параметр. Используя развитую выше технику, можно показать, что устойчивые циклы (4.1.50) с одинаковыми номерами m , существующие при $\mu = 0$ в соответствующих парциальных системах, при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы, а поведение решений на этих торах в первом приближении описывается системами

$$\dot{\alpha}_j = -c_m (\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (4.1.52)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $c_m = 3b/(2\omega_m)$.

Обращаем внимание, что поскольку нас интересует феномен хаотической буферности, то номер m в (4.1.52), в принципе, должен принимать любые сколь угодно большие значения. Поэтому рассмотрим сразу предельный случай $m = \infty$, в котором получается система

$$\alpha_j = \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N - 1. \quad (4.1.53)$$

Данная система оказывается консервативной, так как не меняется при заменах $t \rightarrow -t$, $\alpha_j \rightarrow -\alpha_j$, и, что самое главное, при каждом $N \geq 5$ она имеет хаотические движения. Например, при $N = 5$ посредством численного анализа в ней удалось обнаружить хаотические режимы с ляпуновскими показателями $\lambda_0, 0, 0, -\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$ в зависимости от выбора начальных условий может принимать различные значения: 0.135, 0.16, 0.176, 0.252, 0.258, 0.272 и т.д. При переходе от системы (4.1.53) к исходной системе (4.1.52) некоторые из упомянутых выше хаотических движений "выживают". В частности, система (4.1.52) при $N = 5$ имеет хаотические аттракторы в широком диапазоне изменения $\kappa = 1/c_m$ (см. раздел 3.1).

А это, в свою очередь, означает, что в цепочке осцилляторов (4.1.51) наблюдается феномен хаотической буферности.

4.2. Об одной модели явления хаотической буферности

В предыдущем разделе предложена общая идея, руководствуясь которой, можно получать различные цепочки связанных осцилляторов с хаотической буферностью. В качестве конкретных примеров в 4.1 рассматривались цепочки диффузионно связанных обобщенных кубических уравнений Шредингера (4.1.1) и нелинейных телеграфных уравнений (4.1.49). В данном разделе, в продолжение начатых выше исследований, предлагается некоторая модельная бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой в зависимости от выбора управляющего параметра может наблюдаться как хаотическая буферность, так и принципиально новый динамический эффект — существование единственного хаотического аттрактора бесконечной размерности. В качестве исходной модели ниже рассматривается цепочка из трех однонаправленно связанных в кольцо колебательных систем с бесконечномерным фазовым пространством. В

связи с этим, результаты касающиеся одномодовых аттракторов этой системы примыкают к результатам, полученным в главе 2 для конечномерных осцилляторов.

4.2.1. Постановка задачи

Для вывода интересующей нас бесконечномерной системы обратимся к цепочке кубических уравнений Шредингера, имеющей вид

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \varepsilon [iu_{k-1} + d|u_k|^2 u_k] = 0, \quad (4.2.1)$$

$$u_k \Big|_{x=0} = u_k \Big|_{x=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.2)$$

где $u_k = u_k(t, x)$ — комплекснозначные функции, причем $u_0(t, x) \equiv u_3(t, x)$. Всюду ниже считаем, что $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $d = 1 + ic_0$, а $c_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma_0 > 0$ — некоторые постоянные порядка единицы. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $\operatorname{Re} u_k(0, x)$, $\operatorname{Im} u_k(0, x)$, $k = 1, 2, 3$) задачи (4.2.1), (4.2.2) возьмем $E^6 = E \times \dots \times E$, где $E = \overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi)$, а через $\overset{\circ}{W}_2^2$ обозначено, как обычно, соответствующее соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (4.2.2). Для отыскания возможных автоколебательных режимов системы (4.2.1), (4.2.2) воспользуемся изложенной в [91, 115] методикой. А именно, подставим в нее асимптотические ряды по целым степеням ε :

$$u_k = u_{k,0}(t, \tau, x) + \varepsilon u_{k,1}(t, \tau, x) + \dots, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.3)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $u_{k,j}$, $j \geq 0$ — формальные тригонометрические ряды переменной t , причем

$$u_{k,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\sigma_0 n^2 t) z_{n,k}(\tau) \sin nx, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.4)$$

а z_{nk} , $n \geq 1$, $k = 1, 2, 3$ — некоторые пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды колебаний. Приравнивая, далее, в (4.2.1), (4.2.2) коэффициенты при ε , для $u_{k,1}$ приходим к линейным неоднородным краевым задачам вида

$$\frac{\partial u_{k,1}}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_{k,1}}{\partial x^2} = g_k(t, \tau, x), \quad u_{k,1} \Big|_{x=0} = u_{k,1} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (4.2.5)$$

где $g_k = -\partial u_{k,0}/\partial \tau - [iu_{k-1,0} + d|u_{k,0}|^2 u_{k,0}]$, а переменная τ рассматривается как параметр.

Отметим, что получившиеся задачи (4.2.5) разрешимы в классе формальных тригонометрических рядов в том и только в том случае, когда в их правых частях g_k отсутствуют гармоники вида $\exp(i\sigma_0 n^2 t) \sin nx$, $n \geq 1$. Поэтому приравняем коэффициенты при упомянутых гармониках к нулю. В результате для определения фигурирующих в (4.2.3), (4.2.4) комплексных амплитуд $z_{n,k}$ после нормировок $\sqrt{3}z_{n,k}/2 \rightarrow z_{n,k}$ приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - d \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \right] z_{n,k}, \quad n \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.6)$$

где $z_{n,0} = z_{n,3}$, $n \geq 1$, а точка — дифференцирование по τ . Получившуюся систему (4.2.6), которая, собственно говоря, и является искомой математической моделью хаотической буферности, будем рассматривать в дальнейшем как самостоятельный объект исследования. Точнее говоря, поставим вопрос об аттракторах этой системы в фазовом пространстве \mathbb{Z} (над полем действительных чисел), состоящем из бесконечномерных векторов

$$z = (z_{1,1}, \bar{z}_{1,1}, z_{1,2}, \bar{z}_{1,2}, z_{1,3}, \bar{z}_{1,3}, \dots, z_{n,1}, \bar{z}_{n,1}, z_{n,2}, \bar{z}_{n,2}, z_{n,3}, \bar{z}_{n,3}, \dots) \quad (4.2.7)$$

с комплексными координатами, для которых конечна норма

$$\|z\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 |z_{n,k}|^2 \right)^{1/2} \quad (4.2.8)$$

(в этом случае построенная по вектору (4.2.7) функция (4.2.4) принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$ по переменной x). Заметим, что поскольку система (4.2.6) порождает эволюционное уравнение в пространстве \mathbb{Z} с ограниченной и гладкой по Фреше правой частью, то локальная однозначная разрешимость для нее задачи Коши с произвольным начальным условием из \mathbb{Z} вытекает из результатов монографии [65].

4.2.2. Основной результат

В первую очередь будем интересоваться существованием у системы (4.2.6) так называемых одномодовых аттракторов. В связи с этим фиксируем произвольно натуральное n и обозначим через Ω_n ее инвариантное

множество, задающееся равенством:

$$\Omega_n = \left\{ z \in \mathbb{Z} : z_{m,k} = 0, k = 1, 2, 3 \text{ при всех } m \neq n; \right. \\ \left. (z_{n,1}, z_{n,2}, z_{n,3}) = (v_1, v_2, v_3) \in \Omega \right\}, \quad (4.2.9)$$

где Ω — некоторый аттрактор шестимерной системы

$$\dot{v}_k = -iv_{k-1} - d|v_k|^2 v_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.10)$$

в которой $v_0 = v_3$. Подчеркнем, что в силу диссипативности системы (4.2.10) совокупность ее возможных аттракторов Ω заведомо не пуста. Отметим, кроме того, что система (4.2.10) с точностью до нормирующих замен совпадает с системой (2.1.11).

Перейдем к вопросу об устойчивости одномодовых инвариантных множеств (4.2.9) по "дополнительным" направлениям $z_{m,k}$, $m \neq n$. Проводя линеаризацию системы (4.2.6) на произвольной траектории $\{z_{m,k} = 0, z_{n,k} = v_k(\tau), k = 1, 2, 3\}$ из Ω_n , получаем счетное число одинаковых шестимерных линейных систем

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3}d|v_k(\tau)|^2 h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.11)$$

где $h_k = z_{m,k}$, $m \neq n$. Таким образом, вся счетная совокупность инвариантных множеств Ω_n , $n \geq 1$ устойчива или неустойчива одновременно и в случае устойчивости эти множества будем называть одномодовыми аттракторами.

Простейшими одномодовыми инвариантными множествами являются так называемые автомоделные циклы

$$\left\{ z \in \mathbb{Z} : z_{m,k} = 0 \text{ при } m \neq n, z_{n,k} = v_k^0 \exp(i\omega_0 \tau), \right. \\ \left. k = 1, 2, 3, \right\}, \quad n \geq 1, \quad (4.2.12)$$

где

$$v_1^0 = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \quad v_2^0 = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \quad v_3^0 = \xi_0, \quad \xi_0 = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2} - c_0\xi_0^2.$$

Что же касается устойчивости этих циклов, то здесь справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3. Автономные циклы (4.2.12) системы (4.2.6) экспоненциально орбитально устойчивы при условии $c_0 \in (c_-, c_+)$, где

$$c_- = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{23} \approx -3.19455, \quad c_+ = 12\sqrt{3} + 5\sqrt{23} \approx 44.7638, \quad (4.2.13)$$

и неустойчивы в случае $c_0 \in \mathbb{R} \setminus [c_-, c_+]$.

Для доказательства заметим, что циклам (4.2.12) отвечает система (4.2.11) с постоянной матрицей, собственные значения которой всегда имеют отрицательные действительные части. Таким образом, проблема сводится к исследованию устойчивости автономного цикла

$$v_k = v_k^0 \exp(i\omega_0 \tau), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.2.14)$$

вспомогательной системы (4.2.10). При анализе последней удобно перейти к полярным координатам $v_k = \xi_k \exp(i\varphi_k)$, $\xi_k > 0$, $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$, $k = 1, 2, 3$, поскольку от получающейся в итоге шестимерной системы для ξ_k, φ_k , $k = 1, 2, 3$ отщепляется пятимерная система для ξ_j , $j = 1, 2, 3$, $\psi_1 = \varphi_3 - \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, имеющая вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_3 \sin \psi_1 - \xi_1^3, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 \sin \psi_2 - \xi_2^3, \\ \dot{\xi}_3 &= -\xi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) - \xi_3^3, \\ \dot{\psi}_1 &= c_0(\xi_1^2 - \xi_3^2) + \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= c_0(\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \cos \psi_2 - \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

которая совпадает с системой (2.1.15), построенной в главе 2. Циклу (4.2.14) в системе (4.2.15) соответствует положение равновесия

$$O = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0) : \xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = \sqrt[4]{12}/2, \quad \psi_1^0 = \psi_2^0 = 2\pi/3, \quad (4.2.16)$$

условия устойчивости которого задаются формулами (2.1.19), откуда и следует утверждение теоремы.

Дальнейший анализ системы (4.2.6) проведем сначала для случая $c_0 \geq 0$. Из установленной выше теоремы следует, что при $0 \leq c_0 < c_+$ она имеет счетное число устойчивых автономных циклов (4.2.12), а при последующем увеличении параметра c_0 все эти циклы теряют устойчивость. На вопрос же о том, что происходит в ней при $c_0 > c_+$, позволяет ответить численное интегрирование вспомогательной системы (4.2.15), которое было выполнено для данной системы в п. 2.1.2.

На странице 68 представлен список наблюдающихся при увеличении параметра c_0 фазовых перестроек.

Приведенные в разделе 2.1.2 факты иллюстрирует показанный на рис. 2.1 график старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max} = \lambda_{max}(c_0)$ аттрактора системы (4.2.15), построенный на отрезке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом h по параметру c_0 , равным 0.05. Из вида данного графика можно заключить, что показатель $\lambda_{max}(c_0)$ с увеличением c_0 растет, хотя и не монотонно, и при всех $c_0 \geq 54.7$ заведомо отделен от нуля. Возвращаясь к исходной системе (4.2.6), заметим следующее. Любому аттрактору Ω_0 системы (4.2.15) соответствует аттрактор Ω системы (4.2.10) на единицу большей размерности, а значит, и счетное число одномодовых инвариантных множеств (4.2.9) системы (4.2.6). Напомним, далее, что за устойчивость всей совокупности этих множеств отвечает одна и та же линейная система (см. (4.2.11))

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3}d\xi_k^2(\tau)h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.17)$$

где $h_0 = h_3$, а $(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_3(\tau))$ — произвольная траектория из Ω_0 . Как показывает численный анализ, при всех рассмотренных выше значениях параметра c_0 старший ляпуновский показатель $\lambda_{max}^*(c_0)$ системы (4.2.17) оказывается отрицательным (см. рис. 4.1, где представлен его график, построенный на промежутке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом $h = 0.05$). Таким образом, по крайней мере при $54.7 \leq c_0 \leq 70$ исходная система (4.2.6) имеет счетное число одномодовых хаотических аттракторов (4.2.9), а значит, в ней реализуется требуемый феномен хаотической буферности.

Перейдем теперь к случаю $c_0 < 0$. Результаты анализа вспомогательной системы (4.2.15) представлены списком бифуркаций в разделе 2.1.2 на странице 68. Основной особенностью происходящих в этом случае фазовых перестроек является наличие на промежутке $-52.48 \leq c_0 \leq -11$ большого, возможно счетного, числа "окон" периодичности, т. е. промежутков, в которых хаос сменяется устойчивым циклом. Старший ляпуновский показатель положителен и отделен от нуля лишь при $c_0 \leq -52.6$.

Наглядное представление о перечисленных особенностях динамики дают графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max} = \lambda_{max}(c_0)$ аттрактора системы (4.2.15) и старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}^* = \lambda_{max}^*(c_0)$ системы (4.2.17), показанные на рис. 4.2 и 4.3 соответственно (построение данных графиков проводилось на отрезке $-70 \leq c_0 \leq -40$ по точкам с шагом 0.05). Из их вида следует, что при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра c_0 одномодовые хаотические инвариантные множества (4.2.9) у системы (4.2.6) хотя и существуют, но неустойчивы.

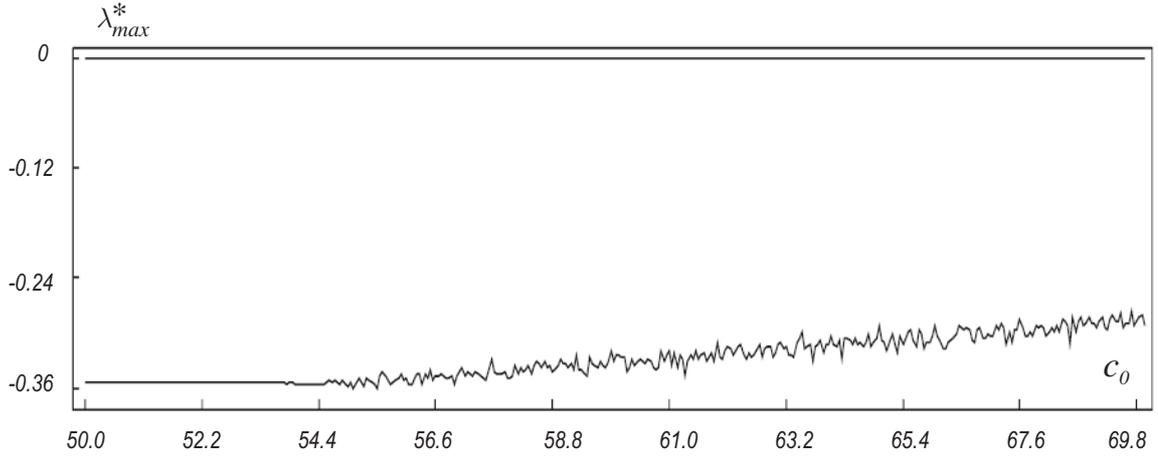


Рис. 4.1. $\lambda_{max}^*(c_0)$

4.2.3. Выводы

Просуммируем полученные результаты. Нетрудно увидеть, что при достаточно большом $R > 0$ выполняется неравенство $\dot{V}(z)\Big|_{\|z\|=R} < 0$, где $V(z) = \|z\|^2$, $\|*\|$ — норма (4.2.8), $\dot{V}(z)$ — производная в силу системы (4.2.6). А это означает, что наша система является диссипативной и, следовательно, мы можем определить для нее максимальный аттрактор A_{max} по формуле

$$A_{max} = \bigcap_{t>0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{Z} : \|z\| < R\}, \quad (4.2.18)$$

где φ^t — фазовый поток, порожденный системой (4.2.6) в пространстве \mathbb{Z} . Подчеркнем, что множество (4.2.18) заведомо некомпактно, поскольку содержит счетное число инвариантных одномерных подмножеств (4.2.9). Напомним, далее, что при достаточно больших c_0 все эти подмножества в свою очередь оказываются аттракторами, причем хаотическими, т. е. наблюдается интересующий нас феномен хаотической буферности. Для того чтобы разобраться со структурой множества (4.2.18) в случае отрицательных и достаточно больших по модулю значениях c_0 , обратимся к конечномерным системам

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - d \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \right] z_{n,k}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.2.19)$$

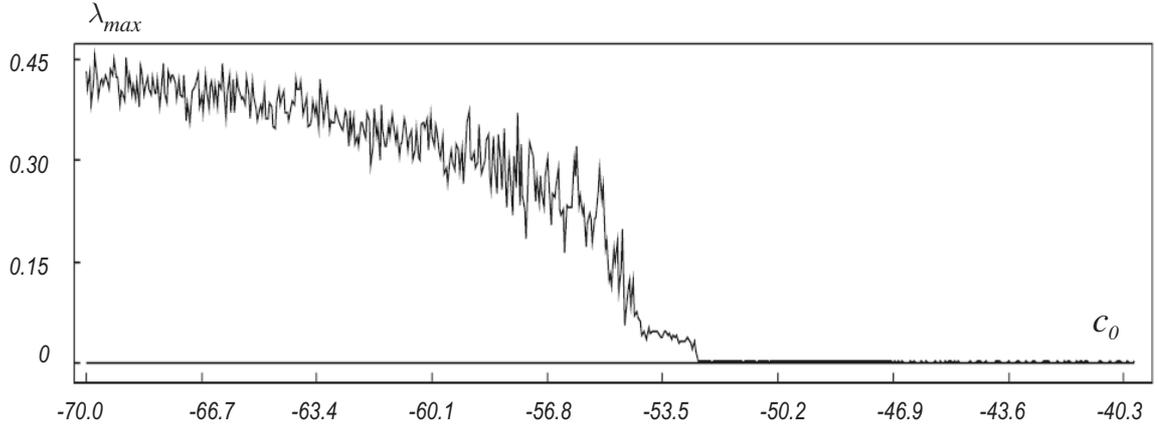


Рис. 4.2. $\lambda_{max}(c_0)$

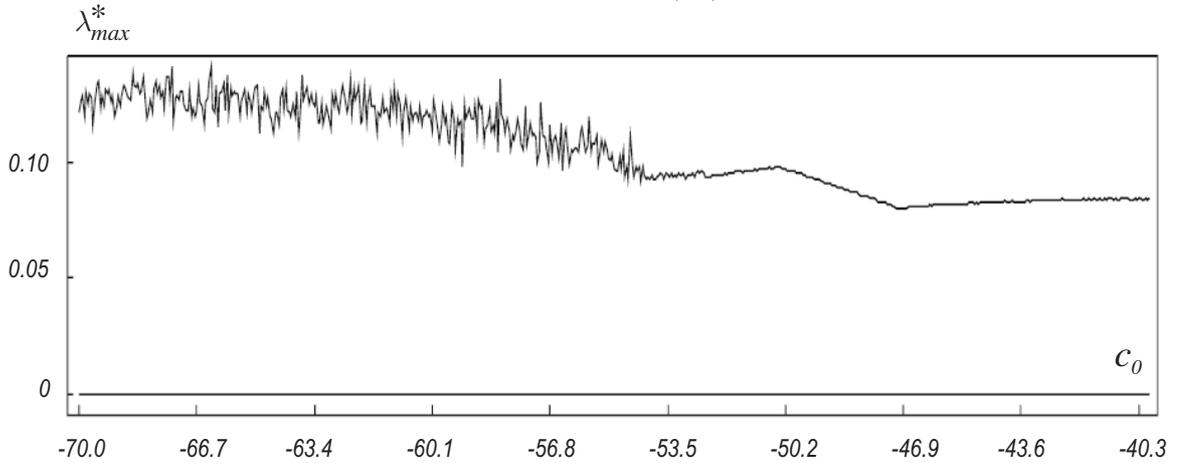


Рис. 4.3. $\lambda_{max}^*(c_0)$

получающимся из (4.2.6) при $z_{m,k} = 0$, $m \geq N + 1$. Численный анализ, выполненный при $c_0 = -93$, показывает, что системы (4.2.19) имеют хаотические аттракторы Σ_N , ляпуновские размерности \mathcal{L}_N которых с ростом N растут примерно по линейному закону:

$$\mathcal{L}_2 \approx 10.98, \mathcal{L}_3 \approx 16.2, \mathcal{L}_4 \approx 21.37, \mathcal{L}_5 \approx 26.197, \mathcal{L}_6 \approx 30.58, \mathcal{L}_7 \approx 34.116,$$

$$\mathcal{L}_8 \approx 37.63, \mathcal{L}_9 \approx 41.257, \mathcal{L}_{10} \approx 44.46, \mathcal{L}_{11} \approx 48.179, \mathcal{L}_{12} \approx 51.333$$

и т. д. Далее, для количества l_N положительных характеристических показателей аттрактора Σ_N , начиная с номера $N = 5$, справедливо равенство $l_N = N + 2$, а сумма S_N^+ упомянутых показателей при $N \rightarrow \infty$ имеет предел $S^+ \approx 1.6$. Для сравнения заметим, что сумма S_N^- всех отрицательных

показателей аттрактора Σ_N по модулю неограниченно растет, причем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N^-}{N} = S^-,$$

где $S^- \approx -0.6$. И, наконец, следует добавить, что в исходной системе (4.2.6) аттракторам Σ_N отвечают неустойчивые конечномодовые инвариантные множества A_N , для которых $z_{m,k} = 0$, $m \geq N+1$ (точнее говоря, каждое A_N неустойчиво уже в рамках системы (4.2.19) с номером $N+1$). Перечисленные факты свидетельствуют в пользу гипотезы о том, что аттрактор (4.2.18) при $c_0 = -93$ является хаотическим и бесконечномерным. Действительно, его старший ляпуновский показатель

$$\lambda_{max} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \lambda_{N,max},$$

где $\lambda_{N,max}$ — старшие показатели инвариантных множеств A_N , положителен и примерно равен 0.68 (значения $\lambda_{N,max}$ практически совпадают, начиная с номера $N=3$). Что же касается всех положительных ляпуновских показателей аттрактора A_{max} , то их количество счетно, а сумма конечна и равна введенной выше величине S^+ .

Для пояснения свойства бесконечномерности заметим, что справедливо очевидное включение $\bigcup_{N \geq 2} A_N \subset A_{max}$. А отсюда, в свою очередь, следует, что A_{max} не может содержать конечномерных подмножеств, также являющихся аттракторами.

4.3. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау

В данном разделе главы рассматривается модельная динамическая система, в которой при изменении бифуркационного параметра могут реализовываться как сценарий фазовых перестроек Ландау, так и сценарий Ландау – Селла. Первый из упомянутых сценариев связан, как известно, с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей. Во втором же случае имеем дело с хаотическим аттрактором, ляпуновская размерность которого при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет.

4.3.1. Введение

Динамическая теория развития турбулентности берет свое начало с классических работ Л.Д. Ландау [103] и Э. Хопфа [145]. В первой из этих работ была выдвинута гипотеза о том, что возникновение турбулентности связано с последовательным усложнением динамики за счет появления устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей с квазипериодической обмоткой. Во второй работе построен достаточно простой пример динамической системы, в которой наблюдается описанный в [103] каскад бифуркаций инвариантных торов. Гипотеза Ландау сыграла большую роль в процессе осознания природы турбулентности. В частности, развитые Л.Д. Ландау представления легли в основу известных гипотез А.Н. Колмогорова о росте размерности аттракторов уравнений Навье – Стокса при увеличении числа Рейнольдса. Однако современные представления о турбулентности сложились во многом благодаря открытию феномена динамического хаоса [147]. К настоящему времени выработано несколько различных эвристических сценариев перехода к турбулентности, среди которых следует отметить разрушение квазипериодических движений [151, 155], перемежаемость [10] и бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода [140]. Что же касается сценария Ландау, то его нельзя отнести к числу основных, поскольку аттрактор в виде незамкнутой плотной намотки на многомерном торе структурно неустойчив, т. е. он разрушается при малом изменении параметров системы. Тем не менее, усложнение динамики по Ландау все же реализуется в некоторых специальных случаях. Для примера сошлемся на статью [120], где изучалась цепочка однонаправленно связанных ротаторов.

Итак, достаточно ясно, что рассматривать вопрос о реализуемости механизма развития турбулентности по Ландау в его первоначальном варианте не имеет смысла. В связи с этим всюду ниже, следуя идеям Дж. Селла [156], под сценарием Ландау мы будем понимать каскад бифуркаций

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_N \rightarrow T_{N+1} \rightarrow \dots \quad (4.3.1)$$

устойчивых инвариантных торов T_N , $N \geq 1$ при отказе от требования квазипериодичности движений на каждом из них. Очевидно, что в таком расширенном варианте данный сценарий уже не является экзотическим. Более того, его можно увязать с концепцией динамического хаоса, если в цепочке (4.3.1) каждый инвариантный тор T_N , начиная с некоторого номера N_0 , заменить хаотическим аттрактором A_N и предположить, что $d_L(A_N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, где d_L — ляпуновская размерность. А так как при этом не

исключен случай $A_N \subset T_N$, $N \geq N_0$, то получившуюся в результате последовательность бифуркаций уместно назвать сценарием Ландау-Селла.

Дополнительным аргументом в пользу введенного термина служит тот факт, что принципиальная возможность сохранения хаотического аттрактора при бифуркации $T_N \rightarrow T_{N+1}$ была установлена в уже упоминавшейся статье Селла [156].

Цель данного раздела — проиллюстрировать реализуемость сценариев Ландау и Ландау-Селла в рамках некоторой феноменологической модели. В качестве таковой рассматривается нелинейная краевая задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + bu^5 = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon u + \nu u_{xx}) - \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t, \quad (4.3.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где a , b , ε , ν — произвольные положительные параметры, $u = u(t, x)$ — скалярная вещественная функция.

Причины, по которым выбор остановлен на модели (4.3.2), состоят в следующем. Во-первых, при ее построении за основу взято нелинейное уравнение Клейна-Гордона на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с нулевыми граничными условиями Дирихле. Соответствующую краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + bu^5 &= 0, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

можно рассматривать как некий аналог уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, так как, например, она допускает закон сохранения

$$\int_0^1 \left((u_t)^2 + a^2 (u_x)^2 + u^2 + \frac{b}{3} u^6 \right) dx \equiv const. \quad (4.3.4)$$

Во-вторых, при переходе от (4.3.3) к (4.3.2) мы добавили в правую часть уравнения Клейна-Гордона слагаемые $\varepsilon u_t - \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t$ и νu_{xx} , которые в гидродинамической интерпретации соответствуют возбуждающей силе и вязкости. Следует отметить, что предложенная нами гидродинамическая модель (4.3.2) хотя и существенно проще, чем исходная система уравнений Навье-Стокса, но тем не менее является весьма содержательной. Как будет установлено ниже, при согласованном стремлении параметров ε и ν к нулю в ней происходит развитие турбулентности по Ландау, а при $\varepsilon \sim 1$, $\nu \rightarrow 0$ реализуется сценарий Ландау-Селла.

4.3.2. Общие свойства модели

Введенная выше краевая задача (4.3.2) была рассмотрена в статьях [93] и [94]. В них, в частности, обоснована разрешимость начальной задачи для (4.3.2) и обсуждается локальная динамика модели. Коротко опишем основные результаты, полученные в [93].

Разрешимость начально-краевой задачи

В соответствии с [93] краевую задачу (4.3.2) будем рассматривать как динамическую систему в фазовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, где, как обычно, через $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$ обозначено замыкание по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,1)} = \left(\int_0^1 u^2 dx + a^2 \int_0^1 (u')^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.3.5)$$

линеала гладких функций $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$. Для того чтобы определить понятие обобщенного решения этой задачи с начальными условиями из указанного фазового пространства, положим $w_1 = \mathcal{D}u$, $w_2 = u_t$, где $\mathcal{D} : \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ — арифметический квадратный корень из оператора $I - a^2 d^2/dx^2$, I — единичный оператор. В итоге в пространстве $E = L_2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, состоящем из вектор-функций

$$w = (w_1, w_2)^T : w_1, w_2 \in L_2(0, 1), \|w\|_E = \left(\int_0^1 (w_1^2 + w_2^2) dx \right)^{1/2}, \quad (4.3.6)$$

получаем абстрактное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{w} = Aw + F(w). \quad (4.3.7)$$

Здесь $A = \mathcal{V}_0 \mathcal{D} - \mathcal{V}_1 \mathcal{D}_2 + \mathcal{V}_2$,

$$\mathcal{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

$$F(w) = \left(0, -b(\mathcal{D}^{-1}w_1)^5 - w_2 \int_0^1 (w_2)^2 dx \right)^T,$$

а операторы \mathcal{D} и \mathcal{D}^2 применяются к вектор-функции (4.3.6) покомпонентно.

Оператор A порождает в E сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу линейных ограниченных операторов $\exp(At)$. Учитывая разложения Фурье

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_{(k)} e_k(x), \quad \mathcal{D}w = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k w_{(k)} e_k(x), \quad w_{(k)} = \int_0^1 w \cdot e_k(x), \quad k \geq 1, \quad (4.3.9)$$

где $e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $\omega_k = \sqrt{1 + a^2 \pi^2 k^2}$, $k \geq 1$, и выражение (4.3.8), получаем правило, по которому полугруппа $\exp(At)$ действует на любой элемент $w \in E$

$$\exp(At) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp [(\omega_k \mathcal{V}_0 - \omega_k^2 \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) t] w_{(k)} e_k(x). \quad (4.3.10)$$

Наличие полугруппы (4.3.10) позволяет определить понятие обобщенного решения в первую очередь для уравнения (4.3.7). А именно, под обобщенным решением этого уравнения с произвольным начальным условием $w(0) = w_0 \in E$ будем понимать непрерывную вектор-функцию $w(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$w(t) = \exp(At)w_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))F(w(s))ds. \quad (4.3.11)$$

Полагая затем $u(t, \cdot) = \mathcal{D}^{-1}w_1(t)$, $u_t(t, \cdot) = w_2(t)$, где $w_1(t), w_2(t)$ — компоненты (4.3.6) введенной чуть выше вектор-функции $w(t)$, получаем искомое обобщенное решение

$$(u(t, x), u_t(t, x)) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1) \quad (4.3.12)$$

исходной краевой задачи (4.3.2). Подчеркнем, что включение в (4.3.12) имеет место по переменной x при любом фиксированном $t \in [0, \bar{t}]$. Сама же вектор-функция (u, u_t) непрерывна по t в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$ с нормой

$$\|(u, u_t)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(0,1) \times L_2(0,1)} = \left(\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}^2 + \|u_t\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.3.13)$$

Приведем основное утверждение из [93] о существовании обобщенных решений.

Теорема 4.4. *Обобщенное решение (4.3.12) краевой задачи (4.3.2) с произвольными начальными условиями*

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \in L_2(0, 1) \quad (4.3.14)$$

существует и единственно при всех $t \geq 0$.

Обоснование теоремы производится с помощью общей теории абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений (см. монографии [91, 129]). В связи с этим уравнение (4.3.7) рассматривается в произвольном вещественном банаховом пространстве E с нормой $\|*\|$ и предполагается что, во-первых, $A : E_A \rightarrow E$ — замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения E_A , являющийся инфинитезимальным производящим для C^0 -полугруппы линейных ограниченных операторов $\exp(At)$, $t \geq 0$; во-вторых, нелинейный оператор $F : E \rightarrow E$ бесконечно дифференцируем по Фреше и ограничен на любом ограниченном подмножестве $\Omega \subset E$ вместе с любым конечным числом своих производных. Подчеркнем, что перечисленным свойствам заведомо удовлетворяет нелинейность F из (4.3.9). Само же уравнение при выполнении указанных условий будем называть полулинейным. Дополним уравнение (4.3.7) начальным условием

$$w(0) = w_0, \quad (4.3.15)$$

где w_0 — произвольный элемент из E . Под обобщенным решением задачи Коши (4.3.7), (4.3.15), как уже было сказано выше, понимается непрерывное решение соответствующего интегрального уравнения (4.3.11). Пусть теперь $w_0 \in E_A$, тогда классическим решением задачи Коши (4.3.7), (4.3.15) назовем такую непрерывно дифференцируемую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ вектор-функцию $w = w(t)$, что, во-первых, $w(t) \in E_A$ и $Aw(t)$ непрерывна при каждом $t \in [0, \bar{t}]$; во-вторых, функция $w(t)$ на рассматриваемом отрезке удовлетворяет уравнению (4.3.7), а при $t = 0$ — начальному условию (4.3.15).

Для доказательства основной теоремы 4.4 обосновывается сначала следующая серия утверждений

Лемма 4.3. *По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что каждое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$, $w(0, w_0) = w_0$ уравнения (4.3.7) с начальным условием $w_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. В случае же $w_0 \in \Omega \cap E_A$ это решение при всех $t \in [0, t_0]$ будет классическим.*

Лемма 4.4. Пусть задано произвольное (вообще говоря, обобщенное) решение $w = w_*(t)$ уравнения (4.3.7) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Тогда найдется такое достаточно малое $r_0 > 0$, что любое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$ этого уравнения с начальным условием $w(0, w_0) = w_0 \in B$, $B = \{w \in E : \|w - w_*(0)\| \leq r_0\}$, существует на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ и непрерывно по совокупности переменных $(t, w_0) \in [0, \bar{t}] \times B$. Если же дополнительно $w_0 \in E_A$, то соответствующее решение $w(t, w_0)$ при всех $t \in [0, \bar{t}]$ оказывается классическим.

Лемма 4.5. Для любого обобщенного решения $w = w_*(t)$, определенного на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$, найдется такая последовательность классических решений $w = w_n(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $n \geq 1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|w_*(t) - w_n(t)\| = 0. \quad (4.3.16)$$

Кроме того, доказывается важное утверждение о продолжимости решений уравнения (4.3.7). Для того чтобы его сформулировать для каждого решения $w(t)$ этого уравнения с начальным условием (4.3.15) определим так называемый максимальный полуинтервал существования $[0, t_{max})$, где

$$t_{max} = \sup\{t_0 : w(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (4.3.17)$$

В силу леммы 4.3 множество значений t_0 , по которым берется \sup в (4.3.17), заведомо не пусто. Ясно также, что любое решение $w(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{max})$, причем не исключен случай $t_{max} = +\infty$. Если же, напротив, $t_{max} < +\infty$, то оказывается справедливым следующее утверждение.

Лемма 4.6. Предположим, что для некоторого обобщенного решения $w(t)$ уравнения (4.3.7) конечна величина (4.3.17). Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_{max} - 0} \|w(t)\| = +\infty. \quad (4.3.18)$$

Особо отметим, что утверждение теоремы 4.4 сохраняется и в случае $\nu = 0$.

Анализ локальных аттракторов

В данной части приведем результаты, касающиеся локальных (располагающихся в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния

равновесия) аттракторов краевой задачи (4.3.2) при условии малости параметров ε и ν . В связи с этим введем в рассмотрение краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (u + \nu_0 u_{xx}) - \varepsilon \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t - \varepsilon^2 b u^5, \quad (4.3.19)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

получающуюся из (4.3.2) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu = \nu_0 \varepsilon$, $\nu_0 = \text{const} \geq 0$ после нормировки $u/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow u$.

Для исследования аттракторов задачи (4.3.19) в [93] использовался бесконечномерный аналог известного асимптотического метода Крылова – Боголюбова – Митропольского [13]. Суть упомянутого метода состоит в том, что возможные автоколебательные режимы рассматриваемой задачи ищутся в виде формального разложения

$$u = u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (4.3.20)$$

Здесь

$$u_j(t, \tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,j}(t, \tau) e_n(x), \quad j = 0, 1; \quad (4.3.21)$$

$$u_{n,0}(t, \tau) = z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t), \quad n \geq 1, \quad (4.3.22)$$

функции $e_n(x)$ и частоты ω_n те же самые, что и в (4.3.9), а неизвестные (подлежащие определению) комплексные амплитуды $z_n(\tau)$, $n \geq 1$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (в этом случае после подстановки соотношений (4.3.22) в ряд (4.3.21) при $j = 0$ получается функция класса $\overset{\circ}{W}_2^1$ по переменной x). Что же касается поправки порядка ε из (4.3.20), то фигурирующие в ней функции $u_{n,1}(t, \tau)$ отыскиваются в классе формальных тригонометрических рядов переменных $\omega_k t$, $k \geq 1$.

Итак, подставим в краевую задачу (4.3.19) разложения (4.3.20), (4.3.21) и приравняем коэффициенты при ε . В результате приходим к счетной системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_{n,1} + \omega_n^2 u_{n,1} = f_n(t, \tau), \quad n \geq 1, \quad (4.3.23)$$

где, как обычно, точкой обозначена производная по t , переменная τ считается параметром, а функции $f_n(t, \tau)$ имеют вид:

$$f_n(t, \tau) = f_n^0 \exp(i\omega_n t) + \overline{f_n^0} \exp(-i\omega_n t) - \dot{u}_{n,0} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{u}_{k,0})^2, \quad (4.3.24)$$

$$f_n^0 = i\omega_n(1 - \nu_0\pi^2 n^2)z_n - 2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau}.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (4.3.23) в интересующем нас классе функций является отсутствие в их правых частях (4.3.24) гармоник $\exp(i\omega_n t)$. Добиться равенства нулю коэффициентов при указанных гармониках удастся за счет имеющихся в запасе комплексных амплитуд z_n , для которых на этом пути получается некоторая счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений. В [93] показано, что после перехода к переменным $\xi_n = \omega_n z_n$, $n \geq 1$ упомянутая система записывается в виде

$$2 \frac{d\xi_n}{d\tau} = \left[1 - \nu_0\pi^2 n^2 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1. \quad (4.3.25)$$

Введем в рассмотрение пространство последовательностей Z_0 (над полем вещественных чисел), состоящее из бесконечномерных векторов

$$\xi = (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n, \dots) : \xi_k \in \mathbb{C} \quad \forall k \geq 1, \quad \|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

и заметим, что согласно [129] система (4.3.25) порождает абстрактное полулинейное параболическое уравнение в пространстве Z_0 . Опираясь на известные свойства таких уравнений (см. леммы 4.3 - 4.6) и очевидные априорные оценки

$$|\xi_n(\tau)|^2 \leq |\xi_n(0)|^2 \exp(\tau), \quad n \geq 1, \quad \tau \geq 0,$$

нетрудно убедиться, что любое решение

$$\xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \bar{\xi}_1(\tau), \dots, \xi_n(\tau), \bar{\xi}_n(\tau), \dots)$$

данной системы с начальным условием $\xi(0) \in Z_0$ определено на полуоси $\tau \geq 0$. Поэтому если мы фиксируем какое-либо из таких решений и подставим соотношения $z_n(\tau) = \xi_n(\tau)/\omega_n$, $n \geq 1$ в (4.3.24), то все уравнения

(4.3.23) станут разрешимыми в классе тригонометрических рядов, а их решения примут вид:

$$\begin{aligned}
u_{n,1} &= -\frac{i}{8\omega_n^2} \left(\xi_n^3 \exp(3i\omega_n t) - \bar{\xi}_n^3 \exp(-3i\omega_n t) \right) + i\xi_n u_{n,1}^0 - i\bar{\xi}_n \bar{u}_{n,1}^0, \\
u_{n,1}^0 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{4\omega_k} \left(\frac{\bar{\xi}_k^2}{\omega_n - \omega_k} \exp [i(\omega_n - 2\omega_k)t] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi_k^2}{\omega_n + \omega_k} \exp [i(\omega_n + 2\omega_k)t] \right).
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Перейдем теперь от (4.3.25) к амплитудной системе

$$\frac{d\rho_n}{d\tau} = \left[1 - \nu_0 \pi^2 n^2 - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1, \tag{4.3.27}$$

где $\rho_n = |\xi_n|^2$, $n \geq 1$, и будем рассматривать последнюю как самостоятельную динамическую систему в конусе K векторов с неотрицательными координатами из пространства

$$l = \{ \rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots) : \|\rho\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n| < \infty \}. \tag{4.3.28}$$

Предположим, далее, что эта система допускает состояние равновесия с конечным числом ненулевых координат

$$\rho_{n_j} = \rho_{n_j}^0 > 0, \quad j = 1, \dots, k, \tag{4.3.29}$$

экспоненциально устойчивое или дихотомичное (в метрике фазового пространства (4.3.28)). Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Состоянию равновесия (4.3.29) системы (4.3.27) в исходной краевой задаче (4.3.19) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, соответствует k -мерный инвариантный тор T_k с теми же свойствами устойчивости. Указанный тор допускает представление вида*

$$\begin{aligned}
T_k : \quad u &= \sum_{j=1}^k \frac{2}{\omega_{n_j}} \sqrt{\rho_{n_j}^0} \cos \phi_j e_{n_j}(x) + \varepsilon U_*(\phi, x, \varepsilon), \\
\frac{d\phi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 \Phi_*(\phi, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

где $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)^T$, $\omega = (\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_k})^T$, а 2π -периодические по ϕ функции U_* , Φ_* ограничены равномерно по ϕ, ε (вместе с любым фиксированным числом производных по ϕ) в метрике $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$ и \mathbb{R}^k соответственно.

Сформулированная теорема представляет собой частный случай установленного в [91, гл. 1.] общего результата о бифуркации инвариантных торов в абстрактных нелинейных системах.

Теорема 4.5 сводит проблему аттракторов краевой задачи (4.3.19) к поиску устойчивых состояний равновесия системы (4.3.27). Для формулировки соответствующего результата рассмотрим монотонно убывающую последовательность

$$\bar{\nu}_N = \frac{3}{\pi^2 N(4N^2 - 1)}, \quad N \geq 1 \quad (4.3.31)$$

критических значений параметра ν_0 . Динамику системы (4.3.27) по этому параметру описывает следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Предположим, что параметр ν_0 удовлетворяет неравенствам*

$$\bar{\nu}_{N+1} < \nu_0 < \bar{\nu}_N \quad (4.3.32)$$

при некотором натуральном N . Тогда система (4.3.27) допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_N с координатами

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{1}{2N+1} + \frac{\nu_0 \pi^2}{3} N(N+1) - \nu_0 \pi^2 n^2, \quad n = 1, \dots, N; \\ \rho_n &= 0 \quad \text{при} \quad n \geq N+1. \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Все же остальные возможные состояния равновесия этой системы, лежащие в конусе K , при условиях (4.3.32) экспоненциально неустойчивы.

Из приведенной теоремы следует, что при $\nu_0 = \bar{\nu}_N$ состояние равновесия O_N сливается с аналогичной неподвижной точкой O_{N-1} , так как в этом случае обращается в нуль компонента ρ_N из (4.3.33), а все остальные координаты ρ_n , $n = 1, \dots, N-1$ остаются положительными и совпадают с координатами точки O_{N-1} . Таким образом, при $\nu \rightarrow 0$ в амплитудной системе (4.3.27) наблюдается цепочка бифуркаций вида

$$O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_N \rightarrow O_{N+1} \rightarrow \dots,$$

которой в исходной задаче (4.3.19) при согласованном стремлении параметров ν и ε к нулю отвечает аналогичная цепочка бифуркаций устойчивых

инвариантных торов. Точнее говоря, в силу теорем 4.5, 4.6 при фиксированном ν_0 , удовлетворяющем условиям (4.3.32), и при подходящем уменьшении ε краевая задача (4.3.19) имеет устойчивый инвариантный тор любой наперед заданной конечной размерности. А это, собственно, и означает, что при $\varepsilon, \nu_0 \rightarrow 0$ в ней реализуется сценарий развития турбулентности по Ландау.

Одна из интересных особенностей краевой задачи (4.3.19) состоит в том, что при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$ удается доказать наличие у нее так называемого турбулентного аттрактора (см. [93]).

Это удается сделать, поскольку при $\nu_0 = 0$ существует корректная замена переменных, приводящая исходную задачу (4.3.19) к системе вида

$$\dot{\xi} = \Lambda_0 \xi + \varepsilon \Lambda_1(\xi) + \varepsilon^2 \Lambda_*(\xi, \varepsilon) \quad (4.3.34)$$

в пространстве последовательностей Z_0 . Здесь $\xi = (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n, \dots) \in Z_0$,

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \text{diag} \{i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_n, -i\omega_n, \dots\}, \\ \Lambda_1(\xi) &= (\Lambda_{1,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{1,1}(\xi), \dots, \Lambda_{n,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{n,1}(\xi), \dots), \\ \Lambda_{n,1}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

а оператор $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ обладает следующим свойством: для любого $m \in \mathbb{N}$ и произвольного ограниченного подмножества $B \subset Z_0$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, B) > 0$, что при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ он действует из B в Z_0 и все его производные Фреше $\partial_\xi^k \Lambda_*(\xi, \varepsilon)$, $k = 0, \dots, m$ непрерывны и ограничены по совокупности переменных $(\xi, \varepsilon) \in B \times [0, \varepsilon_0]$.

Учитывая факт существования корректной замены, можно рассмотреть отвечающую (4.3.34), (4.3.35) укороченную систему

$$\dot{\xi}_n = i\omega_n \xi_n + \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1. \quad (4.3.36)$$

Выполним в ней последовательно замены $\xi_n \exp(-i\omega_n t) \rightarrow \xi_n$, $n \geq 1$, $\tau = \varepsilon t$. В результате для $\rho_n = |\xi_n|^2$ получим в точности систему (4.3.27) при $\nu_0 = 0$, порождающую в инвариантном конусе $K \subset l$ полупоток $g^\tau(\rho)$, $\tau \geq 0$, $\rho \in K$. Заметим, далее, что в силу очевидного неравенства $\frac{d}{dt} S(\tau) \leq -1$ при

$S(T) \geq 1$, где $S(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j(\tau)$, множество $\mathcal{U} = K \cap \{\rho \in l : \|\rho\| \leq 1\}$ явля-

ется для данного полупотока инвариантным и поглощающим. Тем самым, в K существует глобальный аттрактор

$$\tilde{\Omega}_0 = \bigcap_{\tau \geq 0} g^\tau(\mathcal{U}). \quad (4.3.37)$$

Из теоремы (4.6) тогда следует, что $\tilde{\Omega}_0$ содержит счетное число неустойчивых состояний равновесия вида

$$\rho_{n_j} = \frac{1}{2k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad \rho_n = 0 \quad \text{при} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}, \quad (4.3.38)$$

где $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ — произвольный конечный набор натуральных чисел. Кроме того, неустойчивое многообразие любого из состояний равновесия (4.3.38) является бесконечномерным и также принадлежит множеству (4.3.37). А это означает, что $\tilde{\Omega}_0$ заведомо некомпактно и имеет бесконечную хаусдорфову размерность. Аттрактор с такими свойствами в дальнейшем будем называть турбулентным.

Следует отметить, что аналогичный (4.3.37) турбулентный аттрактор Ω_0 существует и у системы (4.3.36). А именно, любой точке $\rho_0 = (\rho_1^0, \dots, \rho_n^0, \dots)$ из $\tilde{\Omega}_0$ отвечает совокупность векторов $\xi \in \Omega_0$ с компонентами $\xi_n = \sqrt{\rho_n^0} \exp(i\varphi_n)$, $n \geq 1$, где вещественные параметры $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ меняются независимо друг от друга. Добавим еще, что состояниям равновесия (4.3.38) в укороченной системе (4.3.36) соответствуют неустойчивые инвариантные торы.

Возвращаясь к полной системе (4.3.34) и учитывая описанные выше свойства остатка $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$, нетрудно проверить, что для ее траекторий оказывается инвариантным шар $B = \{\xi \in Z_0 : \|\xi\| \leq 1\}$. Для этого достаточно взять функцию Ляпунова $V(\xi) = \|\xi\|^2$ и убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi_n} \dot{\xi}_n + \frac{\partial V}{\partial \bar{\xi}_n} \dot{\bar{\xi}}_n \right) = -\varepsilon - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^4 + O(\varepsilon^2) \quad \text{равномерно по} \quad \xi : \|\xi\| = 1.$$

А отсюда очевидным образом следует, что в шаре B система (4.3.34) имеет асимптотически близкий к Ω_0 турбулентный аттрактор $\Omega(\varepsilon)$. Более того, из свойств ограниченности и гладкости остатка $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ вытекает существование для любого натурального k такого $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ аттрактор $\Omega(\varepsilon)$ содержит счетное число неустойчивых инвариантных торов, отвечающих состояниям равновесия (4.3.38) при фиксированном k и при произвольном выборе набора номеров $n_1 < \dots < n_k$.

4.3.3. Нелокальный случай

В данном разделе с помощью численного анализа изучается вопрос об аттракторах краевой задачи (4.3.2) при $\nu \rightarrow 0$ в случае, когда все остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже считаем, что эти параметры фиксированы и заданы, к примеру, равенствами

$$\varepsilon = b = 10, \quad a^2 = 0.1. \quad (4.3.39)$$

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $u_t = v$, перейдем от уравнения второго порядка из (4.3.2) к системе

$$\begin{aligned} u_t = v, \quad v_t = \varepsilon v + \nu v_{xx} - \int_0^1 v^2 dx \cdot v + a^2 u_{xx} - u - bu^5, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Заменим, далее, в (4.3.40) частные производные по x и интегральное слагаемое приближенными равенствами

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)), \\ v_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)), \\ \int_0^1 v^2(t, x) dx &\approx \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N v_k^2(t), \end{aligned}$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число,

$$u_k(t) = u(t, x)|_{x=k/(N+1)}, \quad v_k(t) = v(t, x)|_{x=k/(N+1)}, \quad k = 1, \dots, N.$$

В результате для переменных u_k, v_k приходим к конечномерной модели вида

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= v_k, \\ \dot{v}_k &= \varepsilon v_k + \nu(N+1)^2(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) - \\ &\quad - \frac{v_k}{N+1} \sum_{m=1}^N v_m^2 + a^2(N+1)^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - u_k - bu_k^5, \\ k &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

где $u_0 = v_0 = u_{N+1} = v_{N+1} = 0$.

Компьютерный анализ модели (4.3.41) проводился при условиях (4.3.39) в диапазоне параметров $5 \leq N \leq 30$, $0 \leq \nu \leq 1.01$ с помощью пакета программ Tracer 3.70. Использовался метод Дорманда - Принса 8(5.3) с автоматическим выбором шага, величина которого во всех случаях не превосходила 0.001.

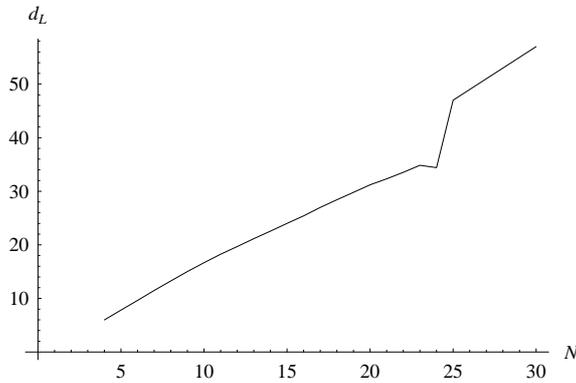


Рис. 4.4. $d_L(N)$ при $\nu = 0$

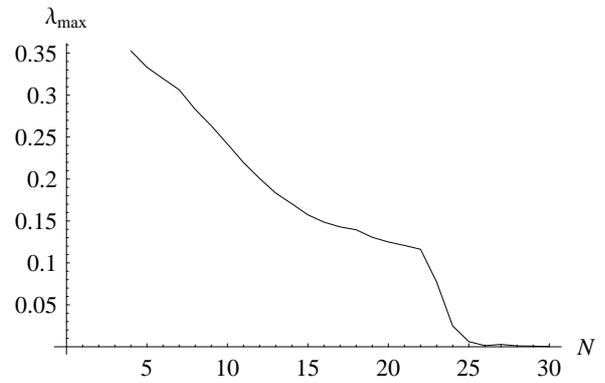


Рис. 4.5. $\lambda_{max}(N)$ при $\nu = 0$

Обратимся к вопросу о поведении различных характеристик аттрактора Ω_N системы (4.3.41) при фиксированном $\nu \geq 0$ и при увеличении N . Как оказывается, в случае $\nu = 0$ ляпуновская размерность d_L этого аттрактора при $N \rightarrow \infty$ неограниченно растет, а его старший ляпуновский показатель λ_{max} , наоборот, убывает и при $N \geq 25$ становится равным нулю. Графики зависимости указанных величин от N представлены на рис. 4.4 и 4.5. Добавим еще, что на промежутке $5 \leq N \leq 23$ для d_L справедлива приближенная формула $d_L \approx 1.028 + 1.509 \cdot N$ (в этом случае аттрактор Ω_N оказывается хаотическим). В случае же $N \geq 25$ множество Ω_N представляет собой $(2N - 3)$ -мерный инвариантный тор, движения на котором близки к квазипериодическим.

При малых $\nu > 0$ введенные выше величины d_L и λ_{max} с ростом N ведут себя несколько иначе. А именно, при $N \rightarrow \infty$ они стремятся к конечным положительным пределам. Об этом свидетельствуют рис. 4.6-4.8, где изображены графики λ_{max} по N для $\nu = 0.001, 0.002$ и 0.003 соответственно, а также рис. 4.9, на котором показана зависимость от N размерности d_L в случае $\nu = 0.002$.

Следует отметить, что при малых $\nu > 0$ с ростом N стабилизируется также и сигнатура Σ_N аттрактора Ω_N , равная количеству его ненулевых положительных ляпуновских показателей. Например, при $\nu = 0.002$ и при всех $N \geq 12$ выполняется равенство $\Sigma_N = 3$.

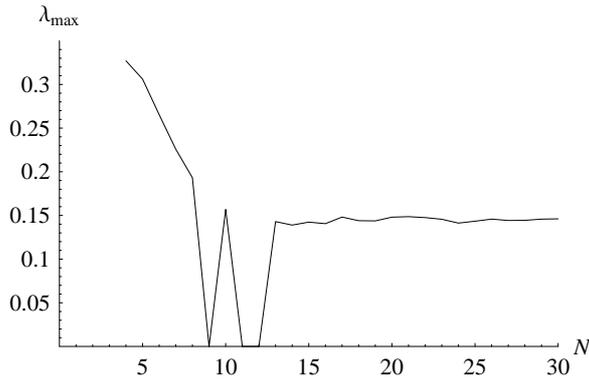


Рис. 4.6. $\lambda_{max}(N)$ при $\nu = 0.001$

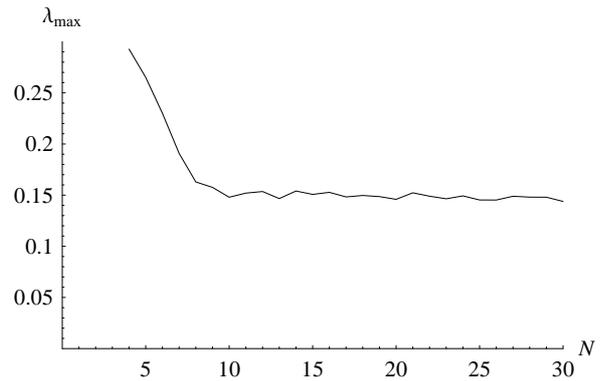


Рис. 4.7. $\lambda_{max}(N)$ при $\nu = 0.002$

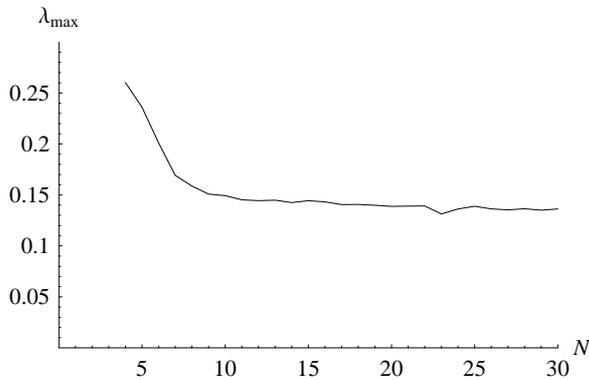


Рис. 4.8. $\lambda_{max}(N)$ при $\nu = 0.003$

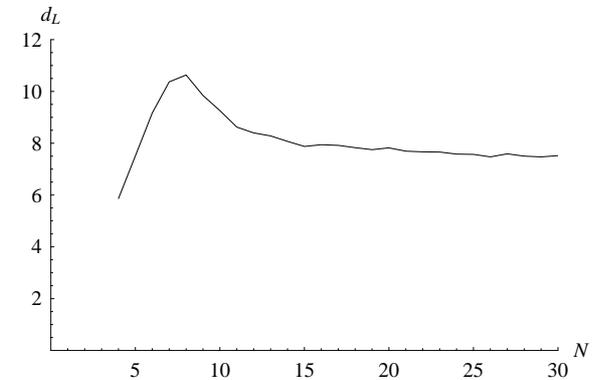


Рис. 4.9. $d_L(N)$ при $\nu = 0.002$

Приведенные результаты численного счета в совокупности с содержащимся в разделе 3 теоретическим анализом позволяют сделать следующие общие выводы о динамике по ν исходной распределенной модели (4.3.2).

Во-первых, при $\nu = 0$ и при условиях (4.3.39) у краевой задачи (4.3.2) существует турбулентный аттрактор Ω_{turb} , который, по всей видимости, является продолжением по ε аттрактора $\Omega(\varepsilon)$, обнаруженного в задаче (4.3.19) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$. Как и $\Omega(\varepsilon)$, данный аттрактор представляет собой ограниченное и некомпактное множество в фазовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, имеющее бесконечную хаусдорфову размерность. Кроме того, что оказалось весьма неожиданным, для “типичных” траекторий из Ω_{turb} справедливо равенство $\lambda_{max} = 0$. Таким образом, турбулентный аттрактор в предложенной нами модели можно отнести к так называемым

странным нехаотическим аттракторам (см. [3]) или рассматривать как некий вариант “бесконечномерного тора”.

Во-вторых, аттрактор Ω_{turb} является пределом при $\nu \rightarrow 0$ конечномерных хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых неограниченно растет. Последнее же как раз и означает, что при условиях (4.3.39) и при уменьшении вязкости ν в краевой задаче (4.3.2) наблюдается интересующий нас сценарий развития турбулентности Ландау - Селла.

Дополнительным аргументом в пользу реализуемости упомянутого сценария служит визуальная информация, представленная на рис. 4.10, 4.11. На этих рисунках показаны графики зависимости от ν величин d_L и λ_{max} аттрактора Ω_N системы (4.3.41) при $N = 30$, построенные на отрезке $0.005 \leq \nu \leq 0.01$ по точкам с шагом 0.0001. Подчеркнем, что дальнейшее увеличение N не имеет смысла, поскольку стабилизация характеристик d_L и λ_{max} происходит уже в случае $N = 30$ (см. рис. 4.6- 4.8). Следовательно, есть все основания ожидать, что аналогичный вид имеют графики указанных характеристик и для аттракторов краевой задачи (4.3.2).

В заключение скажем несколько слов о бифуркациях, происходящих на начальных стадиях сценария Ландау-Селла. Анализ конечномерных моделей (4.3.41) позволяет сделать вывод, что в исходной распределенной модели (4.3.2) при условиях (4.3.39) и при уменьшении ν наблюдаются следующие перестройки. При $\nu > 10/\pi^2$ устойчиво ее нулевое решение, а при прохождении ν через критическое значение $10/\pi^2$ из нуля рождается устойчивый цикл C (бифуркация Андронова-Хопфа). Далее, этот цикл сохраняет устойчивость при $\nu_* \lesssim \nu < 10/\pi^2$, где $\nu_* \approx 0.03272$, а при последующем уменьшении ν отдает ее бифурцирующему из него двумерному тору T .

Указанный тор, в свою очередь, существует и устойчив на промежутке $\nu_{**} \lesssim \nu < \nu_*$, где $\nu_{**} \approx 0.00812$, причем динамика на нем в некоторых случаях является периодической (например, она оказывается таковой при $\nu \in [0.00941, 0.00967]$). Что же касается хаотического аттрактора, то он впервые возникает в краевой задаче (4.3.2) при $\nu = \nu_{**}$ в результате разрушения тора T . Добавим еще, что наступлению стабильного хаоса, имеющего место при малых $\nu > 0$, предшествует некоторое количество промежутков изменения ν , в которых существуют устойчивые циклы. Наиболее крупные “окна периодичности” соответствуют значениям $\nu \in [0.00476, 0.00483]$, $[0.0062, 0.00648]$, $[0.00655, 0.00686]$.

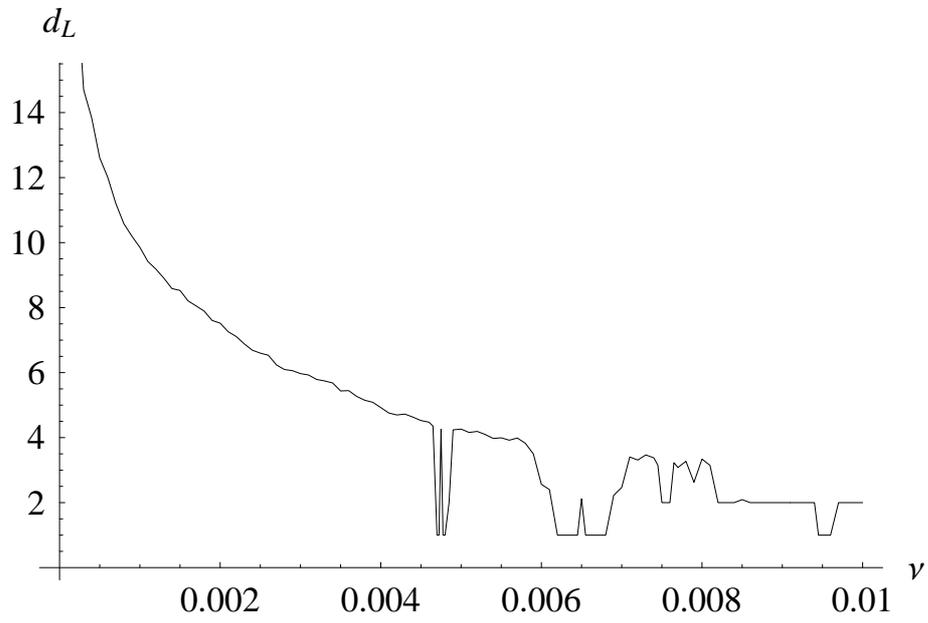


Рис. 4.10. $d_L(\nu)$ при $N = 30$

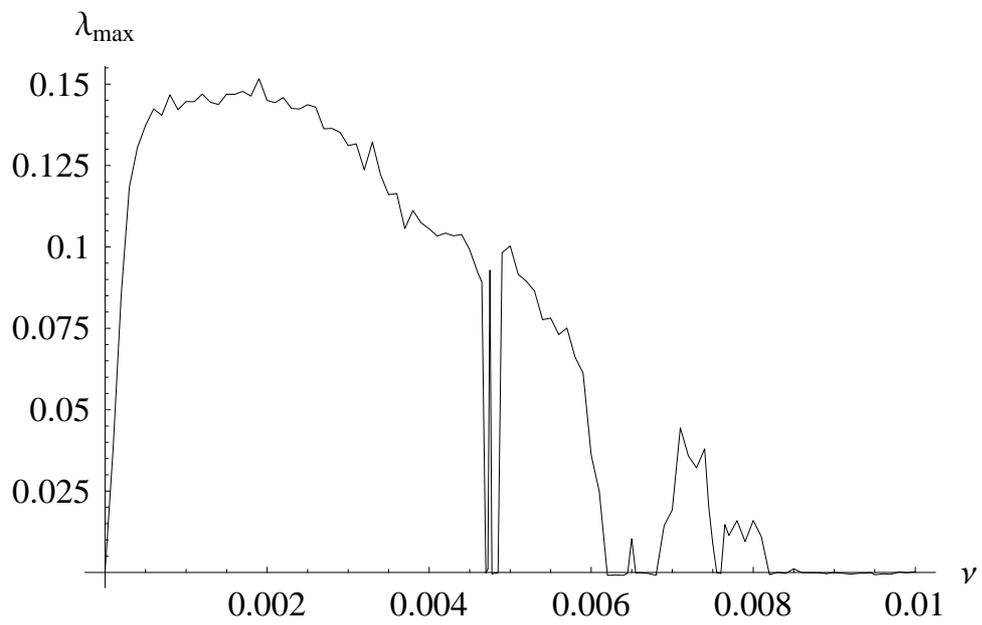


Рис. 4.11. $\lambda_{max}(\nu)$ при $N = 30$

Глава 5.

Системы с полутора степенями свободы

5.1. Явление буферности в системах с полутора степенями свободы

В предыдущих главах сложность поведения динамических систем объяснялась взаимодействием некоторого числа связанных осцилляторов. Известно, однако, что сложное поведение, обусловленное накоплением однотипных аттракторов, может реализоваться и в простых системах обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, в системах с полутора степенями свободы, под которыми будем понимать уравнения маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками. В этой главе будет рассматриваться явление буферности в указанных системах.

Как уже отмечалось во введении, о феномене буферности принято говорить в случае, когда в фазовом пространстве некоторой динамической системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т.д.). Как следует из результатов известной работы А. А. Витта [17], а также из значительно более поздних работ [84–88, 115], буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях из различных областей естествознания. В связи с этим весьма актуальна проблема изучения типовых сценариев накопления аттракторов в различных динамических системах. Тюринговский сценарий и сценарий Витта накопления аттракторов реализуются только для систем с бесконечномерным фазовым пространством (примеры такого рода содержатся в главе 4). Что же касается конечномерных систем, то в

них простейшим механизмом возникновения буферности является так называемый гамильтонов сценарий. Напомним суть этого сценария (см. [115]).

Рассмотрим сначала некоторую гамильтонову или консервативную (не меняющуюся при обращении времени) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Как известно (см. [70, 71]), хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом так называемых островков устойчивости, примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Возмутим данную систему малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность, тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми и, что самое главное, количество последних может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это как раз и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого и называется гамильтоновым.

Следует заметить, что кроме уже упоминавшихся двумерных отображений (см. [115]), гамильтонов механизм не подкреплён какими-либо другими содержательными примерами. В данной главе устанавливаются строгие результаты о наличии буферности в ряде классических механических задач, описываемых уравнениями маятникового типа с периодическими по времени малыми добавками.

5.1.1. Физическая постановка задачи

В данной части работы рассмотрим два модельных уравнения маятникового типа:

$$\ddot{x} + \sin x = \frac{a}{k} \sin(kx - \nu t), \quad (5.1.1)$$

$$\ddot{x} + (1 + a \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (5.1.2)$$

где a , k , ν – положительные параметры, а также уравнение

$$\ddot{x} + x = a \sin(x - \nu t), \quad (5.1.3)$$

получающееся из (5.1.1) при условии $k \gg 1$ после замены $kx \rightarrow x$ и отбрасывания слагаемых порядка малости $1/k^2$ и выше. Аргументом в пользу выбора в качестве объектов исследования именно этих уравнений служит тот факт, что они допускают многочисленные физические интерпретации. Некоторые прикладные проблемы, связанные с уравнениями (5.1.1) – (5.1.3), описываются ниже.

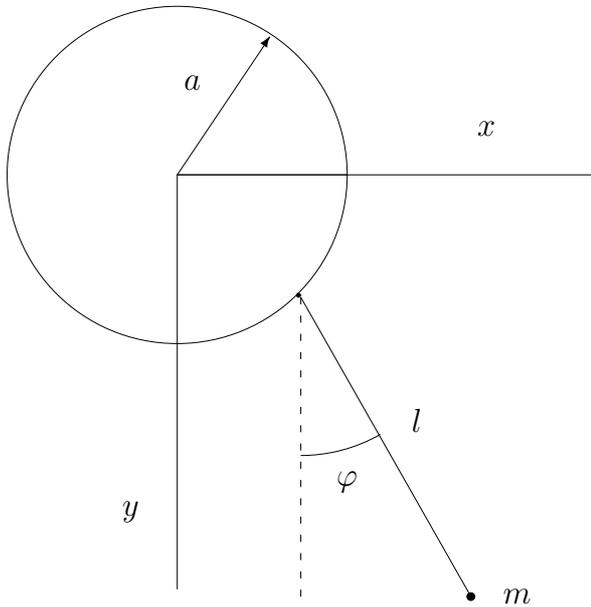


Рис. 5.1.

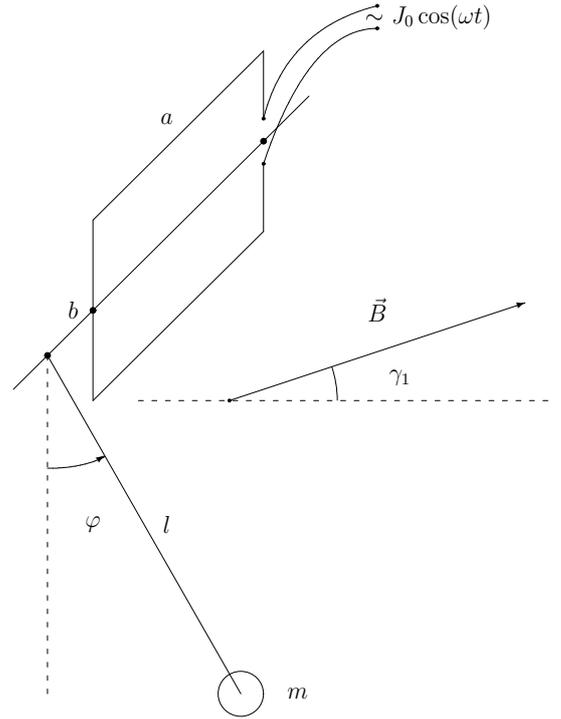


Рис. 5.2.

Начнем с простейшей постановки задачи, приводящей к уравнению (5.1.1). Следуя [104], рассмотрим механическую систему, состоящую из плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой ω (см. рис. 5.1). В этой ситуации функция Лагранжа и уравнение движения системы имеют вид

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mla\omega^2 \sin(\varphi - \omega t) + mgl \cos \varphi, \quad (5.1.4)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = A_0 \cos(\varphi - \omega t),$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикальной оси, m и l – его масса и длина, a – радиус окружности, по которой вращается точка подвеса, g – ускорение свободного падения, $\omega_0^2 = g/l$, $A_0 = a\omega^2/l$. Остается заметить, что фигурирующее в (5.1.4) уравнение преобразуется к виду (5.1.1) при $k = 1$.

Следующий пример интересен тем, что представляет собой простейшую модель взаимодействия механического осциллятора с элементарными составляющими коллекторного электрического двигателя. Предположим, что, как и в предыдущем случае, имеется плоский маятник, но теперь воздействие на него осуществляется за счет поворота в магнитном поле контура с переменным током. Точнее говоря, рассмотрим электромеханическую систему (см. рис. 5.2) с рамкой, закрепленной на оси вращения маятника (т. е.

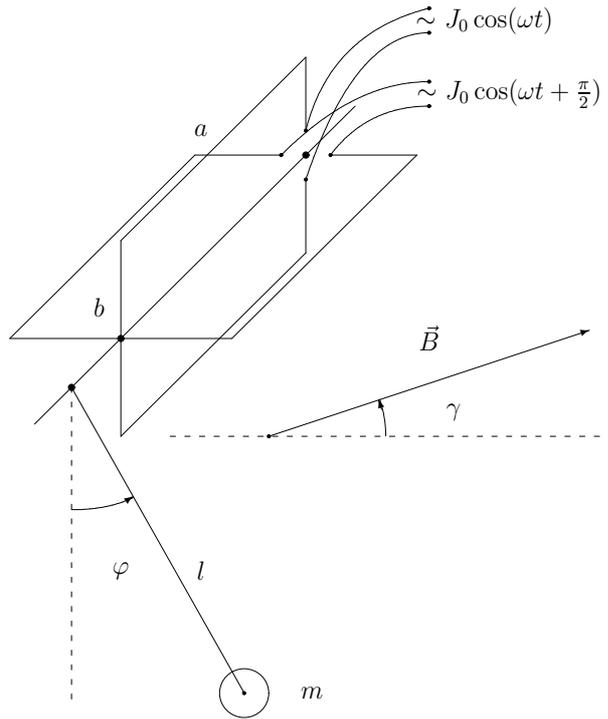


Рис. 5.3.

на прямой, проходящей через точку подвеса и перпендикулярной плоскости колебаний) и помещенной в магнитное поле напряженности B . Считаем, что по рамке течет переменный ток частоты ω , сила которого равна $J(t) = J_0 \cos \omega t$. Учитывая силу воздействия магнитного поля на замкнутый контур площади $S = ab$, где a, b — размеры прямоугольной рамки, и считая ее массу пренебрежимо малой по сравнению с массой m маятника, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi) + SJ_0 B \cos(\omega t) \sin(\varphi + \gamma), \quad (5.1.5)$$

где J_0, ω — амплитуда и частота, B — напряженность магнитного поля, γ — угол наклона магнитного поля по отношению к вертикали. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = -A_0 \cos(\omega t) \sin(\varphi + \gamma), \quad (5.1.6)$$

где ω_0^2 , как и в предыдущем случае, равно g/l , а $A_0 = SJ_0 B / (ml^2)$.

Уравнение (5.1.6) не сводится к уравнению (5.1.1), однако имеет близкие свойства. Для того чтобы получить в точности соотношение (5.1.1) рассмотрим электромеханическую систему с двумя перпендикулярными друг другу

одинаковыми рамками (см. рис. 5.3). Будем считать, что эти рамки помещены в постоянное магнитное поле B и по каждой из них течет ток одинаковой амплитуды J_0 и частоты ω , сила которого равна соответственно $J_0 \cos \omega t$ и $J_0 \cos(\omega t + \pi/2)$. Учитывая, далее, силу воздействия магнитного поля на каждый из замкнутых контуров площади $S = ab$ и считая массу рамок, как и в предыдущем случае, пренебрежимо малой по сравнению с массой m маятника, получаем следующую функцию Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + SJ_0B \cos(\omega t) \sin(\varphi + \gamma) + SJ_0B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

где γ – угол наклона магнитного поля по отношению к горизонтали, лежащей в плоскости колебаний маятника (см. рис. 5.3). Что же касается уравнения движения, то оно в данном случае имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = A_0 \sin(\varphi - \omega t + \gamma),$$

где $\omega_0^2 = g/l$, $A_0 = SJ_0B/(ml^2)$. Тем самым, приходим к уравнению (5.1.1) при $k = 1$.

Для придания физического смысла уравнению (5.1.1) в случае $k \neq 1$ несколько усложним предыдущий пример. С этой целью рассмотрим маятник, который соединен с трехфазным синхронным двигателем переменного тока через редуктор с передаточным числом K (см. рис. 5.4). В простейшем приближении предполагается, что в двигателе генерируется бегущее магнитное поле интенсивности $B_0 \cos \omega t$, где B_0 – амплитуда поля, ω – частота сетевого напряжения. Кроме того, предположим, что направление магнитного момента ротора \vec{P}_m перпендикулярно оси вращения и составляет при $\varphi = 0$ угол γ с вертикальной осью. Изменение угла наклона маятника φ в свою очередь меняет упомянутый угол (посредством редуктора) и делает его равным $K\varphi + \gamma$ (см. рис. 5.4). И наконец, считаем, что магнитная сила, воздействующая на ротор двигателя, определяется амплитудой B_0 внешнего магнитного поля, магнитным моментом ротора P_m , а также углом $\omega t - (K\varphi + \gamma)$ между ними.

При сделанных допущениях функция Лагранжа рассматриваемой системы имеет вид

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + P_m B_0 \cos(\omega t - K\varphi - \gamma), \quad (5.1.7)$$

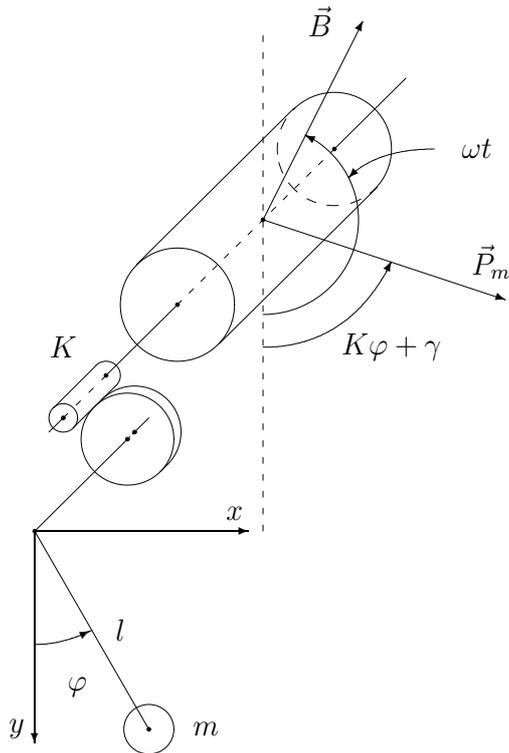


Рис. 5.4.

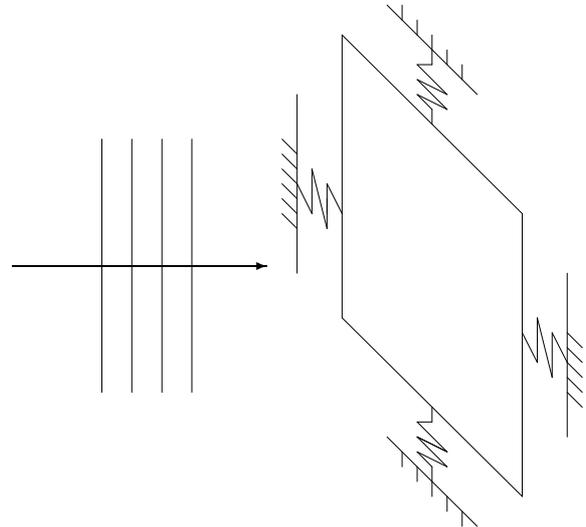


Рис. 5.5.

где J – момент инерции маятника и ротора. Выписывая, далее, отвечающее (5.1.7) уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = -A_0 \sin(K\varphi - \omega t + \gamma),$$

где $\omega_0^2 = mgl/J$, $A_0 = KP_m B_0/J$, убеждаемся, что оно с точностью до обозначений совпадает с модельным уравнением (5.1.1).

Уравнение (5.1.2) не нуждается в особых комментариях, поскольку оно представляет собой классическую модель колебаний маятника с точкой подвеса, вибрирующей вдоль вертикальной оси (см. [104]). Можно также предложить и эквивалентный электромеханический вариант данной задачи подобно тому, как это было сделано выше в случае уравнения (5.1.1).

Уравнение (5.1.3), как уже отмечалось ранее, является предельным случаем уравнения (5.1.1) при $k \rightarrow \infty$, хотя может допускать и самостоятельные физические интерпретации. Например, оно возникает при описании движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской волны [71]. Среди механических приложений этого уравнения отметим задачу о колебаниях подвешенной на пружинах прямоугольной пластины под действием звуковой волны (см. рис. 5.5).

Действительно, если не учитывать деформацию и вертикальное смещение пластины, то закон изменения ее горизонтального смещения $x(t)$ будет иметь вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{S}{m} \sum_{j=1}^n P_j \sin(k_j x + \omega_j t). \quad (5.1.8)$$

Здесь S и m – площадь и масса пластины, ω_0 – собственная частота ее колебаний, обусловленная силами упругости, а P_j , ω_j и $\lambda_j = 2\pi/k_j$ – соответственно амплитуда колебаний давления, частота и длина j -ой звуковой волны. Предполагая, что в правой части уравнения (5.1.8) можно выделить главную составляющую суммы и отбросить остальные слагаемые, приходим к уравнению вида (5.1.3).

Аналогичная задача возникает при моделировании движения заряженной частицы в поле пакета плоских волн. Согласно результатам из [70] смещение $x(t)$ такой частицы описывается уравнением

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} \sum_{j=1}^n E_j \sin(k_j x + \omega_j t). \quad (5.1.9)$$

Здесь e и m – заряд и масса частицы, E_j и ω_j – амплитуды и частоты составляющих волнового пакета, $\lambda_j = 2\pi/k_j$ – длины волн.

Предположим, что в изучаемом пакете волн можно выделить две главных составляющих, т. е. сумма в правой части (5.1.9) содержит только два слагаемых (при $j = 1, 2$). Тогда замена $u = k_1 x + \omega_1 t$ позволяет перейти от (5.1.9) к уравнению вида (5.1.1).

5.1.2. Исследование квазилинейного осциллятора

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x &= \mu \sin(x - \nu t), \\ \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \sin x &= \mu \sin(x - \nu t), \\ \ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

получающиеся из (5.1.1) – (5.1.3) при $a = \mu$, $k = 1$ и при добавлении малого затухания $\varepsilon > 0$. Заметим сразу, что учет слагаемого $\varepsilon \dot{x}$ имеет физический смысл во всех перечисленных в п. 5.1.1 ситуациях. Что же касается параметра $\mu > 0$, то в дальнейшем его считаем хотя и малым, но фиксированным по отношению к ε .

Все три уравнения (5.1.10) обладают одним общим и необходимым для последующего анализа свойством. А именно пусть при $\varepsilon = 0$ и при любом фиксированном $\mu > 0$ (не обязательно малом) какое-либо из этих уравнений допускает некоторое эллиптическое периодическое движение $x_0(t)$ периода $T_0 > 0$ (эллиптичность означает, что его мультипликаторы λ_1, λ_2 комплексные и в силу гамильтоновости $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$). Тогда, очевидно, найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ у рассматриваемого уравнения существует близкое периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, $x(t, 0) = x_0(t)$ периода $T(\varepsilon)$, $T(0) = T_0$, являющееся экспоненциально устойчивым. Действительно, в силу теоремы Лиувилля для мультипликаторов $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ этого решения имеем

$$|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = \exp(-\varepsilon T(\varepsilon)/2) < 1.$$

Из сказанного выше следует, что проблема гамильтоновой буферности для уравнений (5.1.10) сводится к отысканию эллиптических периодических решений при $\varepsilon = 0$. В данном пункте соответствующий анализ проведем для квазилинейного осциллятора

$$\ddot{x} + x = \mu \sin(x - \nu t). \quad (5.1.11)$$

В связи с этим введем в рассмотрение множества Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, состоящие из наборов параметров $(\mu, \nu) : \mu, \nu > 0$, при которых уравнение (5.1.11) имеет не менее n различных эллиптических периодических решений. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Множество Ω_n не пусто при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Достаточно ясно, что при $\mu \sim 1$ проблема нахождения интересующих нас периодических решений нелокальна. Однако она становится локальной при дополнительных условиях

$$0 < \mu \ll 1, \quad \nu = m + \delta\mu, \quad \delta \sim 1, \quad (5.1.12)$$

где m – некоторое фиксированное натуральное число, а знак параметра δ произволен. Смысл этих условий ясен: малость μ позволяет воспользоваться асимптотическими методами, а специальный выбор ν обеспечивает близость к резонансу $m : 1$ между частотой внешнего воздействия и собственной частотой колебаний системы.

Для удобства последующего анализа сначала, полагая $\dot{x} = y$, $z = x - \nu t$, перейдем от уравнения (5.1.11) к системе, затем выполним полярную замену

переменных $x = \rho \sin \tau$, $y = \rho \cos \tau$, а после этого примем τ за новое время. В результате с учетом равенств (5.1.12) получим следующую двумерную неавтономную систему с 2π -периодическими по τ коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \mu \sin z \cos \tau / \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \sin z \sin \tau\right), \\ \frac{dz}{d\tau} &= (\rho \cos \tau - m - \delta\mu) / \left(1 - \frac{\mu}{\rho} \sin z \sin \tau\right). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Обозначим через $(\rho(\tau, \rho_0, z_0, \mu), z(\tau, \rho_0, z_0, \mu))$ решение системы (5.1.13) с произвольно фиксированными начальными условиями $(\rho_0, z_0) : \rho_0 > 0, z_0 \in \mathbb{R}$, заданными при $\tau = 0$. Рассмотрим, далее, уравнения для нахождения начальных условий ρ_0, z_0 периодических решений. В нашем случае упомянутые уравнения имеют вид

$$\rho(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) = \rho_0, \quad z(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) = z_0 - 2\pi m, \quad (5.1.14)$$

поскольку фазовая переменная z должна обладать периодичностью второго рода, т. е. $z(\tau + 2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \equiv z(\tau, \rho_0, z_0, \mu) - 2\pi m$.

Анализ системы (5.1.14) не вызывает затруднений. Действительно, подставим в нее вытекающие из (5.1.13) и справедливые равномерно по $0 \leq \tau \leq 2\pi$ асимптотические представления для $\rho(\tau, \rho_0, z_0, \mu), z(\tau, \rho_0, z_0, \mu)$:

$$\rho = \rho_1(\tau) + \mu\rho_2(\tau) + O(\mu^2), \quad z = z_1(\tau) + \mu z_2(\tau) + O(\mu^2), \quad (5.1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau) &\equiv \rho_0, \quad z_1(\tau) = z_0 + \rho_0 \sin \tau - m\tau, \quad \rho_2(\tau) = \int_0^\tau \sin z_1(s) \cos s ds, \\ z_2(\tau) &= \int_0^\tau \left[\frac{1}{\rho_0} (\rho_0 \cos s - m) \sin z_1(s) \sin s - \delta + \rho_2(s) \cos s \right] ds. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

В результате после приведения подобных слагаемых, сокращения на μ и предельного перехода при $\mu \rightarrow 0$ для нахождения ρ_0, z_0 получаем систему

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\rho_0 \sin s - ms) \cos s ds \sin z_0 &= 0, \\ -\frac{m}{\rho_0} \int_0^{2\pi} \sin(\rho_0 \sin s - ms) \sin s ds \cos z_0 - 2\pi\delta &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

И наконец, воспользуемся известными соотношениями

$$\exp(i\rho_0 \sin s - im s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\rho_0) \exp(i(p-m)s),$$

$$J_{p+1}(\rho_0) + J_{p-1}(\rho_0) = \frac{2p}{\rho_0} J_p(\rho_0), \quad J_{p+1}(\rho_0) - J_{p-1}(\rho_0) = -2J'_p(\rho_0),$$

где J_p – функции Бесселя, позволяющими вычислить входящие в (5.1.17) интегралы и преобразовать интересующую нас систему к более простому виду

$$\frac{2\pi m}{\rho_0} J_m(\rho_0) \sin z_0 = 0, \quad \frac{2\pi m}{\rho_0} J'_m(\rho_0) \cos z_0 - 2\pi\delta = 0. \quad (5.1.18)$$

Исследование системы (5.1.18) проведем в наиболее интересном случае $\delta = 0$, когда имеет место точный резонанс. Нетрудно увидеть, что при $\delta = 0$ она допускает счетное число решений

$$(\rho_0, z_0) = (\rho_{0,k}, 0), (\rho_{0,k}, \pi) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.1.19)$$

где $\rho_{0,k}$ – занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J'_m(\rho_0) = 0$. Заметим, далее, что каждое отдельно взятое решение (5.1.19) порождает при всех достаточно малых $\mu > 0$ решение $(\rho_k(\mu), z_k(\mu)) : \rho_k(0) = \rho_{0,k}, z_k(0) = 0$ или π , исходной системы (5.1.14). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно учесть в (5.1.18) отброшенные слагаемые порядка μ и применить к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным ρ_0, z_0 в точке $\rho_0 = \rho_{0,k}, z_0 = 0$ или $\pi, \mu = 0$. Подчеркнем, что условия упомянутой теоремы здесь заведомо выполняются, так как асимптотические представления (5.1.15), (5.1.16) допускают, очевидно, дифференцирование по ρ_0, z_0 и якобиан системы (5.1.18), вычисленный на любом решении (5.1.19), в силу неравенств

$$J_m(\rho_{0,k})J''_m(\rho_{0,k}) < 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.1.20)$$

отличен от нуля.

Подведем итог. Из проделанного анализа вытекает существование для любого натурального n такого достаточно малого $\mu_n > 0$, что при $\delta = 0, 0 < \mu \leq \mu_n$ система (5.1.13) заведомо имеет $2n$ периодических решений, отвечающих корням (5.1.19) при $k = 1, \dots, n$. Более того, все эти решения оказываются эллиптическими. В самом деле, их мультипликаторы –

это спектр матриц Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) & \frac{\partial \rho}{\partial z_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) & \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi, \rho_0, z_0, \mu) \end{pmatrix}, \quad (5.1.21)$$

вычисленных на найденных выше решениях системы (5.1.14). Остается добавить, что в силу (5.1.15), (5.1.16), (5.1.19), (5.1.20) собственные значения каждой из матриц (5.1.21) комплексные и допускают асимптотику вида

$$\lambda(\mu) = 1 \pm i\mu \frac{2\pi m}{\rho_{0,k}} \sqrt{-J_m(\rho_{0,k})J_m''(\rho_{0,k})} + O(\mu^2).$$

Теорема 5.1 полностью доказана.

5.1.3. Анализ уравнений маятникового типа

Обратимся теперь к уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \sin x &= \mu \sin(x - \nu t), \\ \ddot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

В отличие от предыдущего случая помимо обычных периодических решений $x(t)$, $x(t+T) \equiv x(t)$, $T > 0$, которые принято называть колебательными, у этих уравнений возможны еще так называемые вращательные периодические движения $x(t)$, для которых $x(t+T) \equiv x(t) + 2\pi m$ при некотором целом $m \neq 0$. В связи с этим для каждого из уравнений (5.1.22) введем в рассмотрение две серии множеств. Через Ω_n^1 обозначим совокупность наборов параметров (μ, ν) , при которых соответствующее уравнение имеет не менее n различных эллиптических колебательных периодических решений, а через Ω_n^2 будем обозначать аналогичное множество для вращательных движений.

Теорема 5.2. *Для каждого из уравнений (5.1.22) не пусто множество $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Изучим сначала вопрос о существовании у первого уравнения (5.1.22) при $0 < \mu \ll 1$ вращательных периодических движений с положительными скоростями \dot{x} . В связи с этим обратим внимание, что при $\mu = 0$ каждое из уравнений (5.1.22) имеет семейство таких решений,

задающееся равенством $\dot{x} = \sqrt{2(\xi + \cos x)}$, где параметр $\xi > 1$ произволен. Обыгрывая данное обстоятельство, перейдем от выбранного уравнения к трехмерной системе для $(x, y, z) = (x, \dot{x}, x - \nu t)$, затем выполним в получившейся системе замену $(x, y) \rightarrow (\tau, \xi)$, исходя из формул

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad (5.1.23)$$

и в заключение примем τ за новое время. В результате получим систему

$$\frac{dz}{d\tau} = 1 - \nu/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \mu \sin z, \quad (5.1.24)$$

которую, естественно, следует рассматривать в области $\xi > 1$.

Как и при доказательстве теоремы 5.1, обозначим через $(z(\tau, z_0, \xi_0, \mu), \xi(\tau, z_0, \xi_0, \mu))$ решение системы (5.1.24) с произвольно фиксированными начальными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 > 1$ при $\tau = 0$ и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, \xi_0, \mu) = z_0 \pmod{2\pi}, \quad \xi(2\pi, z_0, \xi_0, \mu) = \xi_0 \quad (5.1.25)$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений. Подставим, далее, в систему (5.1.25) вытекающие из (5.1.24) асимптотические формулы

$$z(\tau, z_0, \xi_0, \mu) = z_1(\tau) + O(\mu), \quad \xi(\tau, z_0, \xi_0, \mu) = \xi_0 + \mu \xi_1(\tau) + O(\mu^2), \quad (5.1.26)$$

где

$$z_1(\tau) = z_0 + \tau - \nu \int_0^\tau ds / \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}, \quad \xi_1(\tau) = \int_0^\tau \sin z_1(s) ds. \quad (5.1.27)$$

В результате после некоторых преобразований и отбрасывания слагаемых порядка μ приходим к аналогичной (5.1.17) предельной системе

$$\begin{aligned} \nu \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)}} &= 2\pi p, \quad p \in \mathbb{N}; \\ \int_0^{2\pi} \cos \left(s - \nu \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \sigma)}} \right) ds \sin z_0 &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

которая, в принципе, содержит всю необходимую нам информацию.

Нетрудно увидеть, что получившаяся система допускает счетные наборы решений

$$(z_0, \xi_0) = (0, \xi_{0,p}), (\pi, \xi_{0,p}), p = 1, 2, \dots, \quad (5.1.29)$$

где $\xi_{0,p}, \xi_{0,p} \searrow 1$ при $p \rightarrow \infty$ — корни первого уравнения из (5.1.28) при всевозможных $p \in \mathbb{N}$ (поскольку левая часть этого уравнения как функция переменной ξ_0 монотонно убывает при $1 < \xi_0 < \infty$ от $+\infty$ до нуля, то $\xi_{0,p}, p \geq 1$ определяются однозначно). Следуя описанной при доказательстве теоремы 5.1 схеме, можно показать, что каждому фиксированному решению (5.1.29) при всех достаточно малых $\mu > 0$ соответствует периодическое решение в исходном уравнении. Однако для того чтобы воспользоваться упомянутой схемой, необходимо убедиться в отличии от нуля якобиана системы (5.1.28) на любом из решений (5.1.29), что, в свою очередь, сводится к проверке неравенств $I_p \neq 0, p \in \mathbb{N}$, где

$$I_p = \int_0^{2\pi} \cos \left(\tau - \nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} \right) d\tau. \quad (5.1.30)$$

Для вычисления интеграла (5.1.30) воспользуемся соотношениями

$$\nu = \frac{\pi p}{kF(\pi/2, k)}, \quad \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} = kF(\tau/2, k), \quad (5.1.31)$$

где $k = \sqrt{2/(\xi_{0,p} + 1)}$, $F(\tau, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, задающийся равенством $F(\tau, k) = \int_0^\tau ds / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}$. Подставляя, далее, формулы (5.1.31) в (5.1.30) и выполняя последовательно замены $\tau/2 \rightarrow \tau$, $\tau = \text{am}(u, k)$, где $\text{am}(u, k)$ — функция, определяющаяся как неявная из уравнения $F(\tau, k) = u$, приведем интересующий нас интеграл к виду

$$I_p = 2 \int_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u)(1 - 2\text{sn}^2 u) \text{dn} u du + \\ + 4 \int_0^{\pi/\omega} \sin(2p\omega u) \text{sn} u \text{cn} u \text{dn} u du, \quad (5.1.32)$$

где $\text{sn} u = \sin(\text{am}(u, k))$, $\text{cn} u = \cos(\text{am}(u, k))$ — эллиптические синус и косинус соответственно, $\text{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}$, $\omega = \pi/(2F(\pi/2, k))$.

Последующий анализ базируется на очевидных соотношениях

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u)(1 - 2\operatorname{sn}^2 u) \operatorname{dn} u \, du = \int_0^{\pi/\omega} \cos(2p\omega u) d(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u) = \\
& = 2p\omega \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \sin(2p\omega u) \, du = -\frac{2p\omega}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \sin(2p\omega u) d(\operatorname{dn} u) = \\
& = \frac{4p^2\omega^2}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{dn} u \cos(2p\omega u) \, du, \quad 2 \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \sin(2p\omega u) \, du = \\
& = \int_0^{\pi/\omega} \sin(2p\omega u) d(\operatorname{sn}^2 u) = -2p\omega \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sn}^2 u \cos(2p\omega u) \, du = \\
& = \frac{2p\omega}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{dn}^2 u \cos(2p\omega u) \, du,
\end{aligned}$$

позволяющих без труда вычислить требуемый интеграл. Действительно, указанные равенства приводят формулу (5.1.32) к виду

$$I_p = \frac{8p^2\omega^2}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{dn} u \cos(2p\omega u) \, du + \frac{4p\omega}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{dn}^2 u \cos(2p\omega u) \, du. \quad (5.1.33)$$

Учитывая затем в (5.1.33) известные разложения Фурье (см., например, [126])

$$\begin{aligned}
\operatorname{dn} u &= \omega + 4\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos(2n\omega u), \\
k^2 \operatorname{sn}^2 u &= 1 - 2E\omega/\pi - 8\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos(2n\omega u),
\end{aligned} \quad (5.1.34)$$

где

$$q = \exp\left(-\pi \frac{F(\pi/2, \sqrt{1-k^2})}{F(\pi/2, k)}\right), \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 s} \, ds, \quad (5.1.35)$$

убеждаемся, что

$$I_p = \frac{8\pi\nu^2 q^p}{1 - q^{4p}} > 0, \quad p \in \mathbb{N}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I_p = \frac{8\pi\nu^2 \exp(-\pi\nu/2)}{1 - \exp(-2\pi\nu)} > 0. \quad (5.1.36)$$

Как уже было сказано выше, неравенства (5.1.36) гарантируют существование для любого натурального n такого $\mu_n > 0$, что при $0 < \mu \leq \mu_n$ первое уравнение (5.1.22) допускает $2n$ вращательных периодических движений с положительными скоростями, отвечающих решениям (5.1.29) при $p = 1, \dots, n$. Несложный анализ аналогичных (5.1.21) матриц Якоби показывает, что при $z_0 = \pi$ получаются эллиптические периодические решения (которые, собственно говоря, нас и интересуют), а при $z_0 = 0$ – седловые.

Рассмотрение вопроса о существовании у первого уравнения (5.1.22) вращательных периодических движений с отрицательными скоростями приводит к аналогичной (5.1.24) системе

$$\frac{dz}{d\tau} = 1 + \nu/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \mu \sin z, \quad (5.1.37)$$

получающейся из исходного уравнения при переходе к системе для переменных $(x, y, z) = (x, \dot{x}, -x + \nu t)$ и замене вида (5.1.23), в которой $x = -\tau$, $y = -\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}$.

Анализ системы (5.1.37) практически идентичен описанному выше. Действительно, здесь в целом сохраняются равенства (5.1.25) – (5.1.31), только в первой формуле (5.1.27), во втором уравнении (5.1.28) и в интеграле (5.1.30) необходимо заменить ν на $-\nu$. Вычисление упомянутого интеграла по-прежнему базируется на формулах (5.1.34), (5.1.35) и приводит к аналогичным (5.1.36), но противоположным неравенствам

$$I_p = -\frac{8\pi\nu^2 q^{3p}}{1 - q^{4p}} < 0, \quad p \in \mathbb{N}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I_p = -\frac{8\pi\nu^2 \exp(-3\pi\nu/2)}{1 - \exp(-2\pi\nu)} < 0. \quad (5.1.38)$$

Однако, как и ранее, из (5.1.38) следует, что решениям (5.1.29) при $z_0 = \pi$ отвечают эллиптические периодические движения исходного уравнения, а при $z_0 = 0$ – седловые (смена знака I_p не повлияла на тип решений, поскольку одновременно сменился и знак перед ν в уравнении для z).

В случае второго уравнения (5.1.22) в силу того, что оно не меняется при $x \rightarrow -x$, достаточно ограничиться рассмотрением только вращательных периодических движений с положительными скоростями. Таким образом, проблема сводится к анализу системы

$$\frac{dz}{d\tau} = \nu/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\mu \cos z \sin \tau, \quad (5.1.39)$$

которая получается из исходного уравнения при переходе к координатам $(x, y, z) = (x, \dot{x}, \nu t)$ и последующей замене переменных (5.1.23).

Опуская промежуточные выкладки, приведем сразу соответствующие системе (5.1.39) уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \nu \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \tau)}} &= 2\pi p, \quad p \in \mathbb{N}; \\ \int_0^{2\pi} \sin s \sin \left(\nu \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos \sigma)}} \right) ds \sin z_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

для нахождения начальных условий (z_0, ξ_0) вращательных периодических движений. Заметим, далее, что система (5.1.40) допускает те же самые решения (5.1.29), что и аналогичная ей система (5.1.28). Что же касается интегралов

$$I_p = \int_0^{2\pi} \sin \tau \sin \left(\nu \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,p} + \cos s)}} \right) d\tau, \quad p \geq 1,$$

то их вычисление, осуществляющееся описанным выше способом, приводит к формулам:

$$I_p = \frac{4\pi\nu^2 q^p}{1 - q^{2p}} > 0, \quad p \in \mathbb{N}; \quad \lim_{p \rightarrow \infty} I_p = \frac{4\pi\nu^2 \exp(-\pi\nu/2)}{1 - \exp(-\pi\nu)} > 0. \quad (5.1.41)$$

И наконец, несложная проверка с учетом неравенств (5.1.41) показывает, что в отличие от двух предыдущих случаев здесь решениям (5.1.29) при $z_0 = \pi$ отвечают седловые периодические движения исходного уравнения, а интересующие нас эллиптические решения получаются при $z_0 = 0$.

Итак, для завершения доказательства теоремы 5.2 осталось разобраться с вопросом о существовании у уравнений (5.1.22) колебательных эллиптических периодических движений. Рассмотрим сначала первое из этих уравнений и обыграем тот факт, что при $\mu = 0$ оно имеет целое семейство колебательных решений, задающееся равенствами

$$x = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi}{\omega}, k \right) \right), \quad \dot{x} = 2k \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega}, k \right). \quad (5.1.42)$$

Здесь $k \in (0, 1)$ – произвольный параметр, переменная $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$ меняется по закону $\dot{\varphi} = \omega$, частота $\omega = \omega(k)$ определяется той же формулой,

что и в (5.1.32), а в эллиптических синусе и косинусе подчеркнута явная зависимость от модуля k .

Дальнейший способ действий стандартен: сначала, полагая $\dot{x} = y$, $z = x - \nu t$, перейдем от выбранного уравнения к системе, затем выполним в получившейся системе замену переменных $(x, y) \rightarrow (k, \varphi)$, исходя из формул (5.1.42), а после этого примем φ за новое время. В результате приходим к системе с 2π -периодическими по φ правыми частями, имеющей вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{2k}{\omega(k)} \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) - \frac{\nu}{\omega(k)} + O(\mu), \\ \frac{dk}{d\varphi} &= \frac{\mu}{2\omega(k)} \operatorname{sn} z \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (5.1.43)$$

Поиск периодических решений системы (5.1.43) осуществляется по уже неоднократно применявшейся выше стандартной схеме. А именно для нахождения начальных условий интересующих нас решений обратимся к аналогичным (5.1.25) уравнениям

$$z(2\pi, z_0, k_0, \mu) = z_0 \pmod{2\pi}, \quad k(2\pi, z_0, k_0, \mu) = k_0, \quad (5.1.44)$$

где $(z(\varphi, z_0, k_0, \mu), k(\varphi, z_0, k_0, \mu))$ – решение рассматриваемой системы с произвольно фиксированными начальными условиями $k_0 \in (0, 1)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, заданными при $\varphi = 0$. Подставим, далее, в (5.1.44) очевидные асимптотические представления

$$z(\varphi, z_0, k_0, \mu) = z_1(\varphi) + O(\mu), \quad k(\varphi, z_0, k_0, \mu) = k_0 + \mu k_1(\varphi) + O(\mu^2),$$

где

$$\begin{aligned} z_1(\varphi) &= z_0 - \frac{\nu}{\omega(k_0)} \varphi + 2 \operatorname{arctg} \left(k_0 \operatorname{sd} \left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \right), \\ k_1(\varphi) &= \frac{1}{2\omega(k_0)} \int_0^\varphi \operatorname{cn} \left(\frac{s}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \sin z_1(s) ds, \\ \operatorname{sd} \left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0 \right) &= \frac{\operatorname{sn}(\varphi/\omega(k_0), k_0)}{\operatorname{dn}(\varphi/\omega(k_0), k_0)}. \end{aligned}$$

В итоге для определения z_0 , k_0 приходим, как обычно, к системе первого приближения, которая в данном случае имеет вид

$$\frac{\nu}{\omega(k_0)} = p, \quad p \in \mathbb{N}; \quad I(k_0) \sin z_0 = 0, \quad (5.1.45)$$

где

$$I(k_0) = \frac{1}{2\omega(k_0)} \int_0^{2\pi} \operatorname{cn} \left(\frac{s}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \cos \left[-\frac{\nu}{\omega(k_0)} s + 2 \operatorname{arctg} \left(k_0 \operatorname{sd} \left(\frac{s}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \right) \right] ds. \quad (5.1.46)$$

Проанализируем сначала первое уравнение из (5.1.45). В связи с этим обратим внимание, что при $0 < k_0 < 1$ функция $1/\omega(k_0)$ монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. А отсюда следует, что, во-первых, при любом фиксированном $\nu > 0$ данное уравнение имеет единственное решение $k_{0,p}$ для каждого p , начиная с номера $p_0 = [\nu] + 1$ ($[*]$ – целая часть); во-вторых, вся система (5.1.45) допускает счетные наборы решений

$$(z_0, k_0) = (0, k_{0,p}), (\pi, k_{0,p}), \quad p \geq p_0. \quad (5.1.47)$$

Однако для того чтобы сделать вывод о соответствии между любым фиксированным решением (5.1.47) и периодическим движением исходной системы (5.1.43), необходимо, как и во всех предыдущих ситуациях, убедиться в отличии от нуля якобиана системы (5.1.45) в точках (5.1.47). В данном случае эта проблема сводится к проверке выполнения неравенств $I_p \neq 0$, $p \geq p_0$, где $I_p = I(k_{0,p})$ (см. (5.1.46)).

Выполним в (5.1.46) замену $u = s/\omega(k_0)$ и разобьем I_p на два слагаемых $I_p^1 + I_p^2$, где

$$I_p^1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(p\omega u) \operatorname{cn} u (1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u) du, \quad (5.1.48)$$

$$I_p^2 = \int_0^{2\pi/\omega} \sin(p\omega u) k \operatorname{cn} u \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u du$$

(в (5.1.48) для краткости мы заменили $k_{0,p}$ на k и опустили зависимость от k у эллиптических функций). Далее, из соотношений

$$-\int_0^{2\pi/\omega} k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \cos(p\omega u) du = \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sn} u \cos(p\omega u) d(\operatorname{dn} u) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{dn} u \left(-p\omega \sin(p\omega u) \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \cos(p\omega u) \right) du = \\
&= - \int_0^{2\pi/\omega} p\omega \sin(p\omega u) d(\operatorname{cn} u) - \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cn} u \operatorname{dn}^2 u \cos(p\omega u) du = \\
&= (p^2\omega^2 - 1) \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cn} u \cos(p\omega u) du + \int_0^{2\pi/\omega} k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \cos(p\omega u) du
\end{aligned}$$

закключаем, что

$$I_p^1 = \frac{p^2\omega^2}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{cn} u \cos(p\omega u) du. \quad (5.1.49)$$

Что же касается второго интеграла (5.1.48), то для него имеем

$$I_p^2 = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(p\omega u) d(\operatorname{sn}^2 u) = -\frac{k p \omega}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sn}^2 u \cos(p\omega u) du. \quad (5.1.50)$$

Вычисление получившихся интегралов базируется на втором разложении (5.1.34) и на разложении Фурье для $\operatorname{cn} u$ (см. [126]):

$$\operatorname{cn} u = \frac{4\omega}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}} \cos[(2n+1)\omega u],$$

где q определяется формулой из (5.1.35). Подставляя упомянутые разложения в (5.1.49), (5.1.50) и проводя соответствующие вычисления, убеждаемся, что

$$I_p = \frac{2\pi}{k} \frac{p^2\omega^2 q^{p/2}}{1+(-1)^{p+1}q^p} > 0, \quad p \geq p_0. \quad (5.1.51)$$

Итак, требуемое соответствие между решениями (5.1.47) и колебательными периодическими движениями первого уравнения (5.1.22) установлено. Остается добавить, что в силу (5.1.51) при $z_0 = 0$ здесь получают эллиптические решения, а при $z_0 = \pi$ – седловые.

Для нахождения колебательных периодических решений второго уравнения (5.1.22) имеем дело с аналогичной (5.1.43) системой

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\varphi} &= \frac{\nu}{\omega(k)} + O(\mu), \\ \frac{dk}{d\varphi} &= -\frac{\mu k}{\omega(k)} \cos z \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) \times \\ &\times \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) \operatorname{dn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) + O(\mu^2), \end{aligned} \quad (5.1.52)$$

получающейся из исходного уравнения при переходе к переменным x, y, z , где $y = \dot{x}$, $z = \nu t$, и последующей замене (5.1.42). А так как анализ этой системы идентичен описанному выше, то обратимся сразу к отвечающим (5.1.52) уравнениям первого приближения (5.1.45), где теперь

$$\begin{aligned} I(k_0) &= \frac{k_0}{\omega(k_0)} \int_0^{2\pi} \sin \left(\frac{\nu}{\omega(k_0)} \varphi \right) \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \times \\ &\times \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0 \right) \operatorname{dn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k_0)}, k_0 \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (5.1.53)$$

Нетрудно увидеть, что и в случае (5.1.53) система (5.1.45) допускает прежние наборы решений (5.1.47). Далее, для $I_p = I(k_{0,p})$ здесь справедливы равенства $I_p = I_p^2$, $p \geq p_0$, где I_p^2 – второй интеграл из (5.1.48), который, напомним, нами уже вычислялся. Поэтому приведем сразу окончательный результат:

$$I_p = \begin{cases} 0 & \text{при } p = 2n + 1, n = 0, 1, \dots, \\ \frac{8\pi}{k} \frac{n^2 \omega^2 q^n}{1 - q^{2n}} > 0 & \text{при } p = 2n, n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5.1.54)$$

где, естественно, $k = k_{0,p}$.

Из соотношений (5.1.54) следует, что любому решению (5.1.47) с четным номером p в исходном уравнении соответствует колебательное периодическое движение, являющееся эллиптическим при $z_0 = \pi$ и седловым в случае $z_0 = 0$. При нечетных же номерах p в силу равенств $I_p = 0$ вопрос о соответствии остается открытым.

Подведем некоторые итоги. Во-первых, из всей совокупности проделанных в данном пункте исследований вытекает, что при $\mu \rightarrow 0$ в каждом из уравнений (5.1.22) происходит неограниченное накапливание эллиптических

периодических движений, как колебательных, так и вращательных. Тем самым, автоматически имеем $\Omega_n^1 \cap \Omega_n^2 \neq \emptyset$ при любом $n \in \mathbb{N}$, что и доказывает теорему 5.2. Во-вторых, уместно вспомнить, что анализ периодических решений уравнений маятникового типа, возмущенных периодическими добавками, проводился во многих работах (см., к примеру, [81, 82], а также монографию [117] и приведенную в ней подробную библиографию). Что же касается полученных нами результатов, то они восходят к известной теореме Пуанкаре (см. [122]), которая утверждает, что в окрестности резонансной периодической орбиты невозмущенной гамильтоновой системы при малых возмущениях и при некоторой общности положения возникает не менее двух грубых периодических решений: одно седлового типа, а другое – эллиптическое. Фактически именно эта теорема и применялась нами в рассмотренных выше конкретных ситуациях.

5.1.4. Результаты численного анализа

Как уже говорилось ранее, теоремы 5.1, 5.2 решают проблему гамильтоновой буферности для уравнений (5.1.10), поскольку эллиптические периодические движения этих уравнений, существующие при $\varepsilon = 0$, при переходе к малым $\varepsilon > 0$ становятся экспоненциально устойчивыми. Однако между первым уравнением (5.1.10) и двумя другими имеется принципиальное различие: в квазилинейном случае устойчивые периодические решения обладают достаточно широкими областями притяжения, в то время как в уравнениях маятникового типа устойчивые режимы накапливаются в окрестности сепаратрис, существующих при $\varepsilon = \mu = 0$, и вследствие этого бассейны притяжения большинства из них заведомо узки. В чисто аналитическом плане данный факт выражается в том, что $\xi_{0,p} \rightarrow 1$ и $k_{0,p} \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$ (см. доказательство теоремы 5.2).

Остановимся на физическом смысле полученных результатов. Заметим, что рассмотренная в п. 5.1.1 задача о взаимодействии синхронного двигателя и маятника (см. рис. 5.4) достаточно часто встречается в реальных физических системах, поскольку при движении всевозможных манипуляторов возникает ситуация эксцентрика на валу, моделирующаяся в простейшем случае вторым уравнением (5.1.10). В связи с этим обратим внимание, что при любом фиксированном $\nu \neq 2/n$, $n \in \mathbb{N}$ данное уравнение имеет устойчивое колебательное $2\pi/\nu$ -периодическое движение малой амплитуды (порядка μ), которое описывает ”состояние покоя” рассматриваемой системы. Однако с точки зрения приложений наиболее интересен случай, когда наряду с состоянием покоя существует единственный устойчивый враща-

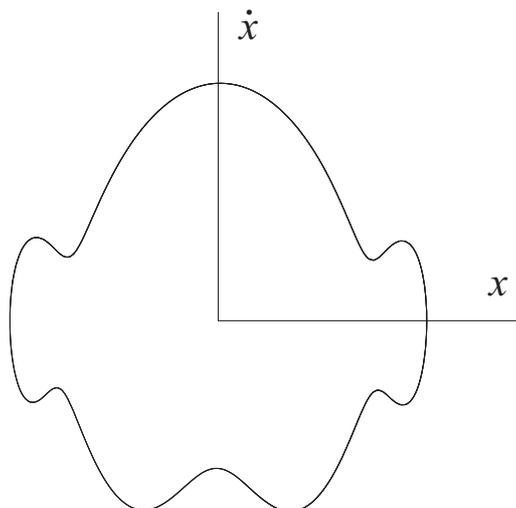


Рис. 5.6.

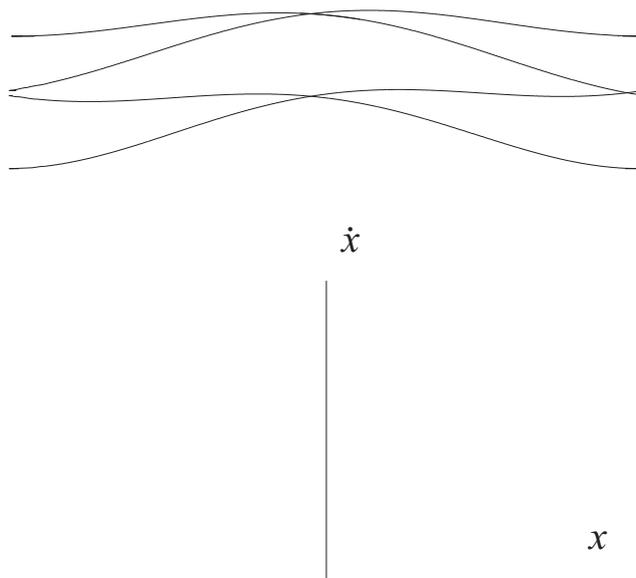


Рис. 5.7.

тельный периодический режим амплитуды порядка единицы. Это означает, что при наличии подходящего начального толчка двигатель раскручивает маятник.

Описанная выше оптимальная ситуация, казалось бы, должна наблюдаться при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении ε , т. е. при увеличении добротности системы. Но в действительности этого не происходит, а возникает явление буферности: в зависимости от выбора начальных условий могут реализовываться различные устойчивые периодические движения из достаточно большого потенциального их запаса. Таким образом, излишняя добротность приводит к нестабильной работе системы, поскольку неизвестно заранее, на какой именно устойчивый режим она выйдет при очередном запуске.

Изложенные физические соображения можно проиллюстрировать результатами компьютерного анализа второго уравнения (5.1.10). Вычисления, проделанные с помощью программы Tracer (см. [24]), показали, что, например, при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.001$, $\nu = 5$, кроме "состояния покоя", в зависимости от выбора начальных условий в этом уравнении реализуется еще не менее десяти различных устойчивых периодических решений, среди которых присутствуют как вращательные, так и колебательные. Проекция этих решений на плоскость (x, \dot{x}) при $-\pi \leq x \leq \pi$ представлены на рис. 5.6 – 5.15, в таблицах 5.1, 5.2 содержатся начальные условия, при которых такие решения уравнения (5.1.10) могут быть получены.

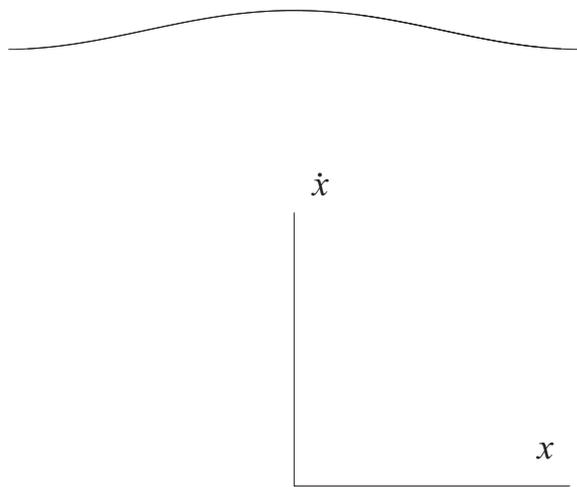


Рис. 5.8.

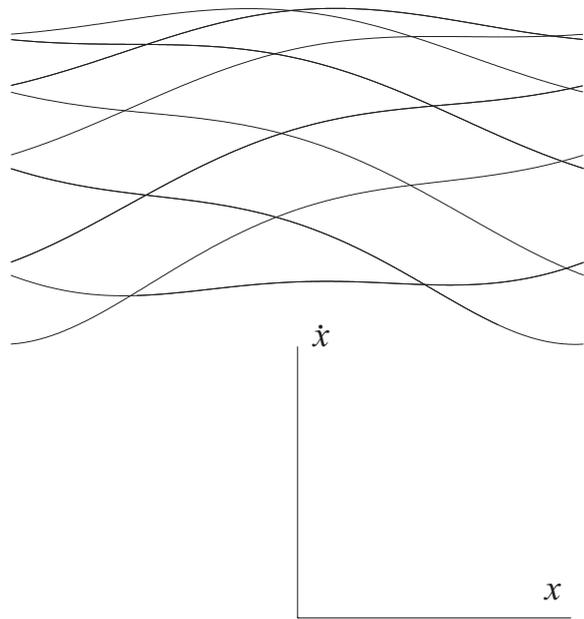


Рис. 5.9.

Таблица 5.1. Начальные значения для устойчивых режимов системы (5.1.10) при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.001$, $\nu = 5$ (см. рис. 5.6 – 5.11)

	рис. 5.6	рис. 5.7	рис. 5.8	рис. 5.9	рис. 5.10
t_0	1.08763	0.497283	0.0919828	0.209837	0.577642
$x(t_0)$	-0.317434	-1.01728	-2.70348	-2.18446	-1.64881
$\dot{x}(t_0)$	1.90617	4.63449	4.80969	6.56331	-0.203322

Таблица 5.2. Начальные значения для устойчивых режимов системы (5.1.10) при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.001$, $\nu = 5$ (см. рис. 5.12 – 5.15)

	рис. 5.11	рис. 5.12	рис. 5.13	рис. 5.14	рис. 5.15	рис. 5.16
t_0	0.354236	0.921702	0.757631	0.231062	1.17069	0.336428
$x(t_0)$	1.63298	-2.35155	2.47086	-2.54273	-2.99809	-0.201289
$\dot{x}(t_0)$	0.260565	2.67359	1.75676	2.75496	6.41465	2.72359

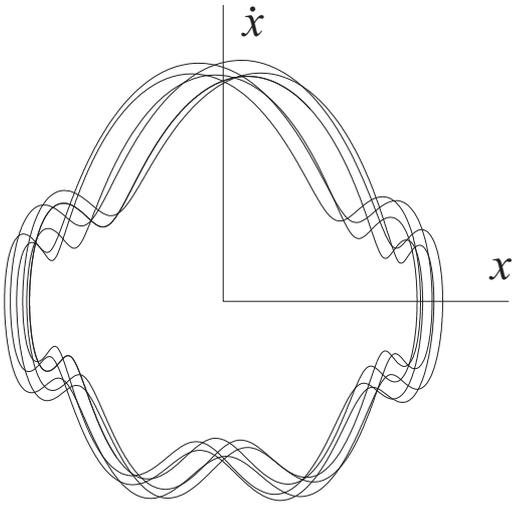


Рис. 5.10.

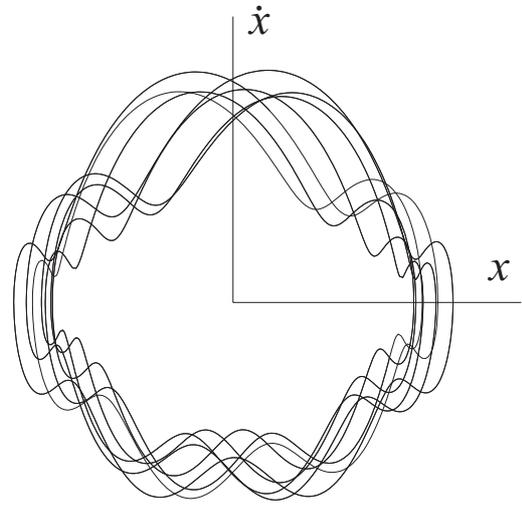


Рис. 5.11.

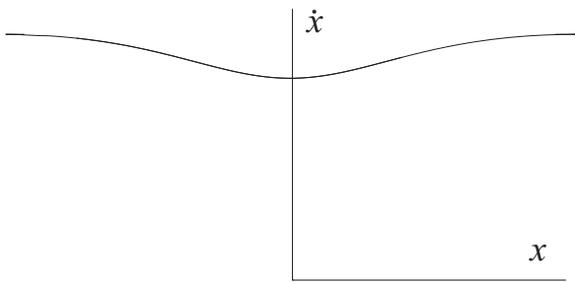


Рис. 5.12.

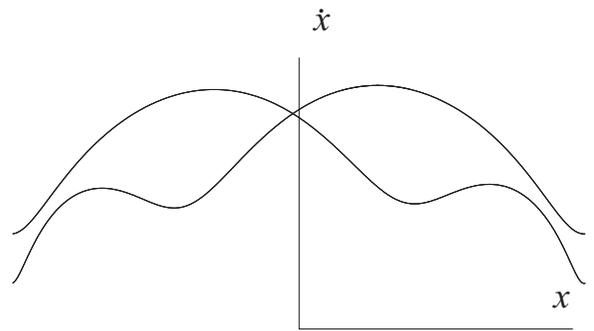


Рис. 5.13.

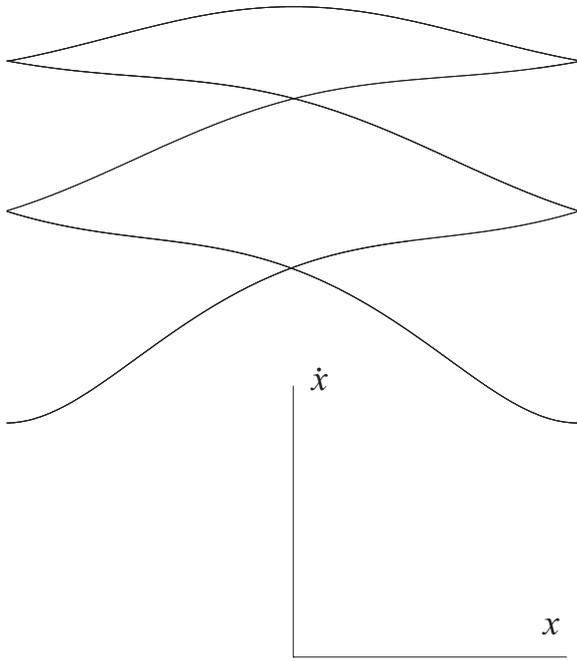


Рис. 5.14.

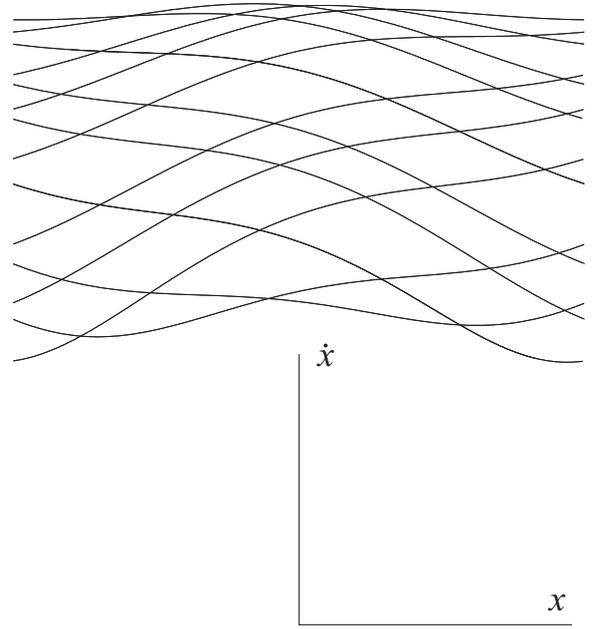


Рис. 5.15.

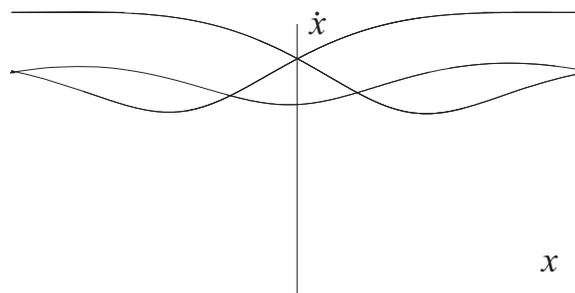


Рис. 5.16.

Заключение

В заключение отметим, что в случае обыкновенных дифференциальных уравнений помимо гамильтонова существуют и другие, значительно более сложные механизмы накопления устойчивых циклов, обусловленные наличием в системах так называемых гомоклинических касаний. Среди большого количества результатов, полученных для такого рода систем, остановимся лишь на одном, имеющем непосредственное отношение к нашим исследованиям. А именно, как установлено в [18,19], появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел. При этих бифуркациях рождаются пары циклов – устойчивый и неустойчивый, причем количество устойчивых периодических движений за счет подходящего выбора бифуркационных параметров может быть сделано сколь угодно большим.

Описанный механизм возникновения буферности реализуется, по всей видимости, во втором и третьем уравнениях (5.1.10) при $\mu = \varepsilon\gamma$, $\gamma \sim 1$. Действительно, используя развитую в п. 5.1.3 технику и результаты монографии [64], относящиеся к уравнению Дуффинга, можно установить существование критических значений параметра γ , при которых происходят гомоклинические касания, а также наличие любого конечного числа критических значений γ , отвечающих бифуркациям типа седло-узел.

5.2. О предельных значениях функций Мельникова на периодических орбитах

Рассматривается двумерная гамильтонова система, возмущенная малыми периодическими по времени добавками. Для этой системы вводится последовательность $M_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ функций Мельникова, вычисленная на резонансных циклах, периоды которых находятся в отношении $n : 1$ с периодом внешнего воздействия. Основное предположение заключается в том, что упомянутые циклы располагаются внутри некоторого замкнутого контура Γ , составленного из двух сепаратрис и двух седел, и при $n \rightarrow \infty$ стремятся к Γ . Показывается, что в отличие от случая, когда Γ состоит из одной сепаратрисной петли и седла, здесь $M_n(t)$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, возникает проблема отыскания всех частичных пределов этой последовательности, которая и решается в данной статье. Полученные результаты используются для исследования феномена буферности (существования при подходящем выборе параметров любого фиксированного числа устойчивых периодических движений) в слабо возмущенных гамильтоновых системах. Проводится анализ конкретного примера – классического уравнения колебаний нелинейного маятника с вибрирующей точкой подвеса.

5.2.1. Постановка задачи и описание результатов

Как уже было сказано выше, объектом исследования в данном разделе является двумерная неавтономная система вида

$$\dot{x} = H'_y(x, y) + \varepsilon f(t, x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y) + \varepsilon g(t, x, y). \quad (5.2.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции $H(x, y)$ и $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ бесконечно дифференцируемы по совокупности переменных $(x, y) \in G$ и $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times G$ соответственно, где $G \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область. Кроме того, возмущения f , g предполагаем периодическими по t с некоторым периодом $T_0 > 0$.

Основные ограничения, при которых будет изучаться система (5.2.1), относятся к предельной гамильтоновой системе

$$\dot{x} = H'_y(x, y), \quad \dot{y} = -H'_x(x, y). \quad (5.2.2)$$

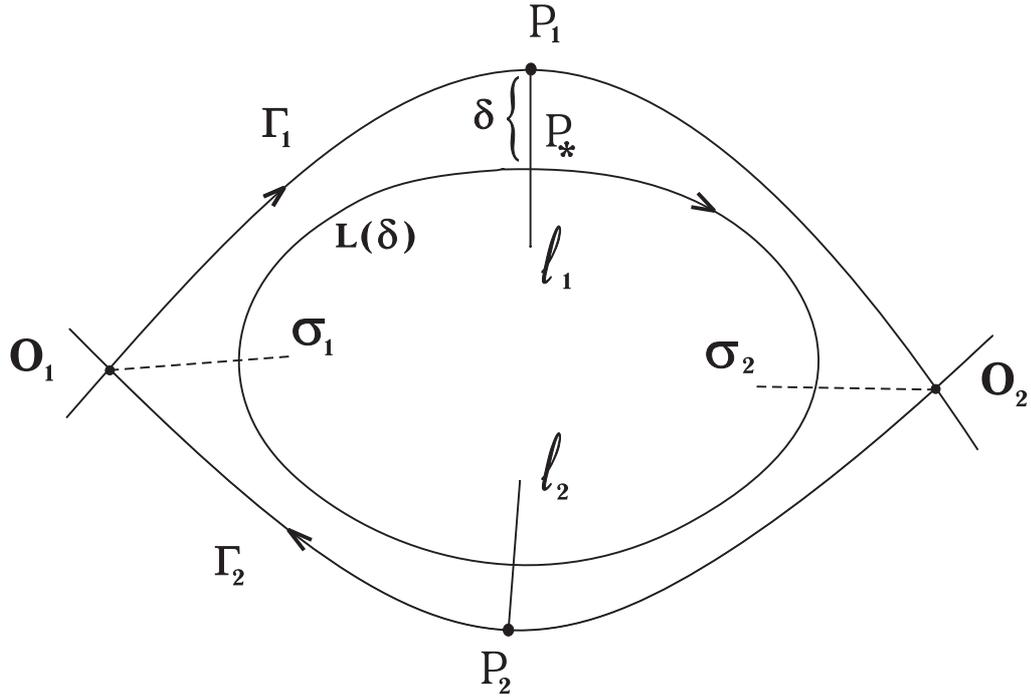


Рис. 5.17.

Условие 1. Считаем, что система (5.2.2) имеет в области G замкнутый контур Γ (см. рис. 5.17), состоящий из двух седел O_1, O_2 и двух сепаратрис

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1(t), y_1(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_1, \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), y_1(t)) = O_2; \\ \Gamma_2 &= \{(x_2(t), y_2(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \lim_{t \rightarrow -\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_2, \lim_{t \rightarrow +\infty} (x_2(t), y_2(t)) = O_1. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Сделанные предположения позволяют ввести две функции Мельникова

$$M^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t + \tau, x_j(\tau), y_j(\tau)) d\tau, \quad j = 1, 2, \quad (5.2.4)$$

где $\Phi(t, x, y) = H'_x(x, y)f(t, x, y) + H'_y(x, y)g(t, x, y)$, отвечающие сепаратрисам (5.2.3). Как известно [109], если какая-либо из данных функций имеет простые нули, то это влечет трансверсальность пересечения двух инвариантных многообразий системы (5.2.1), возникающих при $\varepsilon > 0$ в результате расщепления соответствующей сепаратрисы.

Для описания следующего ограничения рассмотрим точку $P_1 = (x_1(0), y_1(0))$ на Γ_1 и обозначим через l_1 отрезок нормали к кривой Γ_1 в этой точке, направленный внутрь контура Γ (см. рис. 5.17).

Условие 2. *Считаем, что в области, ограничиваемой кривой Γ , система (5.2.2) имеет однопараметрическое семейство циклов*

$$L(\delta) = \{(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) : 0 \leq t \leq T(\delta)\}, \quad 0 < \delta \leq \delta_*, \quad (5.2.5)$$

периоды $T(\delta)$ которых обладают свойствами:

$$T(\delta) > 0, \quad T'(\delta) < 0 \quad \text{при} \quad \delta \in (0, \delta_*], \quad T(\delta) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow +0. \quad (5.2.6)$$

Считаем еще, что фазовые траектории (5.2.5) пересекают l_1 без касания, причем (см. рис. 5.17) $P_* = (x_*(0, \delta), y_*(0, \delta)) \in l_1$, $\rho(P_*, P_1) = \delta$, где $\rho(*, *)$ – евклидова метрика.

Условие 3. *Предполагаем, что $h'(\delta) \neq 0$ при $\delta \in (0, \delta_*]$, где*

$$h(\delta) = H(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)). \quad (5.2.7)$$

Нетрудно увидеть, что условие 2 обеспечивает существование последовательности функций Мельникова $M_n(t)$, о которой говорилось выше. Действительно, в силу (5.2.6) каждое из уравнений $T(\delta) = nT_0$, начиная с некоторого номера n_0 , допускает единственное решение $\delta_n \in (0, \delta_*]$, причем $\delta_n \searrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, интересующая нас последовательность задается равенствами

$$M_n(t) = \int_0^{nT_0} \Phi(t + \tau, x_n^*(\tau), y_n^*(\tau)) d\tau, \quad n \geq n_0, \quad (5.2.8)$$

где $x_n^*(t) = x_*(t, \delta_n)$, $y_n^*(t) = y_*(t, \delta_n)$. Что же касается условия 3, то его смысл прояснится в следующем пункте. Пока лишь отметим, что в совокупности с двумя предыдущими условиями оно позволяет воспользоваться известными асимптотическими методами анализа слабо возмущенных гамильтоновых систем (см., например, [64, 117, 118]) и получить следующее стандартное утверждение о соответствии между простыми нулями какой-либо из функций (5.2.8) и грубыми периодическими решениями исходной системы (5.2.1).

Лемма 5.1. Пусть выполнены условия 1 – 3 и при некотором фиксированном $n \geq n_0$ функция $M_n(t)$ имеет только простые нули, количество которых на полуинтервале $[0, T_0)$ равно $2p$, $p \geq 1$. Предположим, далее, что справедливо неравенство

$$s_n = \int_0^{nT_0} s(\tau, x_n^*(\tau), y_n^*(\tau)) d\tau \neq 0, \quad (5.2.9)$$

где $s(t, x, y) = f'_x(t, x, y) + g'_y(t, x, y)$. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (5.2.1) имеет $2p$ грубых nT_0 -периодических решений, половина из которых седлового типа, а половина – фокусы (устойчивые при $s_n < 0$ и неустойчивые в противном случае).

Обратимся теперь к нашей основной проблеме, которая заключается в нахождении всех частичных пределов последовательности (5.2.8) при $n \rightarrow \infty$. Как будет ясно из дальнейшего, ее решение базируется на асимптотических свойствах $T(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$. Для выявления этих свойств обозначим через l_2 отрезок внутренней нормали к кривой Γ в точке $P_2 = (x_2(0), y_2(0)) \in \Gamma_2$ (см. рис. 5.17) и представим $T(\delta)$ в виде суммы $\tau_1(\delta) + \tau_2(\delta)$, где $\tau_1(\delta)$ – время движения по траектории (5.2.5) от l_1 до l_2 , а $\tau_2(\delta)$ – время возврата с l_2 на l_1 .

Лемма 5.2. Существуют конечные пределы

$$\varkappa_* = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_1(\delta) - \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad \varkappa_{**} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\tau_2(\delta) - \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{1}{\delta} \right), \quad (5.2.10)$$

где $\pm \lambda_1$ и $\pm \lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) – характеристические показатели седел O_1 и O_2 .

Приведенная лемма позволяет установить следующее утверждение, являющееся основным результатом данного параграфа.

Теорема 5.3. В случае иррационального отношения λ_1/λ_2 множество всех (равномерных по $t \in [0, T_0]$) частичных пределов последовательности (5.2.8) при $n \rightarrow \infty$ состоит из непрерывного семейства функций

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + z), \quad (5.2.11)$$

где $M^{(1)}, M^{(2)}$ – функции Мельникова (5.2.4), а непрерывный параметр z пробегает отрезок $[0, T_0]$. В случае же, когда $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$

– взаимно просты, упомянутое множество дискретно и исчерпывается конечным набором функций

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + m p T_0/q + c_0), \quad m = 0, 1, \dots, q - 1, \quad (5.2.12)$$

где

$$c_0 = (\lambda_2 \varkappa_* - \lambda_1 \varkappa_{**})/(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (5.2.13)$$

Следует добавить, что в случае рационального λ_1/λ_2 в силу неравенства $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) < 1$ с необходимостью имеем $q \geq 2$. Таким образом, при условии, что $M^{(2)}(t) \not\equiv \text{const}$ и что T_0 – наименьший период этой функции, вне зависимости от значения λ_1/λ_2 множество частичных пределов последовательности (5.2.8) содержит как минимум два элемента. Для сравнения напомним [64], что в более простой ситуации, когда Γ состоит из одной сепаратрисной петли $\Gamma_0 = \{(x_0(t), y_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ и седла O , эта последовательность сходится к функции Мельникова $M_0(t)$, вычисленной на Γ_0 по аналогичной (5.2.4) формуле.

Будем говорить о явлении *гамильтоновой буферности*, если при подходе уменьшении ε и при фиксированных прочих параметрах можно добиться сосуществования в системе (5.2.1) любого наперед заданного конечного числа экспоненциально устойчивых периодических по t решений. Достаточные условия реализуемости этого явления содержатся в следующем утверждении, вытекающем из теоремы 5.3.

Теорема 5.4. *Предположим, что в дополнение к условиям 1 – 3 некоторая функция $M_*(t) = M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + z_*)$, $z_* \in [0, T_0]$, принадлежащая множеству частичных пределов последовательности (5.2.8), имеет на полуинтервале $[0, T_0)$ ровно $2p$, $p \geq 1$ нулей, каждый из которых является простым. Пусть, далее, выполняется неравенство*

$$s_\infty = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O_2} \right] d\tau < 0, \quad (5.2.14)$$

где функция $s(t, x, y)$ та же, что и в (5.2.9). Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество экспоненциально устойчивых периодических по t решений системы (5.2.1) неограниченно растет.

Уместно отметить, что теорема 5.4 справедлива и в случае $\Gamma = \Gamma_0 \cup O$, о котором говорилось выше, если заменить неравенство (5.2.14) условием

$$s_\infty = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[s(\tau, x, y) \Big|_{(x,y)=O} \right] d\tau < 0, \quad (5.2.15)$$

а в качестве $M_*(t)$ взять предел $M_0(t)$ последовательности (5.2.8).

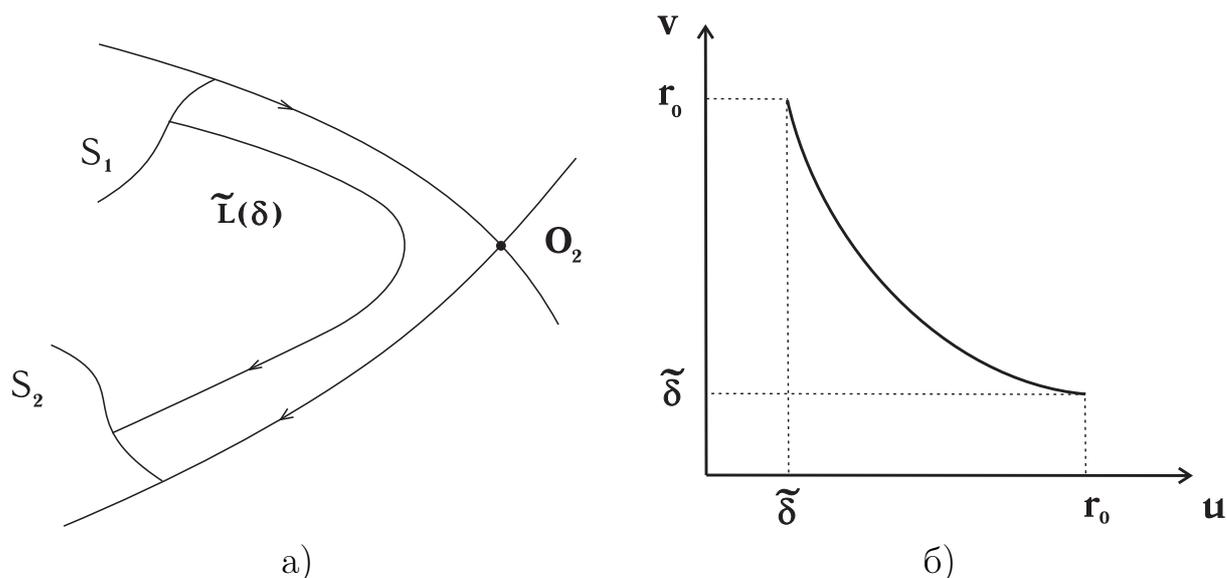


Рис. 5.18.

5.2.2. Обоснование результатов

Начнем с доказательства леммы 5.2 и убедимся, к примеру, в справедливости первого предельного равенства (5.2.10) (второе устанавливается аналогично). В связи с этим обратимся к монографиям [14, 74], из результатов которых вытекает существование в окрестности седла O_2 локального диффеоморфизма

$$(x, y) \xrightarrow{U} (u, v) \quad (5.2.16)$$

класса C^∞ со следующими свойствами. Во-первых, под действием отображения (5.2.16) состояние равновесия O_2 переходит в начало координат, а примыкающие к нему участки сепаратрис Γ_1 и Γ_2 – в отрезки $\{(u, v) : u = 0, 0 \leq v \leq r_0\}$ и $\{(u, v) : 0 \leq u \leq r_0, v = 0\}$ соответственно, где $r_0 > 0$ достаточно мало. Во-вторых, саму систему (5.2.2) замена (5.2.16) преобразует к виду

$$\dot{u} = \lambda_2(1 + \Delta(uv))u, \quad \dot{v} = -\lambda_2(1 + \Delta(uv))v, \quad (5.2.17)$$

где определенная в некоторой окрестности нуля функция $\Delta = \Delta(s)$ такова, что $\Delta(0) = 0$, $\Delta(s) \in C^\infty$.

Дальнейший анализ базируется на следующих геометрических построениях. Рассмотрим две криволинейные секущие $S_1 = U^{-1}(\gamma_1)$, $S_2 = U^{-1}(\gamma_2)$, где $\gamma_1 = \{(u, v) : 0 \leq u \leq r_0, v = r_0\}$, $\gamma_2 = \{(u, v) : u = r_0, 0 \leq v \leq r_0\}$, и участок $\tilde{L}(\delta)$ фазовой кривой (5.2.5), заключенный между ними (см. рис. 5.18а). Из явного вида системы (5.2.17) очевидным образом следует, что в новых

переменных u, v этот участок задается равенством (см. рис. 5.18б)

$$\tilde{L}(\delta) = \{(u, v) : uv = r_0\tilde{\delta}, \tilde{\delta} \leq u \leq r_0\}, \quad (5.2.18)$$

где $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\delta)$, $\tilde{\delta}(0) = 0$, $\tilde{\delta}'(0) > 0$ – некоторая функция класса C^∞ , определенная на отрезке вида $[0, \delta_{**}]$, $0 < \delta_{**} \leq \delta_*$.

На следующем этапе разобьем $\tau_1(\delta)$ на три слагаемых $\tau_{1,1}(\delta) + \tau_{1,2}(\delta) + \tau_{1,3}(\delta)$, где $\tau_{1,1}$ – время движения по траектории (5.2.5) от l_1 до S_1 , $\tau_{1,2}$ – время, которое траектория $L(\delta)$ проводит между секущими S_1 и S_2 , а $\tau_{1,3}$ – время движения от S_2 до l_2 . Отметим сразу, что первое и третье слагаемые получившейся суммы очевидным образом регулярны: $\tau_{1,1}(\delta), \tau_{1,3}(\delta) \in C^\infty[0, \delta_{**}]$, причем $\tau_{1,1}(0), \tau_{1,3}(0)$ представляют собой времена движения по участкам сепаратрис Γ_1, Γ_2 от l_1 до S_1 и от S_2 до l_2 соответственно. Что же касается слагаемого $\tau_{1,2}$, то для него из (5.2.17), (5.2.18) имеем

$$\tau_{1,2}(\delta) = \frac{\ln(r_0/\tilde{\delta}(\delta))}{\lambda_2(1 + \Delta(r_0\tilde{\delta}(\delta)))}. \quad (5.2.19)$$

И наконец, объединяя равенство (5.2.19) с отмеченными выше свойствами $\tau_{1,1}, \tau_{1,3}$, приходим к выводу, что функция $\tau_1(\delta)$ допускает представление

$$\tau_1(\delta) = \frac{\psi_1(\delta)}{\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} + \psi_2(\delta),$$

где $\psi_1(\delta), \psi_2(\delta) \in C^\infty[0, \delta_{**}]$, $\psi_1(0) = 1$. А отсюда автоматически следует первое равенство (5.2.10), в котором $\varkappa_* = \psi_2(0)$. Лемма 5.2 доказана.

Установленная лемма позволяет уже достаточно просто разобраться с вычислением частичных пределов последовательности (5.2.8). Однако для проведения соответствующего анализа нам потребуются дополнительные геометрические построения. А именно рассмотрим отрезки σ_1 и σ_2 с концами в точках O_1 и O_2 , направленные внутрь контура Γ и не касающиеся сепаратрис Γ_1, Γ_2 (см. рис. 5.17). Обозначим, далее, через $t_j(\delta)$, $j = 1, \dots, 4$ – времена движения по циклу (5.2.5) от l_1 до σ_2 , от σ_2 до l_2 , от l_2 до σ_1 и от σ_1 до l_1 соответственно. После этого заменим промежуток $[0, nT_0]$ в интеграле из (5.2.8) двумя отрезками $[-t_4(\delta_n), t_1(\delta_n)], [t_1(\delta_n), t_1(\delta_n) + t_2(\delta_n) + t_3(\delta_n)]$ (что возможно в силу периодичности подынтегральной функции с периодом $T(\delta_n) = nT_0$) и перейдем во втором из получившихся интегралов к новой переменной $\tau' = \tau - \tau_1(\delta_n)$. В результате убеждаемся, что $M_n(t) =$

$M_{n,1}(t) + M_{n,2}(t)$, где

$$M_{n,1}(t) = \int_{-t_4(\delta_n)}^{t_1(\delta_n)} \Phi(t + \tau, x_n^*(\tau), y_n^*(\tau)) d\tau, \quad (5.2.20)$$

$$M_{n,2}(t) = \int_{-t_2(\delta_n)}^{t_3(\delta_n)} \Phi(t + \theta_n + \tau, x_n^*(\tau + \tau_1(\delta_n)), y_n^*(\tau + \tau_1(\delta_n))) d\tau, \quad (5.2.21)$$

$$\theta_n = \tau_1(\delta_n) - \left[\frac{\tau_1(\delta_n)}{T_0} \right] T_0 \in [0, T_0), \quad (5.2.22)$$

а через $[*]$ обозначена, как обычно, целая часть.

Анализ последовательностей (5.2.20), (5.2.21) базируется на группе справедливых при $\delta \rightarrow 0$ асимптотических равенств:

$$(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta)) = (x_1(t), y_1(t)) + O(\sqrt{\delta}), \quad t \in [-t_4(\delta), t_1(\delta)]; \quad (5.2.23)$$

$$(x_*(t + \tau_1(\delta), \delta), y_*(t + \tau_1(\delta), \delta)) = (x_2(t), y_2(t)) + O(\sqrt{\delta}), \quad t \in [-t_2(\delta), t_3(\delta)]; \quad (5.2.24)$$

$$t_j(\delta) = \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta} + O(1), \quad j = 1, 2; \quad t_j(\delta) = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{1}{\delta} + O(1), \quad j = 3, 4, \quad (5.2.25)$$

вытекающих из проделанных при доказательстве леммы 5.2 построений. Действительно, из представления (5.2.18) для кривой $L(\delta)$ в окрестности O_2 и из аналогичного представления в окрестности O_1 заключаем, что, во-первых, расстояние от точки $(x_*(t, \delta), y_*(t, \delta))$ до контура Γ является величиной порядка δ при тех t , когда эта точка находится вне некоторых фиксированных окрестностей седел; во-вторых, $\rho(L(\delta), O_j) = O(\sqrt{\delta})$, $j = 1, 2$. А отсюда автоматически следует справедливость асимптотических формул (5.2.23), (5.2.24) равномерно по t из указанных промежутков.

Для того чтобы убедиться, к примеру, в наличии равенств (5.2.25) для $t_1(\delta)$ и $t_2(\delta)$, без ограничения общности будем считать, что секущая σ_2 в переменных (u, v) (см. (5.2.16)) записывается в виде прямой $v = u$. Далее, несложный подсчет показывает, что времена $\tilde{t}_1(\delta)$, $\tilde{t}_2(\delta)$ движения фазовой точки системы (5.2.17) по участкам кривой (5.2.18), расположенным выше и ниже секущей $v = u$, имеют порядок $\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{1}{\delta}$. Остается добавить, что $t_j(\delta) = \tilde{t}_j(\delta) + O(1)$, $j = 1, 2$.

Возвращаясь к равенствам (5.2.20), (5.2.21) и учитывая в них формулы (5.2.23) – (5.2.25) при $\delta = \delta_n$, приходим к выводу, что интересующие нас последовательности при $n \rightarrow \infty$ допускают равномерные по $t \in [0, T_0]$ асимптотические представления

$$M_{n,1}(t) = M^{(1)}(t) + O\left(\sqrt{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n}\right), \quad M_{n,2}(t) = M^{(2)}(t + \theta_n) + O\left(\sqrt{\delta_n} \ln \frac{1}{\delta_n}\right),$$

где $M^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$ – функции (5.2.4), θ_n – числовая последовательность (5.2.22). А отсюда, в свою очередь, заключаем, что множество всех равномерных частичных пределов исходной последовательности $M_n(t)$ задается равенством

$$M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + z), \quad z \in \Lambda, \quad (5.2.26)$$

где Λ – множество частичных пределов последовательности θ_n .

На завершающем этапе обоснования теоремы 5.3 воспользуемся предельными соотношениями (5.2.10), из которых следует, что

$$\tau_1(\delta_n) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} n T_0 + c_0 + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.2.27)$$

где c_0 – постоянная (5.2.13). Подставляя, далее, формулу (5.2.27) в явное выражение для θ_n (см. (5.2.22)), убеждаемся, что множество Λ либо совпадает с отрезком $[0, T_0]$ (в случае иррационального λ_1/λ_2), либо состоит из конечного числа элементов вида $(m p T_0/q + c_0) \pmod{T_0}$, $m = 0, 1, \dots, q - 1$ (если $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2) = p/q$ при взаимно простых натуральных p, q). Таким образом, в силу (5.2.26) в каждом из двух случаев получаем требуемые равенства (5.2.11) или (5.2.12), (5.2.13). Теорема 5.3 доказана.

Теорема 5.4 по существу вытекает из леммы 5.1 и уже установленной теоремы 5.3. Поэтому ниже приведем лишь краткую схему ее обоснования.

Предположим, что функция $M_*(t)$, о которой говорится в условиях этой теоремы, является пределом подпоследовательности функций Мельникова $M_{n_k}(t)$, $k \geq 1$. Тогда автоматически $M'_{n_k}(t) \rightarrow M'_*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $0 \leq t \leq T_0$ (для доказательства этого факта достаточно продифференцировать по t формулы (5.2.20), (5.2.21) и провести все дальнейшие рассуждения). А отсюда и из ограничений, наложенных на $M_*(t)$, вытекает, что, начиная с некоторого номера k_0 , все функции $M_{n_k}(t)$ имеют на полуинтервале $[0, T_0)$ только простые нули, количество которых совпадает с числом нулей функции $M_*(t)$, т. е. равно $2p$, $p \geq 1$. Кроме того, опираясь на асимптотические представления (5.2.23) – (5.2.25), нетрудно показать, что $s_{n_k}/(n_k T_0) \rightarrow s_\infty$, где s_{n_k} – подпоследовательность последовательности

(5.2.9), а s_∞ – постоянная (5.2.14), которая, напомним, предполагается отрицательной.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что условия теоремы 5.4 влекут выполнение условий леммы 5.1 сразу для бесконечной последовательности номеров n_k , $k \geq k_0$, причем $s_{n_k} < 0$, $k \geq k_0$. Применяя, далее, упомянутую лемму к любому конечному подмножеству этих номеров, получаем требуемый факт: неограниченное увеличение числа устойчивых периодических решений системы (5.2.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Итак, для придания нашему изложению необходимой полноты осталось разобраться с леммой 5.1. Как уже отмечалось выше, для ее доказательства можно воспользоваться известными асимптотическими методами из [64, 117, 118], суть которых заключается в переходе к новым переменным, одна из которых меняется медленно (со скоростью порядка ε), а другая является быстрой. В рамках условий 1 – 3 в качестве быстро-медленных переменных удобно взять координаты (φ, δ) : $0 < \delta \leq \delta_*$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, связанные с исходными переменными (x, y) равенствами

$$x = \tilde{x}_*(\varphi, \delta), \quad y = \tilde{y}_*(\varphi, \delta), \quad (5.2.28)$$

где $\tilde{x}_*(\varphi, \delta) = x_*(\varphi/\omega(\delta), \delta)$, $\tilde{y}_*(\varphi, \delta) = y_*(\varphi/\omega(\delta), \delta)$, $\omega(\delta) = 2\pi/T(\delta)$.

Дальнейший способ действий стандартен: сначала, полагая $z = t$, перейдем от (5.2.1) к трехмерной системе для (x, y, z) , затем выполним в получившейся системе замену переменных $(x, y) \rightarrow (\delta, \varphi)$, исходя из формул (5.2.28), а после этого примем φ за новое время. В результате приходим к системе с 2π -периодическими по φ правыми частями, имеющей вид

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\omega(\delta)} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\varepsilon}{\omega(\delta)h'(\delta)} \Phi(z, \tilde{x}_*(\varphi, \delta), \tilde{y}_*(\varphi, \delta)) + O(\varepsilon^2). \quad (5.2.29)$$

Здесь $h(\delta)$ – функция (5.2.7), производная которой в силу условия 3 отлична от нуля, а функция $\Phi(z, x, y)$ та же самая, что и в (5.2.4).

Для нахождения начальных условий периодических решений системы (5.2.29) обратимся к уравнениям

$$z(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = z_0 \pmod{T_0}, \quad \delta(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = \delta_0, \quad (5.2.30)$$

где $(z(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon), \delta(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon))$ – решение рассматриваемой системы с произвольно фиксированными начальными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in (0, \delta_*]$, заданными при $\varphi = 0$. Подставим, далее, в (5.2.30) очевидные асимптотические представления

$$z(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = z_1(\varphi) + O(\varepsilon), \quad \delta(\varphi, z_0, \delta_0, \varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon \Delta_1(\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad (5.2.31)$$

где

$$z_1(\varphi) = z_0 + \frac{\varphi}{\omega(\delta_0)},$$

$$\Delta_1(\varphi) = \frac{1}{\omega(\delta_0)h'(\delta_0)} \int_0^\varphi \Phi(z_1(s), \tilde{x}_*(s, \delta_0), \tilde{y}_*(s, \delta_0)) ds. \quad (5.2.32)$$

В итоге после приведения подобных слагаемых, сокращения второго из полученных уравнений на ε и отбрасывания слагаемых порядка ε для нахождения z_0, δ_0 приходим к системе первого приближения

$$\frac{2\pi}{\omega(\delta_0)} = nT_0, \quad \frac{1}{\omega(\delta_0)h'(\delta_0)} \int_0^{2\pi} \Phi(z_1(s), \tilde{x}_*(s, \delta_0), \tilde{y}_*(s, \delta_0)) ds = 0, \quad (5.2.33)$$

где натуральное n может быть произвольным. Однако нас интересует случай, когда номер n выбран в соответствии с леммой 5.1, что и считаем сделанным.

Обратимся сначала к первому уравнению из (5.2.33) и заметим, что оно эквивалентно уравнению $T(\delta_0) = nT_0$, а значит, имеет единственное решение $\delta_0 = \delta_n \in (0, \delta_*]$. Подставляя, далее, $\delta_0 = \delta_n$ во второе равенство из (5.2.33), для отыскания возможных значений z_0 получаем уравнение

$$\frac{1}{h'(\delta_n)} M_n(z_0) = 0, \quad (5.2.34)$$

где M_n – функция Мельникова (5.2.8), о которой идет речь в лемме 5.1. Поэтому уравнение (5.2.34) имеет на полуинтервале $0 \leq z_0 < T_0$ ровно $2p$, $p \geq 1$ корней $z_{0,1} < z_{0,2} < \dots < z_{0,2p}$, причем

$$M'_n(z_{0,j}) \neq 0, \quad j = 1, \dots, 2p. \quad (5.2.35)$$

Суммируя изложенное, приходим к выводу, что условия леммы 5.1 гарантируют существование у системы (5.2.33) набора решений

$$(z_0, \delta_0) = (z_{0,j}, \delta_n), \quad j = 1, \dots, 2p. \quad (5.2.36)$$

Более того, каждое отдельно взятое решение (5.2.36) порождает при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение $(z_j(\varepsilon), \delta_j(\varepsilon))$: $z_j(0) = z_{0,j}$, $\delta_j(0) = \delta_n$ исходной системы (5.2.30). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно

учесть в (5.2.33) отброшенные ранее слагаемые порядка ε и применить к получившейся системе теорему о неявной функции по переменным z_0, δ_0 в точке $z_0 = z_{0,j}, \delta_0 = \delta_n, \varepsilon = 0$. Подчеркнем, что условия упомянутой теоремы здесь заведомо выполняются, так как асимптотические представления (5.2.31), (5.2.32) допускают, очевидно, дифференцирование по z_0, δ_0 и якобиан системы (5.2.33), вычисленный на любом решении (5.2.36), в силу неравенств (5.2.35) отличен от нуля.

Подводя итог, отметим, что половина из построенных нами nT_0 -периодических решений системы (5.2.1) имеют седловой тип, а половина – фокусы. В самом деле, их мультипликаторы – это спектр матриц Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial z_0}(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) & \frac{\partial z}{\partial \delta_0}(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) \\ \frac{\partial \delta}{\partial z_0}(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) & \frac{\partial \delta}{\partial \delta_0}(2\pi, z_0, \delta_0, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (5.2.37)$$

вычисленных на найденных выше решениях системы (5.2.30). Несложный подсчет с учетом равенств (5.2.31), (5.2.32) показывает, что собственные значения $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ каждой из матриц (5.2.37) допускают асимптотику

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= 1 + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{T'(\delta_n)M'_n(z_{0,j})/h'(\delta_n)} + O(\varepsilon), \\ \lambda_2(\varepsilon) &= 1 - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{T'(\delta_n)M'_n(z_{0,j})/h'(\delta_n)} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

где $j = 1, \dots, 2p$. Далее заметим, что в силу свойств нулей функции $M_n(t)$ производная $M'_n(z_{0,j})$ меняет знак при переходе от j к $j+1$. Таким образом, ровно в половине случаев подкоренное выражение в (5.2.38) положительно, а значит, мультипликаторы $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon)$ вещественные и $|\lambda_1(\varepsilon)| > 1, |\lambda_2(\varepsilon)| < 1$. В остальных же ситуациях $\lambda_2(\varepsilon) = \bar{\lambda}_1(\varepsilon)$ и в силу теоремы Лиувилля

$$|\lambda_1(\varepsilon)| = |\lambda_2(\varepsilon)| = \exp(\varepsilon s_n/2 + O(\varepsilon^2)) < 1 \quad (> 1)$$

при $s_n < 0$ (> 0), где s_n – величина (5.2.9). Лемма 5.1 доказана.

Из проделанного при обосновании леммы 5.1 анализа и, в частности, из равенств (5.2.38) вытекает, что условия теоремы 5.4 можно несколько ослабить. А именно достаточно предположить, что предельная функция $M_*(t)$ имеет на полуинтервале $[0, T_0)$ два таких нуля t_1, t_2 , что $M'_*(t_1)M'_*(t_2) < 0$. Тогда нули $t_{1,k}, t_{2,k}$ с теми же свойствами имеют при всех k , начиная с некоторого номера k_0 , и функции $M_{n_k}(t)$, которые (см. доказательство теоремы 5.4) стремятся к $M_*(t)$ при $k \rightarrow \infty$ в метрике пространства $C^1[0, T_0]$. Остается добавить, что в силу леммы 5.1 при каждом фиксированном $k \geq k_0$

и при надлежащем уменьшении ε нулям $t_{1,k}, t_{2,k}$ отвечают два грубых периодических решения системы (5.2.1) заведомо разных типов (см. (5.2.38)). Тем самым, с необходимостью одно из них седло, а другое – устойчивый фокус.

5.2.3. Случай уравнения маятникового типа

В данном пункте полученные выше общие результаты применяются для исследования феномена гамильтоновой буферности в уравнении

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + \sin x = \varepsilon f(t, x), \quad (5.2.39)$$

описывающем вынужденные колебания нелинейного маятника с малым трением ε под действием внешней силы $\varepsilon f(t, x)$. Предполагаем, что бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных функция f периодична по t с некоторым периодом $T_0 > 0$, а по x – с периодом 2π . Типовыми примерами этой функции являются

$$f(t, x) = -a \cos \nu t \sin x, \quad a \cos \nu t \cos x, \quad a \sin(x - \nu t), \quad (5.2.40)$$

где $a, \nu > 0$. Отметим, что первые два случая (5.2.40) соответствуют маятнику, точка подвеса которого совершает вертикальные или горизонтальные гармонические колебания, а в третьем случае точка подвеса равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой ν (см. [115]).

Убедимся сначала, что после перехода к переменным (x, y) , где $y = \dot{x}$, уравнение (5.2.39) порождает систему, для которой выполняются условия 1 – 3. Действительно, в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} O_1 &= (-\pi, 0), \quad O_2 = (\pi, 0), \quad \Gamma_1 = \{(x_0(t), \dot{x}_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \\ \Gamma_2 &= \{(2\pi - x_0(t), -\dot{x}_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}, \quad x_0(t) = 4 \arctan(\exp t) - \pi, \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

а значит, справедливо первое из упомянутых условий. Далее, аналогом семейства циклов (5.2.5) для уравнения (5.2.39) служит совокупность периодических движений

$$L(k) = \{(x, y) : x=2 \arcsin(k \operatorname{sn}(t, k)), y=2k \operatorname{cn}(t, k), 0 \leq t \leq T(k)\} \quad (5.2.42)$$

с периодами $T(k) = 2\pi/\omega(k)$. Здесь $k \in (0, 1)$ – произвольный параметр, функции $\operatorname{sn}(t, k)$, $\operatorname{cn}(t, k)$ – эллиптические синус и косинус соответственно (см., например, [126]), а частота $\omega(k)$ задается равенством

$$\omega(k) = \frac{\pi}{2F(\pi/2, k)}, \quad (5.2.43)$$

где $F(\tau, k) = \int_0^\tau ds / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s}$ – эллиптический интеграл первого рода. Добавим еще, что поскольку частота (5.2.43) на интервале $0 < k < 1$ монотонно убывает от единицы до нуля, то для периода $T(k)$ цикла (5.2.42) выполняются аналоги свойств (5.2.6), которые в данном случае имеют вид:

$$T'(k) > 0 \text{ при } 0 < k < 1, \quad T(k) \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow 1 - 0. \quad (5.2.44)$$

Для проверки оставшегося условия 3 заметим, что гамильтониан $H(x, y) = 1 - \cos x + y^2/2$ на любом цикле (5.2.42) не зависит от t и принимает значение, равное $2k^2$.

Установленные факты позволяют определить для уравнения (5.2.39) требуемые функции Мельникова $M^{(1)}(t)$, $M^{(2)}(t)$, $M_n(t)$. В самом деле, для $M^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$, в соответствии с равенствами (5.2.4), (5.2.41) имеем формулы

$$M^{(1)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau, x_0(\tau)) \dot{x}_0(\tau) d\tau - 8, \quad (5.2.45)$$

$$M^{(2)}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau, -x_0(\tau)) \dot{x}_0(\tau) d\tau - 8.$$

Рассмотрим, далее, уравнения $T(k) = nT_0$, которые в силу (5.2.44) при каждом $n \geq n_0$, $n_0 = [2\pi/T_0] + 1$, допускают решения $k = k_n \in (0, 1)$, причем $k_n \nearrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. А отсюда, в свою очередь, следует, что

$$M_n(t) = \int_0^{nT_0} f(t + \tau, x_n(\tau)) \dot{x}_n(\tau) d\tau - \int_0^{nT_0} (\dot{x}_n(\tau))^2 d\tau, \quad n \geq n_0, \quad (5.2.46)$$

где $x_n(\tau) = 2 \arcsin(k_n \operatorname{sn}(\tau, k_n))$.

Приступим теперь к вопросу о реализуемости в уравнении (5.2.39) феномена гамильтоновой буферности. Характерная особенность этого уравнения состоит в том, что в отличие от рассмотренного в п. 5.2.1 общего случая помимо обычных периодических решений $x(t)$, $x(t + T_0) \equiv x(t)$, $T_0 > 0$, которые принято называть колебательными, у него возможны еще так называемые вращательные периодические движения $x(t)$, для которых $x(t + T_0) \equiv x(t) + 2\pi m$ при некотором целом $m \neq 0$. Таким образом, буферность здесь может проявляться в двух формах – колебательной и вращательной.

Теорема 5.5 (о колебательной буферности). *Предположим, что какая-либо из функций*

$$M_*(t) = M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t) \text{ или } M_*(t) = M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + T_0/2) \quad (5.2.47)$$

имеет на полуинтервале $[0, T_0)$ нули t_1, t_2 , для которых $M'_(t_1)M'_*(t_2) < 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество колебательных экспоненциально устойчивых периодических решений у уравнения (5.2.39) неограниченно растет.*

Доказательство. Заметим, что в силу симметрии в данном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и все три точки $P_1 = \Gamma_1|_{t=0}$, $P_2 = \Gamma_2|_{t=0}$, $P_* = L(k)|_{t=0}$ (см. рис. 5.17) лежат на одной прямой $S = \{(x, y) : x = 0\}$, которая, в свою очередь, перпендикулярна сепаратрисам Γ_1, Γ_2 . Поэтому автоматически $l_1, l_2 \subset S$ и, в частности, $\tau_1 = \tau_2$, $\varkappa_* = \varkappa_{**}$, $c_0 = 0$ (см. (5.2.10), (5.2.13)). А отсюда и из теоремы 5.3 заключаем, что

$$M_{2m}(t) \rightarrow M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t), \quad M_{2m+1}(t) \rightarrow M^{(1)}(t) + M^{(2)}(t + T_0/2) \quad (5.2.48)$$

при $m \rightarrow \infty$, где M_{2m}, M_{2m+1} – подпоследовательности исходной последовательности (5.2.46).

Из установленных предельных равенств (5.2.48) и из сделанных предположений относительно одной из функций (5.2.47) вытекает, что мы находимся в рамках применимости теоремы 5.4. Действительно, дополнительные ограничения вида (5.2.14) или (5.2.15) для уравнения (5.2.39) справедливы очевидным образом. А это значит, что в силу упомянутой теоремы при $\varepsilon \rightarrow 0$ количество его устойчивых колебательных периодических решений неограниченно растет. Теорема 5.5 доказана.

Теорема 5.6 (о вращательной буферности). *Предположим, что нули t_1, t_2 , о которых говорится в теореме 5.5, имеет хотя бы одна из функций*

$$M_*(t) = M^{(1)}(t) \text{ или } M_*(t) = M^{(2)}(t). \quad (5.2.49)$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченно возрастает количество экспоненциально устойчивых вращательных периодических движений уравнения (5.2.39).

Доказательство. Изучим сначала вопрос о существовании у уравнения (5.2.39) вращательных периодических движений с положительными скоростями \dot{x} . В связи с этим обратим внимание, что при $\varepsilon = 0$ оно имеет семейство таких решений, задающееся равенством $\dot{x} = \sqrt{2(\xi + \cos x)}$, где параметр $\xi > 1$ произволен. Обыгрывая данное обстоятельство, перейдем от

рассматриваемого уравнения к трехмерной системе для $(x, y, z) = (x, \dot{x}, t)$, затем выполним в получившейся системе замену $(x, y) \rightarrow (\tau, \xi)$, исходя из формул

$$x = \tau, \quad y = \sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad (5.2.50)$$

и в заключение примем τ за новое время. В результате приходим к системе

$$\frac{dz}{d\tau} = 1/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\varepsilon\sqrt{2(\xi + \cos \tau)} + \varepsilon f(z, \tau), \quad (5.2.51)$$

которую, естественно, следует рассматривать в области $\xi > 1$.

Обозначим через $(z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon), \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon))$ решение системы (5.2.51) с произвольно фиксированными начальными условиями $z_0 \in \mathbb{R}$, $\xi_0 > 1$, заданными при $\tau = 0$, и рассмотрим уравнения

$$z(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = z_0 \pmod{T_0}, \quad \xi(2\pi, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 \quad (5.2.52)$$

для определения начальных условий интересующих нас периодических движений. Подставим, далее, в систему (5.2.52) вытекающие из (5.2.51) асимптотические формулы

$$z(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = z_1(\tau) + O(\varepsilon), \quad \xi(\tau, z_0, \xi_0, \varepsilon) = \xi_0 + \varepsilon \xi_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \quad (5.2.53)$$

где

$$z_1(\tau) = z_0 + \int_0^\tau ds / \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)},$$

$$\xi_1(\tau) = \int_0^\tau [f(z_1(s), s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}] ds. \quad (5.2.54)$$

В результате после некоторых преобразований и отбрасывания слагаемых порядка ε приходим к аналогичной (5.2.33) предельной системе

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}} = n T_0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \int_0^{2\pi} [f(z_1(s), s) - \sqrt{2(\xi_0 + \cos s)}] ds = 0, \quad (5.2.55)$$

которая, в принципе, содержит всю необходимую нам информацию.

Рассмотрим сначала первое уравнение из (5.2.55) и заметим, что его левая часть как функция переменной ξ_0 монотонно убывает при $1 < \xi_0 < \infty$

от $+\infty$ до нуля. Таким образом, при каждом $n \geq 1$ это уравнение имеет единственное решение $\xi_0 = \xi_{0,n}$, $\xi_{0,n} \searrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя, далее, $\xi_0 = \xi_{0,n}$ во второе равенство из (5.2.55) и учитывая в нем соотношения

$$2k_n F(\pi/2, k_n) = nT_0, \quad \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)}} = k_n F(\tau/2, k_n), \quad (5.2.56)$$

где $k_n = \sqrt{2/(\xi_{0,n} + 1)}$, $F(\tau, k)$ – эллиптический интеграл первого рода (см. (5.2.43)), для нахождения z_0 получаем уравнение

$$M_n(z_0) \equiv \int_0^{2\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), s) ds - \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds = 0. \quad (5.2.57)$$

Следуя описанной при доказательстве леммы 5.1 схеме, без труда убеждаемся, что любому простому корню $z_{0,*} \in [0, T_0)$ этого уравнения при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует грубое вращательное периодическое решение исходного уравнения (5.2.39), являющееся седлом (при $M'_n(z_{0,*}) < 0$) или устойчивым фокусом (в случае $M'_n(z_{0,*}) > 0$).

Предположим, что нули t_1, t_2 с требуемыми свойствами имеет первая из функций (5.2.49). Тогда если мы покажем, что последовательность функций Мельникова (5.2.57) при $n \rightarrow \infty$ сходится в C^1 -метрике на отрезке $0 \leq z_0 \leq T_0$ к пределу $M^{(1)}(z_0)$, то утверждение теоремы 5.6 будет установлено (см. аналогичное место в доказательстве теоремы 5.4). А так как очевидным образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds = 8, \quad (5.2.58)$$

то проблема сводится к анализу последовательности интегралов

$$\widetilde{M}_n(z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), s) ds, \quad n \geq 1, \quad (5.2.59)$$

где по сравнению с (5.2.57) изменен промежуток интегрирования (эта операция законна, так как в силу первого равенства (5.2.56) подинтегральная функция в (5.2.59) периодична по s с периодом 2π).

Выполним в интегралах (5.2.59) последовательно замены $s/2 \rightarrow s$, $s = \operatorname{am}(u, k_n)$, где $\operatorname{am}(u, k)$ – функция, определяющаяся как неявная из уравнения $F(s, k) = u$. В результате интересующие нас функции примут вид

$$\widetilde{M}_n(z_0) = 2 \int_{-r_n}^{r_n} f(z_0 + k_n u, 2 \operatorname{am}(u, k_n)) \operatorname{dn}(u, k_n) du, \quad n \geq 1, \quad (5.2.60)$$

где $r_n = \pi/(2\omega(k_n))$, $\operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}$.

На заключительном этапе подставим в формулы (5.2.60) и в аналогичные формулы, получающиеся из них после дифференцирования по z_0 , известные асимптотические представления для эллиптических функций при $k \rightarrow 1 - 0$ (см., например, [133]):

$$\begin{aligned} F(\pi/2, k) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-k} + O(1), \\ \operatorname{am}(u, k) &= 2 \arctan(\exp u) - \pi/2 + O(\sqrt{1-k}), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= 1/\operatorname{ch} u + O(\sqrt{1-k}), \end{aligned} \quad (5.2.61)$$

второе и третье из которых справедливы равномерно по $u \in [-\frac{\pi}{2\omega(k)}, \frac{\pi}{2\omega(k)}]$. В результате убеждаемся, что в метрике пространства $C^1[0, T_0]$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{M}_n(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z_0 + t, x_0(t)) \dot{x}_0(t) dt, \quad (5.2.62)$$

где $x_0(t)$ – функция из (5.2.41). И наконец, объединяя (5.2.58), (5.2.62), получаем требуемую сходимости $M_n(z_0)$ к $M^{(1)}(z_0)$.

Для завершения доказательства теоремы 5.6 осталось рассмотреть случай, когда нули t_1, t_2 с нужными свойствами существуют у функции $M_*(t) = M^{(2)}(t)$. Здесь речь пойдет о вращательных периодических движениях уравнения (5.2.39) с отрицательными скоростями. Их нахождение связано с исследованием системы

$$\frac{dz}{d\tau} = 1/\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\varepsilon \sqrt{2(\xi + \cos \tau)} - \varepsilon f(z, -\tau), \quad (5.2.63)$$

получающейся из исходного уравнения (5.2.39) при переходе к переменным $x, y = \dot{x}, z = t$ и аналогичной (5.2.50) замене $x = -\tau, y = -\sqrt{2(\xi + \cos \tau)}$.

Анализ системы (5.2.63) идентичен описанному выше и приводит к аналогичной (5.2.57) последовательности функций Мельникова

$$M_n(z_0) = - \int_0^{2\pi} f(z_0 + k_n F(s/2, k_n), -s) ds - \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\xi_{0,n} + \cos s)} ds, \quad n \geq 1. \quad (5.2.64)$$

Далее, привлекая в очередной раз асимптотические представления (5.2.61), нетрудно показать, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность (5.2.64) сходится в метрике пространства $C^1[0, T_0]$ к функции $M^{(2)}(z_0)$. А отсюда и из сделанных относительно $M_*(t) = M^{(2)}(t)$ предположений вытекает нужный факт: неограниченное увеличение при $\varepsilon \rightarrow 0$ количества устойчивых вращательных периодических решений уравнения (5.2.39) с отрицательными скоростями. Теорема 5.6 полностью доказана.

Применимость установленных теорем проиллюстрируем на примерах (5.2.40). Используя теорию вычетов, можно показать, что в первом из них для функций Мельникова (5.2.45) выходят формулы

$$M^{(1)}(t) = M^{(2)}(t) = \frac{2\pi\nu^2}{\text{sh}(\pi\nu/2)} a \sin \nu t - 8, \quad (5.2.65)$$

во втором – формулы

$$M^{(1)}(t) = \frac{2\pi\nu^2}{\text{ch}(\pi\nu/2)} a \cos \nu t - 8, \quad M^{(2)}(t) = -\frac{2\pi\nu^2}{\text{ch}(\pi\nu/2)} a \cos \nu t - 8, \quad (5.2.66)$$

а в третьем случае интересующие нас функции задаются равенствами

$$\begin{aligned} M^{(1)}(t) &= \frac{4\pi\nu^2 \exp(\pi\nu/2)}{\text{sh}(\pi\nu)} a \sin \nu t - 8, \\ M^{(2)}(t) &= -\frac{4\pi\nu^2 \exp(-\pi\nu/2)}{\text{sh}(\pi\nu)} a \sin \nu t - 8. \end{aligned} \quad (5.2.67)$$

Из формул (5.2.65) – (5.2.67) следует, что при увеличении a условия теорем 5.5, 5.6 будут заведомо выполняться во всех рассмотренных ситуациях. А это значит, что при подходящим образом фиксированных параметрах a , ν и при $\varepsilon \rightarrow 0$ неограниченный рост числа устойчивых периодических движений, как колебательных, так и вращательных, происходит в каждом из уравнений (5.2.39), (5.2.40). Впрочем, справедливости ради следует отметить, что поскольку эти решения накапливаются в окрестности сепаратрис Γ_1, Γ_2 , то области притяжения большинства из них весьма узки. В чисто

аналитическом плане данный факт выражается в том, что решения $k = k_n$ уравнений $4F(\pi/2, k) = nT_0$ и $2kF(\pi/2, k) = nT_0$ стремятся к единице при $n \rightarrow \infty$.

5.2.4. Анализ примера

В данном пункте проведем подробное рассмотрение периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \varepsilon a \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (5.2.68)$$

которое, напомним, описывает колебания маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса.

Начнем с анализа вращательных периодических движений и отметим, что в силу инвариантности уравнения (5.2.68) относительно замены $x \rightarrow -x$ достаточно найти лишь те из них, которые лежат в полуплоскости (x, \dot{x}) : $\dot{x} > 0$. Таким образом (см. доказательство теоремы 5.6), проблема сводится к отысканию нулей функций Мельникова (5.2.57), вычисленных для случая $T_0 = 2\pi/\nu$, $f = -a \cos \nu t \sin x$. Несложный подсчет показывает, что эти функции преобразуются к виду

$$M_n(t) = I_n(k_n) a \sin \nu t - \frac{8}{k_n} E(\pi/2, k_n), \quad (5.2.69)$$

где, напомним, $k_n \in (0, 1)$ – решения уравнений $2\nu k F(\pi/2, k) = n\pi$, $n \geq 1$, а $E(\tau, k) = \int_0^\tau \sqrt{1 - k^2 \sin^2 s} ds$ – эллиптический интеграл второго рода. Что же касается интеграла $I_n(k)$, то он задается формулой

$$I_n(k) = \int_0^{2\pi} \sin \tau \sin (2n \omega(k) F(\tau/2, k)) d\tau, \quad (5.2.70)$$

где частота $\omega = \omega(k)$ та же, что и в (5.2.43).

Для вычисления интеграла (5.2.70), как и в случае (5.2.59), сделаем в нем последовательно замены $\tau/2 \rightarrow \tau$, $\tau = \operatorname{am}(u, k)$. В результате убеждаемся,

что

$$\begin{aligned}
 I_n(k) &= 4 \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \sin(2n\omega u) du = \\
 &= -\frac{2}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \sin(2n\omega u) d(\operatorname{dn}^2(u, k)) = \frac{4n\omega}{k^2} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{dn}^2(u, k) \cos(2n\omega u) du. \quad (5.2.71)
 \end{aligned}$$

Учитывая, далее, в (5.2.71) известное разложение Фурье (см. [126, 133])

$$k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) = 1 - 2E(\pi/2, k) \omega/\pi - 8\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos(2n\omega u), \quad (5.2.72)$$

где

$$q = \exp\left(-\pi \frac{F(\pi/2, \sqrt{1 - k^2})}{F(\pi/2, k)}\right), \quad (5.2.73)$$

окончательно получаем:

$$I_n(k) = \frac{4\pi\nu^2 q^n}{1 - q^{2n}} > 0, \quad n \geq 1. \quad (5.2.74)$$

Предположим, что при некотором натуральном n выполняется условие

$$a > a_{n,*} = \frac{8E(\pi/2, k_n)}{k_n I_n(k_n)}. \quad (5.2.75)$$

Тогда на полуинтервале $0 \leq t < 2\pi/\nu$ соответствующая функция (5.2.69) имеет два простых нуля $t_1, t_2: t_1 < t_2$. Учитывая неравенство (5.2.74), нетрудно показать, что первому из этих нулей при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает экспоненциально устойчивое вращательное периодическое решение исходного уравнения (5.2.68), а второму – седловое. Интересно также отметить, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность критических значений $a_{n,*}$ стремится к конечному пределу

$$a_\infty(\nu) = \frac{4 \operatorname{sh}(\pi\nu/2)}{\pi\nu^2}. \quad (5.2.76)$$

Этот факт – очевидное следствие установленной при доказательстве теоремы 5.6 сходимости последовательности (5.2.57) к функции $M^{(1)}(z_0)$, которая

в рассматриваемом случае задается равенством (5.2.65) (при замене в нем t на z_0).

Обратимся теперь к вопросу о существовании и устойчивости колебательных периодических решений уравнения (5.2.68). Напомним, что в силу леммы 5.1 данный вопрос сводится в конечном итоге к отысканию нулей функций Мельникова (5.2.46), которые в случае (5.2.68) преобразуются к виду

$$M_n(t) = I_n(k_n)a \sin \nu t - \frac{8\pi}{\omega(k_n)} (k_n^2 - 1) - 16 E(\pi/2, k_n),$$

$$n \geq n_0 = [\nu] + 1, \quad (5.2.77)$$

где

$$I_n(k) = \frac{2n\omega(k)}{k} \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{dn}^2(\tau, k) \cos(n\omega\tau) d\tau. \quad (5.2.78)$$

Заметим, далее, что интеграл (5.2.78) вполне аналогичен уже вычисленному нами интегралу (5.2.71). Таким образом, привлекая равенства (5.2.72), (5.2.73), приходим к выводу, что

$$I_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, \dots, \\ \frac{8\pi\nu^2}{k} \cdot \frac{q^m}{1 - q^{2m}} > 0 & \text{при } n = 2m, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.2.79)$$

Из соотношений (5.2.79) следует, что при нечетных номерах n соответствующая функция (5.2.77) – не равная нулю константа. Поэтому фиксируем произвольно четное $n = 2m \geq n_0$, $m \geq 1$ и предположим, что справедливо условие

$$a > a_{m,**} = \left(\frac{8\pi}{\omega(k_{2m})} (k_{2m}^2 - 1) + 16 E(\pi/2, k_{2m}) \right) / I_{2m}(k_{2m}). \quad (5.2.80)$$

Тогда, очевидно, функция $M_{2m}(t)$ имеет на полуинтервале $[0, 2\pi/\nu)$ два простых нуля $t_1 < t_2$, причем в отличие от предыдущего случая первому из этих нулей в исходном уравнении (5.2.68) отвечает седловое периодическое решение, а второму – экспоненциально устойчивое. И наконец, следует добавить, что в силу первого равенства (5.2.48) и формул (5.2.65) фигурирующая в (5.2.80) последовательность $a_{m,**}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ и к тому же пределу (5.2.76), что и последовательность критических значений $a_{n,*}$ из (5.2.75).

Подводя итог, обратим внимание на еще один интересный факт. С одной стороны, из проделанного выше анализа следует, что условия теорем 5.5, 5.6 начинают выполняться для уравнения (5.2.68) при $a > a_\infty(\nu)$ (см. (5.2.76)). С другой стороны, именно при этом условии появляются простые нули у функций Мельникова (5.2.65). Таким образом, феномен гамильтоновой буферности в рассматриваемом уравнении напрямую связан с возникновением грубых гомоклинических структур в результате разрушения сепаратрис Γ_1, Γ_2 (по этому поводу см. также работы [81, 82], где близкие результаты установлены в случае одной сепаратрисной петли).

Заключение

Отметим, что за рамками данной главы и работы в целом остался вопрос о существовании у уравнения (5.2.39) так называемых *ультрасубгармоник* – периодических решений, близких к резонансным циклам порождающего уравнения $\ddot{x} + \sin x = 0$ с периодами $T = \frac{n}{m} T_0$, где n, m взаимно просты, $m \geq 2$, T_0 – период внешнего воздействия. Впрочем, можно показать, что во всех случаях (5.2.40) таких циклов не существует (попытка их отыскания приводит к функциям Мельникова, тождественно равным некоторым ненулевым константам). Появляются же устойчивые ультрасубгармоники в уравнениях (5.2.39), (5.2.40) только при существенном увеличении параметра a , когда заведомо перестает работать лемма 5.1.

Для пояснения сути дела обратимся, например, к уравнению

$$\ddot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x = 0, \quad (5.2.81)$$

считая, что параметр $\mu > 0$ мал, а частота $\nu > 0$ внешнего параметрического воздействия, как и ранее, имеет порядок единицы. Последовательность дальнейших действий такова. Сначала, полагая, $(x, y) = (x, \dot{x})$, перейдем от (5.2.81) к двумерной неавтономной системе. Затем выполним в упомянутой системе замену $(x, y) \rightarrow (k, \varphi)$, $k \in (0, 1)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, исходя из формул (см. (5.2.42))

$$x = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right) \right), \quad y = 2k \operatorname{cn} \left(\frac{\varphi}{\omega(k)}, k \right). \quad (5.2.82)$$

И наконец, обозначим через Π_μ – отображение сдвига по решениям получившейся системы для k, φ за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 2\pi/\nu$.

Нетрудно увидеть, что интересующее нас отображение Π_μ допускает представление

$$\Pi_\mu : \begin{cases} k \rightarrow k + \mu \Delta_1(k, \varphi, \mu), \\ \varphi \rightarrow \varphi + \gamma(k) + \mu \Delta_2(k, \varphi, \mu) \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (5.2.83)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= 2\pi \omega(k)/\nu, \quad \gamma'(k) < 0 \text{ при } 0 < k < 1, \\ \gamma(0) &= 2\pi/\nu, \quad \gamma(1) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.84)$$

а функции Δ_1, Δ_2 являются аналитическими по совокупности переменных и 2π -периодическими по φ .

Из свойств (5.2.84) следует, что если рассматривать k, φ как полярные координаты на плоскости, то (5.2.83) представляет собой сохраняющее площадь закручивающее отображение (точнее говоря, становится таковым после замены k на $\tilde{k} = \int_0^k 4s ds / \omega(s)$). А это означает, что мы можем воспользоваться известной геометрической теоремой Пуанкаре (см., например, [6, 116]), которая в данном случае утверждает следующее: для любого рационального числа $m/n \in (0, 1/\nu)$ найдется такое $\mu_0 = \mu_0(m/n)$, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ существует $2ln$ неподвижных точек отображения Π_μ^n , где $l = l(\mu)$ – некоторое натуральное число. Более того, можно показать [6], что в общем случае половина из этих неподвижных точек эллиптические, а половина – седловые.

Из сказанного выше следует, что в окрестности резонансного цикла (5.2.82), для которого $\omega(k) = \frac{m}{n} \nu$, при некоторых достаточно малых μ исходное уравнение (5.2.81) имеет по крайней мере два периодических решения, одно из которых седловое, а другое эллиптическое. Далее, фиксируем такое μ и добавим в уравнение (5.2.81) малое трение $\varepsilon > 0$, т. е. перейдем к уравнению

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \mu \cos \nu t) \sin x = 0. \quad (5.2.85)$$

Тогда, очевидно, эллиптическое периодическое движение сохранится и станет устойчивым фокусом. Отметим еще, что аналогичные построения справедливы, естественно, и в случае вращательных ультрасубгармоник.

Итак, на качественном уровне вопрос о реализуемости в уравнении (5.2.85) устойчивых ультрасубгармоник, как колебательных, так и вращательных, решается достаточно просто и с необходимостью приводит к условию $\varepsilon/\mu \ll 1$. Что же касается точного соотношения между параметрами ε и μ , при которых существует та или иная ультрасубгармоника, то эта проблема пока остается открытой.

Еще одна нерешенная проблема связана с так называемыми субгармоническими каскадами бифуркаций. Суть дела здесь заключается в следующем. Опираясь на развитую в [64] методику, можно показать существование любых конечных наборов критических значений $a_{n,*}(\varepsilon)$, $a_{m,**}(\varepsilon)$: $a_{n,*}(0) = a_{n,*}$, $a_{m,**}(0) = a_{m,**}$, $n = 1, \dots, N$, $m = [n_0/2] + 1, \dots, M$ параметра a , при которых в уравнении (5.2.68) происходят бифуркации типа седло-узел. При этих бифуркациях, напомним, рождаются пары циклов – устойчивый и неустойчивый. Можно также доказать существование критического значения $a = a_\infty(\nu, \varepsilon)$, $a_\infty(\nu, 0) = a_\infty(\nu)$ (см. (5.2.76)), при котором появляются гомоклинические касания. Но тогда естественным образом возникает вопрос: существуют ли бесконечные последовательности критических значений $a_{n,*}(\varepsilon)$, $a_{m,**}(\varepsilon)$ и будут ли они при $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ стремиться к $a_\infty(\nu, \varepsilon)$? Ответ на него, по всей видимости, положителен, что косвенным образом следует из результатов работ [18, 19]. В этих работах установлено, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел.

В заключение приведем результаты компьютерного анализа уравнения (5.2.85) при $\varepsilon = 0.001$, $\mu = 1.6$, $\nu = 5$, иллюстрирующие явление буферности. Вычисления, сделанные с помощью программы Tracer3_70 (см. [24]), показали, что в этом случае, кроме устойчивого нулевого состояния равновесия, в зависимости от выбора начальных условий реализуется еще не менее 36 устойчивых периодических решений, среди которых присутствуют как колебательные, так и вращательные (в том числе и ультрасубгармоники). Проекция части из этих решений на плоскость (x, \dot{x}) при $-\pi \leq x \leq \pi$ представлены на рис. 5.19 – 5.37, а начальные условия приведены в таблицах 5.3–5.5. Заметим, что на рис. 5.24 – 5.26, 5.28 – 5.34, 5.36, 5.37 изображены вращательные ультрасубгармоники, для которых $x(t + T_0) \equiv x(t) + 2\pi m$ при некоторых $T_0 > 0$, $m > 1$. Кроме того, циклам, показанным на рис. 5.21 – 5.37, соответствуют парные циклы, получающиеся из них при замене $x \rightarrow -x$, $\dot{x} \rightarrow -\dot{x}$.

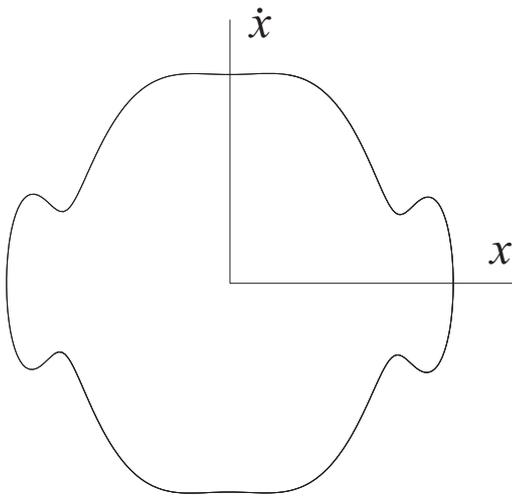


Рис. 5.19.

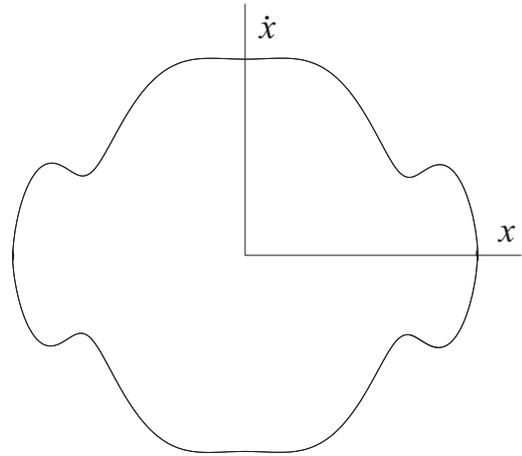


Рис. 5.20.

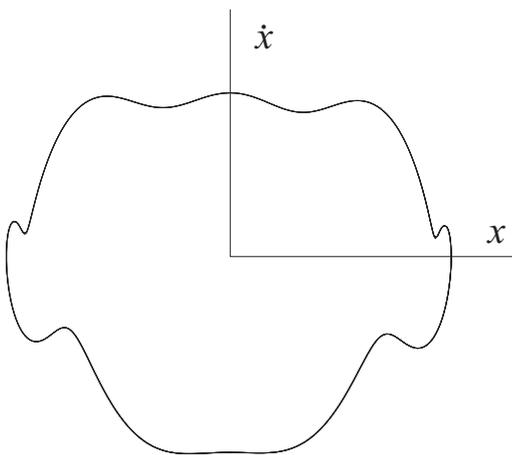


Рис. 5.21.

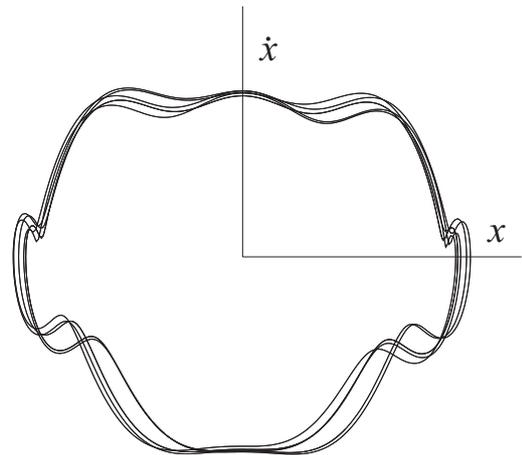


Рис. 5.22.

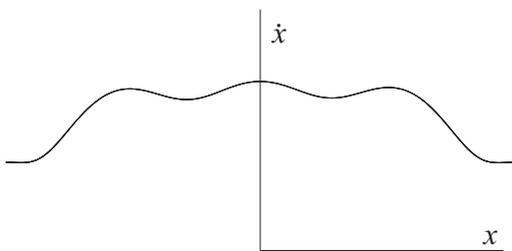


Рис. 5.23.

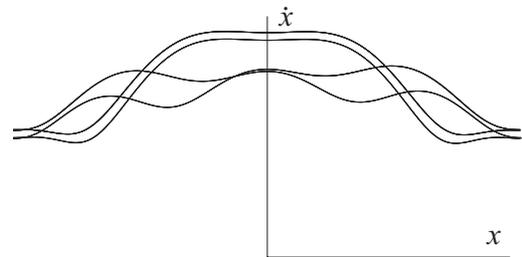


Рис. 5.24.

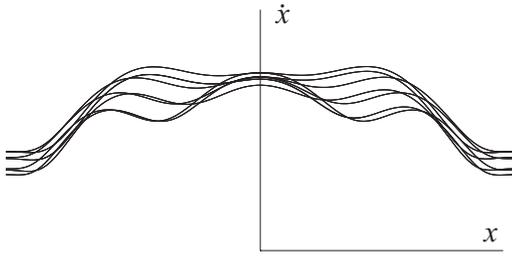


Рис. 5.25.

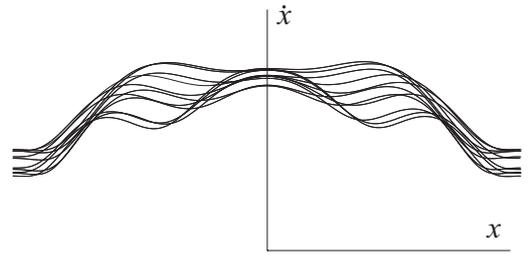


Рис. 5.26.

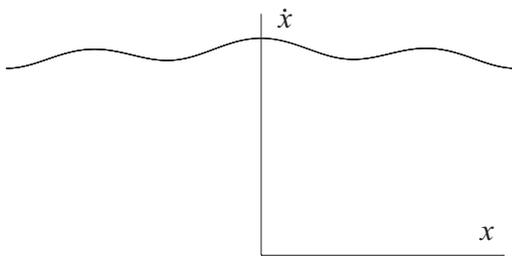


Рис. 5.27.

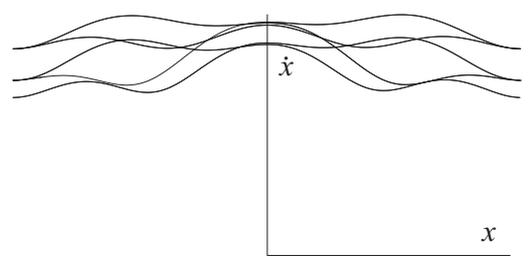


Рис. 5.28.

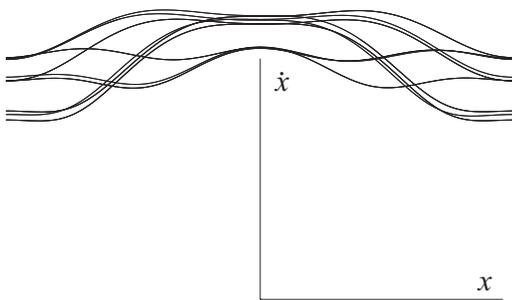


Рис. 5.29.

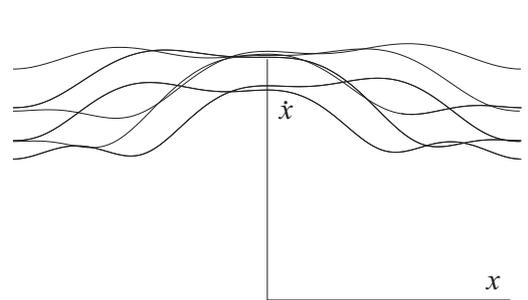


Рис. 5.30.

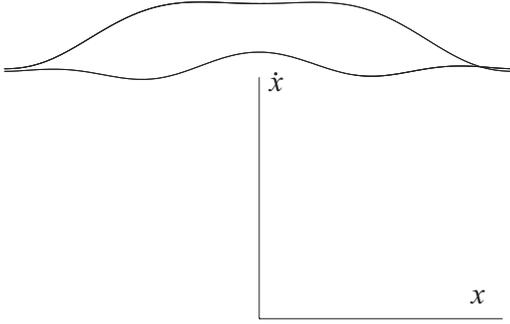


Рис. 5.31.

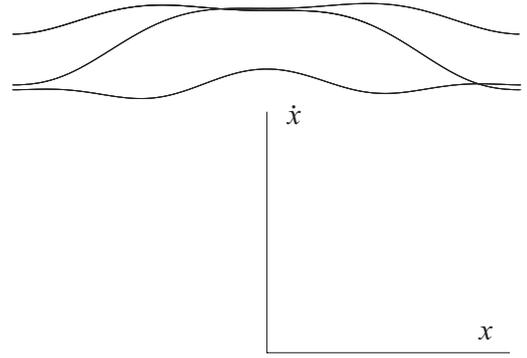


Рис. 5.32.

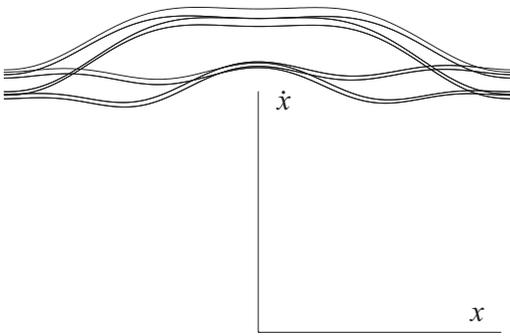


Рис. 5.33.

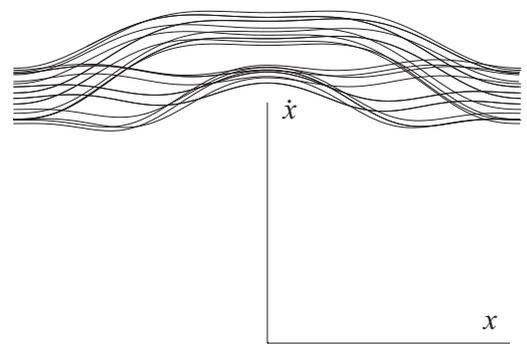


Рис. 5.34.

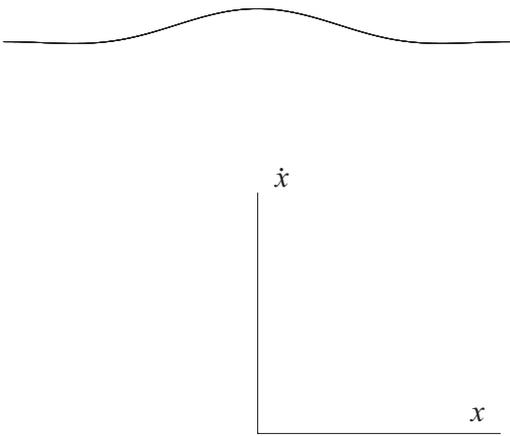


Рис. 5.35.

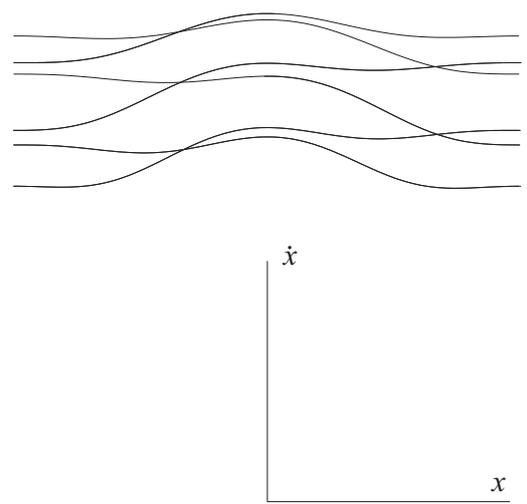


Рис. 5.36.

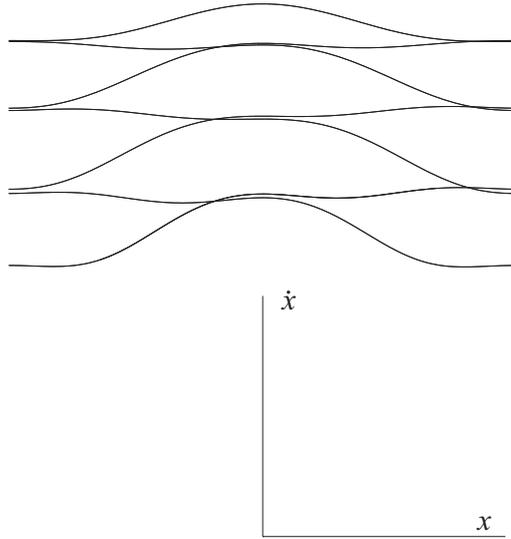


Рис. 5.37.

Начальные значения для устойчивых режимов уравнения (5.2.85) при $\mu = 1.6, \varepsilon = 0.001, \nu = 5$.

Таблица 5.3.

	рис. 5.19	рис. 5.20	рис. 5.21	рис. 5.22	рис. 5.23	рис. 5.24	рис. 5.25
t_0	1.01463	1.03966	0.61153	0.70476	0.28433	1.06752	0.77739
$x(t_0)$	1.18505	-1.48078	2.03269	1.71556	-1.93267	-3.04646	-2.88045
$\dot{x}(t_0)$	-0.71216	1.03045	0.23465	-0.69089	1.91833	1.48296	1.22088

Таблица 5.4.

	рис. 5.26	рис. 5.27	рис. 5.28	рис. 5.29	рис. 5.30	рис. 5.31
t_0	1.21297	0.632757	0.125215	0.314364	1.10791	0.303231
$x(t_0)$	-2.44099	-1.5872	0.98083	0.671395	0.193561	-1.29023
$\dot{x}(t_0)$	1.24857	2.48774	2.48429	3.01841	3.04989	3.86693

Таблица 5.5.

	рис. 5.32	рис. 5.33	рис. 5.34	рис. 5.35	рис. 5.36	рис. 5.37
t_0	1.06492	1.0279	0.272364	0.792859	0.912126	0.67128
$x(t_0)$	1.32663	1.67366	-1.6773	-2.34669	-1.40019	2.58528
$\dot{x}(t_0)$	4.06146	3.75712	3.774	4.85561	5.80979	6.17215

Глава 6.

Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом представляют собой широкий класс динамических систем со сложным поведением решений. Нетривиальность свойств таких уравнений обусловлена в первую очередь бесконечномерностью их фазового пространства. В таких уравнениях может наблюдаться бесконечномерное вырождение и в качестве нормализованных систем приходится рассматривать различные краевые задачи (см., например, [16]). В свою очередь, динамика краевой задачи, полученной на этапе нормализации, может быть промоделирована с помощью системы связанных осцилляторов. В настоящей главе рассматривается обобщенное уравнение Хатчинсона в экстремальном случае, для которого строится квазинормальная форма. Затем квазинормальная форма заменяется системой связанных осцилляторов, которые изучаются аналитическими и численными методами.

Уравнение Хатчинсона [143] относится к числу простейших нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и представляет собой так называемое логистическое уравнение с запаздыванием в цепи обратной связи. Это уравнение используется в качестве модельного в ряде биологических, физических и даже экономических приложений (см. подробнее в [148, 149, 157]). В стандартной постановке применительно к задаче моделирования динамики изменения численности популяции особей, борющихся за

общую пищу, уравнение Хатчинсона записывается в виде

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{N(t-h)}{k} \right] N, \quad (6.0.1)$$

где $N(t)$ — численность популяции, а положительные параметры r , h и k — соответственно мальтузианский коэффициент линейного роста, возраст половозрелости и средняя численность популяции, обусловленная емкостью среды.

Для описания динамики изменения численности вида с учетом возрастной структуры популяции в [96], [97] используется уравнение

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{1}{k} \int_{h_1}^{h_2} H(s) N(t-s) ds \right] N, \quad (6.0.2)$$

обобщающее уравнение Хатчинсона. В частности, в [96] найдены условия бифуркации периодического решения у этого уравнения.

Обобщение уравнения (6.0.1) на случай нескольких дискретных возрастных групп может быть выполнено также следующим образом (см. [97]):

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^m \alpha_j N(t-h_j) \right] N, \quad (6.0.3)$$

где весовые коэффициенты $\alpha_j \geq 0$ определяют вклад j -й возрастной группы, соответствующей запаздыванию $h_j > 0$. Отметим, что $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$.

Рассмотрим уравнение (6.0.3) в случае двух возрастных групп

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{\alpha N(t-h_1) + (1-\alpha) N(t-h_2)}{k} \right] N \quad (6.0.4)$$

и изучим вопрос о бифуркации автоколебаний этого уравнения из нулевого состояния равновесия в экстремальной ситуации, когда одно из запаздываний асимптотически велико, а все остальные параметры имеют порядок единицы.

По всей видимости, впервые уравнение (6.0.3) появилось в статье [152], где рассматривался вопрос о его релаксационных периодических решениях при условии $r \gg 1$. В последующем оно изучалось многими авторами (см. обзор [63], где приведена соответствующая библиография). В частности, к настоящему времени достаточно подробно разобрана бифуркационная проблема, связанная с потерей устойчивости нулевого состояния равновесия

данного уравнения в предположении, что все параметры имеют порядок единицы. В приложении А приведен подробный обзор динамических свойств уравнения (6.0.4) для таких значений параметров.

6.1. Постановка задачи и линейный анализ

Выполняя в (6.0.3) замену переменных $N = k(1 + u)$, получим уравнение

$$\dot{u} = -r[\alpha u(t - h_1) + (1 - \alpha)u(t - h_2)](1 + u), \quad (6.1.1)$$

в котором $u = u(t)$ — скалярная функция, r, α, h_1, h_2 — положительные параметры, причем $\alpha \in [0, 1]$.

Будем интересоваться задачей (6.1.1) в сингулярно возмущенном случае, когда

$$rh_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \varepsilon\gamma, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \mu, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1, \quad (6.1.2)$$

то есть объектом исследования настоящей главы будет служить уравнение

$$\varepsilon\dot{u} = - \left[\left(\frac{1}{2} + \mu \right) u(t - 1) + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) u(t - \varepsilon\gamma) \right] (1 + u), \quad (6.1.3)$$

получающееся из (6.1.1) при условиях (6.1.2) после нормировки $t/h_1 \rightarrow t$. Точнее говоря, поставим вопрос о существовании и устойчивости автоколебаний уравнения (6.1.3), бифурцирующих из нуля при увеличении μ .

Первым этапом в решении указанной бифуркационной проблемы является, как обычно, анализ расположения корней соответствующего нулевому состоянию равновесия характеристического уравнения

$$\varepsilon\lambda + \left(\frac{1}{2} + \mu \right) \exp(-\lambda) + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \exp(-\lambda\varepsilon\gamma) = 0. \quad (6.1.4)$$

Результаты этого анализа позволят в дальнейшем согласовать надлежащим образом порядки малости параметров ε и μ , а также уточнить выбор параметра γ .

Нетрудно заметить, что все корни уравнения (6.1.4) распадаются на две группы. К первой группе отнесем так называемые некритические корни данного уравнения, которые находятся в левой комплексной полуплоскости $\{\lambda : \text{Re } \lambda < 0\}$ и не приближаются к мнимой оси при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$. Во вторую группу объединим все оставшиеся его корни

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu), \quad \bar{\lambda}_n(\varepsilon, \mu), \quad \lambda_n(0, 0) = i\omega_n, \quad \omega_n = \pi(2n - 1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.1.5)$$

являющиеся комплексными и при $\varepsilon = \mu = 0$ обращающиеся в соответствующие корни предельного уравнения $\exp(-\lambda) = -1$. Ясно, что именно эти корни и отвечают за устойчивость нулевого состояния равновесия. Поэтому наша ближайшая задача заключается в построении для них равномерной по n асимптотики.

Подставим в (6.1.4) равенства $\lambda = i\omega_n + \delta$, $\varepsilon\omega_n = z$ и будем считать, что параметр z непрерывно меняется на полуоси $z \geq 0$. В результате приходим к вспомогательному уравнению для δ , имеющему вид

$$iz + \varepsilon\delta - \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \exp(-\delta) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \exp(-i\gamma z - \varepsilon\gamma\delta) = 0. \quad (6.1.6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условиям*

$$\gamma \neq \pi(4n - 3) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.1.7)$$

Тогда найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\mu \in [0, \mu_0]$, $z \in [0, +\infty)$ уравнение

$$iz + \varepsilon\delta - \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \exp(-\delta) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \exp(-i\gamma z - \varepsilon\gamma\delta) = 0. \quad (6.1.8)$$

допускает единственное решение $\delta = \delta(z, \varepsilon, \mu)$, $\delta(0, 0, 0) = 0$, для которого справедливо представление вида

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0(z, \mu) + \varepsilon\delta_1(z, \varepsilon, \mu), \\ \delta_0 &= \ln(1 + 2\mu) - \ln(2iz + (1 - 2\mu) \exp(-i\gamma z)). \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Здесь бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных z, ε, μ комплекснозначная функция $\delta_1(z, \varepsilon, \mu)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \delta_1(z, 0, \mu) &= \frac{\delta_0(z, \mu) - ((1 - 2\mu)\gamma \exp(-i\gamma z) - 2)}{2iz + (1 - 2\mu) \exp(-i\gamma z)}, \quad \delta_1(0, \varepsilon, 0) \equiv 0, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} |\delta_1(z, \varepsilon, \mu)| &= 0 \quad \text{равномерно по } (\varepsilon, \mu) \in [0, \varepsilon_0] \times [0, \mu_0], \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

а комплексный логарифм в (6.1.9) определен равенствами

$$\begin{aligned} \ln(2iz + (1 - 2\mu) \exp(-i\gamma z)) &= \frac{1}{2} \ln \varkappa_1 + i \arcsin \left(\frac{\varkappa_2}{\sqrt{\varkappa_1}} \right), \\ \varkappa_1 &= (1 - 2\mu)^2 - 4z(1 - 2\mu) \sin(\gamma z) + 4z^2, \\ \varkappa_2 &= 2z - (1 - 2\mu) \sin(\gamma z). \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Доказательство. Прежде всего проясним смысл условий (6.1.7). Непосредственная проверка показывает, что они гарантируют выполнение неравенства

$$2iz + \exp(-i\gamma z) \neq 0 \quad \forall z \geq 0,$$

позволяющего, в свою очередь, корректно определить функцию $\delta_0(z, \mu)$ (см. (6.1.9), (6.1.11)) при любом $z \geq 0$ и при всех достаточно малых μ .

На следующем этапе подставим в уравнение (6.1.8) соотношение $\delta = \delta_0(z, \mu) + \varepsilon\tilde{\delta}$. В результате для интересующей нас функции $\tilde{\delta} = \delta_1(z, \varepsilon, \mu)$ получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{2} + \mu\right) \Upsilon(\tilde{\delta}, \varepsilon) = \Delta_1(z, \varepsilon, \mu) + \Delta_2(z, \varepsilon, \mu) \Upsilon(\varepsilon\gamma\tilde{\delta}, \varepsilon) - \varepsilon\tilde{\delta} \exp(\delta_0), \quad (6.1.12)$$

где $\Upsilon(\delta, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (1 - \exp(-\varepsilon\delta))$, а функции Δ_j , $j = 1, 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \exp(\delta_0 - i\gamma z) \Upsilon(\gamma\delta_0, \varepsilon) - \delta_0 \exp(\delta_0), \\ \Delta_2 &= \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \exp[(1 - \varepsilon\gamma)\delta_0 - i\gamma z]. \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

При анализе уравнения (6.1.12) существенную роль играют предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_j(z, \varepsilon, \mu) &= 0, \quad j = 1, 2; \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \exp(\delta_0) &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \delta_0 \exp(\delta_0) = 0, \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

справедливые равномерно по всем достаточно малым ε, μ . Для их обоснования обратимся к формулам (6.1.11), из которых выводим, что

$$\delta_0(z, \mu) = -\ln z + \ln\left(\frac{1}{2} + \mu\right) - \frac{1}{2}i\pi + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty \quad (6.1.15)$$

равномерно по μ . А отсюда и из (6.1.13) автоматически следуют требуемые равенства (6.1.14) для $\exp(\delta_0)$, $\delta_0 \exp(\delta_0)$ и Δ_2 .

Проверка свойства (6.1.14) для Δ_1 в силу уже установленных равенств сводится к доказательству равномерности по ε, μ предельного перехода

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \exp(\delta_0) \Upsilon(\gamma\delta_0, \varepsilon) = 0. \quad (6.1.16)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этого факта, воспользуемся представлением

$$\exp(\delta_0)\Upsilon(\gamma\delta_0, \varepsilon) = \exp(i \operatorname{Im} \delta_0) \left\{ \exp(\operatorname{Re} \delta_0)\Upsilon(\gamma \operatorname{Re} \delta_0, \varepsilon) + \right. \\ \left. + \exp[(1 - \varepsilon\gamma) \operatorname{Re} \delta_0] \Upsilon(i\gamma \operatorname{Im} \delta_0, \varepsilon) \right\}. \quad (6.1.17)$$

Заметим, далее, что (см. (6.1.15)) при $z \rightarrow +\infty$ равномерно по μ имеют место соотношения $\operatorname{Im} \delta_0 = O(1)$, $\operatorname{Re} \delta_0 \rightarrow -\infty$. А отсюда автоматически следует равномерная по ε, μ сходимости к нулю второго слагаемого в правой части формулы (6.1.17). Тем самым, для обоснования свойства (6.1.16) осталось показать, что

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \exp(\operatorname{Re} \delta_0)\Upsilon(\gamma \operatorname{Re} \delta_0, \varepsilon) = 0 \quad (6.1.18)$$

равномерно по ε, μ .

При анализе равенства (6.1.18) удобно перейти к новой переменной $\sigma = \exp(-\operatorname{Re} \delta_0)$, которая в силу сказанного чуть выше стремится к бесконечности при $z \rightarrow +\infty$ равномерно по μ . В результате вместо (6.1.18) рассмотрению подлежит предельное соотношение

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^{\varepsilon\gamma} - 1}{\varepsilon\sigma} = 0. \quad (6.1.19)$$

Точнее говоря, нам нужно убедиться, что предельный переход в (6.1.19) равномерен по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Но это действительно так, поскольку

$$\frac{\sigma^{\varepsilon\gamma} - 1}{\varepsilon\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \max_{s \geq 1} \frac{\sigma^{\varepsilon\gamma} - 1}{\varepsilon\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} 2\gamma(1 - 2\varepsilon\gamma)^{\frac{1}{2\varepsilon\gamma}} - 1 \quad \text{при } \forall \sigma \geq 1.$$

Возвращаясь к уравнению (6.1.12), заметим, что в точке

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta_0(z, 0)(\gamma \exp(-i\gamma z) - 2)}{2iz + \exp(-i\gamma z)}, \quad \varepsilon = 0, \quad \mu = 0$$

оно удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции по переменной $\tilde{\delta}$, причем в силу установленных выше предельных равенств (6.1.14) упомянутые условия выполняются равномерно по $z \geq 0$. Поэтому найдутся такие достаточно малые постоянные $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $(z, \varepsilon, \mu) \in [0, +\infty) \times$

$[0, \varepsilon_0] \times [0, \mu_0]$ из (6.1.12) однозначно определяется функция $\tilde{\delta} = \delta_1(z, \varepsilon, \mu)$, обладающая требуемыми свойствами (6.1.10). Действительно, первое из этих свойств проверяется непосредственно, а для проверки двух остальных достаточно заметить, что при $z = \mu = 0$ и при $z \rightarrow +\infty$ исходное уравнение (6.1.12) переходит соответственно в уравнения

$$\Upsilon(\tilde{\delta}, \varepsilon) = \Upsilon(\varepsilon\gamma\tilde{\delta}, \varepsilon) - 2\varepsilon\tilde{\delta}, \quad \left(\frac{1}{2} + \mu\right)\Upsilon(\tilde{\delta}, \varepsilon) = 0,$$

каждое из которых при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ имеет решение $\tilde{\delta} = 0$. Лемма 6.1 полностью доказана.

Из установленной леммы следует, что интересующие нас корни (6.1.5) уравнения (6.1.4) допускают равномерное по n асимптотическое представление

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n + (\delta_0(z, \mu) + \varepsilon\delta_1(z, \varepsilon, \mu)) \Big|_{z=\varepsilon\omega_n}, \quad n \geq 1. \quad (6.1.20)$$

Добавим еще, что при условии

$$\gamma < 1, \quad (6.1.21)$$

которое всюду ниже считаем выполненным, справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} \delta_0(z, 0) < 0 \text{ при } \forall z > 0, \quad \frac{d^2}{dz^2} \operatorname{Re} \delta_0(z, 0) \Big|_{z=0} = -4(1 - \gamma) < 0. \quad (6.1.22)$$

Свойства (6.1.22) оказываются существенными для наших целей, поскольку они гарантируют, что при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ корни (6.1.5) заведомо не могут иметь положительных действительных частей порядка единицы. Если же, напротив, $\gamma > 1$, то у функции $\operatorname{Re} \delta_0(z, 0)$ появляется участок положительности, примыкающий к точке $z = 0$, а значит, у уравнения (6.1.4) с необходимостью существуют корни в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq c$, где $c > 0$ — некоторая не зависящая от ε, μ постоянная. В этом случае интересующая нас бифуркационная проблема очевидным образом теряет смысл, так как все ответвляющиеся от нуля автоколебания уравнения (6.1.3) будут неустойчивыми.

Для получения информации о поведении корней (6.1.5) при увеличении параметра μ воспользуемся вытекающими из (6.1.9) – (6.1.11) и (6.1.20) более детальными асимптотическими равенствами

$$\lambda_n(\varepsilon, \mu) = i\omega_n(1 + \varepsilon(\gamma - 2) + \varepsilon^2(\gamma - 2)^2) - 2\varepsilon^2\omega_n^2(1 - \gamma) + 4\mu + O(\varepsilon^3 + \varepsilon\mu), \quad (6.1.23)$$

которые, однако, уже не являются равномерно пригодными по n . В связи с этим становится актуальным следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Предположим, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет условию (6.1.21). Тогда по любому натуральному N можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma, N) > 0$, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, во-первых, каждое из уравнений*

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) = 0, \quad n = 1, \dots, N \quad (6.1.24)$$

допускает единственное решение

$$\mu = \mu_n(\varepsilon), \quad \mu_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_n^2 (1 - \gamma) + O(\varepsilon^3), \quad (6.1.25)$$

во-вторых, при $0 \leq \mu \leq \mu_1(\varepsilon)$ все корни уравнения (6.1.4) имеют отрицательные действительные части, а в случае $\mu_k(\varepsilon) < \mu < \mu_{k+1}(\varepsilon)$ при некотором $1 \leq k \leq N - 1$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) > 0, \quad 1 \leq n \leq k; \quad \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) < 0 \quad \forall n > k. \quad (6.1.26)$$

Для доказательства существования критических значений (6.1.25) параметра μ достаточно применить к каждому уравнению (6.1.24) в точке $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$ теорему о неявной функции, условия которой заведомо выполняются в силу тейлоровских разложений (6.1.23). Из этих разложений вытекает также справедливость первой группы неравенств (6.1.26) и оценок $\operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) < 0$ при $n > k, n \sim 1$. В случае же $n \gg 1$ требуемые оценки получаются из (6.1.20) с учетом нелокальных свойств (6.1.22) функции $\operatorname{Re} \delta_0(z, 0)$ и свойств (6.1.10) остатка $\delta_1(z, \varepsilon, \mu)$.

6.2. Метод квазинормальных форм и результаты его применения

Проделанный выше линейный анализ свидетельствует о том, что поставленная нами бифуркационная проблема близка к бесконечномерной: при $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ к мнимой оси стремится счетное число корней (6.1.5) характеристического уравнения (6.1.4). В подобной ситуации не удастся напрямую воспользоваться известными конечномерными методами исследования динамики, базирующимися на аппарате интегральных многообразий и нормальных форм [15, 108, 130]. В связи с этим в начале 80-х для случая, близкого к бесконечномерному вырождению, Ю.С. Колесовым был предложен специальный асимптотический метод, названный впоследствии методом квазинормальных форм. Не останавливаясь подробно на истории вопроса, напомним, что к настоящему времени этот метод обоснован в ряде модельных ситуаций как

для параболических [114, 115], так и для гиперболических [84], [91] краевых задач. В случае дифференциально-разностных уравнений второго порядка с большим запаздыванием алгоритмические аспекты метода квазинормальных форм разработаны в статьях [75] [79]. Однако для того чтобы применить результаты данных работ к уравнению (6.1.3), предварительно необходимо согласовать порядки малости параметров ε и μ . Сделать это можно следующими двумя способами.

1) Предположим сначала, что параметр γ фиксирован и удовлетворяет неравенству (6.1.21). Тогда в соответствии с асимптотическими формулами (6.1.25) для критических значений μ уместно положить

$$\mu = \beta\varepsilon^2, \quad \beta = \text{const} > \frac{\pi^2(1-\gamma)}{2} \quad (6.2.1)$$

(условие на β обеспечивает неустойчивость нулевого решения уравнения (6.1.3)).

2) Пусть теперь параметр γ отличается от своего порогового значения $\gamma = 1$ на величину порядка ε , т. е.

$$\gamma = 1 - \gamma_0\varepsilon, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0. \quad (6.2.2)$$

В этом случае (по тем же причинам, что и выше) считаем выполненным соотношение

$$\mu = \beta_0\varepsilon^3, \quad \beta_0 = \text{const} > \frac{\pi^2\gamma_0}{2}. \quad (6.2.3)$$

В первой из описанных ситуаций алгоритмическая часть метода квазинормальных форм состоит в следующем. Подставим в уравнение (6.1.3) равенство (6.2.1) и выполним в нем замену времени

$$\tau = (1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2)t, \quad \sigma_1 = \gamma - 2, \quad \sigma_2 = (\gamma - 2)^2, \quad (6.2.4)$$

где поправки σ_1, σ_2 к собственным частотам ω_n заимствованы из формул (6.1.23). После этого приближенные (с точностью до ε^3 по невязке) автоколебательные режимы получившегося уравнения

$$\varepsilon(1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2)\frac{du}{d\tau} = - \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon^2\beta \right) u(\tau - 1 - \varepsilon\sigma_1 - \varepsilon^2\sigma_2) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon^2\beta \right) u(\tau - \varepsilon\gamma - \varepsilon^2\gamma\sigma_1 - \varepsilon^3\gamma\sigma_2) \right] (1 + u) \quad (6.2.5)$$

будем искать в виде

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0(s, \tau) + \varepsilon u_1(s, \tau) + \varepsilon^{3/2}u_2(s, \tau) + \varepsilon^2 u_3(s, \tau) + \varepsilon^{5/2}u_4(s, \tau). \quad (6.2.6)$$

Здесь $s = \varepsilon^2 \tau$, $u_k(s, \tau + 2) \equiv u_k(s, \tau)$, $1 \leq k \leq 4$, а начальное приближение $u_0(s, \tau)$ задается равенством

$$u_0(s, \tau) = \xi(s, \tau), \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (6.2.7)$$

в котором “амплитуда” ξ также пока произвольна.

Обращаем внимание, что фигурирующая в (6.2.7) функция $\xi(s, \tau)$ допускает разложение Фурье вида

$$\xi(s, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(s) \exp(i\omega_n \tau) + \xi_n(s) \exp(-i\omega_n \tau), \quad (6.2.8)$$

в котором присутствуют все “критические” частотные компоненты, отвечающие корням $\lambda = \pm i\omega_n$, $n \geq 1$ уравнения (6.1.4) при $\varepsilon = \mu = 0$. Таким образом, становятся понятными способ выбора $u_0(s, \tau)$ и требование 2-периодичности по τ всех остальных слагаемых суммы (6.2.6). Что же касается порядка малости первого из этих слагаемых, то он взят равным корню четвертой степени из надкритичности

$$\max_{n \geq 1} \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon, \mu) \Big|_{\mu = \beta \varepsilon^2} = (4\beta - 2\pi^2(1 - \gamma))\varepsilon^2 + O(\varepsilon_4)$$

по той причине, что здесь в силу специфики нелинейности обращается в нуль аналог первой ляпуновской величины. Для сравнения напомним, что в рамках классической бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа амплитуда возникающих автоколебаний пропорциональна квадратному корню из надкритичности.

После подстановки формулы (6.2.6) в (6.2.5) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε в левой и правой частях получившегося равенства, для $u_k(s, \tau)$, $k \geq 1$ приходим к рекуррентной последовательности линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$\frac{1}{2}(u_k(s, \tau) + u_k(s, \tau - 1)) = \psi_k(s, \tau), \quad 1 \leq k \leq 4. \quad (6.2.9)$$

Анализ этих уравнений проводится по следующей общей схеме.

Разобьем фигурирующую в (6.2.9) 2-периодическую по τ неоднородность $\psi_k(s, \tau)$ на два слагаемых $\psi_{k,1}(s, \tau) + \psi_{k,2}(s, \tau)$: $\psi_{k,1}(s, \tau + 1) \equiv -\psi_{k,1}(s, \tau)$,

$\psi_{k,2}(s, \tau + 1) \equiv \psi_{k,2}(s, \tau)$, где

$$\begin{aligned}\psi_{k,1}(s, \tau) &= \frac{1}{2}(\psi_k(s, \tau) - \psi_k(s, \tau + 1)), \\ \psi_{k,2}(s, \tau) &= \frac{1}{2}(\psi_k(s, \tau) + \psi_k(s, \tau + 1)).\end{aligned}\tag{6.2.10}$$

Предположим, далее, что справедливо условие разрешимости уравнения (6.2.9) в классе 2-периодических функций, т. е.

$$\psi_{k,1}(s, \tau) \equiv 0.\tag{6.2.11}$$

Тогда из (6.2.9), (6.2.10) находим $u_k(s, \tau) = \psi_{k,2}(s, \tau)$. На первом шаге описанного алгоритма очевидным образом имеем

$$\psi_1 \equiv 0, \quad u_1(s, \tau) \equiv 0.\tag{6.2.12}$$

Далее, с учетом этого обстоятельства при $k = 2$ приходим к уравнению (6.2.9) с неоднородностью $\psi_2 = \left[\frac{\gamma - \sigma_1}{2} - 1 \right] \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$, тождественно равной нулю в силу выбора σ_1 (см. (6.2.4)). Тем самым, и здесь

$$u_2(s, \tau) \equiv 0.\tag{6.2.13}$$

На третьем и четвертом шагах алгоритма рассмотрению подлежат уравнения (6.2.9) с неоднородностями

$$\begin{aligned}\psi_3 = \xi \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \psi_4 = \frac{1}{2}((\gamma - 2)^2 - \sigma_2) \frac{\partial \xi}{\partial \tau} + (1 - \gamma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + 2\beta \xi - \frac{1}{2} [u_3(s, \tau) + u_3(s, \tau - 1)] \xi\end{aligned}\tag{6.2.14}$$

(при выводе формул (6.2.14) использовалась предшествующая информация (6.2.12), (6.2.13)). Анализ этих уравнений позволяет заключить, что $u_3 = \xi \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$, а условие разрешимости (6.2.11) при $k = 4$ приводит к параболической краевой задаче

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = 2(1 - \gamma) \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 4\beta \xi - 2\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau)\tag{6.2.15}$$

для амплитуды $\xi(s, \tau)$. Здесь s играет роль времени, а τ является пространственной переменной.

Следуя установившейся традиции, краевую задачу (6.2.15) будем называть квазинормальной формой исходного уравнения (6.1.3) или просто квазинормальной формой. Подобное название оправдано тем, что задача (6.2.15) может быть получена из уравнения (6.1.3) в результате применения к нему при условии (6.2.1) формальной процедуры нормализации Пуанкаре – Дюлака и последующего “сворачивания” нормальной формы (счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных $\xi_n(s)$, $\bar{\xi}_n(s)$, $n \geq 1$ из (6.2.8)) в скалярное параболическое уравнение. Отметим, что именно этот способ вывода квазинормальной формы реализован в уже упоминавшихся статьях [75], [79]. Нами же предложен метод, позволяющий получить ее сразу в свернутом виде.

Обратимся теперь ко второму случаю. При условиях (6.2.2), (6.2.3) приближенные автоколебательные режимы уравнения (6.1.3) удастся построить в виде суммы

$$u = \varepsilon u_0(s, \tau) + \varepsilon^2 u_1(s, \tau) + \varepsilon^3 u_2(s, \tau) + \varepsilon^4 u_3(s, \tau), \quad (6.2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= (1 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \varepsilon^3\sigma_3)t, \quad s = \varepsilon^3\tau, \\ \sigma_1 &= -1, \quad \sigma_2 = 1 - \gamma_0, \quad \sigma_3 = 2\gamma_0 - 1, \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

а функция $u_0(s, \tau)$ по-прежнему допускает представление (6.2.7). Отметим, что, как и в предыдущем случае, выбор коэффициентов σ_k , $k = 1, 2, 3$ в (6.2.17) продиктован аналогичными (6.1.23) асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varepsilon, \mu) \Big|_{\substack{\mu=\beta_0\varepsilon^3, \\ \gamma=1-\gamma_0\varepsilon}} &= i\omega_n(1 - \varepsilon + (1 - \gamma_0)\varepsilon^2 + (2\gamma_0 - 1)\varepsilon^3) + \\ &+ \left(4\beta_0 - 2\gamma_0\omega_n^2 - \frac{1}{3}i\omega_n^3\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения 2-периодических по τ функций $u_k(s, \tau)$, $k \leq 3$ из (6.2.16) идентичен описанному выше. Проводя соответствующие вычисления, убеждаемся, что здесь $u_1(s, \tau) \equiv 0$, $u_2 = \xi \frac{\partial \xi}{\partial \tau}$, а амплитуда $\xi(s, \tau)$ теперь является решением краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau^3} + 2\gamma_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + 4\beta_0 \xi - 2\xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau}, \quad \xi(s, \tau + 1) \equiv -\xi(s, \tau), \quad (6.2.18)$$

которую (по тем же причинам, что и выше) уместно назвать квазинормальной формой. Остановимся на естественно возникающем вопросе о соответствии между автоколебательными режимами квазинормальных форм

(6.2.15), (6.2.18) и исходного уравнения (6.1.3). В формулируемом ниже утверждении в качестве фазовых пространств краевых задач (6.2.15) и (6.2.18) возьмем соответственно пространства E_2 и E_3 , состоящие из антипериодических функций $\xi(\tau)$ класса $\overset{\circ}{W}_2^2[0, 1]$ и $\overset{\circ}{W}_2^3[0, 1]$, а фазовым пространством самого уравнения (6.1.3) будем считать $C[-1, 0]$.

Теорема 6.1. Пусть выполнены условия (6.1.21), (6.2.1), а квазинормальная форма (6.2.15) допускает периодическое решение типа бегущей волны

$$\xi = \xi_0(y) : \quad y = \alpha_0 s + \tau, \quad \xi_0(y + 1) \equiv -\xi_0(y), \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad (6.2.19)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решению (6.2.19) отвечает цикл уравнения (6.1.3) с теми же свойствами устойчивости. Главная асимптотика этого цикла задается равенствами (6.2.4), (6.2.6), во втором из которых учтено соотношение (6.2.19). Аналогичный результат остается в силе для уравнения (6.1.3) при условиях (6.2.2), (6.2.3) в случае, когда периодическое решение вида (6.2.19) имеет краевая задача (6.2.18).

Обоснование сформулированной теоремы, в принципе, может быть проведено по описанной в [16] стандартной схеме. Однако к настоящему времени разработан и другой, альтернативный способ доказательства существования и устойчивости периодических решений в системах с большим запаздыванием, сводящий в некотором смысле проблему к конечномерной. Подробное описание этого способа содержится в статье [92]. Подводя итог, отметим, что результатом применения метода квазинормальных форм к уравнению (6.1.3) являются две модельные краевые задачи (6.2.15) и (6.2.18). Для удобства последующего анализа с помощью замен $4\beta s \rightarrow s$, $\xi = \sqrt{2\beta}v$, $s \rightarrow t$, $\tau \rightarrow x$ первую из них преобразуем к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v - v^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(t, x + 1) \equiv -v(t, x), \quad (6.2.20)$$

где $d = (1 - \gamma)/(2\beta)$. Вторая же после аналогичных преобразований принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + d_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d_2 v - v^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v(t, x + 1) \equiv -v(t, x), \quad (6.2.21)$$

где $d_1 = 6\gamma_0$, $d_2 = 12\beta_0$.

6.3. Анализ модельных краевых задач

Обратимся сначала к краевой задаче (6.2.20). Из теоремы 6.1 следует, что основной интерес представляют ее периодические решения

$$v = v(y) : \quad y = \alpha t - x, \quad \alpha > 0, \quad v(y+1) \equiv -v(y). \quad (6.3.1)$$

Поэтому начнем с изучения динамики указанных решений по параметру d . Подставляя соотношения (6.3.1) в (6.2.20), для определения функции $v = v(y)$ приходим к уравнению

$$dv'' + (v^2 - \alpha)v' + v = 0, \quad (6.3.2)$$

которое после замен $\frac{y}{\sqrt{d}} \rightarrow y, v = \sqrt{\alpha}w$ преобразуется к виду

$$w'' + \theta(w^2 - 1)w' + w = 0, \quad (6.3.3)$$

где $\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{d}}$. Заметим, далее, что (6.3.3) — это классическое уравнение Ван-дер-Поля, допускающее, как известно [124], при всех $\theta > 0$ единственное периодическое решение $w = w_0(y, \theta)$ периода $T(\theta)$ (антипериодическое с периодом $T = 2$). Здесь достаточно гладкие по совокупности переменных функции $w_0(y, \theta), T(\theta)$ таковы (см. [13, 112]), что

$$\begin{aligned} w_0(y, 0) &= 2 \cos y, \quad T(0) = 2\pi, \quad T'(0) = 0, \quad T''(0) = \frac{\pi}{4}; \\ T(\theta) &= \theta(3 - 2 \ln 2) + O(\theta^{-1/3}), \\ T'(\theta) &= 3 - 2 \ln 2 + O(\theta^{-4/3}) \text{ при } \theta \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Напомним, однако, что нас интересует периодическое решение уравнения (6.3.3) периода $\frac{2}{\sqrt{d}}$. Поэтому для определения неизвестного параметра θ получаем уравнение

$$T(\theta) = \frac{2}{\sqrt{d}}. \quad (6.3.5)$$

Анализ уравнения (6.3.5) показывает, что при всех $0 < d \leq \frac{1}{\pi^2}$ оно имеет единственное решение $\theta = \theta_0(d)$, обладающее свойствами

$$\theta_0\left(\frac{1}{\pi^2}\right) = 0, \quad \theta_0(d) = \frac{2}{(3 - 2 \ln 2)\sqrt{d}} + O(d^{1/6}) \text{ при } d \rightarrow 0. \quad (6.3.6)$$

Действительно, однозначная разрешимость этого уравнения — следствие того факта, что функция $T(\theta)$ при $\theta \in [0, +1)$ монотонно меняется от 2π до $+\infty$ (при $\theta \ll 1$ и $\theta \gg 1$ свойство монотонности $T(\theta)$ справедливо в силу (6.3.4), а при средних значениях θ является результатом численной проверки). Что же касается равенств (6.3.6), то они также вытекают из соотношений (6.3.4).

Возвращаясь к уравнению (6.3.2), заметим, что в силу изложенных построений при

$$\alpha = \alpha_0(d), \quad \alpha_0(d) = \sqrt{d}\theta_0(d) \quad (6.3.7)$$

оно допускает антипериодическое с периодом 1 решение

$$v = v_0(y, d), \quad v_0(y, d) = d^{1/4} \sqrt{\theta_0(d)} w_0\left(\frac{y}{\sqrt{d}}, \theta_0(d)\right). \quad (6.3.8)$$

А это значит, что при всех $0 < d \leq \frac{1}{\pi^2}$ у краевой задачи (6.2.20) существует периодическое решение

$$v = v_0(y, d) : \quad y = \alpha_0(d)t - x, \quad (6.3.9)$$

где функции α_0, v_0 задаются равенствами (6.3.7), (6.3.8).

Следует добавить, что наряду с (6.3.9) задача (6.2.20) имеет и другие периодические решения типа бегущих волн, получающиеся из построенного выше с помощью так называемого принципа подобия. А именно непосредственная проверка показывает, что ее решениями являются

$$v = v_n(y, d) : \quad y = \alpha_n(d)t - x, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6.3.10)$$

где $0 < d \leq d_n$, $d_n = (\pi^2(2n+1)^2)^{-1}$,

$$v_n = \frac{v_0((2n+1)y, (2n+1)^2 d)}{\sqrt{2n+1}}, \quad \alpha_n(d) = \frac{\alpha_0((2n+1)^2 d)}{2n+1}. \quad (6.3.11)$$

Вопрос об устойчивости периодических решений (6.3.10) в полном объеме аналитическими методами решить не удастся. Можно лишь утверждать, что справедлива следующая

Лемма 6.3. *Для любого $n \geq 0$ найдется такое достаточно малое $\nu_n > 0$, что при $d = d_n - \nu$, $0 < \nu \leq \nu_n$ периодическое решение (6.3.10) с номером $n = 0$ экспоненциально орбитально устойчиво, а каждое решение (6.3.10) с номером $n \geq 1$ неустойчиво.*

Доказательство. В случае $n \geq 1$ утверждение леммы очевидно. Действительно, из соотношений (6.3.6), (6.3.8), (6.3.11) вытекает, что $v_n(y, d_n) \equiv 0$, $n \geq 0$. А это значит, что периодические решения (6.3.10) последовательно ответвляются от нулевого состояния равновесия краевой задачи (6.2.20) при уменьшении параметра d и при прохождении его через критические значения d_n , $n \geq 0$. Но поскольку нулевое решение этой задачи устойчиво (неустойчиво) при $d - 1/\pi^2 > 0$ (< 0), то заведомо неустойчивым при $0 < d_n - d \ll 1$ оказывается и любое бифурцирующее из него решение (6.3.10) с номером $n \geq 1$.

Для обоснования леммы при $n = 0$ воспользуемся теорией центральных многообразий и нормальных форм, распространенной на эволюционные уравнения в банаховых пространствах в монографиях [130], [129]. С этой целью заметим, что при

$$d = \frac{1}{\pi^2} - \nu, \quad 0 < \nu \ll 1 \quad (6.3.12)$$

в некоторой достаточно малой окрестности нуля фазового пространства E_2 краевая задача (6.2.20) имеет экспоненциально орбитально устойчивое двумерное инвариантное многообразие \mathcal{U} . В линейном приближении, т. е. в случае краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{1}{\pi^2} - \nu \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v, \quad v(t, x+1) \equiv -v(t, x), \quad (6.3.13)$$

это многообразие допускает представление

$$\mathcal{U}: \quad v = \rho v_0(y), \quad v_0(y) = \exp(i\pi y) + \exp(-i\pi y), \quad y = \varphi + x, \quad (6.3.14)$$

где (ρ, φ) — вещественные параметры, причем $0 \leq \varphi \leq 2 \pmod{2}$. Движения же на многообразии (6.3.14), индуцируемые задачей (6.3.13), описываются системой

$$\dot{\rho} = \nu\pi^2\rho, \quad \dot{\varphi} = 0.$$

При переходе от (6.3.13) к нелинейной краевой задаче (6.2.20) многообразие \mathcal{U} в некоторой достаточно малой окрестности нуля сохраняется, но теперь само оно и система уравнений на нем принимают вид

$$\mathcal{U}: \quad v = \rho v_0(y) + H(\rho, y, \nu), \quad (6.3.15)$$

$$H(\rho, y+1, \nu) \equiv -H(\rho, y, \nu), \quad y = \varphi + x,$$

$$\dot{\rho} = \nu\pi^2\rho + \Phi_1(\rho, \nu), \quad \dot{\varphi} = \Phi_2(\rho, \nu). \quad (6.3.16)$$

Здесь функции H и Φ_1, Φ_2 достаточно гладко зависят от своих переменных $(\rho, y, \nu) \in [-\rho_0, \rho_0] \times \mathbb{R} \times [0, \nu_0]$ и $(\rho, \nu) \in [-\rho_0, \rho_0] \times [0, \nu_0]$, где $\rho_0, \nu_0 > 0$ подходящим образом малы, а также удовлетворяют следующим тождествам:

$$H(0, y, \nu) \equiv \frac{\partial H}{\partial \rho}(0, y, \nu) \equiv 0, \quad \Phi_j(0, \nu) \equiv \frac{\partial \Phi_j}{\partial \rho}(0, \nu) \equiv 0, \quad j = 1, 2; \quad (6.3.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(-\rho, \nu) &\equiv -\Phi_1(\rho, \nu), & \Phi_2(-\rho, \nu) &\equiv \Phi_2(\rho, \nu), \\ H(-\rho, y, \nu) &\equiv -H(\rho, y, \nu). \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Для пояснения сути дела заметим, что многообразие (6.3.15) наследует свойства своего линейного аналога. Поэтому, как и многообразие (6.3.14), оно не меняется при независимом выполнении замен $\nu \rightarrow -\nu$, $\rho \rightarrow -\rho$ и $x \rightarrow x + c$, $\varphi \rightarrow \varphi - c \forall c \in \mathbb{R}$. Далее, нетрудно увидеть, что первое из указанных свойств инвариантности влечет справедливость тождеств (6.3.18). Второе же оказывается причиной того, что функция H зависит от комбинации переменных φ, x вида $\varphi + x$, а правые части Φ_1, Φ_2 системы (6.3.16) не зависят от φ вообще. И, наконец, для проверки тождеств (6.3.17) достаточно увидеть, что при всех $\nu \in [0, \nu_0]$ многообразие (6.3.15) содержит состояние равновесия $\nu = 0$, которому отвечает нулевое значение параметра ρ . Соотношения (6.3.17), (6.3.18) позволяют заключить, что по переменным ρ, ν в точке $\rho = 0, \nu = 0$ функции H, Φ_1, Φ_2 допускают тейлоровские разложения

$$\begin{aligned} H &= \rho^3 v_1(y) + \rho^5 v_2(y) + O(\nu|\rho|^3 + |\rho|^7), \\ \Phi_1 &= a_1 \rho^3 + a_2 \rho^5 + O(\nu|\rho|^3 + |\rho|^7), \\ \Phi_2 &= b_1 \rho^2 + b_2 \rho^4 + O(\nu\rho^2 + \rho^6), \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

из которых в дальнейшем нам потребуется знать коэффициенты $a_j, b_j, j = 1, 2$. Их нахождение проводится по следующей схеме.

Подставим в (6.2.20) формулы (6.3.15), (6.3.19) вместе с равенством (6.3.12), считая, что переменные $\rho = \rho(t), \varphi = \varphi(t)$ дифференцируются по правилам (6.3.16), а постоянные $a_j, b_j, j = 1, 2$ и функции $v_1(y), v_2(y)$ пока произвольны. Приравнявая затем в получившемся выражении слева и справа коэффициенты при ρ^3 и ρ^5 , приходим к линейным неоднородным краевым задачам вида

$$\frac{1}{\pi^2} v_j'' + v_j = f_j(y), \quad v_j(y+1) \equiv -v_j(y), \quad j = 1, 2. \quad (6.3.20)$$

Выполнения же условий их разрешимости, т. е. отсутствия в правых частях $f_j(y), j = 1, 2$ из (6.3.20) гармоник $\exp(\pm i\pi y)$, добиваемся за счет выбора

четырёх констант $a_j, b_j, j = 1, 2$. На этом пути приходим к равенствам

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{\pi^2}{8}, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = 0. \quad (6.3.21)$$

Для завершения обоснования леммы обратимся к отщепляющемуся от (6.3.16) скалярному уравнению для ρ и заметим, что в силу (6.3.19), (6.3.21) оно допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$\rho = \rho_*(\nu), \quad \rho_*(\nu) = \sqrt[4]{8\nu}(1 + O(\sqrt{\nu})). \quad (6.3.22)$$

Далее, нетрудно увидеть, что состоянию равновесия (6.3.22) в полной системе (6.3.16) отвечает устойчивый цикл

$$\rho = \rho_*(\nu), \quad \varphi = \Delta_*(\nu)t + c, \quad \Delta_*(\nu) = -\sqrt{8\nu}(1 + O(\sqrt{\nu})), \quad c \in R. \quad (6.3.23)$$

И наконец, подставляя равенства (6.3.23) в (6.3.15), получаем устойчивую бегущую волну (6.3.9) исходной краевой задачи (6.2.20) при условии (6.3.12). Лемма 6.3 доказана.

Как оказывается, периодические решения (6.3.10) обладают установленными в лемме 6.3 свойствами устойчивости не только при $0 < d_n - d \ll 1$, но и при всех $0 < d < d_n$. Однако проверить это удастся лишь с помощью компьютерного моделирования.

Для описания соответствующего численного эксперимента фиксируем произвольно натуральное N и заменим частные производные по x в (6.2.20) приближенными равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) \Big|_{x=k/N} &\approx N^2(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)), \\ v^2(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \Big|_{x=k/N} &\approx \frac{N}{4}v_k(t)(v_{k+1}^2(t) - v_{k-1}^2(t)), \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

где $v_k(t) = v(t, x) \Big|_{x=k/N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. В результате для переменных $v_k(t)$ после нормировки времени $N^2t \rightarrow t$ приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{v}_k &= d(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + \frac{1}{N^2}v_k - \frac{1}{4N}v_k(v_{k+1}^2 - v_{k-1}^2), \\ k &= 0, 1, \dots, N-1, \quad v_N = -v_0, \quad v_{-1} = -v_{N-1}. \end{aligned} \quad (6.3.25)$$

Подчеркнем, что получившаяся конечномерная система представляет собой хорошую феноменологическую модель исходной задачи (6.2.20), сохраняющую основные свойства последней. Для того чтобы убедиться в этом, остановимся на следующих двух характерных особенностях модели (6.3.25).

Во-первых, при аппроксимации (6.3.24) учтена специфика входящей в (6.2.20) нелинейности. Действительно, непосредственная проверка показывает, что система, получающаяся из (6.3.25) при $d = 0$ и при отбрасывании слагаемых v_k/N^2 , $k = 0, 1, \dots, N - 1$, допускает первый интеграл вида $V \equiv \text{const}$, где

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} v_k^2. \quad (6.3.26)$$

Для сравнения заметим, что аналогичный закон сохранения

$$\int_0^1 v^2(t, x) dx \equiv \text{const} \quad (6.3.27)$$

выполняется и для краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad v(t, x + 1) \equiv -v(t, x).$$

Во-вторых, как и в случае краевой задачи (6.2.20), нулевое решение дискретной модели (6.3.25) устойчиво (неустойчиво) при $d - d_* > 0$ (< 0), где критическое значение $d_* = \left(4N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}\right)^{-1}$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{1}{\pi^2}$. В частности, при $N = 30$ имеем $d_* = 0.10141\dots$, что весьма близко к $\frac{1}{\pi^2} = 0.10132\dots$

Следует отметить также, что устойчивость нуля в системе (6.3.25) носит заведомо глобальный характер, поскольку при $d > d_*$ производная \dot{V} функции (6.3.26) в силу этой системы представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму. Численный анализ модели (6.3.25) проводился при $N = 30$ и $N = 31$ с помощью пакета программ tracer 3.7 (использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка точности с шагом 10^{-3}). Результаты этого анализа показали, что при $0.01 \leq d < d_*$ единственным аттрактором рассматриваемой системы является устойчивый цикл, бифурцирующий из нуля при прохождении параметра d через критическое значение d_* и представляющий собой аналог цикла (6.3.9). Тем самым, есть все основания ожидать, что такая же динамика по $d \in (0, 1/\pi^2)$ наблюдается и в распределенной модели (6.2.20).

Заканчивая обсуждение системы (6.3.25), отметим, что при излишне малых d сначала у нее появляются отдельные решения, стремящиеся по норме

к бесконечности при возрастании t , а при

$$d < \left(4N^2 \sin^2 \frac{\pi(2l-1)}{2N} \right)^{-1}, \quad l = \left[\frac{N}{2} \right], \quad [*] - \text{целая часть} \quad (6.3.28)$$

таковыми становятся все ее траектории. Связано это с тем, что в случае выполнения неравенства (6.3.28) оказывается положительно определенной упомянутая выше квадратичная форма \dot{V} . Данное обстоятельство проясняет причину, по которой при $N = 30$ мы ограничились рассмотрением значений $d \geq 0.01$.

Обратимся теперь к краевой задаче (6.2.21). Для получения ее дискретного аналога дополним равенства (6.3.24) соотношениями

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, x) \Big|_{x=k/N} \approx \frac{N^3}{2} (v_{k+2}(t) - 2v_{k+1}(t) + 2v_{k-1}(t) - v_{k-2}(t)). \quad (6.3.29)$$

Подставляя, далее, формулы (6.3.24), (6.3.29) в (6.2.21), для $v_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ получаем конечномерную систему, которая после нормировки времени $N^3 \frac{t}{2} \rightarrow t$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_k &= v_{k+2} - 2v_{k+1} + 2v_{k-1} - v_{k-2} + \frac{2d_1}{N}(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) + \\ &+ \frac{2d_2}{N^3}v_k - \frac{1}{2N^2}v_k(v_{k+1}^2 - v_{k-1}^2), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ v_N &= -v_0, \quad v_{N+1} = -v_1, \quad v_{-1} = -v_{N-1}, \quad v_{-2} = -v_{N-2}. \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

Причины, по которым уместен переход от распределенной модели (6.2.21) к ее дискретному аналогу (6.3.30), те же самые, что и в предыдущем случае. А именно здесь,

во-первых, при $d_1 = d_2 = 0$ как система (6.3.30), так и исходная задача (6.2.21) допускают законы сохранения (6.3.26) и (6.3.27) соответственно,

во-вторых, нулевое решение модели (6.3.30) устойчиво (неустойчиво) при $d_2 - d_{2,*} < 0$ (> 0), где критическое значение $d_{2,*} = 4d_1 N^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к соответствующему критическому значению распределенной модели, равному $d_1 \pi^2$. И наконец,

в-третьих, при $d_2 < d_{2,*}$ область притяжения нулевого состояния равновесия системы (6.3.30) совпадает со всем пространством \mathbb{R}^N (в этом случае, как и выше, производная \dot{V} функции (6.3.26) в силу рассматриваемой системы является отрицательно определенной квадратичной формой).

Численные расчеты, предпринятые при $20 \leq N \leq 30$, показали наличие в системе (6.3.30) явления буферности. Точнее говоря, было установлено, что

при согласованном увеличении d_2 и уменьшении d_1 происходит рост числа ее сосуществующих аттракторов.

Наиболее подробные вычисления были предприняты для $N = 20$, $N = 30$ и $N = 31$. В приложении Б приводятся начальные условия и проекции фазовых портретов устойчивых режимов системы (6.3.30) для этих значений N при $d_1 = 0.1$, $d_2 = 14.7$.

Как оказалось, при $N = 20$ система (6.3.30) имеет по меньшей мере 5 различных устойчивых циклов, 2 устойчивых двумерных тора и 2 хаотических аттрактора. Проекция этих режимов на плоскость (v_0, v_{10}) изображены на рис. Б.1 – Б.9.

При $N = 30$, в свою очередь, найдены 14 устойчивых циклов, 5 устойчивых двумерных торов и 2 хаотических аттрактора. На рис. Б.10 – Б.30 изображены проекции этих режимов на плоскость (v_0, v_{15}) .

Наконец, для $N = 31$ получены 15 устойчивых циклов, 5 устойчивых двумерных торов и 1 хаотический аттрактор. На рис. Б.31 – Б.51 представлены проекции этих режимов, как и в предыдущем случае, на плоскость (v_0, v_{15}) .

Следует добавить, что для каждого аттрактора вычислялись ляпуновские показатели и ляпуновская размерность, после чего делался вывод о возможном его характере. В результате удалось выяснить, что проекции, представленные на рис. Б.5, Б.6, Б.11, Б.14, Б.18, Б.19, Б.23, Б.44, Б.46, Б.48, Б.50, Б.51, принадлежат двумерным торам, рис. Б.4, Б.7, Б.20, Б.29 и Б.32 соответствуют хаотическим аттракторам, а во всех остальных случаях имеем дело с устойчивыми циклами. Значения ляпуновских показателей и ляпуновской размерности для хаотических аттракторов также приведены в приложении Б.

Заключение

Предпринятый анализ позволяет сделать следующие выводы о динамике обобщенного уравнения Хатчинсона (6.1.1) в экстремальной ситуации (6.1.2). Во-первых, при условиях (6.1.21), (6.2.1) и при увеличении параметра β нулевое решение уравнения (6.1.3) теряет устойчивость и из него бифурцирует устойчивый цикл. Точнее говоря, теорема 6.1 и содержащееся в разделе 6.3 численное исследование модельной задачи (6.2.20) гарантируют, что упомянутый цикл существует при любом фиксированном $\beta > \frac{1}{2}(1 - \gamma)$ (в квазинормальной форме (6.2.20) ему отвечает устойчивая бегущая волна (6.3.9)). Добавим еще, что в рассматриваемом случае этот цикл остается

единственным локальным аттрактором уравнения (6.1.3) несмотря на то, что при увеличении β общее число его неустойчивых периодических решений, соответствующих бегущим волнам (6.3.11) при $n \geq 1$, неограниченно растет.

Во-вторых, при приближении параметра γ к критическому значению $\gamma = 1$ происходит усложнение динамики, связанное с появлением в фазовом пространстве уравнения (6.1.3) различных сосуществующих аттракторов, или, иными словами, реализуется феномен буферности. Действительно, при условиях (6.2.2), (6.2.3) квазинормальной формы этого уравнения является модельная краевая задача (6.2.21). Последняя же, как показал соответствующий численный анализ, при подходящем выборе параметров d_1, d_2 может иметь достаточно большое число сосуществующих аттракторов, среди которых присутствуют как устойчивые циклы, так и более сложные установившиеся режимы (двумерные торы и хаос). Таким образом, для того чтобы убедиться в наличии феномена буферности, достаточно применить к каждому устойчивому циклу квазинормальной формы (6.2.21) теорему 6.1 и получить аналогичный устойчивый цикл исходного уравнения (6.1.3).

В заключение добавим, что для двумерных торов краевой задачи (6.2.21), найденных численными методами в разделе 6.3, аналог теоремы 6.1 о соответствии остается в силе. Причина этого в том, что любой из упомянутых торов устроен достаточно просто. Он представляет собой “периодически зависящую от времени бегущую волну”, т. е. записывается в виде

$$v = v(t, y) : \quad v(t + T, y) \equiv v(t, y), \quad v(t, y + 1) \equiv -v(t, y), \quad y = \alpha t + x,$$

где $\alpha = const \neq 0$, $T > 0$. Что же касается хаотических аттракторов квазинормальной формы (6.2.21), то для них, напротив, никаких строгих результатов о соответствии получить не удастся.

Заключение

В заключение перечислим основные результаты полученные в работе.

1. Построена и проанализирована нормальная форма для двух диффузионно связанных колебательных систем. Определены сценарии фазовых перестроек. Получены условия возникновения и потери устойчивости неоднородных автомодельных циклов и торов данной системы.

2. Найдены условия реализации квазифейгенбаумовского бифуркационного сценария, в котором переход от одного самосимметричного цикла к другому циклу условно двойного периода происходит через каскад бифуркаций потери симметрии, стандартных удвоений периода, возникновений и исчезновений хаотических аттракторов.

3. На примере из нейродинамических приложений выполнен численный эксперимент, позволяющий оценить границы применимости асимптотических методов.

4. В целях повышения точности и надежности вычисления ляпуновских экспонент разработан и обоснован новый вариант алгоритма Беннетина (метод динамических перенормировок) для их определения.

5. Для цепочки диффузионно слабо связанных колебательных систем на устойчивом интегральном многообразии построена и проанализирована система разностей фаз осцилляторов. В случае двух, трех и четырех осцилляторов и цепочек с граничными условиями периодичности и непроницаемости дана полная динамика соответствующей нормальной формы.

6. В случае, когда число осцилляторов в цепочке растет численными методами показано, что ляпуновская размерность аттрактора увеличивается по близкому к линейному закону. Произведен обширный численный эксперимент для разностной модели уравнения Гинзбурга - Ландау, в котором проиллюстрирован данный результат и определены границы его применимости.

8. Для трех однонаправлено связанных в кольцо осцилляторов показан способ построения системы с хаотическим аттрактором. Подобно разобран

один радиوفизический пример. Установлены границы применимости асимптотически методов.

9. Получено обобщение результатов для трех однонаправлено связанных в кольцо осцилляторов на случай, когда парциальная колебательная система представляет собой краевую задачу гиперболического типа (обобщенное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью). Показано, что такая система может иметь сколь угодно большое число хаотических аттракторов.

10. Для цепочки диффузионно слабо связанных систем гиперболического типа обнаружен и обоснован механизм накопления хаотических аттракторов. В частности, установлено, что при изменении управляющего параметра в такой системе могут наблюдаться две принципиально различные ситуации: 1) сосуществует счетное число конечномерных хаотических аттракторов; 2) существует хаотический аттрактор бесконечной размерности.

11. Рассмотрена феноменологическая модель развития турбулентности в соответствии со сценариями Ландау и Ландау - Селла, по первому из которых возникновение турбулентного аттрактора происходит в результате каскада бифуркаций устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей, а во втором происходят фазовые перестройки хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых при изменении некоторого управляющего параметра неограниченно растет.

12. Выяснен и обоснован механизм накопления одностипных аттракторов (устойчивых предельных циклов) у слабо возмущенных динамических систем маятникового типа. С этой целью определены частичные пределы функций Мельникова на резонансных циклах.

13. Для сингулярно возмущенного логистического уравнения с двумя запаздываниями показано, что его квазинормальной формой могут служить краевые задачи параболического типа с кубической нелинейностью и в случае дополнительного вырождения — краевая задача типа уравнения Кортевега - де Фриза с антипериодическими краевыми условиями. Выполнен численный анализ квазинормальной формы, показано, что число сосуществующих устойчивых режимов растет с ростом числа осцилляторов, учитываемых в разностной модели квазинормальной формы.

Литература

1. *Абарбанель, Г. Д.* Синхронизация в нейронных ансамблях / *Г. Д. Абарбанель, М. И. Рабинович, А. Селверстон, М. В. Баженов, Р. Хуэрта, М. М. Суцук, Л. Л. Рубчинский* // Усп. Физ. наук. — 1996. — Т. 166, № 4. — С. 363–390.
2. *Анищенко, В. С.* Сложные колебания в простых системах / *В. С. Анищенко*. — М.: Наука, 1990.
3. *Анищенко, В. С.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / *В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер*. — Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. *Анищенко, В. С.* Статистические свойства динамического хаоса / *В. С. Анищенко, Г. А. Окрокверцхов, Г. И. Стрелкова* // Усп. Физ. наук. — 2005. — Т. 175, №2. — С. 163–179.
5. *Арнольд, В. И.* Теория бифуркаций / *В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1985. — Т. 5. — С. 5–220.
6. *Арнольд, В. И.* Эргодические проблемы классической механики / *В. И. Арнольд, А. Авец*. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999.
7. *Аронсон И. С.* Развитие хаоса в ансамблях динамических структур / *И. С. Аронсон, А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович* // ЖЭТФ. — 1985. — Т. 89, № 1. — С. 92–105.
8. *Ахромеева, Т. С.* О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации / *Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский* // Итоги науки

- и техники. Современные проблемы математики. ВИНТИ. — 1987. — Т. 28. — С. 207–313.
9. *Ахромеева, Т. С.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос / *Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский.* — М.: Наука, 1992.
 10. *Берже, П.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / *П. Берже, И. Помо, К. Видаль.* — Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
 11. *Бибиков, Ю. Н.* Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / *Ю. Н. Бибиков.* — Л.: Издательство ЛГУ, 1991.
 12. *Бланк, М. Л.* Устойчивость и локализация в хаотической динамике / *М. Л. Бланк* — М.: МЦНМО, 2001.
 13. *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.* — М: Наука, 1974.
 14. *Брюно, А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / *А. Д. Брюно.* — М.: Наука, 1979.
 15. *Ван, Д.* Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / *Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу.* — М.: МЦНМО, 2005.
 16. *Васильева, А.Б.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией / *А.Б. Васильева, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесов, Н.Х. Розов* // Мат. сб. — 1986. — Т. 130, № 4. — С. 488 — 499.
 17. *Витт, А. А.* Распределенные автоколебательные системы / *А. А. Витт* // Журн. технич. физики. — 1934. — Т. 4, № 1. — С. 144 — 157.
 18. *Гаврилов, Н. К.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I. / *Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников* // Матем. сб. — 1972. — Т. 88, № 4. — С. 475 — 492.
 19. *Гаврилов, Н. К.* О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. II. / *Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников* // Матем. сб. — 1973. — Т. 90, № 1. — С. 139 — 157.

20. Гапонов-Грехов, А. В. О рождении многомерного хаоса в активных решетках / А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович, И. М. Старобинец // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, /№ 3. — С. 596—602
21. Гапонов-Грехов, А. В. Динамическая модель пространственного развития турбулентности / А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович, И. М. Старобинец // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т. 39, № 12. — С. 561—564.
22. Гапонов-Грехов, А. В. Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей / А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7-44.
23. Глызин, Д. С. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / Д. С. Глызин, С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 268 — 273.
24. Глызин, Д. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611464. Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer". Заявка № 2008610548 от 14.02.2008 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008 г.
25. Глызин, С. Д. Влияние миграций и неоднородного сопротивления среды на процесс видообразования / С. Д. Глызин // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. Ярославль, 1982. — С. 78—84.
26. Глызин, С. Д. О стабилизирующей роли неоднородного сопротивления внешней среды в задаче "хищник-жертва" / С. Д. Глызин // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. — Ярославль, 1982. — С. 126—129.
27. Глызин, С. Д. О стабилизирующей роли процесса видообразования / С. Д. Глызин // Исследования по устойчивости и теории колебаний: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. — Ярославль, 1983. — С. 101—105.
28. Глызин, С. Д. Двухчастотные колебания фундаментального уравнения динамики популяций насекомых / С. Д. Глызин // Нелинейные колебания и экология: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. — Ярославль, 1984. — С. 91—116.

29. Глызин, С. Д. Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации уравнения Хатчинсона с диффузией / С. Д. Глызин // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. — Ярославль, 1986. — С. 112–127.
30. Глызин, С. Д. О границах применимости одного асимптотического метода / С. Д. Глызин // Математические модели в биологии и медицине. Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. — Вильнюс, 1987. — Вып.2. — С. 56–58.
31. Глызин, С. Д. Установившиеся режимы уравнения Хатчинсона с малой диффузией в случае квадрата / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений: Межвуз. сб. / Яросл. ун-т. — Ярославль, 1988. — С. 76–94.
32. Глызин, С. Д. Аттрактор биллокальной модели уравнения Хатчинсона с диффузией при большом коэффициенте линейного роста / С. Д. Глызин, Ю. С. Колесов // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 307, № 2. — С. 846–851.
33. Глызин, С. Д. Численное обоснование гипотезы Ландау - Колесова о природе турбулентности / С. Д. Глызин // Математические модели в биологии и медицине / Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. — Вильнюс, 1989. — Вып. 3. — С. 31–36.
34. Глызин, С. Д. Оптимальный способ ведения рыбного хозяйства / С. Д. Глызин, Ю. С. Колесов // Математические модели в биологии и медицине / Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР. — Вильнюс, 1989. — Вып. 3. — С. 37–42.
35. Глызин, С. Д. Методы компьютерной графики в качественной теории динамических систем на плоскости. Учебн. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 1993. — 68 с.
36. Глызин, С. Д. Устойчивые пространственно неоднородные режимы краевой задачи “реакция-диффузия” в случае вырождения порядка три / С. Д. Глызин // Труды Международной конференции “Колебания и волны в экологии, технологических процессах и диагностике”. Минск, 15-20 сентября 1993. — С. 43.
37. Глызин, С. Д. Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации краевой задачи “реакция-диффузия” // Труды 3-й Между-

- народной конференции “Нелинейные колебания механических систем”. Нижний Новгород, сентябрь 1993. — С. 55.
38. *Глызин, С. Д.* Стационарные режимы одной конечноразностной аппроксимации краевой задачи “реакция-диффузия” / *С. Д. Глызин* // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — С. 256–257.
39. *Глызин, С. Д.* Каскад бифуркаций странных аттракторов в одной модели краевой задачи “реакция-диффузия” / *С. Д. Глызин* // “Понтрягинские чтения - VII”: Тезисы докладов школы – Воронеж. ВГУ, 1996. — С. 53.
40. *Глызин, С. Д.* Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия” / *С. Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 6. — С. 805–811.
41. *Глызин, С. Д.* Численные методы анализа динамических систем. Учебн. пособие / Ярослав. гос. ун-т. Ярославль, 2002. — 76 с.
42. *Глызин, С. Д.* Резонансные явления в одной динамической системе / *С. Д. Глызин, Е. П. Кубышкин* // Математика: Материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 200-летию ЯрГУ им. П. Г. Демидова. — Ярославль, 2003. — С. 211–218.
43. *Глызин, С. Д.* Соотношение свойств одного класса динамических систем и их нормальных форм / *С. Д. Глызин* // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы “Понтрягинские чтения XVI”. — Воронеж: ВГУ, 2005. — С. 48–49.
44. *Глызин, С. Д.* Качественное поведение нормальной формы одного класса динамических систем с переменным запаздыванием / *С. Д. Глызин, Е. П. Кубышкин* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. — Воронеж: ВГУ, 2005. — С. 74–75.
45. *Глызин, С. Д.* Хаотическая буферность в цепочках связанных осцилляторов / *С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов* // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 41 - 49.
46. *Глызин, С. Д.* Нелинейная динамика одного дифференциального уравнения второго порядка с периодически возмущенным запаздыванием /

- С.Д. Глызин, Е.П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 12, № 1. — С.39 - 44.*
47. *Глызин, С. Д. Динамические свойства систем фазовых уравнений диффузионно слабо связанных осцилляторов / С. Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2005. — Т. 12, № 2. — С.53 - 64.*
48. *Глызин, С. Д. Механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом 1:2 / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2005. — Т. 45, № 11. — С. 1923 - 1934.*
49. *Глызин, С. Д. Явление буферности в системах с полутора степенями свободы / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1582-1593.*
50. *Глызин, С. Д. О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 10. — С. 1809 - 1821.*
51. *Глызин, С. Д. Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов / С. Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2006. — Т. 13, № 1. — С. 49 - 57.*
52. *Глызин, С. Д. Явление буферности в одном двумерном кусочно-линейном отображении из радиофизики / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 4. — С. 507 - 514.*
53. *Глызин, С. Д. О предельных значениях функций Мельникова на периодических орбитах / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 2. — С. 176-190.*
54. *Глызин, С. Д. Разделение движений в окрестности полуустойчивого цикла / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 5. — С. 598-615.*
55. *Глызин, С. Д. Об одной математической модели хаотической буферности / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // ДАН. — 2007. — Т. 412, № 5. — С. 604 - 609.*

56. Глызин, С.Д. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона / С.Д. Глызин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 3. — С. 50 - 63.
57. Глызин, С.Д. Локальные методы анализа динамических систем / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов. — Учебн. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2007. — 80 С.
58. Глызин, С.Д. Катастрофа голубого неба в релаксационных системах с одной быстрой и двумя медленными переменными / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 158 - 171.
59. Глызин, С.Д. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа / С.Д. Глызин, Е.О. Киселева // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 75 - 88.
60. Глызин С.Д. Пример аттрактора, состоящего из неустойчивых по Ляпунову периодических траекторий / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 94–95.
61. Глызин, С.Д. Экстремальная динамика обобщенного уравнения Хатчинсона / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 1. — С. 76 - 89.
62. Глызин, С.Д. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Теоретическая и математическая физика. — 2009. — Т. 158, №2. — С. 291 - 310.
63. Горяченко, В.Д. Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последействия. Краткий обзор / В.Д. Горяченко // Нелинейные колебания и экология. — Ярославль: ЯрГУ. — 1984. — С. 66–82.
64. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. — 560 с.

65. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* — М.: Наука, 1970.
66. *Дмитриев, А. С.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике / *А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов.* — М.: Наука, 1989.
67. *Дмитриев, А. С.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи / *А. С. Дмитриев, А. И. Панас, С. О. Старков* // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. — 1997. — №10. — С. 4-26.
68. *Дмитриев, А. С.* Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации / *А. С. Дмитриев, С. О. Старков* // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. — 1998. — №11. — С. 4-32.
69. *Дмитриев, А. С.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / *А. С. Дмитриев, А. И. Панас.* — М.: Физматлит, 2002.
70. *Заславский, Г. М.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / *Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев.* — М., 1988.
71. *Заславский, Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах / *Г. М. Заславский.* — Москва; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
72. *Каменков, Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени / *Г. В. Каменков* // Прикладная математика и механика. — 1953. — Т. 17, № 5. — С. 529–540.
73. *Каменков, Г. В.* Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика // Избранные труды / АН СССР. Ин-т проблем механики / *Г. В. Каменков.* — М.:Наука. — Т. 1, 1972. — 261 с.
74. *Каток, А. Б.* Введение в современную теорию динамических систем / *А. Б. Каток, Б. Хасселблат.* — М.: Факториал, 1999.
75. *Кащенко, С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / *С. А. Кащенко* // Диф. уравнения. — 1982. — Т. 25, № 8. — С. 1448 — 1451.

76. *Кащенко, С. А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией / *С. А. Кащенко* // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 299, №5. — С. 1049–1052.
77. *Кащенко, С.А.* Пространственные особенности высококомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией / *С. А. Кащенко* // Диф. уравнения. — 1989. — Т.25, № 2. — С. 262 – 270.
78. *Кащенко, С. А.* Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона / *С. А. Кащенко, В. В. Майоров* // Математическое моделирование. — 1993. — Т. 5, № 12. — С. 13–25.
79. *Кащенко, С.А.* Уравнение Гинзбурга-Ландау — нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / *С. А. Кащенко* // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 457 – 465.
80. *Киселева, Е. О.* Локальная динамика уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями в критическом случае резонанса 1:2 / *Е. О. Киселева* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 53 – 57.
81. *Козлов, В. В.* Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы / *В. В. Козлов* // УМН. — 1986. — Т. 41, № 5. — С. 177 – 178.
82. *Козлов, В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике / *В. В. Козлов.* — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995.
83. *Колесов, А. Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию / *А.Ю. Колесов* // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 1. — С. 831–835.
84. *Колесов, А. Ю.* Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений / *А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов.* — М., 1998 (Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова РАН. Т. 222).

85. Колесов, А. Ю. Специфика автоколебательных процессов в резонансных гиперболических системах / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. Г. Сушко // *Фунд. и прикл. математика*. — 1999. — Т. 5, № 2. — С. 437 – 473.
86. Колесов, А. Ю. Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений / А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов // *УМН*. 2000. — Т. 55. — Вып. 2 (332). — С. 95 – 120.
87. Колесов, А. Ю. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // *Тр. МИАН*. — 2001. — Т. 233. — С. 153 – 207.
88. Колесов, А. Ю. Явление буферности в распределенных механических системах / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // *ПММ*. — 2001. — Т. 65, Вып. 2. — С. 183 – 198.
89. Колесов, А. Ю. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: Учеб. пособие / А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов. — Ярославль, 2003.
90. Колесов, А. Ю. Двухчастотные автоволновые процессы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // *ТМФ*. — 2003. — Т. 134. № 3. — С. 353–373.
91. Колесов, А. Ю. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 2004.
92. Колесов, А. Ю. Новые методы доказательства существования и устойчивости периодических решений в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием / А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов // *Тр. МИАН*. — 2007. — Т. 259. — С. 106–133.
93. Колесов, А. Ю. Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий // *Успехи математических наук*. — 2008. — Т. 63, №2(380). — С. 21–84.
94. Колесов, А. Ю. Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-акселератор / А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов, Н. Х. Розов // *Доклады Академии Наук* — 2008. — Т. 420, №6. — С. 739–743.
95. Колесов, Ю. С. Математические модели экологии / Ю. С. Колесов // *Исследования по устойчивости и теории колебаний*. — Ярославль: ЯрГУ, 1979. — С. 3–40.

96. Колесов, Ю. С. Свойства решений одного класса уравнений с запаздыванием, описывающих динамику изменения численности вида с учетом возрастной структуры / Ю. С. Колесов // Математический сборник. — 1982. — Т. 117(159), №1. — С. 86–94.
97. Колесов, Ю. С. Проблема адекватности экологических уравнений / Ю. С. Колесов; Яросл. ун-т. — Ярославль, 1985. — 162 с. (Деп. в ВИНИТИ).
98. Колесов, Ю. С. Пространственная и временная самоорганизация в одно-видовом биоценозе / Ю. С. Колесов, В. В. Майоров // Динамика биологических популяций. — Горький: ГГУ, 1986. — С. 3–13.
99. Колесов, Ю. С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией / Ю. С. Колесов // Укр. матем. журн. — 1987. — Т. 39, № 1. — С. 28 - 34.
100. Крылов, Н. М. Новые методы нелинейной механики / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. — М., Л.: ОНТИ, 1934.
101. Кузнецов, С. П. Динамический хаос: Курс лекций / С. П. Кузнецов. — М.: Физматлит, 2001.
102. Ланда, П. С. Нелинейные колебания и волны / П. С. Ланда. — М.: Наука, 1997. — 496 с.
103. Ландау, Л. Д. К проблеме турбулентности / Л. Д. Ландау // Докл. АН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339–342.
104. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. 1. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1988.
105. Малинецкий, Г. Г. О вычислении размерностей странных аттракторов / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1988. — Т. 28, №7. — С. 1021–1037.
106. Малинецкий, Г. Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
107. Майоров, В. В. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием / В. В. Майоров, И. Ю. Мышкин // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 11. — С. 64–76.

108. *Марсден, Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / *Дж. Марсден, М. Мак-Кракен.* — М.: Мир, 1980. — 368 с.
109. *Мельников, В. К.* Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях / *В. К. Мельников* // Тр. ММО. — 1963. — Т. 12. — С. 3–52.
110. *Мигулин, В. В.* Основы теории колебаний / *В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин.* — М.: Наука, 1988.
111. *Митропольский, Ю. А.* Интегральные многообразия в нелинейной механике / *Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова.* — М.: Наука, 1973.
112. *Мищенко, Е. Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / *Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов.* — М.: Наука, 1975.
113. *Мищенко, Е. Ф.* Асимптотическая теория релаксационных колебаний / *Е. Ф. Мищенко, А. Ю. Колесов* // Труды математического ин-та АН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 3 – 89.
114. *Мищенко, Е. Ф.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах / *Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* — М.: Физматлит, 1995.
115. *Мищенко, Е. Ф.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / *Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов.* — М.: Физматлит, 2005.
116. *Мозер, Ю.* КАМ-теория и проблемы устойчивости / *Ю. Мозер.* — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
117. *Морозов, А. Д.* Глобальный анализ в теории нелинейных колебаний / *А. Д. Морозов.* — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995.
118. *Морозов, А. Д.* О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым / *А. Д. Морозов, Л. П. Шильников* // ПММ. — 1983. — Т. 47, Вып. 3. — С. 385 – 394.
119. *Неймарк, Ю. И.* Стохастические и хаотические колебания / *Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда.* — М.: Наука, 1987.

120. *Осипов, Г. В.* О развитии турбулентности по Ландау в дискретной модели потоковых систем / *Осипов Г. В.* // Изв. вузов. Радиофизика. — 1988. — Т. 31, №5. — С. 624 – 627.
121. *Оселедец, В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / *В. И. Оселедец* // Труды Моск. мат. общества. — 1968. — Т. 19. — С. 179–210.
122. *Пуанкаре, А.* Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики / *А. Пуанкаре.* — М.: Наука, 1971.
123. *Рабинович, М. И.* Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости / *М. И Рабинович, М. М. Суццик* // Усп. Физ. наук. — 1990. — Т. 160, вып. 1. — С. 3–64.
124. *Рейссиг, Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / *Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти.* — М.: Наука, 1974.
125. *Синай, Я. Г.* Нелинейные волны / *Я. Г. Синай* М.: Наука, 1979. — С. 192 – 212.
126. *Уиттекер, Э. Т.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции / *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* — М.: Физматлит, 1963.
127. *Хазина, Г. Г.* Существенно неоднородные системы в задачах устойчивости / *Г. Г. Хазина, Л. Г. Хазин.* — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1982. — Препринт № 145.
128. *Хазин, Л. Г.* Устойчивость критических положений равновесия / *Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль.* — Пущино: НЦБИ АН СССР, 1985.
129. *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / *Д. Хенри.* — М: Мир, 1985. — 376 с.
130. *Хэссард, Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла / *Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн.* — М.: Мир, 1985.
131. *Шильников, Л. П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1 / *Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа.* — Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

132. Шноль, Э. Э. Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений / Э. Э. Шноль // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 7. — С. 1156 – 1167.
133. Abramovitz, M. Handbook of mathematical functions / M. Abramovitz, I. Stegun. — National Bureau of Standard. U.S.A. 1964.
134. Aronson, D. G. Amplitude Response of Coupled Oscillators / D. G. Aronson, G. B. Ermentrout, N. Kopell // Physica D. — 1990. — 41.— P. 403–449.
135. Banks, J. On Devaney’s definition of chaos / J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey // Amer. Math. Monthly. — 1992. — V.99, №4. — P. 332 – 334.
136. Benettin, G. Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J. M. Strelcyn // Phys. Rev. — 1976. — V. A14. — P. 2338–2345.
137. Belykh, V.N. Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems / Vladimir N. Belykh, Igor V. Belykh, and Martin Hasler // Phys. Rev. E 62, 6332 - 6345 (2000).
138. Devaney, R. An introduction to chaotic dynamical systems. / R. Devaney. — Addison-Wesley: Reading, MA, 1989.
139. Dormand, J.R. A Family of Embedded Runge - Kutta Formulae / J. R. Dormand, P.J. Prince // J. Comp. Appl. Math. — 1980. — V. 6. — P. 19 - 26.
140. Feigenbaum, M. J. Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations / M. J. Feigenbaum // J. Stat. Phys. — 1978. — V. 19. — №1. — P. 25 – 52.
141. Glyzin, S. D. Space heterogeneous stable regimes of “reaction-diffusion” boundary-value problem in square area / S. D. Glyzin // Criteria of self-organization in physical, chemical and biological systems. Int. Conference, Moscow-Suzdal, June 12-18, 1995. Suzdal, 1995. — P. 28.
142. Glyzin, S. D. Bifurcations of the Normal Form of Pair Weakly Linked Oscillators / S. D. Glyzin // International Conference on Nonlinear Dynamics and Chaos. ICND-96. Saratov, Russia. July 8-14, 1996. — P 33.

143. *Hutchinson, G. E.* Circular causal system in ecology / *G. E. Hutchinson* // Ann. N.-Y. Acad. Sci. — 1948. — V. 50. — P. 221 – 246.
144. *Hodgkin, A.L.* A quantitative description of membrane current and application to conduction and excitation in nerve / *A.L. Hodgkin and A.F. Huxley* // Journal Physiol. — 1952. — 117. — P. 500–544.
145. *Hopf, E. A.* A Mathematical Example Displaying Features of Turbulence / *E. A. Hopf* // Comm. Pure Appl. Math. — 1948. — V. 1. P. 303 – 322.
146. *Izhikevich, E. M.* Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting / *E. M. Izhikevich*. — Cambridge, Mass.: MIT Press, 2007.
147. *Lorenz, E.N.* Deterministic nonperiodic flow / *E. N. Lorenz* // J. Atmos. Sci. — 1963. — V. 20. — P. 130–141.
148. *May, R.M.* Stability and complexity in model ecosystem / *R.M. May*. — Princeton: Princeton Univ. Press., 1973.
149. *May, R. M.* Time delay, density dependence and single oscillations / *R. M. May, G. R. Conway, M. P. Hassel, T. R. E. Southwood* // J. Anim. Ecology. — 1974. — V. 43. — P. 747 – 770.
150. *Milnor J.* On the concept of attractor / *J. Milnor* // Commun. Math. Phys. — 1985. — V.99, № 2. — P. 177 – 196.
151. *Newhouse, S.E.* Occurrence of strange Axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m \geq 3$ / *S.E. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens* // Comm. Math. Phys. — 1978. — V. 64. — P. 35 – 40.
152. *Nussbaum, R.D.* Differential-delay equations with two time lags / *R.D. Nussbaum* // Memoirs of the Amer. Math. Soc. — 1977. — P. 1 – 81.
153. *Pecora, L.M.* Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems / *Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll* // Phys. Rev. Lett. 80, 2109 - 2112 (1998).
154. *Rabinovich, M. I.* Dynamical principles in neuroscience / *Mikhail I. Rabinovich, Pablo Varona, Allen I. Selverston, Henry D. I. Abarbanel* // Rev. Mod. Phys. — 2006. — V. 78. — P. 1213–1265. DOI: 10.1103/RevModPhys.78.1213.

155. *Ruelle, D.* On the nature of turbulence / *D. Ruelle, F. Takens* // *Comm. Math. Phys.* — 1971. — V. 20. — P. 167–192.
156. *Sell, G.R.* *Nonlinear Dynamics and Turbulence* / *G.R. Sell.* — London: Pitman Books, 1983. P. 305 – 313.
157. *Stirzacker, D.* On a population model / *D. Stirzacker* // *Math. Biosci.* — 1975. — V. 23. — P. 329 – 336.
158. *Turing, A.* The Chemical Basis of Morphogenesis / *A. Turing* // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 1952. — V. 237. — P. 37 – 72.
159. *Wolf, A.* Determining Lyapunov exponents from a time series / *A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano* // *Physica D.* — 1985. — V. D16. — P. 285–317.

Приложение А.

Особенности динамики простейших нелинейных дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями

Как и в главе 6 в данном приложении изучается динамика обобщенного уравнения Хатчинсона с двумя запаздываниями. Однако если в шестой главе рассмотрена в некотором смысле экстремальная динамика данного уравнения, то здесь рассматривается ситуация, когда параметр запаздывания имеет порядок единицы. Для модели (6.0.4) проведен локальный анализ потери устойчивости ненулевого состояния равновесия. С учетом полученных асимптотических формул численно проанализированы фазовые перестройки, происходящие с изучаемой моделью. На плоскости параметров построены бифуркационные кривые, соответствующие основным бифуркациям.

А.1. Постановка задачи

В уравнении (6.0.1) учитывается лишь возраст половозрелости h , понятно, однако, что вклад в изменение численности для возрастных групп, перешедших этот возраст, различен. Модель динамики популяции, учиты-

вающая ее возрастную структуру, имеет вид

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^m a_j N(t - h_j) \right] N, \quad (\text{A.1.1})$$

где весовые коэффициенты $a_j \geq 0$ определяют вклад возрастной группы, соответствующей запаздыванию $h_j > 0$. Отметим, что $\sum_{j=1}^m a_j = 1$.

Изучение уравнения (A.1.1) с большим числом запаздываний представляет с аналитической точки зрения достаточно сложную задачу, поэтому представляется важным изучить ее сначала для $n = 2$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{N} = r \left[1 - \frac{aN(t - h_1) + bN(t - h_2)}{k} \right] N. \quad (\text{A.1.2})$$

Здесь $a, b > 0$ — весовые коэффициенты, определяющие вклад каждой из возрастных групп в воспроизводство популяции. Считаем, что

$$a + b = 1, \quad (\text{A.1.3})$$

кроме того, для определенности полагаем $h_1 > h_2$.

Представляет интерес сравнение динамических свойств уравнений (6.0.1) и (A.1.2).

A.2. Локальный анализ

Нормируя N на k и делая замену времени $th_1 \rightarrow t$, переходим к соотношению

$$\dot{N} = r[1 - aN(t - 1) - bN(t - h)]N, \quad (\text{A.2.1})$$

где rh_1 снова обозначено r , $h = h_2/h_1 < 1$.

Состояниями равновесия уравнения (A.2.1) являются так же, как и у уравнения Хатчинсона, $N = 0$ и $N = 1/(a + b)$.

Легко видеть, что первое состояние равновесия неустойчиво. А для исследования устойчивости второго следует изучить расположение корней характеристического квазимногочлена уравнения (A.2.1), линеаризованного на $N = 1/(a + b)$

$$\dot{N} = -\frac{r}{a + b} [aN(t - 1) + bN(t - h)]. \quad (\text{A.2.2})$$

Выражение

$$P(\lambda) \equiv \lambda + r[ae^{-\lambda} + be^{-\lambda h}] \quad (\text{A.2.3})$$

дает искомый квазимногочлен.

Полагая $\lambda = i\omega$ и приравняв к нулю вещественные и мнимые части, получаем систему

$$\varphi(\omega) \equiv b \cos \omega h + a \cos \omega = 0, \quad (\text{A.2.4})$$

$$r(\omega) \equiv \frac{\omega}{b \sin \omega h + a \sin \omega}. \quad (\text{A.2.5})$$

Найдем значения параметров a , r , h , при которых корни квазимногочлена (A.2.3) переходят мнимую ось.

Следует отметить, что уравнение (A.1.2) описывает не только динамику численности популяции. Оно встречается в других задачах, требующих учета запаздывающего аргумента, при этом соотношение (A.1.3) может не выполняться. Нетрудно, однако, видеть, что заменами переменных эти два случая сводятся друг к другу.

A.2.1. Исследование характеристического квазимногочлена

Пусть в системе (A.2.4)-(A.2.5)

$$\varphi(\omega_0) = 0, \quad r = r(\omega_0) + \varepsilon, \quad \lambda = \tau(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon),$$

где $\tau(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$. Положим

$$\text{sign } \tau'_0 = -\text{sign } \varphi'(\omega_0) \left(\tau'_0 = \frac{d}{d\varepsilon} \tau(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \right). \quad (\text{A.2.6})$$

Далее, пусть ω_j , $j = 1, 2, \dots$ — положительные корни уравнения (A.2.4), занумерованные в порядке возрастания с учетом их кратности. Из (A.2.6) следует, что числа $\pm i\omega_j$ в случае нечетных j при увеличении r приходят из левой полуплоскости, а в случае четных — из правой. Кроме того, при любых фиксированных a , h и при достаточно малом r все корни характеристического квазимногочлена (A.2.3) лежат слева от мнимой оси.

Следующее утверждение позволяет узнать, сколько пар корней может одновременно находиться на мнимой оси.

Лемма А.1. Пусть параметр $h > 0$ достаточно мал, тогда существует счетное число таких значений $a_k(h)$, $r_k(h)$, $k = 1, 2, \dots$, что при $a = a_k(h)$ и $r < r_k(h)$ корни характеристического квазимногочлена (А.2.3) лежат в левой комплексной полуплоскости, а при $r = r_k(h)$ две пары корней $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ выходят на мнимую ось.

Кроме того, имеют место асимптотические формулы

$$a_k(h) = b \left[1 - \frac{\pi^4}{3} (2k+1)^2 (2k+3)^2 h^4 + O(h^5) \right], \quad (\text{А.2.7})$$

$$r_k(h) = \frac{1}{2bh} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} (4k^2 + 8k + 5) h^2 + O(h^3) \right], \quad (\text{А.2.8})$$

$$\omega_{k1}(h) = \pi(2k+1) \left[1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+3)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (\text{А.2.9})$$

$$\omega_{k2}(h) = \pi(2k+3) \left[1 - h + h^2 + \frac{\pi^2(2k+1)^2 - 3}{3} h^3 + O(h^4) \right], \quad (\text{А.2.10})$$

где $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Для того, чтобы две пары корней $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ квазимногочлена (А.2.3) оказались на мнимой оси, в соответствии с формулами (А.2.4) (А.2.5) имеем

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 h + t \cos \omega_1 &= 0, \\ \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ br(\omega_1) &= \frac{\omega_1}{t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h} = br(\omega_2) = \frac{\omega_2}{t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h}, \end{aligned} \quad (\text{А.2.11})$$

где $t = a/b$.

Подставляя в (А.2.11) асимптотические разложения по h для t , ω_1 и ω_2 и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h , получаем (А.2.7), (А.2.9), (А.2.10). Кроме того, из третьего равенства (А.2.11) можно получить разложение (А.2.8) для $r(h)$. Отметим, что $\omega_1(h)$ и $\omega_2(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (А.2.4) (каждому номеру k соответствуют два решения (А.2.4)). Такой выбор корней (А.2.4) обусловлен тем, что значение $r_k(h)$ для них минимально. Таким образом, найденные корни квазимногочлена (А.2.3) $\pm i\omega_1(h)$ и $\pm i\omega_2(h)$ первыми пересекают мнимую ось, что и доказывает лемму.

Следует отметить, что при $b = 1 - a$ формулы (А.2.7), (А.2.8) приобретают следующий вид:

$$a_k(h) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12} (2k+1)^2 (2k+3)^2 h^4 + O(h^5), \quad (\text{А.2.12})$$

$$r_k(h) = \frac{1}{h} \left[1 + \frac{\pi^2}{3} (4k^2 + 8k + 5)h^2 + O(h^3) \right]. \quad (\text{A.2.13})$$

Рассмотрим теперь условия, при которых вырожденные кривые $a = a_k(h)$ могут прерваться. Выше уже отмечалось, что $\omega_{k1}(h)$ и $\omega_{k2}(h)$ — два соседних нечетных решения уравнения (A.2.4). Понятно, что при некоторых значениях h нечетное и четное решения (A.2.4) могут совпадать, и $\omega_{k1}(h)$ становится в этом случае кратным корнем. При увеличении h соответствующий корень $\omega_{k1}(h)$ перестает существовать. Таким образом, для определения крайних точек описанных кривых можно воспользоваться системой (A.2.11), дополненной уравнением

$$\varphi'(\omega_1) = -b(h \sin \omega_1 h + t \sin \omega_1) = 0. \quad (\text{A.2.14})$$

После несложных преобразований системы (A.2.11) и уравнения (A.2.14) для отыскания k -ой крайней точки получаем систему

$$\begin{aligned} \cos \omega_2 h + t \cos \omega_2 &= 0, \\ \omega_2(t \sin \omega_1 + \sin \omega_1 h) &= \omega_1(t \sin \omega_2 + \sin \omega_2 h), \\ \omega_1 &= 2\pi k - \arccos \left[-\sqrt{\frac{t^2 - h^2}{t^2(1 - h^2)}} \right], \\ h\omega_1 &= \arccos \left[\sqrt{\frac{t^2 - h^2}{1 - h^2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

Таблица А.1.

№ кривой	h	a	r	ω_1	ω_2
1	0.2995	0.3447	8.9792	3.6738	6.8154
2	0.1359	0.2001	14.7813	9.9848	13.1263
3	0.0880	0.1402	20.9531	16.2720	19.4136
4	0.0651	0.1079	27.1863	22.5565	25.6981

которая может быть решена численно. В таблице А.1 приведены координаты конечных точек первых четырех нейтральных кривых, вычисленные в соответствии с (A.2.15). При достаточно большом k выполнено следующее утверждение.

Лемма А.2. Пусть k – номер нейтральной кривой на плоскости параметров t, h , тогда для конечных точек этих кривых при достаточно большом k выполнены следующие асимптотические формулы:

$$t_k = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{8k} \left(1 - \frac{\pi + 2\omega_0}{4\pi k} + O(k^{-2}) \right), \quad (\text{A.2.16})$$

$$h_k = \frac{1}{4k} - \frac{\pi + 2\omega_0}{16\pi k^2} + \frac{(\pi + 2\omega_0)^2}{64\pi^2 k^3} + O(k^{-4}), \quad (\text{A.2.17})$$

где $\omega_0 = -\arccos \left[-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \right]$, $k = 1, 2, \dots$. При этом для ω_1, ω_2, r выполнено

$$\omega_{k1} = 2\pi k + \omega_0 + O(k^{-2}), \quad (\text{A.2.18})$$

$$\omega_{k2} = (2k + 1)\pi + \omega_0 + O(k^{-2}), \quad (\text{A.2.19})$$

$$br_k = \frac{1}{\pi^2} \left(\pi^2 + 4 + 2\sqrt{\pi^2 + 4} \right) \left(2\pi k - \omega_0 + O(k^{-1}) \right). \quad (\text{A.2.20})$$

Доказательство. Для доказательства в формулы (А.2.15) подставляются разложения величин t, h, ω_1, ω_2 в ряды по k и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях. Разложение для r получается после подстановки полученных асимптотик в формулу (А.2.5).

С помощью утверждений лемм А.1, А.2 удается ответить на вопрос о характере потери устойчивости ненулевого состояния равновесия уравнения (А.2.1).

Теорема А.1. Потеря устойчивости состояния равновесия $N = \frac{1}{a+b}$ уравнения (А.2.1) не может происходить так, чтобы на мнимой оси находились три пары, а при наличии двух пар не может быть резонансов 1:1 и 1:3. Резонанс 1:2 реализуется при

$$\frac{a}{b} = \frac{29 - 6\sqrt{6}}{25}, \quad h = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left[\frac{-2 + 3\sqrt{6}}{10} \right], \quad \frac{rb}{a+b} = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{6} \omega_0, \quad (\text{A.2.21})$$

где $\omega_0 = 2\pi - \arccos \left[\frac{-2 - 3\sqrt{6}}{10} \right]$.

На рис. А.1 показаны графики нейтральных кривых, для значений параметров a и h на которых квазимногочлен (А.2.3) имеет две пары чисто мнимых корней. Жирные точки на концах кривых соответствуют значениям из таблицы А.1. Звездочкой на первой кривой обозначена точка, в которой

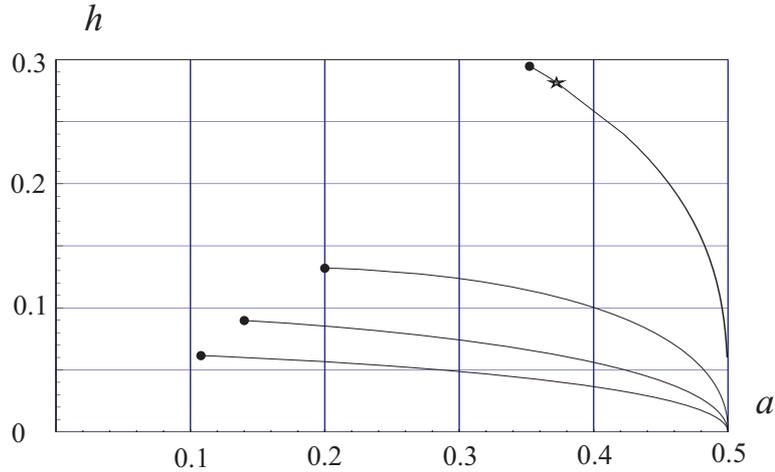


Рис. А.1. Графики нейтральных кривых

реализуется резонанс 1:2 (см. соотношения (А.2.21)). Отметим, что случай резонанса 1:2 подробно рассмотрен в статье [80]. В силу лемм А.1, А.2 таких кривых счетное число, причем на каждой из них $a \rightarrow 0.5$ при $h \rightarrow 0$. При малых h эти кривые $a_k = a_k(h)$ не пересекаются в силу соотношений (А.2.7) и (А.2.12) леммы А.1.

При значениях h не близких к нулю и к крайним точкам (А.2.16), (А.2.17) для построения нейтральных кривых использовались численные методы. Оказалось, что кривые не пересекаются при всех h , для которых определена каждая из них.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть a, h принадлежат одной из построенных выше кривых. Обозначим через $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$ корни квазимногочлена (А.2.3) и проверим отсутствие резонансов 1:1 и 1:3.

Предположим, что имеет место резонанс 1:1, т.е. $i\omega = i\omega_1 = i\omega_2$ — корень кратности два квазимногочлена (А.2.3). В этом случае в дополнение к (А.2.4), (А.2.5) должны выполняться равенства

$$\varphi'(\omega) = 0, \quad r(h \cos \omega h - a \cos \omega) = 1. \quad (\text{А.2.22})$$

Имеем

$$\varphi''(\omega) = (1 - h^2) \cos \omega h. \quad (\text{А.2.23})$$

Далее, так как $r > 0$, а $0 < h < 1$, то из (А.2.4) и второго равенства (А.2.22) следует, что $\cos \omega h < 0$. Тем самым, в силу (А.2.23), имеем $\varphi'(\omega) < 0$. Это означает, что ω — корень (А.2.4) с четным номером. Согласно (А.2.6) отсюда следует, что при прохождении r через $r(\omega)$ корни из правой полуплоскости подходят к мнимой оси, касаются ее и при дальнейшем увеличении r снова

уходят вправо. Поэтому существует такое $r < r(\omega)$, что пара корней (А.2.3) находится на мнимой оси. Получили противоречие.

Невозможность резонанса 1:3 доказывается также от противного. Предположим, что $3\omega_1 = \omega_2$. Из (А.2.4) легко выходит, что

$$4b^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 h = 0, \quad 4a^2(b^2 - a^2) \cos^3 \omega_1 = 0,$$

т.е. либо $\omega_1 = \pi/2 + \pi n$ и $\omega_1 h = \pi/2 + \pi m$, либо $a = b$. В первом случае подстановки $\omega_1, \omega_1 h$ и $\omega_2, \omega_2 h$ в выражения (А.2.5) дают величины

$$r(\omega_1) = \frac{\pi + 2\pi n}{2(a(-1)^n + b(-1)^m)}, \quad r(3\omega_1) = \frac{3\pi + 6\pi n}{2(a(-1)^{n+1} + b(-1)^{m+1})},$$

имеющие разные знаки. Учитывая, что $r > 0$ искомое равенство $r(\omega_1) = r(3\omega_1)$ невозможно.

В случае $a = b$ из уравнения (А.2.4) для ω_1 имеем

$$\omega_1 \frac{1+h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{либо} \quad \omega_1 \frac{1-h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n. \quad (\text{А.2.24})$$

Нетрудно проверить, что как первое, так и второе соотношение (А.2.24) влечет равенство нулю $r(\omega_1)$, а это, как и в предыдущем случае, противоречит условию положительности r .

Утверждение теоремы о значениях параметров, при которых реализуется резонанс 1:2, проверяется непосредственно.

А.2.2. Построение нормальной формы

Для исследования окрестности нетривиального состояния равновесия уравнения (А.1.2) при условии (А.1.3) выполним замену $N = 1 + n$, откуда

$$\dot{n} = -r[an(t-1) + (1-a)n(t-h)](1+n). \quad (\text{А.2.25})$$

Предположим, что параметры a_0 и h_0 выбраны принадлежащими одной из критических кривых, описанных выше, тогда по формуле (А.2.5) можно найти такое r_0 , при котором характеристический квазимногочлен (А.2.3) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$. Предположим, кроме того, что условия (А.2.21) существования резонанса 1:2 не выполнены.

Рассмотрим возмущенную задачу (А.2.25) в близком к критическому случае $r = r_0 + \varepsilon_1$, $a = a_0 + \varepsilon_2$, $h = h_0 + \varepsilon_3$. Порядки малости параметров надкритичности естественно принять одинаковыми, следовательно, будем считать выполненными соотношения $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \alpha\varepsilon$, $\varepsilon_3 = \beta\varepsilon$.

Для построения нормальной формы задачи (А.2.25) в окрестности тривиального состояния равновесия выполним замену

$$n(t) = \sqrt{\varepsilon} (z_1(s) \exp(i\omega_1 t) + \bar{z}_1(s) \exp(-i\omega_1 t) + z_2(s) \exp(i\omega_2 t) + \bar{z}_2(s) \exp(-i\omega_2 t)) + \varepsilon u_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, s) + \dots, \quad (\text{A.2.26})$$

где $s = \varepsilon t$. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ приводит на первом шаге к верному тождеству. На втором шаге для определения $u_1(t, s)$ имеем линейное уравнение с запаздыванием вида

$$\begin{aligned} Lu_1 \equiv \dot{u}_1 + r_0 [a_0 u_1(t-1, s) + (1-a_0) u_1(t-h_0, s)] = \\ = -r_0 (z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \times \\ \times [a_0 (z_1 \exp(i\omega_1(t-1))) + z_2 \exp(i\omega_2(t-1))] + \\ + (1-a_0) (z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0))) + \text{к.с.}], \quad (\text{A.2.27}) \end{aligned}$$

где к.с. обозначено выражение комплексно сопряженное к выражению, находящемуся в тех же скобках.

Определяя решение уравнения (А.2.27), в виде суммы гармоник, на которые распадается его правая часть, получаем следующее выражение для функции u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{i\omega_1}{P(2i\omega_1)} z_1^2 \exp(2i\omega_1 t) + \frac{i\omega_2}{P(2i\omega_2)} z_2^2 \exp(2i\omega_2 t) + \\ + \frac{i(\omega_1 + \omega_2)}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} z_1 z_2 \exp(i(\omega_1 + \omega_2)t) + \\ + \frac{i(\omega_1 - \omega_2)}{P(i(\omega_1 - \omega_2))} z_1 \bar{z}_2 \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) + \text{к.с.} \quad (\text{A.2.28}) \end{aligned}$$

Наконец, на третьем шаге в результате приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ получаем уравнение

$$\begin{aligned}
& Lu_2 + (z'_1 P'(i\omega_1) \exp(i\omega_1 t) + z'_2 P'(i\omega_2) \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) = \\
& = -r_0(z_1 \exp(i\omega_1 t) + z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}) \cdot [a_0 u_1(t-1) + (1-a_0)u_1(t-h_0)] + \\
& \quad + \left(u_1 + \frac{1}{r_0}\right) [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1 t) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2 t) + \text{к.с.}] + \\
& \quad + r_0(1-a_0)\beta [i\omega_1 z_1 \exp(i\omega_1(t-h_0)) + i\omega_2 z_2 \exp(i\omega_2(t-h_0)) + \text{к.с.}] - \\
& \quad - r_0\alpha [z_1 \exp(i\omega_1 t)(\exp(i\omega_1) - \exp(i\omega_1 h_0)) + \\
& \quad + z_2 \exp(i\omega_2 t)(\exp(i\omega_2) - \exp(i\omega_2 h_0)) + \text{к.с.}]. \quad (\text{A.2.29})
\end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначены производные функций $z_1(s)$, $z_2(s)$ по s , а $P'(i\omega) = 1 - r_0(a_0 \exp(-i\omega) + (1-a_0)h_0 \exp(-i\omega h_0))$ — производная квазимногочлена (A.2.3). Из условий разрешимости уравнения (A.2.29) среди двухчастотных по t с частотами ω_1 и ω_2 функций получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
z'_1 &= \Phi_1 z_1 + (A_{11} z_1^2 + A_{12} z_2^2) z_1, \\
z'_2 &= \Phi_2 z_2 + (A_{21} z_1^2 + A_{22} z_2^2) z_2,
\end{aligned} \quad (\text{A.2.30})$$

представляющая собой укороченную нормальную форму задачи (A.2.25). Параметры системы (A.2.30) вычисляются по формулам

$$\Phi_j = \frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(\frac{i\omega_j}{r_0} + r_0(\alpha(\exp(i\omega_j h_0) - \exp(i\omega_j)) + \beta i\omega_j(1-a_0) \exp(i\omega_j h_0)) \right),$$

$$A_{jk} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(2i\omega_j + \frac{(\omega_1 + \omega_2)\omega_j}{P(i(\omega_1 + \omega_2))} + \frac{(\omega_j - \omega_k)\omega_j}{P(i(\omega_j - \omega_k))} \right),$$

$$A_{jj} = -\frac{1}{P'(i\omega_j)} \left(i\omega_j + \frac{\omega_j^2}{P(2i\omega_j)} \right), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k.$$

Для упрощения системы (A.2.30) выполним в ней полярную замену $z_j = \xi_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, 2$. В полученной системе

$$\dot{\xi}_1 = \varphi_1 \xi_1 + (a_{11} \xi_1^2 + a_{12} \xi_2^2) \xi_1, \quad (\text{A.2.31})$$

$$\dot{\xi}_2 = \varphi_2 \xi_2 + (a_{21} \xi_1^2 + a_{22} \xi_2^2) \xi_2, \quad (\text{A.2.32})$$

$$\dot{\tau}_1 = \psi_1 + b_{11} \xi_1^2 + b_{12} \xi_2^2, \quad (\text{A.2.33})$$

$$\dot{\tau}_2 = \psi_2 + b_{21} \xi_1^2 + b_{22} \xi_2^2, \quad (\text{A.2.34})$$

где $\varphi_j + i\psi_j = \Phi_j$, $a_{jk} + ib_{jk} = A_{jk}$, $j, k = 1, 2$, первые два уравнения не зависят от третьего и четвертого, поэтому их можно изучать отдельно.

Рассмотрим задачу качественного анализа системы (А.2.31)-(А.2.32) в зависимости от параметров h_0, α и β . Напомним, что для выбранной кривой вырождения и фиксированного h_0 могут быть найдены величины $a_0, r_0, \omega_1, \omega_2$ (см. результаты предыдущего пункта), а по ним — коэффициенты системы (А.2.31)-(А.2.34) $a_{ij}(h_0)$, $i, j = 1, 2$. Коэффициенты линейной части системы будем рассматривать как функции не только h_0 , но также α и β , $\varphi_j = \varphi_j(h_0, \alpha, \beta)$.

Двумерная система (А.2.31)-(А.2.32) подробно изучена, например, в [64]. Для ее качественного анализа решающее значение имеет, с одной стороны, диссипативность, а с другой — существование и устойчивость состояний равновесия с неотрицательными координатами.

Необходимым условием диссипативности (А.2.31)-(А.2.32) является отрицательность коэффициентов $a_{11}(h_0)$, $a_{22}(h_0)$. Это условие выполнено для всех значений параметров, лежащих на первой кривой, $h_0 \in (0, h_{11})$, где $h_{11} \approx 0.2995$ — граничная точка (см. таблицу А.1), кроме того, на этой кривой сохраняют знак величины $\varphi_j(h_0, 0, 0) > 0$, $j = 1, 2$. Коэффициенты a_{ij} , $i \neq j$ в свою очередь меняют знак на промежутке $h_0 \in (0, h_{11})$, причем

$$a_{12}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{13}, h_{11}), \quad a_{12}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{13}), \quad (\text{А.2.35})$$

$$a_{21}(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{14}, h_{11}), \quad a_{21}(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{14}), \quad (\text{А.2.36})$$

где $h_{13} \approx 0.247$, $h_{14} \approx 0.116$. Таким образом, на промежутке $(0, h_{13})$ хотя бы одно из чисел a_{12} или a_{21} отрицательно, поэтому система (А.2.31)-(А.2.32) диссипативна. На промежутке же (h_{13}, h_{11}) эти числа положительны, и, следовательно, необходимо дополнительно проверить условие Каменкова [72,73]

$$\Delta(h_0) \equiv a_{11}(h_0)a_{22}(h_0) - a_{12}(h_0)a_{21}(h_0) > 0.$$

Непосредственные вычисления показали, что

$$\Delta(h_0) > 0 \text{ при } h_0 \in (h_{15}, h_{12})$$

$$\text{и } \Delta(h_0) < 0 \text{ при } h_0 \in (0, h_{15}) \cup (h_{12}, h_{11}), \quad (\text{А.2.37})$$

где $h_{12} \approx 0.277$. Следовательно, для значений параметров на первой кривой вырождения нормальная форма (А.2.31)-(А.2.32) диссипативна при $h_0 \in (0, h_{12})$ и не диссипативна при $h_0 \in (h_{12}, h_*) \cup (h_*, h_{11})$. Точка $h_* \approx 0.287189$ соответствует резонансу 1:2 (см. формулы (А.2.21)), и для нее нормальная форма выглядит иначе (см. [80]).

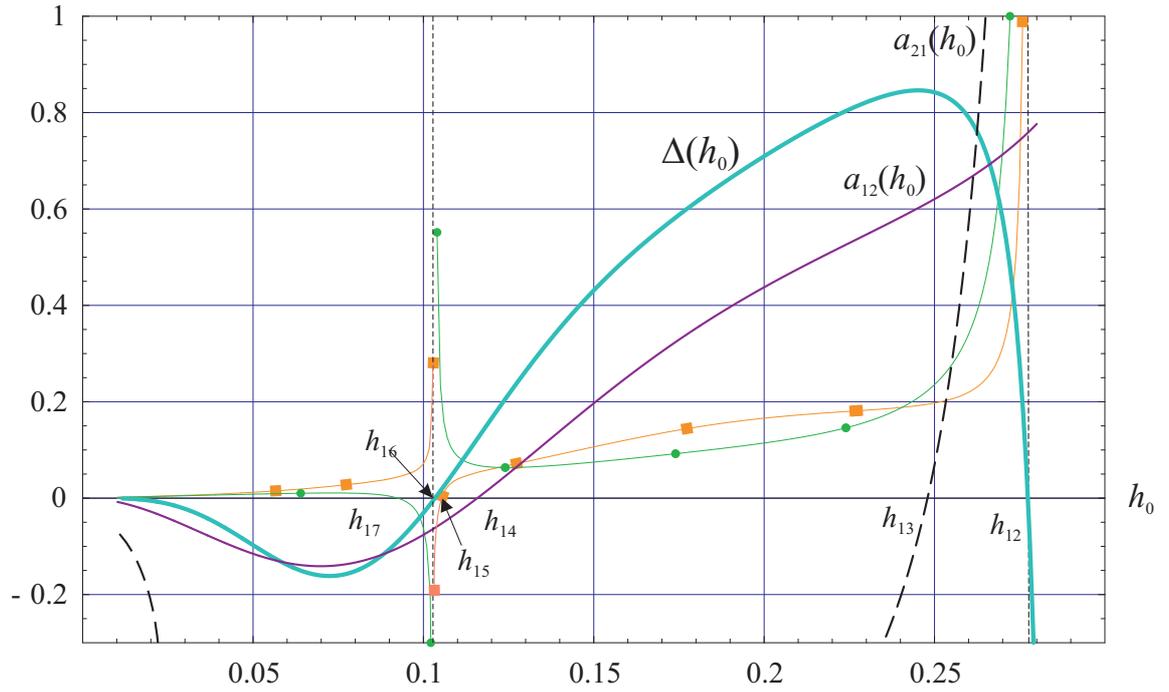


Рис. А.2. Графики зависимостей величин Δ , a_{12} , a_{21} , $-\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $-\frac{\Delta_2}{\Delta}$ от параметра h_0 для первой кривой вырождения

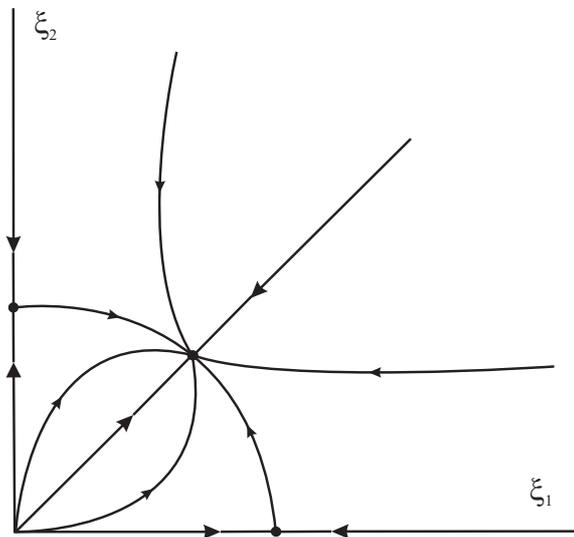


Рис. А.3.

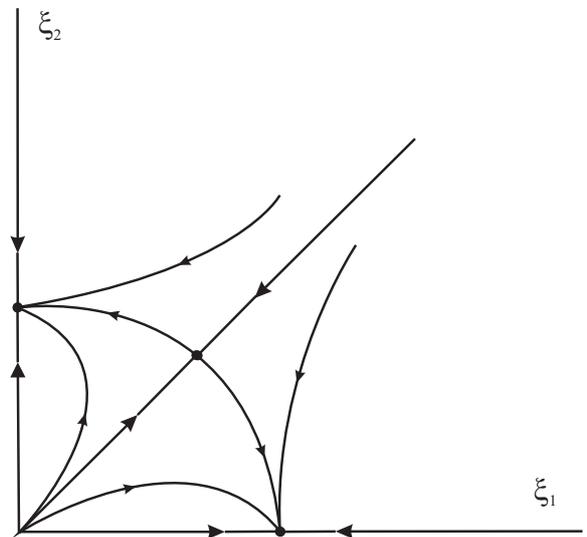


Рис. А.4.

Перейдем к вопросу существования и устойчивости состояний равновесия (А.2.31)-(А.2.32). Наряду с тривиальным состоянием равновесия $(0, 0)$

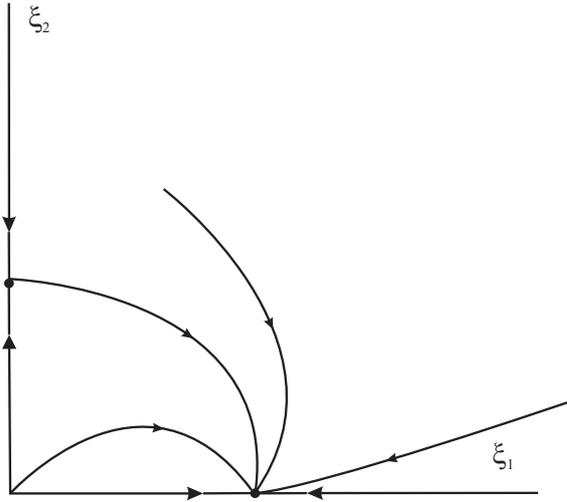


Рис. А.5.

данная система может иметь еще три неподвижные точки:

$$\left(0, \sqrt{-\frac{\varphi_2}{a_{22}}}\right), \left(\sqrt{-\frac{\varphi_1}{a_{11}}}, 0\right), \left(\sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}, \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}\right), \quad (\text{A.2.38})$$

где $\Delta_1 = -\varphi_1 a_{22} + \varphi_2 a_{12}$, $\Delta_2 = -\varphi_2 a_{11} + \varphi_1 a_{21}$. На рис. А.2, А.6 кружками отмечены кривые, определяющие зависимость от h , величины $-\frac{\Delta_1}{\Delta}$, а квадратами — величины $-\frac{\Delta_2}{\Delta}$ при α, β равных нулю. Нетрудно видеть, что при $0 < h_0 < h_{17}$ и $h_{15} < h_0 < h_{12}$ система (А.2.31)-(А.2.32) имеет все три состояния равновесия (А.2.38), а в остальных случаях — только первые два.

Фазовый портрет нормальной формы (А.2.31), (А.2.32) полностью определяется значениями параметров r_0, a_0, h_0 . При значениях $h_{15} < h_0 < h_{12}$ и $a_0(h_0)$, принадлежащих первой кривой вырождения, оказывается, что система (А.2.31), (А.2.32) имеет фазовый портрет, изображенный на рис. А.3. Это означает, что исходное уравнение с запаздыванием (А.2.25) должно иметь при значениях параметров близких к критическим устойчивые двухчастотные колебания. Обозначим $\xi_{10} = \sqrt{-\frac{\Delta_1}{\Delta}}$, $\xi_{20} = \sqrt{-\frac{\Delta_2}{\Delta}}$ координаты устойчивого состояния равновесия системы (А.2.31), (А.2.32), тогда исходная задача (А.2.25) также будет иметь устойчивое двухчастотное решение с асимптотикой

$$\begin{aligned} n(t) = & \sqrt{\varepsilon} \xi_{10} \cos(\tau_1 \omega_1) + \sqrt{\varepsilon} \xi_{20} \cos(\tau_2 \omega_2) + \\ & + \varepsilon \xi_{10} \xi_{20} [D e^{i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} + E e^{i(\omega_1 \tau_1 - \omega_2 \tau_2)} + \text{к.с.}] + \\ & + \xi_{10}^2 (A e^{2i\omega_1 \tau_1} + \bar{A} e^{-2i\omega_1 \tau_1}) + \xi_{20}^2 (A e^{2i\omega_2 \tau_2} + \bar{A} e^{-2i\omega_2 \tau_2}) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

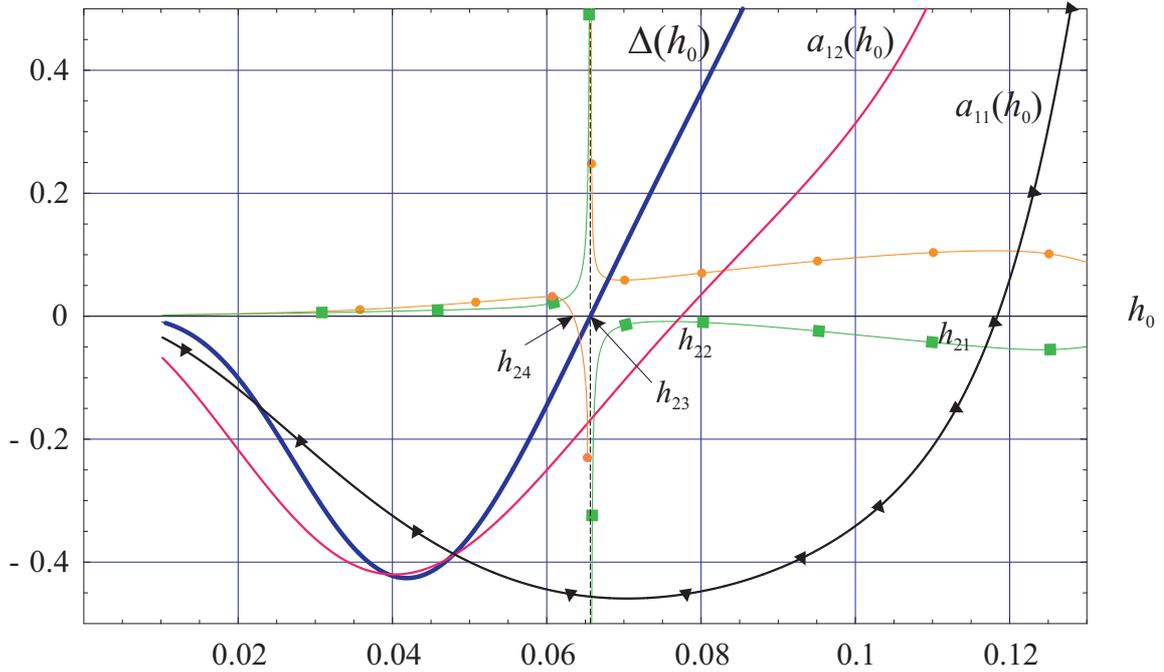


Рис. А.6. Графики зависимостей величин Δ , a_{11} , a_{12} , $-\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $-\frac{\Delta_2}{\Delta}$ от параметра h_0 для второй кривой вырождения

где $\tau_1 = t(1 + (b_{11} + \alpha b_{12} + c_{11}\xi_1^2 + c_{12}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_1$, $\tau_2 = t(1 + (b_{21} + \alpha b_{22} + c_{21}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2)\varepsilon) + \varphi_2$, а φ_1 и φ_2 — начальные фазы.

В случае, если $0 < h_0 < h_{17}$ фазовый портрет нормальной формы (А.2.31) изображен на рис. А.4. Этому случаю у исходного уравнения (А.2.25) соответствуют сосуществующие устойчивые одночастотные колебания с частотами ω_1 и ω_2 . Наконец, при $h_0 \in (h_{17}, h_{16}) \cup (h_{17}, h_{16})$ фазовый портрет (А.2.31) принимает вид, представленный на рис. А.5, с точностью до замены ξ_1 на ξ_2 . В этом случае у исходного уравнения (А.2.25) от состояния равновесия бифурцирует одночастотный режим.

А.3. Численный анализ исследуемой системы

Перейдем к описанию результатов численного анализа уравнения (А.2.1). Хорошее представление о фазовых перестройках, происходящих с этой динамической системой, могут дать разбиения плоскости параметров r, a , вычисленные при различных значениях h (на рисунке А.7 приведены такие разбиения при $h = 0.2$). Сразу отметим, что все вычисления производились в предположении, что $b = 1 - a$. Величина параметра h , как оказывается, имеет решающее значение для сценария фазовых перестроек, происходящих

При переходе параметров уравнения (А.2.1) через кривые $r = r_j(a)$ его нетривиальное состояние равновесия мягко теряет устойчивость и от этого состояния равновесия в результате бифуркации Андронова – Хопфа ответвляется цикл. В окрестностях точек пересечения кривых, в соответствии с результатами предыдущего пункта, от состояния равновесия может ответвиться устойчивый тор. Области существования и орбитной асимптотической устойчивости таких циклов и торов обозначены соответственно буквами T и C_1 .

Далее, цикл C_1 может претерпеть бифуркацию удвоения периода и превратиться в цикл C_2 (условно двойного периода). Кривая, на которой происходит первая бифуркация удвоения, обозначена на рисунках толстым пунктиром, а вторая — тонким.

При достаточно большом r уравнение (А.2.1) обладает только релаксационными циклами, близкими к циклам стандартного уравнения Хатчинсона (6.0.1). Область существования и устойчивости таких режимов обозначена C_R .

Наконец, на рисунках выделены области, обозначенные A_1, A_2, \dots , в которых система (А.2.1) ведет себя неупорядоченно. Относительно обозначений осталось отметить, что на рисунках оставлены заштрихованные области, в которых характер фазовых перестроек до конца не определен, в силу тонкой структуры разбиения этих областей и ограниченности вычислительных ресурсов.

Перейдем к обсуждению методов построения кривых, определяющих разбиение плоскости параметров r, a . Способ получения кривых $r_j(a)$ уже обсуждался выше. Построение линий, на которых происходит удвоение периода, также не представляет особых затруднений. Несколько иначе дело обстоит с инвариантными торами и колебательными режимами на них. Нам необходимо отличать возникающие в этом случае многочастотные режимы от периодических, с одной стороны, и от хаотических — с другой. В этой ситуации наиболее естественно было бы определить функцию спектральной плотности, по которой можно судить о частотных составляющих функции решения. Однако с вычислительной точки зрения гораздо предпочтительнее следующий простой критерий. Поскольку в рамках данного вычислительного эксперимента нас не интересует, какие именно составляющие входят в частотный спектр решения, то можно, во-первых, с некоторой заданной точностью установить, что функция решения не является периодической, и, во-вторых, убедиться, что старший ляпуновский показатель уравнения (А.2.1), вычисленный на этом решении, близок к нулю.

Перейдем к наиболее сложному вопросу — к определению границ областей A_1, A_2, \dots . Для их нахождения, как и в случае двухчастотных колебаний, вычислялся старший ляпуновский показатель λ_{max} . Как известно, положительность этого показателя служит одним из признаков хаотичности аттрактора динамической системы. Следует сразу отметить, что для дифференциальных уравнений с запаздыванием только старший показатель и может быть относительно просто вычислен. Кроме того, серьезной спецификой задачи (А.2.1) является тот факт, что при достаточно больших значениях r колебательные режимы (А.2.1) растут по амплитуде и становятся близки к релаксационным. Вследствие перечисленных причин представляется естественным использовать вариант алгоритма вычисления старшего ляпуновского показателя, называемый методом динамических перенормировок [23]. Кратко напомним его суть.

Для вычисления старшего ляпуновского показателя необходимо, наряду с исходным уравнением (А.2.1), рассмотреть это уравнение в вариациях на решении $N_*(t)$, принадлежащем аттрактору (А.2.1). Решая уравнение в вариациях

$$\dot{u} = r \left[(1 - aN_*(t-1) - (1-a)N_*(t-h))u - (au(t-1) + (1-a)u(t-h))N_* \right] \quad (\text{А.3.1})$$

с начальными условиями $u(t+s)|_{t=0} = u_0(s)$, $s \in [-1, 0]$ такими, что $\|u_0(s)\| = 1$, можно определить величину

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|u(t+s)\|}{t}, \quad (\text{А.3.2})$$

которая и является оценкой старшего ляпуновского показателя аттрактора уравнения (А.2.1). Здесь под $\|*\|$ понимается норма в пространстве непрерывных функций $C[-1, 0]$.

Учитывая, что $\|u(t+s)\|$ меняется по экспоненциальному закону, важно вовремя произвести перенормировку в уравнении (А.3.1). В соответствии с методом Бенеттина это делается через равные промежутки изменения t , которые определяются в значительной степени экспериментальным путем. Метод динамической перенормировки позволяет автоматизировать этот процесс. В нем выбираются два положительных параметра u_{min} и u_{max} , при переходе $\|u(t+s)\|$ через которые и происходит перенормировка. В этом

случае оценка старшего ляпуновского показателя производится по формуле

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[m_1(t) \ln(u_{max}) + m_2(t) \ln(u_{min})]}{t}. \quad (\text{A.3.3})$$

где $m_1(t)$ и $m_2(t)$ – количества переключений на отрезке $[0, t]$, связанные с достижением u_{max} и u_{min} соответственно.

При относительно больших значениях параметра r для метода Бенеттина не удается подобрать величину периода перенормировок, и он перестает давать удовлетворительные результаты. Метод динамических перенормировок в этой ситуации позволяет получить удовлетворительную оценку λ_{max} . Следует, впрочем, отметить, что при достаточно большом r перестает работать и этот метод, однако происходит это практически одновременно с достижением границы применимости вычислительных методов Рунге – Кутты, применяемых для решения уравнений (A.2.1), (A.3.1).

Опишем теперь сценарии фазовых перестроек, происходящих при изменении r для различных a и h . Пусть сначала $h = 0.2$ (см. рис. A.7), тогда для $a > a_5$, $a_5 = 0.5$ и $0 < a < a_1$, $a_1 \approx 0.03$ фазовые перестройки близки к происходящим с уравнением Хатчинсона и состоят в рождении при критическом значении r (см. раздел, посвященный локальному анализу) в результате бифуркации Андронова – Хопфа устойчивого цикла, который при увеличении r приобретает признаки релаксационного.

При $a_3 < a < a_4$, где $a_3 \approx 0.249$, $a_4 \approx 0.347$, в отличие от предыдущего случая дополнительно происходит бифуркация удвоения, а при $a_2 < a < a_3$, где $a_2 \approx 0.221$ – две бифуркации удвоения. На промежутках изменения a (a_1, a_2) и (a_4, a_5) фазовые перестройки более сложные (см. рис. A.7). Рассмотрим их на примере значений $a = 0.15$ в первом случае и $a = 0.44$ – во втором.

Пусть $a = 0.15$, тогда сценарий фазовых перестроек определяется следующим образом:

- 1) При $0 < r < r_1$, где $r_1 = 5\pi/2$, устойчивым режимом задачи (A.2.1) является состояние равновесия $N = 1$.
- 2) При $r_1 < r < r_2$, где $r_2 \approx 10.531$, система имеет устойчивый цикл C_1 , ответвляющийся от состояния равновесия $N = 1$ при $r = r_1$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа (на рис. A.8 представлен фазовый портрет цикла C_1 при $r = 10$ на плоскости $N(t), N(t-1)$).
- 3) При $r_2 < r < r_3$, где $r_3 \approx 11.584$, устойчив цикл C_2 условно двойного периода, возникающий при $r = r_2$ (см. рис. A.9, где изображен цикл C_1 при $r = 10.6$)

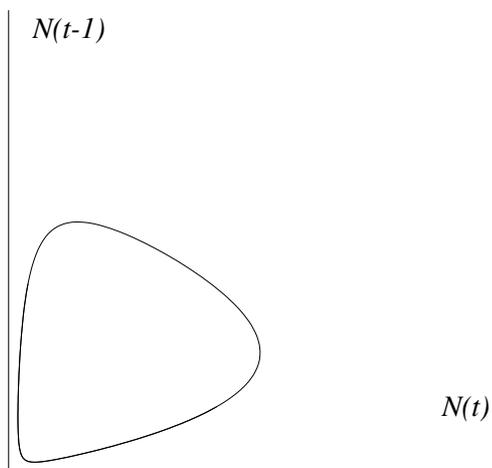


Рис. А.8. $a = 0.15$, $r = 10$

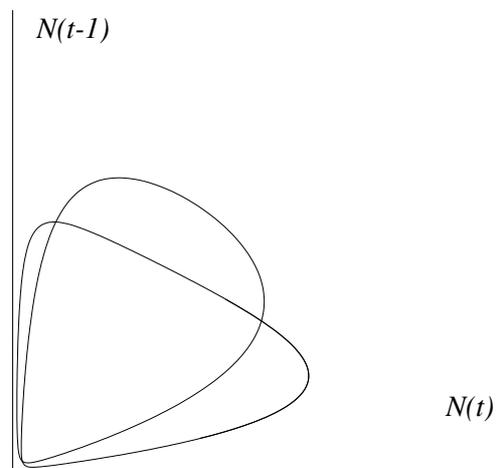


Рис. А.9. $a = 0.15$, $r = 10.6$

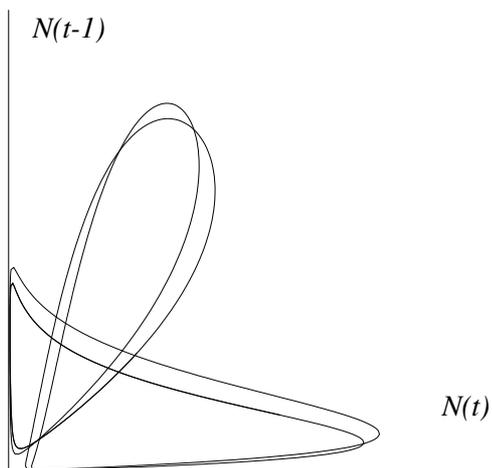


Рис. А.10. $a = 0.15$, $r = 11.6$

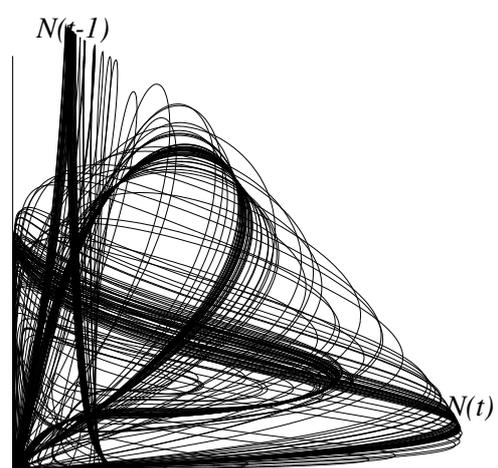


Рис. А.11. $a = 0.15$, $r = 12.9$

- 4) При $r_3 < r < r_4$, где $r_3 \approx 11.584$, устойчив цикл C_4 условно учетверенного периода, который ответвляется от C_2 при $r = r_3$ (см. рис. А.10 для $r = 11.6$)
- 5) Далее происходит каскад бифуркаций удвоения, приводящий к хаотическим колебаниям, которые наблюдаются на промежутке $r_5 < r < r_6$, где $r_5 \approx 11.845$, $r_6 \approx 14.135$. (см. рис. А.11 для $r = 12.9$)
- 6) При $r > r_5$ устойчив релаксационный цикл большой амплитуды.

На рисунке А.12 приведен график изменения старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(r)$ при $11.7 \leq r \leq 14.2$. Предпринятые для построения графика вычисления показывают, что на указанном промежутке хаотические колебания многократно сменяют периодические, имеется большое, вероятно счетное, число окон периодичности.

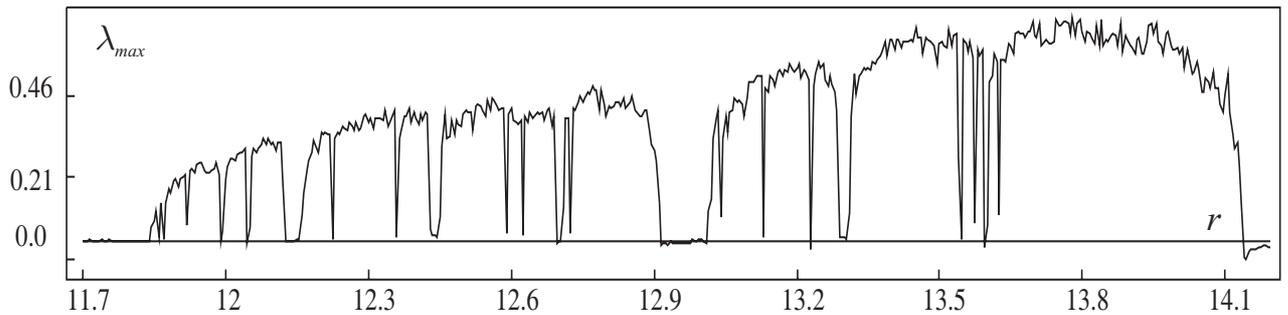


Рис. А.12. $h = 0.2$, $a = 0.15$

Перейдем теперь к описанию сценария фазовых перестроек, происходящих при $a = 0.44$. Главное отличие этого случая от рассмотренного выше состоит в том, что в некотором интервале изменения r здесь наблюдаются двухчастотные колебания. Перечислим происходящие при данном значении a фазовые перестройки.

- 1) Так же как и в предыдущем случае при $0 < r < r_1$, где $r_1 = 5\pi/2$, устойчивым режимом задачи (А.2.1) является состояние равновесия $N = 1$, соответственно при $r = r_1$ от него мягко ветвится устойчивый цикл C_1 .
- 2) При $r_1 < r < r_2$, где $r_2 \approx 8.26$, устойчив цикл C_1 .
- 3) При $r_2 < r < r_3$, где $r_3 \approx 10.34$, уравнение (А.2.1) имеет устойчивый двумерный тор (см. рис. А.13). Для обоснования этого факта на

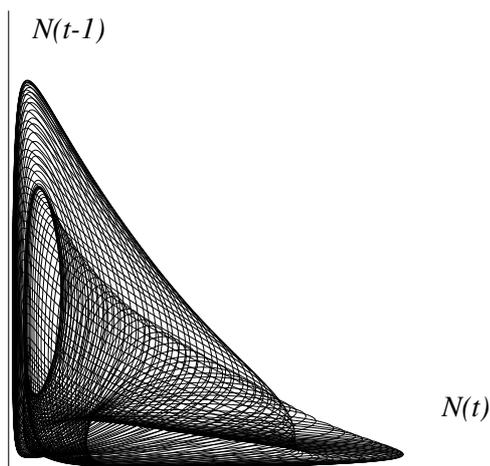


Рис. А.13. $a = 0.44$, $r = 9.7$

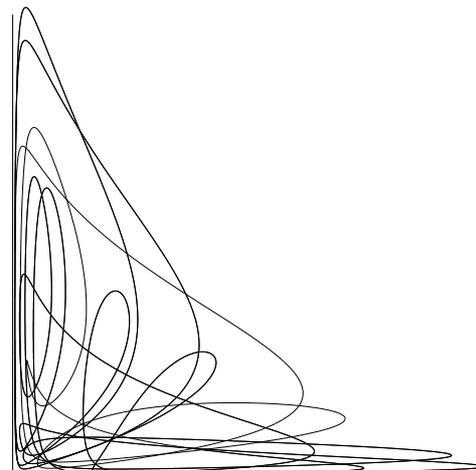


Рис. А.14. $a = 0.44$, $r = 10.35$

данном промежутке вычислялся старший ляпуновский показатель и делались попытки найти период получающегося колебательного режима. Как оказалось, $0 \leq \lambda_{max}(r) < 0.001$ и на промежутке изменения t длины 1000 периода не обнаружено. (Для сравнения, период рождающегося при $r = r_1$ цикла равен 0.8.) Это позволяет утверждать, что исследуемый режим — двухчастотный.

- 4) На промежутке $r_3 < r < r_4$, где $r_4 \approx 11.36$, в фазовом пространстве системы, вероятно, сохраняется инвариантный тор, однако однозначно утверждать, что устойчивыми решениями уравнения (А.2.1) являются двухчастотные колебания, уже невозможно, поскольку вычисленный для устойчивых режимов на этом промежутке старший ляпуновский показатель уже не настолько близок к нулю, как в предыдущем случае, кроме того, имеются многочисленные окна периодичности, когда устойчивы циклы большого периода (см., например, рис. А.14).
- 5) При $r = r_4$ инвариантный тор разрушается и на его месте остается устойчивый цикл, который при $r \approx 12.197$ претерпевает бифуркацию удвоения периода. Этот цикл жестко теряет устойчивость при $r \approx 12.323$.
- 6) При $r_5 < r < r_6$, где $r_5 \approx 12.321$, $r_6 \approx 13.51$ уравнение (А.2.1) имеет хаотические режимы. Отметим, что при $r = r_5$ хаотический режим возникает нелокально и сосуществует с устойчивым циклом.

- 7) Наконец, при $r > r_6$, как и в предыдущем случае, устойчив реликционный цикл большой амплитуды.

Некоторую дополнительную информацию о хаотических колебаниях уравнения (А.2.1) дает график изменения старшего ляпуновского показателя $\lambda_{max}(r)$, построенный для $12.2 \leq r \leq 13.6$ (см. рис. А.15). Как и при $a = 0.15$, график зависимости $\lambda_{max}(r)$ имеет большое число участков, на которых λ_{max} близко к нулю. Эти участки соответствуют окнам периодичности изучаемой динамической системы.

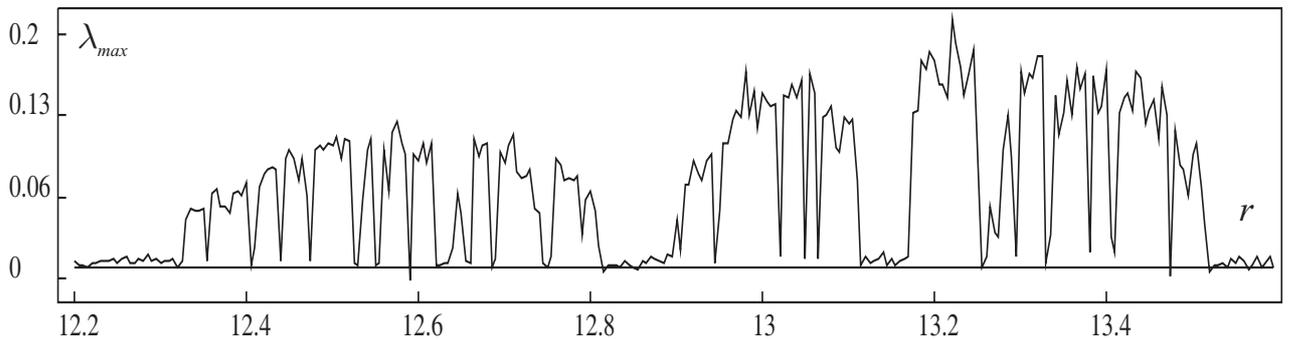


Рис. А.15. $h = 0.2$, $a = 0.44$

Заключение

Основным результатом численных и аналитических исследований системы (А.1.2), моделирующей динамику популяции с двумя возрастными группами, способными к воспроизводству, является наличие нескольких различных сценариев ее фазовых перестроек при изменении мальтузианского коэффициента линейного роста. Было обнаружено, что существенное отличие этого сценария от изменений, происходящих со стандартным уравнением Хатчинсона, наблюдается лишь в относительно узкой окрестности критических кривых. Отметим существенное отличие найденных сценариев с точки зрения размаха колебаний. Так, в случае стандартного сценария амплитуда колебаний нарастает в зависимости от коэффициента линейного роста по экспоненциальному закону, в случае же возникновения двухчастотных и хаотических колебаний их амплитуда нарастает относительно медленно и лишь при потере ими устойчивости и переходе к периодическим колебаниям реликционного характера амплитуда последних резко растет.

Приложение Б.

Устойчивые режимы системы (6.3.30)

В данном приложении приводятся начальные условия и проекции фазовых портретов устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 20$, $N = 30$ и $N = 31$. Проекция даны для $N = 20$ на плоскость (v_0, v_{10}) , а для $N = 30$ и $N = 31$ — на плоскость (v_0, v_{15}) . Для $N = 30$ каждый из фазовых портретов сопровождается мгновенным профилем соответствующей ему бегущей волны, для наглядности профили продолжены в соответствии с краевыми условиями антипериодически на отрезок $[0, 2]$.

Б.1. Случай $N = 20$

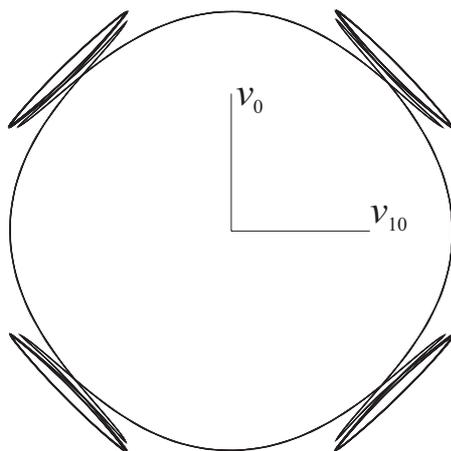


Рис. Б.1.

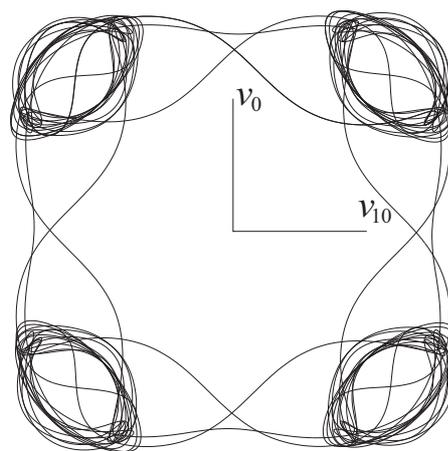


Рис. Б.2.

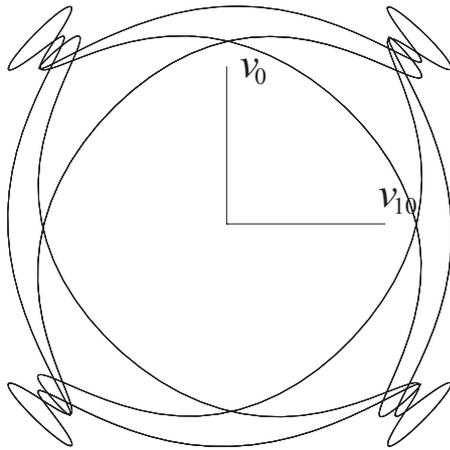


Рис. Б.3.

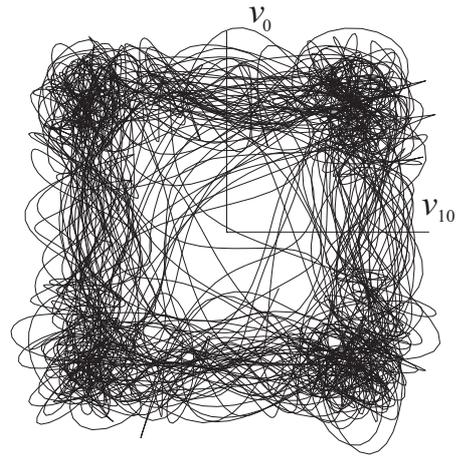


Рис. Б.4.

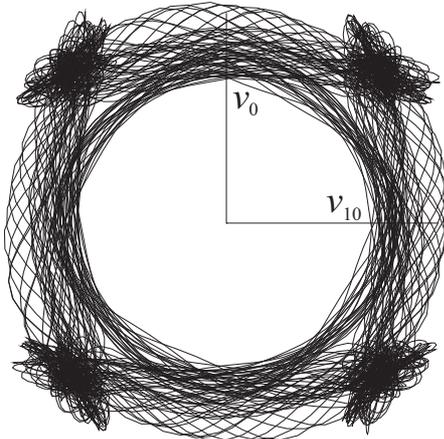


Рис. Б.5.

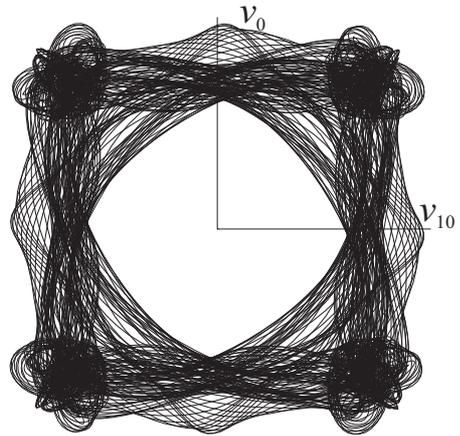


Рис. Б.6.

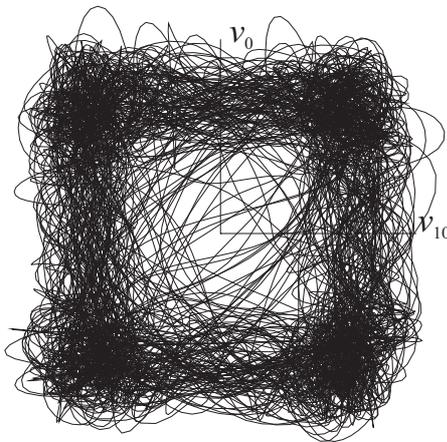


Рис. Б.7.

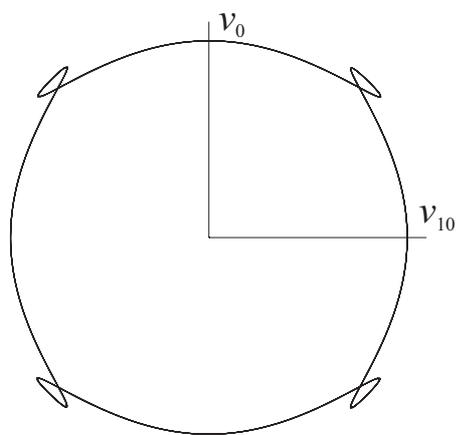


Рис. Б.8.

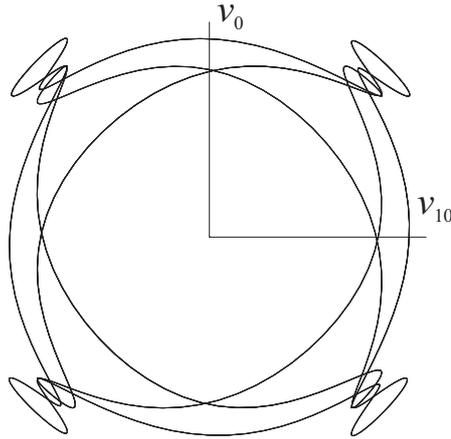


Рис. Б.9.

Для хаотических режимов, представленных на рис. Б.4 и Б.7, были вычислены ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность. Как оказалось, для случая Б.4 имеем следующие значения:

$$d_L \approx 11.7757,$$

$\lambda_1 \approx 0.0464$, $\lambda_2 \approx 0.0205$, $\lambda_3 \approx 0.0104$, $\lambda_4 \approx 0.00297$, $\lambda_5 \approx -0.0004$,
 $\lambda_6 \approx -0.00398$, $\lambda_7 \approx -0.0057$, $\lambda_8 \approx -0.0083$, $\lambda_9 \approx -0.0117$, $\lambda_{10} \approx -0.015$,
 $\lambda_{11} \approx -0.0185$, $\lambda_{12} \approx -0.0216$, $\lambda_{13} \approx -0.02407$, $\lambda_{14} \approx -0.0261$, $\lambda_{15} \approx -0.028$,
 $\lambda_{16} \approx -0.0300$, $\lambda_{17} \approx -0.0341$, $\lambda_{18} \approx -0.0435$, $\lambda_{19} \approx -0.0583$, $\lambda_{20} \approx -0.0775$,
а для случая Б.7 —

$$d_L \approx 13.7756,$$

$\lambda_1 \approx 0.0752$, $\lambda_2 \approx 0.0342$, $\lambda_3 \approx 0.0146$, $\lambda_4 \approx 0.0059$, $\lambda_5 \approx 0.0010$,
 $\lambda_6 \approx -0.0004$, $\lambda_7 \approx -0.0032$, $\lambda_8 \approx -0.0077$, $\lambda_9 \approx -0.0118$, $\lambda_{10} \approx -0.0152$,
 $\lambda_{11} \approx -0.0197$, $\lambda_{12} \approx -0.0236$, $\lambda_{13} \approx -0.0263$, $\lambda_{14} \approx -0.0297$, $\lambda_{15} \approx -0.0326$,
 $\lambda_{16} \approx -0.035$, $\lambda_{17} \approx -0.0425$, $\lambda_{18} \approx -0.05$, $\lambda_{19} \approx -0.0643$, $\lambda_{20} \approx -0.0956$.

Таблица Б.1. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 20$ (см. рис. Б.1 – Б.5)

	цикл	цикл	цикл	хаос	тор
	рис. Б.1	рис. Б.2	рис. Б.3	рис. Б.4	рис. Б.5
v_1	-37.1497	-37.4065	29.6569	-22.3052	7.04794
v_2	-71.0385	-71.9121	35.7685	-25.0378	35.9423
v_3	-34.2835	-35.8566	10.1149	-8.87743	26.4731
v_4	-70.9549	-65.5886	-28.9286	34.6049	33.9739
v_5	-37.5836	-40.2636	-32.0773	23.4664	8.40692
v_6	-64.2067	-67.8228	-35.2695	35.0702	-25.5284
v_7	-47.7458	-37.8358	-37.9928	30.7894	-32.2845
v_8	-51.4297	-72.1946	-30.3699	24.729	-36.6315
v_9	-61.2603	-35.2198	-32.6517	32.1729	-35.6084
v_{10}	-39.6011	-64.6132	3.97279	24.4928	-36.6817
v_{11}	-70.109	-47.8574	34.9793	39.3371	-42.5366
v_{12}	-34.5121	-49.7719	28.0526	26.5961	-26.4302
v_{13}	-72.1073	-66.2024	35.6035	30.269	-42.582
v_{14}	-35.1426	-39.337	13.2761	18.5414	-30.8608
v_{15}	-65.5714	-68.4578	-26.9235	-1.79322	-30.3912
v_{16}	-29.0506	-8.36726	-32.4465	-18.6652	-18.4216
v_{17}	51.7367	56.8761	-34.4798	8.35307	23.4926
v_{18}	50.6242	48.752	-38.9055	32.9583	31.7633
v_{19}	46.9403	47.531	-31.9503	20.3225	32.3774
v_{20}	64.6368	68.3721	-41.1028	43.0936	29.7487

Таблица Б.2. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 20$ (см. рис. Б.6 – Б.9)

	тор	хаос	цикл	цикл
	рис. Б.6	рис. Б.7	рис. Б.8	рис. Б.9
v_1	26.6777	-26.3782	-30.9242	-29.1692
v_2	38.5997	-39.3434	-30.8362	-31.5628
v_3	33.3882	-37.3846	6.64437	-35.7351
v_4	33.9197	-29.0354	34.9718	-37.3364
v_5	37.9014	-35.644	29.249	-30.7961
v_6	29.0684	-24.5416	40.3002	-32.1061
v_7	40.2047	-18.3124	31.5847	3.94134
v_8	25.0828	13.9585	34.3205	34.8554
v_9	32.8817	31.4806	20.9274	29.5822
v_{10}	-1.11608	27.4101	-20.0132	40.0084
v_{11}	-30.4004	38.0482	-34.3447	33.5818
v_{12}	-25.8245	19.1403	-31.3133	36.9871
v_{13}	-34.408	30.6005	-40.4478	36.9691
v_{14}	-19.3165	-1.43523	-29.2949	31.0953
v_{15}	3.29287	-15.6438	-35.2703	31.0583
v_{16}	29.9451	-13.1465	-7.62876	-7.38767
v_{17}	27.6462	11.0215	30.1705	-35.5885
v_{18}	26.7045	38.7822	31.0349	-27.8233
v_{19}	10.3904	22.4518	36.2245	-35.8363
v_{20}	-32.6509	40.1475	36.5559	-9.90075

Б.2. Случай $N = 30$

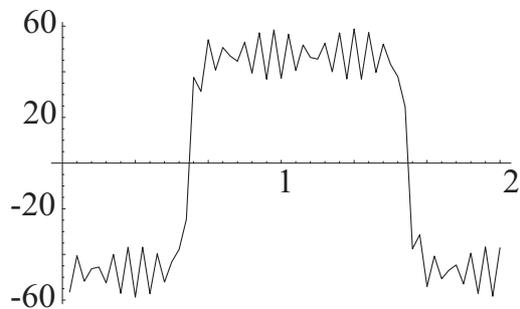
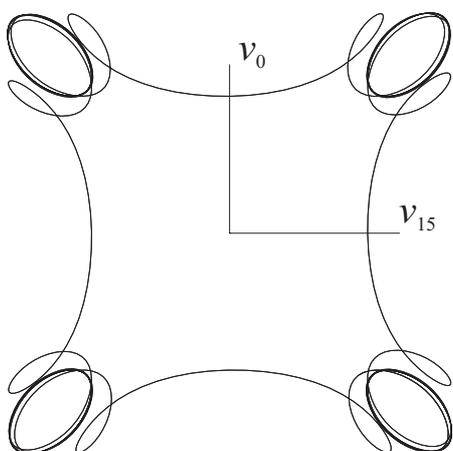


Рис. Б.10.

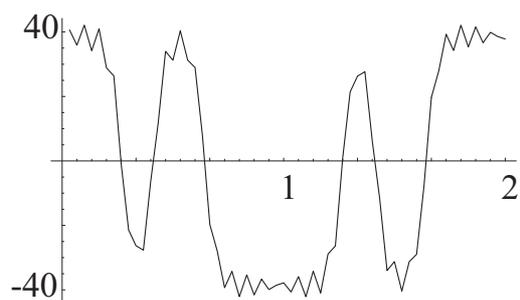
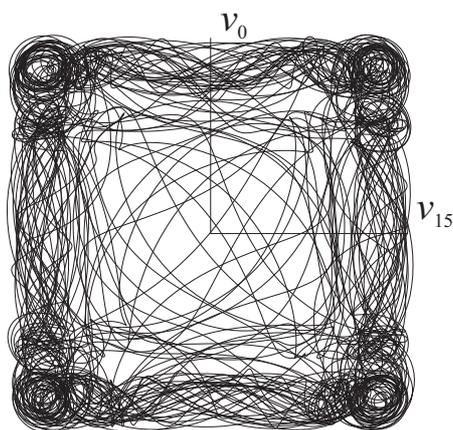


Рис. Б.11.

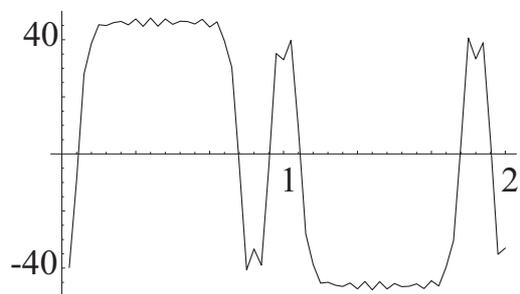
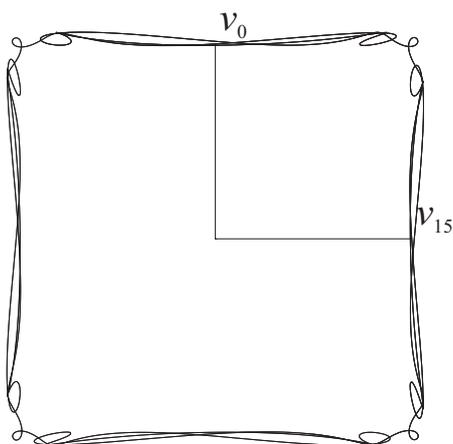


Рис. Б.12.

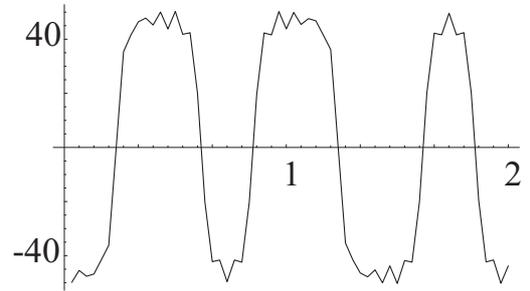
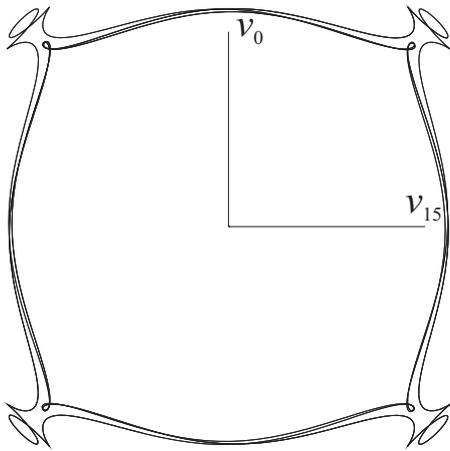


Рис. Б.13.

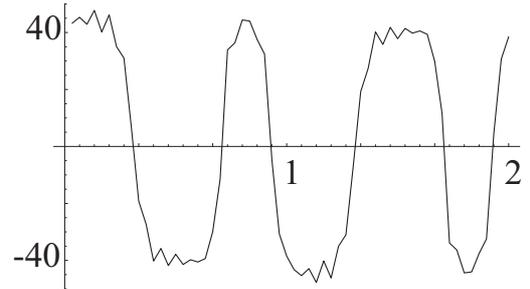
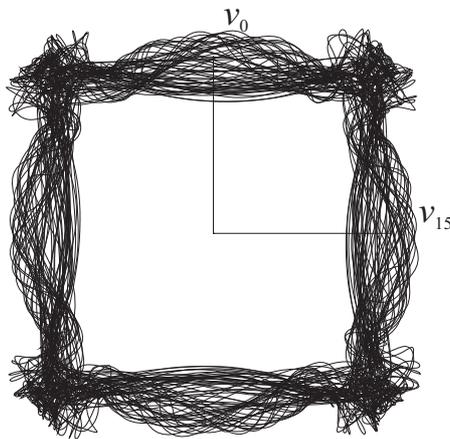


Рис. Б.14.

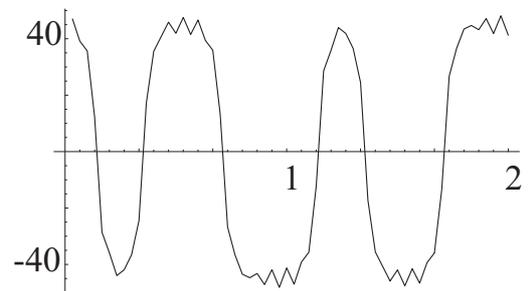
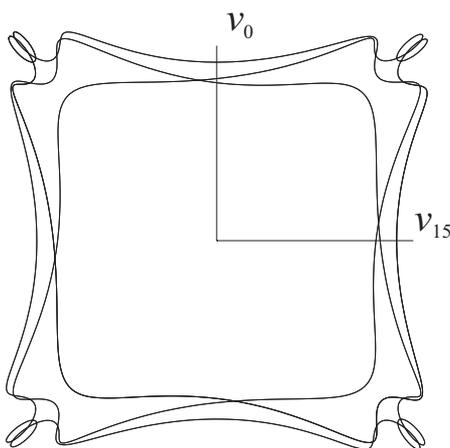


Рис. Б.15.

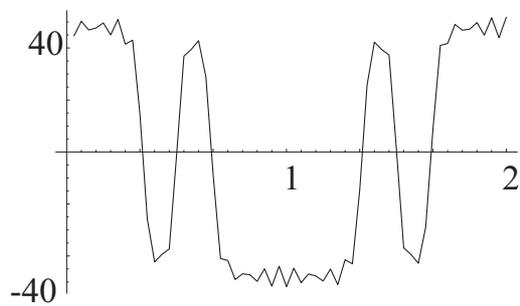
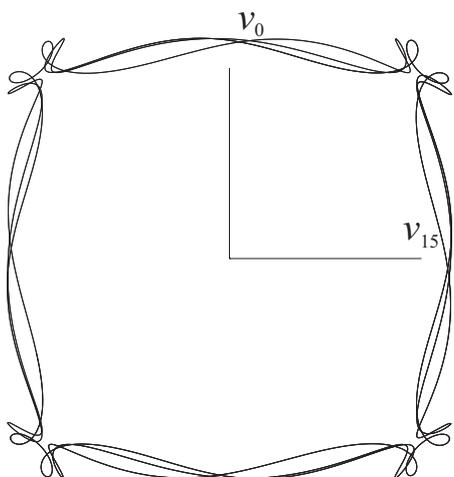


Рис. Б.16.

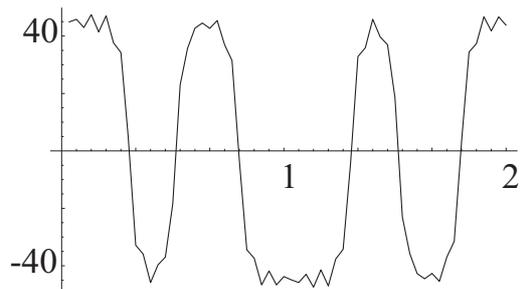
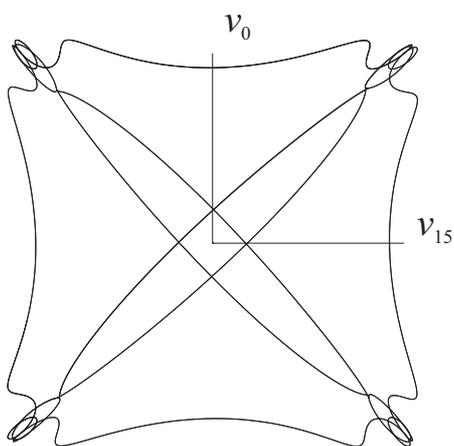


Рис. Б.17.

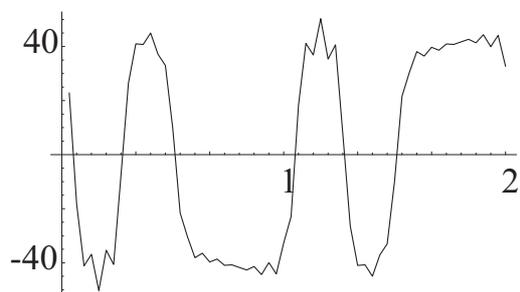
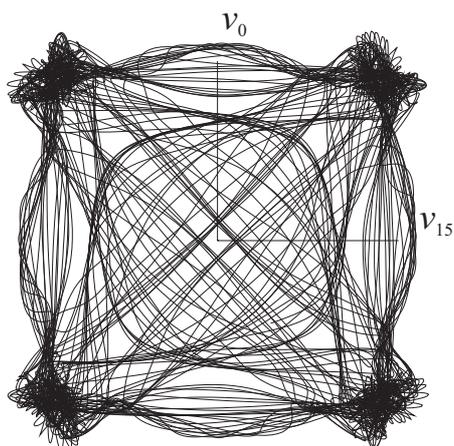


Рис. Б.18.

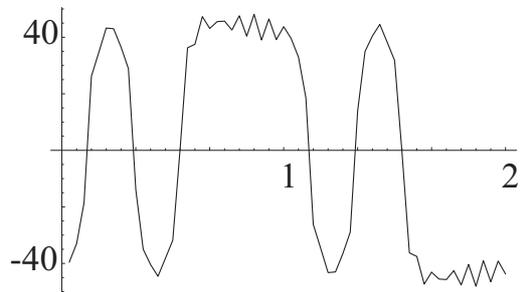
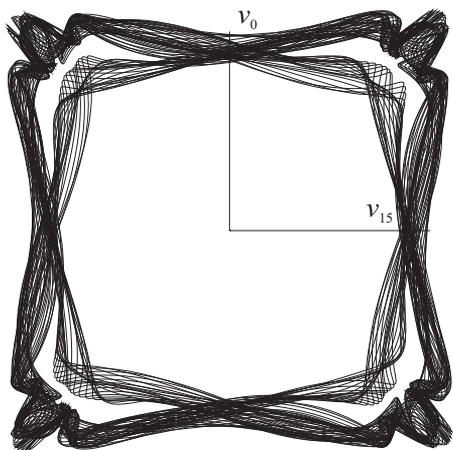


Рис. Б.19.

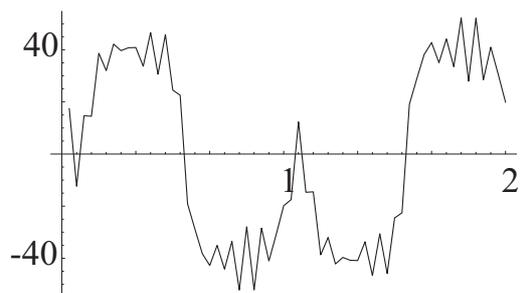
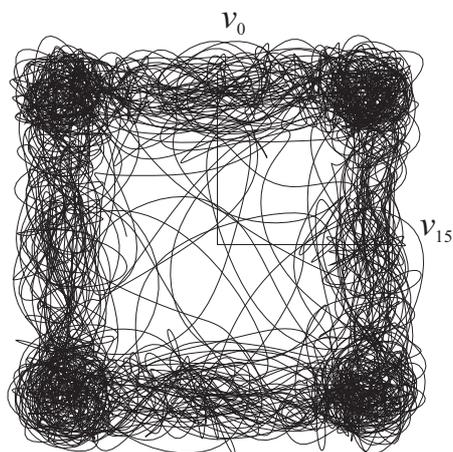


Рис. Б.20.

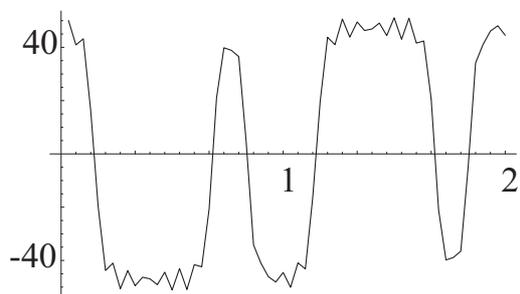
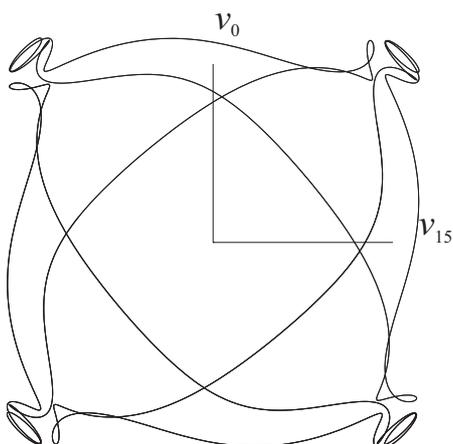


Рис. Б.21.

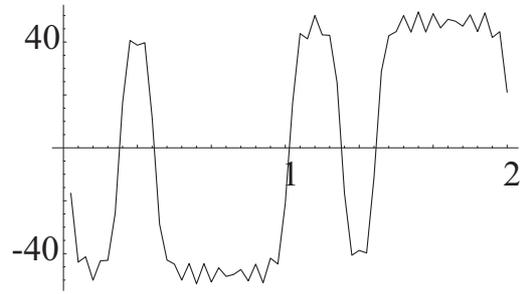
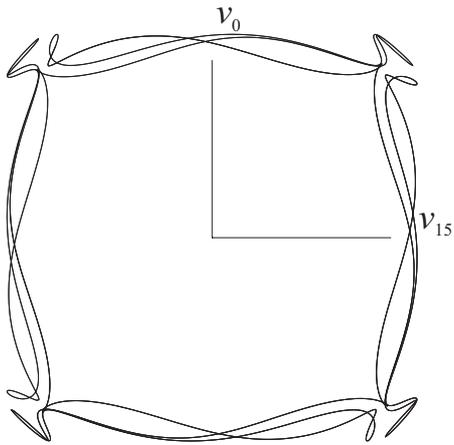


Рис. Б.22.

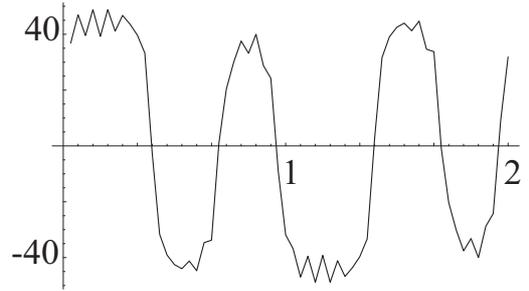
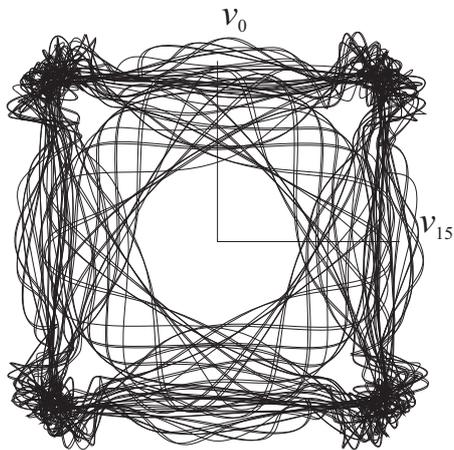


Рис. Б.23.

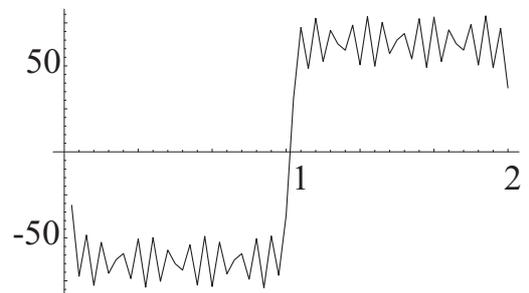
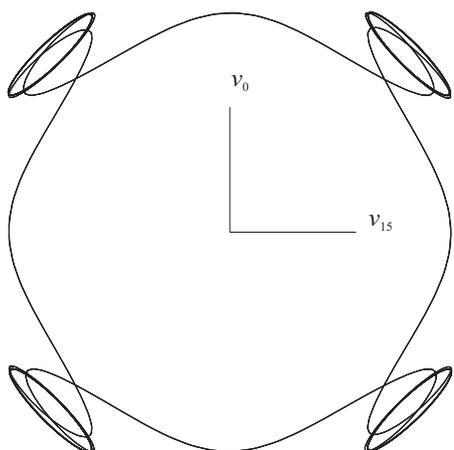


Рис. Б.24.

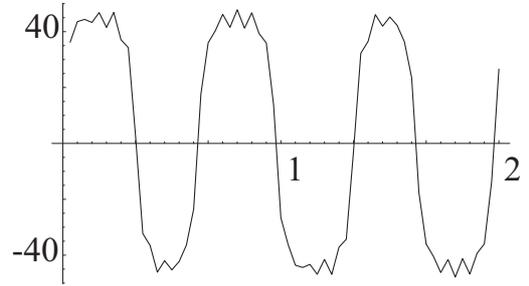
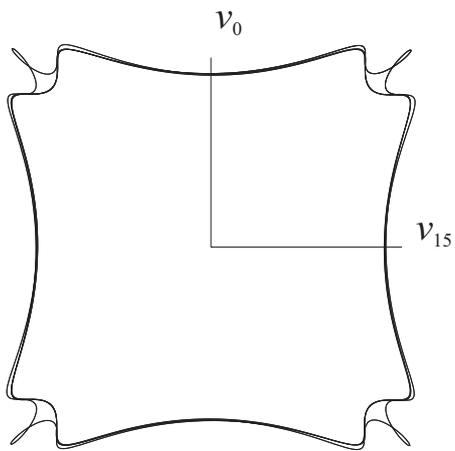


Рис. Б.25.

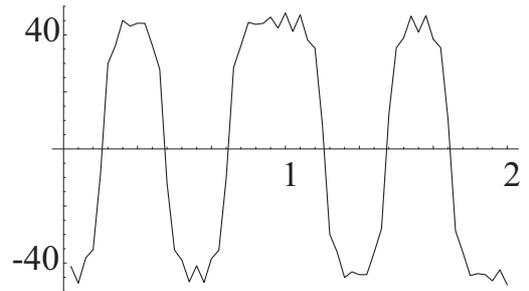
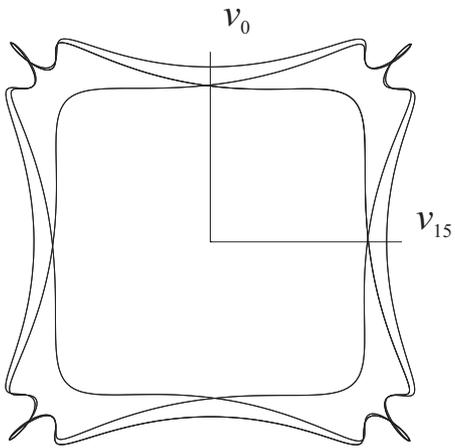


Рис. Б.26.

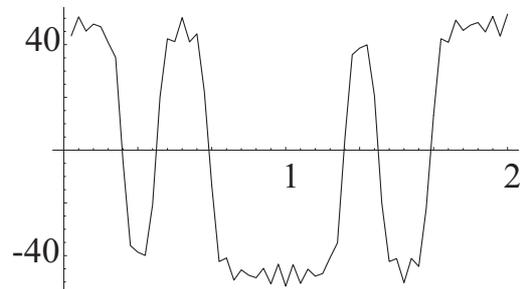
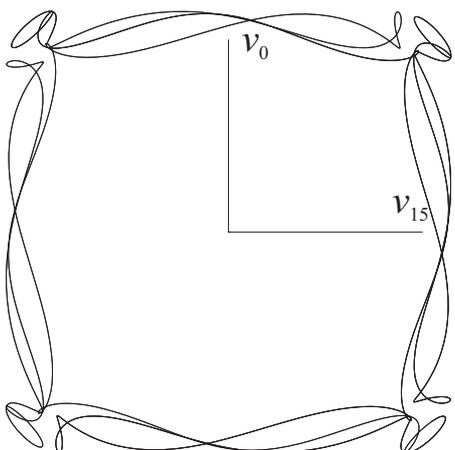


Рис. Б.27.

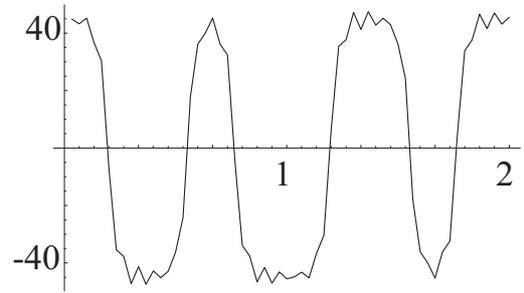
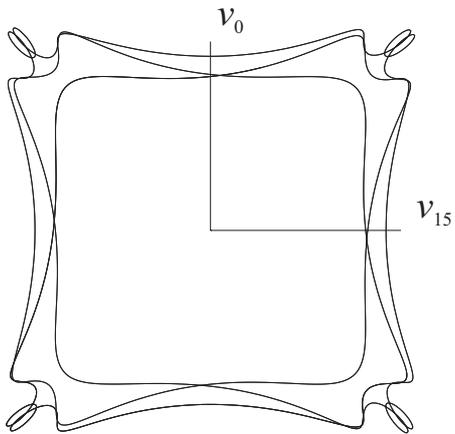


Рис. Б.28.

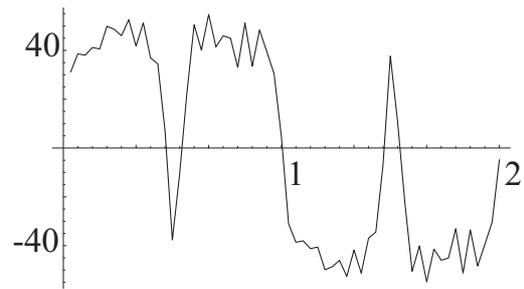
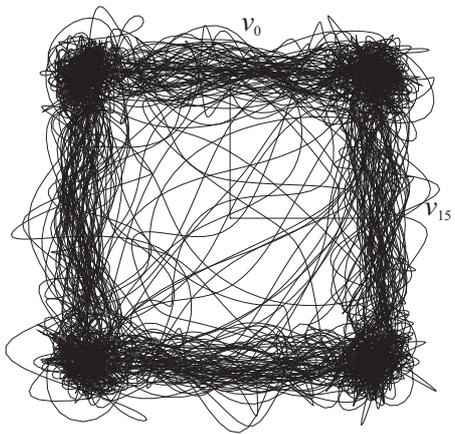


Рис. Б.29.

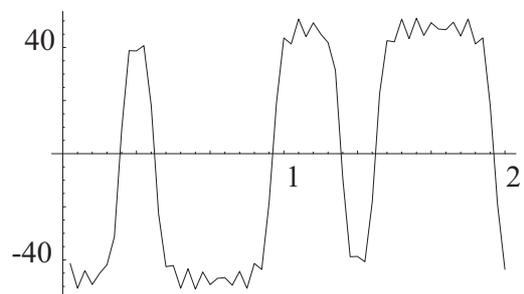
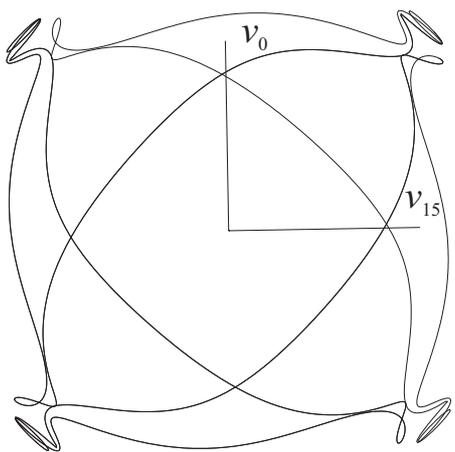


Рис. Б.30.

Для хаотических режимов, представленных на рис. Б.20 и Б.29, были вычислены ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность. Как оказалось, для случая Б.20 имеем следующие значения:

$$d_L \approx 7.343,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0.0113, \lambda_2 \approx 0.0029, \lambda_3 \approx 0.0003, \lambda_4 \approx 0.00001, \lambda_5 \approx -0.0016, \\ \lambda_6 &\approx -0.0042, \lambda_7 \approx -0.0063, \lambda_8 \approx -0.0069, \lambda_9 \approx -0.0083, \lambda_{10} \approx -0.0093, \\ \lambda_{11} &\approx -0.0102, \lambda_{12} \approx -0.0112, \lambda_{13} \approx -0.0114, \lambda_{14} \approx -0.0121, \lambda_{15} \approx -0.0124, \\ \lambda_{16} &\approx -0.0130, \lambda_{17} \approx -0.0138, \lambda_{18} \approx -0.0144, \lambda_{19} \approx -0.0148, \lambda_{20} \approx -0.015, \\ \lambda_{21} &\approx -0.0154, \lambda_{22} \approx -0.0163, \lambda_{23} \approx -0.0173, \lambda_{24} \approx -0.0183, \lambda_{25} \approx -0.0199, \\ \lambda_{26} &\approx -0.0217, \lambda_{27} \approx -0.023, \lambda_{28} \approx -0.0246, \lambda_{29} \approx -0.0278, \lambda_{30} \approx -0.0324. \end{aligned}$$

а для случая Б.29 —

$$d_L \approx 13.19,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0.0234, \lambda_2 \approx 0.0136, \lambda_3 \approx 0.0062, \lambda_4 \approx 0.0022, \lambda_5 \approx -0.0001, \\ \lambda_6 &\approx -0.0001, \lambda_7 \approx -0.0012, \lambda_8 \approx -0.0032, \lambda_9 \approx -0.0055, \lambda_{10} \approx -0.0059, \\ \lambda_{11} &\approx -0.0075, \lambda_{12} \approx -0.0092, \lambda_{13} \approx -0.0104, \lambda_{14} \approx -0.0117, \lambda_{15} \approx -0.0126, \\ \lambda_{16} &\approx -0.0135, \lambda_{17} \approx -0.0146, \lambda_{18} \approx -0.0155, \lambda_{19} \approx -0.0165, \lambda_{20} \approx -0.0173, \\ \lambda_{21} &\approx -0.0188, \lambda_{22} \approx -0.0200, \lambda_{23} \approx -0.0217, \lambda_{24} \approx -0.0236, \lambda_{25} \approx -0.0244, \\ \lambda_{26} &\approx -0.0250, \lambda_{27} \approx -0.0271, \lambda_{28} \approx -0.0303, \lambda_{29} \approx -0.0361, \lambda_{30} \approx -0.0409. \end{aligned}$$

Таблица Б.3. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 30$ (см. рис. Б.10 – Б.16)

	цикл	тор	цикл	цикл	тор	цикл	цикл
	рис. Б.10	рис. Б.11	рис. Б.12	рис. Б.13	рис. Б.14	рис. Б.15	рис. Б.16
v_1	-56.4376	40.6468	-39.8264	-49.8795	43.2422	47.0306	44.6727
v_2	-40.5466	35.8926	-8.94304	-45.4547	45.3437	39.1437	50.2672
v_3	-51.7369	42.1161	28.0246	-47.6083	42.8794	35.6737	46.9158
v_4	-46.2757	34.1841	38.7366	-46.7893	47.7559	12.2465	47.6631
v_5	-45.536	40.9781	45.2667	-41.5361	40.1793	-28.6331	49.6148
v_6	-52.4932	28.8814	44.971	-36.1865	46.1852	-35.8952	45.0235
v_7	-39.9818	26.3681	45.9927	-0.496049	35.0344	-43.9543	50.9962
v_8	-57.0587	-1.05516	46.4253	35.3688	31.0166	-41.879	41.4487
v_9	-36.8518	-21.4225	45.2209	41.5892	6.74801	-36.5504	42.9953
v_{10}	-58.7319	-26.3063	47.2921	46.4091	-19.2389	-24.5038	14.4736
v_{11}	-36.7938	-27.6707	44.6855	47.8085	-27.3204	17.2633	-25.7281
v_{12}	-57.2064	-6.1502	47.6173	45.2448	-40.2233	35.56	-42.2746
v_{13}	-39.7086	11.635	44.7438	50.037	-35.8057	40.7254	-39.3672
v_{14}	-52.1192	33.9909	47.3048	43.7792	-41.8057	45.8817	-37.3058
v_{15}	-43.2158	31.229	45.3964	50.2839	-37.8459	41.9302	-1.17834
v_{16}	-37.8333	40.3648	46.4969	41.8082	-41.4345	47.5606	36.8421
v_{17}	-24.6613	31.2586	46.3757	42.3951	-39.7735	41.5169	39.4263
v_{18}	37.5358	28.9603	45.5201	20.0522	-40.5533	46.6399	42.7974
v_{19}	31.3896	7.8365	47.1812	-20.1315	-39.3512	39.3874	28.9103
v_{20}	54.0506	-19.7013	44.4539	-42.2149	-29.9164	35.9208	-9.09525
v_{21}	40.716	-27.8912	46.2681	-41.6239	-11.5514	13.269	-40.9803
v_{22}	50.6411	-39.3158	39.5733	-49.6195	33.8867	-26.7089	-41.7299
v_{23}	46.9118	-34.2454	30.3009	-41.5971	36.3811	-36.5835	-49.0582
v_{24}	44.6182	-42.0957	-3.64082	-42.4255	44.3995	-43.4514	-46.8484
v_{25}	52.9476	-35.3569	-40.6209	-20.1872	44.0266	-44.7099	-47.2114
v_{26}	39.4185	-41.5595	-33.3023	19.4576	37.5779	-43.2013	-49.7435
v_{27}	57.092	-36.6534	-38.9836	42.3279	32.4564	-47.1467	-44.9232
v_{28}	36.7295	-39.8908	-4.61165	41.5876	-4.72062	-41.856	-51.6075
v_{29}	58.3351	-38.5652	35.1789	50.2082	-30.6743	-48.1466	-43.9057
v_{30}	37.1132	-37.8051	32.9921	43.791	-38.5197	-41.2433	-51.8057

Таблица Б.4. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 30$ (см. рис. Б.10 – Б.23)

	цикл	тор	тор	хаос	цикл	цикл	тор
	рис. Б.17	рис. Б.18	рис. Б.19	рис. Б.20	рис. Б.21	рис. Б.22	рис. Б.23
v_1	44.8809	22.8883	-39.5783	17.5029	50.0705	-17.1557	36.8069
v_2	45.8216	-18.2656	-32.9817	-12.3611	40.9056	-43.1966	46.9838
v_3	42.9543	-41.1341	-18.5739	14.6825	43.2015	-41.1995	39.5222
v_4	47.4262	-36.8663	26.2327	14.5085	16.2225	-50.0498	48.8347
v_5	41.4241	-50.3067	34.6657	38.6859	-19.6663	-42.7104	39.1959
v_6	47.0228	-35.3482	43.2487	32.0208	-43.7634	-42.5418	48.8166
v_7	37.6329	-40.6339	43.0121	42.1924	-40.9999	-24.682	41.1061
v_8	34.2672	-7.52265	36.5319	39.6878	-50.6309	17.117	46.7551
v_9	4.44712	26.4016	28.9185	40.7816	-43.8219	40.5942	43.6333
v_{10}	-32.8327	40.9953	-13.928	40.8838	-49.5119	38.7923	39.663
v_{11}	-35.9085	40.758	-34.9904	33.6912	-46.3052	39.7478	33.2844
v_{12}	-45.8392	44.9922	-40.4505	46.6199	-46.8965	11.2241	-2.66951
v_{13}	-39.6899	37.1338	-44.5417	30.601	-49.1007	-28.8979	-31.6646
v_{14}	-36.9713	32.9895	-38.2284	45.8463	-44.3997	-42.4003	-39.0958
v_{15}	-18.5057	9.66015	-31.7943	24.5414	-51.0886	-43.9445	-42.5204
v_{16}	23.008	-21.5941	0.769925	22.5519	-43.0201	-50.0118	-43.9821
v_{17}	35.7301	-30.4617	36.2656	-19.1076	-50.9378	-43.7346	-41.2427
v_{18}	42.7318	-38.1183	37.5186	-28.8579	-41.5885	-51.4081	-44.714
v_{19}	44.5313	-36.4677	47.3049	-38.236	-42.3752	-43.767	-34.6495
v_{20}	42.6739	-39.7097	43.1132	-42.7708	-20.677	-50.7144	-33.7614
v_{21}	45.3971	-38.6335	45.5259	-35.0673	20.9772	-45.3389	1.03676
v_{22}	36.9693	-40.9452	45.704	-44.1803	39.8265	-48.5917	20.3645
v_{23}	31.483	-40.7736	42.5611	-33.5014	38.8814	-47.8945	30.0688
v_{24}	-3.5956	-41.735	47.5981	-52.1919	36.5218	-45.9916	37.5776
v_{25}	-34.4284	-42.6672	40.3746	-27.9335	4.72382	-50.2979	33.1814
v_{26}	-37.3724	-41.3799	48.0961	-52.1417	-34.1698	-43.9525	40.0023
v_{27}	-46.6705	-44.3631	39.0123	-28.45	-41.0396	-51.0492	28.7726
v_{28}	-41.7792	-39.9507	46.4938	-41.0232	-46.0825	-41.7181	24.2293
v_{29}	-46.6634	-44.129	39.1555	-30.7135	-48.1006	-43.9077	-9.04292
v_{30}	-43.749	-32.6636	43.7329	-19.8425	-44.5148	-21.0135	-31.882

Таблица Б.5. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 30$ (см. рис. Б.24 – Б.30)

	цикл	цикл	цикл	цикл	цикл	хаос	цикл
	рис. Б.24	рис. Б.25	рис. Б.26	рис. Б.27	рис. Б.28	рис. Б.29	рис. Б.30
v_1	-31.0062	36.2113	-41.1846	43.3523	44.8912	31.106	-41.3405
v_2	-72.3494	43.5989	-47.0649	50.5402	43.2214	38.5947	-50.7059
v_3	-48.4232	44.392	-38.19	45.1256	45.2008	38.0035	-44.0491
v_4	-77.6838	43.3054	-35.3237	47.7971	36.6893	41.1859	-49.3046
v_5	-52.5881	46.8269	-8.64904	46.7846	30.3318	40.5717	-45.0889
v_6	-70.6126	41.5215	29.975	40.7769	-6.81814	49.8598	-41.8399
v_7	-62.7501	46.8965	36.1615	35.1794	-35.4067	48.6402	-31.3839
v_8	-59.1188	37.1185	45.0945	-4.27828	-37.7285	46.0061	9.30522
v_9	-73.7118	34.2837	43.0786	-36.1961	-47.2117	52.5566	38.8097
v_{10}	-50.6439	2.69653	44.0803	-38.6936	-41.2928	41.785	38.7028
v_{11}	-78.7093	-32.2863	44.0425	-39.9246	-47.4531	51.2695	40.6949
v_{12}	-49.8517	-36.5083	36.3346	-20.7079	-42.7812	36.8993	18.2022
v_{13}	-75.3098	-46.095	27.9683	20.1158	-45.1742	34.4454	-22.6241
v_{14}	-57.1269	-41.9666	-12.183	42.2246	-42.8936	6.76844	-42.5705
v_{15}	-65.0415	-45.2571	-35.4271	41.139	-36.2071	-37.6394	-42.1148
v_{16}	-68.7825	-42.2674	-39.0051	50.2699	-24.2438	-10.7283	-50.7003
v_{17}	-54.0521	-36.399	-46.5879	41.0377	17.9016	22.4025	-43.331
v_{18}	-77.4507	-23.5392	-40.9582	44.1067	36.1724	50.4703	-51.0327
v_{19}	-49.1019	17.7011	-46.7832	22.2216	39.9533	40.1232	-44.5601
v_{20}	-78.3073	36.0216	-38.4792	-13.281	45.2545	54.729	-49.3018
v_{21}	-52.5275	40.4377	-35.536	-42.2389	36.2116	41.405	-46.9334
v_{22}	-70.9473	46.2157	-10.2189	-40.8886	32.3636	45.9524	-46.7047
v_{23}	-62.8742	41.5605	28.6146	-49.3	-4.41898	45.0176	-49.5227
v_{24}	-59.1963	47.831	36.2924	-45.3936	-33.8979	33.034	-44.2936
v_{25}	-74.0752	41.2471	44.3897	-47.4236	-37.649	51.1795	-50.7148
v_{26}	-50.5004	46.7663	43.7085	-48.3945	-46.5814	33.5007	-41.3298
v_{27}	-79.0856	39.3355	44.0425	-44.8146	-41.5746	48.3264	-43.6099
v_{28}	-48.9497	35.941	46.2424	-50.7313	-47.0337	39.4695	-18.4327
v_{29}	-71.8047	13.7473	42.3722	-43.2122	-43.1279	30.382	19.1138
v_{30}	-37.1869	-26.6323	47.6803	-51.5652	-45.5277	4.80535	43.5851

Б.3. Случай $N = 31$

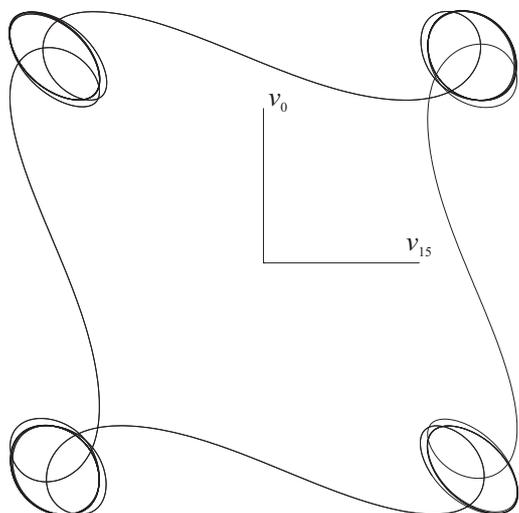


Рис. Б.31.

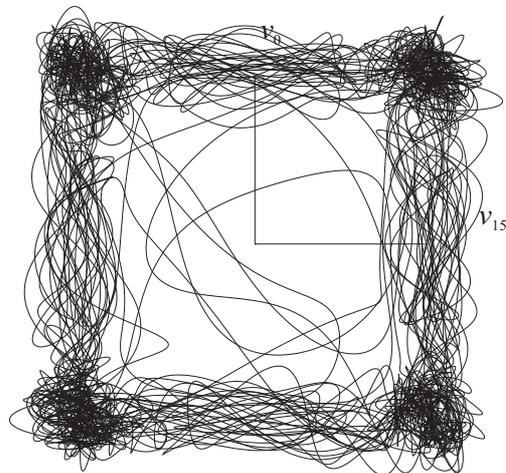


Рис. Б.32.

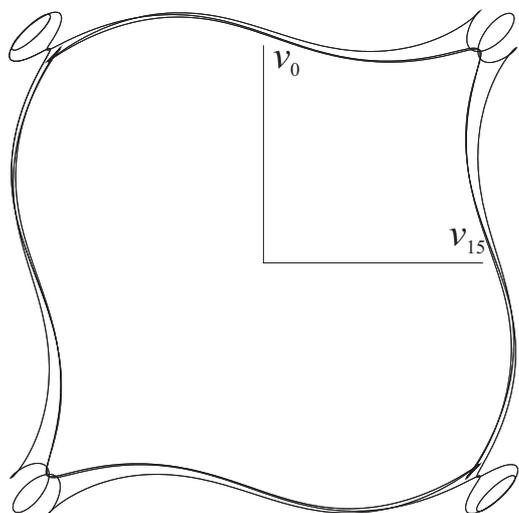


Рис. Б.33.

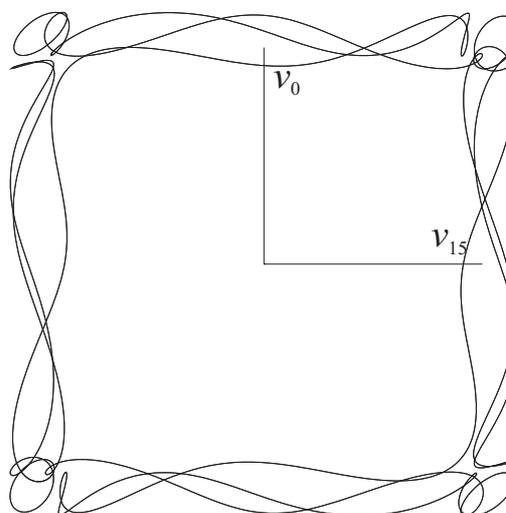


Рис. Б.34.

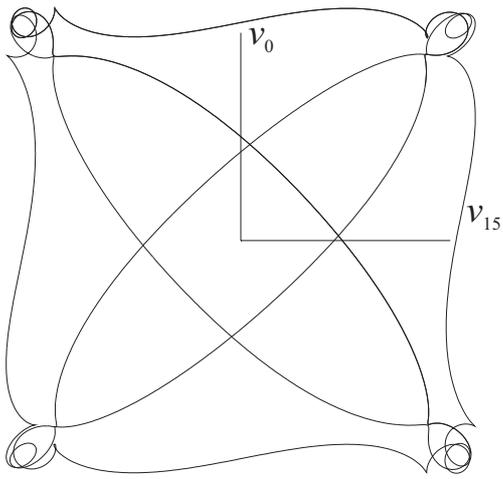


Рис. Б.35.

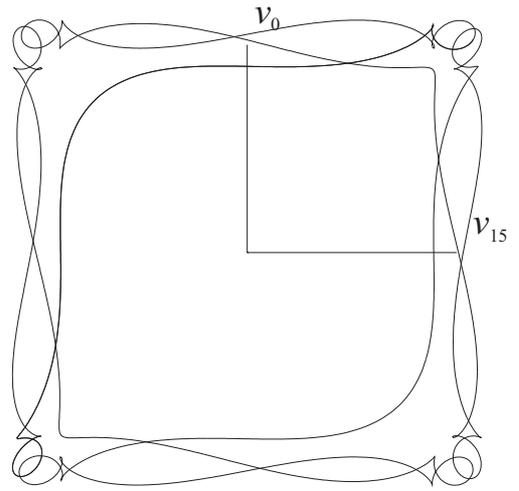


Рис. Б.36.

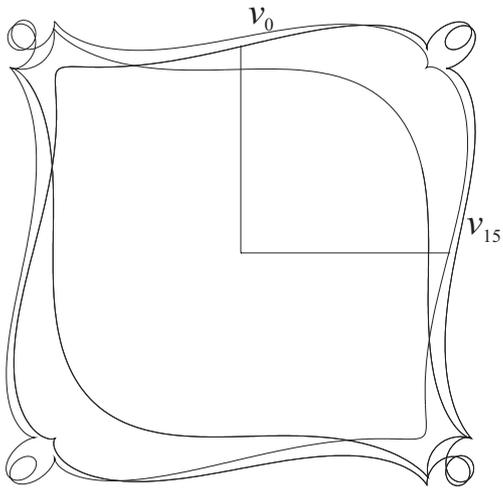


Рис. Б.37.

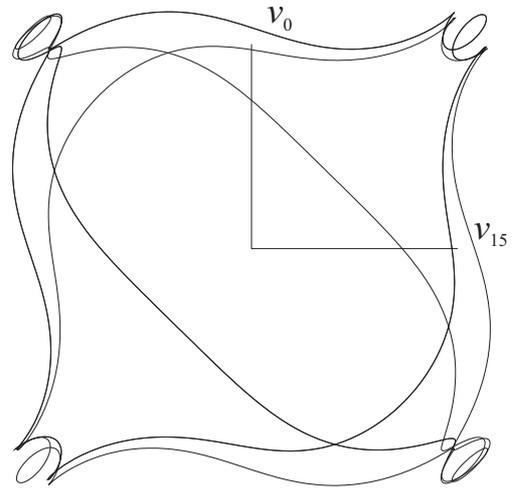


Рис. Б.38.

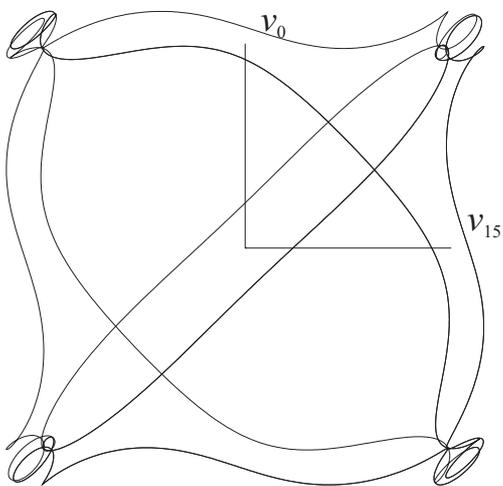


Рис. Б.39.

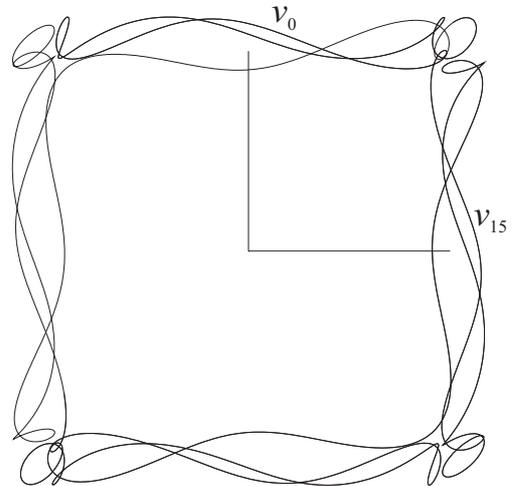


Рис. Б.40.

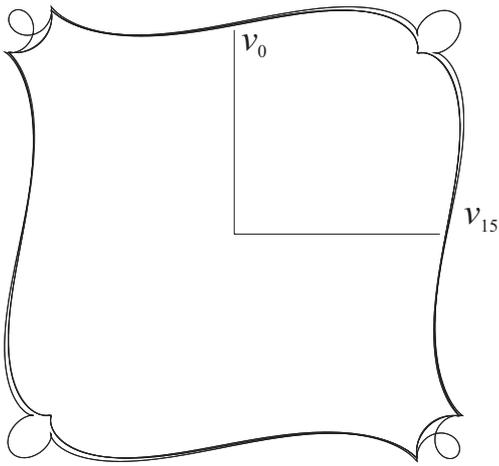


Рис. Б.41.

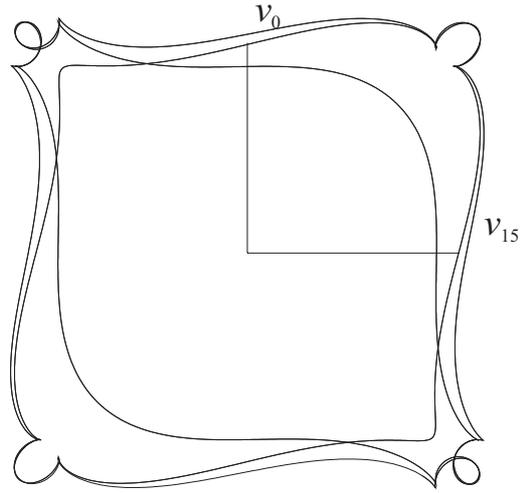


Рис. Б.42.

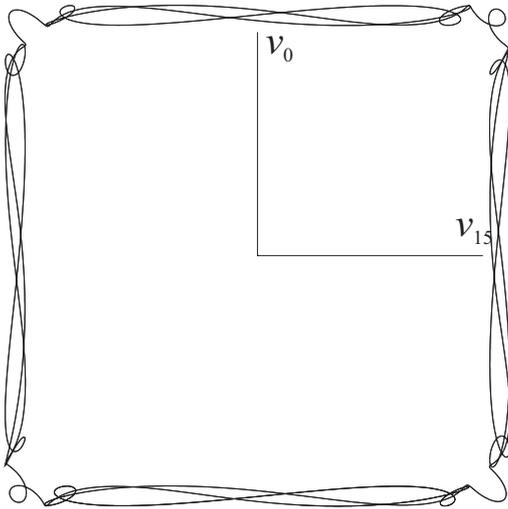


Рис. Б.43.

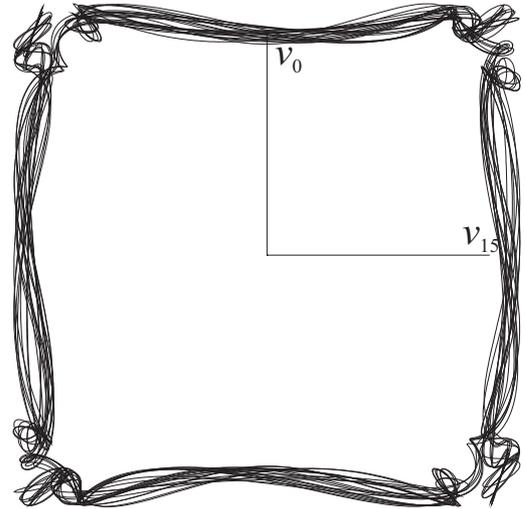


Рис. Б.44.

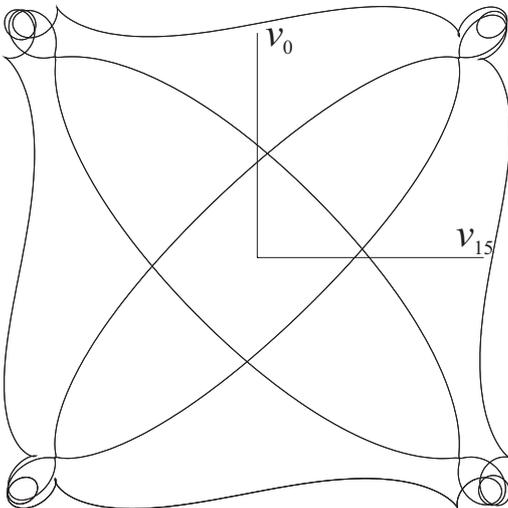


Рис. Б.45.

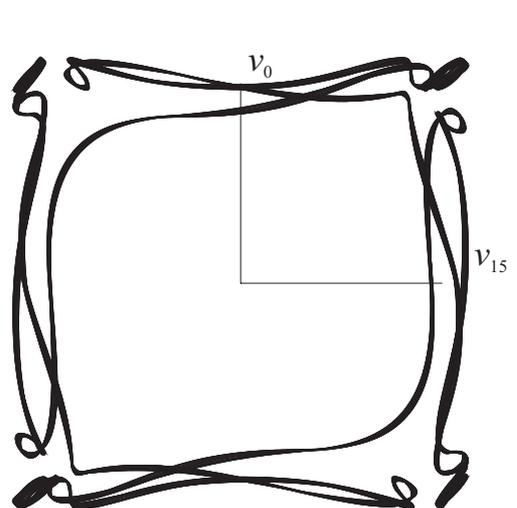


Рис. Б.46.

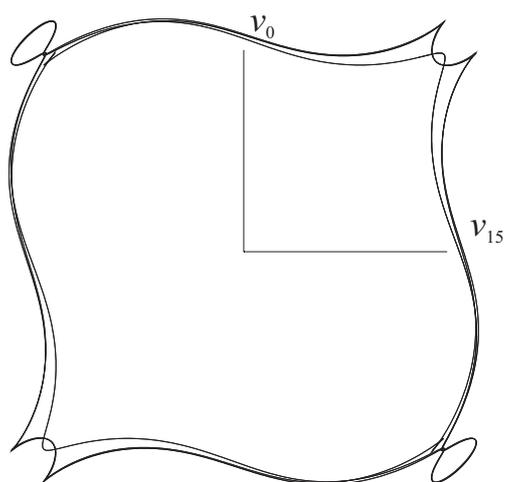


Рис. Б.47.

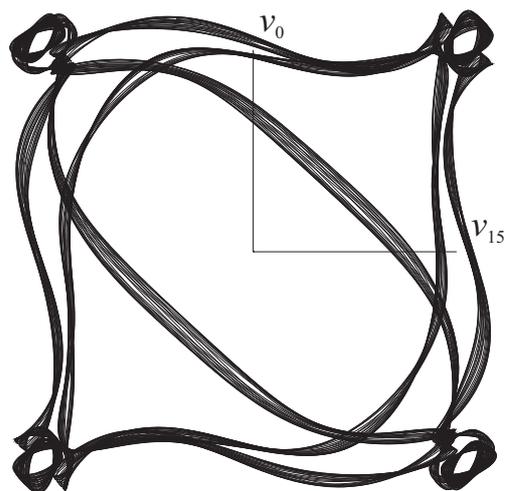


Рис. Б.48.

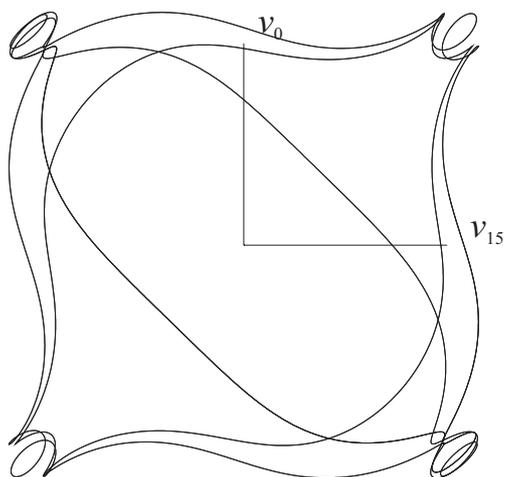


Рис. Б.49.

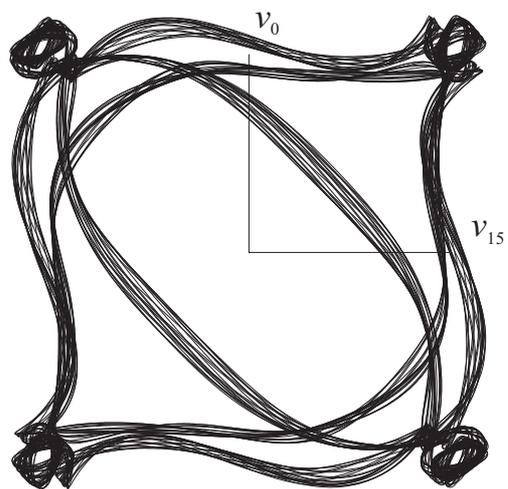


Рис. Б.50.

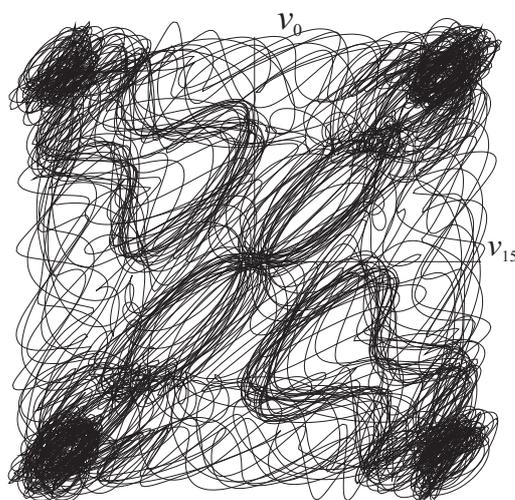


Рис. Б.51.

Таблица Б.6. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 31$ (см. рис. Б.31 – Б.37)

	цикл	хаос	цикл	цикл	цикл	цикл	цикл
	рис. Б.31	рис. Б.32	рис. Б.33	рис. Б.34	рис. Б.35	рис. Б.36	рис. Б.37
v_1	-73.2497	-48.308	-44.6058	-21.5503	47.0243	-40.2093	-40.771
v_2	-48.236	-39.4278	-51.9172	-43.9282	40.2927	-42.4852	-49.0228
v_3	-70.1829	-57.6303	-43.7192	-40.9912	33.8224	-49.3192	-44.4478
v_4	-53.6861	-40.4162	-51.5385	-51.508	-2.3408	-44.04	-48.956
v_5	-62.8315	-50.5375	-43.0847	-41.0953	-36.1508	-50.1724	-46.0605
v_6	-62.1697	-44.4377	-44.4753	-45.1926	-40.1903	-44.7076	-46.9133
v_7	-54.1531	-54.0089	-27.9444	-23.8375	-48.0984	-49.2382	-46.5652
v_8	-69.3911	-41.8603	7.573	9.43988	-45.5535	-46.2334	-40.2566
v_9	-45.9261	-45.7093	39.2932	40.3233	-47.4811	-47.4691	-32.4157
v_{10}	-61.6856	-49.3989	42.4248	42.1297	-47.856	-48.1904	5.25579
v_{11}	5.3435	-44.5292	47.8363	47.755	-45.6787	-45.6123	37.3148
v_{12}	62.3587	-51.702	48.1266	47.9497	-49.6095	-49.758	40.2836
v_{13}	45.4055	-43.6208	46.2284	45.757	-44.3937	-44.2155	48.7108
v_{14}	71.2105	-51.7025	50.6666	50.8319	-50.3647	-49.5817	45.0095
v_{15}	50.6935	-42.2915	44.3543	43.7878	-44.0595	-41.2903	48.2058
v_{16}	66.1041	-49.56	51.324	52.1893	-49.2689	-39.1329	47.2036
v_{17}	58.1103	-45.0784	42.11	43.4123	-42.8287	-12.6514	46.3066
v_{18}	57.814	-49.8933	44.216	51.6847	-39.882	28.7316	49.0808
v_{19}	66.4444	-47.2238	22.106	44.8574	-20.4677	39.9306	44.4434
v_{20}	50.5649	-36.2753	-13.66	49.5206	22.1005	44.9021	49.3212
v_{21}	71.9567	-18.2849	-42.2844	47.5002	39.8521	46.6186	40.5192
v_{22}	47.4191	25.1057	-41.5554	46.3726	42.7684	39.7701	38.1588
v_{23}	72.6278	36.7861	-49.5708	49.46	48.0194	33.2289	8.02605
v_{24}	49.3611	43.6047	-44.7528	40.7847	39.8105	-5.50291	-31.512
v_{25}	68.2492	30.7372	-43.6744	40.6535	36.8854	-37.0797	-39.6404
v_{26}	55.874	0.091007	-33.4405	7.18196	3.12308	-40.1529	-45.9991
v_{27}	60.2649	-14.7311	0.822082	-27.0739	-33.4695	-48.1529	-45.2934
v_{28}	64.4527	-8.48998	35.2141	-41.9929	-39.972	-42.3993	-39.9806
v_{29}	52.2243	38.5015	43.2396	-40.9106	-47.1681	-40.2799	-30.3383
v_{30}	71.1312	39.0464	45.7248	-39.8012	-46.0816	-20.9983	9.52823
v_{31}	47.7111	46.7659	49.932	-15.2326	-46.3457	20.1	38.1313

Таблица Б.7. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 31$ (см. рис. Б.38 – Б.44)

	цикл	цикл	цикл	цикл	цикл	цикл	тор
	рис. Б.38	рис. Б.39	рис. Б.40	рис. Б.41	рис. Б.42	рис. Б.43	рис. Б.44
v_1	-4.37279	-42.0133	6.86022	13.8303	-43.2908	-33.7131	-32.9938
v_2	30.959	-50.4798	-27.9697	-26.8573	-40.1892	13.9202	9.54696
v_3	43.8564	-42.9773	-42.395	-40.0409	-23.1229	39.4342	37.1682
v_4	43.9087	-44.2595	-40.6539	-44.5306	18.5511	37.6298	34.3941
v_5	50.2121	-27.2304	-39.97	-48.1696	39.6686	39.1022	35.0142
v_6	41.4515	7.7438	-12.7874	-44.7002	42.209	1.57826	-4.42096
v_7	43.4392	40.1953	23.2731	-49.9153	49.1408	-33.6417	-35.5127
v_8	16.4805	41.7817	44.2911	-43.9352	43.744	-42.3691	-39.8957
v_9	-18.625	48.2806	41.6387	-49.3862	49.2696	-47.3511	-48.8264
v_{10}	-43.8839	46.5041	51.9379	-41.9008	41.9469	-48.0886	-44.0332
v_{11}	-41.5721	42.7743	43.2914	-39.7376	39.8064	-47.3476	-49.2087
v_{12}	-51.0139	37.5003	51.7356	-17.1298	17.5503	-49.6415	-45.7227
v_{13}	-44.8638	3.78396	45.1324	24.3099	-23.6829	-46.5506	-47.66
v_{14}	-49.8031	-30.6068	49.4053	40.0533	-40.0996	-50.2737	-47.659
v_{15}	-47.4308	-44.238	48.0486	43.6879	-43.449	-46.4244	-45.8578
v_{16}	-47.2196	-43.7886	46.3963	48.7125	-48.8007	-50.0336	-49.3311
v_{17}	-50.0553	-51.0681	50.9424	44.2618	-44.1953	-47.1272	-44.6532
v_{18}	-44.7537	-43.8789	44.0424	50.1958	-50.2128	-49.0571	-50.0906
v_{19}	-51.2477	-51.9802	52.5683	43.923	-44.1824	-48.3783	-44.5387
v_{20}	-41.6018	-44.3886	43.2465	49.3107	-49.8333	-47.7786	-49.6452
v_{21}	-44.0111	-50.8379	51.8977	42.5309	-45.0736	-49.644	-45.4685
v_{22}	-18.6599	-46.3232	43.0937	40.0097	-47.8943	-46.7554	-47.9492
v_{23}	16.9755	-48.4451	44.7412	20.0099	-45.2065	-50.3382	-46.1261
v_{24}	43.1974	-48.945	29.5269	-21.8311	-40.0526	-46.2835	-42.5168
v_{25}	41.7708	-45.673	-5.5158	-39.9135	-28.4896	-49.5867	-35.8379
v_{26}	50.4418	-50.5428	-37.5059	-43.0056	12.1737	-44.5266	-5.34887
v_{27}	45.3704	-41.5145	-43.0751	-48.9345	38.9391	-40.519	31.1554
v_{28}	48.8573	-42.9879	-46.1377	-43.8184	40.924	-19.7828	42.2169
v_{29}	46.9368	-14.4923	-48.3104	-49.3854	49.3966	24.9027	43.7018
v_{30}	42.8305	21.2759	-41.4531	-41.2219	43.8286	41.7315	48.1452
v_{31}	37.4827	43.8265	-39.7036	-39.3574	48.9538	37.4575	37.7282

Таблица Б.8. Начальные значения для устойчивых режимов системы (6.3.30) при $N = 31$ (см. рис. Б.45 – Б.51)

	цикл	тор	цикл	тор	цикл	тор	тор
	рис. Б.45	рис. Б.46	рис. Б.47	рис. Б.48	рис. Б.49	рис. Б.50	рис. Б.50
v_1	-47.75	48.784	-40.1894	-42.8651	42.6345	45.3873	43.0962
v_2	-45.1843	46.0153	-42.0925	-37.4608	44.3514	41.7083	32.638
v_3	-49.74	47.3025	-48.4585	-7.12997	26.0698	35.6082	39.6006
v_4	-44.3199	47.8176	-47.4802	27.6203	-8.90521	-3.31449	34.3933
v_5	-50.2804	45.6125	-46.5646	44.3492	-40.7396	-30.1043	28.9974
v_6	-44.4771	49.3322	-49.4472	42.0687	-41.7818	-44.1218	25.7109
v_7	-49.554	44.5098	-41.8334	51.8464	-48.8537	-42.9618	-0.0831
v_8	-45.6199	49.9252	-41.7913	42.4597	-47.255	-48.9794	13.0421
v_9	-47.4836	44.3687	-12.055	52.4722	-46.7497	-44.2772	24.4621
v_{10}	-45.9706	48.9685	23.3906	43.4465	-49.4366	-48.7954	26.3023
v_{11}	-40.1688	43.9942	44.3543	50.6796	-41.6787	-45.3181	42.2702
v_{12}	-30.4785	42.4175	42.1139	45.9664	-41.7837	-47.0885	31.5921
v_{13}	9.14456	29.6799	51.4493	47.2837	-10.9089	-45.5471	44.9444
v_{14}	38.53	-4.49375	43.9401	48.2649	23.9204	-40.7407	34.1076
v_{15}	40.5554	-37.1961	50.6851	40.5644	44.4428	-31.8489	39.037
v_{16}	49.3496	-41.1731	44.507	39.2589	42.232	3.04746	44.4494
v_{17}	44.1966	-47.111	43.8955	3.14225	51.3531	35.781	32.4349
v_{18}	48.5965	-46.9032	32.272	-27.7459	44.1476	38.8272	44.6951
v_{19}	44.2199	-45.4305	-2.65156	-42.3077	50.9412	42.8784	23.7036
v_{20}	40.175	-47.7771	-36.2439	-40.3421	45.9803	31.2079	28.4773
v_{21}	25.7602	-38.2114	-43.0562	-39.1955	48.7712	3.7506	16.4763
v_{22}	-16.0564	-31.2422	-46.2216	-14.7007	48.4952	-33.2984	0.1279
v_{23}	-39.3866	10.588	-49.465	22.011	46.0234	-42.8087	17.6458
v_{24}	-41.4381	38.5989	-44.9948	42.4453	50.1253	-43.8286	21.5674
v_{25}	-48.4911	34.7716	-51.5686	41.6242	41.629	-51.1361	29.2994
v_{26}	-40.559	36.8974	-43.8793	50.4785	42.4869	-42.1398	33.9875
v_{27}	-38.7885	-1.52008	-51.4397	43.3634	13.5058	-53.5896	17.3822
v_{28}	-10.678	-34.1711	-42.8629	50.6254	-22.2486	-41.4234	2.8898
v_{29}	29.0485	-39.7829	-44.413	44.7259	-43.9744	-53.1843	-24.0720
v_{30}	40.1235	-48.3561	-26.6432	48.6209	-42.0353	-43.0221	-36.7067
v_{31}	45.2947	-44.3497	8.90132	46.0833	-50.6348	-50.074	-34.4429

Ляпуновские экспоненты и ляпуновская размерность, вычисленные для хаотического режима, представленного на рис. Б.32, имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}d_L &\approx 14.274, \\ \lambda_1 &\approx 0.0184, \lambda_2 \approx 0.0113, \lambda_3 \approx 0.0067, \lambda_4 \approx 0.00496, \lambda_5 \approx 0.0012, \\ \lambda_6 &\approx 0.0001, \lambda_7 \approx 0.00015, \lambda_8 \approx -0.0012, \lambda_9 \approx -0.0033, \lambda_{10} \approx -0.0044, \\ \lambda_{11} &\approx -0.006, \lambda_{12} \approx -0.0066, \lambda_{13} \approx -0.008, \lambda_{14} \approx -0.0101, \lambda_{15} \approx -0.0116, \\ \lambda_{16} &\approx -0.0129, \lambda_{17} \approx -0.0143, \lambda_{18} \approx -0.0154, \lambda_{19} \approx -0.0166, \lambda_{20} \approx -0.0178, \\ \lambda_{21} &\approx -0.0193, \lambda_{22} \approx -0.0202, \lambda_{23} \approx -0.0215, \lambda_{24} \approx -0.0221, \lambda_{25} \approx -0.0234, \\ \lambda_{26} &\approx -0.024, \lambda_{27} \approx -0.025, \lambda_{28} \approx -0.0275, \lambda_{29} \approx -0.0302, \lambda_{30} \approx -0.0332, \\ \lambda_{31} &\approx -0.0377.\end{aligned}$$