Кыргызско-Турецкий университет "Манас"

На правах рукописи

УДК 519.633

Омуралиев Асан Сыдыгалиевич

Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Бишкек 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\epsilon > 0$ - малый параметр.

E_n - n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ - произвольная точка в нем.

$\Omega_1 = \{(x,t) : x \in (0,1),\ t \in (0,T]\}$.

$\Omega_2 = \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T]\}$, S - прямоугольная область в E_2.

∂S - граница области S.

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} exp(-s^2)ds$.

$Q_1 = \{(x,t,\xi_1,\xi_2) :\ x \in (0,1),\ t \in (0,T],\ \xi_1, \xi_2 \in (0,+\infty)\}$.

$Q_2 = \{(x,t,\xi_1,\xi_2) :\ x \in S,\ t \in (0,T],\ \xi_1, \xi_2 \in (0,+\infty)\}$.

$Q_3 = \{(x,t,\xi,\zeta,\tau) :\ x \in (0,1),\ t \in (0,T],\ \xi,\zeta,\tau \in (0,+\infty),\ \xi = (\xi_1,\xi_2),\ \zeta = (\zeta_1,\zeta_2),\ \tau = (\tau_1,\tau_2)\}$.

$Q_4 = \{(x,y,t,\xi,\zeta,\tau,\eta) :\ (x,y) \in S = (0,1) \times (0,1),\ t \in (0,T],\ \xi,\zeta, \in (0,+\infty),\ \tau,\eta_k \in (0,+\infty),\ \eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots),\ \xi = (\xi_1,\xi_2),\ \zeta = (\zeta_1,\zeta_2),\ k \geq 1\}$.

$Q_5 = \{(x,t,\xi,\zeta,\tau,\sigma) : (x,t) \in \Omega_1,\ \xi,\zeta,\sigma > 0, \tau_1 > 0, \tau_2 < 0\}$.

$Q_6 = \{(x,y,t,\xi,\zeta,\tau,\eta,\sigma) : (x,t) \in \Omega_1,\ \xi,\zeta,\sigma > 0, \tau > 0, \eta_k < 0\}$.

$L(y,t) \equiv -\partial_y^2 + b(y,t)-$ линейный эллиптический самосопряженный оператор.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Широкое распространение математического моделирования в естественных и технических науках стимулировало разработку многочисленных алгоритмов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Не представляет особого труда рассчитать с помощью таких алгоритмов приближенные решения систем, насчитывающих десятки уравнений, если последние удовлетворяют условиям теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от параметра. В тех же случаях, когда условия названной теоремы нарушается, эффективность алгоритмов заметно снижается, а в некоторых ситуациях становится практически равной нулю.

Подобная ситуация возникает, например, в случае, когда исследуемый процесс описывается дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при старших производных. Такие уравнения получили название сингулярно возмущенных уравнений. Для процессов, описываемых сингулярно возмущенными уравнениями, характерны неравномерные переходы, наличие в них "быстрых"и "медленных"составляющих, что обуславливает "жесткость"рассматриваемой дифференциальной системы. Для жестких систем традиционные алгоритмы расчета приближенных решений теряют свою эффективность. Это ощущается в зоне пограничного слоя, возникающего при значениях независимой переменной, находящейся в окрестности граничных точек. Здесь необходимо каждую повторную вычислительную процедуру сопровождать существенным измельчением отрезка интегрирования, что значительно увеличивает объем вычислений и заметно снижает эффективность применяемого алгоритма.

Возникающие трудности можно преодолеть с помощью предварительного асимптотического анализа исследуемой задачи, проводимого на основе методов асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений. Сочетание алгоритмов численного интегрирования, с методами асимптотического интегрирования, позволяют выработать такой алгоритм приближенного решения дифференциальных уравнений, который значительно снижает объем вычислений и делает вычислительный процесс наиболее целесообразным и оптимальным.

Начиная с сороковых годов, ведутся интенсивные исследования, нацеленные на разработку методов асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных уравнений, описывающих явления пограничного слоя. В развитии этого направления значительный вклад внесли А.Н.Тихонов, В.Вазов, Л.С.Понтрягин, Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский, В.П.Маслов, М.И.Вишик, Л.А.Люстерник, А.Б.Васильева, М.И.Иманалиев, С.А.Ломов, В.Ф.Бутузов, К.А.Касымов и др. Усилиями этих ученых и их учеников созданы различные асимптотические методы решения сингулярно возмущенных уравнений.

По мере развития алгоритмов асимптотического интегрирования возникали и некоторые проблемы их применимости. Поэтому асимптотические методы разработывались при решении специфических задач. Так широкоизвестный метод пограничных функций разработанный Васильевой А.Б.[43] и Иманалиевым М.И.[64] применим к задачам с экспоненциальным пограничным слоем, методом усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского изучаются уравнения, когда правые части допускают существование конечнего среднего по времени.

В шестидесятых годах прошлого столетия С.А.Ломовым [83] разработан метод, который снимает ограничение на расположение спектра предельного оператора относительно мнимой оси. Асимптотические ряды, получаемые этим методом, являются единственными в определенном классе функций, допускают применение к задачам колебательного и неколебательного типов, при некоторых ограничениях на искомые функции задачи могут сходится не только асимптотически, но и в обычном смысле. Теоретической основой метода регуляризации состоит в том, что решение сингулярно возмущенной задачи зависит от возмущения двояким образом: регулярно и сингулярно. Основная идея метода регуляризации состоит в переходе в пространство большей размерности с помощью введения дополнительных независимых переменных. Дополнительные переменные, введенные с помощью спектра предельного оператора, описывают сингулярную зависимость решения от параметра .

До настоящего времени метод развивался для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных. Развитие метода основывался на использования спектра предельного оператора. В изученных ранее задачах, через спектр описывалась сингулярность решения по малому параметру.

В данной диссертационной работе, изучаются краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, когда предельный оператор не имеет спектр. Отсутствие спектра предельного оператора определенным образом влияет на формирования в решениях новых типов сингулярностей, не поддающихся описанию в терминах спектра предельного оператора. Второй проблемой, изучаемой в данной работе, являются краевые для параболических уравнений с малым параметром при всех производных, когда граница области не является гладкой, а содержит угловые точки. Характерной особенностью таких задач является возникновения явления углового пограничного слоя, обнаруженного впервые В.Ф.Бутузовым [27]. Задачи, когда отдельные точки спектра предельного оператора имеют точечную особенность, представляют, как теоретический, так и практический интерес. Наличие особенностей в задачах, приводит к возникновению дополнительного пограничного слоя, имеющий степенного характер изменения.

Цель работы определяется актуальностью темы. В работе решаются следующие задачи:

1. разработать алгоритм построения регуляризованной асимптотики решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с

частными производными параболического типа с малым параметром при пространственной производной, когда предельный оператор не имеет спектр;

2. в качестве приложения применить предложенный подход для построения асимптотики решения временного уравнения Шредингера с малой постоянной Планка;

3. разработать алгоритм асимптотического интегрирования первой краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром стоящим, как при временной, так и при пространственной производных и когда граница области не является гладкой, а содержит угловые точки, и описать структуру угловой погранслойной функции;

4. обобщить метод регуляризации на краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром при всех производных в случае, когда отдельные точки спектра предельного оператора имеют точечные особенности;

5. обобщить результаты полученные для скалярных задач, на многомерные случаи;

6. разработать алгоритм численного решения задач с пограничными слоями, основанного на синтезе метода регуляризации и метода конечных разностей.

Научная новизна. Впервые показано, что описания параболического пограничного слоя осуществляется не экспоненциальной, а специальной функцией, называемой дополнительным интегралом вероятности. Параболические погранслойные функции имеют иную оценку, чем экспоненциальные погранслойные функции. Идея регуляризации впервые применяется для выделения особенностей в решении сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, когда малый параметр стоит перед всеми производными. Методом регуляризации для сингулярно возмущенных задач рассматривается новый цикл задач, не изученных ранее: задачи, когда предельный оператор не имеет спектр; краевая задача для временного уравнения Шредингера с малой постоянной Планка; задачи, когда возникают явления углового пограничного слоя; задачи с нестабильным спектром предельного оператора. Предлагаемая методика обобщается на многомерные аналоги перечисленных задач. Синтезируя метод регуляризации и метод конечных разностей, предлагается новый численный метод решения жестких задач, который позволяет получать решения с более высокой точностью.

Методика исследования. При построении регуляризованной асимптотики решения задач, изучаемых в работе, используется метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач, разработанный С.А.Ломовым. При изучении задач с нестабильным спектром предельного оператора, используется методика А.Г.Елисеева [57], разработанный для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для обоснования асимптотической сходимости формальных решений применяется аппарат "принипа максимума", доказанный в работе [80].

Практическая ценность. Разработанные в диссертации алгоритмы позволяют построить асимптотические и численные решения задач о собственных и вынужденных резонансных колебаниях среды с малой вязкостью, в процессах химических превращений двух веществ, сопровождающиеся диффузией и переносом. При квантомеханическом изучении нерелятивистских систем в двумерном пространстве-времени, состоящем в рассмотрении частицы (массы m) в поле с потенциалом $V(x)$, постулируется, что состояние системы в момент времени t полностью определяется волновой функцией $\Psi(t, x)$, которая является решением временного уравнения Шредингера.

Аппробация работы. Результаты работы докладывались На Международных конференциях по асимптотическим и численным методам

(Новосибирск, 1986 г., Бишкек, 1995 г., Алма-Ата, 2003 г., Новосибирск, 2004 г., Алма-Ата, 2005 г., Бишкек, 2006 г.), на Всесоюзных конференция по асимптотическим методам (Алма Ата, 1979 г., Бишкек, 1991 г.), на Всесоюзном научном совещании "Методы малого параметра"(Нальчик, 1987 г.), на Всесоюзных школах (Минск, 1985 г., Воронеж, 1992 г., Москва, 1993 г.), Научн. конференц. по математ. и механ. посвящ.20-летию КГУ, Фрунзе, 1972 г., Казахстан. межвуз. научн. конфер. посвящ ВОСР, Алма-Ата, 1977, г., Научн.конф. по распространен. упругих и упругопластич. волн, Фрунзе, 1983 г., Респуб.научн.конферен."Дифференц.уравн. и их прилож.", Фрунзе, 1989 г., Научно-теорет.конфер. посвящ.40-летию ИГУ, Каракол, 1993 г. Респуб.научн.конферен."Дифференц.уравн. и их прилож.", Ош, 1993 г., на научных семинарах: член-корр.РАН, акад.НАН КР М.И.Иманалиева (1982,1995), д.ф.-м.н., проф. С.А.Ломова (1972-1993), Кыргызско-Турецкого университета "Манас"(1998-2006).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 35 работ. В диссертацию не включены результаты работ [107],[160],[125],[127] выполненные в соавторстве .

Объем и структура работы. Диссертация состоит из перечня условных обозначений; введения; вводной главы, которая состоит из параграфа обзора литературы по теме диссертации, описания математических моделей приводящихся к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям с частными производными параболического типа, вспомогательного материала; четырех глав, разбитых на параграфы и пункты, заключения, списка литератур из 163 названий и приложения. Работа изложена на 191 страниц машинописного текста.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов. В параграфе 1.1 дается краткий обзор литератур. В следующем параграфе 1.2 описываются математические модели практических задач, которые приводятся к сингулярно возмущенным параболическим уравнениям. В последнем параграфе 1.3 доказывается несколько лемм, а также приводится формулировка принципа максимума [80], используемые многократно в данной работе.

Решению сингулярно возмущенных параболических задач, при отсутствии спектра предельного оператора, посвящена глава 2, она состоит из трех параграфов. Параграф 2.1 посвящен построению регуляризованной асимптотики решения скалярной задачи

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) + b(x,t)u(x,t,\epsilon) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_1,$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \qquad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u(x,t,\epsilon)|_{x=1} = 0.$$

На примере простейшей задачи показано, что роль спектра в такой задаче играет коэффициент $a(x)$ и решение зависит от малого параметра нерегулярным образом. Поэтому регуляризующая функция вводится по формуле

$$\xi_j = \frac{\varphi_j(x)}{\epsilon} \equiv \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon} \int\limits_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \ j = 1, 2.$$

Если ввести такие дополнительные переменные в качестве независимых переменных, наряду с переменными x, t, то функцию пограничного слоя удается описать специальной функцией $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$. Например, если функция $exp(-\xi_j)$ описывает экспоненциальный пограничный слой и определяется, как решение обыкновенного дифференциального уравнения,то функция $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$, являющаяся решением уравнения теплопроводности, описывает параболический пограничный слой и имеет оценку параболической погранслойной функции [66]-[68]:

$$|erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})| < c\exp{(-\frac{\xi_j^2}{8t})}.$$

Отметим, что полученные до сих пор другими авторами асимптотики решения аналогичных задач содержали функции пограничного слоя описываемые экспоненциальными функциями.

В следующем параграфе 2.2, методика разработанная в параграфе 2.1, обобщается на двумерную задачу. Показано, что сингулярно возмущенные задачи, когда малый параметр стоит перед лапласианом, имеет более сложную асимптотику. А именно, в многомерном случае возникает угловой пограничный слой, описываемый произведением параболических погранслойных функций.

Методика параграфа 2.1 применяется в параграфе 2.3 для изучения временного уравнения Шредингера с малой константой Планка. Асимптотика которой имеет быстроосцилирующий характер изменения, когда малый параметр стремится к нулю.

Как сказано выше, второй проблемой поставленный Ломовым является задача с двумя соприкасающимися вязкими границами. Решению этой проблемы посвящена глава 3. Если граница области интегрирования задачи представляет гладкую кривую, причем в любой точке границы существует нормаль, то пограничные функции строятся как решение обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль каждой нормали. Если же граница области не является гладкой, а содержит угловые точки, то погранслойная структура решений сингулярно возмущенных задач усложняется в окрестности таких точек. При решении таких задач В.Ф.Бутузовым [27] для описания пограничного слоя в окрестности угловой точки введен новый тип функций пограничного слоя и назван им "угловой погранслойной функцией". Если рассмотреть уравнения квантовой механики, в которых множителем входит мнимая единица, то подход В.Ф.Бутузова не проходит и по видимому не может быть реализован. Представляет интерес получить регуляризованную асимптотику решения таких задач.

В параграфе 3.1 изучается скалярная краевая задача

$$\epsilon\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) - b(t)u(x,t,\epsilon) + f(x,t),\ (x,t)\in\Omega_1,$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u(x,t,\epsilon)|_{x=1} = 0.$$

В отличии от задачи, изученной в параграфе 2.1, асимптотика решения этой задачи, кроме функций параболического пограничного слоя, содержит экспоненциальную погранслойную функцию, описывающую пограничный слой вдоль $t = 0$ и угловые погранслойные слагаемые, которые задаются в виде произведения экспоненциальной и параболической погранслойных функций. Отметим, что параболические погранслойные функции, участвующие при описании углового пограничного слоя, имеют другой масштаб относительно малого параметра, чем функция параболического пограничного слоя, описывающая параболический пограничный слой вдоль границ $x = 1$ и $x = 0$.

Следующий параграф 3.2 посвящен обобщению задачи изученной в параграфе 3.1 на случай, когда потенциал зависит от двух переменных x, t. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что для определения регуляризующей функции получаем задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. Если в скалярных задачах, для описания пограничного слоя вдоль прямой $t = 0$, вводится одна регуляризующая функция, то в многомерной задаче, изученной в параграфе 3.3, при помощи спектра предельного дифференциального оператора вводится счетная система регуляризующих функций.

Скалярная задача, когда предельное уравнение в отдельных точках рассматриваемого отрезка имеет особенность, изучена в параграфе 4.1. Здесь, при описании особенностей, используется методика работы Елисеева [57], где изучено обыкновенное дифференциальное уравнение. Присутствующая в уравнении особенность приводит к появлению еще и степенного пограничного слоя. Кроме того возникает дополнительный угловой пограничный слой, описывающийся произведением функций параболического и степенного пограничных слоев.

Параграф 4.2 посвящен изучению задачи рассмотренной в параграфе 4.1 в случае, когда предельное при $\epsilon \longrightarrow 0$ уравнение имеет разрывное решение. В данном случае асимптотика решения задачи начинается с отрицательной степени малого параметра.

Многомерная задача, когда спектр предельного оператора нестабильный, изучается в параграфе 4.3.

В качестве приложения разработанной в данной работе методики, в заключительной главе предложен численный алгоритм, основанный на синтезе метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач и конечно-разностного метода. Для демонстрации и лучшего понимания этого алгоритма в параграфе 5.1 изучается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при производной. В параграфе 5.2 алгоритм применяется для численного решения сингулярно возмущенной параболической задачи, когда предельный оператор не имеет спектр. В параграфе 5.3 рассматриваются два численных примера.

Особенностью данного метода является то, что погрешность выражается произведением шага h и малого параметра ϵ. С уменьшением значения малого параметра точность решения увеличивается, т.е. варируя значением малого парметра можно достичь желаемой точности. Полученные численные результаты, при различных значениях малого параметра ϵ, приведены в таблицах и сопровождаются графиками (см.Приложение).

ГЛАВА 1

ВВОДНАЯ ГЛАВА

В данной главе дается краткий обзор литератур по теме диссертации и приводятся некоторые результаты многократно используемые в работе полученные автором и взаимствованные из других источников.

1.1 Обзор литератур

Математическая теория сингулярно возмущенных задач стала развиваться в 19-м веке. Первым результатом в теории сингулярных возмущений по-видимому, следует назвать работу Лиувилля [10], в которой он строит приближенные решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка при стремлении параметра к бесконечности. В 1899 году Хорн [4] исследует это же ОДУ второго порядка с точки зрения построения асимптотического решения. В 1904 году Прандтль изучает сингулярно возмущенную систему Навье-Стокса с малой вязкостью на основе выдвинутой им концепции пограничного слоя (см. [12]). В 1907 г. Шлезингер в [15], а в 1908 г. Биркгоф в [1] рассматривают и решают чисто математическую задачу об исследовании структуры решений сингулярно возмущенного ОДУ произвольного порядка. Та же задача, но в более общей постановке решается в 1934 г. Тржидзинским (см. [16]-[17]).

Сложные эффекты появляются в решениях сингулярно возмущенных задач для ОДУ, если кратность их спектра изменяется при переходе независимой переменной из одной точки в другую. Здесь могут возникнуть точки поворота, обладающие тем свойством, что структура решений сингулярно возмущенных уравнений в окрестности этих точек резко отличается от структуры решений вдали от них. Первый результат, связанный с исследованием точек поворота, получил в 1934 г. Лангер (см., например, [5]-[6]).

Систематическое развитие теории сингулярных возмущений начинается с сороковых годов двадцатого столетия в трудах А.Н.Тихонова [144] и В.Вазова [19]. Именно с этого времени исчисляется бурный и плодотворный период развития советской школы теории сингулярных возмущений (см., например, [20]-[48], [51]-[69], [71]-[77], [81]-[93] и др.).

Развивая идеи А.Н.Тихонова, сформулированные им при доказательстве известных теорем о предельном переходе (см.[144]), А.Б.Васильева и М.И.Иманалиев разрабатывают метод пограничных функций. Усилиями А.Б.Васильевой, М.И.Иманалиева и их учениками этот метод развивался в различных направлениях (см., например, [27]-[39], [42]-[47], [64]-[69]). Высокая эффективность его применения к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и задачам для уравнений в частных производных. М.И.Вишик и Л.А.Люстерник, впервые математически описали функции пограничного слоя и применили их к некоторым классам краевых задач для уравнений в частных производных (см. [48]).

К.А.Касымовым [71]-[72] получены результаты по задачам с начальным скачком для ОДУ и дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Им и его учениками изучены общие случаи задач с начальным скачком для различных классов сингулярно возмущенных уравнений.

Теория релаксационных колебаний, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с быстрыми и медленными переменными, родственна по многим своим идеям теории сингулярных возмущений. Основные принципы исследования релаксационных колебаний были сформулированы А.А.Дородницыным при рассмотрении им уравнения Ван-дер-Поля (см. [54]). Всестороннее и глубокое изучение проблема релаксационных колебаний в нелинейных системах общего вида получила в трудах Л.С.Понтрягина, Е.Ф.Мищенко и Н.Х.Розова. Ими создан эффективный метод исследования процессов с релаксационными колебаниями, наиболее полно изложенный в [97].

Развитый В.П.Масловым метод канонического оператора. Этот метод позволяет исследовать широкий класс сингулярно возмущенных задач (в том числе и нелинейных). Содержание метода и относящиеся ему основные результаты изложены в двух известных монографиях [91]-[92].

С методом канонического оператора В.П.Маслова тесно связан лучевой метод (многомерный аналог метода ВКБ), позволяющий строить коротковолновую асимптотику задач дифракции. Математическое обоснование лучевого метода и его дальнейшее развитие было осуществлено В.М.Бабичем и его учениками (см.[20] и содержащуюся в ней библиографию). Несколько иное развитие лучевого метода в связи с задачами механики сплошной среды содержится в книге Уизема [148].

Метод сращиваемых асимптотических разложений (или метод согласования асимптотик) для уравнений в частных производных успешно развивается А.М.Ильиным и его учениками (см. [63]). Процедура построения асимптотических решений с помощью этого метода близка процедуре, осуществляемой Ван-Дайком в [40], и обобщает основные идеи метода сращиваемых разложений для обыкновенных уравнений. Отметим, что метод сращиваемых разложений родственен методу многих масштабов. Оба этих метода базируются на идее построения различных асимптотик в двух примыкающих друг к другу зонах независимой переменной и согласования асимптотик в пересечении зон.

С.Ф.Фещенко и Н.И.Шкилем разработана теория асимптотического расщепления систем ОДУ с медленно меняющимися коэффициентами (см. [150]). Обобщение этой теории на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах было проведено Ю.Л.Далецким и С.Г.Крейном(см. [53]).

Многие сингулярно возмущенные задачи могут быть рассмотрены с позиций метода усреднения. Этот метод был разработан в тридцатые годы двадцатого столетия Н.М.Крыловым и Н.Н.Боголюбовым (см. [79]); существенный вклад в развитие этого метода внес Ю.А.Митропольский (см., например, [95]). Обобщение метода усреднения на интегро-дифференциальные уравнения была осуществлена М.Иманалиевым, А.Н.Филатовым (см. [151]) и их учениками. Отметим также, что А.Н.Филатовым развиты важнейшие модификации метода усреднения, например, методика частичного усреднения, которые нашли широкое применение в теории упругости, аэродинамике и физике атмосферы. Метод усреднения оказался эффективным и при исследовании различных типов резонансных задач. Идеи, заложенные в этом методе, позволили М.М.Хапаеву развить теорию устойчивости дифференциальных систем в критическом (или нейтральном) случае, а также теорию устойчивости многочастотных резонансных систем (см., например, [153]).

Сингулярно возмущенным параболическим задачам посвящены [66]-[67], [146]-[147], [133], [137], [140]-[141], [152] и др., где построены асимптотические решения содержащие функции типа пограничного слоя имеющие экспоненциальный характер изменения. Работы [66]-[67] посвящены асимптотическим представлениям решений, а в работе [146]-[147] строится асимптотика типа пограничного слоя и построенная там асимптотика решения содержит функцию типа параболического пограничного слоя.

Существенные трудности возникают при исследовании сингулярно возмущенных задач, рассматриваемых в областях с негладкой границей. Эти трудности обусловлены появлением в окрестностях угловых точек области, дополнительных пограничных слоев, делающих асимптотический анализ изучаемой задачи весьма трудоемким. Развивая идеи метода Вишика-Люстерника-Васильевой-Иманалиева, В.Ф.Бутузов разрабатывает метод угловых погранфункций (см. [27]-[37]). Алгоритмы метода В.Ф.Бутузова позволяют снять указанные выше трудности для широкого класса задач с негладкой границей. Продолжая идеи В.Ф.Бутузова его учениками и последователями изучены различные классы задач имеющий как прикладное значение [28]-[37], [100]-[101], так и часто теоретический характер. Построению асимптотики периодических решений сингулярно возмущенных параболических уравнений посвящены работы А.Б.Васильевой и ее учеников [41]-[47].

Перечисленные выше методы применимы, как правило, к вполне определенным классам сингулярно возмущенных уравнений. Эти классы выделяются системой ограничений, в условиях которых разрабатывается тот или иной метод. Так, метод пограничных функций Вишика - Люстерника - Васильевой - Иманалиева применим к задачам с экспоненциальным пограничным слоем. Соответствующие ограничения диктуются условиями расположения спектра предельного оператора (или матрицы первой вариации, вычисленной на предельном решении) строго в открытой левой полуплоскости. Эти ограничения не позволяют рассмотреть широкий и практически важный класс сингулярно возмущенных задач, описывающих колебательные процессы. Для таких задач не выполняются известные условия экспоненциальной устойчивости точки покоя присоединенной системы. К задачам колебательного типа применяется обычно метод усреднения Крылова - Боголюбова - Митропольского.

Не умаляя достоинств перечисленных выше методов, следует отметить, что каждый из них, хотя и ставит своей целью построение приближенного решения, не изучает принципиальной проблемы-проблемы описания условий, при которых могут быть получены точные (т.е. аналитические по параметру) решения сингулярно возмущенных задач. Целью любого метода является построение асимптотической аппроксимации, т.е. такого приближенного решения $y_{\epsilon,N}(t)$, которое удовлетворяет оценке

$$||y(t,\epsilon) - y_{\epsilon,N}(t)|| < c\epsilon^{N+1}, \quad (0.0)$$

где $y(t,\epsilon)$-точное решение соответствующей сингулярно возмущенной задачи ($y(t,\epsilon)$ не строится, а доказывается или постулируется его существование). Постоянная c в (0.0) зависит, как правило, от N (от порядка аппроксимации). Она может расти с увеличением N, и поэтому приближенное решение $y_{\epsilon,N}(t)$

не стремится к точному при $N \to +\infty$. Условия, при которых имеет место предельный переход $y_{\epsilon,N}(t) \to y(t,\epsilon)$ при $N \to +\infty$, в перечисленных выше методах не обсуждаются.

С шестидесятых годов двадцатого столетия в линейной теории сингулярных возмущений стал развиваться метод регуляризации С.А.Ломова [83], целью которого было создание таких алгоритмов асимптотического интегрирования, которые могли бы применяться с одинаковым успехом ко всем сингулярно возмущенным задачам, независимо от расположения их спектра относительно мнимой оси. В основе развития этого метода лежат спектральная теория переменных операторов и уточненное понятие асимптотического ряда для сингулярно возмущенных задач. Последнее обстоятельство является существенным для понимания целей настоящей работы, и мы позволим остановиться на нем более подробно.

Обратимся к линейной сингулярно возмущенной задаче

$$\epsilon y'(t,\epsilon) = A(t)y(t,\epsilon) + h(t), \quad y(0,\epsilon) = y^0, \forall t \in [0,T], \qquad (0.1)$$

где $y(t,\epsilon) = (y_1(t,\epsilon),\dots,y_n(t,\epsilon))$, $h(t) = (h_1(t),\dots,h_n(t))$, $A(t)$ - оператор, действующий при каждом $t \in [0,T]$ из комплексного пространства C^n в C^n.

Определение 0.1. *Формальный ряд вида*

$$y(t,\epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j y_j(t, \varphi(t, \frac{1}{\epsilon})) \qquad (0.2)$$

будем называть асимптотическим при $\epsilon \to +0$ для решения $y(t,\epsilon)$ задачи (0.1), если существует вектор - функция $\varphi(t,\frac{1}{\epsilon})$, описывающая сингулярную зависимость решения $y(t,\epsilon)$ от параметра ϵ и удовлетворяет следующим двум требованиям:

1) частичная сумма $y_{\epsilon,N}(t) = \sum\limits_{j=0}^{N} \epsilon^j y_j(t,\varphi(t,\frac{1}{\epsilon}))$ этого ряда удовлетворяет неравенству (0.0);

2) ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j y_j(t, \varphi(t, \frac{1}{\epsilon^*})) \qquad (0.3)$$

($\epsilon^* > 0$ - фиксировано) в некоторой окрестности точки $\epsilon = 0$ является сходящимся рядом Тейлора.

Простейший пример скалярной сингулярно возмущенной задачи

$$\epsilon y' = -e^t y + e^{2t}, \qquad y(0,\epsilon) = y^0,$$

решением которой является функция

$$y(t,\epsilon) = e^{\frac{1-e^t}{\epsilon}}(y^0 - 1 + \epsilon) + e^t - \epsilon,$$

показывает, что ряды (0.2), удовлетворяющие уточненному понятию асимптотического ряда, существуют. Действительно, вводя независимую переменную

$$\xi = \varphi(t, \frac{1}{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t e^s ds = \frac{e^t - 1}{\epsilon},$$

наряду с независимой переменной t, для расширенной функции $\tilde{y}(t,\xi,\epsilon)|_{\xi=\varphi(t,\frac{1}{\epsilon})} \equiv y(t,\epsilon)$ получим задачу

$$e^t \partial_\xi \tilde{y}(t,\xi,\epsilon) + \epsilon \partial_t \tilde{y}(t,\xi,\epsilon) = -e^t \tilde{y}(t,\xi,\epsilon) + e^{2t}, \quad (t,\xi) \in [0,1] \times [0,+\infty),$$

$$\tilde{y}(t,\xi,\epsilon)|_{t=\xi=0} = y^0.$$

Решение этой задачи будем определять в виде ряда (0.2). Для коэффициентов этого ряда имеем задачи

$$e^t \partial_\xi y_0(t,\xi) = -e^t y_0(t,\xi) + e^{2t}, \quad y_0(t,\xi)|_{\xi=0} = p_0(t), \quad p_0(t)|_{t=0} = y^0,$$

$$e^t \partial_\xi y_1(t,\xi) = -e^t y_1(t,\xi) - \partial_t y_1(t,\xi), \quad y_1(t,\xi)|_{\xi=0} = p_1(t), \quad p_1(t)|_{t=0} = 0,$$

$$e^t \partial_\xi y_2(t,\xi) = -e^t y_2(t,\xi) - \partial_t y_1(t,\xi), \quad y_2(t,\xi)|_{\xi=0} = p_2(t), \quad p_2(t)|_{t=0} = 0,$$

из которых найдем

$$y_0(t,\xi) = c_0(t)e^{-\xi} + v_0(t), \quad v_0(t) = e^t, \quad c_0(t) = y^0 - v_0(0),$$

$$y_1(t,\xi) = c_1(t)e^{-\xi} + v_1(t), \quad v_1(t) = -1, \quad c_1(t) = -v_1(0) = 1,$$

$$y_2(t,\xi) = c_2(t)e^{-\xi} + v_2(t), \quad v_2(t) = 0, \quad c_2(t) = 0.$$

Таким образом члены ряда (0.2) обрываются начиная с номера $j = 2$, т.е.имеем

$$\tilde{y}(t,\xi,\epsilon) = (y^0 - 1)e^{-\xi} + e^t + \epsilon(e^{-\xi} - 1).$$

Полагая сюда $\xi = \frac{e^t-1}{\epsilon}$ получим решение исходной задачи, причем оно совпадает с точным решением. Здесь роль функции $\varphi(t, \frac{1}{\epsilon})$ играет $\frac{e^t-1}{\epsilon}$. При каждом фиксированном $\epsilon = \epsilon^*$ в $\varphi(t, \frac{1}{\epsilon})$ ряд (0.3) является целой функцией параметра ϵ.

Метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач в работах [38]-[39], [132], [60] обобщены на операторные и абстрактные уравнения и на уравнения в гильбертовом пространстве. Развитием метода в сторону абстрактных уравнений явилось применение к уравнениям с непрерывным спектром и необратимости предельного оператора [23], [57], [61], [74].

Асимптотическому интегрированию дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения обращались многие авторы [98], с позиции метода регуляризации С.А.Ломова эта задача решена в работах А.Г.Елисеева [55]-[56], его методика использованы при изучении различных классов задач.

Особый интерес вызывают задачи с нестабильным спектром, когда точки спектра $A(t)$ при разных значениях t имеют разные свойства, например обращаются в нуль в отдельных точках или разные точки спектра слипаются или пересекаются. Задачи с нестабильным спектром изучались разными авторами с разных позиций [149] и другие, методом регуляризации до сих пор изучались обыкновенные дифференциальные уравнения (см.[23],[57], [58],[61],[74]). В [57] установлено, что если нарушены условия стабильности точек спектра, то кроме экспоненциальных существенно особых сингулярностей в решении неоднородного уравнения возникают еще два вида сингулярностей

$$\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau\right)ds, \qquad \int\limits_0^t s\exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau\right)ds,$$

которые при $\epsilon \to 0$ имеют степенной характер убывания.

Метод регуляризации в условиях стабильности спектра на нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений впервые развит В.Ф.Сафоновым [134]-[135], дальнейшие развития получил в работах [51]-[52], [76]-[78],[89].

Установлены интересные связи между методом усреднения и методом регуляризации (см. [51], [52]). Теорема Тихонова о предельном переходе обобщена на случай чисто мнимого спектра матрицы первой вариации (см. [138]-[139]).

Обобщению метод регуляризации на интегральные, интегро - дифференциальные уравнения были выполнены в работах [21]-[22], [103]-[106], [136] и др., в настоящее время под руководством В. Ф. Сафонова ведутся интенсивные работы по построению асимптотических решений для интегральных и интегро - дифференциальных уравнений с быстро изменяющимися ядрами (см. [21]-[22],[136]).

Понятно, что существенным моментом в построении таких рядов является точное описание сингулярностей $\varphi(t, \frac{1}{\epsilon})$ в решении задачи (0.1). Если воспользоваться другим описанием сингулярностей, то будем получать расходящиеся в обычном смысле ряды (0.2). В методе регуляризации Ломова построение функций $\varphi(t, \epsilon)$ описано для широкого класса линейных задач типа (0.1). Эти функции строятся по спектру оператора $A(t)$ и названы регуляризирующими функциями, а сами ряды (0.2), удовлетворяющие требованиям 1), 2) и определения 0.1 - регуляризованными асимптотическими рядами.

Подход, базирующийся на уточненном понятии асимптотического ряда, позволяет получать в линейном случае не только асимптотические, но и точные решения сингулярно возмущенных задач в виде многочленов по ϵ, рядов Тейлора (или рядов Лорана) по степеням ϵ [81].

Ранее, с позиции метода регуляризации, сингулярно возмущенные параболические задачи изучались в работах [83] и др. В них малый параметр ϵ стоит перед временной производной и предельный при $\epsilon \to 0$ эллиптический дифференциальный оператор имеет спектр. Уравнение с малым параметром при пространственной переменной изучено в [83], стр.312. Там изучается периодическая по времени краевая задача, в которой предельный оператор с условием периодичности по времени t имеет спектр. Метод Ломова обобщены на различные сингулярно возмущенные параболические задачи, когда малый параметр входит множителем при производной по времени (см. например:[74]- [75], [58]-[59]). В этом случае, обобщение метода регуляризации на различные классы сингулярно возмущенных задач, осуществлялись по спектру предельного оператора. Однако, с теоретической и практической стороны представляют интерес, сингулярно возмущенные задачи, когда предельный оператор не имеет спектр. С.А.Ломов в своей монографии [83], (стр. 328) поставил проблему построить регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной параболической задачи при отсутствии спектра предельного оператора. Второй проблемой поставленной С.А.Ломовым была задача построения регуляризованной асимптотики решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными параболического типа с малым параметром при всех производных в области с угловыми точками.

Данная диссертационная работа посвящена решению перечисленных проблем поставленных Ломовым. Здесь исследуются ранее не изученные, с позиции метода регуляризации, краевые задачи для дифференциальных уравнений параболического типа с малым параметром при пространственной производной, а также с малым параметром стоящим при всех производных. Разработанный алгоритм позволяет строить асимптотику решения, содержащие параболические и угловые погранслойные функции. Впервые в асимптотической теории, такие пограничные слои описываются специальной функцией, называемой *дополнительным интегралом вероятности* и обозначаемый через $erfc(x)$.

1.2 Математические модели, приводящие к сингулярно возмущенным параболическим задачам

В математической модели распределенных кинетических систем каждая пространственная точка представляет собой генератор колебаний, а связь между этими генераторами осуществляется посредством диффузии (или теплопроводности) [93]. Примерами такого рода распределенных систем могут служить химические реакции, экологические системы, некоторые полупроводниковые конструкции и др.

Дифференциальное уравнение, описывающее такую систему, имеет вид

$$D\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + F(x,t),$$

где u - вообще говоря, вектор; x - совокупность пространственных переменных. Если рассматривается случай слабой пространственной связи, то величина D мала. При $D = 0$ имеем обыкновенную динамическую систему (x играет роль параметра), достаточно хорошо изученную в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Если D хотя и мало, но не равно нулю, то неизбежно появляются граничные условия, которые не могут быть учтены в решении обыкновенного дифференциального уравнения. При малых D задача является сингулярно возмущенной, характеризующейся наличием пограничного слоя.

Модельные уравнения диссипации, конвекции и кинетики Перенос тепла (вещества) теплопроводностью (диффузией) и конвекцией описывают с помощью дифференциальных уравнений параболического типа. Общее модельное уравнение диссипации, конвекции и кинетики запишется в виде

$$\partial_t u = \nu\partial_x^2 u - a\partial_x u + bu + f(x,t).$$

Здесь ν, a, b - постоянные коэффициенты, $\nu > 0$. Первое слагаемое в правой части уравнения соответствует переносу тепла теплопроводностью (или вещества диффузией), второе - конвективному переносу, третье - источнику, пропорциональному температуре или концентрации ("кинетический член"), четвертое - внешнему источнику.

Первая краевая задача для уравнения соответствующая одномерному распространению тепла в ограниченной среде при заданных значениях температур на границах, формулируется следующим образом:

$$0 \le x \le X, \qquad 0 \le t \le T, \qquad u(0,x) = \varphi(x);$$

$$u(t,0) = f_0(t), \qquad u(t,X) = f_1(t).$$

Здесь f_0, f_1 - известные (граничные) функции.

Математическая модель тепломассообмена во взаимопроникающихся средах. Распространение тепла в турбулизированной жидкости с сильно устойчивой стратификацией во взаимопроникающих средах описывается дифференциальным уравнением параболического типа с малым параметром при старшей производной [?]. Такая жидкость представляется в виде изолированных турбулентных пятен и ламинарных прослоек, причем каждый из компонентов обладает своими коэффициентом теплопроводности. Если ввести в каждой точке такой среды два поля температур и предположить, что интенсивность потока тепла от одной фазы к другой пропорциональна разности температур, то в случае интенсивного теплообмена получается уравнение

$$\epsilon^2 \left(\partial_t z(x,t,\epsilon) - A(x,t)\partial_x^2 z(x,t,\epsilon)\right) = R(x,t)z(x,t,\epsilon), \quad t \in [0,T], \quad x \in [0,l].$$

Математические модели в квантовой механики. При квантомеханическом изучении нерелятивистских систем в двумерном пространстве-времени, состоящем в рассмотрении частицы (массы m) в поле с потенциалом $V(x)$, постилируется, что состояние системы в момент времени t полностью определяется волновой функцией $\Psi(t,x)$, которая является решением *временного уравнения Шредингера* [94]:

$$i\,\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx}\Psi + V(x)\Psi,$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ и h- постоянная Планка. Константы $\hbar$, $\frac{\hbar^2}{2m}$ играю исключительно важную роль в физике. Как отмечена в работе [94], остаются не изученными, когда эти константы малы.

1.3 Вспомогательный материал

В данной работе часто будем использовать оценки некоторых интегралов, поэтому ради удобства они сформулированы в виде следующих лемм:

Л е м м а 0.1. *Для любого* $\xi > 0$ справедлива оценка

$$erfc(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\xi}^{\infty} \exp{(-s^2)} ds < 2 \ \exp{(-\frac{\xi^2}{2})}.$$

Доказательство. Из цепочки неравенств

$$erfc(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\xi}^{\infty} \exp{(-\frac{s^2}{2})} \exp{(-\frac{s^2}{2})} ds \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp{(-\frac{\xi^2}{2})} \int\limits_{0}^{\infty} \exp{(-\frac{s^2}{2})} ds < 2 \ \exp{(-\frac{\xi^2}{2})}$$

вытекает доказательство леммы.

Л е м м а 0.2. *Пусть*

$$|f(\xi,t)| < c \ exp(-\frac{\xi^2}{8t}) \ \ \forall (\xi,t) \in \overline{Q} = [0,+\infty) \times [0,T].$$

Тогда для интеграла

$$I(\xi,t) = \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(s,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} [exp(-\frac{(\xi-s)^2}{4(t-\tau)}) - exp(-\frac{(\xi+s)^2}{4(t-\tau)})] ds d\tau$$

имеет место оценка

$$|I(\xi,t)| < cexp(-\frac{\xi^2}{8t}), \ \forall (\xi,t) \in \overline{Q}.$$

Доказательство. Произведя в интеграле $I(\xi,t)$ замену

$$z = \frac{s \pm \xi}{2\sqrt{t-\tau}}, \qquad dz = \frac{ds}{2\sqrt{t-\tau}}$$

и используя свойства модулей получим

$$|I(\xi,t)| < c\ |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\{\int\limits_{-\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{(\xi+2z\sqrt{t-\tau})^2}{8\tau}-z^2)dzds+$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{(\xi-2z\sqrt{t-\tau})^2}{8\tau}-z^2)dz\}d\tau|.$$

Замечая, что $exp(-z^2) < exp(-\frac{z^2}{2})$ перепишем

$$|I(\xi,t)| < c\ |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\{\int\limits_{-\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{z^2}{2}-\frac{\xi^2+4\xi z\sqrt{t-\tau}+4z^2(t-\tau)}{8\tau})dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{z^2}{2}-\frac{\xi^2-4\xi z\sqrt{t-\tau}+4z^2(t-\tau)}{8\tau})dz\}d\tau=$$

$$=c\ |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t exp(-\frac{\xi^2}{8\tau})\{\int\limits_{-\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{tz^2+\xi z\sqrt{t-\tau}}{2\tau}dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} exp(-\frac{tz^2-\xi z\sqrt{t-\tau}}{2\tau}dz\}d\tau\}|.$$

Увеличивая в обеих интегралах пределы интегрирования до $-\infty$ получим

$$|I(\xi,t)| < c\ |\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t exp(-\frac{\xi^2}{8\tau})[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{t}{2\tau}z^2+\frac{\xi\sqrt{t-\tau}}{2\tau}z)dzd\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{t}{2\tau}z^2-\frac{\xi\sqrt{t-\tau}}{2\tau}z)dzd\tau]|.$$

Воспользовавшись формулой 3.323.2 из [50]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-p^2x^2\pm qx)dx = exp(\frac{q^2}{4p^2})\frac{\sqrt{\pi}}{p}$$

получим

$$|I(\xi,t)| < 2c \mid \int_0^t exp(-\frac{\xi^2}{8\tau})\sqrt{\frac{2\tau}{t}} exp(-\frac{\xi^2(t-\tau)2\tau}{16t\tau^2})d\tau| =$$

$$= c\ exp(-\frac{\xi^2}{8t})\int_0^t \sqrt{\frac{2\tau}{t}}d\tau < c\ exp(-\frac{\xi^2}{8t}).$$

Лемма доказана.

Для первой краевой задачи

$$Lu(x,t) \equiv \partial_t u(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\partial_{x_i,x_j}u(x,t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\partial_{x_i}u(x,t) +$$

$$+a(x,t)u(x,t) = f(x,t), (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \psi_0(x), \quad u(x,t)|_{S_T} = \psi(s,t), \tag{1.1}$$

в работе [80] доказан принцип максимума. Здесь $Q_T = \Omega \times (0,T)$, S_T - боковая поверхность Q_T, Ω - некоторая ограниченная область n - мерного евклидова пространства.

Определение. Классическим решением *задачи (1.1) называется функция $u(x,t)$ непрерывная в $\overline{Q}_T$, имеющая непрерывные производные u_t, u_x, u_{xx} в Q_T и удовлетворяющая во всех точках Q_T уравнению (1.1), а при $t = 0$, $(x,t) \in S_T$ начальным и граничным условиям (1.1).*

В данной диссертационной работе, при оценке остаточного члена, всюду будет использован этот принцип максимума, поэтому мы посчитали нужным привести формулировку и некоторые разновидности оценок, полученных из принципа максимума.

Теорема 0.1 (Принцип максимума). *Пусть $u(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1) в области Q_T, причем коэффициенты и свободный член суть ограниченные функции и $\forall\ \xi_i \quad \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x,t)\xi_j\xi_i \geq 0$. Тогда для $u(x,t)$ при любом $t_1 \in [0,T]$ справедлива оценка*

$$\sup_{\lambda > a_0} \min\{0; \min_{\Gamma_{t_1}}(\psi(x,t)\exp(\lambda(t_1 - t)); \frac{1}{\lambda - a_0}\min_{Q_{t_1}}(f(x,t)\exp(\lambda(t_1 - t))\} \leq u(x,t_1)$$

$$\leq \inf_{\lambda > a_0} \max\{0; \max_{\Gamma_{t_1}}(\psi \exp(\lambda(t_1 - t)); \frac{1}{\lambda - a_0} \max_{Q_{t_1}}(f(x,t) \exp(\lambda(t_1 - t))\}, \quad (1.2)$$

где число a_0 *равно*

$$a_0 = \max_{Q_{t_1}}(-a(x,t)) = -\min_{Q_{t_1}} a(x,t),$$

а ψ *на* Γ_0 *совпадает с* $\psi_0(x)$ *из начального условия и на* S_T *- с функцией* $\psi(s,t)$ *из граничного условия.*

Здесь $Q_{t_1} = \Omega \times (0, t_1)$, через Γ_{t_1} обозначена сумма боковой поверхности S_{t_1} и нижнего основания $\Gamma_0 = \{(x,t) : \ x \in \Omega, t = 0\}$.

Для доказательства этого принципа переходят от функции $u(x,t)$ к новой функции $v(x,t)$ с помощи подстановки

$$u(x,t) = v(x,t) \exp(\lambda t)$$

доказывается оценка

$$\max_{Q_{t_1}} v(x,t) \leq \max\{0; \max_{\Gamma_{t_1}} v(x,t); \max_{Q_{t_1}} \frac{f(x,t)\exp(-\lambda t)}{a(x,t) + \lambda}\},$$

из которой следует

$$u(x,t_1) \leq e^{\lambda t} \max\{0; \max_{\Gamma_{t_1}}(u(x,t)e^{-\lambda t}); \frac{1}{\lambda - a_0} \max_{Q_{t_1}}(f(x,t)e^{-\lambda t})\}, \quad (1.3)$$

где $\lambda > a_0$.

Из этой оценки получена и следующая форма оценки

$$|u(x,t_1)| \leq \max_{\Gamma_{t_1}} |\psi(x,t) \exp(a_0(t_1 - t))| + t_1 \max_{Q_{t_1}} |f(x,t) \exp(a_0(t_1 - t))|. \quad (1.4)$$

Для остаточных членов $R_\epsilon(x,y,t)$, изучаемых в диссертации задач, получаем краевые задачи, которые в общем виде запишутся:

$$\epsilon^\alpha \partial_t R_\epsilon(x,y,t) - \epsilon^2 a(x) \partial_x^2 R_\epsilon(x,y,t) - L(y,t) R_\epsilon(x,y,t) = g_\epsilon(x,y,t)$$

$$(x,y,t) \in Q_1, \quad R_\epsilon(x,y,t)\,|_{t=0} = R_\epsilon(x,y,t)\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

где α принимает значение равное либо нулю, либо единице.

Л е м м а 0.3. *Пусть* $a(x) > 0 \ \ \forall \ x \in [0,1]$ *и свободный член уравнения*

(1.5) непрерывны в $\overline{Q}_1$, тогда для решение задачи (1.5) при любом $t_1 \in [0, T]$ справедлива оценка

$$|R_\epsilon(x, y, t_1)| \leq t_1 \max_{Q_{t_1}} |g_\epsilon(x, y, t) \exp(a_0(t_1 - t))| \,. \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия леммы, коэффициент $a(x) > 0$ и соответствующая уравнению (1.5) квадратичная форма неотрицательна, т.е.

$$\epsilon^2 a(x)\xi_1^2 + \xi_2^2 \;\geq\; 0.$$

Этим мы устанавили справедливость принципа максимума (теорема 0.1) для задачи (1.5), поэтому имеет место оценка (1.4). Из этой оценки, с учетом начального условия, получим требуемую оценку (1.6). Лемма доказана.

Отметим, что теорема существования единственного классического решения дифференциальных уравнений параболического типа без малого параметра доказана в работе [80] (см.теорему 16.2 параграфа 16 главы IV).Для изучаемых в данной работе уравнений с малым параметром при производных предполагаем существования единственного классического решения.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧИ, КОГДА ПРЕДЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР НЕ ИМЕЕТ СПЕКТР

Глава посвящена изучению первой краевой задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения параболического типа

$$L_\epsilon u(x,y,t,\epsilon) \equiv \partial_t u(x,y,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x,y)\Delta u(x,y,t,\epsilon) =$$

$$= f(x,y,t),\ (x,y,t) \in \Omega_2, \qquad (I)$$

$$u(x,y,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x,y), u|_{\partial\Omega_2} = 0. \qquad (II)$$

Эта задача интересна тем, что предельный при $\epsilon \to 0$ оператор не имеет спектр. Регуляризация сингулярно возмущенных задач, изученных ранее методом Ломова, осуществлялись по спектру предельного оператора. В данном случае не ясно, что будет отвечать за сингулярность решения, т.е. если не спектр, то с помощью каких функций необходимо вводить регуляризующие переменные? Нами выяснено [108], что в таких задачах за сингулярность отвечает коэффициент при старшей производной, т.е. регуляризующие функции выражаются через функцию $a(x)$, как решение задачи Коши для простейшего обыкновенного дифференциального уравнения.

В параграфе 2.1 главы изучается скалярный случай задачи (I),(II), а в параграфе 2.2 изучается двумерная задача. Параграф 2.3 посвящен изучению временного уравнения Шредингера при малых постоянных Планка. Показано, что асимптотика решения задачи (I),(II) содержит только параболические погранслойные функции.

2.1 Скалярная задача

В данном параграфе изучается следующая задача:

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon) \equiv \partial_t u(x,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) - b(x,t)u(x,t,\epsilon) = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega_1,\ u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x),\quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u(x,t,\epsilon)|_{x=1} = 0. \qquad (2.1)$$

Строится регуляризованная асимптотика решения этой задачи, которая содержит функцию типа параболического пограничного слоя, которая описывается специальной функцией $erfc(\frac{\varphi(x)}{\epsilon\sqrt{t}})$.

Задачу (2.1) будем изучать при следующих предположениях:

1. функции $h(x)$, $a(x)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ в $\overline{\Omega}_1$ имеют по переменной x требуемое число производных;
2. $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;
3. выполняются согласования начальных и граничных условий $h(0) = h(1) = 0$.

2.1.1 Выбор регуляризующей функции

Чтобы показать зависимость решения от сложной переменной, принимаемой нами в качестве регуляризующей, рассмотрим задачу

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2 \partial_x^2 u(x,t,\epsilon) + 1 + t^2,\ (0 < t \le T, 0 < x < \infty), \qquad (2.2)$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = 0,\quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = h = const.$$

Отметим, что эта задача не относится к классу задач изучаемой в работе, в смысле выполнения условий согласований, но выполняет демонстрационную функцию. Решение этой задачи можно выписать явно

$$u(x,t,\epsilon) = \frac{x}{2\epsilon\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{h}{\sqrt{(t-\tau)^3}} exp(-\frac{x^2}{4\epsilon^2(t-\tau)})d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\epsilon\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \frac{1+\tau^2}{\sqrt{t-\tau}} \left[exp(-\frac{(x-s)^2}{4\epsilon^2(t-\tau)}) - exp(-\frac{(x+s)^2}{4\epsilon^2(t-\tau)})\right] ds d\tau.$$

Произведем замену в первом интеграле

$$z = \frac{x}{2\epsilon\sqrt{t-\tau}}, \quad dz = \frac{x d\tau}{4\epsilon\sqrt{(t-\tau)^3}},$$

а во втором интеграле

$$y = \frac{x \pm s}{2\epsilon\sqrt{t-\tau}}, \quad dy = \pm\frac{ds}{2\epsilon\sqrt{t-\tau}}.$$

После некоторых преобразований, решение задачи (2.2) перепишется

$$u(x,t,\epsilon) = h\ erfc(\frac{x}{2\epsilon\sqrt{t}}) + \int\limits_0^t (1+\tau^2)d\tau -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (1+\tau^2) \int\limits_{\frac{x}{2\epsilon\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} \exp{(-y^2)} dy d\tau.$$

Из найденного решения задачи (2.2) заключаем, что решение сингулярно возмущенной задачи (2.1) зависит от переменных $x,\ t,\ \xi = \frac{x}{2\epsilon\sqrt{t}} : u(x,t,\epsilon) = F(x,t,\xi,\epsilon)$. Структура третьего аргумента $\xi = \frac{x}{2\epsilon\sqrt{t}}$ говорит о том, что значение $\epsilon = 0$ порождает существенно особую точку функции $F(x,t,\xi,\epsilon)$.

В силу сказанного, сохраняя этот аргумент, как единое целое, мы можем построить асимптотику решения задачи (2.1) в виде разложения по неотрицательным степеням малого параметра ϵ. Для регуляризации задачи, наряду с независимыми переменными $x,\ t$ вводим регуляризующие переменные по формулам

$$\xi_j = \varphi_j(x,\epsilon), \quad j = 1,2, \quad \varphi_1(0,\epsilon) = \varphi_2(1,\epsilon) = 0 \tag{2.3}$$

и будем изучать вместо искомого решения $u(x,t,\epsilon)$ задачи (2.1) некоторую расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\xi,\epsilon), \quad \xi = (\xi_1,\xi_2)$. От расширенной функции потребуем, чтобы ее сужение на множество $\xi = \varphi(x,\epsilon), \quad \varphi(x,\epsilon) = (\varphi_1(x,\epsilon),\varphi_2(x,\epsilon)),\ \forall x \in [0,1]$ тождественно совпадало с решением исходной задачи (2.1), т.е.

$$\widetilde{u}(x,t,\xi,\epsilon)|_{\xi=\varphi(x,\epsilon)} \equiv u(x,t,\epsilon). \tag{2.4}$$

В этих условиях найдем

$$\partial_x u(x,t,\epsilon) \equiv (\partial_x \widetilde{u}(x,t,\xi,\epsilon) + \sum_{j=1}^{2} \varphi_j'(x,\epsilon)\partial_{\xi_j}\widetilde{u}(x,t,\xi,\epsilon))|_{\xi=\varphi(x,\epsilon)},$$

$$\partial_x^2 u \equiv (\partial_x^2 \widetilde{u} + D_\xi \widetilde{u} + L_\xi \widetilde{u})|_{\xi=\varphi(x,\epsilon)}, \qquad D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} (\varphi_j'(x,\epsilon)^2 \partial_{\xi_j}^2,$$

$$L_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} L_{\xi,j}, \qquad L_{\xi,j} \equiv 2\varphi_j'(x,\epsilon)\partial_{x,\xi_j}^2 + \varphi_j''(x,\epsilon)\partial_{\xi_j}.$$

Учитывая это соотношение и (2.4), а также задачу (2.1), для определения $\widetilde{u}(M,\epsilon)$ естественно поставить следующую задачу:

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u}(M,\epsilon) \equiv \partial_t \widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2 a(x) D_\xi \widetilde{u}(M,\epsilon) + b(x,t)\widetilde{u}(M,\epsilon) -$$

$$-\epsilon L_1 \widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2 L_x \widetilde{u}(M,\epsilon) = f(x,t), M = (x,t,\xi_1,\xi_2) \in Q_1, \tag{2.5}$$

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \quad \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{x=j-1,\xi_j=0} = 0, \quad j = 1,2, \tag{2.6}$$

где

$L_1 \equiv a(x)L_\xi, \quad L_x \equiv a(x)\partial_x^2.$

Расширенное уравнение (2.5) должно наследовать структуру исходного уравнения (2.1), это обеспечивается главным членом, который задается выражением $\epsilon^2 a(x) D_\xi \widetilde{u}(M,\epsilon)$. Здесь присутствует произвол в виде производной регуляризующей функции $\varphi(x,\epsilon)$, которую мы можем выбрать так, чтобы уравнение, с приведенным главным членом, приняло самый простейший вид. Это обеспечивается, если регуляризующая функция будет выбрана, как решение следующей задачи:

$$\epsilon^2 a(x)(\varphi_j'(x,\epsilon))^2 = 1, \qquad \varphi(j-1,\epsilon) = 0, \quad j = 1,2,$$

т.е.

$$\varphi_1(x,\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \equiv \frac{\psi_1(x)}{\epsilon},$$

$$\varphi_2(x,\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon}\int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \equiv \frac{\psi_2(x)}{\epsilon}.$$

Только таким образом определенные регуляризующие функции позволяют регуляризовать сингулярно возмущенную задачу (1.1), причем выполняется условие

$$(\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u})|_{\xi=\varphi(x,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon). \tag{2.7}$$

Используя явный вид регуляризующих функций, уравнение (2.5) перепишем

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u} \equiv T\widetilde{u} - \epsilon L_1 \widetilde{u} - \epsilon^2 L_x \widetilde{u} = f(x,t), \tag{2.8}$$

$$T \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j} + b(x,t), L_1 \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2} L_{\xi,j}.$$

Задача (2.8),(2.6) регулярна по ϵ при $\epsilon \to 0$ и будем искать решение этой задачи в виде разложения

$$\widetilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i u_i(M) + R_{\epsilon,n}(M). \tag{2.9}$$

Подставим это разложение в задачу (2.8),(2.6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, тогда для коэффициентов разложения (2.9) получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0(M) = f(x,t), \quad u_0(M)|_{t=0} = h(x), \quad u_0(M)|_{x=j-1,\xi_j=0} = 0,$$

$$Tu_1(M) = L_1 u_0(M), \quad u_1(M)|_{t=0} = 0, \quad u_1(M)|_{x=j-1,\xi_j=0} = 0,$$

$$Tu_i(M) = L_1 u_{i-1}(M) + L_x u_{i-2}(M),$$

$$u_i(M)|_{t=0} = 0, u_i(M)|_{x=j-1,\xi_j=0} = 0, \tag{2.10}$$

$$R_{\epsilon,n}(M) = \epsilon^{n+1} g_{\epsilon,n}(M), R_{\epsilon,n}(M)|_{t=0} = R_{\epsilon,n}(M)|_{x=j-1,\xi_j=0} = 0, \tag{2.11}$$

$$j = 1,2, \quad g_{\epsilon,n}(M) = L_1 u_n(M) + L_x(u_{n-1}(M) + \epsilon u_n(M)).$$

2.1.2 Класс разрешимости итерационных задач

Итерационные задачи (2.10) имеет бесчисленное множество решений, поэтому мы выделим класс функций, в котором каждая из этих задач однозначна разрешима. Структура выписанного выше решения простейшей задачи теплопроводности наталкивает на то, что естественным классом функции, в котором будут решаться итерационные задачи, является

$$U = \{z(M) : z(M) = v(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}),$$

$$v(x,t), c_j(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1),\ \forall M = (x,t,\xi_1,\xi_2) \in \overline{Q}_1\}.$$

Для функции $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$, на основании леммы 0.1 справедлива оценка параболического пограничного слоя:

$$\left| erfc\left(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}\right)\right| < c\ \exp\left(-\frac{\xi_j^2}{8t}\right).$$

Каждое из итерационных уравнений в общем виде можно записать

$$Tu(M) = p(M). \tag{2.12}$$

Теорема 2.1 *Пусть выполнены условия 1)-3) и правая часть*

$$p(M) = p_1(x,t) + \sum_{j=1}^{2} p_{2,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}) \in U.$$

Тогда уравнение (2.12) разрешимо в классе функций U, тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения

$$\partial_t v(x,t) = b(x,t)v(x,t) + p_1(x,t),$$

$$\partial_t c_j(x,t) = b(x,t)c_j(x,t) + p_{2,j}(x,t). \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть правая часть $p(M)$ уравнения (2.12) принадлежит классу U, т.е. представима в виде

$$p(M) = p_1(x,t) + \sum_{j=1}^{2} p_{2,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}) \tag{2.14}$$

и пусть уравнения (2.13) разрешимы. Покажем, что функция

$$u(M) = v(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}) \qquad (2.15)$$

будет решением уравнения (2.12). Умножим второе уравнение (2.13) на $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$ и просуммируем по j от 1 до 2, затем сложим с первым уравнением. Полученое тождество показывает, что функция (2.15) является решением уравнения (2.12).

Пусть теперь функция (2.15) является решением уравнения (2.12). Покажем теперь, что функции $v(x,t)$ и $c_j(x,t)$ будут решениями уравнений (2.13). Подставим (2.15) в уравнение (2.12), затем принимая во внимание представление правой части (2.14), получим тождества (2.13). Теорема доказана.

Решение уравнения (2.12), построенное в теореме 2.1, содержит произвол. В следующей теореме устанавливается однозначность построенного в U решения.

Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда при дополнительных условиях*

a) $\quad u|_{t=0} = h(x), u|_{x=j-1,\xi=0} = 0, \quad j = 1, 2,$

b) $\quad L_1 u(M) = 0$

уравнение (2.12) однозначно разрешимо в U*.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда уравнение (2.12) имеет решение представимое в виде (2.15). Подчиняя эту функцию условию a) теоремы 2.2, получим

$$v(x,0) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})|_{t=0} = h(x),$$

$$v(0,t) + c_1(x,t)|_{x=0} = 0,$$

$$v(1,t) + c_2(x,t)|_{x=1} = 0.$$

Если

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0,$$

то будем полагать $\psi(\frac{z}{t})=0$ при $t=0,\ z\neq 0$. Поэтому при $t=0$ функция $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль, поэтому первое соотношение выполняется при любых значениях функций $c_j(x,0),\ \ j=1,2$. Тогда из предыдущих соотношений получим

$$v(x,0)=h(x),\ c_j(x,t)|_{t=0}=c_j^0(x).$$

$$c_j(x,t)|_{x=j-1}=-v(j-1,t),j=1,2, \tag{2.16}$$

где $c_j^0(x)$- произвольная функция.

Из второго уравнения (2.13), при начальном условии (2.16), найдем

$$c_j(x,t)=c_j^0(x)exp(B(x,t))+H_j(x,t), \tag{2.17}$$

где $B(x,t)$ и $H_j(x,t)$ известные функции. Подставим $c_j(x,t)$ в условие b):

$$L_1u(M)=a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\xi,j}c_j(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})=$$

$$=a(x)\sum_{j=1}^{2}[D_{x,j}^1c_j^0(x,t)+H_{1,j}(x,t)]\partial_{\xi_j}\left(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})\right)=0,$$

$$D_{x,j}^1\equiv\frac{d}{dx}+K_j(x,t),\ H_{1,j}(x,t)=\frac{1}{2\varphi_j'(x)}exp(-B(x,t))H_j(x,t),$$

$$K_j(x,t)=\frac{1}{2\varphi_j'(x)}\{2\varphi_j'(x)exp(-B(x,t))\frac{d}{dx}[exp(B(x,t))]+\varphi_j''(x)\}.$$

В силу произвольности функции $c_j^0(x)$, обеспечивая выполнение условия b), положим

$$D_{x,j}^1c_j^0(x)+H_{1,j}(x,t)=0,$$

решая которое при начальном условии

$$c_j^0(x)|_{x=j-1}=-exp(-B(j-1,t)[v(j-1,t)+H_j(j-1,t)],j=1,2,$$

определяемом из (2.16), найдем $c_j^0(x)$. Затем, подставив выражение этой функции в (2.17), определим $c_j(x,t)$. Далее, решая первое уравнение из

(2.13), при соответствующих начальных условиях, находим $v(x,t)$. Таким образом однозначно определили решение уравнения (2.12) в виде (2.14). Здесь t принимается как параметр. Теорема доказана.

2.1.3 Определения коэффициентов разложения (2.9)

Используя теоремы 2.1 и 2.2 последовательно найдем решения итерационных задач (2.10), $i \geq 0$. Правая часть уравнения (2.10,$i = 0$) принадлежить классу U, поэтому, на основании теоремы 2.1, оно имеет решение, представимое в виде

$$u_0(M) = v_0(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}).$$

При этом соотношения (2.13) запишутся в виде

$$\partial_t v_0(x,t) = b(x,t)v_0(x,t) + f(x,t),$$

$$\partial_t c_{0,j}(x,t) = b(x,t)c_{0,j}(x,t),$$

а краевые условия для этих уравнений, на основании (2.16), получаем в виде

$$v_0(x,t)|_{t=0} = h(x), \quad c_{0,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{0,j}(x),$$

$$c_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t).$$

Решая полученные задачи определяем $v_0(x,t)$, а также функцию

$$c_{0,j}(x,t) = c^0_{0,j}(x) exp(B(x,t)),$$

$$B(x,t) = exp(\int_0^t b(x,\tau)d\tau),$$

которая содержит произвольную функцию $c^0_{0,j}(x)$. Как увидим ниже, входящая сюда произвольная функция обеспечивает выполнение условия b) теоремы 2.2. Если удовлетворить условие b), то относительно $c^0_{0,j}(x)$ получим уравнение $D^1_{x,j} c^0_{0,j}(x) = 0$, решив которого при начальном условии $c^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t)exp(-B(j-1,t))$ однозначным образом определим главный член асимптотики. Здесь t принимается как параметр.

Следующее итерационное решение (2.10,$i = 1$) однородное, поэтому однородными будут и уравнения из (2.13), а начальные условия для этих уравнений запишутся

$$v_1(x,t)|_{t=0} = 0,\ c_{1,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{1,j}(x),$$

$$c_{1,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_1(j-1,t).$$

Решая задачу относительно $v_1(x,t)$ получим, что $v_1(x,t) \equiv 0$, тогда начальное условие для $c^0_{1,j}(x)|_{x=j-1} = 0$ и уравнение для ее нахождения будет однородным. Поэтому $c_{1,j}(x,t) \equiv 0$, следовательно, мы получим $u_1(M) \equiv 0$.

Рассмотрим итерационное уравнение (2.10,$i = 2$), это уравнение имеет правую часть

$$F_2(M) = L_1 u_1(M) + L_x u_0(M) = a(x)[\partial_x^2 v_0(x,t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \partial_x^2 c_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})].$$

По теореме 2.1 уравнение (2.10,$i = 2$) с такой правой частью имеет решение представимое в виде

$$u_2(M) = v_2(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{2,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})$$

тогда и только тогда, когда функции $v_2(x,t)$, $c_{2,j}(x,t)$ будут решениями уравнений

$$\partial_t v_2(x,t) = b(x,t) v_2(x,t) + a(x) \partial_x^2 v_0(x,t),$$

$$\partial_t c_{2,j}(x,t) = b(x,t) c_{2,j}(x,t) + a(x) \partial_x^2 c_{0,j}(x,t).$$

По теореме 2.2, удовлетворяя $u_2(M)$ условию a), для этих уравнений определяем начальные условия

$$v_2(x,t)|_{t=0} = 0, \quad c_{2,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{2,j}(x),$$

$$c_{2,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_2(j-1,t), \qquad j = 1, 2.$$

Задача относительно функции $v_2(x,t)$ имеет непрерывно дифференцируемое решение, а решение задачи относительно $c_{2,j}(x,t)$ можно записать в виде

$$c_{2,j}(x,t) = c^0_{2,j}(x)exp(B(x,t)) + H_{2,j}(x,t), \qquad j = 1,2,$$

$$H_{2,j}(x,t) = \int\limits_0^t a(x)\partial_x^2 c_{0,j}(x,\tau)exp(B(x,t) - B(x,\tau))d\tau.$$

Подчинив эту функцию, вышеприведенному условию $c_{2,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_2(j-1,t)$, мы получим

$$c^0_{2,j}(x)|_{x=j-1} = -[v_2(j-1,t) + H_{2,j}(j-1,t)]exp(-B(j-1,t)).$$

Это условие будет использовано при решении уравнения

$$D^1_{x,j}c^0_{2,j}(x) = H^2_j(x,t)$$

получаемого из условия $b)$ теоремы 2.2.

Далее, повторяя описанный процесс можно определить все коэффициенты разложения (2.9), причем коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль. Частичная сумма этого разложения запишется:

$$u_{\epsilon,n}(M) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^{2i}[v_{2i}(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}})]. \tag{2.18}$$

Производя сужение в этой частичной сумме на векторе $\xi = \varphi(x,\epsilon) = (\epsilon^{-1}\psi_1(x), \epsilon^{-1}\psi_2())$, получим

$$u_{\epsilon,n}(x,t,\varphi(x,\epsilon)) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^{2i}\{v_{2i}(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\psi_j(x)}{2\epsilon\sqrt{t}})\}. \tag{2.19}$$

2.1.4 Оценка остаточного члена

При регуляризации исходной задачи было использовано соотношение (2.7), оно использовалось при переходе от задачи (2.1) к расширенной задаче (2.8),(2.6). Нетрудно показать, что сужение (2.19) частичной суммы (2.18) является формальным асимптотическим решением исходной задачи (2.1).

Для остаточного члена $R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon) = \widetilde{u}(x,t,\xi,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,t,\epsilon)$ имеем задачу

(2.11), производя там сужение при $\xi_j = \epsilon^{-1}\psi_j(x),\ j = 1, 2$ и учитывая (2.7), получим задачу

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon)) = \epsilon^{2n+1} g_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon)),$$

$$R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))|_{t=0} = R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))|_{x=0} = R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))|_{x=1} = 0,$$

$$g_{\epsilon,2n}(x, t) = L_x[u_{2n-1}(x, t, \varphi(x, \epsilon)) + \epsilon u_{2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))].$$

Теорема 2.3 *Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеет место оценка*

$$|u(x, t, \epsilon) - u_{\epsilon,n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))| < c\ \epsilon^{2n+1}$$

$\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ *т.е. разложение (2.19) является асимптотическим решением задачи (2.1).*

Доказательство. На основании условия 2) и в силу того, что $\epsilon > 0$ квадратичная форма $\epsilon a(x)\zeta^2$ соответствующая оператору L_ϵ положительна. Кроме того, заданные функции в силу условия 1) ограничены, этим устанавливается справедивость принципа максимума, поэтому для остаточного члена $R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))$ справедлива (1.4):

$$|R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))| < t_1 \epsilon^{2n+1} \max_{\overline{\Omega_1}} |g_{\epsilon,2n}(x, t) exp(a_0(t_1 - t))|,$$

$$a_0 = \max_{\tilde{\Omega_1}} |b(x, t)|,$$

здесь t_1- произвольная точка из (0,T). Используя вид функций $u_{2(n-1)}(x, t, \varphi(x, \epsilon)),\ u_{2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))$ нетрудно установить $|g_{\epsilon,2n}(x, t, \psi(x, \epsilon))| < c,\ \ \forall (x, t) \in \overline{\Omega_1}$. Тогда справедлива оценка

$$|R_{\epsilon,2n}(x, t, \varphi(x, \epsilon))| < c\epsilon^{2n+1},\ \ \forall (x, t) \in \overline{\Omega}_1.$$

Теорема доказана.

2.1.5 Пример

В качестве примера рассмотрим задачу

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2(1+x^2)^2\partial_x^2 u + (1+x)(1+t)u + \frac{1+t}{1+x},\ (x,t)\in\Omega_1,$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x),\quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Для этой задачи регуляризующая функция вводится следующим образом:

$$\xi_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon}\int\limits_{j-1}^{x}\frac{ds}{1+s^2} = \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon}[\mathrm{arctg}\,(x) - \mathrm{arctg}\,(j-1)],\ j=1,2.$$

Тогда расширенное уравнение запишется в виде

$$T\tilde{u} - \epsilon L_1\tilde{u} - \epsilon^2 L_x\tilde{u} = \frac{1+t}{1+x},$$

$$T \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{2}\partial_\xi^2 - (1+x)(1+t),\quad L_1 \equiv (1+x^2)^2 L_\xi,$$

$$L_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}[2(1+x^2)^{-1}\partial^2_{x,\xi_j} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\partial_{\xi_j}],$$

$$L_x \equiv (1+x^2)^2\partial_x^2.$$

Для коэффициентов разложения (2.9) получим уравнения (2.10). Уравнение (2.10,$i=0$) в классе U имеет решение представимое в виде

$$u_0(x,t,\xi) = v_0(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}}),$$

где функции $v_0(x,t)$, $c_{0,j}(x,t)$, $j = 1,2$, на основании теоремы 1, определяются из задач

$$\partial_t v_0(x,t) = (1+x)(1+t)v_0(x,t) + \frac{1+t}{1+x},\quad v_0(x,t)|_{t=0} = h(x),$$

$$\partial_t c_{0,j}(x,t) = (1+x)(1+t)c_{0,j}(x,t),\quad c_{0,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{0,j}(x).$$

Из этих задач найдем

$$v_0(x,t) = exp((1+x)(t+\frac{t^2}{2}))[h(x) + \frac{1}{(1+x)^2}[1 - exp(-(1+x)(t+\frac{t^2}{2}))],$$

$$c_{0,j}(x,t) = c^0_{0,j}(x)exp((1+x)(t+\frac{t^2}{2})).$$

Кроме того, обеспечивая выполнения краевых условий, полагаем

$$c_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t) = -\{h(j-1)exp(j(t+\frac{t^2}{2}))+$$

$$\frac{1}{j^2}[1-exp(j(t+\frac{t^2}{2}))],\ j=1,2,\}$$

или подставляя сюда предыдущее выражение для $c_{0,j}(x,t)$ имеем

$$c^0_{0,j}(j-1)exp(j(t+\frac{t^2}{2})) = -\{h(j-1)exp(j(t+\frac{t^2}{2}))+$$

$$\frac{1}{j^2}[1-exp(j(t+\frac{t^2}{2}))]\},\ j=1,2.$$

Отсюда определим

$$c^0_{0,j}(j-1) = -\{h(j-1)+\frac{1}{j^2}[exp(j(t+\frac{t^2}{2}))-1]\},$$

которое будет выполнять роль начального условия при решении уравнения выводимого из условия

$$L_\xi u_0 = (1+x^2)^2\sum_{j=1}^{2} D_{x,j}c_{0,j}(x,t)\partial_{\xi_j}erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{t}} = 0.$$

Этим уравнением будет уравнение $D_{x,j}c_{0,j}(x,t) = 0$. Подставим сюда найденное выражение для $c_{0,j}(x,t)$, далее разрешая полученное соотношение относительно $c^0_{0,j}(x)$, получим

$$\frac{dc^0_{0,j}(x)}{dx} = [\frac{2x}{1+x^2}-(t+\frac{t^2}{2})]c^0_{0,j}(x) = 0.$$

Используя вышеполученное начальное условие решение этого уравнения запишем

$$c^0_{0,j}(x) = -\{h(j-1)+\frac{1}{j^2}[exp(-j(t+\frac{t^2}{2}))-$$

$$1]\}exp(-(1+\frac{t^2}{2})(x-j+1))\frac{1+x^2}{1+(j-1)^2}.$$

Подставим найденное выражение для $c^0_{0,j}(x)$ в выражение для функции $c_{0,j}(x,t)$:

$$c_{0,j}(x,t) = -\frac{1+x^2)}{1+(1-j)^2}\{h(j-1)+\frac{1}{j^2}[exp(-j(t+\frac{t^2}{2}))-$$

$$1]\}exp(-(t+\frac{t^2}{2})(x-j+1)).$$

Теперь подставим в выражение для $u_0(x,t,\xi)$ найденные значания функций $v_0(x,t)$, $c_{0,j}(x,t)$, получим главный член асимптотики расширенного уравнения (2.9):

$$u_0(x,t,\xi) = [h(x)+\frac{1}{(1+x)^2}]exp((1+x)(t+\frac{t^2}{2}))-$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}-(1+x^2)\{[h(0)+$$

$$+exp(-t-\frac{t^2}{2})-1]exp(-(t+\frac{t^2}{2})x)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\xi_1}{2\sqrt{t}}}^{\infty}exp(-s^2)ds+$$

$$+0.5[h(1)+0.25exp(-2(t+\frac{t^2}{2}))-$$

$$-0.25]exp(-(t+\frac{t^2}{2})(x-1))\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\xi_2}{2\sqrt{t}}}^{\infty}exp(-s^2)ds\}.$$

Для того, чтобы получить главный член асимптотики решения исходной задачи положим в обеих частях последнего соотношения

$$\xi_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon}[\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(j-1)], \quad j=1,2,$$

имеем

$$u_0(x,t,\frac{\operatorname{arctg}(x)}{\epsilon},\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(x)}{\epsilon}) = [h(x)+$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}]exp((1+x)(t+\frac{t^2}{2}))-\frac{1}{(1+x)^2}-$$

$$(1+x^2)\{[h(0)-1+exp(-t-\frac{t^2}{2})]exp(-(t+\frac{t^2}{2})x)erfc(\frac{\operatorname{arctg}(x)}{2\epsilon\sqrt{t}}+$$

$$\frac{1}{2}[h(1)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}exp(-2(t+\frac{t^2}{2}))]\exp((t+\frac{t^2}{2})(x-1))erfc(\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(x)}{2\epsilon\sqrt{t}})\}.$$

2.2 Двумерная задача

В данном параграфе изучается двумерная сингулярно возмущенная параболическая задача

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon) \equiv \partial_t u(x,t,\epsilon) - \epsilon^2 \Delta u(x,t,\epsilon) - b(x,t)u(x,t,\epsilon) = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad u|_{t=0} = 0, \; u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.20}$$

$$x = (x_1, x_2), \; \Omega = \{(x_1,x_2) : x_l \in (0,1), \; l = 1,2\}, \; \Delta \equiv \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}, \; \partial^2_{x_l} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$$

при $\epsilon \to 0$. Заданные функции $b(x,t), \; f(x,t)$ предполагаются гладкими.

Строится регуляризованная асимптотика решения поставленной задачи (2.20). В отличии от скалярной, при изучении данной задачи дополнительно возникают угловые параболические пограничные слои, которые описываются произведением параболических погранслойных функции.

2.2.1 Регуляризация задачи

Для регуляризации задачи (2.20) вводим следующие регуляризующие переменные:

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\epsilon}, \quad \xi_2 = \frac{1-x_1}{\epsilon}, \quad \eta_1 = \frac{x_2}{\epsilon}, \quad \eta_2 = \frac{1-x_2}{\epsilon} \tag{2.21}$$

и вместо искомой функции $u(x,t,\epsilon)$ будем изучать расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\theta,\epsilon), \; \theta = (\xi,,\eta), \; \xi = (\xi_1,\xi_2), \; \eta = (\eta_1,\eta_2)$ такую, что ее сужение, в соответствии с (2.21), совпала с искомой функцией, т.е.

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,\epsilon)}, \equiv u(x,y,t,\epsilon), \; M = (x,t,\theta), \tag{2.22}$$

$$\theta(x,\epsilon) \equiv \left(\frac{x_1}{\epsilon}, \frac{1-x_1}{\epsilon}, \frac{x_2}{\epsilon}, \frac{1-x_2}{\epsilon}\right).$$

Принимая во внимание (2.21), из (2.22) найдем производные

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_t \widetilde{u}(M,\epsilon)\right)\big|_{\theta=\theta(x,\epsilon)},$$

$$\partial_{x_1} u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_{x_1}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{l=1}^{2} \frac{(-1)^{l-1}}{\epsilon} \partial_{\xi_l} \widetilde{u}(M,\epsilon)\right)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial_{x_2}u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_{x_2}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{l=1}^{2}\frac{(-1)^{l-1}}{\epsilon}\partial_{\eta_l}\widetilde{u}(M,\epsilon)\right)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial^2_{x_1}u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial^2_{x_1}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\epsilon^2}\partial^2_{\xi_l}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}L_{\xi,l}\widetilde{u}(M,\epsilon)]\right)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial^2_{x_2}u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial^2_{x_2}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\epsilon^2}\partial^2_{\eta_l}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}L_{\eta,l}\widetilde{u}(M,\epsilon)]\right)\Big|_{\theta=\theta(x,\epsilon)},$$

$$L_{\eta,l} \equiv 2(-1)^{l-1}\partial^2_{\eta_l,x_l}, \qquad L_{\xi,l} \equiv 2(-1)^{l-1}\partial^2_{\xi_l,x_l}. \tag{2.23}$$

На основании (2.22), (2.23), вместо задачи (2.20), поставим расширенную задачу:

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon) \equiv \partial_t\widetilde{u}(M,\epsilon) - \Delta_\xi\widetilde{u}(M,\epsilon) - \Delta_\eta\widetilde{u}(M,\epsilon) - b(x,t)\widetilde{u}(M,\epsilon)-$$

$$-\epsilon L_\xi\widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon L_\eta\widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2\Delta\widetilde{u}(M,\epsilon) = f(x,t), \quad M \in Q,$$

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=0} = 0, \quad \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\partial Q} = 0, \tag{2.24}$$

$$\Delta_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial^2_{\xi_l}, \;\; \Delta_\eta \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial^2_{\eta_l}, \quad L_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l}, \quad L_\eta \equiv \sum_{l=1}^{2}L_{\eta,l},$$

$$Q = \{(x,t,\theta) : x \in \Omega; t \in (0,T]; \; \xi,\eta \; > \; 0\}.$$

Если мы найдем решение $\widetilde{u}(M,\epsilon)$ расширенной задачи (2.24), то сужение его при $\theta = \theta(x,\epsilon)$ будет решением задачи (2.20), ибо

$$\left(\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon)\right)\Big|_{\theta=\theta(x,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon). \tag{2.25}$$

Решение расширенной задачи (2.24) определяем в виде разложения:

$$\widetilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n}\epsilon^i u_i(M) + \epsilon^{n+1}R_{\epsilon,n}(M). \tag{2.26}$$

Для коэффициентов этого разложения, на основании задачи (2.24), получим следующие итерационные задачи:

$$Tu_0(M) \equiv \partial_t u_0(M) - \Delta_\xi u_0(M) - \Delta_\eta u_0(M) - b(x,t)u_0(M) = f(x,t),$$

$$Tu_i(M) = L_\xi u_{i-1}(M) + L_\eta u_{i-1}(M) + \Delta u_{i-2}(M), \tag{2.27}$$

$$u_i(M)|_{t=0} = 0, \quad u_i(M)|_{\partial Q} = 0, \; i = 1,2,\ldots,n.$$

$$\widetilde{L}_\epsilon R_{\epsilon,n}(M) = g_n(M,\epsilon), \qquad R_{\epsilon,n}(M)|_{t=0} = R_{\epsilon,n}(M)|_{\partial Q} = 0, \tag{2.28}$$

$$g_n(M,\epsilon) = L_\xi u_n(M) + L_\eta u_n(M) + \Delta u_{n-1}(M) + \epsilon\Delta u_n(M).$$

2.2.2 Пространство решений

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи (2.27):

$$U=\left\{u(M):u(M)=v(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\left[c_l(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)+\omega_l(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\right.$$

$$+\sum_{k,l=0}^{2}y_{k,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right),\ \ c_l(x,t),\omega_l(x,t),$$

$$\left.y_{k,l}(x,t)\in C^{\infty}(\overline{\Omega}\times[0,T]),\ erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty}exp(-s^2)ds,\right\}.$$

Входящие сюда специальные функции

$$erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right),\ \ erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)$$

описывают параболические пограничные слои вдоль $x_1=l-1,\ x_2=l-1,\ l=1,2$ соответственно, а их произведения

$$erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right),\ r=1,2;\ l=1,2,$$

описывают угловой пограничный слой вдоль ребер $(0,0,t),\ (0,1,t),\ (1,0,t),\ (1,1,t)$. Для угловых погранслойных функций справедливы оценки (см.лемму 0.1)

$$\left|erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right|\le c\ \exp\left(-\frac{\xi_k^2+\eta_l^2}{8\ t}\right).$$

В общем случае итерационные уравнения (2.27) можно записать в виде

$$Tu(M)=H(M). \tag{2.29}$$

Теорема 2.4 *Пусть правая часть $H(M)\in U$, т.е.представима в виде*

$$H(M)=p(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\left[q_{1,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)+q_{2,l}(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_{k,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\Bigg]. \tag{2.30}$$

Уравнение (2.29) разрешимо в классе U тогда и только тогда, когда разрешимы уравнения

$$\partial_t v(x,t) = b(x,t)v(x,t) + p(x,t),$$

$$\partial_t c_l(x,t) = b(x,t)c_l(x,t) + q_{1,l}(x,t),$$

$$\partial_t \omega_l(x,t) = b(x,t)\omega_l(x,t) + q_{2,l}(x,t),$$

$$\partial_t y_{k,l}(x,t) = b(x,t)y_{k,l}(x,t) + d_{k,l}(x,t). \tag{2.31}$$

Доказательство. Пусть правая часть $H(M)$ уравнения (2.29) принадлежит классу U, т.е. представима в виде (2.30) и пусть разрешимы уравнения (2.31). Покажем, что функция

$$u(M) = v(z,t) + \sum_{l=1}^{2}\left[c_l(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) + \omega_l(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right] +$$

$$+\sum_{k,l=0}^{2} y_{k,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right) \tag{2.32}$$

будет решением уравнения (2.29). Подставим функцию (2.32) в уравнение (2.29), далее учитывая правую часть (2.30), относительно функций $v(x,t)$, $c_l(x,t)$, $\omega_l(x,t)$, $y_{k,l}(x,t)$ получим уравнения (2.31), поэтому и функция (2.32) будет решением уравнения (2.29).

Пусть теперь функции $v(x,t)$, $c_l(x,t)$, $\omega_l(x,t)$, $y_{k,l}(x,t)$ являются решениями уравнений (2.31). Покажем, что функция (2.32) является решением уравнения (2.29). Умножим второе и третье уравнения (2.31) на $erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})$, $erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})$ соответственно и просуммируем по l от 1 до 2. Четвертое уравнение умножим на $erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})$ и просуммируем по k,l от 1 до 2. Затем, сложим полученные соотношения и первое уравнение (2.31), при сложении учтем, что

$$erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})\partial_t c_l(x,t) = \partial_t\left(c_l(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})\right) - \partial_{\xi_l}\left(c_l(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}})\right),$$

$$erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})\partial_t\omega_l(x,t) = \partial_t\left(\omega_l(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})\right) - \partial_{\xi_l}\left(\omega_l(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})\right),$$

$$erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\partial_t y_{k,l}(x,t) = \partial_t\left(y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\right) -$$

$$-\partial_{\xi_k}\left(y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\right) - \partial_{\eta_l}\left(y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\right).$$

Учитывая вид правой части (2.31), получим тождество. Теорема доказана.

Решение уравнения (2.29), построенное в теореме 1, содержит произвол. В следующей теореме устанавливается однозначность построенного в U решения.

Теорема 2.5 *Пусть выполнены условия теоремы 2.4, тогда при дополнительных условиях*

1. $u(M)|_{t=0} = 0, u(M)|_{x_1=l-1,\xi_l=0} = u(M)|_{x_2=l-1,\eta_l=0} = 0,\ l = 1,2;$

2. $L_\xi u(M) = 0, \quad L_\eta u(M) = 0$

уравнение (2.29) однозначно разрешимо в классе U.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2.4, тогда уравнение (2.29) имеет решение представимое в виде (2.32). Удовлетворим эту функцию начальному условию из 1). Учитывая, что

$$\lim_{t\longrightarrow 0} erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) = \lim_{t\longrightarrow 0} erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right) = 0,$$

начальные условия, для функций $c_l(x,t),\ \omega_l(x,t),\ y_{k,l}(x,t)$ при $t=0$, зададим произвольно

$$v(x,t)|_{t=0} = 0, \qquad c_l(x,t)|_{t=0} = r_l(x),$$

$$\omega_l(x,t)|_{t=0} = g_l(x),\ y_{k,l}(x,t)|_{t=0} = z_{k,l}(x). \tag{2.33}$$

Здесь $r_l(x), \quad g_l(x),\ z_{k,l}(x)$- произвольные функции. Эти произволы будут использованы для обеспечения разрешимости итерационных задач в классе U.

Удовлетворяя функцию (2.32) граничным условия из 1), получим

$$c_l(x,t)|_{x_1=l-1} = -v(x,t)|_{x_1=l-1},\ y_{k,l}(x,t)|_{x_1=k-1} =$$

$$= -\omega_l(x,t)|_{x_1=k-1},\ \omega_l(x,t)|_{x_2=l-1} = -v(x,t)|_{x_2=l-1},$$

$$y_{k,l}(x,t)|_{x_2=l-1} = -c_k(x,t)|_{x_2=l-1},\quad l,k=1,2. \tag{2.34}$$

Решения уравнений (2.31), при соответствующих начальных условиях (2.33), запишутся в виде

$$v(x,t) = \int_0^t f(x,s)B(x,t)B^{-1}(x,s)ds,\quad c_l(x,t) = r_l(x)B(x,t),$$

$$\omega_l(x,t) = g_l(x)B(x,t),\qquad y_{l,k}(x,t) = z_{l,k}(x)B(x,t),$$

$$B(x,t) = \exp\left(\int_0^t b(x,s)ds\right),\ k,l=1,2. \tag{2.35}$$

Подставив их в (2.40), определим

$$r_l(x)|_{x_1=l-1} = -\left(B^{-1}(x,t)v(x,t)\right)|_{x_1=l-1}\ ,$$

$$g_l(x)|_{x_2=l-1} = -(B^{-1}(x,t)v(x,t))|_{x_2=l-1},$$

$$z_{k,l}(x)|_{x_1=k-1} = -g_l(x)|_{x_1=k-1},\quad k=1,2,$$

$$z_{k,l}(x)|_{x_2=l-1} = -r_l(x)|_{x_2=l-1},\ l=1,2. \tag{2.36}$$

Удовлетворим теперь условию b) теоремы 2.5, для чего вычислим $L_\xi u$ и $L_\eta u$, имеем

$$L_\xi u = a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}\left[c_l(x,t) + \sum_{k=1}^{2} y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}}\right] erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}) =$$

$$= a(x)\sum_{l=1}^{2} D_{x,l}\left[c_l(x,t) + \sum_{k=1}^{2} y_{k,l}(x,t)erfc(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}})\right] \partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}),$$

$$L_\eta u = a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\eta,l}\left[\omega_l(x,t) + \sum_{k=1}^{2} y_{l,k}(x,t)erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\right] erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}) =$$

$$= a(x)\sum_{l=1}^{2} D_{x,l}\left[\omega_l(x,t) + \sum_{k=1}^{2} y_{l,k}(x,t)erfc(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}})\right] \partial_{\eta_l}(erfc(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}})),\ D_{x,l} \equiv 2\partial_{x_l}.$$

Чтобы обеспечить выполнения второго условия из b) нужно положить

$$D_{x,l}c_l(x,t)) = 0,\ D_{x,l}\omega_l(x,t) = 0,\ D_{x,l}y_{l,k}(x,t) = 0,\ D_{x,l}y_{k,l}(x,t) = 0.$$

Подставим сюда значения $c_l(x,t))$, $\omega_l(x,t)$, $y_{l,k}(x,t)$ из (2.35), тогда относительно $r_l(x)$, $g_l(x)$, $z_{l,k}(x)$ получим дифференциальные уравнения первого порядка, которых решаем при начальном условии (2.36). Этим мы обеспечили выполнения второго условия 2). Таким образом однозначно определили решение (2.30). Теорема доказана.

2.2.3 Определения коэффициентов разложения

Используя теоремы 2.4 и 2.5 построим решения итерационных задач (2.27). По теореме 2.4 при $i = 0$ в U существует решение и представимо в виде

$$u_0(M) = v_0(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\left[c_{0,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) + \omega_{0,l}(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2} y^0_{k,l}(x,t)erfc\left(\frac{\xi_k}{2\sqrt{t}}\right)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right], \tag{2.37}$$

если функции $v_0(x,t)$, $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y^0_{k,l}(x,t)$ являются решениями уравнений

$$\partial_t v_0(x,t) = b(x,t)v_0(x,t) + f(x,t),\ \partial_t c_{0,l}(x,t) = b(x,t)c_{0,l}(x,t),$$

$$\partial_t \omega_{0,l}(x,t) = b(x,t)\omega_{0,l}(x,t),\ \partial_t y^0_{k,l}(x,t) = b(x,t)y^0_{k,l}(x,t),\ l,k = 1,2. \tag{2.38}$$

Удовлетворим функцию (2.37) начальному условию. Учитывая, что

$$\lim_{t\longrightarrow 0} erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) = \lim_{t\longrightarrow 0} erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right) = 0,$$

начальные условия, для функций $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y^0_{k,l}(x,t)$ при $t = 0$, зададим произвольно

$$v_0(x,t)|_{t=0} = 0, \qquad c_{0,l}(x,t)|_{t=0} = r^0_l(x),$$

$$\omega_{0,l}(x,t)|_{t=0} = g^0_l(x),\ y^0_{k,l}(x,t)|_{t=0} = z^0_{k,l}(x). \tag{2.39}$$

Здесь $r^0_l(x)$, $g^0_l(x)$, $z^0_{k,l}(x)$- произвольные функции. Эти произволы будут использованы для обеспечения разрешимости итерационных задач в классе

U.

Удовлетворяя функцию (2.37) граничным условия из (2.27), получим

$$c_{0,l}(x,t)|_{x_1=l-1} = -v_0(x,t)|_{x_1=l-1},\ y^0_{k,l}(x,t)|_{x_1=k-1} =$$

$$= -\omega_{0,l}(x,t)|_{x_1=k-1},\ \omega_{0,l}(x,t)|_{x_2=l-1} = -v_0(x,t)|_{x_2=l-1},$$

$$y^0_{k,l}(x,t)|_{x_2=l-1} = -c_{0,k}(x,t)|_{x_2=l-1}, \quad l,k = 1,2,. \qquad (2.40)$$

Решения уравнений (2.38), при соответствующих начальных условиях из (2.33), запишутся в виде

$$v_o(x,t) = \int_0^t f(x,s)B(x,t)B^{-1}(x,s)ds, \quad c_{0,l}(x,t) = r^0_l(x)B(x,t),$$

$$\omega_{0,l}(x,t) = g^0_l(x)B(x,t), \qquad y^0_{l,k}(x,t) = z^0_{l,k}(x)B(x,t),$$

$$B(x,t) = \exp\left(\int_0^t b(x,s)ds\right),\ k,l = 1,2. \qquad (2.41)$$

Подставив их в (2.40), определим

$$r^0_l(x)|_{x_1=l-1} = -\left(B^{-1}(x,t)v_0(x,t)\right)|_{x_1=l-1}\ ,$$

$$g^0_l(x)|_{x_2=l-1} = -(B^{-1}(x,t)v_0(x,t))|_{x_2=l-1},$$

$$z^0_{k,l}(x)|_{x_1=k-1} = -g^0_l(x)|_{x_1=k-1}, \quad k = 1,2,$$

$$z^0_{k,l}(x)|_{x_2=l-1} = -r^0_l(x)|_{x_2=l-1},\ l = 1,2. \qquad (2.42)$$

По теореме 2.5, для разрешимости в классе U уравнения (2.27, $i = 1$), потребуем выполнения условий

$$L_\xi\ u_0(M) = 0, \qquad L_\eta\ u_0(M) = 0,$$

которые приводят к соотношениям

$$2\sum_{l=1}^{2} \partial_{x_l} c_{0,l}(x,t)\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right) = 0,$$

$$2\sum_{l=1}^{2} \partial_{x_l} \omega_{0,l}(x,t)\partial_{\eta_l}\left(erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right) = 0,$$

$$2\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{x_l}y^0_{k,l}(x,t)\partial_{\xi_l}\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)\left(erfc\left(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0,$$

$$2\sum_{k,l=1}^{2}\partial_{x_k}y^0_{l,k}(x,t)\partial_{\eta_k}\left(erfc\left(\frac{\eta_k}{2\sqrt{t}}\right)\right)\left(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right)=0.$$

Обеспечивая выполнения этих соотношений, относительно функций $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y^0_{l,k}(x,t)$ получим дифференциальные уравнения. В полученные дифференциальные уравнения подставим значения этих функций из (2.44), тогда относительно $r^0_l(x)$, $g^0_l(x)$, $z^0_{k,l}(x)$ придем к дифференциальным уравнениям, решая которых при начальном условии (2.42), определим эти функции, а, следовательно, и функции $c_{0,l}(x,t)$, $\omega_{0,l}(x,t)$, $y^0_{l,k}(x,t)$. Этим мы полностью определили главный член асимптотики и обеспечили разрешимость в U следующего итерационного уравнения (2.27, $i=1$).

Уравнение (2.27, $i = 1$) однородное, поэтому по теореме 2.4 оно разрешимо в U и его решение представимо в виде (2.37) с индексом 1 вместо 0, если функции $v_1(x,t)$, $c_{1,l}(x,t),\omega_{1,l}(x,t)$, $y^1_{k,l}(x,t)$ являются решениями однородных уравнений вида (2.31). Из краевых условий (2.27), на основании вышеприведенных рассуждений, приведшие к соотношениям (2.33),(2.40), мы получим

$$v_1(x,t)|_{t=0}=0,\ c_{1,l}(x,t)|_{t=0}=r^1_l(x),\ \omega_{1,l}(x,t|_{t=0}=g^1_l(x),$$

$$y^1_{k,l}(x,t)|_{t=0}=z^1_{k,l}(x),\ c_{1,l}(x,t)|_{x_1=l-1}=-v_1(x,t)|_{x_1=l-1},\ y^1_{k,l}(x,t)|_{x_1=k-1}=$$
$$=-\omega_{1,l}(x,t)|_{x_1=k-1},\ \omega_{1,l}(x,t)|_{x_2=l-1}=-v_1(x,t)|_{x_2=l-1},$$
$$y^0_{k,l}(x,t)|_{x_2=l-1}=-c_{0,k}(x,t)|_{x_2=l-1},\quad k=1,2,. \tag{2.43}$$

В силу однородности уравнения относительно $v_1(x,t)$ и нулевого начального условия, а также в силу того, что функции $c_{1,l}(x,t),\omega_{1,l}(x,t)$, $y^1_{k,l}(x,t)$ выражаются через $v_1(x,t)$, мы получим

$$v_1(x,t)=0,\ c_{1,l}(x,t)=0,\ ,\omega_{1,l}(x,t)=0,\ ,\ y^1_{k,l}(x,t)=0,$$

т.е. $u_1(M) = 0$.

Продолжая этот процесс, мы можем найти все коэффициенты частичной суммы разложения (2.26), при этом коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль.

Вернемся к исходной задаче (2.20). При ее регуляризации было использовано свойство (2.25), которое является необходимым условием регуляризации задачи (2.20). Оно было использовано при переходе от задачи (2.20) к задаче (2.24). Можно показать, что сужение

$$u_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^{2i} u_{2i}(M)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)} = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^{2i} \left\{ v_{2i}(x,t) + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \left[c_{2i,l}(x,t) erfc\left((-1)^{l-1} \frac{x_1 - l + 1}{2\epsilon\sqrt{t}} \right) + \omega_{2i,l}(x,t) erfc\left((-1)^{l-1} \frac{x_2 - l + 1}{2\epsilon\sqrt{t}} \right) \right] +$$

$$\left. + \sum_{k,l=1}^{2} y_{k,l}^{2i}(x,t) erfc\left((-1)^{l-1} \frac{x_1 - k + 1}{2\epsilon\sqrt{t}} \right)) erfc\left((-1)^{l-1} \frac{x_2 - l + 1}{2\epsilon\sqrt{t}} \right) \right\}, \tag{2.44}$$

частичной суммы разложения (2.26), является формальным асимптотическим решением задачи (2.20).

2.2.4 Оценка остаточного члена

Произведем в задаче (2.28) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\theta = \theta(x, \epsilon)$. Далее, учитывая тождество (2.25), для остаточного члена

$$R_{\epsilon,2n}(x,t) \equiv R_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,\epsilon)) = u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon)$$

получим задачу

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x,t) = g_{2n}(x,t,\theta(x,\epsilon),\epsilon), \quad R_{\epsilon,2n}(x,t)|_{t=0} = 0,$$

$$R_{\epsilon,2n}(x,t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений функция $g_{2n}(x,t,\theta(x,\epsilon),\epsilon)$ равномерно ограничена по ϵ и непрерывна по x,t в изучаемой области для любого номера $n = 0, 1, 2, ...$

Теорема 2.6 *Пусть функции* $f(x,t)$, $b(x,t)$ *гладкие. Тогда для достаточно малых* $\epsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$\|u(x,y,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,y,t,\epsilon)\| < c\epsilon^{2n+1}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ *т.е. разложение (2.44) является асимптотическим решением задачи (2.20) при* $\epsilon \to +0$ *и это разложение единственно в классе* U.

Доказательство приведено в лемме 0.3.

2.3 Временное уравнение Шредингера с малой константой Планка при старшей призводной

В данном параграфе изучается задача

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon) \equiv i\partial_t u(x,t,\epsilon) + \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) - b(x,t)u(x,t,\epsilon) = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega_1, \quad u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u(x,t,\epsilon)|_{x=1} = 0, \qquad (2.45)$$

где $i-$мнимая единица, в наших обозначениях $\epsilon > 0$ означает достаточно малую постоянную Планка. Относительно заданных функций предполагается, чтобы они были достаточно гладкими, а функция $a(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]$.

Следует отметить, что такие задачи с позиции метода пограничных функций по видимому не поддаются решению. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач позволяет построить асимптотику решения, причем регуляризованную.

2.3.1 Регуляризация задачи

Для регуляризации задачи введем регуляризующие переменные по формулам

$$\xi_j = \frac{\varphi_j(x)}{\epsilon} \equiv \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon} \int\limits_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad j = 1, 2 \tag{2.46}$$

и вместо искомой функции $u(x, t, \epsilon)$ будем изучать расширенную функцию $\tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ такую, что сужение посредством регуляризующих функций совпадала с искомой функцией

$$\tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)|_{\xi=\varphi(x)/\epsilon} \equiv u(x, t, \epsilon), \ \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)). \tag{2.47}$$

С учетом (2.46), отсюда найдем производные по t и x, тогда для расширенной функции $\tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)$, на основании (2.45), (2.47), естественно поставить расширенную задачу

$$\tilde{L}_\epsilon \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) \equiv i\ \partial_t \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) + D_\xi \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) + \epsilon L_\xi \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) +$$

$$+\epsilon^2 L_x \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) = f(x, t), \qquad (x, t, \xi) \in Q_1,$$

$$\tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)|_{t=0} = h(x), \ \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)|_{x=0, \xi_1=0} = 0, \ \tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon)|_{x=1, \xi_2=0} = 0, \tag{2.48}$$

где

$$D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j} - b(x, t), \ L_\xi \equiv a(x) \sum_{j=1}^{2} L_{\xi, j},$$

$$L_x \equiv a(x) \partial_x^2, \ L_{\xi, j} \equiv 2\varphi_j'(x) \partial^2_{x, \xi_j} + \varphi_j''(x) \partial_{\xi_j}.$$

Решение расширенной задачи (2.48) будем определять в виде ряда

$$\tilde{u}(x, t, \xi, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k(x, t, \xi), \tag{2.49}$$

тогда для коэффициентов этого ряда получим следующие итерационные задачи:

$$T u_0(x, t, \xi) = f(x, t), \quad u_0(x, t, \xi)|_{t=0} = h(x),$$

$$u_0(x, t, \xi)|_{x=0, \xi_1=0} = 0, \quad u_0(x, t, \xi)|_{x=1, \xi_2=0} = 0,$$

$$T u_k(x, t, \xi) = -L_\xi u_{k-1}(x, t, \xi) - L_x u_{k-2}(x, t, \xi), \qquad T u \equiv i\ \partial_t u + D_\xi u,$$

$$u_k|_{t=0} = u_k|_{x=0, \xi_1=0} = u_k|_{x=1, \xi_2=0} = 0, \ k \geq 1. \tag{2.50}$$

2.3.2 Решение итерационных задач

Итерационные задачи (2.50) будем решать в классе функций

$$U = \{u(x,t,\xi):\ u = v(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_j(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}),$$

$$v(x,t), c_j(x,t) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}_1)\}.$$

Задача (2.50, $k = 0$) в классе U разрешима и ее решение представимо в виде

$$u_0(x,t,\xi) = v_0(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}),$$

если функции $v_0(x,t)$, $c_{0,j}(x,t)$ будут выбраны, как решения уравнений

$$i\partial_t v_0(x,t) = b(x,t)v_k(x,t) + f(x,t),$$

$$i\ \partial_t c_{0,j}(x,t) = b(x,t)c_{0,j}(x,t) \tag{2.51}$$

при соответствующих начальных условиях определяемых из следующих соотношений:

$$v_o(x,t)|_{t=0} = h(x),\quad c_{0,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{0,j}(x),\quad j = 1,2,$$

$$c_{0,1}(x,t)|_{x=0} + c_{0,2}(x,t)|_{x=0} erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) + v_0(0,t) = 0,$$

$$c_{0,1}(x,t)|_{x=1} erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) + c_{0,2}(x,t)|_{x=1} + v_0(1,t) = 0. \tag{2.52}$$

Так как при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}) = 0$, то для функций $c_{0,j}(x,t)$ начальные условия при $t = 0$ зададим произвольно, т.е. в виде $c_{0,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{0,j}(x)$, где $c^0_{0,j}(x)$ - произвольные функции, которые определяются из условия разрешимости в классе U следующего ($k = 1$) итерационного уравнения. Как будет показано ниже это условие разрешимости приводится к соотношениям

$$L_{\xi,j} c_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}) = 0,\ j = 1,2. \tag{2.53}$$

Этот член, входящий в правую часть, содержит производную $\partial_{\xi_j} erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}})$, поэтому он приведет к появлению в решении секулярных членов особенности которых будут расти с ростом номера итерации.

Решим уравнения (2.51) при соответствующих начальных условиях из (2.52), получим

$$c_{0,j}(x,t) = c^0_{0,j}(x)exp(B(x,t)), \quad B(x,t) = \frac{1}{i}\int_0^t b(x,s)ds, \quad j = 1,2,$$

$$v_0(x,t) = exp(B(x,t))[h(x) + \frac{1}{i}\int_0^t f(x,s)exp(-B(x,s))ds].$$

Подставим значение $c_{0,j}(x,t)$ в соотношение (2.53). Обеспечивая выполнение соотношения (2.53) и учитывая произвольность функции $c^0_{0,j}(x)$, выберем ее как решение уравнения

$$q^1_j(x)\frac{dc^0_{0,j}(x)}{dx} + [q^1_j(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} + q^2_j(x)]c^0_{0,j}(x) = 0, \quad j = 1,2,$$

здесь t принимается как параметр.

Решая это уравнение при начальном условии

$$c^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = p_0(j-1),$$

найдем

$$c^0_{0,j}(x) = p_0(j-1)exp(-B_{1,j}(x,t)),$$

$$B_{1,j}(x,t) = \int_0^x [\frac{\partial B(s,t)}{\partial s} + \frac{q^2_j(s)}{q^1_j(s)}]ds,$$

тогда для функции $c_{0,j}(x,t)$ получим выражение

$$c_{0,j}(x,t) = p_0(j-1)exp(B(x,t) - B_{1,j}(x,t)), \quad j = 1,2.$$

Далее, подставим в третье и во второе уравнения из (2.52) найденное значение $c_{0,j}(x,t)$:

$$exp(B(0,t)[p_0(0)exp(-B_{1,1}(0,t))+$$

$$+p_0(1)exp(-B_{1,2}(0,t))erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{it}}] = -v_0(0,t),$$

$$p_0(0)exp(B(1,t) - B_{1,1}(1,t))erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{it}}+$$

$$+p_0(1)exp(B(1,t) - B_{1,2}(1,t)) + v_0(1,t) = 0.$$

Подставляя сюда выражение для $v_0(x,t)$, затем сокращая первое соотношение на $exp(B(0,t))$, а второе на $exp(B(1,t))$ получим

$$\begin{cases} p_0(0)exp(-B_{1,1}(0,t)) + p_0(1)exp(-B_{1,2}(0,t))erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{it}}) = H_1(0,t), \\ \\ p_0(0)exp(-B_{1,1}(1,t))erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{it}}) + p_0(1)exp(-B_{1,2}(1,t)) = H_1(1,t), \end{cases}$$

$$H_1(x,t) = h(x) + \frac{1}{i}\int_0^t f(x,s)exp(-B(x,s))ds.$$

Определитель этой системы

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} \exp(-B_{1,1}(0,t)) & \exp(-B_{1,2}(0,t))erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) \\ \\ \exp(-B_{1,1}(1,t))erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) & \exp(-B_{1,2}(1,t)) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при достаточно малых $\epsilon > 0$ и $\forall\ t \in [0,T]$, поэтому система однозначна разрешима относительно $p_0(0),\ \ p_0(1)$. Этим самым однозначным образом определим главный член асимптотики.

Так как

$$|erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}})| = |\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}}^{\infty} \exp(-s^2)ds| \le 2|\exp(-\frac{\xi_j^2}{8i\ t})| =$$

$$= 2|\cos(\frac{\xi_j^2}{8\ t}) + i\sin(\frac{\xi_j^2}{8\ t})| = 2,$$

то построенная асимптотика имеет не экспоненциальный, а быстро осцилирующий характер изменения.

Рассмотрим теперь итерационное уавнение (2.50) при $k = 1$, на основании (2.53), это уравнение запишется

$$Tu_1(x,t,\xi) = 0.$$

В силу однородности последнее уравнение разрешимо U и его решение представимо в виде

$$u_1(x,t,\xi)) = v_1(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}}),$$

если функции $v_1(x,t),\ c_{1,j}(x,t)$ будут решениями уравнений

$$i\ \partial_t v_1(x,t) = b(x,t)v_1(x,t),$$

$$i\ \partial_t c_{1,j}(x,t) = b(x,t)c_{1,j}(x,t), \quad j=1,2.$$

Эти уравнения решаются при начальных условиях

$$v_1(x,t)|_{t=0} = 0, \quad c_{1,j}(x,t)|_{t=0} = c^0_{1,j}(x), \quad j=1,2.$$

Первое уравнение имеет тривиальное решение $v_1(x,t)=0$, а решение второго уравнения запишется

$$c_{1,j}(x,t) = c^0_{1,j}(x)\exp(B(x,t)). \tag{2.54}$$

Обеспечивая разрешимость следующего итерационного уравнения (2.50) при $k=2$, из тех же соображений, что и при получении уравнения (2.53), относительно $c^0_{1,j}(x)$ получим уравнение

$$q^1_j(x)\frac{dc^0_{1,j}(x)}{dx} + [q^1_j(x)\partial_x(B(x,t)) + q^2_j(x)]c^0_{1,j}(x) = 0,\ j=1,2.$$

Решив это уравнение при начальном условии

$$c^0_{1,j}(x)|_{x=j-1} = p_1(j-1),$$

найдем фунцию $c^0_{1,j}(x)$, затем ее подставим в (2.54). Полученное при этом значение функции $c_{1,j}(x,t)$ подставим в систему, которая получается удовлетворением функции $u_1(x,t,\xi)$ из (2.54) граничным условиям,т.е.

$$\begin{cases} c_{1,1}(x,t)|_{x=0} + c_{1,2}(x,t)|_{x=0} erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) = 0, \\ \\ c_{1,1}(x,t)|_{x=1} erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}) + c_{1,2}(x,t)|_{x=1} = 0. \end{cases}$$

При этом получим систему

$$\begin{cases} exp(-B_{1,1}(0,t))p_1(0) + exp(-B_{1,2}(0,t))erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}})p_1(1) = 0, \\ \\ exp(-B_{1,1}(1,t))erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}})p_1(0) + exp(-B_{1,2}(1,t))p_1(1) = 0. \end{cases}$$

В силу того, что определитель этой системы отличен от нуля, то она имеет нулевое решение $p_1(0) = 0, \ \ p_1(1) = 0$, тогда и функция $c^0_{1,j}(x) = 0$, а поэтому $c_{1,j}(x,t) = 0, \ j = 1, 2$. Этим мы показали, что функция $u_1(x,t,\xi) = 0$.

Далее, повторая вышеописанный процесс построения решений итерационных уравнений (2.50), найдем коэффициенты частичной суммы ряда (2.49):

$$u_{\epsilon,n}(x,t,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \epsilon^{2k} u_{2k}(x,t,\xi) = \sum_{k=0}^{n} \epsilon^{2k} [v_{2k}(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{2k,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{i\ t}})].$$

Отметим, что здесь отсутствуют коэффициенты с нечетными индексами, так как они равны нулю.

Чтобы получить решение исходной задачи необходимо произвести сужение этой частичной суммы посредством регуляризующих функций:

$$u_{\epsilon,n}(x,t,\frac{\varphi(x)}{\epsilon}) = \sum_{k=0}^{n} \epsilon^{2k} [v_{2k}(x,t) + \sum_{j=1}^{2} c_{2k,j}(x,t) erfc(\frac{\varphi_j(x)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}})] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \epsilon^{2k} [v_{2k}(x,t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{2} c_{2k,j}(x,t) \int\limits_{\frac{\varphi_j(x)}{2\epsilon\sqrt{i\ t}}}^{\infty} \exp(-s^2) ds].$$

Теорема 2.7 *Пусть заданные функции достаточно гладкие и* $a(x) > 0 \ \forall \ x \in [0,1]$. *Тогда построенное решение является асимптотическим решение исходной задачи, т.е.для достаточно малых* $\epsilon > 0, \ \forall (x,t) \in \bar{\Omega}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,t,\varphi(x)/\epsilon)| < c\ \epsilon^{2n+1}.$$

Доказательство. В связи с тем, что $a(x) > 0 \ \forall \ x \in [0,1]$ квадратичная форма соответствующая уравнению исходному уравнению $a(x)\xi^2 > 0$, поэтому имеет место условия принципа максимума, из которого вытекает доказательство теоремы.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ С УГЛОВЫМИ ПОГРАНСЛОЯМИ

В задачах, когда соприкасаются вязкие границы, возникает явление углового пограничного слоя [27]. Изучаемая в данном параграфе задача, как и задача изученная в главе 1 была поставлена С.А.Ломовым в [83]. В данной главе строится регуляризованная асимптотика решения первой краевой задачи для параболического уравнения (скалярное и многомерное), когда малый параметр стоит перед всеми производными (в отличии от главы 1 и при временной производной). В данном случае при $\epsilon = 0$ теряются как начальные, так и граничные условия. Известно, что в таких задачах возникают пограничные слои вдоль трех линий $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$. Показано, что асимптотика решения таких задач содержит экспоненциальную (вдоль $t = 0$), параболические (вдоль границ $x = 0$, $x = 1$) и угловые погранслойные функции (в окрестности угловых точек (0,0) и (0,1)). Угловой пограничный слой в нашем случае описывается произведением двух погранслойных функций: экспоненциальной и параболической. В отличии от работы [27], построенная нами асимптотика вместо экспоненциальных погранслойных функций, описывающие пограничный слой вдоль границ $x = 0$ и $x = 1$, содержит параболические погранслойные функции.

3.1 Скалярная задача с потенциалом, зависящий от t

В данном параграфе изучается задача вида

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon) \equiv \epsilon \partial_t u(x,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x,t,\epsilon) + b(t) u(x,t,\epsilon) = f(x,t),$$

$$(x,t)\in\Omega_1,\ u(x,t,\epsilon)|_{t=0}=h(x), u(x,t,\epsilon)|_{x=0}=u(x,t,\epsilon)|_{x=1}=0. \tag{3.1}$$

Эта задача изучается при следующих предположениях:

1. функции $h(x)$, $a(x)$, $b(t)$, $f(x,t)$ имеют в $\overline{\Omega}_1$ требуемое число производных по $x,\ t$;
2. $\forall x\in[0,1]$ функция $a(x)>0$;
3. выполняются согласования начальных и граничных условий $h(0)=h(1)=0$;
4. функция $b(t)>0\ \ \forall t\in[0,T]$.

3.1.1 Регуляризация задачи

Согласно сказанному выше, для описания пограничных слоев возникающихся вдоль $t=0,\ x=0,\ x=1$ и в угловых точках (0,0), (0,1) вводим четыре типа регуляризующих переменных

$$\tau_1=\frac{t}{\epsilon^2},\ \ \tau_2=\frac{1}{\epsilon}\int_0^x b(s)ds\equiv\frac{1}{\epsilon}\psi(t),$$

$$\zeta_j=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(-1)^{j-1}\int_{j-1}^x\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}\ \ \equiv\ \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j(x),$$

$$\xi_j=\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j(x),\ \ \varphi_j(j-1)=0, j=1,2. \tag{3.2}$$

В соответствии с методом регуляризации, вместо искомого решения $u(x,t,\epsilon)$ будем изучать расширенную функцию $\tilde{u}(x,t,\zeta,\xi,\tau,\epsilon)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2)$ такую, что ее сужение совпадает с искомым решением

$$\tilde{u}(M,\epsilon)|_{q=q(x,t,\epsilon)}\equiv u(x,t,\epsilon), \tag{3.3}$$

$$q(x,t,\epsilon)=(\frac{1}{\epsilon}\varphi(x),\frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}\varphi_(x),\frac{t}{\epsilon^2},\frac{\psi(t)}{\epsilon}),$$

$$q=(\zeta,\xi,\tau),\qquad M=(x,t,q).$$

Используя (3.2), из (3.3) найдем производные:

$$\partial_t u\equiv(\partial_t\tilde{u}+\frac{\psi'(t)}{\epsilon}\partial_{\tau_2}\tilde{u}+\frac{1}{\epsilon^2}\partial_{\tau_1}\tilde{u})|_{q=q(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial_x u \equiv (\partial_x \tilde{u} + \sum_{j=1}^{2}[\frac{\varphi_j'(x)}{\sqrt{\epsilon}}\partial_{\zeta_j}\tilde{u} + \frac{\varphi_j'(x)}{\sqrt{\epsilon^3}}\partial_{\xi_j}\tilde{u}])|_{q=q(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial_x^2 u \equiv (\partial_x^2 \tilde{u} + \sum_{j=1}^{2}[\frac{\varphi_j'^2(x)}{\epsilon}\partial_{\zeta_j}^2\tilde{u} + \frac{\varphi_j'^2(x)}{\epsilon^3}\partial_{\xi_j}^2\tilde{u} + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j'(x)\partial_{x,\zeta_j}^2\tilde{u}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j'(x)\partial_{x,\xi_j}^2\tilde{u} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j'(x)\partial_{\zeta_j}\tilde{u} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j'(x)\partial_{\xi_j}\tilde{u}])|_{q=q(x,t,\epsilon)}.$$

Далее, на основании (3.1),(3.3) и найденных производных, для расширенной функции $\tilde{u}(M,\epsilon)$, поставим задачу

$$\tilde{L}_\epsilon \tilde{u}(M,\epsilon) \equiv \frac{1}{\epsilon}T_1\tilde{u}(M,\epsilon) + D_\tau\tilde{u}(M,\epsilon) - \sqrt{\epsilon}L_\xi\tilde{u}(M,\epsilon) + \epsilon T_2\tilde{u}(M,\epsilon) -$$

$$-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta\tilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2 L_x\tilde{u}(M,\epsilon) = f(x,t),\ M \in Q_3,$$

$$\tilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau_j=0} = h(x), \tilde{u}(M,\epsilon)|_{x=j-1,\xi_j=0,\zeta_j=0} = 0, \qquad j=1,2, \tag{3.4}$$

$$T_1 \equiv \partial_{\tau_1} - D_\xi, \qquad D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2}\partial_{\xi_j}^2, \qquad D_\tau \equiv b(t)[\partial_{\tau_2}+1],$$

$$L_\xi \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\xi_j},\ L_{\xi_j} \equiv 2\varphi_j'(x)\partial_{x,\xi_j}^2 + \varphi_j''(x)\partial_{\xi_j},$$

$$T_2 \equiv \partial t - D_\zeta, \quad D_\zeta \equiv \sum_{j=1}^{2}\partial_{\zeta_j}^2, \quad L_\zeta \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\zeta_j},$$

$$L_{\zeta_j} \equiv 2\varphi_j'(x)\partial_{x,\zeta_j}^2 + \varphi_j''(x)\partial_{\zeta_j}, \qquad L_x \equiv a(x)\partial_x^2.$$

3.1.2 Итерационные задачи

Задача (3.4) регулярна по $\epsilon \to 0$, причем:

$$\tilde{L}_\epsilon\tilde{u}(M,\epsilon)|_{q=q(x,t,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon). \tag{3.5}$$

Решение расширенной задачи ищем в виде разложения

$$\tilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\epsilon^{\frac{i}{2}}u_i(M). \tag{3.6}$$

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ϵ, получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_l(M) = 0, \quad l = 0,1, \quad u_0(M)|_{t=\tau=0} = h(x), \quad u_0(M)|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0} = 0,$$

$$T_1 u_2(M) = f(x,t) + D_\tau u_0(M), \quad T_1 u_i(M) = -D_\tau u_{i-2}(M) +$$

$$+ L_\xi u_{i-3}(M) - T_2 u_{i-4}(M) + L_\zeta u_{i-5}(M) + L_x u_{i-6}(M),$$

$$u_i(M)|_{t=\tau=0} = 0, \quad u_i(M)|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0} = 0, \quad j = 1,2, \quad i = 1,2,\ldots \tag{3.7}$$

Введем класс функций в котором будут решаться итерационные задачи (3.7). Решение таких задач содержат регулярный член, экспоненциальную погранслойную функцию описывающий пограничный слой вдоль $t = 0$, параболические погранслойные функции описывающие пограничные слои вдоль границ $x = 0$ и $x = 1$, а также угловые погранслойные функции описывающие пограничные слои в окрестностях угловых точек (0,0), (0,1) и они представляются в виде произведений экспоненциальной и параболической погранслойных функций:

$$U = \{u(M) : u(M) = v(x,t) + c(x,t) exp(-\tau_2) +$$

$$\sum_{j=1}^{2} [z_j(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_j(N_j)],$$

$$N_j = (x,t,\xi_j,\tau_1), \ z_j(x,t), \ c(x,t), \ v(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1),$$

$$|u_j(N_j)| < c exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}), \quad j = 1,2\}.$$

3.1.3 Алгоритм построения решения итерационных задач

Последовательно решая итерационные задачи (3.7), определим коэффициенты разложения (3.6). Уравнения (3.7) с индексами $i = 0,1$ в классе U имеют решения представимые в виде:

$$u_l(M) = v_l(x,t) + c_l(x,t) exp(-\tau_2) +$$

$$\sum_{j=1}^{2} [z_{l,j}(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_{l,j}(N_j)], \quad l = 0,1. \tag{3.8}$$

Удовлетворим эти функции краевым условиям из (3.7), тогда для функций, входящих в (3.8), получим следующие соотношения:

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0), \quad c_1(x,t)|_{t=0} = -v_1(x,0),$$

$$z_{l,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{l,j}(x), \quad u_{l,j}(N_j)|_{t=\tau_1=0} = 0,$$

$$u_{l,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{l,j}(x,t), \quad d_{l,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_l(j-1,t),$$

$$z^0_{l,j}(x)|_{x=j-1} = -c_l(j-1,t), \quad l=0,1, \quad j=1,2. \tag{3.9}$$

Отметим, что при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль, поэтому начальное условие удовлетворяется функцией (3.8) при любых произвольных $z_{l,j}(x,t)$. За счет этого можем произвольным образом задать начальное условие для этих функции. Это условие выбрано в виде $z_{l,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{l,j}(x)$, где $z^0_{l,j}(x)$-произвольная функция.

Подставим функцию (3.8) в уравнение (3.7), тогда для номеров $l = 0,1$ получим соотношение

$$T_1\{v_l(x,t) + c_l(x,t)exp(-\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{l,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{l,j}(N_j)]\} \equiv \sum_{j=1}^{2} T_{1,j}u_{l,j}(N_j) = 0,$$

$$T_{1,j} \equiv \partial_{\tau_1} - \partial^2_{\xi_j}, \quad l=0,1, \quad j=1,2.$$

Отсюда вытекает, что (3.8) будет решением уравнения (3.7), если функция $u_{l,j}(N_j)$ будет выбрана, как решение уравнения $T_{l,j}u_{l,j}(N_j) = 0, \quad l=0,1, \quad j = 1,2$. Решение этого уравнения при краевых условиях из (3.9), можно записать в виде

$$u_{l,j}(N_j) = d_{l,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}),$$

здесь $d_{l,j}(x,t)$- гладкая функция в области $\overline{\Omega}_1$, но пока произвольная . На основании леммы 0.1, для этой функции справедлива оценка

$$|u_{l,j}(N_j)| < cexp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}).$$

В следующем ($i = 2$) шаге уравнение (3.7) неоднородное и его правая часть, с учетом (3.8), запишется

$$F_2(M) = f(x,t) - D_\tau u_0(M) = f(x,t) -$$

$$-b(t)[v_0(x,t) + \sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})].$$

Присутствие в правой части выражения $f(x,t) - b(t)v_0(x,t)$ выведет решение уравнения (3.7) из класса U, так как присутствие такого члена приведет к появлению в выражении для функции $u_{2,j}(N_j)$ регулярного слагаемого, т.е. она не станет погранслойной функцией. Поэтому обеспечивая разрешимости этого уравнения в классе U должны избавиться от такого члена. В силу произвольности функции $v_0(x,t)$ выбрем ее, как решение уравнения

$$b(t)v_0(x,t) = f(x,t),$$

тогда уравнение (3.7) при $i = 2$ примет вид

$$T_1 u_2(M) = -b(t) \sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Этим обеспечивается разрешимость последнего уравнения в классе U, тогда его решение представимо в виде

$$u_2(M) = v_2(x,t) + c_2(x,t) exp(-\tau_2) +$$

$$\sum_{j=1}^{2} [z_{2,j}(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_{2,j}(N_j)],$$

если функция $u_{2,j}(N_j)$ будут выбраны, как решения уравнения

$$T_{1,j} u_{2,j}(N_j) = -b(t) d_{0,j}(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Решением этого уравнения, при краевых условиях полученных из следующих соотношений:

$$u_{2,j}(N_j)|_{t=\tau_1=0} = 0, \quad u_{2,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{2,j}(x,t),$$

$$d_{2,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_2(j-1,t), \quad z_{2,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{2,j}(x),$$

$$z^0_{2,j}(x)|_{x=j-1} = -c_2(j-1,t), c_2(x,t)|_{t=0} = -v_2(x,0), \quad j = 1,2,$$

будет функция

$$u_{2,j}(N_j) = d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) + b(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1),$$

$$I_{3,j}(\xi_j,\tau_1) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\infty}\frac{erfc(\frac{y}{2\sqrt{s}})}{\sqrt{\tau_1-s}}[exp(-\frac{(\xi_j-y)^2}{4(\tau_1-s)})-$$

$$-exp(-\frac{(\xi_j+y)^2}{4(\tau_1-s)})]dyds.$$

Согласно лемме 0.2 для интеграла $I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)$ справедлива оценка

$$|I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)| < c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}),$$

тогда, на основании леммы 0.1, и функция $u_{2,j}(N_j)$ будет иметь оценку

$$|u_{2,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}).$$

Рассмотрим правую часть следующего итерационного уравнения (3.7) при $i = 3$

$$F_3(M) = L_\xi u_0(M) - D_\tau u_1(M) =$$

$$a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j}d_{0,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})) - b(t)v_1(x,t)-$$

$$-b(t)\sum_{j=1}^{2} d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}), \quad D_{x,j} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\frac{d}{dx} + \varphi_j^{''}(x).$$

Члены, содержащие производную по ξ_j, приведут к появлению секулярных членов в решении уравнения (3.7), причем эти особенности будут расти ростом номера итерации, т.е. решение выведется из класса U. Поэтому, выбирая функцию $d_{0,j}(x,t)$, как решение задачи

$$D_{x,j}d_{0,j}(x,t) = 0, \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t)$$

избавляемся от такого члена. Кроме этого, как отметили выше, присутствие члена $b(t)v_1(x,t)$ в правой части уравнения (3.7) при $i = 3$, также выведет решение из класса U, поэтому функцию $v_1(x,t)$ выберем равным нулю.

После таких процедур уравнение (3.7) при $i=3$ запишется

$$T_1u_3(M)=F_3(M), \qquad F_3(M)=-b(t)\sum_{j=1}^{2}d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Это уравнение разрешимо в U и его решение можно представить в виде (3.8) с заменой индекса l на 3.

Вычислим свободный член следующего ($i=4$) итерационного уравнения (3.7), т.е. имеем

$$F_4(M)=a(x)\sum_{j=1}^{2}D_{x,j}d_{1,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}))-$$

$$-b(t)v_2(x,t)-b(t)\sum_{j=1}^{2}[d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+$$

$$-d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)]--\partial_t v_0(x,t)-\partial_t c_0(x,t)exp(-\tau_2)-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}[\partial_t d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})-\partial_t z_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})].$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (3.7) в U, в правой части $F_4(M)$ произведем приравнивания к нулю отдельных его членов

$$D_{x,j}d_{1,j}(x,t)=0, \quad b(t)v_2(x,t)+\partial_t v_0(x,t)=0,$$

$$\partial_t c_0(x,t)=0, \qquad \partial_t z_{0,j}(x,t)=0, \quad j=1,2.$$

Для первого уравнения, на основании того, что $v_1(x,t)\equiv 0$, имеем нулевое начальное условие $d_{1,j}(x,t)|_{x=j-1}=-v_1(j-1,t)=0$, поэтому оно имеет тривиальное решение $d_{1,j}(x,t)=0$, а, следовательно, и $u_{1,j}(N_j)\equiv 0$. Из остальных уравнений определяем

$$v_2(x,t)=-b^{-1}(t)\partial_t v_0(x,t), \qquad c_0(x,t)|_{t=0}=h(x)-v_0(x,0),$$

$$z_{0,j}(x,t)=z^0_{0,j}(x).$$

После такого выбора правая часть $F_4(M)$ перепишется

$$F_4(M)=-\sum_{j=1}^{2}\Big\{[b(t)d_{2,j}(x,t)+\partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+$$

$$+b^2(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)\Big\}\,.$$

Уравнение (3.7, $i = 4$), с такой правой частью, разрешимо в классе U и его решение представимо в виде

$$u_4(M) = v_4(x,t) + c_4(x,t)exp(-\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{4,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{4,j}(N_j)],$$

если функция $u_{4,j}(N_j)$ будет решением уравнения:

$$T_{1,j}u_{4,j}(N_j) = -[b(t)d_{2,j}(x,t) + \partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})-$$

$$-b^2(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1).$$

Правая часть $F_5(M)$ следующего итерационного уравнения, по отношению к $F_4(M)$, будет содержать дополнительно слагаемое $L_\zeta u_0(M)$. Это слагаемое, также как и выражение $L_\xi u_0(M)$ приведет к появлению в решении секулярных членов. Поэтому должны каждый раз избавляться от такого члена за счет выбора произвольной функции $z^0_{0,j}(x)$. Вычислим

$$L_\zeta u_0(M) = \sum_{j=1}^{2} D_{x,j}z_{0,j}(x,t)\partial_{\zeta_j}erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$$

и, выбирая $z_{0,j}(x,t)$, как решение задачи

$$D_{x,j}z_{0,j}(x,t) = 0,$$

$$z_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t), \qquad j = 1,2$$

уничтожаем слагаемое $L_\zeta u_0(M)$. Выше определили $z_{0,j}(x,t)$ в виде $z_{0,j}(x,t) = z^0_{0,j}(x)$, поэтому предыдущие соотношения обеспечиваются выбором $z^0_{0,j}(x)$, как решения задачи

$$D_{x,j}z^0_{0,j}(x) = 0,$$

$$z^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t), \qquad j = 1,2.$$

Таким образом полностью определили главный член асимптотики.

Как увидели выше, функция $u_{i,j}(N_j)$ будет содержать функцию $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})$

и интеграл, аналогичное $I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)$. Используя результаты лемм 0.1 и 0.2, легко устанавливаются следующие оценки:

$$|I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}), \quad |u_{i,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}),$$

кроме того функции $z_{i,j}(x,t)exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}), \quad j = 1,2$ входящие в решение $u_i(M)$, описывают угловые пограничные слои в окрестности точек $(0,0)$, $(0,1)$ и для них справедлива оценка

$$|z_{i,j}(x,t)exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})| < c\ exp(-\tau_2 - \frac{\zeta_j^2}{8t}). \tag{3.10}$$

Далее повторяя вышеописанный процесс, методом индукции можем определить все коэффициенты разложения (3.6), причем коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль.

Из процесса построения функций $u_{i,j}(N_j)$ и полученных для них оценок замечаем, что $u_{i,j}(N_j)$ описывает параболический пограничный слой вдоль $x = 0, \quad x = 1$. А участвующая в описании углового пограничного слоя функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ также является функцией параболического програнслоя, при этом эти функции имеют сингулярности одного порядка относительно малого параметра:

$$\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}} = \frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon^3}\sqrt{\frac{t}{\epsilon^2}}} = \frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon}\sqrt{t}} = \frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}.$$

Отсюда заключаем, что угловой пограничный слой описывается функцией являющейся произведением параболической $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ и экспоненциальной $exp(-\tau_2)$ погранслойных функций. Причем для углового пограничного слоя справедлива оценка (3.10).

3.1.4 Оценка остаточного члена

Произведем в частичной сумме

$$u_{\epsilon,n}(M) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \{v_{2i}(x,t) + c_{2i}(x,t)exp(-\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2)+u_{2i,j}(N_j)]\Bigg\},$$

построенной вышеописанным способом, сужение посредством регуляризующих функций (3.2):

$$u_{\epsilon,n}(x,t,q(x,t,\epsilon))=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^i\Bigg\{v_{2i}(x,t)+c_{2i}(x,t)exp(-\frac{\psi(t)}{\epsilon})+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{i,j}(x,t)exp(-\frac{\psi(t)}{\epsilon})erfc(\frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon t}})+u_{i,j}(x,t,\frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\frac{t}{\epsilon^2})]\Bigg\}. \quad (3.11)$$

Можно показать, что построенная частичная сумма (3.11) является асимптотическим решением исходной задачи (3.1), т.е., на основании леммы 0.3, справедлива следуюшая теорема.

Теорема 3.1 *Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда для достаточно малых* $\epsilon \to 0$ *в прямоугольнике* $\bar{\Omega}_1$ *имеет место следующая оценка:*

$$|u(x,t,\epsilon)-u_{\epsilon,n}(x,t,q(x,t,\epsilon))|<c\epsilon^{n+\frac{1}{2}}$$

$\forall n=0,1,2,\ldots,$ *т.е. частичная сумма (3.11) является асимптотическим решением задачи (3.1) при* $\epsilon \to 0$.

3.1.5 Пример

В качестве примера рассмотрим задачу

$$\epsilon\partial_t u(x,t,\epsilon)=\epsilon^2(1+x)^2\partial_x^2 u(x,t,\epsilon)-(1+3t^2)u(x,t,\epsilon)+t^2+x^2,$$

$$(x,t)\in\Omega_1,\quad u(x,t,\epsilon)|_{t=0}=h(x),\quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0}=u(x,t,\epsilon)|_{x=1}=0.$$

Для нее вводим следующие регуляризующие переменные

$$\tau_1=\frac{t}{\epsilon^2},\ \tau_2=\frac{t+t^3}{\epsilon},\quad \xi_j=\frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\quad \zeta_j=\frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon}},$$

$$\varphi_j(x)=(-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j}),\quad j=1,2.$$

Коэффициент $u_0(M)$ разложения (3.6), при нулевой степени малого параметра, должен удовлетворять уравнению

$$\partial_{\tau_1} u_0(M) - \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j} u_0(M) = 0.$$

Это уравнение в классе U имеет решение представимое в виде

$$u_0(M) = v_0(x,t) + c_0(x,t)exp(-\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} [z_{0,j}(x,t)\exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) + u_{0,j}(N_j)],$$

если функция $u_{0,j}(N_j)-$ решение уравнения

$$\partial_{\tau_1} u_{0,j}(N_j) - \partial^2_{\xi_j} u_{0,j}(N_j) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Краевые условия свяжутся соотношениями

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0), \quad z_{0,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{0,j}(x),$$

$$u_{0,j}(N_j)|_{t=0} = 0, \quad z_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t),$$

$$u_{0,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{0,j}(x,t), \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t)$$

Уравнения для определения функций $v_0(x,t)$, $c_0(x,t)$, $z_{0,j}(x,t)$ запишутся

$$(1+3t^2)v_0(x,t) = t^2 + x^2, \quad \partial_t c_0(x,t) = 0, \quad \partial_t z_{0,j}(x,t) = 0.$$

Отсюда и из уравнения относительно функции $u_{0,j}(N_j)$, при соответствующих начальных и краевых условиях, найдем

$$v_0(x,t) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2}, \quad c_0(x,t) = h(x) - v_0(x,0), \quad z_{0,j}(x,t) = z^0_{0,j}(x),$$

$$u_{0,j}(N_j) = d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Вошедшие в эти соотношения произвольные функции $z^0_{0,j}(x)$, $d_{0,j}(x,t)$ определяются из следующих задач:

$$\frac{dz^0_{0,j}(x)}{dx} - \frac{1}{2(1+x)} z^0_{0,j}(x) = 0, \quad z^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -h(j-1) + (j-1)^2,$$

$$\partial_x d_{0,j}(x,t) - \frac{1}{2(1+x)}d_{0,j}(x,t) = 0, \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -\frac{(j-1)^2 + t^2}{1+3t^2}.$$

Решив эти задачи определим

$$z^0_{0,j}(x) = (j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}, \quad d_{0,j}(x,t) = -\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}},$$

тогда, на основании полученных выражений, главный член асимптотики решения расширенной задачи запишется:

$$u_0(M) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2} + [h(x) - x^2]exp(-\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[(j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}\exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) -$$

$$-\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}}erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}].$$

Производя здесь сужение, посредством регуляризующих функций, получим главный член асимптотики решения исходной задачи:

$$u_0(x,t,q(x,t,\epsilon)) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2} + [h(x) - x^2]exp(-\frac{t+t^3}{\epsilon}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[(j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}exp(-\frac{t+t^3}{\epsilon})erfc(\frac{(-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j})}{2\epsilon\sqrt{t}}) -$$

$$-\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}}erfc(\frac{(-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j})}{2\sqrt{\epsilon t}})].$$

3.2 Скалярная задача с потенциалом, зависящий от x и t

В данном параграфе изучается задача (3.1) в случае, когда потенциал зависит от двух аргументов, т.е. функция $b(t)$ принимается как $b(x,t)$. Тогда регуляризуюшая функция соответствующая регуляризующей переменной τ_1 будет зависеть от двух аргументов, а поэтому будет определяться из задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. Задачи Коши для уравнений Гамильтона-Якоби изучены в работе [91].

Задачу (3.1) будем изучать при выполнении условий 1)-3) параграфа 3.1 и условия:

5) действительная часть решения $\psi(x,t)$ задачи Коши

$$\partial_t\psi(x,t) = -a(x)(\partial_x\psi(x,t))^2 + b(x,t), \qquad \psi(x,t)|_{t=0} = 0$$

была неотрицательной, т.е. $Re(\psi(x,t)) \geq 0 \ \ \forall (x,t) \in \Omega_1$.

3.2.1 Регуляризация задачи

Регуляризация задачи (3.1) осуществляется введением следующих регуляризующих переменных:

$$\tau_1 = \frac{t}{\epsilon^2}, \ \ \tau_2 = \frac{\psi(x,t)}{\epsilon}, \ \ \psi(x,0) = 0,$$

$$\zeta_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{\epsilon}} \int\limits_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \ \ \equiv \ \ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j(x),$$

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j(x), \ \ \varphi_j(j-1) = 0, j = 1, 2.$$

Для расширенной функции $\tilde{u}(x,t,\eta,\epsilon)$, $\eta = (\zeta,\xi,\tau)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)$, $\tau = (\tau_1,\tau_2)$ такой, что

$$\begin{gathered}\tilde{u}(M,\epsilon)|_{\eta=\theta(x,t,\epsilon)} \equiv u(x,t,\epsilon), \\ \theta(x,t,\epsilon) = (\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(x), \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_(x), \frac{t}{\epsilon^2}, \frac{\psi(x,t)}{\epsilon}), \\ \varphi = (\varphi_1,\varphi_2), \qquad M = (x,t,\eta).\end{gathered} \tag{3.12}$$

найдем производные

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_t\tilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2}\partial_{\tau_1}\tilde{u}(M,\epsilon) + \frac{\partial_t\psi(x,t)}{\epsilon}\partial_{\tau_2}\tilde{u}(M,\epsilon)\right)|_{\eta=\theta(x,t,\epsilon)} \ ,$$

$$\partial_x u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_x\tilde{u}(M,\epsilon) + \frac{\partial_x\psi(x,t)}{\epsilon}\partial_{\tau_2}\tilde{u}(M,\epsilon) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}[\frac{\varphi_j'(x)}{\sqrt{\epsilon}}\partial_{\zeta_j}\tilde{u}(M,\epsilon) + \frac{\varphi_j'(x)}{\sqrt{\epsilon^3}}\partial_{\xi_j}\tilde{u}(M,\epsilon)]\right)|_{\eta=\theta(x,t,\epsilon)} \ ,$$

$$\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_x^2\tilde{u}(M,\epsilon) + (\frac{\partial_x\psi(x,t)}{\epsilon})^2\partial_{\tau_2}^2\tilde{u}(M,\epsilon) + \right.$$

$$+\frac{1}{\epsilon}L_{\psi}\tilde{u}(M,\epsilon)+\sum_{j=1}^{2}[\frac{\varphi_j'^2(x)}{\epsilon}\partial^2_{\zeta_j}\tilde{u}(M,\epsilon)+$$

$$+\frac{\varphi_j'^2(x)}{\epsilon^3}\partial^2_{\xi_j}\tilde{u}(M,\epsilon)+\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j'(x)\partial^2_{x,\zeta_j}\tilde{u}(M,\epsilon)+\frac{2}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j'(x)\partial^2_{x,\xi_j}\tilde{u}(M,\epsilon)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j''(x)\partial_{\zeta_j}\tilde{u}(M,\epsilon)+\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j''(x)\partial_{\xi_j}\tilde{u}(M,\epsilon)]\Big)\Big|_{\eta=\theta(x,t,\epsilon)}.$$

Тогда, на основании (3.1),(3.12) и найденных производных для расширенной функции $\tilde{u}(M,\epsilon)$, можно поставить задачу

$$\tilde{L}_\epsilon\tilde{u}(M,\epsilon)\equiv\frac{1}{\epsilon}T_\tau\tilde{u}(M,\epsilon)+D_\tau\tilde{u}(M,\epsilon)-\sqrt{\epsilon}L_\xi\tilde{u}(M,\epsilon)+\epsilon[T_t-$$

$$-L_\psi]\tilde{u}(M,\epsilon)-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta\tilde{u}(M,\epsilon)-\epsilon^2L_x\tilde{u}(M,\epsilon)=f(x,t),\qquad M\in Q_3,$$

$$\tilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau_j=0}=h(x),\quad \tilde{u}(M,\epsilon)|_{x=j-1,\xi_j=0,\zeta_j=0}=0,\quad j=1,2,\tag{3.13}$$

$$D_\tau\equiv\partial_t\psi(x,t)\partial_{\tau_2}-a(x)(\partial_x\psi(x,t))^2\partial^2_{\tau_2}+b(x,t),\quad L_\xi\equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\xi_j},$$

$$L_{\xi_j}\equiv2\varphi_j'(x)\partial^2_{x,\xi_j}+\varphi_j''(x)\partial_{\xi_j},\quad T_\tau\equiv\partial_{\tau_1}-D_\xi,\quad D_\xi\equiv\sum_{j=1}^{2}\partial^2_{\xi_j},$$

$$T_t\equiv\partial t-D_\zeta,\ D_\zeta\equiv\sum_{j=1}^{2}\partial^2_{\zeta_j},\quad L_\zeta\equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\zeta_j},\quad L_x\equiv a(x)\partial^2_x,$$

$$L_\psi\equiv2\partial_x\psi\partial^2_{x,\tau_2}+\partial^2_x\psi(x,t)\partial_{\tau_2},\ L_{\zeta_j}\equiv2\varphi_j'(x)\partial^2_{x,\zeta_j}+\varphi_j''(x)\partial_{\zeta_j},$$

причем имеет место тождество

$$\tilde{L}_\epsilon\tilde{u}(M,\epsilon)|_{\eta=\theta(x,t,\epsilon)}\equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon).\tag{3.14}$$

3.2.2 Итерационные задачи и алгоритм решения

Расширенная задача (3.13) регулярна по $\epsilon\to0$, поэтому решение этой задачи ищем в виде разложения

$$\tilde{u}(M,\epsilon)=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^{\frac{i}{2}}u_i(M)+\epsilon^{\frac{n+1}{2}}R_{\epsilon,n}(M),\tag{3.15}$$

тогда для коэффициентов этого разложения получим следующие итерационные задачи:

$$T_\tau u_\nu(M)=0,\quad \nu=0,1,\quad u_0(M)|_{t=\tau=0}=h(x),\quad u_0(M)|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0}=0,$$

$$T_\tau u_2(M)=f(x,t)-D_\tau u_0(M),\qquad T_\tau u_i(M)=-D_\tau u_{i-2}(M)+$$

$$+L_\xi u_{i-3}(M)-[T_t-L_\psi]u_{i-4}(M)+L_\zeta u_{i-5}(M)+L_x u_{i-6}(M),$$

$$u_i(M)|_{t=\tau=0}=0,\quad u_i(M)|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0}=0,\quad j=1,2,\quad i=1,2,\dots \tag{3.16}$$

Введем класс функций в котором будут решаться итерационные задачи (3.16):

$$U=\{u(M):u(M)=v(x,t)+c(x,t)exp(-\tau_2)+$$

$$\sum_{j=1}^{2}[y_j(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2)+u_j(N_j)],$$

$$N_j=(x,t,\xi_j,\tau_1),\ y_j(x,t),\ c(x,t),\ v(x,t)\in C^\infty(\bar{\Omega}_1),$$

$$|u_j(N_j)|<c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}),\quad j=1,2\}.$$

Отметим, что функции $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ и $u_j(N_j)$, в силу того, что

$$\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}=\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}},$$

имеют одинаковые оценки:

$$|erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})|<c\ exp(-\frac{\zeta_j^2}{8t}),\quad |u_j(N_j)|<c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1})=c\ exp(-\frac{\zeta_j^2}{8t}).$$

Это означает, что функции $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ и $u_j(N_j)$ являются функциями параболического пограничного слоя описывающие пограничные слои вдоль границ $x=0,\ x=1$. Как видно из структуры решения функция $u_j(N_j)$ самостоятельно описывает пограничный слой, тогда как функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ совместно с функцией $exp(-\tau_2)$ описывает угловой пограничный слой в окрестности точек (1,0), (0,0).

Теорема 3.2 *Пусть*

$$|H(N_j)|<c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}),\quad j=1,2, \tag{3.17}$$

тогда для решения задачи

$$Tu(N_j) \equiv \partial_{\tau_1} u(N_j) - \partial^2_{\xi_j} u(N_j) = H(N_j),$$

$$u(N_j)|_{\tau_1=0} = 0, \quad u(N_j)|_{\xi_j=0} = k_j(x,t), \quad j = 1,2 \tag{3.18}$$

справедлива оценка

$$|u(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}), \quad j = 1,2. \tag{3.19}$$

Доказательство. Решение задачи (3.18) может быть записано в виде

$$u(N_j) = k_j(x,t) erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tau_1} \int\limits_0^{\infty} \frac{H(x,t,s,z)}{\sqrt{\tau_1 - z}} [exp(-\frac{(\xi_j - s)^2}{4(\tau_1 - z)}) - exp(-\frac{(\xi_j + s)^2}{4(\tau_1 - z)})] ds\, dz.$$

Пусть имеет место оценка (3.17), тогда на основании лемм 0.1 и 0.2 полученная функция имеет оценку (3.19). Теорема доказана.

Уравнения (3.16) при $i = 0,1$ однородные, поэтому решения этих уравнений в классе U существуют и представимы в виде:

$$u_\nu(M) = v_\nu(x,t) + c_\nu(x,t) exp(-\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2} [y_{\nu,j}(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_{\nu,j}(N_j)], \ \nu = 0,1, \tag{3.20}$$

если функции $u_{\nu,j}(N_j),\ j = 1,2$ решения уравнений

$$Tu_{\nu,j}(N_j) = 0 \ \ j = 1,2. \tag{3.21}$$

Удовлетворяя функцию (3.20) краевым условиям, для функций входящих в решение (3.20), получим соотношения

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0),\ c_1(x,t)|_{t=0} = -v_1(x,0),\ u_{\nu,j}(N_j)|_{t=\tau_1=0} = 0,$$

$$u_{\nu,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{\nu,j}(x,t), \quad d_{\nu,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_\nu(j-1,t),\ \nu = 0,1,$$

$$y_{\nu,j}(x,t)|_{t=0} = y^0_{\nu,j}(x), \quad y^0_{\nu,j}(x)|_{x=j-1} = -c_\nu(j-1,t),\ j = 1,2. \tag{3.22}$$

Отметим, что при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль, поэтому начальное условие удовлетворяется при любых значениях функции $y_{\nu,j}(x,t)$. Этот произвол используем для удовлетворения граничного условия при $x = j-1$ и погашения особенностей появляющихся за счет производных по ζ_j, входящих в правые части итерационных уравнений.

Решением уравнения (3.21), при соответствующих краевых условиях из (3.22), является функция

$$u_{\nu,j}(N_j) = d_{\nu,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}), \tag{3.23}$$

которая, на основании леммы 0.1, имеет оценку

$$|u_{\nu,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}). \tag{3.24}$$

Остальные функции входящие в решение (3.20) пока произвольны и будут определены из условий разрешимости задач (3.16),(3.22).

Рассмотрим вопрос разрешимости уравнения (3.16) при $i = 2$, для чего правую часть этого уравнения предварительно обозначив через $F_2(M)$ и вычислим ее. Так как, на основании 5) и (3.23), оператор $D_\tau u_0(M)$ определяется соотнощением

$$D_\tau u_0(M) = b(x,t)\sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}} + b(x,t)v_0(x,t),$$

то правая часть запишется в виде

$$F_2(M) = f(x,t) - b(x,t)[\sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) + v_0(x,t)].$$

Уравнение с такой правой частью имеет решение в классе U и его решение представимо в виде (3.20), если функции $u_{2,j}(N_j)$ будет решением уравнения

$$\sum_{j=1}^{2} Tu_{2,j}(N_j) = F_2(M),$$

причем функция $u_{2,j}(N_j)$ должна иметь оценку (3.24). По теореме 1 это обеспечивается, если правая часть будет удовлетворять условию

(3.17). Чтобы обеспечить выполнения неравенства (3.17) должны добиться обращения в нуль выражения $f(x,t)-b(x,t)v_0(x,t)$, которое входит в правую часть $F_2(M)$, т.е.выбором $v_0(x,t)=-\frac{f(x,t)}{b(x,t)}$.

Уравнение

$$T_\tau u_2(M)=-b(x,t)\sum_{j=1}^{2}d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})$$

разрешимо в U и его решение представимо в виде (3.20) с индексом $\nu=2$, если функция $u_{2,j}(N_j)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$Tu_{2,j}(N_j)=-b(x,t)d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Решение этого уравнения, при соответствующих краевых условиях из (3.22), можно записать в виде:

$$u_{2,j}(N_j)=d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+d_{0,j}(x,t)I_1(x,t,\xi_j,\tau_1),\quad I_1(x,t,\xi_j,\tau_1)=$$

$$=-\frac{b(x,t)}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\infty}\frac{erfc(\frac{s}{2\sqrt{z}})}{\sqrt{\tau_1-z}}[exp(-\frac{(\xi_j-s)^2}{4(\tau_1-z)})-exp(-\frac{(\xi_j+s)^2}{4(\tau_1-z)})]ds\ dz.$$

Входящие в выражение для $u_{2,j}(N_j)$ функции $d_{0,j}(x,t)$, $d_{2,j}(x,t)$ пока произвольны. Ниже будет показано, что они определяются из следующих задач:

$$q_j^1(x)\partial_x d_{\nu,j}(x,t)+q_j^2(x)d_{\nu,j}(x,t)=0,\quad \nu\geq 0,$$

$$d_{\nu,j}(x,t)|_{x=j-1}=-v_\nu(j-1,t),\quad j=1,2, \tag{3.25}$$

где $q_j^1(x)$, $q_j^2(x)$ выражаются через $a(x)$, поэтому по условию 1) они гладкие функции $\forall\ x\in[0,1]$. Тогда и решение задачи (3.25) гладкое, а потому, на основании лемм 0.1 и 0.2, для интеграла $I_1(x,t,\xi_j,\tau_1)$ справедлива оценка параболической погранслойной функции

$$|I_1(x,t,\xi_j,\tau_1)|<c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}).$$

Тогда и для функции $u_{2,j}(N_j)$ имеем аналогичную оценку

$$|u_{2,j}(N_j)|<c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}).$$

Итерационное уравнение с индексом $i = 3$ будет иметь правую часть

$$F_3(M) = L_\xi u_0(M) - D_\tau u_1(M) =$$

$$= a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j} d_{0,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})) - b(x,t)v_1(x,t) -$$

$$-b(x,t)\sum_{j=1}^{2} d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}), \quad D_{x,j} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\frac{d}{dx} + \varphi_j^{''}(x).$$

Члены, содержащие производную по ξ_j, приведут к появлению в решении уравнения секулярных членов, особенности которых будут расти ростом номера итерации, поэтому такие члены не будут удовлетворять условиям теоремы 1. Кроме того условиям теоремы 1 также не будет удовлетворять член $b(x,t)v_1(x,t)$. Поэтому, выбираем функцию $d_{0,j}(x,t)$, как решения задачи

$$D_{x,j} d_{0,j}(x,t) = 0, \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t),$$

а функцию $v_1(x,t)$, как решение уравнения $b(x,t)v_1(x,t) = 0$, т.е. $v_1(x,t) = 0$. Этим показали вывод уравнения (3.25).

После такого шага уравнение (3.16) при $i = 3$ запишется

$$T_\tau u_3(M) = F_3(M), \qquad F_3(M) = -b(x,t)\sum_{j=1}^{2} d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Последнее уравнение разрешимо в U и его решение можно представить в виде (3.20) с заменой индекса ν на 3, если функция $u_{3,j}(N_j)$ решение уравнения

$$T_{3,j}(N_j) = -b(x,t)d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

В следующем шаге ($i = 4$) итерационное уравнение (3.16) имеет правую часть

$$F_4(M) = a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j} d_{1,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})) -$$

$$-b(x,t)v_2(x,t) - b(x,t)\sum_{j=1}^{2}[d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) +$$

$$-d_{0,j}(x,t)I_1(x,t,\xi_j,\tau_1)] - \partial_t v_0(x,t) - \partial_t c_0(x,t)exp(-\tau_2)-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}[\partial_t d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) + \partial_t y_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2)]+$$

$$+[q^{1,1}(x,t)\partial_x c_0(x,t) + q^{1,2}(x,t)c_0(x,t)]exp(-\tau_2),$$

$$q^{1,1}(x,t) = 2\partial_x\psi(x,t),\ q^{1,2}(x,t) = \partial_x^2\psi(x,t).$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (3.16) в U с такой правой частью, потребуем выполнения следующих соотношений:

$$D_{x,j}d_{1,j}(x,t) = 0, \quad b(x,t)v_2(x,t) + \partial_t v_0(x,t) = 0, \qquad \partial_t y_{0,j}(x,t) = 0,$$

$$\partial_t c_0(x,t) = q^{1,1}(x,t)\partial_x c_0(x,t) + q^{1,2}(x,t)c_0(x,t), \quad j = 1,2. \tag{3.26}$$

Тогда уравнение 3.16) при ($i = 4$) запишется

$$T_\tau u_4(M) = -\sum_{j=1}^{2}\{[b(x,t)d_{2,j}(x,t) + \partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+$$

$$+b(x,t)d_{0,j}(x,t)I_1(x,t,\xi_j,\tau_1)\}$$

и его решение представимо в виде (3.20) с индексом $\nu = 4$, если функция $u_{4,j}(N_j)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$Tu_{4,j}(N_j) = -[b(x,t)d_{2,j}(x,t) + \partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})-$$

$$-b(x,t)d_{0,j}(x,t)I_1(x,t,\xi_j,\tau_1) \equiv F_{4,j}(N_j).$$

На основании лемм 0.1 и 0.2 правая часть имеет оценку

$$|F_{4,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}),$$

тогда по теореме 3.2 и для решения $u_{4,j}(N_j)$ справедлива оценка

$$|u_{4,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}),$$

т.е. решение (3.20) при $\nu = 4$ принадлежит классу U.

Для первого уравнения (3.26), на основании того, что $v_1(x,t) \equiv 0$, имеем нулевое начальное условие $d_{1,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_1(j-1,t) = 0$, поэтому оно имеет тривиальное решение $d_{1,j}(x,t) = 0$, а, следовательно, и $u_{1,j}(N_j) \equiv 0$. Второе и третье уравнения позволяют найти

$$v_2(x,t) = -b^{-1}(x,t)\partial_t v_0(x,t), \qquad y_{0,j}(x,t) = y^0_{0,j}(x).$$

Решая дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка относительно $c_0(x,t)$ при начальном условии

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0)$$

определим функцию $c_0(x,t)$.

Из функций, входящих в главный член асимптотики, остается неопределенным функция $y^0_{0,j}(x)$. Она будет определена в следующем шаге из задачи Коши

$$q^1_j(x)\frac{dy^0_{0,j}(x)}{dx} = q^2_j(x)y^0_{0,j}(x) = 0, \;\; y^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t),$$

где входящее в начальное условие переменная t принимается как параметр. Эта задача получается из условия разрешимости уравнения (3.16) при $i = 5$, а, именно, обращая в нуль выражение $L_\zeta u_0(M)$, присутствие которого в правой части, подобно выражению $L_\xi u_0(M)$, может привести к появлению в решении секулярных членов особенность которых будут расти с увеличением номера итерации.

Далее, вышеописанный процесс построения решения повторяется, методом индукции можем определить все коэффициенты разложения (3.15), причем коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль. Из процесса построения функций $u_{i,j}(N_j), \quad erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ и полученных для них оценок замечаем, что $u_{i,j}(N_j)$ описывает параболический пограничный слой вдоль $x = 0, \quad x = 1$. А участвующая в описании углового пограничного слоя функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ также является функцией параболического програнслоя, при этом эти функции имеют сингулярности одного порядка:

$$\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}} = \frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon^3}\sqrt{\frac{t}{\epsilon^2}}} = \frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon}\sqrt{t}} = \frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}.$$

Отсюда заключаем, что при описании углового пограничного слоя участвуют параболическая $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ и экспоненциальная $exp(\tau_2)$ погранслойные функции в виде их произведения. Причем для углового пограничного слоя справедлива оценка углового пограничного слоя :

$$|y_{i,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}exp(-\tau_2)| < c\ exp(-\tau_2 - \frac{\zeta_j^2}{8t})|,$$
$$\forall\ (x,t,\zeta_j,\tau_2) \in [0,1]\times[0,T]\times[0,+\infty)\times(-\infty,0].$$

3.2.3 Оценка остаточного члена

Таким образом нами построена частичная сумма

$$u_{\epsilon,n}(M) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \{v_{2i}(x,t) + c_{2i}(x,t)exp(-\tau_2) +$$
$$\left.\sum_{j=1}^{2}[y_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{2i,j}(N_j)]\right\},$$

преставляющая асипмтотическое решение расширенной задачи (3.13). Чтобы получить асимптотическое решение исходной задачи (3.1), на основании (3.14), мы должны произвести сужение этой частичной суммы посредством регуляризующих функций:

$$u_{\epsilon,n}(x,t,q(x,t,\epsilon)) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \left\{ v_{2i}(x,t) + c_{2i}(x,t)exp(-\frac{\psi(x,t)}{\epsilon}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{2}[z_{i,j}(x,t)exp(-\frac{\psi(x,t)}{\epsilon})erfc(\frac{\varphi_j(x)}{2\sqrt{\epsilon t}}) + u_{i,j}(x,t,\frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\frac{t}{\epsilon^2})] \right\}. \tag{3.27}$$

Теорема 3.3 *Пусть выполнены условия 1)-3),5), тогда для достаточно малых $\epsilon \to 0$ в прямоугольнике $\bar{\Omega}_1$ построенное решение (3.27) является асимптотическим решением задачи (2.1), т.е.справедлива оценка*

$$|R_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon))| = |u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon))| < M\epsilon^{n+\frac{1}{2}}$$

$\forall n = 0,1,2,\ldots$.

Доказательство вытекает из леммы 0.3.

3.3 Двумерная задача

В параграфе изучается двумерная задача вида

$$L_\epsilon u(x,y,t,\epsilon) \equiv \epsilon\partial_t u(x,y,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,y,t,\epsilon) - L(y,t)u(x,y,t,\epsilon) =$$

$$= f(x,y,t), \qquad (x,y,t)\in\Omega_2,$$

$$u(x,y,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x,y), \qquad u(x,y,t,\epsilon)|_{\partial S} = 0, \tag{3.28}$$

при $\epsilon \to 0$.

Задача изучается при следующих предположениях:

1. Оператор $L(y,t)$ при каждом $t\in[0,T]$ имеет дискретный простой спектр
$$L(t)\psi_k(y,t) = \lambda(t)\psi_k(y,t), \quad \psi_k(y,t)|_{y=0} = \psi_k(y,t)|_{y=1} = 0. \tag{3.29}$$

2. Спектр оператора $L(y,t)$ удовлетворяет неравенствам $\ldots < \lambda_k(t) < \ldots < \lambda_2(t) < \lambda_1(t) < 0 \qquad \forall t\in[0,T]$.

3. Система собственных функций $\psi_k(y,t)$ при каждом $t \in [0,T]$ образует полную ортонормированную систему функций в некотором гильбертовом пространстве H.

4. Гладкость заданных функций и спектра таковы, что все ряды по собственным функциям и ряды полученные почленным дифференцированием по x, t до любого порядка и по y до второго порядка, сходятся в нормированном пространстве U, которое вводится ниже.

5. $a(x) > 0$ при всех $x\in[0,1]$ и $a(x)$, $f(x,y,t)$, $h(x,y)$ гладкие функции.

6. Выполнены условия согласования начальных и граничных условий: $h(0,y) = h(1,y) = 0$.

При этих условиях будет строиться регуляризованная асимптотика [83] решения задачи (3.28), которая содержит экспоненциальные, параболические и угловые погранслойные функции. Экспоненциальная погранслойная функция описывает пограничный слой вдоль $t = 0$. Пограничные слои вдоль $x = 0$ и $x = 1$ описываются параболическими погранслойными функциями. Угловые погранслойные функции в окрестности ребер (0,y,0) и (1,y,0) задаются в виде произведения экспоненциальной и параболической погранслойных функций. В отличие от скалярной задачи изученной в параграфе 2.1 для описания пограничного слоя вдоль $t = 0$ вводятся счетное количество регуляризующих переменных.

3.3.1 Регуляризация задачи

При описании пограничного слоя вдоль $t = 0$, мы будем использовать спектр предельного оператора, поэтому следует предварительно определить спектр $\{\lambda_k(t)\}$ и соответствующие им собственные функции $\{\psi_k(y,t)\}$. Для регуляризации задачи (3.28) вводим следующие регуляризующие переменные:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon^2}, \quad \eta_k = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \lambda_k(s)ds, \quad \zeta_j = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j(x),$$

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j(x), \quad \varphi_j(x) = (-1)^{j-1}\int\limits_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \tag{3.30}$$

$$\varphi_j(j-1) = 0, \ k \geq 1, \ j = 1, 2.$$

Для дальнейшего удобства введем следующие обозначения:

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots), \ \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2),$$

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots), \quad \theta = (\xi, \zeta, \tau, \eta), \quad M = (x, y, t, \theta),$$

$$\theta(x,t,\epsilon) = \theta(\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi(x), \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(x), \frac{t}{\epsilon^2}, \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \lambda(s)ds),$$

$$0 < \xi, \zeta, \tau < +\infty \qquad -\infty < \eta < 0 \text{ при } \epsilon -> +0.$$

Произведем расширение исходной задачи (3.28), для чего вместо решения $u(x,y,t,\epsilon)$ задачи (3.28) вводим новую функцию $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, такую, что ее сужение в соответствии с (3.30) совпала с искомой функцией, т.е.

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)} \equiv u(x,y,t,\epsilon). \tag{3.31}$$

Используя (3.30), из (3.31) найдем производные

$$\partial_t u(x,y,t,\epsilon) \equiv \left(\partial_t \widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2}\partial_\tau \widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_k(t)\partial_{\eta_k}\widetilde{u}(M,\epsilon)\right)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial_x u(x,y,t,\epsilon) \equiv \Bigg(\partial_x \widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{j=1}^{2}[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_j^{'}(x)\partial_{\zeta_j}\widetilde{u}(M,\epsilon) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_j^{'}(x)\partial_{\xi_j}\widetilde{u}(M,\epsilon)]\Bigg)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$\partial_x^2 u(x,y,t,\epsilon) \equiv \Bigg(\partial_x^2 \widetilde{u}(M,\epsilon) + \sum_{j=1}^{2}[\frac{1}{\epsilon}(\varphi_j^{'})^2\partial_{\zeta_j}^2\widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^3}\partial_{\xi_j}^2\widetilde{u}(M,\epsilon) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}L_{j,\zeta}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}L_{j,\xi}\widetilde{u}(M,\epsilon)]\Bigg)\Big|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)},$$

$$L_{j,\zeta} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\partial_{\zeta_j,x}^2 + \varphi_j^{''}(x)\partial_{\zeta_j}, \quad L_{j,\xi} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\partial_{\xi_j,x}^2 + \varphi_j^{''}(x)\partial_{\xi_j}$$

и вместо задачи (3.28) рассмотрим задачу для расширенной функции $\widetilde{u}(M,\epsilon)$:

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u}(M,\epsilon) \equiv \frac{1}{\epsilon}T_1\widetilde{u}(M,\epsilon) + D_\eta \widetilde{u}(M,\epsilon) - \sqrt{\epsilon}L_\xi \widetilde{u}(M,\epsilon) + \epsilon T_2 \widetilde{u}(M,\epsilon) -$$

$$-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta \widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2 L_x \widetilde{u}(M,\epsilon) = f(x,y,t), \qquad M=(x,y,t,\theta)\in Q_4,$$

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau=\eta=0} = h(x,y), \qquad \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\partial Q_4} = 0, \tag{3.32}$$

$$T_1 \equiv \partial_\tau - D_\xi, \quad T_2 \equiv \partial_t - D_\zeta, \quad D_\eta \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(t)\partial_{\eta_k} -$$

$$-L(t), \quad L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \quad D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2}\partial_{\xi_j}^2, \quad D_\zeta \equiv \sum_{j=1}^{2}\partial_{\zeta_j}^2,$$

$$L_\xi \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{j,\xi}, \quad L_\zeta \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{j,\zeta}.$$

Если найдем решение $\widetilde{u}(M,\epsilon)$ расширенной задачи (3.32), то сужение его при $\theta=\theta(x,t,\epsilon)$ будет решением задачи (3.28) ибо

$$(\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u}(M,\epsilon))|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,y,t,\epsilon). \tag{3.33}$$

Решение расширенной задачи определяем в виде разложения:

$$\widetilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n}\epsilon^{\frac{i}{2}}u_i(M) + \epsilon^{\frac{n+1}{2}}R_{\epsilon,n}(M). \tag{3.34}$$

Для коэффициентов этого разложения, на основании задачи (3.32), получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_\nu(M) = 0, \quad T_1 u_2(M) + D_\eta u_0(M) = f(x, y, t),$$

$$u_0(M)|_{t=\tau=\eta=0} = h(x, y), \quad u_i(M)|_{t=\tau=\eta=0} = 0,$$

$$u_\nu|_{\partial Q_4} = 0, \quad u_i(M)|_{\partial Q_4} = 0,$$

$$T_1 u_i(M) = -D_\eta u_{i-2}(M) + L_\xi u_{i-3}(M) - T_2 u_{i-4}(M) + \tag{3.35}$$

$$+L_\zeta u_{i-5} + L_x u_{i-6}(M), \quad i = 3, \ldots, n, \qquad \nu = 0, 1,$$

$$\widetilde{L}_\epsilon R_{\epsilon,n}(M) = g_n(M, \epsilon), \qquad R_{\epsilon,n}(M)|_{t=0} = R_{\epsilon,n}(M)|_{\partial Q_4} = 0, \tag{3.36}$$

$$g_n(M, \epsilon) = -\sum_{l=0}^{1} \epsilon^{\frac{l}{2}} D_\eta u_{n-1+l}(M) + \sum_{l=0}^{2} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_\xi u_{n-2+l}(M) -$$

$$-\sum_{l=0}^{3} \epsilon^{\frac{l}{2}} T_2 u_{n-3+l}(M) + \sum_{l=0}^{4} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_\zeta u_{n-4+l}(M) + \sum_{l=0}^{5} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_x u_{n-5+l}(M).$$

3.3.2 Пространство решений

Введем следующий класс функций, в котором будут решаться задачи (4.58):

$$U = \{u(M) : u(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[v_k(x, t) + \sum_{l=1}^{2} u_{l,k}(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{k,j}(x, t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \omega_{k,j}^l(x, t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})) \exp(\eta_j) \Bigg] \psi_k(y, t), \quad |u_{l,k}(N_l)| < c \exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau}),$$

$$||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(t)|^2 \sup |v_k(x, t) + \sum_{l=1}^{2} u_{l,k}(N_l)|^2 +$$

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |\lambda_k(t) - \lambda_j(t)|^2 \sup |c_{k,j}(x, t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{j,k}^l(x, t)|^2 < +\infty,$$

$$N_l = (x, t, \tau, \xi_l)\}.$$

Вычислим действия операторов $T_1,\ D_\eta,\ T_2,\ L_\xi,\ L_\zeta$ на функцию $u(M)$ из класса U. Имеем

$$T_1 u(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} T_1 u_{l,k}(N_l)\psi_k(y,t),$$

$$D_\eta u(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{-\lambda_k(t)v_k(x,t) + \sum_{j=1(k\neq j)}^{\infty}[\lambda_j(t)-$$

$$-\lambda_k(t)][c_{k,j}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp(\eta_j)- \qquad (3.37)$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\lambda_k(t)u_{l,k}(N_l)\Bigg\}\psi_k(y,t),$$

$$T_2 u(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\partial_t v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_t u_{l,k}(N_l)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}[\partial_t c_{k,j}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\partial_t\omega_{k,j}^{l} erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp(\eta_j)\Bigg\}\psi_k(y,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2}u_{l,k}(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty}[c_{k,j}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp(\eta_j)\Bigg\}\partial_t\psi_k(y,t),$$

$$L_\xi u(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}L_{l,\xi}u_{l,k}(N_l),$$

$$L_\zeta u(M) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}L_{l,\zeta}\omega_{k,j}^{l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}).$$

Разложим производную $\partial_t\psi_k(y,t)$ по собственным функциям $\{\psi_k(y,t)\}$ задачи (3.29):

$$\partial_t\psi_k(y,t) = \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)\psi_r(y,t),\ \ \alpha_{r,k}(t) = (\partial_t\psi_r(t,y),\psi_k^*(t,y)),\ \ k\neq j,\ \ k,j\geq 1.$$

Производя перегруппировку членов, получим

$$T_2u(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\widetilde{v_k}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\widetilde{u_{l,k}}(N_l)+[\partial_t c_{k,k}(x,t)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)c_{r,k}(x,t)+$$

$$\sum_{l=1}^{2}(\partial_t\omega_{k,k}^{l}+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)\omega_{r,k}^{l})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_k)+$$

$$\sum_{j=1(j\neq k)}^{\infty}[\widetilde{c_{k,j}}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\widetilde{\omega_{k,j}^{l}}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp(\eta_j)\Bigg\}\psi_k(y,t), \qquad (3.38)$$

где

$$\widetilde{v_k}(x,t)=\partial_t v_k(x,t)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)v_k(x,t),$$

$$\widetilde{u_{l,k}}(N_l)=\partial_t u_{l,k}(N_l)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)u_{l,r}(N_l),$$

$$\widetilde{\omega_{k,j}^{l}}(x,t)=\partial_t\omega_{k,j}^{l}+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)\omega_{r,j}^{l},$$

$$\widetilde{c_{k,j}}(x,t)=\partial_t c_{k,j}(x,t)+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)c_{r,j}(x,t).$$

3.3.3 Решение итерационных задач

Уравнения (3.35), $\forall\ \nu = 0,1$ однородные, поэтому эти уравнения разраешимы в U и их решения представимы в виде

$$u_\nu(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{v_{\nu,k}(x,t)+c_{k,k}^{\nu}(x,t)exp(\eta_k)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}[\omega_{k,k}^{\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})exp(\eta_k)+u_{l,k}^{\nu}(N_l)]\Big\}\psi_k(y,t),\ \nu=0,1. \qquad (3.39)$$

На основании вычислений (3.37),(3.38) убеждаемся, что функция (3.39) удовлетворяет уравнению (3.35,$\nu = 0,1$), если функция $u_{l,k}^{\nu}(N_l)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$T_{1,l}u_{l,k}^{\nu}(N_l)=0, \qquad T_{1,l}\equiv\partial_\tau-\partial_{\xi_l}^2, \qquad \nu=0,1, \qquad l=1,2. \qquad (3.40)$$

Остальные функции, входящие в (3.39), пока произвольны, но они, на основании краевых условий из (3.35), связаны соотношениями

$$u^{\nu}_{l,k}(N_l)|_{t=\tau=0} = 0, \quad u^{\nu}_{l,k}(N_l)|_{\xi=0} = d^{\nu}_{l,k}(x,t),$$

$$d^{\nu}_{l,k}(x,t)|_{x=l-1} = -v_{\nu,k}(l-1,t), \quad \omega^{\nu,l}_{k,k}(x,t)|_{t=0} = k^{\nu,l}_{k,k}(x),$$

$$\omega^{\nu,l}_{k,k}(x,t)|_{x=l-1} = -c^{\nu}_{k,k}(l-1,t), \quad c^{\nu}_{k,k}(x,t)|_{t=0} = h_{\nu,k}(x)-$$

$$-v_{\nu,k}(x,0), \qquad h_{0,k}(x) = h_k(x), \quad h_{1,k}(x) = 0,$$

$$\psi_k(0,t) = \psi_k(1,t) = 0, \qquad k \geq 1, \ l = 1,2, \ \nu = 0,1. \tag{3.41}$$

Здесь, мы воспользовались разложением начальной функции $h(x,y)$ в ряд по собственным функциям $\{\psi_k(y,t)\}$ задачи (3.29):

$$h(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\psi_k(y,t)|_{t=0}.$$

Отметим, что при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль, поэтому коэффициент $\omega^{\nu,l}_{k,k}(x,t)$ при этой функции при $t = 0$ выбрали в виде $\omega^{\nu,l}_{k,k}(x,t)|_{t=0} = k^{\nu,l}_{k,k}(x)$, где $k^{\nu,l}_{k,k}(x)$-произвольная функция.

Решение уравнения (3.40), при соотвествующих краевых условиях (3.41), может быть записано в виде

$$u^{\nu}_{l,k}(N_l) = d^{\nu}_{l,k}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}), \qquad \nu = 0,1, \quad l = 1,2, \quad k \geq 1, \tag{3.42}$$

для которого справедлива оценка

$$|u^{\nu}_{l,k}(N_l)| < c\ exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau}). \tag{3.43}$$

Перейдем к следующему уравнению в (3.35), правая часть которого имеет вид:

$$F_2(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k(x,t) + \lambda_k(t)v_{0,k}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\lambda_k(t)u^0_{l,k}(N_l)\right]\psi_k(y,t),$$

здесь $f_k(x,t)-$ коэффициент разложения функции $f(x,y,t)$ по собственным функциям $\{\psi_k(y,t)\}$. Чтобы уравнение (3.35), с такой правой частью, имело решение в U, мы должны избавиться от выражения $f_k(x,t)+\lambda_k v_{0,k}(x,t)$. Это можно обеспечить, если выбрать $v_{0,k}(x,t) = -\frac{f_k(x,t)}{\lambda_k(t)}$.

Правая часть уравнения

$$T_1 u_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} \lambda_k(t) d^0_{l,k}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}})\psi_k(y,t), \tag{3.44}$$

содержит неизвестную функцию $d^0_{l,k}(x,t)$, чтобы определить ее рассмотрим правую часть следующего итерационного уравнения

$$F_3(M) = -D_\eta u_1(M) + L_\xi u_0(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t)\left\{v_{1,k}(x,t) + \right.$$

$$+\sum_{l=1}^{2}[u^1_{l,k}(N_l) + a(x)(2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d^0_{l,k}(x,t) +$$

$$\left. +\varphi_l^{''}(x) d^0_{l,k}(x,t))\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}))]\right\}\psi_k(y,t).$$

Присутствие производной $\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}))$ приведет к появлению в решении секулярных членов, особенности которых будут расти с увеличением номера итерации. Для обеспечения разрешимости уравнения $T_1 u_3 = F_3(M)$ в классе U, положим

$$v_{1,k}(x,t) = 0, \qquad 2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d^0_{l,k} + \varphi_l^{''}(x) d^0_{l,k}(x,t) = 0. \tag{3.45}$$

Решив второе уравнение из (3.45), при начальном условии $d^0_{l,k}|_{x=l-1} = -v_{0,k}(l-1,t)$, однозначно определим правую часть уравнения (3.44). Тогда решение уравнения (3.44), при соответствующих краевых условиях из (3.41), может быть записано в виде:

$$u_2(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{v_{2,k}(x,t) + c^2_{k,k} exp(\eta_k) + \right.$$

$$\left. +\sum_{l=1}^{2}[\omega^{2,l}_{k,k}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) exp(\eta_k) + u^2_{l,k}(N_l)]\right\}\psi_k(y,t),$$

где функция $u^2_{l,k}(N_l)$ определяется из уравнения $T_{1,l}u^2_{l,k} = \lambda_k(t) u^0_{l,k}$, решение которого при краевых условиях (3.41), может быть записано

$$u^2_{l,k}(N_l) = d^2_{l,k}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}) + \lambda_k(t) d^0_{l,k}(x,t) I_1(\xi_l,\tau), \tag{3.46}$$

$$I_1(\xi_l,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\frac{erfc(\frac{y}{2\sqrt{s}})}{\sqrt{\tau-s}}[\exp(-\frac{(\xi_l-y)^2}{4(\tau-s)})-$$
$$-\exp(-\frac{(\xi_l+y)^2}{4(\tau-s)})]dsdy. \qquad (3.47)$$

На основании леммы 0.2 интеграл (3.47) имеет оценку

$$|I_1(\xi_l,\tau)|<c\;exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau}),$$

тогда и функция (3.46) будет иметь такую же оценку, т.е. она является функцией параболического пограничного слоя.

Функция $u^1_{l,k}(N_l)$ определенная формулой (3.42) выражается через $d^1_{l,k}(x,t)$, а последняя в свою очередь выражается через $v_{1,k}(x,t)\equiv 0$, поэтому и функция $u^1_{l,k}(N_l)\equiv 0$.

Пусть определены коэффициенты разложения (3.34) для четных номеров $i=0,2,4,\ldots,2n-2$ в виде

$$u_i(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{v_{i,k}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}u^i_{l,k}(N_l)+\sum_{j=1}^{\infty}[c^i_{k,j}(x,t)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{2}\omega^{i,l}_{k,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_j)\right\}\psi_k(y,t), \qquad (3.48)$$

а для нечетных номеров $i=1,3,5,\ldots,2n-3$ в виде $u_i(M)\equiv 0$. Определим коэффициент разложения для номеров $i=2n,\ i=2n-1$.

Используя вычисления (3.37), найдем

$$F_{2n}(M)=-D_\eta u_{2n-2}(M)+L_\xi u_{2n-3}(M)-T_2u_{2n-4}(M)+L_\zeta u_{2n-5}(M)+$$
$$+L_xu_{2n-6}(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k(t)v_{2n-2,k}(x,t)+\sum_{j=1(k\neq j)}^{\infty}[\lambda_k(t)-\right.$$
$$-\lambda_j(t)][c^{2n-2}_{k,j}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\omega^{2n-2,l}_{k,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_j)+$$
$$+\sum_{l=1}^{2}\lambda_k(t)u^{2n-2}_{l,k}(N_l)-\sum_{l=1}^{2}\tilde{u}^{2n-4}_{l,k}(N_l)-[\partial_tc^{2n-4}_{k,k}(x,t)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)c_{r,k}^{2n-4}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}(\partial_t\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)\omega_{r,k}^{2n-4,l}(x,t))erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_k)-\tilde{v}_{2n-4,k}(x,t)+$$

$$+\sum_{j=1(k\neq j)}^{\infty}[\tilde{c}_{k,j}^{2n-4}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\tilde{\omega}_{k,j}^{2n-4,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_j)+$$

$$+a(x)\partial_x^2[v_{2n-6}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}u_{l,k}^{2n-6}(N_l)+\sum_{j=1}^{\infty}(c_{k,j}^{2n-6}(x,t)+$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{2n-6,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}))exp(\eta_j)]\right\}\psi_k(y,t).$$

Чтобы уравнение (3.35) при $i=2n$ имело решение в U, потребуем выполнения следующих соотношений:

$$\lambda_k(t)v_{2n-2,k}(x,t)=\tilde{v}_{2n-4,k}(x,t)-a(x)\partial_x^2 v_{2n-6,k}(x,t),$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]c_{k,j}^{2n-2}(x,t)=-\tilde{c}_{k,j}^{2n-4}(x,t)-a(x)\partial_x^2 c_{k,j}^{2n-6}(x,t),\quad k\neq j,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]\omega_{k,j}^{2n-2,l}(x,t)=-\tilde{\omega}_{k,j}^{2n-4,l}(x,t)-$$
$$-a(x)\partial_x^2\omega_{k,j}^{2n-6,l}(x,t), \tag{3.49}$$

$$\partial_t c_{k,k}^{2n-4}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)c_{k,k}^{2n-4}(x,t)+$$
$$+\sum_{r=1(r\neq k)}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)c_{r,k}^{2n-4}(x,t)+a(x)\partial_x^2 c_{k,k}^{2n-6}(x,t)=0, \tag{3.50}$$

$$\partial_t\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)$$
$$+\sum_{r=1(r\neq k)}^{\infty}\alpha_{r,k}(t)\omega_{r,k}^{2n-4,l}(x,t)+a(x)\partial_x^2\omega_{k,k}^{2n-6,l}(x,t)=0. \tag{3.51}$$

Тогда правая часть $F_{2n}(M)$ перепишется

$$F_{2n}(M)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}[\lambda_k(t)u_{l,k}^{2n-2}(N_l)-\tilde{u}_{l,k}^{2n-4}(N_l)-$$

$$-a(x)\partial_x^2 u_{l,k}^{2n-6}(N_l)]\psi_k(y,t)$$

и функция $u_{2n}(M)$ будет решением уравнения (3.35) при $i = 2n$, если $u_{l,k}^{2n}(N_l)$ -решение уравнения:

$$T_{1,l}u_{l,k}^{2n}(N_l) = \lambda_k(t)u_{l,k}^{2n-2}(N_l) - \tilde{u}_{l,k}^{2n-4}(N_l) - a(x)\partial_x^2 u_{l,k}^{2n-6}(N_l).$$

Решение этого уравнения при краевых условиях из (3.41) имеет аналогичную с (3.46) структуру, а потому справедлива оценка вида (3.43).

Из уравнений (3.49) для $k \neq j$ определяем

$$v_{2n-2}(x,t) = \frac{\tilde{v}_{2n-4,k}(x,t) - a(x)\partial_x^2 v_{2n-6,k}(x,t)}{\lambda_k(t)},$$

$$c_{k,j}^{2n-2}(x,t) = -\frac{\tilde{c}_{k,j}^{2n-4}(c,t) + a(x)\partial_x^2 c_{k,j}^{2n-6}(x,t)}{\lambda_k(t) - \lambda_j(t)},$$

$$\omega_{k,j}^{2n-2,l} = -\frac{\tilde{\omega}_{k,j}^{2n-4,l}(x,t) + a(x)\partial_x^2 \omega_{k,j}^{2n-6,l}(x,t)}{\lambda_k(t) - \lambda_j(t)}.$$

Уравнения (3.50) и (3.51), при краевых условиях, аналогичных (3.41), позволяют определить функций $c_{k,k}^{2n-4}(x,t)$, $\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)$, которые имеют такую же гладкость, что и заданные функции. Функции $c_{k,k}^{2n-4}(x,t)$, $\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)$ определяются соотношениями:

$$\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t) = k_{k,k}^{2n-4,l}(x)exp(\beta_k(t)) + H_{k,n}^l(x,t),$$

$$c_{k,k}^{2n-4}(x,t) = -v_{2n-4,k}(x,0)exp(\beta_k(t)) + D_{k,n}^l(x,t),$$

$$H_{k,n}^l(x,t) = -\int\limits_0^t \exp\left(\beta_k(t) - \beta_k(y)\right)[\sum_{r=1(r\neq k)}^{\infty} \alpha_{r,k}(y)\omega_{r,k}^{2n-4,l}(x,y) +$$

$$+a(x)\partial_x^2 \omega_{k,k}^{2n-6,l}(x,y)]dy, \quad \beta_k(t) = -\int_0^t \alpha_{k,k}(z)dz,$$

$$D_{k,n}^l(x,t) = -\int\limits_0^t \exp\left(\beta_k(t) - \beta_k(y)\right)[\sum_{r=1(r\neq k)}^{\infty} \alpha_{r,k}(y)c_{r,k}^{2n-4}(x,y) +$$

$$+a(x)\partial_x^2 c_{k,k}^{2n-6}(x,y)]dy.$$

Начиная с номера $i \geq 2$, правая часть итерационного уравнения будет содержать выражение

$$L_{l,\zeta} u_i = \sum_{l=1}^{2} L_{l,\zeta} \omega_{k,k}^{i,l}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}).$$

Присутствие выражения $\partial_{\zeta_l} erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$ приведет к появлению в решении секулярных членов. Поэтому обеспечивая разрешимости итерационного уравнения в классе U, произвольную функцию $k_{k,k}^{i,l}(x)$ выбираем, как решение уравнения

$$2\varphi_l'(x)\partial_x k_{k,k}^{i,l}(x) + \varphi_l''(x) k_{k,k}^{i,l}(x) = \Phi_{k,i}^l(x,t),$$
$$l = 1, 2, \quad i \geq 0, \quad k \geq 1,$$

где $\Phi_{k,i}^l(x,t)-$ известная функция, t принимается, как параметр, начальное условие для $k_{k,k}^{i,l}(x)$ определяется из соотношения $\omega_{k,k}^{i,l}(x,t)|_{x=l-1} = -c_{k,k}^i(l-1,t)$. Подставляя сюда значения функций $\omega_{k,k}^{i,l}(x,t), \quad c_{k,k}^i(l-1,t)$ можем определить

$$k_{k,k}^{i,l}(x)|_{x=l-1} = \gamma_k^{i,l}(t),$$
$$\gamma_k^{i,l}(t) = v_{i-1,k}(l-1,0) + exp(-\beta_k(t))[D_{k,i}^l(l-1,t) - H_{k,i}^l(l-1,t)].$$

Рассмотрим вопрос о равенстве нулю коэффициентов разложения (3.34) с нечетными индексами. Предполагая равенство нулю всех $u_i(M)$ с номерами $i = 1, 3, \ldots, 2n-3$, покажем, что и $u_{2n-1}(M) \equiv 0$. Для чего рассмотрим уравнение (3.35) с номером $i = 2n+1$, правая часть которого запишется

$$F_{2n+1}(M) = -D_\eta u_{2n-1}(M) + L_\xi u_{2n-2}(m) + L_\zeta u_{2n-4}(M) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ \lambda_k(t) v_{2n-1}(x,t) - \sum_{j=1 (j\neq k)}^{\infty} [\lambda_k(t) - \lambda_j(t)][c_{k,j}^{2n-1}(x,t) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{2} \omega_{k,j}^{2n-1,l}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] exp(\eta_j) + \sum_{l=1}^{2} [\lambda_k(t) u_{l,k}^{2n-1}(N_l) -$$
$$-L_{l,\xi} u_{l,k}^{2n-2}(N_l) - \sum_{j=1}^{\infty} L_{l,\zeta} \omega_{k,j}^{2n-4,l}(x,t) exp(\eta_j)] \Bigg\} \psi_k(y,t).$$

Исходя из вышесказанных соображений положим

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]c_{k,j}^{2n-1}(x,t)=0,\quad [\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]\omega_{k,j}^{2n-1,l}(x,t)=0,\quad k\neq j,$$
$$v_{2n-1}(x,t)=0,\quad L_{l,\xi}u_{l,k}^{2n-2}(N_l)=0,\quad L_{l,\zeta}\omega_{k,j}^{2n-4,l}(x,t)=0. \qquad (3.52)$$

Последние два соотношения обеспечиваются за счет выбора произвольных функций $d_{l,k}^{2n-2}(x,t)$, $k_{k,k}^{2n-4,l}(x)$ через которые соответственно выражаются $u_{l,k}^{2n-2}(N_l)$, $\omega_{k,k}^{2n-4,l}(x,t)$. Из первых двух уравнений определяем $c_{k,j}^{2n-1}(x,t)=0$, $\omega_{k,j}^{2n-1,l}(x,t)=0\ \forall\, k\neq j$. Для функций $c_{k,k}^{2n-1}(x,t)$, $\omega_{k,k}^{2n-1,l}(x,t)$ получим однородные уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями, а потому и $c_{k,k}^{2n-1}(x,t)=0$, $\omega_{k,k}^{2n-1,l}(x,t)=0$ $\forall k=1,2,\ldots$. В силу того, что $v_{2n-1}(x,t)=0$ и уравнение для $u_{l,k}^{2n-1}(N_l)$ однородное с нулевыми краевыми условиями, получим $u_{l,k}^{2n-1}(N_l)=0$, а следовательно и $u_{2n-1}(M)=0$.

Вернемся к исходной задаче (3.28). При ее регуляризации было использовано свойство (3.33), которое является необходимым условием регуляризации задачи (3.28). Оно было использовано при переходе от задачи (3.28) к задаче (3.32). Можно показать, что сужение частичной суммы

$$u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^i u_{2i}(M)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon)}=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^i\sum_{k=1}^{\infty}\{v_{2i,k}(x,t)+$$
$$+\sum_{l=1}^{2}u_{l,k}^{2i}(x,t,\frac{1}{\epsilon}t,\frac{(-1)^l}{\epsilon}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})+\sum_{j=1}^{\infty}\big[c_{k,j}^{2i}(x,t)+ \qquad (3.53)$$
$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{2i,l}(x,t)erfc((-1)^l\frac{1}{\sqrt{2\epsilon t}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})\Big]\exp(\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{0}^{t}\lambda_k(s)ds)\Big\}\psi_k(y,t)$$

является формальным асимптотическим решением задачи (3.28).

3.3.4 Оценка остаточного члена

Произведем в задаче (3.36) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\theta=\theta(x,t,\epsilon)$. Далее, учитывая тождество (3.33), для остаточного члена

$$R_{\epsilon,2n}(x,y,t) \equiv R_{\epsilon,2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon)) = u(x,y,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)$$

получим задачу

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x,y,t) = g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon),\epsilon),$$

$$R_{\epsilon,2n}(x,y,t)|_{t=0} = 0, \quad R_{\epsilon,2n}(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений 1)-6) функция $g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon),\epsilon)$ равномерно ограничена по ϵ и непрерывна по x,y,t в изучаемой области для любого номера $n = 0,1,2,....$

Теорема 3.4 *Пусть выполнены условия 1)-6). Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеет место оценка*

$$|u(x,y,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)| < c\epsilon^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.54}$$

$n = 0,1,2,\dots$ *,т.е. разложение (3.53) является асимптотическим решением задачи (3.28) при $\epsilon \to +0$ и это разложение единственно в классе U.*

Доказательство. Доказательство теоремы основано на принципе максимума. Квадратичная форма, соответствующая уравнению (3.28), имеет вид $\epsilon^2 a(x)\xi_1^2 + \xi_2^2$, она, на основании условия 5), неотрицательна, т.е. имеет место условие (2.11) теоремы 2.1 [80]. Поэтому справедлива оценка (2.18) стр.24 из [80]. Используя оценку (2.18) стр.24 из [80] для решения задачи (3.53) получим оценку (3.54). Теорема доказана.

ГЛАВА 4

ЗАДАЧИ С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

В этой главе изучается задачи, когда предельное уравнение имеет особенность по t в конечном числе точек отрезка $[0, T]$. В первом параграфе изучается скалярная задача, с условием обеспечивающим существования классического решения. Построенная асимптотика решения задачи содержит экспоненциальную, степенную и параболическую погранслойные функции, а также угловые погранслойные функции двух типов. Угловая погранслойная функция первого типа описывается произведением экспоненциальной и параболической погранслойных функций, а второй тип описывается произведением степенной и параболической погранслойных функций.

Во втором параграфе изучается скалярная задача, когда отсутствует условие существования классического решения предельной задачи. В данном случае решение задачи будет неограниченно возрастать при $\epsilon \longrightarrow 0$.

В третьем параграфе главы изучается первая краевая задача для двумерного сингулярно возмущенного параболического уравнения, когда предельный оператор имеет нестабильный спектр. Асимптотика решения такой задачи, также как и задачи, изученной в параграфе 4.1 содержит экспоненциальную, степенную и параболическую погранслойные функции, а также угловые погранслойные функции двух типов. В отличии от скалярных случаев для описания пограничного слоя вдоль $t = 0$ вводятся счетное число регуляризующих переменных. Пограничный слой вдоль $t = 0$ описывается двумя (экспоненциальной и степенной) погранслойными функциями, пограничный слой вдоль $x = 0$ и $x = 1$ описываются параболическими погранслойными функциями. Пограничные слои вдоль ребер описываются счетным числом угловых пограничных функций, имеющие аналогичные, со скалярной задачей, структуры.

4.1 Скалярная задача

Параграф посвящен изучению задачи

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon) \equiv \epsilon \partial_t u(x,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x,t,\epsilon) - b(t) u(x,t,\epsilon) = f(x,t),$$

$$(x,t) \in \Omega_1, \quad u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \tag{4.1}$$

Эта задача изучается при следующих условиях:

1. функции $h(x), a(x) C^\infty[0,1], b(x,t), f(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$;

2. $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;

3. выполняются условия согласования начального и граничных условий $h(0) = h(1) = 0$;

4. функция $b(t) = b_1(t) \prod\limits_{j=0}^{r} (t - t_j)^{k_j}, \ b(t) \leq 0 \ \ \forall t \in [0,T], t_j$ точки отрезка $[0,T], \ k = k_0 + k_1 + \ldots + k_r$;

5. неоднородность $f(x,t)$ уравнения такова, что $\frac{\partial^s}{\partial t^s}(f(x,t))|_{t=t_m} = 0, \ m = 0, 1, \ldots, r, \ s = 0, 1, \ldots, k_j - 1$.

Условие 5) гарантирует ограниченность решения задачи (4.1) при $\epsilon \longrightarrow +0$.

В отличие от задачи, изученной в параграфе 3.1, особенность, присутствующая в задаче, приводит к возникновению вдоль $t = 0$ дополнительного пограничного слоя, имеющего степенной характер изменения, а также дополнительного углового пограничного слоя.

4.1.1 Регуляризация задачи

Для регуляризации задачи (4.1), должны ввести четыре вида регуляризующих переменных

$$\tau_1 = \frac{t}{\epsilon^2}, \quad \tau_2 = \frac{\psi(t)}{\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^t b(s)ds, \quad \xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},$$

$$\zeta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\epsilon}}, \quad \varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int\limits_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \tag{4.2}$$

$$\sigma_{j,i} = \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau\right)k_{j,i}(s)ds \equiv p_{j,i}(t,\epsilon),$$

$$l = 1,2, \qquad j = 0,1,\dots,r; \qquad i = 0,1,\dots,k_{j-1},$$

где $k_{j,i}(t)(j = 0,1,\dots,r; \quad i = 0,1,\dots,k_{j-1})$ базисная система полиномов Лагранжа-Сильвестра [49] относительно многочлена

$$p(t) = \frac{b(t)}{b_1(t)} = \prod_{j=0}^r (t-t_j)^k_j.$$

Регуляризующая переменная τ_1 отдельно не участвует в описании степенного или экспоненциального пограничного слоя, а выполняет лишь вспомогательную роль в описании параболического пограничного слоя. Хотя переменные ξ_j и ζ_j имеют разные масштабы относительно малого параметра ϵ, при описании параболического пограничного слоя будут участвовать в виде отношений

$$\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}, \qquad \frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}},$$

которые имеют одинаковые масштабы относительно ϵ.

Введем в рассмотрение расширенную функцию $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, $\tau = (\tau_1,\tau_2)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)$, $M = (x,t,\xi,\zeta,\tau,\sigma)$ такую, что между решением $u(x,t,\epsilon)$ исходной задачи (4.1) выполняется тождество

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)} \equiv u(x,t,\epsilon), \tag{4.3}$$

$$\theta=(\xi,\zeta,\tau),\quad \theta(x,t,\epsilon)\equiv(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\epsilon}},\frac{t}{\epsilon},\frac{\psi(t)}{\epsilon}),$$
$$\sigma=(\sigma_{0,0},\ldots,\sigma_{k_0-1};\ldots;\sigma_{r,0},\ldots,\sigma_{r,k_r-1}).$$

Используя тот факт, что

$$p'_{j,i}(t,\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}b(t)p_{j,i}(t,\epsilon)+k_{j,i}(t),\quad p_{j,i}(0,\epsilon)=0,$$

найдем

$$\partial_t u(x,t,\epsilon)\equiv\Bigg(\partial_t+\frac{1}{\epsilon^2}\partial_{\tau_1}+\frac{b(t)}{\epsilon}\partial_{\tau_2}+\frac{1}{\epsilon}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[b(t)p_{j,i}+$$
$$+\epsilon k_{j,i}(t)]\partial_{\sigma_{j,i}}\Big)\,\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$
$$\partial_x u(x,t,\epsilon)\equiv\left(\partial_x+\sum_{l=1}^{2}[\frac{\varphi_l'(x)}{\sqrt{\epsilon^3}}\partial_{\xi_l}+\frac{\varphi_l'(x)}{\sqrt{\epsilon}}\partial_{\zeta_l}]\right)\widetilde{u}|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$
$$\partial_x^2 u(x,t,\epsilon)\equiv\Bigg(\partial_x^2+\sum_{l=1}^{2}[\frac{(\varphi_l'(x))^2}{\epsilon^3}\partial_{\xi_l}^2+\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}L_{\xi,l}+\frac{(\varphi_l'(x))^2}{\epsilon}\partial_{\zeta_l}^2+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}L_{\zeta,l}]\Big)\,\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$
$$L_{\xi,l}\equiv 2\varphi_l'(x)\partial_{x,\xi_l}^2+\varphi_l''(x)\partial_{\xi_l},\quad L_{\zeta,l}\equiv 2\varphi_l'(x)\partial_{x,\zeta_l}^2+\varphi_l''(x)\partial_{\zeta_l}.$$

На основании (4.1), (4.3) и последних соотношений для производных, получим задачу для расширенной функции:

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon)\equiv\Bigg\{\frac{1}{\epsilon}T_1+D_\tau-\sqrt{\epsilon}L_\xi+\epsilon[\partial_t-D_\zeta+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}}]-$$
$$-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta--\epsilon^2L_x\Big\}\,\widetilde{u}(M,\epsilon)=f(x,t),M=(x,t,\xi,\zeta,\tau,\sigma)\in Q_5,$$
$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau=0}=h(x),\ \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{x=l-1,\xi=0,\zeta=0}=0,\ l=1,2, \tag{4.4}$$
$$T_1\equiv\partial_{\tau_1}-D_\xi,\ D_\tau\equiv b(t)[\partial_{\tau_2}-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}p_{j,i}(t,\epsilon)\partial_{\sigma_{j,i}}-1],$$
$$L_\xi\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l},\ L_\zeta\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\zeta,l},$$

$$L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \qquad D_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial_{\xi_l}^2, \qquad D_\zeta \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial_{\zeta_l}^2.$$

Из способа получения расширенной задачи (4.4) видно, что если найдем решение $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, то сужение его при $\theta=\theta(x,t,\epsilon),\ \sigma=p(t,\epsilon)$ будет решением задачи (4.1), так как

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon). \tag{4.5}$$

Решение расширенной задачи (4.4) будем искать в виде разложения

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)=\sum_{k=0}^{n}\epsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M)+R_{n,\epsilon}(M). \tag{4.6}$$

Подставим это разложение в расширенную задачу (4.4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, тогда для коэффициентов разложения (4.6) получим следующие итерационные задачи:

$$T_1u_\nu(M)=0,\ \nu=0,1,\ u_0(M)|_{t=\tau=0}=h(x),$$

$$u_1(M)|_{t=\tau=0}=0,\ u_\nu(M)|_{x=j-1,\xi=\zeta=0}=0,$$

$$T_1u_2(M)=f(x,t)-D_\tau u_0(M), \qquad T_1u_k(M)=H_k(M), \quad M\in Q_5,$$

$$u_k(M)|_{t=\tau=0}=0, \qquad u_k(M)|_{x=\nu-1,\xi=\zeta=0}=0,\ k>2, \tag{4.7}$$

$$\widetilde{L}_\epsilon R_{\epsilon,n}(M)=\epsilon^{\frac{n+1}{2}}g_{\epsilon,n}(M),\quad R_{\epsilon,n}(M)|_{t=\tau=0}=R_{\epsilon,n}(M)|_{x=j-1,\xi=\zeta=0}=0, \tag{4.8}$$

где

$$H_k(M)=-D_\tau u_{k-2}(M)+L_\xi u_{k-3}(M)-T_2u_{k-4}(M)+$$

$$+L_\zeta u_{k-5}(M)+L_xu_{k-6}(M), \qquad T_2\equiv\partial_t-D_\zeta+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}},$$

$$k=1,2,\dots,n, \quad g_{\epsilon,n}(M)=-\sum_{r=0}^{1}(\sqrt{\epsilon})^rD_\tau u_{n-1-r}(M)+$$

$$+\sum_{r=0}^{2}(\sqrt{\epsilon})^rL_\xi u_{n-2-r}(M)-\sum_{r=0}^{3}(\sqrt{\epsilon})^rT_2u_{n-3-r}(M)+$$

$$+\sum_{r=0}^{4}(\sqrt{\epsilon})^rL_\zeta u_{n-4-r}(M)-\sum_{r=0}^{5}(\sqrt{\epsilon})^rL_xu_{n-5-r}(M).$$

4.1.2 Решение итерационных задач

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи (4.7):

$$U = \{u(M) : u(M) = v(x,t) + c(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[\omega_l(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^l(x,t)\sigma_{j,i}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_l(M_l)],$$

$$c(x,t), v(x,t), y_{j,i}(x,t), z_{j,i}^l(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1),\ |u_l(M_l)| < cexp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1})\},$$

где $M_l = (x, t, \xi_l, \tau_1)$.

left. Вычислим действие операторов $T_1,\ D_\tau,\ T_2,\ L_\xi,\ L_\zeta$ на функцию класса U:

$$T_1 u(M) = \sum_{l=1}^{2} T_1 u_l(M_l), \qquad D_\tau u(M) = -b(t)v(x,t) -$$

$$-b(t)\sum_{l=1}^{2} u_l(M_l), \quad T_2 u(M) = \partial_t \{v(x,t) + c(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[\omega_l(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) +$$

$$\left.\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^l(x,t)\sigma_{j,i}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_l(M_l)]\right\} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\left[y_{j,i}(x,t) +\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^l(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\right], \quad L_\xi u(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l} u_l(M_l),$$

$$L_\zeta u(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2}\left[D_{x,l}\omega_l(x,t) +\right. \tag{4.9}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} D_{x,l} z_{j,i}^l(x,t)\sigma_{j,i}\right]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})),$$

$$D_{x,l} \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_x + \varphi_l''(x),$$

Удовлетворим функцию $u(M)\in U$ краевым условиям:

$$v(x,0)+c(x,0)+\sum_{l=1}^{2}[\omega_l(x,0)\times 0+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}D_{x,l}z^l_{j,i}(x,0)\times 0+u_l(M_l)|_{t=\tau=0}]=h(x),$$

$$v(l-1,t)+c(l-1,t)\exp{(-\tau_2)}+u_1(M_l)|_{\xi_1=\varphi_1(l-1)/\sqrt{\epsilon^3}}+$$

$$+u_2(M_l)|_{\xi_2=\varphi_2(l-1)/\sqrt{\epsilon^3}}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}(l-1,t)+z^1_{j,i}(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_1(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}}+$$

$$+z^2_{j,i}(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_2(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}}]\sigma_{j,i}+[\omega_1(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_1(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}}+$$

$$+\omega_2(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_2(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}})]\exp{(\tau_2)}=0,\quad l=1,2.$$

Чтобы обратить эти соотношения в тождества, выберем входящие туда функции следующим образом:

$$c(x,0)=h(x)-v(x,0),\quad \omega_l(x,t)|_{t=0}=\omega^0_l(x),$$

$$z^l_{j,i}(x,t)|_{t=0}=p^l_{j,i}(x),))u_l(M_l)|_{t=\tau_1=0}=0,$$

$$u_l(M_l)|_{\xi_l=0}=d_l(x,t),\quad d_l(x,t)|_{x=l-1}=-v(l-1,t),$$

$$z^l_{j,i}(x,t)|_{x=l-1}=-y^l_{j,i}(l-1,t),\quad \omega_l(x,t)|_{x=l-1}=-c(l-1,t), \tag{4.10}$$

здесь $\omega^0_l(x),p^l_{j,i}(x)$- произвольные функции, при получении соотношений (4.10) пренебрегли экспоненциально малыми слагаемыми. Отметим, что при $t\to 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\to 0$, поэтому это обстоятельство использовано нами при произвольном выборе начальных функций для $\omega_l(x,t)$ и $z^l_{j,i}(x,t)$ при $t=0$.

Из итерационных задач (4.7) последовательно определим коэффициенты разложения (4.6). Уравнения (4.7) при $\nu=0,1$ однородные, поэтому в классе U имеют решение представимое в виде

$$u_\nu(M)=v_\nu(x,t)+c_\nu(x,t)\exp{(\tau_2)}+ \tag{4.11}$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{\nu}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}\{[\omega_{l,\nu}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^{l,\nu}(x,t)\sigma_{j,i}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_{l,\nu}(M_l)\},$$

если функция $u_{l,\nu}(M_l)$ решение уравнения

$$T_1 u_{l,\nu}(M_l) = 0, \qquad \nu = 0,1, \qquad l = 1,2.$$

Решением этого уравнения при краевых условиях

$$u_{l,\nu}(M_l)|_{t=0} = 0, \;\; u_{l,\nu}(M_l)|_{\xi_l=0} = d_{l,\nu}(x,t),$$

определенных из (4.2), будет функция

$$u_{l,\nu}(M_l) = d_{l,\nu}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}), \;\; \nu = 0,1, \;\; l = 1,2, \qquad (4.12)$$

которая на основании леммы 0.1 имеет оценку

$$|u_{l,\nu}(M_l)| < c\exp{(-\frac{\xi_l^2}{8\sqrt{\tau_1}})}.$$

Вычислим правую часть уравнения (4.7,$i = 2$), на основании вычислений (4.9), она имеет вид

$$H_2(M) = f(x,t) - D_\tau u_0(M) = f(x,t) + b(t)v_0(x,t)+$$

$$+b(t)\sum_{l=1}^{2} d_{l,0}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Если выражение $f(x,t) + b(t)v_0(x,t)$ войдет в правую часть уравнения $T_1u_2(M) = H_2(M)$, то оно выведет решение этого уравнения из класса U. Поэтому функцию $v_0(x,t)$ выберем так, чтобы это выражение обратилось в нуль, т.е. положим $f(x,t) + b(t)v_0(x,t) = 0$. Это диктуется тем, что присутствие такого выражения в правой части уравнения $T_1u_{l,2}(M_l) = H_{l,2}(M)$, решение которого при краевых условиях

$$u_{l,2}(M_l)|_{t=0} = 0, \qquad u_{l,2}(M_l)|_{\xi_l=0} = d_{l,2}(x,t)$$

запишется

$$u_{l,2}(M_l) = d_{l,2}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\tau_1} \int\limits_0^{\infty} \frac{H_{l,2}()}{\sqrt{\tau_1 - \tau}} [\exp(-\frac{(\xi_l - s)^2}{4(\tau_1 - \tau)}) -$$

$$- \exp(-\frac{(\xi_l + s)^2}{4(\tau_1 - \tau)})] ds d\tau, \tag{4.13}$$

приведет к тому, что функция $u_{l,2}(M_l)$ не будет функцией параболического пограничного слоя. Действительно, в данном случае правая часть будет иметь не экспоненциальную оценку $|H_{l,2}(M_l)| < c_1$, поэтому условие леммы 0.2 не выполняется, т.е. интеграл входящий в (4.13), а следовательно и решение (4.13) не будет иметь оценку параболической погранслойной функции. Уравнение $b(t)v_0(x,t) = -f(x,t)$, на основании условия 5) имеет непрерывно-дифференцируемое решение.

Следующее (4.7,$i = 3$) уравнение в правой части будет содержать выражение $L_\xi u_0(M)$, которое, согласно вычислениям (4.9) и соотношению (4.12), запишется

$$L_\xi u_0(M) = a(x) \sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l} u_{l,0}(M_l) =$$

$$= a(x) \sum_{l=1}^{2} D_{x,l} d_{l,0}(x,t) \partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})).$$

Присутствие в правой части уравнения (4.7, $i = 3$) производной $\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))$ приведет к появлению в решении секулярных членов, особенность которых при $\tau_1 = 0$ будет расти с ростом номера итерации. Поэтому за счет выбора произвольной функции $d_{l,0}(x,t)$, как решение задачи

$$D_{x,l} d_{l,0}(x,t) = 0, \qquad d_{l,0}(x,t)|_{x=l-1} = -v_0(l-1,t)$$

можем избавиться от такого члена. Кроме выражения $L_\xi u_0$, правая часть содержит и выражение $D_\tau u_1$, которое, на основании (4.9), (4.12), имеет вид

$$D_\tau u_1 = -b(t)v_1(x,t) - b(t) \sum_{l=1}^{2} d_{l,1}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Для разрешимости уравнения (4.7, $i = 3$) в классе U мы должны положить $v_1(x,t) = 0$, тогда это уравнение примет вид

$$T_1 u_3(M) = -b(t)\sum_{l=1}^{2} d_{l,1}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Последнее уравнение в классе U имеет решение вида (4.11) с индексом $\nu = 3$, если функция $u_{l,3}(M_l)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$T_1 u_{l,3}(M) = -b(t) d_{l,1}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}) \equiv H_{l,3}(M_l).$$

Решение последнего уравнения может быть записано в виде (4.13) с заменой там $H_{l,2}(M_l)$ на $H_{l,3}(M_l)$ и $d_{l,2}(x,t)$ на $d_{l,3}(x,t)$, причем $d_{l,3}(x,t)|_{x=l-1} = -v_3(l-1,t)$.

Правая часть следующего итерационного уравнения (4.7, $i = 4$) имеет вид

$$H_4(M) = -D_\tau u_2 + L_\xi u_1 - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}} u_0 -$$

$$-T_2 u_0 = -b(t) v_2(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t) u_{l,2}(M_l) -$$

$$-D_{x,l} d_{l,1}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)[y_{j,i}^0(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,0}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] - \partial_t v_0(x,t) -$$

$$-\partial_t c_0(x,t)\exp(\tau_2) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t y_{j,i}^0(x,t)\sigma_{j,i} -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t \omega_{l,0}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) + \partial_t u_{l,0}(M_l) -$$

$$-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t z_{j,i}^{l,0}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}].$$

Чтобы уравнение с такой правой частью имело решение в классе U, мы должны потребовать выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_2(x,t) = -\partial_t v_0(x,t) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y^0_{j,i}(x,t),$$
$$\partial_t c_0(x,t) = 0, \quad \partial_t y^0_{j,t}(x,t) = 0, \quad \partial_t \omega_{l,0}(x,t) = 0, \tag{4.14}$$
$$\partial_t z^{l,0}_{j,i}(x,t) = 0, \quad D_{x,l} d_{l,1}(x,t) = 0.$$

Первое уравнение из (4.14) требует особого подхода, поэтому сначало рассмотрим остальные уравнения. Из (4.10) определяем начальные условия для этих уравнений

$$\omega_{l,0}(x,t)|_{t=0} = \omega^0_{l,0}(x), \quad z^{l,0}_{j,i}(x,t)|_{t=0} = p^{l,0}_{j,i}(x),$$

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0), \quad d_{l,1}(x,t)|_{x=l-1} = -v_1(l-1,t), \quad l = 1,2.$$

При таких начальных условиях эти уравнения имеют решения вида

$$c_0(x,t) = h(x) - v_0(x,0), \quad \omega_{l,0}(x,t) = \omega^0_{l,0}(x),$$

$$z^{l,0}_{j,i}(x,t) = p^{l,0}_{j,i}(x), \quad d_{l,1}(x,t) = -v_1(l-1,t)q_l(x) \equiv 0, \tag{4.15}$$

где $q_l(x)$-известная функция. Здесь учтено, что $v_1(x,t) = 0$, поэтому из равенства (4.12), получим $u_{l,1}(M_l) \equiv 0$.

Подставив найденные функции в соотношение для $\omega_{l,0}(x,t)|_{x=l-1}$ и $z^{l,0}_{j,i}(x,t)|_{x=l-1}$ из (4.10), определим

$$\omega^0_{l,0}(x)|_{x=l-1} = -c_0(l-1,t), \quad p^{l,0}_{j,i}(x)|_{x=l-1} = -y^0_{j,i}(l-1,t) \tag{4.16}$$

и остановимся на вопросе разрешимости первого уравнения из (4.14). Необходимым и достаточным условием разрешимости является выделение правой частью множителя $\prod\limits_{j=0}^{r}(t - t_j)^{k_j}$. Это утверждение эквивалентно выполнению условий 5) относительно правой части

$$-\partial_t v_0(x,t) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y^0_{j,i}(x,t).$$

Действительно, поскольку свободный член первого уравнения (4.14), который обозначен через $\alpha(x,t)$, должен удовлетворять условию 5), то его полином Лагранжа - Сильвестра [49] равен тождественно нулю, а значит функция $\alpha(x,t)$ представима в виде

$$\alpha(x,t) = l(x,t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j},$$

где $l(x,t)$-известная функция. С учетом этого равенства и вида функции $b(t)$, перепишем первое уравнение (4.14) в виде

$$b_1(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}v_2(x,t) = l(x,t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}.$$

Отсюда видно, что если $t \neq t_j$, то $v_2(x,t) = l(x,t)/b_1(t)$, а при $t = t_j$ функция $v_2(x,t) = v_2^0(x)$ произвольная функция. То есть все решения первого уравнения (4.14) можно записать

$$v_2(x,t) = \begin{cases} \frac{l(x,t)}{b_1(t)} & \forall\ \ t \notin \bigcup_{j=0}^{r}\{t_j\}, \\ v_2^0(x) & \forall\ \ t = t_j, j = 0,1,\dots,r. \end{cases}$$

Нас интересует гладкое решение первого уравнения (4.14), поэтому при всех $t \in [0,T]$ функция $v_2(x,t)$ должна иметь вид $\frac{l(x,t)}{b_1(t)}$.

Условие 5) запишем следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\frac{d^s}{dt^s}[k_{j,i}(t)y_{j,i}^0(x,t)]|_{t=t_m} = p_1^s(x,t)|_{t=t_m},$$

$$m = 0,1,\dots,r,\ \ s = 0,1,\dots,k_m-1,$$

где $p_1^s(x,t)$-известная функция выражающая через $-\frac{\partial^s}{\partial t^s}(\partial_t v_0(x,t))$. Обозначив ее через $\alpha_{m,s}(x)$ и используя формулу Лейбница, перепишем последнее равенство в виде

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\sum_{\nu=0}^{s}C_s^{\nu}\frac{d^{\nu}k_{j,i}(t_m)}{dt^{\nu}}(y_{j,i}^0(x,t_m))_t^{(s-\nu)} = \alpha_{m,s}(x), \tag{4.17}$$

$$s = 0,1,,k_m-1,\ \ m = 0,1,,r.$$

Базисная система $\{k_{j,i}(t)\}$ полиномов Лагранжа - Сильвестра удовлетворяет условиям

$$\frac{d^\nu k_{j,i}(t_m)}{dt^\nu} = \delta_i^\nu \delta_j^m,\ \nu = 0, 1, \dots, k_m - 1,\ m = 0, 1, \dots, r,$$

поэтому равенство (4.17) можно представить в форме

$$\sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \delta_i^\nu \delta_j^m (y_{j,i}^0(x, t_m))_t^{(s-\nu)} = \alpha_{m,s}(x),$$

$$s = 0, 1, \dots, k_m - 1,\ m = 0, 1, \dots, r.$$

Так как $\delta_j^m = 0$ при $j \neq m$, то

$$\sum_{i=0}^{k_m-1} \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \delta_i^\nu (y_{m,i}^0(x, t_m))_t^{(s-\nu)} = \alpha_{m,s}(x),$$

и поскольку $\delta_i^\nu = 0$ при $i > s$, то последнее равенство принимает вид

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu \delta_i^\nu (y_{m,i}^0(x, t_m))_t^{(s-\nu)} = \alpha_{m,s}(x).$$

Наконец, с учетом того, что $\delta_i^\nu = 0$ при $i \neq \nu$, получаем окончательно

$$\sum_{\nu=0}^{s} C_s^\nu (y_{m,\nu}^0(x, t_m))_t^{(s-\nu)} = \alpha_{m,s}(x),$$

$$s = 0, 1, \dots, k_m - 1,\ m = 0, 1, \dots, r.$$

Отсюда определяем начальные условия $y_{j,i}^0(x,t)|_{t=t_m} = q_{j,i}^0(x),\ m = 0, 1, \dots, r,$ для уравнения $\partial_t y_{j,i}^0(x, t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, r, \quad i = 0, 1, \dots, k_j - 1.$ После выбора произвольных функций $v_2(x, t),\ c_0(x, t), y_{j,i}^0(x, t),\ \omega_{l,0}(x, t),\ z_{j,i}^{l,0}(x, t)$ в виде (4.14), правая часть уравнения (4.7, $i = 4$) примет вид

$$H_4(M) = -\sum_{l=1}^{2} [b(t) u_{l,2}(M_l) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t) z_{j,i}^{l,0}(x, t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + \partial_t u_{l,0}(M_l)].$$

Функция $u_{l,2}(M_l)$ зависит от $x, t, \xi,\ \tau_1$, поэтому и правая часть должна иметь такую зависимость. Сказанное обеспечивается, если во втором слагаемом перейдем от переменных $\zeta_l,\ t$ к переменным $\xi_l,\ \tau_1$. Учитывая, что $\xi_l = \frac{\zeta_l}{\epsilon}$, получим

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} = \frac{\epsilon\xi_l}{2\sqrt{t}} = \frac{\xi_l}{2\sqrt{\frac{t}{\epsilon^2}}} = \frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}.$$

Поэтому вправе записать правую часть $H_4(M)$ в виде

$$H_4(M) = -\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,2}(M_l) + \partial_t u_{l,0}(M_l) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t) z_{j,i}^{l,0}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}],$$

причем, на основании лемм 0.1, 0.2 и представлении (4.13) решения $u_{l,2}(M_l)$, для $H_4(M)$ имеем оценку:

$$|H_4(M)| \leq \sum_{l=1}^{2} c_l \exp(-\frac{\xi_l}{8\tau_1}).$$

Уравнение (4.7, $i = 4$) с такой правой частью в классе U имеет решение представимое в виде (4.11) с индексом $\nu = 4$.

Рассмотрим следующее итерационное уравнение (4.7, $i = 5$), оно имеет правую часть

$$H_5(M) = -D_\tau u_3 + L_\xi u_2 - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}} u_1 -$$

$$-T_2 u_1 = -b(t)v_3(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,3}(M_l) -$$

$$-D_{x,l} d_{l,2}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)[y_{j,i}^1(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,1}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] - \partial_t v_1(x,t) -$$

$$-\partial_t c_1(x,t)\exp(\tau_2) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \partial_t y_{j,i}^1(x,t)\sigma_{j,i} -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{l,1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp{(\tau_2)}+\partial_t u_{l,1}(M_l)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t z_{j,i}^{l,1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}]+\sum_{l=1}^{2}[D_{x,l}\omega_{l,0}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}D_{x,l}z^{l,0}j,i(x,t)\sigma_{j,i}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$$

Обеспечивая разрешимость этого уравнения в классе U, должны потребовать выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_3(x,t)=-\partial_t v_1(x,t)-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)y_{j,i}^1(x,t),$$

$$D_{x,l}d_{l,2}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))=0$$

$$\partial_t c_1(x,t)=0,\ \partial_t y_{j,i}^1(x,t)=0,\ \partial_t\omega_{l,1}(x,t)=0,$$

$$\partial_t z_{j,i}^{l,1}(x,t)=0,\quad D_{x,l}\omega_{l,0}(x,t)=0,\ D_{x,l}z_{j,i}^{l,0}(x,t)=0. \tag{4.18}$$

В последние соотношения (4.18), подставим значения $\omega_{l,0}(x,t)$, $z_{j,i}^{l,0}(x,t)$ из (4.15) далее, решая их при начальном условии (4.16), найдем

$$\omega_{l,0}^0(x)=-c_0(l-1,t)q_l(x),\quad p_{j,i}^{l,0}(x)=-y_{j,i}^0(l-1,t)q_l(x),\ l=1,2.$$

Здесь t принимается как параметр, $q_l(x)$-известная функция. Этим полностью определен главный член асимптотики.

Краевые условия для остальных уравнений из (4.18), в силу тех же соображений, что и выше, определяются в виде

$$\omega_{l,1}(x,t)|_{t=0}=\omega_{l,1}^0(x),\ z_{j,i}^{l,1}(x,t)|_{t=0}=p_{j,i}^{l,1}(x),$$

$$c_1(x,t)|_{t=0}=-v_1(x,0)=0,$$

причем произвольные функции $\omega_{l,1}^0(x)$ и $p_{j,i}^{l,1}(x)$ при $x=l-1$ выбираются следующим образом:

$$\omega_{l,1}^0(x)|_{x=l-1}=-c_1(l-1,t),\quad p_{j,i}^{l,1}(x)|_{x=l-1}=-y_{j,i}^1(l-1,t). \tag{4.19}$$

Решая уравнение (4.18), при приведенных выше начальных условиях, получим

$$c_1(x,t)=0,\ \omega_{l,1}(x,t)=\omega^0_{l,1}(x),\ z^{l,1}_{j,i}(x,t)=p^{l,1}_{j,i}(x). \qquad (4.20)$$

Для разрешимости первого уравнения из (4.18), с учетом того, что $v_1(x,t)=0$, потребуем выполнения условий

$$\frac{d^s}{dt^s}[k_{j,i}(t)y^1_{j,i}(x,t)]|_{t=t_m}=0.$$

Отсюда поступая также, как и при обеспечения условия разрешимости уравнения относительно $v_2(x,t)$, мы найдем $y^1_{j,i}(x,t)|_{t=t_m}=0$, поэтому $v_3(x,t)=0$ и $y^1_{j,i}(x,t)=0$. В соотношениях (4.18) осталось не решенным одно уравнение $L_{\xi,l}u_{l,2}(M_l)=0$, где функция $u_{l,2}(M_l)$ определена формулой (4.13), которую перепишем в виде

$$u_{l,2}(M_l)=d_{l,2}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})-b(t)d_{l,0}(x,t)I_{l,3}(\xi_l,\tau_1).$$

На основании лемм 0.1,0.2 справедливы оценки

$$|erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})|<c\exp{(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1})},\quad |I_{l,3}(\xi_l,\tau_1)|<c\exp{(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1})}.$$

Вычисляя действия оператора $L_{\xi,l}$ на функцию $u_{l,2}(M_l)$, имеем

$$L_{\xi,l}u_{l,2}(M_l)=[D_{x,l}d_{l,2}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))-$$

$$-b(t)D_{x,l}d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}I_{l,3}(\xi_l,\tau_1)].$$

Ранее функция $d_{l,0}(x,t)$ была определена, как решение уравнения $D_{x,l}d_{l,0}(x,t)=0$, поэтому для того, чтобы обеспечить выполнения соотношения $L_{\xi,l}u_{l,2}(M_l)=0$ достаточно положить $D_{x,l}d_{l,2}(x,t)=0$. Для решения этого уравнения краевые условия задаются в виде $d_{l,2}(x,t)|_{x=l-1}=-v_2(l-1,t),\ l=1,2$. Из полученной задачи найдем $d_{l,2}(x,t)$.

После такого выбора, правая часть $H_5(M)$ перепишется

$$H_5(M)=-\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,3}(M_l)+\partial_t u_{l,1}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)z_{j,i}^{l,1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})].$$

Произведем здесь переход

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\to\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}},$$

тогда уравнение (4.7, $i = 5$) с такой правой частью имеет решение представимое в виде (4.13).

Для полного представления картины процесса нахождения коэффициентов разложения (4.6) рассмотрим еще одно итерационное уравнение (4.7, $i = 6$). Это уравнение имеет правую часть

$$H_6(M) = -D_\tau u_4 + L_\xi u_3 - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}}u_2-$$

$$-T_2u_2 = -b(t)v_4(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,4}(M_l)-$$

$$-D_{x,l}d_{l,3}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)[y_{j,i}^2(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}z_{j,i}^{l,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] - \partial_t v_2(x,t)-$$

$$-\partial_t c_2(x,t)\exp{(\tau_2)} - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t y_{j,i}^2(x,t)\sigma_{j,i}-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{l,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp{(\tau_2)} + \partial_t u_{l,2}(M_l)-$$

$$-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t z_{j,i}^{l,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}] + \sum_{l=1}^{2}[D_{x,l}\omega_{l,1}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}D_{x,l}z^{l,1}(x,t)\sigma_{j,i}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + L_x\{v_0(x,t)+$$

$$+c_0(x,t)\exp{(\tau_2)} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y_{j,i}^0(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[(\omega_{l,0}(x,t)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,t}^{l,0}(x,t)\sigma_{j,i})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}+u_{l,0}(M_l)]\}.$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (4.7, $i=6$) в классе U, потребуем выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_4(x,t) = -\partial_t v_2(x,t) + L_x v_0(x,t) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y_{j,i}^2(x,t),$$

$$D_{x,l}d_{l,3}(x,t)=0, \qquad \partial_t c_2(x,t) = L_x c_0(x,t),$$

$$\partial_t y_{j,i}^2(x,t) = L_x y_{j,i}^0(x,t), \quad \partial_t \omega_{l,2}(x,t) = L_x\omega_{l,0}(x,t),$$

$$\partial_t z_{j,i}^{l,2}(x,t) = L_x z_{j,i}^{l,0}(x,t), \; D_{x,l}z^{l,1}(x,t)=0,$$

$$D_{x,l}\omega_{l,1}(x,t)=0. \tag{4.21}$$

Решив уравнение $D_{x,l}d_{l,3}(x,t)=0$ при начальном условии $d_{l,3}(x,t)|_{x=l-1} = -v_3(l-1,t) = 0$ получим $d_{l,3}(x,t)=0$. Из остальных уравнений при соотвествующих начальных условиях определим

$$c_2(x,t) = -v_2(x,t) + \int_0^t L_x c_0(x,s)ds,$$

$$\omega_{l,2}(x,t = \omega_{l,2}^0(x) + \int_0^t L_x\omega_{l,0}(x,s)ds,$$

$$z_{j,i}^{l,2}(x,t) = p_{j,i}^{l,2}(x) + \int_0^t L_x z_{j,i}^{l,0}(x,s)ds.$$

Подставим (4.20) в последние уравнения из (4.21), получим

$$D_{x,l}\omega_{l,1}^0(x)=0, \quad D_{x,l}p_{j,i}^{l,1}(x)=0$$

и решим их при начальном условии (4.19). С учетом того, что $c_1(x,t)=0$, $y_{j,i}^1(x,t)=0$ найдем $\omega_{l,1}^0(x)=0$, $p_{j,i}^{l,1}(x)=0$. Ранее было установлено, что $v_1(x,t)=0$, $u_{l,1}(M_l)=0$, поэтому и $u_1(M)=0$.

Первое уравнение (4.21) разрешимо, если имеют место условия:

$$\frac{d^s}{dt^s}[\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y_{j,i}^2(x,t)]|_{t=t_m} = \alpha_{m,s}^2(x,t),$$

которое позволяет определить начальное условие $y_{j,i}^2(x,t)|_{t=t_m} = y_{j,i}^{2,m}(x)$ для уравнения $\partial_t y_{j,i}^2(x,t) = L_x y_{j,i}^0(x,t)$. Входящая сюда функция $\alpha_{m,s}^2(x,t)$ определена выражением

$$\alpha_{m,s}^2(x,t) \equiv -\frac{\partial^s}{\partial t^s}(\partial_t v_2(x,t) - L_x v_0(x,t))|_{t=t_m}.$$

Этим мы обеспечили выполнения соотношений (4.21), тогда уравнение

$$T_1 u_6(M) = -\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,4}(M_l) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t) z_{j,i}^{l,1}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) -$$

$$-\partial_t u_{l,2}(M_l) - L_x u_{l,0}(M_l)]$$

разрешимо в классе U. Перед тем, чтобы решить его, в правой части произведем переход

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \to \frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}.$$

Далее, повторяя вышеописанный процесс, методом индукции определим все коэффициенты разложения (4.6). В этом разложении коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль, т.е. построим частичную сумму

$$u_{\epsilon,n}(M) = \sum_{k=0}^{n} \epsilon^k \{v_{2k}(x,t) + c_{2k}(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{2k}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[(\omega_{l,2k}(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^{l,2k}(x,t)\sigma_{j,i}) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_{l,2k}(M_l)]\}. \tag{4.22}$$

Здесь слагаемое $v_{2k}(x,t)$ представляет регулярный член асимптотики; $c_{2k}(x,t)exp(\tau_2)$- описывает экспоненциальный пограничный слой вдоль $t = 0$; $\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{2k}(x,t)\sigma_{j,i}$-описывает пограничный слой вдоль особенной линии предельного уравнения и имеет степенной характер изменения, который называется степенным пограничным слоем; $\omega_{l,2k}(x,t)\exp(\tau_2) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$ - описывает угловой пограничный слой, причем $|\omega_{l,2k}(x,t)\exp(\tau_2) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})| <$

$c\ exp(\tau_2 - \frac{\zeta_l^2}{8t})$, $\tau_2 \in (-\infty, 0]$, $\zeta_l \in [0, +\infty)$; $\sum\limits_{j=0}^{r}\sum\limits_{i=0}^{k_j-1} z^{l,2k}(x,t)\sigma_{j,i} erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$ - описывает сложный пограничный слой, в котором пограничная функция представляется произведением двух типов погранслойных функций: одна из которой явяется параболической,а другая степенной погранслойной функцией. Функция $u_{l,2k}(M_l)$- описывает параболический пограничный слой вдоль границ $x = 0$ и $x = 1$.

Отметим, что в отличии от задачи изученной в параграфе 3.1, особенность присутствующаяся в уравнении данного параграфа, привело к возникновению дополнительных пограничных слоев, имеющих степенной характер изменения. Этой особенностью и мотивируется появление в асимптотике решения дополнительного степенного пограничного слоя вдоль $t = 0$ и углового пограничных слоев в окрестности точек (0,0), (0,1), где одним из сомножителей является функция степенного пограничного слоя.

Чтобы получить асимптотику решения исходной задачи произведем в частичной сумме (4.22) сужение при $\theta = \theta(x,t,\epsilon)$, $\sigma = p(t,\epsilon)$, получим

$$u_{\epsilon,n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon)) = \sum_{k=0}^{n} \epsilon^k \{v_{2k}(x,t) + c_{2k}(x,t)\exp\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b(s)ds\right)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{2k}(x,t)\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau\right)k_{j,i}(s)ds+ \tag{4.23}$$

$$\sum_{l=1}^{2}[\omega_{l,2k}(x,t)\exp\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b(s)ds\right) erfc\left(\frac{(-1)^{l-1}}{2\sqrt{\epsilon t}}\int_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}\right)+$$

$$+u_{l,2k}(x,t,\theta(x,t,\epsilon)) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^{l,2k}(x,t)\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times k_{j,i}(s)ds\ erfc\left(\frac{(-1)^{l-1}}{2\sqrt{\epsilon t}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}\right)]\}.$$

Используя (4.5) и производя сужение в задаче (4.4), для остаточного члена

$$R_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p)t,\epsilon)) \equiv R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon) =$$

$$= u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))$$

получим задачу

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon) = \epsilon^{n+\frac{1}{2}} g_{\epsilon,n}(x,t,\epsilon), \quad R_{\epsilon,2n}|_{t=0} = R_{\epsilon,2n}|_{x=0} = R_{\epsilon,2n}|_{x=1} = 0.$$

Согласно построению, функция $|g_{\epsilon,n}(x,t,\epsilon)| < c \;\; \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_1$.

Теорема 4.1 *Пусть выполнены условия 1)-5). Тогда построенное решение (4.23) является асимптотическим решением исходной задачи (4.1), т.е. для достаточно малых* $\epsilon > 0$, $\forall (x,t) \in \overline{\Omega_1}$, $n = 0,1,\ldots$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))| < c\; \epsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Квадратичная форма соответствующая уравнению (4.1), на основании условия 2), неотрицательна и коэффициенты уравнения суть ограниченные функции, тогда для задачи относительно остаточного члена $R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon)$ справедлив принцип максимума. Учитывая особенность этого уравнения воспользуемся оценкой (1.4) из принципа максимума сформулированного во вводной главе. Входящую в (1.2) величину λ выбираем так, чтобы

$$\lambda > \max_{t \in (0,t_1)} b(t) \equiv a_0.$$

По аналогии с параграфом 3.1 получим требуюмую оценку. Теорема доказана.

4.1.3 Пример

Построим асимптотическое решение следующей задачи:

$$L_\epsilon u \equiv \epsilon \partial_t u - \epsilon^2 (x^2+1)^2 \partial_x^2 u + t(t-1)^2 u = f_0(x,t) t(t-1)^2, \;\; (x,t) \in \Omega_1$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0} = u(x,t,\epsilon)|_{x=1} = 0. \tag{4.24}$$

Найдем фундаментальную систему полиномов Лагранжа-Сильвестра

$$k_{0,0}(t)=(t-1)^2,\ k_{1,0}(t)=t(2-t),\ k_{1,1}(t)=t(t-1)$$

по отношению к многочлену $b(t) = t(t-1)^2$. Введем регуляризующие переменные

$$\tau_1=\frac{t}{\epsilon^2},\ \tau_2=-\psi(t,\epsilon),\ \xi_l=\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_l(x),$$

$$\psi(t,\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b(s)ds=\frac{1}{\epsilon}[\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}],$$

$$\sigma_{0,0}=exp(-\psi(t,\epsilon))\int\limits_0^t \exp(\psi(s,\epsilon))k_{0,0}(s)ds\equiv p_{0,0}(t,\epsilon),$$

$$\sigma_{1,0}=exp(-\psi(t,\epsilon))\int\limits_0^t \exp(\psi(s,\epsilon))k_{1,0}(s)ds\equiv p_{1,0}(t,\epsilon),$$

$$\sigma_{1,1}=exp(-\psi(t,\epsilon))\int\limits_0^t \exp(\psi(s,\epsilon))k_{1,1}(s)ds\equiv p_{1,1}(t,\epsilon), \tag{4.25}$$

$$\zeta_l=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_l(x),\ \varphi_l(x)=(-1)^{l-1}[\operatorname{arctg}(x)-\operatorname{arctg}(l-1)],\ l=1,2.$$

Расширенное уравнение (4.4), соответствующее уравнению (4.24), имеет такую же структуру, кроме того

$$D_\tau\equiv b(t)[\partial_{\tau_2}-\sum_{j=0}^{1}\sum_{i=0}^{k_j-1}p_{j,i}(t,\epsilon)\partial_{\sigma_{j,i}}-1],\ k_0=1,\ k_1=2.$$

Определяя решение этой расширенной задачи в виде (4.6), для коэффициентов $u_i(M)$ которого получим следующие итерационные задачи:

$$T_1u_\nu=0,\ T_1u_2=f_0(x,t)t(t-1)^2-D_\tau u_0,\ u_0|_{t=\tau=0}=h(x),\ u_k|_{t=\tau=0}=0,$$

$$T_1u_i=H_i,\ u_i|_{x=l-1,\xi=\zeta=0}=0,\ i\geq 0,\ l=1,2,\ \nu=0,1,\ k\geq 1. \tag{4.26}$$

Уравнение (4.26, $\nu=0$) в классе U имеет решение представимое в виде

$$u_0(M)=v_0(x,t)+c_0(x,t)\exp(\tau_2)+y^0_{0,0}(x,t)\sigma_{0,0}+y^0_{1,0}(x,t)\sigma_{1,0}+$$

$$+y_{1,1}^{0}(x,t)\sigma_{1,1}+\sum_{l=1}^{2}\{[\omega_{l,0}(x,t)\exp{(\tau_2)}+z_{0,0}^{l,0}(x,t)\sigma_{0,0}+$$

$$+z_{1,0}^{l,0}(x,t)\sigma_{1,0}+z_{1,1}^{l,0}(x,t)\sigma_{1,1}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})+u_{l,0}(M_l)\}, \qquad (4.27)$$

если функция $u_{l,0}(M_l)$ будет выбрана, как решение задачи

$$T_1u_{l,0}=0, \qquad u_{l,0}|_{t=\tau_1=0}=0,\ u_{l,0}|_{\xi_l=0}=d_{l,0}(x,t),$$

$$d_{l,0}(x,t)|_{x=l-1}=-v_0(l-1,t), \quad l=1,2.$$

Решение этой задачи определяется формулой (4.12).

Обеспечивая разрешимость следующего итерационного уравнения в классе U, полагаем $t(t-1)^2v_0(x,t) = -f_0(x,t)t(t-1)^2$. Далее, обеспечивая выполнения условия разрешимости в U итерационного уравнения (4.26, $i=3$), положим $L_\xi u_0 = 0$. Откуда получим уравнение $D_{x,l}d_{l,0}(x,t) = 0$ для определения функции $d_{l,0}(x,t)$, а начальное условие задается в виде $d_{l,0}(x,t)|_{x=l-1} = -v_0(l-1,t) = f_0(l-1,t)$.

Условия разрешимости в классе U следующего итерационного уравнения (4.26, $i=4$) дают уравнения (4.14). Первое уравнение которого запишется

$$t(t-1)^2v_2(x,t)=-\partial_tf_0(x,t)-(t-1)^2y_{0,0}^0(x,t)-$$

$$-t(2-t)y_{1,0}^0(x,t)-t(t-1)y_{1,1}^0(x,t).$$

Из третьего уравнения (4.14) выводим, что все $y_{j,i}^0(x,t) = y_{j,i}^0(x)$ зависят только от x, поэтому условия разрешимости

$$\frac{d^s}{dt^s}[\partial_tf_0(x,t)+(t-1)^2y_{0,0}^0(x,t)+t(2-t)y_{1,0}^0(x,t)+$$

$$+t(t-1)y_{1,1}^0(x,t)]|_{t=t_m}=0,\ m=0,1,\ s=\overline{0,k_m-1},\ k_0=1,\ k_1=2$$

предыдущего уравнения перепишутся

$$y_{0,0}^0(x,t)|_{t=t_0=0}=-\partial_tf_0(x,0), \quad y_{1,0}^0(x,t)|_{t=t_1=1}=-\partial_tf_0(x,1),$$

$$y_{1,1}^0(x,t)|_{t=t_1=1}=-\partial_t^2f_0(x,1).$$

Отсюда однозначным образом найдем $y^0_{j,i}(x,t)$:

$$y^0_{0,0}(x,t)=-\partial_t f_0(x,0),\ \ y^0_{1,0}(x,t)=-\partial_t f_0(x,1),$$

$$y^0_{1,1}(x,t)=-\partial^2_t f_0(x,1).$$

Остальные уравнения (4.14) позволяют определить

$$c_0(x,t)=h(x)-f_0(x,0),\ \ \omega_{l,0}(x,t)=\omega^0_{l,0}(x),\ \ z^{l,0}_{j,i}(x,t)=p^{l,0}_{j,i}(x),$$

где функции $\omega^0_{l,0}(x), p^{l,0}_{j,i}(x)$ в свою очередь будет определена из задач (см.(4.18)):

$$D_{x,l}\omega^0_{l,0}(x)=0,\ \ \omega^0_{l,0}(x)|_{x=l-1}=-[h(l-1)+f_0(l-1,0)],$$

$$D_{x,l}p^{l,0}_{j,i}(x)=0,\ \ p^{l,0}_{j,i}(x)|_{x=l-1}=-y^0_{j,i}(l-1,t).$$

Этим полностью определили функцию

$$u_0(M)=-f_0(x,t)+[h(x)+f_0(x,0)]\exp{(\tau_2)}-$$

$$-\partial_t f_0(x,0)\sigma_{0,0}-\partial_t f_0(x,1)\sigma_{1,0}-\partial^2_t f_0(x,1)\sigma_{1,1}-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\{[(h(l-1)+f_0(l-1,0))q_l(x)\exp{(\tau_2)}+\partial_t f_0(l-1,0)\sigma_{0,0}+$$

$$+\partial_t f_0(l-1,1)\sigma_{1,0}+\partial^2_t f_0(l-1,1)\sigma_{1,1}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})+$$

$$+f_0(l-1,t)q_l(x)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})\}.$$

Производя сужение на функциях (4.25), получим главный член асимптотики решения задачи (4.24)

$$u_{\epsilon,0}(x,t,\theta(x,t,\epsilon))=-f_0(x,t)+[h(x)+f_0(x,0)]\exp{(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^t b(s)ds)}-$$

$$-\partial_t f_0(x,0)\int\limits_0^t\exp{(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)}k_{0,0}(s)ds-$$

$$-\partial_t f_0(x,1)\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)k_{1,0}(s)ds-$$

$$-\partial_t^2 f_0(x,1)\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)k_{1,1}(s)ds-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\{[(h(l-1)+f_0(l-1,0))q_l(x)\exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^t b(s)ds)+$$

$$+\partial_t f_0(l-1,0)\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)k_{0,0}(s)ds+$$

$$+\partial_t f_0(l-1,1)\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)k_{1,0}(s)ds+$$

$$+\partial_t^2 f_0(l-1,1)\int\limits_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_s^t b(s_1)ds_1)k_{1,1}(s)ds]\times$$

$$\times erfc(\frac{(-1)^{l-1}[\mathrm{arctg}\,(x)-\mathrm{arctg}\,(l-1)]}{2\sqrt{\epsilon t}})+$$

$$f_0(l-1,t)q_l(x)erfc(\frac{(-1)^{l-1}[\mathrm{arctg}\,(x)-\mathrm{arctg}\,(l-1)]}{2\sqrt{\epsilon t}})\},$$

$$q_l(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1+(l-1)^2}}.$$

4.2 Скалярная задача, с разрывным решением предельной задачи

Параграф посвящен изучению задачи

$$L_\epsilon u(x,t,\epsilon)\equiv\epsilon\partial_t u(x,t,\epsilon)-\epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon)-b(t)u(x,t,\epsilon)=f(x,t),$$

$$(x,t)\in\Omega_1,\quad u(x,t,\epsilon)|_{t=0}=h(x),\quad u(x,t,\epsilon)|_{x=0}=u|_{x=1}=0. \tag{4.28}$$

Эта задача изучается при следующих условиях:

1. функции $h(x),a(x)\in C^\infty[0,1], f(x,t)\in C^\infty(\overline{\Omega}_1)$;

2. $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;

3. выполняются условия согласования начального и граничных условий $h(0) = h(1) = 0$;

4. функция $b(t) = b_1(t)\prod\limits_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j},\ b(t) \leq 0\ \ \forall t \in [0,T], t_j$ точки отрезка $[0,T],\ k = k_0 + k_1 + \ldots + k_r$;

В отличие от задачи, изученной в параграфе 4.1, отсутствует условие 5), обеспечивающее существования классического решения предельной задачи. Алгоритм решения, описанный в параграфе 4.1, справедлив и в данном случае, однако, разложение по степеням малого параметра начинается с отрицательной степени.

4.2.1 Регуляризация задачи

Для регуляризации задачи (4.28), мы должны ввести четыре вида регуляризующих переменных

$$\tau_1 = \frac{t}{\epsilon^2},\quad \tau_2 = \frac{\psi(t)}{\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon}\int\limits_0^t b(s)ds,\quad \xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},$$

$$\zeta_l = \frac{\varphi_l(x)}{\sqrt{\epsilon}},\quad \varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \tag{4.29}$$

$$\sigma_{j,i} = \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau\right)k_{j,i}(s)ds \equiv p_{j,i}(t,\epsilon),$$

$$l = 1,2,\qquad j = 0,1,\ldots,r;\qquad i = 0,1,\ldots,k_{j-1},$$

где $k_{j,i}(t)(j = 0,1,\ldots,r;\quad i = 0,1,\ldots,k_{j-1})$ базисная система полиномов Лагранжа-Сильвестра [49] относительно многочлена

$$p(t) = \frac{b(t)}{b_1(t)} = \prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^k_j.$$

Вводя в рассмотрение расширенную функцию $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, $M=(x,t,\xi,\zeta,\tau,\sigma)$ такую, что между решением $u(x,t,\epsilon)$ исходной задачи (4.1) выполняется тождество

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)}\equiv u(x,t,\epsilon), \tag{4.30}$$

$$\theta=(\xi,\zeta,\tau),\quad \theta(x,t,\epsilon)\equiv(\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\epsilon}},\frac{t}{\epsilon},\frac{\psi(t)}{\epsilon}),$$

$$\sigma=(\sigma_{0,0},\ldots,\sigma_{k_0-1};\ldots;\sigma_{r,0},\ldots,\sigma_{r,k_r-1}).$$

и поступая также, как и в параграфе 4.1,на основании (4.28), (4.30) и соотношений для производных, получим задачу для расширенной функции:

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon)\equiv\Big\{\frac{1}{\epsilon}T_1+D_\tau-\sqrt{\epsilon}L_\xi+\epsilon[\partial_t-D_\zeta+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}}]-$$

$$-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta-−\epsilon^2L_x\Big\}\,\widetilde{u}(M,\epsilon)=f(x,t),M=(x,t,\xi,\zeta,\tau,\sigma)\in Q_5,$$

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau=0}=h(x),\ \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{x=l-1,\xi=0,\zeta=0}=0,\ l=1,2, \tag{4.31}$$

$$T_1\equiv\partial_{\tau_1}-D_\xi,\ D_\tau\equiv b(t)[\partial_{\tau_2}+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\sigma_{j,i}(t,\epsilon)\partial_{\sigma_{j,i}}-1],$$

$$L_\xi\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l},\ L_\zeta\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\zeta,l},$$

$$L_x\equiv a(x)\partial_x^2,\qquad D_\xi\equiv\sum_{l=1}^{2}\partial_{\xi_l}^2,\qquad D_\zeta\equiv\sum_{l=1}^{2}\partial_{\zeta_l}^2.$$

Из способа получения расширенной задачи (4.31) видно, что если найдем решение $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, то сужение его при $\theta=\theta(x,t,\epsilon)$, $\sigma=p(t,\epsilon)$ будет решением задачи (4.28), так как

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)}\equiv L_\epsilon u(x,t,\epsilon). \tag{4.32}$$

Решение расширенной задачи (4.31) будем искать в виде разложения

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)=\sum_{k=-2}^{n}\epsilon^{\frac{k}{2}}u_k(M)+R_{n,\epsilon}(M). \tag{4.33}$$

Подставим это разложение в расширенную задачу (4.31) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ, тогда для коэффициентов разложения (4.33) получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_\nu(M) = 0,\ \nu = -2, -1,\ T_1 u_0(M) = -D_\tau u_{-2} u_0(M),\ u_0(M)|_{t=\tau=0} = h(x),$$

$$T_1 u_1(M) = -D_\tau u_{-1}(M) + L_\xi u_{-2}(M),\ u_1(M)|_{t=\tau=0} = u_\nu(M)|_{x=j-1,\xi=\zeta=0} = 0,$$

$$T_1 u_2(M) = f(x,t) - D_\tau u_0(M) + L_\xi u_{-1}(M) - T_2 u_2(M),\quad T_1 u_k(M) = H_k(M),$$

$$M \in Q_5,\quad u_k(M)|_{t=\tau=0} = 0,\qquad u_k(M)|_{x=-\nu-1,\xi=\zeta=0} = 0,\ k > 2, \tag{4.34}$$

$$\widetilde{L}_\epsilon R_{\epsilon,n}(M) = \epsilon^{\frac{n-1}{2}} g_{\epsilon,n}(M),\quad R_{\epsilon,n}(M)|_{t=\tau=0} = R_{\epsilon,n}(M)|_{x=j-1,\xi=\zeta=0} = 0, \tag{4.35}$$

где

$$H_k(M) = -D_\tau u_{k-2}(M) + L_\xi u_{k-3}(M) - T_2 u_{k-4}(M) +$$

$$+ L_\zeta u_{k-5}(M) + L_x u_{k-6}(M),\qquad T_2 \equiv \partial_t - D_\zeta + \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t) \partial_{\sigma_{j,i}},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,\quad g_{\epsilon,n}(M) = -\sum_{r=0}^{1} (\sqrt{\epsilon})^r D_\tau u_{n-1-r}(M) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{2} (\sqrt{\epsilon})^r L_\xi u_{n-2-r}(M) - \sum_{r=0}^{3} (\sqrt{\epsilon})^r T_2 u_{n-3-r}(M) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{4} (\sqrt{\epsilon})^r L_\zeta u_{n-4-r}(M) - \sum_{r=0}^{5} (\sqrt{\epsilon})^r L_x u_{n-5-r}(M).$$

4.2.2 Решение итерационных задач

Введем класс функций, в котором будут решаться итерационные задачи (4.34):

$$U = \{u(M) : u(M) = v(x,t) + c(x,t) \exp(\tau_2) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t) \sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2} [\omega_l(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) \exp(\tau_2) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^l(x,t) \sigma_{j,i} erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_l(M_l)],$$

$$c(x,t), v(x,t), y_{j,i}(x,t), z_{j,i}^l(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega}_1),\ |u_l(M_l)| < cexp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau_1})\},$$

где $M_l = (x,t,\xi_l,\tau_1)$.

Вычислим действие операторов $T_1,\ D_\tau,\ T_2,\ L_\xi,\ L_\zeta$ на функцию класса U:

$$T_1 u(M) = \sum_{l=1}^{2} T_1 u_l(M_l), \qquad D_\tau u(M) = -b(t)v(x,t) -$$

$$-b(t)\sum_{l=1}^{2} u_l(M_l), \quad T_2 u(M) = \partial_t \{v(x,t) + c(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[\omega_l(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) +$$

$$\left.\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^l(x,t)\sigma_{j,i}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + u_l(M_l)]\right\} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\left[y_{j,i}(x,t) +\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^l(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\right], \quad L_\xi u(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}u_l(M_l),$$

$$L_\zeta u(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2}\left[D_{x,l}\omega_l(x,t) +\right. \tag{4.36}$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} D_{x,l}z_{j,i}^l(x,t)\sigma_{j,i}\right]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})),$$

$$D_{x,l} \equiv 2\varphi_l'(x)\partial_x + \varphi_l''(x),$$

Удовлетворим функцию $u(M) \in U$ краевым условиям:

$$v(x,0) + c(x,0) + \sum_{l=1}^{2}[\omega_l(x,0)\times 0 +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} D_{x,l}z_{j,i}^l(x,0)\times 0 + u_l(M_l)|_{t=\tau=0}] = h(x),$$

$$v(l-1,t) + c(l-1,t)\exp(-\tau_2) + u_1(M_l)|_{\xi_1=\varphi_1(l-1)/\sqrt{\epsilon^3}} +$$

$$+u_2(M_l)|_{\xi_2=\varphi_2(l-1)/\sqrt{\epsilon^3}} + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}(l-1,t) + z_{j,i}^1(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_1(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}} +$$

$$+z^2_{j,i}(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_2(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}}]\sigma_{j,i}+[\omega_1(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_1(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}}+$$

$$+\omega_2(l-1,t)erfc(\frac{\varphi_2(l-1)}{2\epsilon\sqrt{t}})]\exp{(\tau_2)}=0,\quad l=1,2.$$

Чтобы обратить эти соотношения в тождества, выберем входящие туда функции следующим образом:

$$c(x,0)=h(x)-v(x,0),\quad \omega_l(x,t)|_{t=0}=\omega^0_l(x),$$

$$z^l_{j,i}(x,t)|_{t=0}=p^l_{j,i}(x),))u_l(M_l)|_{t=\tau_1=0}=0,$$

$$u_l(M_l)|_{\xi_l=0}=d_l(x,t),\quad d_l(x,t)|_{x=l-1}=-v(l-1,t),$$

$$z^l_{j,i}(x,t)|_{x=l-1}=-y^l_{j,i}(l-1,t),\quad \omega_l(x,t)|_{x=l-1}=-c(l-1,t), \tag{4.37}$$

здесь $\omega^0_l(x),p^l_{j,i}(x)$- произвольные функции.

Из итерационных задач (4.34) последовательно определим коэффициенты разложения (4.33). Уравнения (4.34) при $\nu=-2,-1$ однородные, поэтому в классе U имеют решения представимые в виде

$$u_\nu(M)=v_\nu(x,t)+c_\nu(x,t)\exp{(\tau_2)}+ \tag{4.38}$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}y^\nu_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}\{[\omega_{l,\nu}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}z^{l,\nu}_{j,i}(x,t)\sigma_{j,i}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})+u_{l,\nu}(M_l)\},$$

если функция $u_{l,\nu}(M_l)-$ решение уравнения

$$T_1u_{l,\nu}(M_l)=0,\qquad \nu=-2,-1,\qquad l=1,2.$$

Решением этого уравнения при краевых условиях

$$u_{l,\nu}(M_l)|_{t=0}=0,\quad u_{l,\nu}(M_l)|_{\xi_l=0}=d_{l,\nu}(x,t),$$

определенных из (4.37), будет функция

$$u_{l,\nu}(M_l)=d_{l,\nu}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}),\quad \nu=-2,-1,\quad l=1,2, \tag{4.39}$$

которая, на основании леммы 0.1, имеет оценку

$$|u_{l,\nu}(M_l)| < c\exp{(-\frac{\xi_l^2}{8\sqrt{\tau_1}})}.$$

Вычислим правую часть уравнения (4.34,$i=0$), на основании вычислений (4.36), она имеет вид

$$H_0(M) = -D_\tau u_{-2}(M) = b(t)v_{-2}(x,t) + b(t)\sum_{l=1}^{2} d_{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Если выражение $b(t)v_{-2}(x,t)$ войдет в правую часть уравнения $T_1u_0(M) = H_0(M)$, то оно выведет решение этого уравнения из класса U. Поэтому функцию $v_{-2}(x,t)$ выберем так, чтобы это выражение обратилось в нуль, т.е. положим $b(t)v_{-2}(x,t) = 0$. Уравнение $b(t)v_{-2}(x,t) = 0$, в силу условия 4), имеет решение:

$$v_{-2}(x,t) = \begin{cases} 0 & \forall\ t \notin \bigcup_{i=0}^{r}\{t_i\}, \\ v_{-2}^0(x) & \forall\ \ t = t_j, \quad j = 0,1,\ldots,r, \end{cases}$$

где $v_{-2}^0(x)$ произвольная функция. В силу произвольности $v_{-2}^0(x)$ и того, что мы находим гладкое решение уравнения относительно $v_{-2}(x,t)$, при всех $t \in [0,T]$ примем $v_{-2}(x,t) = 0$.

Следующее (4.34,$i = 1$) уравнение в правой части будет содержать выражение $L_\xi u_{-2}(M)$, которое, согласно вычислениям (4.36) и соотношению (4.39), запишется

$$L_\xi u_{-2}(M) = a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}u_{l,-2}(M_l) =$$

$$= a(x)\sum_{l=1}^{2} D_{x,l}d_{l,-2}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})).$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (4.34,$i = 1$) в U, выберем произвольную функцию $d_{l,-2}(x,t)$, как решение задачи

$$D_{x,l}d_{l,-2}(x,t) = 0, \qquad d_{l,-2}(x,t)|_{x=l-1} = -v_{-2}(l-1,t).$$

Отсюда определяем, что $d_{l,-2}(x,t) = 0$. Правая часть $H_1(M)$, кроме выражения $L_\xi u_0$, содержит и выражение $D_\tau u_1$, которое, на основании (4.36), (4.39), имеет вид

$$D_\tau u_{-1}(M) = -b(t)v_{-1}(x,t) - b(t)\sum_{l=1}^{2} d_{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})$$

Для разрешимости уравнения (4.34, $i = 1$) в классе U,на основании вышеприведенного рассуждения относительно $v_{-2}(x,t)$, должны положить $v_{-1}(x,t) = 0$, тогда уравнение примет вид

$$T_1 u_1(M) = -b(t)\sum_{l=1}^{2} d_{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Последнее уравнение в классе U имеет решение вида (4.38) с индексом $\nu = 1$, если функция $u_{l,1}(M_l)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$T_1 u_{l,1}(M) = -b(t)d_{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}) \equiv H_{l,1}(M_l).$$

Решение последнего уравнения может быть записано в виде (**??**) с заменой там $H_{l,0}(M_l)$ на $H_{l,1}(M_l)$ и $d_{l,0}(x,t)$ на $d_{l,1}(x,t)$, причем $d_{l,1}(x,t)|_{x=l-1} = -v_1(l-1,t)$.

Правая часть следующего итерационного уравнения (4.34, $i = 2$) имеет вид

$$H_2(M) = -D_\tau u_0 + L_\xi u_{-1} - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}} u_{-2} + f(x,t) -$$

$$-T_2 u_{-2} = -b(t)v_0(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,0}(M_l) -$$

$$-D_{x,l}d_{l,-1}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)[y_{j,i}^{-2}(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] + f(x,t) - \partial_t v_{-2}(x,t) -$$

$$-\partial_t c_{-2}(x,t)\exp{(\tau_2)} - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \partial_t y_{j,i}^{-2}(x,t)\sigma_{j,i} -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2)+\partial_t u_{l,-2}(M_l)-$$

$$-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}].$$

Для разрешимости уравнения с такой правой частью в классе U, мы должны потребовать выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_0(x,t)=-\partial_t v_{-2}(x,t)+f(x,t)-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)y_{j,i}^{-2}(x,t),$$

$$\partial_t c_{-2}(x,t)=0,\quad \partial_t y_{j,t}^{-2}(x,t)=0,\quad \partial_t\omega_{l,-2}(x,t)=0, \tag{4.40}$$

$$\partial_t z_{j,i}^{l,-2}(x,t)=0,\quad D_{x,l}d_{l,-1}(x,t)=0.$$

Первое уравнение из (4.40) требует особого подхода, поэтому сначало рассмотрим остальные уравнения. Из (4.37) определяем начальные условия для этих уравнений

$$\omega_{l,-2}(x,t)|_{t=0}=\omega_{l,-2}^0(x),\quad z_{j,i}^{l,-2}(x,t)|_{t=0}=p_{j,i}^{l,-2}(x),$$

$$c_{-2}(x,t)|_{t=0}=-v_{-2}(x,0),\quad d_{l,-1}(x,t)|_{x=l-1}=-v_{-1}(l-1,t),\quad l=1,2.$$

При таких начальных условиях они имеют решения:

$$c_{-2}(x,t)=-v_{-2}(x,0)=0,\quad \omega_{l,-2}(x,t)=\omega_{l,-2}^0(x),$$

$$z_{j,i}^{l,-2}(x,t)=p_{j,i}^{l,-2}(x),\quad d_{l,-1}(x,t)=-v_{-1}(l-1,t)q_l(x)\equiv 0, \tag{4.41}$$

где $q_l(x)$-известная функция. Здесь учтено, что $v_\nu(x,t)=0$ и $d_{l,\nu}(x,t)=0$ при $\nu=-2,-1$, поэтому из равенства (4.39), получим $u_{l,\nu}(M_l)\equiv 0$.

Подставив найденные функции в соотношения для $\omega_{l,-2}(x,t)|_{x=l-1}$ и $z_{j,i}^{l,-2}(x,t)|_{x=l-1}$ из (4.37), определим

$$\omega_{l,-2}^0(x)|_{x=l-1}=-c_{-2}(l-1,t)=0,\quad p_{j,i}^{l,-2}(x)|_{x=l-1}=-y_{j,i}^{-2}(l-1,t) \tag{4.42}$$

Остановимся на вопросе разрешимости первого уравнения из (4.40). Необходимым и достаточным условием разрешимости является выделение правой частью множителя $\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}$. Это утверждение эквивалентно выполнению следующих условий относительно правой части:

$$\frac{d^s}{dt^s}[f(x,t)-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)y_{j,i}^{-2}(x,t)]|_{t=t_m}=0,$$

$$m=0,1,\ldots,r;\ s=0,1,\ldots,k_m-1.$$

Действительно, поскольку свободный член первого уравнения (4.40), который обозначен через $\alpha(x,t)$, должен удовлетворять этому условию, то его полином Лагранжа - Сильвестра [49] равен тождественно нулю, а значит функция $\alpha(x,t)$ представима в виде

$$\alpha(x,t)=l(x,t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j},$$

где $l(x,t)$-известная функция. С учетом этого равенства и вида функции $b(t)$, перепишем первое уравнение (4.40) в виде

$$b_1(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}v_0(x,t)=l(x,t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j}.$$

Отсюда видно, что если $t\neq t_j$, то $v_0(x,t)=l(x,t)/b_1(t)$, а при $t=t_j$ функция $v_0(x,t)=v_0^0(x)$ произвольная функция. То есть решение первого уравнения (4.40) можно записать

$$v_0(x,t)=\begin{cases}\frac{l(x,t)}{b_1(t)} & \forall\ \ t\notin\bigcup_{j=0}^{r}\{t_j\}\\ v_2^0(x) & \forall\ \ t=t_j, j=0,1,\ldots,r,\end{cases}$$

Мы вычисляем гладкое решение первого уравнения (4.40), поэтому при всех $t\in[0,T]$ функция $v_0(x,t)$ должна иметь вид $\frac{l(x,t)}{b_1(t)}$.

Условию разрешимости запишем следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\frac{d^s}{dt^s}[k_{j,i}(t)y_{j,i}^{-2}(x,t)]|_{t=t_m}=p_1^s(x,t)|_{t=t_m},$$

$$m=0,1,\ldots,r,\ s=0,1,\ldots,k_m-1,$$

где $p_1^s(x,t)$-известная функция выражающая через $-\frac{\partial^s}{\partial t^s}(f(x,t))$.

Поступая аналогично параграфу 4.1, отсюда определим начальные условия $y_{j,i}^{-2}(x,t)|_{t=t_m} = q_{j,i}^0(x)$, $m = 0,1,\ldots,r$, для уравнения $\partial_t y_{j,i}^{-2}(x,t) = 0$, $j = 0,1,\ldots,r$, $i = 0,1,\ldots,k_j-1$. После выбора произвольных функций $v_0(x,t)$, $c_{-2}(x,t)$,$y_{j,i}^{-2}(x,t)$, $\omega_{l,-2}(x,t)$, $z_{j,i}^{l,-2}(x,t)$ в виде (4.40), правая часть уравнения (4.34, $i=2$) примет вид

$$H_2(M) = -\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,0}(M_l)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})+\partial_t u_{l,-2}(M_l)]$$

Функция $u_{l,0}(M_l)$ зависит от x,t,ξ, τ_1, поэтому и правая часть должна иметь такую зависимость. Сказанное обеспечивается, если во втором слагаемом перейдем от переменных ζ_l, t к переменным ξ_l, τ_1. Учитывая, что $\xi_l = \frac{\zeta_l}{\epsilon}$, получим

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} = \frac{\epsilon\xi_l}{2\sqrt{t}} = \frac{\xi_l}{2\sqrt{\frac{t}{\epsilon^2}}} = \frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}.$$

Поэтому можем записать правую часть $H_2(M)$ в виде

$$H_2(M) = -\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,0}(M_l)+\partial_t u_{l,-2}(M_l)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}],$$

причем, на основании лемм 0.1, 0.2 и представления (4.39) решения $u_{l,0}(M_l)$, для $H_2(M)$ имеем оценку:

$$|H_2(M)| \leq \sum_{l=1}^{2}c_l \exp{(-\frac{\xi_l}{8\tau_1})}.$$

Уравнение (4.34, $i = 2$) с такой правой частью имеет решение в классе U представимое в виде (4.38) с индексом $\nu = 2$.

Рассмотрим следующее итерационное уравнение (4.34, $i = 3$), оно имеет правую часть

$$H_3(M) = -D_\tau u_1 + L_\xi u_0 - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}} u_{-1} -$$

$$-T_2 u_{-1} = -b(t)v_1(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,1}(M_l) -$$

$$-D_{x,l}d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)[y_{j,i}^{-1}(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] - \partial_t v_{-1}(x,t) -$$

$$-\partial_t c_{-1}(x,t)\exp(\tau_2) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \partial_t y_{j,i}^{-1}(x,t)\sigma_{j,i} -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t \omega_{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) + \partial_t u_{l,-1}(M_l) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} \partial_t z_{j,i}^{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}] + \sum_{l=1}^{2}[D_{x,l}\omega_{l,-2}(x,t)\exp(\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} D_{x,l} z_{j,i}^{l,-2}(x,t)\sigma_{j,i}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}).$$

Обеспечивая разрешимость этого уравнения в классе U, мы должны потребовать выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_1(x,t) = -\partial_t v_{-1}(x,t) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y_{j,i}^{-1}(x,t),$$

$$L_{\xi,l}u_{l,0} \equiv D_{x,l}d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}})) = 0,$$

$$\partial_t c_{-1}(x,t) = 0,\ \partial_t y_{j,i}^{-1}(x,t) = 0,\ \partial_t \omega_{l,-1}(x,t) = 0,$$

$$\partial_t z_{j,i}^{l,-1}(x,t) = 0,\ \ D_{x,l}\omega_{l,-2}(x,t) = 0,\ D_{x,l} z_{j,i}^{l,-2}(x,t) = 0. \qquad (4.43)$$

В последние соотношения (4.43) подставим значения $\omega_{l,-2}(x,t)$, $z_{j,i}^{l,-2}(x,t)$ из (4.41), далее, решая их при начальном условии (4.42), найдем

$$\omega_{l,-2}^{0}(x) = -c_{-2}(l-1,t)q_l(x), \ \ p_{j,i}^{l,-2}(x) = -y_{j,i}^{-2}(l-1,t)q_l(x), \ l=1,2.$$

Здесь t принимается как параметр, $q_l(x)$-известная функция. Этим полностью определен первый член асимптотики $u_{-2}(M)$:

$$u_{-2}(M) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}^{-2}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}]\sigma_{j,i}. \tag{4.44}$$

Краевые условия для остальных уравнений из (4.43), в силу тех же соображений, что и выше, определяются в виде

$$\omega_{l,-1}(x,t)|_{t=0} = \omega_{l,-1}^{0}(x), \ z_{j,i}^{l,-1}(x,t)|_{t=0} = p_{j,i}^{l,-1}(x),$$

$$c_{-1}(x,t)|_{t=0} = -v_{-1}(x,0) = 0,$$

причем произвольные функции $\omega_{l,-1}^{0}(x)$ и $p_{j,i}^{l,-1}(x)$ при $x=l-1$ выбираются следующим образом:

$$\omega_{l,-1}^{0}(x)|_{x=l-1} = -c_{-1}(l-1,t), \ \ p_{j,i}^{l,-1}(x)|_{x=l-1} = -y_{j,i}^{-1}(l-1,t). \tag{4.45}$$

Решая уравнение (4.43), при приведенных выше начальных условиях, получим

$$c_{-1}(x,t) = 0, \ \omega_{l,-1}(x,t) = \omega_{l,-1}^{0}(x), \ z_{j,i}^{l,-1}(x,t) = p_{j,i}^{l,-1}(x). \tag{4.46}$$

Для разрешимости первого уравнения из (4.43), с учетом того, что $v_{-1}(x,t)=0$, потребуем выполнения условий

$$\frac{d^s}{dt^s}[k_{j,i}(t)y_{j,i}^{-1}(x,t)]|_{t=t_m} = 0.$$

Отсюда, поступая также, как и при обеспечении условия разрешимости уравнения относительно $v_{-2}(x,t)$, найдем $y_{j,i}^{-1}(x,t)|_{t=t_m} = 0$, поэтому $v_{-1}(x,t)=0$ и $y_{j,i}^{-1}(x,t)=0$. Подставляя

$$u_{l,0}(M_l) = d_{l,0}(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}) - b(t)d_{l,-2}(x,t)I_{l,3}(\xi_l,\tau_1),$$

в уравнение $L_{\xi,l}u_{l,0}(M_l) = 0$, имеем

$$L_{\xi,l}u_{l,0}(M_l) = [D_{x,l}d_{l,0}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))-$$

$$-b(t)D_{x,l}d_{l,-2}(x,t)\partial_{\xi_l}I_{l,3}(\xi_l,\tau_1)].$$

Ранее функция $d_{l,-2}(x,t)$ была определена, как решение уравнения $D_{x,l}d_{l,-2}(x,t) = 0$, обеспечивая выполнения соотношения $L_{\xi,l}u_{l,0}(M_l) = 0$ положим $D_{x,l}d_{l,0}(x,t) = 0$. Краевые условия для этого уравнения задаются в виде $d_{l,0}(x,t)|_{x=l-1} = -v_0(l-1,t),\ l = 1,2$. Из полученной задачи найдем $d_{l,0}(x,t)$.

После такого выбора, правая часть $H_3(M)$ перепишется

$$H_3(M) = -\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,1}(M_l) + \partial_t u_{l,-1}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)z_{j,i}^{l,-1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})].$$

Произведем здесь переход

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} \to \frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}},$$

тогда уравнение (4.34, $i = 3$), с приведенной правой частью, имеет решение представимое в виде (4.38).

Для полного представления процесса нахождения коэффициентов разложения (4.33), рассмотрим еще одно итерационное уравнение (4.34, $i = 4$). Это уравнение имеет правую часть

$$H_4(M) = -D_\tau u_2 + L_\xi u_1 - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)\partial_{\sigma_{j,i}}u_0-$$

$$-T_2u_0 = -b(t)v_2(x,t) - \sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,2}(M_l)-$$

$$-D_{x,l}d_{l,1}(x,t)\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}))] - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)[y_{j,i}^{0}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,0}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] - \partial_t v_0(x,t)-$$

$$-\partial_t c_0(x,t)\exp(\tau_2) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t y_{j,i}^0(x,t)\sigma_{j,i}-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{l,0}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\exp(\tau_2) + \partial_t u_{l,0}(M_l)-$$

$$-\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\partial_t z_{j,i}^{l,0}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\sigma_{j,i}] + \sum_{l=1}^{2}[D_{x,l}\omega_{l,-1}(x,t)\exp(\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} D_{x,l}z^{l,-1}(x,t)\sigma_{j,i}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) + L_x\{v_{-2}(x,t)+$$

$$+c_{-2}(x,t)\exp(\tau_2) + \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{-2}(x,t)\sigma_{j,i} + \sum_{l=1}^{2}[(\omega_{l,-2}(x,t)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,t}^{l,-2}(x,t)\sigma_{j,i})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}} + u_{l,-2}(M_l)]\}.$$

Обеспечивая разрешимость уравнения (4.34, $i = 4$) в классе U, потребуем выполнения следующих соотношений:

$$b(t)v_2(x,t) = -\partial_t v_0(x,t) + L_x v_{-2}(x,t) - \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} k_{j,i}(t)y_{j,i}^0(x,t),$$

$$D_{x,l}d_{l,1}(x,t) = 0, \qquad \partial_t c_0(x,t) = L_x c_{-2}(x,t),$$

$$\partial_t y_{j,i}^0(x,t) = L_x y_{j,i}^{-2}(x,t), \quad \partial_t\omega_{l,0}(x,t) = L_x\omega_{l,-2}(x,t),$$

$$\partial_t z_{j,i}^{l,0}(x,t) = L_x z_{j,i}^{l,-2}(x,t), \; D_{x,l}z^{l,-1}(x,t) = 0,$$

$$D_{x,l}\omega_{l,-1}(x,t) = 0. \tag{4.47}$$

Решив уравнение $D_{x,l}d_{l,1}(x,t) = 0$, при начальном условии $d_{l,1}(x,t)|_{x=l-1} = -v_1(l-1,t) = 0$, получим $d_{l,1}(x,t) = 0$. Из остальных уравнений при соответствующих начальных условиях определим

$$c_0(x,t) = -v_0(x,t) + \int_0^t L_x c_{-2}(x,s)ds,$$

$$\omega_{l,0}(x,t=\omega^0_{l,0}(x)+\int_0^t L_x\omega_{l,-2}(x,s)ds,$$

$$z^{l,0}_{j,i}(x,t)=p^{l,0}_{j,i}(x)+\int_0^t L_x z^{l,-2}_{j,i}(x,s)ds$$

Подставив (4.46) в последние уравнения из (4.47), получим

$$D_{x,l}\omega^0_{l,-1}(x)=0,\quad D_{x,l}p^{l,-1}_{j,i}(x)=0.$$

Решаем их при начальном условии (4.45). С учетом того, что $c_{-1}(x,t)=0$, $y^{-1}_{j,i}(x,t)=0$ найдем $\omega^0_{l,-1}(x)=0$, $p^{l,-1}_{j,i}(x)=0$. Ранее было установлено, что $v_{-1}(x,t)=0$, $u_{l,-1}(M_l)=0$, поэтому и $u_{-1}(M)=0$.

Первое уравнение (4.47) разрешимо, если имеют место условие:

$$\frac{d^s}{dt^s}[\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)y^0_{j,i}(x,t)]|_{t=t_m}=\alpha^0_{m,s}(x,t),$$

которое позволяет определить начальное условие $y^0_{j,i}(x,t)|_{t=t_m}=y^{0,m}_{j,i}(x)$ для уравнения $\partial_t y^0_{j,i}(x,t)=L_x y^{-2}_{j,i}(x,t)$. Входящая сюда функция $\alpha^0_{m,s}(x,t)$ определена выражением

$$\alpha^0_{m,s}(x,t)\equiv-\frac{\partial^s}{\partial t^s}(\partial_t v_0(x,t)-L_x v_{-2}(x,t))|_{t=t_m}.$$

Этим мы обеспечили выполнения соотношений (4.47), при этом уравнение

$$T_1u_4(M)=-\sum_{l=1}^{2}[b(t)u_{l,2}(M_l)+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}k_{j,i}(t)z^{l,-1}_{j,i}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})-$$
$$-\partial_t u_{l,0}(M_l)-L_x u_{l,-2}(M_l)]$$

разрешимо в классе U. Перед тем, чтобы решить его, в правой части произведем переход

$$\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\to\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau_1}}.$$

Далее, повторяя вышеописанный процесс, методом индукции определим все коэффициенты разложения (4.33). В этом разложении коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль, т.е. нами построена частичная сумма

$$u_{\epsilon,2n}(M)=\sum_{k=-1}^{n}\epsilon^k\{v_{2k}(x,t)+c_{2k}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{2k}(x,t)\sigma_{j,i}+\sum_{l=1}^{2}[(\omega_{l,2k}(x,t)\exp{(\tau_2)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^{l,2k}(x,t)\sigma_{j,i})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})+u_{l,2k}(M_l)]\}. \tag{4.48}$$

Чтобы получить асимптотику решения исходной задачи произведем в этой частичной сумме (4.48) сужение при $\theta=\theta(x,t,\epsilon),\ \sigma=p(t,\epsilon)$, получим

$$u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))=\sum_{k=-1}^{n}\epsilon^k\{v_{2k}(x,t)+c_{2k}(x,t)\exp{(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b(s)ds)}+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} y_{j,i}^{2k}(x,t)\int\limits_0^t \exp{(-\frac{1}{\epsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau)}k_{j,i}(s)ds+ \tag{4.49}$$

$$\sum_{l=1}^{2}[\omega_{l,2k}(x,t)\exp{(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b(s)ds)}erfc(\frac{(-1)^{l-1}}{2\sqrt{\epsilon t}}\int_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})+$$

$$+u_{l,2k}(x,t,\theta(x,t,\epsilon))+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1} z_{j,i}^{l,2k}(x,t)\int\limits_0^t \exp{(-\frac{1}{\epsilon}\int\limits_t^s b(\tau)d\tau)}\times$$

$$\times k_{j,i}(s)ds\ erfc(\frac{(-1)^{l-1}}{2\sqrt{\epsilon t}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})]\}.$$

Используя (4.32) и производя сужение в задаче (4.35), для остаточного члена

$$R_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))\equiv R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon)=$$

$$=u(x,t,\epsilon)-u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))$$

после замены n на $2n$, придем к задаче

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon)=\epsilon^n g_{\epsilon,n}(x,t,\epsilon),\quad R_{\epsilon,2n}|_{t=0}=R_{\epsilon,2n}|_{x=0}=R_{\epsilon,2n}|_{x=1}=0.$$

Согласно построению, функция $|g_{\epsilon,n}(x,t,\epsilon)|<c\quad\forall(x,t)\in\overline{\Omega}_1$, поэтому, на основании леммы 0.3, $|R_{\epsilon,2n}(x,t,\epsilon)|<c\epsilon^n$.

Условия гладкости данных задачи (4.28) позволяют получить следующие члены $u_{2n+1}(M)=0$ и $u_{2n+2}(M)$ разложения (4.33), причем

$$|u(x,t,\epsilon)-u_{\epsilon,2n+2}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))|<\epsilon^{n+\frac{1}{2}}|R_{\epsilon,2n+2}(x,t,\epsilon)|,$$

где $|R_{\epsilon,2n+2}(x,t,\epsilon)| = O(1)$ при $\epsilon \longrightarrow 0$. В связи с тем, что

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon)) - \epsilon^{n+1}u_{2n+2}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))| \geq$$

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))| - \epsilon^{n+1}|u_{2n+2}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))|,$$

то из ограниченности $u_{\epsilon,2n+2}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))$ получим оценку

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))| < c\ \epsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4.2 *Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда построенное решение (4.49) является асимптотическим решением исходной задачи (4.28), т.е. для достаточно малых* $\epsilon > 0$, $\forall (x,t) \in \overline{\Omega_1}$, $n = 0,1,\ldots$ *справедлива оценка*

$$|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,2n}(x,t,\theta(x,t,\epsilon),p(t,\epsilon))| < c\ \epsilon^{n+\frac{1}{2}}.$$

Теорема 4.3 *Пусть выполнены условия 1)-4), тогда* $\forall\ t \neq t_j$ *существует предел*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u_{\epsilon,2n}(x,t) = -\frac{f(x,t)}{b(t)} \equiv v(x,t). \tag{4.50}$$

Доказательство. Из построенной частичной суммы рассмотрим только сумму первых двух слагаемых, остальные стремятся к нулю при $\epsilon \longrightarrow 0$:

$$\frac{1}{\epsilon}u_{-2}(M) + u_0(M) = \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}^{-2}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,-2}(x,t)erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right)]\sigma_{j,i}+$$

$$+v_0(x,t) + c_0(x,t)exp(\tau_2) + \sum_{l=1}^{2} u_{l,0}(N_l)+ \tag{4.51}$$

$$+\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}[y_{j,i}^{0}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} z_{j,i}^{l,0}(x,t)erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right)]\sigma_{j,i}$$

Так как при $\epsilon \longrightarrow 0$ следует $\tau_2 \longrightarrow -\infty,\ \zeta_l \longrightarrow +\infty,\ \xi_l \longrightarrow +\infty$, а поэтому $u_{l,0}(N_l) \longrightarrow 0,\ erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}\right) \longrightarrow 0,\ exp(\tau_2) \longrightarrow 0$.

Учитывая последние факты, произведем сужение в (4.51), затем, переходя к пределу при $\epsilon \longrightarrow 0$, получим

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0}[\ \frac{1}{\epsilon}u_{-2}(M) + u_0(M)] = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0}[v_0(x,t)+$$

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{k_j-1}\ \frac{1}{\epsilon}y_{j,i}^{-2}(x,t)\int_0^t exp(-\frac{1}{\epsilon}\int_t^s b(\tau)d\tau)k_{j,i}(s)ds].$$

В правой части произведем интегрирование по частям, далее, вспоминая выражение для $v_0(x,t)$, получим равенство (4.50). Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие. *В условиях теоремы 4.3* $\forall t \in \bigcup_{j=0}^{r}\{t_j\}$ *имеет место равенство*

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} u_{\epsilon,2n}(x,t) = \infty$$

4.3 Двумерная задача

В параграфе изучается двумерная сингулярно возмущенная параболическая задача вида

$$L_\epsilon u(x,y,t,\epsilon) \equiv \epsilon\partial_t u(x,y,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,y,t,\epsilon) - L(y,t)u(x,y,t,\epsilon) =$$

$$= f(x,y,t),\quad (x,y,t) \in \Omega_2,\quad u|_{t=0} = h(x,y),\qquad u|_{\partial S} = 0, \tag{4.52}$$

при $\epsilon \to 0$.

Задача изучается при следующих предположениях:

1. Оператор $L(t)$ при каждом $t \in [0,T]$ имеет дискретный простой спектр

$$L(t)\psi_k(y,t) = \lambda_k(t)\psi_k(y,t),\ \psi_k(y,t)|_{y=0} = \psi_k(y,t)|_{y=1} = 0,$$

$$k = 1, 2. \ldots;$$

2. Спектр оператора L удовлетворяет требованиям

   a) $\lambda_1(t) = l_1(t)\prod_{j=0}^{r}(t-t_j)^{k_j},\ \lambda_1(t) < 0(\ \forall\ t \in [0,T]);$

b) $\lambda_j(t) \neq 0,\ j \geq 2,\ \forall\, t \in [0,T]$;

c) $\lambda_j(t) \neq \lambda_i(t),\ i \neq j,\ i,j \geq 1, \forall\, t \in [0,T]$;

d) $Re\ \lambda_j(t) \leq 0,\ j \geq 2,\ \forall\, t \in [0,T]$.

3. Система собственных функций $\psi_k(y,t)$ при каждом $t \in [0,T]$ образует полную ортонормированную систему функций в некотором гильбертовом пространстве H.

4. Гладкость заданных функций и спектра таковы, что все ряды по собственным функциям и ряды полученные почленным дифференцированием по $x,\ t$ до любого порядка и по y до второго порядка, сходятся в нормированном пространстве U, которое вводится ниже.

5. $a(x) > 0$ при всех $x \in [0,1]$ и $a(x),\ f(x,y,t),\ h(x,y)$ гладкие функции.

6. Неоднородность $f(x,y,t)$ такова, что
$$\frac{d^i}{dt^i}(f(x,y,t),\psi_1(y,t))|_{t=t_j} = 0,\ j = \overline{0,r},\ i = \overline{0,k_j-1}.$$

7. Выполнены условия согласования начальных и граничных условий: $h(0,y) = h(1,y) = 0$.

В отличии от предыдущего параграфа, для описания экспоненциальной погранслойной функции, вводятся счетное количество регуляризующих функций. Эти регуляризующие функции выражается через спектр предельного оператора.

4.3.1 Регуляризация задачи

При описании пограничного слоя вдоль $t = 0$, будем использовать спектр предельного оператора L, поэтому должны предварительно определить спектр $\{\lambda_k(t)\}$ и соответствующие им собственные функции $\{\psi_k(y,t)\}$. Для регуляризации задачи (4.52) вводим следующие регуляризующие переменные:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon^2}, \quad \eta_k = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \lambda_k(s)ds, \quad \zeta_l = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_l(x), \quad \xi_l = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_l(x),$$

$$\sigma_{\mu,\nu} = \int_0^t \exp\,(-\frac{1}{\epsilon}\int_t^s \lambda_1(s_1)ds_1)k_{\mu,\nu}(s)ds \equiv p_{\mu,\nu}(t,\epsilon),$$

$$\varphi_l(x) = (-1)^{l-1}\int_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \ \varphi_l(l-1) = 0, \tag{4.53}$$

$$k \geq 1, \ l = 1, 2, \mu = \overline{0, r}, \ \nu = \overline{0, k_\mu - 1}.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots), \ \xi = (\xi_1, \xi_2), \ \sigma = (\sigma_{0,0}, ..., \sigma_{0,k_0-1}; ...; \sigma_{r,0}, ..., \sigma_{r,k_r-1})$$

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2), \quad p = (p_{0,0}, ..., p_{0,k_0-1}; ...; p_{r,0}, ..., p_{r,k_r-1}),$$

$$\theta(x,t,\epsilon) = \theta(\frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi(x), \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(x), \frac{t}{\epsilon^2}, \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \lambda(s)ds),$$

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots), \ \theta = (\xi, \zeta, \tau, \eta), \quad M = (x, y, t, \theta, \sigma),$$

$0 < \xi, \zeta, \tau, \sigma < +\infty, \qquad -\infty < \eta < 0$ при $\epsilon -> +0$.

Произведем расширение исходной задачи (4.52), для чего вместо решения $u(x,y,t,\epsilon)$ задачи (4.52) вводим новую функцию $\widetilde{u}(M,\epsilon)$, такую, что ее сужение, в соответствии с (4.53), совпало с искомой функцией, т.е.

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)} \equiv u(x,y,t,\epsilon). \tag{4.54}$$

Используя (4.53) из (4.54) найдем производные

$$\partial_t u(x,y,t,\epsilon) \equiv (\partial_t \widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon^2}\partial_\tau \widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(t)\partial_{\eta_j}\widetilde{u}(M,\epsilon) +$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[\lambda_1(t)p_{\mu,\nu}(t,\epsilon) + \epsilon k_{\mu,\nu}(t)]\partial_{\sigma_{\mu,\nu}}\widetilde{u}(M,\epsilon))|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$

$$\partial_x u(x,y,t,\epsilon) \equiv (\partial_x + \sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\varphi_l^{'}(x)\partial_{\zeta_l} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}\varphi_l^{'}(x)\partial_{\xi_l}]\widetilde{u}(M,\epsilon))|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$

$$\partial_x^2 u(x,y,t,\epsilon) \equiv (\partial_x^2 u(\widetilde{M,\epsilon}) + \sum_{l=1}^{2}[\frac{1}{\epsilon}(\varphi_l^{'})^2\partial_{\zeta_l}^2 u(\widetilde{M,\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon^3}\partial_{\xi_l}^2\widetilde{u}(M,\epsilon)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}L_{\zeta,l}\widetilde{u}(M,\epsilon) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon^3}}L_{\xi,l}\widetilde{u}(M,\epsilon)])|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)},$$

$$L_{\zeta,l} \equiv 2\varphi_l^{'}(x)\partial_{\zeta_l,x}^2 + \varphi_l^{''}(x)\partial_{\zeta_l}, \quad L_{\xi,l} \equiv 2\varphi_l^{'}(x)\partial_{\xi_l,x}^2 + \varphi_l^{''}(x)\partial_{\xi_l}$$

и, вместо задачи (4.52), рассмотрим задачу для расширенной функции $\widetilde{u}(M,\epsilon)$:

$$\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon) \equiv \frac{1}{\epsilon}T_1\widetilde{u}(M,\epsilon) + D_\eta\widetilde{u}(M,\epsilon) - \sqrt{\epsilon}L_\xi\widetilde{u}(M,\epsilon) + \epsilon T_2\widetilde{u}(M,\epsilon)-$$

$$-\epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta\widetilde{u}(M,\epsilon) - \epsilon^2 L_x\widetilde{u}(M,\epsilon) = f(x,y,t), M=(x,y,t,\theta)\in Q_6,$$

$$\widetilde{u}(M,\epsilon)|_{t=\tau=\eta=0} = h(x,y), \quad \widetilde{u}(M,\epsilon)|_{\partial\Lambda} = 0, \tag{4.55}$$

$$T_1 \equiv \partial_\tau - D_\xi, \quad T_2 \equiv \partial_t - D_\zeta - \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t),$$

$$D_\eta \equiv \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(t)\partial_{\eta_j} - L(t) + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}\lambda_1(t)p_{\mu,\nu}(t,\epsilon)\partial_{\sigma_{\mu,\nu}},$$

$$L_x \equiv a(x)\partial_x^2, \quad D_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial_{\xi_l}^2, \quad D_\zeta \equiv \sum_{l=1}^{2}\partial_{\zeta_l}^2,$$

$$L_\xi \equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l}, \quad L_\zeta \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}L_{\zeta,l},$$

$$\Lambda = \{(x,y,t,\xi,\tau):(x,y)\in\Omega_1; t\in(0,T]; \xi,\zeta,\tau>0,\eta<0\}.$$

Если мы найдем решение $\widetilde{u}(M,\epsilon)$ расширенной задачи (4.55), то сужение его при $\theta=\theta(x,t,\epsilon)$ и $\sigma=p(t,\epsilon)$ будет решением задачи (4.52) ибо

$$(\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(M,\epsilon))|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(t,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x,y,t,\epsilon). \tag{4.56}$$

Решение расширенной задачи (4.55) определяем в виде разложения:

$$\widetilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n}\epsilon^{\frac{i}{2}}u_i(M) + \epsilon^{\frac{n+1}{2}}R_{\epsilon,n}(M). \tag{4.57}$$

Для коэффициентов этого разложения, на основании задачи (4.55), получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_e(M) = 0, \quad u_0(M)|_{t=\tau=\eta=0} = h(x,y), \; u_1(M)|_{t=\tau=\eta=0} = 0,$$

$$T_1 u_2(M) + D_\eta u_0(M) = f(x,y,t), \quad u_i(M)|_{t=\tau=\eta=0} = 0,$$

$$T_1 u_i = -D_\eta u_{i-2} + L_\xi u_{i-3} - T_2 u_{i-4} + L_\zeta u_{i-5} + L_x u_{i-6}, \tag{4.58}$$

$$u_i(M)|_{\partial\Lambda} = 0, \; e = 0,1, \; i = 0,1,\ldots,n.$$

$$\widetilde{L}_\epsilon R_{\epsilon,n}(M) = g_n(M,\epsilon), \qquad R_{\epsilon,n}|_{t=0} = R_{\epsilon,n}|_{\partial\Lambda} = 0, \tag{4.59}$$

$$g_n(M,\epsilon) = -\sum_{l=0}^{1} \epsilon^{\frac{l}{2}} D_\eta u_{n-1+l} + \sum_{l=0}^{2} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_\xi u_{n-2+l} -$$

$$-\sum_{l=0}^{3} \epsilon^{\frac{l}{2}} T_2 u_{n-3+l} + \sum_{l=0}^{4} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_\zeta u_{n-4+l} + \sum_{l=0}^{5} \epsilon^{\frac{l}{2}} L_x u_{n-5+l}.$$

4.3.2 Пространство решений

Введем следующий класс функций, в котором будут решаться задачи (4.58):

$$U = \left\{ u(M) : u(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_{k,l}(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty} (c_{k,j}(x,t) + \right.\right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \omega_{k,j}^l(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})) exp(\eta_j) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} [y_{\mu,\nu}^k(x,t) +$$

$$\left.\left. + \sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu}^{k,l} erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] \sigma_{\mu,\nu} \right\} \psi_k(y,t), \qquad |u_{l,k}(N_l)| < c \; exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau}),$$

$$||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(t)|^2 \sup |v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_{l,k}(N_l)|^2 +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{\infty} |\lambda_k(t) - \lambda_j(t)|^2 \sup |c_{k,j}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{j,k}^l(x,t)|^2 < +\infty,$$

$$\left. N_l = (x,t,\xi_l,\tau), \quad erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}}^{\infty} exp(-s^2)ds. \right\}$$

Вычислим действия операторов $T_1,\ D_\eta,\ T_2,\ L_\xi,\ L_\zeta$ на функцию $u(M) \in U$. Имеем

$$T_1 u(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2} T_1 u_{k,l}(N_l)\psi_k(y,t),$$

$$D_\eta u(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \{-\lambda_k(t)v_k(x,t) + \sum_{j=1(k\neq j)}^{\infty} [\lambda_j(t) - \lambda_k(t)][c_{k,j}(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \omega_{k,j}^l(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] \exp(\eta_j) - \sum_{l=1}^{2} \lambda_k(t) u_{k,l}(N_l) - \tag{4.60}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} (\lambda_k(t) - \lambda_1(t))[y_{\mu,\nu}^k(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu}^{k,l}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}\}\psi_k(y,t).$$

$$T_2 u(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\partial_t v_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \partial_t u_{k,l}(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty} [\partial_t c_{k,j}(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \partial_t \omega_{k,j}^l erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] \exp(\eta_j) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} [\partial_t y_{\mu,\nu}^k(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \partial_t z_{\mu,\nu}^{k,l}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}\}\psi_k(y,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \{v_k(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} u_{k,l}(N_l) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} [y_{\mu,\nu}^k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu}^{k,l}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} [c_{k,j}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \omega_{k,j}^l(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})] \exp(\eta_j)\}\partial_t \psi_k(y,t),$$

$$L_\xi u(M) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l} u_{k,l}(N_l),$$

$$L_\zeta u(M) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} L_{\zeta,l}\omega_{k,j}^{l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}).$$

Разложим по собственным функциям производную $\partial_t\psi_k(y,t)$, а затем, производя группировку членов, получим

$$T_2u(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{\widetilde{v_k}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\widetilde{u_{k,l}}(N_l)+$$

$$+[\partial_t c_{k,k}(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)c_{k,r}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}(\partial_t\omega_{k,k}^{l} + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)\omega_{k,r}^{l})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_k)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[\widetilde{y_{\mu,\nu}^{k}}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\widetilde{z_{\mu,\nu}^{k,l}}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}- \tag{4.61}$$

$$-\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[y_{\mu,\nu}^{k}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}z_{\mu,\nu}^{k,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]+$$

$$+\sum_{j=1 (j\neq k)}^{\infty}[\widetilde{c_{k,j}}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\widetilde{\omega_{k,j}^{l}}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp(\eta_j)\}\psi_k(y,t),$$

где

$$\widetilde{v_k}(x,t) = \partial_t v_k(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)v_r(x,t), \qquad \widetilde{u_{k,l}}(N_l) = \partial_t u_{k,l}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)u_{l,r},\ \widetilde{y_{\mu,\nu}^{k}}(x,t) = \partial_t y_{\mu,\nu}^{k}(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)y_{\mu,\nu}^{r}(x,t),$$

$$\widetilde{\omega_{k,j}^{l}}(x,t) = \partial_t\omega_{k,j}^{l} + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)\omega_{r,j}^{l},\ \alpha_{r,k}(t) = (\partial_t\psi_r(y,t),\psi_k(y,t)),$$

$$\widetilde{z_{\mu,\nu}^{k,l}}(x,t) = \partial_t z_{\mu,\nu}^{k,l}(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)z_{\mu,\nu}^{r,l}(x,t),$$

$$\widetilde{c_{k,j}}(x,t) = \partial_t c_{k,j}(x,t) + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_{k,r}(t)c_{r,j}(x,t), \quad k\neq j, \quad k,j\geq 1.$$

4.3.3 Решение итерационных задач

Уравнения (4.58), $\forall\, e = 0, 1$ однородные, поэтому в U существуют решения представимые в виде

$$u_e(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ v_{e,k}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u^e_{k,l}(N_l) + c^e_{k,k}(x,t)exp(\eta_k) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \omega^{e,l}_{k,k}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})exp(\eta_k) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} [y^k_{\mu,\nu}(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} z^{k,l}_{\mu,\nu}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu} \Bigg\} \psi_k(y,t), \qquad e = 0, 1. \tag{4.62}$$

На основании вычислений (4.60), (4.61) убеждаемся, что функция (4.62) удовлетворяет уравнению (4.58), если функция $u^e_{k,l}(N_l)$ будет выбрана, как решение уравнения

$$T_{1,l} u^e_{l,k}(N_l) = 0, \qquad T_{1,l} \equiv \partial_\tau - \partial^2_{\xi_l}, \ \ e = 0, 1, \ \ l = 1, 2. \tag{4.63}$$

Остальные функции входящие в (4.62) пока произвольны, но они, на основании краевых условий из (4.58), связаны соотношениями

$$u^e_{k,l}(N_l)|_{t=\tau=0} = 0, \ \ u^e_{k,l}(N_l)|_{\xi=0} = d^e_{k,l}(x,t),$$

$$d^e_{k,l}(x,t)|_{x=l-1} = -v_{k,e}(l-1,t), \ \omega^{e,l}_{k,k}(x,t)|_{t=0} = k^{e,l}_{k,k}(x),$$

$$k^{e,l}_{k,k}(x)|_{x=l-1} = -c^e_{k,k}(l-1,t), \ \ c^e_{k,k}(x,t)|_{t=0} = h_{e,k}(x)$$

$$-v_{e,k}(x,0), \ \ h_{0,k}(x) = h_k(x), \ \ h_{1,k}(x) = 0, \ z^{k,e}_{\mu,\nu,l}|_{t=0} = p^{k,e}_{\mu,\nu,l}(x),$$

$$p^{k,e}_{\mu,\nu,l}(x)|_{x=l-1} = -y^{k,e}_{\mu,\nu}(l-1,t), \ \ \psi_k(0,t) = \psi_k(1,t) = 0, \tag{4.64}$$

$$k \geq 1, \ l = 1, 2, \ e = 0, 1.$$

Из краевых условий для функций $y^{k,e}_{\mu,\nu}(x,t)$, $z^{k,e}_{\mu,\nu,l}(x,t)$ входящих в (4.64) будут использованы только те, которые соответствуют значению $k = 1$. Как увидим ниже, эти функции при $k \neq 1$, определяются равными нулю. При получении выражений (4.64) воспользовались разложением начальной функции $h(x,y)$ в ряд по собственным функциям $\{\psi_k(y,t)\}$:

$$h(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x)\psi_k(y,t)|_{t=0}.$$

В связи с тем, что при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль, коэффициент $\omega_{k,k}^{e,l}(x,t)$ этой функции при $t = 0$ выбрали в виде $\omega_{k,k}^{e,l}(x,t)|_{t=0} = k_{k,k}^{e,l}(x)$, где $k_{k,k}^{e,l}(x)$-произвольная функция.

Решение уравнения (4.63), при соответствующих краевых условиях (4.64), может быть записано в виде

$$u_{k,l}^{e}(N_l) = d_{k,l}^{e}(x,t) erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}), \tag{4.65}$$

$$e = 0,1, \quad l = 1,2, \quad k \geq 1,$$

для которого справедлива оценка

$$|u_{k,l}^{e}(N_l)| < c\ exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau}). \tag{4.66}$$

Перейдем к следующему уравнению в (4.58), правая часть которого имеет вид:

$$F_2(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \{f_k(x,t) + \lambda_k(t) v_{k,0}(x,t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} \lambda_k(t) u_{k,l}^{0}(N_l) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} (\lambda_k(t) - \lambda_1(t))[y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t) +$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t) erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu} \right\} \psi_k(y,t),$$

здесь $f_k(x,t)-$ коэффициент разложения функции $f(x,y,t)$ по собственным функциям $\{\psi_k(y,t)\}$. Чтобы уравнение относительно $u_2(M)$ из (4.58), с такой правой частью, имело в U решение должны избавиться от выражения

$$f_k(x,t) + \lambda_k v_{k,0}(x,t) + \sum_{\mu=0}^{r} \sum_{\nu=0}^{k_\mu - 1} (\lambda_k(t) - \lambda_1(t))[y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}.$$

При $k \neq 1$ полагаем $v_{k,0}(x,t) = -\frac{f_k(x,t)}{\lambda_k(t)}$ и $y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t) = 0,\ z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t) = 0$, а при $k = 1$ уравнение $f_k(x,t) + \lambda_k v_{k,0}(x,t) = 0$ разрешимо на основании условий 6), а функции $y_{\mu,\nu}^{1,0}(x,t),\ z_{\mu,\nu,l}^{1,0}(x,t)$ произвольны. При этом решение запишется следующим образом:

$$u_2(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{v_{k,2}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} u_{k,l}^2(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty}[c_{k,j}^2(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp{(\eta_j)} + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[y_{\mu,\nu}^{k,2}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}\}\psi_k(y,t),$$

где функция $u_{k,l}^2$ определяет из уравнения $T_{1,l}u_{k,l}^2 = \lambda_k(t)u_{k,l}^0$, решение которого при краевых условиях (4.64), может быть записано

$$u_{k,l}^2(N_l) = d_{k,l}^2(x,t)erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}) + \lambda_k(t)d_{k,l}^0(x,t)I_1(\xi_l,\tau),$$

$$I_1(\xi_l,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\frac{erfc(\frac{y}{2\sqrt{s}})}{\sqrt{\tau-s}}[\exp(-\frac{(\xi_l-y)^2}{4(\tau-s)})-$$

$$-\exp(-\frac{(\xi_l+y)^2}{4(\tau-s)})]dsdy.$$

На основании леммы 0.1 этот интеграл имеет оценку вида (4.66), тогда и функция $u_{k,l}^2(N_l)$ будет иметь такую же оценку, т.е. она является функцией параболического пограничного слоя.

Переходим к следующему итерационному уравнению, подставляя значения функций $u_1(M),\ u_0(M)$ в правую часть получим

$$F_3(M) = -D_\eta u_1(M) + L_\xi u_0(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k(t)[v_{k,1}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2} u_{k,l}^1(N_l)] + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}(\lambda_1(t)-\lambda_k(t))[y_{\mu,\nu}^{k,1}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu} + a(x)\sum_{l=1}^{2}[2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d_{k,l}^0 +$$

$$+\varphi_l^{''}(x)d_{k,l}^0(x,t))]\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}))\}\psi_k(y,t).$$

При $k \neq 1$ выберем $y_{\mu,\nu}^{k,1}(x,t) = 0$, $z_{\mu,\nu,l}^{k,1}(x,t) = 0$ и $v_{k,1}(x,t) = 0$, а функции $y_{\mu,\nu}^{1,1}(x,t)$, $z_{\mu,\nu,l}^{1,1}(x,t)$ пока произвольны. Далее заметив, что присутствие производной $\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}))$ приведет к появлению в решении секулярных членов, особенности которых будут расти с увеличением номера итерации, избавляемся и от такого члена положив

$$2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d_{k,l}^0 + \varphi_l^{''}(x)d_{k,l}^0(x,t) = 0. \tag{4.67}$$

Функция $u_{l,k}^1(N_l)$ определенная формулой (4.65) выражается через $d_{k,l}^1(x,t)$, а последняя функция в свою очередь выражается через $v_{k,1}(x,t) \equiv 0$, поэтому и функция $u_{k,l}^1(N_l) \equiv 0$. Решив уравнение (4.67), при начальном условии $d_{k,l}^0(x,t)|_{x=l-1} = -v_{k,0}(l-1,t)$, однозначно определим $d_{k,l}^0(x,t)$. Тогда правая часть $F_3(M)$ уравнения (4.58,$i = 3$) примет вид

$$F_3(M) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(t)u_{k,l}^1(N_l).$$

Уравнение с такой правой частью разрешимо в U и его решение представимо в виде

$$u_3(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{v_{k,3}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}u_{k,l}^3(N_l) + \sum_{j=1}^{\infty}[c_{k,j}^3(x,t) + \tag{4.68}$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l,3}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]exp(\eta_j) + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[y_{\mu,\nu}^{k,3}(x,t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{2}z_{\mu,\nu,l}^{k,3}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}\}\psi_k(y,t).$$

Рассмотрим правую часть уравнения (4.58,$i = 4$):

$$F_4(M) = -D_\eta u_2(M) + L_\xi u_1(M) - T_2 u_0(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k(t)[v_{k,2}(x,t) -$$

$$-\sum_{l=1}^{2} u_{k,l}^{2}(N_l)] + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}(\lambda_1(t)-\lambda_k(t))[y_{\mu,\nu}^{k,2}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu} + \sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}(\lambda_k(t)-\lambda_j(t))[c_{k,j}^{2}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l,2}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp{(\eta_j)} + a(x)\sum_{l=1}^{2}[2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d_{k,l}^{1}+$$

$$+\varphi_l^{''}(x)d_{k,l}^{1}(x,t))]\partial_{\xi_l}(erfc(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}})) - \widetilde{v_{k,0}}(x,t) - \sum_{l=1}^{2}\widetilde{u_{k,l}^{0}}(N_l)-$$

$$-[\partial_t c_{k,k}^{0}(x,t)\exp{(\eta_k)} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c_{j,j}^{0}(x,t)\exp{(\eta_j)}]-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{k,k}^{l,0}\exp{(\eta_k)} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega_{j,j}^{l,0}\exp{(\eta_j)}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[\partial_t y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y_{\mu,\nu}^{j,0}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}(\partial_t z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)z_{\mu,\nu,l}^{j,0}(x,t))erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)[y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\}\psi_k(y,t).$$

Учитывая, что $y_{\mu,\nu}^{k,0}(x,t)=0,\ z_{\mu,\nu,l}^{k,0}(x,t)=0$ при $k\neq 1$ и полагая

$$\lambda_1(t)v_{1,2}(x,t) = -\widetilde{v_{1,0}}(x,t) + \sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)y_{\mu,\nu}^{1,0}(x,t),$$

$$\lambda_k(t)v_{k,2}(x,t) = -\widetilde{v_{k,0}}(x,t)\ \forall\ k\neq 1,$$

$$2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d_{k,l}^{1}(x,t) + \varphi_l^{''}(x)d_{k,l}^{1}(x,t) = 0,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]c_{k,j}^{2}(x,t) = \sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c_{j,j}^{0}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]\omega_{k,j}^{l,2}(x,t) = \sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega_{j,j}^{l,0}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$\partial_t z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)=0,\ \partial_t y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)+$$

$$+\alpha_{1,1}(t)y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)=0,\ \partial_t c^0_{k,k}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)c^0_{k,k}(x,t)=0,$$

$$\partial_t\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)=0 \qquad (4.69)$$

обеспечим разрешимость уравнения в классе U, при этом правая часть перепишется

$$F_4(M)=\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\{u^2_{k,l}(N_l)-\widetilde{u^0_{k,l}}(N_l)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)z^{k,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})\}\psi_k(y,t)\equiv\sum_{l=1}^{2}F_{4,l}(N_l).$$

Уравнение с такой правой частью разрешимо в U. Для того, чтобы найти решение перейдем в слагаемых, зависящих от переменных (ζ_l,t), к переменным (ξ_l,τ), как это сделано в параграфе 4.1. Тогда решение может быть представлено в виде (4.68) с заменой индекса 3 на индекс 4, если функция $u^4_{k,l}(N_l)$ будет решением уравнения $T_1u^4_{k,l}(x,t)=F_{4,l}(N_l)$.

Изучим вопросы разрешимости уравнений (4.69). Уравнения относительно $v_{k,2}(x,t)$ для $k\geq 2$, $c^2_{k,j}(x,t)$, $\omega^{l,2}_{k,j}(x,t)$ при $k\neq j$ однозначно разрешимы. Уравнения относительно функций $c^0_{k,k}(x,t)$, $\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)$, $z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)$ решаются при начальных условиях

$$c^0_{k,k}(x,t)|_{t=0}=h_{k,0}(x)-v_{k,0}(x,0),\ \ \omega^{l,0}_{k,k}(x,t)|_{t=0}=k^{l,0}_{k,k}(x),$$

$$z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)|_{t=0}=p^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x),$$

которые определяются из (4.64).

В силу того, что функция $erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль при $t=0$, начальные условия для функций $\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)$, $z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)$ заданы произвольно, т.е. функции $k^{l,0}_{k,k}(x)$, $p^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x)$ произвольны и будут определены ниже.

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$\lambda_1(t)v_{1,2}(x,t)=-\widetilde{v_{1,0}}(x,t)-\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t) \qquad (4.70)$$

является выделение правой частью множителя $\prod_{j=1}^{r}(t-t_j)^{k_j}$. Обеспечивая выполнения этого условия определим начальные условия $y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)|_{t=t_j}$ для уравнения

$$\partial_t y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)=0. \tag{4.71}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (4.70) запишется в виде

$$\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}\frac{d^s(k_{\mu,\nu}(t)y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t))}{dt^s}|_{t=t_l}=-\frac{d^s\widetilde{v_{1,0}}(x,t)}{dt^s}|_{t=t_l},$$

$$l=0,1,\ldots,r,\ s=0,1,\ldots,k_l-1.$$

Поступая аналогично параграфу 4.1, можно показать, что эти условия приведут к уравнениям для определения $y^{1.0}_{\mu,\nu}(x,t)|_{t=t_l}$. Они будут использованы, как начальные условия для решения уравнения (4.71) относительно $y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t)$.

Решив уравнение $2\varphi_l^{'}(x)\partial_x d^1_{k,l}+\varphi_l^{''}(x)d^1_{k,l}(x,t)=0$ при начальном условии $d^1_{k,l}(x,t)|_{x=l-1}=-v_{k,1}(l-1,t)$, определим функцию $d^1_{k,l}(x,t)$, а, следовательно, и $u^1_{k,l}(N_l)$. Таким образом разрешимость всех уравнений вошедших в (4.69) установлены.

В следующем шаге итерации имеем уравнение с правой частью:

$$F_5(M)=-D_\eta u_3(M)+L_\xi u_2(M)-T_2u_1(M)+L_\zeta u_0(M)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k(t)[v_{k,3}(x,t)-\sum_{l=1}^{2}u^3_{k,l}(N_l)]$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}(\lambda_1(t)-\lambda_k(t))[y^{k,3}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}z^{k,3}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}+$$

$$+\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}(\lambda_k(t)-\lambda_j(t))[c^3_{k,j}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\omega^{l,3}_{k,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp{(\eta_j)}$$

$$+a(x)\sum_{l=1}^{2}L_{\xi,l}u^2_{k,l}(N_l)-\widetilde{v_{k,1}}(x,t)-\sum_{l=1}^{2}\widetilde{u^1_{k,l}}(N_l)-$$

$$-[\partial_t c^1_{k,k}(x,t)\exp(\eta_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c^1_{j,j}(x,t)\exp(\eta_j)]-$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega^{l,1}_{k,k}\exp(\eta_k)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega^{l,1}_{j,j}(x,t)\exp(\eta_j)]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[\partial_t y^{k,1}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y^{j,1}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}(\partial_t z^{k,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)z^{j,1}_{\mu,\nu,l})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)[y^{k,1}_{\mu,\nu}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}z^{k,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]+a(x)\sum_{l=1}^{2}D_{x,l}[\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)\exp(\eta_k)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}z^{k,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)\sigma_{\mu,\nu}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}))\}\psi_k(y,t).$$

Из условий разрешимости получим следующие соотношения:

$$\lambda_1(t)v_{1,3}(x,t)=-\widetilde{v_{1,1}}(x,t)+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t),$$

$$\lambda_k(t)v_{k,3}(x,t)=-\widetilde{v_{k,1}}(x,t)\ \forall\ k\neq 1,\ L_{\xi,l}u^2_{k,l}(N_l)=0,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]c^3_{k,j}(x,t)=\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c^1_{j,j}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]\omega^{l,3}_{k,j}(x,t)=\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega^{l,1}_{j,j}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_1(t)]y^{k,3}_{\mu,\nu}(x,t)=\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y^{j,1}_{\mu,\nu}(x,t)\ \forall\ k\neq 1,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_1(t)]z^{k,3}_{\mu,\nu,l}(x,t)=\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)z^{j,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)\ \forall\ k\neq 1,$$

$$\partial_t z^{1,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)z^{1,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)=0,\ D_{x,l}\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)=0,$$

$$\partial_t y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t)=0,\ D_{x,l}z^{k,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)=0,$$

$$D_{x,l}\equiv 2\varphi_l'(x)\partial_x+\varphi_l''(x),\ \partial_t c^1_{k,k}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)c^1_{k,k}(x,t)=0,$$

$$L_{\xi,l}u^2_{k,l}(N_l) = 0,\ \partial_t\omega^{l,1}_{k,k}(x,t) + \alpha_{k,k}(t)\omega^{l,1}_{k,k}(x,t) = 0. \qquad (4.72)$$

Вспоминая, что значения $v_{k,1}(x,t),\ u^1_{k,l}(N_l)$ определены в виде $v_{k,1}(x,t) = 0,\ u^1_{k,l}(N_l) = 0$. Функция $c^1_{k,k}(x,t)$ определяется из однородного уравнения

$$\partial_t c^1_{k,k}(x,t) + \alpha_{k,k}(t)c^1_{k,k}(x,t) = 0$$

при нулевом начальном $c^1_{k,k}(x,t)|_{t=0} = -v_{k,1}(x,0) = 0$, тогда решая эту задачу найдем $c^1_{k,k}(x,t) = 0$. Таким же образом определяем $\omega^{l,1}_{k,k}(x,t) = 0$.

Из условия разрешимости уравнения

$$\lambda_1(t)v_{1,3}(x,t) = -\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} k_{\mu,\nu}(t)y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t)$$

для функции $y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t_j)$ получим однородное уравнение, из которого определяем, что $y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t)|_{t=t_j} = 0$. Тогда решая однородное уравнение относительно $y^{1,1}_{\mu,\nu}(x,t)$ дает тривиальное решение, а потому и $v_{1,3}(x,t) = 0$. Из аналогичных рассуждений найдем, что $z^{1,1}_{\mu,\nu,l}(x,t) = 0$. Этим показали, что все функции составляющие функцию $u_1(M)$ равны нулю, поэтому и $u_1(M) = 0$.

Подставим в уравнения

$$D_{x,l}\omega^{l,0}_{k,k}(x,t) = 0,\quad D_{x,l}z^{1,0}_{\mu,\nu,l} = 0$$

и в начальные условия

$$\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)|_{x=l-1} = c^0_{k,k}(l-1,t),\quad z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)|_{x=l-1} = -y^{1,0}_{\mu,\nu}(l-1,t)$$

значения

$$\omega^{l,0}_{k,k}(x,t) = k^{l,0}_{k,k}(x)q_l(x),\quad z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t) = p^{l,0}_{\mu,\nu,l}(x)q_l(x).$$

Найденные при решении уравнений относительно $\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)$ и $z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)$ из (4.69), при начальном условии $\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)|_{t=0} = k^{l,0}_{k,k}(x),\ z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)|_{t=0} = p^{1,0}_{\mu,\nu,l}$, получим задачи

$$D_{x,l}k^{l,0}_{k,k}(x)q_l(x) = 0,\quad k^{l,0}_{k,k}(x)|_{x=l-1} = -q_l(l-1)c^0_{k,k}(l-1,t),$$

$$D_{x,l}p^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x)q_l(x) = 0,\quad p^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x)|_{x=l-1} = -q_l(l-1)y^{1,0}_{\mu,\nu,l}(l-1,t),$$

из которых определяются $k_{k,k}^{l,0}(x)$, $p_{\mu,\nu,l}^{1,0}(x)$. Здесь t принимается как параметр. Таким образом, в силу соотношений (4.72), правая часть запишется

$$F_5(M) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}[\lambda_k(t)u_{k,l}^4(N_l) + \widetilde{u_{k,l}^1}(N_l) +$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} z_{\mu,\nu,l}^{k,1}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})].$$

Последнее слагаемое имеет зависимость от ζ_l, t и оно войдет в правую часть уравнения относительно $u_{k,l}^5(N_l)$, $N_l = (x,t,\xi_l,\tau)$. При решении этого уравнения должны перейти от переменных ζ_l, t к переменным ξ_l, τ. Для полного уяснения картины процесса построения асимптотики решения расширенной задачи, рассмотрим еще одно итерационное уравнение (4.56,$i=6$). В правую часть этого уравнение, в отличии от уравнения (4.56,$i=5$), войдут все слагаемые участвующие в итерационных уравнениях (4.56). Правая часть уравнения (4.56,$i=6$), имеет вид

$$F_6(M) == -D_\eta u_4(M) + L_\xi u_3(M) - T_2u_2(M) + L_\zeta u_1(M)$$

$$+L_x u_0(M) = \sum_{k=1}^{\infty}\{\lambda_k(t)[v_{k,4}(x,t) - \sum_{l=1}^{2} u_{k,l}^4(N_l)]$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}(\lambda_1(t)-\lambda_k(t))[y_{\mu,\nu}^{k,4}(x,t) + \sum_{l=1}^{2} z_{\mu,\nu,l}^{k,4}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}$$

$$+\sum_{j=1,(k\neq j)}^{\infty}(\lambda_k(t)-\lambda_j(t))[c_{k,j}^4(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\omega_{k,j}^{l,4}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\exp{(\eta_j)}$$

$$+a(x)\sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}u_{k,l}^3(N_l) - \widetilde{v_{k,2}}(x,t) - \sum_{l=1}^{2}\widetilde{u_{k,l}^2}(N_l)$$

$$-[\partial_t c_{k,k}^2(x,t)\exp{(\eta_k)} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)c_{j,j}^2(x,t)\exp{(\eta_j)}]$$

$$-\sum_{l=1}^{2}[\partial_t\omega_{k,k}^{l,2}\exp{(\eta_k)} + \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)\omega_{j,j}^{l,2}(x,t)\exp{(\eta_j)}]erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$$

$$-\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}[\partial_t y^{k,2}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y^{j,2}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}(\partial_t z^{k,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)z^{j,2}_{\mu,\nu,l})erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]\sigma_{\mu,\nu}+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)[y^{k,2}_{\mu,\nu}(x,t)$$

$$+\sum_{l=1}^{2}z^{k,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})]+a(x)\sum_{l=1}^{2}D_{x,l}[\omega^{l,1}_{k,k}(x,t)\exp{(\eta_k)}$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}z^{k,1}_{\mu,\nu,l}\sigma_{\mu,\nu}]\partial_{\zeta_l}(erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}))+L_x[v_{k,0}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}u^0_{k,l}(N_l)$$

$$+c^0_{k,k}(x,t)\exp{(\eta_k)}\sum_{l=1}^{2}+\omega^{l,0}_{k,k}(x,t)\exp{(\eta_k)}erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}})$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}(y^{k,0}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{l=1}^{2}z^{k,0}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{t}}))\sigma_{\mu,\nu}]\}\psi_k(y,t).$$

Для разрешимости уравнения с такой правой частью в U, потребуем выполнения следующих соотношений:

$$\lambda_1(t)v_{1,4}(x,t)=-\widetilde{v_{1,2}}(x,t)+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)y^{1,2}_{\mu,\nu}(x,t)+L_x v_{k,0},$$

$$\lambda_k(t)v_{k,4}(x,t)=-\widetilde{v_{k,2}}(x,t)+L_x v_{k,0}\ \forall\ k\neq 1,\ L_{\xi,l}u^3_{k,l}(N_l)=0,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]c^4_{k,j}(x,t)=\partial_t c^2_{k,j}+\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_{q,k}(t)c^2_{q,j}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_j(t)]\omega^{l,4}_{k,j}(x,t)=\partial_t\omega^{l,2}_{k,j}+\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_{q,k}(t)\omega^{l,2}_{q,j}(x,t)\ \forall\ k\neq j,$$

$$\partial_t\omega^{l,2}_{k,k}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)\omega^{l,2}_{k,k}(x,t)+\sum_{q=1,q\neq k}^{\infty}\alpha_{q,k}(t)\omega^{l,2}_{q,j}+L_x\omega^{l,0}_{q,j}=0,$$

$$\partial_t c^2_{k,k}(x,t)+\alpha_{k,k}(t)c^2_{k,k}(x,t)+\sum_{q=1,q\neq k}^{\infty}\alpha_{q,k}(t)c^2_{q,j}+L_x c^0_{k,k}=0,$$

$$D_{x,l}\equiv 2\varphi_l^{'}(x)\partial_x+\varphi_l^{''}(x),\ D_{x,l}z^{k,1}_{\mu,\nu,l}(x,t)=0,\ D_{x,l}\omega^{l,1}_{k,k}(x,t)=0,$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_1(t)]y^{k,4}_{\mu,\nu}(x,t)=\partial_t y^{k,2}_{\mu,\nu}(x,t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y^{j,2}_{\mu,\nu}(x,t),$$

$$[\lambda_k(t)-\lambda_1(t)]z^{k,4}_{\mu,\nu,l}(x,t)=\partial_t z^{k,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{j,k}(t)y^{j,2}_{\mu,\nu,l}(x,t),$$

$$\partial_t y^{1,2}_{\mu,\nu}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)y^{1,2}_{\mu,\nu}(x,t)=L_x y^{1,0}_{\mu,\nu}(x,t),$$

$$\partial_t z^{1,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)+\alpha_{1,1}(t)z^{1,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)=L_x z^{1,0}_{\mu,\nu,l}(x,t).$$

В отличии от предыдущих шагов, уравнения относительно $c^2_{k,k}(x,t)$, $y^{1,2}_{\mu,\nu}(x,t)$, $z^{1,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)$, $\omega^{l,1}_{k,k}(x,t)$ являются неоднородными. Разрешимость каждого из этих уравнений устанавливается как и выше.

Продолжая этот процесс можем построить все коэффициенты разложения (4.57), причем коэффиенты с нечетными индексами равны нулю.

Вернемся к исходной задаче (4.52). При ее регуляризации было использовано свойство (4.56), которое является необходимым условием регуляризации задачи (4.52). Оно было использовано при переходе от задачи (4.52) к задаче (4.55). Можно показать, что сужение частичной суммы

$$u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^i u_{2i}(M)|_{\theta=\theta(x,t,\epsilon),\sigma=p(x,t,\epsilon)}=\sum_{i=0}^{n}\epsilon^i\sum_{k=1}^{\infty}\{v_{k,2i}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}u^{2i}_{k,l}(x,t,\frac{1}{\epsilon^2}t,\frac{(-1)^l}{\sqrt{\epsilon^3}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})+\sum_{j=1}^{\infty}[c^{2i}_{k,j}(x,t)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\omega^{2i,l}_{k,j}(x,t)erfc((-1)^l\frac{1}{\sqrt{2\epsilon t}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})]\exp(\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{0}^{t}\lambda_k(s)ds)+$$

$$+\sum_{\mu=0}^{r}\sum_{\nu=0}^{k_\mu-1}k_{\mu,\nu}(t)[\sum_{l=1}^{2}z^{k,2}_{\mu,\nu,l}(x,t)erfc((-1)^l\frac{1}{\sqrt{2\epsilon t}}\int\limits_{l-1}^{x}\frac{ds}{\sqrt{a(s)}})+$$

$$+y^{k,2}_{\mu,\nu}(x,t)]\int_0^t\exp(-\frac{1}{\epsilon}\int_t^s\lambda_1(s_1)ds_1)k_{\mu,\nu}(s)ds\}\psi_k(y,t) \qquad (4.73)$$

является формальным асимптотическим решением задачи (4.52).

4.3.4 Оценка остаточного члена

Произведем в задаче (4.59) сужение посредством регуляризующих функций, т.е. положим в обеих частях уравнения $\theta = \theta(x,t,\epsilon)$ $\sigma = p(t,\epsilon)$. Далее, учитывая тождество (4.56), для остаточного члена

$$R_{\epsilon,2n}(x,y,t) \equiv R_{\epsilon,2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon)) = u(x,y,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)$$

получим задачу

$$L_\epsilon R_{\epsilon,2n}(x,y,t) = g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon),\epsilon), \quad R_{\epsilon,2n}|_{t=0} = 0,$$

$$R_{\epsilon,2n}(x,y,t)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу наших построений и сделанных предположений 1)-7), функция $g_{2n}(x,y,t,\theta(x,t,\epsilon),\epsilon)$ равномерно ограничена по ϵ и непрерывна по x,y,t в изучаемой области для любого номера $n = 0,1,2,....$

Теорема 4.4 *Пусть выполнены условия 1)-6). Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеет место оценка*

$$\|u(x,y,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,y,t,\epsilon)\| < c\epsilon^{n+\frac{1}{2}}$$

$n = 0,1,2,\ldots$ *т.е. разложение (4.73) является асимптотическим решением задачи (4.52) при $\epsilon \to +0$ и это разложение единственно в классе U.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

ГЛАВА 5

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Хорошо известно, что своему исключительно высокому положению, которое занимает математика в жизни общества, она обязана тем приложениям, которые находится в огромном числе других наук. Наиболее часто эти приложения связаны с методами численного решения естественнонаучных задач.

Точное описание исследуемого процесса требует строит более сложные математические модели, которые напрашивают совершенствования методов дискретизации. Разрабатываемых в настоящее время методах дискретизации поставленной непрерывной задачи исходят из того, чтобы структура исходного оператора была унаследована в разностных задачах. Тогда сохраняются интегральные законы в дискретной форме, присущее исходное непрерывной задаче.

Решения многих гидротермодинамических задач обладают особенностями, такими как пограничные и внутренние переходные слои. Примерами могут служить задачи о переносе тепла с большими числами Пекле [102], о течениях Навье-Стокса с большими числами Рейнольдса[148]. Наличие относительно малых подобластей с большими градиентами решения делает такие задачи сложными для численной реализации и требует использования разностных схем, учитывающих их специфику (Ильин А.М. [158], Дулан Э и др. [156] , Скляр С.Н. [164]).

Проблема поиска методов дискретизации, позволяющих автоматически сохранять структуру уравнения при переходе от исходной дифференциальной задачи к ее дискретному аналогу является актуальной. Отметим также, что возможности вычислительной техники в настоящее время -позволяют использовать достаточно сложные дискретные модели, если они гарантируют более высокий уровень адекватности дифференциальной постановке.

В данной диссертационной работе предлагается методика дискретизации, позволяющей автоматически сохранять основные свойства дифференциальных задач в их разностных аналогах, далее используется эта методика при построении вычислительных алгоритмов решения различных классов задач с пограничными слоями.

Предлагаемая методика основана на синтезе метода регуляризации, разработанный С.А.Ломовым [83] для асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач и метода конечных разностей с другой. В качестве основного объекта для приложения, предлагаемых в диссертации методов выбран класс так называемых сингулярно возмущенных краевых задач или задач для дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. Можно выделить два основных подхода к конструированию равномерно сходящихся численных алгоритмов для сингулярно возмущенных краевых задач. Первый связан с построением разностных схем "специального"вида на равномерных сетках и берет свое начало с работы А.М.Ильина [158]. Второй подход основан на использовании неравномерных сеток, адаптирующихся к особенностям решения, и связан с именем Н.С.Бахвалова [155], Шишкина Г.И. [165]. Следует отметить метод разработанный Скляром [164]и названный им "проекционным вариантом интегро-интерполяционного метода"(ПВИИМ), который учитывает специфику исходной дифференциальной задачи и позволяет построить схемы специального вида. Построенные на основе ПВИИМ разностные аппроксимации используют неравномерные сетки и осуществляется методом дискретизации автоматически. Данный метод эффективен, когда наряду с решением сингулярно возмущенной задачи требуется вычислять и его производные.

5.1 Обыкновенное дифференциальное уравнение

Параграф посвящен численному решению задачи

$$L_\epsilon u(x,\epsilon) \equiv \epsilon^2 u^{''}(x,\epsilon) - a(x)u(x,\epsilon) = f(x) \qquad x \in (0,1), \tag{5.1}$$

$$u|_{x=0} = h^1, u|_{x=1} = h^2,$$

при $\epsilon \to 0$ и следующих предположениях:

1. функции $a(x), \quad f(x) \in C^2[0,1]$;

2. $a(x) > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$.

Различными подходами эта задача была изучена в работах [156], [164]. Оба подхода приводит к разностным схемам, имеющие второй порядок точности. Наш подход позволяет строит приближенное решение погрешностью $O(\epsilon h + \epsilon^2[\exp(-\frac{\alpha i h}{\epsilon}) + \exp(-\frac{\alpha(N-ih)}{\epsilon})])$.

Следуя нашей методике [161],[162], сначало произведем расширение исходной задачи в пространстве большей размерности. Для чего вводим, наряду с независимой переменной x, дополнительные независимые переменные по формулам:

$$t_j = \frac{\varphi_j(x)}{\epsilon} = \frac{(-1)^{j-1}}{\epsilon}\int\limits_{j-1}^{x}\sqrt{a(s)}ds, \qquad j = 1,2 \tag{5.2}$$

и вместо искомой функции $u(x,\epsilon)$ будем изучать расширенную функцию $\widetilde{u}(x,t,\epsilon), \quad (t=(t_1,t_2))$ такую, что

$$\widetilde{u}(x,t,\epsilon)|_{t=\varphi(x)/\epsilon} \equiv u(x,\epsilon), \qquad \varphi = (\varphi_1,\varphi_2) \tag{5.3}$$

Используя (5.2) и (5.3), найдем

$$u^{'}(x,\epsilon) \equiv (\partial_x\widetilde{u} + \sum_{j=1}^{2}\frac{\varphi_j^{'}(x)}{\epsilon}\partial_{t_j}\widetilde{u})|_{t=\varphi(x)/\epsilon},$$

$$u^{''}(x,\epsilon) \equiv (\partial_x^2\widetilde{u} + \frac{1}{\epsilon^2}D_t\widetilde{u} + \frac{1}{\epsilon}L_\varphi\widetilde{u})|_{t=\varphi(x)/\epsilon},$$

$$L_\varphi \equiv \sum_{j=1}^{2}[2\varphi_j^{'}\partial_{xt_j}^2 + \varphi_j^{''}(x)\partial_{t_j}], \qquad D_t \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2}\partial_{t_j}^2, \tag{5.4}$$

тогда, на основании (5.3) и (5.4), вместо задачи (5.1) естественно поставить расширенную задачу

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u} \equiv (L_1 + \epsilon L_\varphi + \epsilon^2 L_x)\widetilde{u} = f(x), \tag{5.5}$$

$$\widetilde{u}(0, 0, \varphi_2(0)/\epsilon, \epsilon) = h^1, \qquad \widetilde{u}(1, \varphi_1(1)/\epsilon, 0, \epsilon) = h^2, \tag{5.6}$$

$$L_1 \equiv D_t - a(x), \qquad L_x \equiv \partial_x^2.$$

Задача (5.5),(5.6) регулярна по ϵ при $\epsilon \to 0$ и для оператора L выполняется условие

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u}|_{t=\varphi(x)/\epsilon} \equiv L_\epsilon u. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.5) является уравнением в частных производных, но с постоянными коэффициентами с главной частью $L_1\widetilde{u}$. К задаче (5.5),(5.6) применим метод сеток [157], для чего выберем равномерную сетку $x_i = ih, \ \ i = 0, 1, \dots, N, \ \ h = 1/N$ и введем обозначения

$$f_i = f(x_i), \ \ a_i = a(x_i), \ \ \widetilde{u}(x_i, t, \epsilon) = u_i(t), \ \ L_1^h = a(x_i)[\sum_{j=1}^{2} \partial_{t_j}^2 - 1].$$

Далее, первая и вторая производные по x, входящая в это уравнение, заменяется разностными соотношениями

$$\partial_x \widetilde{u}|_{x=ih} \approx \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h}, \quad \partial_x^2 \widetilde{u}|_{x=ih} \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} \equiv \Lambda_x u_i(t),$$

тогда оператор $L_\varphi \widetilde{u}$ заменится соотношением

$$L_\varphi \widetilde{u}|_{x=ih} \approx \sum_{j=1}^{2} \partial_{t_j}[2\varphi'_{i,j}\Lambda_j u_i(t) + \varphi''_{i,j} u_i(t)] \equiv L_\varphi^h u_i(x),$$

$$\Lambda_1 u_i(t) \equiv \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h}, \qquad \Lambda_2 u_i(t) \equiv \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}.$$

На основании последних соотношений, вместо уравнения (5.5), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ru_i(t) \equiv L_1^h u_i(t) + \epsilon L_\varphi^h u_i(t) + \epsilon^2 \Lambda_x u_i(t) = f_i, \ \ i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{5.8}$$

а граничные условия для этой системы запишутся

$$u_0(0, \varphi_2(0)/\epsilon) = h^1, \qquad u_N(\varphi_1(1)/\epsilon, 0) = h^2. \tag{5.9}$$

Вычислим невязку получающую при аппроксимации, для чего левую часть уравнения (5.8) запишем в виде:

$$L_1\widetilde{u}(x,t,\epsilon)+\epsilon\sum_{j=1}^{2}\partial_{t_j}[2\varphi_j^{'}(x)\frac{\widetilde{u}(x+h,t,\epsilon)-\widetilde{u}(x,t,\epsilon)}{h}+\varphi_j^{''}(x)\widetilde{u}(x,t,\epsilon)]+$$

$$\epsilon^2\frac{\widetilde{u}(x+h,t,\epsilon)-2\widetilde{u}(x,t,\epsilon)+\widetilde{u}(x-h,t,\epsilon)}{h^2}.$$

Используя точную формулу разностных соотношений для первой и второй производных, это уравнение запишем

$$L_1\widetilde{u}(x,t,\epsilon)+\epsilon\sum_{j=1}^{2}\{2\varphi_j^{'}(x)\partial_{x,t_j}\widetilde{u}(x,t,\epsilon)+2\varphi_j^{'}(x)\partial_{t_j}[\frac{h}{2}\widetilde{u}_x^{''}(\theta,t,\epsilon)]+$$

$$+\varphi_j^{''}(x)\partial_{t_j}\widetilde{u}(x,t,\epsilon)\}+\epsilon^2[\partial_x^2\widetilde{u}(x,t,\epsilon)+\frac{h^4}{24}\partial_x^4\widetilde{u}(\theta,t,\epsilon)],$$

где θ некоторая точка отрезка [x,x+h]. Будем считать, что решение исходной задачи имеет ограниченную производную по x до четвертого порядка, при таком предположении и на основании (5.5) это уравнение примет вид

$$Ru_i(t)=\widetilde{L}_\epsilon\widetilde{u}(x,t,\epsilon)|_{x=ih}+O(\epsilon h)$$

или

$$Ru_i(t)=f_i+O(\epsilon h),\qquad i=1,2,\ldots,N-1. \tag{5.10}$$

Краевые условия аппроксимируются точно, поэтому имеет место аппроксимация порядка ϵh. Отбрасывая в этом уравнении члены порядка $O(\epsilon h)$ получим уравнение (5.8). Задача (5.8),(5.9) позволяет получать приближенные значения решения $\widetilde{u}(x,t,\epsilon)$ задачи (5.5),(5.6) на прямых $x=ih, i=0,1,2,,N$. Сужение построенного таким образом решения посредством регуляризующих функций $t_j=\varphi_j(x_i)/\epsilon;\quad j=1,2;\quad i=0,1,,N;\quad \varphi_1(x_0)=0,\quad \varphi_2(x_N)=0$ дает приближенные значения решения исходной задачи.

Решение задачи (5.8), (5.9) будем определять в виде

$$u_i(t)=c_{1,i}exp(-t_1)+c_{2,i}exp(-t_2)+v_i. \tag{5.11}$$

Подставим функцию (5.11) в задачу (5.8),(5.9) при этом получим

$$\sum_{j=1}^{2}\{-\epsilon[2\varphi_j^{'}(x_i)\Lambda_j c_{j,i}+\varphi_j^{''}(x_i)c_{j,i}]+\epsilon^2\Lambda_x c_{j,i}\}exp(-t_j)+\epsilon^2\Lambda_x v_i-a_iv_i=f_i,$$

$$c_{1,0}+c_{2,0}exp(-\varphi_2(0)/\epsilon)+v_0=h^1,\ \ c_{1,N}exp(-\varphi_1(1)/\epsilon)+c_{2,N}+v_N=h^2.$$

Пренебрежем членами

$$\epsilon^2\Lambda_x c_{j,i}exp(-t_j),\ \ c_{2,0}exp(-\varphi_2(0)/\epsilon),\ \ c_{1,N}exp(-\varphi_1(1)/\epsilon)$$

и выберем сеточные функций $c_{j,i}$, v_i, как решения задач

$$2\varphi_j^{'}(x_i)\Lambda_j c_{j,i}+\varphi_j^{''}(x_i)c_{j,i}=0,\ \ c_{1,0}=h^1,\ \ c_{2,N}=h^2,\ \ j=1,2,$$

$$\epsilon^2\Lambda_x v_i-a_iv_i=f_i,\qquad v_0=0,\ \ v_N=0,\ \ i=1,2,\ldots,N-1.$$

Тогда, на основании (5.10), функция (5.11) будет решением задачи (5.8),(5.9) с точностью

$$||F(t)||\le c(\epsilon h+\epsilon^2[exp(-t_1)+exp(-t_2)]).\tag{5.12}$$

Перегруппировав члены, эти системы перепишем в следующем виде

$$c_{1,i+1}=[1-hq_{i,1}]c_{1,i},\ \ c_{2,i}=[1+hq_{i,2}]c_{2,i+1},$$

$$c_{1,0}=h^1,\qquad c_{2,N}=h^2,\ \ i=1,2,\ldots,N-1,\tag{5.13}$$

$$a_{2,i}v_{i+1}+b_{2,i}v_i+d_{2,i}v_{i-1}=f_i,\ \ v_0=0,\ \ v_N=0,\tag{5.14}$$

$$q_{i,j}=\frac{\varphi_j^{''}(x_i)}{2\varphi_j^{'}(x_i)},\ \ a_{2,i}=d_{2,i}=\rho^2,\ \ b_{2,i}=-[2\rho^2+a_i],\quad \rho=\frac{\epsilon}{h}.$$

Выясним устойчивость схем (5.13), (5.14) по правым частям и начальным данным. Из (5.13) следует

$$c_{1,i}=\prod_{\nu=0}^{i-1}[1-hq_{1,i}]h^1,\ \ c_{2,i}=\prod_{\nu=i}^{N-1}[1+hq_{1,i}]h^2.$$

Определим нормы

$$||c_j||^h=\max_{0\le i\le N}|c_{j,i}|,\ \ ||v||^h=\max_{0\le i\le N}|v_i|,\ \ ||f||^h=\max\{h^1,h^2,\max_{0\le i\le N}|f_i|\}$$

и положим $q_j = \max\limits_{0\le i\le N} |q_{i,j}|$, тогда имеем цепочку неравенств

$$||c_j||^h \le [1 + hq_j]^N |h|^j \le \exp(q_j)|h|^j \le c||f||^h, \quad c = \max_{j=1,2}\{\exp(q_j)\}. \qquad (5.15)$$

Теперь рассмотрим разностную краевую задачу (5.14), для коэффициентов которой выполняется условие

$$|b_{2,i}| \ge |a_{2,i}| + |d_{2,i}| + \delta, \quad \delta > 0$$

обеспечивающее хорошую обусловленность [157], т.е. имеет место оценка

$$||v||^h \le c||f||^h. \qquad (5.16)$$

На основании (5.15),(5.16) из (5.11) получим

$$||u(t)||^h \le c[1 + \exp(-t_1) + \exp(-t_2)]||f||^h.$$

Производя сужение посредством регуляризующих функций

$$t_j = \frac{\varphi_j(x_i)}{\epsilon}, \quad j = 1, 2$$

и учитывая,что

$$\exp(-\frac{\varphi_1(x_i)}{\epsilon}) \le \exp(-\frac{\alpha ih}{\epsilon}) \le c,$$

$$\exp(-\frac{\varphi_2(x_i)}{\epsilon}) \le \exp(-\frac{\alpha(N-i)h}{\epsilon}) \le c, \alpha = \inf_{x\in(0,1)} a(x)$$

на основании (5.3), для решения исходной задачи получим оценку

$$||u(x_i, \epsilon)|| \equiv ||\widetilde{u}(x_i, \varphi(x_i)/\epsilon, \epsilon)|| \le c||f||^h.$$

Таким образом сужение приближенного решения (5.11) задачи (5.8),(5.9), построенное вышеописанным способом, является устойчивым решением исходной задачи (5.1) по начальным данным и правой части.

Разностная краевая задача (5.8), (5.9) аппроксимирует расширенную краевую задачу (5.5), (5.6) с точностью (5.12), т.е.

$$\widetilde{L}_\epsilon \widetilde{u}(x_i, \varphi(x_i)/\epsilon, \epsilon) \equiv L_\epsilon u(x_i, \epsilon) = Ru(\varphi(x_i)/\epsilon) - F(\varphi(x_i)/\epsilon).$$

Произведем операцию сужение, для чего в построенном решение $u_i(t)$ вместо $t_1,\ t_2$ полагая

$$t_1 = \frac{\varphi_1(x_i)}{\epsilon} = \frac{h\sum\limits_{k=0}^{i}\sqrt{a(x_k)}}{\epsilon}, \varphi_1(0) = 0, i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$t_2 = \frac{\varphi_2(x_i)}{\epsilon} = \frac{-h\sum\limits_{k=i}^{N-1}\sqrt{a(x_k)}}{\epsilon}, \varphi_2(x_N) = 0, i = N-1, \ldots, 1,$$

получим

$$u_\epsilon^h(x_i) = u_i(\varphi_1(x_i)/\epsilon, \varphi_2(x_i)/\epsilon) =$$
$$= c_{1,i}exp(-h\sum_{k=0}^{i}\sqrt{a(x_k)}/\epsilon)) + c_{2,i}exp(-h\sum_{k=i}^{N-1}\sqrt{a(x_k)}/\epsilon) + v_i$$

приближенные значения решения исходной задачи (5.1).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5.1 *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2)*. Тогда для разности решения* $u(x_i,\epsilon)$ *исходной задачи и решения* $u_\epsilon^h(x_i)$ *задачи (5.8), (5.9) имеет место оценка:*

$$||u(x_i,\epsilon) - u_\epsilon^h(x_i)|| < c\ \{h\epsilon + \epsilon^2[\exp{(-\frac{\alpha ih}{\epsilon})} + \exp(\frac{\alpha(ih-N)}{\epsilon})]\},$$

здесь константа не зависит от h *и* ϵ*.*

5.2 Сингулярно возмущенная параболическая задача

Параграф посвящается численному решению задачи

$$L_\epsilon u \equiv \partial_t u(x,t,\epsilon) - \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) + b(x,t)u(x,t,\epsilon) = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \tag{5.17}$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u|_{=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{5.18}$$

где $\Omega = \{(x,t) : x \in (0,1), t \in (0,T]\}$, $\epsilon > 0$-малый параметр.

Относительно заданных функций предполагается выполненными следующие условия:

1. функции $h(x), a(x), b(x,t), f(x,t)$ достаточно гладкие;
2. $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;
3. выполняются согласования начальных и граничных условий $h(0) = h(1) = 0$.

Численному решению задачи (5.17), (5.18) посвящены работы [154], [165] и другие, где используются как специальные методы конечных разностей [165], так и методы основанные на конечных элементах [154].

Метод используемый в данном параграфе впервые предложен в работах [159], [161] и [162] при решении обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. А в работе [163] этот метод был применен при решении задачи Коши для сингулярно возмущенного параболического уравнения. Идея метода основана на синтезе метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач [83] и метода конечных разностей [157]. Согласно методу [83], вводя дополнительные регуляризующие переменные, исходная задача расширяется в пространство большей размерности, получая, при этом, регулярную по малому параметру задачу. Затем, следуя методу конечных разностей, производные по исходным переменным (x и t) заменяются разностными соотношениями. Полученная при этом полудискретная задача решается в специальном классе функций отвечающей структуре решения исходной задачи (см.параграф 1.1). Для коэффициентов этой функции получим сеточные уравнения аналогичные классическим сеточным уравнениям для таких классов уравнений, поэтому доказательства сходимости и устойчивости приводит нас к проверке выполнения того или иного условия.

Согласно методу регуляризации вводим регуляризующие переменные по формулам

$$\xi_j = \frac{\varphi_j(x)}{\epsilon}, \quad j = 1, 2,$$

$$\varphi_j(x) = (-1)^{j+1} \int_{j-1}^{x} \frac{ds}{\sqrt{a(s)}}, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(1) = 0$$

и для расширенной функции $\tilde{u}(M, \epsilon)$, $\quad M = (x, t, \xi)$, $\quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$ такой, что

$$\tilde{u}(M, \epsilon)|_{\theta=\theta(x,\epsilon)} \equiv u(x, t, \epsilon), \qquad \theta = (\xi_1, \xi_2),$$

$$\theta(x, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\varphi(x), \qquad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

найдем производные

$$\partial_t u \equiv (\partial_t \tilde{u})|_{\theta=\theta(x,\epsilon)},$$

$$\partial_x u \equiv (\partial_x \tilde{u} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^{2} \varphi_j^{'}(x) \partial_{\xi_j} \tilde{u})|_{\theta=\theta(x,\epsilon)},$$

$$\partial_x^2 u \equiv (\partial_x^2 \tilde{u} + (\frac{1}{\epsilon})^2 D_\xi \tilde{u} + \frac{1}{\epsilon} L_\xi \tilde{u})|_{\theta=\theta(x,\epsilon)},$$

$$D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} (\varphi_j^{'}(x))^2 \partial_{\xi_j}^2, \qquad L_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} [2\varphi_j^{'}(x) \partial_{x,\xi_j}^2 + \varphi_j^{''}(x) \partial_{\xi_j}].$$

Тогда для расширенной функции $\tilde{u}(M, \epsilon)$ можно поставить расширенную задачу

$$\tilde{L}_\epsilon \tilde{u}(M, \epsilon) \equiv D\tilde{u} - \epsilon a(x) L_\xi \tilde{u} - \epsilon^2 L_x \tilde{u} = f(x, t), \qquad M \in Q,$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = h(x), \qquad \tilde{u}|_{x=\xi_1=0} = \tilde{u}|_{x=1,\xi_2=0} = 0, \tag{5.19}$$

где $Q = (0, 1) \times (0, T] \times (0, +\infty) \times (0, +\infty)$,

$$D \equiv \partial_t + b(x, t) - \sum_{j=1}^{2} \partial_{\xi_j}^2, \qquad L_x \equiv a(x)\partial_x^2.$$

Задача (5.19) регулярна по ϵ при $\epsilon \to 0$, т.е. имеет место тождество

$$(\tilde{L}_\epsilon \tilde{u})|_{\theta=\theta(x,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u(x, t, \epsilon). \tag{5.20}$$

5.2.1 Первый алгоритм решения задачи (5.19)

Приближенное решение расширенной задачи (5.19) будем строить по аналогии с методом прямых, в нашем случае заменим производные от исходных переменных t и x разностными соотношениями. Для чего в области $[0,1]\times[0,T]$ изменения переменных x и t введем сетки $\omega_h=\{x_i=ih, i=0,1,\ldots,N\}$, $\omega_l=\{t_j=jl, j=0,1,2,\ldots,l_0\}$, $\omega_{h,l}=\omega_h\times\omega_l=\{(ih,jl): i=0,1,2,\ldots,n, j=0,1,2,\ldots,l_0\}$, $h=1/N$, $l=T/l_0$ и проведем прямые $x=x_i$, $t=t_j$. Положим в уравнение (5.19) $x=x_i$, $t=t_j$, затем заменим производные по x и t разностными соотношениями

$$\partial_x\tilde{u}=\frac{1}{h}[\tilde{u}|_{x=x_{i+1}}-\tilde{u}|_{x=x_i}]+O(h),$$

$$\partial_x^2\tilde{u}=\frac{1}{h^2}[\tilde{u}|_{x=x_{i+1}}-2\tilde{u}|_{x=x_i}+\tilde{u}|_{x=x_{i-1}}]+O(h^2),$$

$$\partial_t\tilde{u}(M,\epsilon)=\frac{1}{l}[\tilde{u}|_{t=t_{j+1}}-\tilde{u}|_{t=t_j}]+O(l),$$

Пренебрегая членами $O(h),O(l),O(h^2)$ и вводя обозначения $f_i^j=f(x_i,t_j)$, $b_i^j=b(x_i,t_j)$, $h_i=h(x_i)$, $y_i^j(\xi,\epsilon)=\tilde{u}(x_i,t_j,\xi,\epsilon)$ получим систему

$$L_{\xi,i}y_i^j(\xi,\epsilon)\equiv D_jy_i^j(\xi,\epsilon)-L_\xi^iy_i^j(\xi,\epsilon)-\epsilon^2\Lambda_{x,x}y_i^j(\xi,\epsilon)=f_i^j, \tag{5.21}$$

$$\xi\in(0,+\infty)\times(0,+\infty),\ i=1,2,\ldots,N-1,\ j=1,2,\ldots,l_0,$$

а краевые условия переходят в условия

$$y_i^0(\xi,\epsilon)|_{\tau=0}=h_i,\qquad y_0^j(\xi,\epsilon)|_{\xi_1=0}=y_N^j(\xi,\epsilon)|_{\xi_2=0}=0. \tag{5.22}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$L_\xi^iy_i^j(\xi,\epsilon)\equiv a(x_i)\sum_{r=1}^{2}\partial_{\xi_r}[q_{i,r}^1\Lambda_xy_i^j(\xi,\epsilon)+q_{i,r}^2y_i^j(\xi,\epsilon)],$$

$$D_j\equiv\frac{1}{l}[y_i^{j+1}(\xi,\epsilon)-y_i^j(\xi,\epsilon)]+b_i^jy_i^j-\sum_{r=1}^{2}\partial_{\xi_r}^2y_i^j(\xi,\epsilon),\qquad q_{i,r}^1=2\varphi_r^{'}(x_i),$$

$$q_{i,r}^2=\varphi_r^{''}(x_i),\Lambda_{x,x}y_i^j\equiv a(x_i)\frac{1}{h^2}[y_{i+1}^j-2y_i^j+y_{i-1}^j],\qquad \Lambda_xy_i^j\equiv\frac{1}{h}[y_{i+1}^j-y_i^j].$$

По аналогии с асимптотической теорией (см.параграф 2.1) решение задачи (5.21), (5.22) будем определять в виде

$$y_i^j(\xi,\epsilon)=\sum_{r=1}^{2}c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})+v_i^j,\quad i=0,1,\ldots,N,\quad j=0,1,\ldots,l_0. \qquad (5.23)$$

Подставим эту функцию в уравнение (5.21), для чего найдем

$$\partial_{\xi_r}y_i^j=-\frac{1}{\sqrt{\pi t_j}}\exp(-\frac{\xi_r^2}{4t_j})c_{i,r}^j,$$

$$\partial_{\xi_r}^2 y_i^j=\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}\exp(-\frac{\xi_r^2}{4t_j})c_{i,r}^j,$$

тогда

$$D_jy_i^j=\sum_{r=1}^{2}\{\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1}erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})-c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})]-$$

$$-\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}c_{i,r}^j\exp(-\frac{\xi_r^2}{4t_j}+b_i^jc_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}\}+\frac{1}{l}[v_i^{j+1}-v_i^j]+b_i^j,$$

$$L_\xi^i y_i^j=a_i\sum_{r=1}^{2}[q_{i,r}^1\Lambda_x c_{i,r}^j+q_{i,r}^2c_{i,r}^j]\partial_{\xi_r}erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}),$$

$$L_xy_i^j=a_i\{\sum_{r=1}^{2}\Lambda_{x,x}c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})+\Lambda_{x,x}v_i^j\}.$$

Заметив, что

$$Ky_i^j\equiv\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1}erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})-c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})]-\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}c_{i,r}^j\exp(-\frac{\xi_j^2}{4t_j})=$$

$$=\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1}-c_{i,r}^j]erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})+\frac{1}{l}c_{i,r}^j[erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})-erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})]-$$

$$-\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}c_{i,r}^j\exp(-\frac{\xi_r^2}{4t_j})=\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1}-c_{i,r}^j]erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})-$$

$$-\frac{1}{l}c_{i,r}^j\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}}^{\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}}}\exp(-s^2)ds-\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}c_{i,r}^j\exp(-\frac{\xi_r^2}{4t_j})=$$

$$=\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1}-c_{i,r}^j]erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}})+\frac{\xi_r}{(\sqrt{t_{j+1}}+\sqrt{t_j})\sqrt{\pi t_{j+1}t_j}}c_{i,r}^j\exp(-\frac{\zeta_r^2}{4t_j})-$$

$$-\frac{\xi_r}{2t_j\sqrt{\pi t_j}}c_{i,r}^j \exp{(-\frac{\xi_r^2}{4t_j})}.$$

Здесь

$$\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}} < \frac{\zeta_r}{2\sqrt{t_j}} < \frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}},$$

далее, принимая $t_{j+1} = t_j$, $\frac{\zeta_r}{2\sqrt{t_j}} \approx \frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}$, получим

$$Ky_i^j \approx \frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1} - c_{i,r}^j]erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_{j+1}}}).$$

Тогда

$$D_j y_i^j = \sum_{r=1}^{2}\{\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1} - c_{i,r}^j]erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}) + b_i^j c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}})\}+$$

$$+\frac{1}{l}[v_i^{j+1} - v_i^j] + b_i^j v_i^j.$$

После таких вычислений замечаем, что функция (5.23) удовлетворяет уравнению (5.21), если произвольные сеточные функции $c_{i,r,}^j$, v_i^j будут выбраны, как решения уравнений

$$q_{i,r}^1 \Lambda_x c_{i,r}^j + q_{i,r}^2 c_{i,r}^j = 0, \qquad r = 1, 2, \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{l}[c_{i,r}^{j+1} - c_{i,r}^j] + b_i^j c_{i,r}^j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{5.25}$$

$$\frac{1}{l}[v_i^{j+1} - v_i^j] + b_i^j v_i^j - \epsilon^2 \Lambda_{x,x} v_i^j = f_i^j, \qquad j = 1, 2, \dots, l_0. \tag{5.26}$$

Здесь пренебрегли слагаемым

$$\epsilon^2 a_i \sum_{r=1}^{2} \Lambda_{xx} c_{i,r}^j erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t_j}}) = O(\epsilon^2 \exp(-\frac{\xi_r^2}{8t_j})). \tag{5.27}$$

Удовлетворим теперь функцию (5.23) краевым условиям (5.22), при $t = 0$ функция (5.23) удовлетворяет начальному условию при любых значениях сеточных функций $c_{i,r}^j$, если

$$v_i^0 = h_i. \tag{5.28}$$

Поэтому можем принять

$$c_{i,r}^j = d_{i,r}, \tag{5.29}$$

где $d_{i,r}$- произвольная функция, как будет показано ниже этот произвол будет использован нами для удовлетворения соотношения (5.24). Граничные условия свяжутся соотношениями

$$c^j_{0,1} + c^j_{0,2} erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{t_j}}) + v^j_0 = 0, \quad c^j_{N,1} erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{t_j}}) + c^j_{N,2} + v^j_N = 0,$$

где функции

$$erfc(\frac{\varphi_1(1)}{2\epsilon\sqrt{t_j}}), \qquad erfc(\frac{\varphi_2(0)}{2\epsilon\sqrt{t_j}})$$

экспоненциально малы при $\epsilon \to 0 \quad \forall t_j = jl, \quad j = 0, 2, \dots, l_0$, поэтому пренебрегая этими членами определим

$$c^j_{0,1} = -v^j_0, \qquad c^j_{N,2} = -v^j_N. \tag{5.30}$$

Уравнение (5.24) получено подстановкой функции (5.23) в уравнение (5.21), затем приравниванием к нулю коэффициента при производной от функции $erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{\tau}})$. Уравнение (5.25) получаем обратив в нуль коэффициент при $erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{\tau}})$, а уравнение (5.26) получается приравниванием к нулю остальных членов. Такой выбор произвольных сеточных функций v^j_i, $c^j_{i,r}$, приведет к тому, что функция (5.23) будет точно удовлетворять уравнению (5.21).

Уравнение (5.25) будет решаться при начальном условии (5.29) последовательно полагая $j = 0, 1, 2, \dots, l_0$, определим

$$c^j_{i,r} = \prod_{k=0}^{j-1} \gamma^k_i d_{i,r}, \quad \gamma^k_i = 1 - lb^k_i. \tag{5.31}$$

Рассмотрим теперь уравнения (5.24). Запишем их в следующем виде

$$c^j_{i+1,1} = (1 - hq_{i,1})c^j_{i,1}, \qquad c^j_{i,2} = \frac{1}{1 - hq_{i,2}} c^j_{i+1,2},$$

$$q_{i,r} = \frac{q^2_{i,r}}{q^1_{i,r}} \qquad j = 1, 2, \dots, l_0, \qquad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Подставим сюда и в начальные условия (5.30) значения $c^j_{i,r}$ из (5.31), имеем

$$d_{i+1,1} = \theta^j_{i,1} d_{i,1}, \qquad \theta^j_{i,1} = (1 - hq_{i,1}) \frac{\prod_{k=0}^{j-1} \gamma^k_i}{\prod_{k=0}^{j-1} \gamma^k_{i+1}},$$

$$d_{i,2} = \theta^j_{i,2} d_{i+1,2}, \qquad \theta^j_{i,2} = \frac{1}{1 - hq_{i,2}} \frac{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_{i+1}}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_i},$$

$$d_{0,1} = -\frac{v^j_0}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_0}, \quad d_{N,2} = -\frac{v^j_N}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_N}.$$

Далее, полагаем в первое уравнение $i = 0, 1, \ldots, N-1$, а во второе уравнение $i = N-1, N-2, \ldots, 0$, с учетом начальных условий получим

$$d_{i,1} = -\frac{\prod\limits_{k=0}^{i} (1 - hq_{k,1})}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_{i+1}} v^j_0, \qquad d_{i,2} = -\frac{\prod\limits_{k=i}^{N-1} \frac{1}{1-hq_{k,2}}}{\prod\limits_{k=0}^{j-1} \gamma^k_i} v^j_N$$

Подставим теперь найденные значения $d_{i,r}$ в выражение (5.31), мы получим

$$c^j_{i,1} = -\prod_{k=0}^{j-1} \frac{\gamma^k_i}{\gamma^k_{i+1}} \prod_{k=0}^{i} (1 - hq_{k,1}) v^j_0, \qquad c^j_{i,2} = -\prod_{k=i}^{N-1} \frac{1}{1 - hq_{k,2}} v^j_N. \tag{5.32}$$

5.2.2 Второй алгоритм решения задачи (5.19)

Во втором алгоритме расширенная задача (5.19) аппроксимируется частично дискретной задачей. В расширенной задаче заменяем производные только по пространственным переменным $\partial_x \tilde{u}$, $\partial^2_x \tilde{u}$ разностными соотношениями. Тогда для $y_i(t, \xi, \epsilon) \equiv \tilde{u}(x_i, t, \xi, \epsilon)$ получим частично дискретную задачу

$$D_i y_i(t, \xi, \epsilon) - L^i_\xi y_i(t, \xi, \epsilon) - \epsilon^2 \Lambda_{x,x} y_i(t, \xi, \epsilon) = f_i(t),$$

$$y_i(t, \xi, \epsilon)|_{t=0} = h_i, \quad y_0(t, \xi, \epsilon)|_{\xi_1=0} = y_N(t, \xi, \epsilon)|_{\xi_2=0} = 0, \tag{5.33}$$

$$D_i \equiv \partial_t - \sum_{r=1}^{2} \partial^2_{\xi_r} - b(x_i, t), \quad f_i(t) \equiv f(x_i, t), i \geq 0.$$

Решение задачи (5.33) будем определять в виде

$$y_i(t, \xi, \epsilon) = v_i(t, \epsilon) + \sum_{r=1}^{2} c_{i,r}(t, \epsilon) erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t}}), \quad i \geq 0.$$

Непосредственной подстановкой в задачу (5.33) убеждаемся, что эта функция будет ее решениеми, если функции $v_i(t,\epsilon,\ c_{i,r}(t,\epsilon)$ будут решениями задач

$$\partial_t c_{i,r}(t,\epsilon) - b(x_i,t)c_{i,r}(t,\epsilon) = 0, \quad c_{i,r}(t,\epsilon)|_{t=0} = c^0_{i,r}, \tag{5.34}$$

$$m^1_{i,r}\Lambda_x c^0_{i,r} + m^2_{i,r}c^0_{i,r} = 0,\ c^0_{0,1} = -v_0(0),\ c^0_{N,2} = -v_N(0), \quad r = 1,2, \tag{5.35}$$

$$\partial_t v_i(t,\epsilon) - b(x_i,t)v_i(t,\epsilon) - \epsilon^2\Lambda_{x,x}v_i(t,\epsilon) = f_i(t),\ v_i(t,\epsilon)|_{t=0} = h_i. \tag{5.36}$$

Действительно, при получении задачи (5.34), мы принебрегли слагаемым

$$\epsilon^2\Lambda_{x,x}c_{i,r}(t,\epsilon)erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t}}),$$

как величину порядка $O(\epsilon^2\exp(-\frac{\xi_r^2}{8\ t}))$. Кроме того, нами учтено, что начальное условие удовлетворяется функцией $y_i(t,\xi,\epsilon)$ при любых $c_{i,r}(t,\epsilon)$. Поэтому $c^0_{i,r}$, из начального условия (5.34), выбрана произвольно и она будет выбрана так, чтобы обратить в нуль члена $L_{\xi,i}c_{i,r}(t,\epsilon)erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t}})$, т.е. из уравнения

$$L_{\xi,i}c_{i,r}(t,\epsilon)erfc(\frac{\xi_r}{2\sqrt{t}}) = 0, \quad r = 1,2, \quad i \geq 0. \tag{5.37}$$

Решив задачу (5.34) и подставив найденное решение в (5.37), получим задачу (5.35).

Задача (5.36) решается по схеме Кранка-Николсона, которая аппроксимирует уравнение с точностью $O(\Delta t^2)$. Далее, для решения и исследования устойчивости полученного дискретного уравнения применяется принцип замороженных коэффициентов.

5.2.3 Устойчивость разностных схем

Из полученных в (5.32) выражений видно, что построенные решения разностных задач для функций $c^j_{i,1},\ c^j_{i,2}$ устойчивы по начальным данным.

Уравнение (5.26) представляет разностное уравнение с переменными коэффициентами. Для решения и исследования устойчивости задачи Коши применим принцип замороженных коэффициентов [157]. По данному принципу выбираем внутреннюю точку $(\tilde{x}, \tilde{t})$ области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, где рассматривается задача и заморозим коэффициенты $a(x)$, $b(x,t)$. Возникающее разностное уравнение

$$\frac{1}{l}[v_i^{j+1} - v_i^j] + b(\tilde{x}, \tilde{t})v_i^j - \frac{\epsilon^2}{h^2}a(\tilde{x})\Lambda_x v_i^j = f_i^j \tag{5.38}$$

будем рассматривать теперь не при $0 < i < N$, а при всех целочисленных $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Сформулируем теперь

Принцип замороженных коэффициентов [157]. *Для устойчивости задачи Коши для уравнения (5.26) необходимо, чтобы задача Коши для разностного уравнения с постоянными коэффициентами (5.38) удовлетворяла необходимому спектральному признаку устойчивости Неймана.* Устойчивость решения которого можно показать по аналогии с параграфом 28 из [157].

5.2.4 Вычисление невязки

Считаем, что решение исходной задачи (5.17), (5.18) имеет ограниченные производные до четвертого порядка. Вспоминяя точные формулы для производных, пренебрегаемые члены (5.27) при получении уравнений (5.24), (5.25), а также вид уравнения (5.19), уравнение (5.21) перепишем

$$L_{\xi,i}y_i^j(\xi, \tau, \epsilon) = f_i^j + R_i^j + O(l + \epsilon h + \sum_{r=1}^{2} \epsilon^2 \exp(-\frac{\xi_{r,i}^2}{8t_j})) \tag{5.39}$$

На основании последнего соотношения для $z = y - u$, u -точное решение задачи (5.17), (5.18), получим

$$L_{\xi,i}z_i^j = O(l + \epsilon h + \sum_{r=1}^{2} \epsilon^2 \exp(-\frac{\xi_{r,i}^2}{8t_j})), \quad z_i^0 = z_0^j = z_N^j = 0.$$

Подводя итог сможем сформулировать результат в виде следующей теоремы.

Теорема 5.2 *Пусть выполнены условия 1)-3), тогда при* $\xi_{r,i} = \varphi_r(x_i)$, $r = 1, 2$, $i \geq 0$ *решение полудискретной задачи (4.21),(4.22)* *устойчиво аппроксимирует решение исходной задачи (4.17),(4.18), причем имеет место равномерная оценка*

$$||u(x_i,t_j,\epsilon) - y_i^j(\frac{\varphi(x_i)}{\epsilon},\epsilon)|| < c\left(l + \epsilon h + \sum_{r=1}^{2}\epsilon^2\exp(-\frac{\alpha_r x_i^2}{8\epsilon^2 t_j})\right).$$

5.3 Численный эксперимент

В данном параграфе приводятся два численных примера. Полученные для каждого из них численные результаты представлены в виде графика. При решении первого примера использован пакет MATCAD, а при решении второго примера использован пакет программ MAPLE.

П Р И М Е Р 1. Задача

$$\epsilon u''(x,\epsilon) - u(x,\epsilon) = \cos^2(\pi\ x) + 2\epsilon\pi^2\cos(2\pi\ x),$$

$$u(x,\epsilon)|_{x=0} = u(x,\epsilon)|_{x=1} = 0$$

имеет точное решение представимое в виде:

$$u(x,\epsilon) = \frac{\exp(-\frac{1-x}{\sqrt{\epsilon}}) + \exp(-\frac{x}{\sqrt{\epsilon}})}{1+\exp(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})} - \cos^2(\pi\ x).$$

Ниже приведены графики точного и приближенного решения при различных значениях малого параметра ϵ. Полученные результаты подтверждают то, что точность результатов зависит от малого параметра. При уменьшении значения малого параметра график приближенного решения становится все ближе к графику точного решения (см.Рис. 1-5).

П Р И М Е Р 2. В качестве второго примера рассмотрим задачу

$$\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2(1+x^2)^2\partial_x^2 u + (1+x)(1+t)u + \frac{1+t}{1+x},\ (x,t)\in(0,1)\times(0,2]$$

$$u(x,t,\epsilon)|_{t=0} = h(x),\quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

График построенного приближенного решения приведен на рисунке 6-8 при различных значения малого параметра. Полученные значения приближенного решения приведены в таблице, где в качестве отрезка [0,T] принят отрезок [0.2] с шагом 0,2, а шаг изменения переменной x приняли равной 0,1. Анализ этих таблиц показывает, что с уменьшением значения малого параметра наблюдается сходимость к точному решению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе впервые:

1. Показана, что параболические погранслойные функции описываются не экспоненциальной, а специальной функцией называемой интегралом вероятностей.

2. Построена регуляризованная асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения в частных производных параболического типа, когда предельный оператор не имеет спектр.

   В качестве приложения данного подхода впервые построена асимптотика решения краевой задачи для временного уравнения Шредингера при малых числах Планка. Построенная асимптотика решения для двумерной краевой задачи, когда отсутствует спектр предельного оператора, содержит угловой пограничный слой описывающий произведением параболических погранслойных функций.

3. Обоснована регуляризованная асимптотика решения первой краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае, когда граница области не является гладкой, а содержит угловые точки. Установлена, что асимптотика решения таких задач, кроме параболических погранслойных функций содержит угловые пограничные функции, описывающие пограничный слой в угловых точках, и задаются произведением двух погранслойных функций: экспоненциальной и параболической.

4. Изучена сингулярно возмущенная параболическая задача, когда предельный оператор имеет нестабильный спектр, а именно случай, когда спектр предельного оператора в конечном числе точек обращается в нуль. Показана, что асимптотика решения таких задач, наряду со степенной и экспоненциальной пограничными функциями, содержит параболические и угловые пограничные функции. Асимптотика решения таких задач имеет сложную структуру, она содержит угловые

пограничные функции двух типов, одна из которая представляются в виде произведения экспоненциальной и параболической, а вторая - в виде произведения степенной и параболической пограничных функций.

5. На основе синтеза асимптотического метода и метода конечных разностей предложен новый численный метод решения жестких задач, погрешность которого зависит от малого параметра.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Birkhoff G. D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. - 1908. - V. 9. - P. 219-231.

[2] Evans L.C.,Souganidis P.E. A PDE approach to geometric optics for certain semilinear parabolic equations // Indana Universitety Math. J.-1989.-38,1 -P.141-172.

[3] File Paul C. Diffusive waves in inhomogeneous media //Proc.Edinburgh Math.Soc.-1989-32, 2-P.291-315.

[4] Horn J. Uber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkuriichen Parameter//Math. Ann. - 1899. - Bd 52. - P. 340-362.

[5] Langer R. E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to the Stoke's phenomenon//Bull. Amer. Math. Ann. - 1934. - V. 63. - P. 505-582.

[6] Langer R. E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point//Trans. Amer. Math. Soc. - 1949. - V. 67. - P. 461-.490.

[7] Levinson N. Perturbations of discontionuous solutions of nonlinear systems of differential equations//Acta Math. - 1950. - V. 82, N 1-2. - p. 71-106.

[8] Levinson N. The first bpundary value problem for $\epsilon\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ for small ϵ//Ann. of Math.- 1950.- 51,N 2.- P. 428-445.

[9] Lighthill M.J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly validy//Phil. Mag. - 1949. - V. 7, N 40. - P. 1179-1201.

[10] Liouville I. Sur le developpement des fonctions ou parties en series dont les divers termes sont assujettes a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre contenant une parametre variable//J. Math. Pure Appl. - 1837. - V. 2. -P. 16-35.

[11] Plaschko P. Matched asymptotic approximation to solutions of a class of singular parabolic differential equations //Z.angew Math.and Mech.-1990.-70,N 1-P.63-64.

[12] Prandtl L. XJber Flussigkeitsbewegung her sehr kleiner Reibung//Verk. d. III,.Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Teubner. - 1905 - P. 484-494.

[13] Poincare A. Surles integrates irregulieres des equations lineaires//Acta Mathematica. - 1886. - V. 8.-P.125-138.

[14] Rubistein Jacjb, Sternberg Peter, Keller Joseph Fast reachtion, slow diffusion, fnd curve shortening // Siam J.Appl.Math.-1989.-49, 1.-P.116-133

[15] Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential systeme als Funktionen eines Parameters // Math. Ann. - 1907. - Bd 63-P.277-300.

[16] Trjitzinsky W.S. Theory oflinear differential equations containing a parameter //Acta Math. - 1936. - V. 67. - P. 1-50.

[17] Trjitzinsky W.I. Analytic theory of linear differential equations // Acta Math. - 1934. - V. 62. - P. 167-226.

[18] van Harten A.,van Hassel R.R. On a singularly perturbed, time-depended free boundary problem // J.Math. Anal.and Appl.-1989-137, 1.-P.70-98.

[19] Wasow W. Asymptotic solutions of boundary value problems for the differential equation $\Delta u + u = f(x, y)$ // Duke Math. J. - 1944. - V. 11. - P. 405-411.

[20] Бабич В.М.,Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. - М.: Наука, 1972. - 456 с.

[21] Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами // Математические заметки - 2002. - Т.72, вып.5. - С.654-664.

[22] Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т. Контрастные структуры в интегро-дифференциальных уравнениях с быстроизменяющимися ядрами // Вестник МЭИ - 2002. - Вып.6. - С.15-27.

[23] Бобочко В. Н. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с кратной точкой поворота // ДУ - 1996. - Т.32, вып.9. - С.1283-1285

[24] Боголюбов Н. Н.,Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний - М.: Наука, 1974. - 504 с.

[25] Булычева О.Н.,Васильева А.Б.,Сушко В.Г. Асимптотические разложения по малым параметрам решений некоторых задач для параболических уравнений // ЖВМ МФ. - 1991. - Т.31, вып.9. - С.1328-1337.

[26] Булычева О.Н.,Сушко В.Г. Равномерная асимптотика решения сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с угловой характеристикой вырожденного уравнения // ЖВМ МФ. - 1997. - Т.37, вып.2. - С.193-201.

[27] Бутузов В.Ф. Угловой пограничный слой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными //Дифф.уравнения. - 1979. - Т.15, вып.10. - С.1848-1862.

[28] Бутузов В.Ф. Построение асимптотики решения сингулярно возмущенной параболической задачи с негладкими пограничными функциями // ЖВМ и МФ. - 2000. - Т.40, вып.8 - С. 1176.

[29] Бутузов В.Ф.,Бучнев В.Ю. Об асимптотике решения одной сингулярно возмущенной параболической задачи в двумерном случае // Диффер. уравнен. - 1989. - Т.25, вып.3 - С.453-461.

[30] Бутузов В.Ф.,Деркунова Е.А. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла в тонком стержне // ЖВМ и МФ. - 1996. - Т.36, вып.6. - С.68-85.

[31] Бутузов В.Ф.,Есимова С.Т. Сингулярно возмущенная система типа "реакция-диффузия-перенос", вырождающаяся в систему из конечного уравнения и уравнения в частных производных 1-го порядка // ЖВМ МФ. - 1995. - Т.35, вып.2. - С.223-240.

[32] Бутузов В.Ф.,Калачев Л. В. Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае // Матем. заметки. - 1986. - Т.89, вып.6. - С.819-830.

[33] Бутузов В.Ф.,Коломийцева Е.А. О процессе сглаживания в системе сингулярно возмущенных уравнений параболического типа // Вестник МГУ. Сер.15. - 1989. - Вып.3 - С.5-13.

[34] Бутузов В.Ф.,Левашова Н.Т. Об одной сингулярно возмущенной системе типа реакция-диффузия-перенос в случае малой диффузии и быстрых реакций // Фундаментальная и прикладная математика. - 1995. - Вып.1. - С.907-922.

[35] Бутузов В.Ф.,Мамонов В. М. Об одной сингулярно возмущенной квазилинейной параболической задаче с негладкими угловыми пограничными функциями //Вычисл. матем. и матем. физ. - 1987. - Т.27, вып.7. - С.1012-1021.

[36] Бутузов В.Ф.,Уразгильдина Т. А. Асимптотика решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с мощным нелинейным источником в тонком стрежне //Диффер.уравнен. - 1995. - Т.31, вып.3 - С.472-482.

[37] Бучнев В.Ю. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной параболической задачи в критическом случае // ЖВМ МФ. - 1990. - Т.30, вып.6. - С.858-867.

[38] Валиев М.А. Метод регуляризации сингулярно возмущенных дифференциальных операторных уравнений // ДАН СССР. - 1974. - Т.220, вып.5. - С.1008-1012.

[39] Валиев М.А.,Ломов С. А. Асимптотическое интегрирование сингулярно-возмущенных задач в гильбертовом пространстве // Дифф. уравн. - 1981. - Т.17, вып.10. - С.1792-1805.

[40] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости - М.: Мир, 1967. - 345 с.

[41] Васильева А.Б. О периодических решениях уравнений параболического типа с малыми параметрами // Дифф. уравнения. - 1983. - Т.19, вып.12. - С.2076-2081.

[42] Васильева А.Б. О периодических решениях уравнений параболического типа // Математ.моделиров. Современные проблемы математ.физики и вычислительной математики. Материалы Всесоюзн. Научн.конференц. - М:, 1989. - С.57-63.

[43] Васильева А.Б.,Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений -М.: Наука, 1973. - 272 с.

[44] Васильева А.Б.,Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях - М.: Изд-во МГУ, 1978. - 254 с.

[45] Васильева А.Б.,Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений - М.:Высшая школа, 1990. - 208 с.

[46] Васильева А.Б.,Волков В.Т. Асимптотика периодических решений некоторых систем с малой диффузией // Математич. моделирование. - 1989. - Т.1, вып.4. - С.150-154.

[47] Васильева А.Б.,Радченко И.В. О периодическом решении параболического сингулярно возмущенного уравнения с разными степенями малого параметра при первой и второй производных // ЖВМ и МФ. - 2000. - Т.40, вып.8. - С.1192

[48] Вишик М.И.,Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. - 1957. - Т.12, вып.5. - С.3-122.

[49] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц - М.:ГИТТЛ, 1953. - 491 с.

[50] Градштейн И.С.,Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М.: 1962. - 1100 с.

[51] Губин Ю.П. Метод регуляризации и разрешимость в целом укороченных уравнений метода усреднения // Укр. мат. журн. - 1981. - Т.33, вып.3. - С.297-303.

[52] Губин Ю.П.,Ломов С.А.,Сафонов В.Ф. Точечный резонанс в системе двух осцилляторов // Прикл. матем. и механ. - 1982. - Т.46, вып.3. - С.389-396.

[53] Далецкий Ю.Л.,Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве - М.: Наука, 1970. - 530 с.

[54] Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений пограничного слоя.// Некоторые проблемы математики и механики - Новосибирск, 1961. - С.77-83.

[55] Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного оператора, I, П // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1984. - Т.48, вып.5. - С.999-1042.

[56] Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений для систем дифференциальных уравнений в случае кратного спектра предельного

оператора, Ш // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1984. - Т.48, вып.6. - С.1171-1196.

[57] Елисеев А.Г. Теория сингулярных возмущений в случае негладкого спектра предельного оператора // Матем.сб. - 1995. - Т.186, вып.7. - С.25-40.

[58] Елисеев А.Г.,Каниев Г.С. Асимптотическое интегрирование параболическое задачи в случае непрерывного спектра и необратимости предельного оператора // Сб. научных трудов МЭИ, 1989. - Вып.192. - С.26-31

[59] Елисеев А.Г.,Каниев Г.С. Асимптотическое решение сингулярно возмущенных задач в случае непрерывного спектра предельного оператора - М.: МЭИ. - 1989-16. ВИНИТИ 20.06.89. N 4077-B89.

[60] Елисеев А.Г.,Ломов С. А. Теория возмущений в банаховом пространстве // ДАН СССР. - 1982. - Т.264, вып.1. - С.34-38.

[61] Елисеев А.Г.,Ломов С.А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного опеатора // Матем.сб. - 1986. - Т.131(173), вып.4(12). - С.544-557.

[62] Елисеев А.Г.,Сафонов В.Ф. Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений - М.:МЭИ, 1990. - 59 с.

[63] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач - М.: Наука, 1989. - 336 с.

[64] Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем - Фрунзе: Илим. - 1972. - 356 с.

[65] Иманалиев М.И. Колебание и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегродифференциальных систем - Фрунзе: Илим. - 1974. - 353 с.

[66] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной // ДАН СССР. - 1957. - Т.117, вып.6. - С.935-938.

[67] Исакова Е.К. Асимптотика решения дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром // ДАН СССР. - 1958. - Т.119, вып.6. - С.1077-1080.

[68] Исакова Е.К. Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром // Матем.сборник. - 1966. - Т.69, вып.3. - С.300-320.

[69] Капустина Т.О. Асимптотические решения сингулярно возмущенной задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Диффернциальные уравнения. - 2000. - Т.36, вып.5. - С.662-666.

[70] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел -М.: Высшая школа, 1985. - 480 с.

[71] Касымов К.А. Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных уравнений, содержащих малый параметр // УМН. - 1962. - Т.17, вып.5. - С.187-188.

[72] Касымов К.А., Дауылбаев М.К. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Диффернциальные уравнения. - 1999. - Т.35, вып.6. - С.822-830.

[73] Качалов В.И., Ломов С.А. Гладкость решений дифференциальных уравнении по сингулярно входящему параметру // ДАН СССР. - 1988. - Т.299, вып.4. - С.805-808.

[74] Кирпикова О.И. Асимптотическое интегрирование параболической задачи в условиях нарушения стабильности спектра // Сборник научных трудов МЭИ. - 1989. - Вып.215. - С.38-41.

[75] Кирпикова О.И., Ращепкина Н.А. Об асимптотическом интегрировании одной сингулярно возмущенной параболической задачи // Дифференциальные уравнения с частн. производными. - Ленинград, 1989. - С.7-10.

[76] Кобрин А.И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил // ПММ. - 1969. - Т.33, вып.3. - С.431-440.

[77] Кобрин А.И., Мартыненко Ю. Г. Динамика проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле // ДАН СССР. - 1981. - Т.261, вып.5. - С.1070-1073.

[78] Кобрин А.И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. - 1976. - Т.40, вып.2. - С.230-237.

[79] Крылов Н.М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. - Киев: Изд-во АН УССР. - 1937.

[80] Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.

[81] Ломов С.А. Аналитические решения сингулярно возмущенных эадач // ДАН СССР. - 1982. - Т.265, вып.3. - С.529-532.

[82] Ломов С.А. Асимптотические решения в критическом случае // Труды МЭИ. - 1971. - Вып.89. - С.3-10.

[83] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

[84] Ломов С.А. Метод возмущений для сингулярных задач // Изв. АН СССР. Сер.мат. - 1972. - Т.36, вып.6. -С.635-651.

[85] Ломов С.А. О новой постановке задач, возникающих при построении регуляризованных асимптотических рядов // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения академика И. Г. Петровского. - М.: Изд-во МГУ, 1978. - С.145-148.

[86] Ломов С.А. Об одном общем методе асимптотического решения дифференциальных уравнений // Труды V Международной конф. по нелинейным колебаниям. - Киев, 1970. - Т.1. - С.368-374.

[87] Ломов С.А. Однозначная разрешимость некоторых матричных уравнений с частными производными // Математ. заметки. - 1977. -Т.21, вып.4. - С.525-530.

[88] Ломов С.А. Формализм неклассической теории возмущений // ДАН СССР. - 1973. - Т.212, вып.1. - С. 33-36.

[89] Ломов С.А.,Сафонов В.Ф. Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора // Укр. мат. журн. - 1984. - Т.36, N 2. - С.172-180.

[90] Ломов С.А., Стрижков В.А. Обобщение теоремы Тихонова на случай чисто мнимого спектра // ДАН СССР. - 1983. - Т.271, вып.6. - С.1317-1320.

[91] Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. - М.:Наука, 1977. - 384 с.

[92] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. - М.: Наука, 1988. - 312 с.

[93] Математическое моделирование. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 309 с.

[94] Миллер У. Симметрия и разделения переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.

[95] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1971.

[96] Мищенко Е.Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. - М.: Наука, 1975. - 248 с.

[97] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М.: Наука, 1981. - 379 с.

[98] Моисеев Н.Н. Асимптотическое представление решений линейных дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных делителей // ДАН СССР. - 1966. - Т.170, вып.4. - С.780-782.

[99] Мягкова М.П. Асимптотическое решение краевой задачи // Труды МЭИ. - 1971. - Вып. 89. - С.83-86.

[100] Нестерев А.В. Асимптотика решения параболического уравнения с сингулярными возмущенными краевыми условиями // ЖВМ МФ. - 1997. - Т.37, вып.9. - С.1087-1093.

[101] Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение задачи, моделирующей тепломассообмен во взаимопроникающих средах // Дифференц. уравнения. - 1985. - Т.21, вып.10. - С.1819-1821

[102] Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. - М.: Мир, 1976.-462 с.

[103] Омуралиев А.С. Об асимптотике типа Биркгофа для интегро-дифференц.уравнен. // Труды КГУ, сер. матем. наук. - 1976. - Вып.11. - С.76-81.

[104] Омуралиев А.С. Асимптотика решения краевой задачи для систем интегро-дифференц. уравнен. // Интегро-дифференц. уравнения и их прилож. - 1978. - Вып.1. - С.59-67.

[105] Омуралиев А.С. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных интегро- дифференц. уравнен. // Асимптоттические методы в теории дифференц. и интегро-диффернц. уравн. и их приложений. - 1981. - С.175-187

[106] Омуралиев А.С. Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущ. систем нтегро-дифференц. уравнен. // Исслед. по интегро-дифференц.уравнен. - 1981. - Вып.14. - С.182-197.

[107] Омуралиев А.С., Ормонбеков Т. Асимптотика решения модельного уравнения Лайтхилла // Всесоюз. конф. по распростр, упругих и упруго пластич.волн. - Фрунзе, 1983. - Ч. 2. - С.139.

[108] Омуралиев А.С.Выбор регуляризующей функции в методе регуляризации для сингулярно возмущенных задач // Исслед.по интегро-дифференц.уравнен. - 1984. - Вып.17. - С.25-28.

[109] Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи при отсутствии спектра предельного оператора // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - 1989. - Вып. 22. - С.39-42.

[110] Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с угловым пограничным слоем // Алгебре струк-ры и теория синг. возмущении. - Матер-лы зимней матем. школы (25-30 янв. 1993). Москва, 1993. - С.123-125.

[111] Омуралиев А.С. Сингулярно возмущенная двумерная параболическая задача // Тезисы докл. Респ. науч. конференц. Д.у и их приложения. - Ош, 1993. - С.83.

[112] Омуралиев А.С. Асимптотика решения смешанной задачи для параболического уравнения // Матер. международной науч. - практ. конф. "Проблемы мех. и приклад. математики."Т. 2, Прикл.математ. - Бишкек, 1995. - С.70-71.

[113] Омуралиев А.С. Регуляризация задачи с параболическим пограничным слоем // Матер. междунар. науч.- практ. конф. "Проблемы мех. и прикладной матем."Т.2, Прикл.математ. - Бишкек, 1995. - С.71-74.

[114] Омуралиев А.С. Регуляризованная асимптотика решения уравнения с исчезающей теплопроводностью // Наука и новые технологии. - 1997. - Вып.3. - С.38-45.

[115] Омуралиев А.С. Регуляризованная асимптотика решения параболической задачи с двумя вязкими границами // Наука и новые технологии. - 1998. - Вып.4. - С.22-25.

[116] Омуралиев А.С. Задача Коши для сингулярно возмущенных параболических уравнений с внутренним пограничным слоем // Табигый илимдер журналы. Кыргыз-Турк "Манас"универ. - 2001. - Вып.1.- С.94-106.

[117] Омуралиев А.С. Сингулярно возмущенная параболическая задача с нестабильным спектром // Табигый илимдер журналы. Кыргыз-Турк "Манас"универ. - 2002. - Вып.3.-С.85-108

[118] Омуралиев А.С. Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи // Вестник КГПУ им. И. Арабаева, сер. матем., физ., информат. - 2003. - С.154-157.

[119] Омуралиев А.С.Регуляризация задачи Коши сингулярно возмущенного параболического уравнения на основе конечных элементов // Тезисы докл. междунар.конфер."Математич. моделиров. эколог. систем". - Алматы, 2003. - С.151.

[120] Омуралиев А.С.Асимптическое решение сингулярно возмущенных параболических задач с нестабильным спектром // Тезисы докл. Междунар. конфер. "Актуальн. Пробл. дифферен. уравн. и матем.физики". - Алматы, 2005. - С.156.

[121] Омуралиев А.С.Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. - Бишкек: ИЦ "Текник"КТУ. - 2005.-152 с.

[122] Омуралиев А.С.Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи с нестабильным спектром // Вестник Каз.НУ им.Ал-Фараби. Сер.матем. - 2006. - Вып.1 - С.99-102.

[123] Омуралиев А.С.Об одном подходе построения регуляризованной асимптотики решения сингулярно возмущенной параболической задачи // Табыгий илимдер журналы. Кыргыз Турк "Манас"университети. - 2006. - N 7. - С.33-40.

[124] Омуралиев А.С.Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 2006. - Т.46, N 8. - С.1447-1456.

[125] Омуралиев А.С.,Садыкова Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенной параболической задачи с нулевой кратной точкой спектра // Тезисы II междунар. науч.конфер. "Асимп., тополог. и компьют. методы в математ. Бишкек. - 2006. - С.16.

[126] Омуралиев А.С.Регуляризованная асимптотика в сингулярно возмущенной параболической задачи с угловыми погранслоями // Сибирские Электронные Математические Известия. - 2007. - Т.4 - С.103-112.

[127] Омуралиев А.С., Садыкова Д.А. Асимптотика решения одной задачи с угловым параболическим пограничным слоем // Материалы Междунар. Науч.-практич. конфер. "Соврем. проблемы математ., механики и информат. технол". - Талды-Курган, 2007. - Т.2. - С.85-89

[128] Омуралиев А.С. Асимптотика решения временного уравнения Шредингера с малой константой Планка // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 2007. - Т.47, N 10. - С.1746-1751.

[129] Омуралиев А.С.Асимпотика решения уравнения Шредингера // Хабаршы-Вестник Казахского Национального университета имени Абая, сер. физико-математические науки. - Алматы, 2007. - N 4(20). - С.198-202.

[130] Омуралиев А.С., Садыкова Д.Ф.Регуляризация сингулярно возмущенной параболической задачи с быстроосцилирующей правой частью // Хабаршы-Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая, серия "физико-математические науки". - Алматы, 2007. - N 4(20). - С. 202-207.

[131] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1974. -332 с.

[132] Рыжих А. Д Асимптотическое интегрирование уравнения в банаховом пространстве // Труды МЭИ. - 1980. - Вып. 499. - С.159-161.

[133] Сабзалиев М.М. Асимптотика решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с малым параметром // Аз.ин-т нефти и химии-Баку, 1989 - 19 с. Деп.Аз.НИИНТИ 24.04.89, N 1266-Аз89.

[134] Сафонов В.Ф. Метод нормальных форм для нелинейных сингулярно возмущенных задач. - М.: Изд-во МЭИ, 1989.-65 с.

[135] Сафонов В.Ф. Метод регуляризации для сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1979. - Т.43, вып.3. - С.628-653.

[136] Сафонов В.Ф., Туйчиев О. Д. Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотика // Дифференц. уравнения. - 1997. - Т.33, вып.9. - С.1199-1210.

[137] Скворцов М.Ю. Асимптотика решения задачи Коши для параболического уравнения с малым параметром при неограниченном времени и разрывном начальном условии // Вестник МГУ. Сер.1 матем. и механик. - 1981. - Вып.5. - С.42-46.

[138] Стрижков В.А. Метод регуляризации для сингулярно-возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными // Деп. в ВИНИТИ 13 июля 1983 г. N 3899-83.

[139] Стрижков В.А. Некоторые вопросы разрешимости в целом сингулярно-возмущенных нелинейных задач // Математ. заметки. - 1985. - Т.37, вып.6. - С.857-868.

[140] Сушко В.Г. Асимптотика решения на угловой характеристике для параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. - 2000. - Т.36, вып.5. - С.694-698

[141] Сушко В.Г. Асимптотические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений смешанного типа // Фундаментальная и прикладная математика. - 1997. - 3, вып.2. - С.570-586.

[142] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. - Петроград, 1917.-425 с.

[143] Территин Х.Л. Асимптотическое поведение решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математика. -1957. - Т.1, вып.2.-С.129-159.

[144] Тихонов А.Н О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем сб. - 1948. - 22(64), вып.2. - С.193-204.

[145] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.

[146] Треногий В.А Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем // УМН. - 1961. - 16, вып.1 - С.164-169.

[147] Треногий В.А Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника - Вишика // УМН. - 1970. - 25.N 4. - С.121-156.

[148] Уизем Д.Б. Вариационные методы и их применение к волнам на воде. Нелинейная теория распространения волн. - М.: Мир, 1970.

[149] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983. - 352 с.

[150] Фещенко С.Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений - Киев. Наукова думка, 1966.-345 с.

[151] Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений. - Ташкент: Фан, 1974. - 253 с.

[152] Хаметов В.М. Асимптотика решения задачи Коши для линейных параболических уравнений второго порядка с малой диффузией // Математические заметки. - 2000. - 68,N 6. - С.917.

[153] Хапаев М.М. Проблемы устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. - 1980. - Т.35, вып.1(211). - С.127-170.

Литературы по численным методам

[154] Багаев Б.М. Исследование параболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Моделирование в механике. - 1988. - Т.2, вып.3. - С.3-15.

[155] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // ЖВМ и МФ. - 1969. - Т.9, N 4. - С.842-859.

[156] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. - М.: Мир, 1983. - 200 с.

[157] Годунов С.К, Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977. - 440 с.

[158] Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. - 1969. - 6, N 2. - С.237-248.

[159] Омуралиев А.С.Численное решение линейной сингулярно-возмущен. начальной задачи // Тезисы докл. Всесоюзн. науч. совещан. Методы малого параметра. - Нальчик: КБГУ, 1987. -С.115.

[160] Омуралиев А.С., Абдымамбетова Э. Численная регуляризация сингулярно - возмушенной системы дифференциальных уравнений // Тезисы Всесоюз. конф. Асимп. методы синг. возмущ.и некорр. задач. - Бишкек: Илим, 1991. - С.81.

[161] Омуралиев А.С. Численная регуляризация краевой задачи с пограничным слоем возникающемся на одном конце // Вестник ОшГУ, сер. физмат. - 2001. - N 4. - С.101-104.

[162] Омуралиев А.С. Численная регуляризация сингулярно возмущенной краевой задачи // Табигый илимдер журналы. Кыргыз - Турк "Манас"универ. - 2002. - N 2. - С.134-143.

[163] Omuraliev A.Numerical regularization of Cauchy problem for singularly perturbed parabolic equation // Табигый илимдер журналы. Кыргыз - Турк "Манас"универ. - 2004. - N 5. - С.1-5.

[164] Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. III. Самосопряженное уравнение // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. - 1989. - N 4. - С.3-11.

[165] Шишкин Г.И.Сеточный метод Шварца для сингулярно возмущенных параболических уравнений конвекции-диффузии в случае когерентных и некогерентных сеток на подобластях // Журнал вычисл.математ. и математ.физики. -2003. - Т.43, вып.2. - С.251-264.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы со значениями точного (ut) и полученного нашим алгоритмом решений, а также абсолютных значений разностей этих решений при значениях аргумента x=0,1;0,2;...;0,9.

x	Значения точного решения (ut)	Значения решен.(um) получ.данным алгор.	|ut-um|
ε=0.500000			
0.100	-0.7849	-0.7632	0.0216
0.200	-0.5390	-0.4994	0.0396
0.300	-0.2621	-0.2088	0.0533
0.400	0.0457	0.1083	0.0626
0.500	0.3841	0.4519	0.0678
0.600	0.7525	0.8220	0.0695
0.700	1.1503	1.2186	0.0684
0.800	1.5766	1.6419	0.0652
0.900	2.0309	2.0917	0.0608
ε =0.250000			
0.100	-0.6089	-0.5768	0.0321
0.200	-0.2305	-0.1822	0.0483
0.300	0.1432	0.1965	0.0533
0.400	0.5200	0.5714	0.0514
0.500	0.9067	0.9526	0.0459
0.600	1.3084	1.3477	0.0393
0.700	1.7289	1.7619	0.0330
0.800	2.1708	2.1984	0.0277
0.900	2.6355	2.6589	0.0235
ε =0.125000			
0.100	-0.3468	-0.3088	0.0380
0.200	0.1192	0.1600	0.0408
0.300	0.5065	0.5392	0.0327
0.400	0.8727	0.8967	0.0239
0.500	1.2454	1.2629	0.0175
0.600	1.6362	1.6496	0.0135
0.700	2.0496	2.0607	0.0111
0.800	2.4874	2.4971	0.0097
0.900	2.9500	2.9588	0.0088

x	Значения точного решения (ut)	Значения решен.(um) получ.дан-ным алгор.	|ut-um|
ε =0.062500			
0.100	-0.0510	-0.0190	0.0320
0.200	0.3688	0.3894	0.0206
0.300	0.7029	0.7145	0.0116
0.400	1.0434	1.0509	0.0076
0.500	1.4062	1.4121	0.0059
0.600	1.7937	1.7989	0.0052
0.700	2.2062	2.2110	0.0048
0.800	2.6438	2.6482	0.0044
0.900	3.1063	3.1104	0.0042
ε =0.031250			
0.100	0.1524	0.1697	0.0173
0.200	0.4711	0.4777	0.0067
0.300	0.7844	0.7881	0.0037
0.400	1.1219	1.1248	0.0030
0.500	1.4844	1.4870	0.0027
0.600	1.8719	1.8744	0.0025
0.700	2.2844	2.2867	0.0023
0.800	2.7219	2.7241	0.0022
0.900	3.1844	3.1865	0.0021
ε =0.015625			
0.100	0.2223	0.2286	0.0064
0.200	0.5109	0.5131	0.0022
0.300	0.8234	0.8250	0.0016
0.400	1.1609	1.1624	0.0014
0.500	1.5234	1.5248	0.0013
0.600	1.9109	1.9122	0.0012
0.700	2.3234	2.3246	0.0012
0.800	2.7609	2.7620	0.0011
0.900	3.2234	3.2245	0.0010

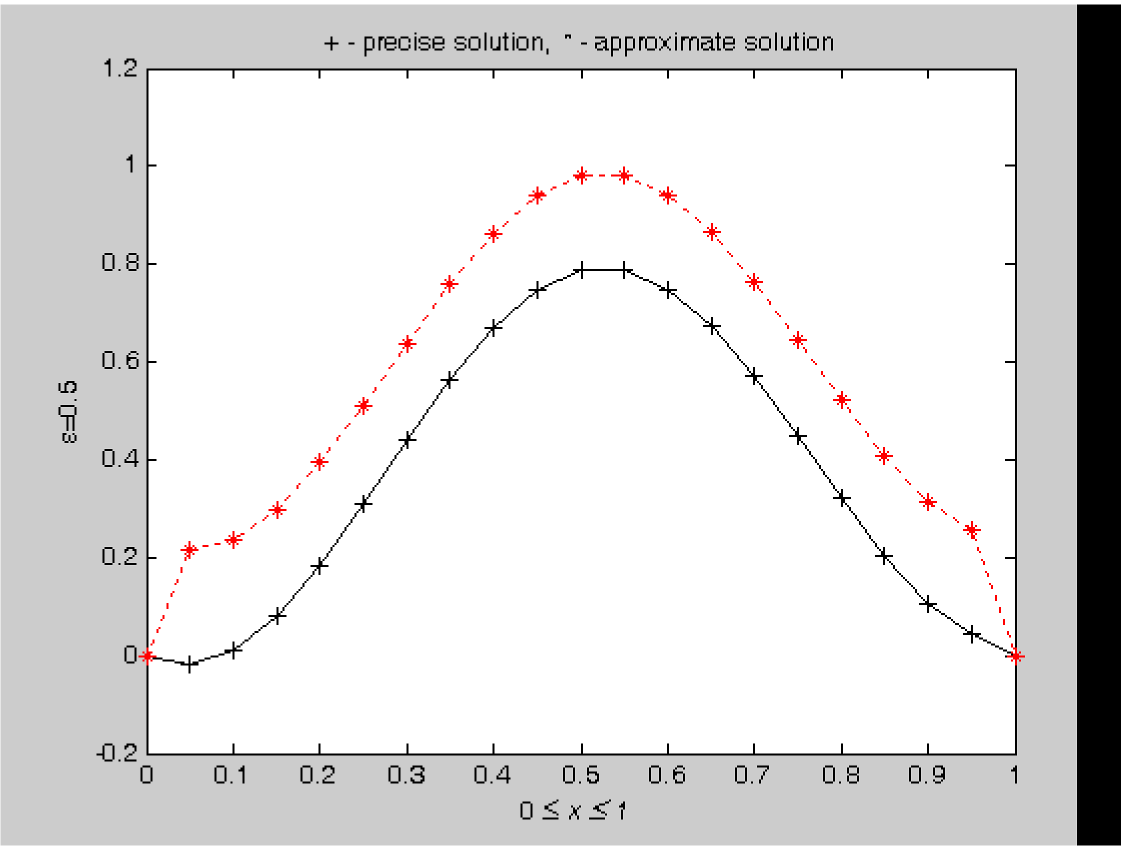

+ - precise solution, * - approximate solution
s=0.5
0 ≤ x ≤ 1

Рис. 1.

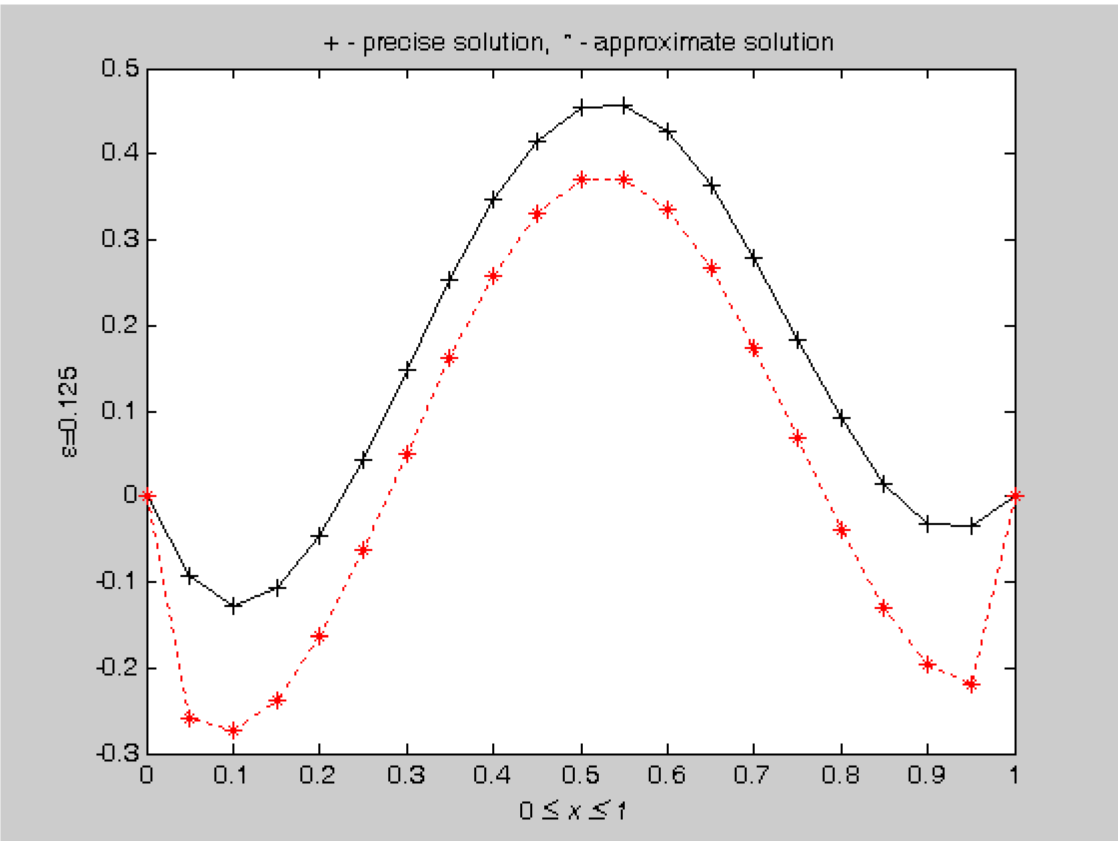

+ - precise solution, * - approximate solution
s=0.125
0 ≤ x ≤ 1

Рис. 2.

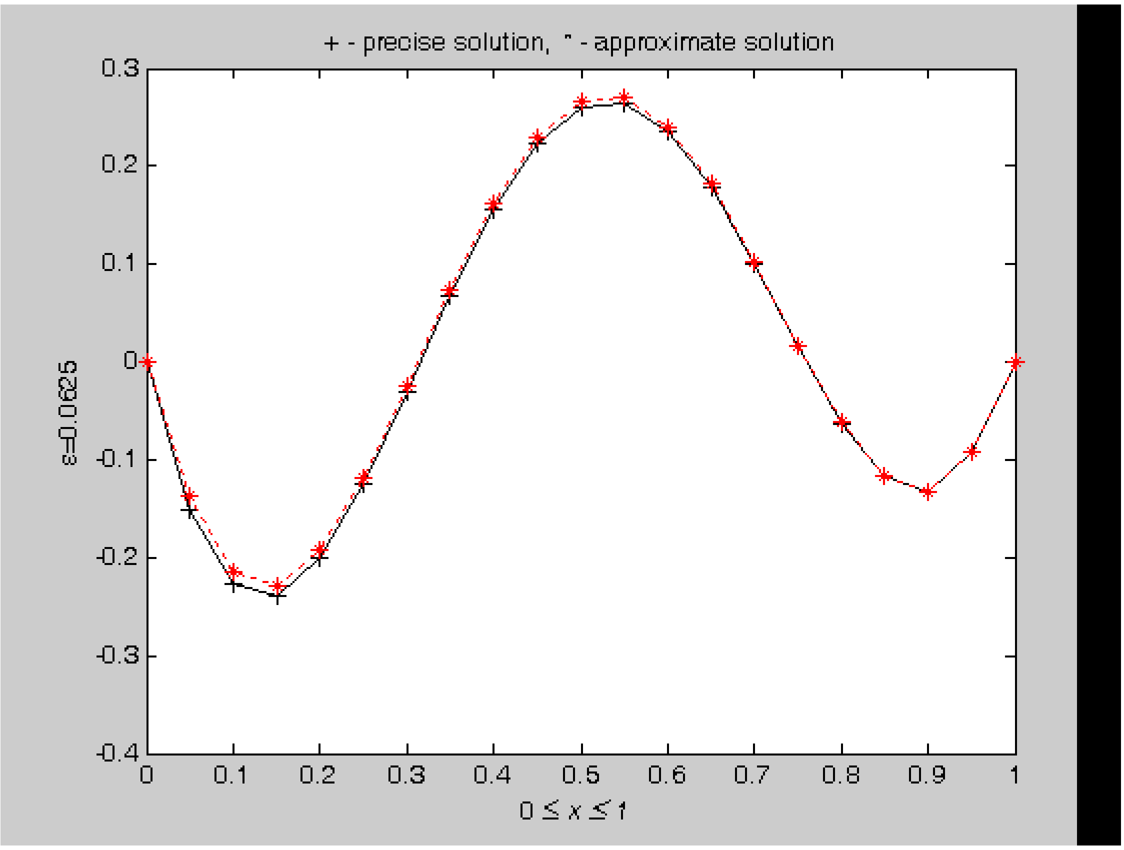

+ - precise solution, * - approximate solution
ε=0.0625
0 ≤ x ≤ 1

Рис. 3.

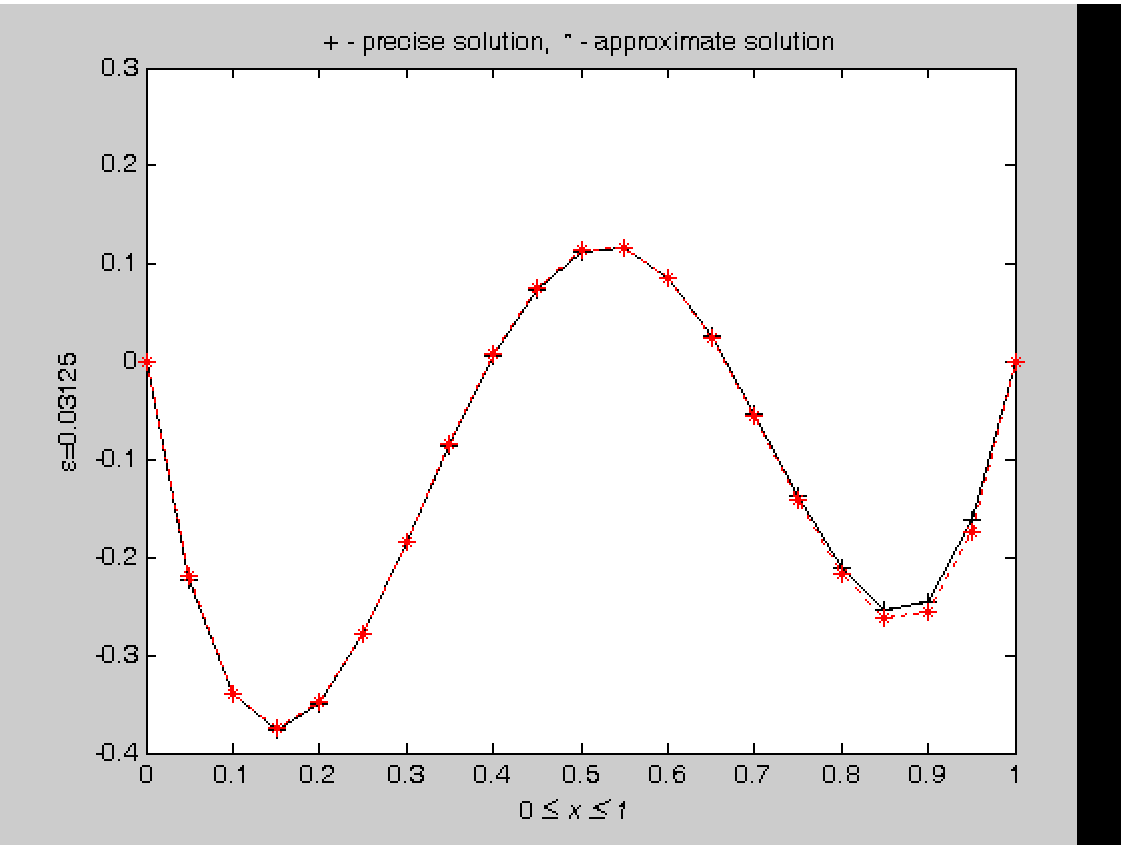

+ - precise solution, * - approximate solution
ε=0.03125
0 ≤ x ≤ 1

Рис. 4.

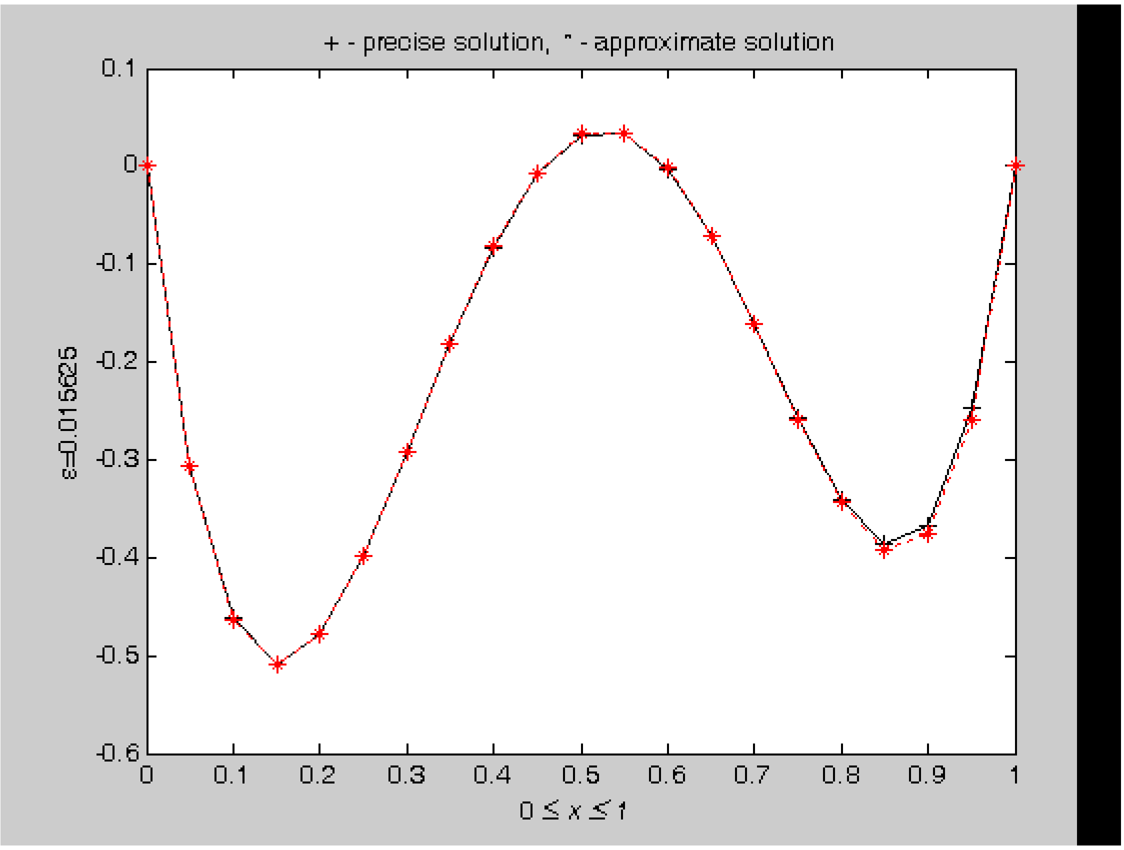
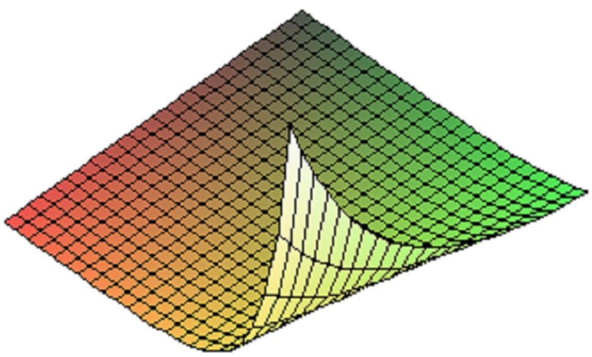
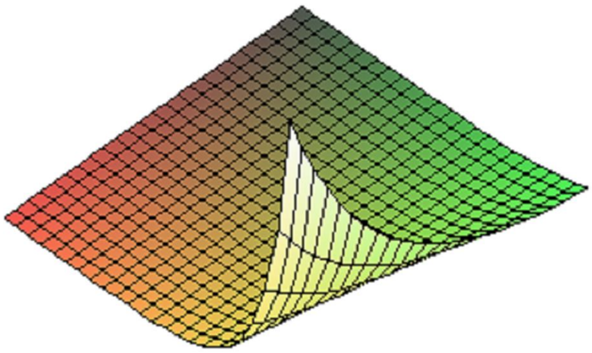


Рис. 5.



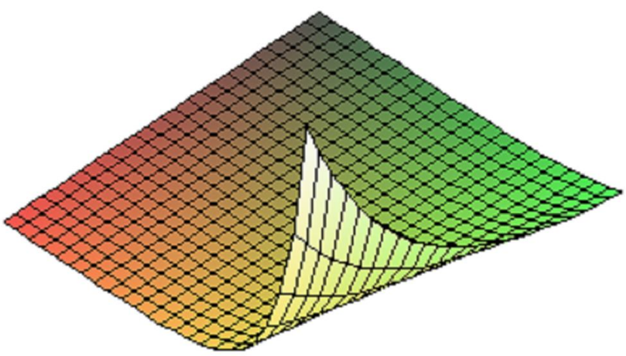
ε=0.25

Рис.6



ε=0.015

Рис. 7



ε=0.0015

Рис.8.