МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Хмелёв Дмитрий Викторович

ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ГЛОБАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
профессор, д.ф.-м.н.
Л.Г. Афанасьева

Москва 2001

Оглавление

Введение

Теория массового обслуживания — богатая и интенсивно развивающаяся область математического знания. Начиная с работ А.К. Эрланга [1], ей была присуща очевидная практическая направленность, что приводило к появлению множества естественных и интересных вероятностных задач.

В настоящей диссертации исследуются модели теории массового обслуживания, связанные с сетями из перемещающихся приборов. Такого рода системы получили название *поллинг*-систем и они являются популярной областью среди исследователей (см., например, книгу А.А. Боровкова [2]). Отметим, что очень многие классические модели теории массового обслуживания по сути своей являются поллинговыми. Вспомним, например, модель Б.В. Гнеденко [3] системы из n ткацких станков, время от времени выходящих из строя (из-за обрыва нити) и требующих ремонта, оказываемого m работниками, перемещающимися между станками. Вероятностная модель, избранная Б.В. Гнеденко приводила к исследованию марковской цепи с непрерывным временем и состоянием, описываемым одной переменной, а именно, числом неисправных станков (такая система, в частности, описана в книге В. Феллера [4, I том, раздел XVII.7]). Очевидно, в этой задаче достаточно естественно возникает поллинговая модель обслуживания заявок, возникающих на станках, перемещающимися работниками. Однако, учёт того, что работники перемещаются, очень усложняет анализ функционирования описанной системы.

Как и в других математических дисциплинах, в теории массового обслуживания можно наблюдать постепенное усложнение исследуемых моделей и задач, вызванное необходимостью лучше понять изучаемые явления. Развитие происходит от простейших моделей с одним обслуживающим прибором к сетям обслуживания со случайным выбором обслуживающего прибора и далее к сетям обслуживания, на которых загрузка при сложном взаимодействии с заявками перераспределяется между приборами (именно к последнему классу относятся поллинговые системы). При этом наблюдается стремление исследовать как можно более широкий класс возможных распределений времён обслуживания и времён между появлениями заявок. Далее будут упомянуты некоторые работы, в которых отражается отмеченная тенденция.

А.К. Эрланг [1] (см. также книгу А.Я. Хинчина [5, §20]) получил свои известные формулы с использованием теории цепей Маркова с конечным пространством состояний. Кроме того, он изучал цепи Маркова со счётным пространством состояний, которые описывались счётной системой линейных дифференциальных уравнений, где вопросы о сходимости к стационарному решению уже требуют привлечения тонких вероятностных соображений (этот вопрос решили А.Н. Колмогоров [6] и В. Феллер [4, I том, гл. XVII.5]). Формулы Эрланга получены в предположениях на экспоненциальное распределение времени обслуживания и пуассоновость входного потока заявок. Эти предположения казались слишком ограничительными и многие исследователи обратились к изучению общего времени обслуживания. В случае конечной системы обобщение формул Эрланга получил Б.А. Севастьянов [7].

Формулы, описывающие стационарное поведение систем с общим временем обслуживания получили Ф. Поллачек [8] и А.Я. Хинчин [9] (см. также работы Д.Г. Кендалла [10, 11]). В работе Д.В. Линдли [12] изучалось асимптотическое поведение времени ожидания начала обслуживания при поступлении в очередь к одному обслуживающему прибору. В [12] интервалы между поступлением заявок и времена обслуживания считались последовательностями независимых одинаково распределённых величин. При аналогичных условиях Дж. Кифер и Дж. Волфовиц [13] исследовали уже случай нескольких обслуживающих приборов. Затем Р.М. Лойнес [14, 15] обобщил результаты Д.В. Линдли, а также Дж. Кифера и Дж. Волфовица на случай стационарных метрически транзитивных последовательностей времён обслуживания, обнаружив, в частности, что стационарный режим для систем с несколькими обслуживающими приборами может не быть единственным. Дальнейшие результаты и обобщения в области систем с общими временами обслуживания и интервалами между поступлениями заявок получили П. Франкен [16] и А.А. Боровков [17], что нашло отражение в книге А. Брандта, П. Франкена и Б. Лизека [18]. Также упомянем работу Дж.Ф. Кингмана [19] об алгебраической природе формул для стационарного распределения времени ожидания и числа заявок в очереди к одному прибору.

Другое направление в усложнении исследуемых моделей состоит в изучении сетей систем массового обслуживания, в которых заявки перемещаются от одной системы к другой. В рамках этой задачи замечательное наблюдение сделал Дж.Р. Джексон [20, 21], обнаруживший явные формулы для стационарного распределения числа заявок, проходящих последовательность обслуживающих приборов сообразно некоторой обрывающейся цепи Маркова. Многочисленные примеры явных решений для многочисленных сетей обслуживания приведены в книге Ф.П. Келли [22]. Тем не менее, сложность изучаемых сетей обслуживания очень велика и явные формулы для стационарного состояния системы удаётся найти лишь с учётом предположений экспоненциальности времён обслуживания и пуассоновости входного потока.

Дальнейшее развитие теории связано с изучением всё более сложных дисциплин взаимодействия заявок и обслуживающих систем и оно может привести к определённым результатам в изучении поллинговых моделей, которые иногда можно исследовать именно как некоторые специальные сети массового обслуживания.

В частности, в настоящей диссертации изучается следующая модель, возникшая из попыток разгрузки центров городов с помощью введения системы электромобилей. Предполагается, что сами электромобили находятся на некоторых стоянках, на которые приходить пользователи, забирающие автомобили на время поездки и оставляющие их, возможно, на какой-нибудь другой стоянке. Транспортные сети такого сорта введены в работе Л.Г. Афанасьевой, Г. Файоля, С.Ю. Попова [23], и их в дальнейшем изучали Л.Г. Афанасьева, Ф. Делкойн, Е.М. Гинзбург, В.И. Оселедец, Г. Файоль, Д.В. Хмелёв [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Обзор по поллинговым моделям можно найти в книге А.А. Боровкова [2] (см. также [30])

Вплоть до недавнего времени арсенал методов теории массового обслуживания не позволял эффективно подходить к изучению подобных моделей. Обычно можно легко задать цепь Маркова, которая описывает изучаемую систему. Однако, пространство состояний марковской цепи оказывается существенно многомерным и выписать стационарное распределение за редкими исключениями не удаётся. Например, Р.Л. Добрушин придерживался той точки зрения, что явные формулы для стационарных распределений в «общем случае» получить нельзя (см. обзор Ф.И. Карпелевича, Е.А. Печерского и Ю.М. Сухова [31] о подходе Р.Л. Добрушина к теории сетей систем массового обслуживания). Среди исключений есть, впрочем, уже упомянутый представительный класс открытых и замкнутых сетей Джексона, введённый самим Дж.Р. Джексоном в 1963 году в работе [21]. С точки зрения вычисления операционных характеристик системы интересно знать именно явную формулу для стационарного распределения, из которой хорошо видно, как параметры системы влияют на целевую функцию. Поэтому возникает вопрос о нахождении асимптотических формул для стационарного распределения в многочисленных предельных случаях: для большой или малой загрузки, нулевых времён перемещения (в частности, результат Б.В.Гнеденко [3] может рассматриваться как предельный случай ситуации, когда время перемещение работников между станками равно нулю) и пр. В настоящей диссертации асимптотические формулы изучаются в предельном случае, отвечающем большой размерности системы массового обслуживания (большая размерность чаще всего связана с большим числом приборов или очередей к этим приборам, каждую из которых надо описывать отдельной координатой). Такую задачу можно решать с помощью так называемого метода среднего поля. Этот метод состоит из следующих шагов. Сначала надо выбрать пространство состояний сети таким образом, чтобы при увеличении числа компонент сети поведение системы становилось все более и более детерминированным, а в пределе состояние системы описывалось бы детерминированной системой дифференциальных уравнений (которые могут быть и нелинейными). Далее, при соблюдении условий эргодичности системы показывается, что имеется единственная неподвижная точка, которая притягивает все остальные решения. Отсюда следует, что единственная мера, инвариантная относительно этой системы дифференциальных уравнений, сосредоточена в её неподвижной точке. Далее необходимо показать, что семейство всех инвариантных мер допредельных конечных сетей являются относительно компактным. Отсюда следует, что для всякой последовательности мер имеется сходящаяся подпоследовательность. Однако, сходящаяся подпоследовательность мер должна быть инвариантна относительно предельной динамики и отсюда извлекается, что предельная точка должна совпадать с вырожденной мерой, сосредоточенной в неподвижной точке.

Другой, вероятностный, взгляд на проблему состоит в том, что при наличии достаточно сильной симметрии у системы, когда число компонент увеличивается, зависимость их друг от друга ослабевает и, в конце концов, все компоненты начинают эволюционировать независимо друг от друга. Эта эволюция описывается опятьтаки нелинейными дифференциальными уравнениями, неподвижная точка которых и представляет собой желаемое стационарное состояние каждой из компонент.

Согласно обзору [31], этот метод в «интуитивной» форме известен математикам и инженерам довольно давно — с 60-х годов XX века, однако, вопрос о строгом обосновании всех описанных шагов сталкивается с большими трудностями. Авторы обзора [31] называют гипотезой Р.Л. Добрушина утверждение о том, что все шаги описанного метода действительно можно строго обосновать математически в большинстве систем. К этой гипотезе очень близка несколько более частная гипотеза А.А. Боровкова о предельном поведении замкнутой полностью симметричной сети Джексона с общим временем обслуживания заявок (см. [32]). Отметим, что гипотеза Боровкова доказана лишь в двух частных случаях, а именно А.Л. Столяр [33] разобрал случай постоянного распределения времени обслуживания, а Ф.И. Карпелевич и А.Н. Рыбко [34] изучили случай экспоненциально распределённого времени обслуживания.

Одним из самых сложных вопросов является вопрос о сходимости решений нелинейной системы дифференциальных уравнений к неподвижной точке. В частности, после работы [32] Ф.И. Карпелевича и А.Н. Рыбко именно доказательство сходимости некоторой нелинейной системы уравнений к неподвижной точке осталось последним препятствием в доказательстве гипотезы А.А. Боровкова.

Такого рода задача называется задачей о *глобальной асимптотической устойчивости*. Заметим, что хорошо развита лишь теория локальной устойчивости, то есть, устойчивости в окрестности неподвижной точки, в то время как в случае глобальной асимптотической устойчивости исследователь может надеяться лишь на собственную интуицию, которая поможет ему построить *функцию Ляпунова* (которую иногда называют *пробной функцией*). Одним из немногих свойств нелинейной системы дифференциальных уравнений, которые позволяют исследовать её сходимость к неподвижной точке, является покоординатная монотонность решений по начальному условию. Такое свойство действительно имеется для целого класса систем возникающих в данном контексте, хотя и требует определённого искусства в выборе системы координат.

Монотонность, однако, не имеет мест для систем с законом сохранения типа суммы координат. Тогда никакие два начальных данных с одинаковой суммой координат не сравнимы между собой. Между тем, в силу свойств допредельной стохастической динамики иногда в детерминированном пределе остаётся монотонность решений по начальным состояниям. В теореме 14 (см. ниже) показана эквивалентность монотонности по начальным данным и неотрицательности недиагональных элементов матрицы Якоби исследуемой системы дифференциальных уравнений. Из того, что матрица Якоби неотрицательна вне диагонали и из того, что сумма координат является первым интегралом системы, следует (при некоторых дополнительных условиях технического характера), что фазовый поток является сжатием. Этим фактом, разумеется, можно воспользоваться для доказательства существования неподвижной точки и сходимости к ней решений с любыми другими начальными данными.

Такое наблюдение представляется достаточно общим, и, насколько известно автору диссертации, все системы, возникающие в данном контексте, для которых удалось провести полное исследование сходимости к единственной неподвижной точке, попадают в указанный класс. Описанный результат для конечномерных нелинейных систем дифференциальных уравнений доказан в первой главе диссертации. Далее он применяется в проведении изложенной выше программы исследования асимптотических характеристик. В первой главе описано несколько таких применений: для простейшей транспортной сети, для сети приборов с выбором наименьшей из двух очередей, кластерной транспортной сети, а также для транспортной сети с непоказательным распределением времени перемещения приборов.

Во второй главе диссертации доказано, что изложенное выше наблюдение проходит и в случае счётных систем дифференциальных уравнений. Трудность, связанную со счётностью системы, удаётся обойти с помощью введения семейства компактных инвариантных множеств, которое, как будет показано на примерах, довольно часто можно легко угадать. Любопытным примером применения этого наблюдения в случае счётных систем являются счётные цепи Маркова с непрерывным временем. Известно, что такие цепи Маркова описываются с помощью бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений Колмогорова (см. книгу В. Феллера [4]).

Используя указанное наблюдение, можно дать признак эргодичности цепи Маркова в терминах дифференциальных уравнений. Для марковских цепей, описывающих транспортные сети, системы дифференциальных уравнений могут быть значительно проще производящего оператора или матрицы переходных вероятностей, а потому проверка эргодичности становится значительно легче.

Если первые две главы посвящены исследованию асимптотического поведения сложных моделей теории массового обслуживания, то третья глава посвящена изучению модели *бесконечной* транспортной сети. Заметим, что теория асимптотического поведения *конечных* моделей теории массового обслуживания довольно хорошо развита [31], в то время как изначально бесконечных моделей ещё не так хорошо исследованы (см. работы А.А. Боровкова, Д. Коршунова, Р. Шацбергера [35] и С.Г. Фосса, Н.И. Черновой [36]). При введении в модель существенной бесконечности появляются неожиданные эффекты. Например, в третьей главе показано, что транспортная сеть *никогда не является эргодичной*, что обусловлено наличием семейства различных инвариантных мер. Это связано с тем, что транспортная сеть является обобщением хорошо известного процесса с нулевой областью зависимости, который открыл Ф. Спицер [37]. Процесс с нулевой областью зависимости относится к широко известному классу систем взаимодействующих частиц, появившемуся из разнообразных физических моделей, вроде модели Изинга (см. книгу Т.М. Лиггетта [38]). Процессу с нулевой областью зависимости посвящено много работ (см. Ф. Спицер [37], Т.М. Лиггетт [39], Е. Вэймер [40], Е.Д. Анджел [41], М.Я. Кельберт, М.Л. Концевич и А.Н. Рыбко [42]). Третья глава посвящена обобщению полученных этими авторами результатов на случай бесконечной транспортной сети. Кроме того, в ней показано, как можно применить метод среднего поля для получения устойчивости бесконечной транспортной сети в пределе метода среднего поля.

Более подробное изложение результатов, полученных в диссертации, требует некоторых определений. Как обычно, обозначим n-мерное вещественное пространство через $\mathbb{R}^n$. Для всякого $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ определим норму $\|\cdot\|$ по правилу $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, где $|\cdot|$ означает абсолютную величину числа. Под $\mathbb{R}^n_+$ понимается множество покоординатно неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^n$. Под $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ подразумевается тождественное отображение: $Ix = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Введём линейное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовём *марковским*, если транспонированная матрица этого отображения является стохастической или $A\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $(1, \ldots, 1)A = (1, \ldots, 1)$. Пусть $A = aB$ — отображение, пропорциональное марковскому отображению B с коэффициентом пропорциональности $a > 0$. Для такого отображения A определим *коэффициент эргодичности* $k(A)$ по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_i \|Ae_i\|,$$

$$\|A\|_L = \sup_{x\in L, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{i,j} \|A(e_i - e_j)\|/2,$$

где $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, а $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\|B\| = 1$, $k(B) = 1 - \|B\|_L$ и $k(A) = ak(B)$. Для стохастических матриц B^{T} коэффициент эргодичности ввёл Р.Л. Добрушин и его определение совпадает с нашим (см. [43, с.77, (1.12')] и [44, с.372, (3.22)]).

Первая глава диссертации посвящена исследованию конечномерных моделей. В разделе 1 исследуется автономная конечномерная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{$*$}$$

обладающая следующими свойствами

1) векторное поле $f(x)$ дифференцируемо по x и матрица Якоби

$$J(x) = \partial f/\partial x = (\partial f_i/\partial x_j)$$

непрерывно зависит от x. Эти условия обеспечивают при $t \geqslant 0$ существование и единственность решения $x(t, g)$ системы $(*)$ с начальным условием $x(0, g) = g$. Кроме того, $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по g.

2) Существует множество X, инвариантное относительно динамической системы $(*)$, и, кроме того, X — компактное выпуклое подмножество аффинного многообразия $L + c$ при некотором $c \in \mathbb{R}^n$.

3) Система $(*)$ обладает первым интегралом $\sum_{i=1}^n x_i$, т.е. $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 0$. Отсюда следует, что $J(x)L \subset L$ или, что то же самое, сумма строк матрицы $J(x)$ равна нулю. Кроме того, недиагональные элементы матрицы $J(x)$ неотрицательны при всех $x \in X$.

Заметим, что третье условие носит вероятностный характер и означает, что матрица $J(x)$ является матрицей интенсивностей переходов некоторого марковского процесса (см.книгу И.И. Гихмана и А.В. Скорохода [46], а также книгу Дж.Р. Норриса [45]).

(Здесь и далее, в изложении результатов диссертации используется независимая нумерация, но в скобках указывается ссылка на исходное утверждение из основного текста диссертации. Во избежание затемняющих суть дела технических подробностей иногда утверждения приводятся не в самой общей форме. Например, результаты о сжатии фазового потока приводятся лишь для автономных систем дифференциальных уравнений, хотя в основном тексте диссертации доказаны аналогичные утверждения в неавтономном случае).

Теорема 1 (Теорема 1.6). *Если выполнены условия 1)–3), то для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ при всяком $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|,$$

т.е. функция $x(t, \cdot) : X \to X$ не увеличивает расстояние между любыми двумя точками.

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(а) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

(б) B — пропорционально марковскому отображению и при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $k((I + B)^{n_0}) > 0$.

Требование (б) является существенным и предохраняет от различных вырождений.

Теорема 2 (Теорема 1.9). *В условиях 1)–3) и (а)–(б) при всяком $t > 0$ существует такое $q = q(t) < 1$, что для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ выполнено неравенство*

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant q\|g^1 - g^0\|,$$

т.е. отображение $x(t, \cdot)$: $X \to X$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $q = q(t) < 1$.

Дальнейшие обобщения этих теорем приведены в разделе 1 главы 1.

Рассмотренные нелинейные дифференциальные уравнения очень естественно появляются при применении метода среднего поля к некоторым сложным моделям теории массового обслуживания.

В разделе 2 главы 1 изучается сеть из N узлов и rN обслуживающих приборов (автомобилей). В каждый узел в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(t)$ поступают заявки (пассажиры). Пуассоновские потоки заявок в разные узлы независимы. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если заявка попадает в узел с приборами, то случайно и равновероятно выбирается один из приборов, который забирает заявку и перемещается экспоненциально распределённое время. Движение прибора моделируется с помощью введения дополнительного виртуального узла: когда прибор начинает перемещаться, он попадает в виртуальный узел, где находится экспоненциально распределённое время со средним значением 1, а затем перемещается в узел, равновероятно выбираемый из всех N узлов. Если число приборов в выбранном узле равно m, прибор ждёт следующей попытки в виртуальном узле экспоненциально распределённое время со средним 1 и т.д. Таким образом, в каждом узле (кроме виртуального) может находиться от 0 до m приборов.

Пусть n_k — число узлов, количество приборов в которых равно k, $f_k = n_k/N$ — доля этих узлов, W — количество приборов, находящихся в виртуальном узле, а $V = W/N$. В технических целях удобно перейти от f_k к накопленным долям $u_k = \sum_{i=k}^{m} f_i$.

Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Из наших предположений следует, что эволюция системы описывается некоторым марковским процессом $U_N(t)$, для которого можно выбрать пространство состояний X_N содержащее все такие вектора $u = (u_1, \ldots, u_m, V)^{\mathrm{T}}$ из $(1/N)\mathbb{Z}_+^{m+1}$, что выполнены неравенства

$$1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0,\ V \geqslant 0 \text{ и } V + u_1 + \ldots + u_m = r. \tag{$\star$}$$

Кроме того, из наших предположений следует, что производящий оператор $A_N(t)$ процесса $U_N(t)$, который действует на функции над X_N, задаётся следующим образом

$$\begin{aligned} A_t^N f(u) = N\lambda(t) \sum_{k=1}^{m-1} (u_k - u_{k+1})[f(u - e_k/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + N\lambda(t) u_m [f(u - e_m/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + NV \sum_{k=1}^{m} (u_{k-1} - u_k)[f(u + e_k/N - e_{m+1}/N) - f(u)], \end{aligned}$$

где e_i — вектор, i-тая координата которого равна 1, а остальные координаты равны 0. В силу конечности X_N оператор $A_N(t)$ определяет единственный марковский процесс $U_N(t)$.

Метод среднего поля подсказывает, что в пределе при $N \to \infty$ эволюция u становится детерминированной. Более точно: пусть X означает множество всех векторов $\mathbb{R}^{m+1}$, удовлетворяющих ($\star$). Тогда, если распределение начального состояния $U_N(0)$ сходится к вырожденной мере, сконцентрированной в точке $g \in X$, то распределение $U_N(t)$ сосредотачивается при больших N на траектории $u(t) \in X$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u, \lambda), \tag{$\star\star$}$$

где

$$f_i(u,\lambda) = \lambda(u_{i+1}-u_i) + V(u_{i-1}-u_i),\ i = 1,\ \ldots,\ m-1,\ u_0 = 1,$$
$$f_m(u,\lambda) = -\lambda u_m + V(u_{m-1}-u_m),$$
$$f_{m+1}(u,\lambda) = \lambda u_1 - V(1-u_m).$$

Система ($\star\star$) является нелинейной с квадратичной правой частью. Чтобы строго сформулировать утверждение о сходимости процесса $U_N(t)$ к решению $u(t,g)$ системы ($\star\star$) с начальным условием g, определим семейство производящих операторов $T_N = T_N(t)$ по правилу

$$T_N(t)f(g) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(0) = g),\ g \in X_N.$$

Теорема 3 (Теорема 2.2). *Для всех $f \in C(X)$, равномерно по t на произвольном отрезке из $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant 0\}$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \sup_{g\in X_N} |T_N(s)f(g) - f(u(s,g))| = 0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на классические результаты о сходимости марковских процессов, если сходятся их производящие операторы [47].

Обозначим через ε_g дискретную вероятностную меру, сосредоточенную в точке $g \in X$.

Теорема 4 (Теорема 2.3). *Если $U_N(0)$ по вероятности сходится к ε_g, то*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|U_N(s) - u(s,\tau,g)\| \to 0 \text{ по вероятности при всех } t \geqslant 0.$$

Обозначим через g^* точку $g^* = (u_1^*,\ldots,u_m^*,V^*)$, которая является стационарным решением системы ($\star\star$) т.е., $f(g^*,\lambda) = 0$. Тогда

$$u_k^* = u_k(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^k - \rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}}, & \rho \neq 1 \\ 1 - \dfrac{k}{m+1}, & \rho = 1, \end{cases}$$

при $k = 1,\ \ldots,\ m$, $V^* = V(\rho) = \lambda\rho$, где ρ единственным образом определяется из условия на первый интеграл:

$$V(\rho) + u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho) = r.$$

При обозначении $L(\rho) = u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho)$, с учётом $V = \lambda\rho$ последнее условие принимает вид

$$L(\rho) + \lambda\rho = r.$$

Если $\lambda(t)$ — постоянна, то процессы $U_N(t)$, образуют семейство однородных цепей Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний, каждая из которых в силу неприводимости обладает единственной инвариантной мерой μ_N.

Реализация изложенной в начале введения программы по поиску асимптотических характеристик систем позволяет доказать следующую теорему, существенно использующую теорему 2.

Теорема 5 (Теорема 2.4). *Инвариантные меры μ_N процессов U_N слабо сходятся к дискретной мере, сосредоточенной в g^*.*

Кроме того, в разделе 2 исследуется случай непостоянного $\lambda(t)$.

В разделе 3 показано, как теорему 2 можно применять для доказательства сходимости в модели Н.Д. Введенской, Р.Л. Добрушина и Ф.И. Карпелевича [48] с дополнительным ограничением на длину очереди.

Раздел 4 посвящён техническому результату, который позволяет изучать поведение предельной динамической системы строго «внутри» фазового пространства. Дело в том, что на границе фазового пространства свойства динамической системы могут нарушаться: например, может пропадать равномерное сжатие фазового потока.

В разделе 5 рассматривается задача, которая не поддаётся непосредственному применению теоремы 2, но после замены координат удаётся в некоторых показать сходимость частных случаях. У матрицы Якоби, приведённой в разделе 5 первой главы, имеется ровно один элемент, который может принимать отрицательные значения. Во многих современных задачах асимптотического анализа возникают системы дифференциальных уравнений с матрицами Якоби ещё более сложной структуры. Возможно, дальнейшее изучение системы раздела 5 позволит найти более общий подход к системам, в которых отсутствует монотонность.

Раздел 6 посвящён обобщению модели раздела 2 в сторону асимметричности. А именно, узлы разбиваются на несколько районов, в каждом из которых маршрутизация равновероятна. Оказывается, что и в этом случае можно найти неподвижную точку, к которой в силу аналога теоремы 5 и сходятся инвариантные меры конечных систем.

Заметим, что все модели, рассмотренные в разделах 2–6, а также освещённые в многочисленных работах [23, 48, 49, 50, 51, 52, 53] предполагают экспоненциальность распределения времён обслуживания.

В разделе 7 рассмотрена простейшая модель транспортной сети, аналогичная модели раздела 2 с тем усложнением, что время перемещения прибора от одного узла к другому распределено не показательно, а по т.н. гиперэрланговскому закону. Гиперэрланговским законом называют конечную смесь *эрланговских* распределений, а эрланговское распределение, в свою очередь, имеет плотность 0 при $x < 0$ и $\nu^l x^l e^{-\nu x}/(l-1)!$ при $x > 0$, где параметры удовлетворяют условиям $\nu > 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

Хорошо известно (см., книгу Н.П. Бусленко, В.В. Калашникова и И.Н. Коваленко [54, с.265–269], а также книгу С. Асмусена [55, с.71–78]), что конечная смесь эрланговских распределений сколь угодно точно в метрике пространства L^1 приближает любое заданное наперёд распределение с конечным средним.

Основной результат раздела 7 состоит в том, что при большом количестве компонент системы распределение приборов по узлам сети зависит лишь от математического ожидания гиперэрланговского распределения, а вид этого распределения такой же как для экспоненциального случая. То есть распределение числа приборов по узлам описывается теми же формулами, что и в разделе 2.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию существенно счётномерных систем. В разделе 1 изучается устойчивость некоторого специального класса счётных систем дифференциальных уравнений. Подход к исследованию устойчивости состоит в усовершенствовании подхода, изложенного в разделе 1 первой главы диссертации. Различие между конечномерным и счётномерным случаем у систем из рассматриваемого класса аналогично различию между конечными и счётными цепями Маркова. Условие на положительность коэффициента эргодичности некоторой степени матрицы Якоби соответствует условию Дёблина эргодичности цепи Маркова (об условии Дёблина см. [56]). Хорошо известно, что условие Дёблина весьма ограничительно, и, например, обычный процесс рождения и гибели с существенно счётным пространством состояний ему уже не удовлетворяет. Можно показать, что у всех бесконечных систем дифференциальных уравнений из [48, 57, 49, 50, 34] коэффициент эргодичности матрицы Якоби равен 0 (при этом можно воспользоваться приёмом из леммы 1.2). Поэтому вводится обобщение коэффициента эргодичности, которое называется коэффициентом эргодичности по направлению.

С использованием коэффициента эргодичности по направлению можно доказывать строгое уменьшение расстояния между образами любых двух начальных условий. Отметим, что в этом случае нельзя пользоваться принципом сжимающих отображений, поскольку коэффициент сжатия зависит от точки и может быть сколь угодно близок к 1. Поэтому мы используем специальные теоремы о неравномерном сжатии.

Следуя обозначениям и терминологии книги А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина [58] обозначим через l_1 пространство последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots)^{\mathrm{T}}$ с нормой $\|x\| = |x_0| + |x_1| + \ldots$ Мы полагаем x бесконечным столбцом, чтобы подчеркнуть аналогию с конечномерным случаем. Норма $\|\cdot\|$ индуцирует норму, а следовательно, и топологию на ограниченных линейных операторах A: $l_1 \to l_1$, $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$. Окрестность точки $g \in l_1$ обозначим через $U_\varepsilon(g) = \{x \in l_1 \mid \|g - x\| < \varepsilon\}$. Все векторные и матричные неравенства следует понимать как покомпонентные. Под I понимается тождественное преобразование: $Ix = x$ для всех $x \in l_1$.

Линейное отображение A: $l_1 \to l_1$ назовём *марковским*, если $Ah \geqslant 0$ при любом $h \geqslant 0$ и $(1, \ldots, 1, \ldots)A = (1, \ldots, 1, \ldots)$. Заметим, что отображение A — марковское, если его транспонированная бесконечная матрица является стохастической.

Введём линейное подпространство $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Рассмотрим отображение $A = aB$, где $a > 0$ и B — марковское отображение, $B : l_1 \to l_1$. Определим *коэффициент эргодичности* $k(A, g)$ *отображения* A*:* $l_1 \to l_1$ *по направлению* $g \in l_1 \setminus \{0\}$ по правилу $k(A, g) = \|A\|\|g\| - \|Ag\|$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x \in l_1, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_i \|Ae_i\|,$$

где e_k — вектор, каждая координата которого, кроме k-й равной 1, равна 0. Очевидно, $k(A, g) = ak(B, g)$.

Можно также определить *коэффициент эргодичности* отображения A по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Это определение аналогично определению пункта 1.1 первой главы. Очевидно,

$$k(A) = \inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A, g)}{\|g\|} = \|A\| - \sup_{g \in L \setminus 0} \frac{\|Ag\|}{\|g\|}$$

Очевидно, если $k(A) > 0$, то $k(A, g) > 0$ для всех $g \in L \setminus 0$. Обратное утверждение верно в конечномерном случае, но, вообще говоря, неверно в бесконечномерном случае. Действительно, в конечномерном случае (или в случае компактного оператора A)

$$\inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A, g)}{\|g\|} = \inf_{g \in L, \|g\|=1} k(A, g) = \inf_{g \in L, \|g\|=1} \|A\| - \|Ag\| = \inf_{g' \in L'} \|A\| - \|g'\|,$$

где $L' = \{g' \mid g' = Ag$ при некотором $g \in L, \|g\| = 1\}$. Множество L' компактно в силу компактности оператора A. Заметим $\|A\| - \|\cdot\|$ — непрерывная функция на L' и она принимает те же значения, что и $k(A, g)$ при $g \in L \setminus 0, \|g\| = 1$, а потому $\|A\| - \|g'\| > 0$ для всякого $g' \in L'$. Поэтому функция $\|A\| - \|\cdot\|$ достигает на L' минимума, и этот минимум, равный $k(A)$, строго больше нуля.

Рассмотрим теперь бесконечномерный случай. Назовём *размахом* ленточной матрицы ограниченного оператора A такое число d, что $a_{ij} = 0$, как только $|i - j| > d$.

Лемма 6 (Лемма 1.2)**.** *Пусть B — марковский оператор с размахом d, $a > 0$ и $A = aB$. Тогда при всех $t \geqslant 0$ имеем* $k(\exp(tA)) = 0$. *Однако, существуют марковские операторы с размахом* 1*, для которых при всех $t > 0$ и при всех $g \in L \setminus 0$ выполнено* $k(\exp(tA), g) > 0$.

Таким образом, можно надеяться лишь на строгое уменьшение расстояний между векторами, а так называемая «спектральная щель» в изучаемых системах, вообще говоря, отсутствует (по меньшей мере в той «естественной» системе координат, в которой они заданы).

Будем говорить, что семейство $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в множестве $U \subset X$, если для любого $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое α и $\tilde{x} \in F_\alpha$, что $\rho(\tilde{x}, x) < \varepsilon$. Автору не удалось найти никаких ссылок на следующую простую теорему, которая очень полезна в контексте исследуемых далее задач.

Теорема 7 (Теорема 1.7)**.** *Пусть отображение f строго уменьшает расстояния, т.е. для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$. Предположим, что существует семейство $\{F_\alpha\}$ компактных подмножеств X, удовлетворяющее условиям*

а) $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, удовлетворяющая уравнению $fx^* = x^*$, и для любого $x \in X$ выполнено $f^n x \to x^*$.

Иногда неподвижная точка известна и удобно пользоваться следующим признаком сходимости.

Теорема 8 (Теорема 1.8)**.** *Предположим, что X — банахово пространство, а x^* — неподвижная точка отображения f. Пусть отображение f строго уменьшает расстояния, т.е. для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$. Также предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$ для множества $\bar{U}_\varepsilon(x^*) = \{x \in X \mid \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon\}$ существует семейство $\{F_\alpha\}$ компактных подмножеств $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$, удовлетворяющее условиям*

а) семейство $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ при всех $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда неподвижная точка x^* единственна и для любого $x \in X$ при $n \to \infty$ выполнено $\rho(f^n x, x^*) \to 0$.

В счётномерном пространстве, вообще говоря, вопрос о существовании решений системы дифференциальных уравнений надо изучать специально. Пусть $x(t,\, g)$ — единственное решение системы уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ \ x \in l_1,\ \ f : l_1 \to l_1 \qquad (**)$$

с начальным условием $x(t_0,\, g) = g \in l_1$. Более того, пусть $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо зависит от начального условия, а производная $\Phi(t, g) = \partial x(t, g)/\partial g$ решения по начальному условию непрерывна по g и удовлетворяет *системе уравнений в вариациях*:

$$\dot{x} = f(x),\ \ \dot{\Phi} = J(x)\Phi,\ \ x(t_0, g) = g \in l_1,\ \ \Phi(t_0, g) = I : l_1 \to l_1, \qquad (***)$$

где $J(x) = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{\infty}$ — матрица оператора Якоби, а I — тождественный оператор.

Теорема 9 (Теорема 1.11). *Пусть функция $f(x)$ и её производная $J(x)$ при $x \in U_\eta(g)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $\|f(x)\| < M_0$, $\|J(x)\| < M_1$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, $\delta = \min(\eta/M_0, 1/M_1)$, что для всякого t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ дифференциальное уравнение $(**)$ имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям $x(t_0, g) = g$ и $x(t, g) \in U_\eta(g)$. При этом $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по начальному условию и его производная удовлетворяет уравнению $(***)$.*

Обозначим $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Во всех последующих результатах предполагается, что существует такое выпуклое множество $X \subset c + L$, $c \in l_1$, что $x(t, g) \in X$ при всех $g \in X$ при любом $t \geqslant 0$ и $\exp(tJ(g))$ — марковское отображение.

Теорема 10 (Теорема 1.13). *Для любых g^0, $g^1 \in X$ при всех $t \geqslant 0$: $\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|$*

Чтобы доказать сходимость любого решения к стационарному, необходимо проверять дополнительные условия.

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(а) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

(б) B — пропорционально марковскому отображению и для $t > 0$ коэффициент эргодичности $\exp(tB)$ по любому фиксированному направлению $g \in L \setminus \{0\}$ строго больше нуля: $k(\exp(tB), g) > 0$.

Теорема 11 (Теорема 1.15). *Если X выпукло, $X \subset c + L$, где $c \in l_1$, и выполнены условия* (а) *и* (б), *то для любого $\tau > 0$ и для любых g^0, $g^1 \in X$, $g^1 - g^0 \neq 0$: $\|x(\tau, g^1) - x(\tau, g^0)\| < \|g^1 - g^0\|$.*

Теорема 12 (Теорема 1.16). *Пусть выполнены условия теоремы* 11 *и существует семейство компактных множеств $\{F_\alpha\}$, удовлетворяющее условиям*

(а) семейство множеств $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X,

(б) для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$ выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при любом $t \geqslant 0$.

Тогда существует единственная неподвижная точка g^* и для любого $g \in X$ выполнено $x(t, g) \to g^*$ при $t \to \infty$.

В следующих разделах 2, 3 главы 2 приводятся примеры явного построения семейства F_α. Иногда можно выбрать $F_\alpha = F_g = \overline{\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}}$ и доказать, что для всякого g траектория $\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна.

Следующая теорема даёт достаточный признак предкомпактности траектории.

Теорема 13 (Теорема 1.18). *Если*

(i) *существует такая однородная эргодичная положительно возвратная цепь Маркова со счётным числом состояний* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *и непрерывным временем, с матрицей интенсивностей переходов* $Q = (q_{ij})$, *что* $\sum\limits_{l \geqslant k} J_{lj}(x(t, g)) \leqslant \sum\limits_{l \geqslant k} q_{ml}$ *при любых* $j \leqslant m$, $k \in \{0, \ldots, j\} \cup \{m+1, \ldots\}$, $t \geqslant 0$, $g \in X$;

(ii) *существует неподвижная точка* $g^* = x(t, g^*) \in X$,

то для любого $g \in X$ *траектория решения* $\{x(t, g) \mid t \geqslant 0\}$ *предкомпактна.*

Связь требования на неотрицательность недиагональных элементов матрицы $J(g)$ с поведением $x(t, g)$ раскрывается в следующей теореме.

Теорема 14 (Теорема 1.22)**.** *Пусть* $x(t, g) \in l_1$ *при любом* $t \geqslant 0$ *и* $g \in l_1$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *для всех* g *недиагональные элементы* $J(g)$ *неотрицательны;*

(ii) *для всех* g *для любого* $h \in l_1$, $h \geqslant 0$ $x(t, g + h) \geqslant x(t, g)$.

Эту теорему можно сформулировать для решений $x(t, \cdot)$, остающихся в некотором «толстом» множестве $X \subset l_1$. Однако технические условия, которые в этом случае надо наложить на X, затемнили бы существо дела, в то время как максимальной общности нам так и не удалось бы достичь. Доказательства всех описанных теорем проведены в разделе 1 второй главы настоящей диссертации.

В разделе 2 второй главы получено новое доказательство сходимости системы, которую изучали Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич в [48]. Они показали покоординатную сходимость, в то время как применение теорем 10–14 позволяет доказать сходимость по норме в пространстве l_1.

В разделе 3 изучается система дифференциальных уравнений для *замкнутой* системы с законом сохранения типа суммы компонент.

Пусть $r > 0$, $\lambda > 0$. Рассмотрим *уравнения среднего поля* для симметричной транспортной сети, которая получается при $m \to \infty$ из системы, рассмотренной в [27] и разделе 2 первой главы:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V} = \lambda u_1 - V, \\
&\dot{u}_1 = \lambda(u_2 - u_1) + V(1 - u_1), \\
&\dot{u}_2 = \lambda(u_3 - u_2) + V(u_1 - u_2), \\
&\dot{u}_3 = \lambda(u_4 - u_3) + V(u_2 - u_3), \\
&\ldots \\
&\dot{u}_k = \lambda(u_{k+1} - u_k) - V(u_{k-1} - u_k). \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Обозначим через $u(t,\, g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\, g) = g \in l_1$. Уравнение сокращённо будем обозначать $\dot{u} = f(u)$.

Для обоснования существования и единственности локального решения $u(t,\, g)$ воспользуемся теоремой 9. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \leqslant C$, $\|f(u)\| \leqslant 3(\lambda + C)(1 + \|u\|) \leqslant 3(\lambda + C)(1 + C)$. Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - u_1 & -\beta & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ u_1 - u_2 & V & -\beta & \lambda & 0 & \dots \\ u_2 - u_3 & 0 & V & -\beta & \lambda & \dots \\ u_3 - u_4 & 0 & 0 & V & -\beta & \dots \\ u_4 - u_5 & 0 & 0 & 0 & V & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\beta = \lambda + V$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \leqslant \max\bigl(2(\lambda + \|u\|), 2(1 + \|u\|)\bigr)$ при $\|u\| < C$. Условия теоремы 9 выполнены, и для $g \in l_1$ в некоторой окрестности $t_0 = 0$ существует решение $u(t, g)$.

Лемма 15 (Лемма 3.1)**.** *Множество*

$$U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant 0,\, V \geqslant 0,\, V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = r\}$$

является инвариантным множеством системы $\dot{u} = f(u)$ при $r > 0$.

При $\lambda > 0$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \geqslant 0$ и доказать его единственность в U. Действительно, приравнивая правые части $\dot{u} = f(u)$ к нулю, получаем $f(g^*) = 0$, откуда $u_1^* = V/\lambda = \rho$, $u_k = \rho^k$. Принимая во внимание, что $V + u_1 + \dots = r$, получаем уравнение на ρ:

$$\frac{\rho}{1 - \rho} = r - \lambda\rho,$$

которое имеет единственное решение ρ^* при $\rho > 0$. Таким образом, $g_0^* = \lambda\rho^*$, $g_k^* = (\rho^*)^k$.

Оказывается, можно построить такое семейство компактных инвариантных подмножеств, плотное в некотором шаре, что будут выполнены условия теоремы 8, откуда вытекает следующее утверждение.

Теорема 16 (Теорема 3.2)**.** *При $\lambda > 0$ для любого $g \in U$: $\|u(t, g) - g^*\| \to 0$ при $t \to \infty$.*

Раздел 4 посвящён краткому перечислению других счётномерных систем дифференциальных уравнений, к которым применим описанный метод.

В разделе 5 изучается неприводимая апериодическая цепь Маркова со счётным пространством состояний, непрерывным временем и ограниченными в совокупности интенсивностями переходов. В этом разделе устанавливается достаточный признак эргодичности цепи Маркова в терминах существования инвариантных подмножеств у описывающей её системы дифференциальных уравнений. Отметим, что задача об эргодичности таких цепей Маркова в терминах существования инвариантного распределения решена полностью, т.е. неприводимая апериодическая марковская цепь с ограниченными интенсивностями переходов эргодична тогда и только тогда, когда имеется единственное инвариантное распределение [4, Том I, раздел XV.7] (см. также [45, с.122, теорема 3.6.2]).

Очень часто найти само стационарное распределение в явном виде не представляется возможным и интересен сам вопрос об эргодичности цепи Маркова. Существует множество подходов для доказательства эргодичности цепей Маркова, среди которых следует выделить метод обновлений (см. книгу С. Асмусена [55]), метод склеивания (coupling'a), описанный в книге Т. Линдвала [59], и метод пробных функций (метод Фостера-Ляпунова), изложенный с современной точки зрения в книге В.А. Малышева, М.В. Меньшикова и Г. Файоля [56]. Эти подходы не апеллируют (по меньшей мере, явно) к дифференциальным уравнениям, которыми описываются цепи Маркова. В разделе 5 устанавливается некоторая новая теорема о сходимости в терминах системы дифференциальных уравнений, описывающей цепь Маркова.

Без ограничения общности будем считать, что пространство состояний эргодичной апериодической цепи Маркова состоит из целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Вероятности нахождения в момент t в состоянии p_i удовлетворяют прямой системе дифференциальных уравнений Колмогорова (см. [4, т.II])

$$\dot{x} = Q^{\mathrm{T}}x,\ x \in l_1\ x = (p_0, p_1, \ldots)^{\mathrm{T}},$$

где $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i\geqslant 0} p_i = 1$, а матрица Q задаёт интенсивности переходов.

Далее предполагается, что матрица Q^{T} задаёт ограниченный оператор в l_1, что эквивалентно условию $q = \sup_{i\geqslant 0}(-q_{ii}) < \infty$. Обозначим через $x(t,p)$ решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Q^{\mathrm{T}}x$. Через X обозначим множество

$$X = \{p \in l_1 \mid p_i \geqslant 0,\ \sum_{i\geqslant 0} p_i = 1\}.$$

Лемма 17 (Лемма 5.1)**.** *Пусть существует такое семейство компактных инвариантных подмножеств $\{F_\alpha\}$, что для всякого α выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, предположим, что при некотором $\zeta \geqslant q$ для всякого $g \in L\setminus 0$ выполнено $k(\exp{(Q + \zeta I)}, g) > 0$. Тогда существует единственная неподвижная точка $p^* \in X$, причём для всякого $p \in X$ имеется сходимость $x(t,p) \to p^*$ при $t \to \infty$.*

Таким образом, если есть хотя бы одно компактное инвариантное множество, то существует единственное инвариантное распределение p^*. Некоторое обратное утверждение изложено в следующей лемме.

Лемма 18 (Лемма 5.3)**.** *Предположим, что существует инвариантное распределение p^*. Тогда всякая траектория предкомпактна.*

В разделе 6 показано, каким образом можно применять лемму 17 к изучению эргодичности некоторой специальной транспортной сети, состоящей всего из двух узлов, но имеющей бесконечную очередь пассажиров.

Третья глава посвящена изучению транспортной сети с изначально счётным числом узлов. Оказывается, такая сеть является обобщением хорошо известного процесса с нулевой областью зависимости, введённого Ф. Спицером [37].

Здесь используется терминология, принятая для процессов с нулевой областью зависимости: под частицами подразумеваются приборы, а под ячейками — узлы. Так что, имеется конечное или счётное число частиц, которые находятся в счётном множестве узлов J. Переходы частиц, находящихся в узле $i \in J$, происходят после истечения случайного показательно распределённого времени τ_i с параметром γ_i. Если по прошествии этого времени узел i непуст, то одна и только одна из частиц, находящихся в ячейке, мгновенно перемещается в некоторый узел j, который выбирается с вероятностью p_{ij}. Все имеющиеся интервалы времени и переходы считаются независимыми в совокупности. Вероятности перехода из i в j составляют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j \in J}$, $\forall\, i \in J \sum\limits_{j \in J} p_{ij} = 1$. Этот процесс можно описать с помощью бесконечного вектора $\eta(t) = \{\eta_i(t)\}_{i \in J}$, $t \geq 0$, где $\eta_i(t)$ — это число частиц в узле i в момент t.

Заметим, что пространство состояний этого процесса континуально, и, вообще говоря, необходимо специально доказывать теорему о существовании и единственности самого процесса. Эта теорема обоснована в [60].

Существование феллеровского процесса $\eta(t)$ выводится из существования описывающей его марковской полугруппы $S(t)$ $((S(t)f)(\eta) = \mathbf{E}(f(\eta(t)) \mid \eta(0) = \eta))$ с помощью известных теорем теории марковских [46]. Построение же марковской полугруппы $S(t)$ можно провести с помощью техники, описанной в книге Т.М. Лиггетта [38].

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Тогда в пространстве состояний системы $W = \overline{\mathbb{Z}}_+^J$ можно ввести специальную метрику, в которой само пространство будет компактным. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, порождаемая цилиндрическими множествами, а $C(W)$ — банахово пространство всех действительно-значных функций на W с равномерной нормой.

Для всякой $f \in C(W)$ $\forall\, i \in J$ определим «меру зависимости от координаты i» по правилу

$$\Delta_f(i) = \sup\{\mid f(\eta) - f(\zeta) \mid : \eta, \zeta \in W,\, \eta_j = \zeta_j\ \forall\, j \neq i\}\,.$$

Введём плотное в $C(W)$ множество $D(W) = \left\{ f \in C(W) : |||\, f \,||| \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i \in J} \Delta_f(i) < \infty \right\}$. Определим следующий оператор на $D(W)$:

$$A\, f(\eta) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \left[I\{\eta_i > 0\} \gamma_i p_{ij} \left(f(\ldots \eta_i - 1 \ldots \eta_j + 1 \ldots) - f(\eta) \right) \right].$$

Теорема 19 (Теорема 1.1, [60])**.** *Если*

$$\sup_{i \in J} \gamma_i < \infty, \ \ \sup_{i \in J} \sum_{j \in J} \gamma_j p_{ji} < \infty, \tag{$\times$}$$

то

(1) *Замыкание $\overline{A}$ оператора A является инфинитезимальным оператором марковской полугруппы $S(t)$ и подпространство $D(W)$ является существенным подпространством для $\overline{A}$.*

(2) *Существует единственный феллеровский процесс $\eta(t) : (\Omega, \Im, \mathbf{P}) \to (W, \mathcal{B})$ с заданным инфинитезимальным оператором A; $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ — некоторое вероятностное пространство.*

Следствие 20 (Следствие 1.2)**.** *Если выполнено одно из утверждений:*

- $\sup\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$, $\sup\limits_{i \in J} \sum\limits_{j \in J} p_{ji} < \infty$
- $\sum\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$,

утверждения (1)–(2) теоремы 19 *верны.*

Далее всюду предполагается, что условие $(\times)$ выполнено.

Предположим, что однородная марковская цепь с пространством состояний J и переходной матрицей P является апериодичной и неприводимой. Введём

Предположение А: Существует положительная инвариантная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P (необязательно конечная, см. [4, раздел XV.11]).

Предположение Б: Существует единственная инвариантная вероятностная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P (которая называется *стационарной*).

Предположение В: Счётная цепь Маркова с переходной матрицей P является транзиентной.

Обозначим

$$a \stackrel{def}{=} \sup_{i \in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \tag{$\times\times$}$$

Пусть $\rho_{\max} = 1/a$. Для любого $\rho \in [0; \rho_{\max}]$ и $\rho = \infty$ введём меру-произведение $L_\rho(\cdot)$ на $(W, \mathcal{B})$ с координатными множителями $l^i_\rho(\cdot)$, $i \in J$, определяемыми по-разному в следующих двух случаях:

если $\rho \in [0; \rho_{\max}]$ и $\rho(\pi_i/\gamma_i) < 1$, то

$$l_\rho^i(k) = \begin{cases} (1-\rho(\pi_i/\gamma_i))\,(\rho(\pi_i/\gamma_i))^k\,, \ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, \ k = \infty \end{cases}$$

если же $\rho = \rho_{\max}$, $\rho(\pi_i/\gamma_i) = 1$ либо просто $\rho = \infty$, то

$$l_\rho^i(k) = \begin{cases} 0, \ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 1, \ k = \infty. \end{cases}$$

Введём $\mathbf{L} = \{L_\rho(\cdot): \ \rho \in [0; \rho_{\max}], \ \rho = \infty\}$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{L}}$ выпуклую оболочку $\mathbf{L}$:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \bigcap_{K\text{–замкнутое выпуклое множество, } K \supseteq \mathbf{L}} K.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех инвариантных мер марковского процесса $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Следующие три утверждения доказываются с помощью слегка изменённых доводов доказательств утверждений 2.14, 3.1, 2.15, 2.16 из [40]; отличие состоит в том, что надо там брать меру $\left\{\frac{\pi_i}{\gamma_i}\right\}_{i\in J}$ вместо $\bar{a} = (\bar{a}(x) : x \in J)$ (используя обозначения [40]).

Теорема 21 (Теорема 1.4)**.** *Предположим, что выполнены предположение A и условие ($\times\times$). Тогда замкнутая выпуклая оболочка $\tilde{\mathbf{L}}$ множества мер*

$$\{L_\rho(\cdot): \ \rho \in [0; \rho_{\max}], \ \rho = \infty\}$$

включена в класс $\mathcal{M}$ всех инвариантных мер марковского процесса $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Пусть

$$\sum_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \qquad (\times\times\times)$$

Утверждение 22 (Утверждение 1.5)**.** *Предположим, что выполнены предположение A и условие ($\times\times\times$). Тогда $\forall\ \rho \in [0; \rho_{\max}]$*

$$L_\rho\left(\eta : \sum_{i\in J} \eta_i < \infty\right) = 1.$$

Теорема 23 (Теорема 1.6)**.** *Пусть выполнены предположение A и условие ($\times\times\times$). Предположим, что для узла $j_0 \in J$ выполнено условие $\pi_{j_0}/\gamma_{j_0} = \max\limits_{i\in J} \pi_i/\gamma_i$. Тогда $\forall\ k \in \mathbb{Z}_+ \ \ \forall \eta^0 : \sum\limits_{i\in J} \eta_i^0 = \infty$*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\eta_{j_0}(t) > k \mid \eta(0) = \eta^0\right\} = 1.$$

Теорема 24 (Теорема 1.9)**.** *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\gamma < \infty$ *и предположение B;*

(2) $\gamma < \infty$ *и* $\forall j \in J \sum\limits_{i \in J} p_{ij} \leqslant 1$*;*

(3) $\forall j \in J \sum\limits_{i \in J} p_{ij} \leqslant 1$ *и существует такая неубывающая последовательность конечных множеств* $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$, $\bigcup\limits_n J_n = J$, *что* $\sup\limits_{j \in J \setminus J_n} \gamma_j \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$, *а матрицы* $P^{(n)} = (p_{ij})_{i,j \in J_n}$ *неприводимы;*

(4) *Пусть* $\forall j \in J \sum\limits_{i \in J} p_{ij} \leqslant 1$. *Введем обрывающуюся цепь Маркова* $Y = \{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ *с пространством состояний* J *и переходной матрицей* $P^T = (p_{ji})_{i,j \in J}$. *Обозначим через* $\bar{P}_j(J)$ *вероятность того, что* Y *оборвется при выходе из начального состояния* $Y_0 = j$. *Предположим, что* $\bar{P}_j(J) = 1$ *для всех* $j \in J$ *и* $\sup\limits_{j \in J} \gamma_j < \infty$.

Тогда для любого $\eta(0) \in \mathbb{Z}_+^J$ *процесс* $\eta(t) \to 0$ *слабо при* $t \to \infty$.

Наконец, в разделе 2 предложен подход к изучению поведения процесса с нулевой областью зависимости с использованием методов, разработанных во второй главе.

Глава 1
Закон больших чисел для конечномерных сетей систем массового обслуживания

В настоящее время приобрели особую актуальность исследования сетей систем массового обслуживания [31]. С практической точки зрения представляют интерес стационарные распределения этих систем, через которые выражаются все их операционные характеристики. Однако, во многих интересных случаях уже при небольшом числе систем в сети стационарное распределение приобретает довольно громоздкий вид, либо вообще не вычисляется в явном виде. В связи с этим, исследователи сосредоточились на получении асимптотических формул для стационарного распределения при большом количестве систем обслуживания (см. работы Н.Д. Введенской, Р.Л. Добрушина, Ф.И. Карпелевича, Д.Б. Мартина, Ю.М. Сухова, В.В. Щербакова, М. Миценмахера, А.Н. Рыбко, Ф. Делкойна, Г. Файоля [48, 57, 49, 51, 50, 52, 23, 27, 28, 29, 61, 25, 26, 34, 32]).

В этих работах используется следующий подход. Во-первых, выбирается такой способ описания состояния сети систем массового обслуживания, что при неограниченном росте компонент сети её эволюция становится детерминированной и описывается некоторой системой нелинейных дифференциальных уравнений. Следующим шагом является исследование свойств этой системы дифференциальных уравнений, которые обычно оказываются очень хорошими: в классе допустимых начальных условий имеется не более одной неподвижной точки, а если она действительно существует, то все решения с допустимыми начальными условиями к ней и притягиваются. Далее устанавливается относительная компактность семейства стационарных распределений сетей из конечного числа компонент. После этого с использованием критерия относительной компактности Прохорова можно доказать, что для этой последовательности стационарных распределений имеется ровно один предел — вырожденное распределение, сосредоточенное в неподвижной точке системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Первый шаг в описанном подходе осуществляется с использованием хорошо известных теорем о сходимости марковских процессов (см. [47]). Относительная компактность семейства распределений очевидна, если пространство состояний сети систем массового обслуживания компактно. В случае некомпактного пространства состояний обычно удаётся подобрать систему массового обслуживания, которая стохастически мажорирует исследуемую сеть и извлечь из этого факта необходимую компактность (см. работы Н.Д. Введенской, Р.Л. Добрушина, Ф.И. Карпелевича, Ю.М. Сухова, Д.Б. Мартина [48, 57, 49, 50]). Мы сосредоточимся на проблемах, возникающих при исследовании предельной системы нелинейных дифференциальных уравнений. Ранее в работах применялся классический подход для доказательства сходимости к неподвижной точке: либо использовалась покоординатная монотонность по начальным данным (см. [48, 57, 49, 50]), либо в явном виде строилась функция Ляпунова(см. [51, 52]). Предметом первых двух глав данной диссертации является исследование и применение другого подхода, основанного на доказательстве того факта, что фазовый поток системы дифференциальный уравнения является сжимающим. Вероятностная природа исследуемых систем очень существенная для доказательства сжатия. В частности, вводятся и используются два обобщения коэффициента эргодичности Р.Л. Добрушина. Будет также показано, что все системы, для которых удалось получить доказательство сходимости с использованием покоординатной монотонности [48, 57, 50] или с помощью построения функций Ляпунова [51, 52], попадают в один класс систем дифференциальных уравнений, который будет описан в следующем разделе и который обладает тем замечательным свойством, что его фазовый поток является сжимающим.

1. Устойчивость одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений

Этот раздел посвящён исследованию одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений, полное описание которого будет дано в пунктах 1.2 и 1.3. В исследованиях систем этого класса оказывается полезным обобщение коэффициента эргодичности Р.Л. Добрушина, введённого им в 60-х годах для доказательства центральной предельной теоремы для конечных цепей Маркова [43, 44]. Поэтому мы начинаем с изложения некоторых необходимых нам свойств коэффициента эргодичности.

Как обычно, обозначим n-мерное вещественное пространство через $\mathbb{R}^n$. Для всякого $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ мы определяем норму $\|\cdot\|$ по правилу $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Под $\mathbb{R}^n_+$ понимается множество покоординатно неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^n$. Под $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ подразумевается тождественное отображение: $Ix = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

1.1. **Коэффициент эргодичности и его свойства.** Введём линейное подпространство $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Линейное отображение A: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовём *марковским*, если транспонированная матрица этого отображения является стохастической или $A\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$, $(1, \ldots, 1)A = (1, \ldots, 1)$. Пусть $A = aB$ — отображение, пропорциональное марковскому отображению B с коэффициентом пропорциональности $a > 0$. Для такого отображения A определим *коэффициент эргодичности* $k(A)$ по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_i \|Ae_i\|,$$

$$\|A\|_L = \sup_{x \in L, \|x\|=1} \|Ax\| = \max_{i,j} \|A(e_i - e_j)\|/2, \tag{1.1}$$

где $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, а $\{e_k\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что $\|B\| = 1$, $k(B) = 1 - \|B\|_L$ и $k(A) = ak(B)$. Для стохастических матриц B^{T} коэффициент эргодичности ввёл Р.Л. Добрушин и его определение совпадает с нашим (см. [43, с.77, (1.12')] и [44, с.372, (3.22)]). Преимущество определения коэффициента эргодичности для матриц, пропорциональных марковским, а не только для стохастических, состоит в том, что оно обладает важным свойством монотонности, доказанным в лемме 1.2.

Линейное отображение A *неотрицательно* (*положительно*), если $A\mathbb{R}^n_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ($A\mathbb{R}^n_+ \subset \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$). Это определение неотрицательности (положительности) отображения A эквивалентно определению через неотрицательность (положительности) коэффициентов матрицы отображения A. Если $A - B$ неотрицательно, мы пишем $A \geqslant B$, (если $A - B$ положительно, $A > B$).

В дальнейшем нам потребуются следующие две леммы относительно неотрицательных матриц.

Лемма 1.1. *Пусть $A \geqslant B \geqslant 0$ и $C \geqslant D \geqslant 0$. Тогда $AC \geqslant BD \geqslant 0$.*

Для доказательства достаточно сложить неравенства $(A-B)C \geqslant 0$ и $B(C-D) \geqslant 0$. По индукции из этой леммы получаем, что если $A_1 \geqslant B \geqslant 0$, …, $A_n \geqslant B \geqslant 0$, то $A_n \ldots A_1 \geqslant B^n$.

Лемма 1.2. *Пусть $A = aC$ и $B = bD$, где C и D — марковские отображения и a, $b > 0$. Если $A > B \geqslant 0$, то $k(A) > k(B)$. Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то $k(A) \geqslant k(B)$*

Доказательство. Пусть $\|A\| = a$, $\|B\| = b$. Ввиду неравенства треугольника $\|A\|_L \leqslant \|A - B\|_L + \|B\|_L$. Если $A - B > 0$, то, ввиду (1.1), $\|A - B\|_L < \|A - B\|$. Поскольку $\|(A-B)e_i\| = a-b$, то $\|A-B\| = \|A\|-\|B\|$. Следовательно, $\|A\|_L < \|A\|-\|B\|+\|B\|_L$ или $\|B\| - \|B\|_L < \|A\| - \|A\|_L$, что и требовалось. Случай $A \geqslant B$ рассматривается аналогично. □

Назовём матрицу $A = (a_{ij})$ *слабо неприводимой*, если для любых двух её столбцов i и j существует такая строка l, что $a_{li} \neq 0$ и $a_{lj} \neq 0$.

В теории матриц и теории цепей Маркова используется определение *неприводимой* (неразложимой) матрицы A. Напомним определение, приведённое, например, в книге , что матрица оператора $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ называется *неприводимой*, если она не является приводимой.

Матрица A является *приводимой* если выполнено одно из следующих условий:

(1) $d = 1$ и $A = 0$,

(2) $d \geqslant 2$ и существует такая матрица перестановки P и такое целое число $1 \leqslant r \leqslant d - 1$, что

$$P^{\mathrm{T}} A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где $B : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$, $D : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^{n-r}$, $C : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r$, а $0 : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{n-r}$ — нулевая матрица.

Подробное обсуждение свойств неприводимых матриц приведено в книге Р.А. Хорна и Ч.Р. Джонсона [62] (в частности, приведённое выше определение взято из раздела 6.2.22 книги [62]).

Классы неприводимых $\mathcal{I}$ и слабо неприводимых $\mathcal{W}$ матриц пересекаются, причём обе разности $\mathcal{I} \setminus \mathcal{W}$ и $\mathcal{W} \setminus \mathcal{I}$ не пусты. Например, матрица, отвечающая циклическому сдвигу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является слабо неприводимой. А матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

является приводимой (поскольку имеется угол из нуля), но является одновременно слабо неприводимой, поскольку в первой строке все элементы больше нуля. В заключение отметим, что пересечение $\mathcal{W} \cap \mathcal{I}$ содержит, например, все положительные матрицы.

Лемма 1.3. *Если матрица A пропорциональна марковской, то она слабо неприводима тогда и только тогда, когда выполнено $k(A) > 0$.*

Доказательство. Пусть A — слабо неприводима. Тогда по определению для любых i, j существует такое l, что a_{li}, $a_{lj} > 0$. Отсюда

$$\|A\frac{(e_i - e_j)}{2}\| = \sum_k \frac{|a_{ki} - a_{kj}|}{2} \leqslant \sum_{k \neq l} \frac{a_{ki} + a_{kj}}{2} + \frac{|a_{li} - a_{lj}|}{2} = (*)$$

Если $|a_{li} - a_{lj}| < a_{li} + a_{lj}$, то мы получаем

$$(*) < \sum_k \frac{a_{ki} + a_{kj}}{2} = \|A\|.$$

Следовательно, при всех i, j верно строгое неравенство

$$\|A\frac{(e_i - e_j)}{2}\| < \|A\|,$$

откуда с использованием (1.1) получаем $k(A) > 0$.

Предположим теперь обратное, т.е., предположим, что существуют такие i, j, что при всяком фиксированном l либо $a_{li} = 0$, либо $a_{lj} = 0$. Но тогда

$$\|A\frac{(e_i - e_j)}{2}\| = \sum_k \frac{|a_{ki} - a_{kj}|}{2} = \sum_k \frac{a_{ki} + a_{kj}}{2} = \|A\|,$$

откуда получаем $k(A) = 0$. □

Далее нам потребуется следующее утверждение.

Утверждение 1.4. *Предположим, что матрица B — пропорциональна марковской. Тогда неравенство $k(\exp(tB)) > 0$ верно при некотором $t > 0$ тогда и только тогда, когда при некотором n_0 верно неравенство $k((I + B)^{n_0}) > 0$.*

Доказательству предпошлём следующую простую лемму.

Лемма 1.5. *Для любой матрицы $A \geqslant 0$ и любого $\theta \geqslant 0$ верно неравенство*

$$\exp(\theta A) \geqslant e^{-\theta} \frac{\theta^{n_0}}{(n_0)!} (I + A)^{n_0}$$

Доказательство. Из условий леммы вытекает

$$\begin{aligned} \exp(\theta A) &= e^{-\theta} \Big(\exp(\theta(I + A)) \Big) = \\ &= e^{-\theta} \left(\frac{I}{0!} + \frac{\theta(I + A)}{1!} + \ldots + \frac{\theta^{n_0}(I + A)^{n_0}}{(n_0)!} + \ldots \right) \geqslant \\ &\geqslant e^{-\theta} \frac{\theta^{n_0}}{(n_0)!} (I + A)^{n_0}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Доказательство утверждения 1.4. Из лемм 1.5 и 1.2 следует, что

$$k(\exp(tB)) \geqslant e^{-t}\frac{t^{n_0}}{(n_0)!}k((I+A)^{n_0}),$$

и значит условие $k((I+A)^{n_0})0$ влечёт, что $k(\exp(tB)) > 0$ при всех $t > 0$.

Заметим, что из леммы 1.3 и из формулы $\exp(tB) = I + tB + t^2B^2/2! + \ldots$ следует, что если $k(\exp(tB)) > 0$ при некотором $t > 0$, то $k(\exp(tB)) > 0$ при всех $t > 0$, поскольку при любых $t, s > 0$ положительные и нулевые коэффициенты стоят в матрицах $\exp(tB)$ и $\exp(sB)$ на одних и тех же местах.

Теперь обозначим через $n(i,j)$ такое наименьшее $n \geqslant 1$, что у матрицы B^n коэффициент в строке i и столбце j строго больше нуля. По определению положим $n(i,i) = 0$. Если для всякой степени B^n коэффициент в строке i и столбце $j \neq i$ равен нулю, то мы полагаем $n(i,j) = \infty$. Очевидно, в матрице $C = \exp(tB) = (c_{ij})$, элемент c_{ij} будет нулевым.

Положим $N = \max n(i,j) < \infty$. Очевидно, если $k(\exp(tB)) > 0$, то

$$k(I + \sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{t^kB^k}{k!}) > 0,$$

поскольку все ненулевые коэффициенты стоят в матрицах $\exp(tB)$ и

$$I + \sum_{1\leqslant k\leqslant N} t^kB^k/k!$$

на одних и тех же местах. Следовательно, мы можем взять $n_0 = N$. Тогда

$$(I+B)^N \geqslant I + \sum_{1\leqslant k\leqslant N} B^k \geqslant I + \sum_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{B^k}{k!} = C.$$

В силу леммы 1.2 получаем $k((I+B)^N) \geqslant k(C)$, а $k(C) > 0$, поскольку $k(\exp(B)) > 0$. □

1.2. **Равномерное сжатие для автономных систем дифференциальных уравнений.** Здесь исследуется автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

обладающая следующими свойствами

1) векторное поле $f(x)$ дифференцируемо по x и матрица Якоби

$$J(x) = \partial f/\partial x = (\partial f_i/\partial x_j)$$

непрерывно зависит от x. Эти условия обеспечивают при $t \geqslant 0$ существование и единственность решения $x(t,\ g)$ системы (1.2) с начальным условием $x(0,\ g) = g$. Кроме того, $x(t,g)$ непрерывно дифференцируемо по g.

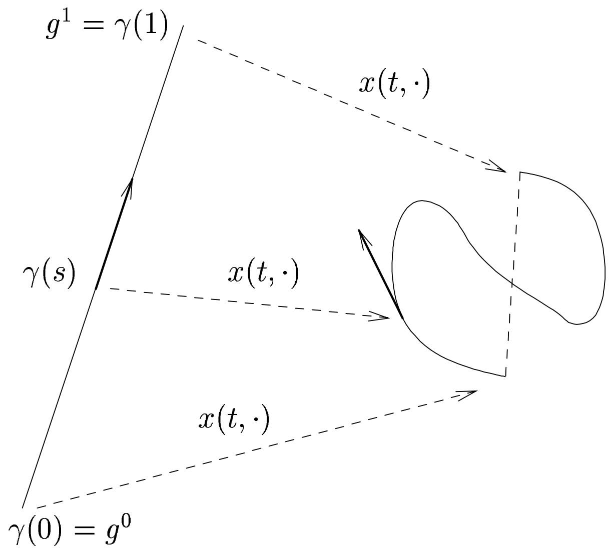

Рис. 1. К доказательству теоремы 1.6

2) Существует множество X, инвариантное относительно динамической системы (1.2) и, кроме того, X — компактное выпуклое подмножество аффинного многообразия $L + c$ при некотором $c \in \mathbb{R}^n$.

3) Система (1.2) обладает первым интегралом $\sum_{i=1}^{n} x_i$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0$. Отсюда следует, что $J(x)L \subset L$ или, что то же самое, сумма строк матрицы $J(x)$ равна нулю. Кроме того, недиагональные коэффициенты матрицы $J(x)$ неотрицательны при всех $x \in X$.

Как будет видно из следующих разделов, системы, удовлетворяющие таким условиям возникают из практических задач теории сетей массового обслуживания. Мы покажем, что такого небольшого и легко проверяемого набора условий достаточно для описания поведения решений системы дифференциальных уравнений. Во-первых, в теореме 1.6 мы показываем, что фазовый поток не увеличивает расстояния между любыми двумя начальными условиями. Далее, в теореме 1.9 будет доказано, что при некоторых дополнительных условиях технического характера фазовый поток является сжимающим.

Теорема 1.6. *Если выполнены свойства 1)–3), то для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ при всяком $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|x(t, g^1) - x(t, g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|,$$

т.е. функция $x(t, \cdot) : X \to X$ не увеличивает расстояние между образами любых двух точек.

Докажем вспомогательные леммы, приводящие к этому результату.

В классической теории дифференциальных уравнений важную роль имеет производная решения $x(t,g)$ по начальному условию, которая является линейным оператором в касательном пространстве [63]. Мы обозначим эту производную через $\Phi(t,g) = \partial x(t,g)/\partial g$. Хорошо известно [63], что линейный оператор Φ удовлетворяет *уравнению в вариациях*

$$\dot{\Phi} = J(x(t,g))\Phi, \;\; x(0,g) = g \in \mathbb{R}^n, \;\; \Phi(0,g) = I, \tag{1.3}$$

Лемма 1.7 (Формула Ньютона-Лейбница). *Для любых g^0, $g^1 \in X$ справедлива следующая формула:*

$$x(t,g^1) - x(t,g^0) = \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)ds, \tag{1.4}$$

где $\gamma(s) = (1-s)g^0 + sg^1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Доказательство. Отображение $x(t,\cdot)$ переводит отрезок $\gamma(s)$ в кривую $x(t,\gamma(s))$. В силу непрерывной дифференцируемости $x(t,g)$ справедлива формула

$$x(t,\gamma(\tau)) = x(t,g^0) + \int_0^\tau \frac{\partial x(t,\gamma(s))}{\partial s}ds.$$

По формуле сложной производной

$$\frac{\partial x(t,\gamma(s))}{\partial s} = \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial g}(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Вспоминая, что $\partial x(t,\cdot)/\partial g = \Phi(t,\cdot)$ и $\gamma'(s) = g^1 - g^0$, при $\tau = 1$ получаем (1.4). □

Лемма 1.8. *В условиях 1)–3) при всех $t \geqslant 0$ и при всех $g \in X$ матрица $\Phi(t,g)$ покомпонентно неотрицательна и $(1,\ldots,1)\Phi(t,g) = (1,\ldots,1)$.*

Доказательство. Действительно, сумма строк $\Phi(t,g)$ остаётся постоянной, поскольку сумма строк $J(x)$ равна нулю при всех $x \in X$. Поскольку для $\Phi(0,g) = I$ сумма строк равна $(1,\ldots,1)$, имеем $(1,\ldots,1)\Phi(t,g) = (1,\ldots,1)$ при всех $t \geqslant 0$. Из компактности X и непрерывности $J_{ii}(x)$ следует, что существует

$$\alpha = \min_{i=1,\ldots,n} \min_{x \in X} J_{ii}(x).$$

Рассмотрим функцию $\Psi(t,g) = e^{\alpha t}\Phi(t,g)$. Поскольку $\Phi(t,g) = e^{-\alpha t}\Psi(t)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -\alpha(e^{-\alpha t}\Psi) + e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.3), получаем

$$-\alpha(e^{-\alpha t}\Psi) + e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}\Psi = J(x(t,g))e^{-\alpha t}\Psi,$$

откуда

$$\dot{\Psi} = (J(x(t,g)) + \alpha I)\Psi, \; \Psi(0,g) = I \tag{1.5}$$

Поскольку $(J(x(t,g)) + \alpha I) \geqslant 0$, то $\Psi(t,g) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, и при всех $g \in X$. Следовательно, $\Phi(t,g) = e^{-\alpha t}\Psi(t,g) \geqslant 0$. Поэтому $\Phi(t,g)$ — марковское отображение и его норма действительно равна 1. $\square$

Доказательство теоремы 1.6. В силу леммы 1.7

$$\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| = \left\| \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)ds \right\| = (*).$$

Поскольку норма интеграла от функции оценивается сверху интегралом от нормы функции, имеем

$$(*) \leqslant \int_0^1 \|\Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)\| ds = (**)$$

Последнее неравенство иллюстрирует рисунок 1. С геометрической точки зрения расстояние между $x(t,g^0)$ и $x(t,g^1)$ оценивается сверху через длину кривой $x(t,\gamma(s))$, а длина этой кривой оценивается через интеграл от длины касательного вектора $\gamma'(s)$.

Заметим, что при любых $t \geqslant 0$, $g \in X$ в силу леммы 1.8 выполнено $\|\Phi(t,g)\| = 1$. Следовательно,

$$(**) \leqslant \int_0^1 \|\Phi(t,\gamma(s))\| \|g^1 - g^0\| ds = \|g^1 - g^0\|,$$

что и требовалось. $\square$

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(а) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

(б) B — пропорционально марковскому отображению и при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено $k((I+B)^{n_0}) > 0$.

Требование на положительность коэффициента эргодичности матрицы (б) является существенным и предохраняет от различных вырождений.

Теорема 1.9. *В условиях 1)–3) и (а)–(б) при всяком $t > 0$ существует такое $q = q(t) < 1$, что для любых начальных условий g^0, $g^1 \in X$ выполнено неравенство*

$$\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| \leqslant q\|g^1 - g^0\|,$$

т.е. отображение $x(t,\cdot)\colon X \to X$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $q = q(t) < 1$.

Доказательство. Пусть $\Phi(t,g) = \partial x(t,\, g)/\partial g$ — матрица Якоби отображения $x(t,\,\cdot)\colon X \to X$. Тогда в силу леммы 1.8 матрица Φ — марковская. Рассмотрим уравнение в вариациях (1.3) на $\Phi(t,g) = \partial x(t,\, g)/\partial g$. Введём матрицу $\Psi(t,g) = e^{\zeta t}\Phi(t,g)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Psi} = (J(x(t,g)) + \zeta I)\Psi,\ \Psi(0,g) = I.$$

Это уравнение аналогично уравнению (1.5). Используя неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$ с помощью лемм 1.1 и 1.5 можно получить следующие оценки:

$$\Psi(t,g) \geqslant \exp(tB) \geqslant \frac{t^{n_0}e^{-t}}{(n_0)!}(I+B)^{n_0}.$$

Принимая во внимание лемму 1.2, получаем

$$k(\Psi(t,g)) \geqslant \frac{t^{n_0}e^{-t}}{(n_0)!}k((I+B)^{n_0}) > 0.$$

Поскольку

$$k(\Phi) = k(\Psi)e^{-\zeta t},$$

обнаруживаем, что $k(\Phi) > 0$, или $\|\Phi\| - \|\Phi\|_L > 0$. Поскольку $\|\Phi\| = 1$, имеем $\|\Phi\|_L = 1 - k(\Phi)$ и $\sup_{g\in X} ||\Phi(t,g)||_L \leqslant q(t) < 1$, где

$$q(t) = 1 - e^{-\zeta t}\frac{t^{n_0}e^{-t}}{(n_0)!}k((I+B)^{n_0}) < 1.$$

Действительно, из изложенного выше вытекает, что

$$1 - k(\Phi) = 1 - k(\Psi)e^{-\zeta t} \leqslant q(t).$$

Наконец, положим

$$\gamma(s) = (1-s)g^0 + sg^1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ g^0,\ g^1 \in X.$$

Замечая, что $\gamma'(s) = g^1 - g^0 \in L$, получаем

$$\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| \leqslant \int_0^1 \|\Phi\big(t,\gamma(s)\big)\gamma'(s)\| \leqslant \int_0^1 \|\Phi\big(t,\gamma(s)\big)\|_L \|\gamma'(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{g\in X}\|\Phi(t,g)\|_L \int_0^1 \|\gamma'(s)\| ds = q(t)\|g_2 - g_1\|,$$

что и доказывает теорему. $\square$

1.3. **Равномерное сжатие для неавтономных систем.** Обобщим результаты предыдущего пункта на неоднородную во времени систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t),\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

удовлетворяющую следующим условиям

1) Векторное поле $f(x,t)$ и матрица Якоби

$$J(x,t) = \partial f/\partial x = (\partial f_i/\partial x_j)$$

непрерывны по своим аргументам, и, кроме того, векторное поле $f(x,t)$ дифференцируемо по x. Эти условия обеспечивают локальное существование и единственность решения $x(t,\, t_0,\, g)$ системы (1.6) с $x(t_0,\, t_0,\, g) = g$.

2) Имеется множество X, которое является выпуклым подмножеством аффинного многообразия $L{+}c$, $c \in \mathbb{R}^n$, и, кроме того, X инвариантно относительно динамической системы (1.6). Допустим, что для всех $g \in X$ решение $x(\tau, t_0, g)$ существует при всех $\tau \geqslant t_0$, удовлетворяющих неравенству $\tau \leqslant t$.

Предположим также, что существует неотрицательная матрица $B \geqslant 0$ и интегрируемая при $\tau \in [t_0, t]$ функция $\zeta(\tau, t_0, g) \geqslant 0$ удовлетворяющие следующим условиям

(а) $J(x(\tau, t_0, g), t) + \zeta(\tau, t_0, g)I \geqslant B$ при всех $g \in X$ и при всех $\tau \in [t_0, t]$.

(б) матрица B — марковская и при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $k((I+B)^{n_0}) > 0$.

Далее условия 1)–2) и (а)–(б) считаются выполненными.

Заметим только, что из условия (а) следует неотрицательность недиагональных элементов матрицы Якоби.

Пусть $\Phi(\tau,\, t_0,\, g) = \partial x(\tau,\, t_0,\, g)/\partial g$ — матрица Якоби отображения $x(\tau,\, t_0,\, \cdot)\colon X \to X$ при $\tau \in [t_0, t]$.

Теорема 1.10. *В указанных условиях на функцию ζ и матрицу B верна следующая оценка*

$$\|\Phi(t, t_0, g)\|_L \leqslant q(t, t_0, g) < 1,$$

где

$$q(t, t_0, g) = 1 - \exp\biggl(-\int_{t_0}^{t} \zeta(\tau, t_0, g)d\tau\biggr)\frac{(t-t_0)^{n_0} e^{-(t-t_0)}}{(n_0)!} k\bigl((I+B)^{n_0}\bigr) < 1.$$

Доказательство. Матрица $\Phi(\tau, t_0, g)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\Phi'_\tau = J\bigl(x(\tau, t_0, g), t\bigr)\Phi,\;\; \Phi(t_0, t_0, g) = I. \tag{1.7}$$

Введём

$$\Psi(\tau, t_0, g) = \Phi(\tau, t_0, g)\exp\biggl(\int_{t_0}^{\tau} \zeta(\theta, t_0, g)d\theta\biggr).$$

Тогда

$$\Phi'_\tau = \Psi'_\tau \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \zeta(\theta, t_0, g)d\theta\right) - \zeta(\tau, t_0, g)\Psi \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \zeta(\theta, t_0, g)d\theta\right).$$

Из уравнения в вариациях (1.7) получаем уравнение на $\Psi(\tau, t_0, g)$:

$$\Psi'_\tau = \Big(J\big(x(\tau, t_0, g), t\big) + \zeta(\tau, t_0, g)I\Big)\Psi,\ \Psi(t_0, t_0, g) = I$$

Используя неравенство

$$J\big(x(\tau, t_0, g), t\big) + \zeta(\tau, t_0, g)I \geqslant B$$

и леммы 1.1, 1.5 можно получить следующие оценки:

$$\Psi(\tau, t_0, g) \geqslant \exp\big((\tau - t_0)B\big) \geqslant \frac{(\tau - t_0)^{n_0} e^{-(\tau - t_0)}}{(n_0)!}(I + B)^{n_0}.$$

Теперь, используя лемму 1.2, получаем

$$k(\Psi(\tau, t_0, g)) \geqslant \frac{(\tau - t_0)^{n_0} e^{-(\tau - t_0)}}{(n_0)!} k((I + B)^{n_0}) > 0.$$

Поскольку

$$k\Big(\Phi(t, t_0, g)\Big) = k\Big(\Psi(t, t_0, g)\Big) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \zeta(\tau, t_0, g)d\tau\right),$$

обнаруживаем, что

$$k(\Phi) \geqslant \frac{(t - t_0)^{n_0} e^{-(t - t_0)}}{(n_0)!} k((I + B)^{n_0}) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \zeta(\tau, t_0, g)d\tau\right).$$

Поскольку $k(\Phi) = \|\Phi\| - \|\Phi\|_L > 0$ и $\|\Phi\| = 1$, находим, что

$$\|\Phi(t, t_0, g)\|_L = 1 - k(\Phi(t, t_0, g)) \leqslant q(t, t_0, g) < 1,$$

где $q(t, t_0, g)$ определено в условии теоремы. $\square$

Функция $q(t, t_0, g)$ задаёт коэффициент локального сжатия отображения $x(t, t_0, \cdot)$ в точке g. Чтобы оценить расстояние между $x(t, t_0, g^0)$ и $x(t, t_0, g^1)$ мы используем формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема 1.11. *Предположим, что существует интеграл*

$$q(t, t_0, g^0, g^1) = \int_0^1 q(t, t_0, \gamma(s))ds,$$

где $\gamma(s) = (1 - s)g^0 + sg^1$. *Тогда*

$$\|x(t, t_0, g^1) - x(t, t_0, g^0)\| \leqslant q(t, t_0, g^0, g^1)\|g^1 - g^0\|,$$

Доказательство. Положим

$$\gamma(s) = (1-s)g^0 + sg^1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ g^0,\ g^1 \in X.$$

Замечая, что $\gamma'(s) = g^1 - g^0 \in L$, получаем

$$\|x(t,t_0,g^1) - x(t,t_0,g^0)\| \leqslant \int_0^1 \|\Phi\big(t,t_0,\gamma(s)\big)\gamma'(s)\|ds \leqslant \int_0^1 \|\Phi\big(t,t_0,\gamma(s)\big)\|_L \|g^1 - g^0\|ds \leqslant$$

$$\leqslant \|g^1 - g^0\| \int_0^1 q(t,t_0,\gamma(s))ds = q(t,t_0,g^0,g^1)\|g^1 - g^0\|. \quad \square$$

Приведём несколько следствий теорем для $\zeta(t,t_0,g)$ специального вида.

Следствие 1.12. *Предположим, что* $\zeta(t,t_0,g) \equiv \zeta(t,t_0)$. *Тогда* $q(t,t_0,g)$ *не зависит от* g *и* $q(t,t_0,g) = q(t,t_0)$, *где*

$$q(t,t_0) = q(t,t_0) = 1 - \exp\left(-\int_{t_0}^t \zeta(\tau,t_0)d\tau\right)\frac{(t-t_0)^{n_0}e^{-(t-t_0)}}{(n_0)!}k\big((I+B)^{n_0}\big)$$

Для всех $g^0,\ g^1 \in X$ *коэффициент сжатия* $q(t,t_0,g^0,g^1) = q(t,t_0)$ *и*

$$\|x(t,t_0,g^1) - x(t,t_0,g^0)\| \leqslant q(t,t_0)\|g^1 - g^0\|.$$

Следствие 1.13. *Допустим, что* $\zeta(t,t_0,g) \equiv \zeta$. *Тогда* $q(t,t_0) = q(t-t_0)$, *где*

$$q(t) = 1 - e^{-\zeta t}\frac{t^{n_0}e^{-t}}{(n_0)!}k\big((I+B)^{n_0}\big)$$

и для всех $g^0,\ g^1 \in X$ *коэффициент сжатия*

$$q(t,t_0,g^0,g^1) = q(t-t_0),$$

и

$$\|x(t,t_0,g^1) - x(t,t_0,g^0)\| \leqslant q(t-t_0)\|g^1 - g^0\|.$$

Нелинейные дифференциальные уравнения, рассмотренные в этом разделе, очень естественно появляются при применении метода среднего поля к некоторым сложным моделям теории массового обслуживания.

Далее мы рассмотрим несколько моделей. Первая из них, описанная в разделе 2 является частным случаем модели, использованной Л.Г. Афанасьевой, Г. Файолем и С.Ю. Поповым в [23] для описания транспортных сетей. Этот раздел содержит результаты, полученные В.И. Оселедцем и Д.В. Хмелёвым в работе [27]. Вторая модель, рассмотренная в разделе 3, является конечномерным случаем модели динамической маршрутизации, которую ввели Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич в работе [48]. Третья модель, рассмотренная в разделе 5, является общим случаем

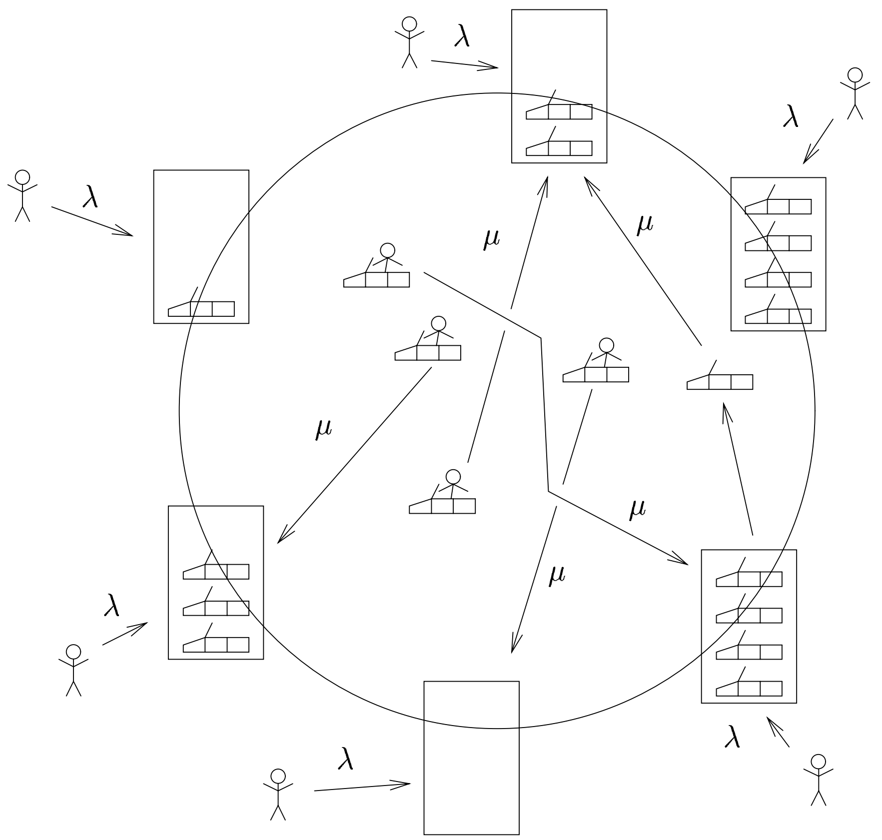

Рис. 2. Транспортная сеть, $m = 4$.

модели, использованной Л.Г. Афанасьевой, Г. Файолем и С.Ю. Поповым в [23], причём наши методы не дают полное доказательство сходимости и помогают лишь в некотором частном случае. Далее, четвёртая модель, описанная в разделе 6, использована Д.В.Хмелёвым в статье [29] для обобщения в сторону асимметрии результатов В.И. Оселедца и Д.В. Хмелёва из работы [27]. Наконец, в разделе 7 приведены результаты, обобщающие работу [27] в сторону непоказательного времени обслуживания.

Заметим, что все эти системы являются конечномерными в том смысле, что пространство состояний как конечной сети обслуживания так и предельной детерминированной динамической системы описывается вектором конечной размерности.

2. Простейшая транспортная сеть

Рассмотрим сеть из N узлов и rN обслуживающих приборов (автомобилей). В каждый узел в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\lambda(t)$ поступают заявки (пассажиры). Пуассоновские потоки заявок в разные узлы независимы. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если заявка попадает в узел с приборами, то случайно и равновероятно выбирается один из приборов, который забирает заявку и перемещается экспоненциально распределённое время. Движение прибора моделируется с помощью введения дополнительного виртуального узла. Мы считаем, что когда прибор начинает перемещаться, он попадает в виртуальный узел. Там прибор находится экспоненциально распределённое время со средним значением 1, а затем перемещается в узел, равновероятно выбираемый из всех N узлов. Если число приборов в выбранном узле равно m, прибор ждёт следующей попытки в виртуальном узле экспоненциально распределённое время со средним 1. Таким образом, в каждом узле (кроме виртуального) может находиться от 0 до m приборов. Схема транспортной сети изображена на рисунке 2.

Пусть n_k — число узлов, количество приборов в которых равно k, а $f_k = n_k/N$ — доля этих узлов. Аналогично, пусть W — количество приборов, находящихся в виртуальном узле, а $V = W/N$. В технических целях удобно перейти от f_k к накопленным долям $u_k = \sum_{i=k}^{m} f_i$.

Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Из наших предположений следует, что эволюция системы описывается некоторым марковским процессом $U_N(t)$, для которого можно выбрать пространство состояний X_N содержащее все такие вектора $u = (u_1, \ldots, u_m, V)^{\mathrm{T}}$ из $(1/N)\mathbb{Z}_+^{m+1}$, что выполнены неравенства

$$1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0,\ V \geqslant 0 \text{ и } V + u_1 + \ldots + u_m = r. \tag{2.1}$$

Кроме того, из наших предположений следует, что производящий оператор $A_N(t)$ процесса $U_N(t)$, который действует на функции над X_N, задаётся следующим образом

$$\begin{aligned} A_t^N f(u) = N\lambda(t) \sum_{k=1}^{m-1} (u_k - u_{k+1})[f(u - e_k/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + N\lambda(t) u_m [f(u - e_m/N + e_{m+1}/N) - f(u)] + \\ + NV \sum_{k=1}^{m} (u_{k-1} - u_k)[f(u + e_k/N - e_{m+1}/N) - f(u)], \end{aligned} \tag{2.2}$$

где e_i — вектор, i-тая координата которого равна 1, а остальные координаты равны 0. В силу конечности X_N оператор $A_N(t)$ определяет единственный марковский процесс $U_N(t)$.

Метод среднего поля подсказывает, что в пределе при $N \to \infty$ эволюция u становится детерминированной. Более точно: пусть X означает множество всех векторов $\mathbb{R}^{m+1}$, удовлетворяющих (2.1). Тогда, если распределение начального состояния $U_N(0)$ сходится к дельта-функции Дирака, сконцентрированной в точке $g \in X$, то распределение $U_N(t)$ сосредотачивается при больших N на траектории $u(t) \in X$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = f(u(t), \lambda(t)), \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} f_i(u, \lambda) &= \lambda(u_{i+1} - u_i) + V(u_{i-1} - u_i),\, i = 1, \ldots, m-1,\, u_0 = 1, \\ f_m(u, \lambda) &= -\lambda u_m + V(u_{m-1} - u_m), \\ f_{m+1}(u, \lambda) &= \lambda u_1 - V(1 - u_m). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Система (2.3) является нелинейной с квадратичной правой частью, зависящей, к тому же от времени. Поведение этой системы описано в следующей теореме.

Определим норму $\|\cdot\|$ по правилу $\|u\| = |u_1| + \ldots + |u_m| + |V|$. Далее, предположим, что

$$\inf_{t \geqslant \tau} \lambda(t) = \bar{\lambda} > 0 \text{ и существует такое } t^* > 0, \text{ что } \sup_{t \geqslant \tau} \int_t^{t+t^*} \lambda(\theta) d\theta < \infty. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\lambda(t)$ — кусочно-непрерывная функция. Тогда*

(а) для всех $g \in X$ в X существует единственное решение $u(t, \tau, g)$, $t \geqslant \tau$ задачи Коши (2.3) с $u(\tau, \tau, g) = g$;

(б) существует такое $\gamma > 0$, что для любых g, $g' \in X$

$$\|u(t, \tau, g) - u(t, \tau, g')\| \leqslant const \cdot \exp\left(-\gamma(t - \tau)\right);$$

(в) если функция $\lambda(t)$ периодическая с периодом $\bar{t}$, то существует такое единственное $g^* \in X$, что $u(t, \tau, g^*)$ является $\bar{t}$-периодическим решением (2.3) и для любого $g \in X$

$$\|u(t, \tau, g) - u(t, \tau, g^*)\| \leqslant const \cdot \exp\left(-\gamma(t - \tau)\right);$$

(г) если $\lambda(t)$ постоянна, то существует и единственно такое $g^* \in X$, что $u(t, \tau, g^*) = g^*$ и для любого $g \in X$

$$\|u(t, \tau, g) - g^*\| \leqslant const \cdot \exp\left(-\gamma(t - \tau)\right).$$

Стационарное решение g^* пункта (г) легко находится (см. [23]). Мы приведём здесь явные формулы:

$$u_k^* = u_k(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^k - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+1}}, & \rho \neq 1 \\ 1 - \dfrac{k}{m+1}, & \rho = 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

при $k = 1, \ldots, m$, $V^* = V(\rho) = \lambda\rho$, где ρ единственным образом определяется из условия на первый интеграл:

$$V(\rho) + u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho) = r.$$

При обозначении $L(\rho) = u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho)$, с учётом $V = \lambda\rho$ последнее условие принимает вид

$$L(\rho) + \lambda\rho = r. \tag{2.7}$$

Определим семейство операторов $T_N = T_N(t,\, \tau)$ по правилу

$$T_N(t,\tau) f(g) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(\tau) = g),\ g \in X_N. \tag{2.8}$$

Теорема 2.2. *Если $\lambda(t)$ кусочно-постоянна, то для всех $f \in C(X)$, равномерно по t на произвольном отрезке из $\mathbb{R}^+_\tau = \{t \geqslant \tau\}$,*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} \sup_{g\in X_N} |T_N(s,\tau)f(g) - f(u(s,\tau,g))| = 0. \tag{2.9}$$

Обозначим через ε_g дельта-меру Дирака, сосредоточенную в точке $g \in X$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Если $U_N(\tau)$ по распределению сходится к ε_g, то*

$$\sup_{\tau\leqslant s\leqslant t} \|U_N(s) - u(s,\tau,g)\| \to 0 \text{ *по вероятности при всех* } t \geqslant \tau.$$

Если $\lambda(t)$ периодична с периодом $\bar{t}$, то процессы $U_{N,t}(n) = U_N(t + n\bar{t})$, где $n = 0$, 1, … , образуют множество однородных цепей Маркова с дискретным временем и конечным числом состояний, каждая из которых в силу связности обладает единственной инвариантной мерой $\mu_{N,t} = \mu_{N,t+\bar{t}}$. Заметим, что из пункта (в) теоремы 2.1 следует, что у системы (2.3) существует единственный инвариантный цикл $u(t,\, \tau,\, g^*)$.

Теорема 2.4. *Пусть $\lambda(t) = \lambda(t + \bar{t})$. Тогда*

(а) для всякого $t \in [\tau, \tau + \bar{t})$ на множестве X существует единственная вероятностная мера, инвариантная относительно динамической системы $g \to u(t+\bar{t}, t, g)$, $g \in X$. Эта мера сосредоточена в точке $u(t,\, \tau,\, g^*)$, т.е. равна $\varepsilon_{u(t,\tau,g^*)}$;

(б) инвариантные меры $\mu_{N,t}$ процессов $U_{N,t}$ сходятся по вероятности к $\varepsilon_{u(t,\tau,g^*)}$.

Последняя теорема охватывает также случай $\lambda(t) \equiv \mathrm{const}$. Действительно, тогда $\mu_{N,t} = \mu_N$, где μ_N — стационарная мера процесса U_N и $\mu_N \to \varepsilon_{g^*}$ по вероятности.

Практическая ценность полученных результатов заключается в том, что при достаточно больших N и t в случае, например, $\lambda(t) \equiv \lambda$ система оказывается в стационарном состоянии, которое описывается простыми формулами (2.6). Таким образом мы можем получать разнообразные операционные характеристики и формулировать критерии оптимальности (см. [23]). Для нестационарной периодической $\lambda(t)$ мы можем вычислить единственное стационарное распределение системы на периоде, причём можно явно оценить до какого времени нужно численно решать систему дифференциальных уравнений, чтобы получилось приближение необходимой точности.

Доказательство теоремы 2.1. Матрица Якоби J правой части (2.3) равна

$$J(u,\lambda) = \begin{pmatrix} -\beta & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & (1-u_1) \\ V & -\beta & \lambda & \dots & 0 & 0 & (u_1-u_2) \\ 0 & V & -\beta & \dots & 0 & 0 & (u_2-u_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \lambda & (u_{m-2}-u_{m-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & V & -\beta & (u_{m-1}-u_m) \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & V & -(1-u_m) \end{pmatrix},$$

где $\beta = \lambda + V$.

Проверим выполнение условий следствия 1.12. Во-первых, множество X является выпуклым компактным подмножеством $\mathbb{R}^{m+1}$ и является подмножеством аффинного многообразия $L + re_{m+1}$, где L — линейное подпространство $\mathbb{R}^{m+1}$ векторов с суммой координат равной 0.

Во-вторых, матрица Якоби задаёт марковское отображение Φ. Заметим, что можно выбрать

$$\zeta(t,t_0) = \max(r, 1 + r/m) + \lambda(t).$$

Далее, $J(x,\lambda(t)) + \zeta(t,t_0)I \geqslant B$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \bar\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \bar\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar\lambda \end{pmatrix},$$

где $\bar\lambda$ определена в (2.5).

Матрица $(I+B)^m$ имеет следующий вид:

$$(I+B)^m = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & * & * & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0 \\ * & * & * & \dots & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $*$ обозначены положительные элементы матрицы.

Отсюда вытекает, что $k((I+B)^m) > 0$. Остаётся проверить инвариантность X относительно (2.3).

На самом деле, достаточно проверить инвариантность внутренности X, которую мы обозначаем через $\operatorname{Int} X$. Заметим, что поскольку X является подмножеством аффинного многообразия размерность которого меньше размерности всего пространства, мы понимаем под внутренностью X множество точек у которых некоторая окрестность в c+L содержит только точки X. Вообще говоря, такое множество называется *относительной внутренностью* [64].

Итак, если множество $\operatorname{Int} X$ инвариантно, то ввиду непрерывной зависимости траекторий (1.6) от начального условия, всякое решение (1.6) с начальной точкой на относительной границе X, никогда не покинет X.

Пусть компоненты вектора $u(\tau,\, \tau,\, g) = (u_1(\tau),\, \ldots,\, u_m(\tau),\, V(\tau)) \in \operatorname{Int} X$, или, что то же самое, выполнены следующие строгие неравенства

$$1 = u_0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_m > 0,\, V > 0. \tag{2.10}$$

Пусть для любого $t \in [\tau, t_0)$ $u(t,\, \tau,\, g) \in \operatorname{Int} X$, но $u(t_0,\, \tau,\, g) \notin \operatorname{Int} X$. В момент t_0 некоторые неравенства в (2.10) превращаются в равенства.

Если $V(t_0) = 0$ то $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{t=t_0-0} = \lambda(t_0-0)u_1(t_0) \geqslant \bar{\lambda}r/m > 0$ и мы приходим к противоречию с тем, что $V(t_0) - V(t) < 0$ для $t < t_0$.

Следовательно, заведомо $V(t_0) > 0$. Для уменьшения числа частных случаев введём виртуальную переменную $u_{m+1} \equiv 0$. С её помощью мы можем переписать выражение для f_m в (2.4):

$$f_m(u,\lambda) = \lambda(u_{m+1} - u_m) + V(u_{m-1} - u_m).$$

Поскольку $1 = u_0 > u_{m+1} = 0$ возможны только следующие два случая. 1) Существует такое i, что $u_{i-1}(t_0) = u_i(t_0) > u_{i+1}(t_0)$, 2) существует такое j, что $u_{j-1}(t_0) > u_j(t_0) = u_{j+1}(t_0)$.

В случае 1) выполнено $\left.\dfrac{du_{i-1}}{dt}\right|_{t=t_0-0} = V(t_0)(u_{i-2}(t_0) - u_{i-1}(t_0)) \geqslant 0$, $\left.\dfrac{du_i}{dt}\right|_{t=t_0-0} = \lambda(t_0-0)(u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)) < 0$. Получаем $\left.\dfrac{d(u_{i-1}-u_i)}{dt}\right|_{t=t_0-0} > 0$ и приходим к противоречию с тем, что $[u_{i-1}(t_0) - u_i(t_0)] - [u_{i-1}(t) - u_i(t)] < 0$ при $t < t_0$. Случай 2) рассматривается аналогично. Аналогичная идея использовалась в [48, Лемма 2].

Теперь из следствия 1.12 с учётом условия (2.4) вытекает, что при любом $t \geqslant \tau$ отображение $u(t+t^*, t, \cdot)$ является сжатием с коэффициентом $q < 1$, не зависящим от t. Отсюда очевидным образом мы получаем все заключения теоремы 2.1. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Без потери общности предположим $\lambda(t) \equiv \lambda$ для любого t, следовательно, $T_N(t, \tau) = T_N(t - \tau)$. Теперь воспользуемся методом, изложенным в [2].

Пусть $C(X)$ — банахово пространство непрерывных функций на X с равномерной метрикой $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$. Определим полугруппу $T(t)$ на $C(X)$ по правилу

$$T(t)f(g) = f(u(t,\, 0,\, g)). \tag{2.11}$$

В разделе 2 мы определили полугруппу $T_N(t) = T_N(t, 0)$ на $C(X_N)$. Полугруппы $T(t)$, $T_N(t)$ сильно непрерывны. Пусть A (A_N) обозначает производящий оператор полугруппы $T(t)$ ($T_N(t)$). Обозначим через $D(A)$ область определения оператора A. Из (2.11) следует, что $f \in D(A)$ для любой функции $f \in C(X)$ с

$$\partial f/\partial u_1, \ldots, \partial f/\partial u_m, \partial f/\partial V, \quad \partial^2 f/\partial^2 u_1, \ldots, \partial^2 f/\partial^2 u_m, \partial^2 f/\partial^2 V \in C(X).$$

Обозначим через D множество всех таких функций. Можно показать, что D является существенным (core, см. [48, с.31] и [47]) подпространством оператора A. Ввиду теорем о сходимости марковских процессов (см., например, [47, Chapter 1, Theorem 6.1]) достаточно проверить, что для всех $f \in D$

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in X_N} |A_N f(x) - Af(x)| = 0,$$

что можно проделать аналогично [48]. □

Доказательство теоремы 2.3. Теорема является следствием теоремы 2.2 и, например, [47, Chapter 4, Theorem 2.11]. □

Доказательство теоремы 2.4. Пункт (а) вытекает из пункта (в) теоремы 2.1.

Перейдём к доказательству пункта (б). Пусть $\mu_{N,t}$ — инвариантная мера процесса $U_{N,t}(n)$. Множество X компактно, следовательно, множество вероятностных мер на X также компактно относительно слабой сходимости. Из теоремы 2.2 следует, что всякая мера μ_t, являющаяся предельной точкой для последовательности мер $\mu_{N,t}$, инвариантна относительно полугруппы $T^{n,t} = T(t + n\bar{t})$, $n = 0,\, 1,\, \ldots$. Ввиду пункта (а), μ_t совпадает с мерой, сосредоточенной в точке $u(t,\, 0,\, g^*)$ и доказательство завершено. □

3. Сеть приборов с выбором наименьшей из двух очередей

Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич в [48] рассмотрели модель системы обслуживания S_N, с N одинаковыми обслуживающими приборами с неограниченной очередью к каждому из них, куда поступают заявки на обслуживание в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $N\lambda$. Времена обслуживания н.о.р. экспоненциально со средним 1. При прибытии каждая заявка выбирает случайно 2,

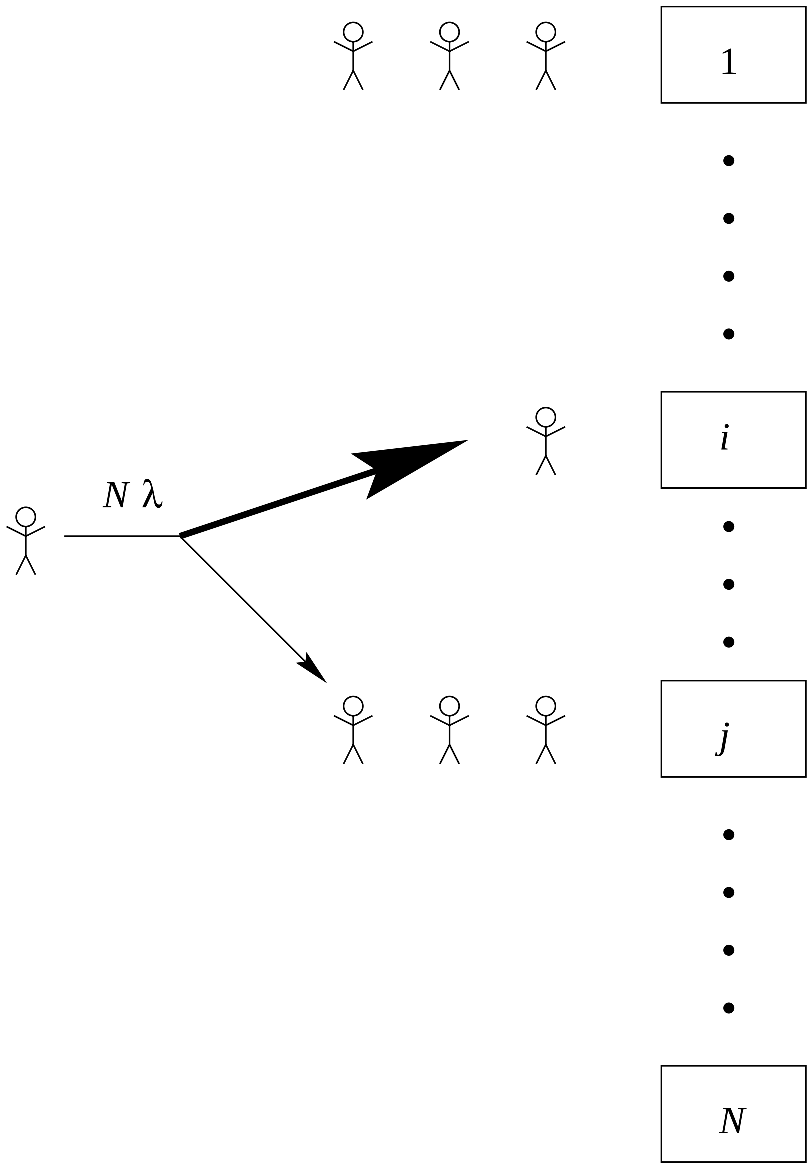

Рис. 3. Сеть из N приборов с выбором наименьшей из двух очередей

возможно, совпадающих, прибора (с вероятностью $1/N^2$) и затем направляется к прибору с меньшей очередью (включая заявку, находящуюся в обслуживании). Если очереди к обоим приборам одинаковы, заявка наугад равновероятно выбирает одну из них (см. рисунок 3). Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Они показали, что при $N \to \infty$ система описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью и, используя покоординатную монотонность, установили её сходимость к единственной неподвижной точке, координаты которой убывают сверхэкспоненциально.

Мы рассмотрим систему S_N^m с ограничением m на максимальную длину очереди. В системе S_N^m заявка, выбравшая обе очереди с m заявками, покидает систему. В этой системе тоже имеется покоординатная монотонность и в случае постоянной входной интенсивности можно использовать покоординатную монотонность и аналогично работе [48] показать сходимость к неподвижной точке. Мы, однако, продемонстрируем что разработанная в предыдущих разделах техника применима и к этой системе. Кроме того, мы рассмотрим случай периодичной $\lambda(t)$, причём априори неясно, можно ли воспользоваться покоординатной монотонностью для доказательства существования и единственности предельного инвариантного цикла.

Уравнения среднего поля для S_N^m при $N \to \infty$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} &\dot{u}_k = (u_{k+1} - u_k) + \lambda(u_{k-1}^2 - u_k^2),\ k = 1, \ldots, m-1, \\ &\dot{u}_m = -u_m + \lambda(u_{m-1}^2 - u_m^2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0$, u_k — доля приборов, в очереди к которым стоит не меньше k заявок (включая обслуживаемую в данный момент). Введём переменную V:

$$\dot{V} = u_1 + \lambda u_m^2 - \lambda, V \geqslant 0, V(0) = m - \sum_{i=1}^{m} u_i(0). \tag{3.2}$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ обозначает вектор

$$(x_1, \ldots, x_{m+1}) = (u_1, \ldots, u_m, V).$$

Запишем систему (3.1), (3.2) следующим образом

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \tag{3.3}$$

Множество X (см. раздел 3.2) определяется так:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} | 1 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_m \geqslant 0,\ x_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} x_i = m, x_{m+1} \geqslant 0\}.$$

Ввиду [48, Лемма 1], множество X инвариантно относительно (3.3). Найдём матрицу Якоби

$$J(x,\lambda)=\begin{pmatrix} -\beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 2\lambda u_1 & -\beta_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda u_2 & -\beta_3 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_{m-1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda u_{m-1} & -\beta_m & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2\lambda u_m & 0 \end{pmatrix},$$

где $\beta_i = 1 + 2\lambda u_i$. Зададим $\alpha(\lambda) = 1 + 2\lambda$. Ясно, что $J(x,\,\lambda) + \alpha(\lambda)I \geqslant B$ где

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Матрица $(I + B)^m$ имеет следующий вид

$$(I+B)^m=\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * & * & 0\\ 0 & * & * & \dots & * & * & 0\\ 0 & 0 & * & \dots & * & * & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & * & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & 0\\ * & * & * & \dots & * & * & * \end{pmatrix},$$

где $*$ обозначает положительные элементы матрицы.

Отсюда вытекает, что $k((I + B)^m) > 0$ и, следовательно, справедлива

Теорема 3.1. *Для любого $\lambda > 0$, динамическая система (5.1), (5.2) имеет единственное экспоненциально глобально устойчивое стационарное решение.*

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, \lambda(t)), \tag{3.4}$$

где $f(x,\,\lambda)$ определена в (3.3), а $\bar{t}$-периодичная функция $\lambda(t)$ кусочно-непрерывна с $\inf \lambda(t) > 0$.

Следующая теорема непосредственно вытекает из следствия 1.12.

Теорема 3.2. *Динамическая система* (3.4) *имеет единственную экспоненциально притягивающую $\bar{t}$-периодичную траекторию.*

4. Существование инвариантного компакта

Данный раздел содержит доказательство некоторого технического результата, необходимого в изложении следующих двух разделов. Этот результат связан с поведением решений системы нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений, действующей в выпуклом компактном полиэдре $X \subset \mathbb{R}^n$.

Нетрудно заметить, что уже рассмотренные в разделах 2 и 3 системы действуют в некотором выпуклом компактном полиэдре. Системы дифференциальных уравнений следующих двух разделов 5 и 6 также действуют в некотором выпуклом компактном полиэдре.

Исследование поведения траекторий таких систем несколько упрощается, если доказать существование такого компакта $X_\delta \subset X$, отделённого от границы X, что любая траектория динамической системы, начинающаяся в точке X через равномерно по X малое время оказывается в X_δ и уже никогда не выходит из X_δ. Дело в том, что на границе множества X некоторые характеристики динамической системы могут нарушаться (например, матрица Якоби на границе X может не оказаться слабо неприводимой, в то время, как внутри X она слабо приводима).

Чтобы сформулировать полученные результаты необходимо дать несколько дополнительных определений. Как обычно, $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел, а $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство. Под $\langle\cdot,\cdot\rangle$ мы понимаем стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: сумму покомпонентных произведений. В пределах этого раздела удобнее пользоваться следующей нормой $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Для любых двух множеств X и Y

$$\hat{\rho}(X,Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x-y\|.$$

Расстояние $\rho(X,Y) = \hat{\rho}(X,Y) + \hat{\rho}(Y,X)$. Под открытой (замкнутой) ε-окрестностью точки x будем понимать множество $U_\varepsilon(x) = \{v_\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \|v_\alpha - x\| < \varepsilon\}$ $(\bar{U}_\varepsilon(x) = \{v_\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \|v_\alpha - x\| \leqslant \varepsilon\})$

Аналогично [64], введём следующие понятия. Множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется *аффинным*, если $\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \in Y$ при всех y^1, $y^2 \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $Y \subset \mathbb{R}^n$. Пересечение всех аффинных множеств, содержащих Y, называется *аффинной оболочкой* и обозначается через $\operatorname{aff} Y$. Размерность линейного многообразия $\operatorname{aff} Y$ называется размерностью Y и обозначается $\dim Y$. Точка y множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется его *относительно внутренней точкой*, если $U_\varepsilon(y) \cap \operatorname{aff} Y \subset Y$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Совокупность всех относительно внутренних точек множества Y называется его *относительной внутренностью* и обозначается через $\operatorname{ri} Y$. Для замкнутого множества Y множество $\operatorname{r\partial} Y = Y \setminus \operatorname{ri} Y$ называется относительной границей. *Полиэдром* X назовём следующее множество

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m\ \}.$$

Гранью полиэдра X назовём множество

$$\begin{aligned} \Gamma = \{x \in X \mid \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i \text{ для } i \in \{1, \ldots, m\} \setminus I, \\ \langle a_i, x\rangle = b_i \text{ для } i \in I.\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $I \in \{1, \ldots, m\}$.

$I(\Gamma)$ — множество номеров жёстких ограничений в (4.1):

$$I(\Gamma) = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ \langle a_i, x\rangle = b_i \text{ при любом } x \in \Gamma\}.$$

$I(x)$ — множество номеров *активных граней* в точке x:

$$I(x) = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ \langle a_i, x\rangle = b_i\}.$$

Семейство функций $f(\cdot, z)\colon X \to \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega$ *равномерно ограничено в совокупности на* Ω, если $\exists C$, что $\forall z \in \Omega$, $\forall x \in X$: $\|f(x, z)\| \leqslant C$. Семейство функций $f(\cdot, z)\colon X \to \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega$ *равностепенно непрерывно на* X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ x' \in X$, $\forall z \in \Omega$: $\|x - x'\| < \delta \Longrightarrow \|f(x, z) - f(x', z)\| < \varepsilon$.

Теорема 4.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый непустой полиэдр, размерность которого необязательно равна n. Пусть векторное поле $f(x, z)\colon X \to \mathbb{R}^n$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено в совокупности по Ω. Пусть для любой грани $\Gamma \neq X$ для любого фиксированного $x \in \operatorname{ri} \Gamma$ вектор $x + f(x, z)$ не лежит в $\operatorname{aff} \Gamma$ и при любом изменении z вектор не может выродится в $\operatorname{aff} \Gamma$. Кроме того, пусть для любого достаточно малого t точка $x + tf(x, z) \in X$.*

Тогда существует полиэдр $X_\delta \subset X$, такой, что для любого $x \in \operatorname{r\partial} X_\delta$ для любого $z \in \Omega$ вектор $f(x, z)$ направлен в X_δ и составляет с $\operatorname{r\partial} X_\delta$ ненулевой, равномерно отделённый от нуля, угол.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x, z(t)),\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,\ \forall t\ z(t) \in \Omega, \tag{4.2}$$

где $f(x, z)$ удовлетворяет условиям последней теоремы, а $f(x,\ z(t))$ такова, что решение (4.2) существует, единственно и продолжается вдоль оси t неограниченно ([63]). Обозначим через $g(t,\ \tau,\ x)$ решение последней системы с начальным условием $x \in X$ в начальный момент τ. Из последней теоремы немедленно вытекает

Теорема 4.2. $\forall x \in X_\delta\ \forall t \geqslant \tau$: $g(t,\ \tau,\ x) \in X_\delta$.

Теорема 4.3. $\forall x \in X\ \forall t \geqslant \tau$: $g(t,\, \tau,\, x) \in X$.

С помощью последней теоремы удобно доказывать, что система никогда не выйдет за пределы фазового пространства X.

Теорема 4.4. $\exists t_0$: $\forall \tau\ \forall x \in X \setminus X_\delta$: $g(\tau + t_0,\, \tau,\, x) \in X_\delta$.

Доказательство теоремы 4.1. Заметим, что можно заменить координаты таким образом, чтобы размерность X совпадала с размерностью векторного пространства. Тогда теорема сводится к теореме 4.5. □

Теорема 4.5. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — полиэдр, в задании которого отсутствуют излишние неравенства,* $\dim X = n$. *Пусть $f(\cdot, z)$: $X \to \mathbb{R}^n$, $z \in \Omega$, — равностепенное непрерывное и равномерно ограниченное семейство векторных полей на X, $z \in \Omega$. Кроме того, выполнены условия*

а) для любого достаточно малого t $\forall x \in X\ \forall z \in \Omega$: $x + tf(x,\, z) \in X$,

б) для любой грани Γ полиэдра X такой, что $\dim \Gamma = 0$, *т.е. вершины v_α ($\Gamma = \{v_\alpha\}$):*

$$\sup_{z\in\Omega} \langle f(v_\alpha, z), \sum_{i\in I(\Gamma)} a_i \rangle \leqslant S_\Gamma < 0, \tag{4.3}$$

где S_Γ — некоторое отрицательное число,

в) для любой грани Γ полиэдра X такой, что $\dim \Gamma \geqslant 1$ *и* $\Gamma \neq X$:

$$\forall x \in \operatorname{ri}\Gamma\ \sup_{z\in\Omega} \langle f(x, z), \sum_{i\in I(\Gamma)} a_i \rangle < 0. \tag{4.4}$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует замкнутый полиэдр

$$X_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x\rangle \leqslant d_i,\ c_i \in \mathbb{R}^n,\ d_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ \ldots,\ s\ \},$$

где s — количество всех граней $\Gamma \subset X$, $\Gamma \neq X$, удовлетворяющих следующим условиям:

i) $X_\delta \subset X$,

ii) $0 < \rho(\partial X_\delta, \partial X) < \delta$,

iii) $\exists \theta < 0$: $\forall x \in \partial X_\delta\ \forall z \in \Omega\ \forall i \in I^\delta(x)\ \langle c_i, f(x,z)\rangle \leqslant \theta$, где $I^\delta(x)$ — множество активных ограничений X_δ в точке x.

Доказательство теоремы 4.5. Зададим рекуррентно множества, зависящие от положительных чисел $\alpha_{I(\Gamma)}$:

$$X_0 = \{x \in X \mid \langle x, \sum_{i \in I(\Gamma)} a_i \rangle \leqslant \sum_{i \in I(\Gamma)} b_i - \alpha_{I(\Gamma)},$$
$$\text{где } \Gamma \text{ — все грани размерности } 0\},$$
$$X_k = \{x \in X_{k-1} \mid \langle x, \sum_{i \in I(\Gamma)} a_i \rangle \leqslant \sum_{i \in I(\Gamma)} b_i - \alpha_{I(\Gamma)},$$
$$\text{где } \Gamma \text{ — все грани размерности k}\},$$

Ниже мы определим $\alpha_{I(\Gamma)}$ и зафиксируем X_k.

Для любой грани Γ полиэдра X, такой, что $\dim \Gamma = j$ определим множество

$$G_\Gamma = X_j \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \sum_{i \in I(\Gamma)} a_i \rangle = \sum_{i \in I(\Gamma)} b_i - \alpha_{I(\Gamma)}\}.$$

В дальнейшем рассуждении ключевую роль играет

Лемма 4.6. *Функция* $s_\Gamma(x) = \sup_{z \in \Omega} \langle f(x, z), \sum_{i \in I(\Gamma)} a_i \rangle$ *непрерывна и ограничена в* $\operatorname{ri} \Gamma$.

Доказательство следует из равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности $f(x, z)$.

Из ограниченности X вытекает, что $s_\Gamma(x)$ *равномерно непрерывна* на любом замкнутом подмножестве Γ.

Найдём $\alpha_{I(\Gamma)}$, определяющие X_0. Рассмотрим все грани Γ размерности 0. Выберем $\alpha_{I(\Gamma)}$ таким образом, чтобы удовлетворялись условия а)–г):

а) G_Γ — не пусты;

б) для не совпадающих граней Γ и Γ' одинаковой размерности множества G_Γ и $G_{\Gamma'}$ не пересекаются: $I(\Gamma) \neq I(\Gamma') \Longrightarrow G_\Gamma \cap G_{\Gamma'} = \varnothing$;

в) $\rho(\Gamma, G_\Gamma) < \delta$;

г) $\forall x \in G_\Gamma \ \sup_{z \in \Omega} \langle f(x, z), \sum_{i \in I(\Gamma)} a_i \rangle \leqslant C_\Gamma < 0$

Лемма 4.7. *Такой выбор всегда возможен.*

Доказательство. Пункты а)–в) можно удовлетворить за счёт выбора достаточно малых $\alpha_{I(\Gamma)}$.

Из (4.3) и равномерной непрерывности $s_\Gamma(x)$ следует, что

$$\forall x \in \bar{U}_\varepsilon(\Gamma) \cap X \ s_\Gamma(x) \leqslant S_\Gamma / 2 < 0$$

Остаётся выбрать $\alpha_{I(\Gamma)}$, чтобы G_Γ лежало в этой окрестности Γ. □

Пусть построено множество X_{k-1}. Найдём $\alpha(I(\Gamma))$, определяющие X_k. Рассмотрим грани Γ размерности k. Выберем $\alpha_{I(\Gamma)}$ так, чтобы удовлетворялись условия а)–г).

Лемма 4.8. *При $k \leqslant n-1$ так всегда можно сделать.*

Доказательство. Единственное затруднение — в удовлетворении требования г).

Ввиду построения, множество $\Gamma \cap X_{k-1} \subset \operatorname{ri}\Gamma$. Поскольку $\Gamma \cap X_{k-1}$ — замкнутое и компактное множество множество то функция $s_\Gamma(x)$ достигает на нем максимума, который, ввиду (4.4), меньше нуля. Пусть

$$\max_{x \in \Gamma \cap X_{k-1}} s_\Gamma(x) = 2C_\Gamma < 0.$$

Из равномерной непрерывности $s_\Gamma(x)$ следует, что

$$\forall x \in \bar{U}_\varepsilon(\Gamma) \cap X_{k-1} \ s_\Gamma(x) \leqslant C_\Gamma < 0$$

Остаётся выбрать $\alpha_{I(\Gamma)}$, чтобы G_Γ лежало в этой окрестности Γ. □

Заметим, что, в X_{n-1} мы можем выбросить лишние неравенства $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i$, поскольку присутствуют неравенства $\langle a_i, x\rangle \leqslant b_i - \alpha_{\{i\}}$. Оставшиеся неравенства определяют множество X_δ.

Подведём итоги. Множество X_δ задаётся следующей системой неравенств:

$$\langle \sum_{i\in I(\Gamma)} a_i, x\rangle \leqslant \sum_{i \in I(\Gamma)} b_i - \alpha_{I(\Gamma)} \text{ для всех граней } \Gamma \text{ полиэдра } X.$$

Выполнение условий i), ii) и iii) теоремы 4.5 следует из построения. □

Доказательство теоремы 4.4. В первую очередь заметим, что ввиду непрерывной зависимости решения от начальных условий из предыдущей теоремы следует, что $\forall x \in X\ \forall t \geqslant 0\ \forall t_0\ g(t, t_0, x) \in X$. Воспользуемся множествами $X_0, \ldots, X_{n-1}$, построенными в предыдущей теореме.

Пусть $D_\Gamma = -C_\Gamma \|\sum_{i \in I(\Gamma)}\|$ Из построения следует, что любая точка из X через время $\max_{\dim\Gamma=0} \alpha_{I(\Gamma)}/D_\Gamma$ окажется в множестве X_0. Вообще, всякая точка из X_{k-1} окажется в X_k через время $\max_{\dim\Gamma=k} \alpha_{I(\Gamma)}/D_\Gamma$. Поэтому можно выбрать

$$t_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \max_{\dim\Gamma=i} \alpha_{I(\Gamma)}/D_\Gamma,$$

что и завершает доказательство. □

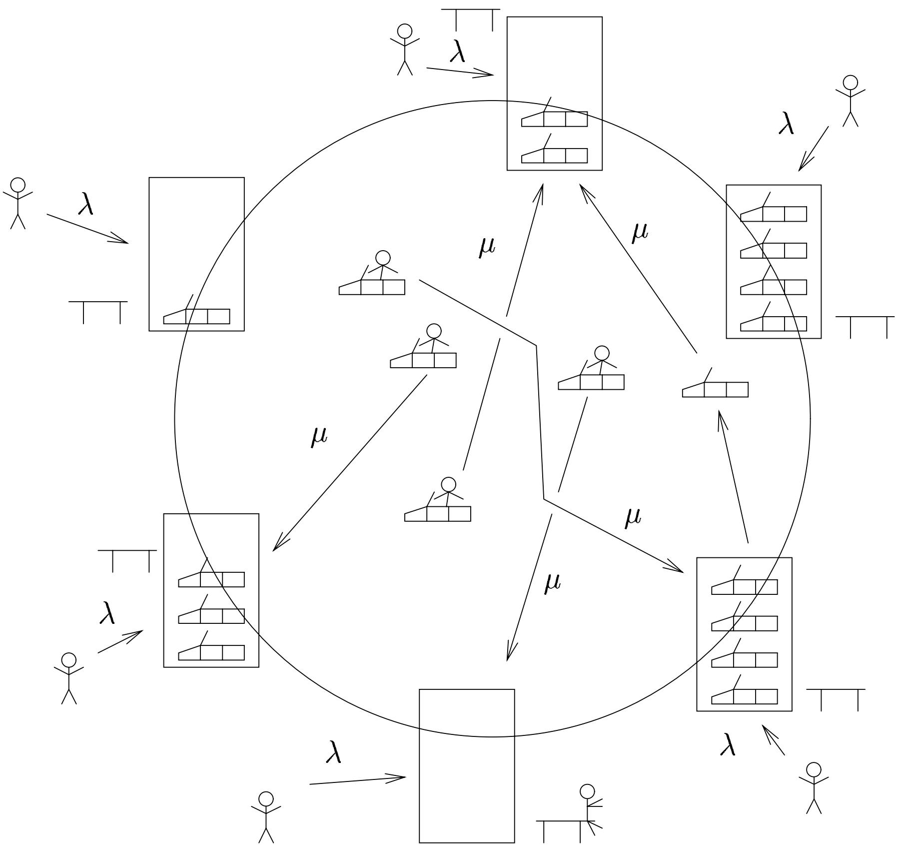

Рис. 4. Транспортная сеть с очередью

5. Транспортная сеть с очередью

В этом разделе рассматривается модель транспортной сети с очередью, описанная Л.Г. Афанасьевой, Г. Файолем и С.Ю. Поповым в [23]. Частный случай этой модели также рассматривали В.И. Оселедец и Д.В. Хмелёв в [27] (кроме того, она описана в разделе 2 настоящей главы). Основная задача, которая исследуется в данном разделе, состоит в доказательстве глобальной асимптотической устойчивостью системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих модель из [23]. Описание модели и дифференциальных уравнений приведено далее в пункте 5.2.

Непосредственное применение теорем раздела 1 к этой системе невозможно, поскольку нарушается одно из самых существенных требований на неотрицательность недиагональных элементов матрицы Якоби. Тем не менее, есть надежда свести эту систему к необходимому виду с помощью некоторой замены координат. Здесь используется простейшая замена координат — линейная, техника применения которой описана в разделе 5.1.

На взгляд автора диссертации полное решение задачи о глобальной устойчивости этой системы дифференциальных уравнений достаточно важно для дальнейшего развития теории, поскольку, во-первых, сама система возникла из достаточно естественной модели, во-вторых, в некоторых частных случаях получено полное решение, а в-третьих, структура системы дифференциальных уравнений весьма проста — в правой части находятся многочлены не более чем второго порядка. Насколько известно автору, для всех систем, которые не удовлетворяют условию неотрицательности элементов матрицы Якоби, не удалось получить полного доказательства сходимости решений к единственной неподвижной точке во всех случаях (см., например, работу [61] М. Миценмахера о моделях динамического перераспределения заявок, стоящих к приборам).

5.1. **Приведение системы дифференциальных уравнений к нужному виду с помощью линейной замены координат.** Пусть задана автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), x(0, x^0) = x^0, x \in \mathbb{R}^n$$

с матрицей Якоби $J^f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Предположим, что система

$$\dot{y} = g(y), y(0, y^0) = y^0, y \in \mathbb{R}^n$$

получается из системы $\dot{x} = f(x)$ линейной невырожденной линейной заменой координат $y = Tx$. Тогда, $y^0 = Ty^0$, $g = T \circ f \circ T^{-1}$, и $J^g = \dfrac{\partial g}{\partial x} = TJ^f(T^{-1}y)T^{-1}$.

Если у системы $\dot{x} = f(x)$ был первый интеграл, задаваемый вектором $a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$, т.е., $a^{\mathrm{T}} f(x) = 0$, то очевидно, у системы $\dot{y} = g(y)$ первый интеграл задаётся вектором $b = (T^{-1})^{\mathrm{T}} a$, поскольку $b^{\mathrm{T}} g(y) = a^{\mathrm{T}} T^{-1} T f(T^{-1}y) = 0$.

Теперь можно искать подходящую замену координат для системы уравнений $\dot{x} = f(x)$ с первым интегралом $a^{\mathrm{T}} f(x) = 0$, используя полученные формулы. То есть, мы должны найти такую замену T, чтобы для всякого допустимого x, во-первых, выполнялось условие на неотрицательность недиагональных элементов матрицы $TJ^f(x)T^{-1}$, а, во-вторых, вектор $b = (T^{-1})^{\mathrm{T}} a$ состоял из одних единиц, $b = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Можно несколько упростить поиск, разложив T на композицию двух преобразований, одно из которых диагональное с положительными элементами на диагонали. В самом деле, предположим, что удалось найти такую линейную замену T', что матрица $T'J^f(x)\big(T'\big)^{-1}$ имеет неотрицательные элементы вне диагонали а вектор $b = (T^{-1})^{\mathrm{T}} a$ состоит из положительных чисел: $b = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$.

Введём дополнительную замену $T'' = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ обозначает диагональную матрицу с элементами α_1, …, α_n, стоящими на диагонали.

Очевидно, преобразование $T = T'' \circ T'$ переводит первый интеграл a в $(1, \ldots, 1)$, и, кроме того, элементы матрицы $TJ^f(x)\big(T\big)^{-1} = T''T'J^f(x)\big(T'\big)^{-1}T''^{-1}$ неотрицательны вне диагонали.

Сформулируем полученное утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} > 0$. Рассмотрим систему $\dot{y} = g(y)$ с первым интегралом $\alpha^{\mathrm{T}} g(y) = 0$. Введём линейное подпространство $L_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n = 0\}$ и норму $\|y\|_\alpha = \alpha_1|y_1| + \ldots + \alpha_n|y_n|$. Предположим, что при некотором $c \in \mathbb{R}^n$ существует такое инвариантное выпуклое множество $Y \subset c + L_a$, что для каждого $y \in Y$ элементы матрицы Якоби $J^g(y) = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ неотрицательны вне диагонали. Кроме того, предположим, что при некотором $\zeta > 0$ существует неотрицательная матрица $B \geqslant 0$, удовлетворяющая следующим условиям*

(а) вектор α^{T} — левый инвариантный вектор матрицы B с положительным собственным значением, т.е. $\alpha^{\mathrm{T}} B = \beta \alpha^{\mathrm{T}}$,

(б) при всех $y \in Y$ выполнено $J^g(y) + \zeta I \geqslant B$,

(в) при некотором n_0 матрица $(I + B)^{n_0}$ слабо неприводима.

Тогда при всяком $t > 0$ отображение $y(t, y_0)$ является сжимающим в норме $\|\cdot\|_\alpha$ с коэффициентом $q(t) < 1$.

Доказательство. Перейдём в другую систему координат с помощью линейной замены $z = T''y$, где $T'' = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Тогда L_α переходит в $L = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z_1 + \ldots + z_n = 0\}$, а норма $\|\cdot\|_\alpha$ переходит в обычную норму сумм модулей координат. Неотрицательность матрицы Якоби вне диагонали сохраняется, требование на левый инвариантный вектор матрицы B переходит в требование на марковость матрицы TBT^{-1}, причём $TBT^{-1} \geqslant 0$. Условие мажорирования (б) сохраняется, а условие (в) вкупе с марковостью $T(I+B)^{n_0}T^{-1} = (I+TBT^{-1})^{n_0}$ ввиду леммы 1.3 приводит к требованию $k((I+TBT^{-1})^{n_0}) > 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.9. $\square$

5.2. **Описание системы.** Рассмотрим сеть из N узлов (станций) и rN приборов. На станции требования поступают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности λ. Если на станции, куда поступила заявка, есть обслуживающий прибор, то заявка вместе с прибором перемещается в другой узел. Время перемещения распределено экспоненциально со средним 1. Перемещение прибора моделируется с помощью виртуального узла. Мы считаем, что когда прибор начинает перемещаться, он попадает в виртуальный узел. Там он пребывает экспоненциально распределённое время со средним 1. После этого прибор выбирает одну из N станций с вероятностью $1/N$ (обслуживание требования состоит в его перемещении с одной станции до другой и на этом заканчивается). На каждой станции есть m мест для приборов. Если все места заняты, то прибор опять направляется в виртуальный узел, где пребывает экспоненциально распределённое время со средним 1 и т.д. Если на станции, куда поступила заявка, нет ни одного прибора и длина очереди заявок не превосходит $k-1$, то заявка присоединяется к очереди, а иначе требование теряется для системы. Таким образом, максимальная длина очереди равна k. Схема сети изображена на рисунке 4.

Следовательно, каждый узел может находится в следующих состояниях:

- состоянии 0, если очереди заявок и приборов пусты,
- в состоянии $l > 0$, если очередь заявок пуста и в узле находится $l \leqslant m$ приборов,
- в состоянии $-l < 0$, если в узле находится в очереди $l \leqslant k$ заявок и нет приборов.

Обозначим через p_l долю узлов, которые находятся в состоянии l, через W количество приборов в виртуальном узле и через $V = W/N$ долю приборов в виртуальном узле.

Все случайные величины и входные пуассоновские потоки требований предполагаются независимыми в совокупности.

Из данного описания следует, что система описывается некоторым марковским процессом $U_N(t)$ с пространством состояний X_N, содержащем вектора $(V, p_{-k}, \ldots, p_l)$, удовлетворяющие следующим условиям

$$V \geqslant 0,\ p_l \geqslant 0 \text{ при всех } l = \overline{-k, m},\ V + \sum_{l=1}^{m} l p_l = r > 0$$

Л.Г. Афанасьева, Г. Файоль и С.Ю. Попов доказали в работе [23], что при $N \to \infty$ и неслучайном начальном состоянии, удовлетворяющем условию $V + \sum_{l=1}^{m} l p_l = r > 0$ марковский процесс $U_N(t)$ сходится по вероятности к детерминированной динамической системе, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_i = V(p_{i-1} - p_i) - \lambda(p_i - p_{i+1}) \text{ при } k < i < m. \tag{5.1}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{p}_{-k} &= -V p_{-k} + \lambda p_{-k+1}, \\ \dot{p}_m &= V p_{m-1} - \lambda p_m. \end{aligned}$$

Доля приборов в виртуальном узле описывается уравнением

$$\dot{V} = -V(p_0 + p_1 + \ldots + p_{m-1}) + \lambda(p_1 + \ldots + p_m).$$

Л.Г. Афанасьева, Г. Файоль и С.Ю. Попов в [23] нашли неподвижную точку этой системы, и доказали, что она единственная. Эта точка задаётся формулами

$$p_l^* = \begin{cases} \dfrac{\rho^{l+k}(\rho-1)}{\rho^{m+k+1}-1}, & \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{k+m+1}, & \rho = 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

и

$$V^* = \lambda\rho$$

где ρ единственным образом определяется из уравнения

$$r - \lambda\rho = L(\rho).$$

Функция $L(\rho) = \sum_{l=1}^{m} l p_l^*$ есть среднее число ожидающих приборов в стационарном состоянии (5.2) задаётся формулой

$$L(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{k+1}(m\rho^{m+1} - (m+1)\rho^m - 1)}{(\rho-1)(\rho^{m+k+1}-1)}, & \rho \neq 1, \\ \dfrac{m(m+1)}{2(k+m+1)}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Заметим, что в [23] не доказано, что любое решение с допустимыми начальными условиями притягивается к этой неподвижной точке. Для случая $k = 0$ такое доказательство получено В.И. Оселедцем и Д.В. Хмелёвым в работе [27] и изложено в разделе 2.

В силу конечности пространства состояний марковского процесса $U_N(t)$ и того, что все состояния сообщаются, следует, что у $U_N(t)$ существует единственная инвариантная мера μ_N. Из притяжения всех решений к неподвижной точке легко получить по аналогии с доказательством теоремы 2.4, что последовательность мер μ_N сходится по вероятности к вырожденной мере, сосредоточенной в неподвижной точке (5.2). Таким образом, нам достаточно сосредоточиться на доказательстве сходимости всех решений к стационарной точке при $k > 0$. Мы будем использовать теоремы пункта 5.1.

В первую очередь заметим, в система (5.1) сама по себе неудобна для поиска замены. Действительно, приведём пример уравнений при $k = 1$, $m = 3$:

$$
\begin{aligned}
&\dot V = -V(p_0 + p_1 + p_2) + \lambda(p_1 + p_2 + p_3),\\
&\dot p_{-1} = -Vp_{-1} + \lambda p_0,\\
&\dot p_0 = V(p_{-1} - p_0) - \lambda(p_0 - p_1),\\
&\dot p_1 = V(p_0 - p_1) - \lambda(p_1 - p_2),\\
&\dot p_2 = V(p_1 - p_2) - \lambda(p_2 - p_3),\\
&\dot p_3 = Vp_2 - \lambda p_3.
\end{aligned}
$$

Матрица Якоби имеет вид:

$$
\begin{pmatrix}
-(p_0 + p_1 + p_2) & 0 & -V & \lambda - V & \lambda - V & \lambda\\
-p_{-1} & -V & \lambda & 0 & 0 & 0\\
p_{-1} - p_0 & V & -(V+\lambda) & \lambda & 0 & 0\\
p_0 - p_1 & 0 & V & -(V+\lambda) & \lambda & 0\\
p_1 - p_2 & 0 & 0 & V & -(V+\lambda) & \lambda\\
p_2 & 0 & 0 & 0 & V & -\lambda
\end{pmatrix}
$$

Отметим, что в этой матрице очень много потенциально отрицательных элементов: например, весь первый столбец. С помощью перехода к накопленным долям от этих элементов можно избавиться, получив взамен всего один отрицательный элемент.

Итак, положим $u_j = \sum_{i=j}^{m} p_i$. Тогда $p_i = u_i - u_{i+1}$, $u_{-k} = 1$, $\dot u_{-k} = 0$. Система дифференциальных уравнений принимает вид

$$
\dot u_j = Vp_{j-1} - \lambda p_j = V(u_{j-1} - u_j) - \lambda(u_j - u_{j+1}) \tag{5.3}
$$

с краевыми условиями $u_{-k} = 1$ и $u_{m+1} = 0$, откуда

$$
\dot u_{-k+1} = V(1 - u_{-k+1}) - \lambda(u_{-k+1} - u_{-k+2}), \tag{5.4}
$$

$$
\dot u_m = V(u_{m-1} - u_m) - \lambda u_m. \tag{5.5}
$$

Уравнение на V принимает вид

$$
\dot V = -V(u_0 - u_m) + \lambda u_1. \tag{5.6}
$$

Приведём пример системы при $k = 1$, $m = 3$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= -V(u_0 - u_3) + \lambda u_1, \\
\dot{u}_0 &= V(1 - u_0) - \lambda(u_0 - u_1), \\
\dot{u}_1 &= V(u_0 - u_1) - \lambda(u_1 - u_2), \\
\dot{u}_2 &= V(u_1 - u_2) - \lambda(u_2 - u_3), \\
\dot{u}_3 &= V(u_2 - u_3) - \lambda u_3.
\end{aligned}$$

Здесь матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix}
-(u_0 - u_3) & -V & \lambda & 0 & V \\
1 - u_0 & -(V+\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\
u_0 - u_1 & V & -(V+\lambda) & \lambda & 0 \\
u_1 - u_2 & 0 & V & -(V+\lambda) & \lambda \\
u_2 - u_3 & 0 & 0 & V & -(V+\lambda)
\end{pmatrix}.$$

Как видно, отрицательный элемент только один: $-V$ в первой строке. Отметим, что такой же единственный отрицательный элемент возникает при всех $k \in \mathbb{N}$.

Введём вектор $u = (V, u_{-k+1}, \ldots, u_m)$. Тогда систему (5.6), (5.4), (5.3), (5.5) можно записать как

$$\dot{u} = \bar{g}(u, \lambda).$$

Эта система действует в инвариантном множестве

$$\begin{aligned}
U = \{u \in \mathbb{R}^{k+1+m} \mid V \geqslant 0, 1 \geqslant u_{-k+1} \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0, \\
V + u_{-k+1} + \ldots + u_m = r\}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.3. **Устойчивость для простейшей очереди.** В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Пусть $k = 1$, $m > 0$. При некотором $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, m)$, и $\lambda \geqslant 1 - \varepsilon$ существует единственное постоянное притягивающее решение $u^* \in U$.*

Из этой теоремы стандартным приёмом, использованном, например, в теореме 2.4 можно извлечь следующее утверждение

Следствие 5.3. *Пусть $k = 1$, $m > 0$. Существует такое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, m)$, что для всякого $\lambda \geqslant 1 - \varepsilon$ инвариантные меры μ_N марковского процесса $U_N(t)$ сходятся по вероятности к мере, сосредоточенной в неподвижной точке* (5.2).

Ограничения на λ в данной теореме, по-видимому, носят технический характер и не существенны с точки зрения самой задачи. Мы, тем не менее, проведём доказательство, чтобы показать, что замена координат действительно может помочь при доказательстве сходимости решений системы дифференциальных уравнений к неподвижной точке.

До конца этого пункта мы будем доказывать теорему 5.2. Используя теорему 4.2, можно показать, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $t^* > 0$ и компактное инвариантное множество $U_\varepsilon \subset U$, что для любого $u^0 \in U$ $u(t, u^0) \in U_\varepsilon$ при $t \geqslant t^*$ и для любого $u \in U_\varepsilon$ выполнены неравенства: $V \geqslant \varepsilon$, $1 - u_{-k+1} \geqslant \varepsilon$, $u_j - u_{j+1} \geqslant \varepsilon$, $u_m \geqslant \varepsilon$.

Заметим, что $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, m) \to 0$, если $m \to \infty$.

Рассмотрим случай $k = 1$, $m = 3$. Заметим, что для всех остальных $m > 0$ можно все приведённые ниже рассуждения повторяются и мы не будем их проводить, поскольку большое m приводит лишь к более громоздким матрицам. Напомним, что матрица Якоби имеет вид

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} -(u_0 - u_3) & -V & \lambda & 0 & V \\ 1 - u_0 & -(V+\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ u_0 - u_1 & V & -(V+\lambda) & \lambda & 0 \\ u_1 - u_2 & 0 & V & -(V+\lambda) & \lambda \\ u_2 - u_3 & 0 & 0 & V & -(V+\lambda) \end{pmatrix}$$

Первый интеграл задаётся вектором $\bar{v} = (1, 0, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Выберем преобразование $y = Tu$ с матрицей

$$T = I - \theta e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\theta > 0$, а $e_{i,j}$ — т.н. *матричная единица*, матрица, у которой j-тый элемент в строке i равен 1, а остальные элементы равны 0. Обратная матрица

$$T^{-1} = I + \theta e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение $T\bar{J}$ получается вычитанием в матрице $\bar{J}$ из первой строки второй, помноженной на θ:

$$T\bar{J} = \begin{pmatrix} -(u_0-u_3)-\theta(1-u_0) & -V+\theta(V+\lambda) & \lambda-\theta\lambda & 0 & V \\ 1-u_0 & -\gamma & \lambda & 0 & 0 \\ u_0-u_1 & V & -\gamma & \lambda & 0 \\ u_1-u_2 & 0 & V & -\gamma & \lambda \\ u_2-u_3 & 0 & 0 & V & -\gamma \end{pmatrix},$$

где $\gamma = V+\lambda$. Произведение $T\bar{J}T^{-1}$ получается из матрицы $T\bar{J}$ прибавлением первого столбца, помноженного на θ, ко второму:

$$T\bar{J}T^{-1} = \begin{pmatrix} -(u_0-u_3)-\theta(1-u_0) & \Gamma & \lambda-\theta\lambda & 0 & V \\ 1-u_0 & -\gamma+\theta(1-u_0) & \lambda & 0 & 0 \\ u_0-u_1 & V+\theta(u_0-u_1) & -\gamma & \lambda & 0 \\ u_1-u_2 & \theta(u_1-u_2) & V & -\gamma & \lambda \\ u_2-u_3 & \theta(u_2-u_3) & 0 & V & -\gamma \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = \Gamma(V,u_0,u_3,\theta) = -V+\theta(V+\lambda)+\theta(-(u_0-u_3)-\theta(1-u_0))$. Третий элемент в первой строке неотрицателен тогда и только тогда, когда $\lambda-\theta\lambda \geqslant 0 \iff \theta \leqslant 1$. Ввиду того, что мы рассматриваем систему на множестве U_ε,

$$\begin{aligned} \Gamma(V,u_0,u_3,\theta) = -(1-\theta)V+\theta\lambda+\theta(-\theta-(1-\theta)u_0+u_3) \geqslant \\ \geqslant \Gamma(r,1,\varepsilon,\theta) = -(1-\theta)r+\theta\lambda+\theta(-\theta-(1-\theta)+\varepsilon) = \\ = -(1-\theta)r+\theta(\lambda+\varepsilon)-\theta. \end{aligned}$$

Условие $\Gamma(r,1,\varepsilon,\theta) \geqslant 0$ гарантирует, что $\Gamma(V,u_0,u_3,\theta) \geqslant 0$. Изучим $\Gamma(r,1,\varepsilon,\theta) \geqslant 0$ более внимательно:

$$\begin{aligned} &-(1-\theta)r+\theta(\lambda+\varepsilon)-\theta \geqslant 0 \\ &\theta(\lambda+\varepsilon) \geqslant \theta+(1-\theta)r \\ &\lambda+\varepsilon \geqslant 1+(\frac{1}{\theta}-1)r. \end{aligned}$$

Выражение справа принимает минимальное значение при $\theta = 1$, откуда $\Gamma(r,1,\varepsilon,\theta) \geqslant \Gamma(r,1,\varepsilon,1) = \lambda+\varepsilon-1$. Таким образом, $\Gamma \geqslant 0$ при $\theta = 1$, если $\lambda \geqslant 1-\varepsilon$.

Таким образом мы подобрали оптимальное значение θ, при котором наше преобразование принимает вид

$$T = I - e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; T^{-1} = I + e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый интеграл $\bar{v}^{\mathrm{T}}\bar{g}$ переходит в первый интеграл $v^{\mathrm{T}}g$, где

$$v = (T^{-1})^{\mathrm{T}}\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введём матрицу

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $v^{\mathrm{T}}\tilde{B} = \varepsilon v$, т.е. матрица B является марковской. и на множестве U_ε выполнено неравенство $T\bar{J}T^{-1} + ((\lambda + r + 1))I \geqslant \tilde{B}$. Поскольку матрица $\tilde{B}$ пропорциональна циклической, матрица $(I + \tilde{B})^4 > 0$, откуда $k((I + \tilde{B})^4) > 0$

Таким образом мы проверили все условия теоремы 5.1 на множестве U_ε и как следствие получаем следующую лемму.

Лемма 5.4. *Если $\lambda \geqslant 1 - \varepsilon$, то на множестве TU_ε отображение $y(t, \cdot) = Tu(t, T^{-1}\cdot)$ является сжимающим с коэффициентом $q < 1$ и обладает единственной неподвижной точкой y^*.*

Из этой леммы получаем, что на множестве U_ε существует единственное инвариантное решение $u^* = T^{-1}y^*$, которое притягивает все остальные решения: $u(t, u^0) \to u^*$ при любом $u^0 \in U_\varepsilon$. Учитывая, что множество U_ε поглощает все траектории выходящие из множества U, мы получаем полное доказательство теоремы 5.2.

5.4. **Случай $k > 1$.** В этом пункте мы используем обобщаем теоремы предыдущего пункта на случай $k > 1$.

Теорема 5.5. *Пусть $k > 1$, $m > 0$. При некотором $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, k, m)$, и $\lambda \geqslant r + k - k\varepsilon$ существует единственное постоянное притягивающее решение $u^* \in U$.*

Из этой теоремы стандартным приёмом, использованном, например, в теореме 2.4 можно извлечь следующее утверждение

Следствие 5.6. *Пусть $k > 1$, $m > 0$. Существует такое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, m)$, что для всякого $\lambda \geqslant 1 - \varepsilon$ инвариантные меры μ_N марковского процесса $U_N(t)$ сходятся по вероятности к мере, сосредоточенной в неподвижной точке* (5.2).

До конца этого пункта мы будем доказывать теорему 5.2. Используя теорему 4.2, можно показать, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $t^* > 0$ и компактное инвариантное множество $U_\varepsilon \subset U$, что для любого $u^0 \in U$ $u(t, u^0) \in U_\varepsilon$ при $t \geqslant t^*$ и для любого $u \in U_\varepsilon$ выполнены неравенства: $V \geqslant \varepsilon$, $1 - u_{-k+1} \geqslant \varepsilon$, $u_j - u_{j+1} \geqslant \varepsilon$, $u_m \geqslant \varepsilon$.

Отметим, что $\varepsilon = \varepsilon(\lambda, r, m, k) \to 0$, если $m \to \infty$ или $k \to \infty$.

Для упрощения изображения матриц мы ограничимся случаем $k \geqslant 5$ и $m \geqslant 4$ (случаи $k \leqslant 4$ и $m \leqslant 3$ рассматриваются аналогично). Тогда матрица Якоби имеет следующий вид:

$$\bar{J} = \begin{pmatrix}
u_0 - u_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -V & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & V \\
p_{-k} & \gamma & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-k+1} & V & \gamma & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-k+2} & 0 & V & \gamma & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & V & \gamma & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V & \gamma & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V & \gamma & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \lambda & 0 \\
p_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & V & \gamma & \lambda \\
p_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V & \gamma
\end{pmatrix},$$

где $\gamma = -(\lambda + V)$ и $p_i = u_i - u_{i+1}$. Выберем преобразование $y = Tu$ с матрицей $T = I - (\theta_1 e_{1,1+1} + \theta_2 e_{1,1+2} + \ldots + \theta_k e_{1,1+k})$, где $\theta_j > 0$.

$$T = \begin{pmatrix}
1 & -\theta_1 & -\theta_2 & -\theta_3 & \ldots & -\theta_{k-1} & -\theta_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование имеет матрицу $T^{-1} = I + (\theta_1 e_{1,1+1} + \theta_2 e_{1,1+2} + \ldots + \theta_k e_{1,1+k})$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \ldots & \theta_{k-1} & \theta_k & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Первый интеграл $\bar{v}^{\mathrm{T}}\bar{g}$ переходит в первый интеграл $v^{\mathrm{T}}g$, где

$$\begin{aligned} v = (T^{-1})^{\mathrm{T}}\bar{v} = (T^{-1})^{\mathrm{T}}(1,0,0,0,\ldots,0,1,1,1,\ldots,1,1,1)^{\mathrm{T}} = \\ = (1,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots,\theta_k,1,1,1,\ldots,1,1,1)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Первая строка матрицы $T\bar{J}$ равна сумме $1+k$ начальных строк с соответствующими элементами, а остальные строки совпадают с соответствующими строками $\bar{J}$:

$$T\bar{J} = \begin{pmatrix}
\varkappa_0 & \varkappa_1 & \varkappa_2 & \varkappa_3 & \dots & \varkappa_{k-1} & \varkappa_k & \lambda-\theta_1\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & V \\
p_{-k} & \gamma & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-k+1} & V & \gamma & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-k+2} & 0 & V & \gamma & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & V & \gamma & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V & \gamma & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\
p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & V & \gamma & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
p_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \lambda & 0 \\
p_{m-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & V & \gamma & \lambda \\
p_m & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V & \gamma
\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
&\varkappa_0 = -(u_0 - u_m) - \sum_{i=1}^{k} \theta_i p_{i-k-1}, \\
&\varkappa_1 = \theta_1(V+\lambda) - \theta_2 V = \lambda\theta_1 - V(\theta_2 - \theta_1), \\
&\varkappa_2 = -\theta_1\lambda + \theta_2(V+\lambda) - V\theta_3 = \lambda(\theta_2 - \theta_1) - V(\theta_3 - \theta_2), \\
&\dots \\
&\varkappa_j = \lambda(\theta_j - \theta_{j-1}) - V(\theta_{j+1} - \theta_j), \\
&\dots \\
&\varkappa_k = -V - \theta_{k-1}\lambda + \theta_k(V+\lambda) = \lambda(\theta_k - \theta_{k-1}) - V(1 - \theta_k).
\end{aligned}$$

Матрица $T\bar{J}T^{-1}$ получается из матрицы $T\bar{J}$ прибавлением первого столбца, помноженного на $\theta_j > 0$, к $j+1$ столбцу ($j = 1, \dots, k$). Следовательно, к элементам всех строк, кроме первой добавляются неотрицательные числа. Поэтому отрицательные элементы могут появиться только в первой строке матрицы $T\bar{J}T^{-1}$. Непосредственным вычислением получаем, что первая строка $T\bar{J}T^{-1}$ имеет следующий вид

$$\big(\varkappa_0, \varkappa_1 + \theta_1\varkappa_0, \varkappa_2 + \theta_2\varkappa_0, \dots, \varkappa_k + \theta_k\varkappa_0, \lambda - \theta_k\lambda, 0, \dots, 0, V\big).$$

Требование неотрицательности всех недиагональных элементов матрицы $T\bar{J}T^{-1}$ приводит к системе неравенств

$$\varkappa_j + \theta_j \varkappa_0 \geqslant 0,$$
$$\lambda(1-\theta_k) \geqslant 0.$$

Эта система эффективно решается в предположении $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_k \leqslant 1$. Тогда $\varkappa_0 \geqslant -1+\varepsilon$ на U_ε. Действительно,

$$\begin{aligned}\varkappa_0 &= -(u_0 - u_m) - \sum_{i=1}^{k} \theta_i p_{i-k-1} = \\ &= u_m - \big(u_0(1-\theta_k) + u_{-1}(\theta_k - \theta_{k-1}) + \ldots + \theta_1 u_{-k+1}\big) \geqslant \\ &\geqslant \varepsilon - \big((1-\theta_k) + (\theta_k - \theta_{k-1}) + \ldots + \theta_1\big) = \varepsilon - 1.\end{aligned}$$

Система, таким образом свелась к неравенствам

$$\varkappa_j - \theta_j + \varepsilon\theta_j \geqslant 0$$

или

$$\begin{aligned}&\lambda\theta_1 - V(\theta_2-\theta_1) - \theta_1 + \varepsilon\theta_1 \geqslant 0,\\ &\lambda(\theta_2-\theta_1) - V(\theta_3-\theta_2) - \theta_2 + \varepsilon\theta_2 \geqslant 0,\\ &\ldots\\ &\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}) - V(\theta_{j+1}-\theta_j) - \theta_j + \varepsilon\theta_j \geqslant 0,\\ &\ldots\\ &\lambda(\theta_k-\theta_{k-1}) - V(1-\theta_k) - \theta_k + \varepsilon\theta_k \geqslant 0.\end{aligned}$$

Все неравенства заведомо будут верны, если будет подобрать θ_j удовлетворяющим этим неравенствам при $V = r$:

$$\begin{aligned}&(\lambda+\varepsilon)\theta_1 \geqslant r(\theta_2-\theta_1) + \theta_1,\\ &\lambda(\theta_2-\theta_1) + \varepsilon\theta_2 \geqslant r(\theta_3-\theta_2) + \theta_2,\\ &\ldots\\ &\lambda(\theta_j-\theta_{j-1}) + \varepsilon\theta_j \geqslant r(\theta_{j+1}-\theta_j) + \theta_j,\\ &\ldots\\ &\lambda(\theta_k-\theta_{k-1}) + \varepsilon\theta_k \geqslant r(1-\theta_k) + \theta_k.\end{aligned}$$

Подставим в эту систему $\theta_j = j/(k+1)$, домножив все неравенства на $(k+1)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda + \varepsilon \geqslant r + 1,\\
&\lambda + 2\varepsilon \geqslant r + 2,\\
&\dots\\
&\lambda + j\varepsilon \geqslant r + j,\\
&\dots\\
&\lambda + k\varepsilon \geqslant r + k.
\end{aligned}$$

Очевидно, при $\lambda \geqslant r + k - k\varepsilon$ значения $\theta_j = j/(k+1)$ дают решение системы неравенств, а следовательно замена координат T с такими θ_j обеспечивают неотрицательность недиагональных элементов матрицы Якоби $\tilde{J} = T\bar{J}T^{-1}$. Остаётся заметить, что $\tilde{J} + (\lambda + r + 1)I \geqslant \tilde{B}$ на U_ε, где

$$\tilde{B} = \frac{\varepsilon}{\theta^*}\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\\
1/\theta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & \theta_1/\theta_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \theta_2/\theta_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{k-1}/\theta_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \theta_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},$$

где $\theta^* = \max(1/\theta_1, \theta_1/theta_2, \dots, \theta_{k-1}/\theta_k, \theta_k, 1)$. Вектор v^{T} является собственным вектором матрицы $\tilde{B}$ со значением (ε/θ^*): $v^{\mathrm{T}}\tilde{B} = (\varepsilon/\theta^*)v^{\mathrm{T}}$. Очевидно, матрица $(I+\tilde{B})^{k+1+m} > 0$, откуда очевидным образом следует, что она плохо приводима, и все условия теоремы 5.1 выполнены. С учётом обратной замены координат, аналогично теореме 5.2, мы получаем полное доказательство теоремы 5.5.

6. Кластерная транспортная сеть

В этом разделе мы рассмотрим модель транспортной системы которая обобщает в сторону асимметрии систему, которую рассматривали Л.Г. Афанасьева и другие в [23], Д.В. Хмелёв и В.И. Оселедец в [27] и которая также рассматривалась в разделе 2 настоящей диссертации. Вначале мы приведём описание модели и полученные результаты, и лишь затем дадим доказательства высказанных утверждений. Заметим, что несмотря на то, что такое обобщение достаточно прямолинейно, строгое доказательство без использования изложенного подхода могло бы потребовать множества дополнительных выкладок. В частности, Г. Файоль и Ф. Делкойн в своей работе [26] формулируют результаты для случая кластерных транспортных сетей, но опускают часть доказательств.

Рассмотрим сеть из N узлов (станций), которые делятся на n районов. При увеличении N количество районов остаётся неизменным. Количество станций в районе j равно $d_j^N N$, $\sum_{j=1}^n d_j^N = 1$, $d_j^N N$ — целое число для всякого j и N. Существуют такие $d_j > 0$, что $\sqrt{N}(d_j^N - d_j) \xrightarrow{N\to\infty} 0$ для $j = \overline{1,n}$. Далее j и v обозначают номер района и могут принимать значения от 1 до n. На станцию в j-м районе требования поступают в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $\lambda_j > 0$. Если на станции нет ни одного прибора, заявка теряется. Иначе прибор перемещает заявку.

Перемещение моделируется с помощью введения n^2 виртуальных узлов. Прибор выбирает виртуальный узел $(j,\, v)$ с вероятностью p_{jv}, остаётся там экспоненциально распределённое время с математическим ожиданием $1/\mu_{jv}$ и затем равновероятно наугад выбирает станцию в районе v. Матрица $P = \{p_{jv}\}_{j,v=\overline{1,n}}$ — стохастическая. Все станции v-го района однотипны — на каждой из них может базироваться не более m_v приборов. Если прибор, который прибыл в v-тый район, не находит свободной стоянки, то он направляется (без требования) в виртуальный узел $(v,\, l)$ в соответствии со стохастической матрицей $\widetilde{P} = \{\tilde{p}_{vl}\}_{v,l=\overline{1,n}}$; первоначально на всех станциях в j-м районе находится r_j приборов, где r_j — целые числа от 1 до m_j. Для того, чтобы наши теоремы были справедливы, необходимо следующее ограничение: матрица $(P + \widetilde{P})/2$ должна быть матрицей переходных вероятностей эргодичной цепи Маркова. Суть последнего условия состоит в том, чтобы приборы могли попасть из любого района в любой другой.

Пусть $f_{j,i}$ — количество узлов с i приборами в кластере j, а V_{jv} — количество приборов в виртуальном узле $(j,\, v)$. Определим

$$u_{j,i} = \sum_{k=i}^{m_j} f_{ji}/N,\ M_{jv} = V_{jv}/N.$$

Для $j = 1, \ldots, n$

$$d_j^N = u_{j,0} \geqslant u_{j,1} \geqslant \ldots \geqslant u_{j,m_j} \geqslant u_{j,m_j+1} = 0. \tag{6.1}$$

и для $v = 1, \ldots, n$

$$M_{jv} \geqslant 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum_{v=1}^{n} M_{jv}\right) = \sum_{j=1}^{n} r_j d_j^N. \tag{6.2}$$

Обозначим через $\mathcal{U}_N$ множество векторов $u = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,m_1}, u_{2,1}, \ldots, u_{n,m_n}, M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{nn})^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих (6.1) и (6.2), где $u_{j,i} = x_{j,i}/N$, $M_{jv} = y_{jv}/N$ и $x_{j,i}$, y_{jv} неотрицательные целые числа.

Пусть также $\mathcal{U}$ — множество таких векторов $u = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,m_1}, u_{2,1}, \ldots, u_{n,m_n}, M_{11}, M_{12}, \ldots, M_{nn})^{\mathrm{T}}$, что для $j = 1, \ldots, n$

$$d_j = u_{j,0} \geqslant u_{j,1} \geqslant \ldots \geqslant u_{j,m_j} \geqslant u_{j,m_j+1} = 0 \tag{6.3}$$

и для $v = \overline{1,n}$

$$M_{jv} \geqslant 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum_{v=1}^{n} M_{jv}\right) = \sum_{j=1}^{n} r_j d_j. \tag{6.4}$$

Очевидно, $\mathcal{U}_N \subset (1/N)\mathbb{Z}^{\alpha}$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\alpha}$, где $\alpha = n^2 + \sum_{j=1}^{n} k_j$. Для $l = 1, \ldots, \alpha$ обозначим через $e_l \in \mathbb{R}^{\alpha}$ вектор, у которого координата l равна 1, а все остальные равны нулю.

Пусть $e_{u_{j,i}}$ ($e_{M_{jv}}$) — единичный вектор $e_{\varkappa(u_{j,i})}$ ($e_{\varkappa(M_{jv})}$), где $\varkappa(u_{j,i})$ ($\varkappa(M_{jv})$) задаёт координату в векторе $u \in \mathcal{U}$ соответствующую $u_{j,i}$ (M_{jv}).

Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Из данного выше описания следует, что мы рассматриваем однородную цепь Маркова со следующим производящим оператором

$$A_N f(u) = \int K_N(u, dy)[f(u+y) - f(u)], \tag{6.5}$$

где $K_N(u, dy)$ — следующее дискретное переходное ядро при $u \in \mathcal{U}_N$:

$$K_N(u, dy) = \begin{cases} \text{для } j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m_j},\ v = \overline{1,n} \text{ с весом } N\lambda_j(u_{j,i} - \\ u_{j,i+1})p_{jv} \text{ в точке } (-e_{u_{j,i}} + e_{M_{jv}})/N, \\ \text{для } j, v = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m_v} \text{ с весом } N\mu_{jv}M_{jv}(u_{v,i-1} - \\ u_{v,i})/d_v^N \text{ в точке } (e_{u_{v,i}} - e_{M_{jv}})/N, \\ \text{для } j, v = \overline{1,n},\ l = \overline{1,n} \text{ с весом } N\mu_{jv}M_{jv}u_{v,m_v}\tilde{p}_{vl}/d_v^N \text{ в} \\ \text{точке } (-e_{M_{jv}} + e_{M_{vl}})/N, \end{cases}$$

где $u_{j,0} = d_j^N$ и $u_{j,m_j+1} = 0$. Первая группа весов соответствует прибытию заявки в узел в районе j. Вторая группа весов соответствует прибытию прибора в район v. Третья группа весов относится к случаю переполнения числа приборов в районе v ($u_{j,i} - u_{j,i+1}$ есть вероятность того, что наугад выбранный узел относится к району j и имеет i приборов).

Мы докажем (теорема 6.2), что для любого конечного интервала времени при $N \to \infty$ эволюция u удовлетворяет закону больших чисел и предельная детерминированная динамика описывается решением следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{j,i}}{\partial t} &= M^j u_{j,i-1}/d_j - (\lambda_j + M^j/d_j)u_{j,i} + \lambda_j u_{j,i+1}, \\ \dfrac{\partial M_{jv}}{\partial t} &= \lambda_j u_{j,1} p_{jv} - \mu_{jv} M_{jv} + M^j u_{j,m_j} \tilde{p}_{jv}/d_j. \end{cases} \tag{6.6}$$

при $j,\ v = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m_j}$, где $u_{j,0}(t) = d_j$, $u_{j,m_j+1}(t) = 0$ для всех t и $M^j(t) = \sum_{l=1}^{n} \mu_{lj} M_{lj}(t)$. Далее, мы рассмотрим решение (6.6) с начальными условиями

$$u_{j,i}(0) = g_{\varkappa(u_{j,i})},\ M_{jv}(0) = g_{\varkappa(M_{jv})}. \tag{6.7}$$

Обозначим через $u(t,\, g)$ решение задачи Коши (6.6) и (6.7), $u(0,\, g) = g$.

Марковский процесс $U_N = U_N(t)$, определяемый оператором (6.5) со значениями в $\mathcal{U}_N$, определяет полугруппу $T_N(t)$ на пространстве непрерывных функций $C(U_N)$. Если $f\colon \mathcal{U}_N \to \mathbb{R}$, то

$$T_N(t)f(u) = \mathbf{E}(f(U_N(t)) \mid U_N(0) = u),\ u \in \mathcal{U}_N.$$

Пусть $\gamma_j^N = d_j^N/d_j$. Линейный оператор $\eta_N\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^\alpha$ отображает $u \in \mathcal{U}$ в $(\gamma_1^N u_{1,1},\ \ldots,\ \gamma_1^N u_{1,m_1},\ \gamma_2^N u_{2,1},\ \ldots,\ \gamma_n^N u_{n,m_n},\ M_{11},\ M_{12},\ \ldots,\ M_{nn})^{\mathrm{T}}$. Область определения $\mathcal{D}(\eta_N)$ оператора η_N включает все $u \in \mathcal{U}$, для которых $\eta_N(u) \in \mathcal{U}_N$.

Для $x \in \mathbb{R}^\alpha$ введём норму

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\alpha} |x_i|.$$

Теорема 6.1. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) В $\mathcal{U}$ существует, единственно и неограниченно продолжаемое решение $u(t,\, g)$ задачи Коши (6.6), (6.7).

(б) В множестве $\mathcal{U}$ существует единственное стационарное решение $g^* \in \mathcal{U}$: $u(t,\, g^*) = g^*$.

(в) Для некоторого $\gamma > 0$ для любого $g \in \mathcal{U}$: $\|u(t,g) - g^*\| \leqslant const e^{-t\gamma}$.

Пусть $C(\mathcal{U})$ — линейное пространство функций непрерывных на $\mathcal{U}$.

Теорема 6.2. $\forall f \in C(\mathcal{U})\ \forall t \geqslant 0$

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \sup_{g \in \mathcal{D}(\eta_N)} |T_N(t) f(\eta(g)) - f(u(t,g))| = 0.$$

Обозначим через ε_g распределение, сосредоточенное в точке $g \in \mathcal{U}$.

Теорема 6.3. *Если $U_N(0)$ слабо сходится к ε_g, то*

$$\forall t \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|U_N(t) - u(t,g)\| \to 0 \text{ по вероятности.}$$

Марковский процесс U_N обладает единственной стационарной мерой μ_N.

Теорема 6.4. *μ_N слабо сходится к ε_{g^*}.*

Положим в системе (6.6) левые части равными 0. Мы получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &0 = M^j u_{j,i-1}/d_j - (\lambda_j + M^j/d_j)u_{j,i} + \lambda_j u_{j,i+1}, \\ &0 = \lambda_j u_{j,1}p_{jv} - \mu_{jv}M_{jv} + M^j u_{j,m_j}\tilde{p}_{jv}/d_j \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

при j, $v = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,m_j}$. В силу пункта (б) теоремы 6.1 существует и единственно решение (6.8) удовлетворяющее (6.3) и (6.4). Такое решение является единственным стационарным решением (6.6).

Пусть $x_{j,i} = u_{j,i} - u_{j,i+1}$ для $i = 0, \ldots, m_j$, $x_{j,-1} = x_{j,m_j+1} = 0$. Находим, что $u_{j,1} = x_{j,1} + \ldots + x_{j,m_j}$ и $u_{j,m_j} = x_{j,m_j}$. Можно проверить, что

$$\frac{x_{j,i}}{d_j} = \frac{\rho_j^i(\rho_j - 1)}{\rho_j^{1+m_j} - 1}, \tag{6.9}$$

где $\rho_j = M^j/(\lambda_j d_j)$. Ввиду (6.8) и (6.9), замечаем что все $u_{j,i}$ и M_{jv} выражаются через M^j.

Заметим, что M^j имеет ясный смысл — это интенсивность поступления автомобилей в узел j. Заметим, что формула для распределения автомобилей по узлам в каждом районе аналогична формуле (2.6) для одного района: и в том и в другом случае распределение геометрическое и зависит лишь от входной интенсивности поступления приборов и интенсивности поступления заявок.

Введём вектора $a = (M^1, M^2, \ldots, M^n)^{\mathrm{T}}$ и $b = (M^1 u_{1,m_1}/d_1, \ldots, M^n u_{n,m_n}/d_n)^{\mathrm{T}}$. Ввиду (6.9), u_{j,m_j} выражается через M^j. Получается, что b выражается через a. Ввиду (6.8), получаем следующую систему

$$a^{\mathrm{T}} = (a - b(a))^{\mathrm{T}} P + (b(a))^{\mathrm{T}} \widetilde{P}. \tag{6.10}$$

Пусть $u(a)$ обозначает решение (6.8), выраженное через a. Ввиду теоремы 6.1, существует и единственно такое решение (6.10), что $u(a) \in \mathcal{U}$. Явные формулы для a появляются в частных случаях, перечисленных в следующей теореме. Пусть $L(u) = \sum_{j=1}^n \bigl(\sum_{i=1}^{m_j} u_{j,i} + \sum_{v=1}^n M_{jv}\bigr)$.

Теорема 6.5. *Предположим, что $P\widetilde{P}$ обладает единственной инвариантной мерой $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)^{\mathrm{T}}$, $\pi^{\mathrm{T}} P\widetilde{P} = \pi^{\mathrm{T}}$, $\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$, $\pi_1 > 0, \ldots, \pi_n > 0$.*

Существует такое единственное $\zeta^* > 0$, что *а) если* $\widetilde{P} = I$*, то решение* (6.10) *удовлетворяет* $a - b(a) = \zeta^*\pi$*,*

б) если $P = I$*, то решение* (6.10) *удовлетворяет* $b(a) = \zeta^*\pi$*,*

в) если $P = \widetilde{P}$*, то решение* (6.10) *есть* $a = \zeta^*\pi$*,*

Существует единственное решение $a(\zeta)$ *уравнения* $a - b(a) = \zeta\pi$*. Если* $0 < \zeta_1 < \zeta_2$*, то* $a(\zeta_1) < a(\zeta_2)$*. Аналогичное утверждение верно в случаях б) и в).*

Если ζ *увеличивается, то* $L(u(a(\zeta)))$ *увеличивается. Решение* $\zeta^* > 0$ *уравнения*

$$L(u(a(\zeta^*))) = r_1 d_1 + \ldots + r_n d_n.$$

существует и единственно.

Перейдём к обоснованию предложенных утверждений.

Доказательство теоремы 6.1. Предположим, что $p_{jv} + \tilde{p}_{jv} > 0$ при любых j и v. Обобщение на случай эргодичной $(P + \widetilde{P})/2$ не составляет труда.

Уравнение (6.6) можно записать в виде

$$\dot{u} = f(u),\ f\colon \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R}^\alpha,\ u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^\alpha.$$

Существование и единственность решения при достаточно малых временах следует из обычной теоремы существования и единственности. Пункт (а) теоремы 6.1 следует из следующей леммы.

Лемма 6.6. *При любом* t *множество* $\mathcal{U}$ *инвариантно относительно* $u(t,\ \cdot)$*.*

Доказательство леммы подобно [48, Лемма 1] или [27, Теорема 2.1]. Перейдём к доказательству пунктов (б) и (в).

Лемма 6.7. *Существует такое выпуклое компактное множество* $\mathcal{U}_\varepsilon \subset \mathrm{Int}(\mathcal{U})$*, которое инвариантно относительно отображения* $u(t,\ \cdot)$ *и для всех* $g \in \mathcal{U}$ *за равномерно малое время* t *выполнено* $u(t,\ g) \in \mathcal{U}_\varepsilon$*.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4.2 (она приведена ниже), для доказательства достаточно показать выполнение следующих двух пунктов:

(а) для любой вершины g множества $\mathcal{U}$ вектор $f(g)$ не равен нулю и при достаточно малых δ выполнено $g + \delta f(g) \in \mathcal{U}$,

(б) для любой грани $\Gamma \subset \mathcal{U}$ $(\Gamma \neq \mathcal{U})$, для любого g, принадлежащего относительной внутренности Γ, вектор $g + f(g)$ не принадлежит аффинной оболочке этой грани и при достаточно малых δ выполнено $g + \delta f(g) \in \mathcal{U}$.

Пункт (а) проверяется непосредственно. Перейдём к доказательству выполнения пункта (б) в нашей системе.

Для любого $g \in \mathcal{U}$ выполнение $g + \delta f(g) \in \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что множество $\mathcal{U}$ инвариантно относительно системы $\dot{u} = f(u)$, что вытекает из леммы 6.6.

Обозначим через $\bar{S}$ множество всех n^2 упорядоченных пар (j, v) целых чисел $1 \leqslant j$, $v \leqslant n$. Для $S \subset \bar{S}$ определим множество $G_S = \{$ грани $\Gamma \subset \mathcal{U} \mid \forall (j, v) \in S\ \forall g \in \operatorname{ri}\Gamma$ $\langle g, e_{M_{jv}} \rangle > 0$, и $\forall (j, v) \in \bar{S} \setminus S\ \forall g \in \operatorname{ri}\Gamma\ \langle g, e_{M_{jv}} \rangle = 0 \}$.

Если S пусто, то $\forall g \in \Gamma \in G_S\ \forall (j, v)\ \langle g, e_{M_{jv}} \rangle = 0$. Поскольку $L(g) = r_1 d_1 + \ldots r_n d_n > 0$, $\exists j\ \exists i$: $\langle g, e_{u_{j,i}} \rangle > 0$, но из монотонной упорядоченности координат получаем, что $\langle g, e_{u_{j,1}} \rangle > 0$. Ввиду стохастичности матрицы P существует $p_{jv} \neq 0$. Отсюда получаем, что $\langle f(g), e_{M_{jv}} \rangle = \lambda_j \langle g, e_{u_{j,1}} \rangle p_{jv} > 0$, а следовательно $g + f(g) \notin \operatorname{aff}\Gamma$, поскольку $\forall \mathbf{h} \in \operatorname{aff}\Gamma$: $\langle \mathbf{h}, e_{M_{jv}} \rangle = 0$.

Пусть теперь $S = \bar{S}$. Для удобства записи введём вектора $e_{u_{j,0}} = e_{u_{j,m_j+1}} = 0$. Для единообразия в пределах следующих двух абзацев будем считать, что $\langle g, e_{u_{j,0}} \rangle = d_j$ (но $\langle f(g), e_{u_{j,0}} \rangle = 0!$). Для любой грани $\Gamma \in G_S$ существуют такие j и i, что (i) $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant i \leqslant m_j$; (ii) $\forall g \in \operatorname{ri}(\Gamma)\ \langle g, e_{u_{j,i}} \rangle = \langle g, e_{u_{j,i+1}} \rangle$. Можно проверить, что $\langle f(g), e_{u_{j,i}} - e_{u_{j,i+1}} \rangle > 0$, что завершает рассмотрение случая.

Рассмотрим случай $S \neq \bar{S}$ и $S \neq \varnothing$. Представим G_S в виде объединения $G_S = G'_S \cup G''_S$, где $G''_S = G_S \setminus G'_S$, а $G'_S = \{\Gamma \in G \mid \exists j,\ i$ что выполнены условия (i) и (ii) предыдущего абзаца и $\exists w$: $(w, j) \in S\ \}$. Для любой грани $\Gamma \in G'_S$ для любого $g \in \Gamma$ можно проверить, что $\langle f(g), e_{u_{j,i}} - e_{u_{j,i+1}} \rangle > 0$, что позволяет перейти к рассмотрению множества G''_S.

Поскольку $(P + \widetilde{P})/2 > 0$, $\exists (j, v) \notin S\ \exists w\ (w, j) \in S$: $p_{jv} \neq 0$, либо $\tilde{p}_{jv} \neq 0$. Пользуясь тем, что $\forall g \in \Gamma \in G''_S\ \langle g, e_{u_{j,1}} \rangle \geqslant \langle g, e_{u_{j,m_j}} \rangle > 0$, получаем $\langle f(g), e_{M_{jv}} \rangle > 0$, что и требовалось. □

Заметим, что если стационарное решение g^* существует, то, ввиду последней леммы, $g^* \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Также можно проверить утверждение (в) только для $g \in \mathcal{U}_\varepsilon$.

Проверим выполнение условий теоремы [27, Теорема 3.3] для нашей системы.

Система (6.6) обладает замечательным свойством: матрица Якоби $J(u)$ из частных производных правых частей (6.6) по компонентам вектора u имеет отрицательные элементы только по диагонали для любого $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Поскольку $\mathcal{U}_\varepsilon$ компактно, существует

$$c = \max_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon} \max_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} (-J_{ii}(u)).$$

Обозначим через I единичную матрицу. Далее мы покажем существование такой матрицы C, что

(i) $\forall u \in \mathcal{U}_\varepsilon J(u) + (c+1)I \geqslant C \geqslant 0$,

(ii) $\exists c' > 0$: матрица $c'C^{\mathrm{т}}$ является стохастической матрицей переходных вероятностей эргодичной дискретной цепи Маркова.

В этом случае из [27, Теорема 3.3] вытекает, что для любого $\tau > 0$ отображение $u(\tau, \cdot)\colon \mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}_\varepsilon$ является сжимающим с коэффициентом сжатия меньшим 1, т.е. $\forall g_1$,

$g_2 \in \mathcal{U}_\varepsilon$: $\|u(\tau, g_2) - u(\tau, g_1)\| \leqslant \theta \|g_2 - g_1\|$, $\theta < 1$. Утверждения (б) и (в) теоремы 6.1 получаются как следствия теоремы о сжимающем отображении в полном метрическом пространстве.

Для проверки существования матрицы C со свойствами (i), (ii) достаточно убедиться, что при фиксированном $u \in \mathcal{U}$ матрица $J^{\mathrm{T}}(u)$ является матрицей интенсивностей эргодичной цепи Маркова из α состояний с непрерывным временем. Из теории цепей Маркова следует, что последнее свойство можно проверять просто для $J(u)$.

Обозначим состояния цепи с матрицей интенсивностей переходов $J(u)$ через $e_{u_{j,i}}$ и $e_{M_{jv}}$. Интенсивность перехода между состояниями e_l и e_s равна $J_{ls}(u)$.

Переходы $e_{u_{j,i}} \leftrightarrow e_{u_{j,i+1}}$ при $i = 1, \ldots, m_j - 1$ имеют место, поскольку частная производная $\dot{u_{j,i}}$ по $u_{j,i+1}$ равна $\lambda_j > 0$, а частная производная $\dot{u_{j,i}}$ по $u_{j,i-1}$ равна $M^j/d_j > 0$ (отметим, что $M^j > 0$ поскольку $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$).

Производная $\dot{u_{j,i}}$ по M_{kj} равна $\mu_{kj}(u_{j,i-1} - u_{j,i})/d_j > 0$, а следовательно получаем наличие переходов $e_{u_{j,i}} \to M_{kj}$ для произвольного k.

Взяв частную производную $\dot{M}_{jv}$ по $u_{j,1}$ убеждаемся в наличии перехода $e_{M_{jv}} \to e_{u_{j,1}}$ при $p_{jv} > 0$ и перехода $e_{M_{jv}} \to e_{u_{j,m_j}}$ при $\tilde{p}_{jv} > 0$.

Следовательно, для любого k есть опосредованная связь $e_{M_{jv}} \to e_{M_{kj}}$ при $p_{jv} + \tilde{p}_{jv} > 0$. В силу того, что $(P + \widetilde{P})/2 > 0$, все состояния $\{e_{u_{j,i}}, e_{M_{jv}}\}$ являются сообщающимися. Поскольку $\mathcal{U}_\varepsilon$ отделено от границы $\mathcal{U}$, свойство связности справедливо для любого $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$ и не нарушается при взятии минимума по всем таким $u \in \mathcal{U}_\varepsilon$, а следовательно, (i) обосновано, а теорема 6.1 доказана. □

Из общей теоремы о сходимости марковских процессов (см. [47, Глава 1, Теорема 6.1]) аналогично [48] или [27] показывается справедливость теоремы 6.2.

Теорема 6.3 вытекает из теоремы 2 и, например, [47, Глава 4, Теорема 2.11]. Кроме того, теорему можно извлечь из теорем о сходимости чисто ступенчатых марковских процессов [65, том 2, глава IX, параграф 4b]. Там же читатель найдёт оценку скорости сходимости (отклонение имеет порядок $1/\sqrt{N}$).

Доказательство теоремы 6.4. Из компактности $\mathcal{U}$ вытекает, что вероятностные меры на $\mathcal{U}_N$ образуют множество, компактное относительно слабой сходимости. Из теоремы 6.2 следует, что всякая мера μ, являющаяся предельной точкой для последовательности мер $\mu_N \eta_N$, инвариантна относительно отображения $u(t, \cdot)\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Ввиду пунктов (б) и (в) теоремы 6.1, μ совпадает с мерой, сосредоточенной в точке g^*, что завершает доказательство. □

Утверждения теоремы 6.5 проверяются непосредственно обычными методами математического анализа.

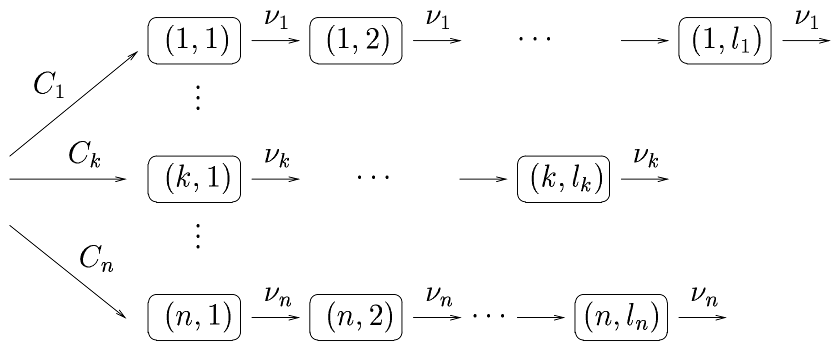

Рис. 5. Моделирование гиперэрланговского распределения

7. Транспортная сеть с непоказательным распределением времени перемещения приборов

Заметим, что все модели, рассмотренные в предыдущих разделах, а также освещённые в многочисленных работах [23, 48, 49, 50, 51, 52, 53] предполагают экспоненциальность времён обслуживания.

В контексте сетей обслуживания и, в частности, для сетей Джексона единственной работой, в которой удалось получить результаты в неэкспоненциальном случае, была работа А.Л. Столяра [33], в которой рассматривался случай постоянного времени обслуживания. Некоторая попытка моделирования общего времени обслуживания предпринята в работе Н.Д. Введенской и Ю.М. Сухова [57]. Случай общих времён обслуживания исследовали также Ф.И. Рыбко и А.Н. Карпелевич в работе [32]. Они доказали, что конечная сеть сетей обслуживания сходится к некоторой нетривиальной предельной динамической системе. Вопрос о сходимости решений этой предельной динамической системы к неподвижной точке, тем не менее, остаётся открытым.

Здесь мы рассматриваем простейшую модель транспортной сети с тем усложнением, что время перемещения прибора от одного узла к другому распределено не показательно, а по т.н. гиперэрланговскому закону. Гиперэрланговским законом называют конечную смесь *эрланговских* распределений, а эрланговское распределение в свою очередь имеет плотность 0 при $x<0$ и $\nu^l x^{le^{-\nu x}}/(l-1)!$ при $x>0$, где параметры удовлетворяют условиям $\nu>0$ и $l\in\mathbb{N}$.

В тоже время, хорошо известно (см., например книгу Н.П. Бусленко, В.В. Калашникова и И.Н. Коваленко [54, с.265–269], а также книгу С. Асмусена [55, с.71–78]), что конечная смесь эрланговских распределений сколь угодно точно в метрике пространства L^1 приближает любое заданное наперёд распределение с конечным средним.

Основной результат этого раздела состоит в том, что при большом количестве компонент системы распределение приборов по узлам системы зависит лишь от математического ожидания гиперэрланговского распределения, а вид этого распределения такой же как для экспоненциального случая.

Следует отметить, что попытки «непосредственного» применения гиперэрланговской аппроксимации к системам, которые исследовались в [23, 48, 49, 50, 51, 52, 53], приводят к системам дифференциальных уравнений, у матрица Якоби которых имеет отрицательные элементы. В рассматриваемой здесь модели такого не происходит.

Для моделирования перемещения прибора мы воспользуемся хорошо известным в теории массового обслуживания методом (см. [54, с.264]), который иногда называется *методом фаз*. Рассмотрим плотность вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{\nu_k^{l_k} x^{l_k - 1}}{(l_k - 1)!} e^{-\nu_k x}, \tag{7.1}$$

при $x > 0$, $l_k \in \mathbb{N}$, $\nu_k > 0$, причём $C_k > 0$ при всех k и $C_1 + \ldots + C_n = 1$. Такая плотность и называется *гиперэрланговской*. Случайная величина ξ с указанным распределением интерпретируется следующим образом. Построим марковский процесс с состояниями вида (k, j), где $k = 1, \ldots, n$, а j при фиксированном k принимает значения $1, \ldots, l_k$. Вначале разыгрывается случайная ситуация, возможными исходами которой являются числа k с вероятностями C_k. В состоянии (k, j), где $1 \leqslant j \leqslant l_k - 1$, процесс находится показательно распределённое время с параметром ν_k, а затем переходит в состояние $(k, j+1)$. В момент выхода из состояния (k, l_k) время ξ истекает (см. Рис. 5).

Легко найти математическое ожидание случайной величины ξ, распределённой по гиперэрланговскому закону. Мы обозначим его через $1/\mu$:

$$1/\mu = \mathbf{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{\nu_k} l_k.$$

Теперь рассмотрим сеть из N узлов и rN обслуживающих приборов (автомобилей). В каждый узел в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности λ поступают заявки (пассажиры). Пуассоновские потоки заявок в разные узлы независимы. Заявка, попавшая в пустой узел, покидает систему. Если заявка попадает в узел с приборами, то случайно и равновероятно выбирается один из приборов, который забирает заявку и перемещается время, распределённое по гиперэрланговскому закону со средним $1/\mu$ и параметрами n, l_k, ν_k и C_k при $k \in \{1, \ldots, n\}$. Движение прибора моделируется с помощью введения дополнительных виртуальных узлов (k, j) при $k = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, l_k$. Мы считаем, что когда прибор начинает перемещаться, он с вероятностью C_k попадает в виртуальный узел $(k, 1)$. При всяком $j = 1, \ldots, l_k - 1$

прибор находится в узле (k,j) экспоненциально распределённое время с параметром ν_k, причём после этого он переходит в виртуальный узел $(k,j+1)$. В конце концов прибор оказывается в виртуальном узле (k,l_k), в котором он также пребывает экспоненциально распределённое время с параметром ν_k, после чего он перемещается в узел, равновероятно выбираемый из всех N узлов. Если число приборов в выбранном узле равно m, прибор с вероятностью C_s переходит в виртуальный узел $(s,1)$. Таким образом, в каждом узле (кроме виртуальных) может находиться от 0 до m приборов.

Пусть n_k — число узлов, количество приборов в которых равно k, а $f_k = n_k/N$ — доля этих узлов. Аналогично, пусть $V_{k,j}$ — количество приборов, находящихся в виртуальном узле (k,j), а $M_{k,j} = V_{k,j}/N$. В технических целях удобно перейти от f_k к накопленным долям $u_k = \sum_{i=k}^{m} f_i$.

Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Пусть $s = m+l_1+\ldots+l_k$. Из наших предположений следует, что эволюция системы описывается некоторым марковским процессом $U_N(t)$, для которого можно выбрать пространство состояний X_N содержащее все такие вектора $u = (u_1, \ldots, u_m, M_{1,1}, \ldots, M_{1,l_1}, M_{2,1}, \ldots, M_{k,l_k})^{\mathrm{T}}$ из $(1/N)\mathbb{Z}_+^s$, что выполнены условия

$$\begin{cases} 1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_m \geqslant 0,\ M_{k,j} \geqslant 0 \\ u_1 + \ldots + u_m + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{l_k} M_{k,j} = r \end{cases} \tag{7.2}$$

Пусть e_{u_i} $(e_{M_{k,j}})$ — единичный вектор $e_{\varkappa(u_i)}$ $(e_{\varkappa(M_{k,j})})$, где $\varkappa(u_i)$ $(\varkappa(M_{k,j}))$ задаёт координату в векторе $u \in X_N$ соответствующую u_i $(M_{k,j})$.

Производящий оператор A_N процесса $U_N(t)$ имеет следующий вид

$$A_N f(u) = \int K_N(u,dy)[f(u+y) - f(u)], \tag{7.3}$$

где $K_N(u,dy)$ — следующее дискретное переходное ядро при $u \in \mathcal{U}_N$:

$$K_N(u,dy) = \begin{cases} \text{для } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}, \text{ с весом } N\nu_k(u_i - u_{i+1})C_k \text{ в точке} \\ (-e_{u_i} + e_{M_{k,1}})/N, \\ \text{для } i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n} \text{ с весом } N\nu_k M_{k,l_k}(u_{i-1} - u_i) \text{ в} \\ \text{точке } (e_{u_i} - e_{M_{k,l_k}})/N, \\ \text{для } k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n} \text{ с весом } N\nu_k M_{k,l_k} u_m C_j \text{ в точке} \\ (-e_{M_{k,l_k}} + e_{M_{j,1}})/N, \\ \text{для } k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,l_k-1} \text{ с весом } N\nu_k M_{k,j} \text{ в точке} \\ (-e_{M_{k,j}} + e_{M_{k,j+1}})/N, \end{cases}$$

где $u_0 \equiv 1$, $u_{m+1} \equiv 0$.

Первая группа весов соответствует прибытию заявки. Вторая группа весов соответствует успешному прибытию прибора в какой-нибудь узел. Третья группа относится к случаю попадания прибора в полностью заполненный узел. Наконец, четвёртая группа соответствует переходу прибора из из виртуального узла (k,j) в виртуальный узел $(k,j+1)$. Это ядро выписано стандартным образом, как, например, в разделе 6. Самым важным является тот факт, что разность $u_i - u_{i+1}$ есть просто вероятность того, что наугад выбранный узел содержит ровно i приборов.

Стандартными методами, которые уже многократно использовались в разделах 2, 3 и 6 показывается сходимость $U_N(t)$ к решению следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{u}_i = \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k M_{k,l_k}\right)(u_{i-1} - u_i) - \lambda(u_i - u_{i+1}), \text{ при } i = \overline{1,m}, \ u_0 = 0, u_{m+1} = 1,\\
&\dot{M}_{k1} = \lambda u_1 C_k + C_k\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \nu_j M_{j,l_j}\right) - \nu_k M_{k1}, \text{ при } k = \overline{1,n},\\
&\dot{M}_{kj} = \nu_k(M_{k,j-1} - M_{k,j}) \text{ при } k = \overline{1,n}, \ 2 \leqslant j \leqslant l_k,
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Введём пространство X векторов $u = (u_1, \ldots, u_m, M_{1,1}, \ldots, M_{1,l_1}, M_{2,1}, \ldots, M_{k,l_k})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^s$, удовлетворяющих условиям (7.2). Можно показать, что это пространство инвариантно относительно системы (7.4).

Найдём неподвижную точку системы (7.4), положив левые части равными нулю:

$$
\begin{aligned}
&0 = \left(\sum_{k=1}^{n} \nu_k M_{k,l_k}\right)(u_{i-1} - u_i) - \lambda(u_i - u_{i+1}), \text{ при } i = \overline{1,m}, \ u_0 = 0, u_{m+1} = 1,\\
&0 = \lambda u_1 C_k + C_k\left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \nu_j M_{j,l_j}\right) - \nu_k M_{k1}, \text{ при } k = \overline{1,n},\\
&0 = \nu_k(M_{k,j-1} - M_{k,j}) \text{ при } k = \overline{1,n}, \ 2 \leqslant j \leqslant l_k,
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

Можно проверить, что неподвижная точка имеет координаты

$$
u_k^* = u_k(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\rho^k - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+1}}, & \rho \neq 1 \\ 1 - \frac{k}{m+1}, & \rho = 1 \end{cases}
\tag{7.6}
$$

и

$$
M_{k,j}^* = M_{k,j}(\alpha) = \frac{C_k}{\nu_k}\alpha, \text{ при } k = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,l_k}
$$

где $\alpha = \lambda\rho$, а ρ определяется из следующего условия. Положим $L(\rho) = u_1(\rho) + \ldots + u_m(\rho)$. Тогда условие на ρ возникает из закона сохранения

$$
u_1 + \ldots + u_m + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_k} M_{k,j} = r,
$$

то есть,
$$L(\rho) + \lambda\rho \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k C_k}{\nu_k} = r,$$
или, с учётом обозначения
$$1/\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k C_k}{\nu_k},$$
мы получаем условие
$$L(\rho) + \frac{\lambda}{\mu}\rho = r. \tag{7.7}$$

Таким образом, неподвижная точка (7.6) действительно имеет такой же вид, как и в случае экспоненциального распределения (2.6), а условие на первый интеграл (7.7) совпадает с условием (2.7) (нужно только учесть, что в (2.7) среднее время обслуживания есть $1/\mu = 1$).

Из явных формул для системы уравнений (7.4) очевидно, что в любой точке фазового пространства её матрица Якоби неотрицательна вне диагонали. Доказательство глобальной устойчивости этой системы можно провести аналогично доказательству устойчивости кластерной транспортной сети раздела 6: построив инвариантное притягивающее компактное множество внутри фазового пространства, а затем воспользовавшись теоремой (1.9) для доказательства того, что фазовый поток является сжимающим.

Л.Г. Афанасьева высказала гипотезу о том, что в моделях транспортных сетей вид предельного распределения приборов по узлам не зависит от вида распределения времени перемещения приборов и задаётся геометрическим распределением. В данном разделе мы убедились, что эта гипотеза верна для произвольной гиперэрланговской аппроксимации в простейшем случае конечного числа мест для приборов. Случай произвольного распределения времени движения приборов по узлам существенно сложнее, ибо требует уже несчётного пространства состояний.

Глава 2
Глобальная асимптотическая устойчивость некоторых счётных систем дифференциальных уравнений

Очень многие интересные сети систем массового обслуживания являются существенно счётномерными. Например, классическую систему массового обслуживания из одного обслуживающего прибора с бесконечной очередью естественно описывать с помощью счётной системы дифференциальных уравнений. Бесконечномерные системы дифференциальных уравнений существенно сложнее в исследовании, чем конечномерные: во-первых, для них необходимо специально доказывать теорему о существовании и единственности решения, во-вторых, определённую трудность представляет проверка сохранения естественных инвариантных множеств под действием решения, в-третьих, решения бесконечномерных систем дифференциальных уравнений могут расходиться к бесконечности.

Дополнительные трудности возникают при реализации программы поиска асимптотических формул для стационарных распределений сетей массового обслуживания, изложенной в начале главы 1. Действительно, пространство состояний счётномерной сети систем массового обслуживания некомпактно, а следовательно, доказательство предкомпактности семейства стационарных распределений конечных сетей систем массового обслуживания становится нетривиальным (см. работы Н.Д. Введенской, Р.Л. Добрушина, Ф.И. Карпелевича, Ю.М. Сухова, Д.Б. Мартина [48, 57, 49, 50]).

Дальнейшие трудности возникают при отказе от экспоненциальности времени обслуживания. Единственным случаем, в котором удалось исследовать задачу полностью является случай замкнутой сети Джексона с детерминированным временем обслуживания (см. работу А.Л. Столяра [33]). Если время обслуживания не детерминировано, то даже просто доказательство существования предельной динамической системы представляет определённые сложности. Для случая замкнутой сети Джексона с произвольно распределённым временем обслуживания в работе [32] Ф.И. Карпелевич и А.Н. Рыбко доказали существование предельной детерминированной динамической системы и сходимость стохастической сети Джексона к этой системе при $N \to \infty$, но вопрос о сходимости решений предельной детерминированной динамической системы к неподвижной точке остаётся открытым.

Преимущества подхода со счётномерным пространством состояний состоят в существенном упрощении асимптотических формул для стационарного распределения.

Кроме того, счётномерное пространство состояний больше соответствует классическим моделям теории массового обслуживания.

В этой главе мы не будем затрагивать вопросы предкомпактности семейства стационарных распределений конечных сетей и сосредоточимся лишь на задаче сходимости решений предельной системы нелинейных дифференциальных уравнений к неподвижной точке. Заметим, что решение этой задачи само по себе нетривиально и интересно, а некоторые работы посвящены именно исследованиям такого рода устойчивости (см., например, работу Ф.И. Карпелевича, и А.Н. Рыбко [34]).

В разделе 1 настоящей главы мы формулируем теоремы, обеспечивающие существование и единственность неподвижной точки для одного класса счётных нелинейных систем дифференциальных уравнений, в рамки которого включаются очень многие (если не все) системы, для которых удалось получить обоснование сходимости к неподвижной точке.

В разделах 2 и 3 иллюстрируется применение теорем раздела 1, а раздел 4 посвящён вопросу о сведении систем, которые описывались другими авторами к используемому классу.

В небольшом разделе 5 приведено замечание о том, как результаты раздела 1 можно использовать в контексте исследования эргодичности счётных цепей Маркова с непрерывным временем. В следующем разделе 6 на простом примере показано, как можно использовать результаты раздела 5.

1. Устойчивость одного класса счётномерных систем нелинейных дифференциальных уравнений

Подход к исследованию устойчивости в настоящем разделе состоит в усовершенствовании подхода, изложенного в разделе 1 первой главы настоящей диссертации. С точки зрения автора различие между конечномерным и счётномерным случаем у систем из рассматриваемого класса аналогично различию между конечными и счётными цепями Маркова. Условие на положительность коэффициента эргодичности некоторой степени матрицы Якоби соответствует условию Дёблина эргодичности цепи Маркова (условие Дёблина описано в [56]). Хорошо известно, что условие Дёблина весьма ограничительно, и, например, обычный процесс рождения и гибели ему уже не удовлетворяет. Можно показать, что у всех бесконечных систем дифференциальных уравнений из [48, 57, 49, 50, 34] коэффициент эргодичности матрицы Якоби равен 0 (при этом можно воспользоваться приёмом из леммы 1.2). Поэтому вводится обобщение коэффициента эргодичности, которое мы называем коэффициентом эргодичности по направлению.

С использованием коэффициента эргодичности по направлению можно доказывать строгое уменьшение расстояния между образами любых двух начальных условий. Отметим, что в этом случае нельзя пользоваться принципом сжимающих отображений, поскольку коэффициент сжатия неравномерен и зависит от точки. Поэтому мы используем специальные теоремы о неравномерном сжатии.

Следуя общепринятой традиции обозначим через l_1 пространство последовательностей $x = (x_0, x_1, \ldots)^{\mathrm{T}}$ с нормой $\|x\| = |x_0| + |x_1| + \ldots$ Мы полагаем x бесконечным столбцом, чтобы подчеркнуть аналогию с конечномерным случаем. Норма $\|\cdot\|$ индуцирует норму, а следовательно, и топологию на ограниченных линейных операторах A: $l_1 \to l_1$, $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$. Окрестность точки $g \in l_1$ обозначим через $U_\varepsilon(g) = \{x \in l_1 \mid \|g - x\| < \varepsilon\}$. Все векторные и матричные неравенства следует понимать как покомпонентные. Под I понимается тождественное преобразование: $Ix = x$ для всех $x \in l_1$.

1.1. **Коэффициент эргодичности по направлению.** Линейное отображение A: $l_1 \to l_1$ назовём *марковским*, если $Ah \geqslant 0$ при любом $h \geqslant 0$ и $(1, \ldots, 1, \ldots)A = (1, \ldots, 1, \ldots)$. Заметим, что отображение A — марковское, если его транспонированная бесконечная матрица является стохастической.

Введём линейное подпространство $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Рассмотрим отображение $A = aB$, где $a > 0$ и B — марковское отображение, $B : l_1 \to l_1$. Определим *коэффициент эргодичности* $k(A, g)$ *отображения* A*:* $l_1 \to l_1$ *по направлению* $g \in l_1 \setminus \{0\}$ по правилу $k(A, g) = \|A\|\|g\| - \|Ag\|$. Здесь

$$\|A\| = \sup_{x \in l_1, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_i \|Ae_i\|,$$

где e_k — вектор, каждая координата которого, кроме k-й равной 1, равна 0. Очевидно, $k(A, g) = ak(B, g)$.

Можно также определить *коэффициент эргодичности* отображения A по правилу $k(A) = \|A\| - \|A\|_L$. Это определение аналогично определению пункта 1.1 первой главы. Очевидно,

$$k(A) = \inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A, g)}{\|g\|} = \|A\| - \sup_{g \in L \setminus 0} \frac{\|Ag\|}{\|g\|}$$

Очевидно, если $k(A) > 0$, то $k(A, g) > 0$ для всех $g \in L \setminus 0$. Обратное утверждение верно в конечномерном случае, но, вообще говоря, неверно в бесконечномерном случае. Действительно, в конечномерном случае (или в случае компактного оператора A)

$$\inf_{g \in L \setminus 0} \frac{k(A, g)}{\|g\|} = \inf_{g \in L, \|g\|=1} k(A, g) = \inf_{g \in L, \|g\|=1} \|A\| - \|Ag\| = \inf_{g' \in L'} \|A\| - \|g'\|,$$

где $L' = \{g' \mid g' = Ag$ при некотором $g \in L, \|g\| = 1\}$. Множество L' компактно в силу компактности оператора A. Заметим $\|A\| - \|\cdot\|$ — непрерывная функция на L' и она принимает те же значения, что и $k(A, g)$ при $g \in L\backslash 0, \|g\| = 1$, а потому $\|A\| - \|g'\| > 0$ для всякого $g' \in L'$. Поэтому функция $\|A\| - \|\cdot\|$ достигает на L' минимума, и этот минимум, равный $k(A)$, строго больше нуля.

Рассмотрим теперь бесконечномерный случай. Назовём *размахом* ленточной матрицы ограниченного оператора A такое число d, что $a_{ij} = 0$, как только $|i - j| > d$.

Лемма 1.1. *Пусть размах матрицы ограниченного оператора A не превосходит d_1, а размах матрицы ограниченного оператора B не превосходит d_2. Тогда размах матрицы ограниченного оператора AB не превосходит $d_1 + d_2$, а размах оператора $A + B$ не превосходит* $\max(d_1, d_2)$.

Доказательство. Элемент c_{ij} матрицы оператора $C = AB$ равен

$$c_{ij} = \sum_{k \geqslant 0} a_{ik} b_{kj}.$$

Очевидно, что может оказаться $c_{ij} \neq 0$ лишь в том случае, если при некотором k выполнены неравенства $|i - k| \leqslant d_1$ и $|k - j| \leqslant d_2$. Отсюда следует, что $|i - j| \leqslant |i - k| + |k - j| \leqslant d_1 + d_2$, что и требовалось.

Утверждение про размах $A + B$ очевидно. □

Лемма 1.2. *Пусть B — марковский оператор с размахом d и $A = aB$. Тогда при всех $t \geqslant 0$ имеем $k(\exp(tA)) = 0$. Однако, существуют марковские операторы с размахом* 1*, для которых при всех $t > 0$ и при всех $g \in L\backslash 0$ выполнено $k(\exp(tA), g) > 0$.*

Доказательство. Размах матрицы A^n не превосходит nd. Заметим, что если матрица C пропорциональна марковской и имеет размах nd, то $\|C(e_0 - e_{2nd+2})/2\| = \|C\|\|(e_0 - e_{2nd+2})/2\|$. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Существует такое n, что

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} + \gamma,$$

где $\|\gamma\| < \varepsilon/2$. Следовательно для произвольного $g \in L \setminus 0$,

$$\|\exp(tA)\| \geqslant \|\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} g\| - \|\gamma g\| \tag{1.1}$$

Заметим теперь, что матрица оператора $\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!}$ имеет размах, не превосходящий nd. Выберем $g = (e_0 - e_{2nd+2})/2 \in L \setminus 0$. Тогда

$$\|\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} g\| = \|\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!}\|\|g\|$$

Поскольку $\|\sum_{k=0}^{n}\frac{t^kA^k}{k!}\| \geqslant \|\exp(tA)\| - \varepsilon/2$, используя (1.1) получаем неравенство

$$\|\exp(tA)g\| \geqslant (\|\exp(tA)\| - \varepsilon/2)\|g\| - \varepsilon\|g\|/2.$$

Отсюда

$$k(\exp(tA), g)) = \|\exp(tA)\|\|g\| - \|\exp(tA)g\| \leqslant \tag{1.2}$$

$$\leqslant \|\exp(tA)\|\|g\| - (\|\exp(tA)\|\|g\| - \varepsilon\|g\|) = \varepsilon\|g\|. \tag{1.3}$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $g \in L \setminus 0$, что

$$\frac{k(\exp(tA), g)}{\|g\|} \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому

$$k(A) = \inf_{g\in L}\frac{k(A,g)}{\|g\|} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Однако, коэффициент эргодичности по любому направлению $g \in L \setminus 0$ у матрицы $\exp(tA)$ может быть строго больше нуля. Рассмотрим, например, трёхдиагональную марковскую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} q & q & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & q & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & q & \dots \\ 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

В силу формулы $\exp(tA) = I + tA + t^2A^2/2! + \dots$ все элементы матрицы $\exp(tA)$ строго больше нуля. Поскольку у любого вектора $g \in L \setminus 0$ есть хотя бы одна положительная и отрицательная координата, легко проверить, что $\|\exp(tA)g\| < \|\exp(tA)\|\|g\|$, и, следовательно, $k(A,g) > 0$. □

Ещё раз подчеркнём, что условие $k(A) > 0$ аналогично условию Дёблина в теории счётных цепей Маркова условие аналогично. При выполнении условия $k(A) > 0$, можно сформулировать теоремы о сходимости счётномерных дифференциальных уравнений, аналогичные теоремам раздела 1 первой главы. К сожалению, как в частности, показано в лемме 1.2, мы чаще всего сталкиваемся с нулевым коэффициентом эргодичности. Далее, однако, будет показано, что коэффициент эргодичности по направлению также можно успешно использовать в теоремах о притяжении решений к стационарному.

Коэффициент эргодичности по направлению, как и коэффициент эргодичности обладает важным свойством монотонности. Линейное отображение A *неотрицательно* (*положительно*), если при всех $h \geqslant 0$, $h \neq 0$: $Ah \geqslant 0$ ($Ah > 0$). Если $A - B$ неотрицательно, мы пишем $A \geqslant B$, (если $A - B$ положительно, $A > B$). Из определений следует, что бесконечные матрицы отображений просто сравниваются покомпонентно.

Лемма 1.3. *Пусть $A \geqslant B \geqslant 0$ и $C \geqslant D \geqslant 0$. Тогда $AC \geqslant BD \geqslant 0$.*

Для доказательства достаточно сложить неравенства $(A-B)C \geqslant 0$ и $B(C-D) \geqslant 0$. По индукции из этой леммы получаем, что если $A_1 \geqslant B \geqslant 0, \ldots, A_n \geqslant B \geqslant 0$, то $A_n \ldots A_1 \geqslant B^n$.

Лемма 1.4. *Пусть $g \in L \setminus \{0\}$, $A = aC$, $B = bD$, где $a > 0$ и $b > 0$, а C и D — марковские отображения. Если $A > B \geqslant 0$, то $k(A, g) > k(B, g)$. Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то $k(A, g) \geqslant k(B, g)$.*

Доказательство. Очевидно, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$. Ввиду неравенства треугольника $\|Ag\| \leqslant \|(A - B)g\| + \|Bg\|$. Если $A - B > 0$, то $\|(A - B)g\| < \|A - B\|\|g\|$, ввиду того, что $g \in L \setminus \{0\}$. Поскольку $\|(A - B)e_i\| = a - b$, то $\|A - B\| = \|A\| - \|B\|$. Следовательно, $\|Ag\| < \|A\|\|g\| - \|B\|\|g\| + \|Bg\|$ или $\|B\|\|g\| - \|Bg\| < \|A\|\|g\| - \|Ag\|$, что и требовалось. Случай $A \geqslant B$ рассматривается аналогично. □

1.2. **Теоремы о неравномерном сжатии.** В этом пункте мы рассмотрим произвольное полное метрическое пространство (X, ρ) и отображение $f : X \to X$, строго уменьшающее расстояния: при всех $x, y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$.

Предложение 1.5. *Пусть X — компактно. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x^* = f(x^*)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f^n x, x^*) = 0$ при любом $x \in X$.*

Предложение 1.5 следует из следующего предложения, в котором сформулирован известный *обобщённый принцип неподвижной точки* [66, с.274, теорема 34.5].

Предложение 1.6. *Пусть отображение $f\colon X \to X$ полного метрического пространства (X, ρ) обладает свойством: для любых $x, y \in X$ $\rho(fx, fy) \leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x, y)$, ($\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta$), причём при $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ выполнено $q(\alpha, \beta) < 1$. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку y^* и $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f^n x, y^*) = 0$ при любом $\forall x \in X$.*

Приведём короткое доказательство предложения 1.5.

Доказательство предложения 1.5. Выбросим в декартовом произведении $X \times X$ все пары точек, расстояние между которыми строго меньше ε. Для любой пары (x, y), принадлежащей оставшемуся множеству R, можно корректно определить коэффициент сжатия $k(x, y) = \rho(fx, fy)/\rho(x, y) < 1$. Поскольку R компактно, существует такое $k_0 < 1$, что $\forall (x, y) \in R$: $k(x, y) \leqslant k_0$.

Следовательно, $\forall x,\ y \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(x,\ y,\ \varepsilon) > 0$: $\forall n > N(x,\ y,\ \varepsilon)\ \rho(f^n x,\ f^n y) < \varepsilon$, то есть, $\rho(f^n x,\ f^n y) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим последовательность $x,\ fx,\ f^2 x,\ \ldots$. Поскольку X компактно, она имеет предельную точку z, т.е. $\exists k_1 < k_2 < \ldots$: $f^{k_i} x \to z$. Покажем, что точка z переводится отображением f в себя.

Последовательность $f^{k_i+1} x = f(f^{k_i}) x \to fz$. Отсюда $\rho(z,\ fz) \leftarrow \rho(f^{k_i} x,\ f(f^{k_i} x))$. Но ранее доказано, что $\rho(f^{k_i} x,\ f^{k_i} fx) \to 0$, в частности, для точек x и $y = fx$. Отсюда получаем $z = fz$, т.е. неподвижность точки z. Единственность очевидна, а сходимость уже доказана. □

Будем говорить, что семейство $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в множестве $U \subset X$, если для любого $x \in U$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое α и $\tilde{x} \in F_\alpha$, что $\rho(\tilde{x}, x) < \varepsilon$. Автору не удалось найти никаких ссылок на следующую простую теорему, которая очень полезна в контексте исследуемых далее задач.

Теорема 1.7. *Пусть отображение f строго уменьшает расстояния, т.е. для любых $x,\ y \in X$ выполнено $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$. Предположим, что существует семейство $\{F_\alpha\}$ компактных подмножеств X, удовлетворяющее условиям*

а) $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, удовлетворяющая уравнению $fx^* = x^*$, и для любого $x \in X$ выполнено $f^n x \to x^*$.

Доказательство. Из условия б) и предложения 1.5 следует, что для каждого F_α существует единственная неподвижная притягивающая точка x^*_α. Поскольку f уменьшает расстояния, все эти точки совпадают: $x^*_\alpha = x^*$.

Докажем, что для любого $x \in X$ и любого $\delta > 0$ существует такое $N = N(\delta)$, что при всех $n > N$ выполнено $\rho(f^n x, x^*) < \delta$, что и означает сходимость $f^n x \to x^*$. Раз уж $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в X, при любом $\delta > 0$ существует такое F_α и существует такое $\tilde{x} \in F_\alpha$, что $\rho(\tilde{x}, x) < \delta/2$. Поскольку $\tilde{x} \in F_i$, существует такое N, что при всех $n > N$ выполнено $\rho(f^n \tilde{x}, x^*) < \delta/2$. Поскольку $\rho(f\tilde{x}, fx) < \rho(\tilde{x}, x)$, можно получить по индукции $\rho(f^n \tilde{x}, f^n x) < \rho(\tilde{x}, x)$ вообще при всех n. Поэтому при всех $n > N$ в силу неравенства треугольника выполнено

$$\rho(f^n x, x^*) \leqslant \rho(f^n x, f^n \tilde{x}) + \rho(f^n \tilde{x}, x^*) < \delta/2 + \delta/2 = \delta \quad \square$$

Иногда неподвижная точка известна и удобно пользоваться следующим признаком сходимости.

Теорема 1.8. *Предположим, что X — банахово пространство, а x^* — неподвижная точка отображения f. Пусть отображение f строго уменьшает расстояния,*

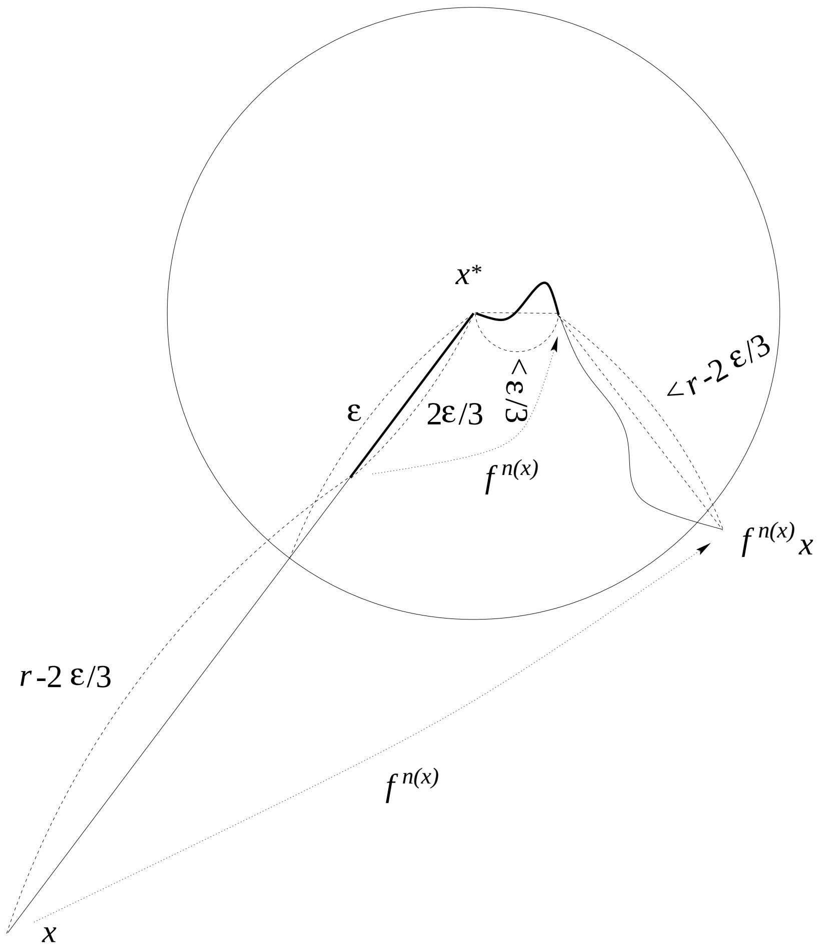

Рис. 6. К лемме 1.9

т.е. для любых x, $y \in X$ *выполнено* $\rho(fx, fy) < \rho(x, y)$. *Также предположим, что при некотором* $\varepsilon > 0$ *для множества* $\bar{U}_\varepsilon(x^*) = \{x \in X \mid \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon\}$ *существует семейство* $\{F_\alpha\}$ *компактных подмножеств* $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$ *удовлетворяющее условиям*

а) семейство $\{F_\alpha\}$ *всюду плотно в* $\bar{U}_\varepsilon(x^*)$,

б) $fF_\alpha \subset F_\alpha$ *при всех* $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$.

Тогда неподвижная точка x^* *единственна и для любого* $x \in X$ *при* $n \to \infty$ *выполнено* $\rho(f^n x, x^*) \to 0$.

Доказательство. Из условий а) и б) в силу теоремы 1.7 следует, что для любого $x \in \bar{U}_\varepsilon(x^*)$ выполнено $f^n x \to x^*$.

Выполнена следующая лемма (см. Рис. 6).

Лемма 1.9. *Для всякого* $x \in X$, *удовлетворяющего условию* $\|x - x^*\| > \varepsilon$ *существует такое* $n(x)$, *что* $\|f^{n(x)}x - x^*\| < \|x - x^*\| - \varepsilon/3$.

Доказательство. Поскольку X — банахово пространство, можно выбрать
$$h = \frac{2\varepsilon}{3}\frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}.$$
Возьмём $n(x) = n$, где n удовлетворяет условию $\|f^n(x^* + h) - x^*\| < \varepsilon/3$. Поскольку $x^* + h \in U_\varepsilon(x)$ такое n действительно существует. Тогда
$$\|f^n x - x^*\| \leqslant \|f^n x - f^n(x+h)\| + \|f^n(x+h) - x^*\| < \|x - (x^* + h)\| + \varepsilon/3 =$$
$$= \|(x - x^*)\big(1 - \frac{2\varepsilon}{3\|x - x^*\|}\big)\| + \frac{\varepsilon}{3} = \|x - x^*\| - \frac{\varepsilon}{3}. \quad \square$$

Теперь определим по индукции $n^k(x) = n(f^{n^{k-1}(x)}x)$, $n^1(x) = n(x)$. Очевидно, существует такое m, что $\|f^{n^m(x)} - x^*\| < \varepsilon$. Следовательно $\tilde{x} = f^{n^m(x)} \in U_\varepsilon(x^*)$ и $f^l\tilde{x} \to x^*$ при $l \to \infty$. Следовательно, $f^l x \to x^*$ при $l \to \infty$. $\square$

Поскольку эти теоремы будут, в основном, применяться в банаховом пространстве $X \subset l_1$, мы приведём хорошо известный критерий предкомпактности множества в l_1. Одно из определений компактного множества состоит в том, из любого его покрытия открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие. Подмножество l_1, замыкание которого компактно в l_1, назовём *предкомпактным.* Из анализа известно, что множество является предкомпактным тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Обозначим через $x_{\geqslant k}$ вектор $(0, \ldots, 0, x_k, x_{k+1}, \ldots)^{\mathrm{T}}$, у которого все координаты, начиная с k-й совпадают с соответствующими координатами вектора x, а предыдущие координаты равны 0.

Предложение 1.10 (критерий предкомпактности)**.** *Множество $X \subset l_1$ является предкомпактным тогда и только тогда, когда X ограничено и $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X$ $\|x_{\geqslant k}\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Предположим, что X предкомпактно. Выберем конечную $\varepsilon/2$-сеть. Обозначим через C_x центр какого-нибудь шара, которому принадлежит x. Поскольку количество шаров конечно, можно подобрать такое k, что $\forall x \in X$ $\|(C_x)_{\geqslant k}\| < \varepsilon/2$. Для любого $x \in X$ $\|x_{\geqslant k}\| \leqslant \|C_x - x\| + \|(C_x)_{\geqslant k}\| < \varepsilon$. Остаётся заметить, что множество X ограничено ввиду предкомпактности.

Убедимся в достаточности условий теоремы. Существует такое k, что $\forall x \in X$ $\|x_{\geqslant k}\| < \varepsilon/2$. Рассмотрим ограничение $X_{<k}$ множества X на $\mathbb{R}^k$. Поскольку множество $X_{<k}$ ограничено, оно предкомпактно, а следовательно, в пространстве $\mathbb{R}^k$ существует конечная $\varepsilon/2$-сеть покрывающая $X_{<k}$. Увеличим радиусы шаров этой сети вдвое. Полученная сеть будет ε-сетью множества X. Действительно, обозначим через $x_{<k} =$

$x - x_{\geqslant k}$. Через $C_{x_{<k}}$ обозначим центр какого-нибудь шара радиуса $\varepsilon/2$, которому принадлежит $x_{<k}$. Ясно, что $\|C_{x_{<k}} - x\| \leqslant \|C_{x_{<k}} - x_{<k}\| + \|x_{\geqslant k}\| \leqslant \varepsilon$. □

1.3. **Теоремы об устойчивости счётномерных дифференциальных уравнений.** Пусть $x(t,\, g)$ — единственное решение системы уравнений

$$\dot{x} = f(x), \;\; x \in l_1, \;\; f : l_1 \to l_1 \tag{1.4}$$

с начальным условием $x(t_0,\, g) = g \in l_1$. Более того, пусть $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо зависит от начального условия, а производная $\Phi(t, g) = \partial x(t, g)/\partial g$ решения по начальному условию непрерывна по g и удовлетворяет *системе уравнений в вариациях*:

$$\dot{x} = f(x), \;\; \dot{\Phi} = J(x)\Phi, \;\; x(t_0, g) = g \in l_1, \;\; \Phi(t_0, g) = I : l_1 \to l_1, \tag{1.5}$$

где $J(x) = (\partial f_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{\infty}$ — матрица оператора Якоби, а I — тождественный оператор.

Теорема 1.11 (локальная теорема существования). *Пусть функция $f(x)$ и её производная $J(x)$ при $x \in U_\eta(g)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $\|f(x)\| < M_0$, $\|J(x)\| < M_1$. Тогда существует такое число $\delta > 0$, $\delta = \min(\eta/M_0, 1/M_1)$, что для всякого t в интервале $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ дифференциальное уравнение* (1.4) *имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее условиям $x(t_0, g) = g$ и $x(t, g) \in U_\eta(g)$. При этом $x(t, g)$ непрерывно дифференцируемо по начальному условию и его производная удовлетворяет уравнению* (1.5).

Доказательство. Утверждение следует из [67, теорема 3.4.4], где необходимо положить неограниченный оператор $A = 0$. Суть [67, теорема 3.4.4] состоит в доказательстве того, что отображение Пикара является сжимающим. □

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.12. *Рассмотрим такое выпуклое множество X, что $x(t, g) \in X$ при любом $g \in X$, а производная $\Phi(t, g)$ отображения $x(t, g)$ задаётся системой уравнений* (1.5). *Тогда для любых g^0, $g^1 \in X$ справедлива следующая формула:*

$$x(t, g^1) - x(t, g^0) = \int_0^1 \Phi(t, \gamma(s))(g^1 - g^0)ds, \tag{1.6}$$

где $\gamma(s) = (1 - s)g^0 + sg^1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

Доказательство. Отображение $x(t, \cdot)$ переводит отрезок $\gamma(s)$ в кривую $x(t, \gamma(s))$. В силу непрерывной дифференцируемости $x(t, g)$ справедлива формула

$$x(t, \gamma(\tau))) = x(t, g^0) + \int_0^\tau \frac{\partial x(t, \gamma(s))}{\partial s} ds.$$

По формуле сложной производной

$$\frac{\partial x(t,\gamma(s))}{\partial s} = \frac{\partial x(t,\cdot)}{\partial g}(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Вспоминая, что $\partial x(t,\cdot)/\partial g = \Phi(t,\cdot)$ и $\gamma'(s) = g^1 - g^0$, при $\tau = 1$ получаем (1.6). □

Обозначим $L = \{g \in l_1 \mid g_0 + \ldots = 0\}$. Во всех последующих результатах мы предполагаем, что существует такое выпуклое множество $X \subset c + L$, $c \in l_1$, что $x(t,g) \in X$ при всех $g \in X$ при любом $t \geqslant 0$ и $\exp(tJ(g))$ — марковское отображение.

Теорема 1.13. *Для любых g^0, $g^1 \in X$ при всех $t \geqslant 0$: $\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|$*

Доказательство. Ввиду (1.6)

$$\|x(t,g^1) - x(t,g^0)\| \leqslant \int_0^1 \|\Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)\| ds, \tag{1.7}$$

Поскольку для любых $t \geqslant 0$, $s \in [0,\,1]$ отображение $\Phi(t,\gamma(s))$ марковское,

$$\|\Phi(t,\gamma(s))(g^1 - g^0)\| \leqslant \|g^1 - g^0\|.$$

Оценивая с помощью этого неравенства интеграл, получаем требуемое. □

Из этой теоремы мы получаем следующий достаточный признак ограниченности по норме решений $x(t,g)$.

Следствие 1.14. *Пусть $\exists g^* \in X$: $x(t,g^*) = g^*$. Тогда $\|x(t,g) - g^*\| \leqslant \|g - g^*\|$ при $t \geqslant 0$, $g \in X$.*

Чтобы доказать сходимость всякого решения к стационарному, необходимо проверять дополнительные условия.

Теперь предположим, что существует линейное отображение $B \geqslant 0$, удовлетворяющее при некотором $\zeta \geqslant 0$ следующим условиям

(а) при всех $x \in X$ верно неравенство $J(x) + \zeta I \geqslant B$, где I является единичной матрицей;

(б) B — пропорционально марковскому отображению и для $t > 0$ коэффициент эргодичности $\exp(tB)$ по любому фиксированному направлению $g \in L \setminus \{0\}$ строго больше нуля: $k(\exp(tB),\, g) > 0$.

Теорема 1.15. *Если X выпукло и $X \subset c + L$, где $c \in l_1$, и выполнены условия* (а) *и* (б)*, то для любого $\tau > 0$ и для любых g^0, $g^1 \in X$, $g^1 - g^0 \neq 0$: $\|x(\tau,g^1) - x(\tau,g^0)\| < \|g^1 - g^0\|$.*

Доказательство. Введём

$$\Psi(\tau) = \Phi \exp(\zeta\tau)$$

и

$$A = J\big(x(\tau,g)\big) + \zeta I.$$

Из неравенства $A(\tau) \geqslant B$ и уравнения $\Psi'(\tau) = A(\tau)\Psi(\tau)$, $\Psi(0) = I$ с помощью леммы 1.3 можно получить следующую оценку:

$$\Psi(\tau) \geqslant \exp(\tau B).$$

Принимая во внимание лемму 1.4 и условие (б), для любого $g \in L \setminus \{0\}$ получаем

$$k(\Psi(\tau), g) \geqslant k(\exp(\tau B), g) > 0.$$

Поскольку

$$k(\Phi, g) = k(\Psi, g)\exp\bigl(-\zeta\tau\bigr),$$

обнаруживаем, что $k(\Phi, g) > 0$, или $\|\Phi\|\|g\| - \|\Phi g\| > 0$. Поскольку $\|\Phi\| = 1$, находим, что $\|\Phi g\| < \|g\|$. Для завершения доказательства надо использовать это неравенство в (1.7), помня, что $g^1 - g^0 \in L \setminus \{0\}$. $\square$

Теорема 1.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.15 *и существует семейство компактных множеств* $\{F_\alpha\}$, *удовлетворяющее условиям*

(а) семейство множеств $\{F_\alpha\}$ *всюду плотно в* X,

(б) для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$ *выполнено* $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ *при любом* $t \geqslant 0$.

Тогда существует единственная неподвижная точка g^* *и для любого* $g \in X$ *выполнено* $x(t, g) \to g^*$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство. Введём семейство последовательностей $t_n^k = n/2^k$ при n, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Заметим, что отображение $f_k = x(1/2^k, \cdot)$ переводит множество F_α в себя для всех α, а в силу теоремы 1.15 строго уменьшает расстояния. Поэтому в силу теоремы 1.7 существует единственная инвариантная точка g_k^*, причём $f_k^n g \to g_k^*$ при всех $g \in X$. Поскольку при всяком фиксированном g последовательность $\{f_k^n g\}_{n\geqslant 0}$ является подпоследовательностью $\{f_{k+1}^n g\}_{n\geqslant 0}$, выполнено $g_k^* = g_{k+1}^* = g_0^* = g^*$.

Следовательно, для возрастающей последовательности двоично-рациональных чисел τ_l с равномерно ограниченными знаменателями $x(\tau_l, g) \to g^*$. Докажем то же самое для *произвольной* последовательности $\tau_l \to \infty$. Для этого, как известно из анализа, достаточно показать $\forall\varepsilon > 0\ \exists T = T(g, \varepsilon)$: $\forall t > T\ \|x(t, g) - g^*\| < \varepsilon$.

При фиксированном g существует $\tau = \tau(g, \varepsilon) > 0$: $\forall t \in [0, \tau]\|x(t, g) - g\| < \varepsilon/2$. Выберем такое $k = k(g, \varepsilon)$, чтобы выполнялось неравенство $\tau > 1/2^k$. Определим $s(t) = [2^k t]/2^k$, где $[y]$ — наибольшее целое число, не превосходящее y. Поскольку $x(t_n^k, g) \to g^*$, существует такое N, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $\|x(t_n^k, g) - g^*\| < \varepsilon/2$.

При $t > T = t_N^k$ можно записать следующие неравенства:

$$\|x(t,g) - g^*\| = \|x(t,g) - x(s(t),g) + x(s(t),g) - g^*\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x(t,g) - x(s(t),g)\| + \|x(s(t),g) - g^*\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x(t - s(t),g) - g\| + \|x(s(t),g) - g^*\| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и требовалось.

В частности, $g^* = x(t, g^*)$ при любом $t \geqslant 0$, откуда $f(g^*) = 0$. □

Для случая известной неподвижной точки можно сформулировать следующий признак сходимости.

Теорема 1.17. *Пусть g^* — некоторая неподвижная точка отображения $x(t,g)$ Пусть выполнены условия теоремы* 1.15 *и при некотором $\varepsilon > 0$ существует семейство компактных множеств $\{F_\alpha\}$, удовлетворяющее условиям*

(а) семейство множеств $\{F_\alpha\}$ всюду плотно в $\bar{U}_\varepsilon(g^*) \cap X$,

(б) для любого $F_\alpha \in \{F_\alpha\}$ выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при любом $t \geqslant 0$.

Тогда неподвижная точка единственна и для любого $g \in X$ выполнено $x(t,g) \to g^*$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.16 где вместо теоремы 1.7 используется теорема 1.8 □

В следующих разделах мы приведём примеры явного построения семейства F_α. Заметим лишь, что иногда можно выбрать $F_\alpha = F_g = \overline{\{x(t,g) \mid t \geqslant 0\}}$ и доказать, что для всякого g траектория $\{x(t,g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна.

Следующая теорема даёт достаточный признак предкомпактности траектории.

Теорема 1.18. *Если*

(i) *существует такая однородная эргодичная положительно возвратная цепь Маркова со счётным числом состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ и непрерывным временем, с матрицей интенсивностей переходов $Q = (q_{ij})$, что $\sum\limits_{l \geqslant k} J_{lj}(x(t,g)) \leqslant \sum\limits_{l \geqslant k} q_{ml}$ при любых $j \leqslant m$, $k \in \{0, \ldots, j\} \cup \{m+1, \ldots\}$, $t \geqslant 0$, $g \in X$;*

(ii) *существует неподвижная точка $g^* = x(t, g^*) \in X$,*

то для любого $g \in X$ траектория решения $\{x(t,g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна.

Перед доказательством этой теоремы напомним понятие *сравнимости* марковских процессов из [68]. Всякий вектор $g \in e_0 + L$, $g \geqslant 0$ можно рассматривать как распределение дискретной случайной величины, принимающей значение $i \geqslant 0$ с вероятностью g_i.

Рассмотрим *переходные функции* $P^1(\tau,t)$ и $P^2(\tau,t)$ двух марковских цепей с непрерывным временем и множеством состояний $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Элемент $P^1_{ij}(\tau,t)$ ($P^2_{ij}(\tau,t)$) равняется вероятности того, что в момент t цепь находится в состоянии j при условии, что в момент τ она находилась в состоянии i.

Введём отношение порядка $\prec$ на неотрицательных векторах из e_0+L: $g^1\prec g^2$, если $\sum_{l\geqslant j} g^1_l \leqslant \sum_{l\geqslant j} g^2_l$ при всех $j\geqslant 0$. Переходные функции P^1 и P^2 сравнимы и $P^1(\tau,t)\prec P^2(\tau,t)$, если для любых вероятностных $g^1\prec g^2$ для любых $t\geqslant\tau$ выполнено $(g^1)^{\mathrm T}P^1(\tau,t)\prec (g^2)^{\mathrm T}P^2(\tau,t)$. В [68] показано, что $P^1(\tau,t)\prec P^2(\tau,t)$ тогда и только тогда, когда $e_i^{\mathrm T}P^1(\tau,t)\prec e_j^{\mathrm T}P^2(\tau,t)$ при любых $t\geqslant\tau$ и $i\leqslant j$.

Будем считать, что P^1 и P^2 удовлетворяют уравнениям Колмогорова

$$\dot P^1 = P^1Q^1(t),\ \dot P^2 = P^2Q^2(t)$$

с неоднородными матрицами интенсивностей перехода $Q^1(t)=(q^1_{ij}(t))$ и $Q^2(t)=(q^2_{ij}(t))$.

Теорема 1.19. *Пусть $(Q^1)^{\mathrm T}(s)$ и $(Q^2)^{\mathrm T}(s)$ — ограниченные линейные операторы, непрерывные по s в норме l_1 при любых $s\geqslant 0$. В этом случае $P^1(\tau,t)\prec P^2(\tau,t)$ при любых $t\geqslant\tau\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{l\geqslant k} q^{(1)}_{jl}(s)\leqslant\sum_{l\geqslant k} q^{(2)}_{ml}(s)$ при любых $j\leqslant m$, $k\in\{0,\dots,j\}\cup\{m+1,\dots\}$ и $s\in[\tau,t]$.*

Доказательство. В случае постоянных переходных интенсивностей ($Q^1(s)\equiv Q^1$ и $Q^2(s)\equiv Q^2$) теорема 1.19 доказана в [68].

В общем случае необходимость можно показать подобно [68]. Достаточность мы получим предельным переходом.

Из того, что $P^1(\tau,s)\prec P^2(\tau,s)$ и $P^1(s,t)\prec P^2(s,t)$, следует $P^1(\tau,t)\prec P^2(\tau,t)$. Поэтому достаточность можно доказывать для какой-нибудь малой разности $t-\tau$. В силу непрерывности и ограниченности $Q^i(t)$ при небольшой разности $t-\tau$ решение $P^i(\tau,t)$ получается последовательными приближениями Пикара. Этим мы и воспользуемся в дальнейшем.

Положим $h=(t-\tau)/n$ а $t_i=\tau+ih$. Через $[x]$ обозначим наибольшее целое число $y\leqslant x$. Положим

$$P^i_n(\tau,t)=\exp\left(hQ^i(t_0)\right)\dots\exp\left(hQ^i(t_{n-1})\right),\ i=1,2.$$

Из случая постоянных интенсивностей и транзитивности отношения $\prec$ следует, что $P^1_n(\tau,t)\prec P^2_n(\tau,t)$.

Остаётся доказать, что $P^i_n(\tau,t)\to P^i(\tau,t)$. Положим $l(s)=[(s-\tau)/h]$. Определим

$$P^i_n(\tau,s)=D^i_h(s)\exp\left((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\right),$$
$$D^i_h(s)=\exp\left(hQ^i(t_0)\right)\dots\exp\left(hQ^i(t_{l(s)-1})\right).$$

Справедлива оценка на близость $P_n^i(\tau,t)$ и $P^i(\tau,t)$, аналогичная оценке, использованной в теореме 1.22:

$$\|(P_n^i(\tau,t)-P^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda}\|(\Pi P_n^i(\tau,t)-P_n^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\|,$$

Где Π — отображение Пикара. Вычислив

$$\Pi P_n^i(\tau,t)=\int_\tau^t D_h^i(s)\exp\left((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\right)Q^i(s)ds,$$

переписав $P_n^i(\tau,t)$ в виде

$$P_n^i(\tau,t)=\int_\tau^t D_h^i(s)\exp\left((s-t_{l(s)})Q^i(t_{l(s)})\right)Q^i(t_{l(s)})ds$$

и используя стохастичность экспонент матриц интенсивности, получаем

$$\|(P_n^i(\tau,t)-P^i(\tau,t))^{\mathrm{T}}\| \leqslant \int_\tau^t \|(Q^i(s)-Q^i(t_{l(s)}))^{\mathrm{T}}\|ds \to 0$$

при $n\to\infty$ в силу равномерной непрерывности функции $Q^i(s)$ на отрезке $[\tau,t]$. □

Доказательство теоремы 1.18. Хорошо известно (см., например, [69]), что цепь Маркова из условия (i) обладает единственным собственным инвариантным распределением, которое мы обозначим через $\pi\in l_1$. Вектор π можно найти из уравнения $\pi^{\mathrm{T}}Q=0$. Обозначим через $|x|$ покомпонентный модуль $x\in l_1$. В силу условия (ii) теоремы 1.18 и (1.6)

$$|x(t,g)| \leqslant |g^*| + \int_0^1 \Phi(t,\gamma(s))|g-g^*|ds. \tag{1.8}$$

Обозначим через $P(t)$ решение уравнения $\dot P = PQ$, $P(0)=I$. Из условия доказываемой теоремы и теоремы 1.19 следует, что $\Phi(t,\gamma(s))^{\mathrm{T}} \prec P(t)$ при любом $s\in[0,1]$. Для $x\in l_1$ определим суммы "хвостов" $S_k(x)=|x_k|+|x_{k+1}|+\ldots$. Кроме того, обозначим $h=|g-g^*|/\|g-g^*\|$: очевидно, h — вероятностный вектор. Из (1.8), условия (i) теоремы 1.18 и теоремы 1.19 следует, что

$$\begin{aligned}S_k(x(t,g)) &\leqslant S_k(g^*)+\|g-g^*\|S_k\left(\int_0^1\Phi(t,\gamma(s))h\,ds\right)\leqslant\\ &\leqslant S_k(g^*)+\|g-g^*\|S_k(P(t)^{\mathrm{T}}h)\leqslant\\ &\leqslant S_k(g^*)+\|g-g^*\|(S_k(|P(t)^{\mathrm{T}}h-\pi|)+S_k(\pi))\leqslant\\ &\leqslant S_k(g^*)+\|g-g^*\|(\|P(t)^{\mathrm{T}}h-\pi\|+S_k(\pi)).\end{aligned}$$

Поскольку $g^*,\pi\in l_1$, $\exists k_1$, k_2: $S_{k_1}(g^*)<\varepsilon/4$ и $S_{k_2}(\pi)<\varepsilon/4\|g-g^*\|$. В силу [69, теорема 6.38], $\exists T$ $\forall t\geqslant T$: $\|P(t)^{\mathrm{T}}h-\pi\|<\varepsilon/4\|g-g^*\|$.

Множество $\{x(t,g) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$ компактно, поскольку является непрерывным образом отрезка $[0,T]$. Поэтому существует такое k_3, что при всяком $k > k_3$ и при всяком $t \in [0,T]$ выполнено $S_k(x(t,g)) \leqslant \varepsilon/4$.

Положив $K = \max(k_1, k_2, k_3)$, получаем при всяком $t \geqslant 0$ при всех $k > K$ выполнено $S_k(x(t,g)) \leqslant \varepsilon$. Опять применяя критерий предкомпактности (предложение 1.10), получаем предкомпактность множества $\{x(t,g) \mid t \geqslant 0\}$. □

В заключение приведём теорему, не относящуюся напрямую к исследованию устойчивости, но полезную при проверке условий теорем этого раздела.

Дело в том, что часто система (1.4) получается формальным переходом к пределу в последовательности систем

$$\dot{x}^{(n)} = f^{(n)}(x^{(n)}),\ \ x^{(n)} \in l_1,\ \ f^{(n)} : l_1 \to l_1. \tag{1.9}$$

с начальным условием $x^{(n)}(0,\, g^{(n)}) = g^{(n)} \in l_1$. Следующая оценка даёт достаточные условия верности такого перехода.

Теорема 1.20. *Пусть для всех $s \leqslant t^*$ выполнено $\|f(x^{(n)}(s,g^{(n)})) - f^{(n)}(x^{(n)}(s,g^{(n)}))\| < C(n,t^*)$ и $\|f(x^{(n)}(s,g^{(n)})) - f(x(s,g))\| \leqslant K\|x^{(n)}(s,g^{(n)}) - x(s,g)\|$. Тогда*

$$\|x^{(n)}(t,g^{(n)}) - x(t,g)\| \leqslant [C(n,t^*) + \|g^{(n)} - g\|]e^{Kt} - C(n,t^*)$$

при $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Доказательство. Преобразовывая дифференциальные уравнения в интегральные, получаем

$$x(t,g) = g + \int_0^t f(x(s,g))ds,\ x^{(n)}(t,g^{(n)}) = g^{(n)} + \int_0^t f^{(n)}(x^{(n)}(s,g^{(n)}))ds.$$

Отсюда с учётом выполнения условия Липшица на f при $t < t^*$

$$\begin{aligned}
\|x^{(n)}(t,g^{(n)}) - x(t,g)\| &\leqslant \|g^{(n)} - g\| + \int_0^t \|f^{(n)}(x^{(n)}(s,g^{(n)})) - f(x(s,g))\|ds \leqslant \\
&\leqslant \|g^{(n)} - g\| + \int_0^t \|f^{(n)}(x^{(n)}(s,g^{(n)})) - f(x^{(n)}(s,g^{(n)}))\|ds + \\
&\quad + \int_0^t \|f(x^{(n)}(s,g^{(n)})) - f(x(s,g))\|ds \leqslant \\
&\leqslant \|g^{(n)} - g\| + C(n,t^*)t + K\int_0^t \|x^{(n)}(s,g^{(n)}) - x(s,g)\|ds.
\end{aligned}$$

Вводя обозначение $\phi(t) = \|x^{(n)}(t,g^{(n)}) - x(t,g)\| \geqslant 0$, получаем интегральное неравенство

$$\phi(t) \leqslant \|g^{(n)} - g\| + C(n,t^*)t + K\int_0^t \phi(s)ds.$$

Например, из [70, с. 154–155] известно, что $\phi(t) \leqslant \psi(t)$, где

$$\psi(t) = \|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*)t + K\int_0^t \psi(s)ds,$$

откуда $\psi(t) = (\|g^{(n)} - g\| + C(n, t^*))e^{Kt} - C(n, t^*)$. □

Из теоремы 1.20 сразу получаем

Следствие 1.21. *Если при фиксированном* t^* *в условиях теоремы* 1.20 $\|g^{(n)} - g\| \to 0$ *и* $C(n, t^*) \to 0$, *то* $\|x^{(n)}(t, g^{(n)}) - x(t, g)\| \to 0$ *равномерно на любом подмножестве отрезка* $[0, t^*]$.

Связь требования на неотрицательность недиагональных элементов матрицы $J(g)$ с поведением $x(t, g)$ раскрывается в следующей теореме.

Теорема 1.22. *Пусть* $x(t, g) \in l_1$ *при любом* $t \geqslant 0$ *и* $g \in l_1$. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *для всех* g *недиагональные элементы* $J(g)$ *неотрицательны;*
(ii) *для всех* g *для любого* $h \in l_1$, $h \geqslant 0$ $x(t, g + h) \geqslant x(t, g)$.

Эта теорема можно сформулировать для решений $x(t, \cdot)$, остающихся в некотором «толстом» множестве $X \subset l_1$. Однако технические условия, которые в этом случае надо наложить на X, затемнили бы существо дела, в то время как максимальной общности нам так и не удалось бы достичь.

Доказательство. Пусть выполнено (i). Тогда, ввиду (1.6),

$$x(t, g + h) - x(t, g) = \int_0^1 \Phi(t, \gamma(s))hds,$$

где $\gamma(s) = g + sh$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. В силу неотрицательности $J(g)$ вне диагонали, из (1.5) получаем $\Phi(t, \gamma(s)) \geqslant 0$, а следовательно, $\Phi(t, \gamma(s))h \geqslant 0$, откуда и получаем (ii).

Пусть теперь выполнено (ii). Решение $x(t, g) = g + y(t, g)$, где $y(t, g)$ является неподвижной точкой *отображения Пикара* $(\Pi\theta)(t) = \int_{t_0}^t f(g + \theta(\tau))d\tau$ при $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$, $\delta_1 < \delta$ (см. условие теоремы 1.11). Отображение Π является сжимающим с коэффициентом $\lambda = \delta_1 M_1 < 1$. Рассмотрим приближение к решению $\tilde{x}(t, g) = g + \tilde{y}(t, g) = g + (t - t_0)f(g)$. Из теоремы о сжимающих отображениях следует, что

$$\|\tilde{x}(t, g) - x(t, g)\| = \|\tilde{y}(t, g) - y(t, g)\| \leqslant \frac{1}{1 - \lambda}\|\Pi\tilde{y}(t, g) - \tilde{y}(t, g)\|.$$

Вычисляем

$$\Pi\tilde{y}(t,g) - \tilde{y}(t,g) = \int_{t_0}^{t} f(g + (\tau - t_0)f(g))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(g)d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \big(f(g + (\tau - t_0)f(g)) - f(g)\big)d\tau = D.$$

Поскольку производная f ограничена, сама функция f — липшицева с константой M_1, откуда следует, что $\|f(g+(\tau-t_0)f(g))-f(g)\| \leqslant M_1\|(\tau-t_0)f(g)\| \leqslant M_0M_1|\tau-t_0|$, а следовательно, $\|D\| \leqslant M_0M_1(t-t_0)^2/2$ или

$$\|\tilde{x}(t,g) - x(t,g)\| \leqslant M_0M_1(t-t_0)^2/2(1-\lambda).$$

В силу этой оценки для всех достаточно малых $\zeta > 0$

$$0 \leqslant x(t, g + \zeta e_j) - x(t,g) = \zeta e_j + (t-t_0)[f(g+\zeta e_j) - f(g)] + \gamma(g,t),$$

где $\|\gamma(g,t)\| \leqslant M_0M_1(t-t_0)^2/(1-\lambda)$. Компонента $i \neq j$ последнего неравенства имеет вид

$$0 \leqslant (t-t_0)[f_i(g+\zeta e_j) - f_i(g)] + \gamma_i(g,t)$$

Разделив на $t - t_0 > 0$ и устремив $t \to t_0$ справа, ввиду $\gamma_i(g,t)/(t-t_0) \to 0$ получим

$$0 \leqslant f_i(g+\zeta e_j) - f_i(g).$$

Поделим последнее выражение на ζ и устремим $\zeta \to 0$. Получим

$$0 \leqslant \lim_{\zeta\to 0+} \frac{f_i(g+\zeta e_j) - f_i(g)}{\zeta} = \frac{\partial f_i}{\partial g_j} = J_{ij}(g),$$

что и означает выполнение (i). □

2. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей

Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич в [48] рассмотрели модель системы обслуживания S_N, с N одинаковыми обслуживающими приборами с неограниченной очередью к каждому из них, куда поступают заявки на обслуживание в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности $N\lambda$. Времена обслуживания являются независимыми экспоненциально распределёнными величинами со средним 1. При прибытии каждая заявка выбирает случайно 2, возможно, совпадающих, прибора (с вероятностью $1/N^2$) и затем направляется к прибору с меньшей очередью (включая заявку, находящуюся в обслуживании). Если очереди к обоим приборам одинаковы, заявка наугад равновероятно выбирает одну из них. Все случайные интервалы времени и пуассоновские потоки предполагаются независимыми в совокупности.

Они показали, что при $N \to \infty$ система описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений с квадратичной правой частью и, используя покоординатную монотонность, установили её сходимость к единственной неподвижной точке, координаты которой убывают сверхэкспоненциально.

В этом разделе мы докажем теорему 2.2 о сходимости системы уравнений из [48] к единственной неподвижной точке с использованием метода раздела 1. Заметим, что в [48] доказана лишь покоординатная сходимость, в то время как наш метод обеспечивает сходимость по норме.

В [48] получены следующие *уравнения среднего поля*:

$$
\begin{aligned}
&\dot{V} = u_1 - \lambda, \\
&\dot{u}_1 = \lambda - (1 + \lambda u_1)u_1 + u_2, \\
&\dot{u}_2 = \lambda u_1^2 - (1 + \lambda u_2)u_2 + u_3, \\
&\dots \\
&\dot{u}_k = \lambda u_{k-1}^2 - (1 + \lambda u_k)u_k + u_{k+1}, \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Обозначим через $u(t,\, g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\, g) = g \in l_1$. Будем сокращённо $\dot{u} = f(u)$ обозначать уравнение (2.1). Для обоснования локального существования и единственности решения $u(t,\, g)$ воспользуемся теоремой 1.11. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \leqslant C$, $\|f(u)\| \leqslant 3(1 + \lambda C)\|u\| \leqslant 3(1 + \lambda C)C$. Матрица Якоби (2.1) имеет следующий вид:

$$
J(u) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & -\beta_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 2\lambda u_1 & -\beta_2 & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 2\lambda u_2 & -\beta_3 & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 2\lambda u_3 & -\beta_4 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda u_4 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix},
\tag{2.2}
$$

где $\beta_i = 1 + 2\lambda u_i$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \leqslant 2(1 + \lambda C)$ при $\|u\| < C$. Все условия теоремы 1.11 выполнены, а следовательно, решение $u(t, g)$ существует в некоторой окрестности $t_0 = 0$.

Лемма 2.1. *Множество*

$$
U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant 0,\, V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = 0\}
\tag{2.3}
$$

является инвариантным множеством системы (2.1).

Доказательство. Введём конечномерную аппроксимацию (2.1) при $n > 17$:

$$\begin{aligned}
&\dot V = u_1 - \lambda + \lambda u_n^2,\\
&\dot u_1 = \lambda - (1+\lambda u_1)u_1 + u_2,\\
&\dot u_2 = \lambda u_1^2 - (1+\lambda u_2)u_2 + u_3,\\
&\dots\\
&\dot u_{n-1} = \lambda u_{n-2}^2 - (1+\lambda u_{n-1})u_{n-1} + u_n,\\
&\dot u_n = \lambda(u_{n-1}^2 - u_n^2) - u_n,\\
&\dot u_{n+1} = 0,\\
&\dot u_{n+2} = 0,\\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

которую кратко обозначим $\dot u^{(n)} = f^{(n)}(u^{(n)})$, и множества

$$U^{(n)} = \{(V, u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant \dots \geqslant u_n \geqslant 0,\ V + \sum_{k=1}^{n} u_k = 0\}. \tag{2.5}$$

Начальному условию $g \in U$ задачи (2.1) сопоставим начальное условие $g^{(n)} = (-(g_1 + \dots + g_n), g_1, g_2, \dots, g_n, 0, 0, \dots) \in U^{(n)}$. Решение (2.4) с начальным условием $g^{(n)}$ обозначим через $u^{(n)}(t, g^{(n)})$. Легко показать ([48, лемма 1] или [27, раздел 5]), что при любом $t \geqslant 0$ решение $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$.

В силу теоремы 1.20 $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$. Действительно, отображение f удовлетворяет условию Липшица. Из (2.1) и (2.4) вытекает $f(u^{(n)}(t, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(t, g^{(n)})) = -\lambda({u_n}^{(n)})^2 e_0 + \lambda({u_n}^{(n)})^2 e_{n+1}$. Из (2.4) получаем ${\dot u_n}^{(n)} \leqslant \lambda$, откуда ${u_n}^{(n)}(t) \leqslant g_n + \lambda t$. Поэтому $\|f(u^{(n)}(s, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(s, g^{(n)}))\| \leqslant 2\lambda\big(g_n + \lambda s\big)^2 \leqslant 2\lambda\big(g_n + \lambda t^*\big)^2$ при $s \leqslant t^*$. Следовательно, условия теоремы 1.20 выполнены.

Предположим теперь, что при $g \in U$ и при некотором $t > 0$ $u(t, g) \notin U$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$, получаем $\exists n$: $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \notin U^{(n)}$, что, как уже говорилось, в силу [48, лемма 1] неверно. $\square$

При $0 \leqslant \lambda < 1$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \geqslant 0$ и доказать его единственность в U. Это решение задаётся формулой

$$g_i^* = \lambda^{2^i - 1} \text{ при } i \geqslant 1 \text{ и } g_0^* = V^* = -\sum_{i \geqslant 1} g_i^*.$$

Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин и Ф.И. Карпелевич доказали в [48] покоординатную сходимость к стационарному решению. Этот факт они использовали для получения асимптотических формул для стационарного распределения системы S_N.

Мы проиллюстрируем, как можно независимо доказывать существование и единственность стационарного решения, а также сходимость к нему, используя теорему 1.16. При этом сходимость будет по норме, а следовательно, наш результат более сильный.

Теорема 2.2. *Если $\lambda < 1$, то для любого $g \in U$: $\|u(t,g) - g^*\| \to 0$ при $t \to \infty$.*

В следующих двух леммах мы строим два различных семейства компактных инвариантных множеств. Для доказательства теоремы подходит, в принципе, любое из них. Различие состоит в том, что для первого семейства не нужно знать о наличии стационарной точки — она получается «автоматически» из теорем о неравномерном сжатии. Построение второго семейства предполагает знание о существовании некоторой неподвижной точки.

Лемма 2.3. *При $\lambda < 1$ и при $1 > a > \sqrt{\lambda}$ семейство множеств*

$$X_a = \{u \in X \mid u_k \leqslant a^{2^k}, V > -\sum_{k \geqslant 1} a^{2^k}\}$$

инвариантно относительно $u(t,\cdot)$ и это семейство всюду плотно в X.

Доказательство. Поскольку $V = -\sum_{k\geqslant 1} u_k$, достаточно проверить, что для всех u_k выполнено $u_k \leqslant a^{2^k}$. Пусть $g \in X_a$ и в некоторый момент времени оказалось, что $u_k(t,g) = a^{2^k}$. Уравнения на $\dot{u}_k$ при всех $k \geqslant 1$ можно записать в виде

$$\dot{u}_k = \lambda(u_{k-1}^2 - u_k^2) - (u_k - u_{k+1})$$

положив $u_0 = 1$. Тогда

$$\dot{u}_k \leqslant \lambda(\left(a^{2^{k-1}}\right)^2 - \left(a^{2^k}\right)^2) - (a^{2^k} - a^{2^{k+1}}) = (\lambda - 1)(a^{2^k} - a^{2^{k+1}}) < 0$$

при $k > 1$, и

$$\dot{u}_1 \leqslant \lambda(1 - a^2) - (a^2 - a^4) = (\lambda - a^2)(1 - a^2) < 0.$$

поскольку $\lambda < a^2 < 1$. Очевидно, множество

$$X_1 = \bigcup_{\lambda < a^2 < 1} X_a$$

всюду плотно в X. □

Предположим, что $\lambda < 1$. Семейство $\{F_g\}$ из множеств $F_g = \overline{\{x(t,g) \mid t \geqslant 0\}}$, где $g \in X$, очевидным образом всюду плотно в X.

Лемма 2.4. *Каждое множество F_g компактно. Семейство множеств $\{F_g\}_{g\in X}$ всюду плотно в X.*

Доказательство. Достаточно доказать предкомпактность любой траектории $u(t,g)$ при $g \in X$.

Матрица $J(u)$ имеет отрицательные элементы только на диагонали, множество $X \subset L$, а точка $g^* \in X$. Следовательно, выполнены условия следствия 1.14 и при любом $t \geqslant 0$ выполнено

$$\|u(t,g) - g^*\| \leqslant \|g - g^*\|. \tag{2.6}$$

Пусть $C = \|g - g^*\|$. Положим $X_C = \{g \in U \mid \|g - g^*\| \leqslant C\}$. Очевидно, $g \in X_C$ и в силу (2.6) при всяком $t \geqslant 0$ выполнено $x(t,g) \in X_C$.

Заметим теперь, что для всякого $g \in X_C$ из $\sum\limits_{k\geqslant 1} g_k \leqslant C + \|g^*\|$ и неувеличения неотрицательных g_k можно получить оценку $g_k \leqslant (C + \|g^*\|)/k$, справедливую при $k \geqslant 1$.

Зафиксируем такое $k^* > 17$, что

$$2\lambda\frac{C + \|g^*\|}{k^*} < 1 \text{ и } \frac{C + \|g^*\|}{k^*} < 1.$$

Положим $\zeta = 2\lambda\dfrac{C + \|g^*\|}{k^*}$. Введём цепь Маркова с пространством состояний $\mathbb{N} \cup \{0\}$ со следующими переходными интенсивностями:

интенсивность перехода $0 \to 1$ равна $1 + 2\lambda$,

при $0 < k \leqslant k^*$ интенсивность перехода $k \to k-1$ равна 1, а интенсивность перехода $k \to k+1 - 2\lambda$,

при $k^* < k$ интенсивность перехода $k \to k-1$ равна 1, а интенсивность перехода $k \to k+1$ равна $\zeta < 1$.

Цепь эргодична в силу критерия Фостера. Для наглядности выпишем транспонированную матрицу переходных интенсивностей

$$Q^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\beta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \beta & -\beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\lambda & -\beta & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda & -\gamma & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta & -\gamma & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \zeta & -\gamma & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\beta = 1 + 2\lambda$, $\gamma = 1 + \zeta$. Условия теоремы 1.18 выполнены, а значит, траектория $\{u(t,g) \mid t \geqslant 0\}$ предкомпактна. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Покажем выполнение условий теоремы 1.16.

Семейство компактных множеств X_a из леммы 2.3, либо семейство множеств $\{F_g^C\}_{g\in X_C, C>0}$ из леммы 2.4 обеспечивают семейство компактных инвариантных множеств.

Матрица $J(u)$ имеет отрицательные элементы только на диагонали, множество $X \subset L$.

Остаётся проверить выполнение условий теоремы 1.15. Введём матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при $\zeta = (2 + 2\lambda)$ верно $J(u) + \zeta I \geqslant B$. Из формулы $\exp(tB) = I + tB + t^2B/2! + \dots$ следует, что при $t > 0$ все элементы верхней строки матрицы B строго больше нуля. Предположим, что для какого-то $g \in L \setminus \{0\}$: $\|\big(\exp(tB)\big)g\| = \|\exp(tB)\|\|g\|$. В силу положительности первой строки $\exp(tB)$ получаем

$$\|\big(\exp(tB)\big)g\| < \|\big(\exp(tB)\big)|g|\|$$

и приходим к противоречию, ибо $\||g|\| = \|g\|$. Следовательно, $0 < \|\exp(tB)\|\|g\| - \|\big(\exp(tB)\big)g\| = k(\exp(tB), g)$.

Условия теоремы 1.16 выполнены, а следовательно, существует единственная неподвижная точка g^* и для любого $g \in X$ выполнено $x(t, g) \to g^*$. $\square$

Как уже упоминалось, неподвижная точка имеет координаты $u_k = \lambda^{2^k-1}$ при всех $k \geqslant 1$. Отметим, что сверхэкспоненциальный характер убывания неподвижной точки проявляется в том, что существует семейство инвариантных множеств X_a, которое также состоит из сверхэкспоненциально убывающих точек пространства X. Собственно, ограничения на X_a удалось угадать именно из вида неподвижной точки.

По-видимому, различие между двумя семействами инвариантных компактных множеств состоит в сложности их построения. В данном случае доказательство компактности каждой траектории оказалось более прямолинейным и его удалось получить до того, как было построено семейство множеств X_a. Отметим также, что для доказательства компактности каждой траектории оказалась достаточной почти тривиальная оценка $u_k(t, g) \leqslant (C + \|g^*\|)/k$.

3. Транспортная сеть с неограниченным числом мест ожидания для приборов

Пусть $r > 0$. Рассмотрим *уравнения среднего поля* для симметричной транспортной сети, которая получается при $m \to \infty$ из системы, рассмотренной в [27] и разделе 2 настоящей диссертации

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = \lambda u_1 - V,\\
&\dot{u}_1 = \lambda(u_2 - u_1) + V(1 - u_1),\\
&\dot{u}_2 = \lambda(u_3 - u_2) + V(u_1 - u_2),\\
&\dot{u}_3 = \lambda(u_4 - u_3) + V(u_2 - u_3),\\
&\dots\\
&\dot{u}_k = \lambda(u_{k+1} - u_k) - V(u_{k-1} - u_k).\\
&\dots
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим через $u(t,\, g)$ единственное решение последней системы с начальным условием $u(0,\, g) = g \in l_1$. Уравнение (3.1) сокращённо будем обозначать $\dot{u} = f(u)$. Для обоснования существования и единственности локального решения $u(t,\, g)$ воспользуемся теоремой 1.11. Действительно, в ограниченном шаре $\|u\| \leqslant C$, $\|f(u)\| \leqslant 3(\lambda + C)(1 + \|u\|) \leqslant 3(\lambda + C)(1 + C)$. Матрица Якоби (3.1) имеет следующий вид:

$$J(u) = \begin{pmatrix}
-1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots\\
1 - u_1 & -\beta & \lambda & 0 & 0 & \dots\\
u_1 - u_2 & V & -\beta & \lambda & 0 & \dots\\
u_2 - u_3 & 0 & V & -\beta & \lambda & \dots\\
u_3 - u_4 & 0 & 0 & V & -\beta & \dots\\
u_4 - u_5 & 0 & 0 & 0 & V & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $\beta = \lambda + V$. Из вида $J(u)$ следует, что $\|J(u)\| \leqslant \max\big(2(\lambda + \|u\|), 2(1 + \|u\|)\big)$ при $\|u\| < C$. Условия теоремы 1.11 выполнены, и для $g \in l_1$ в некоторой окрестности $t_0 = 0$ существует решение $u(t, g)$.

Лемма 3.1. *Множество*

$$U = \{(V, u_1, u_2, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant 0,\, V \geqslant 0,\, V + \sum_{k=1}^{\infty} u_k = r\} \tag{3.3}$$

является инвариантным множеством системы (3.1) *при* $r > 0$.

Доказательство. Введём конечномерную аппроксимацию (3.1) при $n > 17$:

$$\begin{aligned}
&\dot V = \lambda u_1 - V(1-u_n),\\
&\dot u_1 = \lambda(u_2-u_1) + V(1-u_1),\\
&\dot u_2 = \lambda(u_3-u_2) + V(u_1-u_2),\\
&\dot u_3 = \lambda(u_4-u_3) + V(u_2-u_3),\\
&\dots\\
&\dot u_{n-1} = \lambda(u_n-u_{n-1}) + V(u_{n-2}-u_{n-1}),\\
&\dot u_n = -\lambda u_n + V(u_{n-1}-u_n),\\
&\dot u_{n+1} = 0,\\
&\dot u_{n+2} = 0,\\
&\dots,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

и множества

$$\begin{aligned}
U^{(n)} = \{&(V, u_1, u_2, \dots, u_n, 0, 0, \dots) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant \dots \geqslant u_n \geqslant 0, V \geqslant 0\\
&V + \textstyle\sum_{k=1}^n u_k = r\}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Начальному условию $g \in U$ задачи (3.1) сопоставим начальное условие

$$g^{(n)} = \frac{\|g\|}{g_0 + \dots + g_n}(g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, 0, 0, \dots) \in U^{(n)}.$$

Решение (3.4) с начальным условием $g^{(n)}$ обозначим через $u^{(n)}(t, g^{(n)})$. Легко показать [27, раздел 4], что при любом $t \geqslant 0$ решение $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$.

В силу теоремы 1.20 $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$. Действительно, отображение f удовлетворяет условию Липшица. Из (3.1) и (3.4) вытекает $f(u^{(n)}(t, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(t, g^{(n)})) = -V^{(n)}{u_n}^{(n)}e_0 + V^{(n)}{u_n}^{(n)}e_{n+1}$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \in U^{(n)}$, $V^{(n)} \leqslant r$ и ${u_n}^{(n)} \leqslant r/n$. Поэтому $\|f(u^{(n)}(s, g^{(n)})) - f^{(n)}(u^{(n)}(s, g^{(n)}))\| \leqslant 2r^2/n$ при $s \leqslant t^*$. Следовательно, условия теоремы 1.20 выполнены.

Предположим теперь, что при $g \in U$ и при некотором $t > 0$ $u(t, g) \notin U$. Поскольку $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \to u(t, g)$, получаем, что $\exists n$: $u^{(n)}(t, g^{(n)}) \notin U$, что в силу [27, раздел 4] неверно. $\square$

При $\lambda > 0$ легко найти стационарное решение $u(t, g^*) = g^*$ при $t \geqslant 0$ и доказать его единственность в U. Действительно, приравнивая правые части (3.1) к нулю, получаем $f(g^*) = 0$, откуда $u_1^* = V/\lambda = \rho$, $u_k = \rho^k$. Принимая во внимание, что $V + u_1 + \dots = r$, получаем уравнение на ρ:

$$\frac{\rho}{1-\rho} = r - \lambda\rho,$$

которое имеет единственное решение ρ^* при $\rho > 0$. Таким образом, $g_0^* = \lambda\rho^*$, $g_k^* = (\rho^*)^k$.

Теорема 3.2. *При $\lambda > 0$ для любого $g \in U$: $\|u(t, g) - g^*\| \to 0$ при $t \to \infty$.*

Доказательство теоремы 3.2. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялись строгие неравенства $\rho^* + \varepsilon/\lambda < 1$ и $\rho^* - \varepsilon > \varepsilon$. Введём множество $X_\varepsilon = \{g \in U \mid \|g - g^*\| \leqslant \varepsilon\} = \bar{U}_\varepsilon(g^*) \cap X$. В силу следствия 1.14 множество X_ε инвариантно относительно отображения $u(t, \cdot)$ при любом $t \geqslant 0$. Поэтому для любого $t \geqslant 0$, $g \in X_\varepsilon$ выполнено $u_0(t, g)/\lambda + \varepsilon/\lambda < \rho^* + \varepsilon/\lambda < 1$.

Введём семейство множеств $X_{\varepsilon,C} = \{g \in X_\varepsilon \mid g_k \leqslant C/k^2$ при $k > 0\}$. Докажем, что при всех достаточно больших C множество $X_{\varepsilon,C}$ инвариантно относительно системы (3.1). Существует такое $k^* > 17$, что при любом $k > k^*$ выполнено неравенство

$$\left(\rho^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{2k-1}{(k-1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} < 0. \tag{3.6}$$

Выберем $C > (k^*)^2$. Заметим, что при таких C для всякого $g \in X_{\varepsilon,C}$ для $k \leqslant k^*$ имеем $g_k \leqslant 1 < C/k^2$. Рассмотрим теперь координаты с номерами $k > k^*$. Докажем, что при $k > k^*$ координата k не может приблизиться к C/k^2. Действительно, предположим, что в момент t координата $u_k(t, g) = C/k^2$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{u}_k &\leqslant \lambda\left(\frac{C}{(k+1)^2} - \frac{C}{k^2}\right) + u_0\left(\frac{C}{(k-1)^2} - \frac{C}{k^2}\right) \leqslant \\ &\leqslant \lambda C\left(\frac{k^2 - (k+1)^2}{(k+1)^2 k^2} + \left(\rho^* + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right)\frac{k^2 - (k-1)^2}{(k-1)^2 k^2}\right) < 0,\end{aligned}$$

поскольку $|u_0 - \lambda\rho^*| = |g_0 - g_0^*| < \varepsilon$, и выполнено (3.6). Напомним, что $|u_0(t, g) - g_0^*| \leqslant \|u(t, g) - g^*\| < \varepsilon$, поскольку $g \in X_\varepsilon$. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Можно также рассмотреть семейство множеств $X_{\varepsilon,a} = \{g \in X_\varepsilon \mid g_k \leqslant a^k$ при $k > 0\}$. Тогда используя уравнения в форме

$$\dot{u}_k = V(u_{k-1} - u_k) - \lambda(u_k - u_{k+1})$$

при $k \geqslant 1$ с краевым условием $u_0 \equiv 1$, получаем, что если в момент t^* оказалось $u_k(t^*) = a^k$, причём для всякого $t < t^*$ при всех $k \geqslant 1$ выполнено $u_k(t) \leqslant a^k$ снизу имеем

$$\begin{aligned}\dot{u}_k &\leqslant V(a^{k-1} - a^k) - \lambda(a^k - a^{k+1}) = \lambda(a^{k-1} - a^k)\left(\frac{V}{\lambda} - a\right) < \\ &< \lambda(a^{k-1} - a^k)\left(\frac{V^* + \varepsilon}{\lambda} - a\right) < 0\end{aligned}$$

при $(V^* + \varepsilon)/\lambda < a < 1$. Причём, очевидно, каждое из множеств $X_{\varepsilon,a}$ — компактно, а семейство $\{X_{\varepsilon,a}\}_{a \in ((V^*+\varepsilon)/\lambda, 1)}$ всюду плотно в X_ε.

Теперь проверим выполнение условий теоремы 1.15. Введём матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что при $\zeta = 1 + \lambda$ выполнено $J(u) + \zeta I \geqslant B$. Из формулы $\exp(tB) = I + tB + t^2B^2/2! + \dots$ следует, что при $t > 0$ все элементы верхней строки матрицы B строго больше нуля. Предположим, что для какого-то $g \in L \setminus \{0\}$: $\|\big(\exp(tB)\big)g\| = \|\exp(tB)\|\|g\|$. В силу положительности первой строки $\exp(tB)$ получаем $\|\big(\exp(tB)\big)g\| < \|\big(\exp(tB)\big)|g|\|$ и приходим к противоречию, поскольку $\||g|\| = \|g\|$. Следовательно, $0 < \|\exp(tB)\|\|g\| - \|\big(\exp(tB)\big)g\| = k(B, g)$.

Условия теоремы 1.17 выполнены и из неё следует, что при любом $g \in X$: $u(t, g) \to g^*$, что и требовалось. ☐

4. Другие примеры счётномерных систем

4.1. **Работы по дисциплинам маршрутизации.** Все системы [57] можно исследовать на глобальную устойчивость аналогично разделу 2 с тем, однако, усилением, что сходимость к стационарному решению будет не покоординатной, а по норме.

Чтобы пояснить, почему это так, вернёмся к системе [48], рассмотренной в разделе 2. На самом деле, в [48] изучалась система

$$\begin{aligned} &\dot u_1 = \lambda - (1 + \lambda u_1)u_1 + u_2, \\ &\dot u_2 = \lambda u_1^2 - (1 + \lambda u_2)u_2 + u_3, \\ &\dots \\ &\dot u_k = \lambda u_{k-1}^2 - (1 + \lambda u_k)u_k + u_{k+1} \\ &\dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

в инвариантном множестве $U' = \{(u_1, u_2, \dots,) \mid 1 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \dots \geqslant 0\}$. В [48] доказано, что система (4.1) покоординатно монотонна в U'. Замеченное свойство монотонности существенно используется в доказательстве сходимости. В силу теоремы 1.22, это означает, что все недиагональные элементы матрицы Якоби (4.1) неотрицательны. Для того, чтобы система попала под действие наших теорем, мы вводим дополнительную переменную $V = -(u_1 + u_2 + \dots)$: $\dot V = -\lambda + u_1$. Нам повезло: частная производная скорости V по всем u_j неотрицательна, а следовательно, матрица Якоби расширенной системы с переменной V также имеет отрицательные элементы только на диагонали. Только после этого начинают работать наши теоремы.

В доказательстве теорем о сходимости в [57] использовалась покоординатная монотонность решений. Вспоминая теорему 1.22, получаем неотрицательность недиагональных элементов матриц Якоби соответствующих бесконечных систем дифференциальных уравнений. Для создания искусственного интеграла мы введём переменную $V = -(u_1 + u_2 + \ldots)$. Во всех системах, рассмотренных в [57], $\dot{V} = -\lambda + u_1$. Следовательно, матрица Якоби становится неотрицательной вне диагонали, что позволяет применять наши теоремы.

4.2. **Интерпретация неотрицательности элементов матрицы Якоби.** Мы видели, что самыми серьёзными ограничениями наших методов являются неотрицательность матрицы Якоби вне диагонали и наличие первого интеграла равного сумме компонент. Было бы интересно понять “физический смысл” этих условий.

Здесь необходимо вспомнить, что система (4.1) описывает поведение длин очередей на приборах. Грубо говоря (более подробно, см. [48] или [57]), u_k — это доля приборов, в очереди на обслуживание к которым стоит не менее, чем k заявок (включая заявку, обслуживаемую в данный момент). Неотрицательность элементов матрицы Якоби свидетельствует о том, что интенсивность изменения u_k (т.е. производная u_k по времени) может лишь увеличиваться за счёт u_j при $j \neq k$. Она может уменьшаться (или не уменьшаться) только за счёт u_k. Таким образом, *при увеличении доли очередей с минимальным числом заявок j в системе интенсивность изменения доли очередей с минимальным числом заявок $k \neq j$ может лишь возрасти.*

Добавление дополнительной переменной $V = -(u_1 + u_2 + \ldots)$ для введения искусственного первого интеграла также имеет свою интерпретацию. Сумма $u_1 + u_2 + \ldots$ равна математическому ожиданию числа заявок в очереди. Назовём V *загрузкой* системы. Если частная производная $\dot{V}$ по u_k: $\partial\dot{V}/\partial u_k \geqslant 0$, то это означает, что интенсивность изменения загрузки может лишь увеличиваться при увеличении u_k. Т.е., *при увеличении числа заявок в очередях, система может лишь ускорить работу по их обслуживанию (или, если наблюдается неэргодичный случай, интенсивность увеличения загрузки возрастает).*

4.3. **Устойчивость бесконечной системы, описывающей большую симметричную замкнутую сеть Джексона (см. работу В.В. Щербакова [52]).** Проверить её устойчивость можно методом, описанным в разделе 3. Только вначале необходимо перейти в пространство упорядоченных по невозрастанию последовательностей.

4.4. **Дальнейшие примеры бесконечных счётных систем, которые можно исследовать на устойчивость с использованием метода раздела 1.** Мы просто перечислим работы, в которых появлялись нелинейные системы, которые сводятся к системам из класса исследованному в разделе 1. Во всех этих случаях необходимо либо добавить новые переменные, либо переходить в пространство убывающих последовательностей.

Почти очевидным образом сводится к нашему классу система из работы [50] Ю.М. Сухова и Дж.Б. Мартина. С помощью замены переменных к нашему классу сводится и система дифференциальных уравнений, использованная в работе [26] Ф. Делкойна и Г. Файоля.

Доказательство сходимости бесконечной системы дифференциальных уравнений, соответствующей симметричной замкнутой сети Джексона, опубликовано Ф.И. Карпелевичем и А.Н. Рыбко в [34]. Заметим, что для эту систему можно рассмотреть с использованием метода раздела 3, и, сведя задачу к достаточно малой окрестности неподвижной точки, можно построить такие же инвариантные множества как в теореме 3.2.

4.5. **Дальнейшие обобщения: периодические решения.** Если изучать системы с ω-периодичной правой частью $f(t,x) = f(t+\omega, x)$, то все наши результаты подвергаются простой модификации, позволяющей доказывать устойчивость единственного периодического решения. Единственным неясным моментом останется проверка, что это периодическое решение существует и единственно. По вопросу существования и единственности периодического решения см. [66].

5. Достаточное условие эргодичности счётной цепи Маркова с непрерывным временем

Рассмотрим неприводимую апериодическую счётную цепь Маркова со счётным пространством состояний и непрерывным временем. Мы сформулируем в этом разделе достаточный признак эргодичности в терминах существования инвариантных подмножеств у системы дифференциальных уравнений, описывающей данную цепь Маркова. Отметим, что задача об эргодичности таких цепей Маркова в терминах существования инвариантного распределения решена полностью, т.е. неприводимая апериодическая марковская цепь эргодична тогда и только тогда, когда имеется единственное инвариантное распределение [4, Том I, раздел XV.7].

Очень часто, однако, найти само стационарное распределение в явном виде не представляется возможным и интересен сам вопрос об эргодичности цепи Маркова. Существует множество подходов для доказательства эргодичности цепей Маркова, среди которых следует выделить метод обновлений (см. книгу С. Асмусена [55]), метод спаривания (coupling'a), описанный в книге Т. Линдвала [59] и метод пробных функций (метод Фостера-Ляпунова), изложенный с современной точке зрения в книге В.А. Малышева, М.В. Меньшикова и Г. Файоля [56]. Ни один из этих подходов, однако, никак не апеллирует к дифференциальным уравнениям, которыми можно описывать цепи Маркова. В этом небольшом разделе мы восполняем этот пробел, формулируя некоторую теорему о сходимости в терминах системы дифференциальных уравнений, описывающих цепь Маркова.

Без ограничения общности будем считать, что пространство состояний эргодичной апериодической цепи Маркова состоит из целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$. С точки зрения дифференциальных уравнений вероятности нахождения в момент t в состоянии p_i удовлетворяют дифференциальному уравнению (см. [4, т.II])

$$\dot{x} = Q^{\mathrm{T}} x,\ x \in l_1\ x = (p_0, p_1, \ldots)^{\mathrm{T}}, \tag{5.1}$$

где $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i \geqslant 0} p_i = 1$, а матрица Q задаёт интенсивности переходов.

Далее мы предполагаем, что матрица Q^{T} задаёт ограниченный оператор в l_1, что эквивалентно условию $q = \sup_{i \geqslant 0}(-q_{ii}) < \infty$. Обозначим через $x(t, p)$ решение уравнения 5.1. Через X обозначим множество

$$X = \{p \in l_1 \mid p_i \geqslant 0,\ \sum_{i \geqslant 0} p_i = 1\}.$$

Лемма 5.1. *Предположим, что существует такое семейство компактных инвариантных подмножеств $\{F_\alpha\}$, что для всякого α выполнено $x(t, F_\alpha) \subset F_\alpha$ при всех $t \geqslant 0$. Кроме того, предположим, что при некотором $\zeta \geqslant q$ для всякого $g \in L \backslash 0$ выполнено $k(\exp{(Q + \zeta I)}, g) > 0$. Тогда существует единственная неподвижная точка $p^* \in X$, причём для всякого $p \in X$ выполнено $x(t, p) \to p^*$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 1.16. □

Следствие 5.2. *Если существует компактное выпуклое инвариантное множество F, и при некотором $\zeta \geqslant q$ для всякого $g \in L \backslash 0$ выполнено $k(\exp{(Q + \zeta I)}, g) > 0$, то существует единственная неподвижная точка $p^* \in X$, причём для всякого $p \in X$ выполнено $x(t, p) \to p^*$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. В силу линейности $x(t, p)$ семейство множеств $F_\alpha = \{x \in X \mid \alpha x \in F\}$ удовлетворяет условиям леммы (5.1). □

Таким образом, если есть хотя бы одно компактное инвариантное множество, то существует единственное инвариантное распределение p^*. Некоторое обратное утверждение изложено в следующей лемме.

Лемма 5.3. *Предположим, что существует инвариантное распределение p^*. Тогда всякая траектория предкомпактна.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы использует идею из доказательства теоремы 1.18. Действительно, определим $S_k(x) = |x_k| + |x_{k+1}| + \dots$. Рассмотрим произвольное $p \in X$. Обозначим $h = |p - p^*|/\|p - p^*\|$, где через $|p - p^*|$ обозначен покоординатный модуль $p - p^*$. Обозначим через $P(t)$ решение уравнения $\dot{P} = Q^{\mathrm{T}}P$, $P(0) = I$. Очевидно, $x(t, g) = P(t)g$. Выполнены следующие неравенства:

$$S_k(x(t,p)) = S_k(P(t)p - p^* + p^*) \leqslant S_k\big(P(t)(p - p^*)\big) + S_k(p^*) \leqslant \|P(t)(p - p^*)\| + S_k(p^*).$$

Из теоремы [69, теорема 6.38] следует, что для всякого $\delta > 0$ существует такое $T > 0$, что для всякого $t > T$ выполнено $\|P(t)(p - p^*)\| < \delta/3$. Раз $p^* \in l_1$, существует такое K_1, что при всяком $k > K$ выполнено $S_k(p^*) < \delta/3$. Заметим, что множество $\{x(t,p) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}$ компактно, поскольку является непрерывным образом отрезка $[0, T]$. Применяя критерий предкомпактности (предложение 1.10), получаем предкомпактность множества, что существует такое K_2, что $S_k(x(t, g)) \leqslant \delta/3$ при всяком $k > K_2$ и при всяком $t \in [0, T]$. Следовательно выбрав $K = \max(K_1, K_2)$, получаем, что $S_k(x(t, p)) \leqslant \delta$ при всех $t \geqslant 0$ и при всех $k > K$. Остаётся опять применить критерий предкомпактности (предложение 1.10). $\square$

6. Транспортная сеть из двух узлов

В предыдущих разделах изучались системы дифференциальных уравнений, связанные с применением метода среднего поля к транспортным сетям из большого количества компонент. В этом разделе мы будем изучать конечные транспортные сети с конечным числом приборов и неограниченными очередями для заявок в каждом узле. Такую модель изучали Л.Г.Афанасьева, Ф.Делкойн и Г.Файоль в работе [25]. Как будет объяснено далее, без введения дополнительных ограничений такая система никогда не будет эргодичной. Для случая двух узлов мы напишем дифференциальные уравнения Колмогорова, описывающие поведение системы, и, выразив в явном виде бесконечную единственную инвариантную меру, с использованием теоремы об отношениях докажем предельную теорему о времени пребывании приборов в различных узлах системы.

Для того, чтобы сеть стала эргодичной, необходимо вводить дополнительные условия не поведение обслуживающих приборов, находящихся в состоянии ожидания пассажиров. В этой задаче существует много различных подходов. Один из них изучался в [24], где ограничение состояло в том, что ни в одном узле не может находиться более одного прибора. Другим типом ограничения является условие на «нетерпеливость» прибора, который ждёт пассажира в конкретном узле некоторое экспоненциально-распределённое время. Мы опять рассматриваем систему, состоящую их двух узлов и доказываем условие эргодичности. Неожиданным результатом является то, что достаточно добавить сколь угодно малое «нетерпение», чтобы система стала эргодичной.

Перейдём к описанию системы, которая исследовалась в [25]. Рассмотрим систему из N узлов и V приборов, которые перемещаются между узлами. Заявки поступают в систему в соответствии с последовательностью случайных величин $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$. Заявка, прибывшая в момент $a_1 + \ldots + a_n$, появляется в узле i с вероятностью γ_i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, $\gamma_0 + \ldots + \gamma_{N-1} = 1$. Положим $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1})$. Заявки выбирают узел назначения в соответствии с неприводимой матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})$ с инвариантной мерой $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_{N-1})$. Прибор из узла i с вероятностью p_{ij} переносит одну заявку в узел j и сам перемещается в узел j. Время перевозки также случайно и обозначается через τ_{ij}. Если в узле, куда прибыла заявка, нет ожидающего прибора, она сама встаёт в очередь. Если же прибор есть, то он перемещает заявку в другой узел, а если и там есть заявка, то он её перемещает в требуемый узел и так далее, пока он не окажется в каком-нибудь узле, где нет заявок и не будет там дальше их ждать.

В [25] доказаны теоремы о не эргодичности описанной выше системы. Сами формулировки теорем приведены ниже.

Теорема 6.1. *Если $\gamma \neq \pi$, то система транзиентна. Более того, всякий узел k, для которого выполнено условие $\gamma_k > \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i p_i k$, является транзиентным.*

Введём обозначения

$$\tau = \sum_{i=0}^{N-1} \pi_i \tau_i, \ \tau_i = \sum_{j=0}^{N-1} p_{ij} \mathbf{E} \tau_{ij}$$

Теорема 6.2. *Пусть $\gamma = \pi$. Если $N \geqslant 4$, то сеть транзиентна при всех τ, включая случай $\tau = 0$. Если $N = 2, 3$ и $\tau = 0$, то сеть является нулевой возвратной.*

Теорема 6.3. *Если $\gamma = \pi$, то все узлы неэргодичны.*

Теорема 6.4. *Если $\gamma = \pi$ и $\tau = 0$, то все узлы нуль-возвратные.*

Мы будем рассматривать далее случай $N = 2$ и случай $\tau = 0$, то есть, приборы перемещаются мгновенно и имеется ровно 2 узла. Кроме того, мы предположим, что последовательность a_i — является последовательностью независимых показательно-распределённых случайных величин со средним 1.

Пусть $y_i(t)$ — число пассажиров в узле i в момент t, $v_i(t)$ — число автомобилей в узле i в момент t. Поскольку автомобили перемещаются мгновенно, $y_i(t)v_i(t) = 0$, то есть, в каждом узле находятся либо автомобили либо пассажиры. Нас интересует

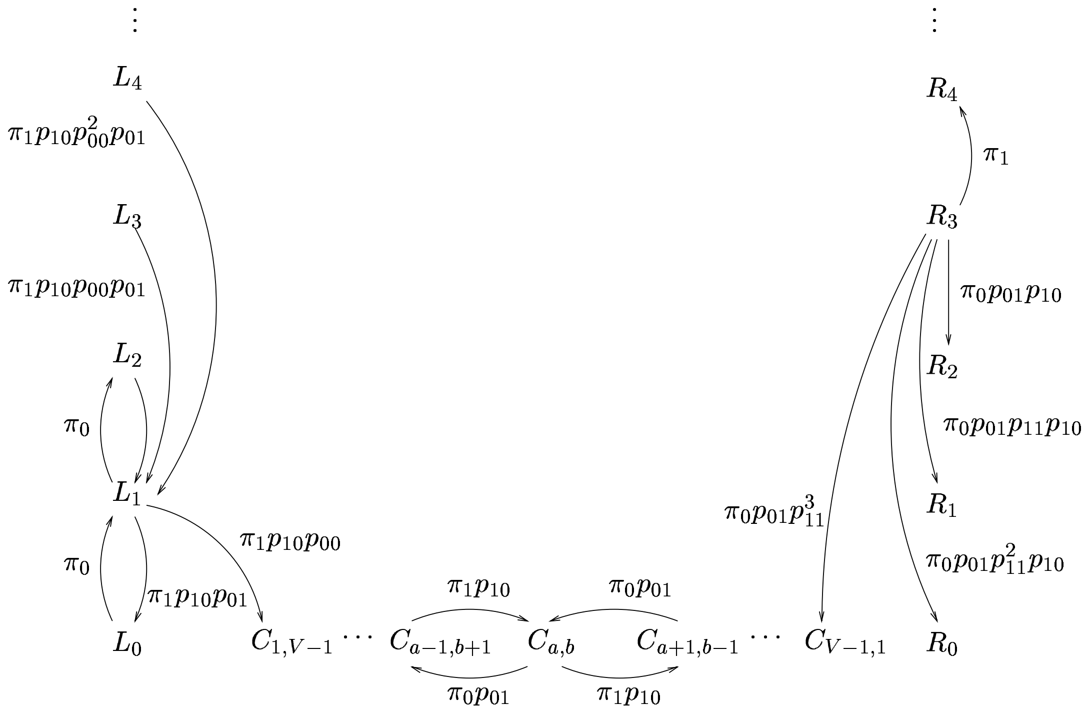

Рис. 7. Сеть из 2 узлов и V приборов (интенсивность выхода из L_1 есть $\pi_0 + \pi_1 p_{10} p_{01} + \pi_1 p_{10} p_{00} = \pi_0 + \pi_1 p_{10} = 1 - \pi_1(1 - p_{10}) = 1 - \pi_1 p_{11}$, а R_3 покидается с инт. $\pi_1 + \pi_0 p_{01} p_{10} + \pi_0 p_{01} p_{11} p_{10} + \pi_0 p_{01} p_{11}^2 p_{10} + \pi_0 p_{01} p_{11}^3 = \pi_1 + \pi_0 p_{01} = 1 - \pi_0(1 - p_{01}) = 1 - \pi_0 p_{00}$)

процесс $(x_1(t), x_2(t)) = (y_1(t) - v_1(t), y_2(t) - v_2(t))$. Состояния этого процесса есть $(n, -V)$, $(-V, n)$, $(-a, -b)$ при $n \geqslant 0$, $a, b > 0$, $a + b = V$. Пусть

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$. Собственный вектор

$$\pi = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) \\ \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix},$$

$\pi^{\mathrm{T}} P = \pi^{\mathrm{T}}$. Если $\gamma \neq \pi$, то из теоремы 6.1 следует, что система является транзиентной. Поэтому мы сосредоточимся на случае $\gamma = \pi$, когда система в силу теоремы 6.2 является нулевой возвратной.

Теорема 6.5. *При любом начальном условии отношение среднего числа попаданий в состояние $(n, -V)$ к среднему числу попаданий в состояние $(-V, k)$ сходится к α/β, а отношение среднего числа попаданий в $(-a, -b)$ к среднему числу попаданий в $(n, -V)$ сходится к $1/\alpha$ при $t \to \infty$ и при любых $n \geqslant 0$, $a, b > 0$, $a + b = V \geqslant 1$.*

Доказательство. Обозначим через $L_n(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $(n, -V)$, а через $R_n(t)$ вероятность того, что система находится в состоянии $(-V, n)$. Также, обозначим через $C_{a,b}(t)$ вероятность того, что система находится в состоянии $(-a, -b)$, где $a, b > 0$, $a + b = V$ (см. Рис. 7). Тогда на $L_n(t)$ и $R_n(t)$ выполнены дифференциальные уравнения Колмогорова. Выпишем их при $n > 0$ (см. Рис. 7):

$$L'_n = \pi_0 L_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_{n+k} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_n,$$

$$R'_n = \pi_1 R_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_{n+k} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1 - \pi_0 p_{00}) R_n.$$

Уравнения при $n = 0$ зависят от V. Если $V = 1$, то

$$L'_0 = \sum_{k\geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_0 + \sum_{k\geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k,$$

$$R'_0 = \sum_{k\geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (1 - \pi_0 p_{00}) R_0 + \sum_{k\geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k p_{10}.$$

Если $V > 1$, то

$$L'_0 = \sum_{k\geqslant 1} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \pi_1 p_{11}) L_0 + \pi_0 C_{1,V-1} p_{01},$$

$$R'_0 = \sum_{k\geqslant 1} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k p_{10} - (1 - \pi_0 p_{00}) R_0 + \pi_1 p_{10} C_{V-1,1}.$$

Если $V = 2$, то имеется только одна переменная $C_{1,1}$. Она удовлетворяет уравнению

$$C'_{1,1} = \sum_{k\geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{1,1} + \sum_{k\geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k.$$

Если $V > 2$, то

$$C'_{1,V-1} = \sum_{k\geqslant 0} \pi_1 p_{10} L_k p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{1,V-1} + \pi_0 p_{01} C_{2,V-2},$$

$$C'_{a,b} = \pi_1 p_{10} C_{a-1,b+1} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{a,b} + \pi_0 p_{01} C_{a+1,b-1}, \text{ при } 1 < a < V - 1,$$

$$C'_{V-1,1} = \pi_1 p_{10} C_{V-2,2} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) C_{V-1,1} + \sum_{k\geqslant 0} \pi_0 p_{01} R_k p_{11}^k.$$

Поскольку наша сеть возвратна и неприводима, согласно [4, том 1, раздел XV.11] у описывающей эту сеть системы дифференциальных уравнений существует единственное (с точностью до множителя) неотрицательное решение, которое и является бесконечной инвариантной мерой. Оно задаётся формулами

$$L_i^* = \alpha, R_i^* = \beta, C_{a,b} = 1. \tag{6.1}$$

В самом деле, при $n > 0$

$$
\begin{aligned}
L'_n = 0 = \pi_0\alpha + \alpha\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1-\pi_1 p_{11})\alpha = (*),\\
R'_n = 0 = \pi_1\beta + \beta\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1-\pi_0 p_{00})\beta = (**).
\end{aligned}
$$

Воспользуемся тождествами

$$
\begin{aligned}
\pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} = \pi_0,\\
\pi_1 p_{10} + \pi_1 p_{11} = \pi_1,
\end{aligned}
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} = \sum_{k\geqslant 1}(\pi_0 - \pi_0 p_{00}) p_{00}^{k-1} p_{01} = \pi_0 p_{01},\\
\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k-1} p_{10} = \sum_{k\geqslant 1}(\pi_1 - \pi_1 p_{11}) p_{11}^{k-1} p_{10} = \pi_1 p_{10}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
(*) = \alpha(\pi_0 + \pi_0 p_{01} - 1 + \pi_1 p_{11}) &= \alpha(\pi_0 + \pi_0 p_{01} - 1 + \pi_1 - \pi_0 p_{01})\\
&= \alpha(\pi_0 + \pi_1 - 1) = 0,\\
(**) = \beta(\pi_1 + \pi_1 p_{10} - 1 + \pi_0 p_{00}) &= \beta(\pi_1 + \pi_1 p_{10} - 1 + \pi_0 - \pi_1 p_{10})\\
&= \beta(\pi_1 + \pi_0 - 1) = 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим случай $V > 2$.

$$
\begin{aligned}
L'_0 = 0 = \alpha\sum_{k\geqslant 1}\pi_1 p_{10} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1-\pi_1 p_{11})\alpha + \pi_0 p_{01} =\\
= \alpha\pi_0 p_{01} - \alpha + \alpha\pi_1 - \alpha\pi_0 p_{01} + \pi_0 p_{01} = -\alpha + \alpha\pi_1 + \pi_0\alpha,\\
R'_0 = 0 = \beta\sum_{k\geqslant 1}\pi_0 p_{01} p_{11}^{k} p_{10} - (1-\pi_0 p_{00})\beta + \pi_1 p_{10} =\\
= \beta\pi_1 p_{10} - \beta + \beta\pi_0 - \beta\pi_1 p_{10} + \pi_1 p_{10} = -\beta + \beta\pi_0 + \pi_1\beta.
\end{aligned}
$$

Остаётся

$$C'_{1,V-1} = 0 = \alpha \sum_{k\geqslant 0} \pi_1 p_{10} p_{00}^k - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \pi_0 p_{01} =$$
$$= \alpha\pi_0 - \pi_1\beta = \alpha\beta/(\alpha+\beta) - \alpha\beta/(\alpha+\beta) = 0$$
$$C'_{a,b} = 0 = \pi_1 p_{10} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \pi_0 p_{01}, \text{ при } 1 < a < V-1,$$
$$C'_{V-1,1} = 0 = \pi_1 p_{10} - (\pi_1 p_{10} + \pi_0 p_{01}) + \beta \sum_{k\geqslant 0} \pi_0 p_{01} p_{11}^k =$$
$$= -\pi_0\alpha + \beta\pi_1 = -\beta\alpha/(\alpha+\beta) + \beta\alpha/(\alpha+\beta).$$

Случаи $V = 1, 2$ рассматриваются аналогично.

Утверждение теоремы теперь следует из [4, том 1, раздел XV.11, следствие 2]. □

Изменим теперь нашу сеть таким образом, чтобы она стала эргодичной. Предположим, что вектор γ необязательно равен вектору π, и кроме того, предположим, что если все машины скапливаются в одном узле, то с дополнительной интенсивностью ζ одна из машин срывается с места. Как и в доказательстве теоремы 6.5, будем обозначать через $L_n(t)$ вероятность того, что в момент t система находится в состоянии $(n, -V)$, причём $n \geqslant 0$, а через $R_n(t)$ соответствующую вероятность пребывания в состоянии $(-V, n)$.

Тогда на $L_n(t)$ и $R_n(t)$ выполнены дифференциальные уравнения Колмогорова. Выпишем их при $n > 0$:

$$L'_n = \gamma_0 L_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} (\gamma_1 + \zeta) p_{10} L_{n+k} p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10}) L_n,$$
$$R'_n = \gamma_1 R_{n-1} + \sum_{k\geqslant 1} (\gamma_0 + \zeta) p_{01} R_{n+k} p_{11}^{k-1} p_{10} - (1 - \gamma_0 p_{00} + \zeta p_{10}) R_n.$$

Как видно, они получаются небольшим изменением уравнений, которые использовались для случая бесконечного терпения, отвечающего $\zeta = 0$.

Теорема 6.6 (достаточное условие эргодичности). *Предположим, что выполнены неравенства*

$$\zeta > \gamma_1 \frac{p_{10}}{p_{01}} - \gamma_0 \text{ и } \zeta > \gamma_0 \frac{p_{01}}{p_{10}} - \gamma_1$$

Тогда существует единственное инвариантное распределение и сеть является эргодичной.

Доказательство. Построим семейство множеств, инвариантных относительно этой системы и воспользуемся теоремой 5.1. Само семейство подмножеств задаётся следующим образом:

$$X_a = \{(L_n, C_{a,b}, R_n) \mid C_{a,b} \leqslant 1, L_n \leqslant a^n, R_n \leqslant a^n\}.$$

Заметим, что для проверки инвариантности этого множества достаточно уравнений на L_n и R_n при $n > 0$. Проверим, что если $L_n(0) \leqslant a^n$, то и при всех t выполнено $L_n(t) \leqslant a^n$. Действительно, предположим, что в какой-то момент оказалось $L_n(t^*) = a^n$, а до этого при всех $n > 0$ и при всех $t > 0$ выполнялось $L_n(t) < a^n$. Тогда

$$\dot{L}_n \leqslant a^n \left(\frac{\gamma_0}{a} + \sum_{k \geqslant 1} (\gamma_1 + \zeta) p_{10} a^k p_{00}^{k-1} p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10}) \right) = a^n f(a),$$

где

$$f(a) = \frac{\gamma_0}{a} + (\gamma_1 + \zeta) p_{10} \frac{a}{1 - a p_{00}} p_{01} - (1 - \gamma_1 p_{11} + \zeta p_{10})$$

Легко проверить, что

$$f(1) = \gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta) p_{10} - 1 + \gamma_1 p_{11} - \zeta p_{10} = 0.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{1 - \alpha a} \right)' = \frac{1}{(1 - \alpha a)^2},$$

мы получаем

$$f'(1) = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta) p_{10} \frac{1}{(1 - p_{00})^2} p_{01}.$$

Поскольку $1 - p_{00} = p_{01}$, мы можем упростить это выражение до

$$f'(1) = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \zeta) \frac{p_{10}}{p_{01}}.$$

Теперь заметим, что при a достаточно близких к 1 в силу формулы Тейлора

$$f(a) = f(1) + f'(1)(a - 1) + o(a - 1) = f'(1)(a - 1) + o(a - 1),$$

и при $a < 1$ знак $f(a)$ противоположен знаку $f'(1)$. Поэтому в малой окрестности a из того, что $f'(1) > 0$ следует, что $f(a) < 0$ при $a < 1$. Поэтому, если $f'(1) > 0$, то $\dot{L}_n < 0$ при всех $n \geqslant 1$.

Остаётся заметить, что условие $f'(1) > 0$ можно сформулировать в виде

$$\frac{p_{10}}{p_{01}} > \frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \zeta}.$$

Заметим, что при замене 0 на 1 и 1 на 0 мы получим условие инвариантности области $R_n \leqslant a^n$, а именно

$$\frac{p_{01}}{p_{10}} > \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \zeta}.$$

Пара этих условий эквивалентна неравенствам, приведённым в условии теоремы.

Теперь теорема следует из теоремы 5.1. □

Из этой теоремы следует интересное наблюдение. Предположим, что $\gamma = \pi$. Тогда, учитывая, что $p_{01} = \alpha$, $p_{10} = \beta$, $\gamma_0 = \beta/(\alpha+\beta)$, $\gamma_1 = \alpha/(\alpha+\beta)$, мы получаем оба условия, сформулированные в теореме 6.6 принимают вид

$$\zeta > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 0 \text{ и } \zeta > \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 0.$$

Поскольку при $\zeta = 0$ в силу теоремы 6.2 наша сеть является нулевой возвратной, то верно следующее следствие.

Следствие 6.7. *Если $\gamma = \pi$, то необходимым и достаточным условием эргодичности транспортной сети с нетерпеливыми серверами является условие $\zeta > 0$.*

Таким образом, добавление приборам сколь угодно малого нетерпения превращает систему в эргодичную. Автор убеждён, что это является общим фактом, верным и в случае произвольного числа N узлов в сети.

Глава 3
Бесконечная транспортная сеть

В первой главе настоящей диссертации изучались характеристики транспортной сети при неограниченно увеличивающемся числе узлов $N \to \infty$. При соблюдении определённых условий симметрии нам удавалось описать поведение предельной системы с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, стационарное решение которых давало желаемое предельное распределение числа приборов по узлам.

Поэтому представляется интересным попробовать изучить транспортную сеть с бесконечным числом узлов, без использования метода среднего поля. Для упрощения исследования мы предположим, что время передвижения приборов из одного узла в другой равно нулю, а заявки никогда не стоят в очереди. Оказалось, что такая система некоторым образом обобщает модели, которые изучались начиная с 70-х годов.

Марковские процессы, которые описывают эволюцию системы бесконечного числа неразличимых частиц, перемещающихся по счётному множеству J, впервые рассмотрел Ф. Спицер [37]. Он же ввёл так называемый процесс с нулевой областью зависимости, который, как мы увидим далее, можно рассматривать как одну из модификаций бесконечной транспортной сети.

Дадим неформальное описание процесса с нулевой областью зависимости. Эволюция зависит от бесконечной матрицы маршрутизации $P = (p_{ij})_{i,j \in J}$. Элементы множества J называются *ячейками*, P называется *законом одинокой частицы*. Первоначально в каждой ячейке находится конечное число частиц, которые перемещаются по следующей схеме: частицы, оказавшиеся в ячейке $i \in J$, ждут экспоненциально распределённое время с параметром $\gamma_i > 0$, после чего одна из них, взятая наугад, перемещается в ячейку $j \in J$, выбираемую с вероятностью p_{ij}.

Вообще говоря, классический процесс с нулевой областью зависимости получается, если положить $\gamma_i = 1$ для всех $i \in J$ (иногда такой процесс называется процессом с функцией скорости Бозе-Эйнштейна, см. Е.Вэймер [40]).

Интерес к такому процессу подогревается возможными приложениями в теории массового обслуживания. Если, подобно [25], [23], [27] интерпретировать частицы как некие мгновенно перемещающие обслуживающие приборы, а ячейки как узлы, на которые поступают заявки (покидающие систему в случае отсутствия приборов в узле), то получается *транспортная сеть с бесконечным числом обслуживающих приборов*. Заметим, что в [25], [23], [27] рассматривались только конечные системы, хотя и изучалось асимптотическое поведение при числе станций стремящемся к бесконечности. Рассмотрение бесконечного случая, как уже упоминалось выше, выглядит логичным продолжением работ [25], [23], [27]. Поллинговая система с бесконечным числом узлов, одним обслуживающим прибором и заявками, занимающими очередь в каждом узле в ожидании обслуживающего прибора изучалась в работе С.Г. Фосса и Н.И. Черновой [36], а также в работе А.А. Боровкова, Д. Коршунова и Р.Шацбергера [35]

Другой пример из теории массового обслуживания получается при отождествлении частиц с некими заявками на обслуживание, циркулирующими между ячейками, отождествляемыми с приборами. В каждой ячейке $i \in J$ находится один прибор, обслуживающий заявку с интенсивностью $\gamma_i > 0$, и перенаправляющий её в момент окончания обслуживания с вероятностью p_{ij} в очередь к прибору j. Эту систему называют бесконечной замкнутой сетью Джексона. Конечные сети Джексона введены, собственно, самим Дж.Р. Джексоном в [21]. Сети Джексон являются одной из немногих сетей обслуживания, у которых инвариантное распределение числа заявок по приборам выписывается в явном виде как произведение распределений числа заявок на каждом приборе, умноженное на нормализующую константу. Т.е., инвариантное распределение является распределением вектора из некоторых независимых случайных величин. Такое простое представление обеспечило огромную популярность сетей Джексона в приложениях к телекоммуникационным сетям и к сетям обработки данных. Сети Джексона представляют собой классический пример сетей, включаемый во многие учебники (см. например, [56]). Поведение инвариантных распределений у замкнутых сетей Джексона изучалось во многих работах, среди которых мы приведём лишь работу [71] В.А. Малышева и А.В. Яковлева, в которой читатель может найти дальнейшие ссылки. Поведение замкнутых сетей Джексона при $N \to \infty$ с помощью метода среднего поля изучали В.В. Щербаков [52, 53], а также Ф.И. Карпелевич и А.Н. Рыбко [34]. Бесконечные сети Джексона изучали М.Я. Кельберт, М.Л. Концевич и А.Н. Рыбко в [42].

В разделе 1 настоящей главы мы опишем результаты, которые до какой-то степени описывают поведение бесконечной транспортной сети. Эти результаты получаются прямым обобщением результатов Ф. Спицера [37], Т.М. Лиггетта [39] Е. Вэймер [40], Е.Д. Анджела [41] для процесса с нулевой областью зависимости и результатов М.Я. Кельберта, М.Л. Концевича и А.Н. Рыбко [42] для бесконечной сети Джексона.

Мы увидим, что транспортная сеть никогда не является эргодичной, поскольку имеется целое семейство мер, инвариантных относительно описывающего её случайного процесса. Отметим, что бесконечная транспортная сеть попадает в класс так называемых «марковских процессов с локальным взаимодействием», которые описаны в замечательной книге Т.М. Лиггетта [38]. Согласно «программе исследования» подобных процессов, изложенной в начале книги [38], после того, как удалось найти семейство инвариантных мер, возникает вопрос о нахождении тех начальных условий, начав эволюцию с которых мы придём к какой-либо заданной мере. Любопытно, что в случае описанного выше процесса с нулевой областью зависимости эта задача до сих пор не получила удовлетворительного решения. Последние достижения в этой области получены А. Галвес и Г.Гийоль [72], которые рассматривали одномерный однородный процесс с нулевой областью зависимости со скачками не более чем на единицу вправо и влево и получили притяжение к инвариантной мере для периодических начальных условий. Заметим, что такой процесс проще в изучении, поскольку он эквивалентен процессу обменов (см. [38]) с помеченной частицей.

Доказательство сходимости в более общем случае вызывает значительные трудности. Например, Ландиму и др. [73] удалось доказать притяжение возмущённой на конечном числе узлов равновесной меры к себе самой для некоторой модификации процесса с нулевой областью на целочисленной d-мерной решётке. Видоизменение состоит в том, что интенсивность обслуживания заявки в каждом узле зависит от длины очереди в этом узле и при большом числе заявок она ограничивается снизу и сверху линейной функцией. Этот процесс является промежуточным между процессом с нулевой областью зависимости, описанным выше, и процессом из независимых частиц и потому полученные результаты, несомненно, очень важны, хотя, с точки зрения автора диссертации, маловероятно, что они помогут решить проблему о притяжении к инвариантной мере для исходного процесса с нулевой областью зависимости.

В связи с этим представляется интересным вопрос о пределе среднего поля для системы, содержащей счётное число узлов. Основная идея состоит в том, чтобы «размножить» каждый узел в район и рассматривать полученную сеть как кластерную сеть, аналогичную сети, рассмотренной в разделе 6 первой главы диссертации, с тем существенным отличием, что теперь число районов бесконечно.

В результате мы получим счётную систему дифференциальных уравнений. У этой системы можно найти все неподвижные точки, а затем с использованием результатов раздела 1 доказать, l_1-расстояние между точками не увеличивается, откуда можно сделать заключение о том, что интересно лишь доказательство покоординатной сходимости к неподвижной точке. Мы ограничиваемся трансляционно-инвариантным случаем и показываем, что при трансляционно-инвариантном отклонении от трансляционно-инвариантной неподвижной точки будет наблюдаться сходимость к распределению с соответствующим средним числом частиц.

Отметим, что случай конечного числа районов для открытой сети Джексона рассматривали Ю.М. Сухов и Дж.Б. Мартин в [50].

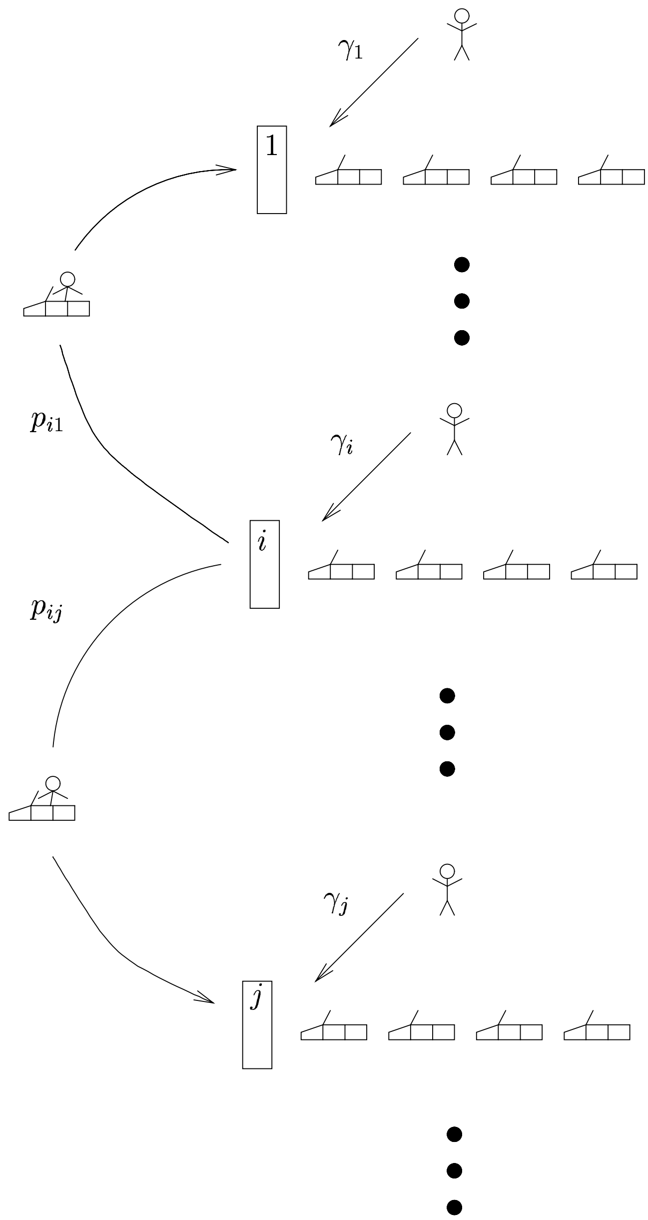

Рис. 8. Бесконечная транспортная сеть

1. Бесконечная транспортная сеть: описание и простейшие результаты

Перейдём к строгому изложению результатов. Мы будем здесь пользоваться терминологией, принятой для процессов с нулевой областью зависимости. Тогда под частицами мы подразумеваем приборы, а под ячейками мы подразумеваем узлы.

Итак, имеется конечное или счётное число частиц, которые находятся в счётном числе узлов J. Переходы частиц, находящихся в узле $i \in J$ происходят после истечения случайного показательно распределённого времени τ_i с параметром γ_i. Если по прошествии этого времени узел i непуст, то одна, и только одна частица, находящаяся в ячейке частица мгновенно перемещается в некоторый узел j, который выбирается с вероятностью p_{ij} (см. Рис. 8). Все имеющиеся интервалы времени и переходы считаются независимыми в совокупности. Вероятности перехода из i в j составляют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j \in J}$, $\forall i \in J \sum\limits_{j \in J} p_{ij} = 1$. Можно описать наш процесс с помощью бесконечного вектора $\eta(t) = \{\eta_i(t)\}_{i \in J}$, $t \geq 0$, где $\eta_i(t)$ — это число частиц в узле i в момент t.

Заметим, что пространство состояний процесса $\eta(t)$ континуально и, вообще говоря, необходимо специально доказывать теорему о его существовании. Эта теорема, как и важная теорема о монотонности, доказана Е. Сподаревым в [60] с помощью техники, изложенной в [38].

Существование феллеровского процесса $\eta(t)$ выводится из существования описывающей его марковской полугруппы $S(t)$ $((S(t)f)(\eta) = \mathbf{E}(f(\eta(t)) \mid \eta(0) = \eta))$ с помощью известных теорем теории марковских [46]. Построение же марковской полугруппы $S(t)$ можно провести с помощью техники, описанной в книге Т.М. Лиггетта [38].

Пусть $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Тогда в пространстве состояний системы $W = \overline{\mathbb{Z}}_+^J$ можно ввести специальную метрику, в которой само пространство будет компактным. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра, порождаемая цилиндрическими множествами, а $C(W)$ — банахово пространство всех действительно-значных функций на W с равномерной нормой.

Для всякой $f \in C(W)$ $\forall\, i \in J$ определим «меру зависимости от координаты i» по правилу

$$\Delta_f(i) = \sup\{\mid f(\eta) - f(\zeta) \mid : \eta, \zeta \in W, \eta_j = \zeta_j \ \forall\, j \neq i\}.$$

Введём плотное в $C(W)$ множество $D(W) = \left\{ f \in C(W) : |||\, f \,||| \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i \in J} \Delta_f(i) < \infty \right\}$. Определим следующий оператор на $D(W)$:

$$A\,f(\eta) = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} \left[I\{\eta_i > 0\} \gamma_i p_{ij} \left(f(\ldots \eta_i - 1 \ldots \eta_j + 1 \ldots) - f(\eta) \right) \right].$$

Теорема 1.1 (существование, [60]). *Если*

$$\sup_{i \in J} \gamma_i < \infty, \ \ \sup_{i \in J} \sum_{j \in J} \gamma_j p_{ji} < \infty, \tag{1.1}$$

то

(1) *Замыкание* $\overline{A}$ *оператора* A *является инфинитезимальным оператором марковской полугруппы* $S(t)$. *и подпространство* $D(W)$ *является существенным подпространством для* $\overline{A}$.

(2) *Существует единственный феллеровский процесс* $\eta(t) : (\Omega, \Im, \mathbf{P}) \to (W, \mathcal{B})$ *с заданным инфинитезимальным оператором* A; $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ *— некоторое вероятностное пространство.*

Доказательство. Инфинитезимальные характеристики процесса $\eta(t)$ можно описывать с помощью *переходных мер* $c_T(\eta, \xi)$, определённых на $\overline{Z}^T$, где $\eta = (\eta_i; i \in J)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $T = \{i_1, \ldots, i_n\}$ — некоторое конечное подмножество J [38, Гл.1, п.3, с.39]. Тогда $c_T(\eta, \xi)$ — интенсивность перехода из состояния η в состояние $\eta^\xi = (\zeta_j; j \in J \mid \zeta_j = \eta_j$ для всех $j \notin T$ и $\zeta_{i_k} = \xi_k$ при $k = 1, \ldots, n)$ (то есть, изменяется лишь конечное число координат). Для $|T| > 2$ и $|T| = 1$ выполнено $c_T(\eta, \xi) = 0$. Если же $|T| = 2$, $T = \{i, j\}$, то

$$c_T(\eta, \xi) = \begin{cases} \gamma_i p_{ij} \mathbf{1}_{\{\eta_i > 0\}}, & \text{если } \xi_1 = \eta_i - 1, \xi_2 = \eta_i + 1, \\ \gamma_j p_{ji} \mathbf{1}_{\{\eta_j > 0\}}, & \text{если } \xi_1 = \eta_i + 1, \xi_2 = \eta_i - 1, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Тогда оператор A можно записать в виде $(Af)(\eta) = \sum_T \int_{\overline{\mathbb{Z}}_+^T} c_T(\eta, d\zeta)(f(\eta^\zeta) - f(\eta))$. Пусть

$$c_T(i) = \sup\{\|c_T(\eta^1, d\zeta) - c_T(\eta^2, d\zeta)\| \mid \eta_1, \eta_2 \in W, \eta_j^1 = \eta_j^2 \text{ при всех } j \neq i\},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму полной вариации меры на $\overline{\mathbb{Z}}_+^T$. Обозначим

$$\nu(i, j) = \sum_{T \ni i} c_T(j),\ i \neq j \text{ и } \nu(i, i) = 0.$$

Чтобы применить теорему существования 3.9 из книги [38] необходимо лишь проверить условия

$$\sup_{i \in J} \sum_{T \ni i} \sup_{\eta \in \overline{\mathbb{Z}}_+^T} c_T(\eta, \overline{\mathbb{Z}}_+^T) < \infty \text{ и } \sup_{i \in J} \sum_{j \in J} \nu(i, j) < \infty.$$

С учётом (1.2), можно переписать эти условия как

$$\sup_{i \in J} \sum_{j \in J} (\gamma_i p_{ij} + \gamma_j p_{ji}) < \infty.$$

Поскольку $\sum_{j \in J} p_{ij} = 1$, последнее ограничение эквивалентно приведённому в условии теоремы. □

Следствие 1.2 ([60]). *Если выполнено одно из утверждений:*

- $\sup\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$, $\sup\limits_{i \in J} \sum\limits_{j \in J} p_{ji} < \infty$

- $\sum\limits_{i \in J} \gamma_i < \infty$,

то условия (1.1) *выполнены.*

Далее мы всюду будем предполагать, что условие (1.1) выполнено.

Введём частичный порядок на W: мы говорим, что $\xi \prec \xi'$ для $\xi, \xi' \in W$, если $\xi_i \leqslant \xi_i'$ при всех $i \in J$ (если $\xi_i' = \infty$ то мы считаем, что последнее неравенство выполнено).

Лемма 1.3 (Монотонность, [60]). *Рассмотрим два процесса $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ с одинаковыми $\gamma = \{\gamma_i\}_{i \in J}$ и P и разными сравнимыми начальными условиями: $\eta(0) = \xi \in W$, $\eta'(0) = \xi' \in W$ и $\xi \prec \xi'$. Тогда существует такой процесс $S(t) = (\xi(t), \xi'(t))$ на фазовом пространстве $W \times W$, что $S(0) = (\xi, \xi')$ и $\xi(t) \prec \xi'(t)$ почти наверное, а процессы $\xi(t)$ и $\xi'(t)$ являются стохастическими копиями $\eta(t)$ и $\eta'(t)$, соответственно.*

Доказательство леммы является стандартным и требует построения процессов $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ на одном вероятностном пространстве (см. [40, теорема 4.2] и [42, лемма 2]).

Будем говорить, (при выполнении условий леммы 1.3), что $\eta'(t)$ *стохастически мажорирует* $\eta(t)$: $\eta(t) \prec \eta'(t)$.

Предположим, что марковская цепь с пространством состояний J и переходной матрицей P является однородной апериодичной и неприводимой. Введём

Предположение А: Существует положительная инвариантная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P (необязательно конечная, см. [4, раздел XV.11]).

Предположение Б: Существует единственная инвариантная вероятностная мера $\pi = \left(\pi_i\right)_{i \in J}$ для P, (которую мы будем называть *стационарной*).

Предположение В: Счётная цепь Маркова с переходной матрицей P является транзиентной.

Обозначим

$$a \stackrel{def}{=} \sup_{i \in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \tag{1.3}$$

Пусть $\rho_{\max} = 1/a$. Для любого $\rho \in [0; \rho_{\max}]$ и $\rho = \infty$ введём меру-произведение $L_\rho(\cdot)$ на $(W, \mathcal{B})$ с координатными множителями $l^i_\rho(\cdot)$, $i \in J$ определяемыми по-разному в следующих двух случаях:

если $\rho \in [0; \rho_{\max}]$ и $\rho(\pi_i/\gamma_i) < 1$, то

$$l^i_\rho(k) = \begin{cases} (1 - \rho(\pi_i/\gamma_i))\,(\rho(\pi_i/\gamma_i))^k\,, \ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, \ k = \infty \end{cases}$$

иначе выполнено $\rho = \rho_{\max}$, $\rho(\pi_i/\gamma_i) = 1$ или $\rho = \infty$, и

$$l^i_\rho(k) = \begin{cases} 0, \ k \in \mathbb{Z}_+, \\ 1, \ k = \infty. \end{cases}$$

Введём $\mathbf{L} = \{L_\rho(\cdot): \ \rho \in [0;\rho_{\max}], \ \rho = \infty\}$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{L}}$ выпуклую оболочку $\mathbf{L}$:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \bigcap_{K\text{–замкнутое выпуклое множество, } K \supseteq \mathbf{L}} K.$$

Пусть $\mathcal{M}$ — класс всех инвариантных мер марковского процесса $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Следующие четыре утверждения доказываются с помощью слегка изменённых доводов доказательств утверждений 2.14, 3.1, 2.15, 2.16 из [40]; отличие состоит в том, что надо там брать меру $\left\{\frac{\pi_i}{\gamma_i}\right\}_{i\in J}$ вместо $\bar{a} = (\bar{a}(x) : x \in J)$ (используя обозначения [40]).

Теорема 1.4 (Инвариантные меры)**.** *Предположим, что выполнены предположение A и условие (*1.3*). Тогда замкнутая выпуклая оболочка* $\tilde{\mathbf{L}}$ *множества мер*

$$\{L_\rho(\cdot): \ \rho \in [0;\rho_{\max}], \ \rho = \infty\}$$

включена в класс $\mathcal{M}$ *всех инвариантных мер марковского процесса* $\{\eta(t)\}_{t\geq 0}$.

Пусть

$$\sum_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty. \tag{1.4}$$

Утверждение 1.5. *Предположим, что выполнены предположение A и условие (*1.4*). Тогда* $\forall \ \rho \in [0;\rho_{\max}]$

$$L_\rho\left(\eta : \sum_{i\in J}\eta_i < \infty\right) = 1.$$

Теорема 1.6 (Заполнение)**.** *Пусть выполнены предположение A и условие* 1.4*. Предположим, что для узла* $j_0 \in J$ *выполнено условие* $\pi_{j_0}/\gamma_{j_0} = \max\limits_{i\in J}\pi_i/\gamma_i$*. Тогда* $\forall \ k \in \mathbb{Z}_+ \ \ \forall \eta^0 : \sum\limits_{i\in J}\eta_i^0 = \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\eta_{j_0}(t) > k \mid \eta(0) = \eta^0\right\} = 1.$$

Следствие 1.7 (Все инвариантные меры на $\left(\mathbb{Z}_+^J, \mathcal{B}\cap\mathbb{Z}_+^J\right)$)**.** *Если выполнены предположение A и условие (*1.4*), то выпуклая оболочка мер*

$$\left\{L_\rho^N(\cdot) = L_\rho\left(\cdot \mid \sum_{i\in J}\eta_i = N\right) : \ N \in \mathbb{N}, \ \rho \in (0;\rho_{\max})\right\}$$

исчерпывает собой все инвариантные меры на $\left(\mathbb{Z}_+^J, \mathcal{B}\cap\mathbb{Z}_+^J\right)$.

Пусть $G_{ij} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \ \ \forall i,j \in J$, где $p_{ij}^{(n)}$ — вероятность достичь состояния i из состояния j за n шагов.

Обозначим через $\eta_{\bar{J}}(t)$ ограничение $\eta(t)$ на некоторое подмножество $\bar{J}$ узлов J. Рассмотрим последовательность $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ неубывающих конечных подмножеств J:

$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \ldots, \bigcup\limits_n J_n = J$ которые выбраны так, что все матрицы $P^{(n)} = (p_{ij})_{i,j \in J_n}$ неприводимы (так всегда можно сделать, см. [74]). Для любых $\{\gamma_i\}_{i \in J}$, P и $\xi \in \mathbb{Z}_+^J$ пусть $\eta(t)$ — процесс, описывающий бесконечную транспортную сеть с начальным состоянием $\eta(0) = \xi$ и $\eta^{(n)}(t)$ — транспортная сеть, с начальным состоянием

$$\eta^{(n)}(0) = \begin{cases} \xi_j, \ j \in J_n, \\ \infty, \ j \notin J_n. \end{cases}$$

Из леммы 1.3 следует, что $\eta(t) \prec \eta^{(n)}(t)$. Очевидно, ограничение $\eta_{J_n}^{(n)}(t)$ является открытой сетью Джексона на множестве J_n со входными интенсивностями $\Delta^{(n)} = (\Delta_j^{(n)})_{j \in J_n}$, $\Delta_j^{(n)} = \sum\limits_{i \in J \setminus J_n} \gamma_i p_{ij}$. Пусть $\rho^{(n)} = (\rho_j^{(n)})_{j \in J_n}$ — удовлетворяет условию равенства входных и выходных потоков (см. [75]):

$$\rho^{(n)} = \rho^{(n)} P^{(n)} + \Delta^{(n)}.$$

Матрица $I - P^{(n)}$ обратима, поскольку $P^{(n)}$ неприводимая подматрица $P^{(n+1)}$ со спектральным радиусом, не превосходящим 1. Поэтому можно записать

$$\rho^{(n)} = \Delta^{(n)} (I - P^{(n)})^{-1} = \Delta^{(n)} (I + P^{(n)} + \big(P^{(n)}\big)^2 + \ldots).$$

Теперь мы можем сформулировать следующую лемму, аналогичную лемме из [42], которая будет полезна при получении достаточных условий, при которых все частицы системы исчезают при $t \to \infty$.

Утверждение 1.8. *Предположим, что $\eta(0) = \xi$. Если для любого n_0 и $k \in J_{n_0}$ ${\rho^{(n)}}_k \to 0$ при $n \to \infty$, то для всех $\xi \in \mathbb{Z}_+^J$ $\eta(t) \longrightarrow 0$ слабо при $t \to \infty$.*

Доказательство. Поскольку покоординатная сходимость распределений $\eta(t)$ эквивалентна слабой сходимости распределения $\eta(t)$, достаточно показать, что для любого конечного $\bar{J} \subset J$ выполнено

$$\lim_{t \to \infty} P(\eta_{\bar{J}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi) = 1.$$

Используем следующий результат из [76]: пусть $u_{n,j}$ — единственное решение конечной системы уравенений

$$u_{n,j} = \sum_{k \in J_n} \min[1, u_{n,k}] p_{ij} + \Delta_j^{(n)}.$$

Пусть $J_n^0 = \{j \in J_n : u_{n,j} < 1\}$, $J_n^1 = \{j \in J_n : u_{n,j} \geqslant 1\}$. Тогда распределение ${\eta^{(n)}}_{J_n}(t) \in \mathbb{Z}_+^{J_n}$ слабо сходится к инвариантной мере

$$\pi_{u_n}(z) = \prod_{j \in J_n^0} (1 - u_{n,j}) u_{n,j}^{z_j} \prod_{j \in J_n^1} \delta_\infty(z_j),$$

где $\delta_\infty(\cdot)$ — дельта-мера Дирака, сконцентрированная в ∞. Неравенство $u_n \leqslant \rho^{(n)}$ даёт $u_{n,k} \to 0$ для любого $k \in J_{n_0}$.

Из того, что $\eta(t) \prec \eta^{(n)}(t)$ следует, что

$$P(\eta_{J_{n_0}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi) \geqslant P({\eta^{(n)}}_{J_{n_0}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi).$$

Поэтому

$$\liminf_{t\to\infty} P(\eta_{J_{n_0}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi) \geqslant \lim_{t\to\infty} P({\eta^{(n)}}_{J_{n_0}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi).$$

Правая часть сходится к 1 при $n \to \infty$ и потому $P(\eta_{J_{n_0}}(t) = 0 \mid \eta(0) = \xi) \to 1$ при $t \to \infty$. Теперь заметим, что для произвольного конечного подмножества $\bar{J}$ можно подобрать такое n_0, что $J_{n_0} \supset \bar{J}$, а потому доказываемое утверждение справедливо $\square$

Теорема 1.9 (опустошение). *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\gamma < \infty$ *и предположение B*

(2) $\gamma < \infty$ *и* $\forall j \in J \sum\limits_{i\in J} p_{ij} \leqslant 1$

(3) $\forall j \in J \sum\limits_{i\in J} p_{ij} \leqslant 1$ *и существует такая неубывающая последовательность конечных множеств* $\{J_n\}_{n=1}^\infty$, $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$, $\bigcup\limits_n J_n = J$, *что* $\sup\limits_{j\in J\setminus J_n} \gamma_j \longrightarrow 0$ *при* $n \to \infty$, *а матрицы* $P^{(n)} = (p_{ij})_{i,j\in J_n}$ *неприводимы*

(4) *Пусть* $\forall j \in J \sum\limits_{i\in J} p_{ij} \leqslant 1$. *Введём обрывающуюся цепь Маркова* $Y = \{Y_m\}_{m=1}^\infty$ *с пространством состояний* J *и переходной матрицей* $P^T = (p_{ji})_{i,j\in J}$. *Обозначим через* $\bar{P}_j(J)$ *вероятность того, что* Y *оборвётся при выходе из начального состояния* $Y_0 = j$. *Предположим, что* $\bar{P}_j(J) = 1$ *для всех* $j \in J$ *и* $\sup\limits_{j\in J} \gamma_j < \infty$.

Тогда для любого $\eta(0) \in \mathbb{Z}_+^J$ *процесс* $\eta(t) \to 0$ *слабо при* $t \to \infty$.

Доказательство. Проверим, что условия утверждения 1.8 выполнены во всех случаях 1) – 4). Тогда, применив это утверждение мы получаем желаемое заключение.

1) В силу транзиентности P сумма $I + P + P^2 + \ldots = G = \big(G_{ij}\big)_{i,j\in J} < \infty$ конечна (т.е., $G_{ij} < \infty\ \forall i, j \in J$). Очевидно,

$$G^{(n)} = (I - P^{(n)})^{-1} = I + P^{(n)} + (P^{(n)})^2 + \ldots \leqslant G_{J_n} = \big(G_{ij}\big)_{i,j\in J_n}.$$

Хорошо известно (см. [46, т.1, часть 2, теорема 13]), что $G_{jk} \leqslant G_{kk}\ \forall j, k \in J$. Явная формула для ${\rho^{(n)}}_k$ задаётся уравнением

$${\rho^{(n)}}_k = (\Delta^{(n)} G^{(n)})_k = \sum_{i\in J\setminus J_n} \sum_{j\in J_n} \gamma_i p_{ij} {G_{j,k}}^{(n)}. \tag{1.5}$$

Из неравенств $G_{j,k}{}^{(n)} \leqslant G_{jk} \leqslant G_{kk}$ следует, что

$$\rho^{(n)}{}_k \leqslant G_{kk} \sum_{i \in J \setminus J_n} \sum_{j \in J_n} \gamma_i p_{ij},$$

и при $\sum\limits_{j \in J_n} p_{ij} \leqslant 1$ мы получаем

$$\rho^{(n)}{}_k \leqslant G_{kk} \sum_{i \in J \setminus J_n} \gamma_i. \tag{1.6}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{i \in J} \gamma_i$ сходится, правая часть (1.6) стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому $\rho^{(n)}{}_k \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

2) Для любого $i \in J_n$ обозначим через $\mathcal{L}_{n,j}$ множество всех таких последовательностей $(j, j_1, \ldots, j_l)$ произвольной длины l, что $j_k \in J_n$, $k < l$ в то время как $j_l \in J \setminus J_n$. Тогда можно переписать (1.5) следующим образом:

$$\rho^{(n)}{}_j = \sum_{\mathcal{L}_{n,j}} (\prod_{k=0}^{l-2} p^T_{j_k j_{k+1}}) p^T_{j_{l-1} j_l} \gamma_{j_l},$$

где p^T_{ij} — элементы транспонированной матрицы P: $p^T_{ij} = p_{ji}$. Очевидно,

$$\rho^{(n)}{}_j \leqslant \bar{\gamma}_{J_n} \sum_{\mathcal{L}_{n,j}} (\prod_{k=0}^{l-2} p^T_{j_k j_{k+1}}) p^T_{j_{l-1} j_l} = \bar{\gamma}_{J_n} x^{(n)}{}_j,$$

где $\bar{\gamma}_{J_n} = \sup\limits_{j \in J \setminus J_n} \gamma_j$. Можно интерпретировать $x^{(n)}{}_j$ как вероятность того события, что обрывающаяся марковская цепь Y с пространством состояний J и с переходной матрицей P^T, выходящая из j, когда-либо посетит множество $J \setminus J_n$. Ввиду этого, $x^{(n)}{}_j \leqslant 1$. Следовательно, $\rho^{(n)}{}_j \leqslant \bar{\gamma}_{J_n}$. Тогда $\bar{\gamma}_{J_n} \to 0$ при $n \to \infty$ поскольку ряд $\sum\limits_{j \in J} \gamma_j$ сходится, и отсюда мы получаем, что $\rho^{(n)}{}_k \to 0$ при $n \to \infty$.

3) Приведённые выше доводы также работают в этом случае, поскольку требование $\bar{\gamma}_{J_n} \to 0$ просто задано в явном виде условия 3).

4) Можно приспособить доказательство из 2) и для случая $\gamma = \infty$. А именно, очевидно, что $x^{(n)}{}_j \to 1 - \bar{P}_j(J)$ при $n \to \infty$. Тогда достаточно потребовать $\bar{P}_j(J) = 1$, $\sup\limits_{j \in J} \gamma_j < \infty$, чтобы получить сходимость $\rho^{(n)}{}_j \to 0$. $\square$

Назовём i-ю координату $\eta_i(\cdot)$ процесса η (i-й узел системы) *стохастически ограниченной* если $\lim\limits_{m \to \infty} \sup\limits_{t \in \mathbf{R}_+} P\{\eta_i(t) > m\} = 0$.

Теорема 1.10 (стохастическая ограниченность). *Если* $\exists i_0 \in J$: $\gamma_{i_0} > \sum\limits_{j\in J} \gamma_j p_{ji_0}$ *и* $\eta_{i_0}(0) \in \mathbb{Z}_+$, *то координата* $\eta_{i_0}(t)$ *стохастически ограничена и*

$$\limsup_{t\to\infty} E\eta_{i_0}(t) \le \frac{\sum\limits_{j\in J,\, j\ne i_0} \gamma_j p_{ji_0}}{\gamma_{i_0} - \sum\limits_{j\in J} \gamma_j p_{ji_0}}.$$

Доказательство. Построим такой процесс $\eta'(t)$,

$$\eta'(0) = \begin{cases} \eta_j(0), \ j = i_0, \\ \infty, \ j \ne i_0. \end{cases}$$

Опять, используя лемму 1.3, мы получаем, что $\eta(t) \prec \eta'(t)$. Заметим, что $\eta'(0)$ — открытая конечная сеть Джексона всего из одного узла i_0. Интенсивность входящего потока $\Delta_{i_0}^{(1)}$ этой сети равна $\sum\limits_{j\in J, j\ne i_0} \gamma_j p_{ji_0}$, а интенсивность обслуживания равна γ_{i_0}. Вероятность выхода из системы равна $1 - p_{i_0 i_0}$. Тогда условие равенства входных и выходных потоков принимает вид $\rho_{i_0}^{(1)} = \Delta_{i_0}^{(1)} + \rho_{i_0}^{(1)} p_{i_0 i_0}$, и сеть $\eta'_{i_0}(\cdot)$ эргодична тогда и только тогда, когда $\rho_{i_0}^{(1)} < \gamma_{i_0}$, т.е., $\Delta_{i_0}^{(1)}/(1 - p_{i_0 i_0}) < \gamma_{i_0}$, или

$$\sum_{j\in J, j\ne i_0} \gamma_j p_{ji_0} < \gamma_{i_0}(1 - p_{i_0 i_0}).$$

Последнее неравенство выполнено в силу условий теоремы. Поэтому сеть $\eta'_{i_0}(\cdot)$ эргодична и стохастически ограничена. Следовательно, координата $\eta_{i_0}(\cdot)$ стохастически ограничена. Пусть $\eta'_{i_0}(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \eta'_{i_0}(t)$. Тогда $\eta'_{i_0}(\infty)$ имеет геометрическое распределение $P\left\{\tilde{\eta}_{i_0}(\infty) = n\right\} = (1-\alpha)\alpha^n$, $n \in \mathbb{Z}$ с параметром (см. [75])

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{j\in J,\, j\ne i_0} \gamma_j p_{ji_0}}{(1 - p_{i_0 i_0})\gamma_{i_0}}.$$

Из $\eta(t) \prec \eta^{(n)}(t)$ следует, что $E\eta_{i_0}(t) \le E\eta'_{i_0}(t)$ при всех $t \geqslant 0$ и

$$\limsup_{t\to\infty} E\eta_{i_0}(t) \le E\eta'_{i_0}(\infty) = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Подставляя α, мы получаем последнее утверждение теоремы. □

2. Предел среднего поля для процесса с нулевой областью зависимости

Обозначим через J некоторое счётное множество. Пусть $P = (p_{ij})_{i,j\in J}$ — стохастическая матрица, $\sum_{j\in J} p_{ij} = 1$ при всех $i \in J$. Рассмотрим семейство случайных процессов нулевой областью зависимости на множестве узлов $J_N = J \times \{1, \ldots, N\}$, причём матрица переходных вероятностей $Q = \left(q_{(i,n),(j,m)}\right)_{(i,n),(j,m)\in J_N}$ определена по правилу $q_{(i,n),(j,m)} = p_{i,j}/N$ при всех $(i,n),(j,m) \in J_N$. Будем считать, что при фиксированном $j \in J$ к каждый узел (j,n), где $n \in \{1,\dots N\}$, работает как обслуживающее устройство с интенсивностью $\gamma_j > 0$ ([60]). Конфигурация процесса в момент t задаётся числами $\eta_{(i,k)}$ частиц в узлах $(i,k) \in J_N$. Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\bar{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Используя стандартную процедуру, мы вводим пополненное бесконечностью пространство состояний нашей системы $W_N = \bar{\mathbb{Z}}_+^{J_N}$, которое является компактным метризуемым пространством, в котором σ-алгебра измеримых множеств получается замыканием семейства цилиндрических множеств. Обозначим через $C(W_N)$ банахово пространство действительных функций на W_N с равномерной нормой. Пространство функций, зависящих от конечного числа координат плотно в $C(W_N)$. Определим на функциях, зависящих от конечного числа координат, производящий оператор

$$Af(\eta) = \sum_{(i,k)\in J_N} \sum_{(j,l)\in J_N} (\chi_{\eta(i,k)>0}\gamma_i p_{ij}/N f(\dots,\eta_{(i,k)} - 1,\dots,\eta_{(j,l)} + 1,\dots) - f(\eta))$$

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Если*

$$\sup_{j\in J} \gamma_j < \infty \ \text{и} \ \sup_{j\in J} \sum_{i\in J} \gamma_i p_{ij} < \infty,$$

то существует единственный феллеровский процесс $\eta(t)$, описывающий нашу систему.

Далее мы приведём некоторые нестрогие рассуждения, которые, по-видимому, можно сделать строгими, что потребовало бы значительно больше места. При фиксированном η определим

$$m_j(n) = \#\{(j,k) \mid \eta_{(j,k)} = n, \text{ и } v_j(n) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m_j(n)}{N}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим процесс $v(\eta(t))$, где $v_j(n)$ заданы (2.1). При $N \to \infty$ поведение $v(\eta(t))$ становится детерминированным и описывается бесконечной системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{v}(t) = h(v(t)),\ v(0) = w, \tag{2.2}$$

где

$$h_j(0,v) = 0, \tag{2.3}$$

$$h_j(n,v) = \sum_{i\in J} \gamma_i v_i(1) p_{ij}(v_j(n-1) - v_j(n)) - \gamma_j(v_j(n) - v_j(n+1)). \tag{2.4}$$

при всех $n \geqslant 1$. Фазовое пространство системы (2.2)–(2.4) определяется неравенствами

$$1 = v_j(0) \geqslant v_j(1) \geqslant v_j(2) \geqslant \ldots \geqslant 0,$$

справедливыми при всех $j \in J$.

Обозначим через $\pi = (\pi_j)_{j\in J}$ стационарную меру цепи Маркова с переходной матрицей P:

$$\sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

при всех $j \in J$. Если цепь Маркова с матрицей P возвратна, то такая мера существует и единственна с точностью до множителя. Если P положительна возвратна, то эта мера конечна, если P ноль-рекуррентна, то эта мера бесконечна. Нетрудно проверить, что при любом $\alpha \geqslant 0$ точка

$$v_j^*(n) = \left(\alpha \frac{\pi_j}{\gamma_j}\right)^n$$

является стационарным решением системы (2.2)–(2.4).

Если существует

$$a = \sup_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty,$$

то существует целое семейство инвариантных стационарных решений при $\alpha \in [0, 1/a)$. Иначе стационарное решение существует лишь при $\alpha = 0$. Если

$$\sum_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty,$$

то стационарное решение является суммируемым в норме l_1 и вообще систему уравнений (2.2)–(2.4) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в норме l_1. Тогда

$$W = \sum_{j\in J, n\geqslant 1} v_j(n, 0)$$

соответствует единственное стационарное решение с $\alpha \in [0, 1/a)$ и, с использованием техники раздела 1 второй главы настоящей диссертации, можно показать, что $v_j(n,t)$ сходится именно к этому стационарному решению.

Если

$$\sup_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} < \infty \text{ и } \sum_{i\in J} \frac{\pi_i}{\gamma_i} = \infty,$$

то все стационарные решения будут уже бесконечными. Тем не менее можно показать, что любое l_1-суммируемое отклонение не будет в смысле l_1 увеличиваться со временем. Кроме того, в силу обратимости динамики l_1-несуммируемое отклонение не сможет превратиться в конечное отклонение. Таким образом, пространство начальных условий разбивается на классы эквивалентности по отношению эквивалентности начальных условий с конечной l_1-разностью. Таким образом, в l_1-норме один пучок не может перейти в другой и относительно разных пучков можно ставить лишь вопрос о слабой, т.е. покоординатной сходимости.

Предположим, что $J = \mathbb{Z}^d$ и система (2.2)–(2.4) трансляционно-инвариантна относительно J, т.е. $\gamma_i = \gamma$ и $p_{ij} = p_{j-i}$. Предположим, что начальное условие w также трансляционно-инвариантно. Тогда решение $v(t, w)$ также трансляционно-инвариантно при любом t и вместо (2.4) можно взять

$$h_j(n, v) = \gamma[v_j(1)(v_j(n-1) - v_j(1)) - (v_j(n) - v_j(n+1))].$$

Таким образом, $v_j(n; t) = u_n(t)$, где $u_n(t)$ задано решением бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_0 = 0, \tag{2.5}$$

$$\dot{u}_n = u_1(u_{n-1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}), \tag{2.6}$$

при всех $n \geqslant 1$ с начальным условием $u_0(0) = 1$, $u_n(0) = g_n$. Фазовое пространство системы (2.5)–(2.6) задаётся неравенствами

$$1 = u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant 0.$$

У этой системы наличествует первый интеграл

$$W = \sum_{n \geqslant 1} u_n(t) = \sum_{n \geqslant 1} u_n(0) = \sum_{n \geqslant 1} w_n.$$

При фиксированном первом интеграле существует единственная стационарная точка $u_n^* = \rho^n$, где ρ единственным образом определяется из условия

$$\sum_{n \geqslant 1} u_n^* = \frac{\rho}{1-\rho} = W$$

и есть $\rho = W/(1+W)$. Систему уравнений (2.5)–(2.6) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в банаховом пространстве l_1 последовательностей $u = (u_0, u_1, \ldots)$ с нормой $\|u\| = |u_0| + |u_1| + \ldots$. Используя технику, разработанную в разделе 1 настоящей диссертации можно показать, что решение $u(t, g)$ уравнения (2.5)–(2.6) с начальным условием $g = (1,\, g_1,\, g_2,\, \ldots)$ сходится к $u^* = (1,\, u_1^*,\, u_2^*,\, \ldots)$:

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t, g) - u^*\| = 0.$$

Заметим, что эта система очень известна. Другие доказательства её сходимости предлагались в [52] и [34].

Список литературы

[1] *E. Brockmeyer, H.L. Halstrøm, A. Jensen*. The life and works of A. K. Erlang. — Trans. Danish Acad. Tech. Sci., vol. 1948, №2, pp.277, 1948.

[2] *А.А. Боровков*. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. Редакция URSS, Москва, 1999.

[3] *Б. В. Гнеденко*. Об одном обобщении формул Эрланга. — Доклады АН Укр.ССР, с.347–350, 1959.

[4] *Феллер В.*. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Мир, Москва, 1984.

[5] *А.Я. Хинчин*. Математические методы теории массового обслуживания. — Труды Мат. Инст. им. Стеклова, т. 49, с. 122. Издат. Акад. Наук. СССР, Москва, 1955.

[6] *А.Н. Колмогоров*. Sur le problème d'attente. — Мат. Сборник, том 38, №1–2, с.101–106, 1931.

[7] *Б.А. Севастьянов*. Эргодическая теорема для марковских процессов и её применение к телефонным системам с отказами. — Теория вероятностей и её приложения, том 2, №2, с.106–116, 1957.

[8] *F. Pollaczek*. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. — Math. Z., vol. 32, pp.64–100,729–750, 1930.

[9] *А.Я. Хинчин*. Mathematisches über die Erwartung vor einem öffentlichen Schalter. — Мат. Сборник, том 39, №4, с.73–84, 1932.

[10] *D.G. Kendall*. Some problems in the theory of queues. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., vol. 13, pp.151–173; discussion: 173–185, 1951.

[11] *D.G. Kendall*. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. — Ann. Math. Statistics, vol. 24, pp.338–354, 1953.

[12] *D.V. Lindley*. The theory of queues with a single server. — Proc. Cambridge Philos Soc., vol. 48, pp.277–289, 1952.

[13] *J. Kiefer, J. Wolfowitz*. On the theory of queues with many servers. — Trans. Amer. Math. Soc., vol. 78, pp.1–18, 1955.

[14] *R.M. Loynes*. The stability of a queue with non-independent interarrival and service times. — Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 58, pp.497–520, 1962.

[15] *R.M. Loynes*. The stability of a system of queues in series. — Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 60, pp.569–574, 1964.

[16] *P. Franken*. Ein Stetigkeitssatz für Verlustsysteme. — Operationsforschung und Mathematische Statistik, II, pp. 9–23. Akademie-Verlag, Berlin, 1970.

[17] *А.А. Боровков*. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1972.

[18] *A. Brandt, P. Franken, B. Lisek*. Stationary stochastic models. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990.

[19] *J.F.C. Kingman*. On the algebra of queues. — J. Appl. Probability, vol. 3, pp.285–326, 1966.

[20] *J.R. Jackson*. Networks of waiting lines. — Operations Res., vol. 5, pp.518–521, 1957.

[21] *J.R. Jackson*. Jobshop-like queueing systems. — Management Sci., №10, pp.131–150, 1963.

[22] *F.P. Kelly*. Reversibility and stochastic networks. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[23] *L.G. Afanassieva, G. Fayolle, S.Yu. Popov*. Models for transportation networks. — J. Math. Sci. (New York), vol. 84, №3, pp.1091–1103, 1997.

[24] *Л.Г. Афанасьева, Е.М. Гинзбург*. Эргодичность систем со взаимодействующими частицами. — Фунд. и прикл. математика, том 8, №4, с.985–993, 2000.

[25] *L.G. Afanassieva, F. Delcoigne, G. Fayolle*. On polling systems where servers wait for customers. — Markov Process. Related Fields, vol. 3, №4, pp.527–545, 1997. Statistical mechanics of large networks (Rocquencourt, 1996).

[26] *F. Delcoigne, G. Fayolle*. Thermodynamical limit and propagation of chaos in polling systems. — Markov Process. Related Fields, vol. 5, №1, pp.89–124, 1999.

[27] *D.V. Khmelev, V.I. Oseledets*. Mean-field approximation for stochastic transportation network and stability of dynamical system. Technical Report 445, University of Bremen, June 1999. Preprint.

[28] *В.И. Оселедец, Д.В. Хмелёв*. Глобальная устойчивость бесконечных систем нелинейных дифференциальных уравнений и неоднородные счётные цепи Маркова. — Пробл. передачи информации, том 36, №1, с.60–76, 1999.

[29] *Д.В. Хмелёв*. Предельные теоремы для несимметричных транспортных сетей. — Фунд. и прикл. математика, том 9, №4, 2001, с.1401–1407

[30] *S.C. Borst*. Polling systems. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1996.

[31] *F.I. Karpelevich, E.A. Pechersky, Yu.M. Suhov*. Dobrushin's approach to queueing network theory. — J. Appl. Math. Stochastic Anal., vol. 9, №4, pp.373–397, 1996.

[32] *Ф.И. Карпелевич, А.Н. Рыбко*. Асимптотическое поведение симметричной замкнутой сети массового обслуживания в термодинамическом пределе. — Пробл. передачи информации, том 36, №2, с.69–95, 2000.

[33] *А.Л. Столяр*. Асимптотическое поведение стационарных распределений одной замкнутой системы массового обслуживания. — Пробл. передачи информации, том 25, №4, с.80–92, 1989.

[34] *F.I. Karpelevich, A.N. Rybko*. Thermodynamic limit for the mean field model of simple symmetrical closed queueing network. — Markov Process. Related Fields, vol. 6, №1, pp.89–105, 2000.

[35] *A.A. Borovkov, D. Korshunov, R. Schassberger*. Ergodicity of a polling network with an infinite number of stations. — Queueing Systems Theory Appl., vol. 32, №1-3, pp.169–193, 1999.

[36] *S.G. Foss, N.I. Chernova*. On polling systems with an infinite number of stations. — Sibirsk. Mat. Zh., vol. 37, №4, pp.940–956, iv, 1996.

[37] *F. Spitzer*. Interaction of Markov processes. — Advances in Math., vol. 5, pp.246–290 (1970), 1970.

[38] *Т.М. Лиггетт*. Марковские процессы с локальным взаимодействием. Изд-во «Мир», Москва, 1989. Переведено с английского А.Л. Тоомом и С.Б. Шлосманом под редакцией Р.Л. Добрушина.

[39] *T.M. Liggett*. Existence theorems for infinite particle systems. — Trans. Amer. Math. Soc., vol. 165, pp.471–481, 1972.

[40] *E. Waymire*. Zero-range interaction at Bose-Einstein speeds under a positive recurrent single particle law. — Ann. Probab., том 8, №3, с.441–450, 1980.

[41] *E.D. Andjel*. Invariant measures for the zero range processes. — Ann. Probab., vol. 10, №3, pp.525–547, 1982.

[42] *М.Я. Кельберт, М.Л. Концевич, А.Н. Рыбко*. О сетях Джексона на счётных графах. — Теор. вер. и ее прим., том XXXII, №2, с.379–382, 1988.

[43] *Р.Л. Добрушин*. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I. — Теория вероятностей и её приложения, том 1, №1, с.72–89, 1956.

[44] *Р.Л. Добрушин*. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II. — Теория вероятностей и её приложения, том 1, №4, с.365–425, 1956.

[45] *J.R. Norris*. Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of 1997 original.

[46] *И.И. Гихман, А.В. Скороход*. Теория случайных процессов. Наука, Москва, 1971.

[47] *S.N. Ethier, T.G. Kurtz*. Markov processes (Characterization and convergence). John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.

[48] *Н.Д. Введенская, Р.Л. Добрушин, Ф.И. Карпелевич*. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей — асимптотический подход. — Пробл. передачи информации, том 32, №1, с.20–34, 1996.

[49] *Yu.M. Suhov, N.D. Vvedenskaya*. Fast Jackson Networks with Dynamic Routing. получена от авторов, 2001.

[50] *J.B. Martin, Yu.M. Suhov*. Fast Jackson networks. — Ann. Appl. Probab., vol. 9, №3, pp.854–870, 1999.

[51] *Mitzenmacher M.*. The Power of Two Choices in Randomized Load Balancing. PhD thesis, University of California at Berkley, September 1996.

[52] *V.V. Scherbakov*. Time scales hierarchy in large closed Jackson networks. Technical Report 4, French-Russian A.M. Liapunov Institute of Moscow State University, 1997.

[53] *V.V. Scherbakov*. Long time dynamics in large closed Jackson networks. — Markov Process. Related Fields, vol. 6, №1, pp.107–119, 2000.

[54] *Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко*. Лекции по теории сложных систем. Советское радио, Москва, 1973.

[55] *S. Asmussen*. Applied probability and queues. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

[56] *G. Fayolle, V.A. Malyshev, M. . Men'shikov*. Topics in the constructive theory of countable Markov chains. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[57] *N.D. Vvedenskaya, Yu.M. Suhov*. Dobrushin's mean-field approximation for a queue with dynamic routing. — Markov Process. Related Fields, vol. 3, №4, pp.493–526, 1997. Statistical mechanics of large networks (Rocquencourt, 1996).

[58] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин*. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», Физматгиз, Москва, 1976.

[59] *T. Lindvall*. Lectures on the coupling method. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. A Wiley-Interscience Publication.

[60] *D.V. Khmelev, E. Spodarev*. Infinite closed Jackson networks. Technical Report Math/Inf/00/07, Friedrich-Schiller-Universität Jena, April 2000.

[61] *M. Mitzenmacher*. Analyses of load stealing models based on families of differential equations. — Theory Comput. Syst., vol. 34, №1, pp.77–98, 2001.

[62] *R.A Horn, C.R. Johnson*. Matrix Analysis. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989. имеется русский перевод: Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* — М. "Мир", 1989.

[63] *В.И. Арнольд*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1975. изд. 2, стереотипное.

[64] *С.А. Ашманов, А.В. Тимохов*. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. Наука. Физматгиз, Москва, 1991.

[65] *Ж. Жакод, А.Н. Ширяев*. Предельные теоремы для случайных процессов. «Наука», Физматлит, Москва, 1994.

[66] *М.А. Красносельский, П.П. Забрейко*. Геометрические методы нелинейного анализа. «Наука», Физматгиз, Москва, 1975.

[67] *Д. Хенри*. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Мир, Москва, 1985.

[68] *Б.М. Кирстайн, Д.Е. Франкен, Д. Штойян*. Сравнимость и монотонность марковских процессов. — Теория вероятностей и её применения, том 22, №1, с.43–54, 1977.

[69] *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Кнепп А.*. Счётные цепи Маркова. «Наука», Физматлит, Москва, 1987.

[70] *Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн*. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, Физматлит, Москва, 1970.

[71] *V.A. Malyshev, A.V. Yakovlev*. Condensation in large closed Jackson networks. — Ann. Appl. Probab., vol. 6, №1, pp.92–115, 1996.

[72] *A. Galves, H. Guiol*. Relaxation time of the one-dimensional symmetric zero range process with constant rate. — Markov Process. Related Fields, vol. 3, №3, pp.323–332, 1997.

[73] *E. Janvresse, C. Landim, J. Quastel, H.T. Yau*. Relaxation to equilibrium of conservative dynamics. I. Zero-range processes. — Ann. Probab., vol. 27, №1, pp.325–360, 1999.

[74] *E. Seneta*. Finite approximations to infinite non-negative matrices. II. Refinements and applications. — Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 64, pp.465–470, 1968.

[75] *Дж. Уолренд*. Введение в теорию сетей массового обслуживания. «Мир», Москва, 1993.

[76] *J.B. Goodman, W.A. Massey*. The nonergodic Jackson network. — J. Appl. Probab., vol. 21, №4, pp.860–869, 1984.