

ГОУ ВПО САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Бахарева Юлия Николаевна

Трехмерная задача  
математической теории пластичности

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., проф. Радаев Ю.Н.

Самара – 2005

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава I. Теория пространственной задачи математической теории пластичности</b>	<b>17</b>
I.1. Основные соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности для ребра призмы Треска . . .	17
I.1.1. Вырожденные решения пространственной задачи . .	22
I.1.2. Невырожденные решения пространственной задачи .	24
I.1.3. Ассоциированный закон течения для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска . .	27
I.2. Уравнения равновесия для расслоенного поля напряжений	28
I.2.1. Критерий расслоенности и расслоенные пластические поля . . . . .	28
I.2.2. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений . . . . .	34
I.3. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений . . . . .	38
<b>Глава II. Алгебра симметрий и инвариантно-групповые решения уравнений пространственной и осесимметричной задачи</b>	<b>45</b>
II.1. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности в изостатических координатах . . . .	46
II.2. Группы симметрий и алгебра симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи . . . . .	72

II.2.1. Вычисление группы инвариантности системы уравнений осесимметричной задачи . . . . .	73
II.2.2. Инвариантно-групповые решения уравнений осесимметричной задачи . . . . .	83
II.3. Группы симметрий и алгебры симметрий пространственных уравнений . . . . .	112
<b>Глава III. Некоторые осесимметричные и пространственные задачи статического равновесия</b>	<b>124</b>
III.1. Формулировка задачи в условиях осевой симметрии . .	124
III.2. Классификация, характеристики и условие корректности постановки задачи . . . . .	129
III.3. Общая численная схема решения осесимметричной задачи со свободной границей . . . . .	138
III.4. Напряженное состояние в шейке цилиндрического образца в условиях одноосного растяжения . . . . .	139
III.4.1. Вычисление величины предельной нагрузки . . . . .	140
<b>Заключение</b>	<b>145</b>

# Введение

Известно, что твердые тела являются упругими лишь при малых нагрузках. При воздействии более или менее значительных сил тела испытывают неупругие, пластические деформации. Пластичность — свойство твердых тел приобретать остаточные деформации, не изменяющиеся при постоянных внешних нагрузках.

В настоящее время металлы являются единственными пластическими телами, для которых имеется достаточно данных, гарантирующих построение общей теории. Поэтому теория пластичности особенно связана со свойствами металлов, хотя она может быть применена и к другим потенциально пластическим материалам (например, лед, глина или горная порода).

Современное промышленное производство требует создания все более сложных конструкций, обладающих повышенной прочностью и жесткостью. Оптимизировать элементы конструкций деталей позволяет метод расчета, основанный на вычислении предельной нагрузки, которая может быть определена в рамках модели идеальнопластического тела. Любой мыслимый расчет конструкций должен начинаться с определения их напряженного состояния. В рамках теории идеальной пластичности и в настоящее время продолжают развиваться и совершенствоваться методы расчета напряжений. Пространственное напряженное состояние — самый сложный с точки зрения анализа и практических расчетов аспект механики деформируемого твердого тела и инженерных наук. В настоящее время существует лишь ограниченный набор методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Именно поэтому тематика работы, как и вообще работ,

посвященных трехмерным задачам теории пластичности, актуальна как в теоретическом, так и в прикладном плане.

Пластические свойства различных материалов были известны очень давно и изучались еще Кулоном (1776 г.). Первые систематические исследования пластических течений металлов были проведены Г. Треска (H. Tresca) [131]. В 1864 г. им был опубликован ряд результатов своих экспериментальных исследований, в которых он пришел к заключению, что металл пластически течет, когда максимальное касательное напряжение достигает критического значения. Теоретические основы описания этого явления были заложены Б. Сен-Венаном (B. Saint-Venant) [132] в 1870 г. Им были впервые сформулированы двумерные уравнения теории пластичности, используя условие пластичности Треска.

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены М. Леви (M. Levy, 1871 г.) [59], который используя в качестве условия текучести уравнение грани призмы Треска, сформулировал соотношения идеальнопластического тела для пространственно напряженного состояния, предложил зависимости между напряжениями и скоростями деформации и дал способ линеаризации этих уравнений в случае плоской деформации. Длительное время уравнения пространственной задачи оставались не изученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности все еще далека от завершения.

Переводы на русский язык трудов основоположников математической теории пластичности помещены в сборник [83].

Сборник состоит из 28 статей, принадлежащих перу Сен-Венана, Леви, Мизеса, Прандтля, Генки, Рейсса, Прагера. Эти работы отражают процесс

становления и развития математической теории пластичности и дают возможность в подлиннике ознакомиться с ее основными концепциями, методами и результатами, оригинальность и своеобразие которых уже к 1948 г. позволили редактору сборника утверждать: "Эта теория, которую называют теорией пластичности (в узком смысле слова), не может считаться окончательно установленной; однако исследования последних лет выяснили с несомненностью некоторые основные законы, позволяющие считать многие результаты совершенно достоверными."

Считается, что первые работы по теории пластичности в нашей стране появились в 1936 г., которые связываются с именами А. А. Ильюшина и С. А. Христиановича [113].

В послевоенные годы только в изданиях Академии наук было опубликовано свыше двухсот работ, обзор которых дан в [18].

Главное практическое значение теории пластичности состоит в том, что она (вместе с теорией упругости и теорией ползучести) является теоретическим фундаментом науки о прочности и жесткости конструкций под действием статических и динамических нагрузок. Но, подобно подавляющему большинству наук, теория пластичности может иметь успех в достижении своих целей лишь при идеализации реального поведения твердых деформируемых тел, путем пренебрежения второстепенными фактами по сравнению с факторами, имеющими основное значение.

Для многих задач, представляющих наибольший практический интерес, вследствие математических трудностей мы вынуждены пренебрегать упругой составляющей деформации. Мы должны также пренебречь чисто упругой деформацией в непластической области. Следовательно, мы имеем дело с материалом, который является жестким, когда он напряжен ниже

предела текучести, и модуль Юнга которого имеет бесконечно большое значение. Таким образом возникает модель идеальнопластического тела. Распределение напряжений в идеальнопластическом теле близко к распределению напряжений в реальном металле при тех же внешних условиях тогда, когда пластический материал обладает свободой течения в некотором направлении. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, обобщенный ассоциированный закон течения не устанавливает никаких ограничений на тензор скоростей пластических деформаций (помимо условий несжимаемости и соосности тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций), следовательно, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, рассматривая именно ребро поверхности текучести Треска. К тому же в случае, когда напряженное состояние соответствует грани призмы Треска, одна из главных скоростей пластических деформаций равна нулю, а это существенно ограничивает свободу пластического деформирования.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений. Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования, развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представля-

ющую сдвиговой механизм пластического течения. Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А.Наар, Th. von Karman) выдвинули условие полной пластичности [109], которое по существу устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Треска, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определяемыми.

В 1923 г. Генки (Н.Ненкы) [21] предложил использовать условие полной пластичности Хаара—Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определяемой системе уравнений равновесия, которая оказалась гиперболической.

В 1944 г. А.Ю.Ишлинский [46] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности, доказав статическую определяемость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено ре-



шение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара—Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю.Ишлинским [47], который также использовал обобщенный закон пластического течения, не предполагающий столь жесткие ограничения на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений.

Результаты А.Ю.Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д.Ивлева [36], [37], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара—Кармана для всей теории пластичности и развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Было установлено, что при условии полной пластичности уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определяемыми и принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические направления при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также направления, ортогональные главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определяемых уравнений

гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования.

В дальнейшем Д.Д.Ивлевым была исследована пространственная задача при произвольном кусочно-линейном условии текучести и в результате показано, что как в пространственном, так и в осесимметричном случае на ребре кусочно-линейного условия текучести уравнения математической теории пластичности являются гиперболическими и имеют характеристические элементы, совпадающие с площадками максимальных касательных напряжений.

Кинематические соотношения теории идеальной пластичности на ребре призмы треска были исследованы в 1977 г. Г.И. Быковцевым [14]. Им же были обобщены условия совместности на линиях и поверхностях разрыва и получены лучевые разложения решений на характеристических поверхностях.

Любопытно отметить, что как статические, так и кинематические уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для грани призмы Треска также являются гиперболическими; характеристические направления ориентированы так же как и главные направления тензора напряжений. Полное исследование характеристик уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска можно найти в [52], с. 258-268.

Значительный вклад в математическую теорию пластичности в разное время был сделан Б.Д. Анниным [4] — [7], Г.И. Быковцевым [14] — [17], [43], М.А. Задояном [32], Д.Д. Ивлевым [36] — [44], А.А. Ильюшиным, А.Ю. Ишлинским [46] — [49], Л.М. Качановым [51], [52], В.Д. Ключниковым [53] — [54], Ю.Н. Работновым [84], В.В. Соколовским [103] — [104], Л.А. Толоконниковым [107], С.А. Христиановичем [113], Е.И. Шемякиным [114].

Стремительный рост производительности современной вычислительной техники привел к развитию численных методов решения задач математической теории пластичности [119],[123], [128].

**Целью работы** является исследование пространственных соотношений математической теории пластичности и развитие аналитических и численных методов расчета поля напряжений, позволяющих найти решения ряда пространственных, плоских и осесимметричных задач, описываемых гиперболическими дифференциальными уравнениями.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения.

Развивая вариант теории пластичности, предложенный Д.Д. Ивлевым в 1959 г., в **главе I** рассматриваются трехмерные уравнения математической теории пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру условия текучести Треска. Отличительной чертой предлагаемого подхода выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [86]-[88]. Ключевым моментом при формулировке основных соотношений трехмерной задачи математической теории пластичности является заключение о расслоенности поля напряжений. Условие расслоенности позволяет выбрать изостатическую систему координат таким образом, что уравнения равновесия в новых координатах приводятся к трем интегрируемым соотношениям, позволяющим определить распределение напряжений. Решения пространственных задач теории идеальной пластичности таким образом сводятся к интегрированию системы трех существенно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, сформулированных в изостатических координатах.

**Глава II** состоит из трех разделов. Первый из них посвящен поиску автомодельных решений осесимметричной задачи математической теории пластичности. В то время как теория плоского деформированного состояния достаточно хорошо развита и известны эффективные аналитические и численные методы решения задач, ничего подобного нельзя сказать об осесимметричной задаче. Это обстоятельство отмечалось еще Р. Хиллом в 1950 г., правда в применении к осесимметричной задаче, сформулированной на основе критерия текучести Мизеса, когда задача не является гиперболической (см. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. с. 301, 302). Неясно, как в принципе строить решения смешанных краевых задач таких, как вдавливание конуса или волочение проволоки. Известные осесимметричные распределения напряжений или приближены, или получены обратными методами, а затем приведены в соответствие с физической сущностью явления. Некоторые автомодельные решения, соответствующие ребру призмы Треска, рассматривались Р. Шилдом (R.T. Shield) [116]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы. Автомодельные решения для скоростей, соответствующие граням кусочно-линейных условий текучести, приводятся в монографии [41], с. 89-94. Известны также автомодельные решения осесимметричной задачи при условии текучести Мизеса. Построение этих автомодельных решений основывается на представлении функции течения  $F(r, x_3)$  (вводимой для того, чтобы тождественно удовлетворялось условие несжимаемости) в виде произведения  $F(r, x_3) = r^\nu f(\xi)$ , где  $\xi = x_3/r$  — автомодельная переменная. Здесь также отметим ряд работ [38]–[44], посвященных осесимметричной задаче математической теории пластичности.

В настоящей работе найдены автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности, обобщающие решения Шилда, которые зависят только от полярного угла в меридиональной плоскости. Установлены естественные границы существования автомодельных решений, за которые они не распространяются. Численно найдены распределения главных напряжений в области автомодельного решения.

Во втором и третьем разделах **главы II** приводится групповой анализ системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей напряженное состояние пластического тела. Групповые свойства уравнений пластичности, сформулированных в декартовой системе координат, на основании которых построены классы решений уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории пластического течения изучены в работах Б.Д. Аннина, В.О. Бытева, С.И. Сенашова [4]-[6], [98], [99]. Групповой анализ уравнений теории пластичности в изостатической системе координат, по-видимому, ранее не проводился.

Во втором разделе дан групповой анализ системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей напряженное состояние пластического тела в условиях осевой симметрии. Вычислены группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений. Показано, что алгебра симметрий пятимерна. Найдена оптимальная система одномерных подалгебр алгебры симметрий. Построены инвариантно-групповые решения и соответствующие им сетки изостатических траекторий. Показано, что групповой анализ позволяет получить все найденные ранее автомодельные решения, в частности, решения, выведенные на основе соображений автомодельности и выбора автомодельной переменной в форме произведения степеней изостатических координат.

Третий раздел **главы II** посвящен построению непрерывных групп симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи математической теории пластичности и исследованию соответствующей алгебры симметрий. В пространственном случае удается построить естественную конечномерную (12-мерную) подалгебру алгебры симметрий. Оптимальная система одномерных подалгебр обладает достаточно сложной структурой и насчитывает более ста элементов.

Целью **главы III** является разработка аналитического и численного метода расчета пространственных, плоских и осесимметричных задач по схеме полной пластичности Хаара—Кармана и построение сетки изостатических траекторий вблизи свободной границы. Показана  $t$ -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных, устанавливающая корректность поставленной задачи Коши. Получены условия Куранта-Фридрихса, которые позволяют сформулированной расчетной конечно-разностной схеме принять максимально простой вид. Работоспособность метода продемонстрирована на задаче о локализации пластических деформаций в пределах шейки одноосно растягиваемого образца в осесимметричной постановке по схеме полной пластичности.

Заметим, что локализация пластических деформаций у вырезов в одноосно растягиваемой полосе решается аналитическими средствами. В [104] исследовалась задача о растяжении полосы, ослабленной симметричными глубокими вырезами различных форм. Следует иметь ввиду, что применение модели жесткопластического тела при расчете локализованных на перешейке пластических деформаций допустимо не всегда, а только в тех случаях, когда жесткие зоны не затрудняют развитие пластических зон, а пластические деформации значительно превосходят упругие. Локализация

пластических деформаций на перешейке в условиях плоского деформированного состояния может быть проанализирована на основе метода годографа, который заключается в преобразовании уравнений плоской задачи к таким криволинейным координатам, что координатные линии совпадают с траекториями главных напряжений [85]. Применение этого метода позволяет получить распределение напряжений в аналитической форме.

Локализация пластических деформаций в пределах шейки растягиваемого образца в осесимметричной постановке исследовалась (1945 г.) Н. Н. Давиденковым и Н. И. Спиридоновой [27]. Ими построены приближенные решения, основывающиеся на допущениях, подсказанных опытными данными. Изложение результатов имеется, например, в [52], с. 274-276. Для окончательного вычисления напряжений в области шейки необходимо знать радиус ее минимального сечения и кривизну очертания шейки в точке, соответствующей указанному минимальному сечению. Согласно решению [27], максимальные напряжения возникают в центре шейки, что полностью совпадает с экспериментальными данными.

После образования шейки распределение напряжений в образце перестает быть однородным и, кроме того, неизвестно очертание шейки. Упругие деформации в области шейки, по-видимому, пренебрежимо малы по сравнению с пластическими. Следовательно, жесткопластический анализ должен приводить к приемлемым результатам. Заметим также, что вблизи минимального сечения шейки разность главных нормальных напряжений, траектории которых располагаются в меридиональной плоскости, можно с хорошим приближением считать постоянной.

Бриджмен (P.W. Bridgman) уточнил расчеты (изложение результатов имеется в [110], с. 312-316; [52], с. 274-276). Им были получены приближен-

ные формулы для оценки концентрации напряжений, включающие один неизвестный элемент  $\kappa$  — кривизну контура шейки в точке его пересечения с минимальным сечением.

В диссертационной работе дан численный анализ этой задачи при произвольном контуре очертания шейки. Определены поле изостат и предельная растягивающая сила и найдено ее численное значение при аппроксимации контура свободной границы дугой эллипса, удовлетворительно согласующееся с соответствующими оценками, данными Бриджменом.



# Глава I. Теория пространственной задачи математической теории пластичности

Ниже развивается общая теория трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и возможная общая схема интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [86].

## I.1. Основные соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности для ребра призмы Треска

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через  $\boldsymbol{\sigma}$  тензор напряжений;  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — соответствующие собственные значения (главные напряжения);  $k$  — предел текучести при чистом сдвиге. Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.1)$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска изобра-

жается поверхностью шестигранной призмы с ребрами,

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (1.2)$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (1.3)$$

Последнее условие означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Так как  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

Учитывая соотношения (1.1), (1.4) и уравнение ребра призмы  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ , получим следующее выражение для тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.5)$$

Таким образом, тензор напряжений полностью определяется скалярным полем  $\sigma_3$  и единичным векторным полем  $\mathbf{n}$ .

Уравнение равновесия  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  после подстановки в него разложения (1.5) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad} \sigma_3 \mp 2k \operatorname{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.6)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных:

собственного значения  $\sigma_3$  и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора  $\mathbf{n}$ ), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через  $\Sigma$  безразмерное отношение  $\sigma_3$  к  $\mp 2k$  и приведем уравнение (1.6) к виду:

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.7)$$

Можно показать, что уравнение (1.7) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. 1). Характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля  $\mathbf{n}$ ).

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.7):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}, \quad (1.9)$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{div} \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

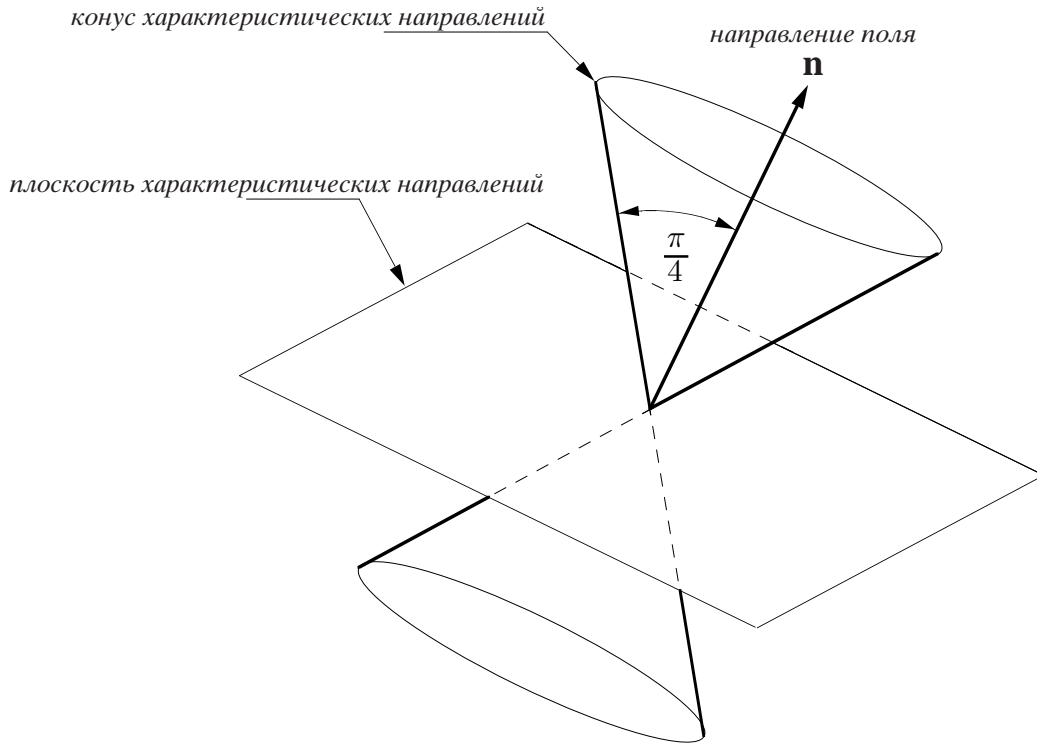


Рис. 1. Конус характеристических направлений в пространственной задаче теории пластичности (течение на ребре призмы Треска)

Это уравнение в силу своего инвариантного характера служит основой для всех последующих рассмотрений и оказывается исключительно удобным для геометрического исследования поля  $\mathbf{n}$ .

В дальнейшем мы будем использовать также следующие равенства:

$$((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}) \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0, \quad ((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.11)$$

вытекающие из (1.9).

Исследуем характеристики уравнения (1.10). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (1.10) как поверхности слабого разрыва полей и воспользуемся условиями совместности Адамара – Томаса:

$$[\nabla \Sigma] = B\mathbf{N}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \quad (1.12)$$

где  $[]$  обозначают скачок заключенной в них величины при переходе через

поверхность слабого разрыва;  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва;  $B, \mathbf{b}$  — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва. На основании уравнения (1.10) имеем:

$$[\nabla \Sigma] - \mathbf{n} \times [\text{rot} \mathbf{n}] + \mathbf{n} [\text{div} \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

и, применяя условия совместности (1.12), получим

$$B\mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Кроме того, так как  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , то  $\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{n})^T = \mathbf{0}$  и, следовательно,  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} = \mathbf{0}$ , что приводит к

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.15)$$

Замечая далее, что

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}$$

и учитывая (1.15), уравнение (1.14) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор  $\mathbf{N}$ :

$$B + 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (1.17)$$

Умножая обе части уравнения (1.16) скалярно на вектор  $\mathbf{n}$ , получим также

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.18)$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $B$ , полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.19)$$

Это уравнение распадается на два. Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ , то необходимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \pm 1/\sqrt{2}. \quad (1.20)$$

Если  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$ , то на основании (1.17)  $B = 0$  и тогда уравнение (1.16) дает

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

откуда в силу того, что равенства  $B = 0$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.21)$$

Итак, уравнение (1.10) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (1.20) образуют конус с углом полураствора  $\pi/4$  и осью, ориентированной вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и согласно (1.21) интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля  $\mathbf{n}$ ).

### I.1.1. Вырожденные решения пространственной задачи

Исследуем уравнение (1.10) сначала в предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  всюду в области пластического течения. Выполнение приведенного условия

возможно только при условии, что  $\mathbf{n}$  — безвихревое векторное поле:  $\mathbf{n} = \text{grad} f$ , где  $f$  — потенциал поля. Доказательство этого утверждения будет дано в одном из следующих разделов работы.

Воспользуемся далее формулой Гамильтона (W.R.Hamilton) для кривизны векторной линии единичного поля  $\mathbf{n}$  (см. [3], с. 23, 24). Согласно этой формуле вектор кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$  векторной линии единичного поля  $\mathbf{n}$  вычисляется как

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n}.$$

Напомним, что вектор кривизны  $\boldsymbol{\kappa}$  по модулю равен кривизне линии и направлен по главной нормали.

Ясно, что в рассматриваемом случае  $\boldsymbol{\kappa} = 0$  и, следовательно, все векторные линии поля  $\mathbf{n}$  есть прямые. Мы называем этот случай вырожденным, подразумевая под этим как раз тот факт, что вырожденному решению соответствуют прямолинейные векторные линии поля  $\mathbf{n}$ . Так как  $\mathbf{n}$  — единичное векторное поле, то его потенциал должен удовлетворять уравнению  $|\nabla f| = 1$ , известному как уравнение эйконала. Двумерное уравнение эйконала в математической теории пластичности обычно называется уравнением песчаной насыпи (или уравнением поверхности постоянного ската). Решения граничных задач для уравнения эйконала имеют характерные для идеальной пластичности разрывы первых производных. Полный интеграл этого уравнения известен, поэтому нахождение решений этого уравнения теоретически не представляет затруднений.

Уравнение (1.10) при условии  $\text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  существенно упрощается

$$\nabla \sigma_3 \mp 2k \Delta f \nabla f = \mathbf{0} \tag{1.22}$$

и может быть проинтегрировано, если

$$\nabla \times (\Delta f \nabla f) = (\nabla \Delta f) \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (1.23)$$

В результате наибольшее (или наименьшее) главное напряжение определяется в виде:

$$\sigma_3 = \pm 2k \int_{\tilde{x}_s}^{x^s} \Delta f df. \quad (1.24)$$

Это соотношение, вместе с  $\mathbf{n} = \text{grad} f$ , где  $f$  — совместный интеграл уравнения эйконала  $|\nabla f| = 1$  и уравнения  $(\nabla \Delta f) \times \nabla f = \mathbf{0}$ , представляет все решения уравнения (1.10) при предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Заметим, что полный интеграл уравнения эйконала (за вычетом аддитивной постоянной)  $f(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, заведомо удовлетворяет условию  $f(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , и, следовательно, будет представлять собой совместный интеграл указанных уравнений. Ясно, что полному интегралу уравнения эйконала отвечает равномерное пространственное напряженное состояние: вектор  $\mathbf{n}$  не изменяется и совпадает с вектором  $\mathbf{k}$ , главные напряжения также постоянны.

### I.1.2. Невырожденные решения пространственной задачи

Исследуем уравнение (1.10) в предположении, что  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне. В этом случае векторные линии поля  $\mathbf{n}$  заведомо не будут прямолинейными. Решения уравнения (1.10), такие, что векторные линии поля  $\mathbf{n}$  являются криволинейными, будем называть невырожденными. Умножая обе части уравнения (1.8) скалярно на  $\mathbf{n}$ ,  $\text{rot} \mathbf{n}$  и  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , получим

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} \Sigma + \text{div} \mathbf{n} = 0, \quad (1.25)$$



$$\operatorname{rot}\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}\Sigma + (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{n})\operatorname{div}\mathbf{n} = 0, \quad (1.26)$$

$$(\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n})\operatorname{grad}\Sigma - |\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}|^2 = 0. \quad (1.27)$$

Уравнения (1.25)–(1.27) позволяют найти траектории, вдоль которых главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется.

Пусть  $\mathbf{s}$  — орт, направленный вдоль вектора  $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ . В плоскости, образованной векторами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ , рассмотрим орт  $\mathbf{t}$ , наклоненный к  $\mathbf{s}$  под некоторым углом  $\alpha$ :

$$\mathbf{t} = \cos \alpha \mathbf{s} + \sin \alpha \mathbf{n}.$$

Умножив уравнение (1.25) на  $\sin \alpha$ , а уравнение (1.27) — на  $\cos \alpha$  и сложив, приходим к

$$\mathbf{t} \cdot \operatorname{grad}\Sigma + \sin \alpha \operatorname{div}\mathbf{n} - \cos \alpha |\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}| = 0.$$

Следовательно, если траектория касается направлений  $\mathbf{t}$ , составляющих угол  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}|}{\operatorname{div}\mathbf{n}}$$

с направлением  $\mathbf{s}$ , то вдоль этой траектории

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \sigma_3 = 0, \quad (1.28)$$

что означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

В плоскости, образованной векторами  $\mathbf{s}$  и  $\operatorname{rot}\mathbf{n}$ , рассмотрим орт  $\mathbf{h}$ , наклоненный к  $\mathbf{s}$  под некоторым углом  $\beta$ :

$$\mathbf{h} = \cos \beta \mathbf{s} + \sin \beta \frac{\operatorname{rot}\mathbf{n}}{|\operatorname{rot}\mathbf{n}|}.$$

Умножив уравнение (1.26) на  $\sin \beta$ , а уравнение (1.27) — на  $\cos \beta$  и сложив, приходим к

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \Sigma + \sin \beta \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rotn}}{|\text{rotn}|} - \cos \beta |\mathbf{n} \times \text{rotn}| = 0.$$

Следовательно, если траектория касается направлений  $\mathbf{h}$ , составляющих угол  $\beta$ :

$$\text{tg} \beta = \text{tg} \gamma |\text{rotn}|,$$

где  $\gamma$  — угол между векторами  $\text{rotn}$  и  $\mathbf{n}$ , с направлением  $\mathbf{s}$ , то вдоль этой траектории

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \sigma_3 = 0, \quad (1.29)$$

что означает, что главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

Можно указать еще одно направление  $\mathbf{p}$ , производная от  $\sigma_3$  вдоль которого равна нулю: если ориентировать вектор  $\mathbf{p}$  ортогонально векторам  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$  так, что

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n} \times \text{rotn}}{|\mathbf{n} \times \text{rotn}|} \times \mathbf{n},$$

то с помощью уравнений (1.25), (1.26) можно найти, что

$$\mathbf{p} \cdot \nabla \sigma_3 = 0. \quad (1.30)$$

Нетрудно заметить, что направления  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$  некопланарны, если  $\mathbf{n} \cdot \text{rotn} \neq 0$ . Таким образом, если  $\mathbf{n} \times \text{rotn} \neq 0$  и  $\mathbf{n} \cdot \text{rotn} \neq 0$ , то через каждую точку зоны пластического течения можно провести три различных траектории (касающиеся трех некопланарных направлений  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$ ), вдоль которых наибольшее главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется. Но это означает, что  $\nabla \sigma_3 = \mathbf{0}$  всюду в пластической зоне и, следовательно, все главные

напряжения постоянны. Но тогда уравнение (1.10) приобретает вид

$$\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{n} \text{div} \mathbf{n},$$

откуда сразу же следует, что  $\text{div} \mathbf{n} = 0$  и  $\text{rot} \mathbf{n}$ , что противоречит предположению  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ , следовательно, никаких решений уравнения (1.10) при одновременном выполнении условий  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} \neq 0$  получить нельзя.

Поэтому наибольший интерес представляет тот случай, когда  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$  и  $\text{rot} \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ . В этом случае, который будет в деталях рассмотрен ниже, имеется два различных направления (поскольку ориентации  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{p}$ ) совпадают), вдоль которых главное напряжение  $\sigma_3$  не изменяется, причем вдоль любого третьего направления, некомпланарного указанным двум, главное напряжение  $\sigma_3$  заведомо будет переменным. Ясно, что два направления, о которых идет речь, касаются поверхности уровня поля  $\sigma_3$ . Как будет показано ниже, условие  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$  допускает замечательную геометрическую интерпретацию, пользуясь которой можно существенно развить исследование невырожденных решений пространственных уравнений математической теории пластичности.

### **I.1.3. Ассоциированный закон течения для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска**

Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает, что в пространстве напряжений вектор, представляющий приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^P$ , ортогонален поверхности текучести  $f(\sigma_{ij}) = 0$  в данном

напряженном состоянии:

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda. \quad (1.31)$$

Величина  $d\lambda$  называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является выполнение условий  $f = 0$ ,  $df = 0$ .

## I.2. Уравнения равновесия для расслоенного поля напряжений

### I.2.1. Критерий расслоенности и расслоенные пластические поля

Продолжая исследование невырожденных решений уравнений теории пластичности, рассмотрим прежде всего условие  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0$ , которое выполняется для любого невырожденного решения.

В дальнейшем исследовании особую роль будут играть расслоенные векторные поля  $\mathbf{n}$ .

Поле напряжений в области  $G$  назовем расслоенным (или слоистым), если существует семейство поверхностей  $S$ , заполняющее область  $G$ , такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства  $S$  совпадает с полем  $\mathbf{n}$  собственных векторов тензора напряжений.

Для того чтобы векторное поле  $\mathbf{n}$  было расслоенным в области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n} = 0. \quad (1.32)$$

Сформулированное утверждение известно как теорема Якоби ([3], с. 10, 11). Векторное поле  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющее условию (1.32), часто называют голономным. Для произвольного векторного поля  $\mathbf{n}$ , следовательно, можно

ввести меру неголономности, определяя ее как скалярное произведение  $\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n}$ .

Здесь мы опускаем детали вывода условия (1.32), но заметим, что оно выражает также тот факт, что дифференциальная форма  $n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3$  после умножения на интегрирующий множитель  $\mu$  превращается в полный дифференциал ([95]; [106], с. 366-368):

$$\mu(n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3) = d\Psi.$$

Ясно, что для интегрирующего множителя справедливо соотношение

$$\mu = |\nabla \Psi|.$$

Кроме того, можно утверждать, что если векторное поле  $\mathbf{n}$  не является расслоенным, то его можно "подправить" безвихревым векторным полем  $\nabla \Phi$  так, что условие (1.32) будет выполняться для поля  $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \nabla \Phi$  и, следовательно, векторное поле  $\mathbf{n}$  всегда можно представить в виде суммы безвихревого  $\nabla \Phi$  и расслоенного (и притом вихревого, т.е. с ненулевым вихрем) векторного поля  $\mathbf{n}'$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' - \nabla \Phi. \quad (1.33)$$

Это утверждение следует из того факта, что дифференциальная форма  $n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3$  всегда может быть приведена к каноническому виду  $n_1 dx_1 + n_2 dx_2 + n_3 dx_3 = d\Phi + \mu^{-1} d\Psi$ . Поскольку безвихревое векторное поле заведомо является расслоенным, то из приведенного рассуждения следует, что произвольное единичное векторное поле всегда можно представить в виде суммы двух расслоенных полей, первое из которых вихревое, а второе — безвихревое.

Теперь представляется возможным обосновать утверждение, сформулированное ранее, о том, что для единичного векторного поля условие  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  выполняется только если векторное поле  $\mathbf{n}$  безвихревое.

Воспользуемся представлением (1.33), в котором можно считать, что  $\mathbf{n}' \cdot \text{rot} \mathbf{n}' = 0$ . Так как  $\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , то  $\text{rot} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$ . Предположим обратное, т.е. векторное поле  $\mathbf{n}$  — вихревое, следовательно, существует такая точка, где вихрь  $\mathbf{n}$  ненулевой. Тогда можно считать, что  $\lambda > 0$  всюду в окрестности указанной точки. Последнее неравенство должно выполняться одновременно с неравенством  $|\mathbf{n}'| > 0$  в той же самой окрестности. Действительно, если в упомянутой окрестности  $|\mathbf{n}'| = 0$ , то в силу (1.33) необходимо  $\text{rot} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , что противоречит предположению о том, что поле  $\mathbf{n}$  — вихревое в рассматриваемой окрестности.

Построим достаточно малый элемент  $S$  слоя поля  $\mathbf{n}'$ , проходящий через вихревую точку поля  $\mathbf{n}$ . На указанном элементе поверхности построим замкнутый контур  $L$ , окружающий выбранную точку. На основании теоремы Стокса заключаем, что циркуляцию вдоль контура  $L$  слоистого поля  $\mathbf{n}$ , заведомо равную нулю, можно также вычислить в виде

$$0 = \int_L \mathbf{n}' \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_S |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \text{rot} \mathbf{n} dS = \int \int_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} dS,$$

следовательно, справедливо равенство

$$\int \int_S \lambda |\mathbf{n}'| dS + \int \int_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} \mathbf{n}' \cdot \nabla \Phi dS = 0. \quad (1.34)$$

Так как  $\mathbf{n}$  — единичное векторное поле и имеет место разложение (1.33), то

$$|\nabla \Phi|^2 + |\mathbf{n}'|^2 + 2\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}' = 1. \quad (1.35)$$

Учитывая это соотношение, равенство (1.34) преобразуем к виду

$$\int \int_S \lambda |\mathbf{n}'| dS + \int \int_S \lambda |\mathbf{n}'|^{-1} (1 - |\nabla \Phi|^2) dS = 0. \quad (1.36)$$

В силу  $\lambda > 0$  и  $|\mathbf{n}'| > 0$  из последнего уравнения следует, что

$$|\nabla \Phi|^2 + |\mathbf{n}'|^2 = 1,$$

так как в противном случае сумма интегралов не будет равна нулю. Но тогда на основании (1.35) приходим к выводу, что

$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}' = 0$$

Поэтому соотношение (1.34) сводится к следующему —

$$\int \int_S \lambda |\mathbf{n}'| dS = 0.$$

Выполнение этого соотношения оказывается невозможным, так как одновременно  $\lambda > 0$  и  $|\mathbf{n}'| > 0$  на поверхности  $S$ . Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Как следует из результатов, полученных выше, единичное векторное поле  $\mathbf{n}$ , удовлетворяющее уравнению (1.10), может быть либо безвихревым расслоенным, либо вихревым расслоенным, т.е. векторное поле  $\mathbf{n}$  представляется либо только первым, либо только вторым слагаемыми в (1.33).

Расслоенность векторного поля  $\mathbf{n}$  и его ненулевая завихренность гарантируют исключение всех вырожденных случаев. Завихренность поля  $\mathbf{n}$  выступает, таким образом, как признак невырожденности напряженного состояния.

При выполнении условия (1.32) слои поля  $\mathbf{n}$ , т.е. поверхности семейства  $S$ , образуются векторными линиями поля  $\text{rot} \mathbf{n}$  следующим образом: сначала выбирается некоторая поверхность  $S^*$  так, чтобы поле  $\mathbf{n}$  касалось ее в

каждой точке, и на поверхности  $S^*$  строится однопараметрическое семейство ортогональных к  $\mathbf{n}$  траекторий, затем из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля  $\text{rot}\mathbf{n}$  и составляется слой поля  $\mathbf{n}$ .

Таким образом, для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением должно удовлетворять уравнениям:

$$\text{rotdiv}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (1.37)$$

В силу условия (1.32) векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\text{rot}\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{n}$  взаимно ортогональны, и уравнения (1.25)–(1.27) приобретают следующий вид:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Sigma + \nabla \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (1.38)$$

$$(\nabla \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \Sigma = 0, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \Sigma - |\nabla \times \mathbf{n}| = 0, \quad (1.40)$$

где  $\mathbf{s}$  — орт, направленный вдоль вектора  $\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{n}$ . Напомним, что для расслоенного поля напряжений направления  $\text{rot}\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  — характеристические, ориентации векторов  $\text{rot}\mathbf{n}$  и  $\mathbf{h}$  совпадают.

На основании (1.39) заключаем, что для вихревого расслоенного поля напряжений, соответствующего ребру призмы Треска, величина  $\sigma_3$  не изменяется вдоль векторной линии вихря вектора  $\mathbf{n}$ .

Вдоль траектории, касающейся вектора  $\mathbf{t}$ , величина главного напряжения  $\sigma_3$  не изменяется (см. (1.28)). Вектор  $\mathbf{t}$  ортогонален  $\text{rot}\mathbf{n}$  и составляет с вектором  $\mathbf{s}$  угол  $\alpha$

$$\text{tg}\alpha = \frac{|\text{rot}\mathbf{n}|}{\text{div}\mathbf{n}}.$$



Таким образом, в случае вихревого расслоенного поля напряжений через каждую точку зоны пластического течения проходят две ортогональные друг другу траектории, вдоль которых величина главного напряжения  $\sigma_3$  не изменяется, причем вдоль любого направления, некопланарного указанным двум, главное напряжение  $\sigma_3$  заведомо будет переменным. Эти траектории касаются векторов  $\mathbf{t}$  и  $\text{rot}\mathbf{n}$ , располагающихся, очевидно, в плоскости, касательной к поверхности уровня главного напряжения  $\sigma_3$ .

Ясно, что

$$\nabla\sigma_3 \times (\mathbf{h} \times \mathbf{t}) = \mathbf{0},$$

поэтому вместо системы (1.38)–(1.40) удобнее рассматривать соответствующую систему в проекциях на оси ортогонального триэдра  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{h} \times \mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad |\nabla\sigma_3| \pm 2k \frac{\text{div}\mathbf{n}}{\cos \alpha} = 0.$$

Анализируя эту систему, заключаем, что вектор  $\nabla\sigma_3$  располагается в плоскости, ортогональной вектору  $\text{rot}\mathbf{n}$  и составляет с главным направлением  $\mathbf{n}$  угол  $\alpha$ . Поэтому слои векторного поля  $\mathbf{n}$  и поверхности уровня наибольшего (наименьшего) главного напряжения пересекаются под углом  $\alpha$ .

Несложные вычисления приводят также к следующей замечательной формуле:

$$|\nabla\sigma_3| = 2k\sqrt{(\text{div}\mathbf{n})^2 + |\text{rot}\mathbf{n}|^2},$$

т.е. распределение  $\sigma_3$ , если поле  $\mathbf{n}$  известно, может быть найдено интегрированием уравнения эйконала. Как уже отмечалось, при изучении вырожденного случая, решения граничных задач для уравнения эйконала имеют характерные для теории пластичности разрывы первых производных.

Заклучая этот раздел работы, следует отметить, что любое плоское векторное поле в трехмерном пространстве будет расслоенным. Поэтому поле напряжений, возникающее при плоской деформации тела, как частный случай входит в рассматриваемый класс расслоенных полей напряжений.

### I.2.2. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений

Векторное уравнение (1.7) имеет инвариантную форму. Преобразуем его к криволинейным координатам  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . Ковариантные компоненты поля  $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$  равны (см., например, [62], с. 208, [117], с. 45):

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] \quad (l = 1, 2, 3), \quad (1.41)$$

где  $g_{ij}$  — компоненты метрического тензора,  $g = \det \|g_{ij}\|$ ,  $[rs, l]$  — символы Кристоффеля первого рода. Через  $n^m$  обозначены контравариантные компоненты векторного поля  $\mathbf{n}$ .

Используя формулу (1.41), представим уравнение (1.7) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + g^{-1/2} g_{kl} \frac{\partial(g^{1/2} n^k n^m)}{\partial \xi^m} + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (1.42)$$

Воспользуемся расслоенностью векторного поля  $\mathbf{n}$  и выберем криволинейные координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  специальным образом: координатные поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  есть слои поля  $\mathbf{n}$ , а поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — интегральные поверхности поля  $\mathbf{n}$  (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля  $\mathbf{n}$ ). Строго регламентированным, таким образом, является лишь выбор координатных поверхностей  $\xi^3 = \text{const}$ . Остальные координатные поверхности могут быть выбраны с известной долей произвола. Необходимо отметить, что возможность до известной

степени произвольно выбирать координатные поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  и позволяет констатировать, что криволинейная сетка  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , вообще говоря, отличается от ортогональной изостатической сетки. Напомним, что изостатой (или линией главного напряжения) называется кривая, касательная к которой направлена вдоль главной оси тензора напряжений. Однако все три координатные линии системы координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  являются изостатами, правда координатные линии, соответствующие координатам  $\xi^1, \xi^2$ , могут не быть ортогональными друг другу. Это обусловлено тем, что в силу  $\sigma_1 = \sigma_2$  любое направление на слое  $\xi^3 = \text{const}$  является главным и, следовательно, любая траектория на этом слое будет изостатой. Поэтому выбор тех или иных направлений на слое  $\xi^3 = \text{const}$  в качестве координатных диктуется прежде всего тем, чтобы в результате получалась бы такая локальная система трех ориентаций, для которой был бы осуществим подбор криволинейных координат с локальным базисом, ориентированным точно также.

Ортогональная изостатическая криволинейная координатная сетка (т.е. сетка, координатные линии которой касаются трех взаимно ортогональных главных осей тензора напряжений) даже для расслоенного поля напряжений существует далеко не всегда. Если ортогональные изостатические координаты все же можно ввести, то поле напряжений необходимо является расслоенным. Обратное утверждение, конечно же, не является справедливым.

Дополнительно заметим, что поверхности  $\xi^1 = \text{const}$  и  $\xi^2 = \text{const}$  — характеристические для уравнения (1.7). При таком выборе криволинейных координат имеем:  $g_{13} = 0$ ,  $g_{23} = 0$ ,  $n^1 = 0$ ,  $n^2 = 0$ , что позволяет

существенно упростить уравнения (1.42):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2}(n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2}(n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^3} + g_{33} \frac{\partial (n^3)^2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} g_{33} (n^3)^2 \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln(g_{33}g) &= 0.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Так как  $(n^3)^2 = 1/g_{33}$ , то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left( \Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left( \Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left( \Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} + \frac{1}{2} \ln g \right) &= 0.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Уравнения (1.44) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант  $I_1 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$  сохраняет свое значение на каждом из слоев поля  $\mathbf{n}$ . Инвариант  $I_2 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$  не изменяется вдоль векторной линии поля  $\mathbf{n}$ . Таким образом, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, то поле главных направлений, определяющих ориентацию, необходимо является расслоенным и, следовательно, в новых специальным образом подобранных координатах уравнения равновесия приводятся к трем интегрируемым соотношениям (1.44).

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась в [122] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [126], [127].

Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [86]. В этой же работе была установлена связь меж-

ду преобразованием области пластического течения с помощью координат  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время Пуанкаре (H. Poincaré) [81], [82] (см. также [8], [95]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью производящих функций. Как было показано в [85], [86], уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, обладают важными свойствами инвариантности относительно преобразований Лежандра и Ампера.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (1.44) состоит, как нетрудно заметить, в возможности разложения детерминанта  $g$  на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3)G_2(\xi^1, \xi^2). \quad (1.45)$$

Уравнение (1.45) является одновременно и общим интегралом уравнений (1.37): если задаться криволинейными координатами  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  так, чтобы  $g_{13} = 0$  и  $g_{23} = 0$  и выполнялось (1.45), то векторное поле

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \xi^3}{|\nabla \xi^3|}$$

будет тождественно удовлетворять уравнениям (1.37).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное, или плоское, векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ , то слоями осесимметричного поля  $\mathbf{n}$  будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю  $\mathbf{n}$  траекторий, расположенных в плоскости  $\varphi = 0$ . Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля  $\mathbf{n}$ .

Ясно также, что если поле напряжений допускает ортогональную изостатическую координатную сетку, то оно является расслоенным и соотношения (1.44) следует рассматривать как интегрируемые соотношения вдоль взаимно ортогональных линий главных напряжений.

### I.3. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений

Выше было показано, что напряженные состояния, соответствующие ребру призмы Треска, необходимо имеют расслоенные поля главных напряжений, которые отвечают наибольшим (или наименьшим) главным напряжением. Ниже указываются достаточные признаки того, что расслоенное поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, действительно может реализоваться в том или ином состоянии равновесия твердого тела.

Рассмотрим тело  $\Omega$ , часть границы  $A$  которого свободна, или на нее действует нормальная поверхностная нагрузка  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ .

В этом случае, как известно, "физическая задача Коши", если ограничиться только напряженными состояниями, соответствующими ребру призмы Треска (что представляется естественным, так как в этом случае имеется меньше всего кинематических ограничений), приводится к двум математическим задачам Коши с начальными данными на поверхности  $A$  ( $\boldsymbol{\nu}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $A$ ): 1)  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = p/(\pm 2k)$  на поверхности  $A$ ; 2)  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ ,  $\Sigma = 1 + p/(\pm 2k)$  на поверхности  $A$ . Здесь  $p$  — модуль вектора  $\mathbf{p}$ , т.е.  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}$ .

Рассмотрим первую из указанных задач и покажем, что она разрешима, что и будет означать, что поле напряжений, примыкающее к поверхности

$A$ , соответствует ребру призмы Треска и является расслоенным независимо от характера распределения нормальной поверхностной нагрузки  $p = p(\mathbf{x})$ . Однако прежде выделим еще один класс задач пространственного равновесия с соответствующими ребру призмы Треска расслоенными полями напряжений.

Пусть тело  $\Omega$  симметрично относительно некоторой плоскости  $\Pi$  и подвергается действию симметричной поверхностной нагрузки так, что материал, расположенный в плоскости симметрии, переходит в состоянии пластического течения. Плоскую область, являющуюся сечением тела  $\Omega$  плоскостью  $\Pi$ , обозначим через  $A$ . В силу симметрии плоская область  $A$  будет слоем векторного поля  $\mathbf{n}$ , имеющего ориентацию главного направления. Предположим, что в сечении тела рассматриваемой плоскостью касательные напряжения отсутствуют. Если через  $\boldsymbol{\nu}$  обозначить единичную нормаль к  $A$ , имеющую направление поля  $\mathbf{n}$ , а через  $p(\mathbf{x})$  — абсолютную величину вектора напряжений на площадке с нормалью  $\boldsymbol{\nu}$ , то на поверхности  $A$ , если считать напряженное состояние соответствующим ребру призмы Треска, имеем следующее условие:  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = p/(\pm 2k)$ . Это условие формально (фактически, не зная характера распределения  $p = p(\mathbf{x})$ ) можно принять в качестве краевого и исследовать поле напряжений в пространственных областях, примыкающих к  $A$ .

Таким образом, для  $\mathbf{n}$  и  $\Sigma$  в каждом из рассматриваемых случаев имеем формально эквивалентные задачи Коши: в области, примыкающей к поверхности  $A$ , требуется определить единичное векторное поле  $\mathbf{n}$  и скалярное поле  $\Sigma$ , удовлетворяющее уравнению (1.7) и начальным условиям  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$  на поверхности  $A$ .

Оказывается, что всегда существует векторное поле  $\mathbf{n}$  и скалярное по-

ле  $\Sigma$ , являющиеся решением сформулированной задачи Коши, независимо от характера распределения  $\Sigma_A(\mathbf{x})$ , причем поле  $\mathbf{n}$  будет расслоенным в некоторой области, примыкающей к поверхности  $A$ . Именно справедливо следующее утверждение: в некоторой области  $\mathcal{D}$ , примыкающей к аналитической поверхности  $A$ , существует единственное аналитическое решение задачи Коши для уравнения

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1)$$

с аналитическими начальными данными  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$ ,  $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$  на поверхности  $A$  ( $\boldsymbol{\nu}$  — вектор единичной нормали к поверхности  $A$ ), причем векторное поле  $\mathbf{n}$  будет расслоенным в области  $\mathcal{D}$ .

Докажем сформулированное утверждение. Параметризуем поверхность  $A$  при помощи аналитических функций  $x_i = \lambda_i(\xi^1, \xi^2)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Здесь  $\xi^1, \xi^2$  — Гауссовы параметры. По крайней мере один из миноров второго порядка матрицы  $\|\partial\lambda_i/\partial\xi^\alpha\|$  ( $i = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2$ ) должен быть отличен от нуля, иначе параметризуемый объект не будет двумерной поверхностью. Предположим ради определенности, что

$$W = \det \|\partial\lambda_\alpha/\partial\xi^\beta\| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (1.46)$$

На множестве расслоенных полей  $\mathbf{n}$  уравнение (1.7) в специальных криволинейных координатах  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  эквивалентно уравнениям (1.44). Первые два уравнения дают возможности найти компоненту  $g_{33}$  на поверхности  $A$  ( $C$  — постоянная)

$$g_{33}|_A = Ce^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}. \quad (1.47)$$

Пусть начальному слою  $A$  векторного поля  $\mathbf{n}$  соответствует значение  $\xi^3 = 0$ . Этого всегда можно добиться преобразованием трансляции координаты  $\xi^3$ , относительно которого система уравнений (1.44) инвариантна. Так



как  $g|_A = a(\xi^1, \xi^2)g_{33}|_A$ , где  $a(\xi^1, \xi^2)$  — детерминант первой квадратичной формы поверхности  $A$ , то, учитывая равенство (1.47), получим

$$g|_A = Ca(\xi^1, \xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}. \quad (1.48)$$

Координатная система  $\xi^k$  такова, что  $g$  разлагается в виде произведения (1.45). Сравнивая (1.45) и (1.48) при  $\xi^3 = 0$ , получим, что  $G_2(\xi^1, \xi^2) = CG_1^{-1}(0)a(\xi^1, \xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1, \xi^2)}$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $G_1(\xi^3) = C_1^{-1}e^{2\xi^3}$ , так как любая замена вида  $\xi^3 = \xi^3(\xi'^3)$  не изменяет слоев поля  $\mathbf{n}$ .

Таким образом, положив  $CG_1^{-1}(0) = C_1$ , имеем следующее равенство:

$$g = a(\xi^1, \xi^2)e^{2(\Sigma_A(\xi^1, \xi^2) + \xi^3)}. \quad (1.49)$$

Утверждение будет доказано, если доказать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \right) \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \right) \left( \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \right) - \left( \frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_s}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] &= a(\xi^1, \xi^2)e^{2(\Sigma_A(\xi^1, \xi^2) + \xi^3)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

с аналитическими начальными данными на плоскости  $\xi^3 = 0$ :

$$f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)|_{\xi^3=0} = \lambda(\xi^1, \xi^2) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.51)$$

Тогда поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  криволинейной системы координат  $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можно принять в качестве слоев векторного поля  $\mathbf{n}$ , причем начальные условия на поверхности  $A$  также будут удовлетворены как для  $\mathbf{n}$ , так и для  $\Sigma$ .

Теорема Коши—Ковалевской приводит к заключению о разрешимости задачи Коши (1.50), (1.51), если доказать, что система уравнений (1.50) может быть приведена к нормальному по переменной  $\xi^3$  виду. Для этого разрешим систему относительно частных производных  $\partial f_i / \partial \xi^3$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|, \Delta_2 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|, \Delta_3 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \end{array} \right\|.$$

Кроме того, обозначим через  $Z$  выражение, расположенное в квадратных скобках (1.50). После ряда алгебраических преобразований получим систему уравнений в частных производных (1.50) в нормальной по переменной  $\xi^3$  форме

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi^3} = \pm a^{1/2} Z^{-1/2} e^{\Sigma_A + \xi^3} \Delta_i (\Delta_k \Delta_k)^{-1/2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.52)$$

Знак в уравнениях (1.52) выберем так, чтобы при возрастании переменной  $\xi^3$  от нуля в сторону положительных значений точка с координатами  $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  физического пространства двигалась от поверхности  $A$  внутрь тела  $\Omega$ , если  $A$  — часть граничной поверхности тела.

Осталось еще показать, что правые части в (1.52) аналитичны при  $\xi^3 = 0$  для всех допустимых значений остальных аргументов

$$\xi^1, \xi^2, \frac{\partial f_k}{\partial \xi^\alpha}.$$

На начальной плоскости  $\xi^3 = 0$  имеем следующие равенства (см. (1.46), 1.48):  $\Delta_3|_{\xi^3=0} = W(\xi^1, \xi^2)$ ,  $Z|_{\xi^3=0} = a(\xi^1, \xi^2)$ . Так как для любой точки  $(\xi^1, \xi^2)$  справедливо  $aW \neq 0$ , то правые части системы 1.52 будут аналитическими функциями аргументов  $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \partial f_k / \partial \xi^\alpha$  ( $k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2$ ) в

окрестности любой точки

$$\xi^1 = \xi_{(0)}^1, \quad \xi^2 = \xi_{(0)}^2, \quad \xi^3 = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi^\alpha} \Big|_{\xi^1 = \xi_{(0)}^1, \xi^2 = \xi_{(0)}^2}$$

$$(k = 1, 2, 3; \quad \alpha = 1, 2).$$

На основании теоремы Коши—Ковалевской можно сделать заключение о разрешимости задачи Коши (1.50), (1.51) и справедливости доказываемого утверждения.

Таким образом для тела  $\Omega$ , имеющего плоскость симметрии  $\Pi$ , подверженного действию симметричной поверхностной нагрузки, такой, что материал, расположенный в плоскости  $\Pi$  переходит в состояние пластического течения, не подвергаясь действию касательных напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, расслоенное поле напряжений является статически допустимым в пластической зоне, примыкающей к сечению тела плоскостью  $\Pi$ .

Внимательный анализ приведенного выше доказательства позволяет, практически не изменяя его, несколько обобщить формулировку о существовании соответствующего ребру призмы Треска расслоенного поля напряжений. Заключение о существовании соответствующего ребру призмы Треска расслоенного поля напряжений оказывается справедливым при следующих условиях: существует хотя бы одна аналитическая поверхность, в каждой точке которой нормаль имеет направление главной оси тензора напряжений, соответствующей главному напряжению, распределение которого на указанной поверхности аналитично. При этих условиях в некоторой области, примыкающей к поверхности, поле напряжений будет соответствовать ребру призмы Треска и необходимо будет расслоенным. Если поверхность, о которой идет речь, имеет нулевую полную кривизну и постоянную

среднюю кривизну, а распределение главного напряжения на поверхности постоянно, то в примыкающей к этой поверхности области пространства решение будет вырожденным.

Заметим, что сформулированные условия должны иметь и важное практическое значение, поскольку они явно указывают на ситуации, когда напряженное состояние будет соответствовать ребру призмы Треска.

## Глава II. Алгебра симметрий и инвариантно-групповые решения уравнений пространственной и осесимметричной задачи

В то время как теория плоского деформированного состояния достаточно хорошо развита и известны эффективные аналитические и численные методы решения задач, ничего подобного нельзя сказать об осесимметричной задаче. Это обстоятельство отмечалось еще Р. Хиллом в 1950 г., правда в применении к осесимметричной задаче, сформулированной на основе критерия текучести Мизеса, когда задача не является гиперболической (см. [110], с. 301, 302). Неясно, как в принципе строить решения смешанных краевых задач таких, как вдавливание конуса или волочение проволоки. Известные осесимметричные распределения напряжений или приближены, или получены обратными методами, а затем приведены в соответствие с физической сущностью явления. Некоторые автомодельные решения, соответствующие ребру призмы Треска, рассматривались Р. Шилдом (R.T. Shield) [116]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы. Автомодельные решения для скоростей, соответствующие граням кусочно-линейных условий текучести, приводятся в монографии [41], с. 89-94. Известны также автомодельные решения осесимметричной задачи при условии текучести Мизеса. Построение этих автомодельных решений основывается на представлении функции течения  $F(r, x_3)$  (вводимой для того, чтобы тождественно удовлетворялось условие несжимаемости) в виде произведения  $F(r, x_3) = r^\nu f(\xi)$ , где  $\xi = x_3/r$  — автомодельная переменная. Здесь также отметим ряд работ [38]–[44], посвященных осесимметричной задаче мате-

матической теории пластичности.

## II.1. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности в изостатических координатах

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа<sup>1</sup>: 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести  $k$ . Первый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние ”полной пластичности” Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через  $\sigma_3$  наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние ”полной пластичности”.

Автомодельные решения уравнений теории пластичности удобнее всего искать, используя специальные переменные  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  и учитывая возможность отделения координаты  $\xi^3$ .

В случае осевой симметрии формулы, связывающие декартовы координаты  $x_1, x_2, x_3$  и криволинейные координаты  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , следует очевидно

---

<sup>1</sup>Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии. Классификация различных режимов осесимметричного пластического течения приводится в [116] и воспроизводится в [52].

искать в следующем виде

$$x_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2, \quad x_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2, \quad x_3 = h(\xi^1, \xi^3). \quad (2.1)$$

Здесь  $\xi^i$  — специальные криволинейные координаты, определяемые по векторному полю  $\mathbf{n}$ , функции  $f$  и  $h$  подлежат определению,  $\xi^2$  — угловая координата.

Так как криволинейная координатная сетка характеризуется свойствами  $g_{13} = 0$ ,  $g_{23} = 0$ , а детерминант  $g$  разлагается в произведение двух функций (см. формулу (1.45)), то отображающие функции (2.1) необходимо должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi^3} + \frac{\partial f_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_3}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^3} \right) \left[ \left( \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_p}{\partial \xi^1} \right) \left( \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \frac{\partial f_r}{\partial \xi^2} \right) - \left( \frac{\partial f_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial f_s}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] = G_1(\xi^1, \xi^2) G_2(\xi^3), \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $f_1 = f(\xi^1, \xi^3) \cos \xi^2$ ,  $f_2 = f(\xi^1, \xi^3) \sin \xi^2$ ,  $f_3 = h(\xi^1, \xi^3)$ . Тогда поверхности  $\xi^3 = \text{const}$  можно принять в качестве слоев поля  $\mathbf{n}$  и затем с помощью интегралов (1.44) восстановить поле напряжений.

Подставим выражения (2.1) в систему дифференциальных уравнений (2.2). В результате находим:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \frac{\partial f}{\partial \xi^3} + \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \frac{\partial h}{\partial \xi^3} = 0, \\ \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \xi^1} \right)^2 \right] f^2 = G_1(\xi^1) G_2(\xi^3). \end{cases} \quad (2.3)$$

В этой системе уравнений у функции  $G_1$  исключается зависимость от угловой координаты  $\xi^2$  в силу осевой симметрии.

Будем искать автомодельное решение осесимметричной задачи математической теории пластичности в форме

$$f = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} F(\xi), \quad h = \xi^{1\alpha} \xi^{3\beta} H(\xi),$$

где  $\xi = \xi^1 / \xi^3$  — автомодельная переменная;  $\alpha, \beta$  — некоторые показатели. Тогда система уравнений в частных производных (2.3) сведется к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по автомодельной переменной  $\xi$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\beta (F^2 + H^2) + \xi (\beta - \alpha) (FF' + HH') - \xi^2 (F'^2 + H'^2) = 0, \\ \left[ \xi^4 (F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^3 (\alpha - \beta) (F'^2 + H'^2) (FF' + HH') + \right. \\ \quad \left. + \xi^2 (\alpha^2 + \beta^2) (F^2 + H^2) (F'^2 + H'^2) + \right. \\ \quad \left. + 2\alpha\beta\xi (\beta - \alpha) (F^2 + H^2) (FF' + HH') - \right. \\ \quad \left. - 4\alpha\beta\xi^2 (FF' + HH')^2 + \alpha^2\beta^2 (F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{\xi^2 G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{\xi^{1-6\alpha} \xi^{3-6\beta-4}}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Анализ этой системы показывает, что при  $\alpha = \beta$ , система (2.4) существенно упрощается и принимает форму:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 (F^2 + H^2) - \xi^2 (F'^2 + H'^2) = 0, \\ \left[ \xi^4 (F'^2 + H'^2)^2 + 2\xi^2 \alpha^2 (F^2 + H^2) (F'^2 + H'^2) - \right. \\ \quad \left. - 4\alpha^2 \xi^2 (FF' + HH')^2 + \alpha^4 (F^2 + H^2)^2 \right] F^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\xi^1 \xi^3)^{6\alpha-2}}. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Так как  $G_1$  и  $G_2$  не конкретизированы, то при поиске автомодельных решений отношение  $[G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)] / (\xi^1 \xi^3)^{6\alpha-2}$  можно представить в виде  $C \xi^{\mu+2}$ , где  $C$  есть некоторая постоянная, а  $\mu$  — показатель.

Систему (2.5) можно несколько упростить. Производя необходимые преобразования и предполагая  $\alpha \neq 0$ , в результате приходим к

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 (F^2 + H^2) = \xi^2 (F'^2 + H'^2), \\ (F'H - FH')^2 = \frac{C \xi^\mu}{4\alpha^2 F^2}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$



Исследуем последнюю систему, вводя в плоскости  $F$ ,  $H$  полярные координаты:

$$F = \rho \cos \iota, \quad H = \rho \sin \iota. \quad (2.7)$$

Подставим выражения (2.7) в систему (2.6). После преобразований получим систему в полярных координатах  $\rho$ ,  $\iota$ , которая подлежит интегрированию:

$$\begin{cases} \iota'^2 = \frac{C\xi^\mu}{\rho^6 4\alpha^2 \cos^2 \iota}, \\ \iota'^2 = \frac{\alpha^2}{\xi^2} - \frac{\rho'^2}{\rho^2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Если разделить первое уравнение полученной системы на второе уравнение этой же системы, то зависимость от автомодельной переменной  $\xi$  при  $\mu = -2$  будет устранена и останется одно уравнение первого порядка относительно полярных координат  $\rho$  и  $\iota$ :

$$1 + \left( \frac{d\rho}{\rho d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4 \rho^6 \cos^2 \iota}{C}. \quad (2.9)$$

Произведем далее замену переменной по формуле:  $\ln \rho = W$ . Тогда дифференциальное уравнение (2.9) примет вид

$$1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 = \frac{4\alpha^4}{C} e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (2.10)$$

Обозначив через  $l^2$  константу  $4\alpha^4/C$ , получим

$$1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 = l^2 e^{6W} \cos^2 \iota. \quad (2.11)$$

Совершим еще раз замену переменных по формулам  $e^{6W} = v^s$  и  $\sin \iota = u$ , где показатель  $s$  будет определен ниже. Таким образом, вместо (2.11) имеем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 \iota} + \frac{s^2}{36v^2} \left( \frac{dv}{du} \right)^2 = l^2 v^s. \quad (2.12)$$

С целью упрощения последнего дифференциального уравнения положим  $s = -2$  и получим

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 3^2 \left(l^2 - \frac{v^2}{1-u^2}\right). \quad (2.13)$$

Обозначим через  $\bar{v}$  безразмерное отношение  $v/l$ , тогда уравнение (2.13) примет вид

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right). \quad (2.14)$$

Полученное уравнение не содержит никаких параметров и в чистом виде определяет форму автомодельного решения. При приведении последнего уравнения к нормальной форме в правой части возникает иррациональность корневого типа. Изучим уравнение (2.14) в плане возможного преобразования его к форме, которая могла бы быть классифицирована, а само уравнение отнесено к одному из известных типов.

В уравнении (2.14) совершим замену переменных  $\bar{v} = \sin \tau \sqrt{1-u^2}$ . Тогда, возвращаясь к угловой переменной  $\iota$ , получаем наиболее простую и симметричную форму этого уравнения:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \pm \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota \quad (2.15)$$

Исследование полученного уравнения проведем, ограничившись выбором отрицательного знака. Уравнение (2.15) иррациональное, с иррациональностью тригонометрического типа. Чтобы устранить эту иррациональность, вместо переменных  $\tau, \iota$  введем новые переменные:  $\lambda = \operatorname{tg} \tau$ ,  $\mu = \operatorname{tg} \iota$ . В результате вместо уравнения (2.15) получим

$$(1 + \mu^2) \frac{d\lambda}{d\mu} = (1 + \lambda^2)(-3 + \lambda\mu). \quad (2.16)$$

Заменим в последнем уравнении неизвестную функцию по формуле

$$\lambda = a(\mu)\varsigma + b(\mu).$$

Тогда уравнение (2.16) преобразуется к

$$(1 + \mu^2)a \frac{d\varsigma}{d\mu} = -(1 + \mu^2) \frac{db}{d\mu} + (1 + b^2)(-3 + b\mu) + \quad (2.17)$$

$$+ [a(\mu - 6b + 3\mu b^2) - (1 + \mu^2) \frac{da}{d\mu}] \varsigma + 3a^2(\mu b - 1)\varsigma^2 + \mu a^3 \varsigma^3.$$

Подберем выражения для  $a(\mu)$  и  $b(\mu)$  так, чтобы вид уравнения стал максимально простым. Видно, что член с нулевой степенью  $\varsigma$  исчезает, если

$$-(1 + \mu^2) \frac{db}{d\mu} + (1 + b^2)(-3 + b\mu) = 0,$$

т.е. фактически, когда известно хотя бы одно частное решение уравнения (2.16). Так как разыскание частного решения (2.16) затруднительно, то остается вариант устранить член со второй степенью  $\varsigma$ , положив  $b = \mp \nu^{-1}$ . Член с первой степенью  $\varsigma$  будет устранен, если в качестве  $a$  выбрать решение дифференциального уравнения

$$a(\mu - 3\mu^{-1}) = (1 + \mu^2) \frac{da}{d\mu}.$$

Это уравнение интегрируется; положив  $a = (1 + \mu^2)^2 \mu^{-3}$ , уравнение (2.17) приобретает вид

$$\frac{d\varsigma}{d\mu} = -\frac{\mu}{(1 + \mu^2)^2} + \frac{(1 + \mu^2)^3}{\mu^5} \varsigma^3.$$

Это уравнение заменой независимой переменной

$$v = \frac{1}{1 + \nu^2}$$

удается свести к виду

$$\frac{d\varsigma}{dv} = \frac{1}{2} - \frac{\varsigma^3}{2v^2(1 - v)^3}. \quad (2.18)$$

Здесь изменение независимой переменной  $v$  ограничивается интервалом  $(0, 1]$ .

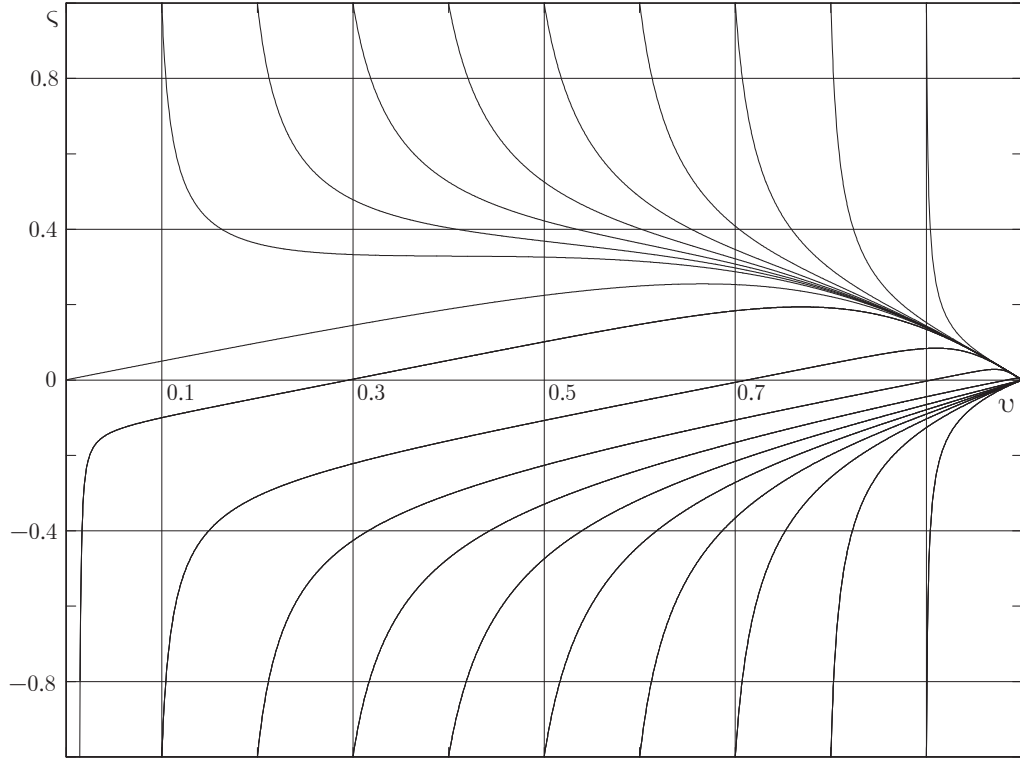


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения (2.18) внутри полосы  $0 < v < 1$ .

Полученное уравнение классифицируется как уравнение Абеля первого рода (см., например, [50], с. 44-47; [34], с. 80) и сводится к уравнению Абеля второго рода, если известно хотя бы одно его частное решение. Проинтегрируем уравнение (2.18) численно, задавая значения  $v$  на отрезке  $[0.1, 0.9]$  с шагом 0.1 при  $s = \pm 1$  и значение  $v = 0$  при  $s = 0$ . На рис. 2 изображены интегральные кривые уравнения (2.18) внутри полосы  $0 < v < 1$ . Видно, что все интегральные кривые этого уравнения, располагающиеся внутри указанной полосы, проходят через точку  $v = 1, s = 0$ .

Обратимся снова к системе (2.4). После ряда преобразований ее можно представить как

$$\begin{cases} \alpha\beta (F^2 + H^2) + \xi (\beta - \alpha) (FF' + HH') - \xi^2 (F'^2 + H'^2) = 0, \\ (FH' - HF')^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\alpha + \beta)^2 \xi^{16\alpha} \xi^{36\beta-4} F^2}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Удобно принять для  $G_1$  и  $G_2$  следующие выражения:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-6\alpha+\mu}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-6\beta-\mu-4},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые константы, а  $\mu$  — показатель. Положим  $C = C_1 C_2$ . Проведем рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше для случая  $\alpha = \beta$ . Снова положим  $\mu = -2$  с целью устранения переменной  $\xi$ . В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2 e^{6W} \cos^2 \iota}{C} + \frac{(\beta^2 - \alpha^2) e^{3W} \cos \iota}{\sqrt{C}} \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2. \quad (2.20)$$

Продолжим исследование этого дифференциального уравнения; введем следующие обозначения:

$$l_1 = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)^2}{C}, \quad l_2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{C}},$$

получим уравнение

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (2.21)$$

в котором заменим переменную по формуле  $e^{3W} = z^s$  (показатель  $s$  будет определен ниже). Тогда дифференциальное уравнение (2.20) приобретает вид

$$l_1 z^{2s} \cos^2 \iota + l_2 z^s \cos \iota \frac{s}{3z} \frac{dz}{d\iota} = 1 + \frac{s^2}{3^2 z^2} \left( \frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (2.22)$$

С целью упрощения (2.22) полагая  $s = -1$ , получим

$$l_1 \cos^2 \iota - \frac{l_2 \cos \iota}{3} \frac{dz}{d\iota} = z^2 + 3^{-2} \left( \frac{dz}{d\iota} \right)^2. \quad (2.23)$$

Совершим замену переменной по формуле  $\sin \iota = u$ , тогда последнее уравнение примет вид

$$\left( \frac{dz}{du} \right)^2 = 3^2 \left( l_1 - \frac{l_2}{3} \frac{dz}{du} - \frac{z^2}{1-u^2} \right). \quad (2.24)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  одного знака, то  $l_1 > 0$ . Обозначим через  $\bar{v}$  безразмерное отношение  $z/\sqrt{l_1}$ , тогда уравнение (2.24) примет форму

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right), \quad (2.25)$$

которая пригодна как для случая  $\alpha + \beta > 0$ , так и для случая  $\alpha + \beta < 0$ .

Разрешим это уравнение относительно производной:

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\frac{\beta - \alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha\beta} + 4 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (2.26)$$

Естественной областью определения полученного уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} < 1 \quad \left(\gamma_1 = \sqrt{1 + (\beta - \alpha)^2(4\alpha\beta)^{-1}}\right). \quad (2.27)$$

Уравнение (2.26) также может быть приведено к симметричной тригонометрической форме посредством замены  $\bar{v} = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$  и использования угла  $\iota$  в качестве независимой переменной:

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left( \text{sign}(\alpha + \beta) \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta) \cos \tau} \pm 1 \right) + \text{tg } \tau \text{ tg } \iota. \quad (2.28)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  разных знаков, то  $l_1 < 0$ . Определяя в этом случае  $\bar{v}$  как безразмерное отношение  $z/\sqrt{-l_1}$ , приходим к уравнению

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(-1 - \frac{\beta - \alpha}{3\sqrt{-\alpha\beta}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right), \quad (2.29)$$

разрешив которое относительно производной, получаем

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = -\frac{\beta - \alpha}{\sqrt{-\alpha\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{-\alpha\beta} - 4 \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (2.30)$$

Естественной областью определения полученного уравнения будет внутренность эллипса

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} < 1 \quad \left(\gamma_2 = \sqrt{-1 - (\beta - \alpha)^2(4\alpha\beta)^{-1}}\right). \quad (2.31)$$

Как и прежде, уравнение (2.30) приводится к симметричной тригонометрической форме с помощью замены  $\bar{v} = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota$  и использования угла  $\iota$  в качестве независимой переменной. В результате получается уравнение, совпадающее с (2.28).

Уравнения (2.14) и (2.25) представляют собой нелинейные неавтономные уравнения, интегралы которых пока получить не удастся. Ясно, что эти уравнения могут быть проанализированы численно. Так, на рис. 3, 4 изображены интегральные кривые уравнения (2.14) внутри естественной области определения  $u^2 + \bar{v}^2 < 1$ .

Теперь попытаемся найти другие возможные формы автомодельных решений. Будем искать решения системы (2.3) в предположении, что автомодельная переменная представляет собой произведение степеней изостатических переменных с различными показателями:

$$f = \xi^{1-\alpha} \xi^3{}^\beta F(\xi), \quad h = \xi^{1-\alpha_1} \xi^3{}^{\beta_1} H(\xi), \quad (2.32)$$

где  $\xi = \xi^{1-\gamma} \xi^3{}^\delta$  — автомодельная переменная;  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta$  — некоторые показатели.

Тогда, при условии, что существует показатель  $\omega$  такой, что

$$\xi^\omega = \xi^{1-\alpha-\alpha_1} \xi^{3-\beta-\beta_1} \quad (2.33)$$

система двух уравнений в частных производных (2.3) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений :

$$\begin{cases} \alpha\beta F^2 + \xi(\alpha\delta + \gamma\beta) FF' + \xi^2\gamma\delta F'^2 + \\ + \xi^{2\omega} [\alpha_1\beta_1 H^2 + \xi(\alpha_1\delta + \beta_1\gamma) HH' + \xi^2\gamma\delta H'^2] = 0, \\ \left( FH' - HF' + \frac{\omega}{\xi} HF \right)^2 = \frac{G_1(\xi^1) G_2(\xi^3)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \xi^{1-4\alpha+2\alpha_1-2} \xi^{3-4\beta+2\beta_1-2} \xi^2 F^2}, \end{cases} \quad (2.34)$$

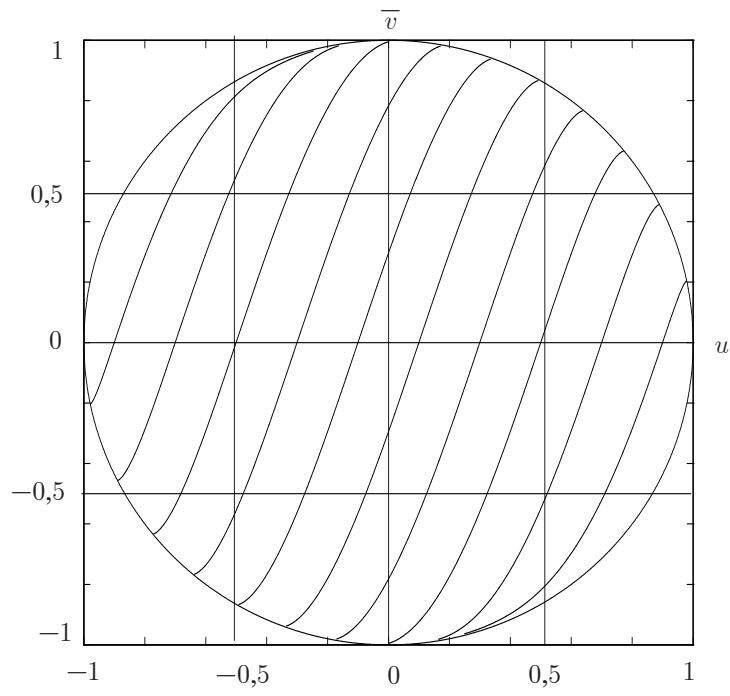


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (2.14), имеющие положительный наклон

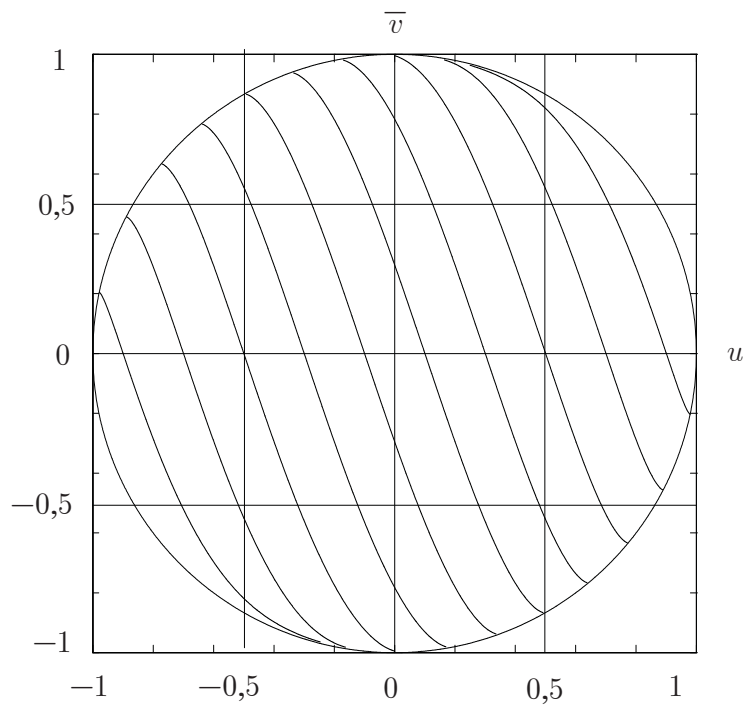


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (2.14), имеющие отрицательный наклон



где в силу условия (2.33)  $\alpha_1 = \alpha + \gamma\omega$ ,  $\beta_1 = \beta + \delta\omega$ , а остальные показатели независимы. Естественно предполагается выполнение условия  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

С целью устранения переменных  $\xi^1$  и  $\xi^3$  в (2.34) представим  $G_1$  и  $G_2$  в следующем виде:

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^{1-4\alpha-2\alpha_1+\gamma(\mu+2)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^{3-4\beta-2\beta_1+\delta(\mu+2)-2}, \quad (2.35)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые положительные константы, а  $\mu$  — некоторый показатель.

Преобразуем полученную систему (2.34), вводя в плоскости  $\xi^{-\omega/2}F$ ,  $\xi^{\omega/2}H$  полярные координаты:

$$\xi^{-\omega/2}F = \rho \cos \iota, \quad \xi^{\omega/2}H = \rho \sin \iota. \quad (2.36)$$

В меридиональной плоскости  $x_2 = 0$  справедливы соотношения

$$\xi^\omega \xi^{1-2\alpha} \xi^{3-2\beta} \rho^2 = x_1^2 + x_3^2, \quad \operatorname{tg} \iota = \frac{x_3}{x_1},$$

т.е. угол  $\iota$  — полярный угол в меридиональной плоскости, отсчитываемый от горизонтальной оси.

Положим  $C = C_1 C_2$ ; получим систему вида

$$\begin{cases} 4\alpha\beta\rho^2 + 2(\alpha\delta + \gamma\beta)\omega\rho^2 + \gamma\delta\omega^2\rho^2 + \\ + 4\xi[(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)\rho\rho'] + 4\xi^2\gamma\delta(\rho'^2 + \rho^2\iota'^2) = 0, \\ \iota'^2 = \frac{C\xi^{\mu-\omega}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2\rho^6 \cos^2 \iota}. \end{cases} \quad (2.37)$$

Дальнейшие рассуждения в принципе не отличаются от приведенных выше. Автомодельную переменную  $\xi$  удастся устранить, положив  $\mu = \omega - 2$ ; в результате порядок системы понижается на одну единицу и получается<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Мы по-прежнему полагаем, что  $d\iota/d\xi > 0$ .

дифференциальное первого порядка, совпадающее с уравнением (2.21)

$$l_1 e^{6W} \cos^2 \iota + l_2 e^{3W} \cos \iota \frac{dW}{d\iota} = 1 + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2, \quad (2.38)$$

но постоянные коэффициенты  $l_1$  и  $l_2$  определяются следующим образом:

$$l_1 = \frac{-(4\alpha\beta + 2\omega(\alpha\delta + \beta\gamma) + \omega^2\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}{4C\gamma\delta},$$

$$l_2 = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\sqrt{C}\gamma\delta} \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Таким образом, одно уравнение (2.23) по существу описывает все рассмотренные выше автомодельные решения осесимметричной задачи, для которых существует универсальная зависимость между  $F$  и  $H$ , не включающая автомодельную переменную  $\xi$ .

Как и прежде, заменаи  $e^{3W} = z^s$  и  $\sin \iota = u$  уравнение (2.38) приводится к (2.24). Исследуем знак коэффициента  $l_1$ , для чего необходимо исследовать знак квадратного трехчлена  $4\alpha\beta + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\omega + \gamma\delta\omega^2$ . Подсчитывая его корни

$$\omega_{1,2} = \frac{-(\alpha\delta + \beta\gamma) \pm |\alpha\delta - \beta\gamma|}{\gamma\delta},$$

для  $l_1$ ,  $l_2$  находим выражения

$$l_1 = -\gamma^2\delta^2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{16C},$$

$$l_2 = -\gamma\delta \frac{(\omega_1 - \omega_2)(2\omega - \omega_1 - \omega_2)}{4\sqrt{C}}.$$

Предположим, что  $l_1 > 0$ , т.е. либо  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega_2 < \omega < \omega_1$ , либо  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . Тогда, поскольку  $\text{sign}(\gamma\delta)\text{sign}(\omega_1 - \omega_2) = 1$ , то

$$\frac{l_2}{\sqrt{l_1}} = -\frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}},$$

где  $\omega' = \omega - \omega_1$ ,  $\omega'' = \omega - \omega_2$ . Обозначая как и прежде  $\bar{v} = z/\sqrt{l_1}$ , уравнение (2.38) представим в форме

$$\left(\frac{d\bar{v}}{du}\right)^2 = 3^2 \left(1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right), \quad (2.39)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega'\omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega'\omega''|} + 4 \left(1 - \frac{\bar{v}^2}{1-u^2}\right)}. \quad (2.40)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_1^2} = 1,$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega'\omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии  $l_1 > 0$  необходимо  $\omega'\omega'' < 0$ , т.е.

$$\gamma_1^2 = -\frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega'\omega''}.$$

Аналитически уравнение (2.40) пока проинтегрировать не удастся, поэтому проанализируем его численно. Численная реализация базируется на методе Рунге–Кутты 4-го порядка точности; шаг имеет порядок  $10^{-4}$ . Численный анализ уравнения (2.40) позволяет изучить поведение его интегральных кривых внутри естественной области определения (см. рис. 5).

Вводя вместо пары переменных  $\bar{v}$  и  $u$  пару  $\tau$ ,  $\iota$  по формулам  $\bar{v} = \gamma_1 \sin \tau \cos \iota$ ,  $u = \sin \iota$ , приходим к уравнению, содержащему тригонометрическую иррациональность

$$\frac{d\tau}{d\iota} = \left(\frac{3}{2} \frac{\omega' + \omega''}{\gamma_1 \sqrt{|\omega'\omega''|} \cos \tau} \pm 3\right) + \operatorname{tg} \tau \operatorname{tg} \iota, \quad (2.41)$$

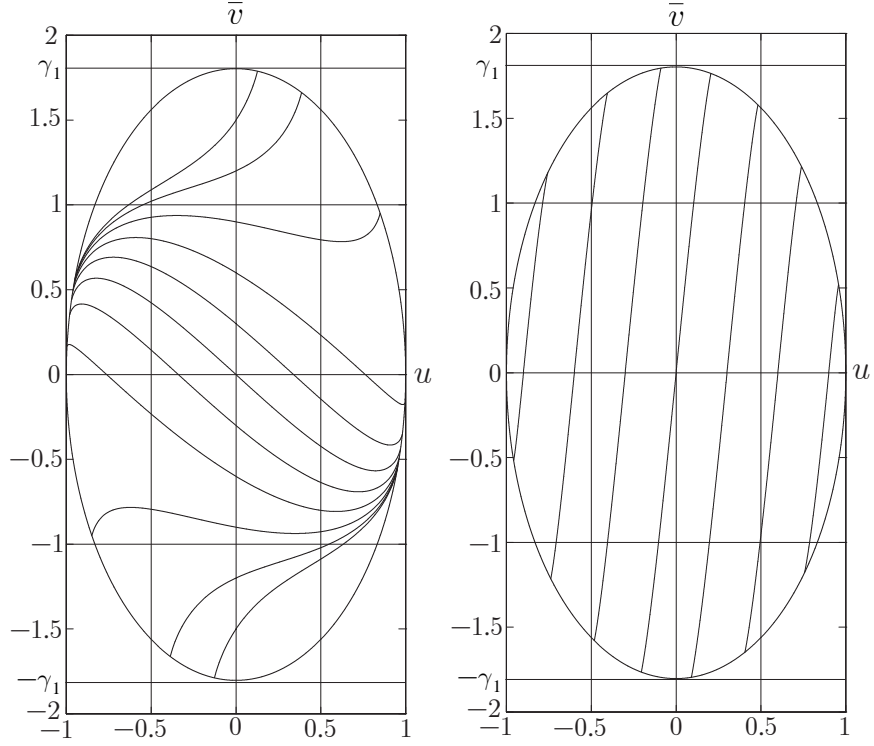


Рис. 5. Интегральные кривые уравнения (2.40). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение отношения  $\omega^* = \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|}$  принято равным трем

которое, учитывая, что  $\omega'\omega'' < 0$  при условии  $l_1 > 0$ , может быть преобразовано к форме

$$\frac{d\tau}{d\iota} = 3 \left( \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''| \cos \tau} \pm 1 \right) + \text{tg} \tau \text{tg} \iota. \quad (2.42)$$

Предположим далее, что  $l_1 < 0$ , т.е. 1)  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega > \omega_1$ ; 2)  $\gamma$  и  $\delta$  одного знака и  $\omega < \omega_2$ ; 3)  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega > \omega_2$ ; 4)  $\gamma$  и  $\delta$  разных знаков и  $\omega < \omega_1$ .

Обозначая  $\bar{v} = z/\sqrt{-l_1}$ , уравнение (2.38) представим в форме

$$\left( \frac{d\bar{v}}{du} \right)^2 = 3^2 \left( -1 + \frac{\omega' + \omega''}{3\sqrt{|\omega'\omega''|}} \frac{d\bar{v}}{du} - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right), \quad (2.43)$$

или в форме, разрешенной относительно производной

$$\frac{2}{3} \frac{d\bar{v}}{du} = \frac{\omega' + \omega''}{\sqrt{|\omega' \omega''|}} \pm \sqrt{\frac{(\omega' + \omega'')^2}{|\omega' \omega''|} - 4 \left(1 + \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2}\right)}. \quad (2.44)$$

Естественной областью определения этого уравнения служит внутренность эллипса, уравнение которого есть

$$u^2 + \frac{\bar{v}^2}{\gamma_2^2} = 1,$$

а большая полуось определяется как

$$\gamma_2 = \sqrt{-1 + \frac{(\omega' + \omega'')^2}{4|\omega' \omega''|}}.$$

Нетрудно заметить, что при условии  $l_1 < 0$  необходимо  $\omega' \omega'' > 0$ , т.е.

$$\gamma_2^2 = \frac{(\omega' - \omega'')^2}{4\omega' \omega''}.$$

Поведение интегральных кривых уравнения (2.44) внутри естественной области определения представлено на рис. 6.

Вводя вместо пары переменных  $\bar{v}$  и  $u$  пару  $\tau$ ,  $\iota$  по формулам  $\bar{v} = \gamma_2 \sin \tau \cos \iota$ ,  $u = \sin \iota$ , приходим к уравнению, совпадающему с (2.42).

Заметим, что уравнение (4.3), полученное в статье Р. Шилда [116],

$$\chi' \sin \chi + 1 + 3 \sin \chi + \cos \chi \operatorname{tg} \psi = 0, \quad (2.45)$$

определяющее поля напряжений в окрестности прямолинейных свободных границ, являются частным случаем уравнения (2.42), если принять  $\frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|} = \frac{1}{3}$ , произвести замены  $\tau = \pi/2 - \chi$ ,  $\iota = \psi$  и выбрать положительный знак. Можно сделать вывод, что полученное уравнение (2.42) является обобщением уравнения Шилда (2.45) и, следовательно, определяет все известные к настоящему времени автомодельные решения.

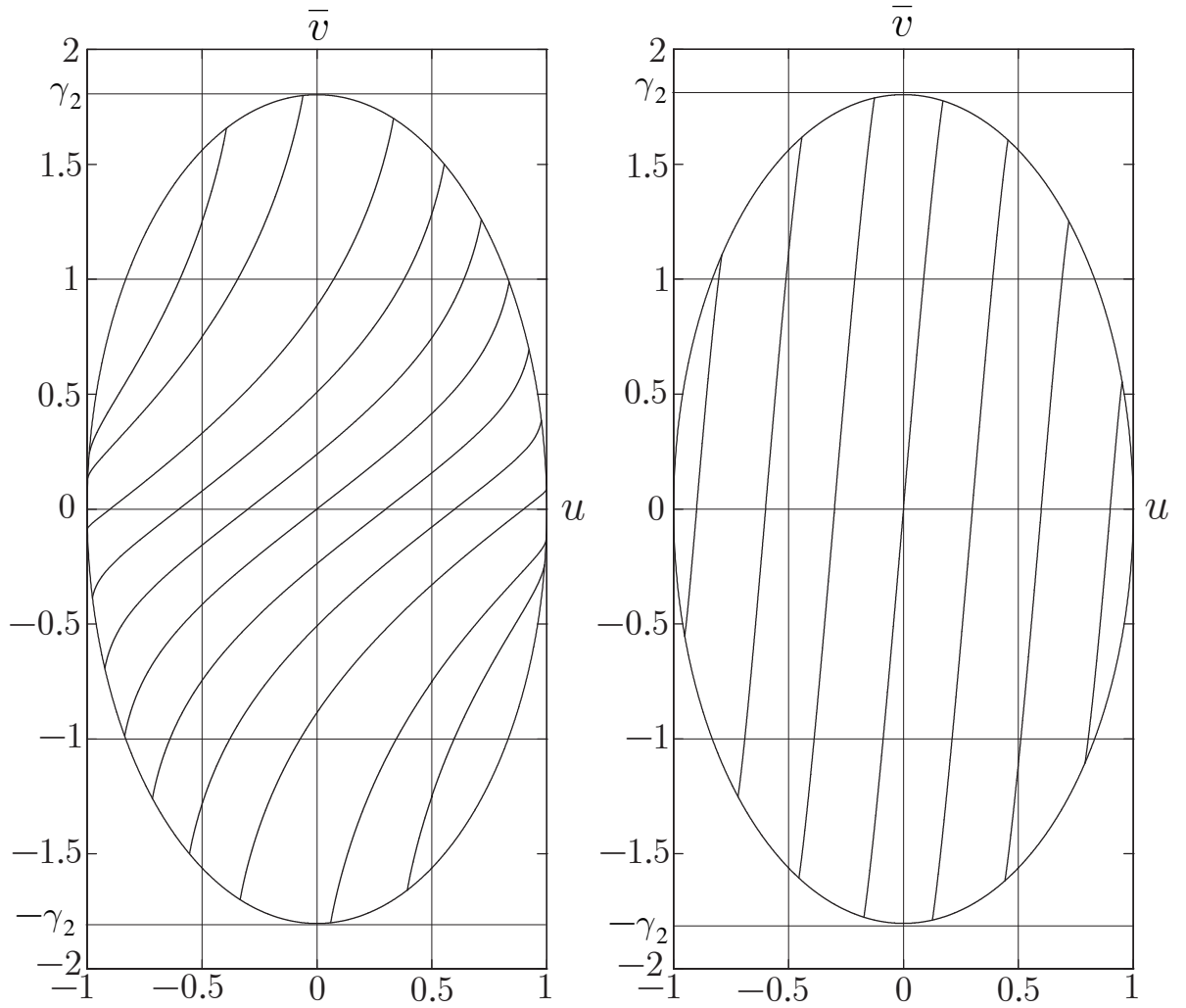


Рис. 6. Интегральные кривые уравнения (2.44). Рисунок слева соответствует отрицательному знаку в этом уравнении. Значение отношения  $\omega^* = \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|}$  принято равным  $\sqrt{17}$

Уравнение (2.42) анализировалось численно. На рис. 7, 8 изображены интегральные кривые уравнения (2.42) внутри квадрата  $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$ .

Форма автомодельного решения в переменных  $\iota$ ,  $\tau$  определяется, как это следует из уравнения (2.42), единственным параметром

$$\omega^* = \frac{\omega' + \omega''}{|\omega' - \omega''|}. \quad (2.46)$$

Этот параметр может быть выражен через показатели автомодельного решения:

$$\omega^* = \text{sign}(\gamma\delta) \frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \omega\gamma\delta}{|\alpha\delta - \beta\gamma|}. \quad (2.47)$$

Уравнение (2.42) упрощается, если  $\omega' + \omega'' = 0$ ,<sup>3</sup> т.е. когда показатель  $\omega$  подобран в соответствии с формулой

$$-\omega = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}.$$

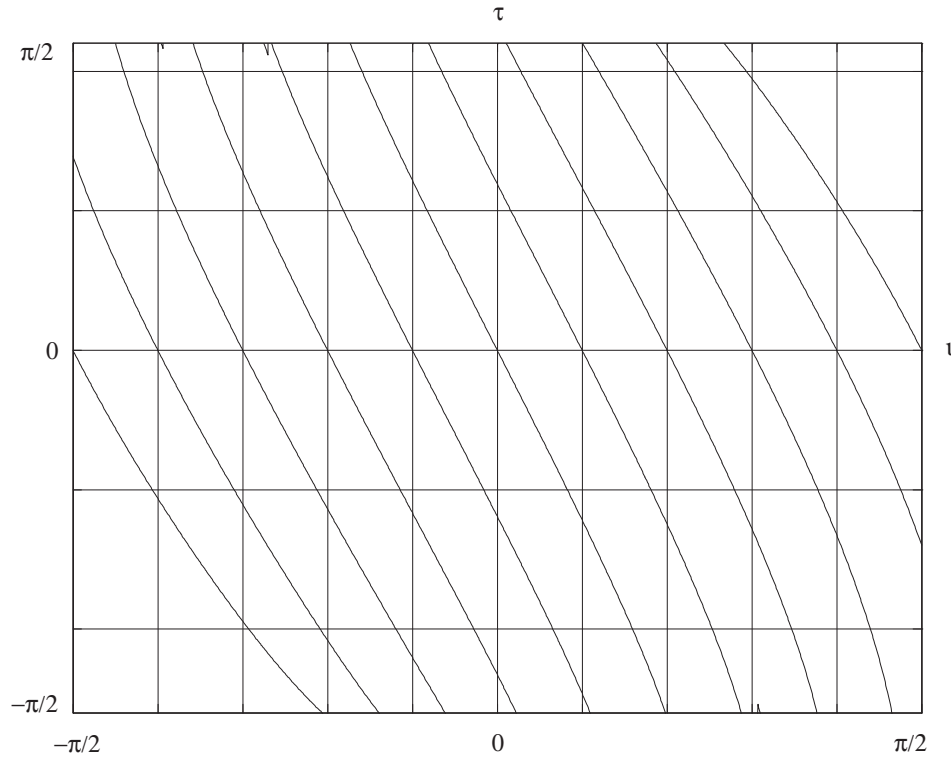


Рис. 7. Интегральные кривые уравнения (2.15), соответствующие знаку плюс. Значение параметра (2.46) выбрано равным трем

После того как определена зависимость функций  $F$  и  $H$  от автомодельной переменной  $\xi$ , разыскание главных осей напряжений и величин главных напряжений не представляет труда. Действительно, главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному напряжению,

---

<sup>3</sup>Речь не идет об уравнении (2.43), поскольку равенство  $\omega' + \omega'' = 0$  предполагает, что  $\omega'\omega'' < 0$ .

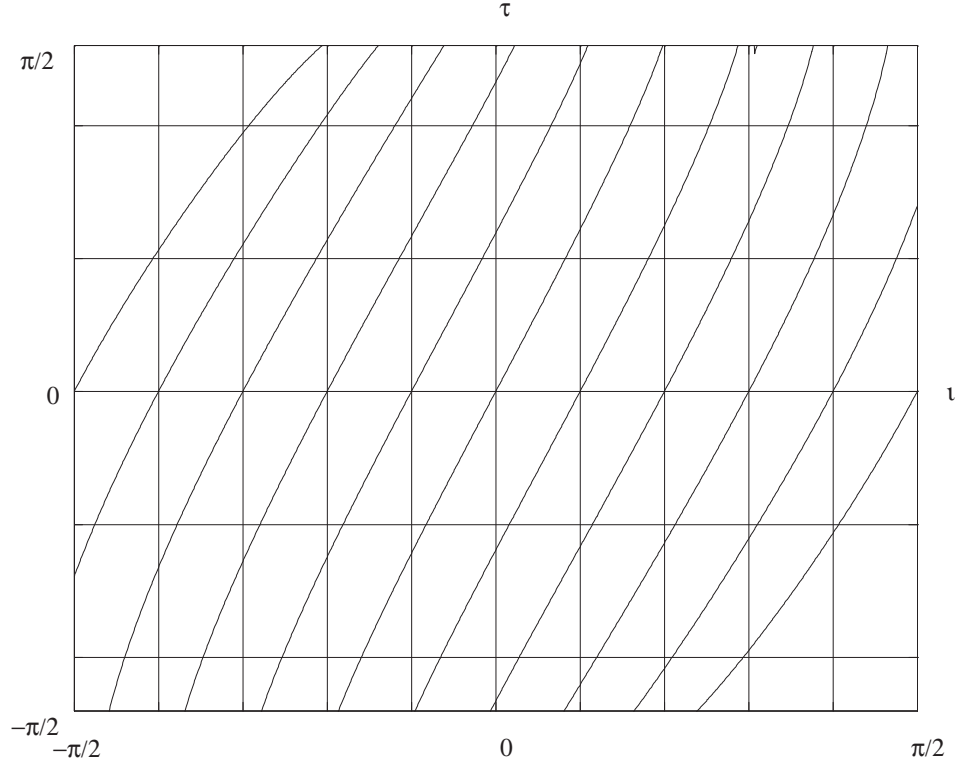


Рис. 8. Интегральные кривые уравнения (2.15), соответствующие знаку минус. Значение параметра (2.46) выбрано равным трем

определяется как касательное к траектории  $\xi^1 = \text{const}$  и вычисляется с помощью дифференцирования соотношений (2.1) по переменной  $\xi^3$ . Вычисляя далее метрику, соответствующую преобразованию координат (2.1), на основании (1.44) может быть найдено распределение главного напряжения  $\sigma_3$ .

С помощью несложных расчетов компоненту  $g_{33}$  метрического тензора можно получить в форме

$$g_{33} = \xi^1{}^{2\alpha+\gamma\omega} \xi^3{}^{2\beta+\delta\omega-2} \left[ ((\beta + \delta\omega/2)\rho + \delta\xi\rho')^2 + (\delta\xi\rho')^2 \right]. \quad (2.48)$$

Определитель  $g$  в соответствии с формулами (1.45), а также представлениями (см. (2.35))

$$G_1(\xi^1) = C_1 \xi^1{}^{6\alpha+2\gamma\omega+\gamma(\mu+2)-2}, \quad G_2(\xi^3) = C_2 \xi^3{}^{6\beta+2\delta\omega+\delta(\mu+2)-2}, \quad (2.49)$$



вычисляется в виде

$$g = C \xi^{1-6\alpha+2\gamma\omega-2+\gamma(2+\mu)} \xi^3 \rho^{6\beta+2\delta\omega-2+\delta(2+\mu)}. \quad (2.50)$$

Преобразуем выражение (2.48). Для этого воспользуемся первым уравнением системы (2.37), разрешим его относительно  $\rho'$ . Дискриминант квадратного относительно  $\rho'$  уравнения есть

$$D = \frac{\xi^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^4 \cos^2 \iota} [(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu-\omega+2}]. \quad (2.51)$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести обозначение:

$$D^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)^4 \rho^6 \cos^2 \iota - 4C\gamma^2 \delta^2 \xi^{\mu-\omega+2}.$$

Тогда система уравнений (2.37) примет нормальную форму:

$$\begin{cases} \rho' = -\frac{\alpha\delta + \beta\gamma + \gamma\delta\omega}{2\gamma\delta} \frac{\rho}{\xi} \pm \frac{\sqrt{D^*}}{2\gamma\delta\xi(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^2 \cos \iota}, \\ \iota' = \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\sqrt{C}\xi^{(\mu-\omega)/2}}{(\alpha\delta - \beta\gamma)\rho^3 \cos \iota}. \end{cases} \quad (2.52)$$

Отметим, что из определения автомодельной переменной  $\xi$  следует, что  $\xi^1 = \xi^{1/\gamma} \xi^{3-\delta/\gamma}$ . Устранив таким образом переменную  $\xi^1$  и учитывая систему уравнений (2.52), на основании которой можно исключить производные  $\rho'$ ,  $\iota'$ , запишем соотношение (2.48) для  $g_{33}$  в форме

$$2\gamma^2 g_{33} = \xi^{3-2(\beta-\alpha\delta/\gamma-1)} \xi^{2\alpha/\gamma+\omega} \left[ (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right]. \quad (2.53)$$

После этого, определив  $g_{33}$ , можно следующим образом найти выражение для  $\sigma_3$ . Из анализа первых двух уравнений системы (1.44) можно сделать вывод о том, что сумма  $\sigma_3/2k + \ln \sqrt{g_{33}}$  может зависеть только от координаты  $\xi^3$ :

$$\frac{\sigma_3}{2k} + \ln \sqrt{g_{33}} = f(\xi^3). \quad (2.54)$$

Тогда последнее уравнение этой системы позволяет заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} (f(\xi^3) - \ln \sqrt{g}) = 0. \quad (2.55)$$

Воспользуемся далее соотношением для определителя метрического тензора (2.50), устраним в нем переменную  $\xi^1$  (выразив ее через  $\xi$  и  $\xi^3$ ) и, интегрируя (2.55), установим вид функции  $f(\xi^3)$ :

$$f(\xi^3) = (3\beta + \delta\omega - 1 + \delta(2 + \mu)/2) \ln |\xi^3| + \text{const}. \quad (2.56)$$

Таким образом, удастся определить главное напряжение  $\sigma_3$  в области автомодельного решения:

$$\sigma_3 = 2k \ln \left| \xi^3 {}^{3\beta+\delta(\omega+1+\mu/2)-1} g_{33}^{-1/2} \right| + \text{const}. \quad (2.57)$$

Остальные главные напряжения определяются в соответствии с равенствами (1.3).

Отметим, что, согласно (2.57), главное напряжение  $\sigma_3$  зависит от  $\xi$ ,  $\xi^3$ ,  $\iota$  и  $\rho$ . Численно анализируя систему (2.52), можно получить зависимости  $\iota = \iota(\xi)$ ,  $\rho = \rho(\xi)$  и тем самым выразить главное напряжение  $\sigma_3$  только через переменные  $\xi$  и  $\xi^3$ . Мы будем избегать прямого анализа системы (2.52) и в целях простоты ограничимся лишь минимальным набором параметров, определяющих форму автомодельного решения.

Прежде всего, удобно, используя (2.57), подобрать такую величину, которая зависела бы только от автомодельной переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \sigma_3 - k (4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu)) \ln |\xi^3| = \\ = -k \ln \left| \frac{\xi^{2\alpha/\gamma+\omega}}{2\gamma^2} \left[ (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right] \right| + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Заметим, что положив

$$4\beta + 2\delta\omega + 2\alpha\delta\gamma^{-1} + \delta(2 + \mu) = 0, \quad (2.59)$$

можно заключить, что наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение в области автомодельного решения зависит только от автомодельной переменной  $\xi$ . Проверим возможность выполнения этого условия для значений параметров, удовлетворяющих автомодельному решению Шилда, а именно  $\omega^* = 1/3$ . Предположим также, что параметры, определяющие, согласно (2.32), форму автомодельного решения осесимметричной задачи, удовлетворяют следующим условиям:  $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$ . Тогда на основании (2.33) заключаем, что показатель  $\omega = 0$ . Заметим, что  $\mu = -2$ .

Учитывая эти условия, получаем следующие ограничения на значения параметров

$$\begin{cases} \text{sign}(\gamma\delta) = \text{sign}(\mu), \\ 3\lambda = \mu, \end{cases} \quad (2.60)$$

где  $\lambda = \alpha\delta + \beta\gamma$ ,  $\mu = \alpha\delta - \beta\gamma$ .

Система уравнений (2.60) определяет условие совместности полученного решения с решением Шилда (2.45).

Рассмотрим далее частный случай. В определении автомодельной переменной  $\xi$  положим  $\gamma = 1$  и  $\delta = -1$ , т.е.

$$\xi = \frac{\xi^1}{\xi^3},$$

тогда в соответствии с условиями (2.60) положим  $\beta = \alpha/2$  и  $\alpha > 0$ .

Необходимое для построения распределения главного напряжения  $\sigma_3$  соотношение (2.53) представляется тогда в виде следующей зависимости:

$$g_{33} = \frac{1}{2}\xi^{2\alpha}\xi^{3-3\alpha-2} \left( \frac{9\alpha^2}{4}\rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{2\rho \cos \iota} \right), \quad (2.61)$$

где для  $D^*$  имеет место равенство:

$$D^* = \frac{9\alpha^4}{4}\rho^6 \cos^2 \iota - 4C.$$

Соотношение (2.58) с учетом сделанных выше предположений о значениях показателей представим в виде

$$\sigma_3 = -k \ln \left| \frac{\xi^{2\alpha}}{2} \left( \frac{9\alpha^2}{4}\rho^2 \mp \frac{\sqrt{D^*}}{\rho \cos \iota} \right) \right| + \text{const}, \quad (2.62)$$

а систему уравнений (2.52), ограничившись выбором положительных знаков, —

$$\begin{cases} \rho' = -\frac{\alpha\rho}{4\xi} + \frac{\sqrt{D^*}}{3\alpha\xi\rho^2 \cos \iota}, \\ \iota' = \frac{2\sqrt{C}}{3|\alpha|\xi\rho^3 \cos \iota}. \end{cases} \quad (2.63)$$

Для рассматриваемого частного случая значения параметров  $l_1$  и  $l_2$  вычисляются как

$$l_1 = 9\alpha^4/8C, \quad l_2 = -3\alpha^2/4\sqrt{C}.$$

Ясно, что  $l_1 > 0$ , и уравнение (2.40) для переменных  $u, \bar{v}$  будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\bar{v}}{du} = \sqrt{\frac{9\alpha}{8}} \pm \sqrt{\frac{9\alpha}{8} + 9 \left( 1 - \frac{\bar{v}^2}{1 - u^2} \right)}. \quad (2.64)$$

Проинтегрируем это уравнение (выбрав положительный знак) численно, задавая при  $u = 0.1$  значения  $\bar{v}$  на отрезке  $[-0.8, 0.8]$  с шагом 0.1. Произведем затем обратные замены переменных. В результате получим функциональные зависимости  $\rho = \rho(\iota)$  вдоль каждой из 17 интегральных кривых уравнения (2.64) на плоскости  $u, \bar{v}$ . Используя второе уравнение системы (2.63) и разделяя в нем переменные, находим зависимости  $\xi = \xi(\iota)$  (или  $\iota = \iota(\xi)$ ) вдоль упомянутых интегральных кривых. В итоге можно

найти зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от полярного угла  $\iota$  в меридиональной плоскости. Зависимости  $k^{-1}\sigma_3$  от полярного угла  $\iota$ , соответствующие значению показателя  $\alpha = 1$ , даны на рис. 9, если  $\bar{v} > 0$ , и рис. 10, если  $\bar{v} < 0$ . Если  $\bar{v} = 0$ , то необходимо  $\rho = 0$  и, следовательно, производные  $\rho'$  и  $\iota'$  неограниченно возрастают.

Зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от автомодельной переменной  $\xi$  представлена на рис. 11, если  $\bar{v} > 0$ , и рис. 12, если  $\bar{v} < 0$ .

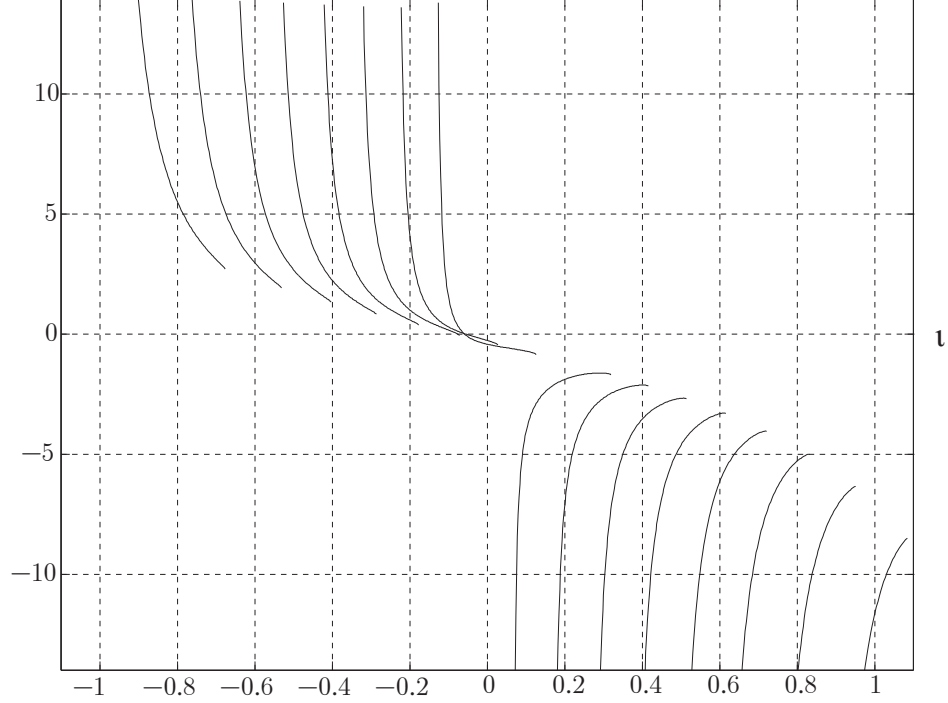


Рис. 9. Зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от полярного угла  $\iota$  в области автомодельного решения  $\bar{v} > 0$  для показателя  $\alpha = 1$

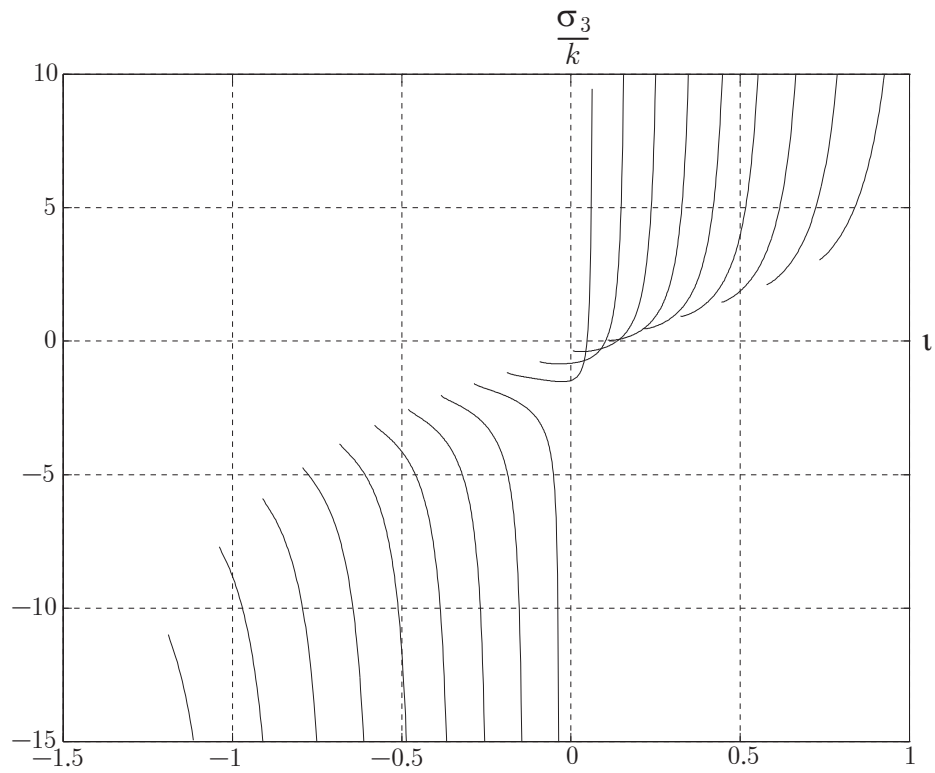


Рис. 10. Зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от полярного угла  $\iota$  в области автомодельного решения  $\bar{v} < 0$  для показателя  $\alpha = 1$

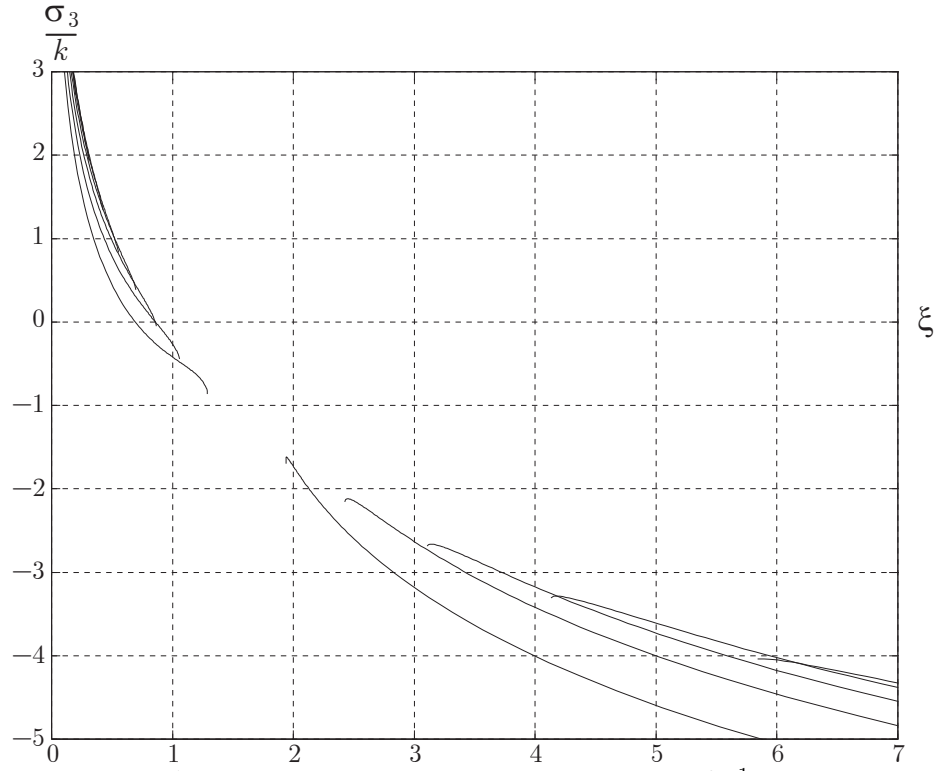


Рис. 11. Зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от автомодельной переменной  $\xi$  в области  $\bar{v} > 0$  для показателя  $\alpha = 1$

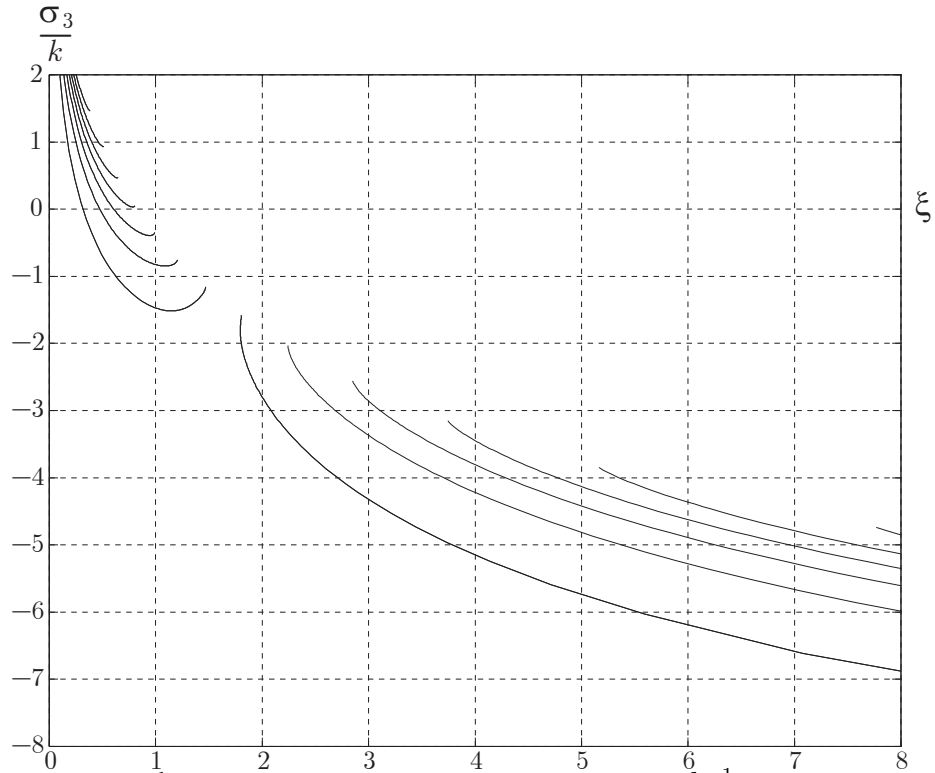


Рис. 12. Зависимость безразмерного главного напряжения  $k^{-1}\sigma_3$  от автомодельной переменной  $\xi$  в области  $\bar{v} < 0$  для показателя  $\alpha = 1$

Таким образом, удастся построить автомодельные решения осесиммет-

ричной задачи теории пластичности, обобщающие решение Шилда, которое при некоторых значениях параметров, определяющих форму автомодельных решений, также как и решение Шилда зависят только от полярного угла  $\iota$  в меридиональной плоскости.

## II.2. Группы симметрий и алгебра симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи

Общий групповой анализ пространственных уравнений теории идеальной пластичности на ребре призмы Треска, представленных в декартовых координатах, дан в [6, с. 73-77]. Там же приводятся инвариантные и частично-инвариантные решения трехмерных уравнений. Групповой анализ уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности в изостатических координатах ранее, по-видимому, не проводился.

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классических монографиях [71], [72]. Оригинальное изложение теории групп Ли можно найти в [30, с. 139-198]

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (2.3) будет инвариантной.

При использовании канонических изостатических координат  $\omega^1, \omega^3$  вместо системы уравнений (2.3) имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f = \pm 1. \end{cases} \quad (2.65)$$

Левые части этих уравнений обозначим соответственно через  $E_1$  и  $E_2$ .



Ясно, что пары изостатических координат  $\xi^1, \xi^3$  и  $\omega^1, \omega^3$  связаны посредством следующего соотношения:

$$\omega^1 = \int \sqrt{G_1(\xi^1)} d\xi^1, \quad \omega^3 = \int \sqrt{G_3(\xi^3)} d\xi^3. \quad (2.66)$$

В целях более компактного представления для переменных  $\omega^1, \omega^3$  введем новые обозначения  $v^1, v^2$ .

### II.2.1. Вычисление группы инвариантности системы уравнений осесимметричной задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим, следуя [71], непрерывную однопараметрическую группу (группу Ли)

$$\begin{aligned} \tilde{v}^1 &= \tilde{v}^1(v^1, v^2, f, h, \varepsilon) = v^1 + \varepsilon \Xi^1(v^1, v^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{v}^2 &= \tilde{v}^2(v^1, v^2, f, h, \varepsilon) = v^2 + \varepsilon \Xi^2(v^1, v^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{f} &= \tilde{f}(v^1, v^2, f, h, \varepsilon) = f + \varepsilon H^1(v^1, v^2, f, h) + \dots, \\ \tilde{h} &= \tilde{h}(v^1, v^2, f, h, \varepsilon) = h + \varepsilon H^2(v^1, v^2, f, h) + \dots. \end{aligned} \quad (2.67)$$

где  $\varepsilon$  — параметр группы преобразований.

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами [71, с. 55]

$$\varsigma = (\Xi^1(v^1, v^2, f, h), \Xi^2(v^1, v^2, f, h), H^1(v^1, v^2, f, h), H^2(v^1, v^2, f, h)). \quad (2.68)$$

Составим инфинитезимальный оператор группы [71, с. 55]

$$\varsigma \cdot \partial = \Xi^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial v^2} + H^1 \frac{\partial}{\partial f} + H^2 \frac{\partial}{\partial h}. \quad (2.69)$$

По инфинитезимальному оператору однопараметрическая группа преобразований (2.67) восстанавливается единственным образом (с точностью

до замены параметра  $\varepsilon$ ). Для этого необходимо проинтегрировать задачу Коши для автономной системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{v}^1}{d\tau} &= \Xi^1(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \\ \frac{d\tilde{v}^2}{d\tau} &= \Xi^2(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \\ \frac{d\tilde{f}}{d\tau} &= H^1(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{f}, \tilde{h}), \\ \frac{d\tilde{h}}{d\tau} &= H^2(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{f}, \tilde{h}),\end{aligned}\tag{2.70}$$

где  $\tau$  — канонический параметр группы, с начальными данными

$$\tilde{v}^1|_{\tau=0} = v^1, \quad \tilde{v}^2|_{\tau=0} = v^2, \quad \tilde{f}|_{\tau=0} = f, \quad \tilde{h}|_{\tau=0} = h.$$

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле  $\zeta_1$ . Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned}\zeta_1 \cdot \partial &= \Xi^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial v^2} + H^1 \frac{\partial}{\partial f} + H^2 \frac{\partial}{\partial h} + H_1^1 \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)} + H_2^1 \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial v^2} \right)} + \\ &\quad + H_1^2 \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)} + H_2^2 \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial h}{\partial v^2} \right)},\end{aligned}\tag{2.71}$$

где  $H_j^l$  выражается согласно формул первого продолжения [71, с. 58]

$$H_j^l = \frac{\partial H^l}{\partial v^j} + \frac{\partial f_s}{\partial v^j} \frac{\partial H^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial v^s} \left( \frac{\partial \Xi^s}{\partial v^j} + \frac{\partial f_r}{\partial v^j} \frac{\partial \Xi^s}{\partial f_r} \right) \quad (l, j = 1, 2) \tag{2.72}$$

и для сокращения записи принято, что  $f_1 = f$  и  $f_2 = h$ .

Если замена переменных в соответствии с формулами (2.67) преобразует систему дифференциальных уравнений (2.65) в систему в точности того

же самого вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{v}^1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{v}^2} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}^1} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}^2} &= 0, \\ \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{v}^1} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{v}^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{v}^1} \right) \tilde{f} &= \pm 1, \end{aligned} \quad (2.73)$$

то группу преобразований (2.67) называют группой инвариантности системы дифференциальных уравнений (2.65). Говорят также, что система дифференциальных уравнений (2.65) допускает группу (2.67).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (2.65) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия, что уравнения выполняются, то должны получаться тождественно нулевые выражения. Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Применим инфинитезимальный оператор  $\zeta_1 \cdot \partial$  к первому уравнению  $E_1$  системы (2.65):

$$(\zeta_1 \cdot \partial) \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} \right) = H_1^1 \frac{\partial f}{\partial v^2} + H_2^1 \frac{\partial f}{\partial v^1} + H_1^2 \frac{\partial h}{\partial v^2} + H_2^2 \frac{\partial h}{\partial v^1}. \quad (2.74)$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы (2.72) для величин  $H_j^l$ :<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}
(\zeta \cdot \partial) E_1 = & \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial H^1}{\partial v^1} + \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial f} + \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} - \frac{\partial f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \\
& - \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^1} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \\
& + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial H^1}{\partial f} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial H^1}{\partial h} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^2} - \\
& - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \\
& - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \left( \frac{\partial f}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial H^2}{\partial v^1} + \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial f} + \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial h} - \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} - \\
& - \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \\
& - \frac{\partial h}{\partial v^2} \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^1} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial H^2}{\partial f} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial H^2}{\partial h} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^2} - \\
& - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \\
& - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^2} \frac{\partial f}{\partial v^2} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \left( \frac{\partial h}{\partial v^2} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial h}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Привлечем затем систему уравнений (2.65) в форме

$$\frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} = 0, \quad -\frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} = \frac{1}{f} \tag{2.76}$$

и рассмотрим ее как систему линейных уравнений относительно частных производных по переменной  $v^2$

$$\frac{\partial f}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial v^2},$$

---

<sup>4</sup>Преобразования подобного вида ниже выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

разрешая которую, получим следующую нормальную по переменной  $v^2$  форму Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v^2} &= \frac{-\frac{\partial h}{\partial v^1}}{f \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]}, \\ \frac{\partial h}{\partial v^2} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial v^1}}{f \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]}.\end{aligned}\tag{2.77}$$

Подставляя (2.9) в (2.75) и умножая на

$$f^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]^2,$$

получим

$$\begin{aligned}
f^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]^2 (\zeta_1 \cdot \partial) E_1 &= f^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]^2 \times \\
&\times \left[ \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^2} \right] + \\
&+ f \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right] \left[ -\frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial v^1} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial f} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^1}{\partial h} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} + \right. \\
&+ \frac{\partial h}{\partial v^1} \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial v^1} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial f} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial h} - \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \\
&\quad - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial f} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial h} + \\
&+ \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial f} + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^1}{\partial h} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} \Big] - \\
&- \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^1} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^3 \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} - \frac{\partial f}{\partial v^1} \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} + \\
&+ \frac{\partial h}{\partial v^1} \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^1} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \\
&\quad + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial h}.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Условие инвариантности первого уравнения системы (2.65)

$$(\zeta_1 \cdot \partial) E_1 = 0,$$

учитывая, что производные

$$\frac{\partial f}{\partial v^1}, \quad \frac{\partial h}{\partial v^1}$$

являются свободными переменными, расщепляется на ряд уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов степенного многочлена от этих производных.

Таким образом находим следующие условия инвариантности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^2} &= 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^1} = 0, \\ \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \frac{\partial H^1}{\partial v^1} f &= 0, \quad \frac{\partial H^1}{\partial h} + \frac{\partial H^2}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} + \frac{\partial H^2}{\partial v^2} f = 0, \\ \frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial H^2}{\partial v^1} f &= 0, \quad \frac{\partial H^1}{\partial f} - \frac{\partial H^2}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial H^1}{\partial v^2} f = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Применим инфинитезимальный оператор  $\zeta_1 \cdot \partial$  ко второму уравнению  $E_2$  системы (2.65), т.е. вычислим:

$$(\zeta_1 \cdot \partial) \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \right) f. \quad (2.80)$$

Прежде всего имеем

$$(\zeta_1 \cdot \partial) E_2 = \left( H_1^1 \frac{\partial h}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v^1} H_2^2 - \frac{\partial h}{\partial v^1} H_2^1 - H_1^2 \frac{\partial f}{\partial v^2} \right) f + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial v^2} - \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial v^2} \right) H^1, \quad (2.81)$$

где  $H_j^l$  находятся с помощью (2.72).

Подставим выражения (2.9) в (2.81) и умножим на

$$f^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]^2,$$

в результате получим степенной многочлен от свободных частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial v^1}, \quad \frac{\partial h}{\partial v^1}.$$

После ряда преобразований имеем:

$$\begin{aligned}
f^2 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \right]^2 (\zeta_1 \cdot \partial) E_2 = & - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} f + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^3 f^2 \frac{\partial H^2}{\partial v^2} - \\
& - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} f - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} f + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial f} f - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 f^2 \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial v^2} + \\
& + H^1 \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial h} f - \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} f - \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \\
& + \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial H^1}{\partial v^1} f + \frac{\partial f}{\partial v^1} f^2 \frac{\partial H^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial v^1} \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} f + \\
& + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial h} f + \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial H^2}{\partial f} f - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^3 \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} f - \\
& - f^2 \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^3 \frac{\partial H^1}{\partial v^2} + H^1 \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial H^2}{\partial v^1} f - \\
& - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} f - \left( \frac{\partial h}{\partial v^1} \right)^2 \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} f + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial \Xi^2}{\partial f}.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Коэффициенты степенного многочлена от свободных частных производных, расположенного в правой части последнего равенства, должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} + \frac{\partial H^2}{\partial v^1} f = 0, \quad \frac{\partial H^1}{\partial f} f + \frac{\partial H^2}{\partial h} f - \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} f + H^1 - \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} f = 0, \\
\frac{\partial \Xi^1}{\partial h} + \frac{\partial H^1}{\partial v^2} f = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} - \frac{\partial H^1}{\partial v^1} f = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \frac{\partial H^2}{\partial v^2} f = 0.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Из полученных равенств (2.79) и (2.83), следует:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} = \frac{\partial H^2}{\partial v^1} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} = \frac{\partial H^1}{\partial v^2} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^2}{\partial h} = \frac{\partial H^1}{\partial v^1} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} = \frac{\partial H^2}{\partial v^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Следовательно, касательное векторное поле  $\zeta$  имеет компоненты, зависимость которых от преобразуемых под действием группы переменных выражается как

$$\Xi^1(v^1), \quad \Xi^2(v^2), \quad H^1(f, h), \quad H^2(f, h). \tag{2.85}$$



Учитывая это, получим, что для компонент касательного векторного поля  $\varsigma$  остаются только три не тождественно удовлетворяющихся уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^1}{\partial f}f + \frac{\partial H^2}{\partial h}f - \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1}f + H^1 - \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2}f &= 0, \\ \frac{\partial H^1}{\partial h} + \frac{\partial H^2}{\partial f} &= 0, \\ \frac{\partial H^1}{\partial f} - \frac{\partial H^2}{\partial h} &= 0.\end{aligned}\tag{2.86}$$

Из первого уравнения системы (2.86) получим

$$\frac{\partial H^1}{\partial f} + \frac{\partial H^2}{\partial h} + \frac{H^1}{f} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} + \frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1}.\tag{2.87}$$

Но, согласно (2.79) и (2.84),  $\Xi^2$  зависит только от переменной  $v^2$ , а  $\Xi^1$  зависит только от переменной  $v^1$ , причем левая часть уравнения зависит только от другой пары переменных  $f, h$ , а это может выполняться только в случае, если слагаемые в правой части уравнения являются постоянными:

$$\frac{\partial \Xi^1}{\partial v^1} = C_1, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial v^2} = C_2,\tag{2.88}$$

и, следовательно,

$$2\frac{\partial H^1}{\partial f} + \frac{H^1}{f} = C_1 + C_2.\tag{2.89}$$

Итак, изостатические координаты  $v^1$  и  $v^2$  отделяются от пространственных координат  $f$  и  $h$ .

Последнее уравнение представляет собой однородное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого без труда находится:

$$H^1 = \frac{-C_3(h)\sqrt{f^{-3}} + C_1 + C_2}{3}f = \frac{C_1 + C_2}{3}f - \frac{C_3(h)f^{-\frac{1}{2}}}{3}.\tag{2.90}$$

Подставив полученное решение в два последних уравнения системы

(2.86), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial H^2}{\partial f} &= -\frac{\partial H^1}{\partial h} = \frac{-C'_3(h)f^{-\frac{1}{2}}}{3}, \\ \frac{\partial H^2}{\partial h} &= \frac{\partial H^1}{\partial f} = \frac{C_1 + C_2}{3} + \frac{C_3(h)f^{-\frac{3}{2}}}{6}.\end{aligned}\tag{2.91}$$

На основании первого из этих уравнений получаем, что

$$H^2 = 2\frac{-C'_3(h)f^{\frac{1}{2}}}{3} + C_4(h),\tag{2.92}$$

и, подставляя во второе уравнение, приходим к

$$\frac{\partial H^2}{\partial h} = 2\frac{-C''_3(h)f^{\frac{1}{2}}}{3} + C'_4(h) = \frac{C_1 + C_2}{3} + \frac{C_3(h)f^{-\frac{3}{2}}}{6},\tag{2.93}$$

т.е.

$$C_3(h) = 0.\tag{2.94}$$

Компоненты касательного векторного  $\varsigma$  поля поэтому есть

$$\begin{aligned}H^1 &= \frac{C_1 + C_2}{3}f, & H^2 &= C_4(h) = \frac{C_1 + C_2}{3}h + C_5, \\ \Xi^1 &= C_1v^1 + C_6, & \Xi^2 &= C_2v^2 + C_7.\end{aligned}\tag{2.95}$$

Полагая

$$C'_1 = \frac{C_1 + C_2}{6}, \quad C'_2 = \frac{C_1 - C_2}{6},\tag{2.96}$$

получим, что инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы дифференциальных уравнений (2.65) может иметь только следующую форму:

$$\begin{aligned}\varsigma \cdot \partial &= (3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)\frac{\partial}{\partial v^1} + (3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)\frac{\partial}{\partial v^2} + 2C'_1f\frac{\partial}{\partial f} + \\ &+ (2C'_1h + C_5)\frac{\partial}{\partial h} = C'_1(3v^1\frac{\partial}{\partial v^1} + 3v^2\frac{\partial}{\partial v^2} + 2f\frac{\partial}{\partial f} + 2h\frac{\partial}{\partial h}) + \\ &+ 3C'_2(v^1\frac{\partial}{\partial v^1} - v^2\frac{\partial}{\partial v^2}) + C_6\frac{\partial}{\partial v^1} + C_7\frac{\partial}{\partial v^2} + C_5\frac{\partial}{\partial h}.\end{aligned}\tag{2.97}$$

### II.2.2. Инвариантно-групповые решения уравнений осесимметричной задачи

Группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, обладает также тем свойством, что примененная к любому решению этой системы дифференциальных уравнений она снова переводит его в решение этой системы (см. [72, с. 147]).

Пусть имеется произвольное решение

$$f = f(v^1, v^2), \quad h = h(v^1, v^2)$$

системы дифференциальных уравнений (2.65). Группа преобразований (2.67) позволяет тогда определить зависимости

$$\tilde{f} = \tilde{f}(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \varepsilon), \quad \tilde{h} = \tilde{h}(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \varepsilon).$$

Если они удовлетворяют в точности такой же системе дифференциальных уравнений (2.73), то группа преобразований (2.67) называется группой симметрий системы дифференциальных уравнений (2.65).

Таким образом, группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, есть также и группа симметрий этой системы. Полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения.

Инвариантными решениями системы дифференциальных уравнений относительно группы преобразований называются решения этой системы, которые переводятся этой группой преобразований сами в себя.

Решение системы дифференциальных уравнений (2.65)

$$f = \Phi(v^1, v^2), \quad h = H(v^1, v^2)$$

инвариантно относительно группы преобразований (2.67), если

$$\Phi(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2) = \Phi(v^1, v^2), \quad H(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2) = H(v^1, v^2),$$

т.е. разности

$$f - \Phi(v^1, v^2), \quad h - H(v^1, v^2)$$

являются инвариантами.

Инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы обладает свойством, что если его применить к инварианту  $I$ , то получим равное нулю выражение:

$$(\varsigma \cdot \partial)I = 0.$$

Учитывая (2.97), это условие инвариантности можно представить в форме уравнения в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} (3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)\frac{\partial I}{\partial v^1} + (3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)\frac{\partial I}{\partial v^2} + \\ + 2C'_1 f \frac{\partial I}{\partial f} + (2C'_1 h + C_5)\frac{\partial I}{\partial h} = 0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

где  $I(v^1, v^2, f, h)$  — инвариант системы дифференциальных уравнений (2.65).

Для его решения рассмотрим характеристическую систему

$$\frac{dv^1}{3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6} = \frac{dv^2}{3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7} = \frac{df}{2C'_1 f} = \frac{dh}{2C'_1 h + C_5}, \quad (2.99)$$

три независимых первых интеграла которой без труда находятся

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{1/3/(C'_1+C'_2)}}{(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{1/3/(C'_1-C'_2)}}, \\
I_2 &= \frac{f}{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}}, \\
I_3 &= \frac{(2C'_1h + C_5)}{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}}.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (2.65) могут получаться, только как зависимости между первыми интегралами. В частности, имеются инвариантные решения вида

$$\begin{aligned}
&\frac{f}{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}} = \\
&= \Phi \left( \frac{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{1/3/(C'_1+C'_2)}}{(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{1/3/(C'_1-C'_2)}} \right), \\
&\frac{(2C'_1h + C_5)}{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}} = \\
&= \Psi \left( \frac{(3(C'_1 + C'_2)v^1 + C_6)^{1/3/(C'_1+C'_2)}}{(3(C'_1 - C'_2)v^2 + C_7)^{1/3/(C'_1-C'_2)}} \right).
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Если считать, что  $C_5 = C_6 = C_7 = 0$ , что исключает тривиальные преобразования трансляции вдоль вертикальной оси симметрии и трансляции канонических изостатических координат, то инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (2.65) приобретают следующую форму ( $c_1 = 3(C'_1 + C'_2)$ ,  $c_2 = 3(C'_1 - C'_2)$ ):

$$\begin{aligned}
&\frac{f}{(c_1v^1)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(c_2v^2)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}} = \Phi \left( \frac{(c_1v^1)^{1/3/(C'_1+C'_2)}}{(c_2v^2)^{1/3/(C'_1-C'_2)}} \right), \\
&\frac{2C'_1h}{(c_1v^1)^{C'_1/3/(C'_1+C'_2)}(c_2v^2)^{C'_1/3/(C'_1-C'_2)}} = \Psi \left( \frac{(c_1v^1)^{1/3/(C'_1+C'_2)}}{(c_2v^2)^{1/3/(C'_1-C'_2)}} \right).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Функции  $\Phi$  и  $\Psi$  должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при подстановке (2.102) в

(2.65).

Вводя обозначения

$$\frac{1}{3(C'_1 + C'_2)} = \alpha, \quad \frac{1}{3(C'_1 - C'_2)} = \beta,$$

инвариантные решения окончательно представим в форме

$$\begin{aligned} f &= (\alpha^{-1}v^1)^{(1+\alpha/\beta)/6}(\beta^{-1}v^2)^{(\beta/\alpha+1)/6}\Phi((\alpha^{-1}v^1)^\alpha(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}), \\ h &= \frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta}(\alpha^{-1}v^1)^{(1+\alpha/\beta)/6}(\beta^{-1}v^2)^{(\beta/\alpha+1)/6}\Psi((\alpha^{-1}v^1)^\alpha(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Вводя автомодельную переменную  $v = (\alpha^{-1}v^1)^\alpha(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}$ , относительно  $\Phi(v)$  и  $\Psi(v)$  получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (-\Psi'(v)\Phi(v) + \Psi(v)\Phi'(v))\Phi(v) &= v^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta}-1}, \\ \frac{1}{6^2} \left( \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \right)^2 (\Phi(v))^2 - (\Phi'(v)v)^2 + \frac{1}{4} (\Psi(v))^2 - \\ &- \left( \frac{3\alpha\beta}{\alpha+\beta} \right)^2 (\Psi'(v)v)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по автомодельной переменной  $v$ . Последнюю систему можно также привести к виду

$$\begin{aligned} \Phi(v) [\Psi(v)\Phi'(v) - \Phi(v)\Psi'(v)] &= v^{a-1}, \\ \frac{1}{4}b^2 [\Phi(v)]^2 + \frac{1}{4} [\Psi(v)]^2 - [\Phi'(v)v]^2 - \frac{1}{b^2} [\Psi'(v)v]^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

где введены обозначения

$$a = \frac{\beta - \alpha}{2\alpha\beta}, \quad b = \frac{\alpha + \beta}{3\alpha\beta}.$$

Такого вида решения и соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) были получены и проанализированы ранее

в этой главе. Следовательно, все они являются инвариантными решениями системы уравнений (2.65) относительно однопараметрической группы преобразований, определяемой инфинитезимальным оператором (2.97).

Инфинитезимальный оператор группы симметрий системы дифференциальных уравнений (2.65) может принимать, как было найдено в [?], только такую форму:

$$(\varsigma \cdot \partial) = C_1(\varsigma_1 \cdot \partial) + C_2(\varsigma_2 \cdot \partial) + C_3(\varsigma_3 \cdot \partial) + C_4(\varsigma_4 \cdot \partial) + C_5(\varsigma_5 \cdot \partial), \quad (2.106)$$

где  $(\varsigma_i \cdot \partial)$  — операторы вида

$$\begin{aligned} (\varsigma_1 \cdot \partial) &= 3v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + 3v^2 \frac{\partial}{\partial v^2} + 2f \frac{\partial}{\partial f} + 2h \frac{\partial}{\partial h}, \\ (\varsigma_2 \cdot \partial) &= 3v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} - 3v^2 \frac{\partial}{\partial v^2}, \\ (\varsigma_3 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial v^1}, \\ (\varsigma_4 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial v^2}, \\ (\varsigma_5 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial h}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Здесь  $C_j$  — произвольные постоянные,  $(\varsigma_j \cdot \partial)$  — базисные инфинитезимальные операторы, а переменные  $v^1, v^2$  введены вместо  $\omega^1, \omega^3$  в целях более компактного представления уравнений. Заметим, что операторы  $(\varsigma_3 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_4 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_5 \cdot \partial)$  определяют сдвиги изостатических координат  $v^1, v^2$  и вертикальной координаты  $h$ . Оператор  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$  соответствует растяжению первой изостатической координаты в отношении  $l$  и одновременному сжатию второй изостатической координаты в отношении  $l^{-1}$ , а  $(\varsigma_1 \cdot \partial)$  — одновременному растяжению всех четырех координат в отношениях  $l^{3/2}, l^{3/2}, l, l$ . Ниже нам иногда будет удобно не включать множитель 3 в выражение для базисного оператора  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$ . Впрочем то же самое касается и других базис-

ных операторов: в некоторых случаях оказывается удобным использовать их растянутые аналоги.

Так как каждый инфинитезимальный оператор группы симметрий системы (2.65) выражается линейно через операторы  $(\varsigma_i \cdot \partial)$ , то множество операторов образует пятимерное линейное пространство с базисом из инфинитезимальных операторов (2.107).

Чтобы наделить пространство инфинитезимальных операторов алгебраической структурой вводится билинейная операция коммутации операторов (скобка Пуассона операторов) [71, с. 87] согласно

$$[(\varsigma_i \cdot \partial), (\varsigma_j \cdot \partial)] = [\varsigma_i, \varsigma_j] \cdot \partial, \quad (2.108)$$

где операция коммутации касательных векторных полей  $[\varsigma_i, \varsigma_j]$ , в свою очередь, определяется как:

$$[\varsigma_i, \varsigma_j] = (\varsigma_i \cdot \partial)\varsigma_j - (\varsigma_j \cdot \partial)\varsigma_i. \quad (2.109)$$

Линейное пространство инфинитезимальных операторов с определенной операцией коммутации операторов обладает структурой алгебры, которая носит название алгебры Ли.

Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов (2.107) образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутации базисных инфинитезимальных операторов  $(\varsigma_i \cdot \partial)$ :

	$\varsigma_1 \cdot \partial$	$\varsigma_2 \cdot \partial$	$\varsigma_3 \cdot \partial$	$\varsigma_4 \cdot \partial$	$\varsigma_5 \cdot \partial$
$\varsigma_1 \cdot \partial$	0	0	$-3\varsigma_3 \cdot \partial$	$-3\varsigma_4 \cdot \partial$	$-2\varsigma_5 \cdot \partial$
$\varsigma_2 \cdot \partial$	0	0	$-3\varsigma_3 \cdot \partial$	$3\varsigma_4 \cdot \partial$	0
$\varsigma_3 \cdot \partial$	$3\varsigma_3 \cdot \partial$	$3\varsigma_3 \cdot \partial$	0	0	0
$\varsigma_4 \cdot \partial$	$3\varsigma_4 \cdot \partial$	$-3\varsigma_4 \cdot \partial$	0	0	0
$\varsigma_5 \cdot \partial$	$2\varsigma_5 \cdot \partial$	0	0	0	0

(2.110)



Алгебра Ли и ее структурный тензор на основании этой таблицы определяются однозначно.

Ясно, что структурой алгебры Ли обладает также линейное пространство касательных векторных полей  $\varsigma$  с операцией коммутации (2.109). Часто удобнее проводить рассуждения в терминах именно этой алгебры, для которой мы будем использовать обозначение  $L$ . Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем изложении. Рассматриваемая в данной работе алгебра Ли касательных векторных полей пятимерна и будет обозначаться символом  $L^5$ .

Чтобы изучить внутреннюю структуру алгебры Ли  $L$  обычно вводится линейное  $(L \rightarrow L)$  отображение  $\text{ad}(\tilde{\varsigma})$ , заданное касательным векторным полем  $\tilde{\varsigma}$ , действующее на касательное векторное поле  $\varsigma$  однопараметрической группы Ли по формуле (см. [71, с. 186])

$$\text{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma > = [\varsigma, \tilde{\varsigma}], \quad (2.111)$$

называемое присоединенным отображением с определяющим касательным векторным полем  $\tilde{\varsigma}$ .

Линейные отображения  $\text{ad}(\tilde{\varsigma})$  с различными определяющими элементами  $\tilde{\varsigma}$  образуют алгебру Ли с коммутатором, задаваемым следующим равенством:

$$[\text{ad}(\varsigma_i), \text{ad}(\varsigma_j)] = \text{ad}([\varsigma_i, \varsigma_j]). \quad (2.112)$$

Ясно, что присоединенные отображения  $\text{ad}(\varsigma_i)$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) образуют базис указанной алгебры Ли и в рассматриваемом нами случае

$$\text{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma > = \sum_{i=1}^5 E_i \text{ad}(\varsigma_i) < \varsigma > \quad (2.113)$$

откуда на основании (2.106), (2.110) и (2.111) находим:

$$\begin{aligned} \text{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma > = & (-3E_3C_1 - 3E_3C_2 + (3E_1 + 3E_2)C_3)\varsigma_3 + \\ & + (-3E_4C_1 + 3E_4C_2 + (3E_1 - 3E_2)C_4)\varsigma_4 + (-2E_5C_1 + 2E_1C_5)\varsigma_5, \end{aligned} \quad (2.114)$$

где  $E_i$  — коэффициенты в разложении  $\tilde{\varsigma} = E_1\varsigma_1 + \dots + E_5\varsigma_5$ .

Понятие присоединенного отображения интересует нас лишь в связи с тем, что оно используется при конструировании однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$  касательных векторных полей. Техника построения однопараметрической группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$  приводится, например, в [71, с. 188-190].

Чтобы найти группу внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $L$  необходимо решить уравнение Ли [71, с. 188]:

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial \tau} = \text{ad}(\tilde{\varsigma}) < \varsigma' > = [\varsigma', \tilde{\varsigma}] \quad (2.115)$$

с начальным условием

$$\varsigma'(0) = \varsigma. \quad (2.116)$$

Поясним, что  $\varsigma'$  — касательное векторное поле, в которое переходит касательное векторное поле  $\varsigma$ , под действием однопараметрической группы преобразований, заданной уравнением Ли.

Сформулированная задача Коши имеет следующее решение:

$$\varsigma' = \exp(\tau \text{ad}(\tilde{\varsigma})) < \varsigma >. \quad (2.117)$$

Можно показать, что преобразования (2.117) являются автоморфизмами алгебры Ли  $L$ . Они называются внутренними автоморфизмами.

Заметим, что в терминах инфинитезимальных операторов уравнение

(2.115) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\varsigma' \cdot \partial) = [(\varsigma' \cdot \partial), (\tilde{\varsigma} \cdot \partial)],$$

а начальное условие (2.116) —

$$(\varsigma' \cdot \partial)|_{\tau=0} = (\varsigma \cdot \partial).$$

Решение этой задачи Коши дается формулой Хаусдорфа

$$(\varsigma' \cdot \partial) = (\varsigma \cdot \partial) + \tau[(\varsigma \cdot \partial), (\tilde{\varsigma} \cdot \partial)] + \frac{\tau^2}{2!}[[\varsigma \cdot \partial), (\tilde{\varsigma} \cdot \partial)], (\tilde{\varsigma} \cdot \partial)] + \dots$$

Достаточно построить однопараметрические группы автоморфизмов, порождаемые базисными векторами  $\tilde{\varsigma} = \varsigma_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ). Подставляя в (2.115) выражение (2.114), получим для каждого базисного вектора  $\varsigma_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) соответствующую группу внутренних автоморфизмов, действующую на коэффициентах  $C_i$  в разложении общего инфинитезимального оператора (2.106), определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений [71, с. 189]:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 3C'_3, \quad \dot{C}'_4 = 3C'_4, \quad \dot{C}'_5 = 2C'_5; \\ 2) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 3C'_3, \quad \dot{C}'_4 = -3C'_4, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 3) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = -3C'_1 - 3C'_2, \quad \dot{C}'_4 = 0, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 4) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 0, \quad \dot{C}'_4 = -3C'_1 + 3C'_2, \quad \dot{C}'_5 = 0; \\ 5) \quad & \dot{C}'_1 = 0, \quad \dot{C}'_2 = 0, \quad \dot{C}'_3 = 0, \quad \dot{C}'_4 = 0, \quad \dot{C}'_5 = -2C'_1. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Здесь дифференцирование (обозначаемое точкой) производится по параметру  $\tau$ . Решая каждую из пяти выписанных систем с начальными данными

$$C'_1|_{\tau=0} = C_1, \quad C'_2|_{\tau=0} = C_2, \quad C'_3|_{\tau=0} = C_3, \quad C'_4|_{\tau=0} = C_4, \quad C'_5|_{\tau=0} = C_5, \quad (2.119)$$

в результате определим, как действуют на коэффициентах  $C_i$  однопараметрические группы автоморфизмов соответствующие базисным касательным векторным полям  $\tilde{\zeta} = \varsigma_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ):

$$\begin{aligned}
1) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 e^{3\tau}, \quad C'_4 = C_4 e^{3\tau}, \quad C'_5 = C_5 e^{2\tau}; \\
2) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 e^{3\tau}, \quad C'_4 = C_4 e^{-3\tau}, \quad C'_5 = C_5; \\
3) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3 - 3\tau C_1 - 3\tau C_2, \quad C'_4 = C_4, \quad C'_5 = C_5; \\
4) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3, \quad C'_4 = C_4 - 3\tau C_1 + 3\tau C_2, \quad C'_5 = C_5; \\
5) \quad & C'_1 = C_1, \quad C'_2 = C_2, \quad C'_3 = C_3, \quad C'_4 = C_4, \quad C'_5 = C_5 - 2\tau C_1.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Здесь параметр  $\tau$  для каждой из однопараметрических групп изменяется независимо.

Построение оптимальной системы одномерных подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (2.65) мы осуществим с помощью "наивного" подхода, состоящего в том, что общий инфинитезимальный оператор (2.106) (точнее коэффициенты  $C_i$  в его разложении по базисным операторам) подвергается различным преобразованиям из списка (2.120) так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше коэффициентов  $C_i$  в (2.106)). Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (1)–(5), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр  $\Theta_1$ .

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении простейшего инфинитезимального оператора на произвольную постоянную. Это преобразование, очевидно, не изменяет

вида инвариантного решения системы (2.65).

Рассмотрим как изменяются коэффициенты  $C_i$  в разложении общего инфинитезимального оператора (2.106) группы симметрий системы уравнений (2.65) при применении к ним однопараметрических групп автоморфизмов (2.120).

Прежде всего необходимо отметить, что ни один из перечисленных внутренних автоморфизмов не может изменить значений  $C_1$  и  $C_2$ . Однопараметрические группы автоморфизмов (1), (2) не могут привести к нулевому значению коэффициенты  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ , если сами указанные коэффициенты отличны от нуля. Однопараметрические группы автоморфизмов (3), (4), (5) напротив могут изменить соответственно значения коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$ , если конечно значения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  отличны от нуля.

Дальнейшие рассуждения удобно разделить на ряд случаев.

А). Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  таковы, что  $C_1 \neq 0$ ,  $C_1 + C_2 \neq 0$ ,  $C_1 - C_2 \neq 0$ .

Применяя автоморфизмы (3), (4), (5) при значениях  $\tau$ , равных соответственно  $\frac{C_3}{3(C_1 + C_2)}$ ,  $\frac{C_4}{3(C_1 - C_2)}$ ,  $\frac{C_5}{3C_1}$ , можно добиться того, чтобы коэффициенты  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  привелись к нулевым значениям; применяя затем преобразование умножения, приводим значение коэффициента  $C_1$  к единице, полагаем  $C_2 = C$  и получаем в результате простейшего представителя в форме:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + C(\varsigma_2 \cdot \partial), \quad (2.121)$$

где  $C \neq 1$ ,  $C \neq -1$ .

В).  $C_1 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_5$  привести к нулевому значению не удастся. Однако с помощью автоморфизмов (3) и (4) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_3$  и  $C_4$ .

Если считать, что  $C_5 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (1) при  $\tau$  равном  $\frac{1}{2} \ln |C_2/C_5|$ , приводим коэффициенты  $C_2$  и  $C_5$  к одному и тому же абсолютному значению, и, применяя затем преобразование умножения, получим простейших представителей в следующем виде:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.122)$$

Если  $C_5 = 0$ , то простейший представитель есть:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial). \quad (2.123)$$

С).  $C_1 - C_2 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_4$  привести к нулевому значению не удастся, но с помощью автоморфизмов (3) и (5) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_3$  и  $C_5$ .

В случае  $C_4 \neq 0$ , применяя автоморфизм (1) при  $\tau$  равном  $\frac{1}{2} \ln |C_2/C_4|$ , приводим коэффициенты  $C_2$  и  $C_4$  к одному и тому же абсолютному значению. В итоге находим двух простейших представителей:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \quad (2.124)$$

Если  $C_4 = 0$ , то простейший представитель будет вида (2.121) при  $C = 1$ .

D).  $C_1 + C_2 = 0$  и  $C_2 \neq 0$ .

Коэффициент  $C_3$  привести к нулевому значению не удастся. При помощи автоморфизмов (4) и (5) удастся привести к нулевым значениям величины  $C_4$  и  $C_5$ .

Если  $C_3 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (1) при  $\tau$  равном  $\frac{1}{2} \ln |C_1/C_3|$ , приводим коэффициенты  $C_1$  и  $C_3$  к одному и тому же абсолютному значению.

нию. В результате определяются еще два простейших представителя:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial). \quad (2.125)$$

Если  $C_3 = 0$ , то простейший представитель будет вида (2.121) при  $C = -1$ .

Е). Одновременно выполняются условия  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ .

Все три коэффициента  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  привести к нулевым значениям не удастся.

Если  $C_3 \neq 0$ ,  $C_4 \neq 0$ ,  $C_5 \neq 0$ , то, применяя автоморфизм (2) при  $\tau$  равном  $\frac{1}{6} \ln |C_4/C_3|$ , приводим коэффициенты  $C_3$  и  $C_4$  к значениям равным по модулю, и, применяя после этого автоморфизм (1) при  $\tau$  равном  $\ln |C_5/C_4|$ , приводим к одному и тому же абсолютному значению коэффициенты  $C_3$ ,  $C_5$ . В результате получаем простейших представителей (знаки не согласованы и выбираются независимо)

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.126)$$

В случае, когда один из коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  равен нулю, получаем следующих простейших представителей:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \quad (2.127)$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \quad (2.128)$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \quad (2.129)$$

Если два из коэффициентов  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $C_5$  равны нулю, то имеем простейших представителей вида

$$(\varsigma_3 \cdot \partial), \quad (2.130)$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial), \quad (2.131)$$

$$(\varsigma_5 \cdot \partial). \quad (2.132)$$

Перечисленные инфинитезимальные операторы (21 индивидуальный оператор и одно однопараметрическое семейство) образуют оптимальную систему  $\Theta_1$  одномерных подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (2.65). Это подалгебры, порожденные инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} &(\varsigma_1 \cdot \partial) + C(\varsigma_2 \cdot \partial), & (\varsigma_2 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_5 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial), & (\varsigma_4 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial), & (\varsigma_3 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), \\ &(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial), & (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Напомним, что в этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо. В каждом элементе списка один из базисных операторов  $(\varsigma_j \cdot \partial)$  может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (2.65):

$$\begin{aligned} &f \rightarrow -f; \\ &v^1, v^2 \rightarrow -v^1, -v^2; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow -v^1, v^2, -h; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow v^1, -v^2, -h; \\ &v^1, v^2 \rightarrow -v^2, v^1; \\ &v^1, v^2 \rightarrow v^2, -v^1; \\ &v^1, v^2, h \rightarrow v^2, v^1, -h. \end{aligned} \quad (2.134)$$



Рассмотрим инвариантные решения системы дифференциальных уравнений (2.65), которые соответствуют каждому из простейших представителей одномерных подалгебр алгебры симметрий этой системы, перечисленных выше в (2.133). Результаты будут разделены на двенадцать классов так, как это предусматривается (2.133). Дополнительно могут быть получены решения с помощью применения группы симметрий системы (2.65) к решениям для простейших представителей, т.е. с помощью замены переменных

$$\tilde{v}^1 = d_1^3 d_2 v^1 + a_1, \quad \tilde{v}^2 = d_1^3 d_2^{-1} v^2 + a_2, \quad \tilde{f} = d_1^2 f, \quad \tilde{h} = d_1^2 h + a_3, \quad (2.135)$$

где  $d_1 \neq 0$ ,  $d_2 \neq 0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  есть произвольные постоянные, а также — с помощью применения дискретных симметрий (2.134).

**2.1.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_1 + C\varsigma_2) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{3(1+C)v^1} = \frac{dv^2}{3(1-C)v^2} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}. \quad (2.136)$$

В случае  $C \neq 1$ ,  $C \neq -1$  по ее первым интегралам базисные инварианты находятся в форме

$$I_1 = \frac{(v^1)^{1/3/(1+C)}}{(v^2)^{1/3/(1-C)}}, \quad (2.137)$$

$$I_2 = \frac{f}{(v^1)^{1/3/(1+C)}(v^2)^{1/3/(1-C)}}, \quad I_3 = \frac{h}{(v^1)^{1/3/(1+C)}(v^2)^{1/3/(1-C)}}.$$

Базисные инварианты такого типа были рассмотрены в работе [?] (если принять, что  $\alpha = 1/3/(1+C)$ ,  $\beta = 1/3/(1-C)$ ) и им соответствуют автомодельные решения, определяемые системой обыкновенных дифферен-

циальных уравнений

$$\begin{cases} [\Psi(\lambda)\Phi'(\lambda) - \Phi(\lambda)\Psi'(\lambda)]\Phi(\lambda) = \lambda^{3C-1}, \\ [\Phi(\lambda)]^2 + \frac{1}{4}[\Psi(\lambda)]^2 - [\Phi'(\lambda)\lambda]^2 - \frac{1}{4}[\Psi'(\lambda)\lambda]^2 = 0, \end{cases} \quad (2.138)$$

где  $\lambda = (\alpha^{-1}v^1)^\alpha(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}$ ,  $\Phi(\lambda) = (\alpha^{-1}v^1)^{-\alpha}(\beta^{-1}v^2)^{-\beta}f$ ,  $\Psi(\lambda) = 2(\alpha^{-1}v^1)^{-\alpha}(\beta^{-1}v^2)$

Если следовать [?], то  $\lambda$  есть автомодельная переменная  $v$ , а система (2.138)

совпадает с системой (3.8) из указанной работы, если в этой последней системе положить  $v = \lambda$ ,  $a = 3C$ ,  $b = 2$ .

Система уравнений (2.138) заменой неизвестных функций

$$\Phi(\lambda) = \lambda^C \rho \cos \iota, \quad \Psi(\lambda) = \lambda^C 2\rho \sin \iota \quad (2.139)$$

приводится к системе уравнений

$$\begin{cases} -2\lambda\rho^3\iota' \cos \iota = 1, \\ (C^2 - 1)\rho^2 + 2\lambda\rho\rho' + \lambda^2(\rho')^2 + \lambda^2(\rho\iota')^2 = 0. \end{cases} \quad (2.140)$$

Выражая из первого уравнения системы (2.140) переменную  $\lambda$  и подставляя во второе уравнение, получим, что зависимость от переменной  $\lambda$  будет устранена. С помощью еще одной замены  $W = \ln \rho$  приходим к уравнению

$$4(C^2 - 1)e^{6W} \cos^2 \iota + 4e^{3W} \frac{dW}{d\iota} \cos \iota + \left( \frac{dW}{d\iota} \right)^2 + 1 = 0. \quad (2.141)$$

Это уравнение было изучено в работе [89] (см. уравнение (43) на с. 127) и ему соответствуют следующие значения постоянных  $l_1$  и  $l_2$ :  $l_1 = -4(C^2 - 1)$ ,  $l_2 = -4$ .

Производя далее замены  $u = \sin \iota$  и  $w = -\frac{e^{-3W}}{3}$ , приходим к уравнению

$$\left( \frac{dw}{du} \right)^2 = l_1 - 4 \frac{dw}{du} + \frac{9w^2}{1 - u^2}. \quad (2.142)$$

В случае  $C = 1$  первые интегралы есть

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^1}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^1}}. \quad (2.143)$$

Будем искать решение в форме

$$f = \sqrt[3]{v^1} F(v^2), \quad h = \sqrt[3]{v^1} H(v^2). \quad (2.144)$$

Первое уравнение системы (2.65) тогда приводится к виду

$$F \frac{dF}{dv^2} + H \frac{dH}{dv^2} = 0, \quad (2.145)$$

а второе —

$$\frac{1}{3} \left[ F \frac{dH}{dv^2} - \frac{dF}{dv^2} H \right] F = 1. \quad (2.146)$$

Из уравнения (2.145) следует

$$[F(v^2)]^2 + [H(v^2)]^2 = C_1, \quad (2.147)$$

где  $C_1$  — произвольная положительная постоянная. Исключая в (2.146) функцию  $F$  с помощью (2.147), получим

$$(C_1 - [H(v^2)]^2) \frac{dH(v^2)}{dv^2} - \frac{1}{2} \frac{d(C_1 - [H(v^2)]^2)}{dv^2} H(v^2) = 3 \quad (2.148)$$

или

$$\frac{dH}{dv^2} = \frac{3}{C_1}. \quad (2.149)$$

Интегрируя (2.149) и подставляя в (2.147) и (2.144), получим точное решение системы уравнений (2.65):

$$f = \sqrt[3]{v^1} \sqrt{C_1 - \left[ \frac{3}{C_1} v^2 + C_2 \right]^2}, \quad h = \sqrt[3]{v^1} \left[ \frac{3}{C_1} v^2 + C_2 \right]. \quad (2.150)$$

Изоэстатические траектории  $v^1 = \text{const}$ , определяемые решением (2.150), представляют собой концентрические окружности

$$f^2 + h^2 = C_1(v^1)^{\frac{2}{3}}$$

с центром в начале координат. Изоэстатические траектории  $v^2 = \text{const}$  — лучи, выходящие из начала координат. Изоэстатические траектории, определяемые решением (2.150), приведены на рис. 13. Характеристические кривые в этом случае есть логарифмические спирали, развертывающиеся из начала координат. Главные напряжения, как нетрудно видеть, логарифмически зависят от полярного радиуса в меридиональной плоскости.

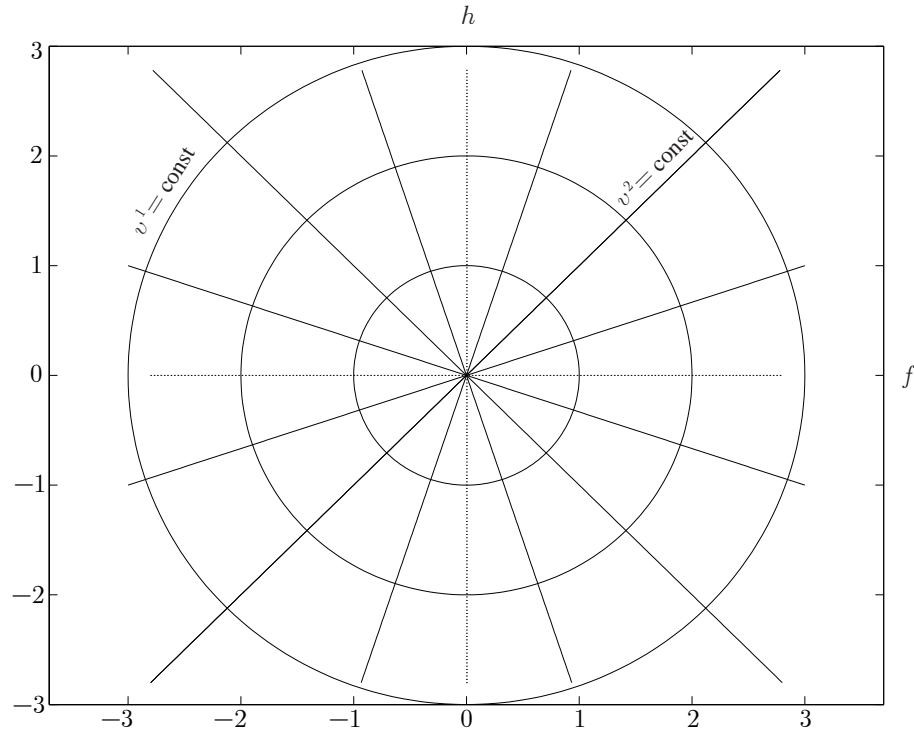


Рис. 13. Изоэстатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\varsigma_1 + \varsigma_2) \cdot \partial$

Случай  $C = 1$  приводится к случаю  $C = -1$  заменой в решении (2.150) переменной  $v^1$  на  $v^2$ , а  $v^2$  — на  $-v^1$ . Здесь мы воспользовались антисиммет-

рией системы (2.65) при перемене ролей переменных  $v^1, v^2$ .

**2.2.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_2 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{v^1} = \frac{dv^2}{-v^2} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0}, \quad (2.151)$$

и базисным инвариантам

$$I_1 = v^1 v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (2.152)$$

Вводя переменную  $\lambda = v^1 v^2$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2.65) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = H(\lambda). \quad (2.153)$$

Прямая подстановка (2.153) во второе уравнение системы (2.65) показывает, что оно приводится к несовместному равенству. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы (2.65).

**2.3.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_2 \pm \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (мы не включаем множитель 3 в выражение для  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$  и ограничиваемся выбором положительного знака)

$$\frac{dv^1}{v^1} = \frac{dv^2}{-v^2} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{1}, \quad (2.154)$$

откуда определяются базисные инварианты

$$I_1 = v^1 v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right|. \quad (2.155)$$

Вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 v^2$ , будем искать решение системы уравнений (2.65) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| + H(\lambda). \quad (2.156)$$

Первое уравнение этой системы тогда приводится к виду

$$\lambda \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{\lambda} \left[ \lambda^2 \left( \frac{dH}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = 0, \quad (2.157)$$

или

$$\frac{dH}{d\lambda} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\lambda^2} - \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2}. \quad (2.158)$$

Второе уравнение системы (2.65) может быть преобразовано к

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} F(\lambda) = -1, \quad (2.159)$$

или, учитывая, что  $f \geq 0$ ,

$$f = \sqrt{-2\lambda + C_2} = \sqrt{-2v^1 v^2 + C_2}. \quad (2.160)$$

Подставляя (2.160) в уравнение (2.158), получим:

$$h = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{-2\lambda + C_2 - 4\lambda^2}}{\lambda \sqrt{-2\lambda + C_2}} d\lambda + C_3. \quad (2.161)$$

Вычисляя интеграл в (2.161) и обозначая через

$$z = \sqrt{\frac{1}{k} - \frac{2(k-1)^2}{k^2} v^1 v^2} = \frac{k-1}{k} \sqrt{-2v^1 v^2 + \frac{k}{(k-1)^2}}, \quad (2.162)$$

находим инвариантно-групповые решения вида

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm i \left( kF(z, k) + \frac{1}{k-1} E(z, k) - (k-1) \Pi(z, k, k) \right) + C_3, \\ f &= \sqrt{-2v^1 v^2 + \frac{k}{(k-1)^2}}, \end{aligned} \quad (2.163)$$

где  $C_3$  — произвольная, вообще говоря, комплексная постоянная,  $i$  — мнимая единица, а канонические эллиптические интегралы Лежандра выра-

жаются как обычно формулами

$$F(z, k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad E(z, k) = \int_0^z \frac{\sqrt{(1-k^2t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt, \quad (2.164)$$

$$\Pi(z, \nu, k) = \int_0^z \frac{dt}{(1-\nu t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};$$

$$k = \frac{2C_2 + 1 \pm \sqrt{1 + 4C_2}}{2C_2} \quad (2.165)$$

есть модуль эллиптических интегралов.

Верхний предел  $z$  в эллиптических интегралах необходимо выбирать так, чтобы он всегда попадал на тот интервал вещественной оси, где подкоренное выражение  $(1-t^2)(1-k^2t^2)$  было бы отрицательным. В пределах указанного интервала действительная часть эллиптических интегралов Лежандра постоянна и ее можно сложить с константой  $C_3$  так, чтобы величина  $h$  была действительной, как это и должно быть. При условии  $|k| > 1$  имеем  $z \in (-1, -1/k) \cap (1/k, 1)$ , а при  $|k| < 1 - z \in (-1/k, -1) \cap (1, 1/k)$ . Заметим, что при  $C_2 > 0$  и выборе положительного знака в (2.165), необходимо  $k > 1$ , и поэтому переменная  $z$  должна быть заключена в пределах

$$\frac{1}{k} < z < 1.$$

Прямая подстановка решений (2.163) в систему (2.65), выполненная с помощью пакета символьных вычислений Maple, показывает что она удовлетворяется.

Изостатические траектории, определяемые решением (2.163) при условии выбора положительного знака, приведены на рис. 14.

В случае  $k = 0$  получим точное решение, выражающееся через элемен-

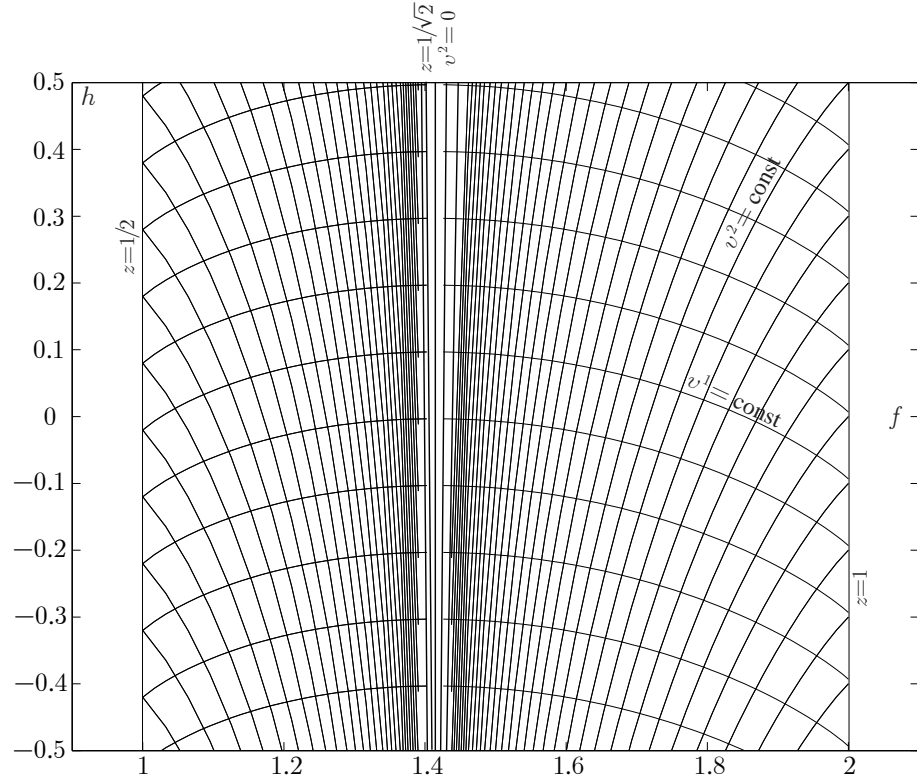


Рис. 14. Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\varsigma_2 \pm \varsigma_5) \cdot \partial$ , при  $k^{-1} < z < 1$ ,  $k = 2$ ,  $C_3 = -i(kF(1, k) + (k - 1)^{-1}E(1, k) - (k - 1)\Pi(1, k, k))$

тарные функции:

$$f = \sqrt{-2v^1v^2}, \quad h = C_3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v^1}{v^2} \right| \pm \left[ t + \frac{1}{2} \ln \left| (t - 1)(t + 1)^{-1} \right| \right], \quad (2.166)$$

где введена вспомогательная переменная  $t = \sqrt{1 + 2v^1v^2}$ .

**2.4.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_5 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{1} \quad (2.167)$$

и инвариантам

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = v^2, \quad I_3 = f, \quad (2.168)$$

которые не позволяют найти никаких решений системы дифференциаль-



ных уравнений (2.65).

**2.5.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_1 + \varsigma_2 \pm \varsigma_4) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (если заменить  $(\varsigma_4 \cdot \partial)$  растянутым аналогом  $6(\varsigma_4 \cdot \partial)$ )

$$\frac{dv^1}{6v^1} = \frac{dv^2}{\pm 6} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}, \quad (2.169)$$

откуда в случае, когда выбирается положительный знак, определяются инварианты

$$I_1 = v^2 - \ln |v^1|, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^1}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^1}}. \quad (2.170)$$

Вводя замену  $\lambda = v^2 - \ln |v^1|$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2.65) в форме

$$f = \sqrt[3]{v^1} F(\lambda), \quad h = \sqrt[3]{v^1} H(\lambda). \quad (2.171)$$

Исследуемая система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} F \frac{dF}{d\lambda} - \left( \frac{dF}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{3} H \frac{dH}{d\lambda} - \left( \frac{dH}{d\lambda} \right)^2 &= 0, \\ \frac{1}{3} \left( F \frac{dH}{d\lambda} - \frac{dF}{d\lambda} H \right) F &= 1. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Выразим из второго уравнения производную  $\frac{dH}{d\lambda}$  и подставим в первое уравнение. В результате получим квадратное уравнение относительно  $\frac{dH}{d\lambda}$ , решая которое, находим выражение для  $\frac{dH}{d\lambda}$ . Подставляя полученное выражение во второе уравнение, определяем производную  $\frac{dF}{d\lambda}$ . Разделив затем одну из производных на другую, можно устранить зависимость от переменной  $\lambda$  и получить уравнение первого порядка относительно пары переменных  $F, H$ :

$$\frac{dH}{dF} = \frac{H}{F} + \frac{6(F^2 + H^2)}{F^2} \left[ \left( \frac{F(F^2 + H^2)}{3} - \frac{6H}{F} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{F(F^2 + H^2)}{3} \right)^2 - 36} \right]^{-1}. \quad (2.173)$$

Мы не будем исследовать это уравнение, т.к. гораздо проще провести анализ в рассматриваемом случае следующим образом.

Если сделать замену переменной  $\tilde{v}^2 = e^{v^2}$  в системе уравнений (2.65) то она приобретет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}^2} + \frac{\partial h}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial \tilde{v}^2} &= 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial v^1} \frac{\partial h}{\partial \tilde{v}^2} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{v}^2} \frac{\partial h}{\partial v^1} \right) f &= \frac{1}{\tilde{v}^2}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

а ее решение надо будет искать в виде автомодельного

$$\begin{cases} f = \sqrt[3]{v^1} \Phi(\tilde{\lambda}), \\ h = \sqrt[3]{v^1} \Psi(\tilde{\lambda}), \end{cases} \quad (2.175)$$

где  $\tilde{\lambda} = \tilde{v}^2/v^1 = e^\lambda$ . Такое решение уже было найдено ранее в статье [91]. Для определения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по автомодельной переменной  $\tilde{\lambda}$ ):

$$\begin{cases} \left( \Phi(\tilde{\lambda}) \Psi'(\tilde{\lambda}) - \Phi'(\tilde{\lambda}) \Psi(\tilde{\lambda}) \right) \Phi(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda}^{-1}, \\ (\Phi(\tilde{\lambda}) - \tilde{\lambda} \Phi'(\tilde{\lambda})) \Phi'(\tilde{\lambda}) + (\Psi(\tilde{\lambda}) - \tilde{\lambda} \Psi'(\tilde{\lambda})) \Psi'(\tilde{\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (2.176)$$

Эта система уравнений заменой неизвестных функций

$$\Phi(\tilde{\lambda}) = \rho \cos \iota, \quad \Psi(\tilde{\lambda}) = \rho \sin \iota, \quad (2.177)$$

сводится к системе уравнений (штрих по-прежнему обозначает дифференцирование по переменной  $\tilde{\lambda}$ )

$$\begin{cases} -\tilde{\lambda} \rho^3 \iota' \cos \iota = 1, \\ \rho \rho' - \tilde{\lambda} (\rho')^2 - \tilde{\lambda} (\rho \iota')^2 = 0. \end{cases} \quad (2.178)$$

Выражая из первого уравнения системы (2.178) переменную  $\tilde{\lambda}$  и подставляя во второе уравнение, получим что зависимость от переменной  $\tilde{\lambda}$  будет устранена. Вводя замену  $W = \ln \rho$ , приходим к уравнению

$$\left(\frac{dW}{d\iota}\right)^2 + e^{3W} \frac{dW}{d\iota} \cos \iota + 1 = 0. \quad (2.179)$$

Это уравнение было изучено в работе [89] и ему соответствуют следующие значения постоянных  $l_1$  и  $l_2$ :  $l_1 = 0$  и  $l_2 = -1$ .

Совершая замены  $u = \sin \iota$  и  $w = -\frac{e^{-3W}}{3}$ , окончательно приходим к уравнению

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + \frac{dw}{du} + \frac{9w^2}{1-u^2} = 0. \quad (2.180)$$

**2.6.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_4 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (2.181)$$

и инвариантам

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (2.182)$$

Если разыскивать решение системы дифференциальных уравнений (2.65) в форме

$$f = F(v^1), \quad h = H(v^1), \quad (2.183)$$

то второе уравнение указанной системы будет представлять собой несовместное равенство. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы (2.65).

**2.7.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_1 - \varsigma_2 \pm \varsigma_3) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе (если заменить  $(\varsigma_3 \cdot \partial)$  растянутым аналогом  $6(\varsigma_3 \cdot \partial)$ )

$$\frac{dv^1}{\pm 6} = \frac{dv^2}{6v^2} = \frac{df}{2f} = \frac{dh}{2h}, \quad (2.184)$$

из которой при выборе положительного знака определяются инварианты

$$I_1 = v^1 - \ln |v^2|, \quad I_2 = \frac{f}{\sqrt[3]{v^2}}, \quad I_3 = \frac{h}{\sqrt[3]{v^2}}. \quad (2.185)$$

Вводя переменную  $\lambda = v^1 - \ln |v^2|$ , будем искать решение системы (2.65) в форме

$$f = \sqrt[3]{v^2} F(\lambda), \quad h = -\sqrt[3]{v^2} H(\lambda). \quad (2.186)$$

Подобная форма решения получается из **2.5** если поменять ролями переменные  $v^1$ ,  $v^2$ , а  $h$  заменить на  $-h$ . Пользуясь симметрией системы уравнений (2.65) относительного указанного преобразования, заключаем, что разыскиваемое решение есть преобразованное данным способом решение **2.5**.

**2.8.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \cdot \partial)I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (2.187)$$

и инвариантам вида

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (2.188)$$

Разыскивая решение системы (2.65) в форме

$$f = F(v^2), \quad h = H(v^2), \quad (2.189)$$

имеем, что второе уравнение этой системы представляет собой несовместное равенство. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы (2.65).

**2.9.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \mp \varsigma_4 \mp \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе уравнений

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{\mp 1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{\mp 1} \quad (2.190)$$

и базисным инвариантам (если ограничиться выбором положительного знака при  $(\varsigma_5 \cdot \partial)$ )

$$I_1 = v^1 \pm v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h - v^1. \quad (2.191)$$

Вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 \pm v^2$ , будем искать решение системы (2.65) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = v^1 + H(\lambda). \quad (2.192)$$

Первое уравнение системы (2.65) тогда приводится к виду

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)^2 + \frac{dH}{d\lambda} + \left(\frac{dH}{d\lambda}\right)^2 = 0, \quad (2.193)$$

а второе — к виду

$$\frac{dF}{d\lambda} F = \mp 1, \quad (2.194)$$

откуда находим

$$f = \sqrt{\mp 2v^1 - 2v^2 + C_5} = \sqrt{\mp 2\lambda + C_5}. \quad (2.195)$$

Подставляя  $f$  в первое уравнение, получим

$$h = v^1 + \frac{1}{2} \int \left[ -1 \pm \sqrt{1 - 4(\mp 2\lambda + C_5)^{-1}} \right] d\lambda. \quad (2.196)$$

Обозначая затем

$$\Omega = \pm 1 \quad (2.197)$$

и вводя переменную

$$t = \frac{2v^2 + 2\Omega v^1 - C_5}{4}, \quad (2.198)$$

получаем точное решение

$$\begin{cases} h = v^1 - \Omega t \pm (\sqrt{t^2 + t} + \ln(\pm(\frac{1}{2} + t + \sqrt{t^2 + t}))) + C_7, \\ f = 2\sqrt{-t}, \end{cases} \quad (2.199)$$

где  $C_5, C_7$  — произвольные вещественные постоянные. Выбор знаков здесь может быть произведен независимо от знака  $\Omega$  и независимо для каждого из двух вхождений  $\pm$ .

Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие решению (2.199), изображены на рис. 15 при условии, что  $\Omega = -1$  и в выражении для  $h$  выбраны отрицательные знаки.

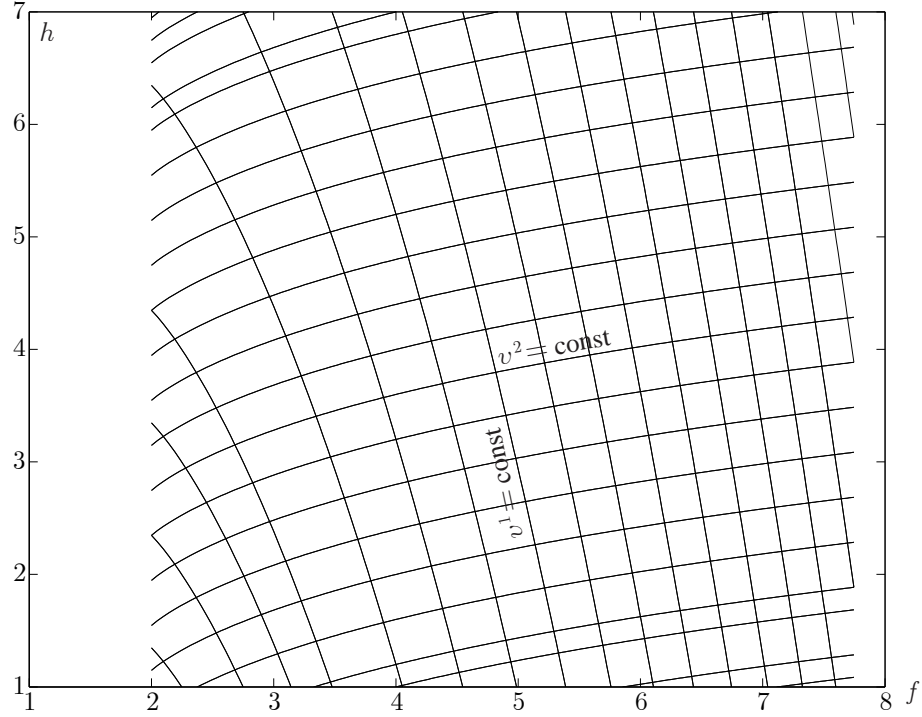


Рис. 15. Изостатические траектории в меридиональной плоскости, соответствующие одномерной подалгебре  $(\varsigma_3 \mp \varsigma_4 \mp \varsigma_5) \cdot \partial$ , при  $\Omega = -1$ ,  $C_5 = 0$ ,  $C_7 = 0$

**2.10.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_4 \pm \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{0} = \frac{dv^2}{1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{1}, \quad (2.200)$$

откуда находятся инварианты

$$I_1 = v^1, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h \mp v^2. \quad (2.201)$$

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2.65) в форме

$$f = F(v^1), \quad h = \pm v^2 + H(v^1). \quad (2.202)$$

Первое уравнение указанной системы тогда приводится к виду

$$\frac{dH}{dv^1} = 0, \quad (2.203)$$

или

$$H = \text{const.} \quad (2.204)$$

Подстановка во второе уравнение системы (2.65) дает несовместное равенство. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы (2.65).

**2.11.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \pm \varsigma_5) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{0} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{\pm 1} \quad (2.205)$$

и соответствующим инвариантам

$$I_1 = v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h \mp v^1. \quad (2.206)$$

Ищем решение системы (2.65) в форме

$$f = F(v^2), \quad h = \pm v^1 + H(v^2). \quad (2.207)$$

Аналогично случаю **2.10** система дифференциальных уравнений (2.65) не обладает решениями такой формы. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы (2.65).

**2.12.** Критерий инвариантности  $(\varsigma_3 \mp \varsigma_4) \cdot \partial I = 0$  приводит к характеристической системе

$$\frac{dv^1}{1} = \frac{dv^2}{\mp 1} = \frac{df}{0} = \frac{dh}{0} \quad (2.208)$$

и набору инвариантов

$$I_1 = v^1 \pm v^2, \quad I_2 = f, \quad I_3 = h. \quad (2.209)$$

Вводя независимую переменную  $\lambda = v^1 \pm v^2$ , будем искать решение системы дифференциальных уравнений (2.65) в форме

$$f = F(\lambda), \quad h = H(\lambda). \quad (2.210)$$

Прямая подстановка (2.210) во второе уравнение этой системы показывает, что оно удовлетворяться не может. Следовательно, данной подалгебре не соответствует ни одного инвариантного решения системы дифференциальных уравнений (2.65).

### **II.3. Группы симметрий и алгебры симметрий пространственных уравнений**

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (2.2) будет инвариантной.

Для решения поставленной задачи рассмотрим непрерывную однопараметрическую группу (группу Ли) преобразования зависимых и независи-



мых переменных.

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^1 &= \tilde{\omega}^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^1 + \varepsilon \Xi^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\
\tilde{\omega}^2 &= \tilde{\omega}^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^2 + \varepsilon \Xi^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\
\tilde{\omega}^3 &= \tilde{\omega}^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = \omega^3 + \varepsilon \Xi^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\
\tilde{f}_1 &= \tilde{f}_1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_1 + \varepsilon H^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\
\tilde{f}_2 &= \tilde{f}_2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_2 + \varepsilon H^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots, \\
\tilde{f}_3 &= \tilde{f}_3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3, \varepsilon) = f_3 + \varepsilon H^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3) + \dots.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\varepsilon$  — параметр группы преобразований.

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами

$$\begin{aligned}
\varsigma &= (\Xi^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3), \Xi^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3), \\
&\Xi^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3), H^1(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3), \\
&H^2(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3), H^3(\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3)).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Составим инфинитезимальный оператор группы (2.1)

$$\varsigma \cdot \partial = \Xi^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \Xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + H^1 \frac{\partial}{\partial f_1} + H^2 \frac{\partial}{\partial f_2} + H^3 \frac{\partial}{\partial f_3}, \tag{2.3}$$

где функции  $\Xi^1, \Xi^2, \Xi^3, H^1, H^2, H^3$  зависят от переменных  $\omega^1, \omega^2, \omega^3, f_1, f_2, f_3$ .

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле  $\varsigma_1$ . Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет

вид

$$\begin{aligned}
\zeta_1 \cdot \partial = & \Xi^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} + \Xi^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \Xi^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + H^1 \frac{\partial}{\partial f_1} + H^2 \frac{\partial}{\partial f_2} + H^3 \frac{\partial}{\partial f_3} + \\
& + H_1^1 \frac{\partial}{\partial p_1^1} + H_2^1 \frac{\partial}{\partial p_2^1} + H_3^1 \frac{\partial}{\partial p_3^1} + H_1^2 \frac{\partial}{\partial p_1^2} + H_2^2 \frac{\partial}{\partial p_2^2} + \\
& + H_3^2 \frac{\partial}{\partial p_3^2} + H_1^3 \frac{\partial}{\partial p_1^3} + H_2^3 \frac{\partial}{\partial p_2^3} + H_3^3 \frac{\partial}{\partial p_3^3},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где через  $p_j^i$  обозначены частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial \omega^j}$ , а  $H_j^l$  выражаются согласно формул первого продолжения [71, с. 58]

$$H_j^l = \frac{\partial H^l}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_s}{\partial \omega^j} \frac{\partial H^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial \omega^s} \left( \frac{\partial \Xi^s}{\partial \omega^j} + \frac{\partial f_r}{\partial \omega^j} \frac{\partial \Xi^s}{\partial f_r} \right) \quad (l, j = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (2.2) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия что уравнения выполняются, то должны получаться тождественно нулевые выражения. Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Применим инфинитезимальный оператор к правым частям системы (2.2):

$$(\zeta_1 \cdot \partial) E_1 = H_1^1 p_3^1 + H_3^1 p_1^1 + H_1^2 p_3^2 + H_3^2 p_1^2 + H_1^3 p_3^3 + H_3^3 p_1^3, \tag{2.6}$$

$$(\zeta_1 \cdot \partial) E_2 = H_2^1 p_3^1 + H_3^1 p_2^1 + H_2^2 p_3^2 + H_3^2 p_2^2 + H_2^3 p_3^3 + H_3^3 p_2^3, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
(\zeta_1 \cdot \partial) E_3 = & H_1^2 p_2^3 p_3^1 - H_1^3 p_2^2 p_3^1 + H_1^3 p_2^1 p_3^2 - H_1^1 p_2^3 p_3^2 + H_1^1 p_2^2 p_3^3 - H_1^2 p_2^1 p_3^3 + \\
& + H_2^3 p_1^2 p_3^1 - H_2^2 p_1^3 p_3^1 + H_2^1 p_1^3 p_3^2 - H_2^3 p_1^1 p_3^2 + H_2^2 p_1^1 p_3^3 - H_2^1 p_1^2 p_3^3 + \\
& + H_3^1 p_1^2 p_2^3 - H_3^1 p_1^3 p_2^2 + H_3^2 p_1^3 p_2^1 - H_3^2 p_1^1 p_2^3 + H_3^3 p_1^1 p_2^2 - H_3^3 p_1^2 p_2^1.
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы, относительно которой уравнения (2.2) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия что уравнения (2.2) выполняются (т.е.  $E_i = 0$ ), то должны получаться тождественно нулевые выражения (т.е. должны выполняться равенства  $(\zeta_1 \cdot \partial) E_i = 0$ ). Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим затем систему уравнений (2.2) (т.е.  $E_i = 0$ ) как систему линейных уравнений относительно частных производных по переменной  $\omega^3$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega^3}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3}$$

разрешая которую, получим следующую нормальную по переменной  $\omega^3$  форму Коши:

$$\begin{aligned}
p_3^1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \omega^3} = \frac{p_1^2 p_2^3 - p_1^3 p_2^2}{\Delta}, \\
p_3^2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \omega^3} = \frac{p_1^3 p_2^1 - p_1^1 p_2^3}{\Delta}, \\
p_3^3 &= \frac{\partial f_3}{\partial \omega^3} = \frac{p_1^1 p_2^2 - p_1^2 p_2^1}{\Delta},
\end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta = & (p_1^2 p_2^3)^2 + (p_1^3 p_2^2)^2 + (p_1^2 p_2^1)^2 + (p_1^3 p_2^1)^2 + (p_1^1 p_2^2)^2 + (p_1^1 p_2^3)^2 - \\
& - 2p_1^2 p_2^3 p_1^3 p_2^2 - 2p_1^2 p_2^1 p_1^1 p_2^3 - 2p_1^3 p_2^1 p_1^2 p_2^3.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.6), (2.7), (2.8) и приводим все выражения к общему знаменателю. Так как дроби равны нулю то нулю равны числители этих дробей. Учитывая, числители являются многочленами от производных

$$p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_2^1, p_2^2, p_2^3$$

и что производные являются свободными переменными для этих многочленов, получим что условия  $(\varsigma \cdot \partial)E_i = 0$  расщепляются на ряд уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов числителей являющимися степенными многочленами от этих производных.

Производя вычисление с помощью пакета Maple V получим, что все существенные уравнения есть

$$\begin{aligned}
3 \frac{\partial H^1}{\partial f_1} - \frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1} - \frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} - \frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3} &= 0, & \frac{\partial H^3}{\partial f_3} &= \frac{\partial H^1}{\partial f_1}, & \frac{\partial H^2}{\partial f_2} &= \frac{\partial H^1}{\partial f_1}, \\
\frac{\partial H^3}{\partial f_2} + \frac{\partial H^2}{\partial f_3} &= 0, & \frac{\partial H^3}{\partial f_1} + \frac{\partial H^1}{\partial f_3} &= 0, & \frac{\partial H^2}{\partial f_1} + \frac{\partial H^1}{\partial f_2} &= 0, \\
\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^3} &= \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^1}{\partial f^3} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^3} &= \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^2}{\partial f^3} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^1} &= \frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^2} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^1} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^2} = \frac{\partial \Xi^3}{\partial f^3} = 0, \\
\frac{\partial H^1}{\partial \omega^1} &= \frac{\partial H^1}{\partial \omega^2} = \frac{\partial H^1}{\partial \omega^3} = 0, \\
\frac{\partial H^2}{\partial \omega^1} &= \frac{\partial H^2}{\partial \omega^2} = \frac{\partial H^2}{\partial \omega^3} = 0, \\
\frac{\partial H^3}{\partial \omega^1} &= \frac{\partial H^3}{\partial \omega^2} = \frac{\partial H^3}{\partial \omega^3} = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Из последних шести строк уравнений системы (2.11) касательное векторное поле имеет компоненты зависимость которых от переменных выражается так:

$$\begin{aligned} \Xi^1(\omega^1, \omega^2), \quad \Xi^2(\omega^1, \omega^2), \quad \Xi^3(\omega^3), \\ H^1(f_1, f_2, f_3), \quad H^2(f_1, f_2, f_3), \quad H^3(f_1, f_2, f_3). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Учитывая это, получим, что для координат касательного векторного поля  $\varsigma$  остаются только шесть не тождественно удовлетворяющихся уравнения, которые расположены в первых двух строках системы (2.11)

Но  $\Xi^3$  зависит только от переменной  $\omega^3$ , а  $\Xi^1, \Xi^2$  зависят только от переменных  $\omega^1, \omega^2$  причем  $H^1$  зависит только от функций  $f_i$ . Но это может выполняться только в случае если соответствующие слагаемые первого уравнения системы (2.11) равны константам (при этом учитываются остальные два уравнения верхней строки системы (2.11))

$$\frac{\partial H^3}{\partial f_3} = \frac{\partial H^2}{\partial f_2} = \frac{\partial H^1}{\partial f_1} = C_1, \quad \frac{\partial \Xi^3}{\partial \omega^3} = C'_2, \quad (2.13)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \Xi^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} = 3C_1 - C'_2. \quad (2.14)$$

Итак, изостатические координаты  $\omega^i$  отделяются от пространственных координат  $f_i$ . Из первого равенства (2.13) получим

$$H^1 = C_1 f_1 + F_1(f_2, f_3), \quad H^2 = C_1 f_2 + F_2(f_1, f_3), \quad H^3 = C_1 f_3 + F_3(f_1, f_2) \quad (2.15)$$

и подставляя (2.15) в три уравнения второй строки системы (2.11) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_3(f_1, f_2)}{\partial f_2} &= -\frac{\partial F_2(f_1, f_3)}{\partial f_3} = G_1(f_1), \\ \frac{\partial F_3(f_1, f_2)}{\partial f_1} &= -\frac{\partial F_1(f_2, f_3)}{\partial f_3} = G_2(f_2), \\ \frac{\partial F_1(f_2, f_3)}{\partial f_2} &= -\frac{\partial F_2(f_1, f_3)}{\partial f_1} = G_3(f_3), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где вводятся функции  $G_i$  зависящие только от соответствующего  $f_i$ , так как для каждого  $G_i$  обе функции  $F_j$  входящие в соответствующее равенство зависят обе одновременно только от соответствующего  $f_i$ . Из уравнений (2.16) непосредственно видно что если в функции  $F_j$  фиксировать одну из переменных  $f_i$  то зависимость от другой переменной будет линейной. Например для  $F_1$  из второго уравнения системы (2.16) получим

$$F_1(f_2, f_3) = G_2(f_2)f_3 + G_4(f_2), \quad (2.17)$$

подставляя в третье уравнение системы (2.16) получим

$$\frac{\partial F_1(f_2, f_3)}{\partial f_2} = \frac{\partial (G_2(f_2)f_3 + G_4(f_2))}{\partial f_2} = G'_2(f_2)f_3 + G'_4(f_2) = G_3(f_3), \quad (2.18)$$

Тогда

$$G'_2(f_2) = C, \quad G'_4(f_2) = A_2, \quad (2.19)$$

и

$$G_2(f_2) = Cf_2 + A_3, \quad G_4(f_2) = A_2f_2 + B_1. \quad (2.20)$$

Получим выражения для  $F_i$

$$\begin{aligned} F_1(f_2, f_3) &= Cf_2f_3 + A_3f_2 + A'_2f_3 + B_1, \\ F_2(f_1, f_3) &= C'f_1f_3 + A'_3f_1 + A_1f_3 + B_2, \\ F_3(f_1, f_2) &= C''f_1f_2 + A_2f_1 + A'_1f_2 + B_3. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в (2.16) получим

$$C = -C' = C'' = -C = 0, \quad A_1 = -A'_1, \quad A_2 = -A'_2, \quad A_3 = -A'_3, \quad (2.22)$$

Подставим полученные выражения для  $F_i$  в  $H^j$

$$\begin{aligned} H^1 &= C_1f_1 + A_3f_2 - A_2f_3 + B_1, \\ H^2 &= -A_3f_1 + C_1f_2 + A_1f_3 + B_2, \\ H^3 &= A_2f_1 - A_1f_2 + C_1f_3 + B_3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Кроме того из последнего уравнения (2.13) найдем

$$\Xi^3 = C'_2 \omega^3 + C_3. \quad (2.24)$$

Выражая  $\Xi^1$  через новую функцию  $K$

$$\Xi^1 = (3C_1 - C'_2) \omega^1 + K(\omega^1, \omega^2), \quad (2.25)$$

и подставим в уравнение (2.14) получим

$$\frac{\partial K}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Xi^2}{\partial \omega^2} = 0. \quad (2.26)$$

То есть функции  $\Xi^1$ ,  $K$  образуют плоское потенциальное поле, соответственно их можно выразить через новую потенциальную функцию  $L$

$$K = \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2}, \quad (2.27)$$

$$\Xi^2 = -\frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1}, \quad (2.28)$$

Полагая

$$C'_2 = 3C_1 - C_2 \quad (2.29)$$

получим, что инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы дифференциальных уравнений (2.2) может иметь только следующую

форму:

$$\begin{aligned}
(\varsigma \cdot \partial) &= \left( C_2 \omega^1 + \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1} \frac{\partial}{\partial \omega^2} + \\
&+ ((3C_1 - C_2) \omega^3 + C_3) \frac{\partial}{\partial \omega^3} + (C_1 f_1 + A_3 f_2 - A_2 f_3 + B_1) \frac{\partial}{\partial f_1} + \\
&+ (-A_3 f_1 + C_1 f_2 + A_1 f_3 + B_2) \frac{\partial}{\partial f_2} + (A_2 f_1 - A_1 f_2 + C_1 f_3 + B_3) \frac{\partial}{\partial f_3} = \\
&= C_1 (3\omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial f_3}) + C_2 (\omega^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3}) + \\
&+ C_3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + B_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial f_3} + A_1 (f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} - f_2 \frac{\partial}{\partial f_3}) + \\
&+ A_2 (f_1 \frac{\partial}{\partial f_3} - f_3 \frac{\partial}{\partial f_1}) + A_3 (f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial}{\partial f_2}) + \\
&+ \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\partial L(\omega^1, \omega^2)}{\partial \omega^1} \frac{\partial}{\partial \omega^2}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (2.2) зависит от девяти произвольных постоянных и одной произвольной функции  $L = L(\omega^1, \omega^2)$ .

Структура инфинитезимального оператора (2.30) конечномерной подгруппы, полученной из полной группы непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (2.2) заменой  $L(\omega^1, \omega^2) = 0$ , симметрична по переменным  $f_i$ , но по переменным  $\omega^j$  не симметрична. Более симметричную конечномерную подгруппу полной группы непрерывных симметрий получим заменой  $L(\omega^1, \omega^2) = C_5 \omega^2 - C_6 \omega^1 + C_7 \omega^1 \omega^2$ .

Базис пространства инфинитезимальных операторов получившейся подгруппы полной группы непрерывных симметрий будет иметь вид:



$$\begin{aligned}
(\varsigma_1 \cdot \partial) &= 3\omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} + f_1 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial f_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial f_3}, \\
(\varsigma_2 \cdot \partial) &= \omega^3 \frac{\partial}{\partial \omega^3} - \frac{\omega^1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial \omega^2}, \\
(\varsigma_3 \cdot \partial) &= \frac{\partial}{\partial \omega^3}, \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_1}, \quad (\varsigma_5 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_2}, \quad (\varsigma_6 \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial f_3}, \\
(\varsigma_7 \cdot \partial) &= f_3 \frac{\partial}{\partial f_2} - f_2 \frac{\partial}{\partial f_3}, \quad (\varsigma_8 \cdot \partial) = f_1 \frac{\partial}{\partial f_3} - f_3 \frac{\partial}{\partial f_1}, \\
(\varsigma_9 \cdot \partial) &= f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} - f_1 \frac{\partial}{\partial f_2}, \quad (\varsigma_{10} \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial \omega^1}, \quad (\varsigma_{11} \cdot \partial) = \frac{\partial}{\partial \omega^2}, \\
(\varsigma_{12} \cdot \partial) &= \omega^1 \frac{\partial}{\partial \omega^1} - \omega^2 \frac{\partial}{\partial \omega^2}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

В этом списке инфинитезимальные операторы  $(\varsigma_4 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_5 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_6 \cdot \partial)$  соответствуют группам переносов вдоль осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , инфинитезимальные операторы  $(\varsigma_7 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_8 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_9 \cdot \partial)$  соответствуют группам поворотов вокруг осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , инфинитезимальные операторы  $(\varsigma_3 \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_{10} \cdot \partial)$ ,  $(\varsigma_{11} \cdot \partial)$  соответствуют группам переносов в изостатических координатах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ , инфинитезимальный оператор  $(\varsigma_{12} \cdot \partial)$  соответствует группе поворотов вокруг центра координат в пространстве  $\omega_1 \omega_2$ , инфинитезимальный оператор  $(\varsigma_1 \cdot \partial)$  соответствует группе растяжений по осям  $\omega_3$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , инфинитезимальный оператор  $(\varsigma_2 \cdot \partial)$  соответствует группе растяжений по осям  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ .

Можно показать, что  $(\varsigma_i \cdot \partial)$  линейно независимы.

Оптимальная система подалгебр алгебры симметрий системы дифференциальных уравнений (2.2) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_3(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
&(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
&(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
&(\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_7 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
&(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) + D(\varsigma_{12} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{12} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) + \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) - \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_1 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + D_1((\varsigma_2 \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial)) + D_2(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) - \frac{1}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_1 \cdot \partial) - 3(\varsigma_2 \cdot \partial) \pm (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial) + \frac{3}{2}(\varsigma_{12} \cdot \partial) + D(\varsigma_7 \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) + D((\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial)), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_{10} \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{10} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{10} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial). \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_7 \cdot \partial) \pm (\varsigma_{11} \cdot \partial), \quad (\varsigma_{11} \cdot \partial), \\
& (\varsigma_3 \cdot \partial), \quad (\varsigma_4 \cdot \partial).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

В этом списке знаки не согласованы и могут быть выбраны независимо.

В каждом элементе списка один из базисных операторов  $(\varsigma_j \cdot \partial)$  может быть замещен своим коллинеарным аналогом. При построении списка не учтены дискретные симметрии системы дифференциальных уравнений (2.2). В списке присутствуют один инфинитезимальный оператор зависящий от трех произвольных постоянных, 9 инфинитезимальных операторов зависящих от двух произвольных постоянных, 41 инфинитезимальных операторов зависящих от одной произвольной постоянной, 95 инфинитезимальных операторов не зависящих от постоянных.

Оптимальная система (2.32) используется для редукции системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.2) к системам, содержащим лишь две независимых переменных, которые, в свою очередь, могут быть подвергнуты групповому анализу также с целью их дальнейшей редукции к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

# Глава III. Некоторые осесимметричные и пространственные задачи статического равновесия

Теория, развитая в **главе I**, позволяет изучить некоторые стандартные краевые задачи, из решения которых можно формировать распределение напряжений для различных физических задач пространственного деформирования идеальнопластических сред, в частности, для задач со свободной от напряжений поверхностью. Разработан численный метод решения осесимметричных задач теории идеальнопластического течения, используя счет от поверхностей свободных от напряжений вдоль изостатических траекторий. Определены поле изостат и предельная растягивающая сила и найдено ее численное значение при аппроксимации контура свободной границы дугой эллипса, удовлетворительно согласующееся с соответствующими оценками, данными Бриджменом.

## III.1. Формулировка задачи в условиях осевой симметрии

Как уже отмечалось ранее, осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа: 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести  $k$ . Пер-

вый случай исследуется элементарными средствами. Второй случай — состояние ”полной пластичности” Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному напряжению второй номер и обозначить через  $\sigma_3$  наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние ”полной пластичности”.

В случае осевой симметрии каноническое преобразование координат записывается в виде ( $\omega^2$  — угловая координата)

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3) \cos \omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3) \sin \omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3). \quad (3.1)$$

Здесь  $f$  — горизонтальная координата, а  $h$  — вертикальная координата в меридиональной плоскости. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам  $\omega^1, \omega^3$ , есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

Отображающие функции  $f, h$  должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0, \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} - \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right) f = \pm 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Представим систему (3.2) в нормальной форме Коши относительно производных по переменной  $\omega^1$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \omega^1} = \pm f^{-1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \frac{\partial h}{\partial \omega^1} = \mp f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right]^{-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Для однозначного определения функций  $f, h$  кроме системы уравнений (3.3) необходимы еще начальные данные. С точки зрения механики, мы можем сформулировать краевые условия на свободной границе, но с математической точки зрения, как мы увидим далее, они являются начальными данными или данными Коши для системы (3.3). Тот факт, что систему уравнений можно представить в нормальной форме Коши относительно производных по переменной  $\omega^1$ , позволяет сделать заключение, что траектория  $\omega^1 = \text{const}$  при условии

$$\left( \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right) \Big|_{\omega^1 = \text{const}} \neq 0$$

не является характеристикой, т.е. задача Коши для системы (3.3) с начальными данными на линии  $\omega^1 = \text{const}$  сформулирована корректно. Указанное условие заведомо должно выполняться, поскольку каноническая замена переменных имеет отличный от нуля якобиан:

$$\frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(\omega_1, \omega_3)} \neq 0.$$

Свободная граница является траекторией главного напряжения  $\omega^1 = \text{const}$  и на ней  $\sigma_1 = 0$ , следовательно, в силу условия на ребре призмы Треска  $\sigma_3 = \pm 2k$  (в дальнейшем ограничимся выбором положительного знака).

Так как уравнения (3.3) инвариантны относительно преобразований сдвига, то всегда можно принять значение константы в уравнении свободной от напряжений границы  $\omega^1 = \text{const}$  равным нулю.

Проинтегрируем соотношения (1.44), в результате находим

$$\sigma_3/2k - \ln \sqrt{g_{33}} = C, \tag{3.4}$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Подставляя выражения для компоненты  $g_{33}$  метрического тензора, получаем условие на свободной границе в следующем виде:

$$\left( \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right) \Big|_{\omega^1=0} = e^{2(1-C)}. \quad (3.5)$$

Это условие гарантирует, что линия  $\omega^1 = 0$  не является характеристикой системы уравнений (3.2).

Заметим, что независимо от значения постоянной  $C$  краевое условие  $\sigma_3 = 2k$  на свободной границе удовлетворяется. Поэтому в дальнейшем величину  $C$  можно выбрать, исходя из соображений простоты.

Произведем далее замену независимых переменных  $\tilde{\omega}^1 = e^{C-1}\omega^1$ ,  $\tilde{\omega}^3 = e^{1-C}\omega^3$ . Заметим, что преобразование изостатических координат  $\tilde{\omega}^1 = t\omega^1$ ,  $\tilde{\omega}^3 = t^{-1}\omega^3$  не изменяет формы уравнений (3.2) и определяет однопараметрическую группу симметрий этой системы. Указанное преобразование не изменяет также форму изостатических траекторий. Принцип простоты  $t = t^{-1} = 1$  сразу же указывает на то, что необходимо положить  $C = 1$ . Впрочем конкретное значение постоянной  $C$  в дальнейшем нигде не требуется. Тогда система уравнений (3.3) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^1} = \pm f^{-1} \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^1} = \mp f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.6)$$

а начальные данные —

$$\left( \left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 \right) \Big|_{\tilde{\omega}^1=0} = 1. \quad (3.7)$$

Таким образом, удастся устранить неопределенную пока постоянную  $C$  как из уравнений, так и из начальных условий.

Последнее соотношение дает нам право сделать вывод, что на свободной от напряжений границе (т.е. при  $\tilde{\omega}^1 = 0$ ) координата  $\tilde{\omega}^3$  есть натуральный параметр — переменная длина дуги:

$$\tilde{\omega}^3|_{\tilde{\omega}^1=0} = s. \quad (3.8)$$

Начальные данные для системы (3.6) поэтому примут форму

$$f|_{\tilde{\omega}^1=0} = \lambda(s), \quad h|_{\tilde{\omega}^1=0} = \mu(s), \quad (3.9)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  удовлетворяют условию

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = 1$$

и являются функциями, реализующими натуральную параметризацию свободной от напряжений границы.

Таким образом, исследованию подлежит задача Коши (3.6), (3.9). Вернемся к рассмотрению системы (3.6). Заметим, что при  $f \rightarrow 0$  оба уравнения системы (3.6) являются сингулярно возмущенными, т.к. при производных по переменной  $\tilde{\omega}^1$  имеется множитель  $f$ , который стремится к нулю при приближении к оси симметрии. С целью устранения сингулярной возмущенности уравнений системы совершим замену  $f^2 = 2u$ ,  $h = v$ . Подобная замена продиктована тем обстоятельством, что плоское преобразование  $x_1^2 = 2u(\omega^1, \omega^3)$ ,  $x_3 = v(\omega^1, \omega^3)$ , порожденное трехмерным каноническим преобразованием (3.1), также является каноническим [89]. В



результате указанной замены система (3.6) приобретает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^1} = \pm 2u \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 + 2u \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^1} = \mp \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 + 2u \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.10)$$

а данные Коши —

$$u|_{\tilde{\omega}^1=0, \tilde{\omega}^3=s} = \lambda^2(s)/2, \quad v|_{\tilde{\omega}^1=0, \tilde{\omega}^3=s} = \mu(s). \quad (3.11)$$

## III.2. Классификация, характеристики и условие корректности постановки задачи

Прежде чем приступить к конструированию численной схемы решения сформулированной задачи Коши, предварительно необходимо исследовать саму систему уравнений в частных производных (3.2). Рассматриваемая система уравнений сильно нелинейна. Однако, даже не производя никакого предварительного ее анализа, нам следует ожидать гиперболичность и в классификационном плане, и в плане поведения ее решений. Поэтому можно вести речь о характеристических линиях системы уравнений в частных производных (3.2). Ниже мы дадим обоснование этих выводов.

Известно, что формальные вычисления, в случае уравнений с частными производными, могут привести к ложным результатам и сходиться при нормальном поведении приближений к функции, не имеющей ничего общего с решением. Особое внимание следует уделить выбору величины шагов (точнее их отношения) по каждой из двух координат. Правильный выбор может привести к упрощению конечно-разностной схемы. Более того, как известно (см., например, [56], с. 219-220), неправильный выбор отношения

шагов может привести к ошибочным результатам.

Для определения отношения шагов разностной схемы необходимо найти наклон характеристических линий и "область распространения" решения, определяемую двумя характеристиками, выходящими из концевых точек дуги, на которой заданы начальные условия.

Существует несколько подходов к определению характеристических линий систем квазилинейных уравнений в частных производных. То обстоятельство, что здесь мы ведем речь о системах квазилинейных уравнений в частных производных, не должно вводить в заблуждение. Задача Коши для сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (в том числе и для системы (3.2)) всегда может быть сведена к эквивалентной задаче для системы квазилинейных уравнений первого порядка. Система квазилинейных уравнений первого порядка имеет более широкое множество решений, чем исходная сильно нелинейная система, однако, начальные данные будут так ограничивать ее решения, что решения обеих начальных задач будут совпадать. Подробный анализ этого вопроса имеется в монографии [57], с. 54-57. Ниже мы изложим иной подход к нахождению характеристик нелинейной системы уравнений в частных производных (3.2), не заменяя ее квазилинейной, а опираясь на принцип простоты нормальной формы Коши. Понятие характеристики, прежде всего, связано с приведением квазилинейной системы уравнений в частных производных к нормальной форме Коши и проблемой разрешимости задачи Коши для системы уравнений в частных производных. В силу теоремы Ковалевской, при дополнительных условиях об аналитичности правых частей системы и аналитичности начальных условий, заданных на аналитической начальной кривой, не являющейся характеристической, существу-

ет, и притом единственное, аналитическое решение задачи Коши. Если при выполнении всех остальных сформулированных выше условий начальная кривая окажется характеристикой, то решение задачи Коши или вообще не будет существовать, или оно не будет единственным (см., например [77], с. 30-41). Классифицирующий характеристику квазилинейной системы уравнений в частных производных признак есть невозможность, после замены независимых переменных, такой что одна из координатных линий совпадает с характеристикой, привести систему уравнений к нормальной форме Коши относительно переменной, сохраняющей постоянное значение вдоль указанной координатной линии.

Найдем характеристики системы уравнений в частных производных (3.2). Для этого введем новые независимые переменные  $\gamma^1, \gamma^3$ , связанные с переменными  $\omega^1, \omega^3$  наиболее общими соотношениями

$$\gamma^1 = \gamma^1(\omega^1, \omega^3), \quad \gamma^3 = \gamma^3(\omega^1, \omega^3). \quad (3.12)$$

Произведя замену независимых переменных в системе уравнений (3.2), приходим к системе, имеющей вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} + \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \\ + \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} + \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right) \left( \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} \right) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} - \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} = \frac{1}{f \Delta}, \end{array} \right. \quad (3.13)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} - \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1}$$

— отличный от нуля якобиан преобразования (3.12).

Чтобы привести полученную систему уравнений к нормальной форме Коши по переменной  $\gamma^1$ , попытаемся разрешить ее относительно частных производных функций  $f$  и  $h$  по переменной  $\gamma^1$ . По меньшей мере одна из частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial \gamma^3}$$

отлична от нуля, иначе замена переменных  $(f, h) \rightarrow (\gamma^1, \gamma^3)$  не будет, даже локально, взаимнооднозначной. Примем, что частная производная  $\partial h / \partial \gamma^3$  не равна нулю. После ряда преобразований находим

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \gamma^1} = \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^{-1} \left[ (f\Delta)^{-1} + (2A)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} (-B \pm \sqrt{D}) \right], \\ \frac{\partial h}{\partial \gamma^1} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}, \end{cases} \quad (3.14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A &= f\Delta \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right), \\ B &= f\Delta \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \left[ \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \left( \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^3}{\partial \omega^3} \right) \right] + 2 \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}, \\ D &= f^2 \Delta^4 \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right)^2 - 4 \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left( \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.14) заведомо является нормальной относительно переменной  $\gamma^1$ , если выполняются условия  $D \geq 0$  и  $A \neq 0$ .

Исследуем сначала возможность выполнения условия  $A = 0$ , т.е.

$$\Delta f \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right) \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = 0. \quad (3.15)$$

Заметим, что в этом уравнении заведомо  $\Delta \neq 0$ , поскольку якобиан преобразования (3.12) отличен от нуля. Выражение в круглых скобках также не

может равняться нулю, так как якобиан преобразования

$$f = f(\gamma^1, \gamma^3), \quad h = h(\gamma^1, \gamma^3)$$

отличен от нуля. Далее нетрудно видеть, что обе производные

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1}, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3}$$

не могут быть одновременно равны нулю, ибо в этом случае  $\Delta = 0$ , а это невозможно. Остается случай, когда равна нулю одна из упомянутых частных производных, т.е. когда, например,

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \neq 0, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = 0.$$

В этом случае линия  $\gamma^1 = \text{const}$  совпадает с изостатой  $\omega^1 = \text{const}$ , т.к.  $\gamma^1 = \gamma^1(\omega^1)$ , а относительно изостатических координат рассматриваемая система уравнений в частных производных, как мы видели, является нормальной.

Таким образом, условие  $A = 0$  гарантирует возможность приведения системы уравнений в частных производных (3.13) к нормальной форме Коши по переменной  $\gamma^1$ .

Исследуем, наконец, условие, вытекающее из  $D \geq 0$ . Учитывая полученное выше выражение для дискриминанта,<sup>5</sup> имеем

$$\Delta^4 f^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right)^2 \geq 4 \left( \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} \right)^2 \left( \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} \right)^2. \quad (3.16)$$

---

<sup>5</sup>Напомним, что в наших рассуждениях

$$\frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \neq 0.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^1} = \Delta \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3}, \quad \frac{\partial \gamma^1}{\partial \omega^3} = -\Delta \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3},$$

условие (3.16) может быть также представлено в форме

$$f^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \gamma^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \gamma^3} \right)^2 \right)^2 \geq 4 \left( \frac{\partial \omega^3}{\partial \gamma^3} \right)^2 \left( \frac{\partial \omega^1}{\partial \gamma^3} \right)^2. \quad (3.17)$$

Полученное условие может трактоваться как условие вдоль линии  $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ , поскольку переменная  $\gamma^3$  есть параметр вдоль этой линии. Ясно, что вдоль линии  $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  может быть выбран любой другой параметр, скажем, натуральный. Формулировка условия (3.17) при этом сохранится

$$f^2 \left( \left( \frac{df}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dh}{dl} \right)^2 \right)^2 \geq 4 \left( \frac{d\omega^3}{dl} \right)^2 \left( \frac{d\omega^1}{dl} \right)^2. \quad (3.18)$$

Таким образом, вообще, если вдоль линии  $\gamma(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  будет выполняться неравенство

$$f^2 ((df)^2 + (dh)^2)^2 < 4 (d\omega^1)^2 (d\omega^3)^2, \quad (3.19)$$

то система уравнений (3.2) не будет нормальной по переменной  $\gamma$ . Покажем, что условие (3.19) на самом деле выполняться не может, какую бы кривую мы ни выбрали.

Предположим, что вдоль некоторой кривой  $\gamma(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$ , расположенной на плоскости  $\omega^1 \omega^3$ , выполняется условие (3.19). Следовательно вдоль этой кривой имеем

$$f \left( \left( \frac{df}{dl} \right)^2 + \left( \frac{dh}{dl} \right)^2 \right) < \pm 2 \frac{d\omega^1}{dl} \frac{d\omega^3}{dl}, \quad (3.20)$$

где  $l$  — натуральный параметр, т.е.

$$\left( \frac{d\omega^1}{dl} \right)^2 + \left( \frac{d\omega^3}{dl} \right)^2 = 1.$$

Ясно, что можно ввести угол  $\psi$  согласно

$$\frac{d\omega^1}{dl} = \cos \psi, \quad \frac{d\omega^3}{dl} = \sin \psi.$$

Условие (3.20) тогда можно представить в следующем виде:

$$f \left[ \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \right)^2 \right) \cos^2 \psi + \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right) \sin^2 \psi + \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right) \sin 2\psi \right] < \pm \sin 2\psi$$

или, учитывая, что в силу системы (3.2)

$$\frac{\partial f}{\partial \omega^1} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \frac{\partial h}{\partial \omega^3} = 0$$

и

$$f \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{33}} = 1,$$

где  $g_{11}$ ,  $g_{33}$  есть компоненты метрического тензора, также — в виде

$$(\sqrt{g_{11}} \cos \psi \mp \sqrt{g_{33}} \sin \psi)^2 < 0, \quad (3.21)$$

а это есть явное противоречие.

Итак, условие (3.19) ни при каких обстоятельствах не выполняется, т.е. система уравнений (3.2) обладает следующим замечательным свойством: после какой-бы то ни было замены независимых переменных она преобразуется в систему, нормальную по каждой из новых независимых переменных.

Продолжая рассуждения, попытаемся максимально упростить правые части системы уравнений (3.14), уже имеющую нормальную форму Коши по переменной  $\gamma^1$ . Ясно, что достичь этого можно, подобрав новые независимые переменные  $\gamma^1$ ,  $\gamma^3$  так, чтобы дискриминант  $D$  оказался равным нулю.<sup>6</sup> Ясно, что вдоль координатных линий  $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  и

---

<sup>6</sup>В рассматриваемом случае это и есть точная формулировка того, что мы подразумеваем, когда говорим о принципе простоты нормальной формы системы дифференциальных уравнений в частных производных.

$\gamma^3(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  должно выполняться уравнение (ср. с (3.21))

$$\sqrt{g_{11}} \cos \psi \mp \sqrt{g_{33}} \sin \psi = 0,$$

где  $\psi$  есть угол наклона касательной к оси  $\omega^1$ , откуда находим

$$\text{tg} \psi = \pm \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{33}}},$$

а также

$$\text{tg}^2 \psi = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2}$$

или

$$\left(\frac{d\omega^3}{d\omega^1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2},$$

или также

$$\frac{d\omega^3}{\sqrt{g_{11}}} = \pm \frac{d\omega^1}{\sqrt{g_{33}}}.$$

Окончательно имеем дифференциальные уравнения координатных линий  $\gamma^1(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  и  $\gamma^3(\omega^1, \omega^3) = \text{const}$  в форме

$$\frac{d\omega^3}{d\omega^1} = \pm \frac{1}{f g_{33}}. \quad (3.22)$$

В подобранных таким образом координатах  $\gamma^1, \gamma^3$  система дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) будет иметь нормальную по каждой из координат форму, отличающуюся от остальных возможных нормальных форм тем, что мы называем максимальной простотой.

Полученные на основании принципа простоты дифференциальные уравнения (3.22) являются на самом деле, как будет доказано ниже, дифференциальными уравнениями характеристических линий. Наличие двух се-



мейств характеристик является признаком гиперболичности сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2).

Составим характеристический определитель и характеристическое уравнение (см., например, [75]) для системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2). Имеем уравнение ( $\nu_1, \nu_3$  — компоненты единичного вектора нормали к характеристической кривой на плоскости  $\omega^1\omega^3$ )

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \nu_1 + \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \nu_3 & \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \nu_1 + \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \nu_3 \\ \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \nu_1 - \frac{\partial h}{\partial \omega^1} \nu_3 & -\frac{\partial f}{\partial \omega^3} \nu_1 + \frac{\partial f}{\partial \omega^1} \nu_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\nu_1^2 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega^3}\right)^2} \nu_3^2, \quad (3.23)$$

откуда сразу же следует  $\omega^1$ - и  $\omega^3$ -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) на любом ее решении

$$f = f(\omega^1, \omega^3), \quad h = h(\omega^1, \omega^3).$$

Нетрудно видеть, что характеристическое условие (3.23) в точности совпадает с уравнением (3.22), полученным выше, опираясь на принцип простоты нормальной формы Коши.

Заключая, заметим, что  $\omega^1$ -гиперболичность системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) означает, что задача Коши на линии  $\omega^1 = \text{const}$  поставлена корректно.

### III.3. Общая численная схема решения осесимметричной задачи со свободной границей

Приведем основные уравнения к безразмерному виду. Для этого введем параметр  $l$  — характерный линейный размер тела и обозначения  $\bar{u} = u/l^2$ ,  $\bar{v} = v/l$ ,  $\bar{\omega}^1 = \tilde{\omega}^1/l^2$ ,  $\bar{\omega}^3 = \tilde{\omega}^3/l$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda/l$ ,  $\bar{\mu} = \mu/l$ . Система уравнений (3.10) тогда приобретает безразмерную форму

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^1} = \pm 2\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 + 2\bar{u} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\omega}^1} = \mp \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^3} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 + 2\bar{u} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.24)$$

а начальные данные —

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=0} = \bar{\lambda}^2(\bar{\omega}^3), \quad \bar{v}|_{\bar{\omega}^1=0} = \bar{\mu}(\bar{\omega}^3). \quad (3.25)$$

Решим полученную задачу Коши (3.24), (3.25), численно, методом конечных разностей (см., например, [56]). Для этого необходимо в области непрерывного изменения аргументов  $(\bar{\omega}^3, \bar{\omega}^1)$  ввести сетку, а дифференциальный оператор заменить его разностным аналогом.

Условие (3.22) позволяет сформулировать ограничение на выбор величины шагов при конструировании разностной схемы. В результате получим равномерную сетку с узлами  $(\bar{\omega}_i^3, \bar{\omega}_j^1)$ . Вместо функций  $\bar{u}(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^3)$ ,  $\bar{v}(\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^3)$  непрерывных аргументов будем рассматривать сеточные функции  $\bar{u}_i^j(\bar{\omega}_j^1, \bar{\omega}_i^3)$ ,  $\bar{v}_i^j(\bar{\omega}_j^1, \bar{\omega}_i^3)$ . Тогда система уравнений в частных производных

(3.24) аппроксимируется разностной схемой

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_i^{j+1} - \bar{u}_i^j}{\bar{\omega}_{j+1}^1 - \bar{\omega}_j^1} = \pm \frac{2\bar{u}_i^j(\bar{v}_{i+1}^j - \bar{v}_i^j)(\bar{\omega}_{i+1}^3 - \bar{\omega}_i^3)}{(\bar{u}_{i+1}^j - \bar{u}_i^j)^2 + 2\bar{u}_i^j(\bar{v}_{i+1}^j - \bar{v}_i^j)^2}, \\ \frac{\bar{v}_i^{j+1} - \bar{v}_i^j}{\bar{\omega}_{j+1}^1 - \bar{\omega}_j^1} = \mp \frac{(\bar{u}_{i+1}^j - \bar{u}_i^j)(\bar{\omega}_{i+1}^3 - \bar{\omega}_i^3)}{(\bar{u}_{i+1}^j - \bar{u}_i^j)^2 + 2\bar{u}_i^j(\bar{v}_{i+1}^j - \bar{v}_i^j)^2}, \end{cases} \quad (3.26)$$

с начальными данными

$$\bar{u}_i^0 = \bar{\lambda}_i^2, \quad \bar{v}_i^0 = \bar{\mu}_i(\bar{\omega}_i^3), \quad (3.27)$$

где  $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(\bar{\omega}_i^3)$ ,  $\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_i(\bar{\omega}_i^3)$ .

Разностная задача (3.26), (3.27) является так называемой явной схемой: значения решения на более высоком слое  $\bar{\omega}_{j+1}^1$  определяются через значения на предыдущем слое  $\bar{\omega}_j^1$  по явным формулам. Здесь для аппроксимации используется разностное отношение "вперед" имеющее первый порядок точности.

Используя условие (3.22), которое позволяет сформулировать ограничение на выбор величины шагов при конструировании разностной схемы, получаем наиболее простой вид расчетной конечно-разностной схемы

$$\begin{cases} \bar{u}_i^{j+1} - \bar{u}_i^j = \pm \bar{v}_{i+1}^j - \bar{v}_i^j, \\ \bar{v}_i^{j+1} - \bar{v}_i^j = \mp \bar{u}_{i+1}^j - \bar{u}_i^j. \end{cases} \quad (3.28)$$

### III.4. Напряженное состояние в шейке цилиндрического образца в условиях одноосного растяжения

Работоспособность метода продемонстрирована на задаче о локализации пластических деформаций в пределах шейки одноосно растягиваемого образца.

Поскольку кривая, определяющая форму шейки, есть свободная граница, то она является траекторией главного напряжения  $\bar{\omega}^1 = 0$ . Решение в минимальном сечении шейки  $\bar{\omega}^3 = 0$  определяется исключительно начальными данными на части свободного контура  $-\bar{\omega}_*^3 < \bar{\omega}^3 < \bar{\omega}_*^3$ , где значение  $\bar{\omega}_*^3$  достаточно велико и дальнейшее увеличение  $\bar{\omega}_*^3$  не приведет к изменению решения в области минимального сечения шейки.

Согласно [27], максимальные напряжения возникают в центре шейки, что полностью совпадает с экспериментальными данными.

Бриджменом (P.W. Bridgman) (изложение результатов имеется в [110], с. 312-316; [52], с. 274-276) были получены приближенные формулы для оценки концентрации напряжений, включающие один неизвестный элемент  $\kappa$  — кривизну контура шейки в точке его пересечения с минимальным сечением:

$$\frac{\sigma_3}{Y} = 1 + \ln \left( 1 + \frac{\kappa(l^2 - r^2)}{2l} \right), \quad (3.29)$$

где  $\sigma_3$  — осевое напряжение в пределах минимального сечения,  $Y$  — предел текучести при одноосном растяжении,  $l$  — радиус минимального сечения шейки. Согласно (3.29), действительно, имеет место концентрация напряжений, т.к. значения нормальных напряжений в минимальном сечении шейки превосходят предел текучести при растяжении.

#### III.4.1. Вычисление величины предельной нагрузки

Воспользуемся условием равновесия внешних и внутренних сил в сечении шейки

$$P_* = \iint \sigma_3 dS, \quad (3.30)$$

где  $P_*$ —предельная растягивающая сила,  $dS$ —элемент площади сечения шейки.

Величина предельной нагрузки  $P_*$  в соответствии с (3.29) может быть вычислена по формуле

$$P_* = 2\pi \int_0^{\bar{\omega}_*^1} \sigma_3 \left| \frac{du}{d\bar{\omega}^1} \right| d\bar{\omega}^1, \quad (3.31)$$

где значения всех величин под знаком интеграла вычисляется при  $\bar{\omega}^3 = 0$ ,  $\bar{\omega}_*^1$ —значение координаты  $\bar{\omega}^1$ , при котором выполняется условие

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=\bar{\omega}_*^1, \bar{\omega}^3=0} = 0. \quad (3.32)$$

Распределение наибольшего главного напряжения  $\sigma_3$  получим из выражения (3.4)

$$\sigma_3 = k \ln \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \omega^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \omega^3} \right)^2 \right] + 2kC.$$

Переходя в (3.31) к безразмерным величинам, получим

$$\frac{P_*}{2\pi k l^2} = \int_0^{\bar{\omega}_*^1} \left( \ln \left[ \frac{1}{2\bar{u}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\omega}^3} \right)^2 \right]_{\bar{\omega}^3=0} + 2 \right) \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^1} \right|_{\bar{\omega}^3=0} d\bar{\omega}^1. \quad (3.33)$$

Отметим следующие равенства

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3} \right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \quad (3.34)$$

а также

$$\left( \frac{\partial h}{\partial \tilde{\omega}^1} \right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^1} \right)_{\tilde{\omega}^3=0} = 0.$$

Значение производной  $\frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}^3}$  в минимальном сечении шейки  $\omega^3 = 0$  равно нулю, поэтому производная  $\frac{\partial v}{\partial \tilde{\omega}^3}$  не должна обращаться в нуль, если

изостатическая координатная сетка не имеет особых точек; это касается и поведения указанных производных при  $u \rightarrow 0$ , так как ось симметрии и линия минимального сечения перешейка являются двумя изостатическими траекториями, проходящими через регулярную точку  $f = 0, h = 0$ .

После ряда преобразований, учитывая (3.34), находим

$$\frac{P_*}{2\pi kl^2} = 1 + 2 \int_0^{\bar{\omega}_*^1} \frac{\ln p}{p} d\bar{\omega}_*^1, \quad (3.35)$$

где

$$p = \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^1} \right|_{\bar{\omega}^3=0}$$

или

$$\frac{P_*}{2\pi kl^2} = 1 - 2 \int_0^{\bar{\omega}_*^1} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^1} \right|_{\bar{\omega}^3=0} \ln \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{\omega}^1} \right|_{\bar{\omega}^3=0} d\bar{\omega}_*^1. \quad (3.36)$$

Значение интеграла в формуле (3.36) получим, применяя метод численного интегрирования, основанный на полиномиальной аппроксимации подынтегральной функции, значение которой в узлах  $\bar{\omega}_j^i$  известны.

С тем, чтобы иметь возможность варьировать кривизну свободного контура, возьмем в качестве уравнения контура шейки уравнение дуги эллипса с полуосями  $a, b$

$$f = a + l - a \sin t, \quad h = -b \cos t, \quad (3.37)$$

где  $a$  — большая полуось,  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Тогда данные Коши (3.27) для системы (3.26) примут форму

$$\bar{u}|_{\bar{\omega}^1=0} = (\bar{a}(1 - \sin t) + 1)^2/2, \quad \bar{v}|_{\bar{\omega}^1=0} = -\bar{b} \cos t, \quad (3.38)$$

где  $\bar{a} = a/l$ ,  $\bar{b} = b/l$ , а параметр  $t$  определяется из условия  $\bar{\omega}^3 = \bar{a}\mathbf{E}(\varepsilon, t)$ . Здесь  $\mathbf{E}(\varepsilon, t) = \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$  — эллиптический интеграл второго рода,  $\varepsilon$  — эксцентриситет эллипса.

Учитывая зависимость (3.29), величина предельной нагрузки, согласно Бриджмену, есть

$$P_{Br} = Y\pi l \frac{\kappa l + 2}{\kappa} \ln \frac{\kappa l + 2}{2}, \quad (3.39)$$

где  $\kappa = a/b^2$  для случая, когда форма контура шейки представляет собой дугу эллипса с полуосями  $a, b$ .

Данные, приведенные в таб. 1, получены для различных значений безразмерной кривизны свободного контура шейки в области ее минимального сечения  $\kappa l$ ; величина шага разностной схемы по координате  $\bar{\omega}^3$  существенно не изменяет значения предельной нагрузки.

Численный анализ позволяет заключить, что концентрация напряжений в области минимального сечения шейки относительно мала, пока безразмерный параметр  $\kappa l$  не превосходит единицы.

На основании полученных данных можно также сделать вывод о том, что имеется вполне удовлетворительное согласование значений величины предельной нагрузки, вычисленных двумя различными методами: по схеме Бриджмена и с помощью гипотезы "полной пластичности" Хаара—Кармана. Заметим, что в схеме Бриджмена расчета напряжений в шейке условие  $\sigma_3 - \sigma_1 = Y$  выполняется точно лишь в минимальном сечении шейки. Поле напряжений в области шейки, вычисленное на основании гипотезы "полной пластичности" Хаара—Кармана, приводит к меньшему значению предельной нагрузки.

$\kappa l$	$\frac{P_*}{2\pi k l^2}$	$\frac{P_{Br}}{2\pi k l^2}$	$\frac{P_*}{P_{Br}}$	$\frac{\bar{\omega}_{i+1}^3 - \bar{\omega}_i^3}{\bar{\omega}_{j+1}^1 - \bar{\omega}_j^1}$
0.11	0.9540	1.0268	0.9290	4
0.13	0.9565	1.0318	0.9254	4
0.15	0.9632	1.0366	0.9292	4
0.17	0.9707	1.0413	0.9321	4
0.2	0.9797	1.0483	0.9345	4
0.23	0.9848	1.0553	0.9331	4
0.25	0.9893	1.0600	0.9333	4
0.27	0.9976	1.0646	0.9370	4
0.3	1.0025	1.0714	0.9356	4
0.35	1.0074	1.0827	0.9304	5
0.4	1.0202	1.0939	0.9326	5
0.45	1.0286	1.1048	0.9309	7
0.5	1.0421	1.1157	0.9340	7

Таблица 1. Значения предельной нагрузки  $P_*$  и значения  $P_{Br}$ , данные Бриджменом, для различных безразмерных кривизн свободного контура шейки



# Заключение

- 1) Сформулированы основные соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности для ребра призмы Треска в изостатической системе координат. Показано, что поле направлений наибольшего (наименьшего) главного напряжения является расслоенным.
- 2) Условие расслоенности позволяет ввести криволинейные изостатические координаты таким образом, что уравнения равновесия приводятся к трем соотношениям, интегрируемым вдоль линий главных напряжений, что позволяет исследовать геометрию слоев поля направлений и обобщить геометрические теоремы плоского деформированного состояния на пространственный и осесимметричный случай.
- 3) Найдены автомодельные решения осесимметричной задачи, обобщающие решение Шилда, которые зависят только от полярного угла в меридиональной плоскости. Установлены естественные границы существования автомодельных решений, за которые они не продолжаются. Численно найдены распределения главных напряжений в области автомодельного решения.
- 4) Выполнен групповой анализ системы дифференциальных уравнений в частных производных как в пространственном случае, так и в случае осевой симметрии. Построены новые инвариантно-групповые решения и соответствующие им сетки изостатических траекторий. Показано, что групповой анализ позволяет получить все найденные ранее автомодельные решения.
- 5) Созданы программы в кодах Maple V, реализующие поиск определя-

ющих уравнений для групп симметрий пространственных и осесимметричных уравнений.

- 6) Изучены алгебры симметрий осесимметричных и пространственных уравнений. Доказано, что алгебра симметрий в первом случае 5-мерна, а во втором — бесконечномерная (имеется естественная 12-мерная подалгебра). Построены оптимальные системы одномерных подалгебр и найдены соответствующие им инвариантно-групповые решения.
- 7) Разработан численный метод расчета пространственных и осесимметричных напряженных состояний, основанный на редукции физической краевой задачи к математической задаче Коши.
- 8) Построена явная устойчивая конечно-разностная схема с проверкой выполнения характеристических условий и найдены максимально простые варианты разностных уравнений. Численная реализация дана в системе символьных вычислений Maple V.
- 9) Проведен численный анализ задачи о локализации пластических деформаций в пределах шейки одноосно растягиваемого образца в осесимметричной постановке по схеме полной пластичности. Проведено сравнение с экспериментальными данными и приближенными моделями, показывающее, что значения предельной нагрузки хорошо согласуются со значениями, полученными ранее Бриджменом.

# Литература

- [1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [2] Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.
- [3] Аминов Ю.А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.
- [4] Аннин Б.Д. Одно точное решение осесимметричной задачи идеальной пластичности//Прикл. мех. и техн. физика. 1973. №2. С. 171-172.
- [5] Аннин Б.Д. Групповые свойства и точные решения уравнений пластичности Мизеса и Треска//Теоретична и приложна механика. Труды IV конгресса. Кн. 1. София: БАН, 1981. С. 644-649.
- [6] Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 143 с.
- [7] Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 240 с.
- [8] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [9] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Издательство "Самарский университет", 2001. 632 с.
- [10] Бахарева Ю.Н., Радаев Ю.Н. Численный метод решения трехмерных уравнений математической теории пластичности//Зимняя школа по

механике сплошных сред (четырнадцатая). Тезисы докладов. Пермь, УрО РАН, 2005. С. 27.

- [11] Бахарева Ю.Н., Радаев Ю.Н. Об обобщении автомодельных решений Шилда осесимметричной задачи математической теории пластичности//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2005. №2. С. 104-116.
- [12] Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [13] Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 444 с.
- [14] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности//Механика деформируемых сред. Межвузовский сборник. Куйбышев: Куйбышевский гос. ун-т, 1977. Вып. 2. С. 33-68.
- [15] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [16] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. К теории осесимметричного состояния идеально пластического материала//Прикл. мех. и техн. физика. 1963. №5. С. 102-108.
- [17] Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности при кусочно-линейных потенциалах//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1965. №1.
- [18] Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности//В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т.3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. с.

- [19] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
- [20] Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- [21] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80-101.
- [22] Генки Г. Пространственная задача упругого и пластического равновесия//Изв. АН СССР. ОТИ. 1937. №2. С. 187-196.
- [23] Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
- [24] Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962.
- [25] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
- [26] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. I. М., Л.: ОНТИ, 1936. 592 с.
- [27] Давиденков Н.Н., Спиридонова Н.И. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца//Заводская лаборатория. 1945. Т. XI. С. 583-593.
- [28] Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
- [29] Жуков А.М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении//Инженерный сборник. 1949. Т. V. С. 583-593.

- [30] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 228 с.
- [31] Задоян М.А. Пластическое течение конусообразных тел//Прикл.мат. и мех. 1983. Т.47. Вып.2. С. 209-218.
- [32] Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности//М.: Наука, 1992. 382 с.
- [33] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Факториал, 1997. 304 с.
- [34] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во Факториал, 1997. 512 с.
- [35] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [36] Ивлев Д.Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучих сред//Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
- [37] Ивлев Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях//Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. №3. С. 546-549.
- [38] Ивлев Д.Д. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах при условии пластичности Треска//Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №1. С. 132-133.

- [39] Ивлев Д.Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска//Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1959. №6. С. 112-114.
- [40] Ивлев Д.Д. О вдавливании тонкого тела вращения в пластическое полупространство//Прикл. мех. и техн. физика. 1960. №4. С. 75-78.
- [41] Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [42] Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. 448 с.
- [43] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.
- [44] Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. Об условии полной пластичности для осесимметричного состояния//Прикл. мех. и техн. физика. 1963. №3. С. 102-104.
- [45] Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
- [46] Ишлинский А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля//Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224.
- [47] Ишлинский А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости//Уч. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90-108.
- [48] Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. I. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 360 с.
- [49] Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [50] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

- [51] Качанов Л.М. Вариационные принципы для упругопластических сред//Прикл. мат. и мех. 1942. Т.6. Вып.2-3. С. 187-196.
- [52] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [53] Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
- [54] Ключников В.Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во Московского университета, 1994. 189 с.
- [55] Койтер В.Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 78 с.
- [56] Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 460 с.
- [57] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1964. 830 с.
- [58] Лагалли М. Векторное исчисление. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 344 с.
- [59] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23.
- [60] Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 207 с.
- [61] Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 168-205.
- [62] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.



- [63] Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. М.: Мир, 1970. 443 с.
- [64] Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [65] Малинин Н.Н., Петросян Ж.Л. Напряжения в наименьшем сечении шейки растянутого круглого образца//Изв. ВУЗов. Машиностроение. 1967. No. 6. С. 34-39.
- [66] Мизес Р. Механика твердых тел в пластически-деформированном состоянии//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 57-69.
- [67] Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 290 с.
- [68] Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности. Л.: Изд-во АН СССР. 1934. 71 с.
- [69] Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
- [70] Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т.2. М.: Мир, 1969. 864 с.
- [71] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [72] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
- [73] Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. М.: Мир, 1964. 234 с.

- [74] Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
- [75] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 400 с.
- [76] Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. 504 с.
- [77] Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высш. школа, 1964. 560 с.
- [78] Прагер В. Исследование зависимости "напряжения-деформации" в изотропных пластических твердых телах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 301-315.
- [79] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.
- [80] Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 102-113.
- [81] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 3//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 9-445.
- [82] Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 775-807.
- [83] Теория пластичности//Сб. статей (ред. Ю.Н.Работнов). М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1948. 452 с.
- [84] Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

- [85] Радаев Ю.Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. No. 6. С. 69-75.
- [86] Радаев Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86-94.
- [87] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №5. С. 27-45. с.
- [88] Радаев Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2003. №5. С. 102-120.
- [89] Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.
- [90] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н., Рябова Ю.Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности//Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2003. №2(28). С. 96-112.
- [91] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности//Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125-139.
- [92] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. Об обобщении автомодельных решений Шилда осесимметричной задачи математической теории пластичности//Сборник трудов международной школы-семинара. Воронеж, ВГУ, 2004. С. 411-414.
- [93] Радаев Ю.Н., Бахарева Ю.Н. Об одном численном методе решения осесимметричной задачи теории //Вестник Самарского гос. ун-та.

Естественнонаучная серия. 2004. Второй специальный выпуск. С. 52-64.

- [94] Радаев Ю.Н., Гудков В.А., Бахарева Ю.Н. Группы симметрий и алгебра симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности// Вестник Самарского гос. ун-та. 2005. №2 (36). С. 106-124.
- [95] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: Гостехтеоретиздат, 1947. 356 с.
- [96] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- [97] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. II. М.: Наука, 1994. 560 с.
- [98] Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений идеальной пластичности с условием текучести Мизеса//Динамика сплошной среды. Ин-т гидродинамики СО АН СССР. Новосибирск, 1977. Вып. 28. С. 109-117.
- [99] Сенашов С.И. Инвариантные пространственные решения уравнений идеальной пластичности//ПМТФ. 1980, №3. С. 159-163.
- [100] Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 11-19.
- [101] Сен-Венан Б. Дифференциальные уравнения внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах, и граничные условия для этих тел. Некоторые приложения//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 24-33.
- [102] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 442 с.

- [103] Соколовский В.В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками//Прикл. мат. и мех. 1950. Т. 14. Вып. 1. С. 75-92.
- [104] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [105] Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
- [106] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 468 с.
- [107] Толоконников Л.А. Механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа, 1979. 318 с.
- [108] Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
- [109] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41-56.
- [110] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 480 с.
- [111] Хилл Р. О проблеме единственности в теории жесткопластического тела//Сб. пер. "Механика". I, II. 1957. №4. С. 81-97; III. 1958. №1. С. 78-86.
- [112] Хилл Р. Общая теория единственности и устойчивости для упруго-пластических тел//Сб. пер. "Механика". 1958. №6. С. 81-95.

- [113] Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре//Мат. сб. Новая серия. 1936. Т. 1. Вып. 4. С. 511-534.
- [114] Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности//Инж. ж. Мех. тверд. тела. 1967. №4. С. 86-97.
- [115] Шилд Р. Пластическое течение в сходящемся коническом канале//Сб. пер. "Механика". 1956. №3. С. 140-150.
- [116] Шилд Р. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии//Сб. пер. "Механика". 1957. №1. С. 102-122.
- [117] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [118] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [119] Armen H. Assumptions, models, and computational methods for plasticity//Computer-Aided design. 1979. V. 11. Issue 6. P. 161-174.
- [120] Bahareva Y.N., Radayev Y.N. Self-similar solutions of axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity//Books of Abstracts. XXXII Summer School-Conference Advanced Problems in Mechanics. June 24–July 1, 2004, St. Petersburg (Repino), Russia. P. 24. <http://www.eng.abdn.ac.uk/apm>
- [121] Huber M.T. Die spezifische Formänderungsarbeit als Maß der Amstiengung eines Materials. Lemberg. 1904.
- [122] Jenne W. Raumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation//ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18-44.

- [123] Xiao-Mo Jiang, Hong Chen, J.Y. Richard Liew. Spread-of-plasticity analysis of three dimensional steel frames//J. of Constructional Steel Research. 2002. V. 58. Issue 2. P. 193-212.
- [124] Koiter W.T. General theorems for elastic-plastic solids//Progress in Solid Mechanics. Eds. I. N. Sneddon and R. Hill. Amsterdam: North-Holland, 1960. V. I. P. 167-221.
- [125] Lévy M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état//C. R. Acad. Sci. Paris. 1870. V. 70. P. 1323.
- [126] Lippman H. Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation//J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. No. 2. P. 111-122.
- [127] Lippman H. Statics and dynamics of axially-symmetric plastic deformation//J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. No. 1. P. 29-39.
- [128] Mitchell G.P., Owen D.R. Numerical solutions for elastic-plastic problems//J. Eng. Comput. 1988. V. 5. No. 4. P. 274-284.
- [129] Shield R.T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry//Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. 233A. No. 1193. P. 267-287.
- [130] Stampoulouglou I.H., Theotokoglou E.E., Panayotounakos D.E. Exact analytic solutions of the nonlinear partial differential equations governing rigid perfect plasticity problems//Acta Mechanica. 2005. V. 174. No. 1-2. P. 1-20.
- [131] Tresca H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. //C. R. Acad. Sci. Paris. 1864. V. 59. P. 754.
- [132] Vénant B. de Saint Mémoire sur L'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides

ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état//C. R. Acad. Sci. Paris. 1870. V. 70. P. 473.