

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М. В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ДМИТРОЧЁНКО Олег Николаевич

**ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ
ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Погорелов Д. Ю.

Москва – 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ	9
1.1. Формирование уравнений движения системы тел	9
1.1.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода	10
1.1.2. Общий подход к построению уравнения движения деформируемого тела	11
1.1.3. Прямой метод формирования уравнений движения системы тел	16
1.1.4. Метод составных тел	18
1.1.5. Метод отдельных тел	19
1.1.5.1. Метод отдельных тел для систем с замкнутыми кинематическими цепями	22
1.1.5.2. Метод отдельных тел для деформируемых тел	23
1.1.6. Сравнение методов по эффективности	23
1.2. Детализация уравнений движения деформируемого тела	25
1.2.1. Использование твёрдотельных конечных элементов	28
1.2.1.1. Моделирование балок твёрдотельными элементами	29
1.2.1.2. Моделирование пластин твёрдотельными элементами	30
1.2.2. Использование конечных углов поворота	32
1.2.2.1. Переход от абсолютных координат к относительным	32
1.2.2.2. Потенциальная энергия деформации. Обобщённые силы	33
1.2.2.3. Кинетическая энергия. Уравнения движения	34
1.2.2.4. Обобщение для пространственной балки и пластины	35
1.2.3. Формализм абсолютных узловых координат	36
1.2.3.1. Элемент тонкой балки с использованием формализма абсолютных координат	37
1.2.3.2. Уравнения движения балочного элемента	38
1.2.3.3. Энергия деформации и обобщённые силы в постановке геометрически нелинейной теории упругости	39
1.2.4. Другие модели балочных элементов, а также пластин	40
1.3. Перспективы развития методов моделирования	41
2. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ	42
2.1. Новая трактовка формализма абсолютных узловых координат как обобщения метода конечных элементов	42
2.2. Детализация уравнений для балочного элемента	44
2.2.1. Модели обобщённых продольных сил	44
2.2.1.1. Модель L^3	45
2.2.1.2. Модель L^2	46
2.2.1.3. Модель L^1	46

2.2.2. Модели обобщённых поперечных сил	47
2.3. Примеры моделирования балок и сравнение различных подходов	48
2.3.1. Изгиб консольной балки сосредоточенной силой	48
2.3.2. Сжатие консольной балки закритической силой с потерей устойчивости	50
2.3.3. Движение маятника в виде гибкой балки	50
2.3.4. Движение гибкой линейки эллипсографа с маятником	51
2.4. Новый пластинчатый элемент на основе обобщения формализма абсолютных узловых координат	52
2.4.1. Узловые векторы и функции форм конечного элемента тонкой пластины	52
2.4.2. Матрица масс элемента пластины	54
2.4.3. Энергия деформации пластины	55
2.4.4. Модели обобщённых сил от деформаций в срединной поверхности пластины	57
2.4.5. Модели обобщённых сил от поперечных деформаций	58
2.5. Примеры моделирования мембран и пластин	59
2.5.1. Статические деформации тяжёлой мембраны	60
2.5.2. Большие прогибы квадратной пластины	61
2.5.3. Частоты собственных колебаний пластины	62
2.5.4. Движение маятника в виде эластичной пластины	64
2.6. Другие типы новых конечных элементов	65
2.6.1. Элемент пространственной балки	65
2.6.2. Редуцированный прямоугольный элемент пластины	66
2.6.3. Треугольный элемент пластины	67
2.7. Преимущества разработанных конечных элементов	68
3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ФИЗИЧЕСКИМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ	69
3.1. Большие колебания консольной балки с грузом	69
3.1.1. Описание экспериментальной установки	69
3.1.2. Идентификация параметров установки	71
3.1.3. Некоторые экспериментальные данные	72
3.1.4. Моделирование груза, присоединённого к балке	73
3.1.4.1. Использование угла поворота как обобщённой координаты	74
3.1.4.2. Использование абсолютных узловых координат в качестве обобщённых	76
3.1.5. Сравнение экспериментальных данных и расчёта	78
3.1.5.1. Сравнение частот малых колебаний	78
3.1.5.2. Сходимость результатов численного моделирования	79
3.1.5.3. Учёт затухания колебаний	79
3.1.5.4. Колебания свободной балки без груза	81
3.1.5.5. Большие колебания балки с грузом	82
3.2. Большие колебания консольной пластины с грузом	84

3.2.1. Описание экспериментальной установки	84
3.2.2. Параметры установки	85
3.2.2.1. Геометрические и жесткостные параметры пластины	85
3.2.2.2. Инерционные свойства присоединённого груза	85
3.2.3. Моделирование абсолютно твёрдого тела, присоединённого к пластине	86
3.2.3.1. Уравнения движения свободного тела в пространстве	87
3.2.3.2. Уравнения движения системы «пластина+груз»	87
3.2.3.3. Реализация уравнений связей	88
3.2.3.4. Вычисление матриц D_j и B_j для абсолютно твёрдого тела	90
3.2.3.5. Вычисление матриц D_i и B_i для пластины	91
3.2.3.6. Абсолютные узловые координаты тела в пространстве	93
3.2.4. Учёт сил демпфирования	94
3.2.4.1. Вспомогательная задача идентификации параметров	95
3.2.4.2. Применение модели сил демпфирования к пластине	97
3.2.5. Сравнение результатов экспериментов и расчётов	97
3.2.5.1. Тест на сходимость	97
3.2.5.2. Свободные колебания пластины без груза	98
3.2.5.3. Колебания пластины с грузом	99
4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
5. ЛИТЕРАТУРА	103
6. ПРИЛОЖЕНИЯ	110
6.1. Используемые обозначения и соглашения	110
6.2. Элементы уравнений движения балочного элемента с использованием конечных углов поворота	112
6.3. Формирование уравнений движения гибридной системы	114
6.4. Учёт связей в виде предопределённых степеней свободы	115
6.5. Углы ориентации. Матрица поворота. Вектор угловой скорости, его матрица Якоби по производным от углов	117
6.6. Построение кинематических соотношений для цепочки тел	120
6.7. Элементы уравнений движения плоского балочного элемента с использованием абсолютных узловых координат	123
6.8. Явные выражения для элемента пластины	124

ВВЕДЕНИЕ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

Методы формирования уравнений движения абсолютно твёрдых тел и их систем рассматривались с самого появления механики как науки и поэтому имеют богатую предысторию и хорошо разработаны. Развитие же моделирования динамики систем деформируемых тел в середине XX века было вызвано зарождением и развитием вычислительной техники и началось с задач с малыми деформациями и при отсутствии больших движений тел как твёрдых. В последние десятилетия усилия многих исследователей направлены на решение задач, совмещающих произвольное пространственное движение упругих конструкций и их большие относительные деформации, а также соединение абсолютно твёрдых и упругих тел в единые системы. Анализ сложных систем становится невозможным без использования эффективных численных методов, ориентированных на вычислительную технику. Поэтому совершенствование методов моделирования систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел с учётом возможности их произвольного пространственного движения, больших относительных деформаций и большой размерности систем является актуальной задачей.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: разработка эффективных методов и алгоритмов моделирования динамики систем абсолютно твёрдых и упругих тел с учётом возможности их произвольного пространственного движения, геометрической нелинейности и большой размерности.

ОБЩАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

При разработке алгоритмов формирования уравнений движения используются методы динамики систем тел, уравнения движения получаются в виде дифференциальных (ОДУ) либо дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Активно используется векторная и матричная алгебра.

При формировании элементов уравнений движения деформируемых тел используется теория метода конечных элементов (МКЭ), методы теории механики сплошных сред (балок, пластин), а также дифференциальная геомет-

рия кривых и поверхностей, дифференциальное и интегральное исчисление.

ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты и выводы, полученные в диссертационной работе, научно обоснованы. Достоверность результатов моделирования подтверждается их сопоставлением с известными аналитическими и численными решениями, а также проведенными экспериментальными исследованиями.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА ДИССЕРТАЦИИ состоит в следующем.

- Получил развитие современный формализм абсолютных узловых координат, сохраняющий постоянство основных членов уравнений движения деформируемых тел в геометрически нелинейной постановке. Новизна состоит в трактовке формализма как обобщения узловых переменных и полей перемещений традиционно используемых конечных элементов.
- На основе указанного обобщения построено новое семейство конечных элементов балок и пластин, которые могут совершать произвольное пространственное движение и иметь большие деформации. Для этих элементов получены аналитические выражения для членов их уравнений движения и матриц Якоби от них.
- Для связанной системы деформируемого и абсолютно твёрдого тела построены дифференциально-алгебраические уравнения движения в плоской и пространственной постановке с использованием введённых абсолютных узловых координат.
- Предложен приём исключения алгебраических уравнений связей из уравнений движения системы абсолютно твёрдого и деформируемого тела. Это производится на основе использования абсолютных узловых координат деформируемого тела в качестве обобщённых координат для абсолютно твёрдого тела. В итоге уравнения движения указанного объекта имеют вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
- На основе существующего формализма, использующего конечные углы поворота и приводящего к сильно нелинейным уравнениям движения,

разработаны новые конечные элементы тонких балок и пластин, которые не приводят к неоднозначностям и вырождениям, описанным в литературе. Эти элементы также используются для сравнения с результатами моделирования, полученных методом абсолютных координат.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ И ЕЁ ВНЕДРЕНИЕ

- Полученные результаты и методы могут быть использованы для эффективного численного моделирования различных прикладных динамических задач, связанных с большими перемещениями и/или деформациями упругих конструкций, состоящих из балок и пластин, например, лопастей вертолѐта, тросовых систем, лент конвейеров, а также систем связанных деформируемых и абсолютно твёрдых тел.
- Разработанные методы и алгоритмы реализованы в виде программного обеспечения в составе программного комплекса «Универсальный механизм» для моделирования динамики систем тел.

ОБЪЁМ И СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа включает введение, три главы, заключение, список литературы из 83 наименований, а также приложения. Работа изложена на 130 страницах текста, содержит 60 рисунков и 12 таблиц.

В главе 1 диссертации приведен обзор известных методов и формализмов численного моделирования систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел. В §1.1 рассматривается построение уравнений движения систем тел; при этом подразумевается, что уравнения движения отдельных тел известны. В §1.2 описываются различные методы построения уравнений движения отдельного деформируемого тела. В начале каждого из этих параграфов приведен обзор работ по соответствующей тематике. В главе обсуждаются недостатки существующих подходов и методов и обосновывается актуальность их развития. В качестве перспективного выбран формализм абсолютных узловых координат, предложенный А. Шабáной в 1996 году.

В главе 2 излагаются новые методы моделирования деформируемых тел на основе формализма абсолютных узловых координат, разработанные в ходе

работы над диссертацией. Предлагается новый взгляд на природу этого формализма и указывается, что он является обобщением узловых переменных и полей перемещений конечных элементов, традиционно используемых в линейном МКЭ. Это означает, что с помощью формальной процедуры можно практически любой конечный элемент, использующий малые узловые координаты, преобразовать в элемент, координаты которого состоят из компонент радиус-векторов узлов и касательных векторов в абсолютном пространстве. При этом почти все члены уравнений движения этих элементов постоянны (кроме обобщённых сил), в отличие от других подходов.

Далее в главе предлагается целое семейство новых конечных элементов балок и пластин, разработанных на основе обобщения формализма абсолютных узловых координат. Приводятся решения модельных задач, демонстрирующих корректность элементов и соответствие результатов известным аналитическим и численным решениям. В конце главы приводятся доводы в пользу использования разработанных конечных элементов.

Глава 3 посвящена сравнению результатов экспериментов над образцами консольной балки и пластины, совершающими колебания большой амплитуды, с результатами, полученными в ходе численных экспериментов с использованием разработанных алгоритмов. Эти исследования были проведены в октябре-ноябре 2002 г. в Пусанском национальном университете, г. Пусан, Южная Корея. Коллектив лаборатории Computer-Aided Engineering (CAE) Lab под руководством профессора Ван-Сок Ю (Wan-Suk YOO) обеспечивал экспериментальную часть исследований; расчётная часть была в ответственности автора.

К теоретическим результатам этой главы относится разработанный метод исключения алгебраических уравнений связи при моделировании систем «балка+груз» и «пластина+груз» путём использования в качестве обобщённых координат для твёрдого тела абсолютных узловых координат.

В заключении диссертации приведена общая характеристика работы и сделаны основные выводы по полученным результатам.

1. ОБЗОР АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Данная глава является обзорной, хотя в ней содержатся также отдельные результаты и модификации известных методов, полученные автором, в том числе и в соавторстве. По возможности это будет отмечаться в тексте.

1.1. ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ

В этом параграфе рассматриваются методы формирования уравнений движения систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел. Принимая во внимание большое разнообразие таких методов, ограничимся здесь лишь методами, связанными с численным моделированием. При этом основное внимание (за исключением п. 1.1.2) уделяется именно построению уравнений движения *системы*, то есть набор обобщённых координат для отдельных тел и конкретные кинематические соотношения считаются определёнными – подробно это рассматривается в §1.2. Разные методы сравниваются по эффективности с точки зрения числа операций на одном шаге интегрирования.

Методы построения уравнений движения механических систем хорошо известны начиная со времён Даламбера и Лагранжа. Однако данная работа посвящена современным численным методам, ориентированным на вычислительную технику, развитие которой началось в 1950-х годах. Вычислительная механика начиналась с работ Денавита и Хартенберга 1955 г. [20], в которых авторы разработали матричный аппарат пространственной кинематики твёрдых тел. Уикер в 1965 г. [63] впервые применил эти методы к динамике. Одни из первых приложений вычислительной механики систем тел: в астронавтике – Хукер и Маргулис в 1965 г. [27], Робертсон и Виттенбург в 1967 г. [45]; в биомеханике – например, Вукобратович в 1970 г. [64]. Развитию методов компьютерной алгебры к задачам динамики систем тел посвящены работы 1977 г. Левинсона [34], а также Шилена и Кройцера [48].

1.1.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода

Начнём с классического формализма аналитической механики – уравнений Лагранжа 2-го рода для голономных консервативных систем. Основой для получения уравнений движения систем служат уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}}, \quad (1.1)$$

где $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ – кинетическая энергия системы; \mathbf{q} – столбец обобщённых координат системы (размером n); $\Pi(\mathbf{q}, t)$ – потенциальная энергия системы.

Уравнения движения после вычисления производных имеют вид

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1.2)$$

где \mathbf{M} – матрица масс системы размером $n \times n$; \mathbf{Q} – вектор обобщённых активных сил и сил инерции.

Этот способ получения уравнений движения довольно прост и вычисления согласно ему могут быть выполнены вручную студентами начальных курсов.

Однако для реальных технических систем, состоящих из десятков и сотен тел, вывод уравнений вручную просто невозможен по причине их необычайной громоздкости. Поэтому для решения таких задач создаются автоматизированные программы синтеза уравнений движения.

Но оказывается, что для сложных систем, состоящих из длинных кинематических цепей, вроде многозвенных маятников или тросов, применение формализма Лагранжа (1.1) приводит к почти экспоненциальному росту объёма вычислений, необходимых для формирования уравнений, в зависимости от длины цепочки n . Кроме того, в промежуточных вычислениях часто встречаются тригонометрические тождества типа $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и другие, которые сильно загромождают вычисления.

Даже само применение операции дифференцирования нежелательно, так как оно приводит к появлению огромных промежуточных выкладок. Достаточно сказать, что уравнения движения двадцатизвенного маятника, построенные с использованием значительно более эффективных методов, описан-

ных ниже, и к тому же упакованные, занимают примерно 25000 строк текста!

Всё вышеизложенное заставляет мысль механиков искать другие, более эффективные методы построения уравнений движения.

В следующих пунктах кратко изложена суть современных методов синтеза уравнений движения больших систем.

1.1.2. Общий подход к построению уравнения движения деформируемого тела

Обзор основных работ в этой области находится в начале п. 1.2 ниже. Это нарушение последовательности вызвано тем, что прежде чем рассматривать системы тел, мы вынуждены рассмотреть формирование уравнений движения отдельного тела.

Рассмотрим произвольное деформируемое тело, изображённое на Рис. 1.1 жирной линией в виде осевой линии балки [76]. То, что на рисунке изображена балка, не играет существенной роли и используется лишь для простоты изображения. Все выкладки, проведенные здесь, справедливы как для произвольного деформируемого, так и абсолютно твёрдого тела.

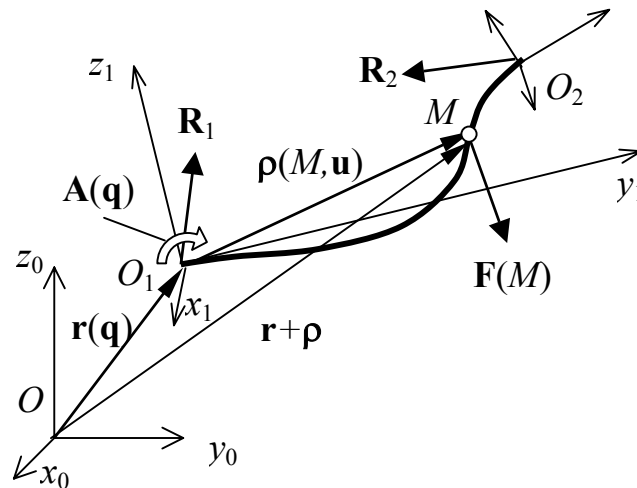


Рис. 1.1. Деформируемое тело

На тело действуют, в общем случае, распределённые силы $\mathbf{f}(M)$ и моменты $\mathbf{m}(M)$ в каждой точке M , изображённые на рисунке вектором $\mathbf{F}(M) = \{\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T\}^T$, и сосредоточенные силы и моменты реакции \mathbf{R}_k (на рисунке их две), также представляющие собой шестикомпонентные векторы.

Следуя *формализму подвижной системы координат* [35, 51], для обеспечения возможности произвольного пространственного движения тела относительно фиксированной системы координат x_0, y_0, z_0 (СК0) необходимо ввести систему координат x_1, y_1, z_1 (СК1) с началом в точке O_1 . Положение и ориентация подвижной системы координат СК1 задаётся соответственно радиус-вектором $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ и матрицей поворота $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, которые зависят от элементов столбца обобщённых координат \mathbf{q} .

Если тело свободно в пространстве, то чаще всего столбец \mathbf{q} содержит шесть координат – три координаты начала отсчёта O_1 и одну из возможных троек углов поворота [6, 7] (Эйлера, Кардано и т.п.). Для избежания вырождения углов ориентации можно использовать четыре параметра Эйлера. В случае, если тело несвободно, а соединено с соседними телами посредством шарниров, вектор \mathbf{q} может включать произвольное число обобщённых шарнирных координат.

Вычислим вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}$ начала отсчёта O_1 , а также вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости подвижной системы координат

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}'_t, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}'_t,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где матрицы $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ составлены из столбцов \mathbf{d}_i и \mathbf{b}_i :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_n], \quad \text{где} \quad \mathbf{d}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}; & \mathbf{r}'_t &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}; \\ \mathbf{B} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_n], \quad \text{где}^1 \quad \tilde{\mathbf{b}}_i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q_i} \mathbf{A}^T; & \tilde{\boldsymbol{\omega}}'_t &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{A}^T.\end{aligned}$$

Подробнее о способах формирования этих матриц см. приложение 6.6.

Деформированное состояние тела определяется зависимостью радиус-вектора $\boldsymbol{\rho}_*(M, \mathbf{u})$ произвольной точки M тела от вектора локальных обобщённых координат \mathbf{u} , которые выражают меру деформации тела. Обычно их выбирают так, что при $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ тело недеформировано. Зависимость $\boldsymbol{\rho}_*(\mathbf{u})$ может

¹ Об использовании символа \sim (тильда) см. приложение 6.1.

быть линейной вида $\mathbf{p}_* = \mathbf{S} \mathbf{u}$, если рассматриваются только малые деформации тела и $\|\mathbf{u}\| \ll 1$. В общем случае зависимость $\mathbf{p}_*(\mathbf{u})$ нелинейна. Обратим внимание на то, что компоненты вектора \mathbf{p}_* представлены в проекциях на оси *подвижной* СК1, а в проекциях на оси *неподвижной* СК0 имеем

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}, M, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{p}_*(M, \mathbf{u}).$$

Производная вектора \mathbf{p} по времени имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{p}_* + \mathbf{A} \dot{\mathbf{p}}_* = \underbrace{\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{p}_*}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\mathbf{A} \dot{\mathbf{p}}_*}_{\mathbf{v}_u} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{p} + \mathbf{v}_u.$$

Относительная скорость \mathbf{v}_u произвольной точки тела, вызванная его деформацией, и относительная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_u$ системы координат, связанной с данной точкой, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_u &= \mathbf{A} \dot{\mathbf{p}}_* = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{D}_*}_{\mathbf{D}_u} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_u \dot{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\omega}_u &= \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{B}_*}_{\mathbf{B}_u} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_u \dot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где введены матрицы \mathbf{D}_u и \mathbf{B}_u по аналогии с уравнениями (1.3).

Таким образом, состояние деформируемого тела полностью описывается набором обобщённых координат $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{u}^T\}^T$. Для построения уравнений движения тела воспользуемся формализмом уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{x}}, \quad (1.5)$$

где $T(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ – кинетическая энергия тела, $\Pi(\mathbf{u}, t)$ – потенциальная энергия внутренних сил упругих деформаций, $\delta W = \delta W' + \delta W''$ – виртуальная работа $\delta W'$ активных внешних сил и реакций ($\delta W''$), вызванных произвольной вариацией координат $\delta \mathbf{x}$.

$$\text{Кинетическая энергия – это интеграл по объёму тела } T = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{v}^T \mathbf{v} dV,$$

где μ – плотность тела; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{p} + \mathbf{v}_u$ – абсолютная скорость точек тела.

Вычислим выражение для производных от кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \int_V \mu \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right) dV = \int_V \mu \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{v}} dV. \quad (1.6)$$

Найдём производные от скорости \mathbf{v} , используя (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \mathbf{D}^T + \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{D}_u^T, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\rho} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Последнее равенство выражает теорему Кориолиса о сложении ускорения произвольной точки тела в переносном движении СК1, и её ускорения в относительном движении, вызванном деформацией тела.

В уравнении (1.5) $\partial \Pi / \partial \mathbf{q} = \mathbf{0}$, так как потенциальная энергия деформации КЭ зависит лишь от локальных координат. Производная потенциальной энергии по \mathbf{u} даёт обобщённую силу $\partial \Pi / \partial \mathbf{u} = -\mathbf{F}_u^{elast}(\mathbf{u})$.

Виртуальная работа внешних сил $\delta W'$ складывается из работ распределённых сил $\mathbf{f}(M)$ и моментов $\mathbf{m}(M)$ на возможных перемещениях точек тела. Введём столбец линейных и угловых скоростей

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_u \\ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_u \end{Bmatrix}.$$

Первая его составляющая выражает собой теорему о сложении скоростей, вторая – угловых скоростей. Переходя по аналогии к вариациям и учтя зависимости (1.3), (1.4), получим выражение для возможных линейных и угловых перемещений через вариации обобщённых координат:

$$\delta \boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{r} - \tilde{\boldsymbol{\rho}} \delta \boldsymbol{\omega} + \delta \mathbf{v}_u \\ \delta \boldsymbol{\omega} + \delta \boldsymbol{\omega}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D} \delta \mathbf{q} - \tilde{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{B} \delta \mathbf{q} + \mathbf{D}_u \delta \mathbf{u} \\ \mathbf{B} \delta \mathbf{q} + \mathbf{B}_u \delta \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \delta \mathbf{q} + \mathbf{S} \delta \mathbf{u}, \quad (1.8)$$

где введены матрицы

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\boldsymbol{\rho}} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{B}_u \end{bmatrix}.$$

Теперь вычислим виртуальную работу сил и моментов $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T\}^T$ на

² ввиду тождества $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v}$, которое легко проверяется непосредственно.

возможном перемещении $\delta\xi$:

$$\delta W' = \int_V \delta\xi^T \mathbf{F} dV = \int_V (\delta\mathbf{q}^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}^T \mathbf{F} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{F}) dV,$$

а также столбцы обобщённых активных сил

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_q &= \frac{\delta W'}{\delta\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}^T \left(\int_V \mathbf{C}^T \mathbf{F} dV \right) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}_q, \\ \mathbf{Q}'_u &= \frac{\delta W'}{\delta\mathbf{u}} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{F} dV. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Аналогично получим обобщённые силы \mathbf{Q}'' от сосредоточенных сил и моментов реакций \mathbf{R}_k (Рис. 1.1), заменив интегрирование по объёму суммированием по числу реакций:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}''_q &= \boldsymbol{\Phi}^T \left(\sum_k \mathbf{C}|_{M_k}^T \mathbf{R}_k \right) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{R}_q, \\ \mathbf{Q}''_u &= \left(\sum_k \mathbf{S}|_{M_k}^T \mathbf{R}_k \right) = \mathbf{R}_u. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В этих формулах матрицы \mathbf{C} и \mathbf{S} вычислены в тех точках тела M_k , в которых действуют реакции \mathbf{R}_k .

При подстановке выражений (1.6)–(1.10) уравнения (1.5) принимают вид

$$\boldsymbol{\Phi}^T \left(\begin{aligned} &m\ddot{\mathbf{r}} - m\tilde{\mathbf{p}}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \int_V \mu \ddot{\mathbf{p}} dV + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} m \mathbf{p}_C + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{p}} dV \\ &m\tilde{\mathbf{p}}_C \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \int_V \mu \tilde{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}} dV + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + 2 \int_V \mu \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{p}} dV \end{aligned} \right) - \mathbf{F}_q - \mathbf{R}_q = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

$$\int_V \mathbf{D}_u^T (\mu \ddot{\mathbf{r}} - \mu \tilde{\mathbf{p}} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mu \ddot{\mathbf{p}} + \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{p} + 2 \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{p}}) dV - \mathbf{Q}'_u - \mathbf{F}_u^{elast} - \mathbf{R}_u = \mathbf{0}.$$

Здесь $m = \int_V \mu dV$ – масса тела, $m\mathbf{p}_C = \int_V \mu \mathbf{p} dV$ – радиус-вектор центра масс тела относительно точки O_1 , умноженный на массу, $\mathbf{J}_C = -\int_V \mu \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} dV$ – тензор инерции тела относительно точки O_1 .

Чтобы вынести вторые производные из-под знаков интегралов, выразим $\ddot{\mathbf{p}}$ через набор обобщённых координат \mathbf{u} и их производные (эту процедуру иногда называют *дискретизацией* [55]):

$$\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{D}_u \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{D}}_u \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_u \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}''_u. \quad (1.12)$$

Матрица Φ является квадратной (6×6) и невырожденной³, поэтому после умножения первого уравнения системы (1.11) слева на Φ^{-T} получим окончательные уравнения движения отдельного тела в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^q \mathbf{w} + \mathbf{M}^{qu} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_q &= \mathbf{F}_q + \mathbf{R}_q, \\ \mathbf{M}^{quT} \mathbf{w} + \mathbf{M}^u \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_u &= \mathbf{F}_u + \mathbf{R}_u. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Использованные обозначения [13]:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_u = \mathbf{Q}'_u + \mathbf{F}_u^{elast},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^q(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\boldsymbol{\rho}}_C^T \\ m\tilde{\boldsymbol{\rho}}_C & \mathbf{J}_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{qu}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \int_V \mu \mathbf{D}_u dV \\ \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{D}_u dV \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^u(\mathbf{u}) = \int_V \mu \mathbf{D}_u^T \mathbf{D}_u dV, \\ \mathbf{k}_q &= \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} m \boldsymbol{\rho}_C + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} dV + \int_V \mu \mathbf{a}_u'' dV \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} dV + \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{a}_u'' dV \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_u = \int_V \mathbf{D}_u^T \mu (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{a}_u'') dV. \end{aligned}$$

В работе [55] уравнения (1.13) получаются на основе принципа возможных перемещений. Там же отмечено, что в случае «отвердевания» КЭ, когда $\dot{\boldsymbol{\rho}}(M) \equiv \mathbf{0}$, и при записи уравнений относительно центра масс, когда $\boldsymbol{\rho}_C \equiv \mathbf{0}$, они превращаются в динамические уравнения Ньютона-Эйлера для абсолютно твёрдого тела:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{f}^{акт} + \mathbf{f}^{реакт}, \\ \mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{m}^{акт} + \mathbf{m}^{реакт}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.1.3. Прямой метод формирования уравнений движения системы тел

В п. 1.1.2 были сформированы уравнения движения отдельного абсолютно твёрдого или деформируемого тела. Здесь выводятся уравнения движения системы таких тел.

Уравнения (1.13) иногда называются *полудискретизированными* [55],

³ Кроме отдельных положений, в которых углы ориентации вырождаются. Как отмечено в начале этого параграфа, для избежания вырождения можно использовать четыре параметра Эйлера.

чтобы подчеркнуть, что лишь относительные ускорения $\ddot{\mathbf{r}}$ были выражены через обобщённые ускорения $\ddot{\mathbf{u}}$, формула (1.12).

Выразим столбец \mathbf{w}_i ускорений каждого тела через его обобщённые координаты \mathbf{q}_i и производные от них, подобно тому, как в выражениях (1.3):

$$\mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{a}_i'' \\ \mathbf{B}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i'' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{w}_i'' . \quad (1.15)$$

Если теперь подставить это значение \mathbf{w}_i в уравнение (1.13) для i -го тела и выполнить суммирование по всем телам системы, то получим уравнения движения системы в обобщённых координатах

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i^q \boldsymbol{\Phi}_i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i^{qu} \\ \mathbf{M}_i^{quT} \boldsymbol{\Phi}_i & \mathbf{M}_i^u \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{Q}_i^q \\ \mathbf{Q}_i^u \end{Bmatrix}, \quad (1.16)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^q &= \mathbf{F}_i^q - \mathbf{k}_i^q - \mathbf{M}_i^q \mathbf{w}_i'', \\ \mathbf{Q}_i^u &= \mathbf{F}_i^u - \mathbf{k}_i^u - \int_{V_i} \mathbf{D}_i^{uT} \mu_i (\mathbf{a}_i'' + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i'' \mathbf{p}_i) dV_i. \end{aligned}$$

В краткой матричной записи уравнения (1.16) можно записать в виде

$$[\mathbf{M}^q + \mathbf{M}^{qu}] \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}, \quad (1.17)$$

где \mathbf{x} – глобальный столбец обобщённых координат системы, являющийся объединением всех столбцов $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{q}_i^T, \mathbf{u}_i^T\}^T$ с учётом глобальной нумерации координат (см. приложение 6.3). Заметим, что силы реакций в эти уравнения не входят, что является следствием идеальности связей в шарнирах.

Отметим, что все элементы уравнений движения (1.16) вычисляются с использованием только алгебраических матричных операций умножения и сложения. Матрицы производных \mathbf{D}_i , \mathbf{B}_i , входящие в соотношения (1.15) и далее через матрицы $\boldsymbol{\Phi}_i$ в (1.16), можно вычислить без использования дифференцирования, используя рекуррентные соотношения для цепочек тел, см. приложение 6.6. У истоков описанного формализма стояли Робертсон и Виттенбург [45], Вукобратович [64], а также Шилен и Кройцер [48].

Оценим вычислительную сложность формирования уравнений движения в этом методе на примере системы в виде цепочки из n тел. Число алгебраи-

ческих операций для вычисления (*трудоёмкость* вычисления) составляющих \mathbf{M}^q и \mathbf{M}^{qu} матрицы масс системы (1.17) равно, соответственно $O(n^3)$ и $O(n^2)$, как несложно понять по их структуре в уравнении (1.16)⁴. Трудоёмкость вычисления глобального вектора обобщённых сил также равна $O(n^2)$. В последующих пунктах будут рассмотрены более эффективные алгоритмы.

1.1.4. Метод составных тел

Повысить эффективность вычислений можно за счёт более глубокого анализа внутренней структуры матрицы масс [24]. При этом вновь рассматривается система в виде цепочки n тел⁵. Матрица масс из (1.16) примет вид

$$\mathbf{M}_i = \Phi_i^T \mathbf{M}_i^q \Phi_i. \quad (1.18)$$

Рассмотрим соотношения между линейными и угловыми скоростями двух смежных тел цепочки, имеющие вид, аналогичный виду (1.8)

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{V}_i + \mathbf{S}_{i+1}^l \dot{\mathbf{q}}_{i+1} + \mathbf{V}'_{i+1}, \quad (1.19)$$

где $\mathbf{V}_i = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix}$, $\mathbf{C}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{p}}_{i,i+1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ – матрица преобразования, $\mathbf{p}_{i,i+1}$ – радиус-вектор между центрами масс тел i и $(i-1)$; \mathbf{S}_{i+1}^l и $\dot{\mathbf{q}}_{i+1}$ – локальная матрица Якоби в шарнире $(i+1)$ и столбец локальных шарнирных скоростей.

Анализируя соотношения между скоростями в шарнирах цепочки тел, можно получить замечательные соотношения

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^i \mathbf{C}_{k,i} \bar{\mathbf{S}}_k^l, \quad \bar{\mathbf{S}}_k^l = [\mathbf{O} \quad \dots \quad \mathbf{O} \quad \mathbf{S}_k^l \quad \mathbf{O} \quad \dots \quad \mathbf{O}]$$

для рекуррентного вычисления матриц Φ_i . Здесь матрица $\bar{\mathbf{S}}_k^l$ содержит единственную ненулевую подматрицу \mathbf{S}_k^l , расположенную на k -том месте.

В конечном итоге переход к рекуррентным соотношениям позволяет снизить трудоёмкость вычисления матрицы масс (1.18) до $O(n^2)$ и столбца обобщённых сил \mathbf{Q} до $O(n)$ за счёт изменения порядка суммирования.

⁴ Трудоёмкость каждого умножения на матрицу Φ_i пропорциональна n , так как она имеет размер $6 \times n$ и, вообще говоря, является плотной. Кроме того, в формуле производится суммирование по n телам.

⁵ Здесь для простоты рассматривается цепочка из абсолютно твёрдых тел.

1.1.5. Метод отдельных тел

Отметим, что вычислить матрицу масс за меньшее, чем n^2 , число операций, невозможно, так как она сама содержит n^2 элементов. Однако Верещагиным [4] был предложен метод формирования уравнений движения сложности $O(n)$, в котором глобальная матрица масс вообще не вычисляется. История его появления⁶ описывается в работе [49]. Первое удачное применение этого формализма принадлежит Айхбергеру в 1993-1994 гг. [22, 23].

Изложим суть метода в трактовке работы [77]. Рассмотрим два концевые тела цепочки, изображённые на Рис. 1.2.

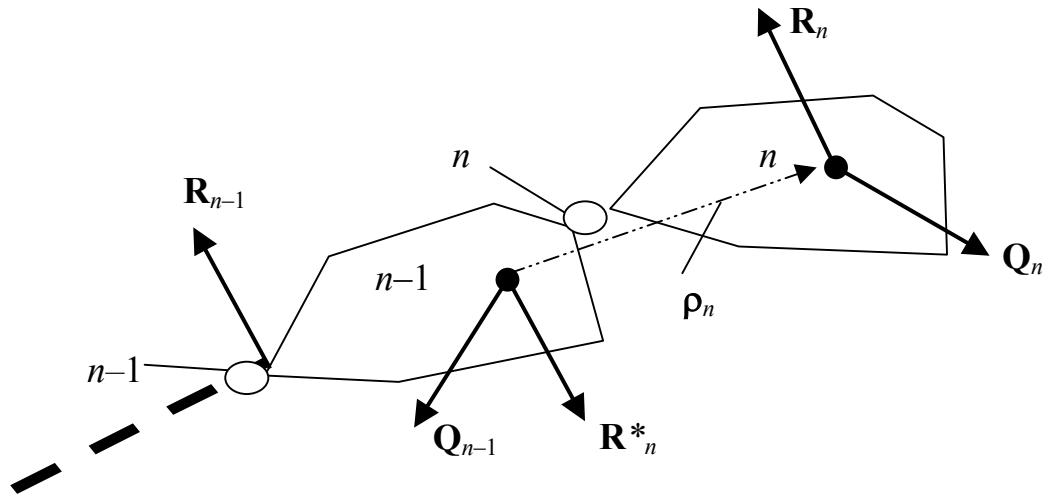


Рис. 1.2. Концевые тела цепочки тел и силы, действующие на них

Запишем уравнения движения концевое тела n . На него действуют обобщённые силы Q_n и силы реакции R_n в шарнире n (приведенные к центру масс), ср. с уравнениями (1.13):

$$M_n w_n = Q_n + R_n. \quad (1.20)$$

Запишем далее то же уравнение для предыдущего тела в цепочке $(n - 1)$ с учётом того, что на него действуют, кроме активных сил Q_{n-1} и сил реакций R_{n-1} в шарнире $(n - 1)$, ещё и реакции R_n^* со стороны шарнира n :

⁶ Развитие этого формализма, как описывают Schwertassek и Rulka в работах 1991 года, не относится к весьма славным эпизодам в истории динамики систем тел. Метод был опубликован Верещагиным в 1974 году, но важность этой работы не была оценена. В середине восьмидесятых формулировка алгоритма была переоткрыта различными авторами, и только тогда был сделан шаг по его применению к построению эффективных методов моделирования динамики систем тел.

$$\mathbf{R}_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \tilde{\mathbf{p}}_n & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot (-\mathbf{R}_n) = -\mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n. \quad (1.21)$$

При приведении столбца $\mathbf{R}_n = \{\mathbf{f}_n^T \quad \mathbf{m}_n^T\}^T$ сил реакций \mathbf{f}_n и их моментов \mathbf{m}_n к центру масс тела $(n-1)$ необходимо добавить момент от этих сил относительно центра приведения, что и выражается формулой (1.21).

Итак, для тела $(n-1)$ запишем:

$$\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n. \quad (1.22)$$

Запишем кинематическое соотношение между ускорениями двух тел, которое является продолжением серии уравнений (1.8) и (1.19):

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}_n'. \quad (1.23)$$

В случае идеальных связей выполняется соотношение

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{0}, \quad (1.24)$$

оно вытекает из условия равенства нулю работ на возможном перемещении.

Используем условие (1.24) для исключения сил реакций из уравнения (1.20), умножив его слева на \mathbf{S}_n^T :

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n.$$

Подставим в это выражение вместо \mathbf{w}_n его значение из (1.23)

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}_n') = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n.$$

Из последнего уравнения получим важную формулу, связывающую ускорения тела и вторую производную по времени от координат в шарнире:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T \{ \mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n') \}. \quad (1.25)$$

Здесь матрица \mathbf{U}_n имеет вид

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n. \quad (1.26)$$

Размер этой матрицы равен числу n степеней свободы в шарнире. Она симметрична и положительно определена. В данном методе требуется обращение лишь подобных ей матриц. И поскольку размер их всегда мал (он не превышает 6), то этим и обусловлена эффективность описываемого метода.

Теперь мы можем выразить силы реакции \mathbf{R}_n из (1.20) через ускорения

\mathbf{w}_n , выполнив подстановку выражения (1.25) в (1.23). Так мы исключим реакции \mathbf{R}_n из уравнения (1.22) и преобразуем к виду

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{R}_{n-1}. \quad (1.27)$$

В этой формуле введены обозначения (n заменено на k)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k-1}^* &= \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k, \\ \mathbf{Q}_{k-1}^* &= \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{C}_k^T \left\{ \mathbf{M}_k \left\langle \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k - \mathbf{M}_k \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k \right\rangle - \mathbf{Q}_k \right\}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Таким образом, начав с уравнения (1.20) для тела n , после некоторых преобразований мы пришли к сходному уравнению (1.27) для тела $(n-1)$. Преобразованная матрица масс \mathbf{M}_{n-1}^* уже не будет блочно-диагональной, но по-прежнему будет оставаться симметричной и положительно определённой.

Теперь мы можем записать уравнение, аналогичное (1.27), для тела $k = n-1$, затем для тела $k = n-2$ и так далее вплоть до тела $k = 1$, вычисляя матрицы \mathbf{M}_{k-1}^* и векторы \mathbf{Q}_{k-1}^* . При этом в (1.28) вместо величин \mathbf{M}_k и \mathbf{Q}_k будут входить их преобразованные значения из предыдущего шага рекурсии.

Так реализуется *обратный ход* алгоритма от конца цепочки к её началу.

Прямой ход – от начала цепочки (тела 1) до её конца – реализуется с использованием формул (1.25), (1.23), $k = 1, \dots, n$. При этом учитывается, что при $k = 1$ ускорение предыдущего тела (тела 0) равно нулю: \mathbf{w}_{k-1} , если $k = 1$.

Найдя локальные ускорения $\ddot{\mathbf{q}}_k$ согласно (1.25), вычисляем ускорение текущего тела \mathbf{w}_k по формуле (1.23).

Описанный выше классический метод отдельных тел является в настоящее время самым эффективным методом численного моделирования систем с длинными кинематическими цепями (более 10-15 вращательных степеней свободы в цепочке). Его можно легко обобщить на систему в виде дерева, однако он имеет и ограничения по области применения.

Прежде всего это относится к системам с замкнутыми кинематическими цепями – в этом случае невозможно выделить в системе концевое тело, как на Рис. 1.2, и начать рекуррентную процедуру. Однако для такого типа систем также были разработаны модификации метода, основанные на переходе к

множителям Лагранжа в разрезанных шарнирах. Другой класс систем, для которых этот метод неприменим – это жёсткие системы, которые решаются неявными методами [25, 39, 42, 46] с использованием матриц Якоби уравнений движения. Тем не менее, существуют модификации этого метода, устраняющие некоторые из описанных недостатков; см., например, [77, 80].

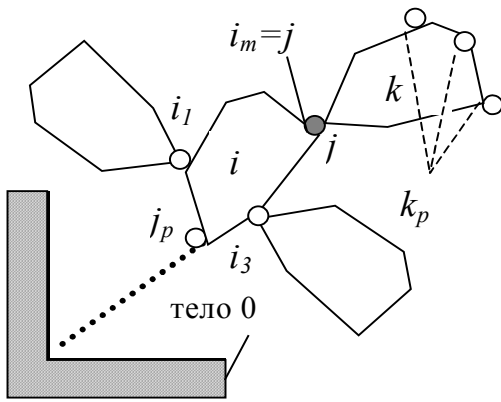
1.1.5.1. Метод отдельных тел для систем с замкнутыми кинематическими цепями

Применение метода отдельных тел невозможно при наличии в системе замкнутых кинематических цепей. В этом случае эффективен подход [77], основанный на исключении не сил реакций, а ускорений.

Уравнение (1.24) имеет общее решение в виде

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{H}_n \boldsymbol{\lambda}_n, \quad \text{тогда} \quad \mathbf{H}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{0}. \quad (1.29)$$

$\boldsymbol{\lambda}_n$ – множители Лагранжа (независимые реакции).



На Рис. 1.3 показан один шарнир (j) системы в окружении соседних тел. Он соединяет тела i и k . Шарнир j_p соединяет тело i с предыдущим на пути к телу 0. Шарниры, присоединённые к телу i , обозначены i_1, \dots, i_m, \dots ; одним из них, например, i_m , будет текущий шарнир j . Шарниры, присоединённые к телу k , обозначены k_1, \dots, k_p, \dots

Рис. 1.3. Шарнир системы

Запишем уравнения (1.22) для тел k и i , куда войдут реакции во всех связанных с ними шарнирах. Исключим эти реакции согласно (1.29) и подставим ускорения \mathbf{w}_k и \mathbf{w}_i в уравнения кинематики (1.23). Тогда мы получим разрешающее уравнение относительно множителей Лагранжа:

$$\mathbf{H}_j^T \mathbf{M}_k^{-1} \left(\mathbf{Q}_k + \mathbf{H}_j \boldsymbol{\lambda}_j - \sum_p \mathbf{C}_{k_p}^T \mathbf{H}_{k_p} \boldsymbol{\lambda}_{k_p} \right) = \mathbf{H}_j^T \mathbf{C}_j \mathbf{M}_i^{-1} \left(\mathbf{Q}_i + \mathbf{H}_{j_p} \boldsymbol{\lambda}_{j_p} - \sum_m \mathbf{C}_{i_m}^T \mathbf{H}_{i_m} \boldsymbol{\lambda}_{i_m} \right) + \mathbf{H}_j^T \mathbf{w}'_k.$$

Записав эти уравнения для всех шарниров системы, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа. Для цепочки тел матрица этой система будет блочно-трёхдиагональной. Появление замкнутых цепей приведёт лишь к нарушению блочной трёхдиагональности и к локальному увеличению ширины ленты матрицы, что не приводит к существенному увеличению трудоёмкости вычислений.

Полученная система уравнений обладает интересной особенностью: размерность столбца множителей Лагранжа λ_k равна $(6-n_k)$, где n_k – число степеней в шарнире. Это означает, что чем больше степеней свободы в шарнире, тем меньше размер столбца множителей Лагранжа, и значит, тем меньшим получается размер разрешающей системы уравнений. Далее на этот эффект ещё раз будет обращено внимание при демонстрации численных результатов интегрирования в п. 1.1.6.

1.1.5.2. Метод отдельных тел для деформируемых тел

Обобщение формализма отдельных тел для моделирования систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел было сделано Уоллрапом в 1994 г. [65]. Погорелов вместе с автором также предложили реализацию подобного же формализма [77]. Идея данного обобщения совершенно прозрачна и просто повторяет все выкладки, приведенные в п. 1.1.5 для абсолютно твёрдых тел, но только в применении к деформируемым телам. Заметим, что при моделировании систем только деформируемых тел ценность данного метода не столь велика, так как при представлении деформируемых тел, например, в методе конечных элементов, для их сочленения используется процедура ассемблирования, см. приложение 6.3. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, причём с блочной матрицей масс. Трудоёмкость решения такой системы также составляет $O(n)$, то есть применение метода отдельных тел не будет намного более эффективным.

1.1.6. Сравнение методов по эффективности

В этом параграфе приведено сравнение эффективности методов интег-

рирования по критерию машинного времени, затраченного на один шаг интегрирования уравнений, сгенерированных разными методами.

Традиционно сравнение быстродействия методов проводится на примере многозвенного маятника.

В данном случае были выбраны две модели многозвенного маятника:

- с одной вращательной степенью свободы в шарнирах, соединяющих стержни маятника;
- с тремя вращательными степенями свободы (шаровые шарниры между телами).

Сравнению подвергались четыре метода синтеза уравнений:

- прямой метод;
- метод составных тел (composite body method);
- метод отдельных тел в классическом исполнении, описанный в п. 1.1.5; он имеет устоявшееся обозначение NSM (null-space method);
- метод отдельных тел, основанный на переходе к множителям Лагранжа, описанный в 1.1.5.1; обозначение RSM (range-space method).

При сравнении варьировалось число маятников в цепочке, то есть длина цепочек: а именно, брались 2, 4, 8 и т.д. тел в цепочке. При этом последние значения для прямого метода были получены с помощью экстраполяции, поскольку этот метод в его существующей реализации имеет ограниченные возможности по сложности системы, связанные с объёмом ОЗУ ЭВМ.

Итак, на Рис. 1.4 представлены зависимости затрат времени на 1 шаг интегрирования от числа тел в маятнике для различных методов синтеза уравнений, а) – с шарнирами с одной степенью свободы, б) – с шарнирами с тремя степенями свободы (шаровые шарниры).

Анализ этих зависимостей подтверждает теоретические расчёты. Видно, что кривые, соответствующие прямому методу и методу составных тел, резко возрастают с увеличением числа тел в цепочке, в то время методу отдельных тел соответствуют прямая пропорциональность числу тел.

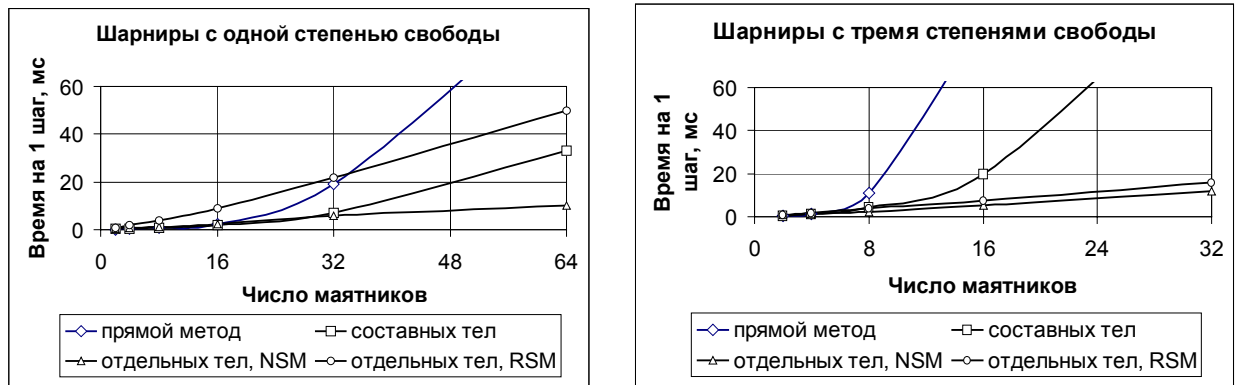


Рис. 1.4. Сравнение быстродействия методов формирования уравнений

1.2. ДЕТАЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

В этом параграфе рассматриваются методы получения конкретных уравнений движения отдельного деформируемого тела, выбора обобщённых координат для его моделирования, вывод кинематических соотношений и пр.

В последние десятилетия многие усилия исследователей направлены на решение задач, совмещающих произвольное пространственное движение упругих конструкций и их большие относительные деформации, а также соединение абсолютно твёрдых и упругих тел в единые расчётные схемы. Широкий обзор методов моделирования таких систем можно найти в [52].

На заре развития этой области вычислительной механики, да нередко и по сей день, использовались различные методы представления упругих тел набором *твёрдых элементов*, см. п. 1.2.1. Инерционные и упругие свойства деформируемого тела распределяются между элементами-телами и введенными между ними шарнирами с упруго-диссипативными силами. Данный подход позволяет использовать широкий спектр имеющихся методов и алгоритмов моделирования систем абсолютно твёрдых тел с целью исследования динамики деформируемых систем. Среди исследований в этой области можно выделить работы Крушевского и др. 1975 г. [33], Хьюстона и др. 1981 г. [28, 29, 30], Малиновского 1978 г., Рау и Шилена 1986 г. [44, 47], а также более современные работы 1992-2002 гг. Леонтьева [5], Паскаль и Га-

гариной [38], Кройцера и др. [31, 32], Погорелова и др. [40, 41, 81, 83]. Надо отметить, что основная масса работ в этой области фокусируется на моделировании *балочных* плоских и пространственных систем и оптимизации распределения инерционных и упругих параметров среди тел и шарниров системы. Однако работы Погорелова [41], а также [81] с участием автора являются одними из первых попыток распространения этого подхода на моделирование *пластин*, см. п. 1.2.1. Основная трудность, с которой связан данный формализм – появление системы из большого числа твёрдых тел (десятки и сотни) и проблемы, связанные с их численным интегрированием (дифференциально-алгебраические уравнения, жёсткие уравнения).

Формализм подвижной системы координат позволил учесть произвольное движение системы отсчёта, связанной с упругим телом. Подобно тому, как в п. 1.1.2 описан процесс формирования уравнений движения абсолютно твёрдого тела, можно поступить и в случае сложной конструкции, составленной из целого набора отдельных элементов. В этом случае вводится подвижная система координат, описывающая движение конструкции как твёрдого тела. В остальном же вывод уравнений ничем не отличается от уже описанного в п. 1.1.2. Этот подход довольно распространён и по сей день из-за простоты реализации: он задействует только дополнительные степени свободы, определяющие движение ПСК как твёрдого тела (обычно 6) в дополнение к узловым переменным, используемым в МКЭ. Из первых работ в этой области отметим работу Ликинса 1967 г. [35], Шабаны 1983 г. [54], [51]. Многие работы посвящены исследованию влияния выбора той или иной подвижной системы координат на точность моделирования, например: Агравал и Шабана 1985 г. [12]. Интересна работа Сонга и Хауга 1980 г. [58], в которой они используют свою подвижную систему координат для каждого отдельного элемента подобно тому, как описано в п. 1.1.2. Однако связь между элементами они реализовали в виде нелинейных алгебраических уравнений вместо использования принятой в МКЭ и более эффективной процедуры ассемблирования, описанной в приложениях 6.3 и 6.4. От этой работы лишь один шаг до формализма, использующего конечные углы поворота (ниже).

шаг до формализма, использующего конечные углы поворота (ниже).

Инкрементный метод конечных элементов [16, 43] устраняет этот недостаток, но, к сожалению, вносит другой. Из-за использования бесконечно малых углов поворота в качестве узловых переменных он приводит к линеаризованным кинематическим соотношениям, и, как следствие, к неточному описанию перемещений тела как твёрдого. Чтобы избежать этого, применяют промежуточную систему координат.

Использование конечных углов поворота (п. 1.2.2) в качестве узловых координат также позволяет решить проблему больших перемещений. Идея данного подхода изначально была изложена в работе Симо 1985 г. [56], а также Симо и Ву-Кока 1986 г. [57]. Были предложены реализации балочных и пластинчатых элементов, допускающих произвольное пространственное движение. Однако существующие реализации данного подхода при применении к балкам Эйлера-Бернулли (то есть не учитывающие сдвиговую деформацию), приводят к избыточности координат и вырождениям [50]. Реализация метода, предложенная автором в п. 1.2.2, свободна от этих недостатков.

Все описанные подходы отличаются сильной нелинейностью членов, входящих в уравнения движения, которая вызвана необходимостью использования локальной системы отсчёта, связанной с телом. С этой точки зрения интересен формализм абсолютных узловых координат, описываемый в п. 1.2.3 и развиваемый далее в главе 2. В этом подходе интерполяционные функции форм, описывающие деформируемое состояние тела, записываются непосредственно относительно глобальной системы координат, без использования промежуточной подвижной. Набор координат включает в себя глобальные декартовы координаты узлов элементов, а также наклонения (или наклоны), имеющие смысл касательных векторов к оси балки или плоскости пластины. В результате уравнения движения содержат постоянную матрицу масс и не содержат сил инерции. Единственным нелинейным членом уравнений, хотя и достаточно громоздким, является вектор обобщённых упругих сил. Основополагающей в этой области является работа Ахмеда Шабаны

1996 г. [50]. Им и его учениками и коллегами этот метод был реализован для плоских и пространственных балочных элементов [17, 18, 37, 53], а также для элемента пластины [36]. Можно отметить также работы Такахаши и др. [60, 61]. Вклад автора в развитие этого формализма [68-75] составляет основу данной диссертации, см. главы 2 и 3.

1.2.1. Использование твёрдотельных конечных элементов

При использовании этого подхода деформируемое тело замещается системой абсолютно твёрдых тел, связанных посредством шарниров различных видов [5, 14, 29, 33]. Инерционные и упругие свойства упругого тела распределяются между элементами-телами и введёнными между ними шарнирами с упруго-диссипативными силами. Примеры приведены на Рис. 1.5.

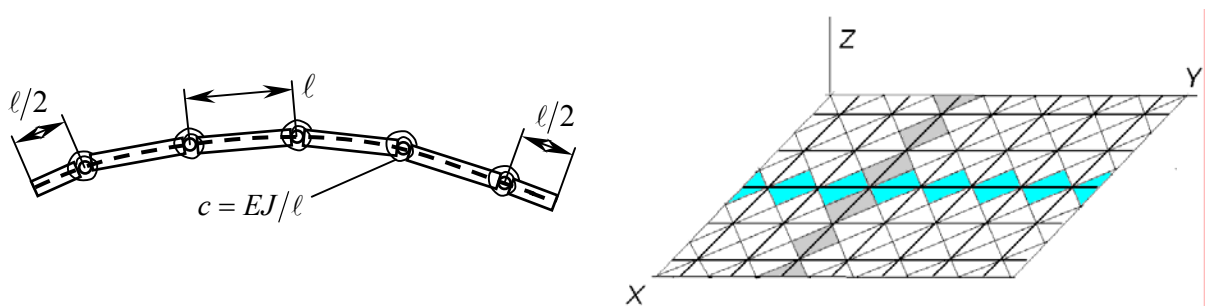


Рис. 1.5. Представление балки и пластины системой абсолютно твёрдых тел

В случае плоской балки между элементами-стержнями вводятся пружины с жёсткостями по повороту $c = EJ/\ell$, где ℓ – длина одного элемента-стержня, а EJ – изгибная жёсткость балки. Отметим, что концевые стержни имеют половинную длину [14], хотя существуют и более сложные способы дискретизации [33]. Если необходимо учесть также и продольную деформацию балки, то в шарнирах вводятся ещё и поступательные степени свободы с соответствующими жёсткостями $c_1 = EF/\ell$, где EF – продольная жёсткость балки. Публикации по моделированию балочных и тросовых элементов посредством описанной модели довольно многочисленны, как отмечено в § 1.2. Подобный подход может быть применён и для пластин, см. п. 1.2.1.2. Ниже коротко описаны удачные попытки моделирования балочных и пластинчатых систем коллективом под руководством Погорелова Д.Ю. с участием автора.

1.2.1.1. Моделирование балок твёрдотельными элементами

В начале 1998 года была разработана модель кабеля питания жёсткого диска фирмы Самсунг с использованием твёрдотельной расчётной схемы [83], Рис. 1.6 слева. Кабель сильно изогнут, как показано на рисунке, и поэтому данная задача является сильно нелинейной. Целью работы было определение положений равновесия кабеля при различных углах поворота головки (Рис. 1.7 справа), а также расчёт собственных частот и форм колебаний, Рис. 1.8. Для проверки правильности расчётов также было проведено сравнение данных расчётов с данными экспериментов над изогнутой металлической линейкой, имитирующей кабель, как показано на Рис. 1.7.

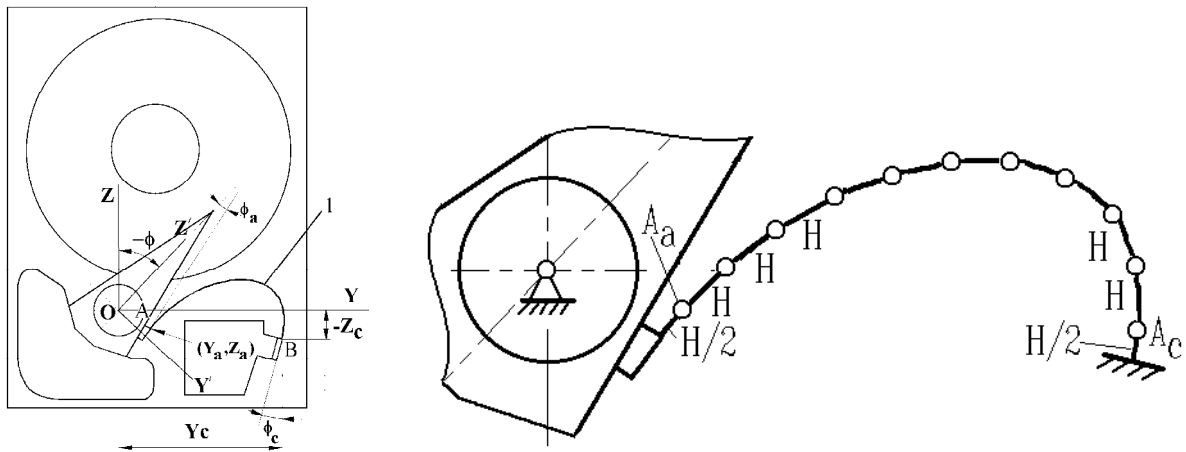


Рис. 1.6. Твёрдотельная модель кабеля питания жёсткого диска Самсунг

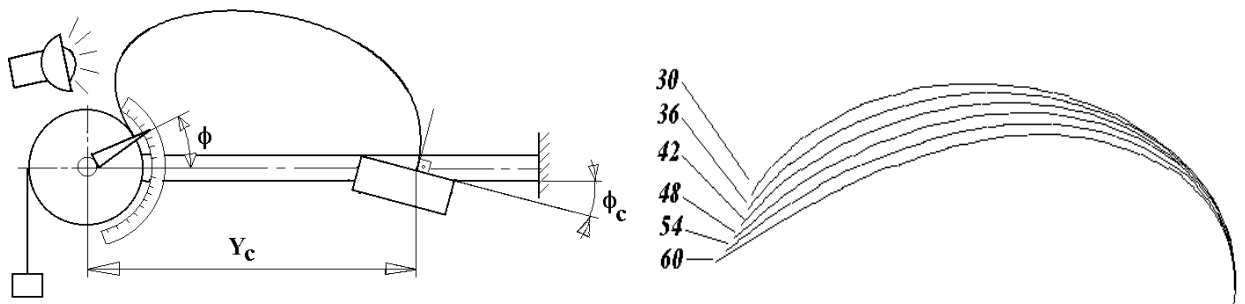


Рис. 1.7. Экспериментальная установка для моделирования больших деформаций упругой линейки и измерения статических и динамических форм

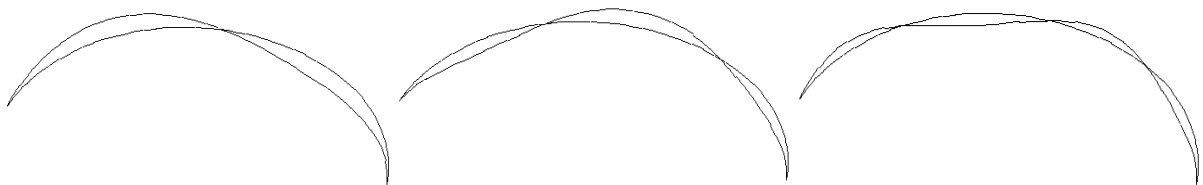
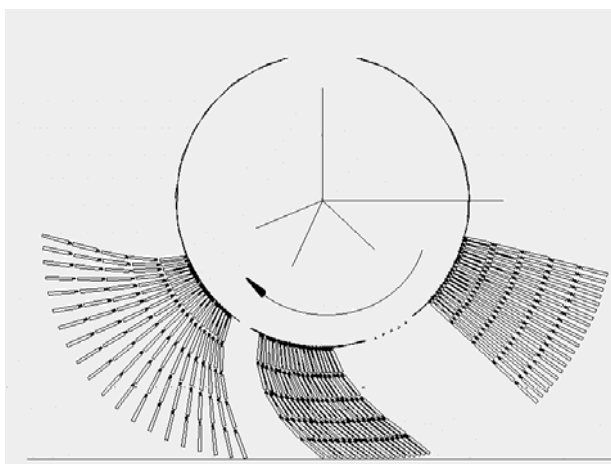


Рис. 1.8. Рассчитанные первые формы собственных колебаний кабеля

Экспериментальная установка позволяла замерять момент, возникающий в точке прикрепления линейки к вращающейся части (слева), в зависимости от положения Y_C и наклона заземления справа. Для измерения частоты колебаний применялся строботаксометр. Линейка и кабель моделировались системой твёрдых тел, как показано на Рис. 1.7 справа. Число тел варьировалось от 10 до 40. Результаты экспериментов и расчётов находились в полном соответствии друг с другом.

Подобная работа проводилась в конце 1998 года во время стажировки автора в техническом университете г. Гамбурга [82]. Тогда предметом исследования



была динамика ворсинок вращающейся щётки для очистки различных поверхностей, Рис. 1.9. Во внимание принимались контактные силы взаимодействия между ворсинками и с обрабатываемой поверхностью. Число тел в системе варьировалось и достигало 100.

Рис. 1.9. Вращающаяся щётка с ворсинками

1.2.1.2. Моделирование пластин твёрдотельными элементами

Одна из первых попыток моделирования пластин с использованием твёрдотельной модели приведена в работе Погорелова 1998 г. [41]. Там модель представляется в виде решётки балок (Рис. 1.5 справа), каждая из которых представляется цепочкой стержней (Рис. 1.5 слева). В точках пересечения балок решётки вводятся шарниры с несколькими вращательными и поступательными степенями свободы, так, чтобы обеспечить возможность растяжения, изгиба и сдвига. В этой работе показано, что эта модель неплохо отражает статические прогибы пластины, то есть при увеличении числа элементов решение сходится к точному. Однако собственные частоты колебаний пластины моделируются плохо – наблюдается плохая сходимость.

В работе с участием автора в 2002 году была предпринята удачная по-

пытка моделирования реальной сложной технической системы [81] – конвейера с подвесной лентой, Рис. 1.10. В работе использовалась твёрдотельная модель ленты конвейера, описанная выше. Модель насчитывала до 200 абсолютно твёрдых тел, около 1000 жёстких дифференциально-алгебраических уравнений, содержащих примерно 500 уравнений связи. Моделирование проводилось с помощью программного комплекса «Универсальный механизм», разработанного под руководством проф. Погорелова Д.Ю., см. www.umlalab.ru.

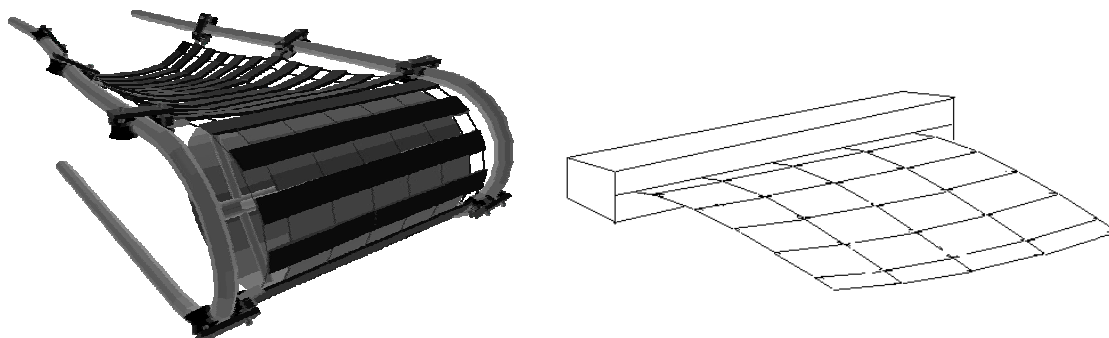
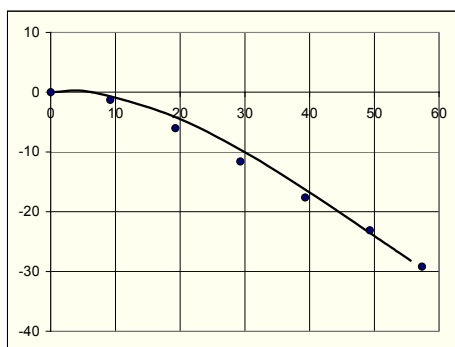
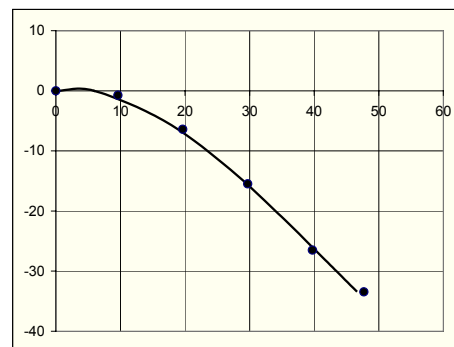


Рис. 1.10. Конвейер с подвесной лентой, твёрдотельная модель

Для определения жёсткостных параметров ленты конвейера были проведены эксперименты над консольно закреплёнными образцами ленты, идентификация параметров жёсткости и сравнение с расчётами. Для расчёта брались модели с различной дискретностью разбивки (3×4 , 4×4 , 5×4 , 10×4 , 6×6 элементов и другие). На Рис. 1.11 представлены результаты сравнения прогибов экспериментальных образцов и расчётов. Сплошной линией изображены рассчитанные прогибы, а точками – экспериментальные замеры прогибов.



1) $L=63,5$ см, $H=80$ см



2) $L=59$ см, $H=80$ см

L и H – длина и ширина консольной части ленты

Рис. 1.11. Сравнение прогибов математической модели и образца ленты

Результаты указанной работы подтверждают выводы предыдущей о том, что твёрдотельная модель пластины пригодна для моделирования статических задач, а для успешного решения задач динамики необходима дальнейшая разработка способов моделирования деформируемых тел.

1.2.2. Использование конечных углов поворота

Основным недостатком формализма подвижной системы координат является то, что перемещения точек деформируемого тела относительно связанной с ним системы координат предполагаются малыми – это не позволяет моделировать системы с большими перемещениями, например, загнуть балку в кольцо. Для устранения этого недостатка применяются очевидные идеи [26, 56, 57] – во-первых, использовать для каждого конечного элемента свою собственную подвижную систему координат, и, во-вторых, отказаться от относительных координат и использовать в качестве обобщённых координат абсолютные (по-другому – конечные) углы поворота этих подвижных СК относительно неподвижной СК.

Здесь опишем данный подход, как это сделано в нашей работе [75].

1.2.2.1. Переход от абсолютных координат к относительным

Рассмотрим плоский балочный конечный элемент длиной ℓ (рис. 1).

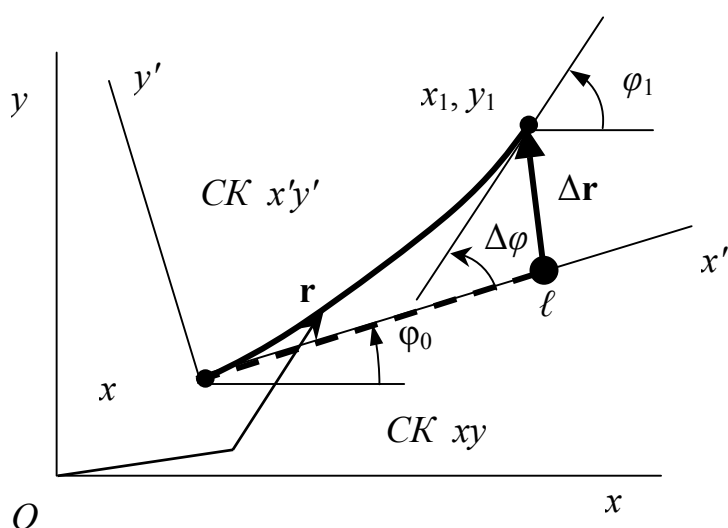


Рис. 1.12. Балочный конечный элемент

Введём вектор глобальных обобщённых координат элемента [75]

$$\mathbf{q} = \left\{ \mathbf{r}_0^T \quad \varphi_0 \quad \mathbf{r}_1^T \quad \varphi_1 \right\}^T, \\ \mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}^T, \quad \mathbf{r}_1 = \{x_1, y_1\}^T,$$

который определяет положение и ориентацию концов элемента в глобальной системе координат (СК) $xу$. Эти координаты не являются малыми, они могут изменяться от $-\infty$ до $+\infty$.

Введём локальную СК элемента $x'y'$. Её начало связано с левым концом элемента, а ось x' касается осевой линии. Деформированное состояние КЭ в этой СК определяется перемещениями правого конца:

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}) = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{r} \\ \Delta \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_0^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - \mathbf{u}^* \\ \varphi_1 - \varphi_0 \end{Bmatrix}. \quad (1.30)$$

Здесь \mathbf{A}_0 – матрица поворота,

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} c_0 & -s_0 \\ s_0 & c_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} \ell \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad c_0 = \cos \varphi_0, \quad s_0 = \sin \varphi_0.$$

Перемещения \mathbf{u} являются *малыми* в случае малой деформации КЭ, даже если глобальные координаты \mathbf{q} не малы.

1.2.2.2. Потенциальная энергия деформации. Обобщённые силы

Потенциальная энергия *малой* деформации КЭ⁷ – это квадратичная форма локальных координат \mathbf{u}

$$\Pi = \frac{1}{2} K_{mn} u_m u_n = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (1.31)$$

где \mathbf{K} – локальная матрица жёсткости [9],

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EF/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 12 EJ/\ell^3 & -6 EJ/\ell^2 \\ 0 & -6 EJ/\ell^2 & 4 EJ/\ell \end{bmatrix}.$$

В формуле (1.31) и далее для краткости принято *соглашение о суммировании* Эйнштейна, и знаки сумм Σ опускаются, хотя подразумевается суммирование по всем дважды повторяющимся индексам (здесь $m, n = 1, \dots, 3$).

⁷ Мы ограничимся здесь только случаем малой деформации отдельного элемента.

Столбец обобщённых сил, вызванных деформацией КЭ, находится путём дифференцирования потенциальной энергии:

$$-Q_i = \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = K_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial q_i} u_l = [\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{u}]_i. \quad (1.32)$$

Здесь \mathbf{U} – матрица Якоби преобразования (1.30)

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}^T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_0^T & \mathbf{A}_0'^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) & \mathbf{A}_0^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0' = \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial \varphi_0} = \begin{bmatrix} -s_0 & -c_0 \\ c_0 & -s_0 \end{bmatrix}. \quad (1.33)$$

Уравнения равновесия всей системы записываются в виде

$$Q_i + Q_i^a = 0,$$

$i = 1, \dots, n$, где Q и Q^a – столбцы обобщённых сил, вызванных соответственно деформацией и активными силами. Эти уравнения являются трансцендентными из-за наличия матриц \mathbf{U} . Для их решения используется метод Ньютона-Рафсона, для которого необходимы матрицы Якоби зависимостей (1.30)

$$-C_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = K_{kl} \frac{\partial u_k}{\partial q_i} \frac{\partial u_l}{\partial q_j} + K_{kl} u_l \frac{\partial^2 u_k}{\partial q_i \partial q_j} = [\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}]_{ij} + \underbrace{[\mathbf{K} \mathbf{u}]_k U_{ij}^{''k}}_{\text{можно пренебречь}}. \quad (1.34)$$

Значения символов $U_{ij}^{''k}$ приведены в приложении 6.2.

Эти матрицы Якоби используются также при численном интегрировании уравнений динамики в случае использования неявных методов [39].

1.2.2.3. Кинетическая энергия. Уравнения движения

Положение произвольной точки КЭ в локальной СК выражается через \mathbf{u} ,

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \mathbf{p}^* + \mathbf{N} \mathbf{u}.$$

Здесь \mathbf{N} – матрица локальных функций форм [9],

$$\mathbf{N}(p) = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & \ell(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix}, \quad \xi = p/\ell, \quad p = 0 \dots \ell, \quad \mathbf{p}^* = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.35)$$

В глобальной СК положение и скорость точки определяются векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}_0 \mathbf{p}, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{A}_0' \dot{\varphi}_0 \mathbf{p} + \mathbf{A}_0 \mathbf{N} \mathbf{U} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(p, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Кинетическая энергия КЭ определяется интегралом

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \mu \mathbf{v}^T \mathbf{v} dp$$

(μ – линейная плотность) и входит в уравнения движения в виде (см. (1.6))

$$\int_0^\ell \mu \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{v}} dp = \int_0^\ell \mu \mathbf{S}^T (\mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{q}}) dp = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{k},$$

откуда следуют выражения для матрицы масс и столбца сил инерции

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^\ell \mu \mathbf{S}^T \mathbf{S} dp, \\ \mathbf{k} &= \int_0^\ell \mu \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} dp \dot{\mathbf{q}} = \left[\sum_{k=1}^6 \int_0^\ell \mu \mathbf{S}^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q_k} dp \dot{q}_k \right] \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Выражения (1.37) также являются сильно нелинейными по \mathbf{q} . Особенно громоздки выражения для столбца сил инерции \mathbf{k} (см. приложение 6.2).

Столбец обобщённых сил, вызванных силой тяжести, вычисляется по формуле $\mathbf{Q}^g = \int_0^\ell \mathbf{S}^T \mu \mathbf{g} dp$. Значение этого интеграла см. в приложении 6.2.

1.2.2.4. Обобщение для пространственной балки и пластины

Описанный процесс построения уравнений для КЭ можно обобщить и на пространственный случай.

Так, для пространственной балки столбец обобщённых координат может быть представлен в виде

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{r}_0^T \quad \boldsymbol{\varphi}_0^T \quad \mathbf{r}_1^T \quad \boldsymbol{\varphi}_1^T\}^T,$$

где $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ – радиус-векторы двух концов балки, а $\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\varphi}_1$ – столбцы из трёх углов, задающих матрицы ориентации $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ систем координат, связанных с концевыми сечениями балки. Способы задания углов ориентации подробно описаны в приложении 6.5.

Преобразование (1.30) для пространственной балки принимает вид

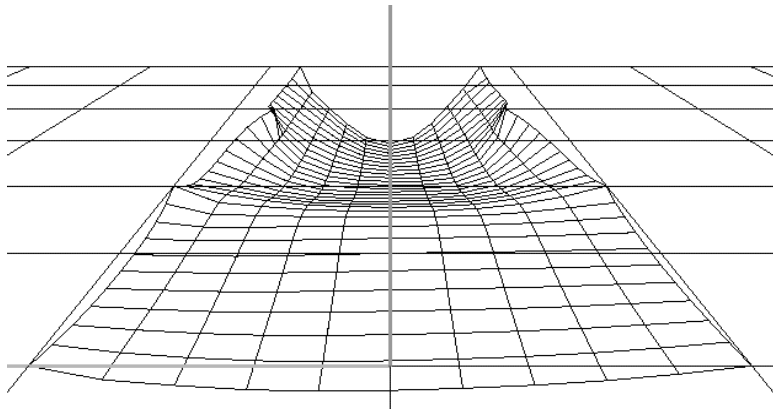
$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A}_0^T (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_1) \end{array} \right\}, \quad (1.38)$$

где $\alpha(\mathbf{A})$ – вектор-функция матричного аргумента, возвращающая углы ориентации СК1 относительно СК0. Подробнее см. приложение 6.5. В выражениях (1.32), (1.34) используется матрица жёсткости \mathbf{K} для пространственной балки [9] и матрица Якоби \mathbf{U} , соответствующая соотношению (1.38).

Прямоугольная пластина в пространстве определяется положением и ориентацией своих четырёх углов – соответственно вводятся радиусы-векторы $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ и матрицы ориентации $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$. Локальная СК (Рис. 1.12) связывается с одним из углов пластины, например, с индексом 0. Тогда зависимость (1.30) принимает вид

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_0^T (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_0) - \mathbf{u}_k^* \\ \alpha(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_k) \\ \gamma_k \end{Bmatrix},$$

где γ_k – сдвиговые деформации в углах пластины, а процесс построения уравнений не изменяется.



Описанный элемент пластины реализован в программном комплексе УМ, с помощью которого решена задача о деформации ленты конвейера, Рис. 1.13.

Рис. 1.13. Конечноэлементная модель ленты конвейера

1.2.3. Формализм абсолютных узловых координат

Описанные методы моделирования произвольного пространственного движения деформируемых тел отличаются сильной нелинейностью всех членов уравнений движения. Она вызвана необходимостью использования локальной системы отсчёта, связанной с телом. Здесь описывается недавно разработанный подход [50], интересный с этой точки зрения.

Формализм *абсолютных узловых координат* вводит большие перемещения конечного элемента относительно неподвижной системы отсчёта без использования промежуточной. Элементы используют конечные *наклонения*

(сводящиеся к касательным векторам) в качестве узловых переменных и являются обобщениями обычных конечных элементов, использующими бесконечно малые наклоны. В отличие от других формализмов, работающих с большими перемещениями, уравнения движения содержат постоянные матрицу масс и обобщённые силы тяжести, обобщённые силы инерции *отсутствуют*. Вся нелинейность уравнений сосредоточена в обобщённых упругих силах. Данный подход позволяет применять известные идеализации реальных упругих тел: тонкие балки Эйлера-Бернулли [17], балки Тимошенко, теории пластин Кирхгофа и Миндлина-Райснера, а также более общие модели [37, 53], основанные на механике сплошной среды.

1.2.3.1. Элемент тонкой балки с использованием формализма абсолютных координат

Рассмотрим элемент тонкой балки длиной ℓ на Рис. 1.14, где изображена её осевая линия. Этот элемент был предложен Шабаной [50].

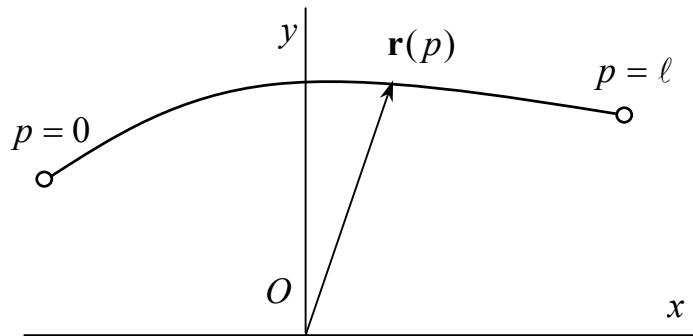


Рис. 1.14. Элемент балки в деформированном состоянии

Радиус-вектор $\mathbf{r}(p)$ произвольной точки осевой линии, где p – дуговая координата, может быть представлен в виде [17, 52]

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(p) \mathbf{e}, \quad (1.39)$$

где $\mathbf{S}(p)$ – матрица функций формы элемента, а \mathbf{e} – столбец обобщённых координат⁸: $\mathbf{e} = \{x_0 \quad y_0 \quad x'_0 \quad y'_0 \quad x_\ell \quad y_\ell \quad x'_\ell \quad y'_\ell\}^T$. Он включает в себя ко-

⁸ Вместо обычного в механике обозначения \mathbf{q} для столбца обобщённых координат здесь используется буква \mathbf{e} – это связано с предпочтениями А.А.Шабаны, впервые предложившим идею этого метода.

ординаты концевых точек балки x_0, y_0, x_ℓ, y_ℓ , а также наклоны осевой линии к осям координат $x'_0, y'_0, x'_\ell, y'_\ell$: $x'_a = (dx/dp)|_{p=a}$, $y'_a = (dy/dp)|_{p=a}$. Отметим, что эти производные пропорциональны косинусам углов наклона осевой линии к осям координат и поэтому являются компонентами касательного вектора к осевой линии. Подробнее об этом см. в § 2.1.

Заметим, что компоненты векторов узловых перемещений и касательных векторов не обязаны быть малыми. Касательные векторы, кроме того, могут иметь неединичную длину, которая отражает продольную деформацию балки. В работе [17] было показано, что балочный элемент, построенный на поле перемещений (1.39), может представлять произвольные деформации, а также произвольные движения балки как твёрдого тела.

1.2.3.2. Уравнения движения балочного элемента

Уравнения движения представленного элемента могут быть получены с использованием формализма уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{e}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{e}}$$

где введены кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \mu \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dp$, потенциальная энергия деформации Π и виртуальная работа $\delta W = \int_0^\ell \delta \mathbf{r}^T \mu \mathbf{g} dp$ сил тяжести $\mu \mathbf{g}$ (μ – линейная плотность материала балки в кг/м).

После подстановки производной $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}}$ радиус-вектора (1.39) и его вариации $\delta \mathbf{r} = \mathbf{S} \delta \mathbf{e}$ уравнения движения в матричной форме принимают вид

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^g,$$

куда входят постоянные матрица масс и столбец обобщённых сил тяжести

$$\mathbf{M} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{e}} \partial \dot{\mathbf{e}}^T} = \mu \int_0^\ell \mathbf{S}^T \mathbf{S} dp = \mathbf{const}, \quad \mathbf{Q}^g = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{e}} = \int_0^\ell \mathbf{S}^T dp \mu \mathbf{g} = \mathbf{const}.$$

Явные выражения для этих элементов выводятся ниже, в § 2.2.

Отметим, что столбец обобщённых кориолисовых и центробежных сил инерции отсутствует (равен нулю), хотя рассматривается случай больших перемещений и геометрически нелинейных деформаций (см. ниже).

Элементы вектора обобщённых упругих сил $\mathbf{Q}^e = \partial \Pi / \partial \mathbf{e}$ являются наиболее громоздкими из-за сложности выражения для энергии деформации Π .

1.2.3.3. Энергия деформации и обобщённые силы в постановке геометрически нелинейной теории упругости

Энергия деформации балки может быть представлена в виде суммы энергии продольной деформации осевой линии балки и энергии её изгиба:

$$\Pi = \Pi^\varepsilon + \Pi^\kappa = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \varepsilon^2 dp + \frac{1}{2} \int_0^\ell EJ \kappa^2 dp. \quad (1.40)$$

В это выражение входят продольная деформация ε и поперечная кривизна κ . Продольная EA и поперечная EJ жёсткости балки считаются постоянными.

В работе [17] разработаны различные модели обобщённых упругих сил.

Продольные силы. Вектор обобщённых сил, вызванных продольной деформацией балки, является вектором-градиентом потенциальной энергии Π^ε :

$$\mathbf{Q}_i^\varepsilon = \frac{\partial \Pi^\varepsilon}{\partial \mathbf{e}_i} = EA \int_0^\ell \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{e}_i} dp. \quad (1.41)$$

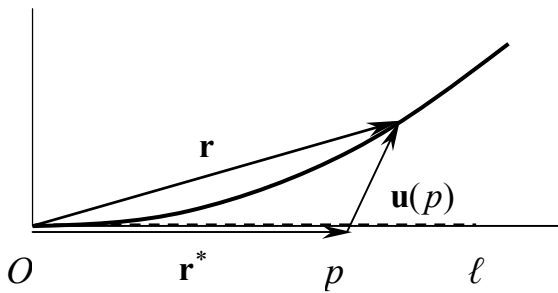
Это выражение содержит продольную деформацию осевой линии

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2} (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1), \quad \text{где } \mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dp. \quad (1.42)$$

Покажем, что данная формула выражает нелинейные соотношения Грина

между перемещениями и деформациями [62, 67] в одномерном случае.

Действительно, представим поле перемещений балки в виде (Рис. 1.15)



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{Bmatrix}.$$

Рис. 1.15. Осевая линия балки

Первое слагаемое \mathbf{r}^* представляет начальную конфигурацию осевой линии (прямую), а вектор \mathbf{u} определяет перемещения балки по её длине. Соотношения (1.42) приводят к выражению для продольной деформации

$$\varepsilon = u'_1 + \frac{1}{2}(u_1'^2 + u_2'^2),$$

которое содержит как линейные, так и квадратичные члены.

Поперечные силы вычисляются аналогично продольным:

$$\mathbf{Q}_i^\kappa = \frac{\partial \Pi^\kappa}{\partial \mathbf{e}_i} = EJ \int_0^\ell \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{e}_i} d\rho. \quad (1.43)$$

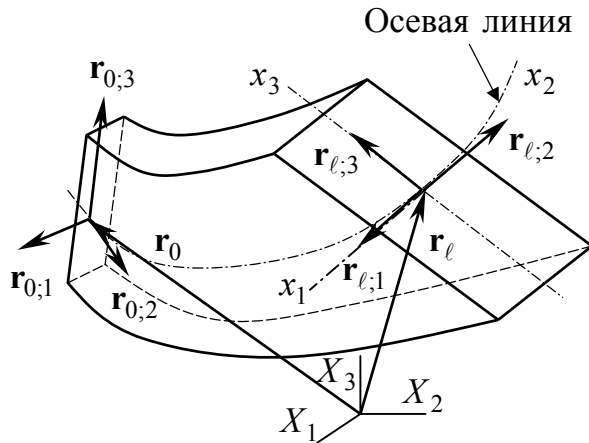
Кривизна осевой линии балки вычисляется через первую \mathbf{r}' и вторую \mathbf{r}'' производные от радиуса-вектора \mathbf{r} по дуговой координате ρ :

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{r_1' r_2'' - r_2' r_1''}{(r_1'^2 + r_2'^2)^{3/2}}.$$

Итак, формулы (1.41) и (1.43) дают способ вычисления обобщённых упругих сил. Они довольно громоздки, но для их непосредственного вычисления используются разного рода упрощения и допущения. Различные модели этих сил были предложены в работах [17, 60, 69]. Все они имеют вид $\mathbf{Q}^e = \mathbf{K}(\mathbf{e}) \mathbf{e}$, где \mathbf{K} – нелинейная матрица жёсткости. Подробнее см. § 2.2.

1.2.4. Другие модели балочных элементов, а также пластин

Кроме описанного конечного элемента балки Эйлера-Бернулли в плоской постановке были предложены и более сложные – например, элемент плоской балки Тимошенко с учётом сдвиговых поперечных деформаций осевой линии [37], а также элемент балки в пространственной постановке Шабаны и Якуба [53], который изображён на Рис. 1.16. В качестве обобщённых



координат они использовали радиус-векторы двух концов \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}_l , а также касательные векторы $\mathbf{r}_{\alpha;k} = \partial \mathbf{r}_\alpha / \partial x_k$ в этих точках, где x_k – криволинейные координатные линии, связанные с поперечными сечениями балки. Этот элемент имеет 24 степени свободы.

Рис. 1.16. Элемент пространственной балки Шабаны и Якуба

Миккола и Шабана предложили и прямоугольный элемент пластины в пространстве [36]. Обобщёнными координатами, как и в случае балки, также служат радиус-векторы \mathbf{r}_α четырёх его углов, $\alpha = 1, \dots, 4$, и касательные векторы $\mathbf{r}_{\alpha;k} = \partial \mathbf{r}_\alpha / \partial x_k$, $k = 1, \dots, 3$. Элемент имеет 48 степеней свободы.

Авторы используют трёхмерные функции форм, и поэтому, фактически, их элементы балки пластины представляют собой объёмные тела. Для построения выражения для потенциальной энергии используются соотношения механики сплошной среды, а вычисление обобщённых сил сводится к численному интегрированию по объёму элементов, что довольно трудоёмко.

1.3. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

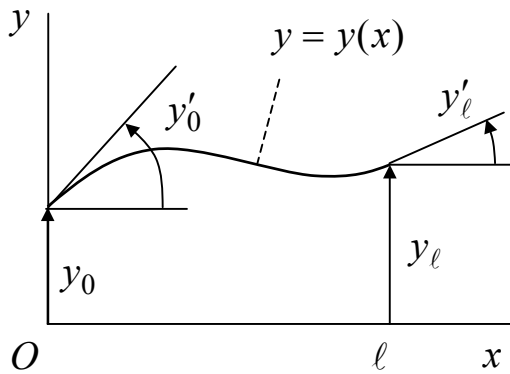
В заключение данной обзорной главы отметим основные недостатки существующих методов моделирования деформируемых тел. Использование твёрдых конечных элементов, по существу, хорошо отражает лишь статику деформируемых тел – особенно это касается трёхмерных задач. Использование формализма конечных углов поворота, инкрементных методов и других, связанных с введением подвижной системы координат, в случае больших перемещений всей конструкции как твёрдого тела приводит к появлению уравнений движения, в которых все элементы отличаются сильной нелинейностью. В этой связи перспективным, по мнению автора, является метод абсолютных узловых координат, который свободен от указанных недостатков. Поэтому глава 2 посвящена развитию этого формализма.

2. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

2.1. НОВАЯ ТРАКТОВКА ФОРМАЛИЗМА АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТ КАК ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этой главе мы рассмотрим использование формализма абсолютных узловых координат как обобщения узловых координат и полей перемещений, используемых при построении обычных конечных элементов. Сначала опишем его для двумерной балки, а затем обобщим для пластин в главе 2.4.1.

Рассмотрим элемент балки длиной ℓ на Рис. 2.1, используемый в приложениях метода конечных элементов [67].



Перемещения y_0 , y_ℓ и наклоны y'_0 , y'_ℓ двух его узлов предполагаются малыми. Под наклонами понимаются *тангенсы углов наклона* α_χ осевой линии к оси x :

$$y'_\chi = (dy/dx)|_{x=\chi} = \operatorname{tg} \alpha_\chi.$$

Рис. 2.1. Стандартный балочный элемент

Поле перемещений внутри элемента можно интерполировать в виде

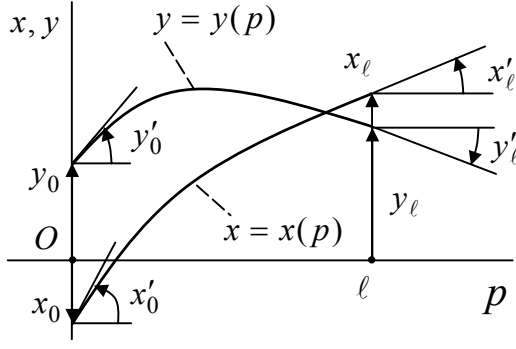
$$y(x) = s_1(x)y_0 + s_2(x)y'_0 + s_3(x)y_\ell + s_4(x)y'_\ell,$$

где $s_1(x)$, ..., $s_4(x)$ – функции Эрмита [9]:

$$\begin{aligned} s_1(p) = s_3(\ell - p) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & s_3(p) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ s_2(p) = -s_4(\ell - p) &= \ell(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & s_4(p) &= \ell(\xi^3 - \xi^2), \end{aligned} \quad \xi = \frac{p}{\ell}.$$

Чтобы описать произвольные перемещения точек срединной линии, мы можем параметризовать её, используя дуговую координату $p \in [0, \ell]$ и вводя два поля перемещений $x(p)$ и $y(p)$ вместо $y(x)$, как показано на Рис. 2.2:

$$\begin{aligned} x(p) &= s_1(p)x_0 + s_2(p)x'_0 + s_3(p)x_\ell + s_4(p)x'_\ell, \\ y(p) &= s_1(p)y_0 + s_2(p)y'_0 + s_3(p)y_\ell + s_4(p)y'_\ell. \end{aligned}$$



Отметим, что теперь наклоны $x' = dx/dp$ и $y' = dy/dp$ имеют смысл косинусов углов наклона осевой линии к осям координат и поэтому являются компонентами касательного вектора к осевой линии.

Рис. 2.2. Параметризация балки

Введя векторы перемещений и касательных в концевых точках балки

$$\mathbf{r}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}'_0 = \begin{Bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_l = \begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}'_l = \begin{Bmatrix} x'_l \\ y'_l \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_4,$$

получим параметризацию осевой линии, Рис. 2.3:

$$\mathbf{r}(p) = [s_1 \mathbf{I} \quad s_2 \mathbf{I} \quad s_3 \mathbf{I} \quad s_4 \mathbf{I}] \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}'_0 \\ \mathbf{r}_l \\ \mathbf{r}'_l \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^4 s_k \mathbf{e}_k, \quad (2.1)$$

здесь $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1)$. Знаки суммирования часто будем опускать.

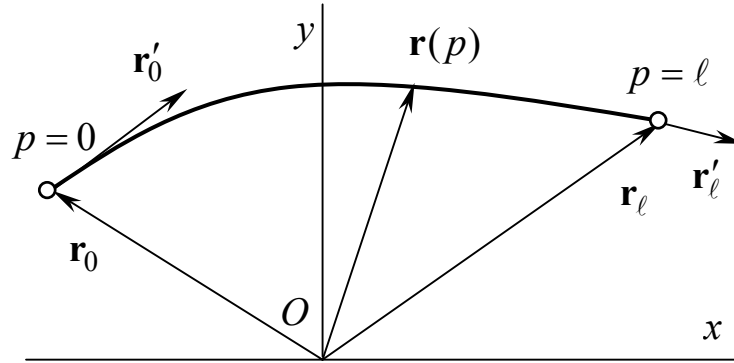


Рис. 2.3. Полученный элемент

Заметим, что теперь компоненты векторов узловых перемещений и касательных векторов не обязаны быть малыми. Касательные векторы, кроме того, могут иметь неединичную длину, которая отражает продольную деформацию балки. В работе [17] было показано, что балочный элемент, построенный на поле перемещений (2.1), может представлять произвольные деформации, а также произвольные движения балки как твёрдого тела.

2.2. ДЕТАЛИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В п. 1.2.3.2 уравнения движения были получены в виде

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}^e = \mathbf{Q}^g. \quad (2.2)$$

Здесь мы приведём их явный вид, используя определение радиус-вектора (2.1). Так, матрица масс будет иметь вид

$$\mathbf{M} = \frac{\mu \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 \mathbf{I} & & & \text{симм.} \\ 22\ell \mathbf{I} & 4\ell^2 \mathbf{I} & & \\ 54 \mathbf{I} & 13\ell \mathbf{I} & 156 \mathbf{I} & \\ -13\ell \mathbf{I} & -3\ell^2 \mathbf{I} & -22\ell \mathbf{I} & 4\ell^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

а столбцы обобщённых сил –

$$\mathbf{Q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1^e \\ \mathbf{Q}_2^e \\ \mathbf{Q}_3^e \\ \mathbf{Q}_4^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^g = \begin{Bmatrix} \mu \mathbf{g} \ell / 2 \\ \mu \mathbf{g} \ell^2 / 12 \\ \mu \mathbf{g} \ell / 2 \\ -\mu \mathbf{g} \ell^2 / 12 \end{Bmatrix}.$$

Блоки \mathbf{M}_{ij} матрицы масс и вектора обобщённых сил тяжести \mathbf{Q}_i^g вычисляются по формулам

$$\mathbf{M}_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\mathbf{e}}_i \partial \dot{\mathbf{e}}_j^T} = \mu \int_0^\ell s_i s_j dp \mathbf{I} = M_{ij} \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_i^g = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{e}_i} = \mu \mathbf{g} \int_0^\ell s_i dp, \quad i, j = 1 \dots 4.$$

Элементы вектора обобщённых упругих сил $\mathbf{Q}_i^e = \partial \Pi / \partial \mathbf{e}_i$ являются наиболее громоздкими, как сказано в п. 1.2.3.3, из-за сложности выражения для потенциальной энергии деформации (1.40). Тем не менее, в работах [17, 37, 60], а также [69] разработаны различные модели обобщённых упругих сил.

2.2.1. Модели обобщённых продольных сил

Вектор обобщённых сил, вызванных продольной деформацией балки, является вектором-градиентом соответствующей потенциальной энергии Π^e :

$$\mathbf{Q}_i^e = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{e}_i} = EA \int_0^\ell \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{e}_i} dp, \quad (2.4)$$

куда входит продольная деформация осевой линии

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2} (\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1), \quad \text{где } \mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dp. \quad (2.5)$$

Эта деформация и производные от неё с учётом зависимости (2.1) вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 s'_m s'_n \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_n - 1 \right), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{e}_i} = \sum_{k=1}^4 s'_i s'_k \mathbf{e}_k. \quad (2.7)$$

2.2.1.1. Модель L^3

Прямая подстановка выражений (2.6) и (2.7) в (2.4) приводит к обобщённым силам, которые являются *кубическими функциями* координат \mathbf{e} :

$$\mathbf{Q}_i^\varepsilon = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} EA \underbrace{\left(\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \bar{S}_{ikmn}^{1111} \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_n - \bar{S}_{ik}^{11} \right)}_{K_{ik}^\varepsilon} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^4 K_{ik}^\varepsilon \mathbf{e}_k, \quad (2.8)$$

Выражения для $\bar{S}_{ikmn}^{1111} = \int_0^\ell s'_i s'_k s'_m s'_n dp$ и $\bar{S}_{ik}^{11} = \int_0^\ell s'_i s'_k dp$ см. в приложении 6.7.

Выражение (2.8) может быть представлено в матричной форме:

$$\mathbf{Q}^\varepsilon = \mathbf{K}^\varepsilon \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^\varepsilon & & & \\ \mathbf{K}_{21}^\varepsilon & \mathbf{K}_{22}^\varepsilon & & \\ \mathbf{K}_{31}^\varepsilon & \mathbf{K}_{32}^\varepsilon & \mathbf{K}_{33}^\varepsilon & \\ \mathbf{K}_{41}^\varepsilon & \mathbf{K}_{42}^\varepsilon & \mathbf{K}_{43}^\varepsilon & \mathbf{K}_{44}^\varepsilon \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{сим.} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{ij}^\varepsilon = K_{ij}^\varepsilon \mathbf{I},$$

где \mathbf{K}^ε – матрица жёсткости.

Эта модель полностью идентична модели L2, разработанной Берзэри и Шабáной [17], с той лишь разницей, что у этих авторов элементы матрицы жёсткости получены непосредственно интегрированием матричных зависимостей. Использование многоиндексных символов \bar{S}_{ikmn}^{1111} в нашем случае может показаться слишком трудоёмким, но можно показать, что число операций в формуле (2.8) является в точности таким же, как и в работе указанных авторов. Кроме того, последний подход позволяет вычислить не только обобщённые силы, но и их матрицы Якоби, используя те же символы \bar{S}_{ikmn}^{1111} .

Для решения различных задач, например, поиск положений равновесия балки (п. 2.3.1), интегрирование жёстких уравнений движения неявными методами [39] или анализ собственных частот колебаний, необходимо вы-

числять матрицу Якоби от обобщённых упругих сил (2.8):

$$\mathbf{C}_{ij}^{\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{Q}_i^{\varepsilon}}{\partial \mathbf{e}_j^T} = K_{ij}^{\varepsilon} \mathbf{I} + EA \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \bar{S}_{ijmn}^{1111} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n^T.$$

2.2.1.2. Модель L^2

Вычисление обобщённых сил может быть упрощено, если предположить, что продольная деформация ε является постоянной по длине элемента:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' dp - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \bar{S}_{mn}^{11} \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_n - 1 \right).$$

Использование этого значения осреднённой деформации и его градиента (по-прежнему вычисляемого по формуле (2.7)) ведёт к следующей модели:

$$\mathbf{Q}_i^{\varepsilon} = \sum_{k=1}^4 \underbrace{EA \bar{\varepsilon} \bar{S}_{ik}^{11}}_{K_{ik}^{\varepsilon}} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^4 K_{ik}^{\varepsilon} \mathbf{e}_k \quad (2.9)$$

с матрицей Якоби $\mathbf{C}_{ij}^{\varepsilon} = K_{ij}^{\varepsilon} \mathbf{I} + EA \sum_{k=1}^4 \bar{S}_{ik}^{11} \mathbf{e}_k \frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^4 \bar{S}_{jm}^{11} \mathbf{e}_m^T$.

Эта промежуточная модель сил не имеет аналогов в литературе. Она является почти столь же точной, как и модель L^3 , и почти столь же быстрой, как простейшая модель L^1 , описываемая ниже.

2.2.1.3. Модель L^1

Простейшая модель продольных сил получена в работе [17] с использованием следующего способа осреднения продольной деформации (Рис. 2.3):

$$\bar{\varepsilon} \approx \frac{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\ell}\|}{\ell} - 1 = \frac{\sqrt{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)^T (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)}}{\ell} - 1.$$

В этом случае продольные силы являются линейными по \mathbf{e} (если не учитывать зависимость $\bar{\varepsilon}$ от \mathbf{e}) и принимают вид (2.9). Их матрица Якоби:

$$\mathbf{C}_{ij}^{\varepsilon} = K_{ij}^{\varepsilon} \mathbf{I} + EA \sum_{k=1}^4 \bar{S}_{ik}^{11} \mathbf{e}_k \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \mathbf{e}_j} \right)^T, \quad \text{где } \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \mathbf{e}_j} = \begin{cases} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) / \bar{\varepsilon} \ell^2, & \text{если } j = 1; \\ \mathbf{0} & \text{если } j = 2; \\ (\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1) / \bar{\varepsilon} \ell^2 & \text{если } j = 3; \\ \mathbf{0} & \text{если } j = 4. \end{cases}$$

2.2.2. Модели обобщённых поперечных сил

Обобщённые силы, вызванные изгибной деформацией осевой линии балки, вычисляются подобно продольным силам:

$$\mathbf{Q}_i^\kappa = \frac{\partial \Pi^\kappa}{\partial \mathbf{e}_i} = EJ \int_0^\ell \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{e}_i} dp. \quad (2.10)$$

В этом выражении кривизна осевой линии κ зависит от первой и второй производных \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' радиус вектора \mathbf{r} по дуговой координате p :

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{r_1' r_2'' - r_2' r_1''}{f^3} = \frac{1}{f^3} \begin{Bmatrix} r_1'' & r_2'' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1' \\ r_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{f^3} \mathbf{r}''^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{r}', \quad (2.11)$$

где $f = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'}$ – градиент деформации, а $\tilde{\mathbf{I}}$ – кососимметрическая матрица, значение которой приведено в формуле (2.11). Далее приведен один из способов вычисления обобщённых сил.

Модель T^3 . Кривизна осевой линии балки может быть выражена через функции форм и узловые координаты согласно формуле (2.1):

$$\kappa = \frac{1}{f^3} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} S_{mn}^\otimes \mathbf{e}_m^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_n, \quad (2.12)$$

где введены антисимметричные символы $S_{mn}^\otimes = s_m'' s_n' - s_m' s_n''$.

Производные от кривизны вычисляются аналогично:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{e}_i} = \underbrace{\frac{1}{f^3} \sum_{k=1}^4 S_{ik}^\otimes \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_k}_{\text{оставим лишь это}} + \underbrace{\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} S_{mn}^\otimes \mathbf{e}_m^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_n}_{f^3 \kappa} \left(\frac{-3}{f^4} \right) \underbrace{\frac{1}{f} \sum_{k=1}^4 s_i' s_k' \mathbf{e}_k}_{\partial f / \partial \mathbf{e}_i} \approx \frac{1}{f^3} \sum_{k=1}^4 S_{ik}^\otimes \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_k. \quad (2.13)$$

Подстановка кривизны (2.12) и её градиентов (2.13) в (2.10) даёт

$$\mathbf{Q}_i^\kappa = \sum_{k=1}^4 \frac{EJ}{\bar{f}^6} \underbrace{\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2} \bar{S}_{ikmn}^\otimes (\mathbf{e}_m^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_n)}_{K_{ik}^\kappa} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^4 K_{ik}^\kappa \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_k,$$

где $\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \mathbf{r}'^T \mathbf{r}' dp} = \sqrt{\frac{1}{\ell} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \bar{S}_{mn}^{11} \mathbf{e}_m^T \mathbf{e}_n}$ – усреднённая деформация, и

$$\bar{S}_{ikmn}^\otimes = \int_0^\ell S_{ik}^\otimes S_{mn}^\otimes dp = \bar{S}_{imkn}^{2211} - \bar{S}_{kmin}^{2211} - \bar{S}_{inkm}^{2211} + \bar{S}_{knim}^{2211}, \quad \bar{S}_{imkn}^{2211} = \int_0^\ell s_i'' s_m'' s_k' s_n' dp.$$

Явные значения этих символов приведены в приложении 6.7.

Эта модель сил является новой и названа T^3 , поскольку она кубичная по координатам \mathbf{e} . Можно задать вопрос – а в чём состоят достоинства и недостатки этой модели по отношению к известным моделям [17, 37, 60]? С одной стороны, предложенная модель является более сложной, чем модель T2 в работе [17], но, с другой стороны, она имеет тот же порядок, что и описанная выше модель L^3 (L2 в обозначениях работы [17]), и поэтому можно ожидать, что она будет более точной при совместном использовании с моделью L^3 .

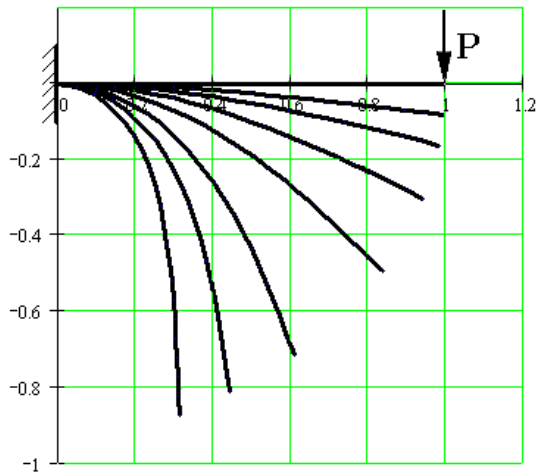
Приближённое значение матрицы Якоби от полученных сил имеет вид

$$\mathbf{C}_{ij}^{\kappa} = \frac{\partial \mathbf{Q}_i^{\kappa}}{\partial \mathbf{e}_j^T} \approx K_{ij}^{\kappa} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{EJ}{\bar{f}^6} \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 \bar{S}_{ijn}^{\otimes \otimes} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_m (\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{e}_n)^T.$$

2.3. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ БАЛОК И СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ

Ниже приведены несколько решений тестовых задач с плоскими балками с целью сравнения результатов либо с известными аналитическими или численными решениями, а также с работами других авторов. В качестве инструмента для моделирования был использован программный комплекс «Универсальный механизм» (УМ), [42], www.umlab.ru. В составе комплекса автором были реализованы конечные элементы, описанные выше. Дальнейшая проверка корректности балочного элемента проведена в главе 3.

2.3.1. Изгиб консольной балки сосредоточенной силой



На Рис. 2.4 изображена консольная балка, нагруженная сосредоточенной вертикальной силой P на свободном конце.

Сила P вызывает большие перемещения концевой сечения: угол поворота θ , вертикальное δ_v и горизонтальное δ_h перемещения.

Рис. 2.4. Изгиб консольной балки

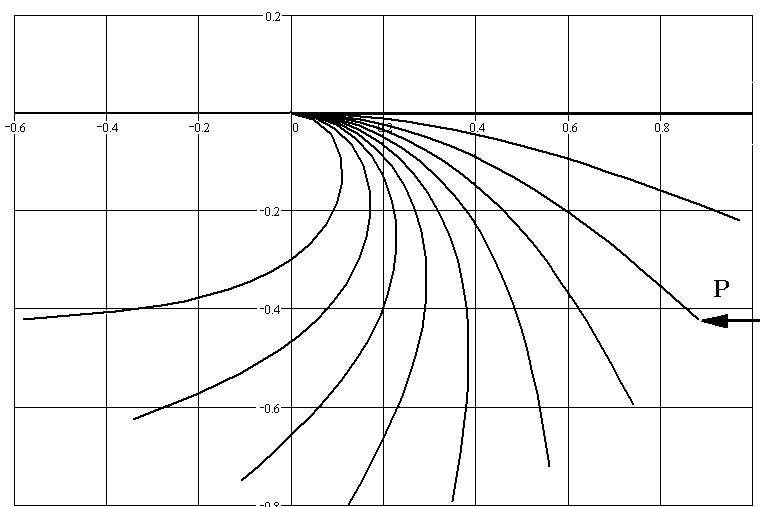
В Табл. 2.1 дано сравнение решений этой задачи с использованием конечных углов поворота (п. 1.2.2), а также формализма абсолютных узловых координат (п. 1.2.3), и с точным решением при различном числе конечных элементов n . Точное, а вернее численное решение аналитической задачи об *эластике*, берётся из работы [11].

Табл. 2.1. Большие перемещения торца консольной балки

$\frac{PL^2}{EJ}$	Точное решение			Формализм конечных углов поворота				Формализм абсолютных узловых координат			
	$\frac{\theta}{\pi/2}$	$\frac{\delta_g}{L}$	$\frac{\delta_z}{L}$	n	$\frac{\theta}{\pi/2}$	$\frac{\delta_g}{L}$	$\frac{\delta_z}{L}$	N	$\frac{\theta}{\pi/2}$	$\frac{\delta_g}{L}$	$\frac{\delta_z}{L}$
0,25	0,079	0,083	0,004	3	0,079	0,083	0,004	2	0,079	0,083	0,004
				1	0,080	0,083	0,000	1	0,076	0,078	0,004
0,5	0,156	0,162	0,016	6	0,156	0,162	0,016	3	0,156	0,162	0,016
				1	0,159	0,167	0,000	1	0,143	0,138	0,012
1	0,294	0,302	0,056	7	0,294	0,302	0,056	4	0,294	0,302	0,056
				1	0,318	0,333	0,000	1	0,276	0,239	0,037
2	0,498	0,494	0,160	12	0,498	0,494	0,160	5	0,498	0,494	0,161
				2	0,523	0,521	0,132	2	0,493	0,479	0,154
5	0,774	0,714	0,388	22	0,774	0,714	0,388	6	0,774	0,714	0,388
				10	0,777	0,717	0,387	1	0,858	0,590	0,282
10	0,911	0,811	0,555	12	0,914	0,814	0,554	12	0,911	0,811	0,555
				6	0,921	0,822	0,551	6	0,911	0,807	0,553

Как видно из таблицы, при использовании абсолютных координат требуется примерно в два раза меньше конечных элементов для получения одинаковой точности. Это неудивительно, так как при использовании конечных углов поворота используется соотношения линейной теории (1.31), а в случае абсолютных координат применяется нелинейное соотношение (1.42). Но есть и ещё более важное преимущество абсолютных координат. Уравнения равновесия в последнем случае получаются алгебраическими, в отличие от трансцендентных уравнений в методе смешанных координат. Для устойчивости численного решения трансцендентных уравнений приходится применять схему релаксации, которая замедляет процесс решения. Алгебраические же уравнения решаются устойчиво и без релаксации.

2.3.2. Сжатие консольной балки закритической силой с потерей устойчивости



На Рис. 2.5 изображены формы потери устойчивости консольной балки при приложении к её свободному торцу сжимающей силы P , большей критической силы Эйлера

$$P_{кр} = \pi^2 EJ / 4L^2 .$$

Рис. 2.5. Потеря устойчивости балки

Табл. 2.2. Углы поворота сечения консольной балки при потере устойчивости

$P/P_{кр}$	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
θ° точно	20	40	60	80	100	120	140	160	180
$\theta_{20КЭ}^{абс.к-ты}$	19,86	39,89	60,14	80,00	100,08	120,06	140,04	160,03	176,04
$\theta_{5КЭ}^{абс.к-ты}$	19,66	39,56	59,75	79,61	99,72	119,78	139,85	159,91	175,90
$\theta_{20КЭ}^{отн.к-ты}$	18,17	39,09	59,64	79,65	99,84	119,92	140,01	160,09	176,11
$\theta_{5КЭ}^{отн.к-ты}$	14,93	26,43	52,97	75,53	97,37	118,73	139,94	161,10	177,60

В Табл. 2.2 приведены значения углов θ поворота свободного торца, полученные двумя методами (точные решения этой задачи, а также решения в абсолютных координатах приведены также в работе [18]).

2.3.3. Движение маятника в виде гибкой балки

Тестовый пример движения маятника, составленного из 100 КЭ, показан на Рис. 2.6. Он приведен для сравнения с данными из работы [18].

Параметры модели: длина балки $L = 1,2$ м; плотность материала $\mu = 5540$ кг/м³; площадь поперечного сечения $F = 18 \cdot 10^{-4}$ м²; момент инерции площади сечения $J = 1,215 \cdot 10^{-8}$ м⁴; модуль Юнга $E = 0,7 \cdot 10^6$ Па. Параметры процесса численного интегрирования: шаг интегрирования $h = 10^{-5}$ с, время интегрирования $T = 600$ с; процессор Pentium III, 650 МГц.

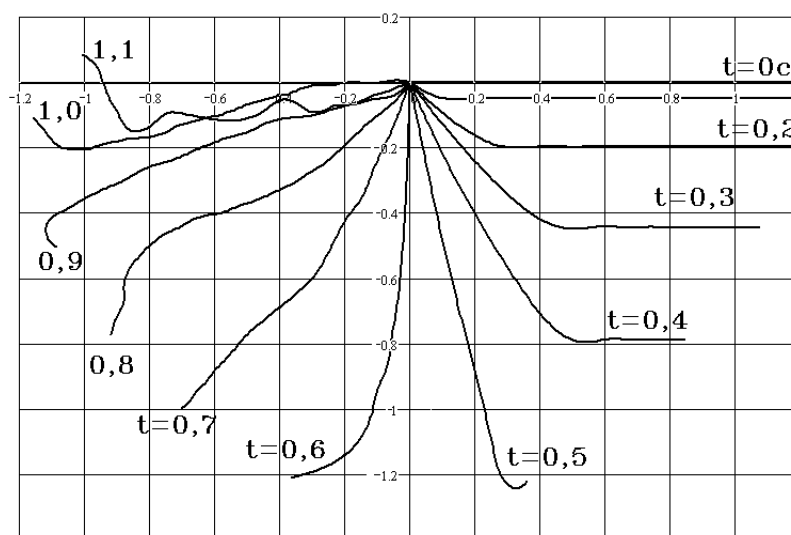
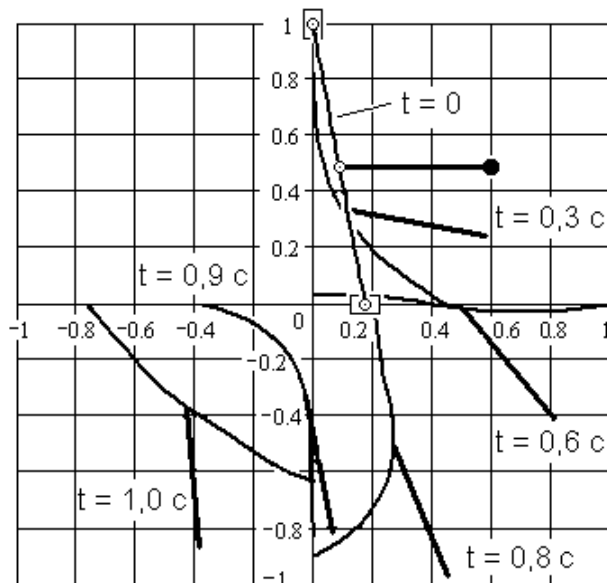


Рис. 2.6. Положения маятника во время движения

2.3.4. Движение гибкой линейки эллипсографа с маятником

На Рис. 2.7 приведен пример движения простейшей гибридной системы, состоящей из гибкой линейки эллипсографа (20 КЭ) и подвешенного к её середине маятника (твёрдое тело).



Параметры:

линейки: $L = 1 \text{ м};$

$\mu = 7800 \text{ кг/м}^3;$

$F = 10^{-4} \text{ м}^2;$

$J = 10^{-8} \text{ м}^4;$

$E = 10^8 \text{ Па};$

маятника: $L_l = 0,5 \text{ м};$

$m_l = 0,2 \text{ кг};$

$J_l = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$

интегрирования: $h = 10^{-4} \text{ с};$

$T = 180 \text{ с}.$

Рис. 2.7. Движение эллипсографа с маятником

В задачах статики систем с большими перемещениями метод абсолютных координат имеет преимущества перед методом, использующим конечные углы поворота в качестве координат. При моделировании динамики нелинейных систем это преимущество сохраняется за счёт постоянства матриц масс конечных элементов.

2.4. НОВЫЙ ПЛАСТИНЧАТЫЙ ЭЛЕМЕНТ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕНИЯ ФОРМАЛИЗМА АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТ

Как уже упоминалось в п. 1.2.3, ранее была предложена реализация конечного элемента толстой пластины в формализме абсолютных координат (Шабана и Миккола [36]). В этой работе были использованы трёхмерные функции форм, и их элемент был, фактически, массивным телом. Авторы использовали соотношения механики сплошной среды в трёхмерном случае для вывода выражений для потенциальной энергии деформации пластины.

Здесь рассматриваются несколько предложенных автором моделей элементов-пластин [74, 73]: прямоугольные с 48-ю и 36-ю, а также треугольный элемент с 27-ю степенями свободы. Теория пластин Кирхгофа и нелинейные соотношения между перемещениями и деформациями используются для получения обобщённых упругих сил, а также дифференциальная геометрия поверхностей для вычисления деформаций и кривизн.

Предложенный элемент способен описывать большие движения и допускает большие относительные деформации.

2.4.1. Узловые векторы и функции форм конечного элемента тонкой пластины

Начнём рассмотрение пластинчатых элементов с прямоугольного эрмита элемента с размерами a , b , h (длина, ширина, толщина), см. Рис. 2.8.

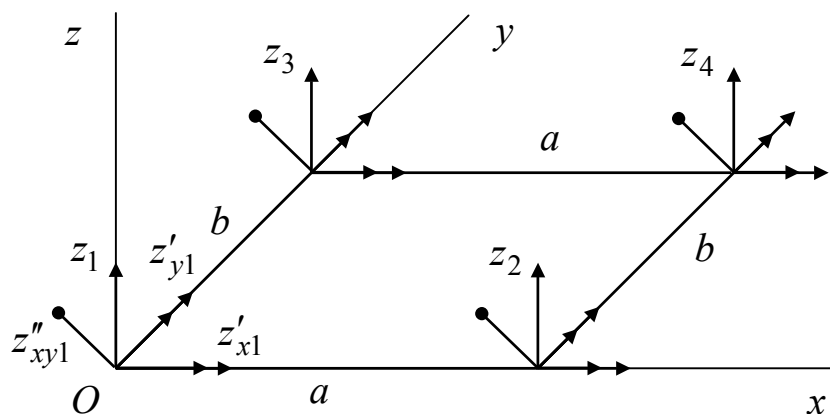


Рис. 2.8. Стандартный элемент пластины

В каждом из четырёх его узлов вводятся четыре степени свободы: например, мы имеем вертикальное перемещение z_1 для узла 1, два наклона $z'_{x1} = (\partial z / \partial x)_1$ и $z'_{y1} = (\partial z / \partial y)_1$, а также вторую производную $z''_{xy1} = (\partial^2 z / \partial x \partial y)_1$. Поле перемещений пластины выражается через узловые перемещения и функции форм следующим образом [67]:

$$z(x, y) = \{S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}; \dots; S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}\} \mathbf{q}$$

с использованием функций Эрмита $S_{ij}(x, y) = s_i(x) s_j(y)$, построенных из балочных функций. \mathbf{q} – это вектор узловых степеней свободы:

$$\mathbf{q} = \{z_1, z'_{y1}, z_3, z'_{y3}, z'_{x1}, z''_{xy1}, z'_{x3}, z''_{xy3}, z_2, z'_{y2}, z_4, z'_{y4}, z'_{x2}, z''_{xy2}, z'_{x4}, z''_{xy4}\}^T$$

Следуя тем же путём, как и в пункте 2.1, мы заменяем поле перемещений $z(x, y)$ тремя функциями $x(p_1, p_2)$, $y(p_1, p_2)$, $z(p_1, p_2)$, описывающими параметризованную поверхность $\mathbf{r}(p_1, p_2)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{e} \quad (2.14)$$

с матрицей глобальных функций форм

$$\mathbf{S} = [S_{11}\mathbf{I}, S_{12}\mathbf{I}, S_{13}\mathbf{I}, S_{14}\mathbf{I}; \dots; S_{41}\mathbf{I}, S_{42}\mathbf{I}, S_{43}\mathbf{I}, S_{44}\mathbf{I}] \quad (2.15)$$

$$S_{ij} = s_i(p_1, a) s_j(p_2, b) = \hat{s}_i \hat{s}_j.$$

Здесь введена единичная матрица \mathbf{I} размером 3×3 , а также балочные функции форм ($\xi = p/\ell$)

$$\begin{aligned} s_1(p, \ell) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & s_3(p, \ell) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ s_2(p, \ell) &= \ell(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & s_4(p, \ell) &= \ell(\xi^3 - \xi^2). \end{aligned}$$

Вектор узловых координат, используемый в выражении (2.14) имеет вид

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{r}_{00}^{00} \mathbf{r}_{00}^{01} \mathbf{r}_{0b}^{00} \mathbf{r}_{0b}^{01} \mathbf{r}_{00}^{10} \mathbf{r}_{00}^{11} \mathbf{r}_{0b}^{10} \mathbf{r}_{0b}^{11} \mathbf{r}_{a0}^{00} \mathbf{r}_{a0}^{01} \mathbf{r}_{ab}^{00} \mathbf{r}_{ab}^{01} \mathbf{r}_{a0}^{10} \mathbf{r}_{a0}^{11} \mathbf{r}_{ab}^{10} \mathbf{r}_{ab}^{11}\}^T, \quad (2.16)$$

где опущены знаки транспонирования над \mathbf{r}_{uv}^{ij} . Элементы \mathbf{r}_{uv}^{ij} – это векторы

$$\mathbf{r}_{uv}^{ij} = \left. \frac{\partial^{i+j} \mathbf{r}}{\partial p_1^i \partial p_2^j} \right|_{\substack{p_1=u \\ p_2=v}}, \quad (2.17)$$

являющиеся либо векторами узловых перемещений углов пластины (когда $i = j = 0$), либо касательными векторами (когда $i + j = 1$), либо векторами вторых производных (когда $i + j = 2$). Их геометрический смысл ясен из Рис. 2.9.

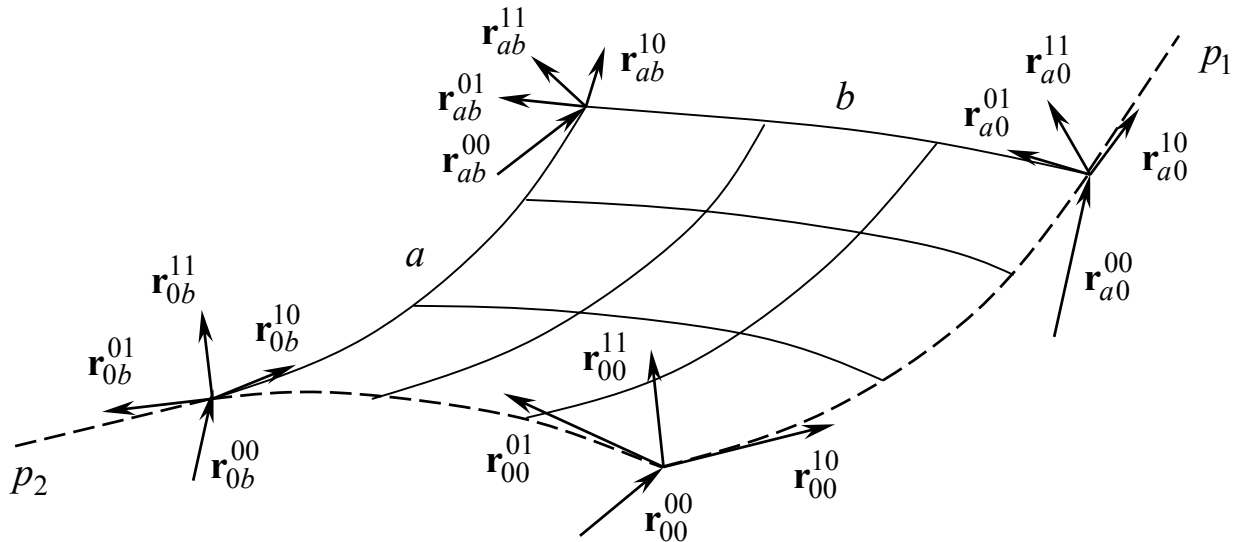


Рис. 2.9. Узловые векторы конечного элемента пластины.

Далее для элементов вектора \mathbf{e} используются обозначения $\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{14}, \dots, \dots, \mathbf{e}_{41}, \mathbf{e}_{42}, \mathbf{e}_{43}, \mathbf{e}_{44}$. Представленный набор двумерных функций формы элемента пластины является декартовым произведением одномерных балочных функций. Тот факт, что выражения разделены относительно p_1, p_2 , имеет определённое преимущество для нашего исследования: это позволяет свести двойное интегрирование по поверхности пластины к однократным интегралам при вычислении обобщённых сил. Однако есть и некоторые неудобства при использовании этих функций формы из-за присутствия вторых производных, которые увеличивают число степеней свободы элемента с 36 до 48 и не имеют ясного геометрического смысла. Ниже в п. 2.6.2 показана возможность исключения этих переменных из набора узловых координат (2.16).

2.4.2. Матрица масс элемента пластины

Выражение для матрицы масс пластины имеет в блочной форме вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} \end{bmatrix},$$

где каждый блок \mathbf{M}_{ij} – также блочная матрица⁹

⁹ Соглашения об использовании многоиндексных обозначений описаны в приложении 6.1.

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij11} & \mathbf{M}_{ij12} & \mathbf{M}_{ij13} & \mathbf{M}_{ij14} \\ \mathbf{M}_{ij21} & \mathbf{M}_{ij22} & \mathbf{M}_{ij23} & \mathbf{M}_{ij24} \\ \mathbf{M}_{ij31} & \mathbf{M}_{ij32} & \mathbf{M}_{ij33} & \mathbf{M}_{ij34} \\ \mathbf{M}_{ij41} & \mathbf{M}_{ij42} & \mathbf{M}_{ij43} & \mathbf{M}_{ij44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{ijkl} = M_{ijkl} \mathbf{I}, \quad (2.18)$$

$$M_{ijkl} = \iint_P \mu S_{ik} S_{jl} dP = \mu \iint_P \hat{s}_i \hat{s}_k \hat{s}_j \hat{s}_l dP$$

$$= \mu \int_0^a \hat{s}_i \hat{s}_j dp_1 \int_0^b \hat{s}_k \hat{s}_l dp_2 = \mu \hat{S}_{ij}^{00} \hat{S}_{kl}^{00}.$$

Элементы матриц с крышками пропорциональны элементам матрицы масс для балки (2.3).

Матрица $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ также легко вычисляется:

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = [\bar{\bar{S}}_{11} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{12} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{13} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{14} \mathbf{I}, \dots, \bar{\bar{S}}_{41} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{42} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{43} \mathbf{I}, \bar{\bar{S}}_{44} \mathbf{I}],$$

$$\bar{\bar{S}}_{ij} = \iint_P S_{ij} dP = \iint_P \hat{s}_i \hat{s}_j dP = \int_0^a \hat{s}_i dp_1 \int_0^b \hat{s}_j dp_2 = \hat{S}_i^0 \hat{S}_j^0, \quad (2.19)$$

причём символы с крышками по-прежнему пропорциональны балочным.

Таким образом, получены почти все компоненты уравнений движения элемента пластины, за исключением обобщённых упругих сил \mathbf{Q}^e , которые наиболее трудоёмки из-за сложности выражения для потенциальной энергии.

2.4.3. Энергия деформации пластины

Следуя теории пластин Кирхгофа, энергию деформации ортотропной пластины мы разделим на энергию деформаций пластины в срединной поверхности и энергию изгиба [9, 62]:

$$\Pi = \Pi^\varepsilon + \Pi^\kappa,$$

$$\Pi^\varepsilon = \frac{6}{h^2} \iint_P \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ij} \varepsilon_{ij}^2 + 2D_{22}^{11} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \right) dP, \quad (2.20)$$

$$\Pi^\kappa = \frac{1}{2} \iint_P \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ij} \kappa_{ij}^2 + 2D_{22}^{11} \kappa_{11} \kappa_{22} \right) dP. \quad (2.21)$$

Эти формулы содержат, во-первых, параметры упругости материала: цилиндрические жёсткости D_{11} , D_{22} и жёсткость на кручение D_{12} :

$$D_{11} = \frac{E_{11} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{E_{12} h^3}{6}, \quad (2.22)$$

а также коэффициент жёсткости $D_{22}^{11} = 0,5(D_{11}\nu_{21} + D_{22}\nu_{12})$. Эти жёсткости зависят от модулей Юнга на растяжение E_{11} , E_{22} и на сдвиг E_{12} , а также от коэффициентов Пуассона ν_{12} и ν_{21} , причём $E_{11}\nu_{21} = E_{22}\nu_{12}$.

Во-вторых, энергия деформации содержит геометрические характеристики: продольные деформации ε_{11} , ε_{22} , сдвиговую деформацию $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, а также кривизны κ_{11} , κ_{22} и кручение срединной поверхности $\kappa_{12} = \kappa_{21}$.

Используя соотношения из дифференциальной геометрии поверхностей [10], вычислим для нашей параметризованной срединной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p_1, p_2)$ деформации

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j - \delta_{ij}) \quad (2.23)$$

с символами Кронекера δ_{ij} , а также кривизны

$$\kappa_{ij} = \mathbf{r}_{ij}^T \mathbf{n} / \|\mathbf{n}\|^3 \quad (2.24)$$

с вектором нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Другие использованные обозначения:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} = S_{mn}^i \mathbf{e}_{mn}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial p_i \partial p_j} = S_{mn}^{ij} \mathbf{e}_{mn}. \quad (2.25)$$

(Подразумевается суммирование по m и n).

Вычислив градиенты потенциальных энергий (2.20) и (2.21), получим векторы обобщённых продольных и поперечных сил. Эти громоздкие вычисления в различных вариантах были проведены в работе [73], см. п. 2.4.4.

Покажем, что уравнение (2.23) выражает нелинейные соотношения Грина между перемещениями и деформациями [8, 9]. Действительно, представим, что деформированное состояние пластины задано уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1(p_1, p_2) \\ u_2(p_1, p_2) \\ u_3(p_1, p_2) \end{Bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{u}^* определяет начальную (плоскую) форму пластины, а \mathbf{u} соответствует отклонениям от неё. Если мы применим зависимости (2.23), то получим компоненты тензора деформации поверхности, содержащие как линейные, так и квадратичные члены, что и требовалось показать:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial p_i} + \frac{\partial u_i}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial p_i} \frac{\partial u_k}{\partial p_j} \right), \quad i, j = 1 \dots 2.$$

Точно также можно убедиться [72, 73], что выражение (2.24) даёт правильное значение компонентов тензора кривизны поверхности, линейные члены которых совпадают с используемыми в теории малых деформаций.

2.4.4. Модели обобщённых сил от деформаций в срединной поверхности пластины

Искомые обобщённые силы – это градиенты энергии деформации (2.20):

$$\mathbf{Q}_{kl}^\varepsilon = \frac{\partial U^\varepsilon}{\partial \mathbf{e}_{kl}} = \frac{12}{h^2} \iint_P \left(D_{ij} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} + D_{22}^{11} \left\langle \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} \right\rangle \right) dP. \quad (2.26)$$

Продольные и сдвиговые деформации (2.23) и их градиенты с учётом соотношения (2.14) принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}_{mn}^\top S_{mnpq}^{i \otimes j} \mathbf{e}_{pq} - \delta_{ij} \right), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} = S_{klrs}^{i \otimes j} \mathbf{e}_{rs}, \quad (2.28)$$

где введены символы $S_{mnpq}^{i \otimes j} = \frac{1}{2} \left(S_{mn}^i S_{pq}^j + S_{mn}^j S_{pq}^i \right)$.

Несколько моделей обобщённых сил вида (2.26), имеющие различную сложность, были получены с учётом различных допущений. Приведём одну из них, модель L^3 , как наиболее зарекомендовавшую себя в расчётах.

В модели L^3 не используются никакие упрощения для вычисления компонент деформации срединной поверхности (2.27). После интегрирования выражения для обобщённых сил (2.26) будут *кубическими* по координатам \mathbf{e} :

$$\mathbf{Q}_{kl}^\varepsilon = \mathbf{K}_{klmn}^\varepsilon \mathbf{e}_{mn}, \quad (2.29)$$

с использованием следующей матрицы жёсткости:

$$\mathbf{K}_{klmn}^\varepsilon = \left(\bar{\bar{K}}_{klmn}^{pqrs} \mathbf{e}_{pq}^\top \mathbf{e}_{rs} - \bar{\bar{K}}'_{klmn} \right) \mathbf{I}, \quad (2.30)$$

где $\bar{\bar{K}}_{klrs}^{mnpq} = \frac{6}{h^2} \left(D_{ij} \bar{\bar{S}}_{klrs;mnpq}^{i \otimes j; i \otimes j} + D_{22}^{11} \left(\bar{\bar{S}}_{klrs;mnpq}^{1 \otimes 1; 2 \otimes 2} + \bar{\bar{S}}_{klrs;mnpq}^{2 \otimes 2; 1 \otimes 1} \right) \right),$

$$\bar{\bar{K}}'_{klrs} = \frac{6}{h^2} \delta_{ij} \left(D_{ij} + D_{22}^{11} \right) \bar{\bar{S}}_{klrs}^{i \otimes j}.$$

Здесь символы $\bar{S}_{klrs}^{i\otimes j} = \iint_P S_{klrs}^{i\otimes j} dP$ и $\bar{S}_{klrs;mnpq}^{i\otimes j; i\otimes j} = \iint_P S_{klrs}^{i\otimes j} S_{mnpq}^{i\otimes j} dP$ имеют значения, приведенные в приложении 6.8.

Как и в случае с балочными элементами (п. 2.2.1), для эффективного решения жёстких уравнений движения необходимо вычислять матрицы Якоби от обобщённых сил. Это производится достаточно просто:

$$\mathbf{C}_{klmn}^\varepsilon = \frac{\partial \mathbf{Q}_{kl}^\varepsilon}{\partial \mathbf{e}_{mn}^\mathrm{T}} = \mathbf{K}_{klmn}^\varepsilon + 2\bar{K}_{klrs}^{mnpq} \mathbf{e}_{rs} \mathbf{e}_{pq}^\mathrm{T}.$$

2.4.5. Модели обобщённых сил от поперечных деформаций

Данная часть обобщённых сил является градиентом энергии (2.21):

$$\mathbf{Q}_{kl}^\kappa = \frac{\partial U^\kappa}{\partial \mathbf{e}_{kl}} = \iint_P \left(D_{ij} \kappa_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} + D_{22}^{11} \left\langle \kappa_{11} \frac{\partial \kappa_{22}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} + \frac{\partial \kappa_{11}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} \kappa_{22} \right\rangle \right) dP. \quad (2.31)$$

Вычислим кривизны (2.24) срединной поверхности и их производные¹⁰:

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} &= \mathbf{r}_{ij}^\mathrm{T} \mathbf{n} / f^3, \quad f = \|\mathbf{n}\| = \sqrt{\mathbf{n}^\mathrm{T} \mathbf{n}}, \\ \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} &= \frac{1}{f^3} \left(\left[\frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}^\mathrm{T}} \right]^\mathrm{T} \mathbf{n} + \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{e}_{kl}^\mathrm{T}} \right]^\mathrm{T} \mathbf{r}_{ij} \right) - \frac{3}{f^4} (\mathbf{r}_{ij}^\mathrm{T} \mathbf{n}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_{kl}}, \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_{kl}} &= \frac{1}{f} \left[\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{e}_{kl}^\mathrm{T}} \right]^\mathrm{T} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Различные модели поперечных сил были разработаны в работе [73]. Приведём здесь описание одной из них, модели T^2 . В ней реализована идея усреднить вектор нормали $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ по поверхности пластины, чтобы упростить подынтегральное выражение в (2.31). Примем, что вектор средней нормали к пластине равен среднему арифметическому нормалей в её углах¹¹:

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{4} (\mathbf{e}_{21} \times \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{41} \times \mathbf{e}_{32} + \mathbf{e}_{23} \times \mathbf{e}_{14} + \mathbf{e}_{43} \times \mathbf{e}_{34}), \quad \bar{f} = \|\bar{\mathbf{n}}\| = \sqrt{\bar{\mathbf{n}}^\mathrm{T} \bar{\mathbf{n}}}.$$

Тогда производные в формулах (2.32) принимают явный вид

¹⁰ Здесь используются операции дифференцирования вектора по строке координат, их матрицы Якоби, а также другие абстракции, описанные в приложении 6.1.

¹¹ См. Рис. 2.9 и примечание после формулы (2.16).

$$\left[\frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{e}_{kl}^T} \right]^T \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{b}_{kl} \times \mathbf{r}_{ij}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} = \frac{1}{\bar{f}} \mathbf{b}_{kl} \times \bar{\mathbf{n}},$$

$$\mathbf{b}_{kl} = \begin{cases} +\frac{1}{4} \mathbf{e}_{k-1, l+1} & \text{for } \{k, l\} \in \{\{2, 1\}, \{4, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 3\}\}, \\ -\frac{1}{4} \mathbf{e}_{k+1, l-1} & \text{for } \{k, l\} \in \{\{1, 2\}, \{3, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}, \\ \mathbf{0} & \text{for the rest combinations of } k, l, \end{cases}$$

и, наконец, $\frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial \mathbf{e}_{kl}} = \frac{1}{\bar{f}^3} \left(S_{kl}^{ij} \bar{\mathbf{n}} + S_{mn}^{ij} \mathbf{b}_{kl} \times \mathbf{e}_{mn} \right) + \frac{3}{\bar{f}^5} S_{mn}^{ij} \left(\mathbf{e}_{mn}^T \bar{\mathbf{n}} \right) \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{b}_{kl}.$

Подставляя вычисленные кривизны и их градиенты в выражение (2.31), получим обобщённые силы, которые квадратичны по \mathbf{e} :

$$\mathbf{Q}_{kl}^\kappa = \frac{1}{\bar{f}^3} (\mathbf{e}_{pq}^T \bar{\mathbf{n}}) \left(\bar{S}_{klpq}^* \bar{\mathbf{n}} + \bar{S}_{mnpq}^* \mathbf{b}_{kl} \times \mathbf{e}_{mn} + \frac{3}{\bar{f}^2} (\mathbf{e}_{mn}^T \bar{\mathbf{n}}) \bar{S}_{mnpq}^* \bar{\mathbf{n}} \times \mathbf{b}_{kl} \right),$$

$$\bar{S}_{mnpq}^* = D_{ij} \bar{S}_{mnpq}^{ijij} + D_{22}^{11} \left(\bar{S}_{mnpq}^{1122} + \bar{S}_{mnpq}^{2211} \right),$$

явные выражения для символов \bar{S}_{mnpq}^{ijij} находятся в приложении 6.8.

Эти силы могут быть записаны в виде $\mathbf{Q}_{kl}^\kappa = \mathbf{K}_{klpq}^\kappa \mathbf{e}_{pq}$, как в случае продольных сил (2.29). Кроме того, расчёты показывают¹², что эти выражения могут быть значительно упрощены удерживанием лишь первого слагаемого:

$$\mathbf{Q}_{kl}^\kappa \approx \frac{1}{\bar{f}^3} (\mathbf{e}_{pq}^T \bar{\mathbf{n}}) \bar{S}_{klpq}^* \bar{\mathbf{n}}.$$

Также при моделировании используется следующее упрощённое выражение для матрицы Якоби этих сил:

$$\mathbf{C}_{klmn}^\kappa = \frac{\partial \mathbf{Q}_{kl}^\kappa}{\partial \mathbf{e}_{mn}^T} \approx \frac{1}{\bar{f}^3} \bar{S}_{klmn}^* \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{n}}^T.$$

2.5. ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕМБРАН И ПЛАСТИН

В этом пункте приведены результаты решения тестовых задач, в которых проверялась адекватность полученных моделей пластинчатых элементов. Сравнение с результатами натурных экспериментов проведено в главе 3. Численные эксперименты выполнялись на программном комплексе УМ¹³, где реализованы описанные конечные элементы пластины.

¹² Результаты вычислений с использованием полного и сокращённого выражений с высокой точностью совпадают.

¹³ Ссылку на программу см. в п. 2.3.

2.5.1. Статические деформации тяжёлой мембраны

Целью данного теста была проверка как возможностей функций форм, так и сходимости результатов. Первая модель представляла собой тяжёлую эластичную квадратную мембрану с параметрами: размеры $a \times b \times h = 1 \times 1 \times 0,01$ м, плотность материала $\mu = 1000$ кг/м³, модуль Юнга $E = 10^5$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Мембрана подвешена за три своих угла, так что четвёртый свободно свисает – точка E на Рис. 2.10. Для вычисления обобщённых упругих сил использовалась модель L^3 .

На рисунке приведены положения мембраны в положении равновесия при использовании различного числа конечных элементов.

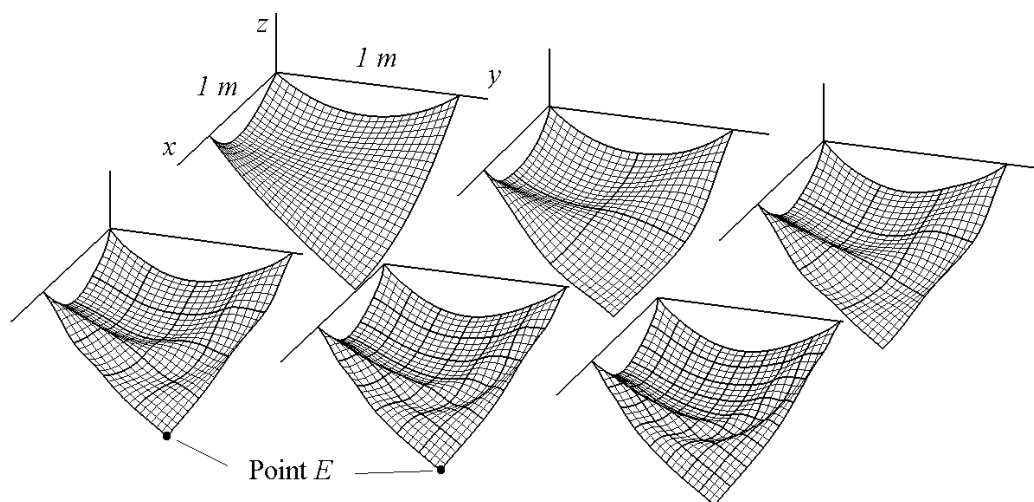
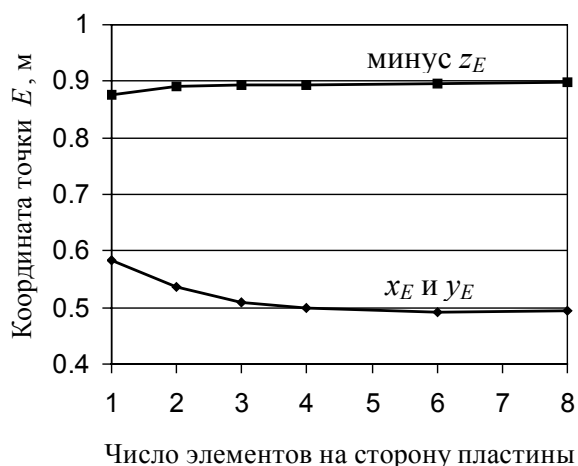


Рис. 2.10. Тяжёлая мембрана, подвешенная за три угла:
 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 6^2$ и 8^2 конечных элементов

Как видно из рисунка, форма положения равновесия сходится плохо.



Это объясняется тем, что её предельное состояние соответствует излому поверхности мембраны из-за отсутствия изгибной жёсткости, а гладкие функции формы не могут описать этого. Иначе говоря, данная задача плохо обусловлена. Тем не менее, значения координат точки E сходятся хорошо, Рис. 2.11.

Рис. 2.11. Сходимость координат точки E

На Рис. 2.12 мембрана размерами $2 \times 1 \times 0,01$ м подвешена за все свои четыре угла. Эта хорошо обусловленная задача показывает хорошую сходимость как формы равновесия, так и координат точки E ($z_E \rightarrow -0,58$ м).

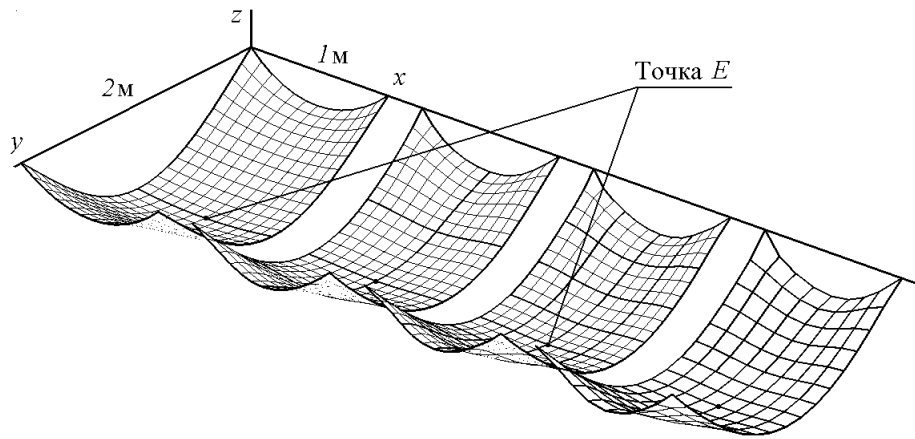


Рис. 2.12. Тяжёлая мембрана, подвешенная за 4 угла:
 2×1 , 4×2 , 8×4 и 16×8 конечных элементов

Последующие примеры посвящены тестированию собственно пластин с ненулевой изгибной жёсткостью. Рассмотрены статические и динамические задачи, а также анализ собственных частот колебаний пластины.

2.5.2. Большие прогибы квадратной пластины

На Рис. 2.13 показана форма равновесия квадратной пластины¹⁴ со стороной 1 м, нагруженной равномерной нагрузкой интенсивностью q . Рассмотрены 4 варианта в зависимости от условий опирания краёв пластины.

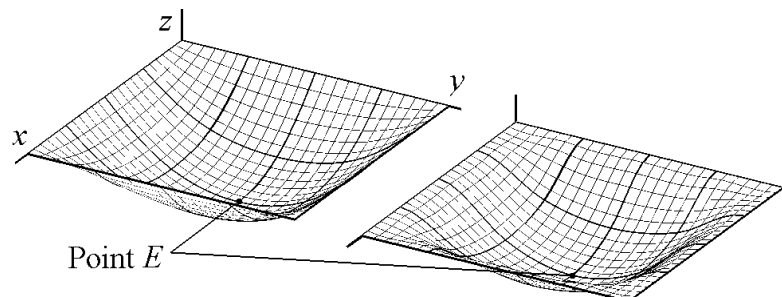


Рис. 2.13. Свободно опёртая и жёстко заделанная пластины

¹⁴ Перемещения пластины увеличены примерно в 100 раз; они малы по абсолютной величине, но, тем не менее, они больше толщины пластины (см. Табл. 2.3), и, следовательно, с точки зрения теории пластин это – задача с большими перемещениями, описываемая нелинейными уравнениями Кáрманa [9].

В Табл. 2.3 отражены безразмерные перемещения $\bar{z}_E = z_E/h > 1$ центра E пластины под действием безразмерной нагрузки $\bar{q} = qa^4/Eh^4$. Здесь a и h – размер и толщина пластины, E – модуль Юнга. Значение коэффициента Пуассона принято равным 0,3. Точные значения перемещений приведены в [9].

Табл. 2.3. Прогибы пластины под действием равномерной нагрузки

Свободно опёртая пластина, $\bar{q} = 216,5$			Жёстко заделанная пластина, $\bar{q} = 486,5$		
Число элемен- тов	Края		Число элемен- тов	Края	
	Сколь- зящие	Фикси- рован- ные		Сколь- зящие	Фикси- рован- ные
1×1	2,54	1,69	1×1	3,51	2,28
2×2	3,19	1,73	2×2	3,23	2,19
4×4	3,20	1,69	4×4	2,93	1,96
8×8	3,41	1,69	8×8	3,03	2,00
16×16	3,47	1,69	16×16	3,05	1,99
32×32	3,46	1,69	32×32	3,05	1,99
∞ (точно)	3,45	1,67	∞ (точно)	3,05	1,98

Результаты сравнения можно назвать хорошими.

2.5.3. Частоты собственных колебаний пластины

Здесь рассматриваются малые колебания пластины, составленной из конечных элементов, около её положения равновесия. Пусть \mathbf{e}_0 – вектор узловых координат в положении равновесия, которое считается прямолинейным, то есть силами тяжести пренебрегаем. Тогда в процессе движения полный вектор координат равен $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$, где \mathbf{e}_1 – вектор отклонений, который считаем малым. Уравнения движения (2.2), линеаризованные в окрестности \mathbf{e}_0 относительно \mathbf{e}_1 , принимают вид

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{C}_0 \mathbf{e}_1 = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{e}_0)$ – матрица масс и матрица Якоби $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}(\mathbf{e}_0)$ сил (т.н. касательная матрица жёсткости), вычисленные в положении равновесия и с учётом граничных условий, как описано в пункте 6.3.

Выполнив разложение Холецкого [1] указанных матриц на треугольные сомножители, $\mathbf{C}_0 = \mathbf{L}_C \mathbf{L}_C^T$, после некоторых стандартных преобразований придём к известной задаче $(\mathbf{A} - \omega^2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ с положительно определённой матрицей $\mathbf{A} = (\mathbf{L}_M^{-1} \mathbf{L}_C)(\mathbf{L}_M^{-1} \mathbf{L}_C)^T$. Собственные значения ω и векторы \mathbf{x} определяются с использованием QR -алгоритма [1], реализованного в программном комплексе «Универсальный механизм».

Для проведения численных экспериментов были выбраны следующие параметры пластины: размеры $a \times b \times h = 1 \times 1 \times 10^{-3}$ м, плотность материала $\mu = 4959,23$ кг/м³, модуль Юнга $E = 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В Табл. 2.4 представлены результаты расчёта трёх низших частот пластины для двух вариантов закрепления – для пластины, свободно опёртой по краям, как на Рис. 2.13 слева, и для пластины, жёстко заделанной по краям (справа). Расчёты проведены для различного числа конечных элементов.

Табл. 2.4. Частоты свободных колебаний пластины

Свободно опёртая пластина				Жёстко заделанная пластина			
Число элементов	Частота, рад/с			Число элементов	Частота, рад/с		
	1	2	3		1	2	3
1×1	9,01	25,4	39,78	1×1	9,01	25,35	39,78
2×2	8,50	22,8	36,06	2×2	14,7	33,33	36,06
4×4	8,48	21,3	34,00	4×4	15,1	31,00	44,86
6×6	8,48	21,2	33,94	6×6	15,4	31,30	45,68
8×8	8,48	21,2	33,93	8×8	15,4	31,43	46,10
12×12	8,48	21,2	33,93	12×12	15,5	31,50	46,37
∞ (exact)	8,48	21,2	33,93	∞ (exact)	15,5	31,53	46,57
Коэффициенты				Коэффициенты			
<i>A</i>	3,14	7,85	12,57	<i>λ</i>	5,72	11,68	17,23

Выделенные жирным шрифтом значения соответствуют точному решению, вычисляемому согласно [59] по формуле $\omega_i = 2\pi\lambda_i \sqrt{D/\mu}/a^2$. Числовые значения коэффициентов λ_i представлены в таблице. Как видно из таблицы, с увеличением количества конечных элементов частоты модели достаточно быстро стремятся к точным значениям.

2.5.4. Движение маятника в виде эластичной пластины

Пример на Рис. 2.14 был смоделирован с целью сравнения с результатами, полученными Микколой и Шабаной [36]. Тяжёлая эластичная пластина с одной закреплённой точкой совершает колебания подобно маятнику. Параметры пластины: размеры $a \times b \times h = 0,3 \times 0,3 \times 0,01$ м, плотность материала $\mu = 7810$ кг/м³, модуль Юнга $E = 10^5$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

При решении использовались модели с различным числом конечных элементов. Результат: пластина пересекает сама себя при $t \approx 0,5$ с из-за больших сил инерции и малой жёсткости пластины. Этот факт противоречит результатам, полученным в работе [36], хотя на Рис. 2.14 наблюдается сходимость: ср. форму пластины при 1 и 8^2 элементах. «Хвост» пластины направлен вверх, в отличие от [36]. К сожалению, в указанной работе приведено решение лишь с одним конечным элементом, и трудно судить, в чём причина этих расхождений. Косвенным подтверждением правильности приведенных здесь результатов является похожесть поведения маятника-балки в п. 2.3.3.

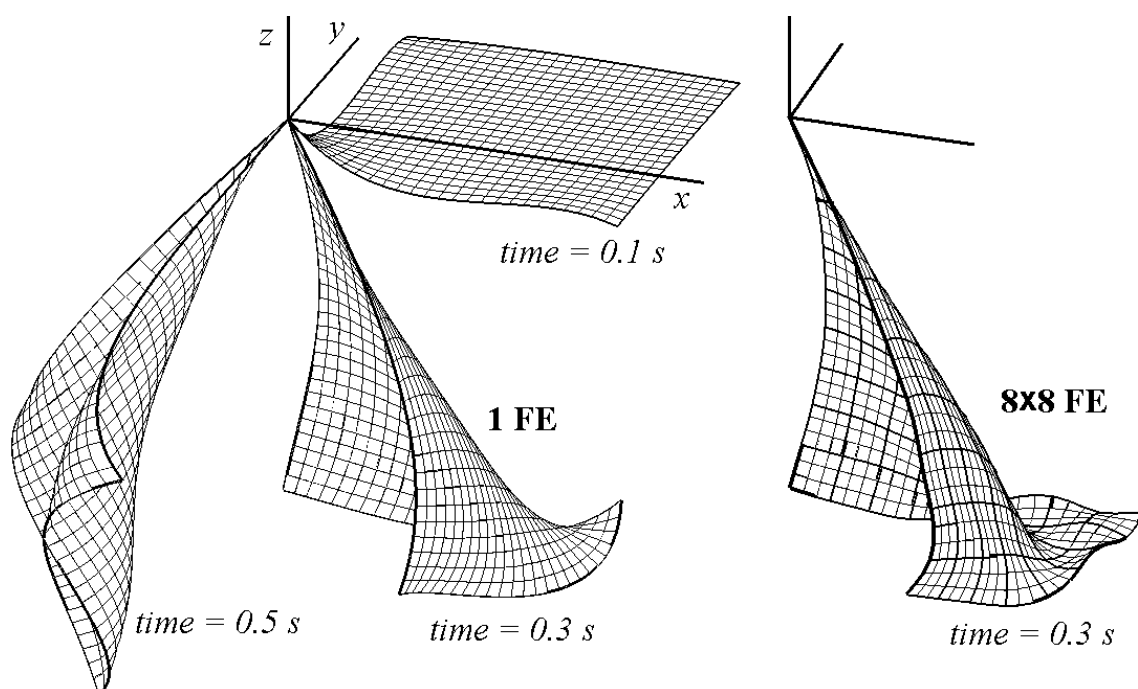


Рис. 2.14. Маятник в виде пластины: схлопывание при $t = 0,5$ с:

1 и 8×8 конечных элементов

2.6. ДРУГИЕ ТИПЫ НОВЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.6.1. Элемент пространственной балки

В работе [73] автором был предложен элемент пространственной тонкой балки, основанный на формализме абсолютных узловых координат.

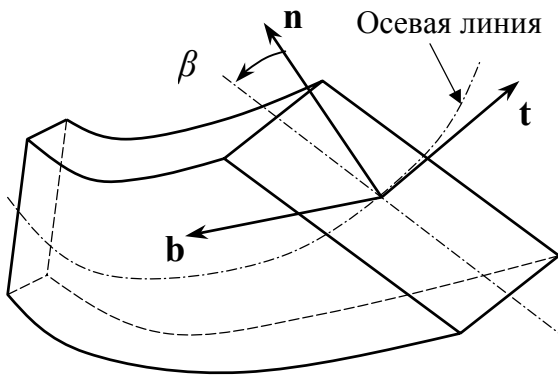
По аналогии с уравнением (1.39) для плоской балки, мы можем записать

$$\mathbf{r}(p) = \mathbf{S}(p)\mathbf{e}$$

с матрицей функций форм $\mathbf{S}(p) = [s_1\mathbf{I} \ s_2\mathbf{I} \ s_3\mathbf{I} \ s_4\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$ и вектором координат $\mathbf{e} = \left\{ \mathbf{r}_0^{0T} \ \mathbf{r}_0^{1T} \ \mathbf{r}_l^{0T} \ \mathbf{r}_l^{1T} \ \beta_0 \ \beta_1 \right\}^T$. Величины $\mathbf{r}_u^k = \partial^k \mathbf{r} / \partial p^k \Big|_{p=u}$

являются радиус-векторами и касательными векторами к осевой линии в концевых точках элемента, β_k – углы поворота сечений, l – длина элемента.

Функции форм здесь являются одномерными, в отличие от трёхмерных, предложенных Шабаной и Якубом [53], п. 1.2.4. Соответственно и число координат в предлагаемом элементе значительно меньше – 14 вместо 24. Это позволит более эффективно моделировать тонкие балки, для которых не нужно учитывать сдвиговые деформации в поперечном сечении.



Определение угла β_k поясняется на Рис. 2.15. Это угол поворота поперечного сечения балки относительно репера Френё осевой линии, состоящего из касательного вектора \mathbf{t} , нормали \mathbf{n} и бинормали \mathbf{b} [49, 53].

Рис. 2.15. Пространственная балка

Угол β интерполируется вдоль осевой линии: $\beta(p) = \beta_0(1 - p/l) + \beta_1 p/l$.

Для получения обобщённых сил упругости необходимо использовать следующее выражение для потенциальной энергии деформации [49]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EA\varepsilon^2 + EJ_1\kappa_1^2 + EJ_2\kappa_2^2 + GJ_t\tau^2 \right) dp.$$

Здесь введены следующие параметры:

- Продольная деформация $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{r}'^T \mathbf{r}'} - 1 \approx \frac{1}{2}(\mathbf{r}'^T \mathbf{r}' - 1)$ осевой линии балки с соответствующей продольной жёсткостью EA ;
- Кривизны $\kappa_1 = \kappa_0 \cos \beta$ и $\kappa_2 = \kappa_0 \sin \beta$ осевой линии по отношению к главным осям инерции площади поперечного сечения с изгибными жёсткостями EJ_1, EJ_2 и кривизной осевой линии $\kappa_0 = \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| / \|\mathbf{r}'\|^3$;
- Относительный угол закручивания поперечного сечения $\tau = \chi + \partial\beta/\partial p$, где $\chi = (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') / \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^3$ – кручение (вторая кривизна) осевой линии; GJ_t – жёсткость на кручение.

Обобщённые силы вычисляются как градиент потенциальной энергии. Реализация этого элемента планируется в ближайшем будущем.

2.6.2. Редуцированный прямоугольный элемент пластины

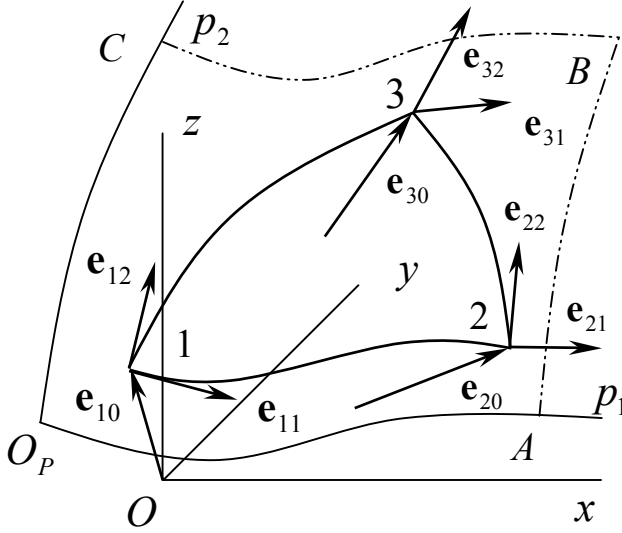
В пункте 2.4.1 было сказано, что вторые производные могут быть исключены из набора координат элемента пластины. Действительно, если трактовать элемент, показанный на Рис. 2.8, как стандартный элемент с 12-ю, а не с 16-ю степенями свободы и выполнить процедуру обобщения, описанную там же, мы получим следующее выражение для радиус-вектора:

$$\mathbf{r} = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=0}^2 S_{mn}^{(12)}(p_1, p_2) \mathbf{e}_{mn}. \quad (2.33)$$

Здесь радиус-векторы узлов пластины обозначены $\mathbf{e}_{m0} = \mathbf{r}_{u_m v_m}^{00}$, а касательные векторы – $\mathbf{e}_{m1} = \mathbf{r}_{u_m v_m}^{10}$, $\mathbf{e}_{m2} = \mathbf{r}_{u_m v_m}^{01}$; смысл величин $\mathbf{r}_{u_m v_m}^{ij}$ остаётся тем же, как и в уравнении (2.17), а также на Рис. 2.9. Стандартные функции форм $S_{mn}^{(12)}$ для 12-степенного элемента пластины приведены в различных справочниках, например [9, 67]. Очевидно, что выражение (2.33) идентично соотношению (2.14), поэтому все выкладки, проведенные ранее, будут справедливы и для данного прямоугольного элемента. Необходимо будет лишь повторно получить конкретные выражения для элементов уравнения движения.

Представленный здесь элемент уже не будет изопараметрическим, и конечные элементы будут соединяться друг с другом на кромках негладко. Однако, как показано во многих работах [9, 67], это не является существенным недостатком, и такие элементы успешно используются на практике.

2.6.3. Треугольный элемент пластины



Этот элемент основан на стандартном элементе с 9-ю степенями свободы, используемом в методе конечных элементов. Деформированное положение элемента показано на Рис. 2.16. Определим отображение из криволинейной системы координат $O_P p_1 p_2$ в декартову $Oxyz$, используя функции форм и узловых координат:

Рис. 2.16. Треугольный элемент

$$\mathbf{r} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=0}^2 S_{mn}(L_1, L_2, L_3) \mathbf{e}_{mn}, \quad (2.34)$$

где L_1, L_2, L_3 – однородные координаты, которые зависят от криволинейных координат p_1, p_2 : $L_i = \frac{1}{2\Delta}(c_{i1}p_1 + c_{i2}p_2 + c_{i3})$. Они зависимы: $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, [9, 67]. Δ – это площадь недеформированного элемента. Коэффициенты c_{ij} определяются значениями координат χ_k, γ_k трёх узлов элемента в СК $O_P p_1 p_2$:

$$c_{i1} = \gamma_j - \gamma_k, \quad c_{i2} = \chi_k - \chi_j, \quad c_{i3} = \chi_j \gamma_k - \chi_k \gamma_j.$$

Здесь используется циклическая перестановка Θ индексов: $\{i, j, k\} = \Theta(1, 2, 3)$. Явные выражения для функций форм даны в работе [67]:

$$\begin{aligned} S_{i1} &= L_i(1 - L_j^2 - L_k^2) + L_i^2(L_j + L_k), \\ S_{i2} &= L_i^2(c_{k2}L_j - c_{j2}L_k) + \frac{1}{2}L_iL_jL_k(c_{k2} - c_{j2}), \\ S_{i3} &= L_i^2(c_{j1}L_k - c_{k1}L_j) + \frac{1}{2}L_iL_jL_k(c_{j1} - c_{k1}). \end{aligned}$$

Выражение (2.34) идентично соотношению (2.14) для радиуса-вектора, поэтому все выкладки, проведенные для прямоугольного элемента, остаются справедливыми и для треугольного. Необходимо лишь учесть соотношения между координатами L_1, L_2, L_3 и p_1, p_2 при вычислении производных (2.25)

$$S_{mn}^j = \frac{\partial S_{mn}}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial S_{mn}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial S_{mn}}{\partial L_i} \frac{c_{ij}}{2\Delta},$$

$$S_{mn}^{ij} = \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial S_{mn}}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{c_{kj}}{2\Delta} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 S_{mn}}{\partial L_k \partial L_l} \frac{c_{li}}{2\Delta}.$$

Ценность треугольных элементов в том, что они позволяют моделировать пластину сложного очертания. Отметим также, что треугольный элемент на основе формализма абсолютных координат реализован впервые – ранее была известна лишь реализация прямоугольного элемента [36].

2.7. ПРЕИМУЩЕСТВА РАЗРАБОТАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Подытоживая содержание главы 2, отметим, что на основе оригинальной трактовки формализма абсолютных узловых координат разработаны новые конечные элементы тонких балок и пластин. Далее приведено короткое резюме и сравнение разработанных элементов с существующими.

1. Прямоугольный конечный элемент пластины. Число степеней свободы – 48, как и в существующей реализации Микколы и Шабаны [36], но за счёт использования вторых производных новый элемент обеспечивает непрерывность нормалей к поверхности при соединении нескольких элементов.

2. Прямоугольный элемент пластины с исключёнными вторыми производными. По функциональности он соответствует упомянутому элементу Микколы и Шабаны, однако имеет меньшее число степеней свободы – 36.

3. Треугольный элемент пластины, не имеющий аналогов в формализме абсолютных узловых координат. Имеет 27 степеней свободы и позволяет моделировать пластины с произвольным контуром.

4. Элемент тонкой балки в пространстве. Имеет 14 степеней свободы, в отличие от элемента толстой балки, предложенной Шабаной и Якубом [53], имеющего 24 степени свободы.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ФИЗИЧЕСКИМИ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Адекватность новой теории или модели предполагает, что эта модель должна быть способна дать верное решение задач, решение которых известно. В пунктах 2.3 и 2.5 приведены тестовые расчёты для известных задач; они показывают достаточную степень достоверности результатов моделирования.

Эта глава посвящена моделированию задач, которые не поддаются аналитическому решению. Речь будет идти о консольной балке и консольной пластине, к свободным концам которых прикреплены грузы, под действием которых происходят колебания с большой амплитудой (более 80% длины). Численные решения, полученные с использованием разработанных моделей балки и пластины, сравниваются с данными экспериментальных измерений (видеосъёмки), полученных на натурных испытательных установках. Эти исследования были проведены в октябре-ноябре 2002 г. в Пусанском национальном университете, г. Пусан, Южная Корея. Коллектив лаборатории Computer-Aided Engineering (CAE) Lab под руководством профессора Ван-Сок Ю (Wan-Suk YOO) обеспечивал экспериментальную часть исследований, в то время как расчётная часть была в ответственности автора. Результаты проведенных совместных исследований отражены в работах [69, 70, 71, 72].

3.1. БОЛЬШИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С ГРУЗОМ

3.1.1. Описание экспериментальной установки

Основной задачей экспериментов было определение координат конца балки как функций времени для последующего сравнения их с расчётами.

Для определения перемещений часто используют акселерометр, который крепится к изучаемой точке. Но в данном случае его применение было бы неэффективным по нескольким причинам. Во-первых, в качестве балки использовалась тонкая проволока, масса которой составляла порядка не-

скольких грамм, что сравнимо с весом датчика. Во-вторых, при больших колебаниях балки вектор ускорения её конца изменяется по направлению, что негативно сказывается на точности измерений. И, в-третьих, получение перемещений по известным ускорениям является нетривиальной задачей из-за проблем интегрирования сигнала с шумом.

По этим соображениям в качестве измерительного средства была использована скоростная цифровая видеокамера REDLAKE Motion Scope 1000s. Максимальная скорость съёмки её равна 1000 кадров в секунду, но в экспериментах использовалась скорость 125 кадров в секунду.

Общая схема экспериментальной установки для исследования колебаний консольной балки с грузом приведена на Рис. 3.1.

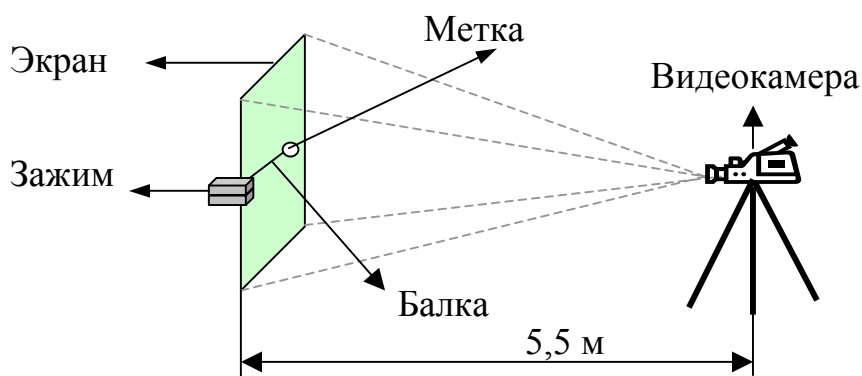


Рис. 3.1. Схема экспериментальной установки

Для моделирования балки использовалась тонкая проволока диаметром 0,6 и 1,0 мм из пружинной стали. Это обеспечило возможность получения больших упругих деформаций без появления заметных остаточных деформаций. Для фиксации балки применялся тяжёлый зажим из двух металлических брусков, скреплённых болтами; к свободному концу проволоки приклеивалась бумажная метка с целью её последующей трассировки, Рис. 3.2 а,б.

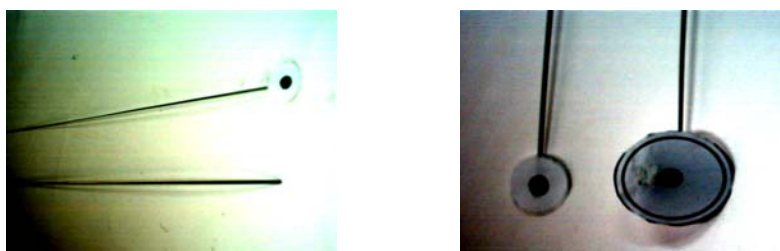


Рис. 3.2. Балка из тонкой проволоки с бумажной мишенью

После съёмки эксперимента видеокамерой, данные обрабатывались с помощью специальной программы, которая определяла координаты метки в каждый момент времени.

3.1.2. Идентификация параметров установки

Геометрические размеры балки доступны для непосредственного измерения. Точно также несложно определить плотность материала балки, взвесив её. Определение же модуля Юнга с помощью испытания на растяжение затруднено из-за малости диаметра проволоки. Поэтому с этой целью проводился эксперимент по замеру частоты малых колебаний балки.

Первые частоты свободных колебаний консольной балки определяются по формуле [9]

$$\omega_k = \beta_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A l^4}}, \quad (3.1)$$

где для первой частоты $\beta_1 = 1,875$, а для второй частоты $\beta_2 = 4,694$.

Для экспериментального определения частоты колебаний консольной балки возбуждались её малые колебания, и движение записывалось видеокамерой. Затем движение бумажной метки на конце балки сканировалось специальной программой, и получалась осциллограмма вертикальных перемещений. Из этой осциллограммы выделялись первые две частоты путём выполнения преобразования Фурье [69]. Наконец, по найденной частоте определялся модуль упругости материала из формулы (3.1).

В Табл. 3.1 приведены значения параметров, полученные посредством описанных измерений и расчётов.

Табл. 3.1. Параметры балок, использованных в экспериментах

№	Диаметр d мм	Длина l м	Плотность ρ кг/м ³	Масса m г	Площадь сечения A м ²	Момент инерции J м ⁴	Частота колебаний, ω		Мод. Юнга E ГПа
							Гц	рад/с	
1	1,0	0,4	7919	2,5	$785,4 \cdot 10^{-9}$	$4,909 \cdot 10^{-14}$	4,395	27,61	200
2	0,6	0,4	7957	0,9	$282,7 \cdot 10^{-9}$	$6,362 \cdot 10^{-15}$	2,686	16,87	209

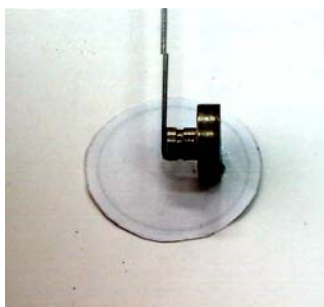


Рис. 3.3. Груз на конце балки

Как упоминалось выше, для получения больших прогибов балки к её свободному торцу прикреплялся груз в виде небольшой гирьки, как показано на Рис. 3.3. Геометрические и инерционные параметры использованных грузов приведены в Табл. 3.2.

Табл. 3.2. Параметры груза на конце балки

№	Описание груза	Масса m_0 г	Сдвиг центра масс, мм		Момент инерции J_C кг·м ²
			ρ_{Cx}	ρ_{Cy}	
1	Бумажная метка	0,023	0	0	$\sim 10^{-10} \approx 0$
2	Бумажная метка	0,015	0	0	$\sim 10^{-10} \approx 0$
3	Стальная гирька	20	0	-13	$1,58 \cdot 10^{-6}$
4	Стальная гирька	10	0	-11	$3,85 \cdot 10^{-7}$
5	Стальная гирька	2	0	-5	$1,00 \cdot 10^{-7}$

3.1.3. Некоторые экспериментальные данные

В этом разделе приведены некоторые качественные данные, характеризующие экспериментальную часть проведенной работы. Например, на Рис. 3.4 показано положение равновесия балочки с грузом.

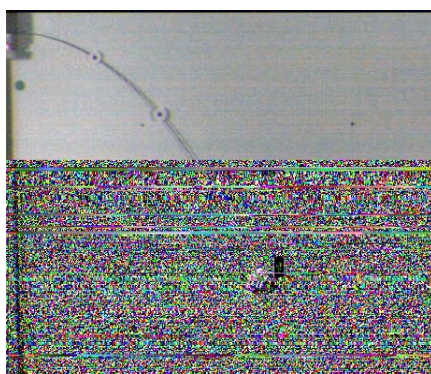
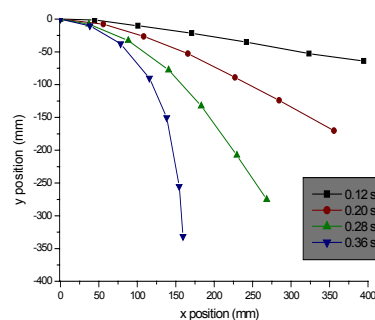
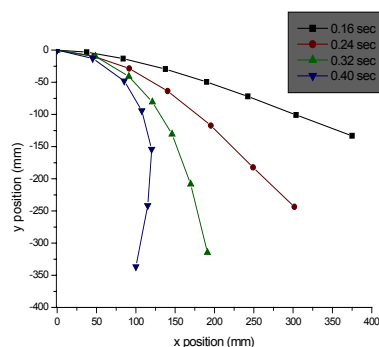


Рис. 3.4. Видокадр: балка с грузом в равновесии

На Рис. 3.5 показаны положения балки в различные моменты времени при колебаниях с грузом.



диаметр 1 мм, груз 20 г;

диаметр 0,6 мм, груз 2 г

Рис. 3.5. Положение балки в различные моменты времени при колебаниях

Как видно, вертикальные прогибы достигают 80-90% от длины балки. Таким образом, речь идёт о больших (нелинейных) колебаниях и частоты их существенно зависят от амплитуды колебаний, определяемой величиной груза, повешенного к балке, как показано в Табл. 3.3.

Табл. 3.3. Частоты больших колебаний консольной балки с грузом

Диаметр балки, мм	Масса груза, г	Частота колебаний, Гц
1	10	1,36
	20	1,20
0,6	1	1,22
	2	1,10
	5	0,98

3.1.4. Моделирование груза, присоединённого к балке

В этом пункте обсуждается вопрос – как моделировать абсолютно твёрдое тело, присоединённое к балке, которая моделируется при помощи абсолютных узловых координат? С этой целью возможно использование разных наборов обобщённых координат для моделирования абсолютно твёрдого тела. Рассмотрим возможности использования в качестве обобщённых координат абсолютных углов поворота тела с введением уравнений связи и получением системы дифференциально-алгебраических уравнений, а также использования абсолютных узловых координат, приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям [69, 70].

3.1.4.1. Использование угла поворота как обобщённой координаты

Рассмотрим балку в виде набора конечных элементов, построенных при помощи формализма абсолютных узловых координат, и абсолютно твёрдое тело, присоединённое к её свободному концу, как показано на Рис. 3.6.

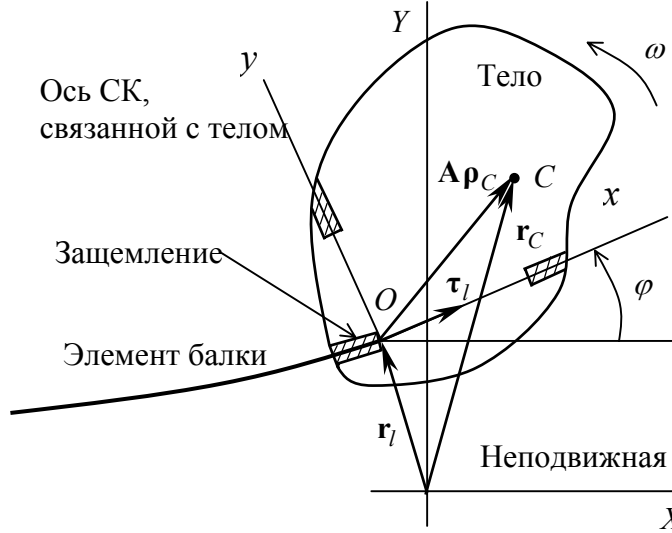


Рис. 3.6. Абсолютно твёрдое тело, присоединённое к балке

Уравнения движения концевой элемента балки имеют вид

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}^g - \mathbf{Q}^e. \quad (3.2)$$

Здесь вектор узловых координат имеет значение $\mathbf{e} = \{\mathbf{r}_0^T \quad \boldsymbol{\tau}_0^T \quad \mathbf{r}_\ell^T \quad \boldsymbol{\tau}_\ell^T\}^T$, его элементы изображены на Рис. 3.6.

Запишем уравнения движения тела в виде уравнений Ньютона-Эйлера

$$\mathbf{M}^r \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^i = \mathbf{f}^g, \quad (3.3)$$

где \mathbf{M}^r – матрица масс, \mathbf{u} – вектор обобщённых координат, \mathbf{f}^i , \mathbf{f}^g – векторы обобщённых сил инерции и тяжести.

Если обозначить радиус-вектор центра масс тела через \mathbf{r}_C , а угол поворота его через φ , то указанные матрицы и векторы примут вид

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_C \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}^r = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & J_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^g = \begin{Bmatrix} m\mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^i = \mathbf{0}.$$

Движение балки и твёрдого тела стеснено уравнениями связи

$$\mathbf{r}_\ell + \mathbf{A}(\varphi)\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_C = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi - \tau_{\ell 2} / \tau_{\ell 1} = 0. \quad (3.5)$$

Первое из них требует, чтобы положения балки и тела были одинаковы, а второе выражает подобное же требование для углов поворота. $\mathbf{A}(\varphi)$ – это матрица поворота тела

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Таким образом, после того, как мы присоединили тело к балке, мы получим *дополнительно* (в скалярной форме) три линейных дифференциальных уравнения (3.3) и три нелинейных уравнения связей (3.4), (3.5). Уравнения движения полученной гибридной системы могут быть записаны в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений [51, 19, 15] индекса 1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{eT} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^r & \mathbf{G}^{rT} \\ \mathbf{G}^e & \mathbf{G}^r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{e}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}^g - \mathbf{Q}^e \\ \mathbf{f}^g - \mathbf{f}^i \\ \mathbf{h}'' \end{Bmatrix},$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – столбец множителей Лагранжа, \mathbf{G}^e , \mathbf{G}^r – матрицы Якоби уравнений связи по координатам \mathbf{e} и \mathbf{u} .

Есть возможность уменьшить число дополнительных уравнений путём записи уравнений (3.3) относительно точки прикрепления O . Тогда матрицы и векторы в этих уравнениях становятся непостоянными:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}^r(\varphi) = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_C \\ (\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_C)^T & J_C + m\rho_C^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^g(\varphi) = \begin{Bmatrix} m\mathbf{g} \\ m\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_C \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^i(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{Bmatrix} -\dot{\varphi}^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}_C \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В этом случае уравнение связи (3.4) превращается в $\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r} = \mathbf{0}$ и может быть исключено с применением процедуры сборки, см. приложение 6.3. В этом случае получим дополнительно одно нелинейное дифференциальное уравнение (после сборки) и одно нелинейное уравнение связи (3.5).

Как и следовало ожидать, использование угла поворота тела в качестве обобщённой координаты в формализме абсолютных узловых координат приводит к появлению ДАУ, поскольку в указанном формализме используются

компоненты касательных векторов. ДАУ вносят дополнительные трудности в процесс интегрирования, например, возникают проблемы «ухода» системы со связей и другие. Для решения ДАУ разработаны, тем не менее, эффективные численные методы [25, 46, 42, 39].

Но несомненно, что если можно избежать появления ДАУ и свести задачу к ОДУ, то такой подход предпочтительнее, поскольку он менее трудоёмок. В нашем случае такая возможность существует.

3.1.4.2. Использование абсолютных узловых координат в качестве обобщённых

Как показано выше, если угол поворота используется в качестве обобщённой координаты для тела, присоединённого к концу балки, то возникает необходимость добавления уравнений связи. Естественнее отказаться от этого и использовать для абсолютно твёрдого тела тот же набор узловых координат, что и для концевого узла балки:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{r}^T, \boldsymbol{\tau}^T\}^T. \quad (3.7)$$

Этот подход позволяет избежать появления уравнений связей. Покажем это и выведем уравнения движения для тела, показанного на Рис. 3.7.

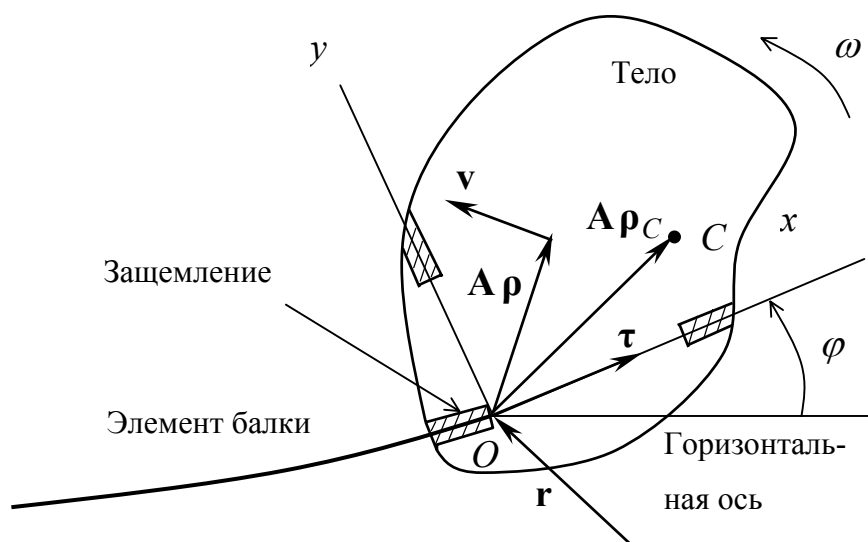


Рис. 3.7. Кинематика тела, присоединённого к балке

Абсолютная скорость произвольной точки, заданной радиус-вектором \mathbf{p} , определяется выражением $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\mathbf{p}$. В двумерном случае можно запи-

сать это соотношение в виде

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \omega \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A} \mathbf{p}$$

с использованием кососимметричной матрицы $\tilde{\mathbf{I}}$ из уравнения (2.11) и матрица поворота \mathbf{A} (выражение (3.6)).

Определим угол поворота тела следующим образом: $\varphi = \arctg(\tau_2/\tau_1)$.

Угловая скорость тела ω – это производная от угла поворота

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\dot{\tau}_2 \tau_1 - \dot{\tau}_1 \tau_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}^T \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\tau}}{\tau^2}, \quad \tau = \|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}.$$

Тогда вектор \mathbf{v} скорости произвольной точки представим в виде $\mathbf{v} = \Phi \dot{\mathbf{x}}$,

где введена матрица Якоби $\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A} \mathbf{p} \boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}}^T \end{bmatrix}$, здесь $\boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\tau}}{\tau^2}$.

Теперь мы готовы записать уравнения движения тела. Проще всего это сделать на основе общего уравнения динамики

$$\int_V \delta \mathbf{r}^T \mu (\mathbf{a} - \mathbf{g}) dV = 0, \quad (3.8)$$

где введены векторы возможного перемещения $\delta \mathbf{r} = \Phi \delta \mathbf{x}$ и ускорения $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \Phi \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\Phi} \dot{\mathbf{x}}$ произвольной точки тела. \mathbf{g} – это вектор ускорения силы тяжести, μ – плотность материала в кг/м³. Интегрирование по объёму V тела.

После довольно трудоёмких вычислений мы найдём, что

$$\dot{\Phi} \dot{\mathbf{x}} = -\Phi \left\{ \frac{\omega^2 \mathbf{A} \mathbf{p}}{\tau^2} (\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\tau}}) \dot{\boldsymbol{\tau}} \right\}.$$

Поскольку вариации обобщённых координат $\delta \mathbf{x}$ произвольные, на них можно «сократить» и уравнение (3.8) превращается в

$$\int_V \mu \Phi^T (\Phi \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\Phi} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}) dV = 0,$$

или

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^i = \mathbf{f}^g, \quad (3.9)$$

с матрицей масс \mathbf{M} и векторами обобщённых сил инерции \mathbf{f}^i и тяжести \mathbf{f}^g :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int_V \mu \Phi^T \Phi dV = \begin{bmatrix} m \mathbf{I} & m \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A} \mathbf{p}_C \boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}}^T \\ m \boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}} (\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A} \mathbf{p}_C)^T & J_O \boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}} \boldsymbol{\omega}_{\dot{\boldsymbol{\tau}}}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \int_V \mu \Phi^T \dot{\Phi} dV \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M} \left\{ \begin{array}{c} \omega^2 \mathbf{A} \rho_C \\ \frac{2}{\tau^2} (\boldsymbol{\tau}^T \dot{\boldsymbol{\tau}}) \dot{\boldsymbol{\tau}} \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{f}^g(\mathbf{x}) = \int_V \mu \Phi^T dV \mathbf{g} = \left\{ \begin{array}{c} m \mathbf{g} \\ \omega_{\dot{\boldsymbol{\tau}}} m \mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A} \rho_C \end{array} \right\}.$$

В этих выражениях m – масса тела, ρ_C – радиус-вектор центра масс тела, $J_O = J_C + m\rho_C^2$ – момент инерции тела относительно точки прикрепления O , J_C – момент инерции тела относительно центра масс.

Заметим, что все члены уравнений (3.9) нелинейны. Но это не является недостатком описанного метода, поскольку уравнения движения данной системы будут нелинейными и в других формулировках, указанных в предыдущем пункте. Основное преимущество предложенного метода заключается в том, что он приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а не к дифференциально-алгебраическим.

3.1.5. Сравнение экспериментальных данных и расчёта

3.1.5.1. Сравнение частот малых колебаний

Целью данного исследования было сравнение частот малых колебаний консольной балки, полученных с использованием конечно-элементой расчётной схемы, с аналитическими решениями для этой простой задачи, а также с данными, полученными из экспериментов (см. пункт 3.1.2).

Постановка проблемы собственных колебаний описана в п. 2.5.3.

Табл. 3.4. Расчёт частоты малых свободных колебаний консольной балки

Балка № 1 ($d = 1,0$ мм)			Балка № 2 ($d = 0,6$ мм)		
Элементы	Частота, рад/с		Элементы	Частота, рад/с	
	ω_1	ω_2		ω_1	ω_2
1	27,740	273,31	1	16,604	163,60
2	27,622	174,49	2	16,534	104,44
4	27,610	173,22	4	16,526	103,69
5	27,609	173,11	5	16,526	103,62
8	27,609	173,04	8	16,526	103,57
∞ (точно)	27,609	173,02	∞ (точно)	16,526	103,56

Как видно из таблицы, рассчитываемые значения первых частот при измельчении конечноэлементной сетки стремятся к точным значениям. Это свидетельствует о корректности модели конечного элемента.

3.1.5.2. Сходимость результатов численного моделирования

Одним из критериев, определяющих корректность расчётов по методу конечных элементов, является сходимость результатов вычислений при измельчении сетки конечных элементов. Результаты подобного теста на сходимость для балки диаметром 1 мм, с грузом 20 г приведены на Рис. 3.8. На нём показаны графики вертикального перемещения конца балки при различном числе конечных элементов: 5, 10 и 15.

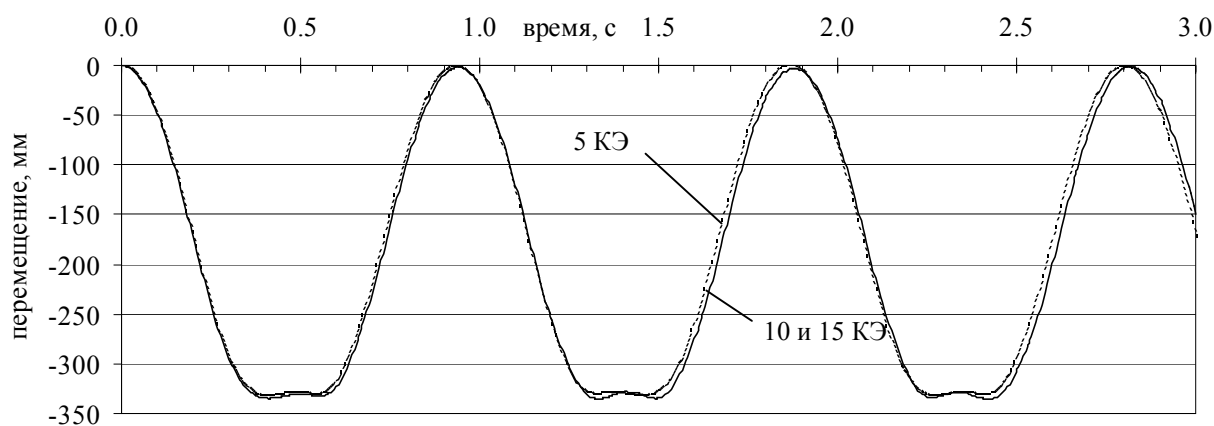


Рис. 3.8. Вертикальное перемещение конца балки во времени при различном числе конечных элементов. Балка: $d = 1$ мм; груз $m = 20$ г.

Графики очень близки, и при числе элементов, большем 10, практически совпадают. Поэтому все последующие численные эксперименты выполнялись при числе элементов 10.

3.1.5.3. Учёт затухания колебаний

Для моделирования эффектов внутреннего трения в материале и сопротивления воздуха использовалась линейная модель сил демпфирования

$$\mathbf{Q}^d = \mathbf{D}\dot{\mathbf{e}}.$$

Применяя классическую модель демпфирования по Рэлею [19, 15], мат-

рицу демпфирования \mathbf{D} определим формулой

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{C}, \quad (3.10)$$

в которую входят матрица масс \mathbf{M} и касательная матрица жёсткости \mathbf{C} (матрица Якоби сил) с коэффициентами

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\zeta_1\omega_2 - \zeta_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \beta = \frac{2(\zeta_2\omega_2 - \zeta_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \quad (3.11)$$

Они зависят от частот ω_1, ω_2 и параметров демпфирования ζ_1, ζ_2 первых двух форм колебаний и входят в уравнения движения в главных координатах

$$\ddot{x}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Величины ζ_1 и ζ_2 являются долями демпфирования от критического и должны быть определены перед началом каждого численного моделирования из экспериментальных данных. Формула для вычисления ζ_1 имеет вид [2]

$$\zeta_1 = \frac{\delta_1}{2\pi} \left(1 + \frac{\delta_1}{2\pi} \right)^{-1/2} \approx \frac{\delta_1}{2\pi}. \quad (3.12)$$

где δ_1 – логарифмический декремент затухания. Приближённое выражение справедливо в случае малого затухания колебаний, как в нашем случае.

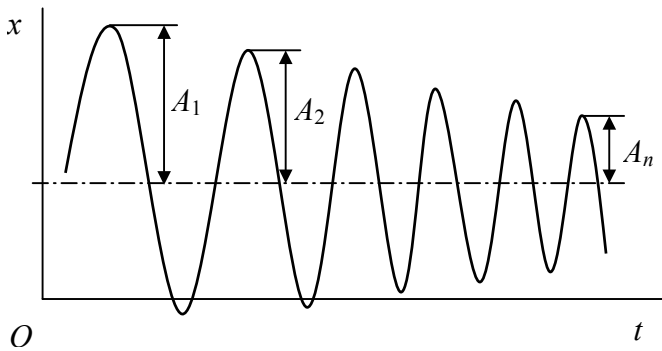


Рис. 3.9. Затухающие колебания

Логарифмический декремент δ_1 можно найти по экспериментальной последовательности амплитуд A_1, \dots, A_n (см. Рис. 3.9), используя простую формулу

$$\delta_1 = -\ln \Delta_1, \quad \Delta_1 \approx \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^{1/n-1}. \quad (3.13)$$

Таким образом, алгоритм нахождения коэффициентов α и β следующий:

- 1) Вычислить или измерить первую и вторую частоту ω_1, ω_2 ;
- 2) Определить величину декремента колебаний Δ_1 и логарифмический декремент δ_1 по экспериментальным осциллограммам и формулам (3.13);
- 3) Вычислить коэффициент демпфирования ζ_1 , используя соотношение

(3.12); мы также полагаем, что $\zeta_1 = \zeta_2$;

4) Наконец, получить значения α и β по формулам (3.11).

3.1.5.4. Колебания свободной балки без груза

Проведём вычисления согласно описанному алгоритму для первого эксперимента: балка $d = 1$ мм, масса груза (бумажной метки) $m_0 = 0,023$ г.

1) $\omega_1 = 27,6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 173 \text{ с}^{-1}$; 2) $\Delta_1 = 0,987$; 3) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,002$;

4) $\alpha = 0,1 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

Можно заметить, что величина β намного меньше α . Поэтому естественно попытаться отбросить часть сил демпфирования (3.10), пропорциональную матрице жёсткости и использовать матрицу демпфирования

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M}. \quad (3.14)$$

Численное интегрирование показало, что результаты, полученные с использованием двух моделей сил (3.10) и (3.14) действительно различаются только в 4-5-й значащей цифре. Однако шаг интегрирования в случае полной модели матрицы демпфирования (3.10) примерно в 20 раз меньше, поскольку уравнения движения получаются намного жёстче. Поэтому в дальнейшем используется упрощённая матрица демпфирования (3.14).

На Рис. 3.10 показаны графики вертикального перемещения конца балки, найденные из эксперимента (сплошная линия) и расчётные (пунктирная).

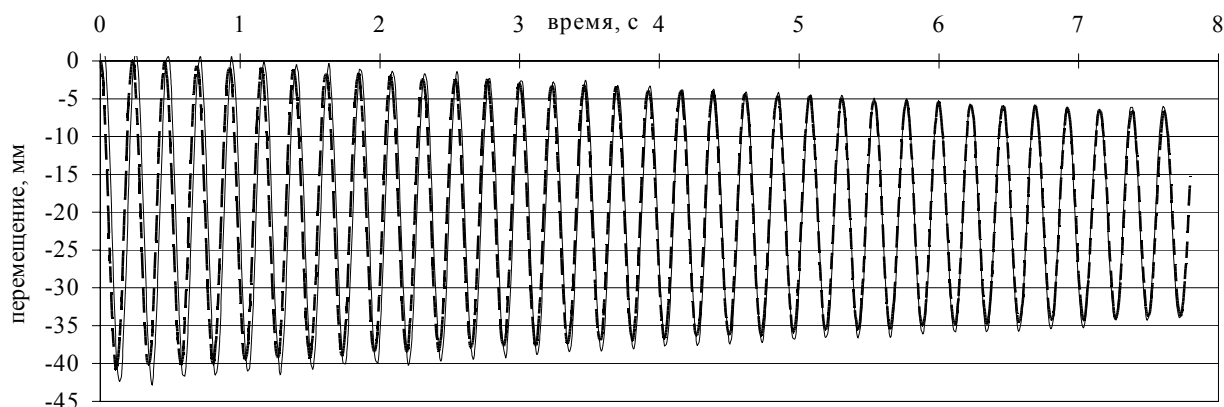


Рис. 3.10. Сравнение перемещения конца балки в эксперименте и расчёте; $d = 1$ мм, $m_0 = 0,023$ г.

На Рис. 3.11 приведено сравнение осциллограмм для балки диаметром 0,6 мм и грузом-меткой $m_0 = 0,015$ г. Расчёт параметров:

- 1) $\omega_1 = 17,0 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 106 \text{ с}^{-1}$; 2) $\Delta_1 = 0,961$; 3) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,005$;
 4) $\alpha = 0,16 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 8,7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

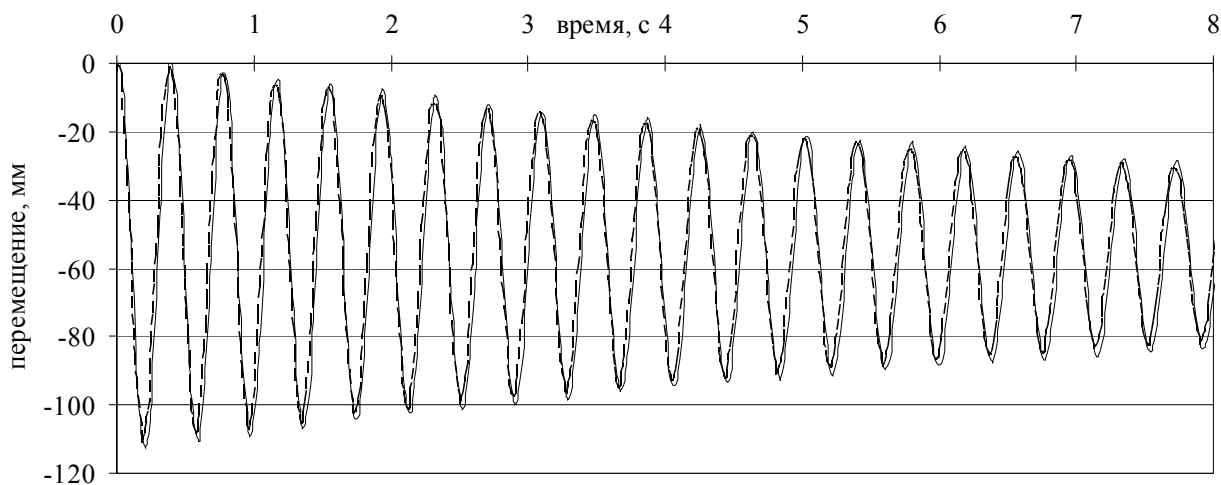


Рис. 3.11. Сравнение перемещения конца балки в эксперименте и расчёте;
 $d = 0,6 \text{ мм}$, $m_0 = 0,015 \text{ г}$.

Как видно из приведенных графиков, частота, амплитуда и фаза колебаний экспериментальных и расчётных перемещений практически совпадают.

3.1.5.5. Большие колебания балки с грузом

В последующих экспериментах к консольным балкам прикреплялись грузы в виде стальных гирек для получения амплитуд колебаний порядка длины балки, см. п. 3.1.2. На Рис. 3.12 представлены результаты сравнения для балки диаметром 1 мм и груза массой $m_0 = 20 \text{ г}$. Параметры:

- 1) $\omega_1 = 6,7 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 33 \text{ с}^{-1}$; 2) $\Delta_1 = 0,987$; 3) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,002$;
 4) $\alpha = 0,02 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

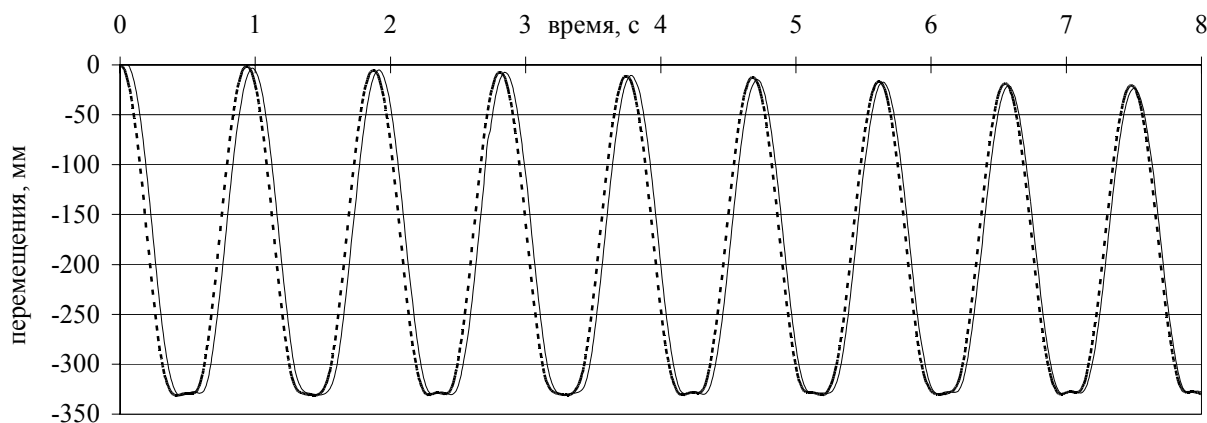


Рис. 3.12. Сравнение перемещения конца балки в эксперименте и расчёте;
 $d = 1 \text{ мм}$, $m_0 = 20 \text{ г}$.

На Рис. 3.13 результаты сравнения экспериментов с $d = 1$ мм, $m_0 = 10$ г.

1) $\omega_1 = 7,9 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 39 \text{ с}^{-1}$; 2) $\Delta_1 = 0,992$; 3) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,0013$;

4) $\alpha = 0,017 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$.

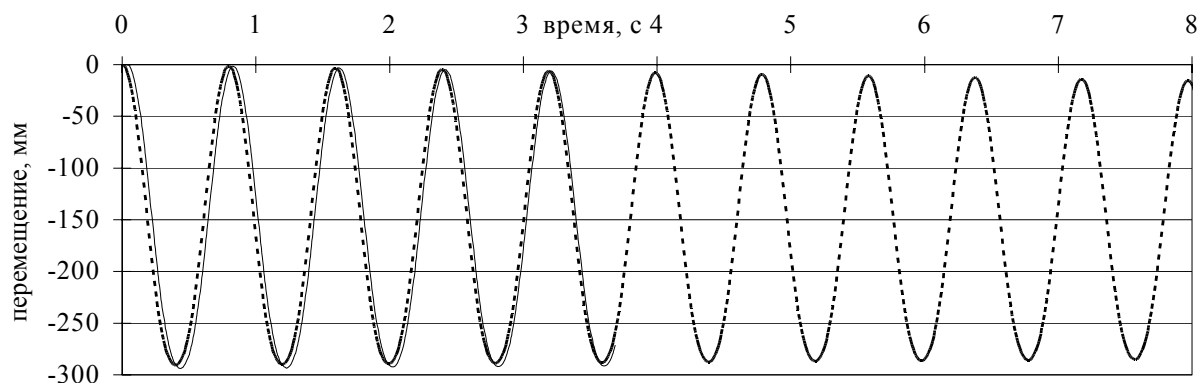


Рис. 3.13. Сравнение перемещения конца балки в эксперименте и расчёте;
 $d = 1$ мм, $m_0 = 10$ г.

И, наконец, на Рис. 3.14 сравниваются результаты эксперимента и расчёта для более тонкой балки диаметром 0,6 мм с грузом массой 2 г.

1) $\omega_1 = 7,0 \text{ с}^{-1}$; $\omega_2 = 42 \text{ с}^{-1}$; 2) $\Delta_1 = 0,949$; 3) $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,008$;

4) $\alpha = 0,07 \text{ с}^{-1}$, $\beta = 7 \cdot 10^{-4} \text{ с}$.

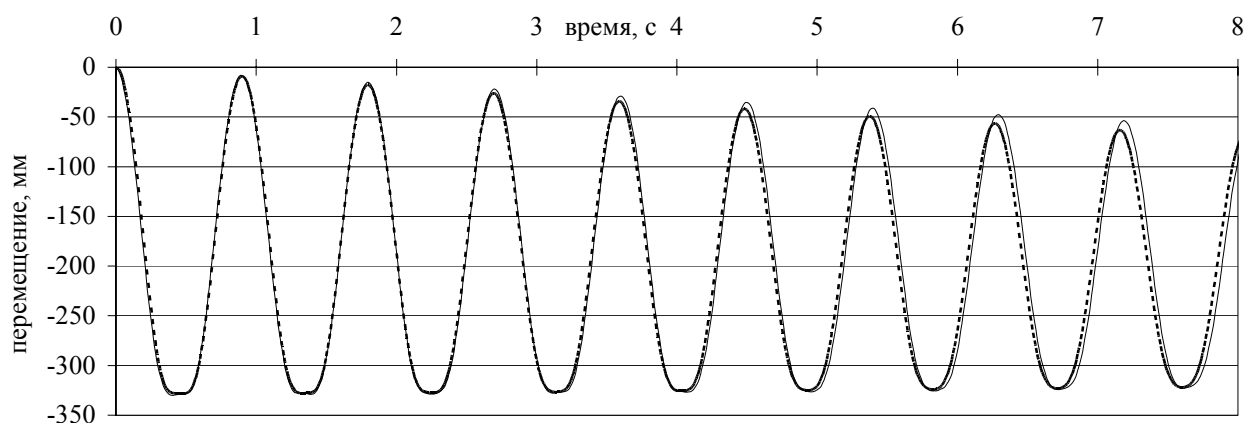


Рис. 3.14. Сравнение перемещения конца балки в эксперименте и расчёте;
 $d = 0,6$ мм, $m_0 = 2$ г.

В заключение этой части экспериментальных исследований можно отметить, что представленная модель балки с грузом в абсолютных узловых координатах способна корректно моделировать как малые колебания, так и колебания с большой амплитудой.

3.2. БОЛЬШИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ГРУЗОМ

Данная часть исследований является продолжением экспериментов, зачастую повторяет материал §3.1 и поэтому описывается не столь подробно. Есть, однако, и отличия, связанные с моделированием присоединения абсолютно твёрдого тела к пластине (п. 3.2.3), а также с учётом сил сопротивления воздуха (п. 3.2.4). Результаты работы отражены в публикациях [71, 72].

3.2.1. Описание экспериментальной установки

Установка для исследования колебаний пластины аналогична установке, описанной в §3.1. Прямоугольная пластина закреплена по одному краю, а к другому краю жёстко прикреплён груз. На Рис. 3.15 пластина показана в положении, соответствующем начальным условиям.

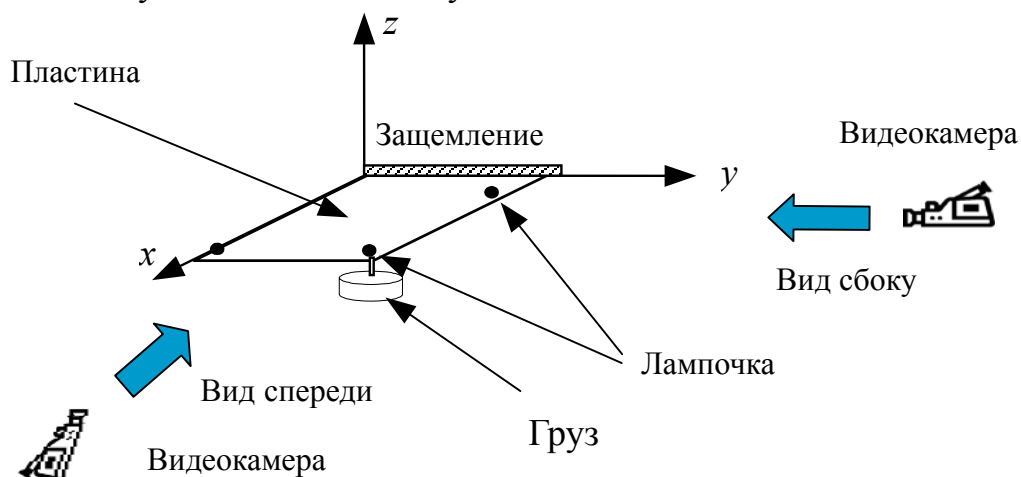


Рис. 3.15. Схема эксперимента



Запись движения ведётся спереди и сбоку, – таким образом, фиксируется движение всех трёх координат исследуемой точки. Исследуемая точка – это тот угол пластины, к которому прикреплён груз, и он помечается меткой-светодиодом для обеспечения возможности трассировки с помощью специальной программы.

Рис. 3.16. Наладка установки

Фотография установки приведена на Рис. 3.16. Видеокадры движения пластины с грузом показаны на Рис. 3.17.

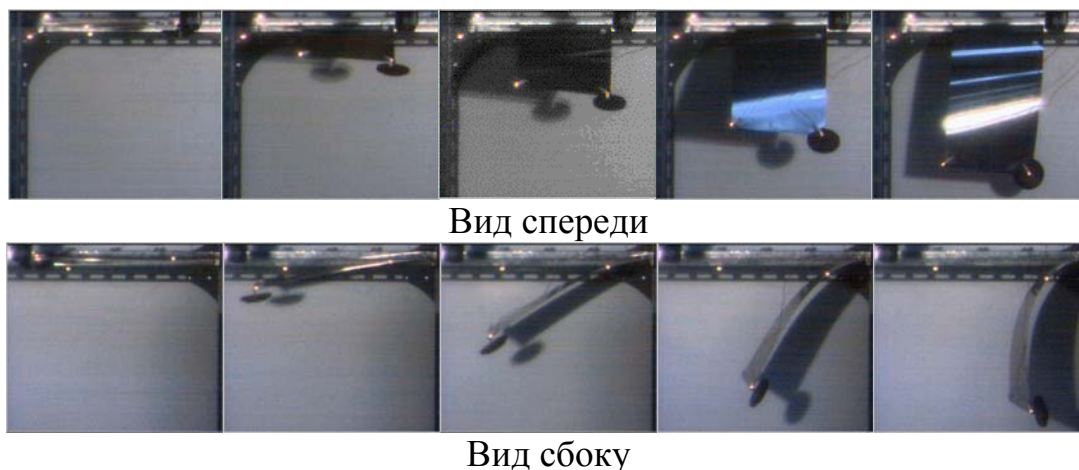


Рис. 3.17. Видеокадры движения пластины 40×20 см с грузом 260 г.

3.2.2. Параметры установки

3.2.2.1. Геометрические и жесткостные параметры пластины

Как и в случае экспериментов с балками, упругие параметры пластины определялись косвенно после измерения первой собственной частоты колебаний её без груза. Поскольку при малых колебаниях пластина мало отличается от балки, то в расчёте использовалась зависимость (3.1), в которой $l = a$. Результаты измерений и расчётов сведены в Табл. 3.5.

Табл. 3.5. Геометрические, инерционные и упругие параметры пластины

Длина, ширина и толщина пластины, мм			Масса пластины m , кг	Плотность $\rho = m/abh$, кг/м ³	Площадь сечения $A = bh$, мм ²	Момент инерции сечения $J = bh^3/12$, мм ⁴	Первая частота колебаний ω , Гц	Модуль Юнга E , МПа
a	b	h						
300	200	0,4	0,181	7554	80	1,07	3,46	175
400	200	0,4	0,242	7554	80	1,07	2,02	189

3.2.2.2. Инерционные свойства присоединённого груза

Для получения больших перемещений пластин использовались отягощения в виде грузов. Расчётная схема присоединения с указанием положения центра масс C груза приведена на Рис. 3.18, а параметры грузов – в Табл. 3.6.

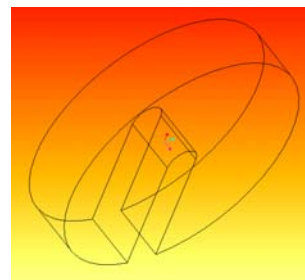
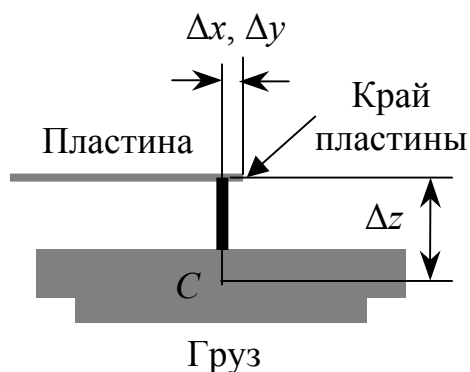


Рис. 3.18. Схема прикрепления груза к пластине

Табл. 3.6. Инерционные параметры грузов, прикрепляемых к пластинам

Размеры пластины, $a \times b$, см	Масса груза, г	Сдвиг центра масс груза, мм			Главные центральные моменты инерции, $\text{кг} \cdot \text{мм}^2$		
	M	Δx	Δy	Δz	J_x	J_y	J_z
40×20	260	1,5	1,5	18,7	82,1	72,9	149
30×20	400	1,5	1,5	17,0	142	127	253

Главные центральные моменты инерции вычислялись программой AutoCAD, для чего создавалась объёмная модель груза, см. Рис. 3.18 справа.

3.2.3. Моделирование абсолютно твёрдого тела, присоединённого к пластине

В данном пункте обсуждается проблема, как моделировать движение системы, состоящей из пластины и твёрдого тела, жёстко соединённого с ним. Построение уравнений движения абсолютно твёрдого тела представляет собой классическую задачу, но уравнения движения пластины выведены в новой постановке, §2.4. Таким образом, построение уравнений движения пластины с грузом является новой задачей. Подходы к её решению могут быть различными, подобно тому, как в случае с балкой и грузом, см. п. 3.1.4.

Одним из подходов является построение нового конечного элемента, использующего абсолютные узловые координаты элемента пластины, с целью избежания уравнений связей, п. 3.2.3.6. Однако сначала был реализован способ с введением уравнений связей и получением ДАУ.

3.2.3.1. Уравнения движения свободного тела в пространстве

Сначала рассмотрим свободное абсолютно твёрдое тело, движение которого описывается уравнениями Ньютона-Эйлера (1.14)

$$\begin{aligned} m_j \mathbf{a}_j &= m_j \mathbf{g}, \\ \mathbf{J}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

где \mathbf{a}_j и $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ – векторы ускорения центра масс и углового ускорения тела. Сила тяжести $m_j \mathbf{g}$ приложена в центре масс тела и поэтому её момент в правой части второго уравнения равен нулю. Индексы j введены для тела, в отличие от величин, описывающих пластину далее в п. 3.2.3.2.

Численное интегрирование уравнений движения подразумевает запись их относительно обобщённых координат тела

$$\mathbf{e}_j = \{\mathbf{r}_j^T \quad \boldsymbol{\varphi}^T\}^T, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{r}_j = \{x_C, y_C, z_C\}^T$ – радиус-вектор центра масс тела, $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$ – любая тройка углов, описывающая его ориентацию, см. приложение 6.5. Для избежания возможных вырождений углов ориентации можно использовать четыре параметра Эйлера [6, 7].

Введём векторы линейных и угловых скоростей и ускорений тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j &= \mathbf{D}_j \dot{\mathbf{e}}_j \Rightarrow \mathbf{a}_j = \dot{\mathbf{v}}_j = \mathbf{D}_j \ddot{\mathbf{e}}_j + \mathbf{a}'_j, \text{ где } \mathbf{a}'_j = \dot{\mathbf{D}}_j \dot{\mathbf{e}}_j, \\ \boldsymbol{\omega}_j &= \mathbf{B}_j \dot{\mathbf{e}}_j \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \mathbf{B}_j \ddot{\mathbf{e}}_j + \boldsymbol{\varepsilon}'_j, \text{ где } \boldsymbol{\varepsilon}'_j = \dot{\mathbf{B}}_j \dot{\mathbf{e}}_j, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где \mathbf{D}_j и \mathbf{B}_j – матрицы Якоби, которые вычисляются в п. 3.2.3.4.

После подстановки этих зависимостей уравнения движения примут вид

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{e}}_j = \mathbf{Q}_j, \quad (3.17)$$

$$\text{где } \mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_j^T m_j \mathbf{D}_j & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}_j^T \mathbf{J}_j \mathbf{B}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_j^T m_j (\mathbf{g} - \mathbf{a}'_j) \\ \mathbf{B}_j^T (-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega}_j - \mathbf{J}_j \boldsymbol{\varepsilon}'_j) \end{Bmatrix}.$$

3.2.3.2. Уравнения движения системы «пластина+груз»

Для формирования уравнений движения системы «пластина + груз» воспользуемся методом подсистем [7]. Одна подсистема – это совокупность конечных элементов пластины, другая – тело. Уравнения движения отдель-

ных подсистем имеют вид

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{Q}_i, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{e}}_j = \mathbf{Q}_j. \quad (3.19)$$

Первое из них описывает движение конечного элемента, к которому присоединено тело, а второе представляет собой уравнение (3.17).

На движение этих двух подсистем наложим связи в виде уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Явный вид этих связей формируется в п. 3.2.3.3. Связи приводят к появлению соответствующих сил реакций в динамических уравнениях (3.18), (3.19). После двойного дифференцирования уравнения (3.20) по времени,

$$\ddot{\mathbf{f}} = \Phi_i \ddot{\mathbf{e}}_i + \Phi_j \ddot{\mathbf{e}}_j + \mathbf{f}'' = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

уравнения движения можно представить в виде ДАУ индекса 1

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & \mathbf{O} & \Phi_i^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_j & \Phi_j^T \\ \Phi_i & \Phi_j & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{e}}_i \\ \ddot{\mathbf{e}}_j \\ -\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{Q}_j \\ -\mathbf{f}'' \end{Bmatrix}.$$

Здесь Φ_i и Φ_j – матрицы Якоби уравнений связи (3.20) по столбцам координат \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j соответственно, а λ – столбец множителей Лагранжа.

3.2.3.3. Реализация уравнений связей

Уравнение связей (3.20) состоит из двух частей. Первая выражает условие замыкания радиус-векторов, как показано на Рис. 3.19:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

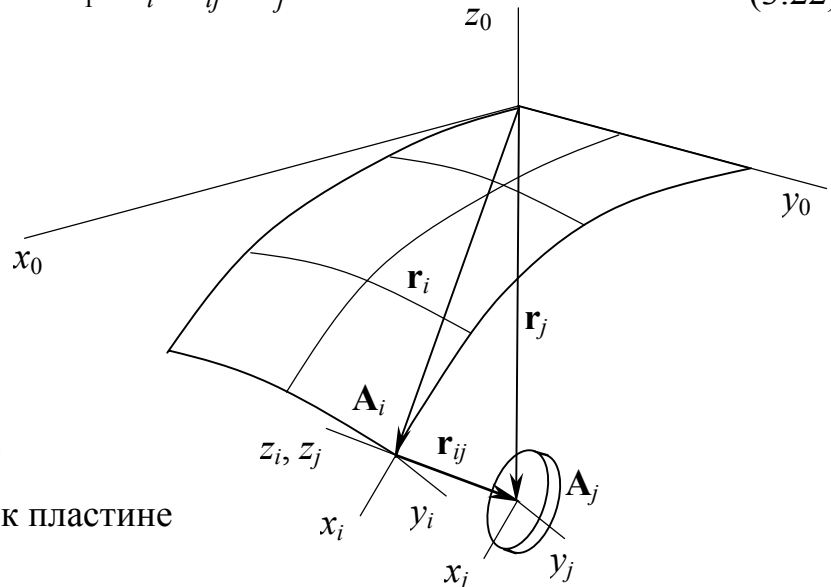


Рис. 3.19. Присоединение абсолютно твёрдого тела к пластине

Вторая часть уравнений выражает подобное условие для ориентаций тел. Запишем сначала это условие для ортогональных матриц ориентации

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{ij} \mathbf{A}_j^{-1} - \mathbf{I} = \mathbf{O}, \quad (3.23)$$

где \mathbf{A}_i и \mathbf{A}_j – матрицы ориентации систем координат x_i, y_i, z_i и x_j, y_j, z_j . \mathbf{A}_{ij} – матрица, определяющая возможное угловое смещение между этими двумя системами координат. В нашем случае такого смещения нет и поэтому $\mathbf{A}_{ij} \equiv \mathbf{I}$.

Замечание. Хотя в нашем случае \mathbf{r}_{ij} и \mathbf{A}_{ij} постоянны, мы рассмотрим более общий случай и предположим, что они изменяются во времени: $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}(\mathbf{e}_{ij})$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(\mathbf{e}_{ij})$, где \mathbf{e}_{ij} – столбец обобщённых относительных координат. Такая постановка позволяет вводить между пластиной и телом шарниры различных типов, такие как сферический, цилиндрический или поступательный. В нашем случае, когда тело жёстко присоединено к пластине, число компонент столбца \mathbf{e}_{ij} равно нулю.

Уравнение (3.23) является избыточным, поскольку оно содержит девять скалярных уравнений, хотя только три из них являются независимыми (по числу углов ориентации). Последнее уравнение следует представить в векторном виде с помощью известного преобразования

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \tilde{\mathbf{t}}_k \mathbf{\Omega} \mathbf{t}_k = \mathbf{0}, \quad (3.24)$$

где \mathbf{t}_k – единичные орты неподвижной системы координат x_0, y_0, z_0 , а $\tilde{\mathbf{t}}_k$ – соответствующие им кососимметрические матрицы, $k = 1, \dots, 3$.

Непосредственное вычисление приводит эти уравнения к явному виду

$$\mathbf{f}_2 = \begin{Bmatrix} (\Omega_{32} - \Omega_{23})/2 \\ (\Omega_{13} - \Omega_{31})/2 \\ (\Omega_{21} - \Omega_{12})/2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

в качестве второй части уравнений связи (3.20). Производная по t от уравнений связи выражает соотношения между линейными и угловыми скоростями:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_1 &= \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{f}}_2 &= \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Они используются, например, для согласования начальных условий. Вторые производные от этих уравнений связывают линейные и угловые ускорения,

$$\ddot{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{a}_i + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{r}_{ij} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{ij} + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_j = \mathbf{0},$$

$$\ddot{\mathbf{f}}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\omega}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{0},$$

и являются выражениями теоремы Кориолиса о сложении ускорений и теоремы о сложении угловых ускорений.

Будучи выраженными в терминах обобщённых координат, уравнения связей относительно скоростей и ускорений принимают формы

$$\dot{\mathbf{f}} = \Phi_i \dot{\mathbf{e}}_i + \Phi_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij} + \Phi_j \dot{\mathbf{e}}_j + \mathbf{f}' = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

$$\ddot{\mathbf{f}} = \Phi_i \ddot{\mathbf{e}}_i + \Phi_{ij} \ddot{\mathbf{e}}_{ij} + \Phi_j \ddot{\mathbf{e}}_j + \mathbf{f}'' = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

Значения введённых матриц следующие:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i - \tilde{\mathbf{r}}_{ij} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i \end{bmatrix}, \quad \Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ij} \\ \mathbf{B}_{ij} \end{bmatrix}, \quad \Phi_j = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_j \\ \mathbf{B}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}' \equiv \mathbf{0},$$

$$\mathbf{f}'' = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_i + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'_i \mathbf{r}_{ij} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{ij} + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{a}'_{ij} - \mathbf{a}'_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\omega}_{ij} + \boldsymbol{\varepsilon}'_{ij} - \boldsymbol{\varepsilon}'_j \end{Bmatrix}.$$

Линейные и угловые скорости \mathbf{v}_i , $\boldsymbol{\omega}_i$ и ускорения \mathbf{a}_i , $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ для пластины, а также матрицы Якоби \mathbf{D}_i , \mathbf{B}_i , определяются подобно тому, как это было сделано для абсолютно твёрдого тела, уравнение (3.16).

Для того, чтобы получить уравнения связей в виде (3.21), необходимо исключить член $\Phi_{ij} \ddot{\mathbf{e}}_{ij}$ из уравнения (3.27). Это можно сделать вообще, но в нашем случае $\Phi_{ij} \ddot{\mathbf{e}}_{ij} \equiv \mathbf{0}$ (см. замечание выше), а также $\mathbf{v}_{ij} \equiv \boldsymbol{\omega}_{ij} \equiv \mathbf{a}'_{ij} \equiv \boldsymbol{\varepsilon}'_{ij} \equiv \mathbf{0}$.

В следующих пунктах формируются явные выражения для матриц \mathbf{D}_i , \mathbf{B}_i , относящихся к пластине, и матрицы \mathbf{D}_j , \mathbf{B}_j для абсолютно твёрдого тела.

3.2.3.4. Вычисление матриц \mathbf{D}_j и \mathbf{B}_j для абсолютно твёрдого тела

Вектор скорости центра масс тела есть $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{r}}_j$ с одной стороны, а с другой стороны, его необходимо представить в форме $\mathbf{v}_j = \mathbf{D}_j \dot{\mathbf{e}}_j$ согласно уравнению (3.16). Принимая во внимание структуру вектора \mathbf{e}_j , показанную в

соотношении (3.15), найдём, что $\dot{\mathbf{e}}_j = \left\{ \dot{\mathbf{r}}_j^T \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}^T \right\}^T$ и получим значение матрицы \mathbf{D}_j размером 3×6 в форме $\mathbf{D}_j = [\mathbf{I} \quad \mathbf{O}]$, где \mathbf{I} и \mathbf{O} – единичная и нулевая матрицы размером 3×3 .

Явный вид матрицы \mathbf{B}_j , а также вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_j$ зависит от того, какой набор углов ориентации $\boldsymbol{\phi}$ используется, см. приложение 6.5. В нашем конкретном случае использовался набор углов Кардана. При этом вектор угловой скорости вычислялся по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_j = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_2 \\ 0 & c_1 & -s_1 c_2 \\ 0 & s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\phi \dot{\boldsymbol{\phi}}.$$

Для того, чтобы представить этот вектор в форме $\boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{B}_j \dot{\mathbf{e}}_j$, как требуется в уравнении (3.16), введём матрицу размером 3×6

$$\mathbf{B}_j = [\mathbf{O} \quad \mathbf{B}_\phi].$$

Последнее, что осталось сделать в этом пункте – вычислить векторы \mathbf{a}' и $\boldsymbol{\varepsilon}'$, содержащиеся в уравнении (3.16):

$$\mathbf{a}'_j = \dot{\mathbf{D}}_j \dot{\mathbf{e}}_j \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}'_j = \dot{\mathbf{B}}_j \dot{\mathbf{e}}_j = \dot{\mathbf{B}}_\phi \dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{Bmatrix} c_2 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 \\ -s_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - c_1 c_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 + s_1 c_2 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 \\ + c_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - s_1 c_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 - c_1 s_2 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 \end{Bmatrix}.$$

3.2.3.5. Вычисление матриц \mathbf{D}_i и \mathbf{B}_i для пластины

Поскольку радиус-вектор \mathbf{r}_i точки прикрепления тела к пластине на Рис. 3.19 определяется уравнением (2.14), то очевидно, что $\mathbf{v}_i = \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}}_i$, откуда

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{S}.$$

Вычисление матрицы \mathbf{B}_i более трудоёмко и требует начать рассмотрение с определения матрицы направляющих косинусов \mathbf{A}_i . Она может быть построена по трём ортам осей координат x_i, y_i, z_i , изображённых на Рис. 3.19. Вычислим касательные векторы к пластине в точке прикрепления тела

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p_i} = \mathbf{S}'_i \mathbf{e}, \quad i = \{1, 2\}, \quad \text{где} \quad \mathbf{S}'_i = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial p_i}. \quad (3.28)$$

В общем случае они не являются ортогональными и имеют неединичную длину. Тем не менее, мы можем применить к ним процедуру ортогонализации Грама-Шмидта [1]

$$\boldsymbol{\tau}_1^* = \boldsymbol{\tau}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2^* = \boldsymbol{\tau}_2 - \frac{\boldsymbol{\tau}_1^T \boldsymbol{\tau}_2}{\boldsymbol{\tau}_1^T \boldsymbol{\tau}_1} \boldsymbol{\tau}_1.$$

Тогда последние два вектора $\boldsymbol{\tau}_1^*$ и $\boldsymbol{\tau}_2^*$ совместно с вектором нормали к пластине $\boldsymbol{\tau}_3^* = \boldsymbol{\tau}_3 = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_1 \boldsymbol{\tau}_2$ составят ортогональную матрицу поворота

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\boldsymbol{\tau}_1^*}{\|\boldsymbol{\tau}_1^*\|} & \frac{\boldsymbol{\tau}_2^*}{\|\boldsymbol{\tau}_2^*\|} & \frac{\boldsymbol{\tau}_3^*}{\|\boldsymbol{\tau}_3^*\|} \end{bmatrix}.$$

Это значение матрицы легко может быть использовано в уравнениях связи (3.23), (3.25), но оно слишком громоздко для дифференцирования с целью получения вектора угловой скорости. Однако мы можем принять, что касательные векторы $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ имеют почти единичную длину, и являются почти ортогональными из-за высокой жёсткости материала пластины, модуль упругости которого имеет порядок 10^{11} Па. Поэтому мы используем приближённое значение матрицы поворота для её последующего дифференцирования:

$$\mathbf{A}_i \approx [\boldsymbol{\tau}_1 \quad \boldsymbol{\tau}_2 \quad \boldsymbol{\tau}_3].$$

Таким образом, приближённая кососимметрическая матрица тензора угловой скорости может быть вычислена следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T = [\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \quad \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \quad \dot{\boldsymbol{\tau}}_3] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^T \\ \boldsymbol{\tau}_2^T \\ \boldsymbol{\tau}_3^T \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \boldsymbol{\tau}_1^T + \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \boldsymbol{\tau}_2^T + \underbrace{(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1 \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_2 \dot{\boldsymbol{\tau}}_1)}_{\tilde{\dot{\boldsymbol{\tau}}}_3} \boldsymbol{\tau}_3^T, \quad (3.29)$$

где введены производные по времени от касательных векторов (3.28):

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_i = \mathbf{S}'_i \dot{\mathbf{e}}, \quad i = \{1, 2\}.$$

Вектор угловой скорости получим, используя преобразование (3.24):

$$\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{l}_m = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_m \left(\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \underbrace{\boldsymbol{\tau}_1^T \mathbf{l}_m}_{\tau_{1m}} + \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \underbrace{\boldsymbol{\tau}_2^T \mathbf{l}_m}_{\tau_{2m}} + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1 \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_2 \dot{\boldsymbol{\tau}}_1) \underbrace{\boldsymbol{\tau}_3^T \mathbf{l}_m}_{\tau_{3m}} \right).$$

Каждый из отмеченных членов τ_{km} является m -й компонентой вектора

τ_k . Далее, после внесения $\tilde{\tau}_m$ в скобки, мы найдём, что $\sum_{m=1}^3 \tilde{\tau}_m \tau_{km} = \tilde{\tau}_k$ и последнее выражение превратится в

$$\omega_i = \frac{1}{2}((\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_3 \tilde{\tau}_2) \dot{\tau}_1 + (\tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_3 \tilde{\tau}_1) \dot{\tau}_2).$$

Чтобы получить окончательный результат, упростим последнюю формулу, применив известное тождество $\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{I}$ и учтя условия ортогональности $\tau_3^T \tau_2 = \tau_3^T \tau_1 = 0$. Тогда вектор угловой скорости примет вид

$$\omega_i = \frac{1}{2}((\tilde{\tau}_1 - \tau_2 \tau_3^T) \dot{\tau}_1 + (\tilde{\tau}_2 + \tau_1 \tau_3^T) \dot{\tau}_2),$$

а соответствующая ему матрица Якоби –

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2}((\tilde{\tau}_1 - \tau_2 \tau_3^T) \mathbf{S}'_1 + (\tilde{\tau}_2 + \tau_1 \tau_3^T) \mathbf{S}'_2).$$

Последняя искомая величина – вектор углового ускорения

$$\varepsilon_i = \dot{\omega}_i = \mathbf{B}_i \ddot{\mathbf{e}}_i + \varepsilon'_i,$$

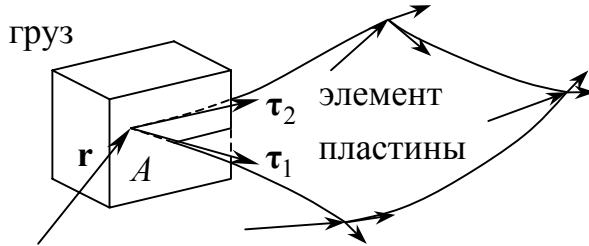
где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_i = \dot{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{e}}_i &= \frac{1}{2}((\dot{\tilde{\tau}}_1 - \dot{\tau}_2 \tau_3^T - \tau_2 \dot{\tau}_3^T) \dot{\tau}_1 + (\dot{\tilde{\tau}}_2 + \dot{\tau}_1 \tau_3^T + \tau_1 \dot{\tau}_3^T) \dot{\tau}_2) = \\ &= \frac{1}{2}(-(\dot{\tau}_2 \tau_3^T + \tau_2 \dot{\tau}_3^T) \dot{\tau}_1 + (\dot{\tau}_1 \tau_3^T + \tau_1 \dot{\tau}_3^T) \dot{\tau}_2). \end{aligned}$$

3.2.3.6. Абсолютные узловые координаты тела в пространстве

Следуя идее, предложенной в п. 3.1.4.2, можно исключить уравнения связей при моделировании системы «пластина+груз», Рис. 3.20. Примем в качестве вектора обобщённых координат для абсолютно твёрдого тела вектор

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{r}^T, \tau_1^T, \tau_2^T\}^T.$$



Он состоит из вектора \mathbf{r} и двух касательных векторов τ_1, τ_2 – эти величины принадлежат в том числе и вектору координат элемента пластины.

Рис. 3.20. Элемент пластины и груз

Используя полученное в п. 3.2.3.5 значение упрощённой матрицы направляющих косинусов (3.29), выразим скорость произвольной точки \mathbf{p} тела

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\omega} \mathbf{r}$ в виде $\mathbf{v} = \Phi \dot{\mathbf{x}}$, где $\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \rho_1^* \mathbf{I} - \rho_3^* \tilde{\tau}_2 & \rho_2^* \mathbf{I} + \rho_3^* \tilde{\tau}_1 \end{bmatrix}$. Здесь величи-

ны $\rho_k^* = \tau_k^T \mathbf{p}$ соответствуют компонентам вектора \mathbf{p} в системе координат, определяемой векторами τ_1, τ_2, τ_3 .

После некоторых громоздких вычислений, аналогичных проделанным в п. 3.1.4.2, получим уравнения движения тела в виде $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^i = \mathbf{f}^g$, где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & & & \text{симм.} \\ m(\rho_1\mathbf{I} + \rho_3\tilde{\tau}_2) & I_{11}\mathbf{I} - I_{33}\tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_2 & & \\ m(\rho_2\mathbf{I} - \rho_3\tilde{\tau}_1) & I_{12}\mathbf{I} - I_{13}\tilde{\tau}_1 - I_{23}\tilde{\tau}_2 + I_{33}\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2 & I_{22}\mathbf{I} - I_{33}\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_1 & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^i = 2 \begin{bmatrix} m\rho_3\mathbf{I} \\ I_{13}\mathbf{I} + I_{33}\tilde{\tau}_2 \\ I_{23}\mathbf{I} - I_{33}\tilde{\tau}_1 \end{bmatrix} \dot{\tilde{\tau}}_1 \dot{\tilde{\tau}}_2, \quad \mathbf{f}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \rho_1\mathbf{I} + \rho_3\tilde{\tau}_2 \\ \rho_2\mathbf{I} - \rho_3\tilde{\tau}_1 \end{bmatrix} m\mathbf{g}.$$

Здесь ρ_k являются компонентами радиус-вектора центра масс тела, а I_{ij} – компонентами тензора инерции тела в системе координат τ_1, τ_2, τ_3 .

Размер матрицы масс \mathbf{M} равен 9 по числу компонентов вектора \mathbf{x} . Сама она вырождена и это означает, что моделировать свободное тело с помощью полученных уравнений невозможно. Однако при присоединении полученного элемента к пластине (приложение 6.3) эта вырожденность исчезает.

3.2.4. Учёт сил демпфирования

В экспериментах с тонкой балкой с успехом использовалась линейная модель Рэлея сил демпфирования (п. 3.1.5.3), а именно демпфирование, пропорциональное матрице масс и обобщённым скоростям:

$$\mathbf{Q}^d = \alpha \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}}. \quad (3.30)$$

Однако, когда данная модель демпфирования была применена к моделированию движения пластины (особенно свободной, без прикреплённого груза), оказалось, что она неудовлетворительно отражает процесс затухания колебаний. По мнению автора, это объясняется тем, что пластина имеет значительную (по сравнению с балкой из проволоки) площадь сечения в направлении движения, и при обтекании её воздухом линейная модель сил (3.30) становится несправедливой. Поэтому возникла необходимость введения квадратичной по скоростям модели сил сопротивления и идентификации её параметров из экспериментальных данных.

3.2.4.1. Вспомогательная задача идентификации параметров

Рассмотрим малые колебания консольно закреплённой пластины и представим её движение моделью с одной степенью свободы e – это вертикальное перемещение свободного конца, Рис. 3.21.

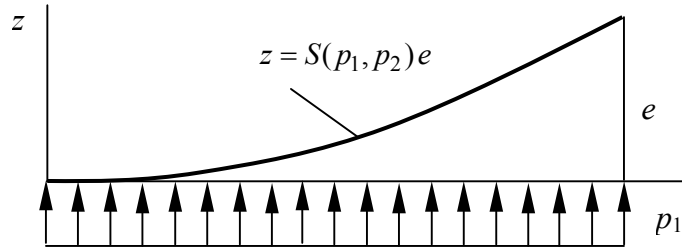


Рис. 3.21. Консольная пластина (балка) под равномерной нагрузкой

Представим поля вертикальных перемещений и скоростей пластины:

$$z = z(p_1, p_2, e) = S(p_1, p_2) e,$$

$$v = \dot{z}(p_1, p_2, \dot{e}) = S(p_1, p_2) \dot{e},$$

где S – функция формы, соответствующая деформации балки под равномерной нагрузкой [9]:

$$S(p_1, p_2) = \frac{1}{3} \left(6(p_1/a)^2 - 4(p_1/a)^3 + (p_1/a)^4 \right).$$

Кинетическая энергия пластины вычисляется в виде

$$T = \frac{1}{2} \mu \iint_P S^2 \dot{e}^2 dP = \frac{1}{2} M \dot{e}^2,$$

где μ – плотность материала пластины в кг/м²; $M = \mu \iint_P S^2 dP = \frac{104}{405} M_0$ – масса пластины, приведенная к её концу; $M_0 = \mu ab$ – полная масса пластины.

Примем, что силы демпфирования имеют линейную и квадратичную по скоростям части:

$$f(v) = \alpha_1 v + \alpha_2 v |v| \quad (3.31)$$

с неизвестными коэффициентами α_1 и α_2 , которые необходимо определить.

Обобщённая сила от сил демпфирования равна

$$Q^d = \iint_P S f dP = \iint_P S (\alpha_1 S \dot{e} + \alpha_2 S \dot{e} |S \dot{e}|) dP = \alpha_1 \frac{1}{\mu} M \dot{e} + \alpha_2 \iint_P S^2 |S| dP \dot{e} |\dot{e}|.$$

Поскольку $S > 0$ для $\forall p_1 \in [0 \dots a]$, то мы легко вычислим интеграл

$$\iint_P S^2 |S| dP = \iint_P S^3 dP = \frac{2336}{12285} ab \approx \frac{0.19}{\mu} M_0 \approx \frac{0.74}{\mu} M.$$

Уравнение движения пластины с одной степенью свободы примет вид

$$M \ddot{e} + C e + \beta_1 M \dot{e} + \beta_2 M \dot{e} |\dot{e}| = 0, \quad (3.32)$$

где C – коэффициент жёсткости, и

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\mu}, \quad \beta_2 = \frac{0.74 \alpha_2}{\mu}. \quad (3.33)$$

После сокращения уравнения (3.32) на коэффициент M , получим уравнение линейного осциллятора с нелинейным демпфированием ($\omega_0^2 = C/M$)

$$\ddot{e} + \omega_0^2 e + \beta_1 \dot{e} + \beta_2 \dot{e} |\dot{e}| = 0,$$

которое должно решаться с начальными условиями $e(0) = A_0$, $\dot{e}(0) = 0$.

Следуя методу Ван-дер-Поля [3], найдём решение уравнения в виде

$$e(t) \approx A(t) \cos \omega_0 t$$

с амплитудой, изменяющейся во времени:

$$A(t) = \frac{3\pi\beta_1 A_0 e^{-\beta_1 t/2}}{8\omega_0 \beta_2 A_0 (1 - e^{-\beta_1 t/2}) + 3\pi\beta_1}.$$

Чтобы определить коэффициенты β_1 и β_2 , необходимо замерить последовательные амплитуды A_k и соответствующие им моменты времени t_k , используя экспериментальные кривые вида Рис. 3.22.

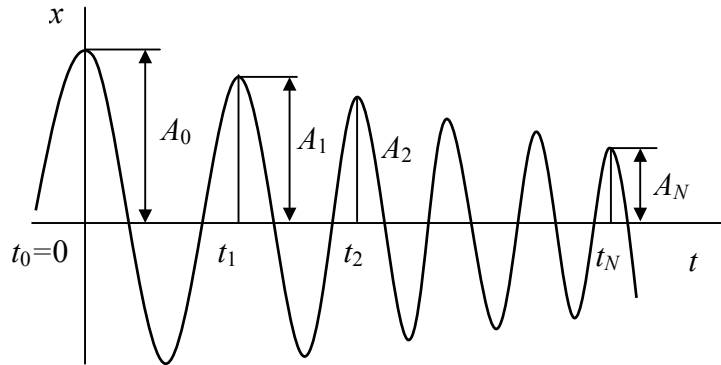


Рис. 3.22. Последовательность амплитуд при затухающих колебаниях

Затем, используя метод наименьших квадратов

$$\Psi(\beta_1, \beta_2) = \sum_{k=0}^N (A(t_k) - A_k)^2 \rightarrow \min,$$

найдем значения β_1, β_2 и вычислим коэффициенты α_1, α_2 по (3.33).

Значения параметров модели сил демпфирования, полученные с применением этой методики, представлены в Табл. 3.7.

Табл. 3.7. Параметры модели сил демпфирования для консольной пластины

Длина пластины, см	$\beta_1, \text{с}^{-1}$	$\beta_2, \text{м}^{-1}$	$\alpha_1, \text{кг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$	$\alpha_2, \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$
30	0,62	1,23	1,95	5,22
40	0,17	0,85	0,53	3,61

3.2.4.2. Применение модели сил демпфирования к пластине

Уравнения движения пластины с учётом действия сил демпфирования в матричной форме имеют вид (ср. с (2.2)):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{Q}^e + \mathbf{Q}^d = \mathbf{Q}^g,$$

где \mathbf{Q}^d – столбец обобщённых сил демпфирования. Для его вычисления согласно модели (3.31), мы:

- 1) вычисляем вектор скорости центра масс каждого элемента пластины $\mathbf{v}_C = \bar{\bar{\mathbf{S}}} \dot{\mathbf{e}}$; значение матрицы $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ приведено в уравнении (2.19);
- 2) вычисляем усреднённую силу демпфирования, действующую на элемент по формуле $\mathbf{f} = (\alpha_1 + \alpha_2 \|\mathbf{v}_C\|) \mathbf{v}_C$, используя коэффициенты α_1 и α_2 ;
- 3) распределяем эту силу по узловым переменным элемента: $\mathbf{Q}^d = \bar{\bar{\mathbf{S}}}^T \mathbf{f}$.

Альтернативный способ вычисления столбца обобщённых сил демпфирования состоит в применении выражения

$$\mathbf{Q}^d = (\beta_1 + \beta_2 \|\mathbf{v}_C\|) \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}},$$

по аналогии с соотношением (3.32) для модели с одной степенью свободы.

3.2.5. Сравнение результатов экспериментов и расчётов

3.2.5.1. Тест на сходимость

Здесь изучается влияние числа конечных элементов на сходимость результатов расчёта. Модель пластины длиной 0,4 м с присоединённым грузом массой 0,26 кг. Использовались следующие конечноэлементные сетки: 2×2, 4×2, 6×2 и 8×2 элементов, Рис. 3.23. Можно видеть, что графики вертикальных перемещений угла пластины с грузом в последних двух случаях практически совпадают. Поэтому далее в расчётах используется 6×2 элементов.

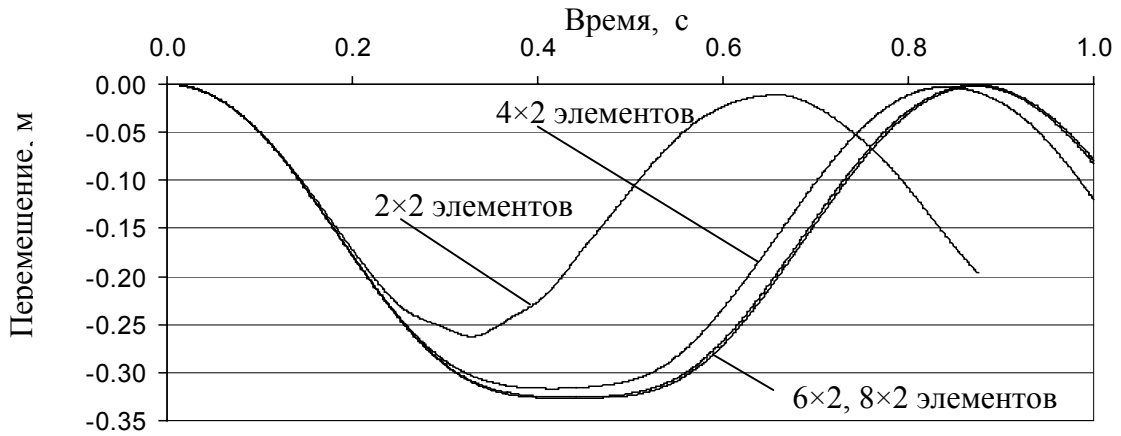


Рис. 3.23. Тест на сходимость: вертикальные перемещения угла пластины 40×20 см, к которому подвешен груз 260 г.

3.2.5.2. Свободные колебания пластины без груза

Рис. 3.24 и Рис. 3.25 демонстрируют результаты сравнения экспериментальных и расчётных графиков вертикальных перемещений точки на конце пластины в плоскости её симметрии. Колебания пластины вызваны её собственным весом, без присоединения груза.

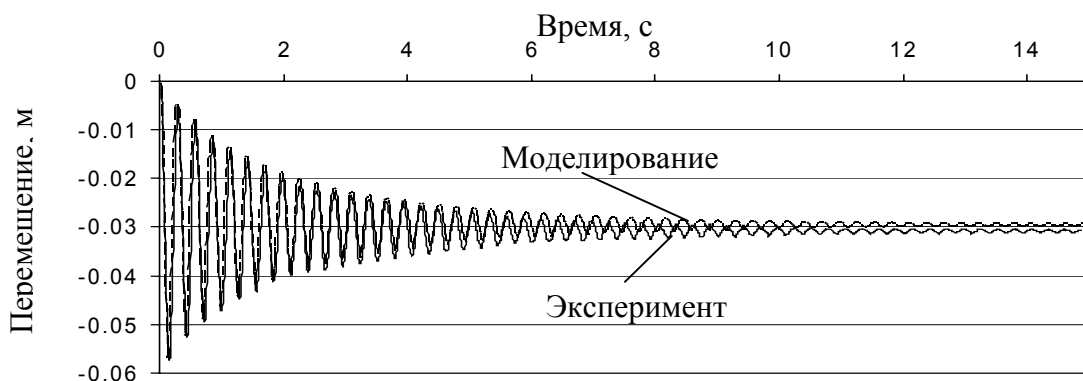


Рис. 3.24. Свободные колебания пластины длиной 30 см

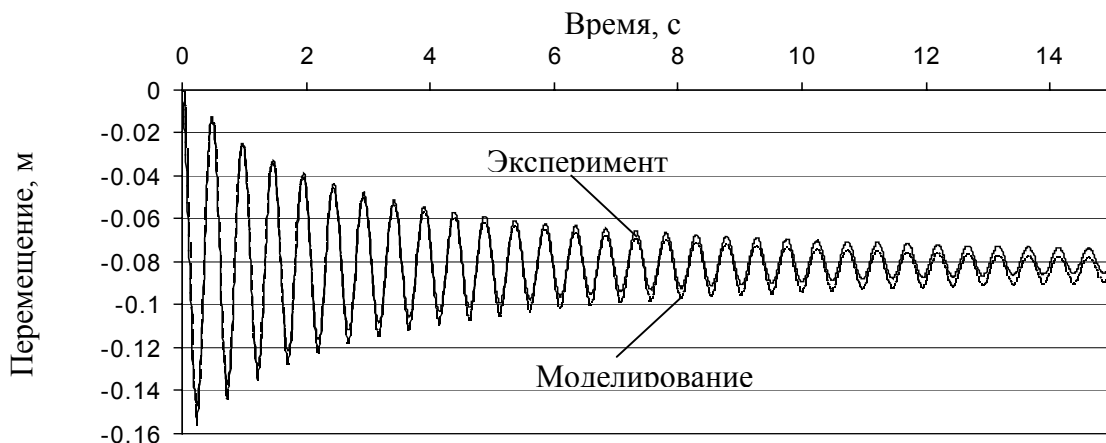


Рис. 3.25. Свободные колебания пластины длиной 40 см

Комментируя приведенные графики, можно сказать, что совпадение результатов очень хорошее. Различия в них несущественны, и их можно объяснить неточным заданием начальных условий.

3.2.5.3. Колебания пластины с грузом

Сравнение графиков вертикальных перемещений пластины с подвешенным грузом представлены на Рис. 3.26 и Рис. 3.27. Совпадение результатов можно охарактеризовать как хорошее.

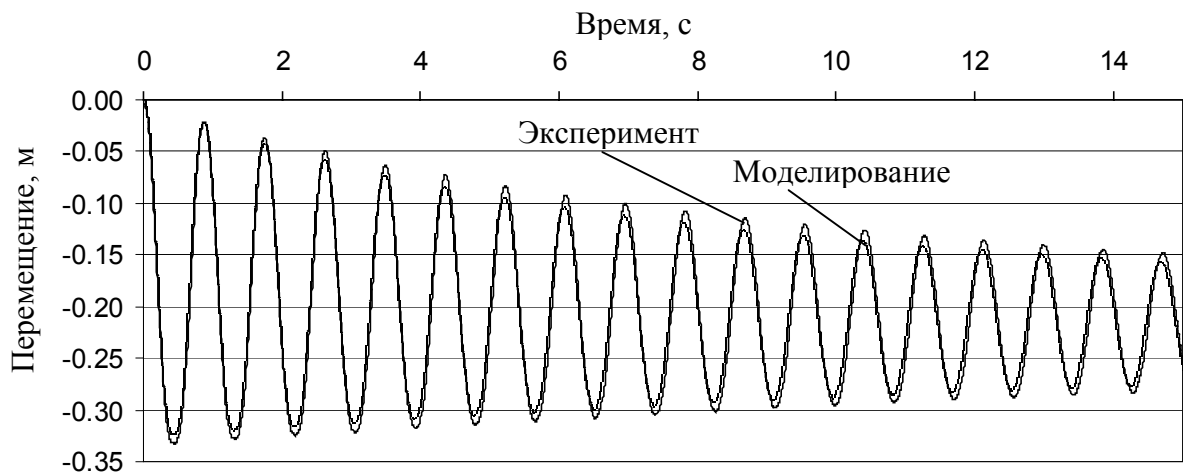


Рис. 3.26. Колебания пластины длиной 40 см с грузом 0,26 кг

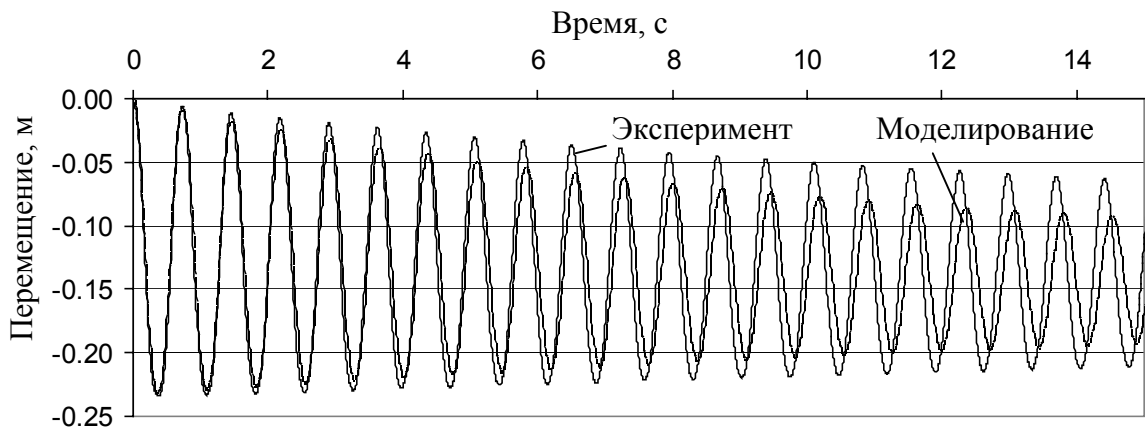


Рис. 3.27. Колебания пластины длиной 30 см с грузом 0,4 кг

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной диссертационной работе рассмотрены известные и предложены новые подходы к моделированию динамики геометрически нелинейных систем деформируемых и абсолютно твёрдых тел.

К числу новых научных результатов следует отнести следующие.

В области моделирования деформируемых тел:

- Получил развитие современный формализм абсолютных узловых координат, сохраняющий постоянство основных членов уравнений движения деформируемых тел в геометрически нелинейной постановке. Новизна состоит в трактовке формализма как обобщения узловых переменных и полей перемещений традиционно используемых конечных элементов.

- На основе указанного обобщения построено новое семейство конечных элементов балок и пластин, которые могут совершать произвольное пространственное движение и иметь большие деформации. Для этих элементов получены аналитические выражения для членов их уравнений движения и матриц Якоби от них.

- На основе существующего формализма, использующего конечные углы поворота и приводящего к сильно нелинейным уравнениям движения, разработаны новые конечные элементы тонких балок и пластин, которые не приводят к неоднозначностям и вырождениям, описанным в литературе. Эти элементы также используются для сравнения с результатами моделирования, полученных методом абсолютных координат.

При моделировании систем абсолютно твёрдых и деформируемых тел:

- Для связанной системы деформируемого и абсолютно твёрдого тела построены дифференциально-алгебраические уравнения движения в плоской и пространственной постановке с использованием введённых абсолютных узловых координат.

- Предложен приём исключения алгебраических уравнений связей из уравнений движения системы абсолютно твёрдого и деформируемого тела.

Это производится на основе использования абсолютных узловых координат деформируемого тела в качестве обобщённых координат для абсолютно твёрдого тела. В итоге уравнения движения указанного объекта имеют вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты и выводы, полученные в диссертационной работе, научно обоснованы. Достоверность результатов подтверждается их сопоставлением с известными аналитическими и численными решениями, а также с проведенными экспериментальными исследованиями.

Практически значимые результаты работы:

- разработанные методы и алгоритмы были реализованы в виде программного обеспечения в составе программного комплекса «Универсальный механизм» для моделирования задач статики, кинематики и динамики сложных систем тел, см. ссылку www.umlab.ru;

- была проведена проверка корректности построенных моделей путём численного моделирования на ЭВМ реальных экспериментов, проведенных над образцами балок и пластин, и сравнения результатов расчётов с результатами измерений и известными аналитическими решениями;

- решены некоторые прикладные задачи моделирования реальных сложных систем.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Погорелову Дмитрию Юрьевичу за многолетнее руководство исследованиями, за ту научную, методическую и личную поддержку и тот объём знаний и советов, которые были переданы от учителя к ученику.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках грантов 98-01-00782-а, 99-01-00223-а, 02-01-00364-а, 02-01-06098-мас, 03-01-06487-мас, а также научной программы “Университеты России – Фундаментальные исследования” (гранты УР.015.04.01.09, УР.04.01.046). Автор хотел бы ещё раз подчеркнуть,

что именно благодаря профессору Д.Ю. Погорелову, являвшимся руководителем этих грантов, существенная финансовая поддержка оказывалась целому коллективу молодых учёных, с которым автору хотелось бы себя ассоциировать.

Кроме того, большую признательность хотелось бы выразить профессору Ван-Сок Ю (Wan-Suk YOO), руководителю лаборатории CAE Lab при Пусанском национальном университете, г. Пусан, Южная Корея. Профессор Ю оказал большую поддержку автору в получении результатов, относящихся к экспериментальной части исследований. Время, проведенное в его лаборатории, а также дружелюбие и готовность его сотрудников помочь, автор всегда будет вспоминать с теплотой.

5. ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», М., 1975.
2. Блехман И. И. Вибрационная механика. – Физматлит, 1994.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», М., 1974.
4. Верещагин А.Ф. Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Инженерная кибернетика, вып. 6, – С. 65-70.
5. Леонтьев В. А. Оптимальная дискретизация распределённой упругости в расчётных моделях звеньев манипулятора // Тр. 1-й научн.-техн. конф. «Роботы и манипуляторы в экстремальных условиях». – СПб.: СПбДНТП, 1992. – с. 100-106.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учеб. Пособие для университетов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 416 с.
7. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учеб. пособие. – Брянск: БГТУ, 1997.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды, тт. I, II. – Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1976.
9. Справочник по строительной механике корабля. Т. 2 // Под ред. Паллий О.М. и др., – Л.: Судостроение, 1982.
10. Справочник по математике для инженеров и студентов втузов / Под ред. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. – М.: ГИТТЛ, 1957.
11. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976.
12. Agrawal O.P., Shabana A.A. Dynamic analysis of multibody systems using component modes // Computers and Structures 21(6), 1985, 1301-1312.
13. Ambrósio J.A.C., Pereira M.F.O.S. Flexible multibody dynamics with nonlinear deformations: Vehicle dynamics and crashworthiness applications. – Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesis and optimization / J. Angeles, E. Zakhariev (eds.). – (NATO ASI series. Series F, Computer and systems sciences; vol. 161). – pp. 382-420.
14. Banerjee A.K., Nagarajan S. Efficient simulation of large overall motion of beams undergoing large deflection // Multibody Sys. Dyn. 1, 1997, 113-126.
15. Bathe K.-J. Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
16. Belytschko T., Hsieh B.J. Nonlinear transient finite element analysis with convected coordinates // International Journal for Numerical Methods in En-

Engineering 7, 1973, 255-271.

17. Berzeri M., Shabana A.A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal co-ordinate formulation // *Journal of Sound and Vibration* 235(4), 2000, 539-565.
18. Campanelli M., Berzeri M., Shabana A. A. Performance of the incremental and non-incremental finite element formulations in flexible multibody problems // *Journal of mechanical design*. – 2000. – Vol. 122. – P. 498.
19. Craig R.R. *Structural Dynamics*.
20. Denavit J., Hartenberg R.S. A kinematic motion for lower pair mechanisms based on matrices // *Journal of Applied Mechanics* 22, 1955, 215-221.
21. Dunavant D.A., High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle // *Int. J. of Num. Meth. in Eng.* 21, (1985), 1129-1148.
22. Eichberger A. *Simulation von Mehrkörpersystemen auf parallelen Rechnerarchitekturen* // Universität-Gesamthochschule Duisburg, Fachbereich Maschinenbau, Dissertation, 1993.
23. Eichberger A. Transputer-Based Multibody System Dynamic Simulation, Part I: The Residual Algorithm – A Modified Inverse Dynamic Formulation, Part II: Parallel Implementation – Results // *Mechanics of Structures and Machines*, 22(2), 1994, 211-261.
24. Featherstone R. *Robot dynamics algorithms* // Kluwer, Boston. – 1987.
25. Gear C.W., Gupta G.K., Leimkuhler B. Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints // *Journal of Computational and Applied Mathematics* 12(13), 1985, 77-90.
26. Geradin M., Cardona A., Doan D.B., Duysens J. Finite element modeling concepts in multibody dynamics // *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems* / M.S. Pereira and J.A.C. Ambrosio (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994, 233-284.
27. Hooker W.W., Margulies G. The dynamical attitude equations for n -body satellite // *J. on Astronomical Science* 12, 1965, 123-128.
28. Huston R.L. Computer methods in flexible multibody dynamics // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 32(8), 1991, 1657-1668.
29. Huston R.L. Multi-body dynamics including the effect of flexibility and compliance // *Computers and Structures* 14, 1981, 443-451.
30. Huston R.L., Wang Y. Flexibility effects in multibody systems // *Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Multibody Systems*, M.S. Pereira and J.A.C. Ambrosio (eds.), Kluwer, Dordrecht, 1994, 351-376.
31. Kreuzer E., Ellermann K. Multibody system dynamics in ocean engineering // *Proceedings of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems* 1, W.Schielen, M.Valášek (Eds.), Prague, 2002, 108-129.

32. Kreuzer E., Wilke U. Dynamics of mooring systems in ocean engineering // *Archieve of Applied Mechanics*, 2001.
33. Kruszewski J., Gawronski W., Wittbrodt E., Najbar F., Grabowski S. Metoda Sztywnych Elementow Skonczoonych (Rigid Finite Element Method), Arkady Warszawa, 1975 (польск.).
34. Levinson D.A. Equations of motion for multi-rigid-body systems via symbolic manipulations // *Journal of Spacecraft and Rockets* 14, 1977, 479-487.
35. Likins P.W. Modal method for analysis of free rotations of spacecraft // *AIAA Journal* 5(7), 1967, 1304-1308.
36. Mikkola A.M., Shabana A.A. A new plate element based on the absolute nodal coordinate formulation // *Proceedings of ASME 2001 DETC*, Pittsburgh, 2001.
37. Omar M.A., Shabana A.A. A two-dimensional shear deformation beam for large rotation and deformation // *Journal of Sound and Vibration* 243(3), 2001, 565-576.
38. Pascal M., Gagarina T. Numerical simulation of flexible multibody systems using a virtual rigid body model // *Proc. of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems* 1, W.Schielen, M.Valášek (Eds.), Prague, 2002, 174-179.
39. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling // *Numerical Algorithms* 19, Baltzer Science Publishers, 1998, 183-194.
40. Pogorelov D. Multibody system approach in simulation of underwater cable dynamics // *Abstr. of Euromech 398 Colloq. on Fluid-Structure Interaction in Ocean Engineering*, TU Hamburg-Harburg, Hamburg, Germany, 1999, p. 40.
41. Pogorelov D. Plate modeling by rigid-elastic elements // *Zwischenbericht ZB-103*, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1998.
42. Pogorelov D. Some developments in computational techniques in modeling advanced mechanical systems // *Proc. of IUTAM Symposium on Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems*, D. H. van Campen (Ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997, 313-320.
43. Rankin C.C., Brogan F.A. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations // *ASME Journal of Pressure Vessel Technology* 108, 1986, 165-174.
44. Rauh J. Ein Beitrag zur Modellierung Elastischer Balkensysteme // *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18*, Nr. 37, VDI-Verlag, Dusseldorf, Germany, 1997.
45. Roberson R.E., Wittenburg J. A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies, with reference to the problem of satellite attitude control // *Proc. 3rd Congr. Int. Fed. Autom. Control*, Butterworth, Vol. 1, Book 3, Paper 46 D, London, 1967.
46. Schiehlen W. (Ed.) *Multibody Systems Handbook*, Springer, Berlin, 1990.

47. Schiehlen W.O., Rauh J. Modeling of flexible multibeam systems by rigid-elastic superelements // *Revista Brasileira de Ciencias Mecanicas* 8(2), 1986, 151-163.
48. Schiehlen W., Kreuzer E. Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme // *Ing.-Archiv* 46, 1977, 185-194.
49. Schwertassek R. Flexible bodies in multibody systems. – *Computational methods in mechanical systems: mechanism analysis, synthesis and optimization* / Jorge Angeles, Evtim Zakhariiev. p. cm. – (NATO ASI series. Series F, Computer and systems sciences; vol. 161). – pp. 329-363.
50. Shabana A.A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and large deformation analysis of flexible bodies // *Techn. Rep. No. MBS96-1-UIC*, Dept. of Mech. Eng., Univ. of Illinois at Chicago, March 1996.
51. Shabana A.A. *Dynamics of Multibody Systems*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
52. Shabana A.A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments // *Multibody System Dynamics* 1, 1997, 189-222.
53. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Theory // *Journal of Mechanical Design* 123, 2001, 606-621.
54. Shabana A.A., Wehage R.A. Coordinate reduction technique for transient analysis of special substructures with large angular rotations // *Journal of Structural Mechanics* 11(3), 1983, 401-431.
55. Simeon B. DAEs and PDEs in elastic multibody systems // *Numerical Algorithms* 19 (1998), Baltzer Sc. Publ. – P. 235-246.
56. Simo J.C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem, Part I // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49, 1985, 55-70.
57. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite strain rod model, Part II: Computational aspects // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58, 1986, 79-116.
58. Song J.O., Haug E.J. Dynamic analysis of planar flexible mechanisms // *Computer methods in applied mechanics and engineering* 24, 1980, 359-381.
59. Szilard R., *Theory and Analysis of Plates. Classic and Numerical Methods* // Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
60. Takahashi Y., Shimizu N. Study on elastic forces of the absolute nodal coordinate formulation for deformable beams // *ASME Proceedings of Design Engineering Technical Conference*, VIB-8203, Las Vegas, 1999.
61. Takahashi Y., Shimizu N., Suzuki K. Introduction of damping matrix into absolute nodal coordinate formulation // *Proceedings of the 1st Asian Conference on Multibody Dynamics*, Iwaki, Fikushima, 2002, 33-40.

62. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, 1991.
63. Uicker J.J. (Jr.) On the dynamic analysis of spatial linkages using 4 by 4 matrices // Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, 1965.
64. Vukobratović M., Frank A.A., Juricić D. On the stability of biped locomotion // IEEE Transactions on Biomedical Engineering BME-17, 1970, 25-36.
65. Wallrap O. Standartization of flexible body modeling in multibody system codes, Part I: Definition of standart input data // Mechanics of Structures and Machines, 22(3), 1994, 283-304.
66. Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies // Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik / H. Görtler (ed.), Vol. 33, Teubner, Stuttgart, 1977.
67. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method, 4th Edition, Volume 2: Solid and fluid mechanics, McGraw-Hill, 1991.

Работы, опубликованные соискателем (в том числе в соавторстве) по теме диссертации, в порядке, обратном временному

68. Дмитроченко О.Н., Погорелов Д.Ю.¹⁵ Задачи с большими перемещениями и конечные элементы, сохраняющие постоянство матриц в формулировке абсолютных узловых координат // Сб. докл. Межд. конгр. «Механика и трибология транспортных систем-2003», т. 1. – Рост. гос. ун-т путей сообщения. – Ростов-на-Дону, 2003. – С. 299-305.
69. Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H., Dmitrochenko O., Pogorelov D.¹⁶ Large oscillations of a thin cantilever beam: Physical experiments and simulation using absolute nodal coordinate formulation // Journal of Nonlinear Dynamics, Kluwer, Dordrecht, 2003, 27 стр.¹⁷
70. Yoo W.-S., Lee J.-H., Sohn J.-H., Park S.-J., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Comparison of physical experiments and computer simulation with ANCF: Large deformation of a thin cantilever beam // 29th ASME International Design Engineering Technical Conferences, Chicago, 2003, DETC2003/VIB-48307, 8 стр.¹⁸
71. Yoo W.-S., Park S.-J., Lee J.-H., Sohn J.-H., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Large oscillations of a thin clamped plate: Modeling in absolute nodal

¹⁵ Дмитроченко О.Н. принадлежат методы решения и полученные результаты, Погорелову Д.Ю. – постановка проблемы.

¹⁶ Соавторам из Южной Кореи (Yoo W.-S., Lee J.-H., Park S.-J., Sohn J.-H.) принадлежит постановка проблемы и экспериментальная часть исследований; Погорелову Д. Ю. принадлежит постановка части, касающейся численного моделирования, Дмитроченко О. Н. принадлежат все результаты, касающиеся методов и результатов численного моделирования.

¹⁷ Статья прошла рецензию и авторскую корректуру и принята к печати в 2003 г.

¹⁸ Статья опубликована в электронной форме на компакт-дисках и доступна по коду VIB-48307.

- coordinate formulation and comparison with experiments // Proc. of ECCOMAS-2003 on Advances in Computational Multibody Dynamics, Lisbon, 2003, 1 стр. MB2003-076.¹⁹
72. Yoo W.-S, Park S.-J., Lee J.-H., Pogorelov D.Yu., Dmitrochenko O.N. Large deflection analysis of a thin plate with ANCF: Computer simulation and experiments // Multibody System Dynamics, Kluwer, Dordrecht, 2003, 25 с.²⁰
 73. Dmitrochenko O.N., Pogorelov D.Yu.²¹ Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation // Multibody System Dynamics **10**, No.1, Special issue 'Virtual Nonlinear Multibody Systems', Kluwer, Dordrecht, 2003, 17-43.
 74. Dmitrochenko O.N. Efficient simulation of rigid-flexible multibody dynamics: Some implementations and results // Proceedings of NATO ASI on Virtual Nonlinear Multibody Systems 1, W. Schielen, M. Valášek (Eds.), Prague, 2002, 51-56.
 75. Дмитроченко О.Н. Методы моделирования динамики гибридных систем тел с учётом геометрической нелинейности // Динамика, прочности и надёжность транспортных машин / Сб. тр. Под ред. Б.Г. Кеглина. – Брянск: БГТУ. – 2001. – С. 24-34.
 76. Дмитроченко О.Н., Погорелов Д.Ю.²² Упругие балочные элементы в системах твёрдых тел // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. тр. под ред. В.И. Сакало. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 18-27.
 77. Погорелов Д.Ю., Дмитроченко О.Н.²³ Модификации метода отдельных тел для синтеза и решения уравнений движения систем тел // Тез. докл. междунар. конф. стран СНГ «Молодые учёные – науке, технологиям и профессиональному образованию». – М.: 2000, ч.3, – С. 87-90.
 78. Dmitrochenko O.N. Numerical methods and examples of dynamical simulation of large rigid-flexible multibody systems // XXVIII Гагаринские чтения / Сб. тезисов докладов. – М.: 2002. – С. 47-48.
 79. Дмитроченко О.Н. Компьютерное моделирование динамики нелинейных гибридных систем абсолютно твёрдых и упругих тел // VIII Всеросс. Съезд по теор. и прикл. механике / Аннот. докладов. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 233 с.
 80. Дмитроченко О.Н. Методы составных и отдельных тел для моделирования динамики систем твёрдых тел и гибридных систем // Междунар. Межвуз. научн.-техн. конф. студентов, аспирантов и магистрантов / Сб.

¹⁹ Тезисы опубликованы в электронной форме на компакт-дисках и доступны по коду MB2003-076.

²⁰ Статья прошла рецензию и принята к печати в 2003 г.

²¹ Дмитроченко О.Н. принадлежат методы решения и результаты, Погорелову Д.Ю. – постановка.

²² Погорелову Д.Ю. принадлежит постановка проблемы и часть теоретических выкладок; Дмитроченко О.Н. принадлежит часть теоретических и все прикладные результаты.

²³ Погорелову Д.Ю. принадлежит постановка проблемы и часть теоретических выкладок; Дмитроченко О.Н. принадлежит часть теоретических и все прикладные результаты.

материалов. – Гомель, ГГТУ им. П. О. Сухого, 2001. – С. 260-263.

81. Погорелов Д.Ю., Дмитроченко О.Н.²⁴ Моделирование геометрически нелинейных упругих систем на основе твёрдотельной расчётной схемы на примере конвейера с подвесной лентой // Вопросы трансп. машиностр. / Сб.тр.под ред. Г.С. Михальченко. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 94-99.
82. Dmitrotschenko O. Dynamik der Borsten rotierender Buerste // Zwischenbericht ZB-097 / Arbeitsbereich Meerestechnik II – Mechanik. – Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg. – 1998. – S. 1-23.
83. Дмитроченко О.Н., Михайлов Н.Н., Погорелов Д.Ю.²⁵ Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем твёрдотельными конечными элементами // Динамика и прочность транспортных машин / Сб. научн. трудов под ред. В.И.Сакало. – Изд-во БГТУ, Брянск, 1998. – С. 33-39.

²⁴ Погорелову Д.Ю. принадлежит постановка проблемы и методическая часть исследования; Дмитроченко О.Н. принадлежат прикладные результаты.

²⁵ Дмитроченко О.Н. принадлежит реализация методов, предложенных Погореловым Д.Ю.; Михайлову Н.Н. принадлежит экспериментальная часть работы.

6. ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Скалярные величины представляются наклонными латинскими и греческими (строчными и заглавными) буквами, например: t – время, l – длина, T , Π – кинетическая и потенциальная энергии, α , φ – углы поворота.

Векторы-столбцы обозначаются в тексте жирным шрифтом преимущественно строчными буквами: \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{q} . Обозначение нулевого вектора – $\mathbf{0}$.

Матричные величины представляются в тексте жирным шрифтом, как правило, заглавными буквами, например: \mathbf{A} , \mathbf{K} , \mathbf{S} . Обозначение нулевой матрицы – \mathbf{O} , квадратной единичной матрицы – \mathbf{I} . Константы и функции, имеющие значением вектор или матрицу, также пишутся жирным шрифтом, например: $\mathbf{p} = \text{const}$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

Скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} записывается с помощью операции транспонирования:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \{a_1 \quad \dots \quad a_n\} \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

Векторное произведение векторов в трёхмерном пространстве

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{Bmatrix}$$

будем записывать в матричном виде

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \quad (6.1)$$

где введена *кососимметрическая матрица*

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Обратим внимание, что для наглядности элементы векторов заключаются в фигурные скобки, тогда как элементы матриц – в квадратные.)

Прямым перемножением матрицы $\tilde{\mathbf{a}}$ на вектор \mathbf{b} можно убедиться, что результат соответствует векторному произведению векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Говорят, что вектору \mathbf{a} соответствует *кососимметрический тензор*, который в трёхмерном евклидовом пространстве имеет координатную запись в виде кососимметрической матрицы $\tilde{\mathbf{a}}$.

Можно убедиться, что выражение (6.1) подчиняется известным свойствам векторного произведения:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} &= -\tilde{\mathbf{b}}\mathbf{a}, \\ \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{a} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Отметим также важные тождества, которые используются в тексте:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}\mathbf{a}^T - (\mathbf{a}^T\mathbf{b})\mathbf{I}, \\ \widetilde{(\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b})} &= \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T. \end{aligned}$$

Знак \sim (*тильда*) над скобкой относится к результату, заключённому в паре скобок, который должен иметь значение вектора.

Производная скалярной функции f переменных x_1, x_2, \dots, x_n по столбцу \mathbf{x} этих переменных (*градиент*) – это *столбец*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}^T$$

Если имеется m функций f_1, f_2, \dots, f_m переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то в матричной записи это обозначается $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Вводится также $m \times n$ матрица производных от *столбца* \mathbf{f} по *строке* \mathbf{x}^T (*матрица Якоби*)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{array} \right\}}_{\text{условная запись}} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right], \quad \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Транспонированная матрица Якоби обозначается $\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \right]^T$ или $\frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}$.

Далее, если имеется скалярное произведение $f = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$ двух функций-

столбцов $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$, компоненты которых зависят от элементов третьего столбца \mathbf{x} , то градиент f по \mathbf{x} вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} b_k + \frac{\partial b_k}{\partial x_i} a_k$$

(здесь и часто в тексте применяется известное *соглашение о суммировании* по повторяющимся индексам), или, в матричной форме,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}^T} \right]^T \mathbf{b} + \left[\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}^T} \right]^T \mathbf{a}.$$

В последнее выражение входят матрицы Якоби $\partial \mathbf{a} / \partial \mathbf{x}^T$ и $\partial \mathbf{b} / \partial \mathbf{x}^T$.

В частных случаях $\partial f / \partial \mathbf{a} = \mathbf{b}$ и $\partial f / \partial \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Наконец, элементы матрицы Якоби \mathbf{C} от векторного произведения $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ трёхмерных векторов $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ по строке \mathbf{x}^T , от элементов которой зависят компоненты этих векторов, вычисляются по формуле

$$C_{ij} = \frac{\partial (\tilde{a}_{ik} b_k)}{\partial x_j} = \tilde{a}_{ik} \frac{\partial b_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{a}_{ik}}{\partial x_j} b_k,$$

где \tilde{a}_{ik} – элементы кососимметрической матрицы $\tilde{\mathbf{a}}$. В матричной форме

$$\mathbf{C} = \frac{\partial (\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b})}{\partial \mathbf{x}^T} = \tilde{\mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}^T} - \tilde{\mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}^T},$$

Подобного рода вычисления проводятся, например, в п. 2.4.5.

6.2. ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНЫХ УГЛОВ ПОВОРОТА

$$U_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \text{симм.} \\ s_0 & -c_0 & -c_0 \Delta x - s_0 \Delta y & & & \\ 0 & 0 & -s_0 & 0 & & \\ 0 & 0 & c_0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$

$$U_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ c_0 & s_0 & s_0 \Delta x - c_0 \Delta y & & & \\ 0 & 0 & -c_0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -s_0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}$$

$$U_{ij}^3 = 0$$

Значение матрицы $\mathbf{S}(p, \mathbf{q})$ в формуле (1.36):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}_0 \mathbf{N}_1 \mathbf{A}_0^T & \mathbf{A}'_0 \mathbf{p} + \mathbf{A}_0 (\mathbf{N}_1 \mathbf{A}'_0{}^T \Delta \mathbf{r} - \mathbf{n}_2) & \mathbf{A}_0 \mathbf{N}_1 \mathbf{A}_0^T & \mathbf{A}_0 \mathbf{n}_2 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{N}_1 и \mathbf{n}_2 – блоки матрицы локальных функций формы \mathbf{N} (формула (1.35)):

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \mid \mathbf{n}_2], \quad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ell(\xi^3 - \xi^2) \end{Bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0.$$

$$\mathbf{Q}^g = \left\{ 0, -\frac{mg}{2}, -\frac{mg\ell}{12}((\varphi_1 - \varphi_0)\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0), 0, -\frac{mg}{2}, \frac{mg\ell}{12}\cos\varphi_0 \right\}^T$$

А вот как громоздко выглядит код для вычисления *одного* элемента столбца обобщённых сил инерции для балочного элемента:

```
s1 := M;      s3 := 1/L;
s5 := -pow(sin(q[3]),2.0)*v[6]*v[3]*L*L*cos(q[3])/10+v[3]*v[2]*pow(sin(q[3]),2.0)*L*pow(cos(q[3]),2.0)/105-v[5]*v[3]*pow(sin(q[3]),2.0)*L*pow(cos(q[3]),2.0)/105-pow(v[3],2.0)*L*L*cos(q[3])/6+pow(v[3],2.0)*L*L*pow(cos(q[3]),3.0)/10+8.0/105.0*v[3]*L*v[1]*cos(q[3])*pow(sin(q[3]),3.0)-3.0/70.0*v[3]*L*v[5]*pow(sin(q[3]),4.0)+v[3]*L*v[5]*pow(cos(q[3]),4.0)/30+3.0/70.0*v[3]*L*v[2]*pow(sin(q[3]),4.0)-v[3]*L*v[2]*pow(cos(q[3]),4.0)/30-8.0/105.0*v[3]*L*v[4]*pow(sin(q[3]),3.0)*cos(q[3])-8.0/105.0*v[3]*L*v[4]*sin(q[3])*pow(cos(q[3]),3.0)-v[3]*L*L*pow(cos(q[3]),3.0)*v[6]/10-pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),4.0)*q[4]/30+pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),4.0)*q[1]/30+3.0/70.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(sin(q[3]),4.0)*q[4];
s6 := s5-3.0/70.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(sin(q[3]),4.0)*q[1]+v[3]*L*L*cos(q[3])*v[6]/6+8.0/105.0*v[3]*L*v[1]*pow(cos(q[3]),3.0)*sin(q[3])-pow(v[3],2.0)*L*L*sin(q[3])*q[6]/12+pow(v[3],2.0)*L*L*sin(q[3])*q[3]/12+pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),2.0)*pow(sin(q[3]),2.0)*q[4]/105-pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),2.0)*pow(sin(q[3]),2.0)*q[1]/105;
s4 := s6-8.0/105.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),3.0)*sin(q[3])*q[5]+8.0/105.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(cos(q[3]),3.0)*sin(q[3])*q[2]-8.0/105.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(sin(q[3]),3.0)*cos(q[3])*q[5]+8.0/105.0*pow(v[3],2.0)*L*pow(sin(q[3]),3.0)*cos(q[3])*q[2]+11.0/210.0*pow(v[3],2.0)*L*L*pow(sin(q[3]),3.0)*q[6]-11.0/210.0*pow(v[3],2.0)*L*L*pow(sin(q[3]),3.0)*q[3]+pow(v[3],2.0)*L*L*pow(sin(q[3]),2.0)*cos(q[3])/10+11.0/210.0*pow(v[3],2.0)*L*L*pow(cos(q[3]),2.0)*sin(q[3])*q[6]-11.0/210.0*pow(v[3],2.0)*L*L*pow(cos(q[3]),2.0)*sin(q[3])*q[3];
s2 := s3*s4;
kk[1] := s1*s2;
```

6.3. ФОРМИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

В данном пункте описывается процедура построения уравнений движения системы, состоящей из деформируемых и абсолютно твёрдых тел, сохраняющая структуру обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее общий случай соединения тел 1 и 2 может быть описан с использованием дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) типа

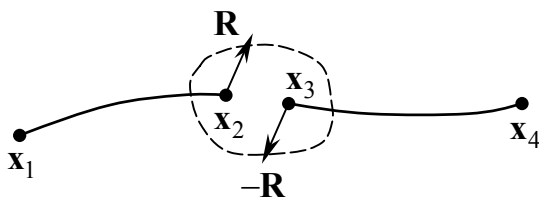
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}_1 + (\mathbf{G}_1^T \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2 + (\mathbf{G}_2^T \boldsymbol{\lambda}) \\ (\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{0}) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

с матрицами масс \mathbf{M}_i , обобщёнными силами \mathbf{f}_i и координатами \mathbf{x}_i двух тел. Добавление уравнений связи \mathbf{g} приводит к появлению реакций связей $\mathbf{G}_i^T \boldsymbol{\lambda}$, где $\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}_i^T$ – матрицы Якоби, а $\boldsymbol{\lambda}$ – множители Лагранжа: $\dim \boldsymbol{\lambda} = \dim \mathbf{g}$.

ДАУ вносят дополнительные трудности в процесс численного решения, такие как проблемы с уходом системы со связей. Эти проблемы могут быть успешно решены с использованием специальных методов, разработанных для ДАУ, например [25, 39]. Тем не менее, во многих случаях можно избежать возникновения ДАУ, например, в методе конечных элементов (МКЭ).

Рассмотрим два конечных элемента, показанные на рисунке. Пусть обобщённые координаты для первого КЭ подразделены на две части \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , тогда как координатами для второго КЭ являются \mathbf{x}_3 и \mathbf{x}_4 , так, что \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 являются совместимыми, то есть состоят из одинаковых переменных.

Тогда уравнения движения двух элементов будут следующими:



$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}_2 + (\mathbf{R}) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}_{33} \ddot{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{M}_{34} \ddot{\mathbf{x}}_4 &= \mathbf{f}_3 - (\mathbf{R}) \\ \mathbf{M}_{43} \ddot{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{M}_{44} \ddot{\mathbf{x}}_4 &= \mathbf{f}_4 \end{aligned} \right.$$

$$(\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_*)$$

с матрицами масс \mathbf{M}_{ij} , обобщёнными силами \mathbf{f}_i и силами реакции \mathbf{R} . Члены в скобках появляются, когда элементы соединяются, как показано на рисунке. Эти уравнения имеют структуру ДАУ вида (6.2), но связи являются тривиальными. Исключение \mathbf{R} из второго и третьего уравнений, а также учёт пятого ведёт к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & & \mathbf{O} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ \mathbf{O} & & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_* \\ \ddot{\mathbf{x}}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{Bmatrix}$$

в которых матрица масс системы и вектор обобщённых сил составлены из соответствующих матриц для отдельных элементов.

В работе этот подход применяется для стыковки друг с другом деформируемых и абсолютно твёрдых тел.

6.4. УЧЁТ СВЯЗЕЙ В ВИДЕ ПРЕДОПРЕДЕЛЁННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В этом пункте описывается возможность сохранения структуры обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для моделирования систем со связями в виде предопределённых степеней свободы, т.е. $q_k = f_k(t)$.

Пусть уравнения движения системы в обобщённых координатах \mathbf{q} до наложения связей имели вид $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$, где \mathbf{M} – матрица масс, а \mathbf{f} – столбец обобщённых сил системы.

Связи могут быть представлены уравнениями относительно обобщённых координат (в случае голономных связей)

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

или обобщённых скоростей (для голономных или неголономных связей)

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}' = \mathbf{0}, \quad \text{где} \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{q}^T, \quad \mathbf{g}' = \partial \mathbf{g} / \partial t,$$

и, наконец, относительно обобщённых ускорений

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}'' = \mathbf{0}, \quad \text{где} \quad \mathbf{g}'' = \dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{q}} + d\mathbf{g}'/dt.$$

С использованием последней формы записи уравнений связи, уравнения

движения системы со связями могут быть записаны в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f} + \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}'' = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ – столбец множителей Лагранжа.

Уравнения (6.5) (возможно, после некоторой перенумерации координат) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{G}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{G}_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}'' = \mathbf{0}, \quad (6.6)$$

где матрица \mathbf{G}_1 квадратная и невырожденная, т.е. $\det \mathbf{G}_1 \neq 0$.

Предположим теперь, что уравнения связей (6.3) не зависят от \mathbf{q}_2 , т.е.

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}.$$

Тогда $\mathbf{G}_2 = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{q}_2^T = \mathbf{O}$ и уравнения (6.4), (6.5) принимают вид

$$\mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{G}_1^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{f}_2,$$

$$\mathbf{G}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}'' = \mathbf{0}.$$

В этих уравнениях \mathbf{M}_{11} , \mathbf{M}_{12} , \mathbf{M}_{21} , \mathbf{M}_{22} – блоки матрицы масс.

Последние два уравнения образуют замкнутую систему ОДУ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{g}'' \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{M}_{21} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{g}'' \end{Bmatrix},$$

а исключённое уравнение (6.7) можно использовать для последующего определения столбца $\boldsymbol{\lambda}$, если необходимо найти значения сил реакций связей.

Пример 1. Часто в приложениях встречается случай, когда некоторые степени свободы фиксированы: $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^* = \text{const}$. Тогда имеем

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1^* = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{G}_1 = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{q}_1^T = \mathbf{I}, \quad \mathbf{g}'' = \mathbf{0},$$

и уравнения движения принимают предельно простую форму:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}$$

Таким образом, чтобы зафиксировать некоторые степени свободы, достаточно обнулить соответствующие им строки и столбцы матрицы масс, установив при этом её диагональные значения в 1. Кроме того, соответствующие элементы столбца обобщённых сил также должны быть обнулены.

Пример 2. В более общем случае (который встречается реже) $\mathbf{G}_2 \neq \mathbf{O}$, и уравнения связей имеют вид (6.6). И поскольку по-прежнему $\det \mathbf{G}_1 \neq 0$, они могут быть разрешены относительно $\ddot{\mathbf{q}}_1$: $\ddot{\mathbf{q}}_1 = -\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}'')$. Они являются зависимыми обобщёнными ускорениями, в отличие от независимых $\ddot{\mathbf{q}}_2$.

Теперь полный столбец обобщённых ускорений записывается в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{G}_2\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}'') \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \ddot{\mathbf{q}}_2 + \underbrace{\begin{Bmatrix} -\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{g}'' \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{h}} = \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{h}. \quad (6.8)$$

Матрица \mathbf{H} имеет следующее важное свойство ортогональности

$$\mathbf{G}\mathbf{H} = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2] \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = -\underbrace{\mathbf{G}_1\mathbf{G}_1^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_2 = \mathbf{O}.$$

Оно используется для исключения множителей Лагранжа из уравнений (6.4), которые принимают вид обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{H}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^T\mathbf{f} + \underbrace{\mathbf{H}^T\mathbf{G}^T}_{\mathbf{O}}\boldsymbol{\lambda}.$$

В итоге, подставив (6.8), имеем уравнения движения в независимых обобщённых координатах \mathbf{q}_2 , с положительно определённой матрицей масс:

$$[\mathbf{H}^T\mathbf{M}\mathbf{H}] \ddot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{H}^T(\mathbf{f} - \mathbf{M}\mathbf{h}).$$

6.5. УГЛЫ ОРИЕНТАЦИИ. МАТРИЦА ПОВОРОТА. ВЕКТОР УГЛОВОЙ СКОРОСТИ, ЕГО МАТРИЦА ЯКОБИ ПО ПРОИЗВОДНЫМ ОТ УГЛОВ

В этом приложении излагается процедура определения матрицы направляющих косинусов (матрицы поворота) по известным углам ориентации при заданной произвольной последовательности поворотов и наоборот, а также

другие важные параметры кинематики произвольного пространственного движения. Эти сведения необходимы в различных частях диссертации.

Матрицу поворота, задающую произвольную ориентацию, можно представить в виде произведения трёх матриц элементарных поворотов

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j \mathbf{A}_k, \quad (6.9)$$

где \mathbf{A}_l – матрицы элементарного поворота вокруг оси l на угол φ_l , причём $l = 1, 2$ или 3 . Значение 1 соответствует повороту вокруг оси x , 2 – вокруг оси y и 3 – оси z . Значения матриц элементарных поворотов следующие:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где введены сокращённые обозначения $s_l = \sin \varphi_l$, $c_l = \cos \varphi_l$ для тригонометрических функций углов ориентации φ_l . Для этих матриц может быть найдено общее выражение (здесь соглашение о суммировании не применяется)

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T + (\mathbf{I} - \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T) c_l + \tilde{\mathbf{u}}_l s_l, \quad (6.10)$$

где \mathbf{u}_l – единичный вектор оси с номером l , а $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1)$, [7]. Формула (6.10) тождественна формуле Родригеса $\mathbf{A}_l = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}}_l \sin \varphi_l + 2\tilde{\mathbf{u}}_l \tilde{\mathbf{u}}_l \sin^2(\varphi_l/2)$.

Отметим, что в формуле (6.9) $i \neq j$ и $j \neq k$, то есть соседние повороты не могут происходить вокруг одной и той же оси. Поэтому возможны следующие 12 комбинаций углов ориентации:

$$k = 6 - i - j: \quad \{i, j, k\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}\};$$

$$k = i: \quad \{i, j, k\} \in \{\{1, 2, 1\}, \{1, 3, 1\}, \{2, 1, 2\}, \{2, 3, 2\}, \{3, 1, 3\}, \{3, 2, 3\}\}.$$

Примеры: комбинация $\{1, 2, 3\}$ соответствует углам Кардана, $\{3, 1, 3\}$ – углам Эйлера; $\{2, 1, 3\}$ – корабельные углы Крылова, $\{2, 3, 1\}$ – самолётные.

Выполнив подстановку выражений (6.10) в (6.9) и раскрыв скобки, получим явное выражение для матрицы поворота. Для его упрощения учтём следующие тождества, следующие из взаимной ортогональности векторов \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1, \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j,$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_j = \chi_{ij} \mathbf{u}_{6-i-j}, \quad \chi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{ij}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_j = \mathbf{u}_j \mathbf{u}_i^T - (\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j) \mathbf{I}.$$

В итоге получим выражения для элементов матрицы \mathbf{A} в выражении (6.9). Для случая, когда $k = 6 - i - j$, имеем (суммирование по i, j нет!)

$$\begin{aligned} A_{ii} &= c_j c_k, & A_{ij} &= -\chi_{ij} c_j s_k, & A_{ik} &= \chi_{ij} s_j, \\ A_{ji} &= s_i s_j c_k + \chi_{ij} c_i s_k, & A_{jj} &= c_i c_k - \chi_{ij} s_i s_j s_k, & A_{jk} &= -\chi_{ij} s_i c_j, \\ A_{ki} &= s_i s_k - \chi_{ij} c_i s_j c_k, & A_{kj} &= \chi_{ij} s_i c_k + c_i s_j s_k, & A_{kk} &= c_i c_j. \end{aligned} \quad (6.11)$$

В случае $k = i$

$$\begin{aligned} A_{ii} &= c_j, & A_{ij} &= s_j s_k, & A_{ik} &= \chi_{ij} s_j c_k, \\ A_{ji} &= s_i s_j, & A_{jj} &= c_i c_k - s_i c_j s_k, & A_{jk} &= -\chi_{ij} (s_i c_j c_k + c_i s_k), \\ A_{ki} &= -\chi_{ij} c_i s_j, & A_{kj} &= \chi_{ij} (s_i c_k + c_i c_j s_k), & A_{kk} &= c_i c_j c_k - s_i s_k. \end{aligned} \quad (6.12)$$

В формулах (6.12), тем не менее, полагается, что $k = 6 - i - j$.

Каждая из совокупности равенств (6.11) и (6.12) представляет собой систему уравнений относительно аргументов тригонометрических функций, которую несложно решить:

$k = 6 - i - j :$	$k = i :$
$\varphi_j = \arcsin(A_{ik} / \chi_{ij});$	$\varphi_j = \arccos A_{ii};$
$\varphi_i = \begin{cases} \arctan2(-A_{jk} / \chi_{ij}, A_{kk}), & c_j \neq 0; \\ \arctan2(\chi_{ij} A_{kj}, A_{jj}), & c_j = 0. \end{cases}$	$\varphi_i = \begin{cases} \arctan2(A_{ji}, -A_{ki} / \chi_{ij}), & s_j \neq 0; \\ \arctan2(\chi_{ij} A_{kj}, A_{jj}), & s_j = 0. \end{cases}$
$\varphi_k = \begin{cases} \arctan2(-A_{ij} / \chi_{ij}, A_{ii}), & c_j \neq 0; \\ 0, & c_j = 0. \end{cases}$	$\varphi_k = \begin{cases} \arctan2(A_{ij}, A_{ik} / \chi_{ij}), & s_j \neq 0; \\ 0, & s_j = 0. \end{cases}$

В этих формулах использованы функции

$$\arctan2(Y, X) = \begin{cases} \arctg(Y/X), & X > 0; \\ \arctg(Y/X) + \pi \operatorname{sign} Y, & X < 0; \\ (\pi/2) \operatorname{sign} Y, & X = 0; \end{cases} \quad \operatorname{sign} Y = \begin{cases} +1, & Y > 0; \\ -1, & Y < 0; \\ 0, & Y = 0. \end{cases}$$

В случае, когда углы ориентации малы, $\varphi_l \ll 1$, то $s_l \approx \varphi_l$, $c_l \approx 1$, и тогда системы (6.11) и (6.12) значительно упрощаются:

$k = 6 - i - j :$			$k = i :$		
$A_{ii} \approx 1,$	$A_{ij} \approx -\chi_{ij}\varphi_k,$	$A_{ik} \approx \chi_{ij}\varphi_j,$	$A_{ii} \approx 1,$	$A_{ij} \approx 0,$	$A_{ik} \approx \chi_{ij}\varphi_j,$
$A_{ji} \approx -A_{ij},$	$A_{jj} \approx 1,$	$A_{jk} \approx -\chi_{ij}\varphi_i,$	$A_{ji} \approx -A_{ij},$	$A_{jj} \approx 1,$	$A_{jk} \approx -\chi_{ij}(\varphi_i + \varphi_k),$
$A_{ki} \approx -A_{ik},$	$A_{kj} \approx -A_{jk},$	$A_{kk} \approx 1.$	$A_{ki} \approx -A_{ik},$	$A_{kj} \approx -A_{jk},$	$A_{kk} \approx 1.$

В заключение найдём выражения для вектора угловой скорости, воспользовавшись формулой для тензора угловой скорости $\tilde{\omega} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T$.

Эти выражения имеют вид $\omega = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}}$, где \mathbf{B} – матрица Якоби вектора угловой скорости по производным от углов ориентации $\boldsymbol{\varphi}$:

$k = 6 - i - j :$	$k = i :$
$\begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{ij} & 0 & s_j \\ 0 & \chi_{ij}c_i & -s_i c_j \\ 0 & s_i & \chi_{ij}c_i c_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_k \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{ij} & 0 & \chi_{ij}c_j \\ 0 & \chi_{ij}c_i & \chi_{ij}s_i s_j \\ 0 & s_i & -c_i s_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_k \end{Bmatrix}$

6.6. ПОСТРОЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ТЕЛ

Поясним построение матриц \mathbf{D}_i и \mathbf{B}_i для тел системы, состоящей из многих тел, связанных шарнирами разного типа. В качестве примера рассмотрим систему в виде многосвязного маятника, изображённую на Рис. 6.1.

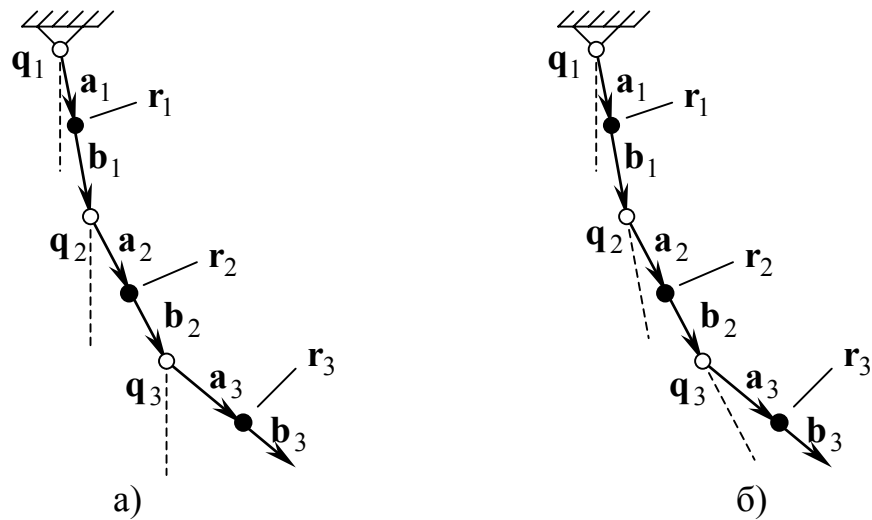


Рис. 6.1. Кинематика цепочки тел:

- а) абсолютные углы ориентации в шарнирах;
- б) относительные углы ориентации в шарнирах.

Столбцы \mathbf{q}_i представляют собой наборы углов ориентации в шарнирах (кружочки без штриховки), причём в случае а) – это абсолютные углы ориентации тела по отношению к неподвижной СК, а в случае б) – углы ориентации тела относительно предыдущего тела в цепочке. Постоянные векторы \mathbf{a}_i и \mathbf{b}_i задают сдвиги от шарниров к центрам масс тел (заштрихованные кружочки) в СК этих тел. Пусть для определённости все они имеют одинаковые значения $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i = \{0, 0, -a/2\}^T$, где a – длина маятников.

Требуется вычислить матрицы \mathbf{D}_i и \mathbf{B}_i для всех тел. Начнём со случая а).

Поскольку заданы наборы углов ориентации \mathbf{q}_i , то тем самым считаем известными матрицы направляющих косинусов $\mathbf{A}_i(\mathbf{q}_i)$ и векторы угловых скоростей тел: $\tilde{\omega}_i = \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_i^T$, отсюда $\omega_i = \mathbf{B}_i^* \dot{\mathbf{q}}_i$, подробнее см. приложение 6.5.

Глобальный вектор обобщённых координат для нашей системы имеет вид

$$\mathbf{q} = \left\{ \mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T \right\}^T,$$

и поэтому глобальные матрицы \mathbf{B}_i формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^* & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}_2^* & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_3^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, вычислим радиус-вектор \mathbf{r}_1 и скорость \mathbf{v}_1 центра масс тела 1:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{a}_1 = \tilde{\omega}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 = -\tilde{(\mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1)} \omega_1 = -\tilde{(\mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1)} \mathbf{B}_1^* \dot{\mathbf{q}}_1.$$

Таким образом, мы нашли значение матрицы \mathbf{D}_1 :

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\tilde{(\mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1)} \mathbf{B}_1^* & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Подобным образом поступим с телом 2,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = -\tilde{(\mathbf{A}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1))} \mathbf{B}_1^* \dot{\mathbf{q}}_1 - \tilde{(\mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2)} \mathbf{B}_2^* \dot{\mathbf{q}}_2,$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} -\tilde{(\mathbf{A}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1))} \mathbf{B}_1^* & -\tilde{(\mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2)} \mathbf{B}_2^* & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

а также с телом 3:

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} -\tilde{(\mathbf{A}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1))} \mathbf{B}_1^* & -\tilde{(\mathbf{A}_2(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2))} \mathbf{B}_2^* & -\tilde{(\mathbf{A}_3 \mathbf{a}_3)} \mathbf{B}_3^* \end{bmatrix}.$$

В случае, изображённом на Рис. 6.1 б), наборы локальных шарнирных координат \mathbf{q}_i описывают относительную ориентацию тел. Это означает, что

известны матрицы направляющих косинусов $\mathbf{A}_{i-1,i}(\mathbf{q}_i)$, $i = 1, \dots, 3$, определяющие относительные ориентации тел $(i-1)$ и i , и соответствующие векторы относительных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \mathbf{B}_{i-1,i} \dot{\mathbf{q}}_i$, причём заданы эти векторы своими проекциями на оси СК тела $(i-1)$. Тогда матрицы абсолютной ориентации вычисляются рекуррентно:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_{01}, \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}_{12}, \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{23},\end{aligned}$$

а абсолютные угловые скорости тел вычисляются по теореме о сложении угловых скоростей:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1 &= \boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{B}_{01} \dot{\mathbf{q}}_1, \\ \boldsymbol{\omega}_2 &= \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\omega}_{12} = \mathbf{B}_{01} \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \dot{\mathbf{q}}_2, \\ \boldsymbol{\omega}_3 &= \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\omega}_{23} = \mathbf{B}_{01} \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_{23} \dot{\mathbf{q}}_3,\end{aligned}$$

и, следовательно, матрицы \mathbf{B}_i принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= [\mathbf{B}_{01} \quad \mathbf{O} \quad \mathbf{O}], \\ \mathbf{B}_2 &= [\mathbf{B}_{01} \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \quad \mathbf{O}], \\ \mathbf{B}_3 &= [\mathbf{B}_{01} \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_{23}].\end{aligned}$$

Вычисление радиус-векторов центров масс тел в данном случае почти такое же, как и в случае а):

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{a}_1 = -(\tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{a}_1) \boldsymbol{\omega}_1, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1 (\mathbf{b}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{a}_2) \Rightarrow \mathbf{v}_2 = -(\tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{c}_1) \boldsymbol{\omega}_1 - (\tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{a}_2) \boldsymbol{\omega}_2, \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_2 (\mathbf{b}_2 + \mathbf{A}_{23} \mathbf{a}_3) \Rightarrow \mathbf{v}_3 = -(\tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{c}_1) \boldsymbol{\omega}_1 - (\tilde{\mathbf{A}}_2 \mathbf{c}_2) \boldsymbol{\omega}_2 - (\tilde{\mathbf{A}}_3 \mathbf{a}_3) \boldsymbol{\omega}_3.\end{aligned}$$

В этих выражениях для краткости пишем $\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$.

Однако матрицы \mathbf{D}_i получаются более громоздкими из-за сложности выражений для угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_i$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1 &= [-\tilde{(\mathbf{A}}_1 \mathbf{a}_1) \mathbf{B}_{01} \quad \mathbf{O} \quad \mathbf{O}], \\ \mathbf{D}_2 &= [-\tilde{(\mathbf{A}}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{B}_{01} \quad -\tilde{(\mathbf{A}}_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \quad \mathbf{O}], \\ \mathbf{D}_3 &= [-\tilde{(\mathbf{A}}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{c}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{a}_3) \mathbf{B}_{01} \quad -\tilde{(\mathbf{A}}_2 \mathbf{c}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{a}_3) \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{12} \quad -\tilde{(\mathbf{A}}_3 \mathbf{a}_3) \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_{23}].\end{aligned}$$

Как видим, в обоих случаях а) и б) глобальные матрицы Якоби \mathbf{D}_i , \mathbf{B}_i вычисляются с использованием лишь алгебраических операций над известными

матрицами, без использования операции дифференцирования. Способ а), в котором вводятся абсолютные углы ориентации в шарнирах, приводит к менее трудоёмким конечным выражениям. Однако способ б) является более общим, и позволяет вводить шарниры различных типов (поступательные и вращательные с различным числом степеней свободы). В работах [7, ??] подробно описан процесс построения кинематических соотношений для подобного рода шарниров.

6.7. ЭЛЕМЕНТЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АБСОЛЮТНЫХ УЗЛОВЫХ КООРДИНАТ

$$\bar{S}_{ik}^{11} = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & & & \\ 3l & 4l^2 & & \text{sym.} \\ -36 & -3l & 36 & \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_{ikmn}^{1111} = \frac{1}{420l^3} \begin{bmatrix} 864 & & & \\ 108l & 36l^2 & & \text{sym.} \\ -864 & -108l & 864 & \\ 108l & 0 & -108l & 36l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36l^2 & & & \\ -3l^3 & 24l^4 & & \text{sym.} \\ -36l^2 & 3l^3 & 36l^2 & \\ 3l^3 & -3l^4 & -3l^3 & 2l^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 864 & & & \\ 108l & 36l^2 & & \text{sym.} \\ -864 & -108l & 864 & \\ 108l & 0 & -108l & 36l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36l^2 & & & \\ 3l^3 & 2l^4 & & \text{sym.} \\ -36l^2 & -3l^3 & 36l^2 & \\ -3l^3 & -3l^4 & 3l^3 & 24l^4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_{ikmn}^{2211} = \frac{1}{105l^5} \begin{bmatrix} 648 & & & \\ -54l & 288l^2 & & \text{sym.} \\ -648 & 54l & 648 & \\ -54l & -90l^2 & 54l & 288l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 288l^2 & & & \\ -66l^3 & 128l^4 & & \text{sym.} \\ -288l^2 & 66l^3 & 288l^2 & \\ 60l^3 & -26l^4 & -60l^3 & 44l^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 648 & & & \\ -54l & 288l^2 & & \text{sym.} \\ -648 & 54l & 648 & \\ -54l & -90l^2 & 54l & 288l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 288l^2 & & & \\ 60l^3 & 44l^4 & & \text{sym.} \\ -288l^2 & -60l^3 & 288l^2 & \\ -66l^3 & -26l^4 & 66l^3 & 128l^4 \end{bmatrix}$$

6.8. ЯВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТА ПЛАСТИНЫ

Описываемые обозначения используются в § 2.4.

Дифференцирование функций формы (2.25) по параметрам p_1 и p_2 обозначается верхними индексами:

$$\frac{\partial S_{kl}}{\partial p_i} = S_{kl}^i, \quad \frac{\partial^2 S_{kl}}{\partial p_i \partial p_j} = S_{kl}^{ij}.$$

Интеграл от них по поверхности пластины отмечается двойной чертой:

$$\int_0^a \int_0^b S_{kl} dp_1 dp_2 = \bar{\bar{S}}_{kl}.$$

Одна черта и крышечки (одна или две) обозначают интеграл от одномерной функции формы:

$$\hat{\bar{S}}_{kl}^{ij} = \int_0^a \frac{\partial^i \hat{s}_k}{\partial p_1^i} \frac{\partial^j \hat{s}_l}{\partial p_1^j} dp_1, \quad \hat{\bar{S}}_{klmn}^{ijkl} = \int_0^b \frac{\partial^i \hat{s}_k}{\partial p_2^i} \frac{\partial^j \hat{s}_l}{\partial p_2^j} \frac{\partial^i \hat{s}_m}{\partial p_2^i} \frac{\partial^j \hat{s}_n}{\partial p_2^j} dp_2.$$

Значения последних символов могут быть легко вычислены с помощью любого пакета символьных вычислений, например, Maple V или MatLab.

Обозначение интеграла по поверхности пластины, используемое ниже:

$$\iint_P \dots dP = \int_0^a \int_0^b \dots dp_1 dp_2.$$

Выражения для обобщённых сил в срединной поверхности пластины

Шестииндексные символы: $\bar{\bar{S}}_{klrs}^{i \otimes j} = \frac{1}{2} \iint_P (S_{kl}^i S_{rs}^j + S_{kl}^j S_{rs}^i) dP$

$$\bar{\bar{S}}_{klrs}^{1 \otimes 1} = \iint_P S_{kl}^1 S_{rs}^1 dP = \iint_P \frac{\partial}{\partial p_1} (\hat{s}_k \hat{s}_l) \frac{\partial}{\partial p_1} (\hat{s}_r \hat{s}_s) dP = \int_0^a \hat{s}'_k \hat{s}'_r dp_1 \int_0^b \hat{s}_l \hat{s}_s dp_2 = \hat{\bar{S}}_{kr}^{11} \hat{\bar{S}}_{ls}^{00}$$

$$\bar{\bar{S}}_{klrs}^{2 \otimes 2} = \iint_P \frac{\partial}{\partial p_2} (\hat{s}_k \hat{s}_l) \frac{\partial}{\partial p_2} (\hat{s}_r \hat{s}_s) dP = \int_0^a \hat{s}_k \hat{s}_r dp_1 \int_0^b \hat{s}'_l \hat{s}'_s dp_2 = \hat{\bar{S}}_{kr}^{00} \hat{\bar{S}}_{ls}^{11}$$

$$\bar{\bar{S}}_{klrs}^{1 \otimes 2} = \bar{\bar{S}}_{klrs}^{2 \otimes 1} = \frac{1}{2} \iint_P (S_{kl}^1 S_{rs}^2 + S_{kl}^2 S_{rs}^1) dP = \dots = \frac{1}{2} \left(\hat{\bar{S}}_{kr}^{10} \hat{\bar{S}}_{ls}^{10} + \hat{\bar{S}}_{rk}^{10} \hat{\bar{S}}_{ls}^{10} \right)$$

Десятииндексные: $\bar{\bar{S}}_{klrs; mnpq}^{i \otimes j; i \otimes j} = \iint_P S_{klrs}^{i \otimes j} S_{mnpq}^{i \otimes j} dP$; $S_{mnpq}^{i \otimes j} = \frac{1}{2} (S_{mn}^i S_{pq}^j + S_{mn}^j S_{pq}^i)$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{S}}_{klrs;mn pq}^{1\otimes 1;1\otimes 1} &= \iint_P S_{kl}^1 S_{rs}^1 S_{mn}^1 S_{pq}^1 dP \\
&= \iint_P \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_k \hat{s}_l) \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_r \hat{s}_s) \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP \\
&= \int_0^a \hat{s}'_k \hat{s}'_r \hat{s}'_m \hat{s}'_p dp_1 \int_0^b \hat{s}'_l \hat{s}'_s \hat{s}'_n \hat{s}'_q dp_2 = \hat{\hat{S}}_{krmp}^{1111} \hat{\hat{S}}_{lsnq}^{0000} \\
\bar{\bar{S}}_{klrs;mn pq}^{2\otimes 2;2\otimes 2} &= \iint_P \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_k \hat{s}_l) \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_r \hat{s}_s) \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP \\
&= \int_0^a \hat{s}_k \hat{s}_r \hat{s}_m \hat{s}_p dp_1 \int_0^b \hat{s}'_l \hat{s}'_s \hat{s}'_n \hat{s}'_q dp_2 = \hat{\hat{S}}_{krmp}^{0000} \hat{\hat{S}}_{lsnq}^{1111} \\
\bar{\bar{S}}_{klrs;mn pq}^{1\otimes 2;1\otimes 2} &= \frac{1}{4} \iint_P (S_{kl}^1 S_{rs}^2 + S_{kl}^2 S_{rs}^1) (S_{mn}^1 S_{pq}^2 + S_{mn}^2 S_{pq}^1) dP = \dots \\
&= \frac{1}{4} \left(\hat{\hat{S}}_{kmpr}^{1100} \hat{\hat{S}}_{qsnl}^{1100} + \hat{\hat{S}}_{rmkp}^{1100} \hat{\hat{S}}_{lqns}^{1100} + \hat{\hat{S}}_{kpmr}^{1100} \hat{\hat{S}}_{nslq}^{1100} + \hat{\hat{S}}_{prkm}^{1100} \hat{\hat{S}}_{nlqs}^{1100} \right) \\
\bar{\bar{S}}_{klrs;mn pq}^{1\otimes 1;2\otimes 2} &= \iint_P \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_k \hat{s}_l) \frac{\partial}{\partial p_1}(\hat{s}_r \hat{s}_s) \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial}{\partial p_2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP \\
&= \int_0^a \hat{s}'_k \hat{s}'_r \hat{s}_m \hat{s}_p dp_1 \int_0^b \hat{s}'_n \hat{s}'_q \hat{s}_l \hat{s}_s dp_2 = \hat{\hat{S}}_{krmp}^{1100} \hat{\hat{S}}_{nqls}^{1100} \\
\bar{\bar{S}}_{klrs;mn pq}^{2\otimes 2;1\otimes 1} &= \bar{\bar{S}}_{mn pq;klrs}^{1\otimes 1;2\otimes 2} = \hat{\hat{S}}_{mpkr}^{1100} \hat{\hat{S}}_{lsnq}^{1100}
\end{aligned}$$

Выражения для вычисления обобщённых поперечных сил

Шестииндексные символы: $\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{ijij} = \iint_P S_{mn}^{ij} S_{pq}^{ij} dP$

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{1111} &= \iint_P S_{mn}^{11} S_{pq}^{11} dP = \iint_P \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP = \int_0^a \hat{s}_m'' \hat{s}_p'' dp_1 \int_0^b \hat{s}_n \hat{s}_q dp_2 = \hat{\hat{S}}_{mp}^{22} \hat{\hat{S}}_{nq}^{00} \\
\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{2222} &= \iint_P \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP = \int_0^a \hat{s}_m \hat{s}_p dp_1 \int_0^b \hat{s}_n'' \hat{s}_q'' dp_2 = \hat{\hat{S}}_{mp}^{00} \hat{\hat{S}}_{nq}^{22} \\
\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{1122} &= \iint_P \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial^2}{\partial p_2^2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP = \int_0^a \hat{s}_m'' \hat{s}_p dp_1 \int_0^b \hat{s}_q'' \hat{s}_n dp_2 = \hat{\hat{S}}_{mp}^{20} \hat{\hat{S}}_{qn}^{20} \\
\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{2211} &= \bar{\bar{S}}_{pq mn}^{1122} = \hat{\hat{S}}_{pm}^{20} \hat{\hat{S}}_{nq}^{20} \\
\bar{\bar{S}}_{mn pq}^{1212} &= \iint_P S_{mn}^{12} S_{pq}^{12} dP = \iint_P \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}(\hat{s}_m \hat{s}_n) \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2}(\hat{s}_p \hat{s}_q) dP \\
&= \int_0^a \hat{s}_m' \hat{s}_p' dp_1 \int_0^b \hat{s}_n' \hat{s}_q' dp_2 = \hat{\hat{S}}_{mp}^{11} \hat{\hat{S}}_{nq}^{11}
\end{aligned}$$