

Григорьев Валерий Георгиевич

МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
СЛОЖНЫХ УПРУГИХ И ГИДРОУПРУГИХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.06 - Динамика, прочность машин,  
приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Научный консультант доктор технических наук,  
профессор 

В.П.Шмаков
------------

Москва - 2000

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	...	6
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОРРЕКТИРУЮЩИХ РЯДОВ В СИНТЕЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ.	...	48
1.1. Основные соотношения метода корректирующих рядов.	...	50
1.2. Построение корректирующих векторов в ортогональном подпространстве.	...	59
1.3. Основные теоремы метода корректирующих рядов.	...	64
1.4. Синтез изгибных колебаний однородных стержней.	...	68
Глава 2. СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОДКОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОРРЕКТИРУЮЩИХ РЯДОВ.	...	72
2.1. Модальный синтез дискретных моделей подконструкций методом жестких границ.	...	74
2.1.1. Общая схема построения корректирующих рядов и синтеза подконструкций.	...	74
2.1.2. Использование ортогональных подпространств в процессе построения корректирующих векторов.	...	87
2.1.3. Методы формирования матриц подконструкций с использованием корректирующих векторов.	...	92
2.1.4. Простые корректирующие вектора в методе жестких границ.	...	101
2.2. Модальный синтез дискретных моделей подконструкций методом свободных границ.	...	106
2.2.1. Построение корректирующих рядов в методе свободных границ.	...	106
2.2.2. Вычисление корректирующих векторов с	...	113

частотным сдвигом при наличии нулевых собственных частот.	
2.2.3. Сопоставление точности методов свободных и жестких границ.	... 117
2.3. Гибридный подход к модальному синтезу дискретных моделей подконструкций.	... 121
2.4. Расчет амплитудно-фазовых частотных характеристик сложных упругих систем с учетом демпфирования.	... 131
2.5. О синтезе аналитических и дискретных моделей подконструкций.	... 136
2.6. Расчет динамических характеристик орбитальной космической станции.	... 140
Глава 3. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЕМАМИ ЖИДКОСТИ.	... 151
3.1. Уравнения малых колебаний жидкости в лагранжевой форме и кинематические условия на контактной поверхности.	... 152
3.2. Динамические условия на контактной поверхности и потенциальная энергия гравитационных сил жидкости.	... 157
3.3. Уравнения колебаний конструкции, содержащей жидкость.	... 164
3.4. Вариационные принципы для решения задач о колебаниях конструкций, содержащих жидкость.	... 171
Глава 4. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ.	... 177
4.1. Основные соотношения.	... 177
4.1.1. Колебания несжимаемой жидкости.	... 180

4.1.2. Тонкостенная упругая оболочка.	... 182
4.1.3. Упругие шпангоуты.	... 186
4.1.4. Вариационная формулировка проблемы.	... 189
4.1.5. Массы эквивалентных осцилляторов.	... 198
4.2. Конечноэлементная дискретизация конструкции.	... 200
4.2.1. Конечные элементы несжимаемой жидкости.	... 201
4.2.2. Конечные элементы тонкостенной оболочки.	... 204
4.2.3. Конечные элементы свободной поверхности.	... 209
4.2.4. Формирование объединенных матриц конечноэлементной модели.	... 210
4.3. Учет влияния статического деформированного состояния при расчете динамических характеристик.	... 213
4.4. Основные принципы построения вычислительных алгоритмов.	... 216
4.4.1. Рациональное использование памяти вычислительной системы.	... 217
4.4.2. Решение проблемы собственных значений.	... 219
4.4.3. Ввод исходной информации.	... 221
4.5. Результаты расчетов.	... 223
4.5.1. Сопоставление расчетных данных с известными решениями.	... 223
4.5.2. Исследование устойчивости гидроупругой системы при действии гравитационного поля.	... 234
4.6. Синтез подконструкций в расчетах динамических характеристик корпусов жидкостных ракет тандемной схемы.	... 239
Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОДОЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТНОЙ РАКЕТЫ НА ОСНОВЕ ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ КОРПУСА.	... 255

5.1. Уравнения продольных колебаний жидкостной ракеты как гидроупругой системы с регулятором.	. . . 255
5.2. Уравнения нелинейных колебаний осесимметричных оболочечных конструкций с жидкостью.	. . . 268
5.3. Параметрическое возбуждение неосесимметричных форм при осесимметричных колебаниях.	. . . 274
5.4. Вычисление коэффициентов нелинейных уравнений. Построение областей параметрического возбуждения.	. . . 277
5.5. Уравнения продольных колебаний с учетом нелинейности поведения корпуса. Метод решения.	. . . 285
5.6. Исследование нелинейных автоколебаний гидроупругой системы с регулятором.	. . . 290
5.6.1. Параметрическое возбуждение неосесимметричных колебаний.	. . . 292
5.6.2. Нелинейные продольные автоколебания гидроупругой системы с регулятором.	. . . 296
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	. . . 305
ЛИТЕРАТУРА	. . . 308

## ВВЕДЕНИЕ

Практически все современные технические сооружения и аппараты - ракеты и космические станции, самолеты, корабли, автомобили, строительные и гидротехнические сооружения - представляют собой сложные системы, состоящие из совместно функционирующих подсистем. Условия взаимодействия этих подсистем, выделяемых либо пространственно, как часть конструкции, либо в плане выполняемой функции, определяют успешность выполнения главной задачи разрабатываемой системы. Как правило, понятие “сложность” связывается именно с наличием в системе многих компонент, взаимное влияние которых создает проблемы при проведении теоретических исследований, необходимых для ее проектирования.

Физическую основу рассматриваемых систем, несущую все прочие подсистемы, представляет конструкция, скомпонованная из стержневых, тонкостенных или иных элементов, изготовленных из материалов, которые в пределах достаточно малых деформаций могут рассматриваться как упругие. Результатом взаимодействия упругой конструкции с прочими подсистемами и с внешней средой являются ее колебания - периодические или же переходный процесс. Параметры этих колебаний определяют пригодность конструкции к эксплуатации по критериям прочности, амплитудным значениям перемещений, уровням перегрузок или иным конкретным для каждой системы показателям.

Важным этапом исследования динамического поведения разрабатываемой системы является определение динамических характеристик входящей в ее состав упругой конструкции, к числу которых относятся собственные частоты и формы колебаний, амплитудно-фазовые частотные характеристики, динамические коэффициенты влияния (динамические жесткости и динамические

податливости) и т.д. Эта информация является исходной для последующего анализа вибраций конструкции.

Обычно упругая конструкция сама представляет собой сложную систему, составленную из относительно более простых подконструкций, механически соединенных между собой и взаимодействующих в процессе совместных колебаний. Это существенно осложняет задачу исследования ее динамических характеристик как экспериментальными, так и расчетными методами. При этом возникающие трудности могут иметь как технический, так и организационный характер:

- размерность математической модели всей конструкции в целом может превышать возможности используемой для расчета вычислительной системы (либо ограничен объем памяти, либо потребное время счета делает задачу невыполнимой);

- конструкция может оказаться слишком велика для проведения вибрационных испытаний (в особенности это относится к летательным и космическим аппаратам, динамические характеристики которых должны определяться при отсутствии какого-либо закрепления);

- многие крупные системы (например, космические станции) обычно формируются из фрагментов, разрабатываемых разными фирмами, находящимися в разных странах на значительном удалении друг от друга, когда сборка всех компонент для проведения испытаний оказывается весьма дорогостоящим и трудновыполнимым мероприятием.

Естественным направлением мысли на пути преодоления указанных проблем является анализ расчлененной на подсистемы конструкции по частям и последующий синтез результатов, полученных для каждой части в отдельности теоретически или экспериментально. Развитие электронной вычислительной техники с середины 1960-х годов придало актуальность разработке универсальных алгоритмов, позволяющих автоматизировать процедуру синтеза

при исследовании динамических характеристик сложных механических систем.

Считается, что впервые четко оформленный тензорно-матричный подход к этой проблеме изложен в работах Г.Крона [65]. Предложенная им методология преимущественно ориентирована на анализ электрических сетей и оказалась мало приспособленной к специфике механических задач. Тем не менее, имеются немногочисленные последователи, развивающие это направление [183, 185, 86].

Основные же пути развития теории синтеза динамических характеристик подконструкций определялись с учетом особенностей задач динамики упругих систем. Значительный вклад в этот раздел науки внесли отечественные исследователи, и здесь следует отметить работы Постнова В.А. [70, 89, 90, 85], Вольмира А.С. [28, 29, 30, 79], Шклярчука Ф.Н. [101], Шмакова В.П. [103, 104, 105], Лиходеда А.И. [68, 4, 5], Бурмана З.И. [24]. Среди зарубежных исследователей наиболее заметны работы таких авторов, как Craig R.R. [126, 127, 128, 129, 130], MacNeal R.H. [168].

Среди многообразия подходов к синтезу динамических характеристик выделим, как наиболее физически обоснованный, метод модального синтеза, когда в качестве исходной информации о свойствах подконструкций используются данные об их собственных частотах и формах колебаний. Основой для построения математической модели всей системы в этом случае служит представление колебаний каждой подконструкции в виде ряда, содержащего ее собственные формы (в дальнейшем - модального разложения колебаний). Т.е. собственные формы играют роль координатных функций в описании движения подконструкции.

Заметим, что существуют подходы к решению данной задачи, не основанные на предварительном вычислении динамических характеристик подконструкций. Это, например, работа [113], в которой разбиение дискретной модели упругой системы на подконструкции используется, фактически, лишь для



более эффективной реализации метода итерирования подпространства при вычислении собственных частот и форм системы. Здесь же упомянем работы [140, 169], в которых предлагается для аппроксимации колебаний подконструкций использовать произвольные полные системы базисных функций, а также работы [117, 141, 142], где с помощью специальных итерационных алгоритмов эти базисные функции улучшаются (итерация подпространств на уровне подконструкций).

Тем не менее, наибольшее количество работ посвящено модальному синтезу, поскольку в этом случае удастся эффективно сокращать объем исходной информации о подконструкциях и, что самое важное, уменьшать размерность решаемой в процессе синтеза динамических характеристик задачи, основываясь на ограничении исследуемого частотного диапазона.

Важное значение при исследовании сложной системы имеет способ соединения ее компонент (интерфейс системы). Как правило, соединение подконструкций осуществляется посредством специальных пространственно локализованных узлов, работающих таким образом, что в рамках принимаемой математической модели подконструкции воздействие со стороны этого узла представляет совокупность сосредоточенных обобщенных сил, связанных с соответствующими обобщенными перемещениями в точке. Обычно входящие в узел степени свободы связаны линейными соотношениями, входящими в получаемую при синтезе математическую модель системы непосредственно либо с помощью множителей Лагранжа, как в работе [132].

Сопряжение подконструкций по одномерным и двумерным многообразиям обычно имеет место при искусственном рассечении крупногабаритной конструкции. При использовании в расчетах дискретных моделей подконструкций (как правило, построенных на основе метода конечных элементов) здесь не возникает принципиальных затруднений, поскольку соединение осуществляется посредством коллокации в узлах модели. В работах [140, 169] предлагается метод, основанный на введении специальных весовых функций,

связанных с континуальным интерфейсом, что практически означает его дискретизацию (хотя и не пространственную). В работе [155] с этой целью введены граничные обобщенные координаты. Такой подход может быть полезен при использовании аналитических моделей подконструкций. Отметим также работу [174], где в вариационной постановке задачи синтеза используются определенные на границе сопряжения множители Лагранжа, а решение дискретизированных по методу Рунге уравнений осуществляется с использованием сингулярного разложения подматриц, соответствующих интерфейсу системы.

Ключевым вопросом при реализации модального синтеза подконструкций является выбор граничных условий, при которых определяются собственные частоты и формы компонент системы (парциальные динамические характеристики). При этом, естественно, не могут варьироваться наложенные на подконструкцию кинематические ограничения, не относящиеся к интерфейсу системы. Свобода выбора существует только для обобщенных перемещений, связанных с соединительными узлами, которые в дальнейшем будем называть внешними степенями свободы подконструкции. Существующие методы модального синтеза можно классифицировать по этому признаку следующим образом:

- методы жестких границ, когда парциальные характеристики подконструкций определяются при условии закрепления внешних степеней свободы;
- методы свободных границ, когда парциальные характеристики подконструкций определяются при не закрепленных внешних степенях свободы;
- гибридные методы, если возможно частичное закрепление внешних степеней свободы подконструкции при определении ее парциальных характеристик.

В дополнение к перечисленным, существует еще метод, названный в работе [131] методом «нагруженных границ», когда расчет форм колебаний подконструкции осуществляется не изолированно от остальных компонент системы, а при дополнительных жесткостных и инерционных нагрузках, добавляе-

мых к внешним степеням свободы с целью приблизить эти формы к виду собственных колебаний системы в целом на данной подконструкции. При правильном выборе этих нагрузок решение задачи о собственных значениях при синтезе подконструкций может дать более точный результат. Варианты такого подхода под названием «метода ветвей» описаны в работах [135, 116]. Нагруженные собственные формы используются также в работе [156].

Неудобство этого метода по сравнению с тремя перечисленными выше очевидно ввиду того, что модификация одной из составляющих систему подконструкций при таком подходе вызывает необходимость пересчета парциальных характеристик остальных подконструкций и внесения изменений в соответствующие им базы данных. При этом интуитивность подбора дополнительных нагрузок не гарантирует существенного повышения точности результата.

Варианты метода жестких границ представлены в работах [149, 150, 151, 128, 126, 130, 61]. Отметим, что вариант в форме Крейга-Бэмптона [128] послужил основой распространенного в настоящее время формата обмена данными по динамике подконструкций между кооперированными разработчиками сложных конструкций. В работе [144] описан метод жестких границ применительно к системам с демпфированием, позволяющий учитывать несимметричность, связанную с кориолисовыми силами и взаимодействием системы с внешней средой. В работе [5] описан метод выделения квазистатических составляющих кинематического и силового типов как дополнительных членов модального разложения колебаний подконструкции, обеспечивающий существенное повышение точности решения. При этом вычисляемая на первом шаге квазистатическая составляющая кинематического типа представляет собой аналог введенных в методе Крейга-Бэмптона «граничных форм» («constraint modes»), дополняющих модальное разложение.

Методы свободных границ представлены в работах [136, 146, 129, 126, 181]. Отметим, что в работе [129] введено понятие остаточной податливости для приближенного учета влияния в низкочастотном диапазоне не включен-

ных в модальное разложение высших тонов подконструкции, с которым связано понятие «соединительных форм» («attachment modes»), как дополнительных членов этого разложения [126]. Метод учета остаточных эффектов второго порядка предложен в работе [181]. В работе [154] для построения матриц остаточной податливости балочных подсистем используются аналитические выражения для собственных форм и частот.

Гибридный метод описан в работе [168], где также предложены методы учета остаточных эффектов для повышения точности решения.

В отечественной практике получили распространение многоуровневые методы синтеза, в которых допускается поэтапное укрупнение фрагментов сложной системы. При этом синтез группы подконструкций на более низком уровне дает информацию о подконструкции следующего уровня, получаемой посредством их соединения. Метод суперэлементов, представленный в работах [28, 29], ориентирован на использование собственных форм, определяемых с учетом влияния соседних суперэлементов вдоль общих границ, чем сходен с методом работы [116]. Предложенный в работе [57] метод многоуровневой динамической конденсации может быть отнесен к методам жестких границ и на низшем уровне соответствует идеологии работы [128]. При этом, как и в работе [115], подконструкция рассматривается как суперэлемент с внутренними обобщенными неизвестными, соответствующими ее собственным формам.

Отметим как предельный («вырожденный») случай модального синтеза метод, основанный на статической конденсации подконструкции [153, 139, 70], когда вводится жесткая связь внешних степеней свободы с внутренними и последние исключаются из уравнений колебаний. Такой подход весьма прост в реализации, т.к. не требует предварительного определения собственных частот и форм, но имеет весьма ограниченную сферу применения ввиду невысокой точности, поскольку в уравнениях полностью исключается внутренняя динамика подконструкции. Как промежуточный можно рассматривать предложенный в работе [167] вариант упрощенной динамической конденсации, когда вы-

численные при фиксированных границах собственные формы используются для приближенного учета внутренней динамики подконструкции посредством линеаризации в окрестности заданного значения частоты.

Заметим, что все упомянутые выше методы направлены на обеспечение удовлетворительной точности результатов синтеза в диапазоне низких частот колебаний, для чего в модальных разложениях удерживаются формы, соответствующие низшим собственным частотам подконструкций. В работах [152, 162] предложены методы учета остаточных эффектов не только высших, но и низших отсекаемых в модальных разложениях тонов, когда интервал исследуемых частот для системы ограничен снизу ненулевым значением.

Подавляющая часть методик синтеза динамических характеристик разрабатывалась таким образом, чтобы в результате синтеза формировались линейные алгебраические системы или системы дифференциальных уравнений. В этом случае на завершающем этапе расчета динамических характеристик системы формулируется линейная задача о собственных значениях, методы решения которой хорошо разработаны. Ради этого при выводе соотношений отбрасываются нелинейные члены и вводятся иные допущения, приводящие к погрешностям, оценка которых представляет собой непростую задачу.

В случае метода жестких границ результирующая система обычно синтезируется аналогично процедуре объединения конечных элементов с внутренними степенями свободы [56] в соответствии с методом перемещений. В случае методов свободных границ процедура синтеза несколько более сложная. В работе [53] описан алгоритм формирования уравнений задачи о собственных значениях для метода остаточных податливостей.

Однако, следует отметить, что для решения многих задач, связанных с разработкой технических систем, включающих сложную упругую конструкцию, определение в чистом виде ее собственных частот и форм колебаний является лишь промежуточной задачей. Непосредственно важными часто оказываются данные, получаемые с использованием этих характеристик, - это ам-

плитудно-фазовые частотные характеристики, передаточные функции, импедансы, динамические коэффициенты влияния (динамические жесткости и динамические податливости) и т.д. Характерными примерами здесь могут быть задачи исследования устойчивости систем управления упругими объектами, задачи акустики. Все перечисленные выше величины, являющиеся функциями частоты, относятся в широком смысле к динамическим характеристикам упругой системы. Непосредственное их получение из соотношений синтезированной математической модели упругой системы без промежуточной стадии вычисления ее собственных частот и форм обеспечивает в указанных случаях решение основной задачи.

Подход, представленный в работе Крона [65] и его последователей [183, 185], фактически направлен на вычисление матриц динамических податливостей как нелинейных функций частоты с последующим синтезом по методу сил. Получаемая система линейных алгебраических уравнений содержит зависящие от частоты коэффициенты. Это дает возможность построения различного рода амплитудно-фазовых частотных характеристик и прочих перечисленных выше зависимостей. Определение собственных частот и форм колебаний системы здесь также возможно с использованием общих методов поиска решений нелинейных уравнений, разработаны и специализированные методы для рассматриваемого класса задач (см., например, [183, 185]).

Заметим, что достаточно точная информация о динамических коэффициентах влияния упругой системы может эффективно использоваться и для расчета переходных процессов при исследовании динамических нагрузок при помощи численных интегральных преобразований, как, например, в работе [184].

Аналогичный подход представлен в работах [164, 165], но с использованием матриц динамических жесткостей подконструкций. Он проще в реализации, поскольку основан на синтезе систем уравнений по методу перемещений, что ближе исследователям, традиционно работающим с методом конечных элементов. Здесь, как и в работах [65, 183, 185], для построения динамических

матриц подконструкций используются данные об их собственных частотах и формах колебаний.

Отметим также работу [2], в которой для формирования нелинейных характеристических уравнений сложных упругих систем предлагается использовать математический аппарат метода факторизованных возмущений, предназначенного для анализа линейных физических систем с взаимодействием. Каждая налагаемая в процессе соединения подсистем связь при этом представляется возмущающим оператором, действующим на исходную совокупность не взаимодействующих подсистем. Существенной составляющей в предлагаемых математических построениях являются выражения для частотных гриновских функций изолированных подсистем. Это весьма жесткое для практического использования метода условие, поскольку построение соответствующих аналитических выражений возможно для ограниченного класса подсистем.

Общей для всех описанных подходов является проблема точности представления динамических свойств подконструкции в синтезированной системе в условиях, когда в модальном разложении может присутствовать ограниченное число собственных форм, - проблема усечения модального разложения. Этот вопрос принципиален, поскольку лежит в основе метода модального синтеза, обеспечивающего снижение размерности решаемых задач и вычислительных затрат за счет ограничения спектра подконструкций.

Очевидно, что если ставится задача исследования динамических свойств системы в диапазоне частот, ограниченных сверху некоторой частотой среза, то в модальных разложениях подконструкций должны учитываться все собственные формы, частоты которых не превосходят эту границу. Отбрасывание форм с более высокими частотами вносит погрешность в математическую модель и приводит к ошибкам в получаемых результатах. Как показывают исследования, в зависимости от способа соединения подконструкций и локальных особенностей их собственных форм влияние высших тонов на низкочастотную динамику системы меняется существенно не монотонно с возрастанием их

собственных частот. Вопросам выбора критериев оценки и исследованию величины вносимой погрешности посвящены работы [171, 163, 145, 114, 52]. Предлагаемые критерии предназначены для автоматизации процесса выбора удерживаемых в модальных разложениях собственных форм подконструкций. Однако на практике наиболее употребителен подход, представленный в работах [181, 57] рекомендацией удерживать в модальных разложениях все собственные формы, частоты которых превосходят обусловленную частоту среза в 1,5 - 2 раза.

Подчеркнем, что несмотря на актуальность вопроса, ни один из рассмотренных выше методов модального синтеза не позволяет сформулировать априорную оценку погрешности получаемых результатов. Причина этого в том, что единственным варьируемым параметром, влияющим на точность получаемого результата, остается во всех методах количество удерживаемых собственных форм в модальном разложении колебаний подконструкции. Изначально не предсказуемая в общем случае сложность спектров подконструкций и структура их собственных форм не позволяет делать предварительные оценки погрешности синтеза.

В настоящей работе предлагается принципиально иной подход к оценке погрешности синтеза, основанный на отказе от идеи наращивания числа учитываемых собственных форм сверх минимально необходимого, определяемого количеством тонов с частотами, попадающими в исследуемый интервал. Повышение точности представления динамических свойств подконструкции в ограниченном частотном диапазоне достигается с помощью конструктивного алгоритма формирования вспомогательных членов модального разложения при неизменном наборе сохраняемых собственных форм.

В работе В.П.Шмакова [103] предложено строить решение задачи о гармонических колебаниях одномерной подконструкции в виде разложения по собственным формам базовой задачи, дополненного корректирующей составляющей. Эта корректирующая составляющая строится в виде многочлена от-



носителем квадрата частоты колебаний, коэффициенты которого определяются как решения рекуррентной последовательности статических краевых задач. Поэтому степень многочлена может неограниченно наращиваться. При этом коэффициенты модальных членов разложения изменяются таким образом, что вклад тонов с высокими собственными частотами в области низких частот колебаний уменьшается с ростом порядка корректирующего многочлена. Это является основой для повышения точности получаемых при синтезе подконструкций решений частотного уравнения в условиях ограниченного числа учтенных собственных форм.

Аналогичный подход использован в работе А.И.Лиходеда [68] для повышения точности при расчетах нестационарного динамического нагружения упругих систем, а также при синтезе подконструкций методом жестких границ [5], где он трактуется как многократное выделение квазистатической составляющей.

Неограниченное наращивание порядка корректирующего многочлена не приводит к построению сходящегося степенного ряда. Однако, если выделить некоторое количество собственных форм и строить корректирующий многочлен в подпространстве, ортогональном к линейной оболочке этих форм, то соответствующие им (формам) коэффициенты имеют вид, не зависящий от порядка корректирующего многочлена. В таком случае получающийся степенной ряд оказывается сходящимся в ограниченном частотном интервале, если в модальное разложение включены все собственные формы, частоты которых лежат в этом интервале. С учетом этого обстоятельства автором настоящей работы был введен термин «корректирующий ряд» [37, 38, 39]. Коэффициенты этого ряда можно называть корректирующими функциями.

В настоящей работе методика синтеза динамических характеристик строится на основе гибридного подхода, когда собственные формы подконструкции определяются при условии частичного закрепления внешних степеней свободы. Метод жестких границ и метод свободных границ рассматриваются

как частные случаи. Соединение подконструкций предполагается дискретным, т.е. интерфейс системы конечномерный.

Теоретической основой разработанного здесь метода корректирующих рядов служат две сформулированные автором основные теоремы. Суть первой из них в том, что гармонический отклик подконструкции в ограниченном частотном интервале может быть точно представлен в виде модального разложения, включающего лишь те тона колебаний, собственные частоты которых не превосходят верхней границы этого интервала, и дополненного равномерно сходящимся на этом интервале корректирующим рядом. Вторая теорема утверждает то же самое относительно ограниченного частотного интервала с ненулевой нижней границей, причем в модальном разложении должны присутствовать лишь те собственные формы, частоты которых лежат в этом интервале. В этом случае строятся корректирующие ряды относительно смещенного значения частотного параметра.

Использование этих теорем позволяет принципиально изменить идеологию модального синтеза. Усечение модальных разложений путем отбрасывания высших тонов подконструкций заменяется усечением корректирующего ряда. В процессе доказательства теорем строится алгоритм вычисления коэффициентов корректирующего ряда и, что весьма важно, выводится асимптотическая оценка погрешности его усечения. Использование этой оценки в качестве априорной при проведении пробных расчетов дает возможность реально оценивать точность получаемых результатов.

В настоящей работе принята терминология, в соответствии с которой усеченный корректирующий ряд, содержащий  $m$  членов, (фактически, корректирующий многочлен) называется корректирующим рядом  $m$ -го порядка. Упомянутая асимптотическая оценка содержит порядок корректирующего ряда в показателе степени, основание которой меньше единицы. Таким образом, наблюдается экспоненциальная сходимость решения с ростом порядка корректирующего ряда.

На основе предложенного вида модального разложения для подконструкции формулируются соотношения между внешними обобщенными силами и перемещениями в виде системы уравнений, содержащих набор динамических коэффициентов влияния. Эти коэффициенты могут использоваться для формирования матрицы динамических жесткостей или матрицы динамических податливостей подконструкции. Синтез системы в зависимости от этого можно осуществлять либо по методу перемещений (метод динамических жесткостей), либо по методу сил (метод динамических податливостей).

Получаемая система уравнений может быть использована для определения собственных частот и форм упругой системы, однако наиболее удобно ее применение для непосредственного вычисления амплитудно-фазовых частотных характеристик, передаточных функций и других характеристик в решении тех задач, где такие данные используются. Следует отметить, что разработанная методика обеспечивает чрезвычайно быстрый расчет частотных характеристик системы при гарантированной высокой точности в заданном частотном диапазоне.

Основные соотношения и теоремы метода сформулированы применительно к обобщенной операторной постановке задачи для континуальных моделей упругих систем. Аналогичные результаты формулируются для дискретных моделей подконструкций, получаемых, например, методом конечных элементов. Векторные коэффициенты корректирующих рядов в этом случае называются корректирующими векторами.

Полученные формулы легко обобщаются на случай пропорционально демпфированных подконструкций. При этом предоставляется возможность задания различных коэффициентов демпфирования в подконструкциях, что существенно расширяет возможности моделирования демпфированных упругих систем.

Для проведения численных исследований и расчетов разработан программный комплекс, содержащий:

- программы расчета динамических характеристик конечноэлементных моделей упругих подконструкций с препроцессором;
- постпроцессорные программы формирования баз данных о подконструкциях, содержащих информацию о динамических характеристиках и корректирующих векторах;
- программы исследования спектра составной упругой системы и построения ее частотных характеристик с учетом демпфирования.

Сформированные предварительно базы данных о подконструкциях используются в алгоритме синтеза для определения динамических и частотных характеристик составной системы. Замена или модификация какой-либо компоненты системы отражается лишь в изменении соответствующей ей базы данных. Разработана универсальная структура баз данных для конечноэлементных моделей подконструкций.

Программный комплекс строится на основе общих принципов и может дополняться программами расчета необходимых для синтеза данных о подконструкциях различного типа. В настоящее время разработаны версии для пространственных стержневых конструкций и осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость. Могут использоваться и аналитические соотношения для континуальных моделей подконструкций. В частности, выведены формулы для изгибных колебаний однородных стержней, соединяемых в концевых сечениях.

В процессе исследований автором настоящей работы обнаружено, что рекуррентному алгоритму построения корректирующих векторов присуще свойство неустойчивости, приводящее к быстрому накоплению погрешностей и распаду решения уже при учете 5-6 членов корректирующего ряда [37]. Эффективным средством подавления этой неустойчивости оказалась ортогонализация вычисляемых векторов на каждом шаге рекуррентного процесса к учтенным собственным формам подконструкции. Это обстоятельство свидетельствует о том, что формулировки работ [103, 104, 105, 5] не достаточны для по-

строения устойчивого гарантирующего точность результата алгоритма. Построение корректирующих функций неизбежно должно осуществляться в ортогональном к учтенным собственным формам подпространстве (с коррекцией ортогональности на каждом шаге).

Существенные затруднения при реализации модального синтеза вызывает наличие среди собственных частот подконструкции нулевых значений, соответствующих формам движения твердого тела. Предложенный автором способ использования частотного сдвига при вычислении корректирующих векторов позволяет избежать трудностей и не вносить в алгоритм принципиальных изменений [39].

Помимо гарантированной оценки точности результата синтеза для метода корректирующих рядов важна оценка дополнительных затрат, связанных с вычислением корректирующих векторов, в сравнении с расширением набора собственных форм подконструкции. Учитывая то обстоятельство, что факторизация матрицы для решения последовательности статических задач выполняется однократно, можно приблизительно оценить затраты на вычисление одного дополнительного корректирующего вектора как на порядок меньшие по сравнению с затратами на вычисление дополнительной собственной формы. При этом проведенные исследования показали, что при использовании 5-10 членов корректирующего ряда относительная погрешность результатов синтеза не превышает  $10^{-5}$ - $10^{-6}$ . Это свидетельствует о неоспоримом преимуществе предложенного метода, особенно существенном для подконструкций с высокой плотностью спектра (что характерно для сложных пространственных конструкций). Его эффективность демонстрируется в настоящей работе на примере сложной составной конструкции орбитальной космической станции, модифицируемой в процессе сборки и изменяющей свою конфигурацию в процессе функционирования (например, в связи со стыковкой с транспортными кораблями или добавлением новых модулей).

Наличие среди компонентов сложной упругой системы гидроупругих звеньев, представляющих собой упругие конструкции, взаимодействующие с ограниченными объемами жидкости (в частности, содержащие жидкость во внутренних полостях), существенно усложняет задачу исследования ее динамических свойств. Такие задачи актуальны для исследования динамики летательных аппаратов, гидротехнических сооружений, проблем транспортировки жидких грузов. Успех их решения непосредственно зависит от правильности математической постановки задачи и эффективности методов определения динамических характеристик упругих конструкций с жидкостью, входящих в состав системы.

Как правило, конструкции, содержащие жидкость, представляют собой тонкостенные сосуды, динамическое поведение которых хорошо описывается с помощью соотношений теории оболочек.

Первые результаты в области динамики колебаний упругих оболочек, взаимодействующих с жидкостью, связаны с именами Рэлея, Жуковского Н.Е. и других исследователей конца XIX - начала XX веков. Однако период наиболее интенсивной разработки данной проблемы относится ко второй половине XX века в связи с развитием ракетной и авиационной техники, а также электронных вычислительных систем.

В основе современного этапа развития методов решения данного класса задач лежат работы таких отечественных исследователей как Моисеев Н.Н. [73], Рабинович Б.И. [92], Шмаков В.П. [102], Рапопорт И.М. [94]. Среди зарубежных специалистов здесь можно отметить работы Abramson H.N., Kana D.D., Lindholm U.S., Bauer H.F. Значительный вклад в решение проблемы внесли исследования Григолюка Э.И., Шклярчука Ф.Н., Горшкова А.Г., Балабуха Л.И., Балакирева Ю.Г., Лампера Р.Е., Пожалостина А.А. и других.

Вообще, число опубликованных к настоящему времени работ, посвященных задаче расчета динамических характеристик оболочек, содержащих жидкость, весьма велико. Основную часть из них составляют работы, в кото-

рых исследуются оболочки определенной формы и решения получаются, как правило, с помощью какого-либо вариационного метода, причем выбор координатных функций определяется формой полости. В этих работах получены приближенные или точные формулы для ряда оболочек простой геометрической формы. Однако для практики, где сложность конструкторских решений часто затрудняет получение аналитических оценок и не всегда позволяет использовать простые модели, наибольшую ценность представляют универсальные численные методы, не налагающие жестких ограничений на форму и параметры исследуемых конструкций. Здесь следует отметить разработанный под руководством В.П.Шмакова метод расчета динамических характеристик оболочек вращения с жидкостью [17, 18, 23], основанный на разложении потенциала смещений жидкости в ряд по собственным функциям гидродинамической задачи (решаемой методом Ритца) и использовании при решении уравнений теории оболочек метода ортогональной прогонки. Отметим также предложенный Р.Е.Лампером метод Ритца с варьируемым параметром [3, 67], позволяющий рассчитывать динамические характеристики широкого класса осесимметричных баков с жидкостью. Применялись при решении указанной задачи и прямые численные методы: метод конечных разностей [6, 7] и метод суммарных представлений [8, 9], также основанный на конечно-разностной аппроксимации дифференциальных операторов.

В настоящее время известны решения задач для весьма широкого класса оболочек с жидкостью: исследовались цилиндрические оболочки с различными днищами (плоскими, сферическими, коническими), сферические оболочки, конические оболочки, соосные цилиндрические оболочки. Мы не указываем здесь эти работы ввиду большого их числа - библиография по этому вопросу содержит несколько сотен названий. Заметим однако, что, несмотря на это, ряд вопросов долгое время оставался не решенным. Неизвестны, например, работы, в которых изучались бы колебания тороидальной оболочки с жидкостью. Лишь единичные работы касаются задачи о колебаниях систем из двух баков с

промежуточными разделительными днищами, причем рассмотрены весьма частные случаи. При этом на практике, например, в изделиях ракетной техники часто встречаются баки весьма сложной конфигурации, с двусвязными полостями, с разделительными днищами, когда невозможно рассматривать отдельно колебания жидкости в баках горючего и окислителя. Значительно усложняют разработку простых моделей для аналитических оценок и приближенных расчетов такие факторы, как переменность толщины оболочки, наличие шпангоутов, подкрепляющих ребер.

Все это вызвало потребность разработки простого и универсального алгоритма, позволяющего быстро выполнить расчет с учетом как можно большего числа конструктивных особенностей (возможно, ценой увеличения затрат времени работы вычислительной системы). В наибольшей степени таким условиям при расчете упругих конструкций отвечает метод конечных элементов [56]. В настоящей работе развиваются теоретические и методические основы его применения для расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью, функционирующих самостоятельно либо входящих в состав сложной упругой системы в качестве подконструкций.

Применению метода конечных элементов к расчету динамики упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью, посвящен целый ряд работ преимущественно зарубежных авторов. Если попытаться их классифицировать, то можно выделить две группы работ.

К первой группе отнесем те работы, в которых движение частиц жидкости описывается непосредственно векторами их смещений. В [147, 148] разработаны дискретные элементы, моделирующие свойства частиц сжимаемой или несжимаемой жидкости, которые могут быть включены в конечноэлементную модель упругой конструкции, содержащей жидкость. В комментариях к этим работам [124] отмечается, что эти элементы построены лишь на основе физических соображений и интуиции, и предлагается выражение для лагранжиана, на основе которого можно строить любые конечные элементы жидкости, при-



чем несжимаемость может быть обеспечена наложением некоторых ограничений на степени свободы элемента. Фактически такое выражение для лагранжиана и использовано в работе [161], где описаны конечные элементы для аппроксимации сжимаемой жидкости. К этой же группе работ относится и работа [177], где метод конечных элементов разработан для расчета неосесимметричных колебаний оболочек вращения с несжимаемой жидкостью. Отметим, что подход, использованный в [177], отличается чрезмерной усложненностью и громоздкостью построений, не свойственными, вообще говоря, методу конечных элементов.

В работе [97] обсуждается применение конечных элементов, предложенных в [161], к расчету осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью. Результаты сопоставляются с результатами расчета при помощи элемента с матрицей жесткости, сформированной на основе принципа минимума дополнительной энергии. При этом точность, полученная в первом случае, оказывается значительно хуже, чем во втором.

Если пренебречь влиянием поверхностных волн, то эквивалентным подходом является интерпретация сжимаемой жидкости в виде упругой (акустической) среды с нулевым модулем сдвига [110, 111]. Такой подход позволяет использовать с небольшими дополнениями имеющиеся конечноэлементные программы общего назначения.

Методы этой первой группы содержат ряд общих сложностей. Во-первых, это обеспечение условий на поверхности контакта упругого тела с жидкостью, для выполнения которых необходимо либо налагать дополнительные ограничения, как, например, в [177], либо вводить специальные конечные элементы, как предлагается в [110]. Во-вторых, как отмечается в [161], появляется набор собственных форм с нулевой частотой, соответствующих циркуляционным течениям жидкости, что усложняет решение задачи о собственных значениях.

Такие же циркуляционные формы получаются в работе [143], где для описания движения жидкости использованы уравнения в перемещениях в лагранжевой форме и сформулирован вариационный принцип, используемый для построения конечных элементов. Для исключения этих форм в этой работе предложено использовать метод штрафных функций.

Ко второй группе отнесем работы, в которых используется предположение о безвихревом движении жидкости, что позволяет описывать его при помощи одной скалярной функции (давление, потенциал скоростей, потенциал смещений). Это не только исключает формы циркуляционного течения жидкости, но и снижает размерность дискретизированной задачи.

В работах [187, 189, 160] поведение несжимаемой жидкости описывается потенциалом скоростей, который с помощью интегральных соотношений теории потенциала исключается из уравнений движения конструкции. Такой подход (часто используемый при решении задач гидроупругости) позволяет ограничиться описанием движения лишь оболочки и свободной поверхности жидкости, и соответственно лишь их дискретизацией при использовании метода конечных элементов, что особенно удобно при решении трехмерных задач. Однако при этом матрица масс конечноэлементной модели теряет весьма существенное свойство, а именно, ленточную структуру. Это резко увеличивает требуемые размеры памяти, используемой при расчетах вычислительной системы. Такой же результат получается в [56, 123, 112, 54], а также в [125] для несжимаемой жидкости, где сначала выполняется конечноэлементное разбиение жидкости, а затем из дискретной системы уравнений исключаются переменные, соответствующие жидкостным потенциалам (или давлению). Разбиение жидкости на конечные элементы с сохранением ленточной структуры матриц, как показано в [161], позволяет более эффективно использовать машинную память.

Вопрос о формировании матриц дискретизированной системы в случае, когда разбиение осуществляется как для упругой конструкции, так и для жид-

кости, может решаться несколькими способами. В работах [56, 193, 112, 125], где поведение несжимаемой жидкости описывается давлением, отдельно строятся системы дискретных уравнений для упругой конструкции и для жидкости. При построении же матриц, определяющих взаимосвязь этих двух систем, давление жидкости и перемещения смоченной поверхности рассматриваются как внешние воздействия по отношению соответственно к первой и ко второй из них. Получающиеся системы уравнений несимметричны, а методы их симметризации, как и при исключении соответствующих жидкости переменных, нарушают ленточную структуру матриц. В работах [138, 191, 192] предложены методы решения получаемых при таком подходе задач о собственных значениях, экономно использующие память вычислительной системы.

В работах [118, 119, 120, 121, 188] движение несжимаемой жидкости описывается при помощи потенциала скоростей. Для построения конечноэлементных систем уравнений здесь все уравнения (в том числе и соотношения на поверхности контакта конструкции с жидкостью) записываются в вариационной форме. Дискретизация задачи при таком подходе соответствует методу Бубнова-Галеркина. Для учета условий контакта с жидкостью при этом, вообще говоря, необходимо вводить специальные конечные элементы.

Однако наиболее простым и естественным является подход, основанный на дискретизации функционала действия, условие стационарности которого удовлетворяется решением задачи. Такой подход использован в работе [54], где решается задача о колебаниях пластинки на поверхности несжимаемой жидкости, заполняющей жесткий резервуар, а также в работе [170], являющейся развитием работы [118] в плане учета сжимаемости жидкости. При этом из условия стационарности функционала следуют все соотношения, в том числе и граничные условия контакта упругого тела и жидкости, что приводит к их автоматическому учету в дискретизированных системах уравнений. Это обеспечивается надлежащим выбором вида функционала. В работах [32, 33] такой подход называется смешанным вариационным принципом. Фактически он эк-

вивалентен используемому в [118] в смысле построения матриц конечноэлементной модели.

В работах [170, 175, 176] для описания поведения сжимаемой жидкости используются две функции: потенциал смещений и давление. Введение второй независимой переменной при учете сжимаемости оказывается необходимым для получения симметричных матричных уравнений. В противном случае, как, например, в [125, 133], где движение жидкости описывается лишь давлением, приходится осуществлять дополнительные преобразования с целью симметризации системы.

Для получения правильного результата при использовании численного метода, в частности, метода конечных элементов, первоочередное значение имеет адекватность исходной математической модели (системы уравнений, вариационного принципа) исследуемому физическому явлению. Возможность пренебрежения в математической модели влиянием отдельных факторов с целью упрощения процедуры решения должна быть не только обоснованной, но и соответствующие преобразования должны быть выполнены корректно, не приводя к противоречиям с физическими законами. Поэтому целая глава настоящей работы посвящена формулировке математической модели колебаний упругой конструкции с жидкостью в условиях однородного гравитационного поля.

В настоящей работе рассматриваются малые колебания упругой конструкции, содержащей жидкость во внутренних полостях (либо взаимодействующей с ограниченным объемом жидкости). Колебания жидкости также малы, и поэтому задача может рассматриваться в линейной постановке. Линеаризация исходных, вообще говоря, нелинейных соотношений должна осуществляться в окрестности статического равновесного состояния системы. Тем самым при определении ее динамических характеристик учитывается влияние статического нагружения. Материал конструкции считается линейно упругим, жидкость - идеальной и несжимаемой. Конструкция находится под действием

однородного гравитационного поля, определяющего положение недеформированной свободной поверхности жидкости.

Традиционно при формулировке замкнутой системы уравнений, описывающих колебания упругой конструкции, содержащей во внутренней полости жидкость, исследователи основывались на совмещении двух различных способов описания движения сплошной среды. Если уравнения малых колебаний упругого тела представляют лагранжев подход, то для описания движения жидкости наиболее распространен метод Эйлера. При этом используется предположение о потенциальности течения жидкости, позволяющее существенно упростить соответствующие уравнения. Такое совмещение разнородных методов повышает вероятность появления в постановке задачи некорrekтностей, одна из которых рассмотрена ниже. (Хотя, конечно, корректное построение определяющих соотношений возможно и на основе смешанного эйлерово-лагранжева подхода.)

В настоящей работе вывод уравнений осуществлен на основе лагранжева подхода как для упругой конструкции, так и для заполняющей ее полости жидкости. Техника последовательного единого лагранжева подхода в проблемах динамического взаимодействия разнородных сред изложена в работах [58, 96, 59], где основное внимание уделено вопросам нелинейности получаемых соотношений. Применительно к случаю малых колебаний контактные соотношения линеаризованы в окрестности стационарных значений переменных параметров. В предположении о безвихревом движении жидкости для его описания введен потенциал смещений. Выведена формула для лагранжиана консервативной системы «упругая конструкция - жидкость». Сформулирован вариационный принцип смешанного типа, среди условий стационарности которого содержатся контактные соотношения на смоченной поверхности упругой конструкции, что важно для эффективной реализации метода конечных элементов.

Важным моментом в описанных построениях является корректный учет влияния гравитационного поля на динамику системы.

Влияние интенсивности однородного гравитационного поля на собственные частоты колебаний упругих конструкций, содержащих жидкость, может осуществляться через два различных механизма взаимодействия этого поля с конструкцией. Первый из них реализуется опосредованно через статическую составляющую напряженно-деформированного состояния конструкции. Математически учет этого эффекта сводится к линеаризации уравнений малых колебаний относительно этой статической составляющей. Если материал конструкции линейно упругий, то определяющую роль здесь играет геометрическая нелинейность в выражении для тензора деформаций.

Второй канал влияния связан с работой, выполняемой гравитационными силами, действующими на жидкость, в процессе колебаний гидроупругой системы. Одно из проявлений этой работы связано с волнообразованием на свободной поверхности жидкости. Однако этим механизм явления не исчерпывается.

Тесно связанным с волнообразованием оказывается эффект колебаний гидростатического давления жидкости на стенки полости вследствие их движения. Локальное вертикальное смещение контактирующей с жидкостью стенки сосуда приводит к изменению давления на нее вследствие изменения глубины. Появляющийся при учете этого фактора член в уравнениях малых колебаний имеет первый порядок малости, т.е. по такому формальному признаку отброшен быть не может и должен присутствовать в динамических соотношениях на контактной поверхности.

Впервые корректное выражение для динамических условий на контактной поверхности приведено применительно к оболочкам вращения в работе Э.И.Григолюка и Ф.Н.Шклярчука [33]. При их выводе принципиален учет того обстоятельства, что гидростатическая сила является “следящей”. Это выражается в том, что, во-первых, направление действия силы меняется в соответст-

вии с поворотом нормали к деформированной смоченной поверхности, а во-вторых, изменение площади элемента поверхности вследствие растяжения или сжатия в процессе деформации влияет на величину совершаемой этой силой работы. Эти два обстоятельства отмечены в работе [20] применительно к проблемам устойчивости упругих оболочек. Только при учете этих факторов удастся записать выражение для потенциальной энергии гравитационных сил, действующих на жидкость, и следовательно, выражение для лагранжиана гидроупругой системы.

В процессе исследований выяснилось, что выражение для потенциальной энергии гравитационных сил жидкости, приведенное в работе [33], верно только для гладких поверхностей контакта жидкости с конструкцией. В настоящей работе получено выражение, применимое для произвольного случая кусочно-гладких смоченных поверхностей.

Заметим, что в большинстве из рассмотренных выше работ гравитационными эффектами полностью пренебрегается. Это допустимо в тех случаях, когда для исследования представляют интерес лишь колебания, обусловленные преимущественно упругостью стенок сосуда, а их спектр существенно отделен от собственных частот колебаний свободной поверхности жидкости. В этом случае на свободной поверхности задается условие равенства нулю давления или потенциала смещений (или скоростей). Естественно, отсутствует гравитационная составляющая и в контактных соотношениях. Такой подход можно считать предельным случаем упрощения гидроупругой задачи. Он весьма распространен, поскольку его результаты дают точность, достаточную для широкого круга приложений.

Однако, поскольку вносимая гравитационным членом поправка в эффективную жесткость стенок сосуда, как правило, весьма мала, возникает вопрос о возможности пренебрежения ее величиной в уравнениях математической модели при сохранении членов, описывающих волнообразование на свободной поверхности.

В настоящей работе показано, что простое вычеркивание соответствующего члена в динамических контактных соотношениях недопустимо, поскольку приводит к противоречивой с точки зрения механики математической модели. А именно, система получает дополнительную связь, препятствующую ее смещению как жесткого тела в направлении вектора гравитации. Оценки показывают, что вносимая этой связью погрешность в расчетный спектр системы может быть значительной.

Это свидетельствует о взаимной связи колебаний свободной поверхности и деформации контактной поверхности как единой системы, состояние которой определяет потенциальную энергию гравитационных сил жидкости.

В работе показано также, что, варьируя способ определения аддитивной константы в потенциале смещений, можно получить эквивалентную систему уравнений, в которой вычеркивание гравитационного члена в динамических контактных соотношениях не приводит к противоречиям. Фактически, в результате такого преобразования свободная поверхность жидкости выделяется в подсистему с собственной потенциальной энергией гравитационных сил. Вследствие указанного выбора константы в уравнениях колебаний свободной поверхности жидкости и в лагранжиане системы появляется интегральная величина - среднее смещение свободной поверхности. Введение такой интегральной величины вызывает затруднения при реализации метода конечных элементов, обесценивающие это «упрощение».

Необходимо отметить, что в перечисленных выше основополагающих работах отечественных исследователей [73, 92, 102, 62, 94], где влияние гравитации учитывалось только в форме поверхностных волн, в уравнениях также присутствуют указанные интегральные члены, обеспечивающие непротиворечивость математической модели.

Если же говорить о работах зарубежных специалистов, то библиографические исследования показывают, что все они (за исключением тех, где гравитационные эффекты не учитываются совсем) содержат ту или иную форму не-



корректности. Единственным обнаруженным исключением являются работы [108, 109], где исследуются математические свойства краевых задач, сформулированных на основе результатов работ [73, 94].

Несмотря на относительную давность результата работы [33], он остался, по-видимому, полностью вне сферы внимания зарубежных специалистов. Некорректный подход к формулировке динамических условий контакта упругого тела с жидкостью, когда не учитываются две отмеченные выше особенности действия гидростатической силы в условиях колебаний, приводит к появлению несимметричных операторов.

В качестве примера можно привести работу [118], где с целью достижения симметричности введена совершенно не оправданная с точки зрения механики гипотеза, состоящая в пренебрежении касательными к поверхности контакта смещениями. Результатом явились уравнения, не инвариантные относительно сдвига системы и, как следствие, дополнительно наложенные на систему связи.

Связи эти действуют не только в вертикальном направлении, как в рассмотренном выше случае неверных уравнений для свободной поверхности при отбрасывании гравитационной компоненты в динамических контактных соотношениях, но и в горизонтальном направлении. При этом жесткости этих связей могут быть как положительными, так и отрицательными. В работе [32] отмечено, что такой подход допустим, если нормальные перемещения смоченной поверхности значительно больше тангенциальных. Однако в случае систем, колебания которых характеризуются значительными средними смещениями содержащихся в них масс жидкости, указанные связи должны оказывать существенное влияние на результаты расчетов. (Отметим единственный геометрический вариант, когда эти связи не возникают, - полость, образованная строго вертикальными стенками и горизонтальным плоским дном.)

Часто такие же формулы получаются из-за небрежности при выводе динамических контактных условий, выполняемом с помощью наглядных геомет-

рических представлений, как это сделано в работе [133]. На таких же формулах основано выражение для энергии сил тяжести конечного элемента в работах [161, 124]. Такое же выражение использовано в работе [160] для потенциальной энергии объема жидкости. На основе таких же формул построены конечные элементы жидкости в распространенном программном комплексе ANSYS версии 5.4. Ссылки на эти же формулы содержатся в работах отечественных авторов [55, 74].

Возможность получить удобные формулировки, связав гравитационную потенциальную энергию жидкого объема (и конечного элемента жидкости) лишь с параметрами его собственной деформации, отвлекает разработчиков от механической сущности проблемы. Форма занимаемого жидкостью объема определяется удерживающими его стенками сосуда, а работа гравитационных сил жидкости осуществляется на перемещениях этих стенок (а не контактирующих с ними частиц жидкости в условиях взаимного скольжения). Отсюда следует невозможность конструирования жидкостного конечного элемента, в котором учитывался бы этот фактор.

Иного рода усилия были приложены разработчиками известного конечноэлементного комплекса UAI/NASTRAN [186], где в результате применения метода конечных элементов к системе с несимметричными операторами получаются уравнения с несимметричными матрицами. Для решения проблемы собственных значений в состав комплекса включены специально разработанные алгоритмы, требующие нетривиальных ресурсов вычислительных систем. Вопрос о точности получаемых результатов требует отдельного исследования.

Достоин удивления факт значительного количества работ, в которых при не учете влияния гравитации на контактные соотношения уравнения поверхностных волн сформулированы неверно - без учета среднего смещения свободной поверхности. В качестве примеров укажем работы [193, 175, 176, 122]. С попытками устранить возникающие при этом противоречия связано, по видимому, появление работ [134, 172, 173], где введены усложненные форму-

лировки, основанные на труднообъяснимом в рамках линейной задачи введении понятия «отсчетного» состояния для учета влияния движения стенок сосуда.

Широкий класс практических задач связан с определением динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, полости которых частично заполнены жидкостью. Вектор гравитационных сил в этом случае коллинеарен продольной оси конструкции. В настоящей работе задача расчета динамических характеристик конструкций такого типа рассмотрена подробно и разработан алгоритм метода конечных элементов для ее решения.

Осесимметричность конструкции позволяет в цилиндрической системе координат свести пространственную задачу определения динамических характеристик к двумерной путем разложения неизвестных в ряд Фурье по окружной координате. Расщепление системы уравнений для гармоник на независимые подсистемы приводит к тому, что собственные формы представляют собой колебания с целым числом волн по окружности (в случае нулевого значения это продольно-радиальные и крутильные колебания).

Рассмотренная выше постановка задачи о колебаниях конструкций, содержащих жидкость, переработана с учетом гипотез теории тонких упругих оболочек и нелинейности геометрических соотношений [98, 77]. Линеаризация в окрестности статического напряженно-деформированного состояния, возникающего в результате действия давления газа в полостях конструкции и сил тяжести, позволяет учесть влияние этих факторов на собственные частоты и формы колебаний. Рассмотрен общий случай произвольного количества несвязанных между собой полостей, частично заполненных жидкостями разной плотности. Допускается наличие промежуточных между этими полостями стенок, касающихся жидкости с обеих сторон. Учитываются такие конструктивные особенности, как наличие упругих силовых шпангоутов, а также несимметричного относительно срединной поверхности оболочки подкрепления в виде часто расположенных продольных и кольцевых ребер.

Жидкость считается идеальной и несжимаемой, движение ее безвихревое и описывается при помощи потенциала смещений. Для применения метода конечных элементов использован описанный выше вариационный принцип в виде условия стационарности функционала, из которого следуют уравнение несжимаемости, граничные условия на свободной поверхности жидкости, а также условия на контактной поверхности жидкости и оболочки с учетом влияния однородного гравитационного поля.

В работе описаны конечные элементы для дискретизации жидкости (включая элементы свободной поверхности) и оболочечные конечные элементы, описаны способы формирования их матриц и способ учета влияния статического напряженно-деформированного состояния на матрицу жесткостей оболочечного элемента. Заметим, что оболочечные элементы сформулированы таким образом, что учтена возможность контакта с жидкостью, и это освободило от необходимости введения специальных контактных элементов.

На основе этих конечных элементов разработан программный комплекс, предназначенный для расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью при осесимметричных колебаниях, при колебаниях с заданным числом волн по окружности, с учетом влияния внутреннего давления и собственного веса конструкции.

Этот программный комплекс расширяет возможности разработанных ранее программ [34, 35], эксплуатировавшихся на вычислительных машинах БЭСМ-6, единой серии ЕС-1050, ЕС-1060, на компьютерах типа IBM PC. Программа расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью при осесимметричных колебаниях включена в ФАП по ракетно-космической технике РКА [36], использовалась во всех конструкторских бюро ракетно-космической отрасли в расчетах динамических характеристик топливных баков и корпусов жидкостных ракет.

Благодаря тщательной отладке и тестированию, а также использованию эффективных численных методов достигнута высокая надежность алгоритма,

не имевшего отказов при проведении тысяч расчетов. Решающую роль в распространении программ сыграла разработка удобных препроцессорных и постпроцессорных процедур, а также возможность вести расчет практически от чертежа, без трудно обосновываемых упрощений и введения промежуточных расчетных моделей с использованием механических аналогов.

Новый программный комплекс позволяет (в дополнение к прежним возможностям) в полном объеме учитывать гравитационные эффекты. Это важно ввиду того, что на практике далеко не всегда реализуются условия, позволяющие пренебрегать влиянием волн на поверхности жидкости. В работе приведен также пример конструкции, расчет динамических характеристик которой в принципе невозможен без учета гравитационной составляющей соотношений на смоченной поверхности.

Применительно к проблемам динамики жидкостных ракет важное преимущество программного комплекса связано с возможностью определять динамические характеристики корпуса целиком, без промежуточной схематизации его стержнем с упруго подвешенными массами (что по сути является способом синтеза динамических характеристик). Такая схематизация затруднительна в упомянутом выше случае вложенных друг в друга баков с промежуточным разделительным днищем, когда невозможно рассматривать колебания жидкости в баках по отдельности. Кроме того, заметное влияние на собственные формы корпуса оказывает связь между радиальными и продольными колебаниями стенок несущих баков за счет отличия от нуля коэффициента Пуассона (не учитываемая в стержневой модели корпуса), что показано в работе [22] на примере продольных колебаний конструкции, составленной из отрезков стержня и цилиндрических баков, частично заполненных жидкостью.

В программном комплексе предусмотрена также возможность модального синтеза подконструкций (отдельных отсеков) с использованием метода корректирующих рядов, обеспечивающего гарантированную высокую точность результатов, в случае когда расчет полной модели корпуса затруднен из-за вы-

сокой размерности задачи. В работе проведено сравнительное исследование точности результатов, получаемых различными методами синтеза.

Возбуждение динамических процессов в упругой или гидроупругой системе в составе сложного технического объекта связано, как правило, с работой источника энергии. Интенсивность его воздействия на конструкцию связана с изменением параметров ее деформации, причем в этом процессе наряду с собственными динамическими характеристиками источника энергии значительную роль могут играть и специальные регулирующие устройства. Такая система образует замкнутый контур, в котором могут развиваться автоколебания, отрицательно влияющие на условия функционирования объекта.

Одна из актуальных проблем такого рода связана с исследованием продольных автоколебаний жидкостной ракеты в полете, возникающих в результате взаимодействия колебаний корпуса ракеты и вызываемых ими колебаний жидкости в топливных магистралях с колебаниями давления в камере сгорания и тяги двигателя.

Это явление достаточно хорошо изучено с точки зрения исследования условий возникновения автоколебаний при неустойчивости в замкнутом контуре «корпус - топливная магистраль - двигатель». Здесь значительный вклад внесли отечественные ученые Микишев Г.Н. [71], Рабинович Б.И. [91], Шмаков В.П. [93], Колесников К.С. [63, 64], Натанзон М.С. [75, 76], Пилипенко В.В. [88], Балакирев Ю.Г. [13, 16], а также ряд американских исследователей [178, 180, 190].

Тем не менее, в значительной мере дискуссионным остается вопрос о достигаемых при продольной неустойчивости амплитудах колебаний, которые могут оказаться невелики, не требуя поэтому специальных конструктивных мероприятий по их подавлению.

В любом из звеньев указанного замкнутого контура могут проявляться нелинейные зависимости, влияющие на предельные значения амплитуд автоколебаний. Влияние нелинейных характеристик двигательной установки, обу-

словленных кавитационными явлениями в насосах, на амплитуды продольных колебаний жидкостных ракет рассматривалось в работах [88, 87]. Динамика корпуса описывалась при этом линейными соотношениями. В результате расчетов получено качественное соответствие форм колебаний параметров системы типичным данным летных испытаний.

Тем не менее, упругая конструкция корпуса также может играть значительную роль в ограничении амплитуд. Предпосылкой для проведения исследований в этом направлении послужило экспериментально установленное явление возбуждения неосесимметричных форм колебаний осесимметричных оболочек с жидкостью при продольном воздействии, существенно снижающее порог, при котором проявляются их нелинейные свойства [158, 1]. Механизм этого явления имеет характер параметрического возбуждения при действии вызванных продольным воздействием периодических колебаний осесимметричного напряженного состояния оболочки. Поэтому при исследовании влияния нелинейности корпуса на динамику продольных автоколебаний нельзя ограничиться рассмотрением лишь осесимметричных форм колебаний оболочек, как это делается при исследовании устойчивости.

Мы рассмотрим в данной работе ракеты тандемной компоновки, корпуса которых с хорошей степенью точности можно рассматривать как осесимметричные оболочечные конструкции с жидкостью.

Параметрические колебания оболочек с жидкостью привлекают внимание исследователей с начала шестидесятых годов. Важность изучения этого эффекта особо отмечена в обзорном докладе Э.И.Григолюка [32] на VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок в 1969 году.

По-видимому, статья [26] - первая из работ, где теоретически рассмотрено это явление. В ней показано, что периодические осесимметричные усилия в оболочке играют роль параметрических нагрузок для неосесимметричных форм колебаний и в качестве примера рассмотрена цилиндрическая оболочка с шарнирно опертыми краями, заполненная жидкостью и находящаяся под дей-

ствием переменных во времени продольной сжимающей силы, распределенной продольной нагрузки и гидростатической силы. Задача о динамической неустойчивости методом Бубнова-Галеркина сводится к системе уравнений типа Хилла. Однако усилия, характеризующие невозмущенное напряженно-деформированное состояние, определяются без учета инерции оболочки и динамического взаимодействия оболочки с содержащейся в ней жидкостью, что ограничивает область применимости полученных соотношений.

Аналогичный подход использован в работах [10, 11] при исследовании параметрических колебаний цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью медленно меняющейся глубины, под действием периодической продольной сжимающей силы, а также в работе [49] при исследовании устойчивости колебаний цилиндрической оболочки с пологим сферическим дном и массами на торцах, частично заполненной жидкостью, под действием приложенных к торцам периодических продольных сил.

В работах [99, 100], где исследовались параметрические колебания цилиндрической оболочки при продольных воздействиях, осесимметричные усилия в оболочке определяются из решения задачи об осесимметричных колебаниях оболочки совместно с частично заполняющей ее жидкостью. Из соотношений нелинейной теории пологих цилиндрических оболочек в работах [80, 81] выведены уравнения нелинейных параметрических осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, содержащей жидкость. Получены условия возбуждения неосесимметричного тона и выражения для амплитуды колебаний в окрестности главного параметрического резонанса. Построение областей неустойчивости осуществлялось в данных работах приближенно с помощью метода гармонического баланса.

Аналогичные результаты, но в менее точной постановке, были получены в работе [158]. Исследование различного вида параметрических резонансов цилиндрической оболочки с жидкостью при гармонических колебаниях ее основания выполнено в работах [82, 83, 84].



Необходимо отметить большое значение экспериментальных исследований параметрических колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью, описанных в работах [158, 1]. Экспериментальные данные содержатся также в работе [69].

В настоящей работе описана разработанная автором методика оценки амплитуды автоколебаний системы, состоящей из осесимметричной оболочечной конструкции с жидкостью, гидравлически связанного с ней трубопровода и регулятора, управляющего величиной действующей на конструкцию продольной силы зависимости от давления на выходе из трубопровода. Эта методика позволяет учитывать геометрическую нелинейность поведения оболочек и связанный с ней эффект параметрического возбуждения неосесимметричных форм колебаний.

Первым этапом методики является расчет динамических характеристик оболочечной конструкции с жидкостью с помощью упомянутого выше программного комплекса, основанного на методе конечных элементов. Вычисляются как осесимметричные, так и неосесимметричные собственные формы, частоты которых лежат в представляющем интерес диапазоне.

Второй этап заключается в вычислении коэффициентов при нелинейных членах (квадратичных и кубичных) в уравнениях колебаний конструкции, записанных в нормальных координатах. Эти коэффициенты представлены интегралами по поверхности оболочки и вычисляются при помощи той же конечноэлементной сетки, которая использовалась на первом этапе. В работе проанализирована структура определяемых этими коэффициентами нелинейных связей между осесимметричными и неосесимметричными тонами в зависимости от числа волн и сдвига по окружности (в случае кратных частот). Сформулированные условия неравенства нулю нелинейных коэффициентов значительно снижают объем вычислительной работы.

На третьем этапе осуществляется расчет областей параметрического возбуждения неосесимметричных форм колебаний конструкции при гармониче-

ском продольном силовом воздействии для оценки степени возбудимости этих форм (и выделения наиболее важных для учета на следующем этапе). Границы областей строятся на плоскости «частота - амплитуда воздействия». Для этого с использованием данных первых двух этапов формируются уравнения в вариациях относительно стационарного осесимметричного отклика конструкции, образующие систему линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В предположении, что амплитуда воздействия достаточно мала, параметры этого осесимметричного отклика определяются аналитически из линейных уравнений (этому условию соответствуют нижние границы областей параметрического возбуждения неосесимметричных тонов). Для построения областей используется метод, основанный на вычислении мультипликаторов системы, предложенный в работе [21] и дающий точное положение границ.

И последний, четвертый, этап состоит в исследовании амплитуд колебаний, развивающихся в автоколебательной системе. Для его реализации в работе выведена система уравнений и сформулирована задача Коши, описывающая переходный процесс. В уравнениях учтено взаимное влияние колебаний жидкости в баках и в присоединенных к ним трубопроводах. Динамика источника энергии (двигателя) описывается интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра, ядро которого вычисляется на основе данных о его амплитудно-фазовых частотных характеристиках.

Сложный вид нелинейности, содержащейся в этой системе, ограничивает возможность ее аналитического исследования. Поэтому исследование проводится методом численного интегрирования при различных начальных условиях до выхода колебательного процесса на максимальные значения амплитуд. Для решения систем интегро-дифференциальных уравнений общего вида была разработана и отлажена подпрограмма, на основе которой составлена программа численного решения уравнений продольных колебаний.

Проведенное численное исследование показало, что, во-первых, учет геометрической нелинейности оболочек в рамках предположения об осесимметричности колебаний не дает существенного эффекта в плане ограничения амплитуд продольных автоколебаний, и во-вторых, учет эффекта параметрического возбуждения неосесимметричных тонов оказывает существенное влияние на характер переходного процесса и приводит к значительному ограничению амплитуд.

Следовательно, благодаря указанному эффекту нелинейность корпуса может быть определяющим фактором в ограничении амплитуд продольных автоколебаний жидкостной ракеты наряду с нелинейными кавитационными эффектами на входе в насосы и нелинейным демпфированием.

Основные результаты представленных в данной диссертации исследований опубликованы в работах [14, 15, 34 - 48, 106, 107, 182].

Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на 26 разделов, заключения и списка литературы.

В первом разделе первой главы диссертации даны основные понятия, в наиболее общей операторной форме сформулирована постановка задачи модального синтеза упругих подконструкций и показана техника построения корректирующих функций, обеспечивающих ускорение сходимости модального разложения колебаний подконструкции. Во втором разделе представлен способ построения корректирующих функций в подпространстве, ортогональном к удерживаемым в модальном разложении собственным формам, позволяющий формировать сходящиеся корректирующие ряды. В третьем разделе сформулированы две основные теоремы метода корректирующих рядов: первая - для низкочастотного интервала, примыкающего к нулевому значению, а вторая - для ограниченного высокочастотного интервала с ненулевой нижней границей. В четвертом разделе полученные общие соотношения конкретизированы на примере изгибных колебаний однородных стержней, внешние степени свободы которых соответствуют смещениям и поворотам их концов.

Вторая глава посвящена разработке принципов метода корректирующих рядов применительно к дискретным моделям подконструкций с учетом особенностей, характерных для конечноэлементных моделей. В первом разделе подробно исследован вариант жестких границ, непосредственно дающий формулы для компонент матрицы динамических жесткостей подконструкции. Показана неустойчивость исходного рекуррентного процесса формирования корректирующих векторов и разработана устойчивая схема их вычисления в ортогональном к собственным формам подпространстве с дополнительной ортогонализацией на каждом шаге. Рассмотрены два способа формирования матриц динамических коэффициентов влияния: метод прямой подстановки и метод замены переменных, обеспечивающий удвоенный порядок точности для компонент матриц при том же порядке корректирующего ряда. Проведены численные исследования, подтверждающие справедливость асимптотических оценок погрешности метода корректирующих рядов.

Во втором разделе второй главы, посвященном варианту свободных границ, предложен способ преодоления вычислительных сложностей, возникающих в случае вырожденной матрицы жесткостей базовой задачи о собственных значениях, что характерно для данного варианта. Соответствующий метод назван частотным сдвигом корректирующих векторов, а корректирующий ряд в этом случае строится относительно смещенного частотного параметра. Проведено численное исследование по сопоставлению точности результатов, получаемых методами жестких и свободных границ, в зависимости от порядка используемых корректирующих рядов.

В третьем разделе второй главы результаты первого и второго разделов синтезированы в гибридном методе. Полученные формулы учитывают возможность независимого частотного сдвига для корректирующих рядов, соответствующих граничным и соединительным степеням свободы подконструкции. Выражения для динамических коэффициентов влияния получены как с помощью метода прямой подстановки, так и методом замены переменных. В

четвертом разделе полученные результаты распространены на случай пропорционально демпфированных подконструкций. В пятом разделе исследована возможность введения в вычислительную схему метода аналитических формул для подконструкций, структура которых позволяет получать их без использования прямых численных методов и дискретизации исходной математической модели. В шестом разделе эффективность метода показана на примере сложной пространственной балочной модели орбитальной космической станции.

В третьей главе сформулирована математическая постановка задачи о колебаниях упругой конструкции, взаимодействующей с ограниченным объемом жидкости, при действии однородного гравитационного поля. В первом разделе линейные уравнения колебаний жидкости и кинематические условия на контактной поверхности выведены на основе лагранжевого подхода. Во втором разделе исследованы динамические соотношения на контактной поверхности и выведено выражение для потенциальной энергии гравитационных сил жидкости, применимое к произвольному случаю кусочно-гладких поверхностей контакта. В третьем разделе приведена замкнутая система уравнений в перемещениях, а также система уравнений для случая безвихревого движения жидкости, описываемого потенциалом смещений. Рассмотрены возможности упрощения постановки задачи посредством отбрасывания отдельных составляющих гравитационной энергии жидкости. В четвертом разделе сформулирован смешанный вариационный принцип, основанный на модифицированном выражении для лагранжиана системы.

Четвертая глава посвящена разработке методики расчета динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость. В первом разделе сформулирована математическая постановка задачи и вариационный принцип, удобный для применения метода конечных элементов. Второй раздел содержит описание использованных в работе конечных элементов и способ дискретизации задачи. В третьем разделе описана модификация оболочечных конечных элементов с целью учета влияния статического

напряженно-деформированного состояния. В четвертом разделе описаны основные принципы построения вычислительных алгоритмов и даны краткие характеристики разработанных программ. В пятом разделе приведены результаты тестовых расчетов, показывающие эффективность разработанных программ и сходимости к точному решению. Здесь же приведены результаты исследования тороидальной оболочки, частично заполненной жидкостью, а также рассмотрен пример гидроупругой системы, в которой возможна потеря устойчивости в результате действия гравитационного поля. В шестом разделе исследована точность результатов синтеза динамических характеристик составных осесимметричных оболочечных конструкций с жидкостью (типа корпусов жидкостных ракет тандемной схемы) на основе метода корректирующих рядов. Полученные данные сопоставлены с результатами, полученными другими методами синтеза:

- с помощью стержневой схематизации корпуса и замены баков системами осцилляторов,
- посредством последовательной замены верхних отсеков системами эквивалентных осцилляторов.

В пятой главе разработана методика расчета автоколебаний гидроупругой системы с регулятором с учетом нелинейности поведения осесимметричной оболочки, предназначенная для исследования влияния нелинейности поведения корпуса жидкостной ракеты на амплитуду ее продольных колебаний в полете. В первом разделе выведены уравнения колебаний оболочечной конструкции с жидкостью с учетом влияния колебаний жидкости в присоединенных к ней трубопроводах и приведены уравнения колебаний жидкостной ракеты с двигателем (в линейном приближении). Во втором разделе выведены уравнения в нормальных координатах, описывающие нелинейные колебания осесимметричных оболочечных конструкций с жидкостью, и исследована их структура. В третьем разделе получены уравнения параметрического возбуждения неосесимметричных форм колебаний при осесимметричных вынужденных ко-

лебаниях конструкции. В четвертом разделе описан способ вычисления коэффициентов нелинейных уравнений и метод исследования областей параметрического возбуждения неосесимметричных форм, а также получены некоторые приближенные формулы для области главного параметрического резонанса. В пятом разделе уравнения продольных колебаний обобщены на случай учета нелинейности поведения корпуса и параметрического возбуждения неосесимметричных форм и описан метод их численного решения как системы интегродифференциальных уравнений. В шестом разделе описана гидроупругая система с регулятором, на примере которой проведены исследования нелинейных оболочечных эффектов при возникновении продольных колебаний. Построены области параметрического возбуждения неосесимметричных тонов при гармоническом продольном воздействии. Исследованы переходные процессы в замкнутом контуре без учета нелинейности корпуса и с учетом ее как в отсутствие неосесимметричных форм, так и при их возбуждении при различных начальных условиях, играющих роль внешних возмущений.

## Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОРРЕКТИРУЮЩИХ РЯДОВ В СИНТЕЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ.

В данной главе рассматривается класс составных конструкций, формируемых из подконструкций, соединенных между собой дискретным образом. Подразумевается, что соединение осуществляется в конечном числе точек. Движение каждой из соответствующих материальных точек в подконструкции задается посредством набора степеней свободы, включающего, например, перемещения и повороты. Часть этих степеней свободы (обобщенных перемещений), может входить в соединение с системой. Это означает, что при движении системы возникают соответствующие этим степеням свободы обобщенные силы, характеризующие воздействие, осуществляемое на данную подконструкцию со стороны остальных компонент системы.

Точки подконструкции, которые входят в соединение с другими подконструкциями, назовем “внешними”, а соответствующие степени свободы и обобщенные силы, действующие на подконструкцию, - внешними степенями свободы и внешними силами. Для каждой подконструкции число таких степеней свободы и сил конечно.

При анализе гармонических колебаний в случае, когда движение подконструкции описывается линейными соотношениями, между внешними степенями свободы и силами устанавливается линейная зависимость, характеризующая коэффициентами динамического влияния, являющимися функциями частоты. Исследовать динамические свойства системы можно имея для каждой подконструкции полный набор этих коэффициентов в виде матрицы динамических жесткостей либо матрицы динамических податливостей.

В данной главе мы рассматриваем свободные колебания составной конструкции либо вынужденные колебания под действием сил, приложенных в



узлах соединения подконструкций. В этом случае исследование гармонических колебаний можно без особого труда осуществлять с помощью методов динамических жесткостей или динамических податливостей, если имеются простые и экономичные способы вычисления соответствующих динамических матриц подконструкций (матриц динамических жесткостей или динамических податливостей). Непосредственному применению этих методов препятствуют, как правило, высокие размерности математических моделей подконструкций.

Одним из путей преодоления этой трудности служит метод модального синтеза, когда матрицы формируются на основе информации о собственных частотах и формах колебаний подконструкций. Полнота набора собственных форм подконструкции позволяет перейти в описании ее колебаний к соответствующим обобщенным координатам через ряды, называемые в дальнейшем модальными разложениями колебаний. На базе модального разложения выводятся формулы для динамических матриц подконструкции, основанные на вычисленных предварительно собственных частотах и формах ее колебаний.

В данной главе сформулированы наиболее общие соотношения метода корректирующих рядов, применимые к произвольным аналитическим моделям подконструкций, независимо от того, используются для описания их поведения соотношения трехмерной теории упругости или же это двумерные или одномерные модели, описываемые уравнениями теории оболочек или стержней.

Методы модального синтеза различаются в зависимости от того, какие условия ставятся в задаче о собственных колебаниях подконструкции для ее внешних степеней свободы. Метод жестких границ и метод свободных границ являются частными случаями рассматриваемого здесь обобщенного гибридного подхода, в рамках которого при определении собственных форм колебаний подконструкции часть внешних степеней свободы фиксирована, а остальные свободны.

### 1.1. Основные соотношения метода корректирующих рядов.

Запишем уравнения колебаний подконструкции в наиболее общей операторной форме:

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} + \mathbf{C} \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{f}} , \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{A}$  - инерционный оператор,  $\mathbf{C}$  - упругий (как правило, дифференциальный) оператор,  $\vec{\mathbf{f}}$  - поле внешних сил. Векторное поле перемещений  $\vec{\mathbf{u}}$  определено в объеме упругого тела, представляющего подконструкцию, или же на двумерном либо одномерном многообразии в случае, когда уравнения редуцированы с использованием гипотез теории оболочек или теории стержней.

Стационарные гармонические колебания описываются уравнением:

$$\mathbf{C} \vec{\mathbf{u}} - \lambda \mathbf{A} \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{f}} , \quad (1.2)$$

где  $\lambda = \omega^2$  - квадрат круговой частоты, а  $\vec{\mathbf{u}}$  и  $\vec{\mathbf{f}}$  соответствуют амплитудным величинам соответствующих векторов.

Исходя из самосопряженности операторов в уравнениях (1.1) и (1.2), введем обычным образом энергетические произведения [72]:

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}]_A &= (\mathbf{A} \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{u}}, \mathbf{A} \vec{\mathbf{v}}) , \\ [\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}]_C &= (\mathbf{C} \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{u}}, \mathbf{C} \vec{\mathbf{v}}) . \end{aligned}$$

В множестве внешних обобщенных перемещений подконструкции (рис. 1.1) выделим те, которые фиксируются при определении ее собственных частот и форм -  $U_i^b$ ,  $i = 1, \dots, n_b$  (условно назовем их “граничными”), и те, которые остаются при этом свободными -  $U_j^c$ ,  $j = 1, \dots, n_c$  (назовем их “соединительными”). Соответствующие обобщенные силы обозначим  $F_i^b$  и  $F_j^c$ . Кроме того, введем в рассмотрение операторы выделения граничных и соединительных перемещений:

$$\begin{aligned} U_i^b &= U_i^b[\bar{\mathbf{u}}] , \\ U_j^c &= U_j^c[\bar{\mathbf{u}}] . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Соответствующая задача о собственных значениях (в терминах работы [103] “базовая” задача) может быть записана в виде:

$$\mathbf{C}\bar{\mathbf{u}} - \sigma\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = 0 , \quad U_i^b[\bar{\mathbf{u}}] = 0 . \quad (1.4)$$

Ее решения образуют набор собственных значений и соответствующих им форм  $\{\sigma_k, \bar{\mathbf{u}}_k, k = 1, 2, \dots\}$ . Решения считаем упорядоченными по возрастанию собственных частот. Если имеется нулевая собственная частота кратности  $p$ , то первые  $p$  решений соответствуют этой частоте.

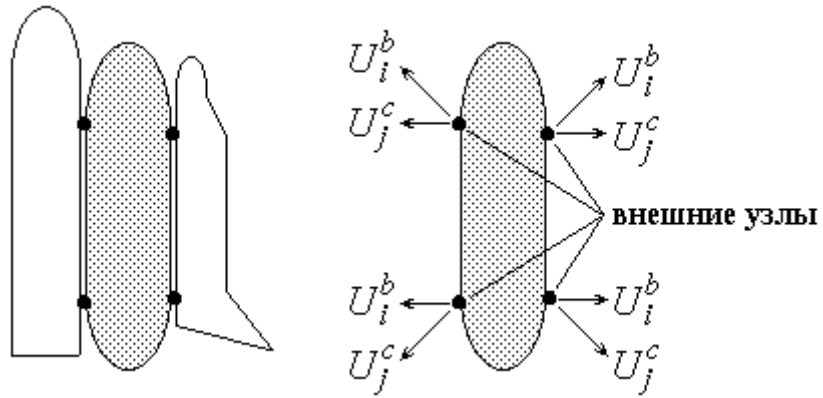


Рис. 1.1.

Обозначим пространство, образованное всеми кинематически допустимыми движениями подконструкции,  $\tilde{\mathbf{W}} = \{\bar{\mathbf{u}}\}$ , а пространство движений, стесненных дополнительными ограничениями в граничных узлах,  $\tilde{\mathbf{W}}_0 = \{\bar{\mathbf{u}} \mid U_i^b[\bar{\mathbf{u}}] = 0\}$ . Очевидно, что  $\tilde{\mathbf{W}}_0 \subset \tilde{\mathbf{W}}$ .

Для дальнейших выкладок используем “слабую” вариационную формулировку задачи о гармонических колебаниях подконструкции под действием обобщенных сил, приложенных во внешних узлах:

$$[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}]_C - \lambda[\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}]_A = \sum_i F_i^b U_i^b[\bar{\mathbf{v}}] + \sum_j F_j^c U_j^c[\bar{\mathbf{v}}] \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}} . \quad (1.5)$$

Полагаем, что собственные формы нормированы по массе, и поэтому условия их ортогональности записываются в виде:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_l]_A &= \delta_{kl} , \\ [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{u}}_l]_C &= \sigma_k \delta_{kl} . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Очевидна также справедливость равенства:

$$[\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_C = \sigma_k [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 . \quad (1.7)$$

Рассмотрим сначала случай, когда решение базовой задачи не имеет нулевых собственных значений. Представим колебания подконструкции в виде модального разложения, содержащего два вида корректирующих членов в соответствии с разными видами внешних перемещений:

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \bar{\mathbf{g}}_i U_i^b + \sum_j \bar{\mathbf{h}}_j F_j^c + \sum_k q_k \bar{\mathbf{u}}_k . \quad (1.8)$$

Здесь каждой граничной степени свободы соответствует корректирующий вектор, представляющий собой ряд относительно частотного параметра  $\lambda$ :

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^l \bar{\mathbf{g}}_i^l , \quad (1.9)$$

коэффициенты которого определяются как решения рекуррентной последовательности статических задач, записанных в слабой вариационной форме следующим образом:

$$\begin{cases} [\bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{v}}]_C = 0 & \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \quad \bar{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} , \quad U_j^b[\bar{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij} , \\ [\bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{v}}]_C = [\bar{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \bar{\mathbf{v}}]_A & \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \quad \bar{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, m-1 . \end{cases} \quad (1.10)$$

Каждой соединительной степени свободы соответствует корректирующий ряд:

$$\bar{\mathbf{h}}_j = \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^l \bar{\mathbf{h}}_j^l , \quad (1.11)$$

и для определения его коэффициентов используется последовательность статических задач:

$$\begin{cases} [\vec{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{v}}]_C = U_j^c[\vec{\mathbf{v}}] & \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \vec{\mathbf{h}}_j^0 \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \\ [\vec{\mathbf{h}}_j^l, \vec{\mathbf{v}}]_C = [\vec{\mathbf{h}}_j^{l-1}, \vec{\mathbf{v}}]_A & \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \vec{\mathbf{h}}_j^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, n-1 . \end{cases} \quad (1.13)$$

Порядком корректирующего ряда будем называть количество его членов (а не максимальную степень) - в нашем случае это числа  $m$  и  $n$  .

Подстановка формулы (1.8) в исходное соотношение (1.5) с учетом формул (1.9) и (1.11) дает выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_i \{ [\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{v}}]_C - \lambda [\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{v}}]_A \} U_i^b + \sum_j \{ [\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{v}}]_C - \lambda [\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{v}}]_A \} F_j^c + \\ & + \sum_k \{ [\vec{\mathbf{u}}_k, \vec{\mathbf{v}}]_C - \lambda [\vec{\mathbf{u}}_k, \vec{\mathbf{v}}]_A \} q_k = \sum_i F_i^b U_i^b[\vec{\mathbf{v}}] + \sum_j F_j^c U_j^c[\vec{\mathbf{v}}] \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}} . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнения (1.10) и (1.12) позволяют вывести соотношения:

$$\left. \begin{aligned} [\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{v}}]_C - \lambda [\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{v}}]_A &= -\lambda^m [\vec{\mathbf{g}}_i^{m-1}, \vec{\mathbf{v}}]_A \\ [\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{v}}]_C - \lambda [\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{v}}]_A &= U_j^c[\vec{\mathbf{v}}] - \lambda^n [\vec{\mathbf{h}}_j^{n-1}, \vec{\mathbf{v}}]_A \end{aligned} \right\} \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 . \quad (1.14)$$

Подставив в формулы (1.14) вместо  $\vec{\mathbf{v}}$  собственные формы  $\vec{\mathbf{u}}_k$  , при помощи соотношения (1.7) получим выражения:

$$[\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{u}}_k]_C - \lambda [\vec{\mathbf{g}}_i, \vec{\mathbf{u}}_k]_A = -\lambda \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{u}}_k]_A , \quad (1.15)$$

$$[\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{u}}_k]_C - \lambda [\vec{\mathbf{h}}_j, \vec{\mathbf{u}}_k]_A = U_j^c[\vec{\mathbf{u}}_k] - \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n U_j^c[\vec{\mathbf{u}}_k] . \quad (1.16)$$

Подстановка в выражение (1.13)  $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}_k$  с учетом условий ортогональности (1.6) и формул (1.15), (1.16) дает выражение для коэффициентов собственных форм:

$$q_k = \sum_i \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{u}}_k]_A U_i^b + \sum_j \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n U_j^c[\vec{\mathbf{u}}_k] F_j^c . \quad (1.17)$$

С учетом полученного результата посредством подстановки  $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{g}}_i^0$  в формулу (1.13) приходим к выражению для обобщенных граничных сил  $F_i^b$  через граничные перемещения  $U_i^b$  и обобщенные соединительные силы  $F_j^c$  .

Подстановка же формулы (1.8) во второе из соотношений (1.3) приводит к выражению для соединительных перемещений  $U_j^c$  через  $U_i^b$  и  $F_j^c$ .

Если ввести обозначения:

$$\mathbf{x}_b = \{U_i^b\} \quad , \quad \mathbf{x}_c = \{U_j^c\} \quad , \quad \mathbf{f}_b = \{F_i^b\} \quad , \quad \mathbf{f}_c = \{F_j^c\} \quad ,$$

то окончательно в векторной форме можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_b \mathbf{x}_b - \mathbf{S}^T \mathbf{f}_c = \mathbf{f}_b \quad , \\ \mathbf{x}_c = \mathbf{S} \mathbf{x}_b + \mathbf{R}_c \mathbf{f}_c \quad , \end{cases} \quad (1.18)$$

где элементы матриц вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} Q_{b,ij}(\lambda) &= [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_C - \lambda [\bar{\mathbf{g}}_j, \bar{\mathbf{g}}_i]_A - \sum_k \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_A [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A \quad , \\ R_{c,ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{h}}_j] + \sum_k \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] \quad , \\ S_{ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j] + \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] = \\ &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j^0] + \lambda [\bar{\mathbf{h}}_i, \bar{\mathbf{g}}_j^0]_A + \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] \quad . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Матрица динамических жесткостей подконструкции, связывающая ее внешние степени свободы с соответствующими обобщенными силами

$$\mathbf{Q}_e(\lambda) \mathbf{x}_e = \mathbf{f}_e \quad ,$$

получается из системы (1.18) в виде:

$$\mathbf{Q}_e(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b + \mathbf{S}^T \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{S} & -\mathbf{S}^T \mathbf{R}_c^{-1} \\ -\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{S} & \mathbf{R}_c^{-1} \end{bmatrix} \quad ,$$

где векторы внешних обобщенных перемещений и сил

$$\mathbf{x}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix} \quad .$$

Аналогично, матрица динамических податливостей в уравнении

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{R}_e(\lambda) \mathbf{f}_e \quad ,$$

имеет вид:

$$\mathbf{R}_e(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b^{-1} & \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} \mathbf{Q}_b^{-1} & \mathbf{R}_c + \mathbf{S} \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{S}^T \end{bmatrix}.$$

Поскольку, как правило, практический интерес представляет лишь нижняя часть спектра, то оказывается возможным усекать соответствующие суммы в указанных формулах, используя лишь ряд низших тонов подконструкции.

Пусть  $\lambda = \lambda_r$  определяет верхнюю границу исследуемого частотного интервала (частоту среза). Тогда, ограничив сумму ряда членами, для которых  $\sigma_k \leq \lambda_r$ , получим, что величина отброшенной части ряда в рассматриваемом частотном интервале оценивается сверху величиной

$$\delta = C_r \left( \frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}} \right)^{\min(m-1, n)},$$

где  $\sigma_r^{\min}$  - минимальная из частот отброшенных собственных форм, а  $\lambda < \sigma_r^{\min}$ . Под знаком степени в этом выражении стоит число, меньшее 1. Отсюда очевидно, что посредством увеличения порядков корректирующих векторов  $m$  и  $n$  можно добиться в заданном частотном интервале сколь угодно высокой точности представления динамических матриц подконструкции, учитывая в разложении лишь те ее тона, частоты которых попадают в этот интервал. При этом получается асимптотическая оценка погрешности редукции рядов в виде:

$$\delta = O \left( \left\{ \frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}} \right\}^{\min(m-1, n)} \right), \quad m, n \rightarrow \infty, \quad (1.20)$$

Формула (1.20) показывает, что погрешность редукции модального разложения в описании колебаний подконструкции в пределах ограниченной частотной области может быть сделана сколь угодно малой путем наращивания корректирующих рядов.

Таким образом, в пределах ограниченного частотного интервала динамическое поведение конструкции может быть описано с любой степенью точ-

ности с использованием лишь тех ее собственных форм, частоты которых не превосходят верхнюю границу этого интервала.

В связи с оценкой погрешности сделаем одно замечание. Выражения (1.15) и (1.16) являются ключевыми для вывода последующих формул и асимптотических оценок погрешности редукции модального разложения. Обращает на себя внимание различие порядков степеней отношения частот - если для соединительных степеней свободы этот порядок равен числу членов корректирующего ряда, то для граничных степеней свободы он на единицу меньше. Очередной (следующий за последним) шаг в цепочке преобразований, приводящих к соотношению (1.15), с использованием формулы (1.7) невозможен, поскольку  $\bar{\mathbf{g}}_i^0 \notin \tilde{W}_0$ .

В сопоставлении между собой метода жестких и метода свободных границ это приводит к различию в порядках асимптотических оценок. А именно, в случае жестких границ при отсутствии соединительных степеней свободы асимптотическая оценка погрешности приобретает вид:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^{m-1}\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

тогда как для свободных границ, когда все внешние степени свободы соединительные, она записывается следующим образом:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^n\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из формальной записи следует, что для достижения сопоставимой точности результатов в методе жестких границ требуется корректирующий ряд на единицу большего порядка, чем в методе свободных границ. На уровне интуитивных представлений это ясно из того, что в методе жестких границ невозможно обойтись без введения в модальное разложение хотя бы одного поправочного члена, поскольку все собственные формы соответствуют нулевым перемещениям в узлах сопряжения подконструкций.



Обобщим теперь полученные соотношения на случай наличия среди решений базовой задачи (1.4) нулевых собственных значений. Выделим в модальном разложении (1.8) соответствующие нулевым тонам степени свободы:

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \bar{\mathbf{g}}_i U_i^b + \sum_j \bar{\mathbf{h}}_j F_j^c + \sum_{k=1}^p q_k \bar{\mathbf{u}}_k + \sum_{k>p} q_k \bar{\mathbf{u}}_k . \quad (1.21)$$

Корректирующие функции в выражении (1.21) определяются как решения следующих последовательностей статических краевых задач, существование и единственность которых можно доказать. Для граничных степеней свободы это последовательность:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{v}}]_C = \sum_{k=1}^p g_{ik} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} , \quad U_j^b[\bar{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij} , \quad [\bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\ \\ [\bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{v}}]_C = [\bar{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, m-1 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad [\bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \end{array} \right. \quad (1.22)$$

где в первой задаче неизвестными являются корректирующие вектора  $\bar{\mathbf{g}}_i^0$  и коэффициенты  $g_{ik}$ . Для соединительных степеней свободы имеем последовательность:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\bar{\mathbf{h}}_j^0, \bar{\mathbf{v}}]_C = U_j^c[\bar{\mathbf{v}}] - \sum_{k=1}^p U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\ \bar{\mathbf{h}}_j^0 \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad [\bar{\mathbf{h}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\ \\ [\bar{\mathbf{h}}_j^l, \bar{\mathbf{v}}]_C = [\bar{\mathbf{h}}_j^{l-1}, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, n-1 ; \\ \bar{\mathbf{h}}_j^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad [\bar{\mathbf{h}}_j^l, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) . \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Повторив проделанные выше преобразования, получим выражения для коэффициентов нулевых собственных форм (для  $k > p$  сохраняются формулы (1.17)):

$$q_k = \frac{1}{\lambda} \sum_i [\bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^b - \frac{1}{\lambda} \sum_j U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] F_j^c , \quad k = 1, \dots, p . \quad (1.24)$$

Формулы для компонент матриц системы уравнений (1.18) приобретают вид:

$$\begin{aligned}
 Q_{b,ij}(\lambda) &= [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_C - \lambda [\bar{\mathbf{g}}_j, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_A + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_C [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C - \\
 &\quad - \sum_{k>p} \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_A [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A, \\
 R_{c,ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{h}}_j] - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>p} \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k], \\
 S_{ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j] + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>p} \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] = \\
 &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j^0] + \lambda [\bar{\mathbf{h}}_i, \bar{\mathbf{g}}_j^0]_A + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>p} \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k].
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

## 1.2. Построение корректирующих векторов в ортогональном подпространстве.

Полученная в предыдущем разделе формула (1.17) для коэффициентов модального разложения, а также формулы для матриц коэффициентов динамического влияния имеют один существенный недостаток. При исследовании ограниченного частотного интервала колебаний системы выражения для составляемых в суммах модальных членов содержат в явном виде порядок корректирующего ряда как показатель степени отношения  $\lambda/\sigma_k$ . На практике это означает, что наращивание длины корректирующего ряда приводит к необходимости заново формировать и сумму модальных членов.

Улучшить ситуацию поможет прием, предложенный в работе [105] применительно к конечномерным упругим системам, который состоит в том, чтобы корректирующие векторы строить в подпространстве, ортогональном удерживаемым в модальном разложении собственным формам подконструкции. Распространить его на рассматриваемый в данной главе общий случай можно следующим образом.

Пусть в усеченном модальном разложении колебаний подконструкции удерживается  $K$  собственных форм, т.е.  $\sigma_r^{\min} = \sigma_{K+1}$ . Выделим их в полной формуле (1.21) как отдельную сумму:

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \bar{\mathbf{g}}_i U_i^b + \sum_j \bar{\mathbf{h}}_j F_j^c + \sum_{k=1}^p q_k \bar{\mathbf{u}}_k + \sum_{k=p+1}^K q_k \bar{\mathbf{u}}_k + \sum_{k>K} q_k \bar{\mathbf{u}}_k . \quad (1.26)$$

Здесь усечение разложения сводится к отбрасыванию последнего слагаемого.

Статические краевые задачи для определения корректирующих функций сформулируем следующим образом. Для граничных степеней свободы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = \sum_{k=1}^K g_{ik} \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} , \quad U_j^b[\bar{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij} , \quad \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, K) ; \\ \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \bar{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, m-1 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \end{array} \right. \quad (1.27)$$

где в первой задаче неизвестными являются корректирующие вектора  $\bar{\mathbf{g}}_i^0$  и коэффициенты  $g_{ik}$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Заметим, что в число удерживаемых  $K$  собственных форм входят и  $p$  форм, соответствующих нулевым собственным частотам (если таковые имеются). Ортогональность корректирующих векторов собственным векторам

$$\left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = p+1, \dots, K) , \quad l = 1, \dots, m-1$$

следует из соотношений (1.27).

Систему уравнений (1.27) можно заменить системой вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = \sum_{k=1}^p g_{ik} \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}} \right]_A + \sum_{k=p+1}^K \left( \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C - \sigma_k \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A \right) \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} , \quad U_j^b[\bar{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij} , \quad \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\ \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \bar{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, m-1 ; \\ \bar{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \end{array} \right. \quad (1.28)$$

где число неизвестных коэффициентов в первой задаче сокращено до  $p$ , а из соотношений (1.28) следуют условия ортогональности:

$$\left[ \bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = p+1, \dots, K) , \quad l = 0, \dots, m-1 .$$

Для соединительных степеней свободы рекуррентная последовательность статических задач имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \bar{\mathbf{h}}_j^0, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = U_j^c[\bar{\mathbf{v}}] - \sum_{k=1}^K U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{W}_0 ; \\ \bar{\mathbf{h}}_j^0 \in \tilde{W}_0, \quad \left[ \bar{\mathbf{h}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\ \left[ \bar{\mathbf{h}}_j^l, \bar{\mathbf{v}} \right]_C = \left[ \bar{\mathbf{h}}_j^{l-1}, \bar{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{W}_0, \quad l = 1, \dots, n-1 ; \\ \bar{\mathbf{h}}_j^l \in \tilde{W}_0, \quad \left[ \bar{\mathbf{h}}_j^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) . \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Из соотношений (1.29) следуют условия ортогональности:

$$\left[ \bar{\mathbf{h}}_j^l, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = p+1, \dots, K), \quad l = 0, \dots, m-1 .$$

Повторив выполненные в предыдущем разделе преобразования, нетрудно получить формулы для коэффициентов модального разложения:

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{1}{\lambda} \sum_i \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C U_i^b - \frac{1}{\lambda} \sum_j U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] F_j^c, \quad k = 1, \dots, p ; \\ q_k &= -\frac{1}{\sigma_k - \lambda} \sum_i \left[ \bar{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C U_i^b + \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \sum_j U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] F_j^c, \quad k = p+1, \dots, K ; \end{aligned} \quad (1.30)$$

причем для  $k > K$  сохраняются формулы (1.17)

Компоненты матриц системы уравнений (1.18) определяются формулами:

$$\begin{aligned} Q_{b,ij}(\lambda) &= \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{g}}_i^0 \right]_C - \lambda \left[ \bar{\mathbf{g}}_j, \bar{\mathbf{g}}_i^0 \right]_A + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0 \right]_C \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C - \\ &\quad - \sum_{k=p+1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0 \right]_C \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C - \sum_{k>K} \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \left[ \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0 \right]_A \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A , \\ R_{c,ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{h}}_j] - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>K} \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] , \\ S_{ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j] + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] - \\ &\quad - \sum_{k=p+1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>K} \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \left[ \bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k \right]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] = \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}
 &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_j^0] + \lambda [\bar{\mathbf{h}}_i, \bar{\mathbf{g}}_j^0]_A + \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] - \\
 &- \sum_{k=p+1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] + \sum_{k>K} \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k].
 \end{aligned}$$

Сопоставление формул (1.30), (1.31) с соответствующими формулами предыдущего раздела показывает, что отбрасываемые при усечении модального разложения члены сохранили прежние выражения, тогда как выражения коэффициентов удерживаемых модальных составляющих более не зависят от порядков  $m$  и  $n$  корректирующих рядов  $\bar{\mathbf{g}}_i(\lambda)$  и  $\bar{\mathbf{h}}_j(\lambda)$ . Это означает, что сохраняются справедливыми все приведенные в предыдущем разделе рассуждения о порядке возникающей при этом погрешности и сходимости результатов к точному решению.

В заключение раздела отметим, что формулы для вычисления корректирующих векторов (1.28), (1.29) можно заменить системами уравнений, в которых ортогонализация решения к удерживаемым в модальном разложении собственным векторам, имеющим ненулевые собственные значения, выделена в самостоятельную операцию:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &[\hat{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{v}}]_C = \sum_{k=1}^p g_{ik} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\
 &\hat{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} , \quad U_j^b[\hat{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij} , \quad [\hat{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\
 &\bar{\mathbf{g}}_i^0 = \hat{\mathbf{g}}_i^0 - \sum_{k=p+1}^K [\hat{\mathbf{g}}_i^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_A \bar{\mathbf{u}}_k ; \\
 &[\bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{v}}]_C = [\bar{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \bar{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, m-1 ; \\
 &\bar{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad [\bar{\mathbf{g}}_i^l, \bar{\mathbf{u}}_k]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ;
 \end{aligned} \right. \quad (1.28a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \hat{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{v}} \right]_C = U_j^c[\vec{\mathbf{v}}] - \sum_{k=1}^p U_j^c[\vec{\mathbf{u}}_k] [\vec{\mathbf{u}}_k, \vec{\mathbf{v}}]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 ; \\ \hat{\mathbf{h}}_j^0 \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad \left[ \hat{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) ; \\ \vec{\mathbf{h}}_j^0 = \hat{\mathbf{h}}_j^0 - \sum_{k=p+1}^K \left[ \hat{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{u}}_k \right]_A \vec{\mathbf{u}}_k ; \\ \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^l, \vec{\mathbf{v}} \right]_C = \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^{l-1}, \vec{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad l = 1, \dots, n-1 ; \\ \vec{\mathbf{h}}_j^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0 , \quad \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^l, \vec{\mathbf{u}}_k \right]_A = 0 \quad (k = 1, \dots, p) . \end{array} \right. \quad (1.29a)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае также получаются формулы (1.30), (1.31).

### 1.3. Основные теоремы метода корректирующих рядов.

Приведенные выше рассуждения и выкладки позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Гармонический отклик упругой конструкции на систему дискретно приложенных (в узлах, называемых внешними) гармонических сил может быть точно представлен в ограниченном частотном интервале  $[0, \lambda_r]$  в виде модального разложения*

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \bar{\mathbf{G}}_i(\lambda) U_i^b + \sum_j \bar{\mathbf{H}}_j(\lambda) F_j^c + \sum_{k=1}^K q_k(\lambda) \bar{\mathbf{u}}_k, \quad (1.32)$$

в котором присутствуют лишь собственные формы, частоты которых лежат в указанном интервале, определенные при условии закрепления граничных внешних степеней свободы. Коэффициенты  $q_k$  определяются соотношениями (1.30). Корректирующие векторы являются равномерно сходящимися на интервале  $[0, \lambda_r]$  степенными рядами относительно частотного параметра  $\lambda$ :

$$\bar{\mathbf{G}}_i(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \bar{\mathbf{g}}_i^l, \quad (1.33)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_j(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \bar{\mathbf{h}}_j^l, \quad (1.34)$$

коэффициенты которых вычисляются как решения последовательностей статических задач (1.28) и (1.29).

Строгое доказательство этой теоремы очевидным образом строится на основе свойств положительной определенности и самосопряженности операторов краевой задачи в соответствующих гильбертовых пространствах с использованием равенства Парсеваля и теоремы Рисса-Фишера.

Принципиальное значение этой теоремы состоит в том, что при исследовании гармонических колебаний подконструкции в ограниченном частотном



интервале можно перейти от ряда, содержащего бесконечное количество модальных членов, к сумме их конечного набора и сходящегося степенного ряда. При проведении практических исследований здесь требуется лишь усекать этот степенной ряд, руководствуясь требованиями точности получаемого результата. Априорная оценка погрешности вида (1.20) позволяет получать апостериорные оценки погрешности при помощи последовательно уточняемых расчетов.

Используя разложение (1.32), применительно к анализу поведения подконструкции получаем выражения для коэффициентов динамического влияния:

$$\begin{aligned} Q_{b,ij}(\lambda) &= [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_C - \lambda [\bar{\mathbf{G}}_j(\lambda), \bar{\mathbf{g}}_i^0]_A - \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} [\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{g}}_i^0]_C [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C, \\ R_{c,ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{H}}_j(\lambda)] + \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] U_j^c[\bar{\mathbf{u}}_k], \\ S_{ij}(\lambda) &= U_i^c[\bar{\mathbf{G}}_j(\lambda)] - \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k] = \\ &= U_i^c[\bar{\mathbf{g}}_i^0] + \lambda [\bar{\mathbf{H}}_j(\lambda), \bar{\mathbf{g}}_i^0]_A - \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sigma_k - \lambda} [\bar{\mathbf{g}}_j^0, \bar{\mathbf{u}}_k]_C U_i^c[\bar{\mathbf{u}}_k]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Справедливость полученных формул сохраняется, если в модальных суммах отброшены все члены, которым соответствуют собственные частоты, не попадающие в интервал  $[0, \lambda_r]$ .

Часто при проведении исследования динамических свойств сложного объекта возникает потребность в описании гармонического отклика упругой системы в ограниченном частотном диапазоне, имеющем положительную нижнюю границу. Положительный ответ на вопрос о возможности отбрасывания низших тонов с собственными частотами, не попадающими в заданный интервал частот, дает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Существует значение  $\lambda_a \in (\lambda_0, \lambda_r)$  такое, что гармонический отклик упругой конструкции на систему дискретно приложенных (в узлах, называемых внешними) гармонических сил может быть точно представ-*

лен в ограниченном частотном интервале  $[\lambda_0, \lambda_r]$  в виде модального разложения

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_i \vec{\mathbf{G}}_i(\lambda - \lambda_a) U_i^b + \sum_j \vec{\mathbf{H}}_j(\lambda - \lambda_a) F_j^c + \sum_{k=L}^K q_k(\lambda) \vec{\mathbf{u}}_k, \quad (1.36)$$

в котором присутствуют лишь собственные формы, частоты которых лежат в указанном интервале (т.е.  $\sigma_{L-1} < \lambda_0$ ,  $\sigma_{K+1} > \lambda_r$ ), определенные при условии закрепления граничных внешних степеней свободы, причем  $\lambda_a$  не является собственной частотой. Коэффициенты  $q_k$  определяются соотношениями (1.30). Корректирующие векторы являются равномерно сходящимися на интервале  $[\lambda_0, \lambda_r]$  степенными рядами относительно смещенного частотного параметра  $\lambda - \lambda_a$ :

$$\vec{\mathbf{G}}_i(\lambda - \lambda_a) = \sum_{l=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_a)^l \vec{\mathbf{g}}_i^l, \quad (1.37)$$

$$\vec{\mathbf{H}}_j(\lambda - \lambda_a) = \sum_{l=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_a)^l \vec{\mathbf{h}}_j^l, \quad (1.38)$$

коэффициенты которых вычисляются как решения последовательностей статических задач:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{v}} \right]_C - \lambda_a \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{v}} \right]_A = \sum_{k=L}^K \left( \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{u}}_k \right]_C - \sigma_k \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^0, \vec{\mathbf{u}}_k \right]_A \right) \left[ \vec{\mathbf{u}}_k, \vec{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0; \\ & \vec{\mathbf{g}}_i^0 \in \tilde{\mathbf{W}} \quad U_j^b[\vec{\mathbf{g}}_i^0] = \delta_{ij}; \\ & \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^l, \vec{\mathbf{v}} \right]_C - \lambda_a \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^l, \vec{\mathbf{v}} \right]_A = \left[ \vec{\mathbf{g}}_i^{l-1}, \vec{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0; \quad \vec{\mathbf{g}}_i^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0, \quad l = 1, \dots, \infty; \end{aligned} \right. \quad (1.39)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{v}} \right]_C - \lambda_a \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^0, \vec{\mathbf{v}} \right]_A = U_j^c[\vec{\mathbf{v}}] - \sum_{k=L}^K U_j^c[\vec{\mathbf{u}}_k] \left[ \vec{\mathbf{u}}_k, \vec{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0; \quad \vec{\mathbf{h}}_j^0 \in \tilde{\mathbf{W}}_0, \\ & \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^l, \vec{\mathbf{v}} \right]_C - \lambda_a \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^l, \vec{\mathbf{v}} \right]_A = \left[ \vec{\mathbf{h}}_j^{l-1}, \vec{\mathbf{v}} \right]_A \quad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbf{W}}_0, \quad \vec{\mathbf{h}}_j^l \in \tilde{\mathbf{W}}_0; \quad l = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \right. \quad (1.40)$$

Возможность выбора  $\lambda_a \in (\lambda_0, \lambda_r)$ , не совпадающего с собственной частотой, обусловлено конечностью множества собственных частот на ограниченном интервале. При этом необходимо, чтобы на всем интервале выполня-

лось условие  $|\lambda - \lambda_a| < |\lambda - \sigma_k|$  для  $k < L$  и  $k > K$ . Тогда справедлива асимптотическая оценка погрешности усечения степенных рядов

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda - \lambda_a}{\sigma_r^a - \lambda_a}\right\}^{\min(m-1, n)}\right), \quad m, n \rightarrow \infty, \quad (1.41)$$

где  $\sigma_r^a$  - наиболее близкая к  $\lambda_a$  из частот отброшенных собственных форм, а  $m$  и  $n$  - количество членов, удержанных в корректирующих рядах для граничных и соединительных степеней свободы подконструкции.

#### 1.4. Синтез изгибных колебаний однородных стержней.

В качестве примера применения сформулированного подхода к аналитическим моделям рассмотрим изгибные колебания стержня. Выделим в качестве подконструкции прямолинейный тонкий стержень длины  $L$  (рис. 1.2), внешними узлами которого являются его концы.



Рис. 1.2.

Чтобы соединение стержня с системой могло осуществляться как жестко, так и шарнирно, внешние степени свободы включают прогибы и повороты в узлах. Обозначив  $E$ ,  $\rho$  - модуль упругости и плотность материала,  $F$ ,  $I$  - площадь и момент инерции поперечного сечения, запишем уравнение изгибных колебаний:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) .$$

Постановка базовой задачи для построения модального разложения колебаний определяется условиями закрепления внешних степеней свободы. При построении аналитических соотношений целесообразно выбирать ее таким образом, чтобы выражения для собственных частот и форм получались наиболее простыми. В данном случае этому условию соответствует шарнирное закреп-

ление концов стержня. Тогда к граничным степеням свободы следует отнести прогибы концов стержня  $w$ , а к соединительным - их повороты  $\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$ :

$$\mathbf{x}_b = \begin{Bmatrix} w(0) \\ w(L) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{x}_c = \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(L) \end{Bmatrix}.$$

Собственные частоты и формы колебаний такой подконструкции определяются формулами (формы нормированы по массе):

$$\omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \beta_k^2, \quad w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho FL}} \sin \beta_k x, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рекуррентные последовательности краевых задач для определения корректирующих функций (1.10) и (1.12) переписываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \frac{\partial^4 g_1^0}{\partial x^4} = 0, \quad g_1^0(0) = 1, \quad g_1^0(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_1^0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 g_1^0}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \\ EI \frac{\partial^4 g_1^l}{\partial x^4} = \rho F g_1^{l-1}, \quad g_1^l(0) = g_1^l(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_1^l}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 g_1^l}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad l = 1, \dots, m-1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \frac{\partial^4 g_2^0}{\partial x^4} = 0, \quad g_2^0(0) = 0, \quad g_2^0(L) = 1, \quad \frac{\partial^2 g_2^0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 g_2^0}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \\ EI \frac{\partial^4 g_2^l}{\partial x^4} = \rho F g_2^{l-1}, \quad g_2^l(0) = g_2^l(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_2^l}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 g_2^l}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad l = 1, \dots, m-1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \frac{\partial^4 h_1^0}{\partial x^4} = 0, \quad h_1^0(0) = h_1^0(L) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 h_1^0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 1, \quad \frac{\partial^2 h_1^0}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \\ EI \frac{\partial^4 h_1^l}{\partial x^4} = \rho F h_1^{l-1}, \quad h_1^l(0) = h_1^l(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 h_1^l}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 h_1^l}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad l = 1, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI \frac{\partial^4 h_2^0}{\partial x^4} = 0, \quad h_2^0(0) = h_2^0(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 h_2^0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 h_2^0}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = -1, \\ EI \frac{\partial^4 h_2^l}{\partial x^4} = \rho F h_2^{l-1}, \quad h_2^l(0) = h_2^l(L) = 0, \quad \frac{\partial^2 h_2^l}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 h_2^l}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad l = 1, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Решениями этих краевых задач являются полиномы:

$$g_i^l(\xi) = \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+1} C_{i,k}^l \xi^k, \quad h_i^l(\xi) = \gamma_0 \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+3} D_{i,k}^l \xi^k,$$

где  $\xi = x/L$ ,  $\gamma = \rho FL^4/EI$ ,  $\gamma_0 = L^2/EI$ , а коэффициенты определяются рекуррентным образом по формулам:

$$C_{i,k}^l = \frac{C_{i,k-4}^{l-1}}{k(k-1)(k-2)(k-3)} \quad (k = 4, \dots, 4l+1),$$

$$C_{i,0}^l = C_{i,2}^l = 0, \quad C_{i,3}^l = -\frac{1}{6} \sum_{k=4}^{4l+1} k(k-1)C_{i,k}^l, \quad C_{i,1}^l = -\sum_{k=3}^{4l+1} C_{i,k}^l;$$

при начальных условиях 
$$\begin{cases} C_{1,0}^0 = 1, & C_{1,1}^0 = -1, \\ C_{2,0}^0 = 0, & C_{2,1}^0 = 1, \end{cases}$$

$$D_{i,k}^l = \frac{D_{i,k-4}^{l-1}}{k(k-1)(k-2)(k-3)} \quad (k = 4, \dots, 4l+3),$$

$$D_{i,0}^l = D_{i,2}^l = 0, \quad D_{i,3}^l = -\frac{1}{6} \sum_{k=4}^{4l+3} k(k-1)D_{i,k}^l, \quad D_{i,1}^l = -\sum_{k=3}^{4l+3} D_{i,k}^l;$$

при начальных условиях 
$$\begin{cases} D_{1,0}^0 = 0, & D_{1,1}^0 = -1/3, & D_{1,2}^0 = 1/2, & D_{1,3}^0 = -1/6, \\ D_{2,0}^0 = 0, & D_{2,1}^0 = 1/6, & D_{2,2}^0 = 0, & D_{2,3}^0 = -1/6. \end{cases}$$

Вычисляя интегралы в выражениях для энергетических произведений:

$$[w_1, w_2]_A = \int_0^L \rho F w_1(x) w_2(x) dx, \quad [w_1, w_2]_C = \int_0^L EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} dx,$$

и подставляя их в выражения (1.19), получим простые формулы для компонент матриц:

$$\begin{aligned}
Q_{b,11}(\lambda) &= -\lambda \frac{M}{3} - M \sum_{l=1}^{m-1} \lambda^{l+1} \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+1} \frac{C_{1,k}^l}{(k+1)(k+2)} - 2M \sum_k \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \frac{1}{(k\pi)^2} ; \\
Q_{b,12}(\lambda) &= -\lambda \frac{M}{6} - M \sum_{l=1}^{m-1} \lambda^{l+1} \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+1} \frac{C_{2,k}^l}{(k+1)(k+2)} - 2M \sum_k \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} ; \\
Q_{b,21}(\lambda) &= -\lambda \frac{M}{6} - M \sum_{l=1}^{m-1} \lambda^{l+1} \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+1} \frac{C_{1,k}^l}{k+2} - 2M \sum_k \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k\pi)^2} ; \\
Q_{b,22}(\lambda) &= -\lambda \frac{M}{3} - M \sum_{l=1}^{m-1} \lambda^{l+1} \gamma^l \sum_{k=0}^{4l+1} \frac{C_{2,k}^l}{k+2} - 2M \sum_k \frac{\lambda^2}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} \frac{1}{(k\pi)^2} ; \\
R_{c,11}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^l \gamma_0 \gamma^l D_{1,1}^l + \frac{2}{ML^2} \sum_k \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n (k\pi)^2 ; \\
R_{c,12}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^l \gamma_0 \gamma^l D_{2,1}^l + \frac{2}{ML^2} \sum_k \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n (-1)^k (k\pi)^2 ; \\
R_{c,21}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^l \gamma_0 \gamma^l \sum_{k=1}^{4l+3} k D_{1,k}^l + \frac{2}{ML^2} \sum_k \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n (-1)^k (k\pi)^2 ; \\
R_{c,22}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^l \gamma_0 \gamma^l \sum_{k=1}^{4l+3} k D_{2,k}^l + \frac{2}{ML^2} \sum_k \frac{1}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^n (k\pi)^2 ; \\
S_{11}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^l \gamma^l C_{1,1}^l - \frac{2}{L} \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} ; \\
S_{12}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^l \gamma^l C_{2,1}^l + \frac{2}{L} \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} (-1)^k ; \\
S_{21}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^l \gamma^l \sum_{k=1}^{4l+1} k C_{1,k}^l + \frac{2}{L} \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} (-1)^{k+1} ; \\
S_{22}(\lambda) &= -\frac{1}{L} \sum_{l=0}^{m-1} \lambda^l \gamma^l \sum_{k=1}^{4l+1} k C_{2,k}^l + \frac{2}{L} \sum_k \frac{\lambda}{\sigma_k - \lambda} \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^{m-1} ;
\end{aligned}$$

где  $M = \rho FL$  - масса стержня.

Пример расчетов с использованием полученных формул рассмотрен в разделе 2.5.

## Глава 2. СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОДКОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОРРЕКТИРУЮЩИХ РЯДОВ.

В данной главе методика синтеза динамических характеристик с использованием корректирующих рядов развивается применительно к дискретным моделям подконструкций, поведение которых описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Дискретность модели может быть основана на исходной схеме идеализации механической системы, однако в настоящее время в расчетные схемы, как правило, включаются конечноэлементные модели подконструкций. В этом случае исходная континуальная математическая модель подвергается дискретизации с использованием различных схем метода конечных элементов.

При объединении в сложную систему дискретных подсистем нет необходимости, как в предыдущей главе, оговаривать условие дискретности соединения подконструкций - оно выполняется автоматически. Для дальнейших рассуждений полностью сохраняется введенная в предыдущей главе терминология.

Все соотношения предыдущей главы выведены в форме, позволяющей непосредственно применить к ним процедуру конечноэлементной дискретизации и получить результирующие формулы для дискретных моделей подконструкций. Тем не менее, были проведены исследования специально для данного класса систем, в процессе которых разработаны специфические методы и алгоритмы, эффективно реализуемые численно на современной вычислительной технике.

В качестве дополнительного довода в пользу отдельного рассмотрения дискретных моделей подконструкций можно привести интуитивные соображения о том, что методическая погрешность конечноэлементной дискретизации



ции, наложенная на погрешность модального разложения, может оказать негативное влияние на свойства сходимости корректирующих рядов, сформулированные в предыдущей главе. Этот вопрос требует отдельного исследования, тогда как сходимость корректирующих рядов для конечноэлементных моделей обеспечивает получение точного результата для конечноэлементной модели сложной системы в целом. В этом случае соответствие численного решения точному обусловлено лишь адекватностью примененной процедуры метода конечных элементов.

## 2.1. Модальный синтез дискретных моделей подконструкций методом жестких границ.

### 2.1.1. Общая схема построения корректирующих рядов и синтеза подконструкций.

Опишем схему модального синтеза подконструкций, представленных своими конечноэлементными моделями, с использованием корректирующих рядов в варианте жестких границ.

Конечноэлементные уравнения стационарных одночастотных колебаний подконструкции в составе сложной конструкции запишем без учета демпфирования в виде:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

где  $\lambda = \omega^2$  - квадрат круговой частоты,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  - матрицы жесткостей и масс.

В векторе дискретных параметров  $\mathbf{x}$  выделим "внешние" или граничные параметры  $\mathbf{x}_b$ , по которым осуществляется включение данной подконструкции в сложную конструкцию, и "внутренние" параметры  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_0 \end{Bmatrix},$$

размерность которых  $n_b$  и  $n_0$ , причем  $n = n_b + n_0$  - полное число степеней свободы дискретной модели. Соответственно разобьем на подматрицы матрицу жесткостей и матрицу масс:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix}.$$

Вектор  $\mathbf{f}$ , содержащий амплитуды силовых воздействий на подконструкцию со стороны остальной части конструкции, тогда имеет вид:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}.$$

Определим "базовую" задачу как задачу с фиксированными внешними степенями свободы:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{x}_0 = \sigma \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_0, \quad (2.2)$$

решением которой является набор собственных значений и векторов  $\{\sigma_k, \mathbf{x}_{0k}\}$ , удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{0l} &= \mu_k \delta_{kl}, \\ \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{x}_{0l} &= \sigma_k \mu_k \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\delta_{kl}$  - символ Кронекера,  $\mu_k$  - обобщенные массы.

Движение подконструкции представим в виде разложения в ряд по собственным векторам базовой задачи с добавлением  $n_b$  корректирующих векторов с варьируемыми коэффициентами, объединенными в вектор  $\mathbf{c}$  размерности  $n_b$ :

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{G}} \mathbf{c} + \sum_k q_k \mathbf{x}_k, \quad (2.4)$$

где матрица корректирующих векторов  $\overline{\mathbf{G}}$  имеет размерность  $n \times n_b$ , а недостающие компоненты собственных векторов дополнены нулями:

$$\mathbf{x}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{0k} \end{Bmatrix}.$$

Представим матрицу  $\overline{\mathbf{G}}$  в виде, позволяющем непосредственно выделить в разложении внешние степени свободы:

$$\overline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{I}_b$  - единичная матрица  $n_b \times n_b$ . Очевидно, что при таком выборе вида матрицы коэффициенты в векторе  $\mathbf{c}$  всегда совпадают с компонентами вектора граничных степеней свободы:

$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_b.$$

Матрицу  $\mathbf{G}$  построим в виде полиномиального ряда по параметру частоты  $\lambda$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \lambda \mathbf{G}_1 + \dots + \lambda^{m-1} \mathbf{G}_{m-1}, \quad (2.6)$$

состоящего из  $m$  членов, вычисляемых на основе рекуррентной последовательности:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}^* = \mathbf{0}, \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B} = \mathbf{A}^*(\lambda)$  - матричная функция частотного параметра. В дальнейшем в обозначениях для краткости будем подразумевать, если не оговорено иного, что  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*(\lambda)$ .

Здесь мы предполагаем, что матрица  $\mathbf{K}_0$  невырожденная, т.е. базовая задача не имеет нулевых собственных значений (этого всегда можно добиться, скорректировав условия закрепления, т.е. дополнив граничные переменные фиктивными, которые при синтезе просто "освобождаются", не войдя в соединение ни с одной из остальных подконструкций).

Система (2.7) представляет не статическую, а квазистатическую задачу, что связано с недиагональностью матрицы  $\mathbf{M}$  (точнее, с тем, что  $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ ). Ее решение для каждого значения частоты может быть сведено к комбинации двух статических решений. Для этого последовательность (2.7) достаточно разбить очевидным образом на две последовательности, не содержащие частотного параметра, представив матрицы в виде:

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^A - \lambda \mathbf{G}_i^B.$$

В дальнейшем для краткости будем называть  $\mathbf{G}$  матрицей корректирующих векторов  $m$ -го порядка, а матрицы  $\mathbf{G}_i$ ,  $\mathbf{G}_i^A$ ,  $\mathbf{G}_i^B$  элементарными матрицами корректирующих векторов ( $i$ -я элементарная матрица).

Подставив теперь разложение (2.4) в (2.1), с учетом (2.5) - (2.7) получим уравнения:

$$\mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}_b + (\mathbf{K}_b - \lambda\mathbf{M}_b)\mathbf{x}_b + \sum_k q_k \mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{x}_{0k} = \mathbf{f}_b, \quad (2.8)$$

$$\sum_k q_k (\mathbf{K}_0 - \lambda\mathbf{M}_0)\mathbf{x}_{0k} = \lambda^m \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} \mathbf{x}_b. \quad (2.9)$$

Умножая (2.9) слева поочередно на  $\mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}}$  с учетом соотношений ортогональности собственных векторов (2.3), получаем уравнения:

$$q_k (\sigma_k - \lambda) \mu_k = \lambda^m \mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} \mathbf{x}_b. \quad (2.10)$$

Из (2.6), (2.7) получаем соотношение:

$$\mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} = -\frac{1}{\sigma_k^m} \mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^*. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получаем выражение для коэффициентов  $q_k$ :

$$q_k = -\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^m \frac{1}{\mu_k (\sigma_k - \lambda)} \mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^* \mathbf{x}_b. \quad (2.12)$$

Используя (2.8) и (2.12), получаем уравнение для вектора граничных параметров  $\mathbf{x}_b$ :

$$\mathbf{Q}(\lambda)\mathbf{x}_b = \mathbf{f}_b, \quad (2.13)$$

где матрица  $\mathbf{Q}(\lambda)$  размерности  $n_b \times n_b$  имеет вид:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{G} + \mathbf{K}_b - \lambda\mathbf{M}_b - \sum_k \left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^m \frac{1}{\mu_k (\sigma_k - \lambda)} \mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^*. \quad (2.14)$$

Эта матрица является матрицей динамических жесткостей подконструкции для заданного значения частоты.

Вычислив из уравнения (2.13) вектор  $\mathbf{x}_b$ , можно получить выражение для полного вектора отклика подконструкции:

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_b \\ \left[ \mathbf{G} - \sum_k \left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^m \frac{1}{\mu_k (\sigma_k - \lambda)} \mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^* \right] \mathbf{x}_b \end{array} \right\}. \quad (2.15)$$

Преимущество использования корректирующей матрицы  $\mathbf{G}$  в виде (2.6) можно оценить, приняв в выкладках  $m = 0$ , в результате чего для  $\mathbf{Q}(\lambda)$  получится выражение:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b - \sum_k \frac{1}{\mu_k(\sigma_k - \lambda)} \mathbf{A}^{*T} \mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^*, \quad (2.16)$$

а для вектора отклика подконструкции получится формула:

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ -\sum_k \frac{1}{\mu_k(\sigma_k - \lambda)} \mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \mathbf{x}_b \right\}. \quad (2.17)$$

Ввиду конечности содержащихся в (2.14) - (2.17) сумм, можно сделать вывод о том, что при учете в этих суммах всех тонов базовой задачи введение корректирующей матрицы не дает каких-либо преимуществ при анализе составной конструкции. Однако при расчетах по методу конечных элементов формируются матрицы размерности порядка сотен, тысяч или десятков тысяч, что делает неосуществимым вычисление всех собственных форм базовой задачи для подконструкции.

Легко видеть, что отбрасывание последних членов рядов в формулах (2.14), (2.15) при относительно небольших значениях частоты приводит к существенно меньшей погрешности, чем в формулах (2.16), (2.17), благодаря появляющимся в членах ряда множителям  $(\lambda/\sigma_k)^m$ , которые с увеличением номера тона  $k$  уменьшаются и становятся меньше 1 для  $\sigma_k > \lambda$ . Увеличение порядка матрицы корректирующих векторов  $m$  существенно снижает потенциальный вклад отбрасываемых членов ряда, повышая тем самым точность представления матрицы динамических жесткостей подконструкции, полностью определяющей ее поведение в составе сложной системы.

Если частотная область колебаний составной конструкции ограничена сверху, то ряды в формулах (2.14), (2.15) можно редуцировать по признаку превышения собственными частотами этой обусловленной частоты среза.

Асимптотическая оценка погрешности в этом случае может быть записана в виде:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^m\right), \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

где  $\sigma_r^{\min}$  - минимальная из частот отброшенных собственных форм.

Рассмотрим теперь процедуру объединения или синтеза данных о решении базовых задач для подконструкций при исследовании динамических свойств составленной из них сложной конструкции.

Предполагается, что подконструкции представлены своими конечноэлементными моделями, причем соединение подконструкций математически реализуется через совпадение соответствующих степеней свободы. Для каждой из подконструкций считаем известными ряд низших собственных частот и форм колебаний при закреплении ее по тем степеням свободы, по которым осуществляется ее включение в составную конструкцию (не исключаются и дополнительные условия закрепления в соответствии с постановкой задачи для составной конструкции), т.е. известно частичное решение базовой задачи (2.2).

Вид полученной финальной формулы (2.13) подсказывает в качестве наиболее удобного способа объединения подсистем метод динамических жесткостей. Для дальнейших выкладок введем идентификацию подконструкций с помощью верхнего индекса в скобках. Обозначим  $\mathbf{x}_e$  - вектор всех степеней свободы, по которым осуществляется соединение подконструкций (сборка может осуществляться посредством соединения в нескольких узлах, и соответственно, в вектор  $\mathbf{x}_e$  включаются относящиеся к ним степени свободы). Локальные же вектора "внешних" степеней свободы для  $i$ -й подконструкции обозначим  $\mathbf{x}_b^{(i)}$ .

Связь между векторами  $\mathbf{x}_b^{(i)}$  и вектором  $\mathbf{x}_e$  можно записать в матричной форме с помощью выражений:

$$\mathbf{x}_b^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)} \mathbf{x}_e, \quad (2.19)$$

представляющих собой кинематические условия объединения подконструкций.

Динамические же условия состоят во взаимном уравнивании обобщенных сил, действующих со стороны каждой из подконструкций, и внешних гармонических воздействий (в предположении, что силы приложены в точках сопряжения подконструкций):

$$\sum_i \mathbf{f}^{(i)} = \mathbf{f} \quad , \quad (2.20)$$

причем вектор  $\mathbf{f}^{(i)}$  состоит из преобразованных соответствующим образом компонент вектора  $\mathbf{f}_b^{(i)}$ , что с учетом введенных обозначений можно записать в виде:

$$\mathbf{f}^{(i)} = \mathbf{L}^{(i)T} \mathbf{f}_b^{(i)} \quad . \quad (2.21)$$

Подставляя в (2.20) соотношения (2.13), (2.19) и (2.21), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{Q}(\omega^2) \mathbf{x}_e = \mathbf{f} \quad , \quad (2.22)$$

в которой матрица динамических жесткостей составной конструкции формируется из матриц динамических жесткостей подконструкций по формуле:

$$\mathbf{Q}(\omega^2) = \sum_i \mathbf{L}^{(i)T} \mathbf{Q}^{(i)}(\omega^2) \mathbf{L}^{(i)} \quad . \quad (2.23)$$

Легко видеть, что матрица  $\mathbf{Q}(\omega^2)$  получается путем разнесения компонент матриц  $\mathbf{Q}^{(i)}(\omega^2)$  соответственно включению компонент векторов  $\mathbf{x}_b^{(i)}$  в вектор  $\mathbf{x}_e$  и последующего их суммирования, т.е. соотношение (2.23) является формальной записью метода перемещений.

Характеристическое уравнение для определения собственных частот колебаний составной конструкции имеет вид:

$$\det \mathbf{Q}(\omega^2) = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Для эффективной организации исследования составной конструкции методом синтеза должны быть проведены предварительные исследования спектров составляющих ее подконструкций. С учетом установленной верхней гра-



ницы частотного интервала для каждой подконструкции выделяются тона, которые необходимо удерживать в модальном разложении, и формируется база данных, содержащая соответствующие собственные частоты и формы и рассчитанные путем решения последовательности статических задач матрицы корректирующих векторов, а также дополнительная информация, необходимая для формирования матрицы динамических жесткостей.

Для рассмотренной выше схемы структура базы данных по подконструкции такова:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}, k = 1, \dots, N_{eig}$  ;
- 2) матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}_b, \mathbf{M}_b$  ;
- 3) матрицы корректирующих векторов:  $\{\mathbf{G}_k^A, \mathbf{G}_k^B\}, k = 0, \dots, m-1$  .

Рассмотренный в данном разделе подход, при котором матрица корректирующих векторов линейно зависит от частоты и формируется из двух наборов элементарных матриц, удобен ввиду полной симметричности получаемых соотношений. Назовем этот подход методом двойных корректирующих векторов. Далее будет рассмотрен способ, позволяющий ограничиться одним набором корректирующих векторов, хотя и достигается это ценой некоторой потери точности при синтезе редуцированных модальных разложений.

Отметим, что наибольшую эффективность описанная методика может показать при рассмотрении составных конструкций, образованных путем соединения модулей в относительно небольшом числе узлов. В таком случае небольшая размерность матрицы системы позволяет быстро проводить исследование спектра составной конструкции или строить частотные характеристики.

В качестве примера рассмотрим свободные изгибные колебания консольной балки длиной  $L = 1$  м, составленной из двух стержней длиной 0,6 м (подконструкция 1) и 0,4 м (подконструкция 2), причем длинная часть прилежит к закрепленной стороне балки. Полагалось, что балка имеет квадратное

сечение  $0,01 \times 0,01$  м и изготовлена из алюминия (модуль упругости  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>).

Исследование проводилось для конечноэлементной модели, составленной из 20 балочных элементов одинаковой длины. Синтез проводился для подконструкций, моделируемых 12 и 8 элементами соответственно.

В таблице 1 приведены значения 5 низших собственных частот изгибных колебаний балки, вычисленных по методу конечных элементов, в сопоставлении с их точными величинами.

Таблица 1

№ тона	МКЭ $f$ , Гц	Точное решение $f$ , Гц
1	8,225218	8,225218
2	51,546667	51,546559
3	144,334221	144,331858
4	282,850505	282,832837
5	467,622150	467,542946

Таблица 2 содержит вычисленные по МКЭ значения низших собственных частот подконструкций при условии их закрепления в точке соединения. Очевидно, что это соответствует жесткой заделке 1-й балки с обеих сторон и консольному закреплению 2-й балки. Получаемые при синтезе собственные частоты должны соответствовать первому столбцу таблицы 1, поскольку объединяются конечноэлементные модели подконструкций.

Таблица 2

№ тона	Подконструкции	
	№ 1 : $L = 0,6$ м	№ 2 : $L = 0,4$ м
1	145,388874	51,407717
2	400,813915	322,191755
3	786,033563	902,622792

Для подконструкций были сформированы базы данных, содержащие информацию об их собственных и корректирующих векторах. Расчеты выполня-

лись с выборкой из баз данных необходимого количества векторов обоих типов, что позволило провести исследование, результаты которого представлены в таблице 3.

Таблица 3

$m$	Номер тона колебаний				
	1	2	3	4	5
Вариант: 1 тон + 1 тон (до 144 Гц)					
0	49,680116	142,200200			
1	9,194399	62,669109	242,443198		
2	8,225528	51,627258	148,447460	393,110553	830,104017
3	8,225218	51,548212	145,049599	320,154050	795,462155
4	8,225218	51,546701	144,473106	300,602690	790,503453
5	8,225218	51,546668	144,361833	292,689789	789,777939
Вариант: 2 тона + 2 тона (до 400 Гц)					
0	49,459125	141,777346	309,938094	391,939718	-
1	8,598521	55,961210	154,060006	297,292923	632,497824
2	8,225236	51,554276	144,448245	283,833190	480,218201
3	8,225218	51,546693	144,336929	282,961221	470,651174
4	8,225218	51,546667	144,334292	282,864254	468,497057
5	8,225218	51,546667	144,334223	282,852267	467,891845
Вариант: 3 тона + 3 тона (до 902 Гц)					
0	49,177779	141,318442	308,118463	390,978360	762,937569
1	8,422511	53,870367	148,517902	289,582184	504,021033
2	8,225221	51,548161	144,350492	283,015060	469,109550
3	8,225218	51,546669	144,334336	282,856991	467,749010
4	8,225218	51,546667	144,334222	282,850792	467,635407
5	8,225218	51,546667	144,334221	282,850525	467,623763
Значения для полной конечноэлементной модели					
	8,225218	51,546667	144,334221	282,850505	467,622150

Корни характеристического уравнения (2.24) вычислялись при различных значениях порядка корректирующих рядов  $m$ . При этом рассматривались варианты, когда в разложениях движения подконструкций учитывается различное количество низших тонов, чем определяется верхняя граница частотного интервала, в котором гарантируется сходимость решения с увеличением порядка  $m$ .

Из приведенных результатов видно, что в случае, когда частоты учтенных в разложениях тонов покрывают исследуемый частотный диапазон, использование корректирующих векторов третьего - четвертого порядков обеспечивает высокую точность результатов синтеза значений собственных частот составной конструкции.

Представляет интерес проведение исследования эффективности рассматриваемого подхода к модальному синтезу подконструкций в случае развитых границ сопряжения, например, для изгибных колебаний двух пластин, соединенных по их сторонам.

В конечноэлементном расчете использовались треугольные элементы с тремя узлами [56]. Для опертой по краям прямоугольной пластинки размером  $a \times b$  ( $b = 0,8a$ ), разбитой на конечные элементы, как показано на рис. 2.1, были вычислены собственные частоты и формы колебаний.

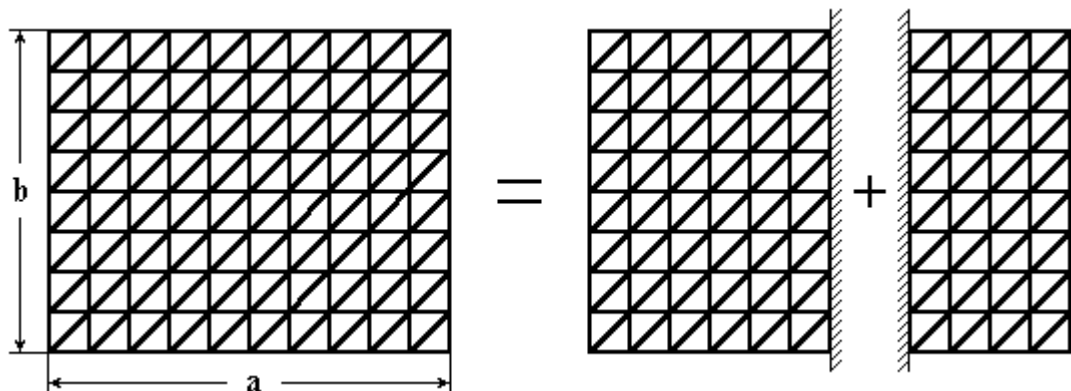


Рис. 2.1.

В таблице 4 приведены значения безразмерного частотного параметра

$$\Omega = \omega \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D}},$$

( $\rho$ ,  $h$ ,  $D$  - плотность материала, толщина и цилиндрическая жесткость пластинки) для низших четырех тонов, вычисленные методом конечных элемен-

тов, в сопоставлении с точными значениями, полученными по известным формулам.

Таблица 4

№ тона	Точное значение	МКЭ
1	25,29086	25,07113
2	54,89968	54,09708
3	71,55463	70,74203
4	101,16344	98,27404

Пластинка может рассматриваться как конструкция, составленная из двух пластинок размером  $0,6a \times b$  и  $0,4a \times b$  (рис. 2.1). Собственные вектора этих пластинок вычислены при условии жесткого защемления линии их стыка и вместе с корректирующими векторами помещены в базы данных подконструкций.

При исследовании частотного спектра составной конструкции варьировались два параметра: количество тонов, учтенное в разложении колебаний каждой пластинки, и порядок корректирующих рядов  $m$ . (Для простоты эти параметры задавались одинаковыми в обеих пластинках). Увеличение каждого из этих параметров должно давать уточнение результата в смысле сходимости к значению, полученному для исходной пластинки размером  $a \times b$  путем расчета по МКЭ.

Указанная сходимость решения отражена на графиках на рис. 2.2, где для низших четырех тонов составной пластинки показана относительная погрешность вычисления собственной частоты в зависимости от порядка корректирующих рядов подконструкций для заданных значений числа учитываемых тонов. Погрешность отложена по оси ординат в логарифмическом масштабе, по оси абсцисс отложен порядок корректирующих рядов, а число учтенных тонов обозначено цифрами напротив каждой кривой.

Полученные результаты демонстрируют монотонную сходимость собственных частот к точным значениям по обоим из исследуемых параметров. Ис-

пользование корректирующих рядов пятого порядка при пяти учтенных тонах подконструкций дает для частоты первого тона десять точных десятичных знаков. Для более высоких тонов точность снижается. Повышение порядка корректирующих рядов, как можно видеть из рисунков, приводит к более быстрой сходимости результата при увеличении числа тонов подконструкций.

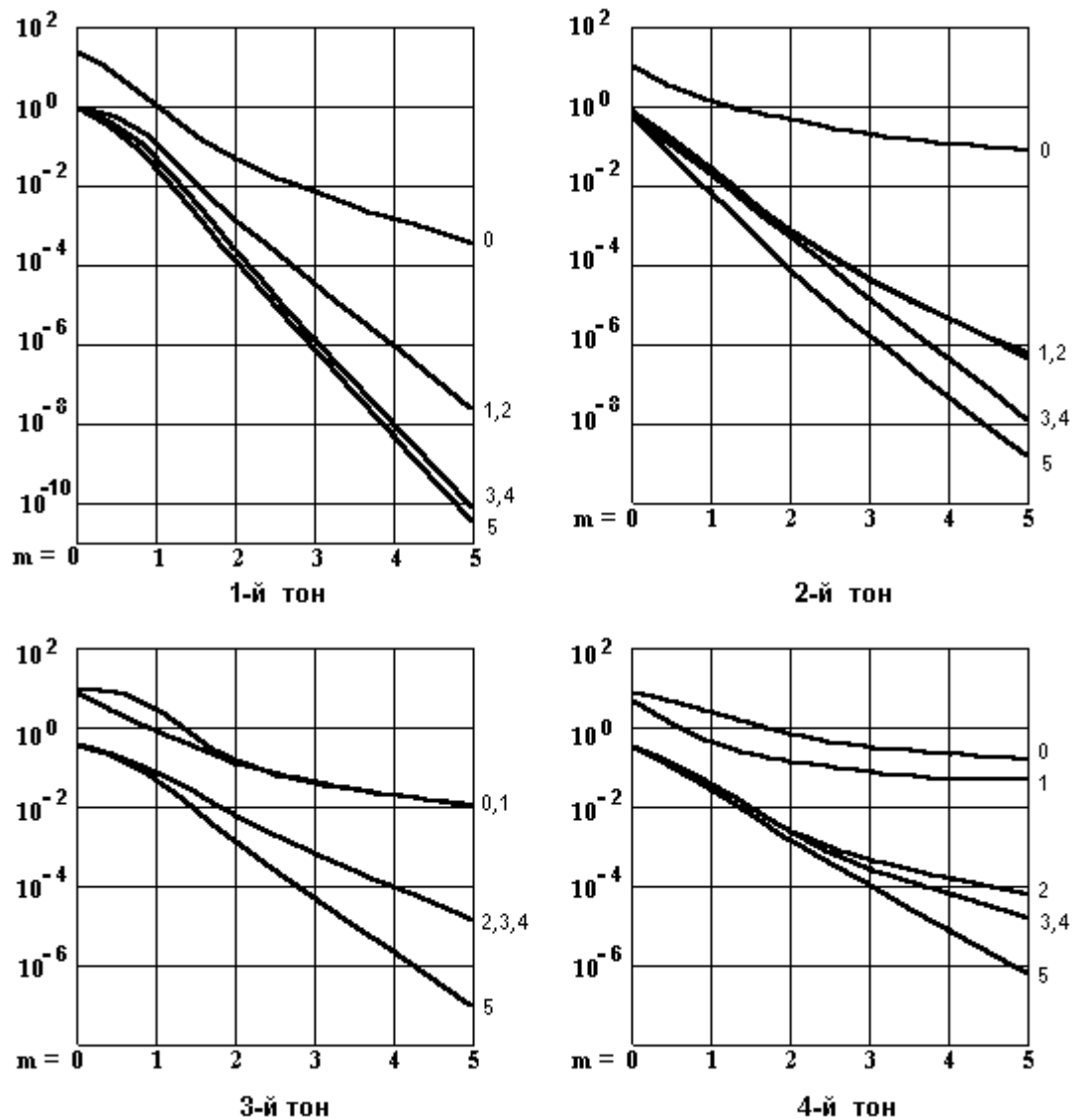


Рис. 2.2.

### 2.1.2. Использование ортогональных подпространств в процессе построения корректирующих векторов.

Непосредственное использование формул предыдущего раздела показало положительный эффект при увеличении порядка корректирующих рядов до величин  $m = 4 \div 5$ . В то же время при проведении расчетов дальнейшее увеличение  $m$  не только не приводило к повышению точности, но полностью искажало вычислительный процесс для частот, приближающихся к верхней границе исследуемого интервала.

В работе [105] в качестве возможного источника ухудшения вычислительного процесса указан эффект, противоположный тому, который является положительным с точки зрения усечения суммы в формуле (2.14). Дело в том, что оставленные в модальном разложении члены с  $\sigma_k < \lambda$  растут с увеличением  $m$  в геометрической прогрессии, и при достижении ими достаточно больших величин это может приводить к вычислительным погрешностям, связанным с округлением разностей больших чисел. Для устранения этого эффекта предложено строить корректирующий ряд в подпространстве, ортогональном в энергетическом смысле к подпространству, натянутому на учтенные в разложении собственные векторы. Построение такого ряда обеспечивается модификацией лишь первого шага рекуррентного процесса, представленного формулами (2.7).

В рассматриваемом случае жестких границ такая модификация выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}^* - \mathbf{M}_0 \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T}{\mu_k} \mathbf{A}^* = \mathbf{0} , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad i = 1, \dots, m-1 , \end{cases} \quad (2.25)$$

где  $K$  - число оставленных в модальном разложении тонов подконструкции.

Нетрудно показать, что при таком подходе все корректирующие вектора, являющиеся столбцами матриц  $\mathbf{G}_i$ , ортогональны в энергетическом смысле к учтенным в разложении собственным векторам:

$$\mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.26)$$

Формулы же для коэффициентов модального разложения приобретают вид:

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{1}{\mu_k(\sigma_k - \lambda)} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}_b, \quad k = 1, \dots, K, \\ q_k &= -\left(\frac{\lambda}{\sigma_k}\right)^m \frac{1}{\mu_k(\sigma_k - \lambda)} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}_b, \quad k > K. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Тем самым сохраняется влияние порядка корректирующего ряда на величину отбрасываемых членов, тогда как для учтенных членов это влияние исключено.

Редуцированное выражение для матрицы динамических жесткостей подконструкции в этом случае приобретает вид:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} + \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b - \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{A}^{*T} \mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^*}{\mu_k(\sigma_k - \lambda)}. \quad (2.28)$$

Исследование точности получаемых результатов было проведено на примере расчета собственных частот изгибных колебаний составной консольной балки, описанной в предыдущем разделе.

Рассматривался частотный диапазон от 0 до 1000 Гц, в котором находятся частоты трех тонов каждой из подконструкций (с закрепленными граничными точками) и семи тонов составной балки. Результаты синтеза сопоставлялись с данными расчета полной модели из 20 элементов.

В таблице 5 представлены результаты расчетов 6-й и 7-й собственных частот путем синтеза с использованием корректирующих рядов порядка от 1 до 20. Первые две графы соответствуют вычислению корректирующих векторов по формулам (2.7) и (2.25) соответственно без ортогонализации к собственным векторам и с ортогонализацией на первом шаге рекуррентного процес-



са. Прочерки в строках означают, что процесс вычисления собственной частоты вырождается из-за беспорядочного чередования положительных и отрицательных значений характеристического определителя. Из представленных данных видно, что такая ортогонализация не повлияла в положительную сторону на получаемые результаты.

Анализ величин компонент вычисляемых корректирующих векторов показал, что за число шагов большее пяти в процессах (2.7) и (2.25) происходит накопление относительных погрешностей, полностью искажающее результат с отличием от требуемого в десятки порядков. Причина этого заключается в неустойчивости алгоритма, способствующей относительному увеличению от шага к шагу и последующему преобладанию погрешностей, соответствующих формам низших тонов колебаний.

Для подавления этого процесса накопления погрешностей была сделана дальнейшая модификация алгоритма построения корректирующих векторов, заключающаяся во введении процедуры ортогонализации на всех его шагах:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}^* - \mathbf{M}_0 \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T}{\mu_k} \mathbf{A}^* = \mathbf{0} , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} - \mathbf{M}_0 \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T}{\mu_k} \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad i = 1, \dots, m-1 , \end{cases} \quad (2.29)$$

Легко показать, что в отсутствие погрешностей вычислений формулы (2.25) и (2.29) должны давать идентичные результаты. Поэтому неизменными остаются формулы (2.27) и (2.28).

Результаты расчетов, выполненных с ортогонализацией на каждом шаге вычисления корректирующих векторов, приведены в третьей графе таблицы 5. Устойчивая сходимость к точному решению свидетельствует о том, что накопление вычислительных погрешностей не происходит.

На графике (рис. 2.3) показана относительная погрешность вычисления собственных частот в зависимости от порядка корректирующих рядов подконструкций. Погрешность отложена по оси ординат в логарифмическом масшта-

бе, по оси абсцисс отложен порядок корректирующих рядов, а номера тонов обозначены цифрами напротив каждой кривой. Наблюдается монотонная сходимость с увеличением порядка корректирующих рядов. С возрастанием номера тона точность снижается, что согласуется с оценкой погрешности вычисления матриц динамических жесткостей.

Таблица 5

$m$	Без ортогонализации		С начальной ортогонализацией		С ортогонализацией на всех шагах	
	6	7	6	7	6	7
1	713.89521	1200.87870	713.89521	1200.87870	713.89521	1200.87870
2	701.10380	1018.89977	701.10380	1018.89977	701.10380	1018.89977
3	699.18854	994.23657	699.18854	994.23657	699.18854	994.23657
4	698.80797	985.16842	698.80774	985.16882	698.80790	985.16837
5	698.73727	980.96017	698.68995	981.09341	698.72021	980.93806
6	702.68477	985.36133	693.54898	992.40062	698.69806	978.77495
7	-	996.30000	778.03819	903.25458	698.69214	977.61982
8	-	-	-	-	698.69050	976.98875
9	-	-	-	-	698.69003	976.63955
10	-	-	-	-	698.68990	976.44491
11	-	-	-	-	698.68986	976.33593
12	-	-	-	-	698.68985	976.27477
13	-	-	-	-	698.68985	976.24038
14	-	-	-	-	698.68985	976.22103
15	-	-	-	-	698.68985	976.21013
16	-	-	-	-	698.68985	976.20399
17	-	-	-	-	698.68985	976.20054
18	-	-	-	-	698.68985	976.19859
19	-	-	-	-	698.68985	976.19749
20	-	-	-	-	698.68985	976.19687
Значения для полной конечноэлементной модели:					698.68985	976.19608

Полученные результаты позволяют сделать существенный вывод, состоящий в том, что при использовании корректирующих рядов для высокоточного синтеза подконструкций необходимо указанные ряды строить в подпространстве, ортогональном к подпространству, натянутому на учтенные в модальном разложении собственные вектора. При этом для обеспечения устойчивости алгоритма рекуррентного построения корректирующего ряда необходимо производить ортогонализацию векторов на каждом шаге вычислительного процесса. Принципиальная невозможность обеспечить устойчивость алго-

ритма вне ортогонального подпространства не позволяет получать надежные результаты без ортогонализации корректирующих векторов.

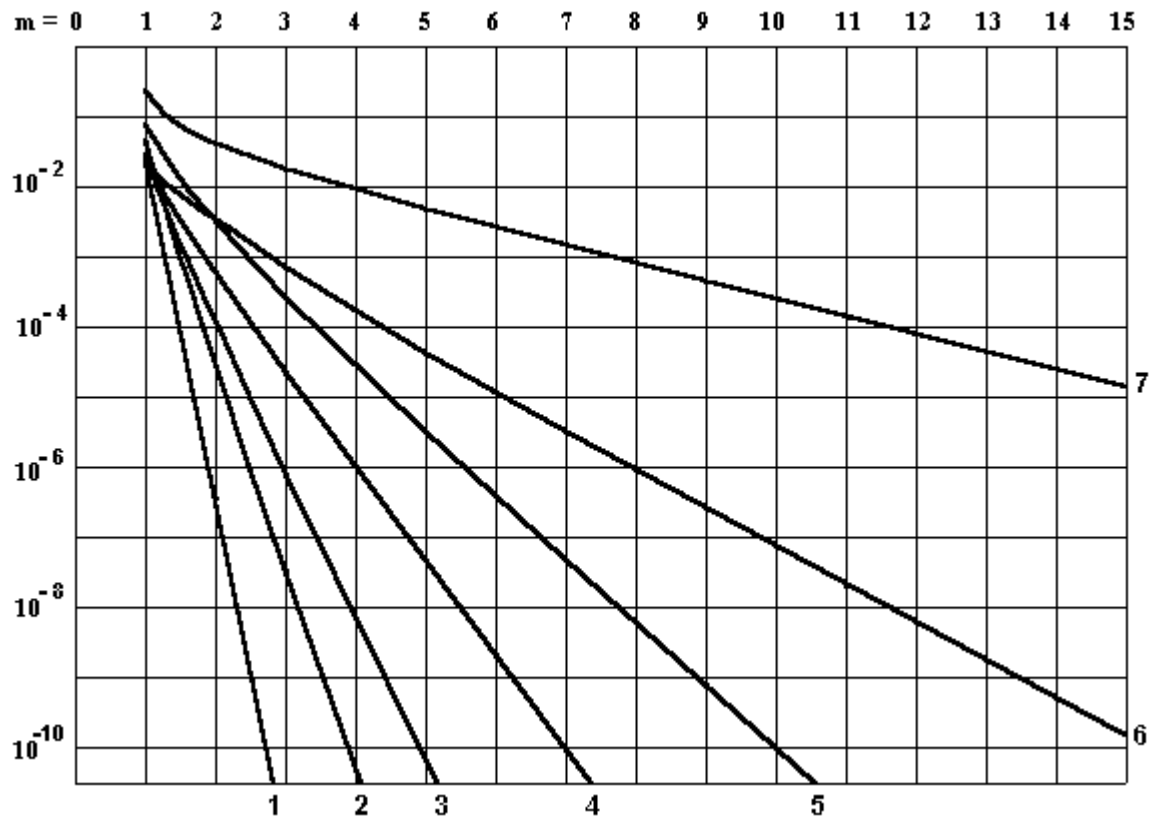


Рис. 2.3.

### 2.1.3. Методы формирования матриц подконструкций с использованием корректирующих векторов.

В настоящее время фактическим стандартом для обмена данными о подконструкциях для синтеза по методу жестких границ стал так называемый формат Крейга-Бэмптона, основанный на использованном в работе [128] модальном разложении движения подконструкции, содержащем члены, каждый из которых пропорционален статической реакции ее на единичное обобщенное перемещение из массива граничных параметров  $x_b$  при фиксированных остальных. В обозначениях, принятых в настоящей работе, это соответствует тому, что матрица корректирующих векторов в (2.5) имеет вид:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 = -\mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{A} \quad .$$

Представляет интерес сопоставить меру погрешности, возникающей в связи с неполнотой набора собственных форм подконструкции в методике [128], с тем, что дает метод корректирующих рядов.

Следует, однако, отметить, что в работе [128] не исключаются нормальные координаты, и в наборе переменных, представляющих движение подконструкции, они используются наравне со значениями граничных перемещений. В нашем случае конечным результатом является матрица динамических жесткостей. Поэтому для сопоставления необходимо вывести матрицу динамических жесткостей, исключив из полученных в [128] соотношений нормальные координаты. Именно близость ее к истинной матрице динамических жесткостей подконструкции может служить критерием, характеризующим обеспечиваемую методикой точность.

Сохраняя принятые в настоящей работе обозначения, можно привести выражение для матрицы динамических жесткостей, получаемой на основе методики Крейга-Бэмптона, к удобному для сопоставления виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = & \mathbf{A}^*(\lambda)^T \mathbf{G}_0 + \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b - \lambda (\mathbf{G}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0^T \mathbf{B}) - \\ & - \sum_k \left( \frac{\lambda}{\sigma_k} \right)^2 \frac{1}{\mu_k (\sigma_k - \lambda)} \mathbf{A}^*(\sigma_k)^T \mathbf{x}_{0k} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^*(\sigma_k) . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь учтено обобщение соотношений [128] на случай недиагональной матрицы масс, выполненное, например, в работе [61], а также аналогичное формуле (2.11) соотношение:

$$\mathbf{x}_{0k}^T (\mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{B}) = - \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{x}_{0k}^T \mathbf{A}^*(\sigma_k) .$$

По форме соотношение (2.30) напоминает формулу (2.14) для второго порядка матрицы корректирующих векторов. Однако картина осложняется присутствием под знаком суммы матриц  $\mathbf{A}^*(\sigma_k)$  вместо  $\mathbf{A}^*(\lambda)$ . В случае диагональной матрицы масс (когда  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ) эти формулы просто совпадают. Ненулевая матрица  $\mathbf{B}$ , определяющая связь по кинетической энергии граничных и внутренних параметров, приводит к тому, что ряд членов под знаком суммы в (2.30) теряют общий множитель  $(\lambda/\sigma_k)^2$ , благодаря которому для тонов с собственной частотой  $\sigma_k > \lambda$  достигается уменьшение их вклада в выражение для матрицы динамических жесткостей. Тем самым снижается точность получаемого решения по сравнению с обеспечиваемой соотношением (2.14) при  $m = 2$ .

Отметим, что вследствие жесткого способа задания корректирующей компоненты иного способа повышения точности представления подконструкции в методе Крейга-Бэмптона помимо увеличения числа учитываемых ее тонов не существует, и поэтому на практике приходится для надежности выполнять избыточные расчеты собственных частот и форм, выходящих за пределы заданного частотного диапазона.

Исследование вопроса о том, почему при одном члене корректирующего ряда в формуле (2.30) под знаком суммы присутствует квадрат отношения час-

тот, подсказало альтернативный способ формирования матрицы динамических жесткостей.

Приведенный в разделе 2.1.1 вывод формулы (2.14) можно условно называть методом прямой подстановки. Перепишем его основные соотношения в форме, более удобной для последующих выкладок. Попутно обобщим полученные результаты на случай вырожденной матрицы жесткостей  $\mathbf{K}_0$ .

Решение полной проблемы собственных значений (2.2) дает матрицу собственных векторов  $\mathbf{X}_0$ , которые образуют полную систему в пространстве внутренних степеней свободы. Выделим в ней матрицу  $\mathbf{X}_p$ , составленную из векторов с нулевыми собственными значениями (если они есть), матрицу  $\mathbf{X}_a$  из  $K$  векторов, сохраняемых в модальном разложении колебаний подконструкции в дополнение к нулевым, и матрицу  $\mathbf{X}_r$  из остальных векторов, отбрасываемых при редукции:

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{X}_p \quad \mathbf{X}_a \quad \mathbf{X}_r] \quad . \quad (2.31a)$$

Собственные частоты векторов  $\mathbf{X}_r$  выше частот векторов  $\mathbf{X}_a$ . Если обозначить  $\Lambda_a$  и  $\Lambda_r$  диагональные матрицы, на диагоналях которых расположены соответствующие собственные значения ( $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  и  $k > K$ ), то выполнены очевидные соотношения:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{X}_a = \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \Lambda_a \quad , \quad \mathbf{K}_0 \mathbf{X}_r = \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_r \Lambda_r \quad . \quad (2.31б)$$

В последующих выкладках полагаем, что собственные векторы нормированы по массе:

$$\mathbf{X}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_0 = \mathbf{I}_0 \quad , \quad (2.31в)$$

$\mathbf{I}_0$  - единичная матрица соответствующей размерности (это соответствует тому, что все обобщенные массы  $\mu_k = 1$ ).

С использованием введенных обозначений решение задачи о гармонических колебаниях подконструкции под действием сил  $\mathbf{f}_b$ , приложенных со стороны прочих составляющих сложной системы может быть точно представлено

в виде разложения, представляющего собой матричную форму записи соотношения (2.4):

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

где  $\mathbf{q}_p$ ,  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_r$  - векторы коэффициентов собственных форм.

Матрицу корректирующих векторов  $\mathbf{G}$ , представим в виде ряда (2.6), матричные коэффициенты которого, в соответствии с выводами предыдущего раздела, строятся с помощью рекуррентных формул в подпространстве, ортогональном учтенным в модальном разложении собственным векторам.

В добавленных в правых частях уравнений (2.25), (2.29) суммах члены, соответствующие собственным векторам с ненулевыми собственными значениями, обеспечивают решениям ортогональность к соответствующим векторам. Включение же в сумму аналогичных членов для собственных векторов (обязательно всех), соответствующих нулевому собственному значению, обеспечивает лишь существование решения вырожденной системы. Единственность решению может обеспечить дополнительное условие, заключающееся в его ортогональности к ядру матрицы.

С учетом сказанного, запишем рекуррентные соотношения для вычисления членов корректирующего ряда в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 = -(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{A}^* , & \mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 = \mathbf{0} , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , & \mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0} , \quad i = 1, \dots, m-1 . \end{cases} \quad (2.33)$$

Здесь множитель  $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T)$ , который, в соответствии с результатами раздела 2.1.2, должен присутствовать в правой части каждого из уравнений для обеспечения устойчивости вычислительного процесса, опущен для краткости в уравнениях для  $i = 1, \dots, m-1$ , поскольку не влияет на результат последующих выкладок.

Получающиеся корректирующие вектора ортогональны учтенным в разложении собственным векторам, что может быть записано в виде соотношений:

$$\mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0} , \quad \mathbf{X}_a^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0} , \quad i = 0, \dots, m-1 . \quad (2.34)$$

Подставив (2.32) в (2.1), получим два уравнения:

$$(\mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G}) \mathbf{x}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_p \mathbf{q}_p + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_a \mathbf{q}_a + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_r \mathbf{q}_r = \mathbf{f}_b , \quad (2.35)$$

$$(\mathbf{A}^* + \mathbf{K}_0 \mathbf{G} - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{G}) \mathbf{x}_b - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{q}_p + \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a) \mathbf{q}_a + \\ + \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_r (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r) \mathbf{q}_r = \mathbf{0} , \quad (2.36)$$

где  $\mathbf{I}_a$  ,  $\mathbf{I}_r$  - единичные матрицы соответствующих размерностей.

Используя соотношения (2.33), нетрудно получить следующую формулу:

$$\mathbf{A}^* + \mathbf{K}_0 \mathbf{G} - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{G} = \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T \mathbf{A}^* + \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T \mathbf{A}^* - \lambda^m \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} , \quad (2.37)$$

и умножая (2.36) слева поочередно на  $\mathbf{X}_p^T$  ,  $\mathbf{X}_a^T$  ,  $\mathbf{X}_r^T$  , вывести выражения для коэффициентов собственных форм:

$$\mathbf{q}_p = \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^{*T} \mathbf{x}_b , \quad (2.38)$$

$$\mathbf{q}_a = -(\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} \mathbf{x}_b , \quad (2.39)$$

$$\mathbf{q}_r = -(\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\lambda \Lambda_r^{-1})^m \mathbf{A}_r^{*T} \mathbf{x}_b . \quad (2.40)$$

где учтено, что

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} = -\Lambda_r^{-m} \mathbf{X}_r^T \mathbf{A}^* ,$$

и введены обозначения:

$$\mathbf{A}_p^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_p , \quad \mathbf{A}_a^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_a , \quad \mathbf{A}_r^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_r . \quad (2.41)$$

Выполняя теперь непосредственно подстановку выражений (2.38) - (2.40) в уравнение (2.35), получаем выражение для матрицы динамических жесткостей в виде:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \\ - \mathbf{A}_r^* (\lambda \Lambda_r^{-1})^m (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T} . \quad (2.42)$$



Формула (2.42) дает точное выражение для матрицы динамических жесткостей, совпадающее с (2.14) в случае отсутствия нулевых собственных частот, а выполненные преобразования совпадают с описанными в разделе 2.1.1.

Редукция системы, т.е. усечение модального разложения, означает отбрасывание последнего члена в формуле (2.42), величина которого удовлетворяет асимптотической оценке (2.18).

Отсюда следует первая форма редуцированной матрицы:

$$\mathbf{Q}_1^r(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T}, \quad (2.43)$$

полученная методом прямой подстановки.

Нетрудно заметить, что соотношение (2.32) представляет собой формулу для замены переменных в пространстве степеней свободы дискретной модели подконструкции с помощью матрицы перехода

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix}.$$

Основываясь на этом, можно осуществить указанное преобразование в уравнении (2.1) так же, как это было сделано в работе [128]. При этом правая часть уравнения умножается слева на  $\mathbf{T}^T$ , а матрицы системы умножаются слева на  $\mathbf{T}^T$  и справа на  $\mathbf{T}$ . В результате получаем уравнение:

$$(\mathbf{K}_G - \lambda \mathbf{M}_G) \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (2.44)$$

в котором матрицы имеют вид:

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_b + \mathbf{A}^T \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{G} & \mathbf{A}^T \mathbf{X}_p & \mathbf{A}^T \mathbf{X}_a & \mathbf{A}^T \mathbf{X}_r + \mathbf{G}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{X}_r \\ \mathbf{X}_p^T \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_a^T \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_r^T \mathbf{A} + \mathbf{X}_r^T \mathbf{K}_0 \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_r \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b + \mathbf{B}^T \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{B} + \mathbf{G}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G} & \mathbf{B}^T \mathbf{X}_p & \mathbf{B}^T \mathbf{X}_a & \mathbf{B}^T \mathbf{X}_r + \mathbf{G}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_r \\ \mathbf{X}_p^T \mathbf{B} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_a^T \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_r^T \mathbf{B} + \mathbf{X}_r^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix}.$$

Из последних трех групп уравнений в системе (2.44) получаются формулы (2.38) - (2.40) для исключения коэффициентов собственных форм. Затем первая группа уравнений преобразуется к виду (2.13), а формула для матрицы динамических жесткостей записывается (с учетом соотношений (2.37) и (2.34)) следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} - \lambda^m \mathbf{G}^T \mathbf{G}_M + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \mathbf{A}_r^* (\lambda \Lambda_r^{-1})^{2m} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T}, \quad (2.45)$$

где введено обозначение дополнительной к набору корректирующих векторов матрицы  $\mathbf{G}_M = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1}$  (отметим, что  $\mathbf{G}_M = \mathbf{G}_M^A + \lambda \mathbf{G}_M^B = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1}^A + \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1}^B$ ).

Эта формула, как и формула (2.42), является точной, и ее усечение приводит ко второй форме редуцированной матрицы, полученной методом замены переменных:

$$\mathbf{Q}_2^r(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} - \lambda^m \mathbf{G}^T \mathbf{G}_M + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T}. \quad (2.46)$$

Существенное отличие полученного результата от формулы (2.43) заключается в том, что асимптотическая оценка погрешности редуцированного выражения имеет вид:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^{2m}\right), \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Это соответствует использованию корректирующего ряда порядка  $2m$  в формуле (2.43) и является следствием появления в (2.45) и (2.46) порожденных корректирующими векторами членов, содержащих более высокие степени  $\lambda$ , а именно, вплоть до  $(2m - 1)$ -й. Более тщательный анализ показывает, что эти дополнительные члены в точности равны тем, которые появляются при  $2m$ -ом порядке корректирующего ряда в формуле (2.43).

Вышесказанное означает, что метод замены переменных при формировании редуцированной матрицы динамических жесткостей обеспечивает ту же точность, что и метод прямой подстановки, но при вдвое меньшем количестве корректирующих векторов, которым определяется порядок корректирующего ряда. Это позволяет строить более эффективные и экономные вычислительные алгоритмы.

Таблица 6

Метод прямой подстановки			Метод замены переменных		
<i>m</i>	6	7	<i>m</i>	6	7
1	713.89521	1200.87870	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	701.10380 698.80790 698.69806 698.69050 698.68990 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985 698.68985	1018.89977 985.16837 978.77495 976.98875 976.44491 976.27477 976.22103 976.21013 976.20399 976.20054 976.19859 976.19749 976.19687 976.19608
2	701.10380	1018.89977			
3	699.18854	994.23657			
4	698.80790	985.16837			
5	698.72021	980.93806			
6	698.69806	978.77495			
7	698.69214	977.61982			
8	698.69050	976.98875			
9	698.69003	976.63955			
10	698.68990	976.44491			
11	698.68986	976.33593			
12	698.68985	976.27477			
13	698.68985	976.24038			
14	698.68985	976.22103			
15	698.68985	976.21013			
16	698.68985	976.20399			
17	698.68985	976.20054			
18	698.68985	976.19859			
19	698.68985	976.19749			
20	698.68985	976.19687			
Для полной конечноэлементной модели:				698.68985	976.19608

В таблице 6 на примере 6-го и 7-го тонов рассмотренной в предыдущих разделах составной балки показана сходимость полученных в расчетах собственных частот с увеличением порядка корректирующих рядов при использовании двух описанных методов формирования матриц динамических жесткостей подконструкций. Как и следовало из теоретических выкладок, полученные по методу замены переменных результаты в точности соответствуют ре-

результатам метода прямой подстановки с удвоенным порядком корректирующих рядов.

Следует при этом отметить, что при очевидной выгоде использования метода замены переменных с точки зрения точности учета динамических свойств присоединяемой подконструкции мы имеем некоторую потерю точности в описании колебаний ее внутренних узлов (по сравнению с использованием удвоенного порядка корректирующего ряда в методе прямой подстановки). Это связано с присутствием в модальном разложении ее колебаний вдвое более короткого корректирующего ряда. Однако, в результате точность описания колебаний внутри подконструкции все же повышается по сравнению с методом прямой подстановки того же порядка за счет более точного определения колебаний граничных узлов.

Некоторые дополнительные затраты в методе замены переменных имеют место и в связи с необходимостью хранить в базе данных подконструкции вместе с матрицами корректирующих векторов еще и вспомогательную матрицу  $\mathbf{G}_M$ , т.е. база данных по подконструкции приобретает вид:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}$ ,  $k = 1, \dots, N_{eig}$  ;
- 2) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{M}_b$  ;
- 3) матрицы корректирующих векторов:

$$\{\mathbf{G}_k^A, \mathbf{G}_k^B\}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad \{\mathbf{G}_M^A, \mathbf{G}_M^B\}.$$

#### 2.1.4. Простые корректирующие вектора в методе жестких границ.

Идея способа избежать построения двойных корректирующих векторов в методе жестких границ, предложенная В.П.Шмаковым, состоит в преобразовании последовательности уравнений (2.7) для вычисления корректирующих векторов к виду:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 + \mathbf{A} = \mathbf{0} , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad i = 2, \dots, m-1 . \end{cases} \quad (2.48)$$

Не повторяя всех выкладок раздела 2.1.1, перепишем, учитывая полученные в разделах 2.1.2 и 2.1.3 результаты, уравнения (2.48) следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 = -(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{A} , \quad \mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 = \mathbf{0} , \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_1 = (\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 , \quad \mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad \mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0} , \quad i = 2, \dots, m-1 . \end{cases} \quad (2.49)$$

При этом, как и в (2.33), подразумевается, что в расчетах умножение на ортогонализирующий множитель должно осуществляться в правых частях всех уравнений.

Если число членов корректирующего ряда  $m > 1$  , то остаются в силе соотношения (2.35) - (2.37), а также первые две формулы для коэффициентов собственных форм, сохраняемых в модальном разложении (2.38), (2.39). Формула же для коэффициентов отсекаемых форм приобретает вид:

$$\mathbf{q}_r = -(\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\lambda \mathbf{\Lambda}_r^{-1})^m (\mathbf{A}_r - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r) \mathbf{x}_b , \quad (2.50)$$

поскольку выполнено соотношение:

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1} = -\mathbf{\Lambda}_r^{-m} (\mathbf{X}_r^T \mathbf{A} - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{X}_r^T \mathbf{B}) = -\mathbf{\Lambda}_r^{-m} (\mathbf{A}_r - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r) .$$

Прямая подстановка дает выражение для матрицы динамических жесткостей:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = & \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*\mathbf{T}} \mathbf{G} + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*\mathbf{T}} - \mathbf{A}_a^* (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*\mathbf{T}} - \\ & - \mathbf{A}_r^* (\lambda \mathbf{\Lambda}_r^{-1})^m (\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\mathbf{A}_r^{\mathbf{T}} - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r^{\mathbf{T}}) . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Эта формула отличается от выражения (2.42) лишь видом члена, содержащего отсекаемые при редукции собственные формы. Поэтому выражение для редуцированной матрицы, получаемой прямой подстановкой, по форме не отличается от (2.43). Сущность же отличия состоит в том, что корректирующий ряд  $\mathbf{G}$  формируется на основе одного набора элементарных корректирующих векторов, вычисляемых с помощью одной последовательности статических задач (2.49). В отличие от введенного ранее понятия двойных корректирующих векторов такой подход назовем методом простых корректирующих векторов.

В этом случае структура базы данных по подконструкции для использования в процедуре синтеза упрощается:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}$ ,  $k = 1, \dots, N_{eig}$  ;
- 2) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{M}_b$  ;
- 3) матрицы корректирующих векторов:  $\mathbf{G}_k$ ,  $k = 0, \dots, m-1$  .

Характеристика точности модального разложения с использованием простых корректирующих векторов в виде асимптотической оценки содержит в данном случае меньшую величину в показателе степени по сравнению с (2.18):

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^{m-1}\right), \quad m \rightarrow \infty . \quad (2.52)$$

Это связано с присутствием в формуле (2.51) множителя  $(\mathbf{A}_r^{\mathbf{T}} - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r^{\mathbf{T}})$ , содержащего собственные частоты редуцируемых тонов в виде диагональных компонент матрицы  $\mathbf{\Lambda}_r$  .

Кроме того, следует обратить внимание на то, что редуцированная матрица  $\mathbf{Q}_1^r(\lambda)$ , построенная с помощью простых корректирующих векторов, оказывается несимметричной, поскольку отсекаемый член в формуле (2.51)

является несимметричной матрицей. Величина вносимой таким образом несимметрии не превосходит погрешности, связанной с усечением модального разложения, и поэтому матрица может быть симметризована приравниванием или усреднением ее симметричных относительно главной диагонали элементов.

Применение описанной в предыдущем разделе процедуры метода замены переменных дает следующее выражение для матрицы динамических жесткостей:

$$\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*\mathbf{T}} \mathbf{G} - \lambda^m \mathbf{G}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_m + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*\mathbf{T}} - \mathbf{A}_a^* (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*\mathbf{T}} - (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{\Lambda}_r) (\lambda \mathbf{\Lambda}_r^{-1})^{2m} (\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\mathbf{A}_r^{\mathbf{T}} - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r^{\mathbf{T}}) . \quad (2.53)$$

Здесь так же, как и в случае прямой подстановки, по сравнению с выражением (2.45) изменился лишь последний член. Формула для редуцированной матрицы  $\mathbf{Q}_2^r(\lambda)$  совпадает с (2.46) и справедливо сказанное выше по поводу матрицы  $\mathbf{Q}_1^r(\lambda)$ .

База данных по подконструкции дополняется вспомогательной матрицей и имеет вид:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}$ ,  $k = 1, \dots, N_{\text{eig}}$  ;
- 2) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{M}_b$  ;
- 3) матрицы корректирующих векторов:  $\mathbf{G}_k$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $\mathbf{G}_m$ .

Асимптотическая оценка погрешности редукции приобретает вид:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda}{\sigma_r^{\min}}\right\}^{2m-2}\right), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.54)$$

поскольку в отбрасываемом члене присутствуют два множителя, содержащие матрицу  $\mathbf{\Lambda}_r$ .

Отдельного рассмотрения требует случай  $m = 1$ , когда  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0$ . С учетом первого из уравнений системы (2.49) формула (2.37) переписывается в виде:

$$\mathbf{A}^* + \mathbf{K}_0 \mathbf{G}_0 - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 = \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T \mathbf{A} + \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B} - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0, \quad (2.55)$$

и в результате прямой подстановки получается выражение для  $\mathbf{Q}(\lambda)$ , представляющее частный случай формулы (2.51).

Замена переменных при  $m = 1$  дает выражение для матрицы динамических жесткостей, не укладывающееся в рамки частного случая формулы (2.53), а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = & \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G}_0 - \lambda \mathbf{G}_0^T \mathbf{B} - \lambda \mathbf{G}_0^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \\ & - \mathbf{A}_a^* (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \mathbf{\Lambda}_r) (\lambda \mathbf{\Lambda}_r^{-1})^2 (\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\mathbf{A}_r^T - \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{B}_r^T). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Сравнение с приведенной ранее формулой (2.30) для матрицы, получающейся при использовании метода Крейга-Бэмптона, показывает идентичность выражению (2.56), в случае, когда отсутствует ортогонализация корректирующих векторов в матрице  $\mathbf{G}_0$  к собственным векторам.

Таким образом, мы можем точно определить место метода Крейга-Бэмптона при исследовании гармонических колебаний как частного случая в схеме метода корректирующих рядов. Он соответствует использованию одного члена ряда простых корректирующих векторов при формировании матрицы динамических жесткостей методом замены переменных.

В таблице 7 представлены результаты расчета 6-го и 7-го тонов описанной в разделе 2.1.1 составной консольной балки посредством синтеза с использованием простых корректирующих векторов и формированием матрицы по методу замены переменных. Первая строка таблицы соответствует результатам, получаемым методом Крейга-Бэмптона, заметная погрешность которых связана с близостью этих тонов к частоте среза.

На графике (рис. 2.4) показана сходимость собственной формы 7-го тона с увеличением порядка корректирующего ряда. Пунктирными линиями показаны результаты расчетов с  $m = 1, 2, 3, 4$ . Сплошная линия соответствует точному решению.



Таблица 7

$m$	6	7
1	701.19666	1022.74370
2	698.80981	985.51100
3	698.69813	978.85810
4	698.69050	977.01309
5	698.68990	976.45243
6	698.68985	976.27713
7	698.68985	976.22178
8	698.68985	976.20423
9	698.68985	976.19867
10	698.68985	976.19690

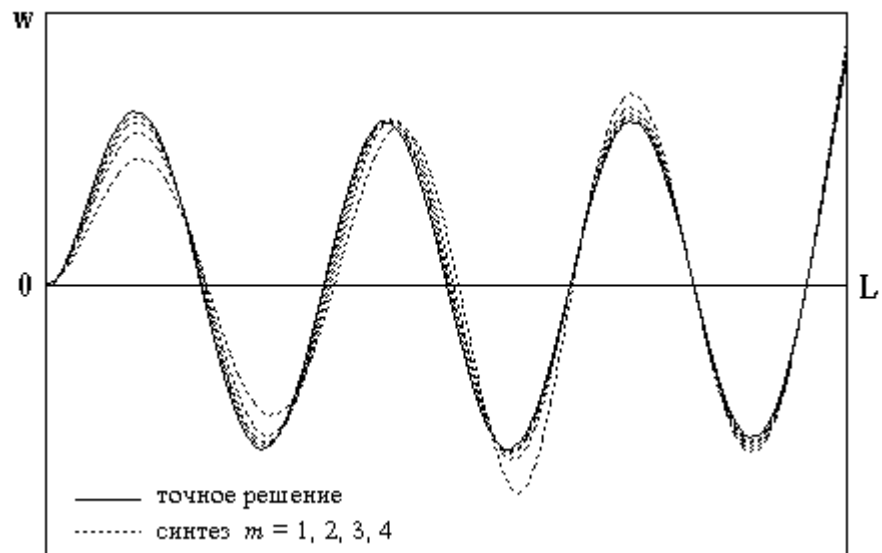


Рис. 2.4.

## 2.2. Модальный синтез дискретных моделей подконструкций методом свободных границ.

Альтернативой методу жестких границ в модальном синтезе подконструкций, может служить метод свободных границ, определяющей характеристикой которого является использование в разложении колебаний подконструкции в ряд собственных форм, вычисленных при условии, что внешние степени свободы не закреплены.

Общая схема алгоритма применения корректирующих рядов для повышения точности модального синтеза дискретных моделей подконструкций методом свободных границ сформулирована в работе [104]. В данном разделе мы преобразуем эти формулы с учетом введенных обозначений и полученных в процессе разработки метода жестких границ результатов. К последним можно отнести выводы о необходимости построения корректирующих векторов в подпространстве, ортогональном учтенным в разложении собственным векторам, и о неустойчивости процесса рекуррентного вычисления корректирующих векторов, если не проводится ортогонализация на каждом его шаге. Здесь же отметим два способа формирования матриц динамических коэффициентов влияния.

### 2.2.1. Построение корректирующих рядов в методе свободных границ.

Как и в разделе 2.1, считаем, что уравнения гармонических колебаний подконструкции под влиянием сил взаимодействия с прочими составляющими сложной системы имеют вид (2.1).

Внешние составляющие в векторе  $x$ , не фиксируемые при расчете собственных частот и форм, назовем условно “соединительными” степенями свободы (в отличие от фиксируемых “граничных” в методе жестких границ) и

обозначим  $\mathbf{x}_c$ , а соответствующие им обобщенные силы обозначим  $\mathbf{f}_c$ . Размерности векторов  $\mathbf{x}_c$  и  $\mathbf{f}_c$  обозначим  $n_c$ . Их включение в полные векторы узловых обобщенных перемещений и сил описывается с помощью формул:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{f}_c.$$

Для аппроксимации колебаний подконструкции используем ее собственные векторы, являющиеся решением задачи о собственных значениях

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \sigma \mathbf{M} \mathbf{x}.$$

Аналогично случаю жестких границ, обозначим  $\mathbf{X}$  квадратную матрицу, составленную из собственных векторов, и выделим в ней матрицу собственных векторов с нулевыми собственными значениями  $\mathbf{X}_p$  и матрицу  $\mathbf{X}_a$  векторов, сохраняемых в модальном разложении колебаний в дополнение к нулевым, а также матрицу  $\mathbf{X}_r$ , включающую остальные векторы, отбрасываемые при редукции:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_p \quad \mathbf{X}_a \quad \mathbf{X}_r]. \quad (2.57a)$$

Собственные частоты векторов  $\mathbf{X}_r$  выше частот векторов  $\mathbf{X}_a$ .

Обозначив  $\Lambda_a$ ,  $\Lambda_r$  - диагональные матрицы, составленные из собственных значений, соответствующих отмеченным индексами группам собственных векторов, получим соотношения:

$$\mathbf{K} \mathbf{X}_a = \mathbf{M} \mathbf{X}_a \Lambda_a, \quad \mathbf{K} \mathbf{X}_r = \mathbf{M} \mathbf{X}_r \Lambda_r. \quad (2.57б)$$

Считаем также, что собственные векторы нормированы по массе:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{I}, \quad (2.57в)$$

$\mathbf{I}$  - единичная матрица.

Выберем форму модального разложения колебаний подконструкции, включающую вспомогательные члены, пропорциональные внешним силам [104], и запишем ее в матричном виде:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix}, \quad (2.58)$$

где  $\mathbf{q}_p$ ,  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_r$  - векторы коэффициентов собственных форм,  $\mathbf{H}$  - матрица корректирующих векторов, количество которых соответствует размерности вектора внешних сил и каждый из которых представляет собой ряд по степеням частотного параметра:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{H}_1 + \dots + \lambda^{m-1} \mathbf{H}_{m-1}. \quad (2.59)$$

Матричные коэффициенты ряда (2.59) вычисляются как решения последовательности статических задач:

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{H}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{X}_p\mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}\mathbf{X}_a\mathbf{X}_a^T)\mathbf{C}, & \mathbf{X}_p^T\mathbf{M}\mathbf{H}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{K}\mathbf{H}_i = \mathbf{M}\mathbf{H}_{i-1}, & \mathbf{X}_p^T\mathbf{M}\mathbf{H}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (2.60)$$

На систему (2.60) можно распространить выводы раздела 2.1.2 о том, что для устойчивости процесса вычислений ортогонализирующий множитель  $(\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{X}_p\mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}\mathbf{X}_a\mathbf{X}_a^T)$  должен присутствовать в правой части каждого из уравнений системы (2.60), а не только первого. Поскольку в формальных выкладках его присутствие не влияет на результат, мы для краткости здесь этот множитель опускаем.

Условия ортогональности решений ядру сингулярной в общем случае матрицы  $\mathbf{K}$ , записанные в каждой строке системы (2.60), обеспечивают их единственность. Кроме того, получающиеся корректирующие вектора ортогональны учтенным в разложении ненулевым собственным векторам, что выражается формулами:

$$\mathbf{X}_a^T\mathbf{M}\mathbf{H}_i = \mathbf{0}; \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2.61)$$

Подставив теперь разложение (2.58) в исходную систему (2.1), получим уравнение:

$$(\mathbf{K}\mathbf{H} - \lambda\mathbf{M}\mathbf{H})\mathbf{f}_c - \lambda\mathbf{M}\mathbf{X}_p\mathbf{q}_p + \mathbf{M}\mathbf{X}_a(\Lambda_a - \lambda\mathbf{I}_a)\mathbf{q}_a + \mathbf{M}\mathbf{X}_r(\Lambda_r - \lambda\mathbf{I}_r)\mathbf{q}_r = \mathbf{C}\mathbf{f}_c. \quad (2.62)$$

С помощью соотношений (2.60) нетрудно получить формулу:

$$\mathbf{K}\mathbf{H} - \lambda\mathbf{M}\mathbf{H} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{X}_p\mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}\mathbf{X}_a\mathbf{X}_a^T)\mathbf{C} - \lambda^m\mathbf{M}\mathbf{H}_{m-1}. \quad (2.63)$$

Тогда, умножая уравнение (2.62) слева поочередно на  $\mathbf{X}_p^T$ ,  $\mathbf{X}_a^T$  и  $\mathbf{X}_r^T$ , получим с учетом формул (2.61) и (2.63) выражения для коэффициентов собственных форм:

$$\mathbf{q}_p = -\lambda^{-1}\mathbf{C}_p^T\mathbf{f}_c; \quad (2.64)$$

$$\mathbf{q}_a = (\Lambda_a - \lambda\mathbf{I}_a)^{-1}\mathbf{C}_a^T\mathbf{f}_c; \quad (2.65)$$

$$\mathbf{q}_r = (\Lambda_r - \lambda\mathbf{I}_r)^{-1}(\lambda\Lambda_r^{-1})^m\mathbf{C}_r^T\mathbf{f}_c, \quad (2.66)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}^T\mathbf{X}_p, \quad \mathbf{C}_a = \mathbf{C}^T\mathbf{X}_a, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C}^T\mathbf{X}_r, \quad (2.67)$$

а также учтено легко выводимое с помощью формул (2.57б) соотношение

$$\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{H}_{m-1} = \Lambda_r^{-m}\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}. \quad (2.68)$$

Непосредственно подставляя выражения (2.64) - (2.66) в умноженную слева на  $\mathbf{C}^T$  формулу модального разложения (2.58), получим выражение для матрицы динамических податливостей подконструкции, связывающей внешние степени свободы с внешними усилиями

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{R}(\lambda)\mathbf{f}_c, \quad (2.69)$$

в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda) = & \mathbf{C}^T\mathbf{H} - \lambda^{-1}\mathbf{C}_p\mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a(\Lambda_a - \lambda\mathbf{I}_a)^{-1}\mathbf{C}_a^T + \\ & + \mathbf{C}_r(\lambda\Lambda_r^{-1})^m(\Lambda_r - \lambda\mathbf{I}_r)^{-1}\mathbf{C}_r^T. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Формула (2.70) дает точное выражение для матрицы динамических податливостей. Если в модальном разложении не учитываются высокочастотные тона  $\mathbf{X}_r$ , имеем формулу для редуцированной матрицы:

$$\mathbf{R}_1^r(\lambda) = \mathbf{C}^T\mathbf{H} - \lambda^{-1}\mathbf{C}_p\mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a(\Lambda_a - \lambda\mathbf{I}_a)^{-1}\mathbf{C}_a^T. \quad (2.71)$$

Присутствие множителя  $(\lambda \Lambda_r^{-1})^m$  в потерянном при редукции члене, как и ранее в методе жестких границ для матрицы динамических жесткостей, позволяет для матрицы  $\mathbf{R}_1^r(\lambda)$ , полученной методом прямой подстановки, вывести асимптотическую оценку погрешности в виде (2.18).

Сформируем теперь матрицу  $\mathbf{R}(\lambda)$  с помощью замены переменных по формуле (2.58) с матрицей преобразования

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix}.$$

С учетом соотношений (2.63) и (2.68) получаем систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{C} - \lambda^m \mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{H}_{m-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}^T \mathbf{X}_r - \mathbf{C}^T \mathbf{X}_r (\lambda \Lambda_r^{-1})^m \\ \mathbf{0} & -\lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} - (\lambda \Lambda_r^{-1})^m \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{X}_p^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{X}_a^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \end{Bmatrix}. \quad (2.72)$$

Из системы (2.72) получаются идентичные формулам (2.64) - (2.66) выражения для коэффициентов собственных форм, а также важное для последующих выкладок соотношение:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{X}_r \mathbf{q}_r = \lambda^m \mathbf{H}^T \mathbf{M} \mathbf{H}_{m-1} \mathbf{f}_c + \mathbf{C}^T \mathbf{X}_r (\lambda \Lambda_r^{-1})^{2m} \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c. \quad (2.73)$$

Если теперь в умноженную слева на  $\mathbf{C}^T$  формулу модального разложения (2.58) подставить соотношения (2.64), (2.65) и (2.73), то получим выражение для матрицы динамических податливостей подконструкции в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda) = & \mathbf{C}^T \mathbf{H} + \lambda^m \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T + \\ & + \mathbf{C}_r (\lambda \Lambda_r^{-1})^{2m} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{C}_r^T, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где введено обозначение  $\mathbf{H}_M = \mathbf{M} \mathbf{H}_{m-1}$ .

Формула (2.74), как и формула (2.70), является точной, и ее усечение дает вторую форму редуцированной матрицы

$$\mathbf{R}_2^r(\lambda) = \mathbf{C}^T \mathbf{H} + \lambda^m \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T. \quad (2.75)$$

Как и при замене переменных в методе жестких границ, степень множителя в составе отбрасываемого при редукции члена увеличилась вдвое по сравнению с методом прямой подстановки, и асимптотическая оценка погрешности имеет вид (2.47).

Такое уменьшение погрешности соответствует использованию в формуле (2.70) корректирующего ряда порядка  $2m$  и связано с появлением в формулах (2.74) и (2.75) члена  $\lambda^m \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M$ , содержащего степени параметра  $\lambda$  до  $(2m - 1)$ -й включительно. Можно показать, что коэффициенты при этих степенях равны тем, которые имеют место в формуле (2.70) при  $2m$ -м порядке корректирующего ряда.

База данных по подконструкции при использовании метода свободных границ несколько проще, чем в случае жестких границ:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}$ ,  $k = 1, \dots, N_{\text{eig}}$ ;
- 2) матрицы корректирующих векторов:  $\mathbf{H}_k$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ ,  $[\mathbf{H}_M]$ .

Квадратные скобки означают, что матрица  $\mathbf{H}_M$  используется только при формировании матрицы динамических податливостей по методу замены переменных.

В работе [129] предложен вариант метода свободных границ, известный как метод остаточных податливостей. В используемых нами обозначениях предложенную в этой работе форму редуцированного модального разложения можно записать (в случае невырожденной матрицы жесткостей) в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_a \mathbf{q}_a + (\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{X}_a \Lambda_a^{-1} \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C} \mathbf{f}_c,$$

содержащем вспомогательный член, в точности преобразующийся к первому члену корректирующего ряда с помощью соотношений (2), поскольку

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C} = (\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{X}_a \Lambda_a^{-1} \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C}.$$

Дальнейшие построения работы [129] сводятся к синтезу по методу сил с исключением сил взаимодействия подконструкций, и поэтому в плане учета

динамических свойств подконструкции этот подход соответствует рассмотренному выше методу прямой подстановки. Следовательно, метод остаточных податливостей по точности соответствует использованию корректирующего ряда первого порядка ( $m = 1$ ) при построении матрицы способом прямой подстановки.



## 2.2.2. Вычисление корректирующих векторов с частотным сдвигом при наличии нулевых собственных частот.

Вычисление матричных коэффициентов корректирующего ряда в соответствии с уравнениями (2.60), в которых требуется выполнение условия ортогональности решения ядру сингулярной матрицы, представляет серьезную вычислительную проблему, в особенности при необходимости соблюдения структуры разреженной матрицы жесткостей  $\mathbf{K}$ .

В случае невырожденной матрицы  $\mathbf{K}$  все собственные значения положительны, матрица  $\mathbf{X}_p$  отсутствует, и подобной проблемы не возникает. Однако для метода свободных границ более характерно отсутствие закрепления подконструкции при расчете ее динамических характеристик. Наиболее простым средством избежать затруднений представляется способ, который можно назвать частотным сдвигом корректирующих векторов.

Заменим в уравнениях (2.60) матрицу жесткостей  $\mathbf{K}$  на  $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{M}$ , где  $\alpha$  - параметр сдвига ( $\alpha > 0$ ). Обозначим  $\nu = \lambda + \alpha$  смещенный частотный параметр, по степеням которого построим корректирующий ряд

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \nu \mathbf{H}_1 + \dots + \nu^{m-1} \mathbf{H}_{m-1},$$

коэффициенты которого определяются из уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\alpha \mathbf{H}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{M} \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M} \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C}, \\ \mathbf{K}_\alpha \mathbf{H}_i = \mathbf{M} \mathbf{H}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (2.76)$$

Решение системы уравнений (2.76) не вызывает затруднений ввиду положительной определенности матрицы  $\mathbf{K}_\alpha$ . Опуская промежуточные выкладки, отметим лишь изменившееся выражение для коэффициентов собственных форм:

$$\mathbf{q}_r = (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m \mathbf{C}_r^T \mathbf{f}_c, \quad (2.77)$$

и приведем выражения для матрицы динамических податливостей, получающиеся при формировании их по методу прямой подстановки:

$$\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{C}^T \mathbf{H} - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T + \mathbf{C}_r (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m (\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{C}_r^T, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{R}_1^r(\lambda) = \mathbf{C}^T \mathbf{H} - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T, \quad (2.79)$$

и по методу замены переменных:

$$\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{C}^T \mathbf{H} + \nu^m \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T + \mathbf{C}_r (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^{2m} (\mathbf{\Lambda}_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{C}_r^T, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{R}_2^r(\lambda) = \mathbf{C}^T \mathbf{H} + \nu^m \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\mathbf{\Lambda}_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T, \quad (2.81)$$

где  $\mathbf{N}_r = \mathbf{\Lambda}_r + \alpha \mathbf{I}_r$ .

Из выражений (2.78) - (2.81) следует, что частотный сдвиг несколько изменяет формулы асимптотических оценок погрешности редукции модального разложения, а именно, для метода прямой подстановки:

$$\delta = O \left\{ \left( \frac{\lambda + \alpha}{\sigma_r^{\min} + \alpha} \right)^m \right\}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.82)$$

и для метода замены переменных :

$$\delta = O \left\{ \left( \frac{\lambda + \alpha}{\sigma_r^{\min} + \alpha} \right)^{2m} \right\}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.83)$$

Формулы (2.82) и (2.83) показывают, что для  $\lambda < \sigma_r^{\min}$  сходимость при возрастании порядка корректирующего ряда сохраняется, хотя скорость ее несколько снижается из-за увеличения основания степени. Заметим, что к замедлению сходимости приводит увеличение параметра частотного сдвига  $\alpha$ , но слишком малые его значения ухудшают обусловленность матрицы  $\mathbf{K}_\alpha$ , а это может повлечь за собой снижение точности вычислений при решении систем (2.76).

Аналогичным образом частотный сдвиг может использоваться в методе жестких границ, если вырождена матрица  $\mathbf{K}_0$ . Корректирующий ряд строится по степеням смещенного частотного параметра:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \nu \mathbf{G}_1 + \dots + \nu^{m-1} \mathbf{G}_{m-1} . \quad (2.84)$$

Применительно к случаю двойных корректирующих векторов рекуррентную систему уравнений (2.33) следует переписать в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_0 = -(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{A}^* , \\ \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad i = 1, \dots, m-1 , \end{cases} \quad (2.85)$$

где  $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K}_0 + \alpha \mathbf{M}_0$ .

Выражение для коэффициентов редуцируемых собственных форм приобретает вид:

$$\mathbf{q}_r = -(\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m \mathbf{A}_r^{*T} \mathbf{x}_b , \quad (2.86)$$

матрица динамических жесткостей, получаемая прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \\ - \mathbf{A}_r^* (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T} , \end{aligned} \quad (2.87)$$

и заменой переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} - \lambda^m \mathbf{G}^T \mathbf{G}_M + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \\ - \mathbf{A}_r^* (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^{2m} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T} . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Для простых корректирующих векторов система (2.49) переписывается в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_0 = -(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}) , \\ \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_1 = (\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_0 , \\ \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1} , \quad i = 2, \dots, m-1 , \end{cases} \quad (2.89)$$

коэффициенты редуцируемых собственных форм:

$$\mathbf{q}_r = -(\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m (\mathbf{A}_r - \Lambda_r \mathbf{B}_r) \mathbf{x}_b , \quad (2.90)$$

матрица динамических жесткостей, получаемая прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \\ - \mathbf{A}_r^* (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^m (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\mathbf{A}_r^T - \Lambda_r \mathbf{B}_r^T) , \end{aligned} \quad (2.91)$$

и заменой переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\lambda) = & \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*\mathbf{T}} \mathbf{G} - \lambda^m \mathbf{G}^{\mathbf{T}} \mathbf{G}_m + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*\mathbf{T}} - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*\mathbf{T}} - \\ & - (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r \Lambda_r) (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^{2m} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} (\mathbf{A}_r^{\mathbf{T}} - \Lambda_r \mathbf{B}_r^{\mathbf{T}}) . \end{aligned} \quad (2.92)$$

Выражения для асимптотических оценок погрешности редукции преобразуются аналогично формулам (2.82), (2.83) с учетом сдвига частотного параметра.

### 2.2.3. Сопоставление точности методов свободных и жестких границ.

Рассматриваются изгибные колебания составной консольной балки, описанной в разделе 2.4.1. При проведении расчетов ставилась задача определения собственных частот составной балки, лежащих ниже обусловленной частоты среза, посредством синтеза подконструкций с использованием их собственных форм только с частотами, не превосходящими эту же частоту среза.

Отметим, что при использовании распространенных методик модального синтеза подконструкций рекомендуется для обеспечения удовлетворительной в пределах заданного частотного диапазона точности результатов учитывать все тона колебаний подконструкций, частоты которых превосходят обусловленную частоту среза в 1,5 - 2 раза.

На рис. 2.5 показаны собственные частоты составной конструкции в сопоставлении с собственными частотами подконструкций при синтезе как методом жестких границ, так и методом свободных границ.

Исследовалась сходимость значений собственных частот, получаемых в результате синтеза подконструкций, к точным значениям в зависимости от порядка корректирующего ряда. Как и в предыдущих разделах, в расчетах использованы модели подконструкций, состоящие из 12 и 8 конечных элементов.

Результаты исследования суммированы на графике (рис. 2.6), где представлена относительная погрешность вычисления собственных частот при синтезе подконструкций в зависимости от порядка корректирующего ряда (значения  $m$  задавались одинаковыми для обеих подконструкций). Результаты вычислений по методу свободных границ (сплошные линии) сопоставлены с результатами, полученными в разделе 2.1.2 по методу жестких границ (изображены штриховыми линиями). При формировании матриц динамических податливостей и жесткостей использован метод прямой подстановки. Цифрами отмечены номера тонов составной конструкции, сходимость к которым ис-

следована. С возрастанием номера тона точность снижается, как и следует из асимптотических оценок.



Рис. 2.5.

Графики показывают, что синтез по методу свободных границ при том же числе членов корректирующего ряда обеспечивает более высокую точность результатов, чем по методу жестких границ. Это согласуется с выводом, сделанным в разделе 1.1 при анализе формулы (1.20).

При выводе оценочных формул погрешности для дискретных моделей подконструкций как в методе жестких, так и в методе свободных границ получались степени одного порядка (выражение (2.18)). В то же время реально полученная погрешность для этих двух методов отличается примерно на единицу показателя степени. Формальная реализуемость для метода жестких границ в случае дискретной модели последнего шага, приводящего к соотношению (2.11) и доводящего порядок оценки погрешности до величины порядка корректирующего ряда, не приводит к истинному ускорению сходимости. Здесь проявляется физическая природа различия двух подходов, отраженного в вы-

ражениях (1.15) и (1.16). При этом увеличивающий погрешность множитель лишь загоняется в коэффициент формулы, дающей ее асимптотическую оценку.

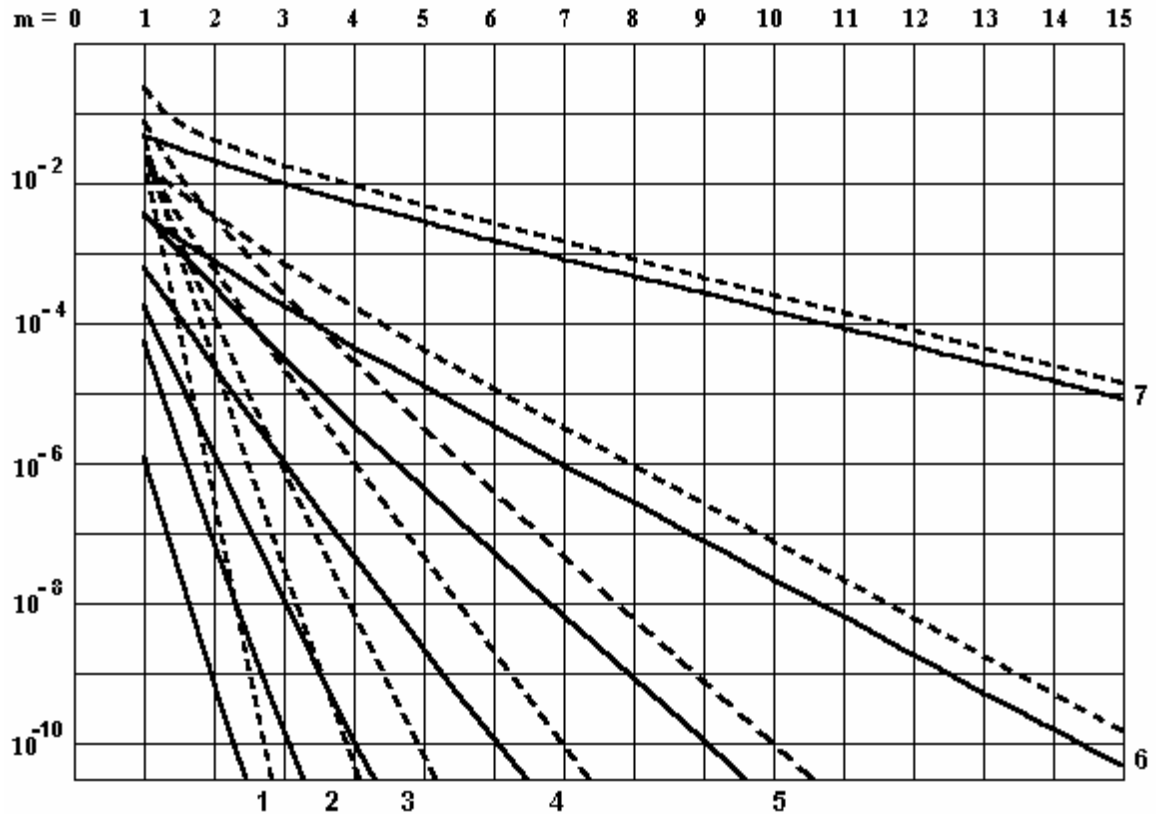


Рис. 2.6.

Сходимость собственных форм при наращивании корректирующих рядов можно наглядно иллюстрировать на примере формы 7-го тона, частота которого вплотную прилежит к частоте среза, и потому находится в наихудших условиях с точки зрения точности вычисления (рис. 2.7). Если погрешность вычисления собственной частоты при  $m = 1$  составила 5%, то для собственной формы она достигает 22%. Заметим, что для тонов ниже 7-го аналогичные кривые совпадают с точным решением в пределах толщины линии рисунка.

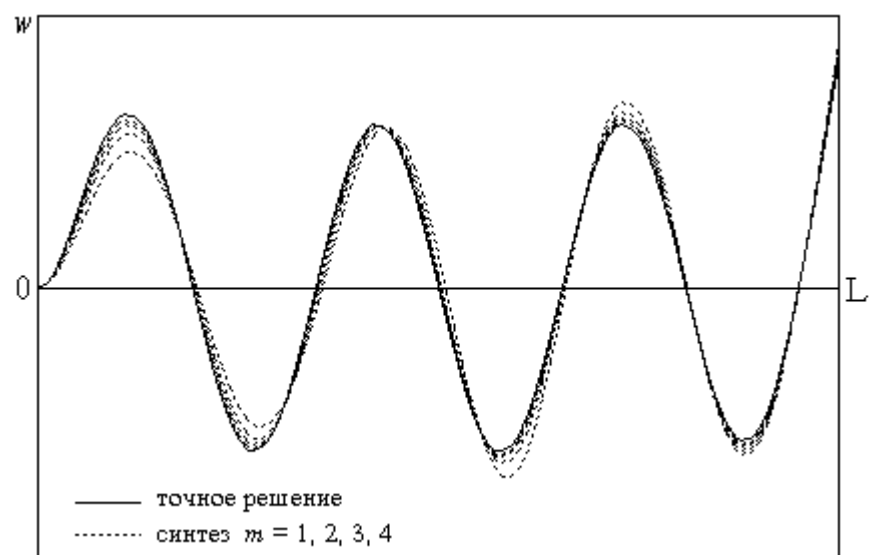


Рис. 2.7.



### 2.3. Гибридный подход к модальному синтезу дискретных моделей подконструкций.

В предыдущих разделах рассмотрены два “чистых” направления модального синтеза подконструкций - метод жестких границ и метод свободных границ - в соответствии с видом собственных форм, определяемым условиями закрепления тех степеней свободы подконструкции, которые входят в соединение с другими компонентами системы. Однако вполне реальна ситуация, когда динамические характеристики подконструкции удобно определять при смешанном характере закрепления этих внешних степеней свободы (например, при предварительном согласовании их с данными эксперимента, проводимого при вполне конкретных заданных условиях закрепления).

Разработанная выше теория корректирующих рядов для повышения точности модального синтеза дискретных моделей подконструкций естественным образом распространяется на гибридный метод. Идея такого обобщения состоит в том, что модальное разложение дополняется с целью ускорения его сходимости двумя корректирующими рядами типа использованных в разделах 2.1 и 2.2. Один из них служит для компенсации вклада высокочастотных тонов в отклик подконструкции, обусловленного воздействием внешних компонент составной системы через граничные степени свободы (закрепленные при определении форм), а другой выполняет аналогичную функцию для соединительных степеней свободы.

При выводе соотношений мы изначально учитываем, что для устойчивой численной реализации алгоритма последовательного вычисления векторных коэффициентов корректирующего ряда (корректирующих векторов) необходимо на каждом шаге выполнять ортогонализацию к совокупности сохраняемых в модальном разложении собственных векторов. Кроме того, здесь сохраняется возможность на базе одних и тех же корректирующих векторов строить

матрицы динамических коэффициентов влияния двумя способами: методом прямой подстановки или методом замены переменных, последний из которых дает более точные выражения для редуцированных матриц.

В уравнениях гармонических колебаний подконструкции под влиянием сил взаимодействия с прочими составляющими сложной системы (2.1) выделим блоки, соответствующие граничным степеням свободы переписав их в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_0 \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_0 \end{Bmatrix}. \quad (2.93)$$

Модальное разложение колебаний подконструкции строится на основе собственных векторов, являющихся решениями задачи о собственных значениях для случая закрепленных граничных степеней свободы (2.2).

Квадратную матрицу  $\mathbf{X}_0$ , образованную полным набором собственных векторов, представим в виде (2.31а), причем выполнены соотношения (2.31б) и условия ортогональности и нормировки (2.31в).

В векторах  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{f}_0$  выделим не закрепленные при определении собственных векторов внешние составляющие с помощью формул:

$$\mathbf{f}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{f}_c, \quad \mathbf{x}_c = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_0.$$

Полные векторы внешних степеней свободы и внешних обобщенных сил представим в виде:

$$\mathbf{x}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_c \end{Bmatrix}.$$

В выражение для модального разложения колебаний подконструкции включим вспомогательные члены, пропорциональные граничным обобщенным перемещениям  $\mathbf{x}_e$ , и члены, пропорциональные внешним силам  $\mathbf{f}_e$ , соответствующим соединительным степеням свободы, что в матричном виде может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{Bmatrix}. \quad (2.94)$$

Здесь  $\mathbf{q}_p$ ,  $\mathbf{q}_a$ ,  $\mathbf{q}_r$  - векторы коэффициентов собственных форм,  $\mathbf{I}_b$  - единичная матрица, а  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  - матрицы корректирующих векторов, вид которых определяет величину погрешности, возникающей при усечении модального разложения.

В разделе 2.2.2 предложено в случае вырожденной матрицы жесткостей использовать частотный сдвиг при вычислении корректирующих векторов в качестве способа избежать существенных вычислительных трудностей, связанных с решением недоопределенных систем линейных уравнений в ортогональном к ядру матрицы подпространстве. Мы приведем здесь формулы для наиболее общего случая, когда корректирующие ряды для граничных и соединительных степеней свободы содержат различное число членов и вычисляются с различными значениями параметра частотного сдвига.

Матрицы корректирующих векторов граничных и соединительных степеней свободы  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  строятся как степенные ряды относительно смещенных частотных параметров  $\mu = \lambda + \alpha$ ,  $\nu = \lambda + \beta$ :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mu\mathbf{G}_1 + \dots + \mu^{m-1}\mathbf{G}_{m-1}, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \nu\mathbf{H}_1 + \dots + \nu^{n-1}\mathbf{H}_{n-1}, \quad (2.96)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - такие величины частотных сдвигов, что невырожденными оказываются матрицы

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K}_0 + \alpha\mathbf{M}_0, \quad \mathbf{K}_\beta = \mathbf{K}_0 + \beta\mathbf{M}_0.$$

Матричные коэффициенты рядов (2.95) и (2.96) вычисляются как решения последовательностей задач:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_0 = -(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T)(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}), \\ \mathbf{K}_\alpha \mathbf{G}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.97)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\beta \mathbf{H}_0 = (\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C} , \\ \mathbf{K}_\beta \mathbf{H}_i = \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_{i-1} , \quad i = 1, \dots, n-1 . \end{cases} \quad (2.98)$$

Как и ранее, в системах (2.97) и (2.98) множитель  $(\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T)$  должен присутствовать в правой части каждого из уравнений для обеспечения устойчивости вычислительного процесса, но опущен для краткости, поскольку не влияет на результат последующих выкладок.

Система (2.97) в соответствии с введенной выше терминологией используется для формирования последовательности двойных корректирующих векторов, соответствующих граничным степеням свободы. Для формирования простых корректирующих векторов используется система уравнений (2.89).

Получающиеся корректирующие векторы ортогональны учтенным в разложении собственным векторам, что выражается формулами:

$$\mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{X}_a^T \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_i = \mathbf{0}; \quad i = 0, \dots, m-1 , \quad (2.99)$$

$$\mathbf{X}_p^T \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{X}_a^T \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_i = \mathbf{0}; \quad i = 0, \dots, n-1 . \quad (2.100)$$

Задача теперь состоит в выводе соотношений, связывающих между собой непосредственно внешние степени свободы подконструкции и соответствующие им обобщенные силы.

Выполним преобразования в соответствии с методом замены переменных, рассматривая формулу модального разложения (2.94) как выражение для замены переменных в уравнениях колебаний (2.93) с матрицей преобразования

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_r \end{bmatrix} .$$

В результате получаем систему матричных уравнений:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} - & -\mu^m \mathbf{G}_M^T \mathbf{H} & \mathbf{A}_p^* & \mathbf{A}_a^* & \mathbf{A}_r^* (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m \\
 -\mu^m \mathbf{G}_M^T \mathbf{G}_M & & & & \\
 -\mu^m \mathbf{H}^T \mathbf{G}_M & \mathbf{H}^T \mathbf{C} - \nu^n \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_r - \mathbf{C}_r (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n \\
 \mathbf{A}_p^{*T} & \mathbf{0} & -\lambda \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{A}_p^{*T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a & \mathbf{0} \\
 (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m \mathbf{A}_p^{*T} & \mathbf{C}_r^T - (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n \mathbf{C}_r^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b + \mathbf{G}^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{C}_p^T \mathbf{f}_c \\ \mathbf{C}_a^T \mathbf{f}_c \\ \mathbf{C}_r^T \mathbf{f}_c \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Здесь для удобства записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_r &= \Lambda_r + \alpha \mathbf{I}_r, \quad \mathbf{N}_r = \Lambda_r + \beta \mathbf{I}_r, \\
 \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}, \quad \mathbf{G}_M = \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1}, \quad \mathbf{H}_M = \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_{n-1}, \\
 \mathbf{A}_p^* &= \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_p, \quad \mathbf{A}_a^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_a, \quad \mathbf{A}_r^* = \mathbf{A}^{*T} \mathbf{X}_r, \\
 \mathbf{C}_p &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}_p, \quad \mathbf{C}_a = \mathbf{C}^T \mathbf{X}_a, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{C}^T \mathbf{X}_r.
 \end{aligned}$$

При выводе формул для элементов матрицы в системе (2.101) использованы соотношения (2.99), (2.100) и свойства ортогональности собственных форм, а также легко выводимые с помощью соотношений (2.95) - (2.98) выражения:

$$\mathbf{A} + \mathbf{K}_0 \mathbf{G} - \lambda (\mathbf{B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{G}) = \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T \mathbf{A}^* + \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T \mathbf{A}^* - \mu^m \mathbf{M}_0 \mathbf{G}_{m-1},$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{H} - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{H} = (\mathbf{I}_0 - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_p \mathbf{X}_p^T - \mathbf{M}_0 \mathbf{X}_a \mathbf{X}_a^T) \mathbf{C} - \nu^n \mathbf{M}_0 \mathbf{H}_{n-1},$$

из которых следует:

$$\mathbf{X}_r^T (\mathbf{A} + \mathbf{K}_0 \mathbf{G} - \lambda (\mathbf{B} + \mathbf{M}_0 \mathbf{G})) = (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m \mathbf{X}_r^T \mathbf{A}^*, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{X}_r^T (\mathbf{K}_0 \mathbf{H} - \lambda \mathbf{M}_0 \mathbf{H}) = \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} - (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n \mathbf{X}_r^T \mathbf{C}. \quad (2.103)$$

Последние три матричные уравнения системы (2.101) дают выражения для коэффициентов собственных форм:

$$\mathbf{q}_p = -\lambda^{-1} \{ \mathbf{C}_p^T \mathbf{f}_c - \mathbf{A}_p^{*T} \mathbf{x}_b \} , \quad (2.104)$$

$$\mathbf{q}_a = (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \{ \mathbf{C}_a^T \mathbf{f}_c - \mathbf{A}_a^{*T} \mathbf{x}_b \} , \quad (2.105)$$

$$\mathbf{q}_r = (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \{ (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n \mathbf{C}_r^T \mathbf{f}_c - (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m \mathbf{A}_r^{*T} \mathbf{x}_b \} . \quad (2.106)$$

Подстановка формул (2.104) - (2.106) во второе уравнение системы (2.101) дает вспомогательное соотношение, которое используется в дальнейших преобразованиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_r \mathbf{q}_r = & \mu^m \mathbf{H}^T \mathbf{G}_M \mathbf{x}_b + \nu^n \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M \mathbf{f}_c + \\ & + \mathbf{C}_r (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \{ (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n \mathbf{C}_r^T \mathbf{f}_c - (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m \mathbf{A}_r^{*T} \mathbf{x}_b \} . \end{aligned} \quad (2.107)$$

Результатом всех преобразований является система из двух матричных уравнений, связывающих граничные и соединительные степени свободы с соответствующими им обобщенными силами:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_b \mathbf{x}_b - \mathbf{S}^T \mathbf{f}_c = \mathbf{f}_b , \\ \mathbf{x}_c = \mathbf{S} \mathbf{x}_b + \mathbf{R}_c \mathbf{f}_c . \end{cases} \quad (2.108)$$

Первое уравнение этой системы получается путем подстановки формул (2.104) - (2.106) в первое уравнение системы (2.101). Для вывода второго уравнения эти же формулы подставляются в очевидным образом получаемое из соотношения (2.94) выражение (после подстановки следует учесть формулу (2.107)):

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{C}^T \mathbf{G} \mathbf{x}_b + \mathbf{C}^T \mathbf{H} \mathbf{f}_c + \mathbf{C}_p \mathbf{q}_p + \mathbf{C}_a \mathbf{q}_a + \mathbf{C}_r \mathbf{q}_r .$$

Матрицы, входящие в систему (2.108) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_b(\lambda) = & \mathbf{K}_b - \lambda \mathbf{M}_b + \mathbf{A}^{*T} \mathbf{G} - \mu^m \mathbf{G}^T \mathbf{G}_M + \lambda^{-1} \mathbf{A}_p^* \mathbf{A}_p^{*T} - \\ & - \mathbf{A}_a^* (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \mathbf{A}_r^* (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^{2m} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T} , \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c(\lambda) = & \mathbf{C}^T \mathbf{H} + \nu^n \mathbf{H}^T \mathbf{H}_M - \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^T + \mathbf{C}_a (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{C}_a^T + \\ & + \mathbf{C}_r (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^{2n} (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{C}_r^T , \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\lambda) = & \mathbf{C}^T \mathbf{G} + \mu^m \mathbf{H}^T \mathbf{G}_M + \lambda^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^{*T} - \mathbf{C}_a (\Lambda_a - \lambda \mathbf{I}_a)^{-1} \mathbf{A}_a^{*T} - \\ & - \mathbf{C}_r (\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m (\nu \mathbf{N}_r^{-1})^n (\Lambda_r - \lambda \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{A}_r^{*T} . \end{aligned} \quad (2.111)$$

Матрица  $\mathbf{Q}_b$  в системе (2.108) содержит динамические жесткости граничных степеней свободы, матрица  $\mathbf{R}_c$  - динамические податливости соединительных степеней свободы, а матрицу  $\mathbf{S}$  в соответствии с терминологией работы [168] назовем геометрической.

Формулы (2.109) - (2.111) дают точные выражения для матриц системы (2.108), поскольку построены с использованием полного набора собственных векторов подконструкции. При редукции модального разложения, состоящей в отсечении высокочастотных собственных форм, формула замены переменных приобретает вид:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{X}_p & \mathbf{X}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{f}_c \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_a \end{Bmatrix},$$

а в выражениях для матриц (2.109) - (2.111) отбрасываются последние члены, содержащие диагональные матрицы вида  $(\mu \mathbf{M}_r^{-1})^m$  и  $(i \mathbf{N}_r^{-1})^n$ .

Отсюда следует, что для значений частоты, расположенных ниже наименьшей из отброшенных собственных частот, увеличение порядков корректирующих рядов  $m$  и  $n$  приводит к уменьшению погрешности при вычислении матриц системы (2.108).

Для случая  $m = n$  и  $\alpha = \beta$  можно записать общую асимптотическую оценку погрешности редукции матриц при увеличении порядка корректирующих рядов в виде:

$$\delta = O\left(\left\{\frac{\lambda + \alpha}{\sigma_r^{\min} + \alpha}\right\}^{2m}\right), \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.112)$$

где  $\sigma_r^{\min}$  - минимальная из частот отброшенных собственных форм.

Способ дальнейшего использования системы (2.108) определяется тем, на базе какого метода осуществляется объединение моделей подконструкций в единую систему - метода перемещений или метода сил.

Метод перемещений наиболее привычен для исследователей, применяющих метод конечных элементов. Матрицы динамических жесткостей подконструкций естественным образом объединяются в единую матрицу жесткостей сложной системы. Нули детерминанта этой единой матрицы являются собственными частотами системы. Матрица динамических жесткостей подконструкции, связывающая ее внешние степени свободы с соответствующими обобщенными силами

$$\mathbf{Q}_e(\lambda)\mathbf{x}_e = \mathbf{f}_e, \quad (2.113)$$

имеет вид:

$$\mathbf{Q}_e(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b + \mathbf{S}^T \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{S} & -\mathbf{S}^T \mathbf{R}_c^{-1} \\ -\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{S} & \mathbf{R}_c^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

Алгоритмическая схема реализации метода сил несколько сложнее (см., например, работы [159, 53]), однако возможны ситуации, когда его применение может оказаться более удобным. В этом случае матрица динамических податливостей в уравнении

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{R}_e(\lambda)\mathbf{f}_e, \quad (2.115)$$

имеет вид:

$$\mathbf{R}_e(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b^{-1} & \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} \mathbf{Q}_b^{-1} & \mathbf{R}_c + \mathbf{S} \mathbf{Q}_b^{-1} \mathbf{S}^T \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

Мы детально рассмотрели случай, когда для граничных степеней свободы использовались двойные корректирующие векторы, а для формирования матриц динамических коэффициентов влияния применялся метод замены переменных. Возможности модификации связаны с использованием для граничных степеней свободы простых корректирующих векторов, а также метода прямой подстановки при формировании матриц.

В общем случае гибридного подхода структура базы данных по подконструкции такова:

- 1) собственные частоты и векторы:  $\{\omega_k, \mathbf{x}_{0k}\}, k = 1, \dots, N_{eig};$



2) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{K}_b$ ,  $\mathbf{M}_b$  - при наличии граничных степеней свободы;

3) матрицы корректирующих векторов граничных степеней свободы:

$$\{\mathbf{G}_k^A, \mathbf{G}_k^B\}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad \left[ \{\mathbf{G}_M^A, \mathbf{G}_M^B\} \right] - \text{для двойных векторов,}$$

$$\mathbf{G}_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad [\mathbf{G}_M] - \text{для простых векторов;}$$

4) матрицы корректирующих векторов соединительных степеней свободы:

$$\mathbf{H}_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad [\mathbf{H}_M].$$

Квадратные скобки означают, что соответствующие матрицы используются только при формировании матриц динамических жесткостей или податливостей по методу замены переменных.

Для сопоставимости результатов в качестве примера применения гибридного метода вычислим собственные частоты изгибных колебаний составной консольной балки, описанной в разделе 2.1.1. Балка рассматривалась как конструкция, составленная из трех подконструкций (рис. 2.8). Для моделирования подконструкций А и С использован метод свободных границ, а для подконструкции В - гибридный метод. Здесь же показаны собственные частоты составной конструкции в сопоставлении с собственными частотами подконструкций.

Собственные частоты составной балки определялись путем синтеза с использованием метода перемещений. Показанная на рисунке частота среза определяла набор использованных собственных форм подконструкций.

Задача состояла в исследовании сходимости значений собственных частот, получаемых при синтезе подконструкций, к точным значениям в зависимости от порядка корректирующих рядов. Конечноэлементные модели подконструкций А, В и С состояли соответственно из 6, 6 и 8 элементов. Точные значения получены с помощью объединенной модели, состоящей из 20 элементов.

На графике (рис. 2.9) представлена относительная погрешность вычисления собственных частот при синтезе подконструкций в зависимости от по-

рядка корректирующего ряда (значения  $m$  задавались одинаковыми для всех подконструкций). Цифрами напротив кривых отмечены номера тонов составной конструкции. В соответствии с асимптотическими оценками точность снижается с возрастанием номера тона.

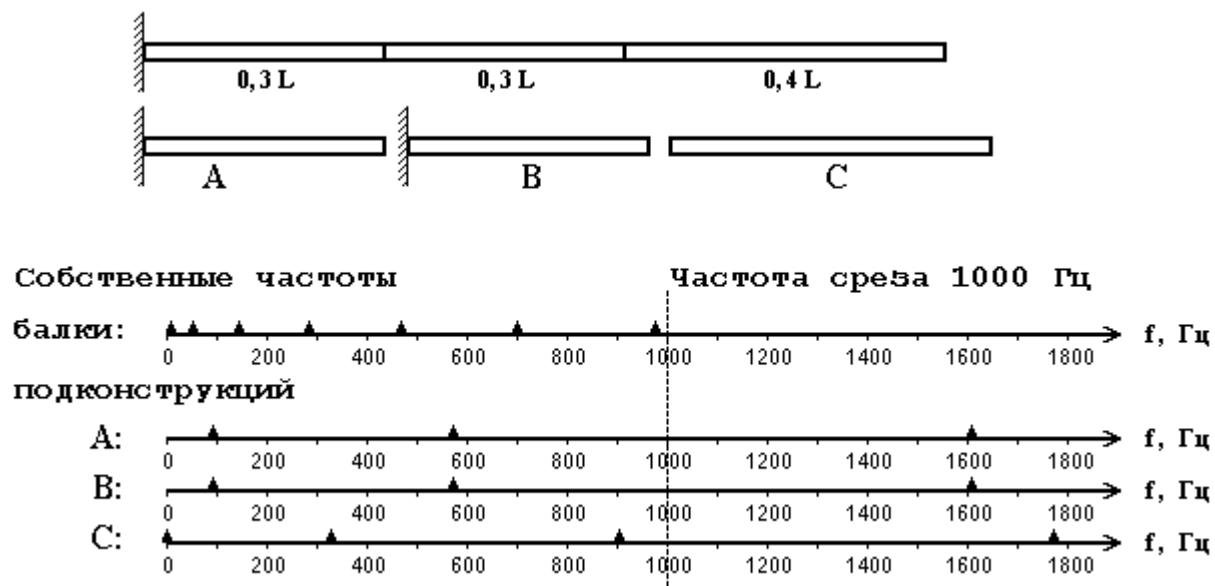


Рис. 2.8.

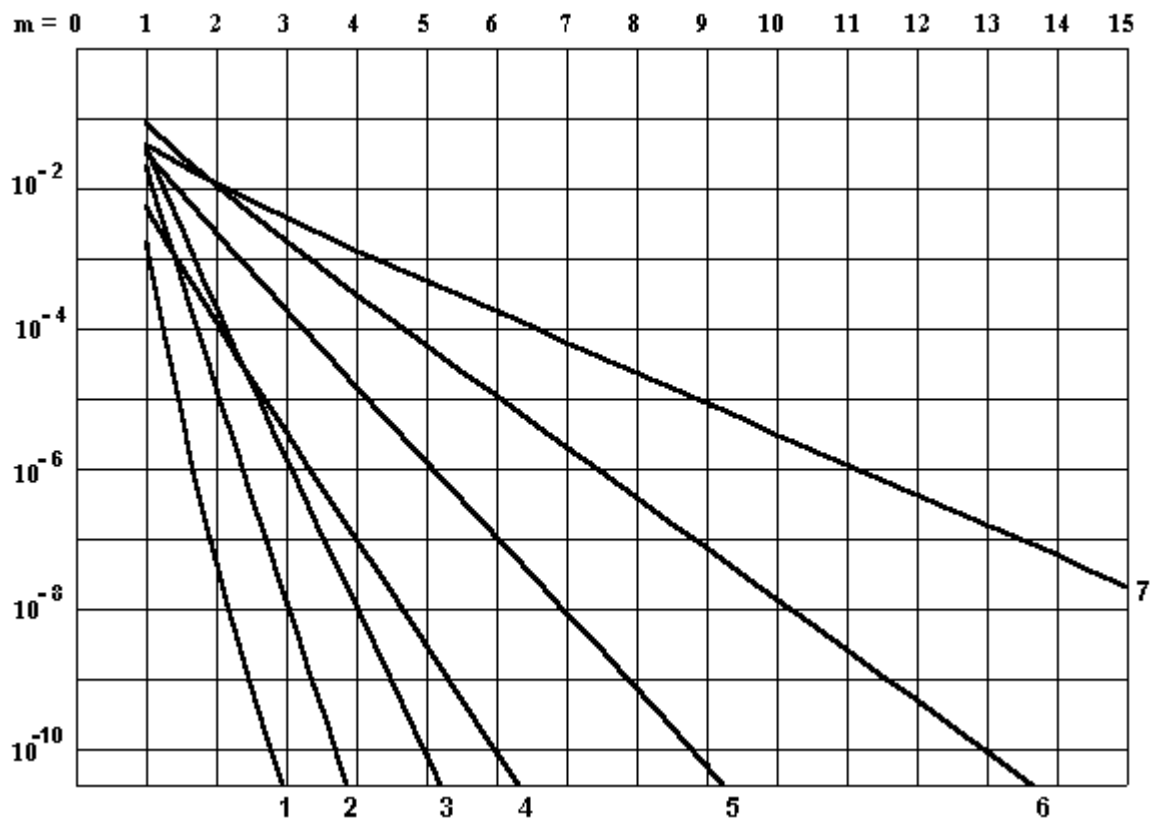


Рис. 2.9.

## 2.4. Расчет амплитудно-фазовых частотных характеристик сложных упругих систем с учетом демпфирования.

Высокая эффективность метода корректирующих рядов проявляется при исследовании амплитудно-фазовых частотных характеристик составных упругих конструкций. Выполнив подготовительные расчеты, в результате которых формируются базы данных входящих в сложную систему подконструкций, можно быстро и оперативно исследовать ее динамические свойства. Каждой точке годографа АФЧХ на комплексной плоскости соответствуют операции, состоящие лишь в вычислении компонент матриц динамических коэффициентов влияния каждой из подконструкций, формировании матрицы динамических жесткостей или динамических податливостей составной конструкции и решении системы линейных алгебраических уравнений. В случае относительно небольшого количества узлов соединения порядок этой системы невелик и все необходимые расчеты требуют весьма незначительного времени. Подробные с учетом всех резонансных особенностей графики частотных характеристик получаются за считанные секунды работы компьютера. При этом следует учесть возможность быстрого изменения конфигурации и состава сложной системы без повторного пересчета динамических характеристик отдельных ее составляющих, чтобы оценить удобство метода при исследовании конструктивных вариантов.

При построении амплитудно-фазовых частотных характеристик упругой системы необходимо учитывать демпфирование ее составляющих. Будем исходить из предположения о том, что демпфирование в каждой подконструкции пропорциональное. В этом случае диссипативная матрица  $\mathbf{C}$ , входящая в уравнения колебаний конечноэлементной модели подконструкции:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad , \quad (2.117)$$

может быть представлена в виде суммы двух матриц:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_M + \mathbf{C}_K, \quad (2.118)$$

одна из которых характеризует внешнее демпфирование

$$\mathbf{C}_M = \gamma_M \mathbf{M}, \quad (2.119)$$

а вторая - внутреннее демпфирование

$$\mathbf{C}_K = \gamma_K \mathbf{K}. \quad (2.120)$$

Таким образом, демпфирование каждой из подконструкций характеризуется двумя параметрами:  $\gamma_M$  и  $\gamma_K$ .

В случае гармонических колебаний системы, переходя к комплексным амплитудам, с учетом (2.117) - (2.119) имеем:

$$(\mathbf{K} - p\mathbf{M})\mathbf{x} = \frac{1}{1 + i\omega\gamma_K} \mathbf{f}, \quad (2.121)$$

где  $i$  - мнимая единица, а  $p$  - комплексный параметр:

$$p = \frac{\omega^2 - i\omega\gamma_M}{1 + i\omega\gamma_K}. \quad (2.122)$$

К системе уравнений (2.121) можно применить описанную выше схему разложения решения в ряды по собственным и корректирующим векторам по формуле (2.94).

Уравнение (2.121) по виду не отличается от (2.1), и поэтому для него применимы все преобразования, приведшие к системе уравнений (2.108). При этом частотный параметр  $\lambda$  заменяется на  $p$ . Комплексные матричные корректирующие ряды имеют по-прежнему вид (2.95), (2.96), однако параметры  $\mu$  и  $\nu$  становятся комплексными

$$\mu = p + \alpha, \quad \nu = p + \beta,$$

а система (2.108) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Q}}_b \mathbf{x}_b - \tilde{\mathbf{S}}^T \mathbf{f}_c = \mathbf{f}_b, \\ \mathbf{x}_c = \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{x}_b + \tilde{\mathbf{R}}_c \mathbf{f}_c, \end{cases} \quad (2.123)$$

с комплексными матрицами:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_b(\omega) = (1 + i\omega\gamma_k)\mathbf{Q}_b(p) \quad ,$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_c(\omega) = \mathbf{R}_c(p)/(1 + i\omega\gamma_k) \quad ,$$

$$\tilde{\mathbf{S}}(\omega) = \mathbf{S}(p) \quad .$$

Далее для исследования гармонического отклика демпфированной сложной системы можно использовать как метод перемещений, так и метод сил. Комплексные матрицы динамических жесткостей и динамических податливостей получаются по формулам, аналогичным (2.114) и (2.116).

Отметим, что различные модули в составе одной сложной конструкции при таком подходе могут иметь разные параметры демпфирования  $\gamma_m$  и  $\gamma_k$ . В таком случае демпфирование для составной конструкции в целом уже не будет пропорциональным.

В качестве примера исследования динамики демпфированной составной конструкции возьмем ту же консольную балку, которая рассмотрена в разделе 2.1.1. Пусть задача состоит в определении передаточной функции, характеризующей отклик системы - поперечное перемещение  $w$  точки, расположенной в середине балки, на действие поперечной изгибающей гармонической силы  $P$ , приложенной к свободному концу балки (рис 2.10).

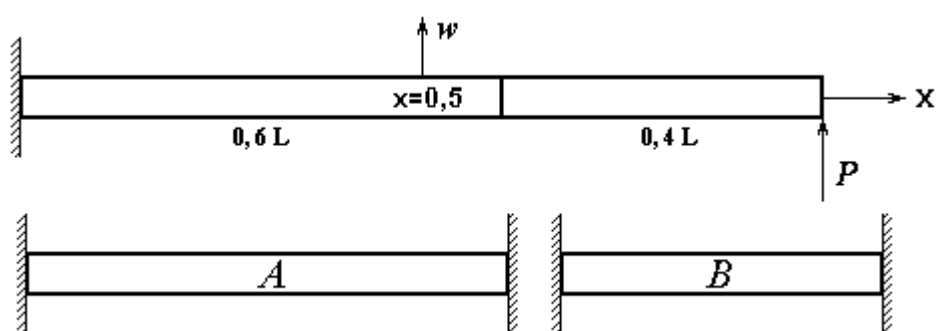


Рис. 2.10.

В рамках описанной методики точка приложения силы к составной конструкции должна входить в число точек, содержащих внешние параметры, с тем чтобы эту силу можно было включить в вектор правой части объединен-

ной системы уравнений. В данном случае эту точку можно формально включить в число точек соединения, считая в дальнейшем, что она сопрягается лишь с одной из подконструкций.

Используем метод жестких границ. При этом закрепление подконструкций в точках соединения означает, что и для балки  $A$ , и для балки  $B$  решается задача о собственных колебаниях при условии жесткой заделки с обеих сторон (собственные частоты приведены в таблице 8).

Таблица 8

№ тона	Подконструкции	
	$A$	$B$
1	145,388874	327,147106
2	400,813915	902,287198
3	786,033563	-

Информация баз данных о собственных и корректирующих векторах подконструкций была дополнена данными о коэффициентах форм, позволяющими вычислять искомую локальную характеристику - перемещение исследуемой точки, входящей в первую подконструкцию.

При расчете значения параметров демпфирования задавались равными  $\gamma_m = 0,1$  и  $\gamma_k = 0,01$  для каждой из подконструкций.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика строилась в окрестности первого тона колебаний составной конструкции. На рис. 2.11 полученные результаты представлены в виде годографов на комплексной плоскости. На кривых отмечены точки, соответствующие указанным значениям частоты гармонического воздействия (в Гц). Кривые 1 и 2 получены для порядка корректирующих рядов  $m = 1$  при учете одного тона колебаний в каждой из подконструкций и при учете всего набора тонов, указанных в таблице 8. Кривая 3 в пределах точности построения соответствует результатам, полученным для  $m > 1$  при учете одного или более тонов для каждой из подконструкций. Также в кривую 3 вписываются точные результаты, полученные по аналитическим

формулам для континуальной задачи. Тем самым, высокая точность результатов обеспечивается уже при введении корректирующих рядов второго порядка.

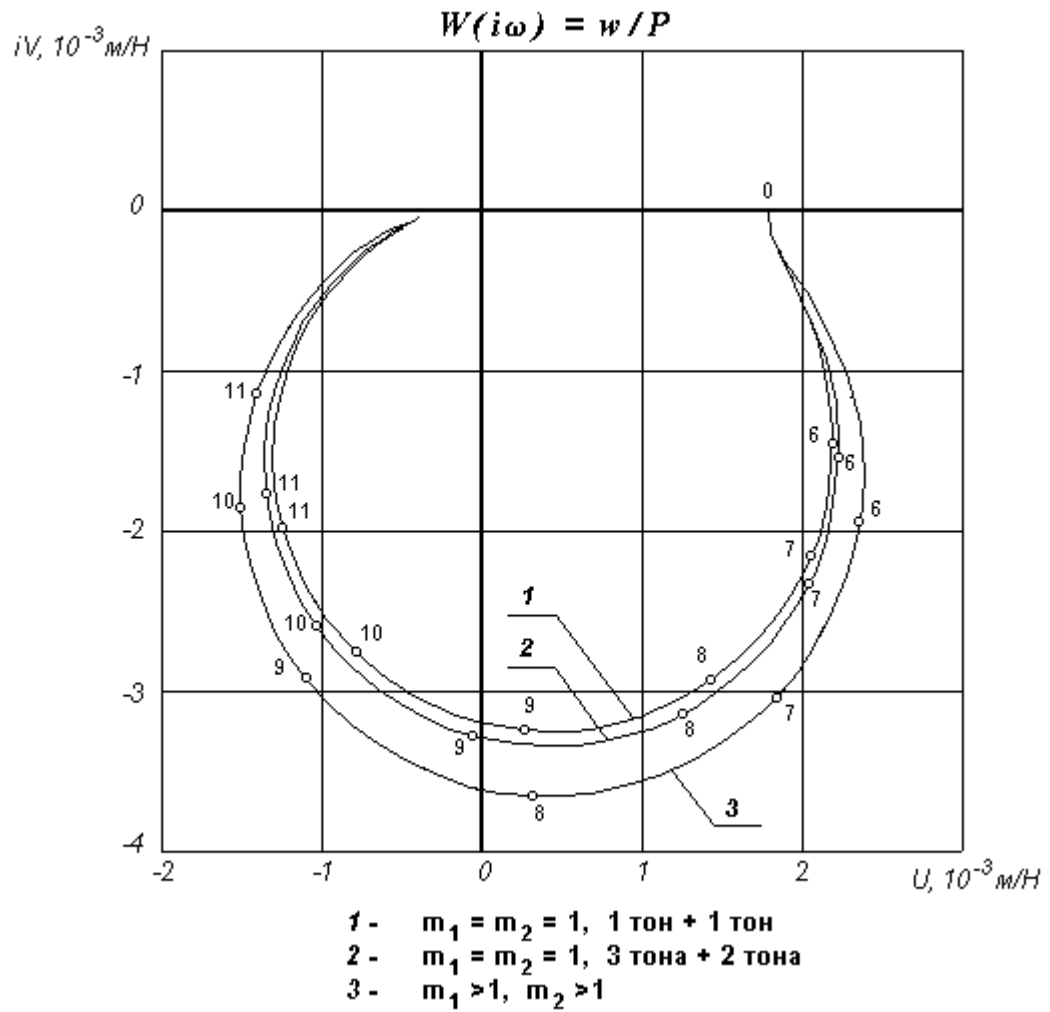


Рис. 2.11.

## 2.5. О синтезе аналитических и дискретных моделей подконструкций.

В главе 1 сформулированы наиболее общие соотношения метода корректирующих рядов, применимые к произвольным аналитическим моделям подконструкций. Идентичность систем уравнений (1.18) и (2.108) приводит к выводу о совместимости этих соотношений с разработанными для дискретных моделей подходами. Это дает возможность включения в разработанные программные вычислительные комплексы блоков расчета динамических коэффициентов влияния подконструкций на основе аналитических соотношений без предварительного анализа их динамических характеристик в случае, когда такие соотношения могут быть выведены для их собственных форм и членов корректирующего ряда.

В разделе 4.3 рассмотрена аналитическая модель подконструкции, описывающая изгибные колебания однородной балки, внешние параметры которой соответствуют прогибам и поворотам ее концов. Для нее выведены соотношения метода корректирующих рядов и получены формулы для построения матриц динамических коэффициентов влияния, соответствующих редуцированным модальным разложениям.

Для проведения численных исследований применения выведенных в разделе 1.4 соотношений выбран, как и в разделах 2.1 - 2.4, пример составной консольной балки (рис. 2.12).

Балка рассматривается как система двух подконструкций, представляющих собой шарнирно опертые балки. Собственные частоты такой системы вычислены с помощью синтеза аналитических моделей подконструкций и сопоставлены с известными точными решениями с целью исследования точности результата в зависимости от числа членов корректирующих рядов. Синтез осуществлялся с помощью метода перемещений.



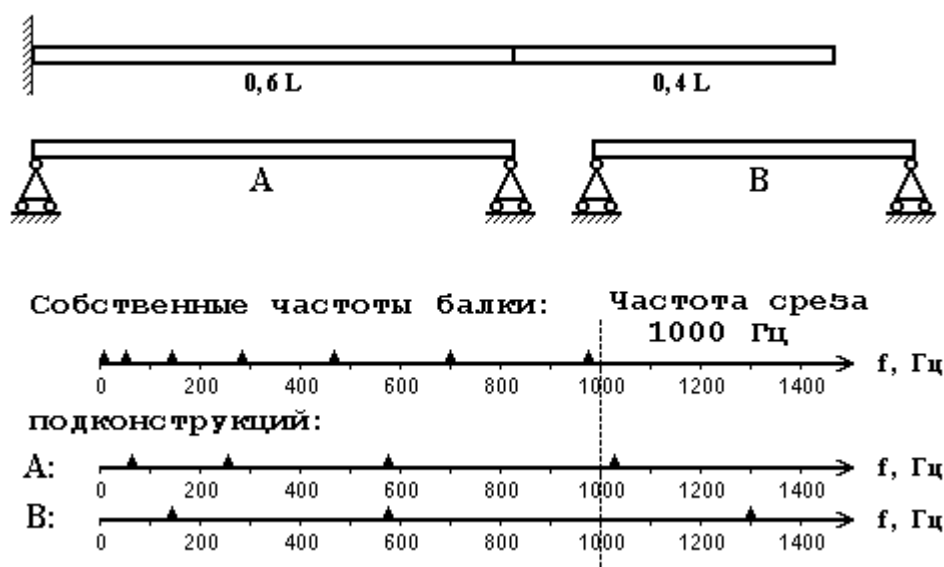


Рис.2.12.

При проведении исследований полагалось, что число членов в корректирующих рядах для граничных степеней свободы совпадает с их числом для соединительных степеней свободы ( $m = n$ ) и одинаково для обеих подконструкций. Обусловленная частота среза 1000 Гц определяла количество собственных форм, учитываемых в модальных разложениях колебаний подконструкций, как видно из диаграмм на рис. 2.12.

Относительная погрешность вычисления собственных частот при синтезе подконструкций в зависимости от порядка корректирующих рядов представлена графически на рис. 2.13. Номера кривых соответствуют номерам тонов составной конструкции, сходимость к которым исследована.

Начальные участки полученных кривых соответствуют по характеру экспоненциальному убыванию погрешности с возрастанием порядков корректирующих рядов согласно асимптотической оценке (1.20). Пунктирное окончание кривых означает, что процесс вычисления собственных частот при увеличении порядка корректирующих рядов вырождается: наблюдается беспорядочное чередование положительных и отрицательных значений характеристического определителя. Этот эффект рассмотрен применительно к дискретным моделям подконструкций в разделе 2.1.2. Неустойчивость рекуррентного про-

цесса вычисления высших членов корректирующего ряда по отношению к возмущениям, содержащим гармоники, соответствующие низшим тонам колебаний подконструкции приводит к накоплению погрешностей, полностью искажающих решение. Подавить неустойчивость в случае дискретных моделей удастся путем построения корректирующих рядов в подпространстве, ортогональном учтенным в модальном разложении собственным формам. При этом на каждом шаге рекуррентного процесса должна выполняться дополнительная ортогонализация решения к этим собственным формам.

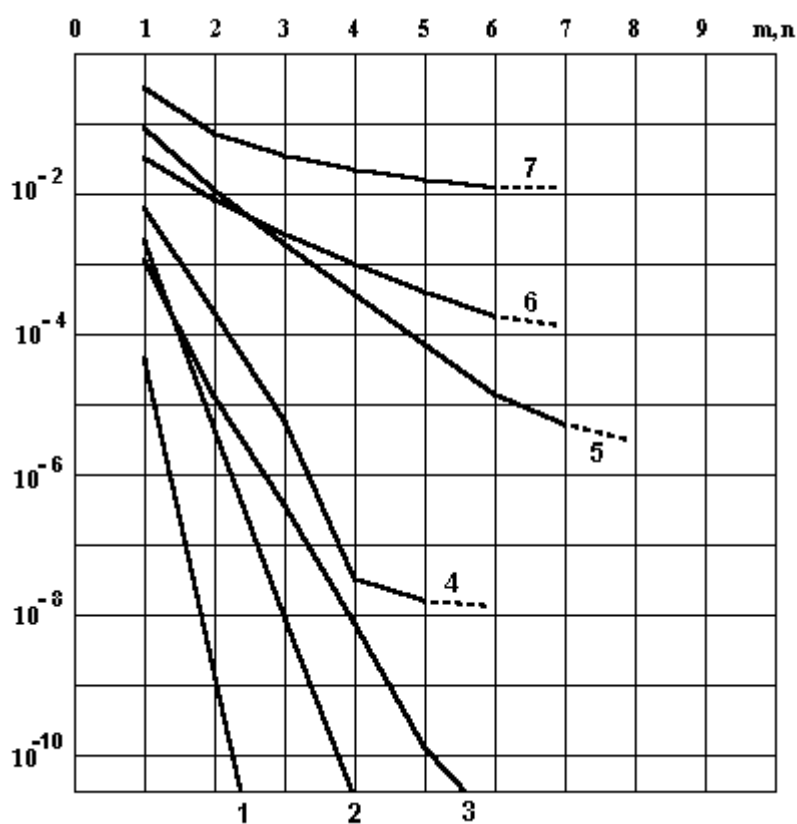


Рис.2.13.

В рассмотренном здесь примере корректирующие функции представлены наборами полиномиальных коэффициентов  $\{C_{i,k}^l, k = 0, \dots, l\}$  и  $\{D_{i,k}^l, k = 0, \dots, l\}$ . Рекуррентный процесс их вычисления для  $l = 1, 2, \dots$  также связан с накоплением погрешностей в соответствии с характером неустой-

чивости последовательностей решений краевых задач (1.22) и (1.23). Эта неустойчивость неизбежно приводит к неустойчивости любого численного алгоритма, моделирующего этот процесс. Реализация процесса построения корректирующих функций в ортогональном собственным формам подпространстве с корректировкой на каждом шаге связана с определенным усложнением алгоритма аналогично тому, как это сделано в разделе 2.1.2 применительно к дискретным моделям подконструкций. Это создает дополнительные сложности в и без того непростой задаче вывода аналитических соотношений для континуальной модели подконструкции.

## 2.6. Расчет динамических характеристик орбитальной космической станции.

На основе полученных теоретических результатов по использованию корректирующих рядов для повышения точности синтеза динамических характеристик составных упругих конструкций разработан программный комплекс, предназначенный для проведения расчетов на компьютерах типа IBM PC.

Программные компоненты комплекса позволяют рассчитывать собственные частоты и формы колебаний отдельных модулей конструкции, которые в дальнейшем используются при исследовании динамических свойств сложной структуры, в частности для расчета амплитудно-фазовых частотных характеристик, определяющих нагрузки и деформации в заданных сечениях при внешних динамических воздействиях.

Синтез подконструкций осуществляется с использованием гибридного метода в том виде, как он изложен в разделе 2.3. Использование корректирующих рядов позволяет достигать высокой точности результата при минимальном объеме расчетов для отдельных модулей. Это следствие основного вывода теории корректирующих рядов, состоящего в том, что для обеспечения любой необходимой точности описания поведения модуля в заданном частотном интервале достаточно информации о его нижней части спектра, включающей все собственные частоты, не превосходящие верхнюю границу этого интервала.

Синтез конструкции по данным о ее модулях осуществляется в двух программах комплекса.

С помощью первой из них может быть проведено исследование частотного интервала на предмет выделения корней характеристического уравнения составной конструкции. Эта программа имеет вспомогательный характер и ее

результаты могут способствовать более точному выделению пиков частотных характеристик.

Существенное практическое значение имеет вторая программа, позволяющая получать амплитудно-фазовые частотные характеристики (АФЧХ), устанавливающие непосредственную зависимость представляющих интерес параметров (перемещений, деформаций, напряжений), характеризующих поведение модулей в составе конструкции, от частоты внешнего гармонического воздействия с единичной амплитудой. В этой программе предусмотрена возможность учета демпфирования в подконструкциях в соответствии с формулами раздела 2.4.

Важность получаемых в этой программе результатов определяется тем, что АФЧХ управляемого упругого объекта непосредственно используется при разработке систем управления и анализе его устойчивости. Также АФЧХ можно использовать для исследования динамического нагружения элементов упругой системы в переходных процессах, связанных с различного рода внешними воздействиями.

Исходные данные по подконструкциям формируются заранее и сохраняются в базах данных, файлы которых формируются программами расчета динамических характеристик модулей.

Программный комплекс строится с учетом возможности в процессе дальнейшей доработки расширения типов включаемых подконструкций как в плане их механической структуры (балки, пластины и т.п.), так и в плане метода получения данных об их спектре (численные методы, аналитические формулы, экспериментальные результаты).

В настоящее время в состав комплекса входят программы для работы с пространственными стержневыми конструкциями, исследование которых на предмет включения в сложную конструкцию в качестве составляющих модулей проводится методом конечных элементов. К ним относятся:

- препроцессор программы конечноэлементного расчета, облегчающий формирование исходных данных и выполняющий ряд сервисных функций;
- собственно программа конечноэлементного анализа пространственных стержневых конструкций, в которой осуществляется вычисление собственных частот и форм колебаний подконструкций;
- постпроцессор, в котором формируются файлы базы данных, используемой в программах синтеза подконструкций.

Используемая версия программы позволяет обрабатывать конечноэлементные модели подконструкций с числом степеней свободы до 32767, т.е. число узлов может превышать 5000. Это не производит впечатления по сравнению с сотнями тысяч степеней свободы, достижимыми в таких системах, как NASTRAN. Однако цель настоящей разработки как раз и состоит в том, чтобы избежать необходимости работы с громоздкими моделями, требующими чрезвычайно больших затрат времени и памяти ЭВМ. Существенной экономии времени и средств можно достичь, сводя проблему к совокупности задач низкой размерности и исключая повторные расчеты неизменяемых модулей при исследовании модификаций сложной системы.

Возможности, открывающиеся при последовательном использовании средств, обеспечивающих осуществление синтеза подконструкций в исследовании динамических свойств сложных составных космических средств, могут быть проиллюстрированы на примере блоков орбитальной космической станции типа "Альфа". На примере расчетов, выполненных для одного из вариантов сборки станции, мы сделаем практические выводы и сформулируем ряд рекомендаций.

Анализ сложности типичных вариантов сборки космической станции показывает, что формирование ее путем соединения модулей различного функционального назначения хорошо согласуется с идеей разбиения сложной конструкции на подконструкции при исследовании ее динамических свойств. Динамические характеристики и вспомогательные корректирующие вектора

для каждого модуля могут быть вычислены отдельно и помещены в соответствующие этим модулям базы данных.

Объем предварительных исследований для каждого модуля (определяющая составляющая этого объема - собственные частоты и формы колебаний) зависит от частотного диапазона, представляющего интерес для разработчиков системы. Уже на этом этапе проявляется преимущество методики, основанной на использовании корректирующих рядов, поскольку она позволяет ограничиться лишь теми тонами модуля, собственные частоты которых попадают в этот частотный диапазон.

В то же время относительно небольшая конструктивная сложность отдельного модуля по сравнению со станцией в сборе позволяет осуществить достаточно подробное его математическое моделирование с использованием численных методов на базе серийного персонального компьютера типа IBM PC и с приемлемой точностью получить его собственные частоты и формы колебаний, ограничившись при этом разумным временем счета.

Исследование динамики составной конструкции осуществляется с использованием лишь данных по отдельным модулям. Ключевым моментом в этом исследовании является формирование матриц динамических жесткостей модулей и компоновка на их основе матрицы динамических жесткостей составной конструкции. Размерность этой матрицы определяется количеством степеней свободы в узлах соединения подконструкций. Для космической станции в различных вариантах сборки количество объединяемых модулей можно оценить величиной порядка 15 - 20 при примерно таком же, около 20, числе узлов сопряжения. Это приводит к необходимости работать с матрицами порядка 120, что без труда укладывается в возможности того же персонального компьютера типа IBM PC.

Рассмотрим вариант сборки космической станции, включающий следующие компоненты (см. рис. 2.14):

- служебный модуль (СМ);

- функционально-грузовой блок (ФГБ);
- нижнюю часть научно-энергетической платформы (НЭП1);
- универсальный стыковочный модуль (УСМ);
- стыковочный отсек (СО).

Кроме того, к служебному модулю и к стыковочному отсеку могут быть пристыкованы два транспортных корабля (ТК) типа "Прогресс".

На рис. 2.14 жирными точками выделены узлы соединения модулей. Нумерация этих узлов произвольная и служит для их идентификации при включении в систему отдельных модулей. Каждый модуль схематизирован стержневой моделью, включающей сосредоточенные массы и пружинные соединения.

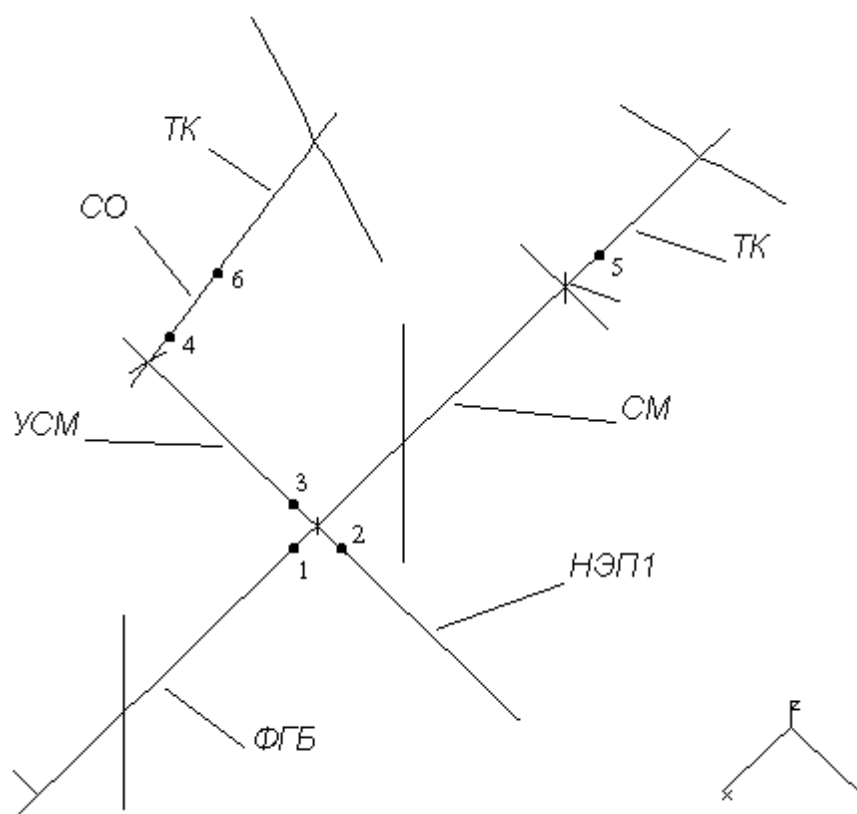


Рис. 2.14.



При проведении исследования предполагается заданным частотный диапазон 0 - 2 Гц, в пределах которого необходимо определять динамические характеристики составной конструкции. В таблице 9 приведены собственные частоты модулей, входящие в этот диапазон.

Для оценки эффективности синтеза подконструкций, выполняемого по описанной методике, были вычислены собственные частоты свободных колебаний станции с сборе с пристыкованными ТК с использованием полной конечноэлементной модели, объединяющей все указанные модули. Эта модель имела высокую размерность и проведение таких расчетов потребовало значительных затрат времени. Результаты этих прямых расчетов приведены в таблице 10. На рис. 2.15, 2.16 показаны формы первого и второго тонов колебаний системы.

Таблица 9.

Собственные частоты модулей, входящие в интервал 0 - 2 Гц					
ФГБ	СМ	НЭП1	УСМ	СО	ТК
1 0.10193746 2 0.10194244 3 0.28262268 4 0.28332695 5 0.58951034 6 0.59658577 7 0.60860382 8 0.60860646 9 1.28332503 10 1.28333644 11 1.42645444 12 1.45345018 13 1.55630943 14 1.62868297 15 1.89376622 16 1.89377057	1 0.09784690 2 0.09791270 3 0.22606263 4 0.22606349 5 0.36504816 6 0.36534054 7 0.61194924 8 0.61255316 9 1.71198409 10 1.71468926				1 0.83820762 2 0.83936636 3 1.57720115 4 1.59929474
Низшая собственная частота за пределами интервала 0 - 2 Гц					
17 2.87434155	11 3.01091790	1 3.13098516	1 7.65583367	1 38.92789800	5 4.73516458

Для каждого из модулей была сформирована база данных, включающая его собственные вектора, собственные частоты которых входят в указанный диапазон, а также набор корректирующих векторов в соответствии с определенным для модуля набором узлов, по которым может осуществляться его стыковка с другими модулями.

Таблица 10.

Собственные частоты свободных колебаний станции с двумя ТК (Гц)					
1	0.09835959	13	0.60860140	25	1.28333491
2	0.10055701	14	0.60860646	26	1.28333644
3	0.10194244	15	0.61130172	27	1.33846705
4	0.10198934	16	0.61318272	28	1.55387849
5	0.22606349	17	0.63248842	29	1.58215051
6	0.22608753	18	0.82733001	30	1.65507803
7	0.28478074	19	0.83775358	31	1.70722656
8	0.28574999	20	0.83880774	32	1.71669878
9	0.36720177	21	0.84493556	33	1.89298948
10	0.36867448	22	0.86258164	34	1.89376622
11	0.58527041	23	0.96763572	35	1.89388176
12	0.59752085	24	1.02872007		

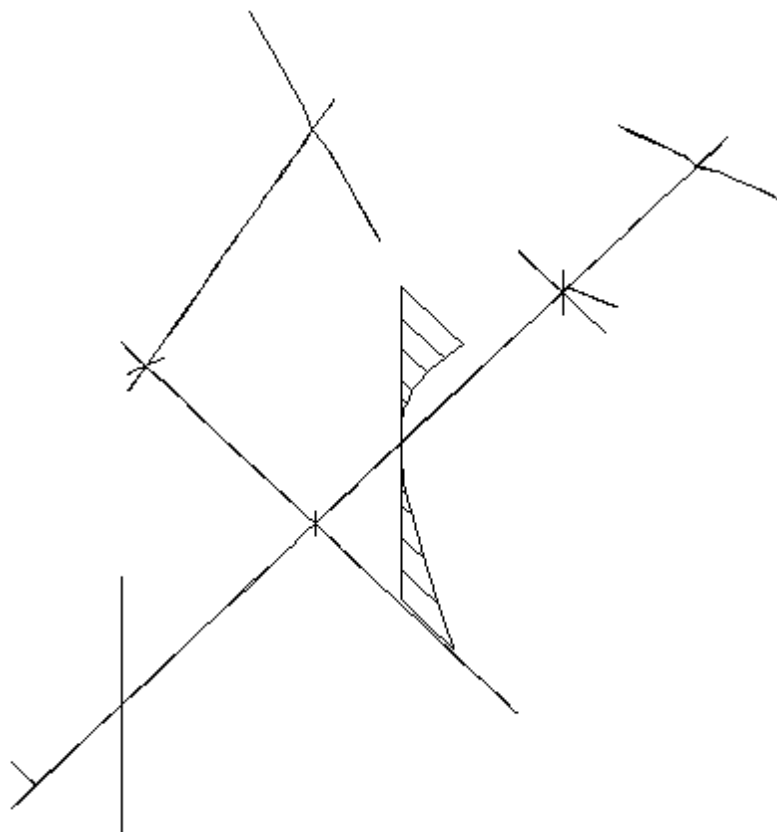


Рис. 2.15.

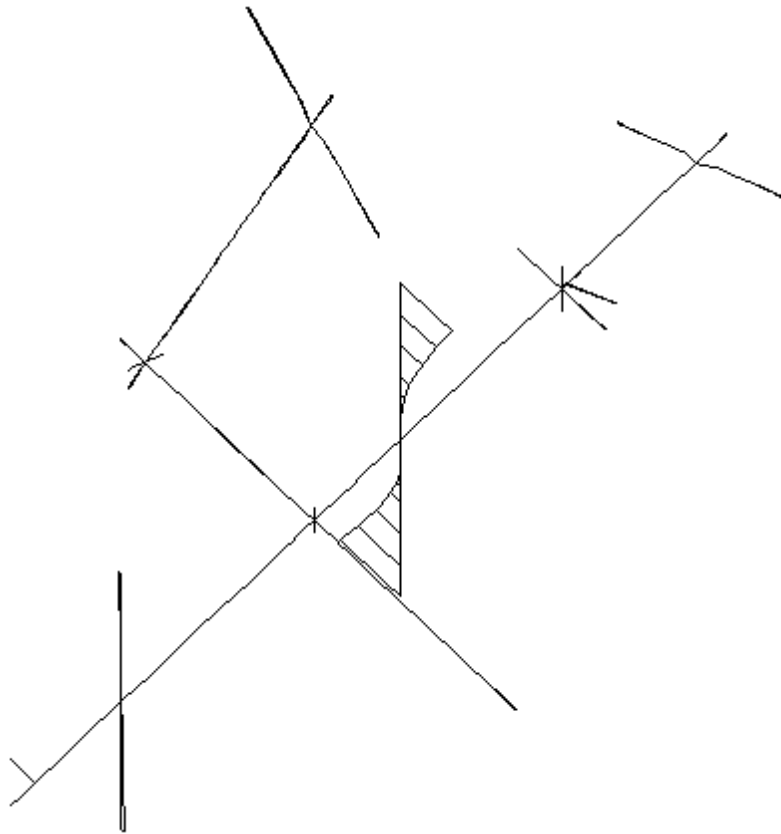


Рис. 2.16.

В дальнейшем, имея такую совокупность баз данных, можно осуществлять "сборку" составной конструкции требуемой конфигурации, задавая в специальном файле порядок соединения модулей. В таблице 11 для отдельных собственных частот приведены результаты их вычисления с использованием таким образом синтезированной модели. При проведении расчетов варьировалось количество членов корректирующих рядов. Из таблицы хорошо видна основная закономерность метода корректирующих рядов, состоящая в обязательной сходимости результатов к точным значениям при увеличении числа корректирующих членов, если в разложениях учтены все тона модулей, с собственными частотами, не превосходящими верхнюю границу заданного частотного интервала.

Исследуя таблицу 9, можно заметить, что ряд модулей в составе конструкции вообще не имеет собственных частот, входящих в заданный частотный диапазон. Поэтому в базах данных по этим модулям информация об их собст-

венных частотах отсутствовала, т.е. их динамические свойства при синтезе в заданном частотном диапазоне вполне адекватно описывались с помощью корректирующих векторов, получаемых из решения статических задач.

Таблица 11.

<i>m</i>	Номер тона			
	1	2	10	11
1	0.09953652	0.10203710	–	–
2	0.09835968	0.10055775	0.36867753	0.58530526
3	0.09835959	0.10055701	0.36867450	0.58526622
4	0.09835959	0.10055701	0.36867448	0.58526528
5	0.09835959	0.10055701	0.36867448	0.58526526

<i>m</i>	Номер тона			
	20	21	30	35
1	–	–	–	–
2	0.83890343	0.84549437	1.69593721	1.93522211
3	0.83881204	0.84496883	1.66332550	1.89861498
4	0.83880795	0.84493762	1.65675376	1.89417389
5	0.83880775	0.84493569	1.65544014	1.89391267

Результаты выполненных исследований приводят к выводу о том, что наличие удобного программного средства, основанного на методе синтеза динамических характеристик с применением корректирующих рядов, позволяет существенно упростить исследование динамики сложной космической системы, опираясь на последовательное использование модульности конструкции. При этом можно существенно сократить объемы необходимых расчетов, значительно сэкономить время, избежать повторных вычислений и повысить оперативность анализа при исследовании конструктивных вариантов. Полученный опыт позволяет сформулировать ряд рекомендаций, приводимых ниже.

1. При планировании проведения исследований динамики составной космической системы следует систематически на всех этапах использовать модульность ее конструкции. В качестве модулей при проведении расчетов могут рассматриваться как функциональные блоки, объединяющие несколько стыкуемых элементов, так и части достаточно сложных составляющих системы (солнечные батареи, отсеки и т.п.).

Желательно, чтобы расчетный модуль представлял собой относительно простую конструкцию, исследование динамических характеристик которой не требует значительных затрат. Кроме того, должны быть для каждого модуля выделены узлы его возможного соединения с другими составляющими в процессе сборки или в процессе функционирования системы при стыковке, расстыковке или какой-либо иной модификации конструкции. Эти узлы определяют для расчетного модуля набор вычисляемых корректирующих векторов.

2. При проведении исследований должен быть определен частотный диапазон, представляющий интерес в связи с характерными частотами внешних воздействий или спектральными фильтрующими свойствами элементов системы управления. Исследования, которые необходимо выполнить для каждого модуля в рамках описанной методики, включают лишь вычисление его собственных форм колебаний, частоты которых не превышают верхнюю границу этого диапазона. Количество же вычисляемых членов корректирующего ряда для обеспечения удовлетворительной точности равно 3 - 5.

3. Данные о собственных частотах и формах колебаний модулей и корректирующих векторах, содержащиеся в предварительно сформированных базах данных по отдельным модулям системы, могут быть необходимы не только на этапе ее разработки, но и на последующих стадиях ее существования. Каждая модификация системы, связанная с изменением ее конфигурации, приводит к изменению ее динамических свойств, что весьма важно с точки зрения функционирования системы управления и возникающих нагрузок. Имея набор баз данных по всем модулям, которые могут входить в систему, легко выполнить оценку критических параметров, не повторяя при этом однажды выполненную работу.

Возможна ситуация, когда вносятся существенные с точки зрения динамики системы изменения в конструкцию одного модуля. Тогда внесение изменений в отдельный модуль требует лишь корректировки соответствующей ему базы данных и не касается предварительных исследований, проведенных для

остальных модулей. Тем самым также может быть достигнут значительный экономический эффект с учетом большого количества модулей, составляющих систему.

# Глава 3. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЕМАМИ ЖИДКОСТИ.

Рассматриваются малые колебания упругой конструкции с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью (рис. 3.1).

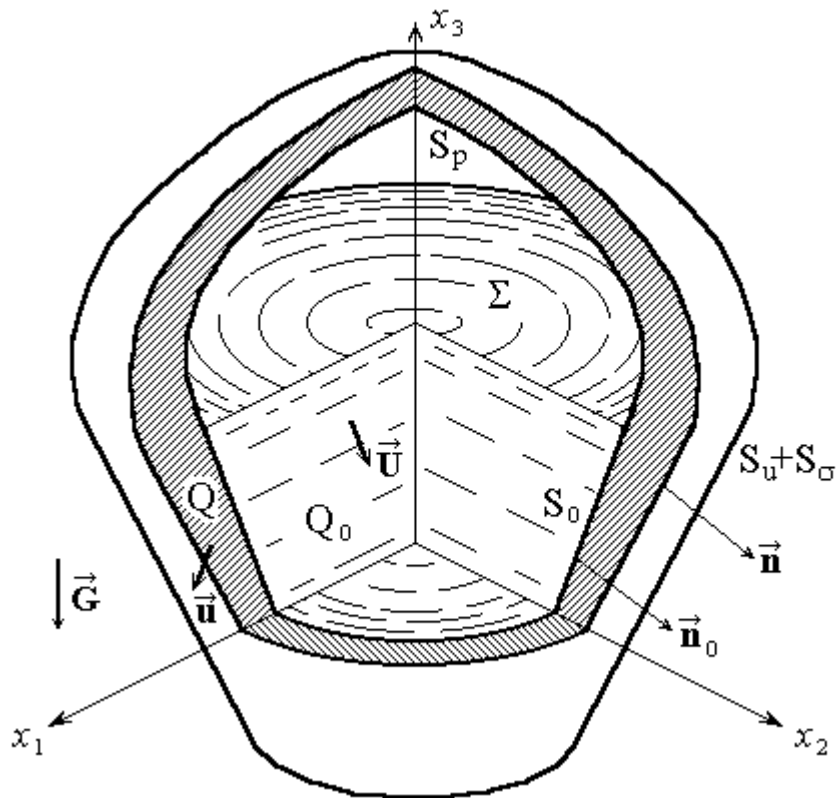


Рис. 3.1.

Обозначим  $Q$  и  $Q_0$  - объемы, занятые упругим телом и жидкостью (в недеформированном состоянии). Поверхность упругого тела  $S$  образована следующими составляющими:

$S_0$  - поверхность полости, смоченная жидкостью объема  $Q_0$ ,

$S_p$  - поверхность полости, подверженная действию избыточного внутреннего давления газов  $p_0$ ,

$S_u$  и  $S_\sigma$  - участки поверхности, на которых заданы кинематические и динамические граничные условия.

Границу жидкой массы составляют свободная поверхность  $\Sigma$  и контактная поверхность  $S_0$ .

Жидкость считаем идеальной и несжимаемой, твердое тело - линейно упругим. Движение такой механической системы рассматривается в глобальной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , представляющих собой набор переменных Лагранжа. Перемещения точек упругого тела описываются векторным полем  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ , а перемещения частиц жидкости - полем  $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x})$ , определенными соответственно в областях  $Q$  и  $Q_0$ .

Конструкция находится в однородном гравитационном поле с вектором ускорения свободного падения  $\vec{G}$ , который направлен антипараллельно оси  $Ox_3$ . Свободная поверхность жидкости в невозмущенном состоянии в таком случае параллельна плоскости  $Ox_1x_2$ .

### 3.1. Уравнения малых колебаний жидкости в лагранжевой форме и кинематические условия на контактной поверхности.

Традиционно в работах, посвященных проблемам колебаний конструкций, содержащих жидкость, исследователи основывались на совмещении двух различных способов описания движения сплошной среды. Если уравнения малых колебаний упругого тела представляют лагранжев подход, то для описания движения жидкости наиболее распространен метод Эйлера. При этом используется предположение о потенциальности течения жидкости, позволяющее существенно упростить соответствующие уравнения.

Возможность последовательного единого лагранжева подхода в проблемах динамического взаимодействия разнородных сред показана в работах [58, 96, 59], где основное внимание уделено вопросам нелинейности получаемых



соотношений. Предположение о малости колебаний позволяет перейти к линейным уравнениям, выполнив линеаризацию определяющих соотношений в окрестности стационарных значений переменных параметров, вариации значений которых полагаются малыми.

В настоящей работе вывод уравнений осуществлен на основе лагранжевого подхода как для упругой конструкции, так и для заполняющей ее полости жидкости.

В работе [60] приведены уравнения движения идеальной жидкости в лагранжевой форме, которые применительно к рассматриваемому случаю записываются через перемещения в виде:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) \ddot{U}_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \ddot{U}_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} (\ddot{U}_3 + G) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \ddot{U}_1 + \left(1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) \ddot{U}_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} (\ddot{U}_3 + G) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \ddot{U}_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \ddot{U}_2 + \left(1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) (\ddot{U}_3 + G) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $P$  - давление,  $\rho_0$  - плотность жидкости.

В предположении малости перемещений эти уравнения могут быть линеаризованы посредством исключения членов выше первого порядка малости (полное давление  $P$  не является малой величиной ввиду наличия статической составляющей). В результате получается система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + G \frac{\partial U_3}{\partial x_1} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_1}, \\ \ddot{U}_2 + G \frac{\partial U_3}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_2}, \\ \ddot{U}_3 + G \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + G &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Условие несжимаемости жидкости в линеаризованном виде для малых колебаний записывается следующим образом:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0 \quad . \quad (3.3)$$

На свободной поверхности выполнено условие равенства давления жидкости величине давления газов над поверхностью:

$$P = p_0 \text{ на } \Sigma \quad . \quad (3.4)$$

Идеальность жидкости предполагает, что на поверхности контакта с упругим телом возможно свободное проскальзывание. Выражения для кинематических условий на поверхности контакта разнородных сред в условиях их взаимного проскальзывания выведем с использованием единого лагранжевого подхода аналогично тому, как описано в работе [59]. Мы выполним здесь эти выкладки в упрощенной форме, ограничиваясь в получаемых соотношениях линейными относительно малых колебаний составляющими.

Предполагается, что поверхность контакта непроницаемая, гладкая и в процессе деформирования сред не происходит отрыва частиц от этой поверхности. Для анализа условий взаимодействия сред на недеформированной поверхности контакта вводится криволинейная ортогональная система координат  $\alpha_1, \alpha_2$  с осями, направленными вдоль линий кривизны поверхности. Дополненная ортогональной к поверхности осью  $\alpha_3$  (направление выберем во внешнюю по отношению к жидкости сторону), система координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  принимается в начальный момент времени общей системой Лагранжа для обеих контактирующих сред. Считаем, что контакт осуществляется по поверхности  $\alpha_3 = \alpha_3^0$  (рис. 3.2).

Соседние в начальный момент материальные точки вследствие проскальзывания сред в процессе движения расходятся, однако значения их лагранжевых координат остаются одинаковыми. Условия взаимодействия поэтому должны записываться для точек с различными значениями лагранжевых координат, как схематически показано на рис. 3.2. Тем самым кинематическое условие представляется в виде равенства:

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \vec{r}(\alpha'_1, \alpha'_2) + \vec{U}(\alpha'_1, \alpha'_2, t) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0) , \quad (3.5)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точек на поверхности  $S_0$ .

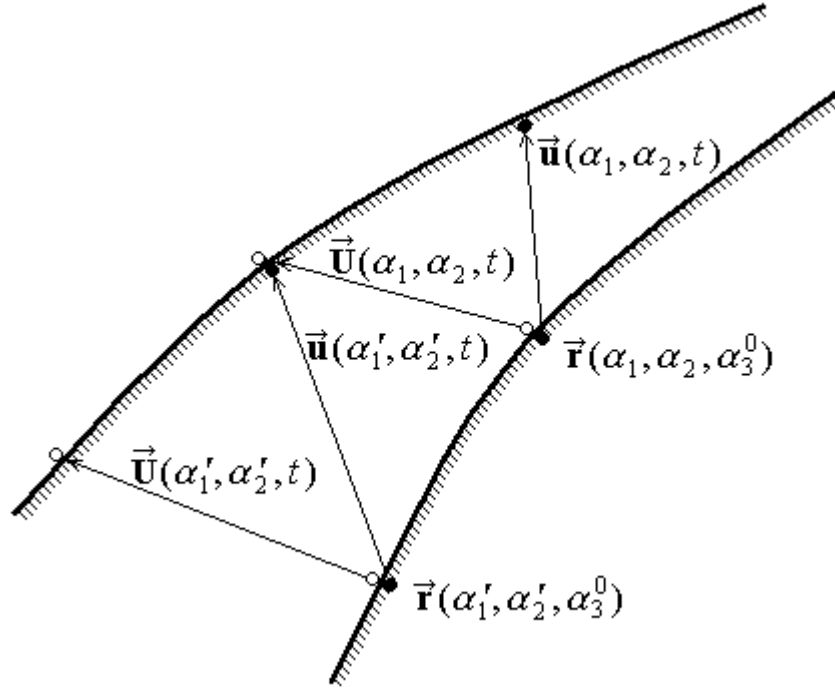


Рис. 3.2.

При малых взаимных смещениях контактирующих точек в предположении аналитичности входящих в выражения функций правая часть (3.5) переписывается в виде усеченного ряда Тейлора, в результате чего получаем (при  $\alpha_3 = \alpha_3^0$ ):

$$\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \vec{U}(\alpha_1, \alpha_2, t) + (\alpha'_1 - \alpha_1) \frac{\partial(\vec{r} + \vec{U})}{\partial \alpha_1} + (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial(\vec{r} + \vec{U})}{\partial \alpha_2} . \quad (3.6)$$

Переписывая (3.6) через компоненты векторов в локальных триэдрах криволинейной системы до деформации (обозначим их  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{U}_i$ ) и отбрасывая при этом члены выше первого порядка малости, получаем выражения для разностей координат взаимодействующих точек:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha'_1 - \alpha_1) &= \hat{u}_1 - \hat{U}_1 , \\ A_2(\alpha'_2 - \alpha_2) &= \hat{u}_2 - \hat{U}_2 , \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $A_1, A_2$  - коэффициенты Ламе. Здесь учтены выражения для касательных к поверхности векторов локального триэдра:

$$\vec{k}_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2) .$$

Заметим, что третий вектор этого триэдра  $\vec{k}_3 = \vec{n}_0$ , где  $\vec{n}_0$  - вектор внешней по отношению к области  $Q_0$  нормали к поверхности  $S_0$ .

Выражения (3.7) будут использованы далее для вывода динамических контактных соотношений.

Соотношение для третьей компоненты в (3.6) представляет собой кинематическое условие на контактной поверхности, которое в линейном приближении имеет простой вид:

$$\hat{u}_3 = \hat{U}_3, \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0) . \quad (3.8)$$

Полученное выражение означает равенство нормальных к поверхности смещений контактирующих точек двух сред, используемое обычно в линейных уравнениях, основанных на смешанном эйлерово-лагранжевом подходе:

$$(\vec{U} \cdot \vec{n}_0) = (\vec{u} \cdot \vec{n}_0) \quad \text{на } S_0 . \quad (3.9)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) совместно с граничными условиями (3.4) и (3.9) при заданных перемещениях упругого тела на контактной поверхности определяют краевую задачу для жидкой компоненты рассматриваемой системы.

### 3. 2. Динамические условия на контактной поверхности и потенциальная энергия гравитационных сил жидкости.

Динамические соотношения на поверхности контакта характеризуют воздействие жидкости на упругое тело. Для их вывода необходимо прежде всего определить значение давления жидкости  $P_s$  в каждой точке контактирующей с жидкостью поверхности упругого тела. Аналогично соотношению (3.5), можно записать:

$$P_s(\alpha_1, \alpha_2, t) = P(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3^0, t) . \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) с точностью до первых членов тейлоровского разложения преобразуется к виду:

$$P_s(\alpha_1, \alpha_2, t) = P(\alpha_1, \alpha_2, t) + (\alpha'_1 - \alpha_1) \frac{\partial P}{\partial \alpha_1} + (\alpha'_2 - \alpha_2) \frac{\partial P}{\partial \alpha_2} \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0) . \quad (3.11)$$

Давление в жидкости может быть представлено в виде суммы гидростатической составляющей  $P_0$  и малой вариации  $p$ , связанной с колебаниями конструкции:

$$P = P_0 + p ,$$

$$P_0 = p_0 + \rho_0 G(x_3^0 - x_3) ,$$

где  $x_3^0$  - координата точек свободной поверхности жидкости. С учетом этого, а также соотношений (3.7), выражение для давления (3.11) при удержании линейных членов приобретает вид:

$$P_s = P_0 + p + \frac{\partial P_0}{A_1 \partial \alpha_1} (\hat{u}_1 - \hat{U}_1) + \frac{\partial P_0}{A_2 \partial \alpha_2} (\hat{u}_2 - \hat{U}_2) \quad (\alpha_3 = \alpha_3^0) . \quad (3.12)$$

С учетом того обстоятельства, что  $\vec{\nabla} P_0 = \rho_0 \vec{\mathbf{G}}$ , а в выражении (3.12) присутствует скалярное произведение проекций векторов  $\vec{\nabla} P_0$  и  $\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{U}}$  на касательную к поверхности  $S_0$  плоскость, получаем после соответствующих пре-

образований формулу для давления жидкости на деформированной смоченной поверхности упругой конструкции в виде:

$$P_s = P_0 + p + \rho_0(\vec{G} - (\vec{G} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0 \cdot \vec{u} - \vec{U}) , \quad (3.13)$$

или с учетом кинематического условия (3.8):

$$P_s = P_0 + p + \rho_0(\vec{G} \cdot (\vec{u} - \vec{U})) . \quad (3.13a)$$

В процессе совместных колебаний силы давления жидкости совершают работу на перемещениях контактирующей с ней поверхности упругого тела. При этом гидростатическая сила является “следящей”, т.е. направление ее действия меняется в соответствии с поворотом нормали к деформированной смоченной поверхности тела. Кроме того, изменение площади элемента поверхности вследствие растяжения или сжатия в процессе деформации влияет на величину совершаемой работы. Последние два обстоятельства отмечены в работе [20] и использованы в работе [33] при выводе формулы для потенциальной энергии гравитационных сил жидкости.

С точностью до членов первого порядка малости работа сил давления на совместимых со связями виртуальных перемещениях определяется выражением:

$$\begin{aligned} \delta A_{S_0} = \int_{S_0} P_s [\theta_1 \delta \hat{u}_1 + \theta_2 \delta \hat{u}_2 + \delta \hat{u}_3] (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) dS = \int_{S_0} P_0 \delta \hat{u}_3 dS + \\ + \int_{S_0} \left\{ P_0 \theta_1 \delta \hat{u}_1 + P_0 \theta_2 \delta \hat{u}_2 + [P_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0(\vec{G} \cdot \vec{u} - \vec{U}) + p] \delta \hat{u}_3 \right\} dS, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где, согласно [78], углы поворота и деформации равны:

$$\theta_1 = -\frac{\partial \hat{u}_3}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\hat{u}_1}{R_1}; \quad \theta_2 = -\frac{\partial \hat{u}_3}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{\hat{u}_2}{R_2}; \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \hat{u}_1}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\hat{u}_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\hat{u}_3}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \hat{u}_2}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{\hat{u}_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\hat{u}_3}{R_2}. \quad (3.16)$$

Учитывая то обстоятельство, что в рамках линейной теории упругости внешние силы должны быть отнесены к недеформированной конфигурации, эффективный вектор плотности поверхностных сил приобретает касательные

составляющие и компоненты его в недеформированном локальном триэдре записываются в виде:

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &= P_0 \theta_1, \\ \hat{P}_2 &= P_0 \theta_2, \\ \hat{P}_3 &= P_0 + P_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0(\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) - \rho_0(\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{U}}) + p.\end{aligned}\quad (3.17)$$

В выражениях компонент этого вектора (3.17) можно выделить составляющие, которые зависят лишь от параметров деформации смоченной поверхности упругого тела:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{g1} &= P_0 \theta_1, \\ \hat{p}_{g2} &= P_0 \theta_2, \\ \hat{p}_{g3} &= P_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0(\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{u}}).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Совершаемую ими работу можно вычислить через вариацию функционала, представляющего собой потенциальную энергию этих сил. В отсутствие статического внутреннего давления внутри полости их величина определяется только гидростатической составляющей, и в работе [33] соответствующий функционал назван потенциальной энергией массовых сил жидкости в возмущенном движении при неподвижной свободной поверхности. В общем случае выражение (3.17) должно быть распространено на поверхность  $S_P$  в виде:

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &= p_0 \theta_1, \\ \hat{P}_2 &= p_0 \theta_2, \\ \hat{P}_3 &= p_0 + p_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).\end{aligned}\quad (3.17a)$$

Если поверхность  $S_0$  гладкая, то выражение для потенциальной энергии сил (3.18) можно записать в виде:

$$V_{S_0} = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ P_0 \left[ \frac{\hat{u}_1^2}{R_1} + \frac{\hat{u}_2^2}{R_2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{u}_3^2 \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [P_0 \hat{u}_1 A_2] + 2 \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [P_0 \hat{u}_2 A_1] + \rho_0(\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_0) \hat{u}_3^2 \right\} dS. \quad (3.19)$$

При вычислении вариации функционала (3.19) полезно соотношение, получаемое из формулы Грина:

$$\int_{S_\alpha} \left( \frac{\partial Y}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_{\Gamma_\alpha} (X d\alpha_1 + Y d\alpha_2) , \quad (3.20)$$

рассмотренной на плоскости параметризующих поверхность  $S_0$  координат  $(\alpha_1, \alpha_2)$  , посредством гладкого отображения области  $S_\alpha$  с контуром  $\Gamma_\alpha$  .

Полагая в формуле (3.20)

$$X = -\hat{u}_3 P_0 \hat{u}_2 A_1 , \quad Y = \hat{u}_3 P_0 \hat{u}_1 A_2 ,$$

получаем соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} \left( \hat{u}_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [P_0 \hat{u}_1 A_2] + \hat{u}_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [P_0 \hat{u}_2 A_1] \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{S_0} \left( \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \alpha_1} P_0 \hat{u}_1 A_2 + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial \alpha_2} P_0 \hat{u}_2 A_1 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_{\Gamma_0} (-\hat{u}_3 P_0 \hat{u}_2 A_1 d\alpha_1 + \hat{u}_3 P_0 \hat{u}_1 A_2 d\alpha_2) , \end{aligned}$$

из которого следует:

$$\begin{aligned} & \int_{S_0} \left( \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [P_0 \hat{u}_1 A_2] + \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [P_0 \hat{u}_2 A_1] \right) dS + \\ & + \int_{S_0} \left( \frac{\partial \hat{u}_3}{A_1 \partial \alpha_1} P_0 \hat{u}_1 + \frac{\partial \hat{u}_3}{A_2 \partial \alpha_2} P_0 \hat{u}_2 \right) dS = \int_{\Gamma_0} (-\hat{u}_3 P_0 \hat{u}_2 A_1 d\alpha_1 + \hat{u}_3 P_0 \hat{u}_1 A_2 d\alpha_2) , \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $\Gamma_0$  - контур, ограничивающий поверхность  $S_0$  .

Еще одно полезное соотношение получается из последовательности преобразований:

$$\rho_0(\vec{G} \cdot \vec{k}_i) = \rho_0(\vec{G} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{A_i \partial \alpha_i}) = \frac{\partial}{A_i \partial \alpha_i} [\rho_0(\vec{G} \cdot \vec{r})] = \frac{\partial P_0}{A_i \partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2) . \quad (3.22)$$

Вычисляя вариацию функционала (3.19), с использованием соотношений (3.21) и (3.22) получаем выражение:

$$\begin{aligned} \delta V_{S_0} = & - \int_{S_0} \left\{ P_0 \theta_1 \delta \hat{u}_1 + P_0 \theta_2 \delta \hat{u}_2 + [P_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0(\vec{G} \cdot \vec{u})] \delta \hat{u}_3 \right\} dS - \\ & - \int_{\Gamma_0} (-P_0 \hat{u}_3 \delta \hat{u}_2 A_1 d\alpha_1 + P_0 \hat{u}_3 \delta \hat{u}_1 A_2 d\alpha_2) . \end{aligned} \quad (3.23)$$



Под знаком интеграла по поверхности в формуле (3.23) при вариациях перемещений стоят выражения из (3.18). Контурный же интеграл в формуле (3.23) обращается в нуль ввиду двух обстоятельств:

- для гидростатической составляющей давления это связано с тем, что контур  $\Gamma_0$  совпадает с границей свободной поверхности жидкости, где давление обращается в нуль;

- для составляющей, обусловленной статическим давлением газов в полости, формула (3.19) должна быть дополнена интегралом по поверхности  $S_p$ , и полный интеграл вычисляется по поверхности  $S_0 \cup S_p$ , которая является замкнутой и не имеет ограничивающего контура.

Выражение для потенциальной энергии (3.19) в точности совпадает в случае осесимметричных конструкций, содержащих жидкость, с формулой, полученной в работе [33].

Формулу (3.19) невозможно распространить на произвольный случай регулярной поверхности, составленной из нескольких не гладким образом соединенных кусков, на каждом из которых введена гладкая параметризация. Связано это с тем, что в случае негладкого сопряжения двух кусков поверхности контурные интегралы, вычисляемые в формуле (3.23) на общем для них контуре не уничтожаются взаимно, несмотря на то, что проход по этому участку производится в противоположных направлениях. Ситуация эта обусловлена неинвариантностью подынтегрального выражения в контурном интеграле в (3.23) по отношению к ориентации локальных триэдров, в которых представлены перемещения точек поверхности.

Исследование предельного перехода от сглаженной вдоль ребра излома поверхности при уменьшении радиуса кривизны сглаживающего участка показало, что возникающая погрешность в точности равна разности контурных интегралов.

Если выражение (3.19) сложить с половиной соотношения (3.21), правая часть которого, как только что выявлено, равна нулю, то получим новое выражение для потенциальной энергии:

$$V_{S_0} = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ P_0 \left[ \frac{\hat{u}_1^2}{R_1} + \frac{\hat{u}_2^2}{R_2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{u}_3^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [P_0 \hat{u}_1 A_2] + \frac{\hat{u}_3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [P_0 \hat{u}_2 A_1] - \right. \\ \left. - P_0 \hat{u}_1 \frac{\partial \hat{u}_3}{A_1 \partial \alpha_1} - P_0 \hat{u}_2 \frac{\partial \hat{u}_3}{A_2 \partial \alpha_2} + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{n}_0) \hat{u}_3^2 \right\} dS \quad . \quad (3.24)$$

Вариация функционала (3.24) определяется выражением:

$$\delta V_{S_0} = - \int_{S_0} \left\{ P_0 \theta_1 \delta \hat{u}_1 + P_0 \theta_2 \delta \hat{u}_2 + [P_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u})] \delta \hat{u}_3 \right\} dS - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} [P_0 (\hat{u}_2 \delta \hat{u}_3 - \hat{u}_3 \delta \hat{u}_2) A_1 d\alpha_1 - P_0 (\hat{u}_1 \delta \hat{u}_3 - \hat{u}_3 \delta \hat{u}_1) A_2 d\alpha_2] \quad ,$$

которое можно переписать в виде

$$\delta V_{S_0} = - \int_{S_0} \left\{ P_0 \theta_1 \delta \hat{u}_1 + P_0 \theta_2 \delta \hat{u}_2 + [P_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u})] \delta \hat{u}_3 \right\} dS - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} P_0 ([\vec{u} \times \delta \vec{u}] \cdot d\vec{\Gamma}) \quad , \quad (3.25)$$

содержащем под знаком контурного интеграла инвариантное выражение.

Выражение (3.24) можно переписать в удобном для дальнейшего использования виде:

$$V_{S_0} = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ P_0 [\hat{u}_1 \theta_1 + \hat{u}_2 \theta_2 + \hat{u}_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u}) \hat{u}_3 \right\} dS \quad . \quad (3.26)$$

Потенциальная энергия жидкости, связанная с изменением формы свободной поверхности, вычисляется по формуле [66] :

$$V_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \rho_0 G U_3^2 dS \quad . \quad (3.27)$$

Тогда полная потенциальная энергия гравитационных сил жидкости, определяемая деформацией ее свободной поверхности и стенок содержащего ее сосуда, равна:

$$V_F = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \rho_0 G U_3^2 dS - \frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ \rho_0 G (x_3^0 - x_3) [\hat{u}_1 \theta_1 + \hat{u}_2 \theta_2 + \hat{u}_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u}) \hat{u}_3 \right\} dS . \quad (3.28)$$

Нетрудно показать, что выражение (3.28) связано только с изменением формы объема жидкости и не зависит от сдвига его в пространстве на постоянную величину в любом направлении.

Выражение для потенциальной энергии сил статического внутреннего давления в полости имеет вид:

$$V_p = -\frac{1}{2} \int_{S_0 \cup S_p} p_0 [\hat{u}_1 \theta_1 + \hat{u}_2 \theta_2 + \hat{u}_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] dS . \quad (3.29)$$

### 3.3. Уравнения колебаний конструкции, содержащей жидкость.

Рассмотрим далее малые колебания конструкции в окрестности статически равновесного напряженно-деформированного состояния. Принимая гипотезу о том, что поведение упругой конструкции описывается уравнениями линейной теории упругости, и используя сформулированные выше линеаризованные уравнения колебаний жидкости и условия на контактной поверхности, мы можем исключить из этих соотношений статическую составляющую. Тогда, полагая, что векторы  $\bar{\mathbf{u}}$  и  $\bar{\mathbf{U}}$  описывают смещения точек упругого тела и жидкости относительно статической составляющей, можно записать следующую систему уравнений.

Колебания упругого тела описываются уравнениями движения:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.30)$$

геометрическими и физическими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad (3.31)$$

$$\sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\bar{\mathbf{u}}) \quad , \quad (3.32)$$

а также граничными условиями:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad \text{на } S_u \quad , \quad (3.33)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = f_i \quad \text{на } S_\sigma \quad . \quad (3.34)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = p_i^h \quad \text{на } S_0 \quad , \quad (3.35)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = p_i^p \quad \text{на } S_p \quad , \quad (3.36)$$

где  $\rho$ ,  $\lambda_{ijkl}$  - плотность материала и его упругие коэффициенты,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензоров напряжений и деформации,  $\bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, t)$ ,  $\bar{\mathbf{f}}$  - заданные граничные перемещения и внешние силы ( $f_i$  - компоненты вектора  $\bar{\mathbf{f}}$ ),  $n_i$  - компоненты вектора внешней по отношению к области Q нормали  $\bar{\mathbf{n}}$ .

Переменные составляющие приведенных поверхностных сил внутри содержащей жидкость полости в соответствии с формулами (3.17), (3.17a) представляются в векторной форме выражениями:

$$\bar{\mathbf{p}}^h = P_0 \theta_1 \bar{\mathbf{k}}_1 + P_0 \theta_2 \bar{\mathbf{k}}_2 + (P_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0(\bar{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) - \rho_0(\bar{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{U}}) + p) \bar{\mathbf{n}}_0, \quad (3.37)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^p = p_0 \theta_1 \bar{\mathbf{k}}_1 + p_0 \theta_2 \bar{\mathbf{k}}_2 + p_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bar{\mathbf{n}}_0, \quad (3.38)$$

соответственно,  $p_i^h$  и  $p_i^p$  - проекции этих векторов на орты глобальной декартовой системы координат.

Уравнения малых колебаний жидкости в лагранжевой форме

$$\ddot{\bar{\mathbf{U}}} - \bar{\nabla}(\bar{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{U}}) = -\frac{1}{\rho_0} \bar{\nabla} p \quad \text{в } Q_0 \quad (3.39)$$

и условие несжимаемости

$$(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad \text{в } Q_0 \quad (3.40)$$

дополняются кинематическими граничными условиями на контактной поверхности

$$(\bar{\mathbf{U}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) \quad \text{на } S_0 \quad (3.41)$$

и условием на свободной поверхности

$$p = 0 \quad \text{на } \Sigma. \quad (3.42)$$

Система уравнений (3.30) - (3.42) представляет собой краевую задачу относительно неизвестных перемещений упругого тела  $\bar{\mathbf{u}}$  и жидкости  $\bar{\mathbf{U}}$ , а также вариации давления в жидкости  $p$ .

Следует заметить, что эта система уравнений для изучения малых колебаний конструкций с жидкостью дает избыточный набор решений, поскольку уравнениям движения жидкости в ней удовлетворяет бесконечное множество

циркуляционных течений, не взаимодействующих с упругой составляющей. Это неоправданно повышает размерность задачи и может создавать различные вычислительные трудности при расчетах. Поэтому обычно используется предположение о безвихревом характере движения жидкости, что позволяет описывать его с помощью одной скалярной функции - потенциала скорости, потенциала смещений или давления (например, [102, 71, 94]).

Предположим, что движение жидкости в начальный момент времени безвихревое, а следовательно, и в последующие моменты поле скоростей остается потенциальным, что в случае малых колебаний справедливо и для поля перемещений, которое можно представить как градиент скалярного поля:

$$\vec{U} = \vec{\nabla}\Phi \quad \text{в } Q_0, \quad (3.43)$$

где  $\Phi$  - потенциал смещений.

Подставив (3.43) в уравнение малых колебаний (3.39), получим уравнение:

$$\vec{\nabla} \left( \ddot{\Phi} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\Phi) + \frac{p}{\rho_0} \right) = 0 \quad \text{в } Q_0, \quad (3.44)$$

откуда следует формула, которую можно считать аналогом линейаризованного интеграла Лагранжа-Коши:

$$\ddot{\Phi} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\Phi) + \frac{p}{\rho_0} = C(t) \quad \text{в } Q_0, \quad (3.45)$$

где  $C(t)$  - произвольная функция времени. Ввиду условия (3.42) для однозначности определения этой функции удобно ввести граничное условие на свободной поверхности жидкости:

$$\ddot{\Phi} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\Phi) = 0 \quad \text{на } \Sigma, \quad (3.46)$$

откуда получаем  $C(t) = 0$  и формулу для вариации давления в жидкости:

$$p = -\rho_0 \ddot{\Phi} + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\Phi) \quad \text{в } Q_0, \quad (3.47)$$

а также выражение для вариации давления жидкости на деформированной смоченной поверхности (см. (3.13а)) :

$$p_s = -\rho_0 \ddot{\Phi} + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u}) . \quad (3.48)$$

В итоге краевая задача для потенциала смещений формулируется следующим образом. Условие несжимаемости (3.40) дает уравнение Лапласа для потенциала смещений:

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в } Q_0 , \quad (3.49)$$

а кинематическое условие на контактной поверхности (3.41) приобретает вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_0} = (\vec{u} \cdot \vec{n}_0) \quad \text{на } S_0 . \quad (3.50)$$

Условие на свободной поверхности жидкости (3.46) целесообразно расщепить по аналогии с контактной поверхностью на кинематическое и динамическое условия, вводя в рассмотрение независимую переменную  $\eta$ , определенную на поверхности  $\Sigma$  и равную нормальному смещению ее точек. Тем самым явно описывается образование волн на поверхности жидкости, а (3.46) преобразуется в соотношения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_0} = \eta \quad \text{на } \Sigma , \quad (3.51)$$

$$\ddot{\Phi} + G\eta = 0 \quad \text{на } \Sigma . \quad (3.52)$$

Выражение (3.37) для приведенных поверхностных сил на контактной поверхности переписывается с использованием потенциала смещений в виде:

$$\vec{p}^h = P_0 \theta_1 \vec{k}_1 + P_0 \theta_2 \vec{k}_2 + \left( P_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u}) - \rho_0 \ddot{\Phi} \right) \vec{n}_0 . \quad (3.53)$$

Таким образом, краевая задача состоит в определении перемещений упругого тела  $\vec{u}$ , потенциала смещений в жидкости  $\Phi$  и вертикальных перемещений точек свободной поверхности жидкости  $\eta$ . При этом уравнения (3.30) - (3.38) дополняются уравнениями (3.49) - (3.52), а соотношение (3.37) заменяется на (3.53).

Заметим, что в случае тонкостенных конструкций пространственная область  $Q$  редуцируется к двумерному многообразию, а уравнения движения упругого тела преобразуются в соответствии с гипотезами теории тонких обо-

лочек. Условия взаимодействия сред на контактной поверхности при этом переносятся на срединную поверхность оболочки.

При анализе гидроупругих колебаний конструкций, содержащих жидкость, распространен упрощенный подход к описанию движения жидкости, основанный на пренебрежении гравитационным эффектом, который в краевой задаче отражается уравнением (3.52), описывающим образование волн на свободной поверхности жидкости, и обусловленными гидростатическим давлением членами в динамических условиях на контактной поверхности.

Основанием для этого является часто имеющее место на практике разделение спектра колебаний конструкции на два подспектра: собственные колебания, определяемые в основном подвижностью свободной поверхности жидкости, и собственные колебания, обусловленные упругостью содержащей жидкость конструкции. Разнесенность собственных частот этих подспектров приводит к их слабому взаимодействию.

Если основной интерес исследования сосредоточен на гидроупругих колебаниях, составляющих второй подспектр, то удовлетворительную точность можно обеспечить положив в уравнениях  $G = 0$ . При этом условия на свободной поверхности (3.51), (3.52) заменяются одним соотношением (отпадает потребность в переменной  $\eta$ ):

$$\ddot{\Phi} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (3.54)$$

Давление на смоченной поверхности тогда равно

$$p_s = p = -\rho_0 \ddot{\Phi}, \quad (3.55)$$

а динамические условия записываются в упрощенном виде:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = -p n_i \text{ на } S_0. \quad (3.56)$$

В энергетическом смысле такая гипотеза означает пренебрежение потенциальной энергией гравитационных сил жидкости, поскольку выражение (3.28) обращается в нуль.



В качестве промежуточного между двумя рассмотренными вариантами систем уравнений (полным и упрощенным) можно представить подход, основанный на идее о пренебрежимой малости для большинства реальных конструкций того вклада в эффективную жесткость стенок сосуда, который вносят обусловленные гидростатическим давлением члены в динамических условиях на контактной поверхности. Если при этом не реализуется вышеупомянутое разделение собственных колебаний на два подспектра, то исключить влияние волн на свободной поверхности жидкости невозможно.

Простое отбрасывание соответствующих членов и замена динамических соотношений (3.35) на (3.56) приводит к противоречивой системе уравнений, что проявляется, в частности, в формуле для потенциальной энергии гравитационных сил жидкости (3.28), которая в таком случае сводится к выражению:

$$V_F = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \rho_0 G \eta^2 dS .$$

Такое выражение означает наложение дополнительной упругой связи на вертикальный сдвиг недеформированной конструкции и неинвариантность системы уравнений относительно вертикального сдвига.

Воспользовавшись свободой выбора константы в интеграле (3.45), положим  $C(t) = G\eta_0$ , причем  $\eta_0$  - среднее смещение свободной поверхности

$$\eta_0 = \frac{1}{s(\Sigma)} \int_{\Sigma} \eta dS , \quad (3.57)$$

где  $s(\Sigma)$  - ее площадь. Тогда динамическое условие на свободной поверхности приобретает вид:

$$\ddot{\Phi} + G\eta = G\eta_0 \text{ на } \Sigma , \quad (3.58)$$

а выражение для вариации давления в жидкости:

$$p = -\rho_0 \ddot{\Phi} + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{\nabla} \Phi) + \rho_0 G\eta_0 , \quad (3.59)$$

и на контактной поверхности:

$$p_s = -\rho_0 \ddot{\Phi} + \rho_0 (\vec{G} \cdot \vec{u}) + \rho_0 G\eta_0 . \quad (3.60)$$

Исключение в соотношениях (3.59), (3.60) гравитационных членов, содержащих  $\eta_0$  и обращающихся в нуль на сдвиге недеформированной системы, не приводит к противоречиям.

Аналогично преобразуется формула (3.28), если из нее вычесть равное нулю в силу несжимаемости жидкости выражение:

$$\frac{1}{2} \eta_0 \left( \int_{\Sigma} \rho_0 G \eta dS - \int_{S_0} \rho_0 G \hat{u}_3 dS \right) = 0 ,$$

а затем отбросить интеграл по смоченной поверхности. Тогда получаем:

$$V_F = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \rho_0 G (\eta - \eta_0)^2 dS .$$

Окончательно, при таком подходе колебания жидкости описываются уравнением (3.49), кинематическим условием (3.50) и условиями на свободной поверхности (3.51), (3.57), (3.58). Динамические условия на смоченной поверхности имеют вид (3.56).

Подобные соотношения, содержащие среднее вертикальное смещение свободной поверхности, получены в работе [94] применительно к постановке задачи, основанной на описании движения жидкости при помощи давления, для анализа гармонических колебаний. В работах [102] и [71] это среднее смещение вводится посредством расщепления потенциала смещений на сумму функций, одна из которых описывает движение жидкости в деформируемой полости при отсутствии волновых движений свободной поверхности.

Следует отметить, что такая формулировка проблемы не дает реального упрощения при реализации метода конечных элементов. Напротив, ситуация осложняется из-за образующейся взаимосвязи отдельных элементов свободной поверхности жидкости. В дальнейшем мы такой подход к задаче рассматривать не будем.

### 3. 4. Вариационные принципы для решения задач о колебаниях конструкций, содержащих жидкость.

Использование для решения краевых задач прямых численных методов, таких как метод конечных элементов, существенно облегчается, если для системы удастся записать вариационную формулировку в виде принципа Гамильтона. Этот принцип состоит в том, что решение системы уравнений, описывающих поведение системы, доставляет стационарное значение функционалу действия, равному интегралу от лагранжиана системы, взятому на рассматриваемом временном отрезке. Лагранжиан представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии системы.

В дальнейшем мы рассматриваем систему уравнений, описывающих колебания упругой конструкции с жидкостью, построенную с использованием потенциала смещений.

Обозначим совокупность описывающих колебания системы функций как единый математический объект, который в дальнейшем будем называть для краткости “движение”:

$$\overline{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{u}} \\ \Phi \\ \eta \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим множество движений, удовлетворяющих наложенным на упругую часть кинематическим ограничениям, а также кинематическим условиям на контактной поверхности (3.50) и на свободной поверхности жидкости (3.51) и условиям несжимаемости (3.49):

$$\mathbf{W}^{u,\Phi} = \left\{ \bar{\mathbf{U}} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, t) \text{ на } S_u \\ \Delta\Phi = 0 \text{ в } Q_0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) \text{ на } S_0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = \eta \text{ на } \Sigma \end{array} \right. \right\}.$$

На этом множестве можно ввести функционал Лагранжа

$$L(\bar{\mathbf{U}}) = T(\bar{\mathbf{U}}) - V(\bar{\mathbf{U}}), \quad (3.61)$$

в котором выражения для кинетической и потенциальной энергии имеют вид:

$$T(\bar{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} V(\bar{\mathbf{U}}) &= \frac{1}{2} \int_Q \{ \sigma(\bar{\mathbf{u}}) \}^T \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \} dV + V_F(\bar{\mathbf{U}}) + V_p(\bar{\mathbf{U}}) - \int_{S_\sigma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{f}}) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_Q \{ \sigma(\bar{\mathbf{u}}) \}^T \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \} dV + \frac{1}{2} \int_\Sigma \rho_0 G \eta^2 dS - \\ &- \frac{1}{2} \int_{S_0} \{ \rho_0 G (x_3^0 - x_3) [\hat{u}_1 \theta_1 + \hat{u}_2 \theta_2 + \hat{u}_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] + \rho_0 (\vec{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \hat{u}_3 \} dS - \\ &- \frac{1}{2} \int_{S_0 \cup S_p} p_0 [\hat{u}_1 \theta_1 + \hat{u}_2 \theta_2 + \hat{u}_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] dS - \int_{S_\sigma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{f}}) dS. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Здесь использованы выражения (3.28) и (3.29) для потенциальной энергии гравитационных сил жидкости и сил статического внутреннего давления в полости. Компоненты перемещений в локальном базисе на контактной поверхности выражаются соотношениями:

$$\hat{u}_1 = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_1), \quad \hat{u}_2 = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_2), \quad \hat{u}_3 = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0), \quad (3.64)$$

а параметры деформации поверхности  $\theta_1, \theta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  определяются формулами (3.15), (3.16).

Вычисляя вариацию функционала действия

$$S(\bar{\mathbf{U}}) = \int_0^t L(\bar{\mathbf{U}}) dt \quad (3.65)$$

на вариациях движений, удовлетворяющих соответствующим кинематическим ограничениям:

$$\delta \bar{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \bar{\mathbf{u}} \\ \delta \Phi \\ \delta \eta \end{array} \middle| \begin{array}{l} \delta \bar{\mathbf{u}} = 0 \text{ на } S_u \\ \Delta \delta \Phi = 0 \text{ в } Q_0 \\ \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n_0} = (\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) \text{ на } S_0 \\ \frac{\partial \delta \Phi}{\partial n_0} = \eta \text{ на } \Sigma \end{array} \right\},$$

после применения интегральных теорем векторного анализа и выведенных в разделе 3.2 соотношений получаем в качестве условия стационарности системы уравнений, состоящую из уравнений движения упругого тела (3.30), граничных условий (3.34) - (3.36) и динамического соотношения на свободной поверхности жидкости (3.52). Дополненные учтенными при задании области определения функционала кинематическими условиями, эти уравнения образуют полученную в предыдущем разделе полную систему уравнений, описывающих колебания конструкции с жидкостью.

Условие несжимаемости жидкости и кинематические соотношения на контактной поверхности и на свободной поверхности жидкости можно исключить из числа кинематических ограничений, априорно налагаемых на множество рассматриваемых движений, если соотношение для кинетической энергии (3.62) заменить выражением, использованным в работах [34, 35]:

$$T^*(\bar{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}^2 dV - \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\bar{\nabla} \Phi)^2 dV + \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi} (\dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) dS + \int_{\Sigma} \rho_0 \dot{\Phi} \dot{\eta} dS, \quad (3.66)$$

и рассматривать модифицированный функционал Лагранжа

$$L^*(\bar{\mathbf{U}}) = T^*(\bar{\mathbf{U}}) - V(\bar{\mathbf{U}}), \quad (3.67)$$

на множестве движений:

$$\mathbf{W}^u = \left\{ \bar{\mathbf{U}} : \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0(\bar{\mathbf{x}}, t) \text{ на } S_u \right\}.$$

Заметим, что на движениях, удовлетворяющих условиям (3.49) - (3.51), выражения (3.66) и (3.62) равны.

Тогда условия стационарности функционала

$$S^*(\bar{\mathbf{U}}) = \int_0^t L^*(\bar{\mathbf{U}}) dt \quad (3.68)$$

для вариаций движений удовлетворяющих лишь ограничениям, наложенным на упругую конструкцию:

$$\delta \bar{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{array}{l} \delta \bar{\mathbf{u}} \\ \delta \Phi \\ \delta \eta \end{array} \middle| \delta \bar{\mathbf{u}} = 0 \text{ на } S_u \right\},$$

дополняются по сравнению с условиями для (3.65) следующими соотношениями:

$$\Delta \ddot{\Phi} = 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial n_0} = (\ddot{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0), \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial n_0} = \ddot{\eta}. \quad (3.71)$$

Соотношения (3.69) - (3.71) являются дважды продифференцированными по времени условиями (3.49) - (3.51). Они эквивалентны между собой, поскольку в динамических условиях на контактной и свободной поверхностях, а также в выражении для давления присутствует лишь вторая производная потенциала смещений по времени. Кроме того, дополнительная свобода в построении решения, возникающая при использовании соотношений (3.69) - (3.71), ликвидируется за счет задания начальных условий в задаче Коши.

Заметим, что выражение (3.66) может быть выведено посредством метода неопределенных множителей Лагранжа. При этом неопределенные множители оказываются равными величине  $-\rho_0 \ddot{\Phi}$ . Такой способ использован в работе [33] при выводе вариационного принципа для случая свободных гармонических колебаний.

Вариационный принцип, обеспечивающий выполнение кинематических ограничений, связанных с контактными соотношениями и несжимаемостью жидкости, сформулирован для гармонических колебаний конструкций рас-

смаатриваемого типа в работе [94] применительно к постановке задачи, основанной на описании колебаний жидкости при помощи давления. (Напомним, что в [94] не учитывается гравитационный эффект в динамических соотношениях на контактной поверхности.)

Для упрощения вывода различных соотношений (например, условий ортогональности собственных форм) удобно представить выражения квадратичных форм в выражениях кинетической и потенциальной энергии через симметричные билинейные функционалы:

$$T^*(\bar{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \hat{T}^*(\dot{\bar{\mathbf{U}}}, \dot{\bar{\mathbf{U}}}) , \quad (3.72)$$

$$V(\bar{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \hat{V}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{U}}) . \quad (3.73)$$

Если обозначить

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \Psi \\ \zeta \end{Bmatrix} ,$$

то для этих билинейных функционалов можно записать следующие симметричные относительно аргументов выражения:

$$\begin{aligned} \hat{T}^*(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}) = & \int_{\mathbf{Q}} \rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) dV - \int_{\mathbf{Q}_0} \rho_0(\bar{\nabla} \Phi \cdot \bar{\nabla} \Psi) dV + \\ & + \int_{\mathbf{S}_0} \rho_0(\Phi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) + \Psi(\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0)) dS + \int_{\Sigma} \rho_0(\Phi \zeta + \Psi \eta) dS , \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}) = & \int_{\mathbf{Q}} \{ \sigma(\bar{\mathbf{u}}) \}^T \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{v}}) \} dV + \int_{\Sigma} \rho_0 G \eta \zeta dS - \\ & - \int_{\mathbf{S}_0} \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [C_G] \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{v}}) \} dS - \int_{\mathbf{S}_0 \cup \mathbf{S}_p} \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [C_p] \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{v}}) \} dS , \end{aligned} \quad (3.75)$$

где вектор-столбец поверхностных деформаций составлен из компонент:

$$\{\hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}})\} = \left\{ \begin{array}{c} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_1) \\ (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{k}}_2) \\ (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_0) \\ \theta_1(\bar{\mathbf{u}}) \\ \theta_2(\bar{\mathbf{u}}) \\ \varepsilon_1(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon_2(\bar{\mathbf{u}}) \end{array} \right\}$$

а матрицы имеют вид:

$$[C_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\rho_0(\vec{G} \cdot \vec{k}_1) & \frac{1}{2}\rho_0 G(x_3^0 - x_3) & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2}\rho_0(\vec{G} \cdot \vec{k}_2) & 0 & \frac{1}{2}\rho_0 G(x_3^0 - x_3) & 0 \\ & & \rho_0(\vec{G} \cdot \vec{n}_0) & 0 & 0 & \frac{1}{2}\rho_0 G(x_3^0 - x_3) \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C_p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}p_0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}p_0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}p_0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$



## Глава 4. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ.

### 4.1. Основные соотношения.

Рассматриваются малые колебания осесимметричной оболочечной конструкции, составленной из оболочек вращения, соединенных при помощи упругих шпангоутов (рис. 4.1). Внутренние полости конструкции частично заполнены жидкостью. Оболочки считаются тонкими упругими и могут быть подкреплены набором несимметричных относительно срединной поверхности часто расположенных продольных и кольцевых ребер. Упругие шпангоуты представляют собой тонкие кольца, размеры поперечных сечений которых малы по сравнению с их радиусами. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, движение жидкости безвихревое. Конструкция находится в однородном поле гравитационных сил с ускорением, направленным вдоль оси симметрии конструкции, так что в невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости перпендикулярна этой оси.

Введем следующие обозначения:

$S$  - срединная поверхность оболочки,

$N_c$  - число не связанных между собой объемов жидкости,

$Q^{(k)}$  - область, занятая  $k$ -м объемом жидкости,

$S_0^{(k)}$  - поверхность оболочки, смоченная жидкостью  $k$ -го объема,

$\Sigma^{(k)}$  - свободная поверхность жидкости  $k$ -го объема,

$\rho_0^{(k)}$  - плотность жидкости в  $k$ -ом объеме,

$p_0^{(k)}$  - давление газов над поверхностью  $k$ -го объема жидкости,

$E, \nu, \rho, h$  - модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, а также толщина оболочки,

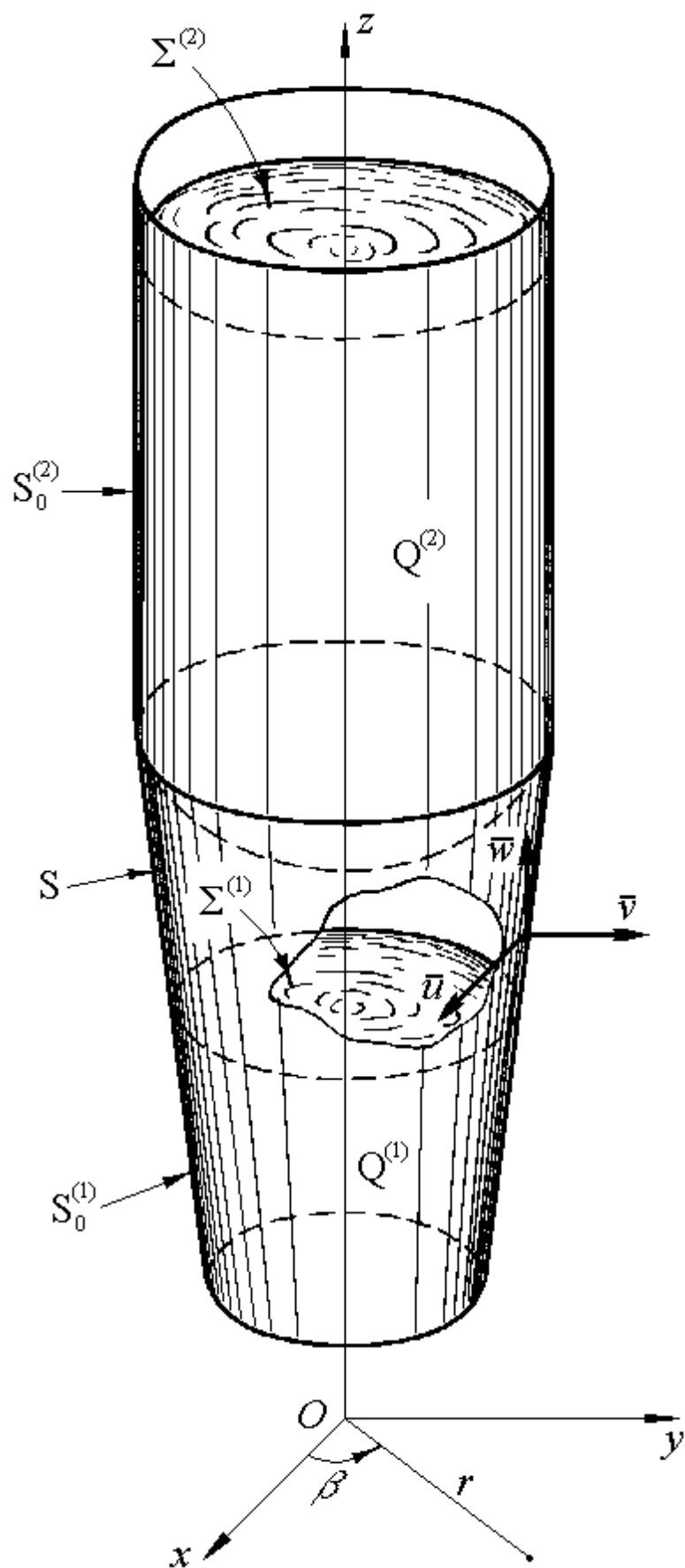


Рис. 4.1.

$N_s$  - число упругих шпангоутов,

$E_k, \nu_k, \rho_k$  - механические параметры материала  $k$ -го шпангоута,

$F_k, J_k^r, J_k^z, J_k^{rz}$  - геометрические параметры  $k$ -го шпангоута: площадь поперечного сечения и моменты инерции поперечного сечения относительно его центра тяжести,

$\vec{G}$  - вектор ускорения гравитационных сил,

$\vec{u}$  - вектор смещения точек конструкции.

Колебания конструкции рассматриваются в цилиндрической системе координат  $Or\beta z$ , где ось  $Oz$  совпадает с осью конструкции и направлена вверх по отношению к свободным поверхностям  $\Sigma^{(k)}$ ,  $r$  и  $\beta$  - радиальная и окружная координаты,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  - перемещения точек в радиальном, окружном и осевом направлениях. На поверхности оболочки введены криволинейные координаты  $\alpha, \beta$  (где  $\alpha$  отсчитывается вдоль образующей),  $A_\alpha, A_\beta$  - параметры Ламе,  $R_\alpha, R_\beta$  - радиусы кривизны поверхности,  $u, v, w$  - касательные (вдоль образующей и направляющей) и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки.

Пренебрегая толщиной оболочки, полагаем, что смоченная поверхность  $S_0^{(k)}$  геометрически совпадает с соответствующим участком срединной поверхности  $S$ .

В каждой точке срединной поверхности оболочки  $S$  считаем заданным вектор единичной нормали  $\vec{n}$ , определяющий положительное направление прогиба  $w$ . Через  $\vec{n}^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N_c$ ) обозначим векторы внешних (по отношению к  $Q^{(k)}$ ) нормалей к поверхностям  $S_0^{(k)}$ . Заметим, что на  $S_0^{(k)}$  векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{n}^{(k)}$  либо совпадают, либо противоположны по направлению. На поверхностях  $\Sigma^{(k)}$  внешнюю нормаль обозначим  $\vec{n}$ , а нормальные смещения точек обозначим  $\eta^{(k)}$ . Осевую координату точек свободной поверхности  $\Sigma^{(k)}$  обозначим  $z_0^{(k)}$ .

#### 4.1.1. Колебания несжимаемой жидкости.

Движение жидкости в полостях конструкции будем описывать при помощи потенциалов смещений  $\Phi^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, N_c$ ), для которых выполнены соотношения:

$$\vec{u} = \nabla \Phi^{(k)} \quad \text{в } Q^{(k)} . \quad (4.1)$$

Из условия несжимаемости жидкости следует уравнение:

$$\Delta \Phi^{(k)} = 0 \quad \text{в } Q^{(k)} . \quad (4.2)$$

На границах областей  $Q^{(k)}$  имеем условия:

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = w \quad \text{на } S_0^{(k)} ; \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial n} = \eta^{(k)} \quad \text{на } \Sigma^{(k)} . \quad (4.4)$$

Кроме того, на свободной поверхности жидкости должно быть выполнено условие:

$$\ddot{\Phi}^{(k)} + G \eta^{(k)} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{(k)} . \quad (4.5)$$

Как отмечалось в предыдущей главе, во многих практических приложениях спектр колебаний оболочек с жидкостью может быть разделен на два практически не взаимодействующих между собой подспектра. Первый из них образуют собственные частоты, связанные преимущественно с колебаниями свободной поверхности жидкости, а собственные частоты второго обусловлены упругостью оболочки. При этом частоты первого подспектра близки к частотам колебаний жидкости в жесткой полости.

Если практический интерес представляют лишь собственные колебания второго подспектра, то хорошую точность при их определении обеспечивает упрощенное по сравнению с (4.5) условие постоянства давления на свободной поверхности жидкости:

$$\Phi^{(k)} = 0 \quad \text{на } \Sigma^{(k)} . \quad (4.5a)$$

К примеру, именно эти упругие колебания конструкции топливных баков играют определяющую роль в продольных колебаниях корпусов жидкостных ракет тандемной схемы. Отметим, что при проведении расчетов многобачковых систем в зависимости от конкретных параметров конструкции можно комбинировать граничные условия (4.5) и (4.6) применительно к различным объемам жидкости.

Давление в жидкости определяется выражением:

$$P^{(k)} = -\rho_0^{(k)} \ddot{\Phi}^{(k)} + \rho_0^{(k)} (\vec{G} \cdot \vec{\nabla} \Phi) + G \rho_0^{(k)} H^{(k)} + p_0^{(k)}, \quad (4.6)$$

где  $H^{(k)} = z_0^{(k)} - z$  - глубина жидкости в данной точке. Если же влиянием гравитационных эффектов пренебрегается, то выражение сокращается:

$$P^{(k)} = -\rho_0^{(k)} \ddot{\Phi}^{(k)} + G \rho_0^{(k)} H^{(k)} + p_0^{(k)}, \quad (4.6a)$$

В этих выражениях можно выделить статическую составляющую  $P_0^{(k)}$  и малую вариацию  $p^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= P_0^{(k)} + p^{(k)}, \\ P_0^{(k)} &= p_0^{(k)} + G \rho_0^{(k)} H^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, в зависимости от того, учитывается влияние волн на свободной поверхности или же нет, поведение жидкости в изолированном объеме описывается с помощью уравнений (4.2), (4.3), (4.5) либо (4.2), (4.3), (4.5a).

Динамические условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью, рассмотрены в следующем разделе.

#### 4.1.2. Тонкостенная упругая оболочка.

Для описания поведения оболочки в общем случае используем нелинейную теорию тонких упругих оболочек [98, 77]. Нелинейными здесь являются геометрические соотношения, которые запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} E_{\alpha} &= \varepsilon_{\alpha} + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^2 ; & E_{\beta} &= \varepsilon_{\beta} + \frac{1}{2} \theta_{\beta}^2 ; & E_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha} + \Omega_{\beta} + \theta_{\alpha} \theta_{\beta} ; \\ K_{\alpha} &= -\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial \alpha} ; & K_{\beta} &= -\frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \alpha} \theta_{\alpha} ; \\ K_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha} + \frac{1}{R_{\alpha}} \Omega_{\beta} = \tau_{\beta} + \frac{1}{R_{\beta}} \Omega_{\alpha} ; \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_{\alpha}} ; & \varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_{\beta}} ; \\ \Omega_{\alpha} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial v}{\partial \alpha} ; & \Omega_{\beta} &= \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \alpha} v ; \\ \theta_{\alpha} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_{\alpha}} ; & \theta_{\beta} &= \frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_{\beta}} ; \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{1}{A_{\alpha}} \frac{\partial \theta_{\beta}}{\partial \alpha} ; & \tau_{\beta} &= -\frac{1}{A_{\beta}} \frac{\partial \theta_{\alpha}}{\partial \beta} + \frac{1}{A_{\alpha} A_{\beta}} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \alpha} \theta_{\beta} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь

$E_{\alpha}$  ,  $E_{\beta}$  ,  $E_{\alpha\beta}$  - удлинения и сдвиг срединной поверхности,

$K_{\alpha}$  ,  $K_{\beta}$  ,  $K_{\alpha\beta}$  - параметры, характеризующие изменение кривизны и кручение срединной поверхности.

В дальнейшем мы используем следующую форму записи геометрических соотношений:

$$\{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})\} = \begin{Bmatrix} E_\alpha \\ E_\beta \\ E_{\alpha\beta} \\ K_\alpha \\ K_\beta \\ K_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} + \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})\} \quad , \quad (4.10)$$

где выделены линейная и квадратичная относительно перемещений части:

$$\{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \Omega_\alpha + \Omega_\beta \\ K_\alpha \\ K_\beta \\ K_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2)\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_2) \\ \theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_2) \\ \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_1)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_2) + \theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}_2)\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Физические соотношения запишем в виде:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} T_\alpha \\ T_\beta \\ S \\ M_\alpha \\ M_\beta \\ 2H \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \quad , \quad (4.12)$$

где  $T_\alpha$  ,  $T_\beta$  ,  $S$  ,  $M_\alpha$  ,  $M_\beta$  ,  $H$  - внутренние усилия и моменты, а  $[D]$  - матрица упругости, в соответствии с [98] имеющая вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 2A_{33} \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{33} & 0 & 0 & 4D_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Выражения компонент матрицы  $[D]$  определяются свойствами оболочки [98]. В случае изотропной оболочки они равны:

$$\begin{aligned}
 B_{11} = B_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} ; & B_{12} = B_{21} &= \nu B_{11} ; & B_{33} &= \frac{1-\nu}{2} B_{11} ; \\
 D_{11} = D_{22} &= \frac{h^2}{12} B_{11} ; & D_{12} = D_{21} &= \nu D_{11} ; & D_{33} &= \frac{1-\nu}{2} D_{11} ; \\
 A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = A_{33} &= 0 .
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Наличие у оболочки подкреплений, параллельных осям  $\alpha$  и  $\beta$ , учтем, как и в работе [98], при помощи гипотезы “размазывания”. При этом компоненты матрицы упругости получают добавки, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned}
 B_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 F_i}{l_i} \quad (i = 1, 2) ; & B_{12}^0 = B_{21}^0 = B_{33}^0 &= 0 ; \\
 A_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 S_i}{l_i} \quad (i = 1, 2) ; & A_{12}^0 = A_{21}^0 = A_{33}^0 &= 0 ; \\
 D_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 J_i}{l_i} \quad (i = 1, 2) ; & D_{12}^0 = D_{21}^0 = D_{33}^0 &= 0 ;
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

где для подкрепляющего ребра, направленного вдоль соответствующей оси, обозначено:

$F_i$  - площадь поперечного сечения ребра,

$S_i$ ,  $J_i$  - статический момент и момент инерции поперечного сечения ребра относительно оси, проходящей через срединную поверхность оболочки,

$l_i$  - среднее расстояние между подкрепляющими ребрами,

$E_i^0$  - модуль упругости материала (предполагается, что  $\nu_i^0 = 0$ ).

При этом величины  $S_i$  и  $J_i$  вычисляются по формулам:

$$S_i = F_i z_{0i} ; \quad J_i = J_{0i} + z_{0i}^2 F_i ; \quad (4.16)$$

где

$z_{0i}$  - расстояние от центра тяжести поперечного сечения подкрепляющего ребра до срединной поверхности ( $z_{0i} > 0$ , если ребро расположено на внешней стороне оболочки),

$J_{0i}$  - собственный момент инерции поперечного сечения ребра.



Уравнения колебаний оболочки с учетом выражения (4.7) для давления в жидкости и формулы для приведенных поверхностных сил на контактной поверхности (3.53) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta T_\alpha) + A_\alpha \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} T_\beta + \frac{A_\alpha}{R_\alpha} \frac{\partial H}{\partial \beta} + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\alpha} N_\alpha = \\
 & = A_\alpha A_\beta \rho \ddot{u} - A_\alpha A_\beta q_\alpha + A_\alpha A_\beta \sum_{k=1}^{N_c} \sigma^{(k)} P_0^{(k)} \theta_\alpha ; \\
 & A_\alpha \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta^2 S) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{A_\beta H}{R_\beta} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} H + \frac{A_\alpha A_\beta}{R_\beta} N_\beta = \\
 & = A_\alpha A_\beta \rho \ddot{v} - A_\alpha A_\beta q_\beta + A_\alpha A_\beta \sum_{k=1}^{N_c} \sigma^{(k)} P_0^{(k)} \theta_\beta ; \\
 & \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta N_\alpha) + A_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} \right] - \frac{T_\alpha}{R_\alpha} - \frac{T_\beta}{R_\beta} = \rho h \ddot{w} - q_n + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_c} \sigma^{(k)} \{ \rho_0^{(k)} \ddot{\Phi}^{(k)} - \rho_0^{(k)} (\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) - P_0^{(k)} (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - P_0^{(k)} \} ;
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

где

$$\begin{aligned}
 N_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\beta M_\alpha) + A_\alpha \frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} M_\beta + A_\alpha A_\beta [T_\alpha \theta_\alpha + S \theta_\beta] \right\} ; \\
 N_\beta &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \left\{ A_\alpha \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\beta^2 H) + A_\alpha A_\beta [T_\beta \theta_\beta + S \theta_\alpha] \right\} ;
 \end{aligned}$$

и функции  $\sigma^{(k)}$  равны:

$$\sigma^{(k)}(\alpha, \beta) = \begin{cases} (\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}}^{(k)}) & , (\alpha, \beta) \in S_0^{(k)} \\ 0 & , (\alpha, \beta) \notin S_0^{(k)} \end{cases} ;$$

$q_\alpha$  ,  $q_\beta$  ,  $q_n$  - поверхностные нагрузки, в которые не включено давление жидкости,  $P_0^{(k)}$  определено выражением (4.7) (или (4.7a)).

К этим уравнениям необходимо добавить кинематические и динамические граничные условия на краях оболочки и в местах крепления упругих шпангоутов. Если гравитационными эффектами пренебрегается, то правые части уравнений соответствующим образом упрощаются.

#### 4.1.3. Упругие шпангоуты.

Рассмотрим теперь движение  $k$ -го шпангоута. Мы считаем шпангоут кольцом, радиус которого значительно больше размеров его поперечного сечения. При описании движения шпангоута используем гипотезу плоских сечений, т.е. считаем, что поперечные сечения кольца остаются при движении плоскими, недеформированными и ортогональными к линии их центров тяжести.

Пусть  $r_k$  - расстояние от оси  $Oz$  до центра тяжести поперечного сечения недеформированного кольца,  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$ ,  $\bar{w}_k$  - перемещения точек линии центров тяжести,  $\theta_k$  - угол поворота сечения. Введем также систему координат  $O_k\xi\beta\eta$ , связанную с центром тяжести сечения  $\Omega_k$  (рис. 4.2). Тогда для произвольной точки кольца можно записать:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}_k(\beta) + \eta\theta_k(\beta) ; \\ \bar{v} &= \bar{v}_k(\beta) + \xi\varphi_k(\beta) + \eta\psi_k(\beta) ; \\ \bar{w} &= \bar{w}_k(\beta) - \xi\theta_k(\beta) ;\end{aligned}\tag{4.18}$$

причем из условия ортогональности сечений и линии центров тяжести получаются выражения для  $\varphi_k$  и  $\psi_k$ :

$$\varphi_k = -\frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \beta} + \frac{\bar{v}_k}{r_k} ; \quad \psi_k = -\frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} .$$

Соотношения (4.18) будем далее записывать в виде:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_k^s(\mathbf{Y}_k) ,\tag{4.19}$$

где

$$\mathbf{Y}_k = \begin{Bmatrix} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \\ \bar{w}_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} .$$

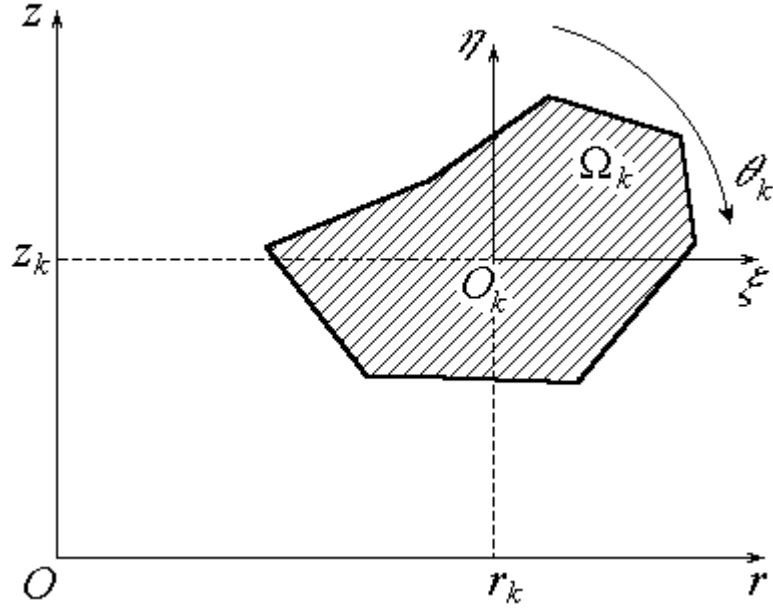


Рис. 4.2.

Отсюда нетрудно получить выражения для компонент тензора деформаций (в цилиндрической системе координат):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{r} \left\{ \bar{u}_k + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \beta} + \frac{\xi}{r_k} \left( \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \beta^2} \right) + \eta \left( \theta_k - \frac{1}{r_k} \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial \beta^2} \right) \right\} ; \\ \gamma_{r\beta} &= 2\varepsilon_{r\beta} = \frac{\eta}{r} \left\{ \frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} \right\} ; \\ \gamma_{\beta z} &= 2\varepsilon_{\beta z} = -\frac{\xi}{r} \left\{ \frac{1}{r_k} \frac{\partial \bar{w}_k}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} \right\} ; \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = 0 ;\end{aligned}\tag{4.20}$$

которые формально запишем в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{r\beta} \\ \gamma_{\beta z} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \left\{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \right\} ,\tag{4.21}$$

С учетом физических соотношений теории упругости для изотропного материала шпангоута запишем выражения компонент тензора деформаций следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\beta} \\ \sigma_{\beta z} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} , \quad (4.22)$$

где

$$[D_k] = E_k^0 \begin{bmatrix} 1 & 1-2\nu_k^0 & 1-2\nu_k^0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1-2\nu_k^0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \nu_k^0 & 0 & 0 \\ & symm & & & \nu_k^0 & 0 \\ & & & & & \nu_k^0 \end{bmatrix} ;$$

$$E_k^0 = \frac{E_k(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)} ; \quad \nu_k^0 = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)} ;$$

причем *symm* означает, что элементы ниже главной диагонали равны симметричным им элементам выше диагонали.

Таким образом, деформация шпангоута описывается при помощи столбца  $\mathbf{Y}_k$ . Рассматривая шпангоут в составе конструкции, мы будем пренебрегать размерами его поперечного сечения, аппроксимируя это сечение точкой. При этом считаем, что в этой точке на оболочке выполнены условия:

$$\bar{u} = \bar{u}_k ; \quad \bar{v} = \bar{v}_k ; \quad \bar{w} = \bar{w}_k ; \quad \theta_\alpha = \theta_k . \quad (4.23)$$

Условия (4.23) представляют собой кинематические условия в месте крепления шпангоута к оболочке. Мы не будем здесь выводить соответствующие динамические условия, поскольку в дальнейшем они не потребуются.

#### 4.1.4. Вариационная формулировка проблемы.

Суммируя вышеизложенное, делаем вывод, что поведение оболочечной конструкции с жидкостью в рамках сделанных предположений описывается уравнениями (4.2), (4.3), (4.5) (или (4.5а), если пренебрегается влиянием поверхностных волн в жидкости), (4.8), (4.12), (4.17) при наложенных на перемещения кинематических и динамических граничных условиях (на границах оболочки и в сечениях крепления шпангоутов). В дальнейшем совокупность функций, описывающих движение конструкции, мы будем обозначать:

$$\mathbf{U} = \left\{ u, v, w, \{ \mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, N_s \}, \{ \Phi^{(k)}, \eta^{(k)}, k = 1, \dots, N_c \} \right\} , \quad (4.24)$$

соответственно, для случая, когда гравитационными эффектами пренебрегается:

$$\mathbf{U} = \left\{ u, v, w, \{ \mathbf{Y}_k, k = 1, \dots, N_s \}, \{ \Phi^{(k)}, k = 1, \dots, N_c \} \right\} . \quad (4.24a)$$

Теперь сформулируем вариационный принцип с целью последующего применения метода конечных элементов для дискретизации и решения задачи. Принцип Гамильтона для механической системы формулируется как условие стационарности действия:

$$S(\mathbf{U}) = \int_0^t (T(\mathbf{U}) - V(\mathbf{U})) dt \quad (4.25)$$

на множестве движений  $\mathbf{U}$ , удовлетворяющих кинематическим условиям на краю оболочки, условиям (4.23), а также условиям (4.2), (4.3) и (4.5) (или (4.6)). В выражении (4.25)  $T(\mathbf{U})$  и  $V(\mathbf{U})$  - кинетическая и потенциальная энергия системы, для которых имеют место формулы:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{U}) = & \frac{1}{2} \int_S \rho h (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dS + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \rho_k [\bar{\mathbf{u}}_k^s (\dot{\mathbf{Y}}_k)]^2 r d\beta d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \Phi^{(k)})^2 dV \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{U}) = & \frac{1}{2} \int_S \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [D] \{ \varepsilon(\bar{\mathbf{u}}) \} dS + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \}^T [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} r d\beta d\Omega + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \eta^{(k)^2} dS - \right. \\
 & \left. - \int_{S_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \left\{ P_0^{(k)} [w(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - u\theta_\alpha - v\theta_\beta] + \rho_0^{(k)} (\vec{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) w \right\} dS \right] - \\
 & - \int_S (q_\alpha u + q_\beta v + q_n w) dS - \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \int_{S_0^{(k)}} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^{(k)}) P_0^{(k)} w dS
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Необходимость выполнения условий (4.2), (4.3) вызывает существенные затруднения при реализации метода конечных элементов. Поэтому в рассмотрение вводится функционал:

$$S^*(\mathbf{U}) = \int_0^t (T^*(\mathbf{U}) - V(\mathbf{U})) dt, \tag{4.28}$$

в котором

$$\begin{aligned}
 T^*(\mathbf{U}) = & T(\mathbf{U}) + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ - \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \dot{\Phi}^{(k)})^2 dV + \int_{S_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} \sigma^{(k)} \dot{w} \dot{\Phi}^{(k)} dS + \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} \dot{\eta}^{(k)} \dot{\Phi}^{(k)} dS \right\}, \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

соответственно, если не учитываются гравитационные эффекты:

$$T^*(\mathbf{U}) = T(\mathbf{U}) + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ - \int_{Q^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla \dot{\Phi}^{(k)})^2 dV + \int_{S_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} \sigma^{(k)} \dot{w} \dot{\Phi}^{(k)} dS \right\}. \tag{4.29a}$$

Вычислив вариацию функционала (4.28), получим из условия его стационарности уравнения колебаний конструкции вместе с условиями:

$$\Delta \ddot{\Phi}^{(k)} = 0 \quad \text{в } Q^{(k)}, \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial \ddot{\Phi}^{(k)}}{\partial n} = \ddot{w} \quad \text{на } S_0^{(k)}, \tag{4.31}$$

а если для  $k$ -го объема жидкости учтено влияние поверхностных волн, то и соотношение:

$$\frac{\partial \ddot{\Phi}^{(k)}}{\partial n} = \ddot{\eta}^{(k)} \quad \text{на } \Sigma^{(k)}. \tag{4.32}$$

Эти уравнения являются дважды продифференцированными по времени соотношениями (4.2), (4.3), (4.4). Такое отличие не принципиально, поскольку в уравнениях колебаний упругой части конструкции присутствует лишь вторая производная по времени потенциала смещений. Таким образом, решение задачи обеспечивает стационарность функционала (4.28) на множестве движений  $\mathbf{U}$ , удовлетворяющих лишь кинематическим ограничениям, наложенным на перемещения упругой конструкции, и условиям (4.5а) для случая, когда гравитационными эффектами пренебрегается. Отметим также, что на движениях, удовлетворяющих соотношениям (4.2), (4.3), выражение (4.29) совпадает по величине с кинетической энергией конструкции.

Поскольку нашей задачей в данной главе является определение собственных частот и форм колебаний конструкции, то далее рассматриваем линеаризованную задачу, пренебрегая нелинейными членами в геометрических соотношениях теории оболочек (4.8), а внешние нагрузки считаем нулевыми. В этом случае потенциальная энергия колебаний конструкции (относительно стационарного деформированного состояния, обусловленного собственным весом конструкции и внутренним давлением в ее полостях) равна:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{U}) = & \frac{1}{2} \int_S \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [D] \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \} dS + \\ & + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \}^T [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} r d\beta d\Omega + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Sigma^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \eta^{(k)2} dS - \int_{S_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [C_F^{(k)}] \{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \} dS \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

где введены обозначения:

$$\{ \hat{u}^+(\bar{\mathbf{u}}) \} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ -\theta_\alpha(\bar{\mathbf{u}}) \\ -\theta_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \\ \varepsilon_\alpha(\bar{\mathbf{u}}) + \varepsilon_\beta(\bar{\mathbf{u}}) \end{Bmatrix},$$

$$[C_F^{(k)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\rho_0^{(k)}(\vec{G} \cdot \vec{k}_\alpha) & \frac{1}{2}P_0^{(k)} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}P_0^{(k)} & 0 \\ & & \rho_0^{(k)}(\vec{G} \cdot \vec{n}) & 0 & 0 & \frac{1}{2}P_0^{(k)} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symm} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Если же гравитационными эффектами пренебрегается, то формула упрощается:

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_S \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \}^T [D] \{ \varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) \} dS + \quad (4.33a)$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \int_0^{2\pi} \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \}^T [D_k] \{ \varepsilon_k^s(\mathbf{Y}_k) \} r d\beta d\Omega$$

В дальнейшем собственные формы колебаний конструкции и соответствующие им собственные частоты будем обозначать  $\mathbf{U}_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Запишем свойства ортогональности собственных форм, следующие из формул для кинетической и потенциальной энергии. С этой целью перепишем (4.26) и (4.33) в виде:

$$T(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \hat{T}(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}) ; \quad (4.34)$$

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \hat{V}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) ; \quad (4.35)$$

где  $\hat{T}$  и  $\hat{V}$  - симметричные билинейные функционалы, вид которых легко определить из (4.26) и (4.33).

Тогда для собственных форм справедливы соотношения:

$$\hat{T}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \mu_k \delta_{kl} ; \quad (4.36)$$

$$\hat{V}(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \omega_k^2 \mu_k \delta_{kl} ; \quad (4.37)$$

где  $\delta_{kl}$  - символ Кронекера, а  $\mu_k$  - обобщенная масса  $k$ -ой собственной формы.



Разложим движение конструкции в ряд Фурье по окружной координате следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=0}^{\infty} (u^{m0} \cos m\beta + u^{m1} \sin m\beta) ; \\
 v &= \sum_{m=0}^{\infty} (v^{m0} \sin m\beta - v^{m1} \cos m\beta) ; \\
 w &= \sum_{m=0}^{\infty} (w^{m0} \cos m\beta + w^{m1} \sin m\beta) ; \\
 \left. \begin{aligned}
 \Phi^{(k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (\Phi^{(k)m0} \cos m\beta + \Phi^{(k)m1} \sin m\beta) \\
 \eta^{(k)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (\eta^{(k)m0} \cos m\beta + \eta^{(k)m1} \sin m\beta)
 \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_c ; \quad (4.38) \\
 \left. \begin{aligned}
 \bar{u}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{u}_k^{m0} \cos m\beta + \bar{u}_k^{m1} \sin m\beta) \\
 \bar{v}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{v}_k^{m0} \sin m\beta - \bar{v}_k^{m1} \cos m\beta) \\
 \bar{w}_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{w}_k^{m0} \cos m\beta + \bar{w}_k^{m1} \sin m\beta) \\
 \theta_k &= \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_k^{m0} \cos m\beta + \theta_k^{m1} \sin m\beta)
 \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_s ;
 \end{aligned}$$

и подставим это разложение в формулы (4.29) и (4.33). Тогда, выполнив интегрирование по окружной координате  $\beta$ , получим выражения вида:

$$\begin{aligned}
 T^*(\mathbf{U}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ T_m^*(\mathbf{U}^{m0}) + T_m^*(\mathbf{U}^{m1}) \} ; \\
 V^*(\mathbf{U}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{ V_m(\mathbf{U}^{m0}) + V_m(\mathbf{U}^{m1}) \} ;
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^{mi} &= \{ u^{mi}, v^{mi}, w^{mi}, \{ \mathbf{Y}_k^{mi}, k = 1, \dots, N_s \}, \{ \Phi^{(k)mi}, \eta^{(k)mi}, k = 1, \dots, N_c \} \} ; \\
 \mathbf{Y}_k^{mi} &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_k^{mi} \\ \bar{v}_k^{mi} \\ \bar{w}_k^{mi} \\ \theta_k^{mi} \end{Bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Здесь  $m = 0, 1, 2, \dots$  ;  $i = 0, 1$  ; причем следует полагать, что

$$u^{01} = v^{00} = w^{01} = \Phi^{(k)01} = \eta^{(k)01} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_k^{01} = \bar{v}_k^{00} = \bar{w}_k^{01} = \theta_k^{01} = 0 \quad .$$

Соотношения (4.39) означают, что уравнения свободных колебаний конструкции относительно  $\mathbf{U}^{mi}$  для различных индексов  $m$  и  $i$  не связаны между собой. Для собственных форм колебаний конструкции указанный факт означает, что любая собственная форма  $\mathbf{U}_s$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} u_s &= \tilde{u}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \quad ; \\ v_s &= \tilde{v}_s(\alpha) \sin(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \quad ; \\ w_s &= \tilde{w}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \quad ; \\ \left. \begin{aligned} \Phi_s^{(k)} &= \tilde{\Phi}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\ \eta_s^{(k)} &= \tilde{\eta}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_c \quad ; \\ \left. \begin{aligned} \bar{u}_{ks} &= \tilde{\bar{u}}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\ \bar{v}_{ks} &= \tilde{\bar{v}}_{ks} \sin(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\ \bar{w}_{ks} &= \tilde{\bar{w}}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\ \theta_{ks} &= \tilde{\theta}_{ks} \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_s \quad . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь  $m_s$  означает число волн по окружности в выражении собственной формы. Для осесимметричных форм колебаний ( $m_s = 0$ ) значение индекса  $i_s = 0$  соответствует продольно-радиальным колебаниям конструкции (в этом случае  $v_s = \bar{v}_{ks} = 0$ ), а значение индекса  $i_s = 1$  соответствует крутильным колебаниям (в этом случае отличны от нуля лишь  $v_s$  и  $\bar{v}_{ks}$ ). В случае неосесимметричных форм колебаний ( $m_s > 0$ ) каждая собственная частота является кратной (кратности 2), причем собственные формы, соответствующие одной частоте,

различаются (с точностью до множителя) только сдвигом по окружности на  $\frac{\pi}{2m_s}$  ( $i_s = 0$  или  $i_s = 1$ ).

Запишем теперь выражения функционалов  $T_m^*$  и  $V_m$  в формулах (4.39):

$$\begin{aligned} T_m^*(\tilde{\mathbf{U}}) = & \frac{1}{2} \pi_m \int_L \rho h (\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\tilde{v}}^2 + \dot{\tilde{w}}^2) r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k^T [M_k^m] \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ -\frac{1}{2} \pi_m \int_{\Omega^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla^m \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)})^2 r d\Omega + \pi_m \int_{L_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^{(k)}) \dot{\tilde{w}} \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)} r A_\alpha d\alpha + \right. \\ & \left. + \pi_m \int_{\Lambda^{(k)}} \rho_0^{(k)} \dot{\tilde{\eta}}^{(k)} \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)} r A_\alpha d\alpha \right\} , \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} V_m(\tilde{\mathbf{U}}) = & \frac{1}{2} \pi_m \int_L \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \}^T [D] \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \} r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Y}}_k^T [K_k^m] \tilde{\mathbf{Y}}_k \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{1}{2} \pi_m \left[ \int_{\Lambda^{(k)}} \rho_0^{(k)} G \tilde{\eta}^{(k)2} r dr - \int_{L_0^{(k)}} \sigma^{(k)} \{ \hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}}) \}^T [C_F^{(k)}] \{ \hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}}) \} r A_\alpha d\alpha \right] , \end{aligned} \quad (4.42)$$

или же без учета гравитационных эффектов:

$$\begin{aligned} T_m^*(\tilde{\mathbf{U}}) = & \frac{1}{2} \pi_m \int_L \rho h (\dot{\tilde{u}}^2 + \dot{\tilde{v}}^2 + \dot{\tilde{w}}^2) r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k^T [M_k^m] \dot{\tilde{\mathbf{Y}}}_k + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \left\{ -\frac{1}{2} \pi_m \int_{\Omega^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\nabla^m \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)})^2 r d\Omega + \pi_m \int_{L_0^{(k)}} \rho_0^{(k)} (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}^{(k)}) \dot{\tilde{w}} \dot{\tilde{\Phi}}^{(k)} r A_\alpha d\alpha \right\} , \end{aligned} \quad (4.41a)$$

$$V_m(\tilde{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2} \pi_m \int_L \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \}^T [D] \{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \} r A_\alpha d\alpha + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Y}}_k^T [K_k^m] \tilde{\mathbf{Y}}_k , \quad (4.42a)$$

где множитель  $\pi_m = \begin{cases} 2\pi, & m = 0 \\ \pi, & m > 0 \end{cases}$  ;

$L$  ,  $L_0^{(k)}$  ,  $\Lambda^{(k)}$  ,  $\Omega^{(k)}$  - осевые сечения поверхностей  $S$  ,  $S_0^{(k)}$  ,  $\Sigma^{(k)}$  и областей  $Q^{(k)}$  ;

$$\left\{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{w}}{R_\alpha} \\ \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{m}{A_\beta} \tilde{v} + \frac{\tilde{w}}{R_\beta} \\ -\frac{m}{A_\beta} \tilde{u} + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{v} \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{\theta}_\alpha}{\partial \alpha} \\ -\frac{m}{A_\beta} \theta_\beta^m - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{\theta}_\alpha \\ \frac{m}{A_\beta} \tilde{\theta}_\alpha + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \theta_\beta^m + \frac{1}{A_\alpha R_\beta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \alpha} \end{array} \right\} ; \quad (4.43)$$

$$\tilde{\theta}_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{u}}{R_\alpha} ; \quad \theta_\beta^m = -\frac{m}{A_\beta} \tilde{w} - \frac{\tilde{v}}{R_\beta} ;$$

$$\left[ M_k^m \right] = \pi_m r_k \rho_k \left[ \begin{array}{cccc} F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^r & \frac{m}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^2}{r_k^2} J_k^{rz} & 0 \\ & F_k + \frac{1}{r_k^2} J_k^r & \frac{m}{r_k^2} J_k^{rz} & 0 \\ & & F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^z & 0 \\ \text{symm} & & & J_k^r + J_k^z \end{array} \right] ; \quad (4.44)$$

$$\left[ K_k^m \right] = \pi_m \frac{E_k^0}{r_k} \times \left[ \begin{array}{cccc} F_k + \frac{m^4}{r_k^2} J_k^r & m F_k + \frac{m^3}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^4}{r_k^2} J_k^{rz} & \frac{m^2}{r_k} J_k^{rz} \\ & m^2 F_k + \frac{m^2}{r_k^2} J_k^r & \frac{m^3}{r_k^2} J_k^{rz} & \frac{m}{r_k} J_k^{rz} \\ & & \frac{\nu_k^0 m^2}{r_k^2} J_k^r + \frac{m^2 (m^2 + \nu_k^0)}{r_k^2} J_k^z & \frac{\nu_k^0 m^2}{r_k} J_k^r + \frac{m^2 (1 + \nu_k^0)}{r_k} J_k^z \\ \text{symm} & & & \nu_k^0 m^2 J_k^r + (1 + \nu_k^0 m^2) J_k^z \end{array} \right]$$

$$\nabla^m \tilde{\Phi}^{(k)} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{\Phi}^{(k)}}{\partial r} \\ -\frac{m}{r} \tilde{\Phi}^{(k)} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}^{(k)}}{\partial z} \end{array} \right\} ; \quad (4.45)$$

$$\{\hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} + \frac{\tilde{u}}{R_\alpha} \\ \frac{m}{A_\beta} \tilde{w} + \frac{\tilde{v}}{R_\beta} \\ \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \tilde{u} + \frac{m}{A_\beta} \tilde{v} + \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \right) \tilde{w} \end{array} \right\} .$$

Заметим, что при вычислении кинетической и потенциальной энергии шпангоутов (выражений для матриц  $[M_k^m]$  и  $[K_k^m]$ ) на основании малости размеров их поперечных сечений по сравнению с радиусами полагалось  $1/r \approx 1/r_k$  (см. формулы (4.26) и (4.27)).

Таким образом, для любого заданного числа волн по окружности  $m$  можно вычислить набор динамических характеристик: собственных частот и форм колебаний и соответствующих им обобщенных масс. При этом явная зависимость от окружной координаты позволяет перейти от трехмерной задачи к двумерной, рассматривая неизвестные функции на осевом сечении конструкции.

#### 4.1.5. Массы эквивалентных осцилляторов.

Для осесимметричных продольно-радиальных ( $m_s = 0, i_s = 0$ ) форм колебаний можно ввести понятие масс эквивалентных осцилляторов. Пусть конструкция в некотором сечении  $\alpha = \text{const}$  закреплена относительно продольных перемещений ( $\bar{w} = 0$ ) на жестком основании. Предположим теперь, что колебания возбуждаются колебаниями этого жесткого основания по заданному закону  $\bar{w} = W_0(t)$ . Обозначим  $\mathbf{U}_0$  - движение конструкции, соответствующее единичному смещению ее как жесткого целого в продольном направлении, а  $\mathbf{U}_s, s = 1, 2, \dots$  - осесимметричные собственные формы колебаний закрепленной на жестком основании конструкции. Для компонент движения  $\mathbf{U}_0$  легко получить выражения в виде:

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos \varphi ; \\ v_0 &= 0 ; \\ w_0 &= -\sin \varphi ; \\ \Phi_0^{(k)} &= -H^{(k)} = z - z_0^{(k)}, \quad k = 1, \dots, N_c ; \end{aligned} \quad (4.46)$$

где  $\varphi$  - угол между осью  $Oz$  и касательной к образующей оболочки (вдоль координатной линии  $\alpha$ ).

Представим движение конструкции в виде разложения в ряд по собственным формам:

$$\mathbf{U} = W_0(t)\mathbf{U}_0 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s(t)\mathbf{U}_s, \quad (4.47)$$

и подставим это разложение в выражения для кинетической и потенциальной энергии (3.34), (3.35). Тогда получаем:

$$T(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \dot{W}_0^2 \hat{T}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0) + \dot{W}_0 \sum_{s=1}^{\infty} \dot{q}_s \mu_{0s} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s \dot{q}_s^2 ; \quad (4.48)$$

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s^2 \mu_s q_s^2 ;$$

где

$$\mu_{0s} = \hat{T}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_s) . \quad (4.49)$$

Из (4.48), используя принцип Гамильтона, получим уравнения относительно обобщенных координат  $q_s$  :

$$\mu_s (\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s) = -\mu_{0s} \ddot{W}_0 , \quad (s = 1, 2, \dots) . \quad (4.50)$$

Нормируем теперь собственные формы колебаний  $\mathbf{U}_s$  с помощью множителей  $\alpha_s$  :

$$\mathbf{U}'_s = \alpha_s \mathbf{U}_s . \quad (4.51)$$

Тогда в разложении (4.47) обобщенные координаты

$$q'_s = \frac{1}{\alpha_s} q_s , \quad (4.52)$$

а коэффициенты уравнений (4.50) равны

$$\mu'_s = \alpha_s^2 \mu_s ; \quad \mu'_{0s} = \alpha_s \mu_{0s} . \quad (4.53)$$

Если теперь в качестве условия нормировки собственных форм ввести соотношение

$$\mu'_s = \mu'_{0s} , \quad (4.54)$$

то уравнения (4.50) приобретут вид:

$$M_s (\ddot{q}'_s + \omega_s^2 q'_s) = -M_s \ddot{W}_0 , \quad (s = 1, 2, \dots) , \quad (4.55)$$

где  $M_s = \mu'_s = \mu'_{0s}$  .

Уравнения (4.55) представляют собой уравнения колебаний системы осцилляторов, закрепленных на подвижном основании. Величины масс  $M_s$  , которые назовем массами эквивалентных осцилляторов, а также значения нормирующих множителей можно вычислить по формулам:

$$M_s = \frac{\mu_{0s}^2}{\mu_s} ; \quad \alpha_s = \frac{\mu_{0s}}{\mu_s} . \quad (4.56)$$

Можно показать, что сумма масс эквивалентных осцилляторов равна массе конструкции (если в сечении крепления нет сосредоточенной массы).

#### 4.2. Конечноэлементная дискретизация конструкции.

Основной идеей метода конечных элементов при решении краевых задач [56] является кусочная аппроксимация неизвестных функций. Область сложной формы представляется в виде совокупности областей простой геометрической формы (конечных элементов), на каждой из которых вводится набор базисных функций (функций формы). Искомые функции аппроксимируются в области элемента линейными комбинациями функций формы. Функции формы выбираются так, чтобы значения аппроксимируемых функций на элементе определялись значениями этих функций или их производных в заданном наборе точек (узловых точек), из которых хотя бы часть должна лежать на границе элемента. Элементы соединяются между собой в этих узловых точках, что обеспечивает объединение их в общую конечноэлементную модель конструкции.

Таким образом, от задачи определения функций в континуальных областях осуществляется переход к задаче определения дискретного набора связанных с ними значений в узловых точках конечноэлементной модели конструкции. При описанном выше построении каждой узловой переменной соответствует некоторая функция (отличная от нуля лишь на содержащих данный узел элементах), которую можно рассматривать как координатную, применяя для определения неизвестных значений, представляющих приближенное решение краевой задачи, метод Ритца или метод Бубнова-Галеркина. Существенное отличие такого подхода от традиционных версий указанных методов состоит в способе повышения точности результата, который заключается в уточнении аппроксимации посредством разбиения областей определения функций на более мелкие конечные элементы (сохраняя неизменным число функций формы на каждом из них), а не в увеличении числа учитываемых координатных функций, каждая из которых определена на всей области. В результате снима-



ется проблема выбора системы координатных функций, которая для областей сложной геометрической формы оказывается весьма трудной.

Мы рассматриваем задачу определения собственных частот и форм колебаний описанных выше конструкций для заданного числа волн по окружности  $m$ .

Исключение окружной координаты  $\beta$  с помощью формул (4.40) позволяет рассматривать в качестве областей определения потенциалов  $\tilde{\Phi}^{(k)}$  области  $\Omega^{(k)}$ , являющиеся осевыми сечениями областей  $Q^{(k)}$ , перемещения  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  считать определенными на одномерном многообразии  $L$ , являющемся осевым сечением срединной поверхности оболочки  $S$ , а вертикальные смещения  $\eta^{(k)}$  свободных поверхностей жидких объемов определять на осевых сечениях  $\Lambda^{(k)}$  свободных поверхностей  $\Sigma^{(k)}$ . Поэтому в соответствии с характером задачи будем использовать конечные элементы трех видов - двумерные для аппроксимации областей  $\Omega^{(k)}$ , одномерные для аппроксимации многообразия  $L$  и одномерные для аппроксимации многообразий  $\Lambda^{(k)}$ . (Это эквивалентно аппроксимации  $Q^{(k)}$ ,  $S$  и  $\Sigma^{(k)}$  элементами кольцевой формы.)

Опишем здесь конечные элементы, использовавшиеся в расчетах, и выведем формулы для вычисления их матриц жесткостей и матриц масс.

#### 4.2.1. Конечные элементы несжимаемой жидкости.

Для аппроксимации осевых сечений объемов жидкости в первых версиях расчетных программ, разработанных для применения на ЭВМ типа БЭСМ-6 (см. работы [34, 35]), использовались треугольные изопараметрические элементы второго порядка с шестью узловыми точками [56].

Обозначим  $\Delta^e$ ,  $e = 1, \dots, N^{\mathcal{Q}}$  - совокупность конечных элементов, покрывающих осевые сечения объемов жидкости, содержащихся в конструкции. Три узла элемента располагаются в углах криволинейного треугольника, а еще три на его сторонах (рис. 4.3а). Геометрия конечного элемента определяется

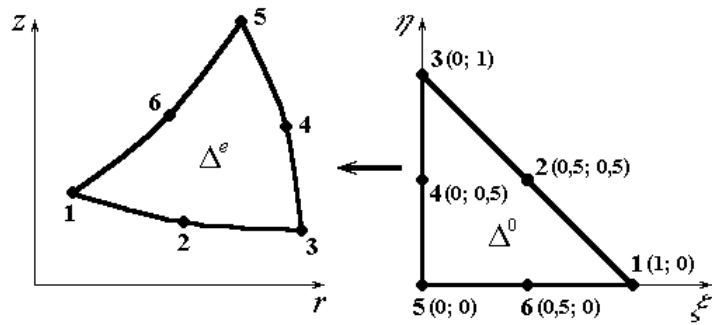
посредством отображения в него базисного треугольного элемента  $\Delta^0$ , на котором заданы функции формы:

$$\begin{aligned} n_1(\xi, \eta) &= \xi(2\xi - 1) ; & n_2(\xi, \eta) &= 4\xi\eta ; \\ n_2(\xi, \eta) &= \eta(2\eta - 1) ; & n_4(\xi, \eta) &= 4\eta(1 - \xi - \eta) ; \\ n_5(\xi, \eta) &= (1 - 2\xi - 2\eta)(1 - \xi - \eta) ; & n_6(\xi, \eta) &= 4\xi(1 - \xi - \eta) . \end{aligned} \quad (4.57)$$

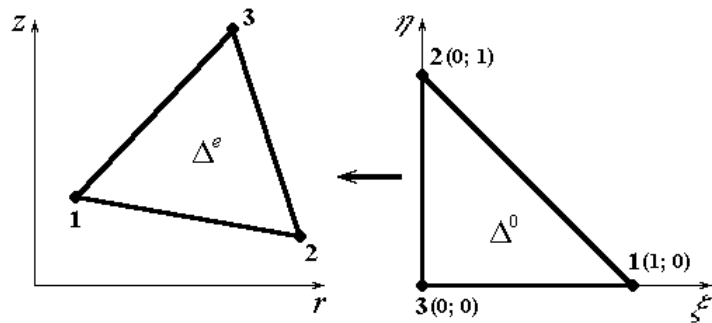
Отображение задает на элементе локальную криволинейную систему координат по формулам:

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^6 r_i n_i(\xi, \eta) ; \\ z(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^6 z_i n_i(\xi, \eta) ; \end{aligned} \quad (4.58)$$

где  $r_i$ ,  $z_i$  - координаты узловых точек элемента  $\Delta^e$ .



a)



b)

Рис. 4.3.

Потенциал смещений  $\tilde{\Phi}^{(k)}$  на элементе выражается через набор узловых значений

$$\{\delta_f^e\} = \{\tilde{\Phi}_1^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_2^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_3^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_4^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_5^{(k)} \quad \tilde{\Phi}_6^{(k)}\}^T$$

в локальных координатах при помощи матрицы функций формы

$$[N(\xi, \eta)] = \{n_1(\xi, \eta) \quad \dots \quad n_6(\xi, \eta)\}$$

по формуле:

$$\tilde{\Phi}^{(k)}(\xi, \eta) = [N(\xi, \eta)]\{\delta_f^e\}. \quad (4.59)$$

Подставив теперь (4.59) в выражение (4.41) для функционала  $T_m^*$ , получим выражение для вклада элемента  $\Delta^e$  в этот функционал:

$$T_{me}^{*Q} = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_f^e\}^T [M_f^e] \{\dot{\delta}_f^e\}, \quad (4.60)$$

где  $[M_f^e]$  - матрица масс элемента, вычисляемая по формуле:

$$[M_f^e] = -\pi_m \int_{\Delta^0} \rho_0^{(k)} [N_\nabla] [J]^{-1} [J]^{-T} [N_\nabla]^T r |\det[J]| d\xi d\eta, \quad (4.61)$$

в которой введены матрицы

$$[N_\nabla(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial n_6}{\partial \xi} \\ -\frac{m}{r} n_1 & \dots & -\frac{m}{r} n_6 \\ \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial n_6}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad [J(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления матрицы  $[M_f^e]$  интегрирование по  $\Delta^e$  в формуле (4.61)

можно выполнить численно, как это предлагается делать в работе [56].

В более поздних версиях программы, разработанных применительно к ЭВМ типа ЕС, а затем для персональных компьютеров типа IBM PC, использован более простой вариант конечного элемента жидкости, а именно треугольный конечный элемент с тремя узловыми точками в вершинах (рис. 4.3б). В пользу такой замены свидетельствовали следующие соображения. Во-первых, это простота вычислений, дающая экономию процессорного времени

на этапе формирования матриц. Во-вторых, уменьшение ширины ленты матриц системы, приводящее как к экономии памяти, так и к сокращению времени счета при определении собственных частот и форм. Точность же получаемых результатов практически не изменилась, что показали проведенные расчеты.

Функции формы такого конечного элемента имеют вид:

$$n_1(\xi, \eta) = \xi ; \quad n_2(\xi, \eta) = \eta ; \quad n_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta ; \quad (4.57a)$$

и соответствующим образом меняются выражения (4.58) для отображения базисного элемента и формулы для матриц  $[N(\xi, \eta)]$ ,  $[N_\nabla(\xi, \eta)]$  и  $[J(\xi, \eta)]$ .

#### 4.2.2. Конечные элементы тонкостенной оболочки.

Срединную поверхность оболочки аппроксимируем совокупностью усеченных конусов  $S^e$ ,  $e = 1, \dots, N^S$ , осевые сечения которых являются отрезками прямых (рис. 4.4). Концы отрезка являются узловыми точками элемента. Элементы такого типа описаны в работе [56]. Здесь мы несколько модифицируем их с целью учета взаимодействия с жидкостью, обеспечив тем самым совмещение функций оболочечного и контактного элемента, т.е. элемента, отражающего вклад соотношений на поверхности контакта в функционалы кинетической и потенциальной энергии. Такая возможность реализуется благодаря принятой гипотезе о совмещении контактной поверхности с участком срединной поверхности оболочки.

Обозначим  $\tilde{\Phi}^{(1)}$  и  $\tilde{\Phi}^{(2)}$  - значения потенциалов смещений с внутренней и с внешней сторон оболочки (внутренней стороной считаем находящуюся слева при движении от узла 1 к узлу 2). Это общий случай, когда жидкость находится с обеих сторон оболочки. Если с какой-либо стороны контакт с жидкостью отсутствует, то в формулах полагаем  $\tilde{\Phi}^{(k)} = 0$  и  $\rho_0^{(k)} = 0$ .

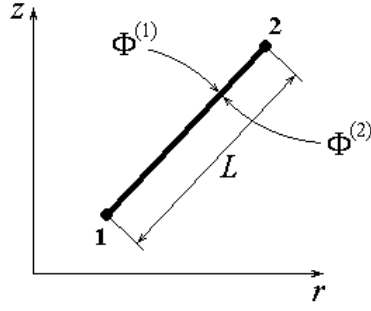


Рис. 4.4.

Введем на элементе локальную координату  $s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) по формулам:

$$\begin{aligned} r(s) &= r_1(1-s) + r_2s ; \\ z(s) &= z_1(1-s) + z_2s ; \end{aligned} \quad (4.62)$$

а значения переменных  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Phi}^{(2)}$  на элементе выразим через узловые значения величин  $\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{v}}, \tilde{\tilde{w}}, \tilde{\tilde{\theta}}_\alpha, \tilde{\tilde{\Phi}}^{(1)}, \tilde{\tilde{\Phi}}^{(2)}$  по формуле:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} & \tilde{v} & \tilde{w} & \tilde{\Phi}^{(1)} & \tilde{\Phi}^{(2)} \end{Bmatrix}^T = [N^e(s)] \{ \delta_s^e \} , \quad (4.63)$$

где вектор-столбец  $\{ \delta_s^e \}$  равен:

$$\{ \delta_s^e \} = \begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{u}}_1 & \tilde{\tilde{v}}_1 & \tilde{\tilde{w}}_1 & \tilde{\tilde{\theta}}_{\alpha 1} & \tilde{\tilde{\Phi}}_1^{(1)} & \tilde{\tilde{\Phi}}_1^{(2)} & \tilde{\tilde{u}}_2 & \tilde{\tilde{v}}_2 & \tilde{\tilde{w}}_2 & \tilde{\tilde{\theta}}_{\alpha 2} & \tilde{\tilde{\Phi}}_2^{(1)} & \tilde{\tilde{\Phi}}_2^{(2)} \end{Bmatrix}^T ,$$

а матрица функций формы

$$[N^e(s)] = [N(s)] [\Lambda^e] . \quad (4.64)$$

В выражении (4.64) матрица  $[N(s)]$  равна

$$[N(s)] = \begin{bmatrix} [N^1(s)] & [N^2(s)] \end{bmatrix} ,$$

где

$$[N^1(s)] = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3s^2+2s^3 & L(s-2s^2+s^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-s \end{bmatrix} ,$$

$$[N^2(s)] = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3s^2 - 2s^3 & L(-s^2 + s^3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix},$$

а матрица  $[\Lambda^e]$  имеет вид:

$$[\Lambda^e] = \begin{bmatrix} [\lambda^e] & [0] \\ [0] & [\lambda^e] \end{bmatrix},$$

где

$$[\lambda^e] = \begin{bmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из приведенных выше формул видно, что значения  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Phi}^{(2)}$  аппроксимируются на элементе линейной, а  $\tilde{w}$  кубической зависимостью.

Полагая в выражении (4.43)  $\alpha = s$ , получим, что на конечном элементе

$$\frac{1}{R_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{R_\beta} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad A_\alpha = L, \quad A_\beta = r, \quad \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} = L \sin \varphi, \quad \text{и следовательно,}$$

$$\left\{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \\ \frac{\sin \varphi \cdot \tilde{u} + m \tilde{v} + \cos \varphi \cdot \tilde{w}}{r} \\ \frac{-m \tilde{u} - \sin \varphi \cdot \tilde{v}}{r} + \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \\ -\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial s^2} \\ \frac{m \cos \varphi \cdot \tilde{v} + m^2 \tilde{w}}{r^2} - \frac{\sin \varphi}{rL} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \\ \frac{-\sin \varphi \cos \varphi \cdot \tilde{v} + m^2 \sin \varphi \cdot \tilde{w}}{r^2} + \frac{1}{rL} \left( m \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \cos \varphi \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \right) \end{array} \right\}. \quad (4.65)$$

Подставляя (4.63) в (4.65), получаем:

$$\{\varepsilon_m^L\} = [B^e(s)]\{\delta_s^e\}, \quad (4.66)$$

где  $[B^e(s)] = [B_0^e(s)][\Lambda^e]$ ,

причем матрица  $[B_0^e(s)] = [\{\varepsilon_m^L(\mathbf{N}_1)\} \dots \{\varepsilon_m^L(\mathbf{N}_{12})\}]$ ,

где  $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{12}$  - столбцы матрицы  $[N(s)]$ .

Выражения для компонент матрицы  $[B_0^e(s)]$  мы не выписываем ввиду их большого объема. Формулы для компонент столбцов 1 - 4 и 7 - 10 можно найти в работе [56], а столбцы 5, 6, 11, 12 оказываются нулевыми, поскольку значения потенциалов смещений жидкости в выражения для параметров деформации оболочки не входят.

В случае, когда в постановке задачи учитываются гравитационные эффекты, матрица жесткости элемента при наличии контакта с жидкостью (или избыточного давления) изменяется в соответствии с вкладом, определяемым формулой для потенциальной энергии (4.42).

Аналогично выполненным выше преобразованиям, используя формулу для вектора параметров деформации смоченной поверхности:

$$\{\hat{u}_m^+(\tilde{\mathbf{U}})\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ -\frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \\ \frac{m}{r} \tilde{w} + \frac{\cos \varphi}{r} \tilde{v} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{r} \tilde{u} + \frac{m}{r} \tilde{v} + \frac{\cos \varphi}{r} \tilde{w} \end{array} \right\},$$

получим выражение

$$\{\hat{u}_m^+\} = [F^e(s)]\{\delta_s^e\}, \quad (4.67)$$

где

$$[F^e(s)] = [F_0^e(s)][\Lambda^e],$$

$$\left[ F_0^e(s) \right] = \left[ \left\{ \hat{u}_m^+(\mathbf{N}_1) \right\} \quad \dots \quad \left\{ \hat{u}_m^+(\mathbf{N}_{12}) \right\} \right] .$$

Подставляя теперь (4.63), (4.66) и (4.67) в (4.41), (4.42), получаем формулы для вкладов элемента  $S^e$  в кинетическую и потенциальную энергию:

$$T_{me}^{*S} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_s^e \right\}^T \left[ M_s^e \right] \left\{ \dot{\delta}_s^e \right\} , \quad (4.68)$$

$$V_{me}^S = \frac{1}{2} \left\{ \delta_s^e \right\}^T \left[ K_s^e \right] \left\{ \delta_s^e \right\} , \quad (4.69)$$

в которых  $\left[ M_s^e \right]$  и  $\left[ K_s^e \right]$  - матрица масс и матрица жесткостей элемента, вычисляемые по формулам:

$$\left[ M_s^e \right] = \pi_m L \int_0^1 \left[ N^e(s) \right]^T \left[ C \right] \left[ N^e(s) \right] r(s) ds , \quad (4.70a)$$

$$\left[ K_s^e \right] = \pi_m L \int_0^1 \left( \left[ B^e(s) \right]^T \left[ D \right] \left[ B^e(s) \right] - \left[ F^e(s) \right]^T \left[ C_F \right] \left[ F^e(s) \right] \right) r(s) ds , \quad (4.70б)$$

где матрицы  $\left[ C \right]$  и  $\left[ C_F \right]$  имеют вид:

$$\left[ C \right] = \begin{bmatrix} \rho h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \rho h & 0 & 0 & 0 \\ & & \rho h & \rho_0^{(1)} & -\rho_0^{(2)} \\ & symm & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\left[ C_F^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{(\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)})G \cos \varphi}{2} & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} & 0 \\ & & (\rho_0^{(1)} - \rho_0^{(2)})G \sin \varphi & 0 & 0 & \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ symm & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} .$$

Для численного интегрирования в формулах (4.70a) и (4.70б) используется метод Гаусса. При отсутствии контакта с жидкостью с какой-либо сторо-



ны, как уже отмечалось, полагаем соответствующее  $\rho_0^{(k)} = 0$ , и следовательно, получаем нулевые соответствующие строки и столбцы в матрице  $[M_s^e]$ .

#### 4.2.3. Конечные элементы свободной поверхности.

Свободная поверхность жидкости представляется совокупностью кольцевых элементов  $\Sigma^e$ ,  $e = 1, \dots, N^\Sigma$ , имеющих прямолинейное осевое сечение и две узловые точки (рис. 4.5).

Используя локальную параметризацию осевого сечения элемента (4.62), выразим вертикальные смещения и потенциал на элементе через их узловые значения (индексы, определяющие номер объема жидкости, опускаем):

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\eta} \end{Bmatrix} = [N(s)] \{ \delta_\Sigma^e \},$$

$$\text{где } \{ \delta_\Sigma^e \} = \{ \tilde{\Phi}_1 \quad \tilde{\eta}_1 \quad \tilde{\Phi}_2 \quad \tilde{\eta}_2 \}^T, \quad [N(s)] = \begin{bmatrix} 1-s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & s \end{bmatrix}.$$

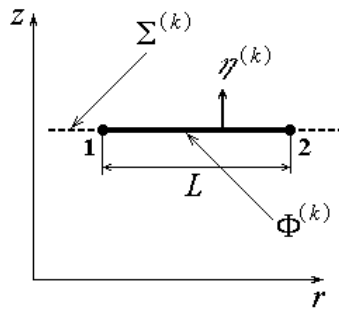


Рис. 4.5.

Подстановка этого соотношения в формулы (4.41), (4.42) дает выражения для матриц конечного элемента:

$$[M_\Sigma^e] = \pi_m L \int_0^1 [N(s)]^T [C_M] [N(s)] r(s) ds, \quad (4.71a)$$

$$[K_{\Sigma}^e] = \pi_m L \int_0^1 [N(s)]^T [C_K] [N(s)] r(s) ds, \quad (4.71б)$$

где  $[C_M] = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [C_K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 G \end{bmatrix}.$

#### 4.2.4. Формирование объединенных матриц конечноэлементной модели.

Выше получены формулы для матриц масс и матриц жесткостей конечных элементов, образующих дискретную модель упругой конструкции, содержащей идеальную несжимаемую жидкость.

Осевые сечения упругих шпангоутов в соответствии со сформулированной выше математической моделью конструкции считаем точками. Эти точки должны быть включены в число узловых точек при аппроксимации оболочки конечными элементами. При этом компоненты векторов  $\tilde{\mathbf{Y}}_k$ , определяющих деформацию шпангоутов, совпадают с узловыми значениями переменных, задающих деформацию оболочечных конечных элементов. Это оказывается весьма удобно для включения шпангоутов в конечноэлементную модель конструкции.

Обозначим теперь  $\{\delta\}$  - полный вектор параметров, описывающих движение системы конечных элементов. Он состоит из значений неизвестных функций  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\theta}_\alpha, (\tilde{\Phi}^{(k)}, \tilde{\eta}^{(k)}), k = 1, \dots, N_c$  в узловых точках конечных элементов. Его размерность определяет число степеней свободы конечноэлементной модели конструкции.

Запишем связь вектора  $\{\delta\}$  с векторами параметров, определяющих неизвестные функции на отдельных конечных элементах, в следующем виде:

$$\{\delta_f^e\} = [L_f^e] \{\delta\}; \quad \{\delta_{\Sigma}^e\} = [L_{\Sigma}^e] \{\delta\}; \quad \{\delta_s^e\} = [L_s^e] \{\delta\}; \quad \tilde{\mathbf{Y}}_k = [L_Y^k] \{\delta\}; \quad (4.72)$$

где матрицы  $[L_f^e]$ ,  $[L_\Sigma^e]$ ,  $[L_s^e]$ ,  $[L_Y^k]$  составлены из нулей и единиц очевидным образом.

Тогда приближенные выражения функционалов (4.41), (4.42) через  $\{\delta\}$  записываются в виде:

$$T_m^*(\{\delta\}) = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M] \{\dot{\delta}\} , \quad (4.73)$$

$$V_m(\{\delta\}) = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} , \quad (4.74)$$

где  $[M]$  и  $[K]$  - матрица масс и матрица жесткостей системы конечных элементов, аппроксимирующей конструкцию, формируемые из соответствующих матриц отдельных элементов следующим образом:

$$[M] = \sum_{e=1}^{N_\Sigma} [L_\Sigma^e]^T [M_\Sigma^e] [L_\Sigma^e] + \sum_{e=1}^{N_Q} [L_f^e]^T [M_f^e] [L_f^e] + \sum_{e=1}^{N_S} [L_s^e]^T [M_s^e] [L_s^e] + \\ + \sum_{k=1}^{N_Y} [L_Y^k]^T [M_k^m] [L_Y^k] ; \quad (4.75)$$

$$[K] = \sum_{e=1}^{N_\Sigma} [L_\Sigma^e]^T [K_\Sigma^e] [L_\Sigma^e] + \sum_{e=1}^{N_S} [L_s^e]^T [K_s^e] [L_s^e] + \sum_{k=1}^{N_Y} [L_Y^k]^T [K_k^m] [L_Y^k] .$$

Вычисляя вариацию функционала

$$S^*(\{\delta\}) = \int_0^t (T_m^*(\{\delta\}) - V_m(\{\delta\})) dt , \quad (4.76)$$

и приравнявая ее нулю, получаем уравнения свободных колебаний:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = 0 , \quad (4.77)$$

которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Задача определения собственных частот и форм колебаний конструкции сводится, таким образом, к алгебраической задаче о собственных значениях:

$$[K] \{\delta\} = \omega^2 [M] \{\delta\} . \quad (4.78)$$

#### 4.3. Учет влияния статического деформированного состояния при расчете динамических характеристик.

Под действием давления во внутренних полостях и гравитационных сил в конструкции возникает статическое напряженно-деформированное состояние, относительно которого она может совершать малые колебания. В линейном приближении это исходное статическое состояние не оказывает влияния на характеристики свободных колебаний, наложенных на него. Однако, экспериментальные результаты свидетельствуют о существенном влиянии величины внутреннего давления на собственные частоты колебаний оболочечных конструкций как с жидкостью, так и без жидкости (см. например, [31, 157]). Это влияние может быть учтено, если линеаризовать нелинейные уравнения колебаний в окрестности статического напряженно-деформированного состояния. Мы выполним здесь линеаризацию на уровне конечного элемента, получив формулу для матрицы жесткостей, в которой учтено влияние начальной статической деформации.

Представим деформированное состояние как сумму статической  $\mathbf{U}_0$  и динамической  $\mathbf{U}$  составляющих. Тогда из (4.10) получаем:

$$\{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\} = \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0)\} + \{\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}})\} + 2\{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{u}})\} + \{\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}})\} . \quad (4.79)$$

Потенциальная энергия деформации оболочки равна:

$$V(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \int_S \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\}^T [D] \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\mathbf{u}})\} dS . \quad (4.80)$$

Пусть динамическая составляющая имеет  $m$  волн по окружности. Статическая составляющая в силу характера вызывающих ее нагрузок осесимметрична, причем  $v_0 = 0$  .

Рассмотрим теперь описанный выше оболочечный конечный элемент. Подставим выражение (4.63) в (4.80), учитывая при этом, что для динамической составляющей  $\mathbf{U}$  выполнены соотношения:

$$u = \tilde{u}(\alpha) \cos(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ;$$

$$v = \tilde{v}(\alpha) \sin(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ;$$

$$w = \tilde{w}(\alpha) \cos(m\beta - i \frac{\pi}{2}) ;$$

где  $i = 0$  или  $i = 1$ . Выделяя затем в полученном выражении квадратичную относительно  $\{\delta_s^e\}$  часть, получим формулу для вычисления матрицы жесткостей элемента:

$$[K_s^e] = \pi_m L \int_0^1 ([B_p^e(s)]^T [D] [B_p^e(s)] + [Q_p^e(s)]) r(s) ds . \quad (4.81)$$

В этой формуле

$$[B_p^e(s)] = [B^e(s)] + [\{b_m(\mathbf{N}_1)\} \quad \dots \quad \{b_m(\mathbf{N}_{12})\}] [\Lambda^e] ,$$

где

$$\{b_m(\mathbf{U})\} = \begin{Bmatrix} \theta_\alpha(\mathbf{U}_0) \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}) \\ 0 \\ \theta_\alpha(\mathbf{U}_0) \theta_\beta^m(\mathbf{U}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

а матрица

$$[Q_p^e(s)] = [\Lambda^e]^T [Q(s)] [\Lambda^e] ,$$

причем компоненты матрицы  $[Q(s)]$  равны:

$$q_{ij} = \{\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}_0)\} [D] \{q_m(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j)\} ,$$

$$\{q_m(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_1) \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_2) \\ \theta_\beta^m(\mathbf{U}_1) \theta_\beta^m(\mathbf{U}_2) \\ (1 - \text{sgn}(m)) [\tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_1) \theta_\beta^m(\mathbf{U}_2) + \tilde{\theta}_\alpha(\mathbf{U}_2) \theta_\beta^m(\mathbf{U}_1)] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

При вычислении матрицы  $[K_s^e]$  значения  $u_0, v_0, w_0$  в точках, лежащих внутри конечного элемента, удобно вычислять по их узловым значениям при помощи соотношения (4.63).

Если нагрузки, вызывающие статическую деформацию, относительно невелики, так что ее можно определять из линейных уравнений, то расчет этой статической деформации удобно выполнять также методом конечных элементов.

#### 4.4. Основные принципы построения вычислительных алгоритмов.

Для расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью был разработан ряд вычислительных программ, основанных на методе конечных элементов.

Начало этой работы относится к 1976 - 1979 гг., когда были созданы программы для использования на ЭВМ БЭСМ-6. Они написаны на языке АЛГОЛ и предназначены для работы в системе БЭСМ-АЛГОЛ. Хронологический порядок их создания был следующий.

Первоначально была разработана программа расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью описанного выше типа при осесимметричных продольно-радиальных колебаниях ( $m = 0, i = 0$  в соответствии с введенными обозначениями). В этой программе вычисляются собственные частоты и формы колебаний, обобщенные массы и массы эквивалентных осцилляторов. Кроме того, в программе реализована дополнительная возможность расчета масс и координат центров масс конструкции без учета жидкости, отдельных объемов жидкости и конструкции с жидкостью, что весьма удобно при исследовании конструкций сложной геометрической формы.

Следующим этапом было создание программы, позволяющей рассчитывать динамические характеристики колебаний с произвольным заданным числом волн по окружности  $m$ . При этом в случае осесимметричных колебаний оказывается возможным расчет не только продольно-радиальных, но и крутильных собственных форм.

Далее была разработана программа, позволяющая при расчете динамических характеристик конструкции учитывать влияние статического напряженно-деформированного состояния, возникающего в результате внутреннего давления в полостях конструкции и сил гравитации. В этой программе выпол-

няется предварительно расчет статической деформации при помощи метода конечных элементов, а затем рассчитываются динамические характеристики.

Последняя, наиболее развитая версия программы позволяет в дополнение ко всему перечисленному выше полностью учитывать в расчете все гравитационные эффекты, включая образование волн на свободной поверхности и динамические условия на контактной поверхности.

Разработка алгоритмов, таким образом, осуществлялась в порядке расширения возможностей и, соответственно, усложнения вычислительных программ.

Отметим далее три момента, определивших эффективность реализации алгоритма.

#### 4.4.1. Рациональное использование памяти вычислительной системы.

При организации вычислительной процедуры, реализующей алгоритм метода конечных элементов, особое внимание необходимо уделять проблеме экономии памяти вычислительной системы, основные затраты которой приходятся на массивы компонент матрицы масс  $[M]$  и матрицы жесткостей  $[K]$  системы конечных элементов. Способ формирования этих матриц из матриц отдельных элементов, описываемый формально выражениями (4.75), определяет две особенности этих матриц, позволяющие существенно уменьшить затраты памяти.

Во-первых, матрицы  $[K]$  и  $[M]$  симметричные и имеют ленточную структуру, что позволяет хранить в памяти вычислительной системы только верхние части лент этих матриц. Еще большей экономии можно достичь, используя структуру так называемого профиля матрицы [50]. Следует отметить, что данная проблема является принципиальной и ключевой для сколь угодно эффективной реализации конечноэлементных алгоритмов.



Во-вторых, большая часть строк и столбцов матрицы  $[K]$  при наличии значительных объемов жидкости является нулевыми строками и столбцами благодаря тому, что жидкостные конечные элементы не дают вклада в эту матрицу. Хранить эти нулевые строки и столбцы нецелесообразно, и основные затраты памяти поэтому определяются размерностью массива для хранения компонент матрицы  $[M]$ . Размерность дополнительного информационного массива, с помощью которого осуществляется уплотнение матрицы  $[K]$ , незначительна по сравнению с получаемой экономией памяти.

Перечисленные выше программы для БЭСМ-6 не использовали внешние запоминающие устройства, что позволяло решать задачи с помощью конечно-элементных моделей с числом степеней свободы до 500-600. Этого оказалось достаточно для решения основного массива задач по расчету динамических характеристик топливных баков жидкостных ракет, что обеспечило распространение программы практически во всех ведущих отраслевых конструкторских бюро.

Однако для расчета с удовлетворительной точностью более сложных конструкций (например, систем вложенных баков с промежуточными днищами и т.п.) требовалось использовать модели с повышенной размерностью. Соответственно была разработана программа, использующая для хранения компонент массивов внешние запоминающие устройства, позволяющая доводить число степеней свободы конечноэлементных моделей до нескольких тысяч. Эти программы были перенесены на ЭВМ типа ЕС, для чего переписаны на алгоритмическом языке PL-1.

В настоящее время существуют версии программ для компьютеров типа IBM PC, в которых ограничения определяются в основном лишь наличными ресурсами конкретной конфигурации вычислительной системы и ее быстродействием.

#### 4.4.2. Решение проблемы собственных значений.

Процедуру решения задачи о собственных значениях (4.78) желательно организовать так, чтобы не увеличивать затраты памяти вычислительной системы. Среди методов решения этой задачи в качестве наиболее удобного был выбран описанный в работе [137] алгоритм, являющийся комбинацией метода деления отрезка пополам для вычисления собственных значений и метода обратных итераций для определения собственного вектора, соответствующего данному собственному значению. В указанных программах этот метод реализован с некоторыми изменениями и упрощениями, не оказавшими, однако, влияния на устойчивость численной процедуры. В процессе расчетов ни разу не было замечено явлений, связанных с накоплением погрешностей округления.

Для последовательного выделения и уточнения каждого собственного значения, лежащего в заданном интервале, используется тот факт, что для заданного значения  $\omega$  число перемен знаков в последовательности главных миноров матрицы  $[A] = [K] - \omega^2[M]$  равно числу собственных значений, меньших  $\omega$ . В отличие от [137], где для вычисления этой величины используется метод Гаусса с выбором главного элемента, здесь используется разложение матрицы  $[A]$  в виде:

$$[A] = [C]^T [B] [C], \quad (4.82)$$

где  $[C]$  - верхняя треугольная матрица с единичной диагональю, а  $[B]$  - диагональная матрица, компоненты которых вычисляются по рекуррентным формулам:

$$b_{11} = a_{11} ; \quad c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \quad (j > 1) ;$$

$$b_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{kk} c_{ki}^2 ; \quad c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{kk} c_{ki} c_{kj}}{b_{ii}} \quad (i > 1, j > i) . \quad (4.83)$$

Легко видеть, что число перемен знаков в последовательности главных миноров матрицы  $[A]$  равно числу отрицательных диагональных компонент матрицы  $[B]$ .

Из формул (4.83) видно, что если матрица  $[A]$  ленточная, т.е.  $a_{ij} = 0$  при  $|i - j| \geq h$  ( $h$  - полуширина ленты матрицы), то  $c_{ij} = 0$  при  $j \geq i + h$  и для вычисления  $b_{ii}, c_{ij}$  ( $j = i + 1, \dots, i + h - 1$ ) достаточно знать  $b_{kk}$  при  $i - h + 1 \leq k \leq i - 1$  и  $c_{kj}$  при  $j - h + 1 \leq k \leq i - 1$ . Поэтому размерность вспомогательных массивов (необходимых для того, чтобы не испортить массивы компонент матриц) равна  $(h^2 + h)/2$ .

Обозначим  $\omega_m$  - приближенное собственное значение (но не равное ему). На каждом шаге реализованного в программах варианта процедуры обратной итерации для вычисления собственного вектора, соответствующего ближайшей к  $\omega_m$  собственной частоте, выполняется следующая последовательность действий:

- 1) вычисление вектора  $\{\hat{\delta}_i\} = [K]\{\delta_{i-1}\}$ , где  $\{\delta_{i-1}\}$  - приближение, полученное на предыдущем шаге;
- 2) нормировка вектора  $\{\hat{\delta}_i\}$  таким образом, чтобы значение его максимального по модулю элемента было равно  $1/N_1$ ;
- 3) определение вектора  $\{\delta_i\}$  из уравнения:

$$([M] - \frac{1}{\omega_m^2} [K])\{\delta_i\} = \{\hat{\delta}_i\} ; \quad (4.84)$$

4) нормировка вектора  $\{\delta_i\}$  таким образом, что значение его максимального по модулю элемента равно  $1/N$  ;

5) проверка условия выхода из итерационного процесса, состоящего в том, чтобы компоненты векторов  $\{\delta_i\}$  и  $\{\delta_{i-1}\}$  отличались не более, чем на  $\varepsilon$  .

Здесь  $\varepsilon$  ,  $N$  ,  $N_1$  - задаваемые в качестве параметров процедуры величины.

С целью экономии времени работы процессора при решении системы (4.84) перед началом итераций выполняется разложение матрицы  $[M] - \frac{1}{\omega_m^2} [K]$  по формуле (4.82).

#### 4.4.3. Ввод исходной информации.

Серьезной проблемой при реализации конечноэлементных алгоритмов является задание исходной информации. Топологическая информация о разбиении конструкции на конечные элементы, содержащая номера узловых точек каждого элемента и их координаты, составляет массивы большой размерности. Задание этих массивов непосредственно вручную неизбежно сопровождается ошибками, обнаружить которые весьма непросто.

В настоящее время существуют и относительно доступны специально разработанные препроцессорные системы, работающие в интерактивном графическом режиме и позволяющие формировать конечноэлементное разбиение сложных конструкций. Однако успешное распространение описанных выше программ было обеспечено благодаря введенной в их состав относительно простой процедуре, автоматизирующей построение конечноэлементной модели конструкций рассматриваемого в данном разделе типа.

Эта процедура предназначена для формирования массивов, описывающих разбиение конструкций, составленных из оболочек цилиндрической, ко-

нической, сферической и тороидальной формы, что охватывает большинство встречающихся на практике конструкций. Использование этой процедуры, значительно сократив время подготовки вводимой информации, по существу сделало программы применимыми для практических расчетов. Удобство и простота принципов, заложенных в эту процедуру, до настоящего времени позволяет этим программам сохранять свойство конкурентоспособности (в пределах области их применения) по отношению к мощным вычислительным пакетам, основанным на методе конечных элементов.

#### 4.5. Результаты расчетов.

Со времени разработки первого варианта программы расчета динамических характеристик оболочечных конструкций с жидкостью методом конечных элементов и до настоящего момента выполнено большое количество расчетов. Основная масса расчетов проводилась с целью определения динамических характеристик отдельных топливных баков жидкостных ракет. Эти расчеты выполнялись во всех ведущих конструкторских бюро отечественного ракетно-космического комплекса, количество просчитанных вариантов исчисляется сотнями, и автору не известно случаев сбоев в работе программ. Это свидетельствует о высокой надежности принятой методики.

Выполнялись и более сложные (хотя и достаточно уникальные) расчеты в тех случаях, когда изделие в принципе трудно было схематизировать простыми расчетными схемами, требующими механического разделения топливных баков для включения их в пружинно-массовую или стержневую модель корпуса. В таких случаях, характеризующихся взаимной вложенностью баков с промежуточными днищами, контактирующими с жидкостью с обеих сторон, и т.п., выполнялись расчеты двухбаковых отсеков или же динамические характеристики корпуса ступени изделия рассчитывались целиком по оболочечной схеме с использованием конечноэлементной программы.

##### 4.5.1. Сопоставление расчетных данных с известными решениями.

Суждение о правильности работы составленных программ расчета динамических характеристик может быть сделано на основе сопоставления результатов, полученных другими методами или экспериментально, с результатами, полученными с помощью этих программ.

Рассмотрим конструкцию, составленную из двух соосных цилиндрических оболочек, полость между которыми заполнена жидкостью. Днище полости жесткое и неподвижное, верхние торцы оболочек шарнирно оперты (подвижны в осевом направлении), а нижние жестко защемлены. Для таких конструкций в работе [12] получено точное решение и приведены результаты расчетов при соотношениях параметров:

$$\frac{R_{0+}}{h_+} = \frac{R_{0-}}{h_-} = 500 ; \quad r_1 = \frac{R_{0-}}{R_{0+}} = 0,5 ; \quad \nu = 0,3 ; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 0,364 ;$$

при различных значениях относительной высоты  $\gamma = H/R_{0+}$ . Здесь  $R_{0+}$ ,  $h_+$  и  $R_{0-}$ ,  $h_-$  - радиусы и толщины внешней и внутренней оболочки.

Значения безразмерного частотного параметра

$$\lambda = R_{0+} \omega \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} ,$$

приведенные в работе [12] для двух низших тонов осесимметричных колебаний, сопоставлены в таблице 12 с вычисленными по методу конечных элементов.

Таблица 12

$\gamma$	Работа [12]		МКЭ	
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
4	0,01529	0,04501	0,01535	0,04520
2	0,03060	0,08543	0,03067	0,08561
1	0,06046	0,1448	0,06058	0,1451
0,5	0,1131	0,2136	0,1133	0,2179

Как и следовало ожидать, приближенные значения собственных частот лежат несколько выше точных. Эти результаты получены с использованием конечноэлементной модели с числом степеней свободы  $N = 518$  (сетка узловых точек: 7 по горизонтали и 41 по вертикали), которая, как мы видим, дала весьма высокую точность. Заметим, что были проведены расчеты с использованием более мелкого разбиения, и для  $\gamma = 4$  были получены значения  $\lambda_1 =$

0,015296 при  $N = 1038$  (сетка 7 x 81) и  $\lambda_1 = 0,015295$  при  $N = 1368$  (сетка 10 x 81), приближающиеся к точному значению. Это показывает, что при измельчении разбиения конструкции получаемые приближенные значения собственных частот стремятся к точным значениям.

На рис. 4.6 показаны полученные две первые собственные формы для  $\gamma = 2$ .

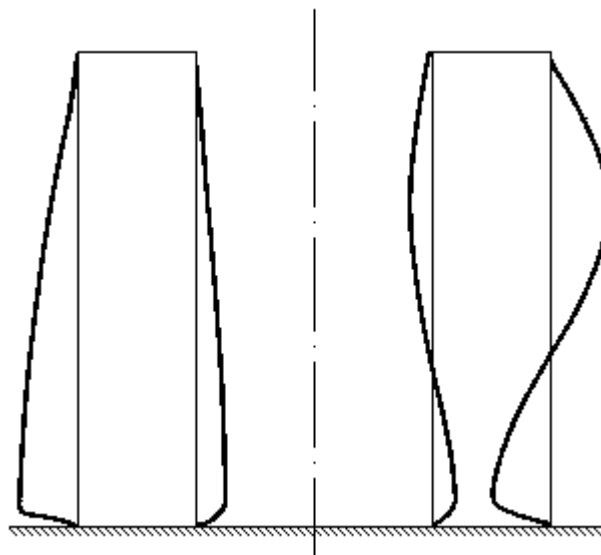


Рис. 4.6.

В работе [95] приведены экспериментальные и теоретические результаты исследования собственных частот и форм осесимметричных колебаний заполненной водой полусферической оболочки радиусом 0,133 м и толщиной 0,0007 м, изготовленной из материала с параметрами:  $E = 4,016 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup> и  $\rho = 1180$  кг/м<sup>3</sup>. Поскольку в [95] не указаны значения коэффициентов Пуассона и условия закрепления краев оболочки, мы полагаем  $\nu = 0,3$ , а на краю задавались три вида условий, когда для граничных точек:

А:  $u = 0$  ;

Б:  $u = w = 0$  ;

В:  $u = w = \theta_\alpha = 0$  .



Полученные значения собственных частот (в Гц) сопоставлены с результатами работы [95] в таблице 13, а на рис. 4.7 показаны собственные формы двух первых тонов для трех вариантов закрепления.

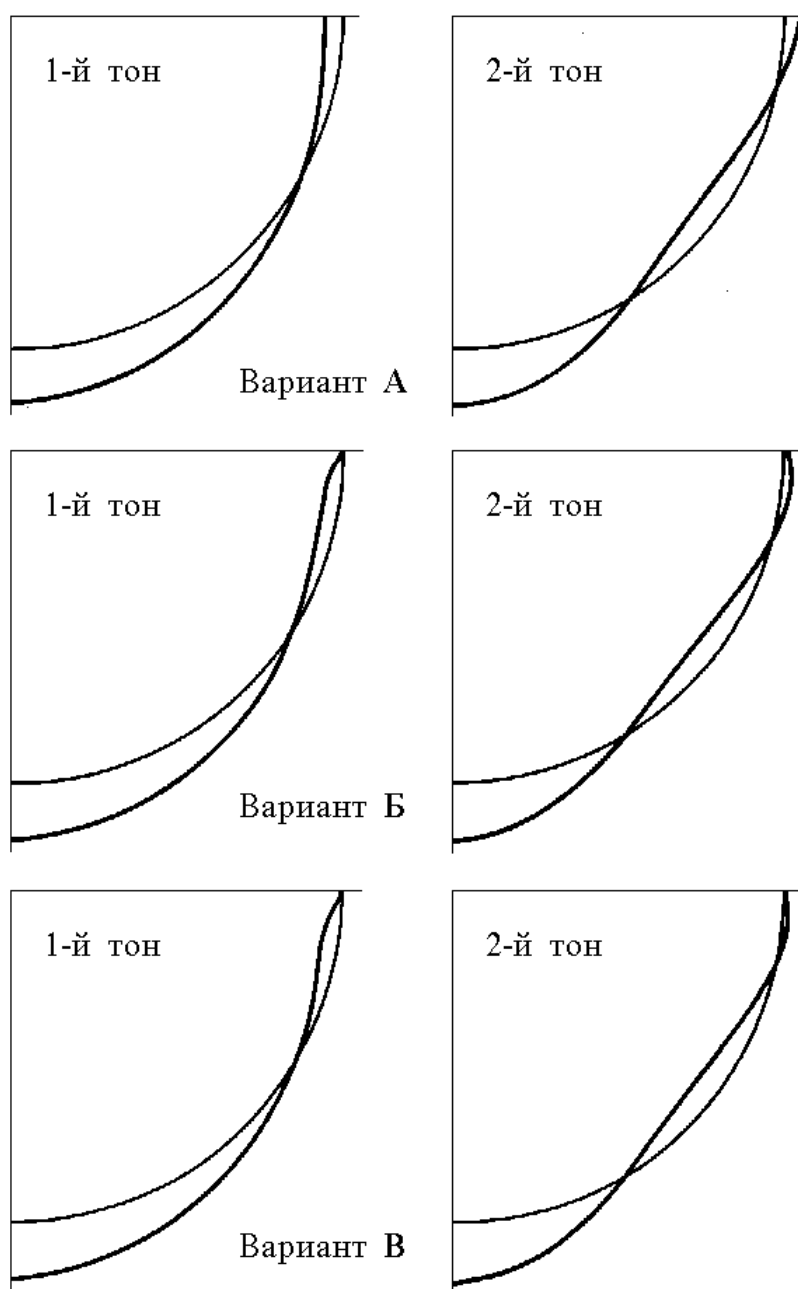


Рис. 4.7.

Мы видим, что частоты низших тонов колебаний слабо зависят от условий закрепления края оболочки, а полученные здесь результаты значительно лучше согласуются с экспериментальными (отличие не более 7%), чем теоре-

тические результаты работы [95]. Вычисленные собственные формы колебаний согласуются с полученными экспериментально.

Таблица 13

№ тона	Работа [95]		МКЭ		
	Расчет	Эксперимент	А	Б	В
1	185	216	206,5	209,4	210,6
2	272	305	315,6	317,9	318,4
3	350	370	393,9	395,4	395,4

Исследовались также собственные частоты осесимметричных колебаний сферической оболочки, закрепленной по экватору относительно вертикального перемещения и заполненной жидкостью наполовину, с параметрами:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 0,4355 ; \quad \nu = 0,3 ; \quad \frac{R}{h} = 100 \quad \text{и} \quad \frac{R}{h} = 1000 \quad (R - \text{радиус оболочки}).$$

Результаты, полученные по методу конечных элементов, сравниваются с вычисленными по формулам работы [63] в таблице 14, где для первых трех тонов приведены значения безразмерного частотного параметра

$$\lambda = R\omega \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}, \quad (4.85)$$

Таблица 14

$R/\delta$	Известное решение			МКЭ		
	1	2	3	1	2	3
100	0,172	0,258	0,316	0,170	0,257	0,316
1000	0,0549	0,0837	0,104	0,0547	0,0836	0,104

Результаты хорошо согласуются между собой. Число степеней свободы использованной конечноэлементной модели равнялось 332 (41 точка по образующей).

Правильность работы программы расчета динамических характеристик с учетом внутреннего давления и веса конструкции проверялась на примере усеченной конической оболочки, заполненной водой, находящейся под давлением (рис. 4.8). Нижний торец оболочки жестко защемлен, а к верхнему крепится

достаточно толстая крышка, что соответствует для неосесимметричных форм ( $m \geq 2$ ) жесткому защемлению. Материал оболочки имеет параметры:  $E = 6,77 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho = 2648 \text{ кг/м}^3$ . Размеры оболочки:  $L = 0,56 \text{ м}$ ,  $R_0 = 0,3 \text{ м}$ ,  $\varphi = 15^\circ$ .

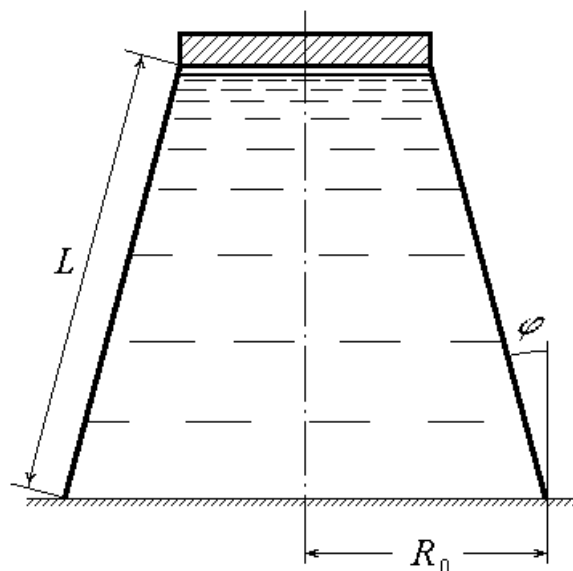


Рис. 4.8.

Таблица 15

$p$ , атм	$m$						
	3	4	5	6	7	8	9
0	96,34	75,50	61,07	53,22	50,12	52,14	58,21
	101,0	78,7	63,6	54,4	50,8	52,8	-
	100,0	76,0	-	-	51,0	54,0	-
0,1	96,95	77,50	66,41	62,42	64,62	71,57	81,52
	101,8	80,9	68,5	63,7	65,5	72,4	-
	100,6	80,0	70,0	65,2	67,0	74,4	-
0,3	98,14	81,33	75,03	77,44	86,18	98,82	113,60
	103,0	84,7	77,2	78,8	87,3	99,7	-
	101,0	83,7	79,0	80,7	89,2	102,8	-
0,5	99,31	84,97	82,70	89,79	102,90	119,33	137,63
	104,3	88,4	84,9	91,3	104,1	120,3	-
	101,0	87,0	86,0	93,0	106,5	123,5	-

В работе [31] приведены результаты экспериментального исследования собственных частот колебаний такой конструкции при различных величинах внутреннего давления, сопоставленные с теоретическими результатами. Полу-

ченные по методу конечных элементов значения собственных частот первого тона колебаний (в Гц) приведены в таблице 15. Нижние две цифры в этой таблице соответствуют теоретическим и экспериментальным результатам работы [31]. Полученные значения собственных частот отличаются от экспериментальных данных не более чем на 4%.

Разработанные программы позволяют рассчитывать динамические характеристики конструкций, не содержащих жидкость (как частный случай при  $N_c = 0$ ). Мы приведем здесь результаты расчетов собственных частот осесимметричных колебаний тороидальной оболочки, внутри которой находится газ под давлением. На внешнем и внутреннем экваторах оболочки находятся шпангоуты, ограничивающие их перемещения в радиальном направлении. В работе [157] приведены результаты подробного экспериментального исследования динамических характеристик оболочки с радиусом окружности, являющейся образующей тора,  $R = 0,2921$  м, отношением расстояния от оси до центра этой окружности к ее радиусу  $a = 1,365$ , толщиной  $h = 0,00159$  м. Параметры материала оболочки:  $E = 7,375 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,32$ ,  $\rho = 2850$  кг/м<sup>3</sup>. Масса внешнего шпангоута  $M^+ = 1,893$  кг.

Исследовались три варианта:

А. Оболочка не закреплена в продольном направлении, масса внутреннего шпангоута  $M = 12,004$  кг.

Б. Оболочка закреплена относительно продольных смещений по внешнему экватору,  $M = 11,509$  кг.

В. То же, что и Б., но к внутреннему шпангоуту добавлена масса, так что  $M = 29,101$  кг.

В таблице 16 приведены вычисленные с учетом влияния начальной статической деформации по методу конечных элементов значения собственных частот первого тона осесимметричных колебаний всех трех вариантов конструкции при различных значениях внутреннего давления, причем под ними

расположены экспериментальные и теоретические значения, взятые из работы [157].

Таблица 16

Вариант конструкции	$p$ , Па		
	0	$0,414 \cdot 10^5$	$1,035 \cdot 10^5$
А	48,64	62,22	77,23
	48,7	61,3	75,8
	49,0	61,6	74,9
Б	34,32	43,84	54,33
	33,8	42,6	52,0
	34,8	43,8	53,1
В	23,96	30,59	37,89
	24,1	30,1	37,0
	24,3	30,6	37,1

Отличие вычисленных собственных частот от экспериментальных значений не превышает 2,6% . Таким образом, программа позволяет учитывать начальную статическую деформацию при расчете динамических характеристик как осесимметричных, так и неосесимметричных колебаний.

Приведенные выше результаты показывают, что метод обеспечивает хорошую точность и сходимость к точному решению. При этом удовлетворительная точность может быть получена при относительно небольшом числе степеней свободы (порядка 300 - 500) конечноэлементной модели конструкции. И хотя при современном уровне развития вычислительной техники нет столь жестких, как прежде ограничений на объем оперативной памяти, невысокая размерность решаемых задач сокращает затраты времени и расширяет возможности исследования конструктивных вариантов. Тем не менее, при расчете сложных конструкций следует проводить оценку точности результатов, выполняя несколько расчетов (2 - 3) при помощи конечноэлементных моделей различной точности.

Отлаженная и проверенная программа может служить инструментом для получения новых результатов. Рассмотрим тороидальную оболочку, шарнирно

опертую по внешнему и внутреннему экваторам, частично заполненную жидкостью. Радиус  $R = 1$  м, отношение  $a = 2$ , толщина оболочки  $h = 0,01$  м. Характеристики материала:  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2750$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Уровень жидкости будем определять углом  $\alpha_0$  (рис. 4.9).

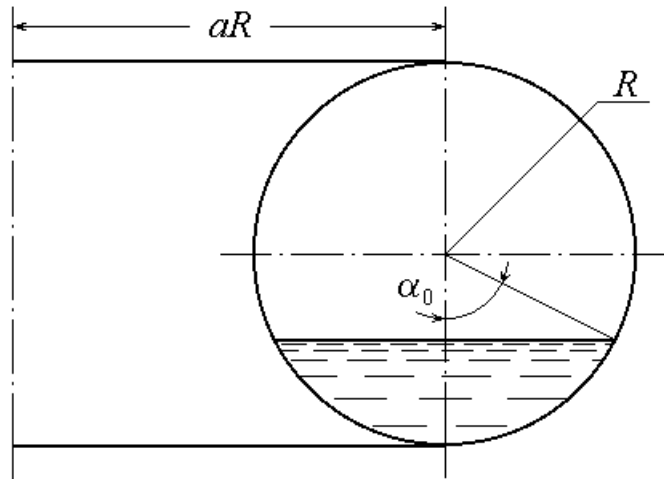


Рис. 4.9.

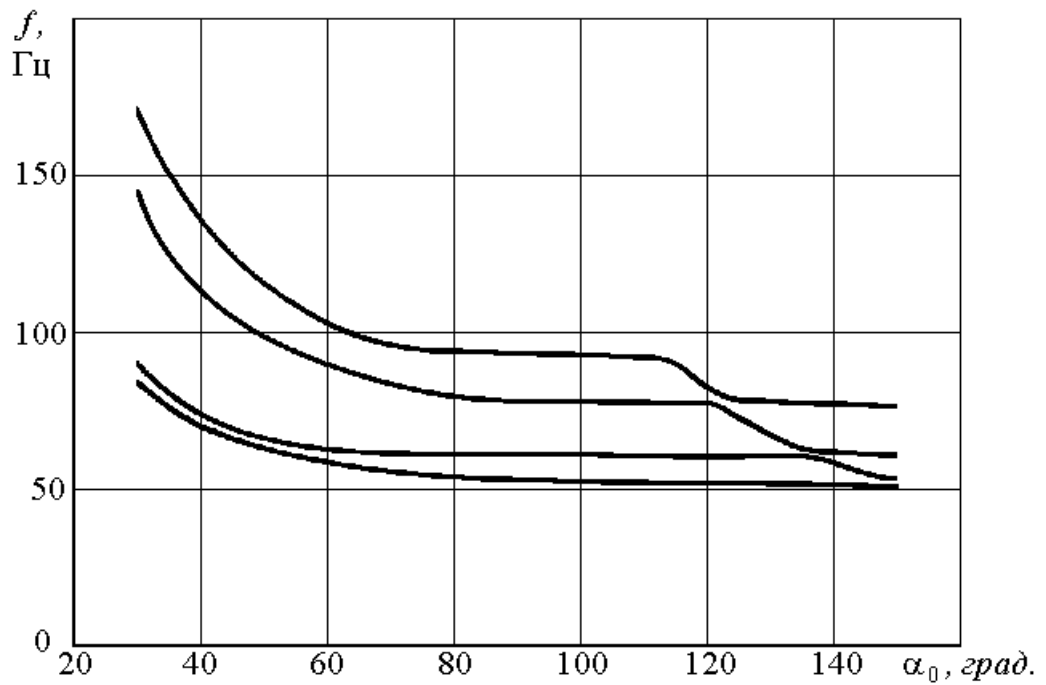


Рис. 4.10.

На рис. 4.10 представлена полученная зависимость первых четырех собственных частот осесимметричных колебаний от уровня заполнения. Число степеней свободы конечноэлементной модели при расчетах изменялось в пределах от 216 до 288. При больших уровнях заполнения ( $\alpha_0 > 90^\circ$ ) поведение этих зависимостей отражает взаимодействие колебаний верхней и нижней частей оболочки, слабая связь между которыми является следствием условий закрепления конструкции.

Качественное изменение формы колебаний второго тона в результате влияния колебаний верхней части оболочки при увеличении  $\alpha_0$  можно видеть на рис. 4.11, где изображены собственные формы двух низших тонов для уровней заполнения, соответствующих  $\alpha_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ .

Для оболочки, заполненной жидкостью наполовину ( $\alpha_0 = 90^\circ$ ), исследовалась зависимость низших четырех собственных частот от числа волн по окружности. Эти результаты представлены в таблице 17.

Таблица 17

Номер тона	$m$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
1	53,70	52,95	49,86	52,18	58,92	70,03	84,94	103,24
2	61,19	57,70	51,05	53,18	60,29	71,34	86,38	104,26
3	77,97	75,91	75,21	84,18	94,32	106,76	119,62	133,92
4	92,84	83,73	78,63	85,58	96,37	107,46	121,02	135,42

Минимальные значения собственных частот соответствуют  $m = 2$ . Кроме того, как видно из таблицы, собственные частоты неосесимметричных колебаний группируются по две. При этом в каждой паре низшая частота определяется колебаниями прилежащей к внешнему экватору части оболочки, а верхняя - колебаниями прилежащей к внутреннему экватору части оболочки.

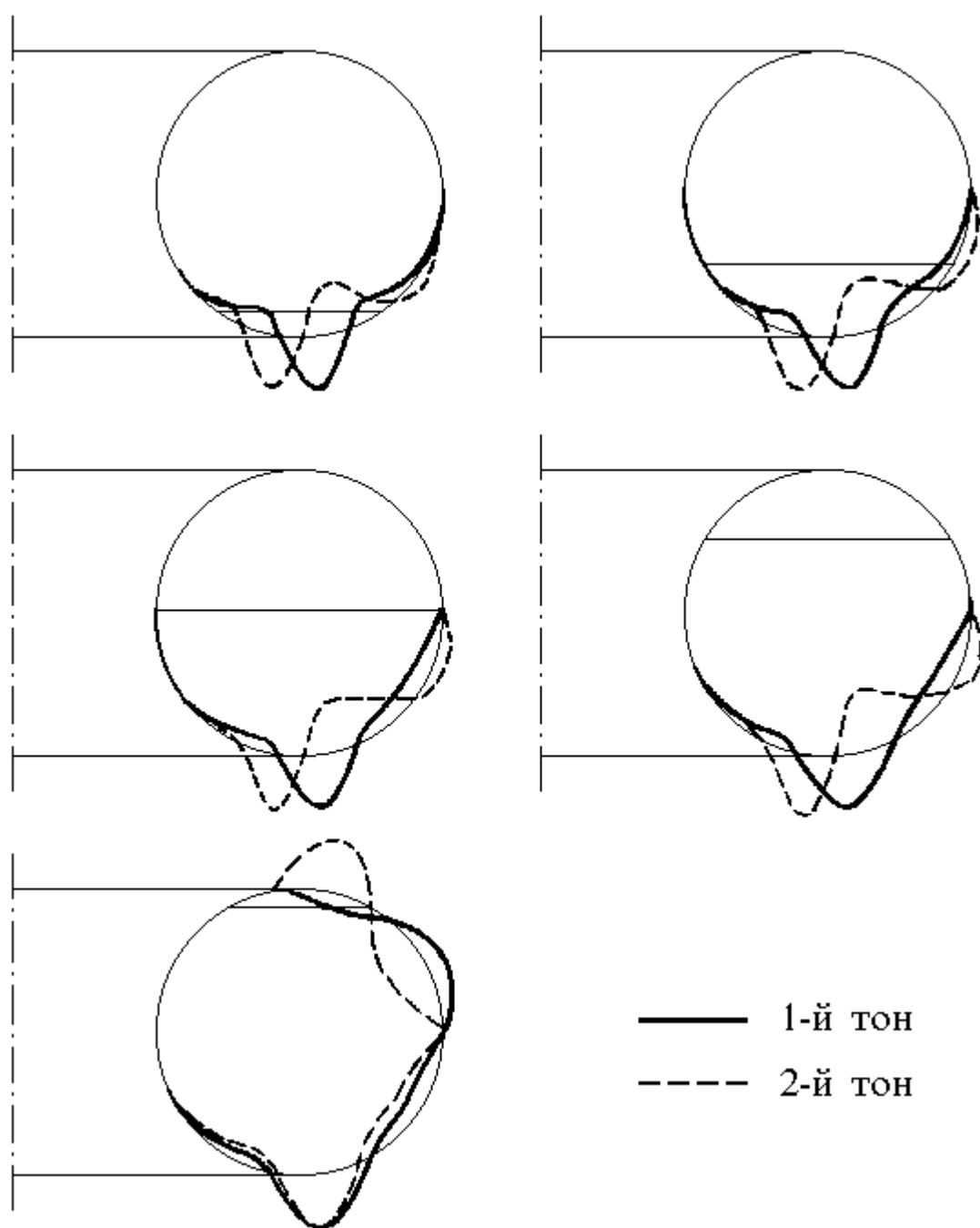


Рис. 4.11.



#### 4.5.2. Исследование устойчивости гидроупругой системы при действии гравитационного поля

Выполненное в данном разделе исследование предпринято с целью оценки на конкретном примере относительной величины того влияния, которое оказывает на собственные частоты колебаний тонкостенной конструкции с жидкостью гравитационный эффект, связанный с действием на контактную поверхность гидростатического давления как следящей силы. Формулы, выведенные в главе 3, показывают, что это влияние формально приводит к изменению эффективной жесткости стенки сосуда. При этом, если проекция вектора гравитационного поля на внешнюю по отношению к жидкости нормаль к контактной поверхности положительна, то жесткость снижается. При определенных соотношениях параметров собственная частота основного тона такой системы может понизиться до нуля и даже стать мнимой. Такая ситуация соответствует потере системой устойчивости статического равновесного состояния.

В качестве примера рассмотрим колебания упругой пластинки, закрывающей снизу заполненную жидкостью жесткую цилиндрическую полость (рис. 4.12). Края пластинки удовлетворяют условиям жесткой заделки. Радиус цилиндрической полости  $R = 1$  м, глубина жидкости  $H = 1$  м, плотность жидкости  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Материал пластинки имеет параметры:  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2750$  кг/м<sup>3</sup>. Толщина пластинки в процессе исследования варьируется.

Рассмотренные в процессе исследования значения толщины пластинки таковы, что ее статическое напряженно-деформированное состояние заведомо не удовлетворяет критерию прочности реального материала. Поэтому считаем, что снизу пластинка поддерживается избыточным давлением газов, компенсирующим вес столба жидкости, чтобы конструкция была физически реализуемой.

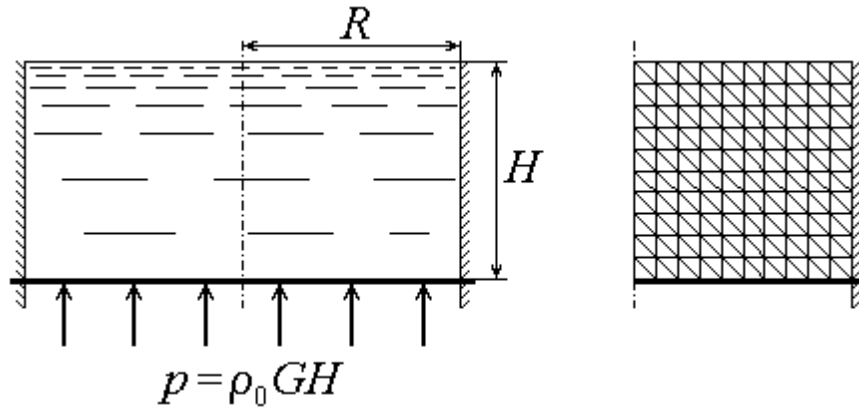


Рис. 4.12.

В процессе расчетов определялись низшие собственные частоты колебаний пластинки с числом волн по окружности  $m = 0, 1, 2$ . При этом варьировалось значение интенсивности гравитационного поля  $G$ . Конечноеэлементное разбиение конструкции показано на рис. 4.12.

В таблице 18 приведены результаты вычислений для четырех значений толщины пластинки. Заметим, что интерес для исследования представляли лишь тона гидроупругого подспектра, определяемые взаимодействием пластинки с жидкостью, поэтому представлены только соответствующие собственные частоты. Строки соответствуют различным значениям  $G$ , показанным в относительных величинах к ускорению свободного падения на поверхности земли  $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$ . Нулевое значение  $G$  соответствует расчету, проведенному без учета гравитационных эффектов.

Графически зависимость частот низших тонов от интенсивности гравитации представлена на рис. 4.13. Из полученных результатов видно, что при достаточно малых толщинах пластинки наблюдается снижение собственной частоты до нуля, что соответствует потере устойчивости ее равновесного состояния.

Таблица 18

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
--	---------	---------	---------

$G/g$	$h, \text{ м}$				$h, \text{ м}$				$h, \text{ м}$			
	0,005	0,004	0,003	0,002	0,005	0,004	0,003	0,002	0,005	0,004	0,003	0,002
0	1,779	1,276	0,830	0,453	5,085	3,653	2,382	1,302	10,18	7,327	4,787	2,621
1	1,732	1,208	0,719	0,157	5,020	3,561	2,237	1,019	10,13	7,256	4,676	2,409
2	1,683	1,134	0,583	-	4,954	3,466	2,084	0,488	10,08	7,184	4,561	2,176
3	1,628	1,054	0,393	-	4,887	3,370	1,925	-	10,02	7,111	4,444	1,918
4	1,576	0,967	-	-	4,819	3,271	1,772	-	9,977	7,037	4,324	1,577
5	1,520	0,869	-	-	4,751	3,170	1,280	-	9,925	6,962	4,200	1,211
6	1,462	0,756	-	-	4,681	3,068	1,114	-	9,873	6,887	4,073	0,625
7	1,401	0,621	-	-	4,611	2,964	0,801	-	9,821	6,811	3,941	-
8	1,336	0,443	-	-	4,541	2,861	-	-	9,768	6,734	3,806	-
9	1,267	0,059	-	-	4,468	2,762	-	-	9,715	6,656	3,666	-
10	1,194	-	-	-	4,396	2,675	-	-	9,662	6,577	3,522	-

Укажем на некоторую особенность графиков на рисунке, соответствующем поперечным колебаниям  $m = 1$ . В этом случае низший тон поперечных колебаний свободной поверхности связан с перемещением значительных масс жидкости, что приводит к заметному взаимодействию его с гидроупругими колебаниями пластинки. В результате на графиках появляются особенности, характерные для диаграмм Вина, отображающих взаимодействие парциальных частот связанных подсистем. Для наглядности на этом графике штриховыми линиями показаны собственные частоты колебаний свободной поверхности жидкости в полости с жестким днищем.

Отметим, что для собственных частот поперечных колебаний свободной поверхности выше первой взаимодействие тонов настолько слабое, что не может быть отображено на графике, поскольку не выходит за пределы толщины линий. То же самое можно сказать обо всех собственных частотах колебаний свободной поверхности с  $m = 0$  (осесимметричных) и с числом волн по окружности  $m > 1$ .

В работе [59] рассмотрена похожая физически реализуемая система, образованная горизонтальной заземленной по краям упругой пластинкой, разделяющей две несжимаемые жидкости различной плотности. При этом нижняя жидкость не имеет свободной поверхности. Рассмотрена плоская задача и получены приближенные формулы условий потери устойчивости такой системы.

Оказывается, что в случае, когда плотность верхней жидкости больше, чем плотность нижней, возможна потеря устойчивости как по симметричной, так и по несимметричной форме в зависимости от жесткостных параметров пластинки.

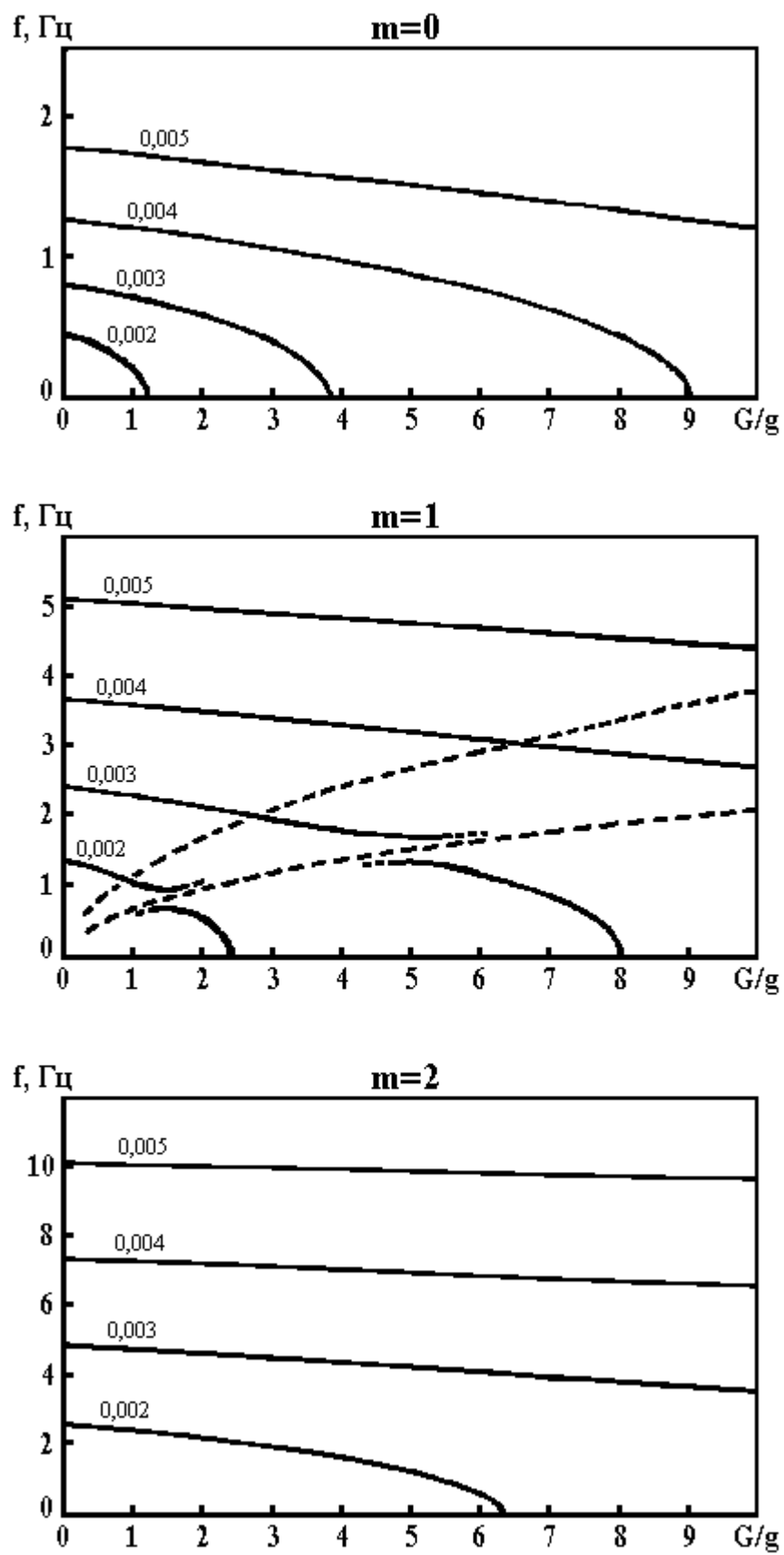


Рис. 4.13.

#### 4.6. Синтез подконструкций в расчетах динамических характеристик корпусов жидкостных ракет тандемной схемы.

Использование в расчетах динамических свойств сложных технических систем такого приема, как поэтапный расчет характеристик отдельных их составляющих и формирование с использованием полученных результатов механических моделей, более или менее адекватно отражающих свойства системы в целом, на практике широко распространено. По существу этот подход может рассматриваться как вариант синтеза подконструкций.

В случае расчета динамических характеристик корпусов жидкостных ракет при продольных колебаниях характерным примером такого подхода является стержневая модель, когда подвижность жидкости в топливных баках учитывается посредством введения в расчетную схему систем эквивалентных осцилляторов [63, 64, 93, 71, 91, 51]. Процедура расчета здесь разбивается на два этапа. Первый состоит в определении собственных частот и форм колебаний топливных баков, рассматриваемых как тонкостенные оболочечные конструкции с жидкостью, и вычислении соответствующих им масс эквивалентных осцилляторов. К этому же этапу можно отнести вычисление погонных масс и продольных жесткостей участков корпуса, моделируемого без учета колебаний жидкости в баках стержнем переменного сечения. На втором же этапе фактически осуществляется синтез результатов первого этапа, состоящий во введении в стержневую модель соответствующих бакам систем осцилляторов. Такая упрощенная модель используется затем для расчета динамических характеристик продольных колебаний корпуса или же исследования нагружения конструкции при возбуждении переходных колебательных процессов.

Стержневая модель продольных колебаний корпуса использовалась с начала 60-х годов и продолжает использоваться в отечественной практике по настоящее время. Несмотря на успешное в целом ее применение, нельзя не отме-

тить ряд факторов, которые несомненно влияют на снижение точности расчетных результатов, а в отдельных случаях делают ее непригодной ввиду явной неадекватности решаемой задаче.

Первое замечание состоит в том, что практически во всех современных ракетных системах стенки топливных баков являются несущими элементами конструкции. При стержневой схематизации корпуса их продольные жесткостные и массовые параметры должны войти в состав стержня на соответствующем участке. В то же время эти стенки определяют динамические характеристики баков, вводимые в расчетную схему через совокупность осцилляторов. Это означает, что выделение подвижной массы жидкости в систему осцилляторов связано с принудительным, насильственным с точки зрения механики отделением поперечных колебаний стенок бака (учитываемых посредством свободно подвешенных осцилляторов) от их продольных колебаний, представленных колебаниями стержня, моделирующего массовые и жесткостные свойства корпуса.

Во-вторых, для современных конструкций жидкостных ракет (в особенности, вторых ступеней) характерно компактное размещение топливных баков, когда баки горючего и окислителя не обязательно разнесены друг от друга вдоль корпуса и часто при этом имеют общие стенки. Это затрудняет или делает невозможным разделить колебания жидкости в баках и учитывать их посредством не связанных между собой осцилляторов.

Даже в случае традиционной компоновки баков пренебрежение отмеченной выше взаимосвязью продольных и поперечных колебаний стенок может приводить к заметной погрешности при расчете динамических характеристик корпуса. Это показано в работе [22] на примере конструкций, состоящих из последовательно соединенных между собой балок и тонкостенных упругих полостей с жидкостью. При относительно хорошем соответствии собственных частот (до 10%) различия вычисляемых собственных форм могут быть весьма значительными.

Разработка описанного в данной главе алгоритма расчета динамических характеристик и на его основе вычислительных программ позволило расширить круг надежно решаемых задач, используя напрямую оболочечную схематизацию корпуса жидкостной ракеты.

Известным препятствием на пути эффективного применения метода конечных элементов к исследованию сложных конструкций является высокая размерность дискретных моделей конструкции. В случае ракетных систем тандемной компоновки хорошим средством оказалась техника эквивалентных осцилляторов, описанная в разделе 4.1.5, где показано, что продольное динамическое взаимодействие конструкции с другой конструкцией, к которой она прикреплена в некотором сечении, равносильно взаимодействию с системой продольных осцилляторов.

Замена верхней части системы (ступени или отсека) системой эквивалентных осцилляторов, соответствующих ее низшим тонам (которые рассчитаны предварительно с помощью той же программы), понижает размерность модели, исследуемой на следующем этапе расчета. Эта процедура может выполняться последовательно многократно соответственно количеству отсеков, на которые разбивается система, так чтобы можно было применить описанный подход.

Фактически такой подход представляет собой также форму синтеза подконструкций. Точность получаемых результатов определяется количеством учитываемых в модели осцилляторов в зависимости от исследуемого частотного диапазона. Определенную неустранимую методическую погрешность здесь вносит возможная несогласованность поперечных колебаний стенки заменяемой осцилляторами подконструкции с поперечными колебаниями сечения, к которому эти осцилляторы крепятся. Эта погрешность уменьшается, если в сечении стыковки расположен жесткий шпангоут. На практике она оказывается чрезвычайно малой и несравнима с методической погрешностью стержневой модели корпуса, если учтено достаточное количество осцилляторов.



Гарантированную сходимость и высокую точность синтезированной модели обеспечивает разработанная в главе 2 методика синтеза динамических характеристик с использованием корректирующих рядов. Она непосредственно применяется к осесимметричным упругим оболочечным конструкциям, содержащим жидкость, соединяемым между собой в конечном числе сечений.

Сопоставим получаемые различными методами результаты на примере изображенной на рис. 4.14 конструкции, содержащей характерные для жидкостной ракеты компоненты.

В баках «Г» и «О» находятся горючее и окислитель плотностью соответственно  $800 \text{ кг/м}^3$  и  $1200 \text{ кг/м}^3$ . В сечениях ДУ и ГЧ помещены массы, представляющие двигательную установку и полезную нагрузку в головной части ( $1000 \text{ кг}$  и  $5000 \text{ кг}$ ). Диаметр конструкции  $4 \text{ м}$ , длина  $12,9 \text{ м}$ . Оболочки изготовлены из алюминиевого сплава с параметрами:  $E = 6,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2750 \text{ кг/м}^3$ . Цилиндрические оболочки толщиной  $h = 0,004 \text{ м}$  с внутренней стороны подкреплены ребрами высотой  $0,01 \text{ м}$  и шириной  $0,004 \text{ м}$ . Количество продольных ребер  $100$ , а кольцевые ребра расположены с шагом  $0,15 \text{ м}$ . Сферические оболочки гладкие толщиной  $h = 0,005 \text{ м}$  имеют радиус  $2,4 \text{ м}$ .

В расчетах не учитывалось волнообразование на свободной поверхности жидкости и другие гравитационные эффекты, которыми в случае продольных колебаний такого типа конструкций можно пренебречь.

Исследуем сначала эффективность применения метода корректирующих рядов при синтезе динамических характеристик подконструкций, сопоставив результаты расчета конечноэлементной модели полной конструкции, осевое сечение которой изображено на рис. 4.15, с результатами синтеза подконструкций, представляющих изолированные отсеки ракеты, конечноэлементные модели которых показаны там же.

Предполагалось, что частота среза, ограничивающая сверху исследуемый частотный интервал, равна  $50 \text{ Гц}$ .

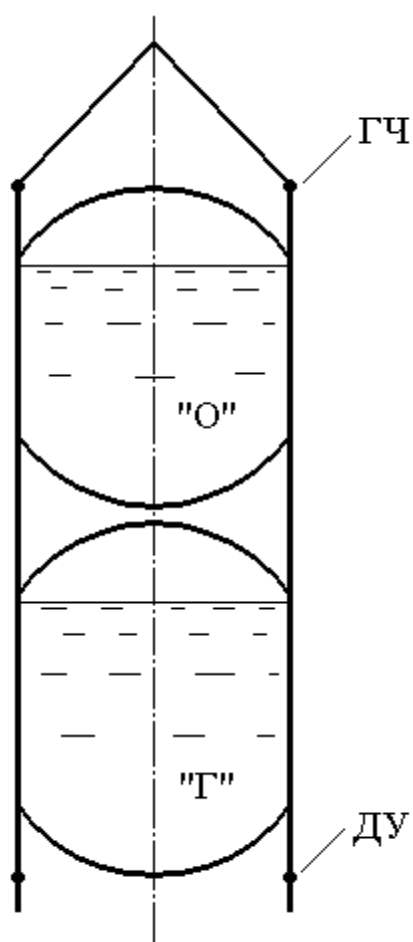


Рис. 4.14.

В таблице 19 приведены собственные частоты подконструкций, входящие в указанный частотный диапазон, а также первая из собственных частот, превосходящая частоту среза.

Таблица 19.

Отсек 1		Отсек 2	
№ тона	Частота, Гц	№ тона	Частота, Гц
1	16.40975	1	15.29227
2	38.30921	2	32.88690
		3	45.27215
3	52.34623	4	55.57488

Исследование спектра составной конструкции проводилось с использованием двух тонов нижнего отсека и трех тонов верхнего отсека. Нулевые соб-

ственные частоты в спектрах подконструкций отсутствуют ввиду условий закрепления внешних узлов.

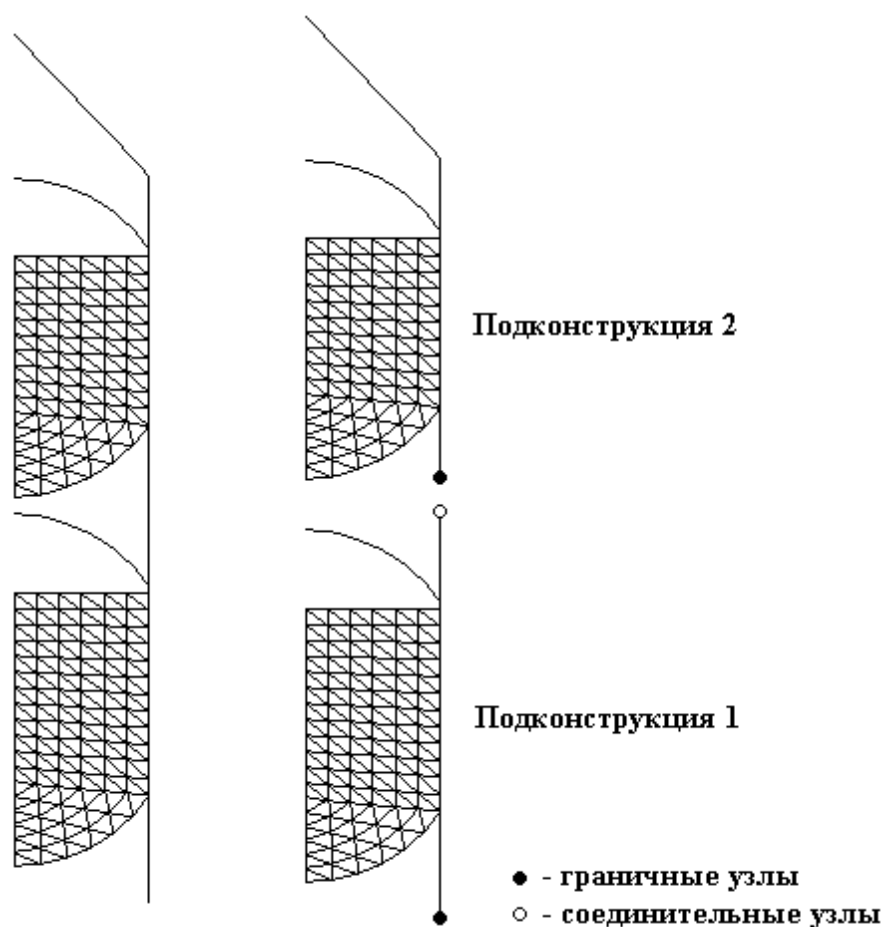


Рис. 4.15.

При исследовании варьировался порядок корректирующих рядов, используемых при синтезе подконструкций. Заметим, что для граничных степеней свободы использовались простые корректирующие вектора (в терминологии главы 2). Результаты этого исследования приведены в таблице 20, где в нижней строке показаны результаты расчета собственных частот корпуса без разбиения на подконструкции (рассматриваемые в качестве точных).

Представленные результаты демонстрируют быструю сходимость получаемых при синтезе собственных частот к точным значениям. Эта сходимость ухудшается вблизи верхней границы исследуемого частотного интервала.

Таблица 20.

Порядок корр. векторов	Собственные частоты, Гц				
	1	2	3	4	5
1	15.32573	32.88282	37.71831	44.77121	-
2	15.30957	32.88071	37.49462	43.86423	53.96057
3	15.30905	32.88005	37.42108	42.77800	48.40410
4	15.30901	32.87988	37.38886	42.18942	47.34489
5	15.30901	32.87983	37.37511	41.94558	46.99927
6	15.30901	32.87982	37.36915	41.84398	46.84837
7	15.30901	32.87982	37.36647	41.79920	46.77015
8	15.30901	32.87981	37.36522	41.77813	46.72447
9	15.30901	32.87981	37.36462	41.76754	46.69530
10	15.30901	32.87981	37.36433	41.76190	46.67539
11	15.30901	32.87981	37.36418	41.75874	46.66114
12	15.30901	32.87981	37.36411	41.75691	46.65062
13	15.30901	32.87981	37.36408	41.75582	46.64268
14	15.30901	32.87981	37.36405	41.75505	46.63586
Точно	15.30901	32.87981	37.36404	41.75408	46.61492

Графическая иллюстрация этой сходимости показана на рис. 4.16, где в логарифмических координатах представлена относительная погрешность получаемых значений собственных частот от порядка корректирующих рядов  $m$ . Номера кривых на графике соответствуют номеру собственной частоты корпуса.

На рис. 4.17 показаны использованные при синтезе собственные формы колебаний отсеков, а на рис. 4.18 изображены собственные формы колебаний корпуса.

Сопоставим полученные данные с результатами двух других рассмотренных выше методов синтеза, схемы которых изображены на рис. 4.19.

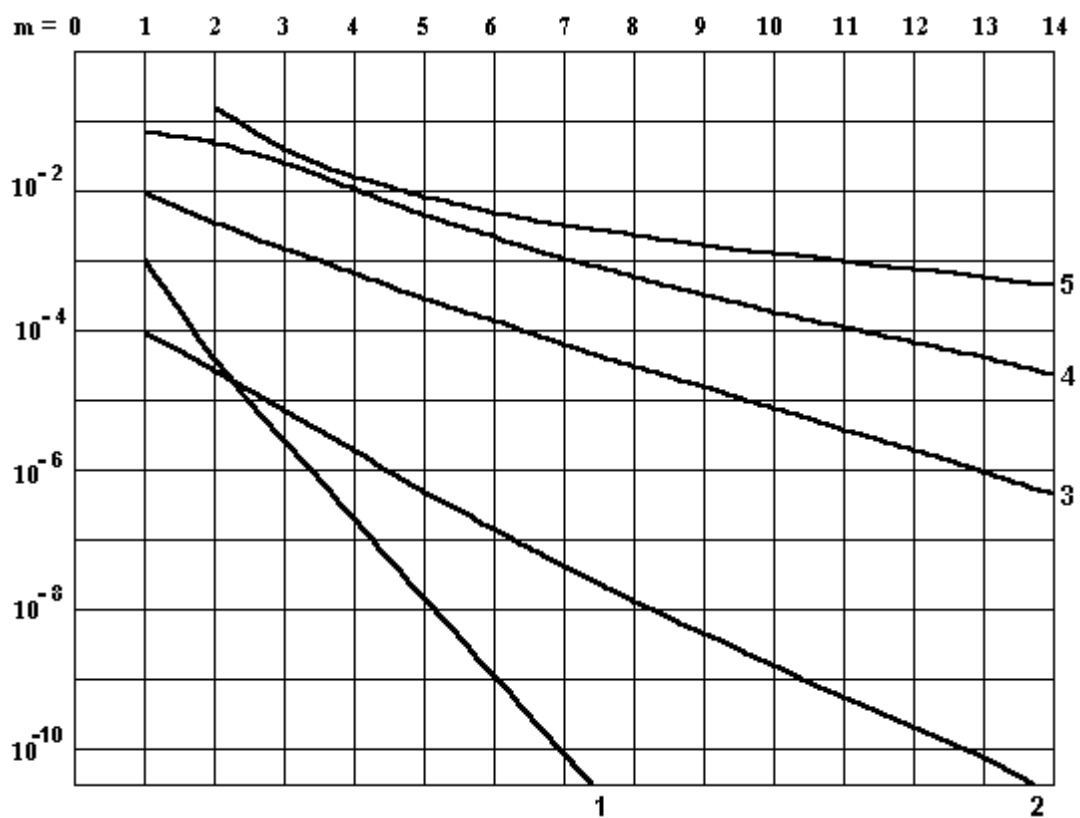


Рис. 4.16.

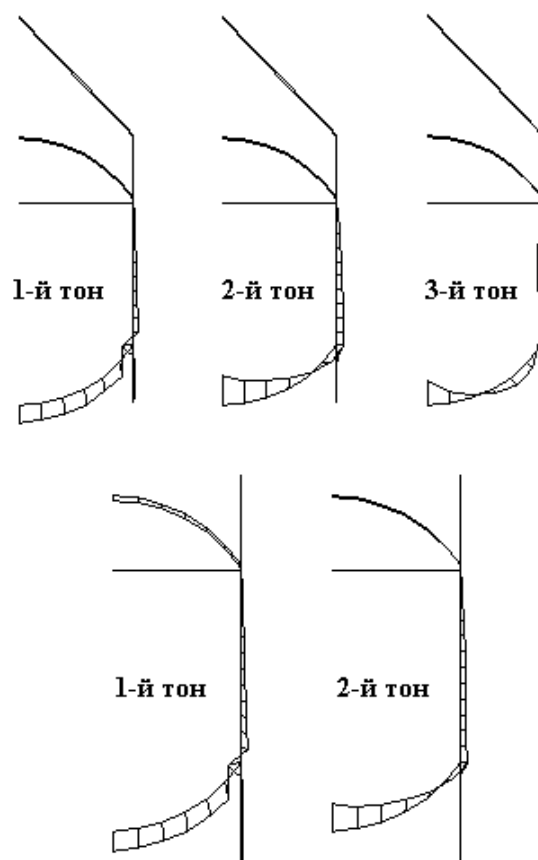


Рис. 4.17.

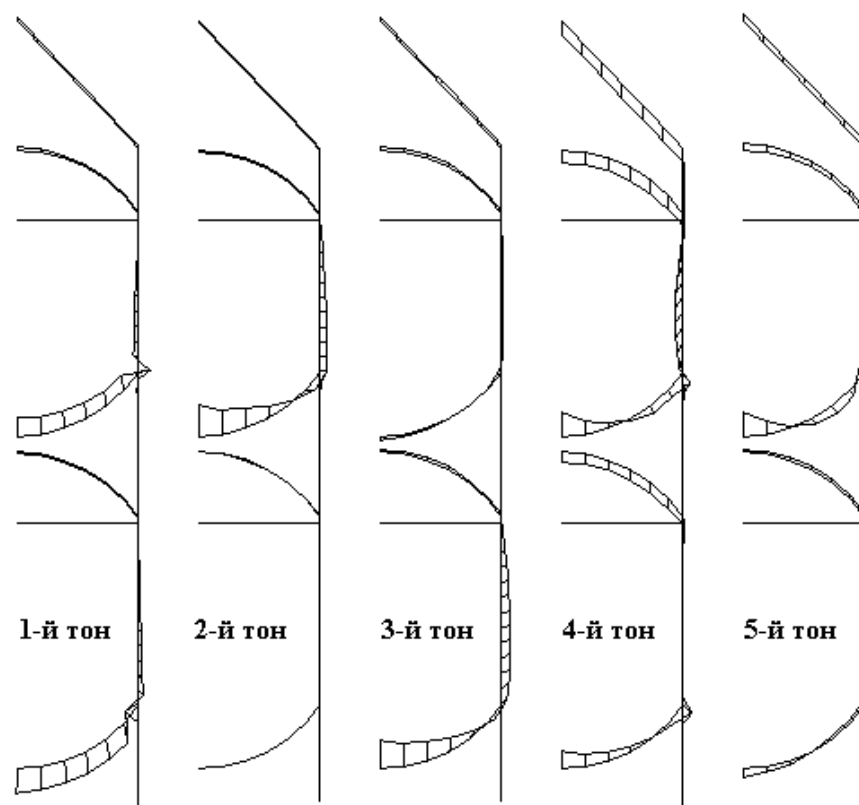


Рис. 4.18.

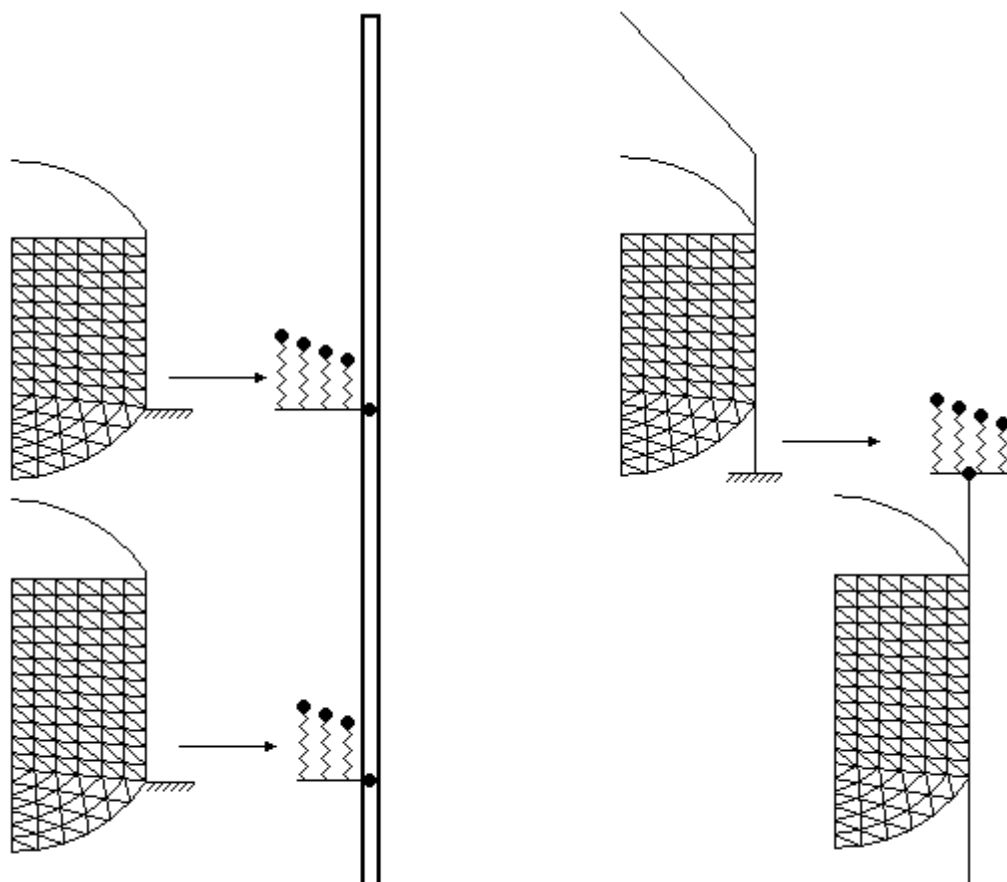


Рис. 4.19.

Для топливных баков были вычислены динамические характеристики в диапазоне до 100 Гц, а также массы эквивалентных осцилляторов, приведенные в таблице 21. Стержневая модель корпуса рассматривалась в двух вариантах:

- 1) учитывались тона колебаний баков с частотами, перекрывающими исследуемый частотный диапазон до 50 Гц (3 тона бака «Г» и 4 тона бака «О»);
- 2) учитывались все тона колебаний баков в диапазоне до 100 Гц.

Таблица 21.

Бак «Г»			Бак «О»		
№ тона	Частота, Гц	Масса экв. осц., кг	№ тона	Частота, Гц	Масса экв. осц., кг
1	16.39763	34518.269	1	14.72946	44858.132
2	37.34689	84.417	2	32.34146	3.233
3	52.59224	378.725	3	45.15406	330.523
4	64.00165	85.921	4	55.67929	267.253
5	75.00326	35.758	5	65.11621	1.467
6	87.59902	96.825	6	76.50599	135.731
7	96.55162	7.163	7	85.79902	36.593
			8	97.43653	40.417
Полная масса:		36357.748	Полная масса:		46819.356

На рис. 4.20 показаны собственные формы колебаний баков, соответствующие учтенным в первом варианте эквивалентным осцилляторам.

Рассмотрен также метод поэтапной замены верхней части конструкции эквивалентными осцилляторами. Для верхнего отсека при закрепленном в продольном направлении нижнем основании вычислены собственные частоты и массы эквивалентных осцилляторов (таблица 22). Здесь также исследованы два варианта:

- 1) учитывались тона колебаний верхнего отсека с частотами, перекрывающими исследуемый частотный диапазон до 50 Гц (4 эквивалентных осциллятора);
- 2) учитывались все тона колебаний баков в диапазоне до 100 Гц.

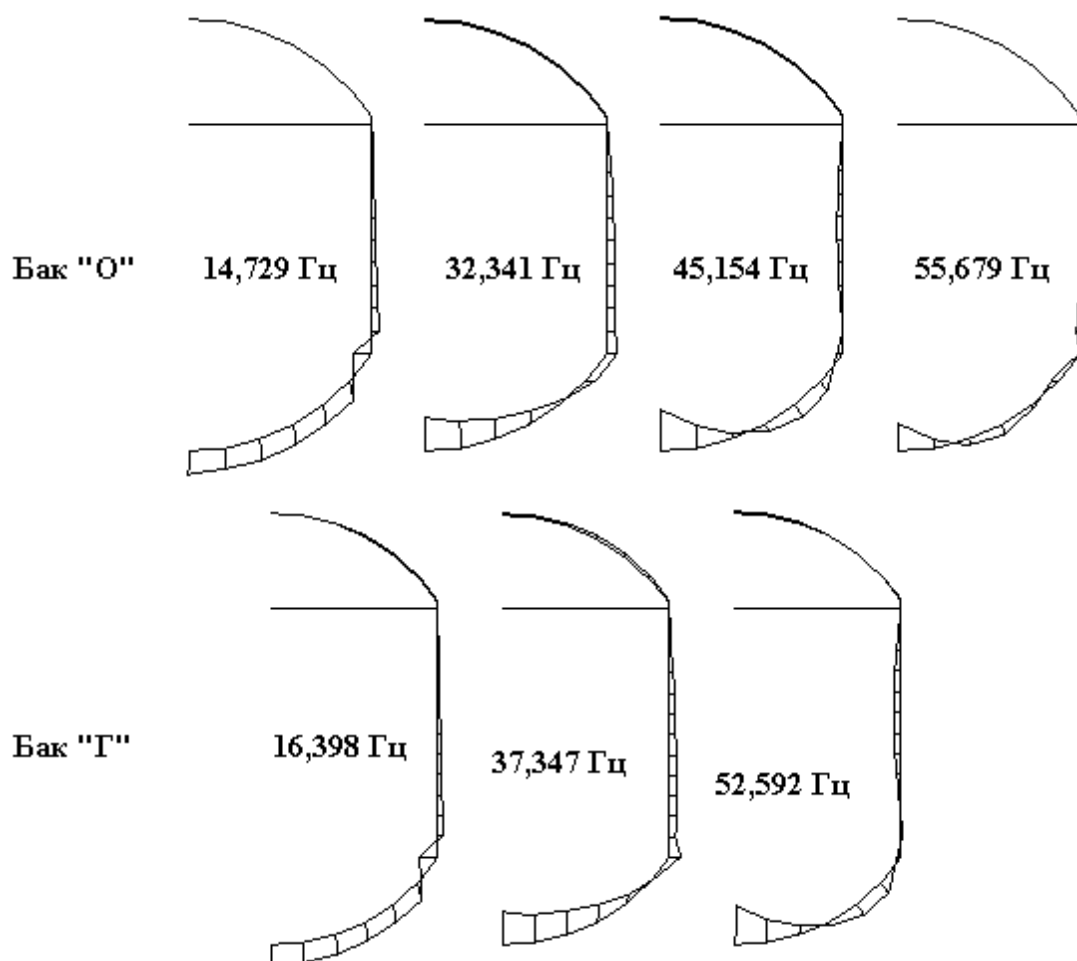


Рис. 4.20.

Таблица 22.

№ тона	Частота, Гц	Масса экв. осц., кг
1	15.28367	46975.532
2	32.88689	5.507
3	45.27099	240.803
4	55.57386	114.308
5	65.32471	2.528
6	67.46260	5180.615
7	76.58361	1.265
8	86.44234	29.985
9	97.36378	37.885
Полная масса:		53022.274

Результаты расчетов сопоставлены в таблице 23 с данными оболочечной модели корпуса, полученными методом конечных элементов.



Таблица 23.

№ тона	Собственные частоты, Гц				
	Метод конечных элементов	Замена верхнего отсека эквив. осцилляторами		Стержневая модель	
		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 1	Вариант 2
1	15.30901	15.26919	15.30698	14.05609	14.05602
2	32.87981	15.98149	32.87982	32.33405	32.33397
3	37.36404	32.88062	37.36441	36.51632	36.47856
4	41.75408	37.42790	41.76016	38.32609	38.27423
5	46.61492	43.59053	46.61847	46.20463	46.17283
		48.52630			

Анализ полученных данных показывает, что замена верхнего отсека эквивалентными осцилляторами дает наиболее близкие к полной оболочечной модели корпуса значения собственных частот при учете достаточно большого количества осцилляторов. Для получения приемлемой точности должны учитываться тона, собственные частоты которых заметно (в 1,5 - 2 раза) превосходят частоту среза. Каких-либо априорных оценок погрешности получить не удастся. Однако наряду с частотным критерием отбора учитываемых тонов существенным фактором является величина массы эквивалентного осциллятора. В данном случае неудачный результат варианта 1 объясняется тем, что в число учтенных не вошел осциллятор с частотой около 67 Гц, имеющий значительную эквивалентную массу.

Характер отличия собственных частот и форм корпуса, рассчитанных с использованием стержневой модели, от полученных при помощи оболочечной модели аналогичен результатам цитированной выше работы [22]. Здесь также наблюдается заниженная примерно на 10% частота первого тона. Увеличение количества учитываемых эквивалентных осцилляторов не дает принципиального уточнения результатов.

На рис. 4.21. продольные составляющие собственных форм, полученные с помощью оболочечной модели (сплошная линия), сопоставлены с результатами стержневой модели (штриховая линия). Амплитуды колебаний модели-

рующих колебания жидкости в баках осцилляторов показаны на графиках стрелками с указанием номера тона, которому осциллятор соответствует. Собственные формы корпуса нормированы по массе.

Из графиков видно, что наиболее существенные различия в характере форм продольных колебаний наблюдаются для тех тонов корпуса, частоты которых близки к тем собственным частотам баков (вторые тона баков «Г» и «О»), которые определяются жесткостью цилиндрических обечаек (см. рис. 4.20). Это подтверждает приведенное выше суждение о возможности существенного влияния на результаты взаимосвязи между продольными и поперечными колебаниями стенок баков, игнорируемой стержневой моделью корпуса. Дополнительным подтверждением этого послужили расчеты оболочечной модели корпуса с принудительно заданным коэффициентом Пуассона материала оболочек  $\nu = 0$ , которые дали хорошо согласующиеся со стержневой моделью продольные составляющие собственных форм.

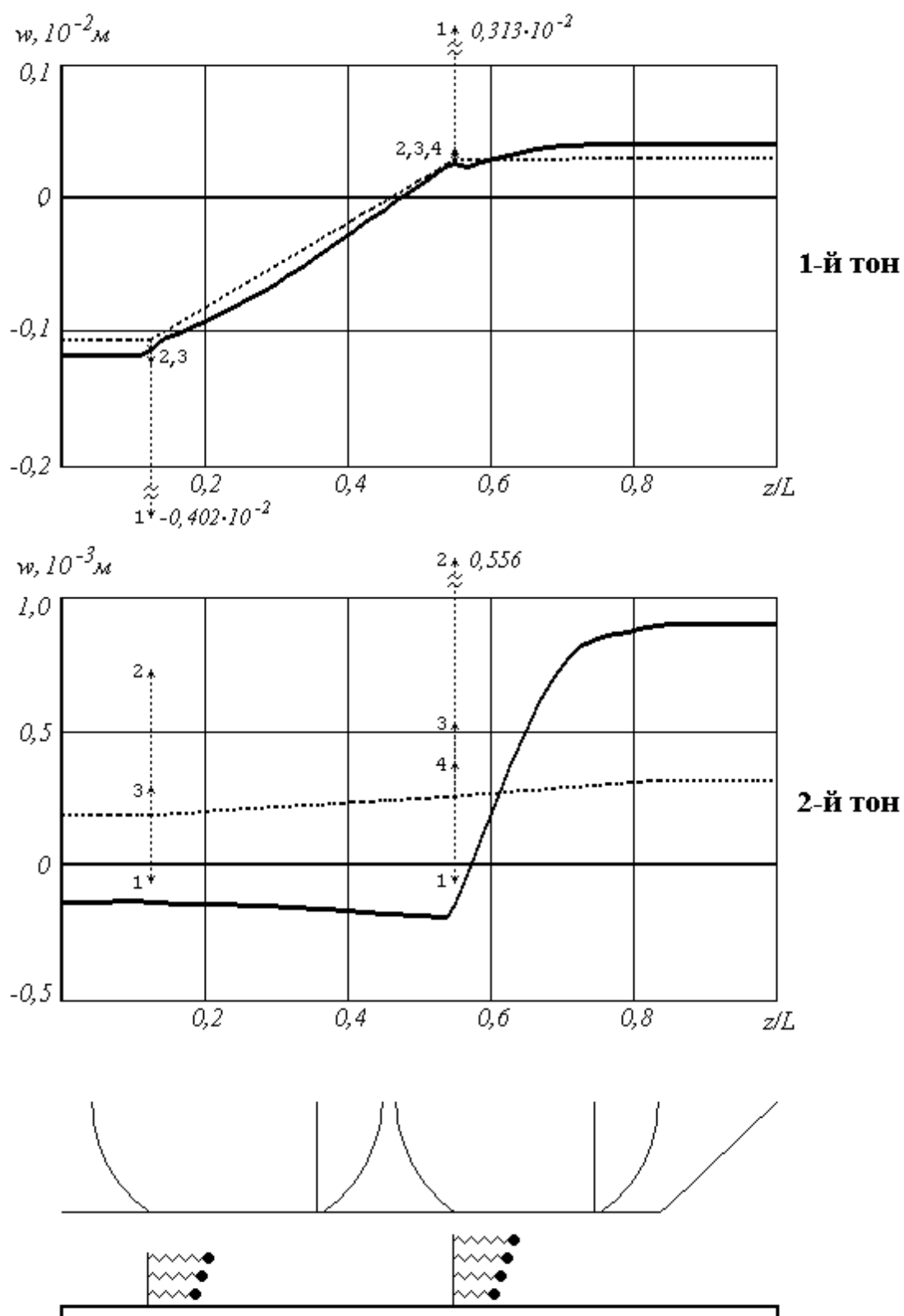


Рис. 4.21 (начало).

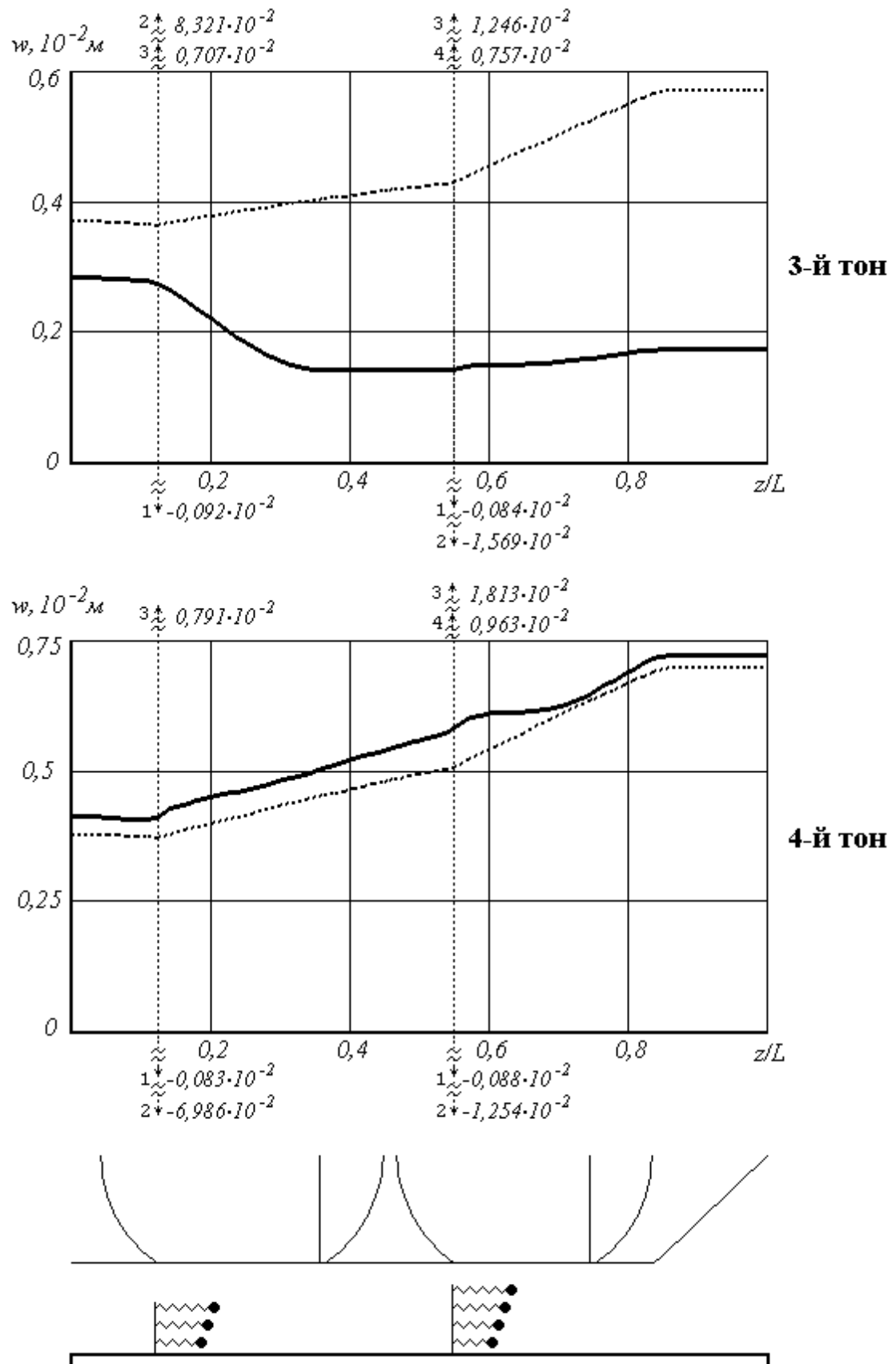


Рис. 4.21 (продолжение).

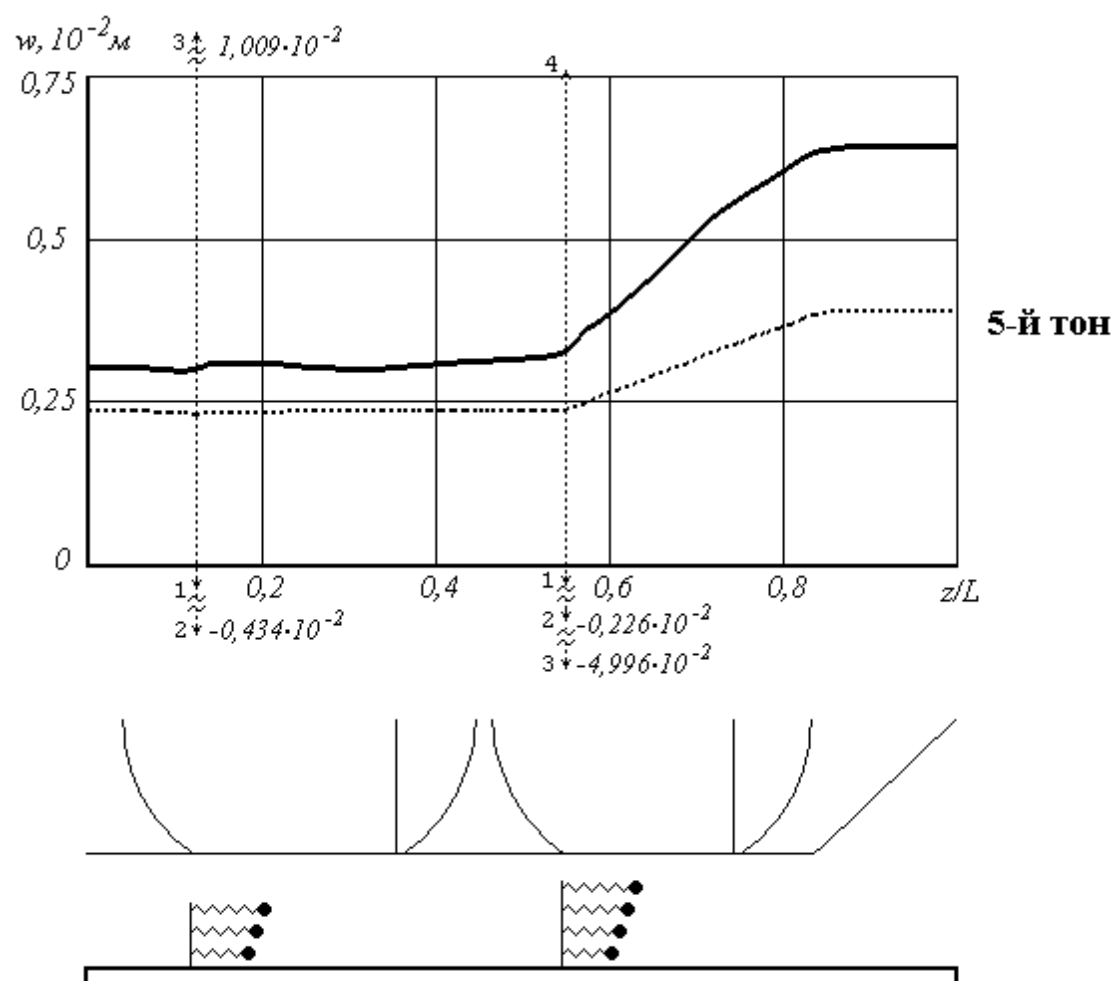


Рис. 4.21 (окончание).

## Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОДОЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТНОЙ РАКЕТЫ НА ОСНОВЕ ОБОЛОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ КОРПУСА.

### 5.1. Уравнения продольных колебаний жидкостной ракеты как гидроупругой системы с регулятором.

Разрабатывая динамическую схему продольных колебаний жидкостной ракеты, возьмем за основу исходные допущения работ [63, 64, 71] для всех компонент этой системы, за исключением корпуса, представляющего собой упругую оболочечную конструкцию с полостями, частично заполненными жидкостью.

Топливные магистрали представляются в виде упругих стержней, причем податливости кавитационных каверн (образующиеся на входе в насос) и аккумуляторов давления (применяемых для борьбы с неустойчивостью продольных колебаний) схематизируются упругими связями между участками стержня. Двигатель, как динамическое звено, описывается набором частотных характеристик (полученных экспериментально или теоретически). Уравнения продольных колебаний составляются относительно коэффициентов разложения колебаний корпуса и жидкости в топливных магистралях по их собственным формам.

В этом разделе мы ограничимся линейной формулировкой задачи, а в следующих разделах обобщим ее на случай нелинейности деформаций оболочек корпуса.

Рассмотрим сначала малые колебания упругой оболочечной конструкции, содержащей идеальную несжимаемую жидкость, при наличии присоединенных к ней трубопроводов с жидкостью, гидравлически связанных с массой жидкости.

Аналогично работам [93, 71] предположим, что трубопровод присоединен с помощью сильфонов малой жесткости, а также пренебрежем массой трубопровода по сравнению с массой заполняющей его жидкости. Таким образом, будем считать, что в колебаниях участвует лишь столб заполняющей магистрали жидкости, движение которой можно рассматривать как одномерное вдоль оси трубопровода. Радиус трубопровода мал по сравнению с характерными размерами конструкции.

Сначала исследуем связь между конструкцией и присоединенной к ней магистралью. Мы рассмотрим частный случай, когда конструкция имеет одну полость с жидкостью и один трубопровод. Индексы, идентифицирующие номер объема жидкости, опускаем. Примененный здесь подход к исследованию этой связи аналогичен использованному в работе [93].

Обозначим:

$S_t$  - поверхность, вырезаемая в  $S_0$  присоединенным трубопроводом (в силу малости радиуса будем считать ее плоской),

$P_0$  - точка, соответствующая центру поверхности  $S_t$ ,

$W(t)$  - перемещение жидкости в трубопроводе в сечении, совпадающем с поверхностью  $S_t$  (положительное направление - внутрь полости),

$r_0$  - радиус трубы на выходе из бака.

Потенциал смещений  $\Phi$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0 \quad \text{в } Q, \\ \Phi &= 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= w \quad \text{на } S_0-S_t, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= -W(t) \quad \text{на } S_t.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Кинетическую энергию конструкции с жидкостью без магистрали можно записать в виде:

$$T_0(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \hat{T}_e(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}}) + \frac{1}{2} \int_{S_0-S_t} \rho_0 \dot{w} \Phi dS - \frac{1}{2} \int_{S_t} \rho_0 \dot{W} \Phi dS, \quad (5.2)$$

где  $\hat{T}_e(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}})$  - билинейный функционал, определяющий кинетическую энергию упругой части конструкции.

Обозначив  $\mathbf{U}_k$ ,  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) - собственные формы и частоты колебаний конструкции без трубопровода, представим ее движение в виде разложения:

$$\begin{aligned} u &= \sum_k q_k(t) u_k; & v &= \sum_k q_k(t) v_k; & w &= \sum_k q_k(t) w_k; \\ \Phi &= \sum_k q_k(t) \Phi_k + \left[ W(t) + \sum_k q_k(t) w_k(P_0) \right] \varphi; \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $\varphi$  - гармоническая в области  $Q$  функция, удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= -1 \quad \text{на } S_t, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } S_0-S_t, \\ \varphi &= 0 \quad \text{на } \Sigma. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из формул (5.3) видно, что условия (5.1) удовлетворяются везде, кроме поверхности  $S_t$ , где они выполнены приближенно, так как в силу малости ее размеров можно считать

$$w \approx w(P_0) \quad \text{на } S_t. \quad (5.5)$$

Подставляя разложения (5.3) в (5.2) и учитывая условия ортогональности собственных форм (при этом влиянием выреза для присоединения трубы на условия ортогональности пренебрегаем), получаем для кинетической и потенциальной энергии выражения:

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \dot{q}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \mu_{kl}^0 \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{wk} \dot{q}_k \dot{W} - \frac{1}{2} \rho_0 c_Q(S_t) \dot{W}^2; \\ V_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \mu_k q_k^2; \end{aligned} \quad (5.6)$$



где

$$\begin{aligned}\mu_{kl}^0 &= w_k(P_0) \int_{S_0} \rho_0 \varphi w_l dS - \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k w_l dS - w_k(P_0) \int_{S_t} \rho_0 \varphi w_l dS, \\ \alpha_{wk} &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{S_0} \rho_0 \varphi w_k dS - \int_{S_t} \rho_0 \varphi w_k dS - \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS - w_k(P_0) \int_{S_t} \rho_0 \varphi dS \right\}, \\ c_Q(S_t) &= \int_{S_t} \varphi dS.\end{aligned}$$

Или приближенно на основании (5.5):

$$\begin{aligned}\mu_{kl}^0 &= - \left\{ w_k(P_0) \int_{S_0} \rho_0 \Phi_l dS + w_l(P_0) \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS + \rho_0 c_Q(S_t) w_k(P_0) w_l(P_0) \right\}, \\ \alpha_{wk} &= - \left\{ \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS + \rho_0 c_Q(S_t) w_k(P_0) \right\},\end{aligned}\quad (5.7)$$

Значениями коэффициентов  $\mu_{kl}^0$ , характеризующими вносимую трубопроводом связь между обобщенными координатами  $q_k$  и  $q_l$ , можно пренебречь по сравнению с обобщенными массами  $\mu_k$ .

Тогда

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \dot{q}_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{wk} \dot{q}_k \dot{W} - \frac{1}{2} \rho_0 c_Q(S_t) \dot{W}^2. \quad (5.8)$$

Если считать величину  $W(t)$  заданной, то получим уравнения вынужденных колебаний:

$$\mu_k (\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k) = -\alpha_{wk} \ddot{W}, \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (5.9)$$

В формулах (5.7) присутствуют две величины, требующие дополнительных вычислений. Значение  $\int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS$  можно определить приближенно на ос-

новании предположения, аналогичного (5.5). Тогда

$$\int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS \approx \pi r_0^2 \rho_0 \Phi_k(P_0). \quad (5.10)$$

Вычисление величины  $c_Q(S_t)$  представляет собой весьма сложную задачу в общем случае. Поэтому, считая радиус  $r_0$  малым относительно разме-

ров полости, приближенно заменим эту величину аналогичной величиной для полупространства  $c_{\infty}(r_0)$ , которую можно вычислить следующим образом.

Запишем уравнения для  $\varphi$  в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \quad (z \geq 0) ; \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} &= \begin{cases} 1, & r \leq r_0 ; \\ 0, & r > r_0 \end{cases} ; \\ \varphi(r, z) &= O\left(\frac{1}{R}\right) \quad , \quad R \rightarrow \infty \quad (R^2 = r^2 + z^2) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Применим к функции  $\varphi$  преобразование Ганкеля нулевого порядка по  $r$ :

$$\bar{\varphi}(s, z) = \int_0^{\infty} \varphi(r, z) r J_0(s, z) dr .$$

Тогда уравнения (5.11) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - s^2 \bar{\varphi} &= 0 \quad (z \geq 0) ; \\ \left. \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{r_0}{s} J_1(r_0 s) ; \\ \bar{\varphi}(s, z) &= O\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty ; \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $s$  является параметром.

Решение уравнений (5.12) имеет вид:

$$\bar{\varphi}(s, z) = -\frac{r_0}{s^2} J_1(r_0 s) e^{-sz} . \quad (5.13)$$

Применяя обратное преобразование Ганкеля, получаем:

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} \bar{\varphi}(s, z) s J_0(sr) ds = -r_0 \int_0^{\infty} J_1(r_0 s) J_0(sr) \frac{e^{-sz}}{s} ds . \quad (5.14)$$

Вычислим теперь величину

$$c_{\infty}(r_0) = 2\pi \int_0^{r_0} \varphi(r, 0) r dr .$$

Переставляя знаки интегралов, что возможно в силу равномерной на отрезке  $[0, r_0]$  сходимости несобственного интеграла (5.14), получим:

$$c_{\infty}(r_0) = -2\pi r_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{s} J_1(r_0 s) \left\{ \int_0^{r_0} J_0(rs) r dr \right\} ds = -2\pi r_0^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} J_1^2(r_0 s) ds . \quad (5.15)$$

Несобственный интеграл в (5.15) определяется выражением:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} J_1^2(r_0 s) ds = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) - \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \frac{2r_0^2}{3} \lim_{s \rightarrow \infty} s [J_1^2(r_0 s) + J_0^2(r_0 s)] , \quad (5.16)$$

где

$$F(s) = -\frac{J_1^2(r_0 s)}{3s} + \frac{2r_0^2 s}{3} [J_1^2(r_0 s) + J_0^2(r_0 s)] - \frac{2r_0}{3} J_0(r_0 s) J_1(r_0 s) .$$

Для вычисления предела в (5.16) используем асимптотические формулы для бесселевых функций:

$$J_m(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \quad (|z| \gg 1, |z| \gg m) .$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} J_1^2(r_0 s) ds = \frac{4r_0}{3\pi} .$$

Окончательно получаем:

$$c_{\infty}(r_0) = -\frac{8r_0^3}{3} . \quad (5.17)$$

Перейдем далее к рассмотрению совместных колебаний конструкции и трубопровода. Мы будем рассматривать осесимметричные колебания конструкций с жидкостью. Магистраль - прямолинейная и параллельная продольной оси конструкции. Верхний ее конец присоединен к баку, а нижний связан с конструкцией в некотором ее сечении. Введем координату  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ), отсчитываемую вдоль оси трубопровода от нижнего конца к верхнему. Обозначим  $v(x, t)$  - перемещение жидкости в трубопроводе.

В пределах однородного участка трубопровода движение жидкости описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (5.18)$$

где  $c$  - приведенная скорость звука с учетом упругости стенок магистрали.

В некоторых сечениях магистрали ( $x = x_n$ ) могут быть расположены сосредоточенные емкости (аккумуляторы давления). Методы расчета собственных частот и форм колебаний таких магистралей рассматриваются, например, в работах [64, 71].

Перемещение  $v(x, t)$  представим в виде разложения по собственным формам колебаний жидкости в магистрали с закрепленным нижним концом и свободным верхним,  $v_i(x)$ , следующим образом:

$$v(x, t) = \bar{w}_p(t) + \sum_i s_i(t) v_i(x), \quad (5.19)$$

где  $\bar{w}_p(t)$  - продольное перемещение сечения конструкции, к которому крепится нижний конец магистрали. Кинетическая энергия жидкости в магистрали равна:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^l m_0 \dot{v}^2 dx, \quad (5.20)$$

а потенциальная энергия:

$$V_t = \frac{1}{2} \int_0^l m_0 c^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_n K_n (v_n^+(t) - v_n^-(t))^2, \quad (5.21)$$

где  $m_0$  - погонная масса столба жидкости в магистрали ( $m_0 = \pi r_0^2 \rho_0$ ),

$K_n$  - жесткость сосредоточенной емкости в сечении  $x_n$ ,

$v_n^+(t), v_n^-(t)$  - перемещения выше и ниже сечения  $x_n$ .

Суммарно кинетическая и потенциальная энергии конструкции с трубопроводом равны:

$$T = T_0 + T_t, \quad V = V_0 + V_t. \quad (5.22)$$

Подставляя сюда выражения (5.6) и (5.19) и учитывая, что

$$W(t) = \bar{w}_p(t) + \sum_i s_i(t) v_i(l),$$

$$\bar{w}_p(t) = \sum_k q_k(t) \bar{w}_{pk} ,$$

получаем с учетом ортогональности форм  $v_i(x)$  выражения:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \dot{q}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \mu_{kl}^1 \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k,i=1}^{\infty} \lambda_{ki} \dot{q}_k \dot{s}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i s_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^1 \dot{s}_i \dot{s}_j ; \quad (5.23)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \mu_k q_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 a_i s_i^2 ;$$

где  $\sigma_i$  - собственная частота магистрали, соответствующая форме  $v_i(x)$ ,

$$\mu_{kl}^1 = \mu_{kl}^{01} + 2\alpha_{wk} \bar{w}_{pl} - \rho_0 c_Q(S_t) \bar{w}_{pk} \bar{w}_{pl} + M_t \bar{w}_{pk} \bar{w}_{pl} ;$$

( $M_t$  - масса жидкости в магистрали),

$$\lambda_{kl} = \alpha_{wk} v_i(l) - \rho_0 c_Q(S_t) \bar{w}_{pk} v_i(l) + \bar{w}_{pk} \int_0^l m_0 v_i(x) dx ;$$

$$a_i = \int_0^l m_0 v_i^2(x) dx ; \quad (5.24)$$

$$a_{ij}^1 = -\rho_0 c_Q(S_t) v_i(l) v_j(l) .$$

Если теперь, пренебрегая в (5.23) значениями  $\mu_{kl}^1$  и  $a_{ij}^1$  по сравнению с  $\mu_k$  и  $a_i$ , применить принцип Гамильтона, то получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_k (\ddot{q}_k + \omega_k^2 q_k) + \sum_i \lambda_{ki} \ddot{s}_i &= Q_k(t) ; \\ a_i (\ddot{s}_i + \sigma_i^2 s_i) + \sum_k \lambda_{ki} \ddot{q}_k &= 0 . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Здесь  $Q_k(t)$  - обобщенные силы, приложенные к конструкции, а коэффициенты  $\lambda_{ki}$  (с учетом (5.7)) вычисляются по формуле:

$$\lambda_{kl} = - \left\{ \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS + \rho_0 c_Q(S_t) (w_k(P_0) + \bar{w}_{pk}) \right\} v_i(l) + \bar{w}_{pk} \int_0^l m_0 v_i(x) dx . \quad (5.26)$$

В случае достаточно малого радиуса трубопровода в соответствии с (5.10) и (5.17) выражение для коэффициентов связи приобретает вид:

$$\lambda_{kl} = -\pi r_0^2 \rho_0 \Phi_k(P_0) v_i(l) + \frac{8r_0^3}{3} \rho_0 (w_k(P_0) + \bar{w}_{pk}) v_i(l) + \bar{w}_{pk} \int_0^l m_0 v_i(x) dx . \quad (5.27)$$

Если трубопровод имеет небольшую криволинейность, так что его можно заменить эквивалентным прямолинейным трубопроводом, то уравнения (5.25) остаются в силе, и можно показать, что выражения для коэффициентов связи  $\lambda_{ki}$  приобретают вид

$$\lambda_{kl} = - \left\{ \int_{S_t} \rho_0 \Phi_k dS + \rho_0 c_Q(S_t) (w_k(P_0) + \bar{w}_{pk} \cos \psi(l)) \right\} v_i(l) + \\ + \bar{w}_{pk} \int_0^l m_0 v_i(x) \cos \psi(x) dx, \quad (5.28)$$

где  $\psi$  - угол между осью трубопровода и продольной осью конструкции.

Аналогично преобразуется и выражение (5.27):

$$\lambda_{kl} = -\pi r_0^2 \rho_0 \Phi_k(P_0) v_i(l) + \frac{8r_0^3}{3} \rho_0 (w_k(P_0) + \bar{w}_{pk} \cos \psi(l)) v_i(l) + \\ + \bar{w}_{pk} \int_0^l m_0 v_i(x) \cos \psi(x) dx. \quad (5.29)$$

Полученные в данном разделе результаты легко обобщить на случай нескольких баков с жидкостью и нескольких магистралей.

Выведенные выше формулы позволяют составить уравнения продольных колебаний жидкостной ракеты с двигателем, основываясь на оболочечной модели корпуса. При этом вид уравнений не отличается от традиционно используемых при анализе продольной устойчивости, а отличие состоит лишь в формулах для вычисления коэффициентов этих уравнений.

При исследовании продольных колебаний ракеты совместно с ЖРД используется тот факт, что разнесенность частот первых тонов колебаний жидкости в магистралях горючего и окислителя, обычно имеющая место вследствие различия их длин, позволяет рассматривать в практических расчетах устойчивость отдельно по двум каналам: “корпус - магистраль окислителя - двигатель” и “корпус - магистраль горючего - двигатель”. При этом, как правило, требуется исследовать устойчивость лишь по одному из этих каналов. Кроме того, наличие обратной связи по каналу “расход - давление компонента на вы-

ходе из магистрали” через двигатель может быть учтено введением дополнительного коэффициента демпфирования в уравнения для магистрали [71].

В этих предположениях уравнения продольных колебаний записываются в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 + \sum_{i=1}^{N_i} a_{q_0 s_i} \ddot{s}_i &= a_{q_0 \delta} \delta P ; \\ \ddot{q}_k + \varepsilon_{q_k} \dot{q}_k + \omega_{q_k}^2 q_k + \sum_{i=1}^{N_i} a_{q_k s_i} \ddot{s}_i &= a_{q_k \delta} \delta P , \quad k = 1, \dots, N_k ; \\ \ddot{s}_i + \varepsilon_{s_i} \dot{s}_i + \omega_{s_i}^2 s_i + \sum_{k=0}^{N_k} a_{s_i q_k} \ddot{q}_k &= 0 , \quad i = 1, \dots, N_i ; \\ \delta p_0 &= \sum_{i=1}^{N_i} k_{s_i} s_i ; \\ \delta P &= L_{\delta}(\delta p_0) .\end{aligned}\tag{5.30}$$

Здесь введены обозначения:

$q_0$  - обобщенная координата, соответствующая смещению корпуса как жесткого целого,

$q_k$  - обобщенные координаты, соответствующие собственным формам корпуса,

$s_i$  - обобщенные координаты, соответствующие собственным формам колебаний жидкости в магистрали,

$\delta p_0$  - вариация давления на выходе из магистрали,

$\delta P$  - вариация тяги двигателя,

$N_k, N_i$  - числа тонов, учитываемых в разложении колебаний корпуса и жидкости в магистрали соответственно,

$\omega_{q_k}$  - собственные частоты колебаний корпуса,

$\omega_{s_i}$  - собственные частоты колебаний жидкости в магистрали,

$L_{\delta}$  - линейный оператор, которому соответствует передаточная функция двигателя по каналу “давление на входе в двигатель - тяга двигателя” (обозначим ее  $W(p)$ ).

Заметим, что в линейном приближении вариация тяги двигателя возбуждает осесимметричные (продольно-радиальные) колебания корпуса, и поэтому в уравнениях (5.30) учитываются лишь собственные формы таких колебаний.

Коэффициенты уравнений (5.30) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{q_0 s_i} &= \frac{\lambda_{0i}}{M_\Sigma} ; & a_{q_0 \delta} &= \frac{1}{M_\Sigma} ; & a_{q_k s_i} &= \frac{\lambda_{ki}}{\mu_k} ; \\ a_{s_i q_k} &= \frac{\lambda_{ki}}{a_i} ; & a_{q_k \delta} &= \frac{\bar{w}_{pk}}{\mu_k} ; & \varepsilon_{q_k} &= \frac{\Delta_{q_k} \omega_{q_k}}{\pi} ; \\ \varepsilon_{s_i} &= \frac{\Delta_{s_i}^* \omega_{s_i}}{\pi} ; & k_{s_i} &= \frac{F(0)v_i(0)}{\frac{dV_a}{dp}} ; \end{aligned}$$

где

$M_\Sigma$  - полная масса изделия,

$\mu_k$  - обобщенная масса  $k$ -го тона колебаний корпуса,

$\bar{w}_{pk}$  - продольное смещение двигателя на  $k$ -ом тоне колебаний корпуса,

$\Delta_{q_k}$  - логарифмический декремент  $k$ -го тона колебаний корпуса,

$a_i$  - обобщенная масса  $i$ -го тона колебаний жидкости в магистрали, вычисляемая по формуле

$$a_i = \int_0^l \rho_0 F(x) v_i^2(x) dx ,$$

$v_i(x)$  - собственная форма колебаний жидкости в магистрали,

$x$  - координата, отсчитываемая вдоль оси магистрали от входа в двигатель,

$F(x)$  - площадь сечения магистрали,

$l$  - длина магистрали,

$\Delta_{s_i}^*$  - логарифмический декремент  $i$ -го тона колебаний жидкости в магистрали,

причем  $\Delta_{s_i}^* = \Delta_{s_i} + \bar{\Delta}_{s_i}$  , где  $\Delta_{s_i}$  обусловлено гидравлическими потерями в магистрали, а  $\bar{\Delta}_{s_i}$  - обратной связью по каналу “расход - давление компонента на выходе из магистрали” через двигатель,



$\frac{dV_a}{dp}$  - податливость кавитационных камер или аккумуляторов давления (или

того и другого вместе) на выходе из магистрали,

$\lambda_{ki}$  - коэффициенты связи форм колебаний корпуса и жидкости в магистрали.

Коэффициенты  $\lambda_{ki}$  вычисляются по формуле (5.29). Заметим, что в этой формуле для случая  $k = 0$  следует положить  $\bar{w}_{p0} = 1$ ,  $\Phi_0(P_0) = -H(P_0)$  (здесь  $H(P_0)$  - глубина жидкости в точке  $P_0$ ), а  $w_0(P_0)$  - равным проекции внешней нормали к оболочке в точке  $P_0$  на продольную ось.

На входе в насосы двигателя обычно образуются кавитационные камеры, существенно снижающие частоту основного тона колебаний жидкости в магистрали. При этом формы более высоких тонов приближаются к формам колебаний жидкости в трубопроводе с открытым нижним концом [71]. В таком случае можно ограничиться учетом лишь одного низшего тона колебаний жидкости в магистрали, для которого справедливы приближенные формулы:

$$v_1(x) = 1 ; \quad \omega_{s_1}^2 = -\frac{F(0)}{\rho_0 l \frac{dV_a}{dp}} ; \quad k_{s_1} = -\rho_0 l \omega_{s_1}^2 . \quad (5.31)$$

К такому же эффекту приводит установка в нижнем сечении магистрали аккумулятора давления с целью обеспечения устойчивости продольных колебаний.

## 5.2. Уравнения нелинейных колебаний

осесимметричных оболочечных конструкций с жидкостью.

Рассмотрим колебания оболочечных конструкций с жидкостью с учетом нелинейности геометрических соотношений (4.8). С этой целью разложим движение конструкции  $\mathbf{U}$  по собственным формам колебаний  $\mathbf{U}_s$  в ряд:

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^{\infty} q_s(t) \mathbf{U}_s . \quad (5.32)$$

Как известно, для линеаризованной системы уравнения колебаний относительно нормальных координат  $q_s$  (уравнения в нормальных координатах) не связаны между собой. Учет нелинейности приводит к появлению нелинейных связей между этими уравнениями. Мы получим здесь выражения для нелинейных членов, появляющихся при этом в уравнениях в нормальных координатах, и исследуем связи между формами колебаний в случае осесимметричной конструкции.

Подставим разложение (5.32) в выражение потенциальной энергии конструкции (4.27). Тогда с учетом (4.10), (4.11) и условий ортогональности собственных форм (4.37) получаем выражение для полной потенциальной энергии конструкции в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_p \mu_p \omega_p^2 q_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r} A_{pqr} q_p q_q q_r + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s} B_{pqrs} q_p q_q q_r q_s - \sum_p f_p(t) q_p , \quad (5.33)$$

где  $f_p(t)$  - соответствующие координатам  $q_p$  обобщенные силы, а коэффициенты  $A_{pqr}$  и  $B_{pqrs}$  равны:

$$\begin{aligned} A_{pqr} &= 2 \int_S \left\{ \varepsilon^L(\mathbf{U}_p) \right\}^T [D] \left\{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_q, \mathbf{U}_r) \right\} dS ; \\ B_{pqrs} &= \int_S \left\{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_q) \right\}^T [D] \left\{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_s) \right\} dS . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Перепишем для удобства выражение (5.34) в виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_p \mu_p \omega_p^2 q_p^2 + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r} A'_{pqr} q_p q_q q_r + \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s} B'_{pqrs} q_p q_q q_r q_s - \sum_p f_p(t) q_p, \quad (5.35)$$

где коэффициенты  $A'_{pqr}$  и  $B'_{pqrs}$  симметричны относительно произвольных перестановок индексов. С учетом свойств симметрии выражений (5.34) получаем:

$$\begin{aligned} A'_{pqr} &= \frac{1}{3} (A_{pqr} + A_{qpr} + A_{rqp}); \\ B'_{pqrs} &= \frac{1}{3} (B_{pqrs} + B_{prqs} + B_{psqr}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Уравнения Лагранжа для обобщенных координат запишутся в виде:

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s} b_{pqrs} q_q q_r q_s = f_p(t), \quad (5.37)$$

где коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} a_{pqr} &= \frac{3}{2} A'_{pqr}; \\ b_{pqrs} &= 2 B'_{pqrs}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Таким образом, уравнения в результате учета нелинейности оказываются связанными между собой при помощи квадратичных и кубических членов. Отметим, что в случае колебаний не закрепленной конструкции уравнения для обобщенных координат, соответствующих смещению конструкции как твердого тела (без поворота), оказываются не связанными с остальными уравнениями, так что их можно решать отдельно.

Рассеяние энергии в конструкции можно учесть путем введения в (5.37) членов, пропорциональных обобщенным скоростям. Предполагая отсутствие диссипативных связей между нормальными координатами, получим систему уравнений:

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s} b_{pqrs} q_q q_r q_s = f_p(t). \quad (5.39)$$

Осесимметричность конструкции обеспечивает явную зависимость выражений для собственных форм колебаний от окружной координаты  $\beta$  в виде (4.40), что позволяет выполнить интегрирование по ней в формулах (5.34) и

более подробно исследовать структуру систем уравнений (5.37) и (5.39) и нелинейные связи обобщенных координат.

Для удобства дальнейших построений введем диагональные матрицы:

$$\begin{aligned} [d_m^i] = \text{diag} \{ \cos(m\beta - i\frac{\pi}{2}), \cos(m\beta - i\frac{\pi}{2}), \sin(m\beta - i\frac{\pi}{2}), \\ \cos(m\beta - i\frac{\pi}{2}), \cos(m\beta - i\frac{\pi}{2}), \sin(m\beta - i\frac{\pi}{2}) \} . \end{aligned} \quad (5.40)$$

Тогда выражение для линейной части вектора параметров деформации оболочки можно записать в виде:

$$\{ \varepsilon^L(\mathbf{U}_s) \} = [d_{m_s}^{i_s}] \{ \varepsilon_{m_s}^L(\tilde{\mathbf{U}}_s) \} , \quad (5.41)$$

где  $\{ \varepsilon_m^L(\tilde{\mathbf{U}}) \}$  определяется соотношением (4.43).

Для квадратичной части после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon^{NL}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_s) \} = \\ = \frac{1}{2} (-1)^{(1-i_r)i_s} [d_{m_r-m_s}^{j_{rs}}] \{ \varepsilon_{m_r, m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \} + \frac{1}{2} (-1)^{i_r i_s} [d_{m_r+m_s}^{j_{rs}}] \{ \varepsilon_{m_r, m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \} , \end{aligned} \quad (5.42)$$

где  $j_{rs} = (i_r + i_s)(2 - i_r - i_s) ,$

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon_{m_r, m_s}^{NL1}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ -\tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) + \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} , \\ \{ \varepsilon_{m_r, m_s}^{NL2}(\tilde{\mathbf{U}}_r, \tilde{\mathbf{U}}_s) \} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ -\theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_r) \theta_\beta^{m_s}(\tilde{\mathbf{U}}_s) + \theta_\beta^{m_r}(\tilde{\mathbf{U}}_r) \tilde{\theta}_\alpha(\tilde{\mathbf{U}}_s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} . \end{aligned} \quad (5.42)$$

Подставим (5.41) и (5.42) в выражения (5.34) для коэффициентов  $A_{pqr}$  и  $B_{pqrs}$ , используя при этом очевидные соотношения:

$$\int_0^{2\pi} [d_{m_1}^{i_1}] [D] [d_{m_2}^{i_2}] d\beta = [D_{m_1 m_2}^{i_1 i_2}] , \quad (5.44)$$

где  $[D_{m_1 m_2}^{i_1 i_2}] = [0]$ , если  $|m_1| \neq |m_2|$  или  $i_1 \neq i_2$  ;

$$[D_{00}^{00}] = 2\pi [D_s] ;$$

$$[D_{00}^{11}] = 2\pi [D_t] ;$$

$$[D_{mm}^{ii}] = \pi [D] ;$$

$$[D_{m,-m}^{ii}] = \pi (-1)^i [D_n] ;$$

причем матрицы  $[D_s]$ ,  $[D_t]$  и  $[D_n]$  получаются в результате небольших модификаций матрицы  $[D]$ , а именно:

$$[D_s] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [D_t] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 2A_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A_{33} & 0 & 0 & 4D_{33} \end{bmatrix} ;$$

$$[D_n] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -B_{33} & 0 & 0 & -2A_{33} \\ A_{11} & A_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -2A_{33} & 0 & 0 & -4D_{33} \end{bmatrix} .$$

В результате получаем выражения для коэффициентов в виде:

$$A_{pqr} = \int_L \left\{ \varepsilon_{m_p}^L (\tilde{\mathbf{U}}_p) \right\}^T \left\{ (-1)^{(1-i_q)i_r} [D_{m_p, m_q - m_r}^{i_p j_{qr}}] \left\{ \varepsilon_{m_q m_r}^{NL1} (\tilde{\mathbf{U}}_q, \tilde{\mathbf{U}}_r) \right\} + \right. \\ \left. + (-1)^{i_q i_r} [D_{m_p, m_q + m_r}^{i_p j_{qr}}] \left\{ \varepsilon_{m_q m_r}^{NL2} (\tilde{\mathbf{U}}_q, \tilde{\mathbf{U}}_r) \right\} \right\} r(\alpha) A_\alpha d\alpha , \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
 B_{pqrs} = \int_L & \left( (-1)^{(1-i_p)i_q + (1-i_r)i_s} \left\{ \varepsilon_{m_p m_q}^{NL1}(\tilde{U}_p, \tilde{U}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p - m_q, m_r - m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \varepsilon_{m_r m_s}^{NL1}(\tilde{U}_r, \tilde{U}_s) \right\} + \right. \\
 & + (-1)^{(1-i_p)i_q + i_r i_s} \left\{ \varepsilon_{m_p m_q}^{NL1}(\tilde{U}_p, \tilde{U}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p - m_q, m_r + m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \varepsilon_{m_r m_s}^{NL2}(\tilde{U}_r, \tilde{U}_s) \right\} + \\
 & + (-1)^{i_p i_q + (1-i_r)i_s} \left\{ \varepsilon_{m_p m_q}^{NL2}(\tilde{U}_p, \tilde{U}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p + m_q, m_r - m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \varepsilon_{m_r m_s}^{NL1}(\tilde{U}_r, \tilde{U}_s) \right\} + \\
 & \left. + (-1)^{i_p i_q + i_r i_s} \left\{ \varepsilon_{m_p m_q}^{NL2}(\tilde{U}_p, \tilde{U}_q) \right\}^T \left[ D_{m_p + m_q, m_r + m_s}^{j_{pq} j_{rs}} \right] \left\{ \varepsilon_{m_r m_s}^{NL2}(\tilde{U}_r, \tilde{U}_s) \right\} \right) r(\alpha) A_\alpha d\alpha,
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

где  $j_{qr} = (i_q + i_r)(2 - i_q - i_r)$  и аналогично  $j_{pq}$  и  $j_{rs}$ .

Из (5.45), (5.36), (5.38) получаются условия неравенства нулю коэффициентов при квадратичных членах нелинейных уравнений. Коэффициент  $a_{pqr} \neq 0$ , если выполнены два условия:

$$1) \quad i_p + i_q + i_r \equiv 0 \pmod{2}, \tag{5.47}$$

что реализуется на следующих сочетаниях:

$i_p$	$i_q$	$i_r$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2) удовлетворяется одно из равенств:

$$\begin{aligned}
 m_p &= m_q + m_r, \\
 m_q &= m_p + m_r, \\
 m_r &= m_p + m_q,
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

что кратко записывается в виде:

$$m_p = m_q + m_r \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p).$$

Из (5.46), (5.36), (5.38) получаются условия неравенства нулю коэффициентов при кубичных членах нелинейных уравнений. Коэффициент  $b_{pqrs} \neq 0$ , если выполнены два условия:

$$1) \quad i_p + i_q + i_r + i_s \equiv 0 \pmod{2} \tag{5.49}$$

что реализуется на следующих сочетаниях:

$i_p$	$i_q$	$i_r$	$i_s$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2) удовлетворяется одно из равенств:

$$\begin{aligned}
 m_p &= m_q + m_r + m_s , \\
 m_q &= m_p + m_r + m_s , \\
 m_r &= m_p + m_q + m_s , \\
 m_s &= m_p + m_q + m_r , \\
 m_p + m_q &= m_r + m_s , \\
 m_p + m_r &= m_q + m_s , \\
 m_p + m_s &= m_q + m_r ,
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

или кратко:

$$\begin{aligned}
 m_p &= m_q + m_r + m_s \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow p) , \\
 m_p + m_q &= m_r + m_s \quad (q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow q) .
 \end{aligned}$$

Соотношения (5.47) - (5.50) позволяют исследовать связи между колебаниями с различными числами волн по окружности и в различных плоскостях.

### 5.3. Параметрическое возбуждение неосесимметричных форм при осесимметричных колебаниях.

Рассмотрим вынужденные колебания конструкции под действием осесимметричной продольной силы  $P(t)$ , приложенной в некотором сечении. В этом случае обобщенные силы  $f_p(t)$  в уравнениях (5.37), (5.39) отличны от нуля только для осесимметричных продольно-радиальных форм колебаний и равны

$$f_p(t) = F_p P(t), \quad (5.51)$$

где  $F_p$  - коэффициент, равный продольному смещению  $\bar{w}_p$  в точке приложения силы на  $p$ -ой собственной форме.

Из структуры нелинейных связей, определяемой соотношениями (5.47) - (5.50), следует, что при нулевых начальных условиях при таком воздействии неосесимметричные формы колебаний возбуждаться не должны. В то же время влияние этих нелинейных связей может привести к неустойчивости нулевых решений для коэффициентов этих неосесимметричных форм. Механизм этого явления заключается в параметрическом возбуждении неосесимметричных форм колебаний при периодическом изменении осесимметричного напряженно-деформированного состояния. При наличии сколь угодно малых начальных неосесимметричных возмущений в этом случае неустойчивость может привести к быстрому росту и даже преобладанию этих форм по сравнению с осесимметричными.

Предположим, что в разложении по собственным формам учтено  $N$  членов, причем первые  $K$  из них соответствуют осесимметричному движению ( $m = 0$ ). Рассматривая осесимметричное движение:

$$\begin{cases} q_p = q_p^0(t), & p = 1, \dots, K; \\ q_p = 0, & p = K + 1, \dots, N; \end{cases}$$



как невозмущенное, построим для него систему в вариациях. Подставляя выражение для невозмущенного движения:

$$\begin{cases} q_p = q_p^0(t) + \delta q_p, & p = 1, \dots, K; \\ q_p = \delta q_p, & p = K + 1, \dots, N; \end{cases}$$

в нелинейные уравнения (5.39) и линеаризуя получающиеся соотношения, приходим к системе уравнений:

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=1}^K C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = 1, \dots, K; \quad (5.52)$$

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=K+1}^N C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = K + 1, \dots, N; \quad (5.53)$$

где

$$C_{pq}(t) = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} q_r^0(t) + 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} q_r^0(t) q_s^0(t) .$$

Здесь учтены соотношения (5.48), (5.50), из которых следует, что

- 1.)  $a_{pqr} = 0$ , если  $m_p > 0$ ,  $m_q = m_r = 0$ , и
- 2.)  $b_{pqrs} = 0$ , если  $m_p > 0$ ,  $m_q = m_r = m_s = 0$ .

В случае гармонического воздействия  $P = P_0 \cos \omega t$  можно поставить задачу исследования условий параметрического возбуждения неосесимметричных форм при установившихся стационарных осесимметричных колебаниях конструкции. При этом коэффициенты в (5.53) будут периодическими функциями времени. Тогда исследование устойчивости этой системы сводится к исследованию устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами.

Легко проверить, используя соотношения (5.47) - (5.50), что  $C_{pq}(t) = 0$  ( $m_p > 0$ ,  $m_q > 0$ ), если  $m_p \neq m_q$  или  $i_p \neq i_q$ . Таким образом, система (5.53) распадается на не связанные между собой подсистемы, соответствующие различным числам волн по окружности  $m$  и различным индексам  $i$ . Следова-

тельно, для каждой пары  $(m, i)$  устойчивость можно исследовать отдельно, вне связи с формами, имеющими другие значения этих параметров.

При достаточно малой амплитуде силы  $P_0$  осесимметричный отклик конструкции можно рассчитывать по линеаризованным уравнениям. Тогда выражения для коэффициентов системы (5.53) приобретают вид:

$$C_{pq}(t) = C_{pq}^c \cos \omega t + C_{pq}^s \sin \omega t + C_{pq}^{cc} \cos^2 \omega t + C_{pq}^{cs} \cos \omega t \sin \omega t + C_{pq}^{ss} \sin^2 \omega t, \quad (5.54)$$

где

$$C_{pq}^c = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} A_r ;$$

$$C_{pq}^s = 2 \sum_{r=1}^K a_{pqr} B_r ;$$

$$C_{pq}^{cc} = 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} A_r A_s ;$$

$$C_{pq}^{cs} = 6 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} A_r B_s ;$$

$$C_{pq}^{ss} = 3 \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K b_{pqrs} B_r B_s ;$$

$$\left. \begin{aligned} A_r &= \frac{F_r P_0 (\omega_r^2 - \omega^2)}{\mu_r [(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_r \omega)^2]} \\ B_r &= \frac{F_r P_0 \varepsilon_r \omega}{\mu_r [(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_r \omega)^2]} \end{aligned} \right\} r = 1, \dots, K .$$

#### 5.4. Вычисление коэффициентов нелинейных уравнений.

##### Построение областей параметрического возбуждения.

Расчет динамических характеристик (собственных частот, форм, обобщенных масс) является первым этапом исследования динамики рассматриваемых конструкций. Этот расчет может быть выполнен при помощи описанных выше программ, основанных на методе конечных элементов.

Расчет коэффициентов нелинейных уравнений заключается в вычислении интегралов по формулам (5.45), (5.46). Метод конечных элементов является не только средством расчета динамических характеристик, но он может быть успешно использован и для вычисления интегралов по объемам или поверхностям аппроксимируемых конечноэлементной моделью конструкций. В частности, была разработана программа расчета коэффициентов  $a_{pqr}$  и  $b_{pqrs}$  для вычисленного набора собственных форм. Для тестирования программы были проведены расчеты цилиндрической оболочки без жидкости с шарнирно опертыми торцами. Результаты этих расчетов сопоставлялись со значениями коэффициентов, вычисленных по точным формулам, полученным для цилиндрической оболочки в работе [179].

Для исследования устойчивости линейной системы с периодическими коэффициентами (5.53) может быть использован предложенный в работе [21] метод, основанный на теории Флоке-Ляпунова. Изложим его вкратце применительно к рассматриваемой проблеме.

Для системы  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{x} \quad , \quad (5.55)$$

где компоненты матрицы  $\mathbf{G}(t)$  - периодические с периодом  $T$  , справедливо соотношение:

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{R}\mathbf{x}(t) \quad , \quad (5.56)$$

в котором  $\mathbf{R}$  - квадратная числовая матрица (матрица монодромии). Эта матрица формируется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} x_{11}(T) & \dots & x_{1n}(T) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(T) & \dots & x_{nn}(T) \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

где столбцы матрицы представляют собой решения системы (5.55) при начальных условиях:

$$x_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n) .$$

Все собственные значения квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  лежат в единичном круге тогда и только тогда, когда ее степень  $\mathbf{A}^m$  стремится к нулевой матрице при  $m \rightarrow \infty$ . Поэтому определение асимптотической устойчивости тривиального решения системы (5.56) сводится к проверке одного из этих условий.

Проверка первого условия может оказаться затруднительной из-за сложности вычислений, хотя при небольших значениях  $n$  оно может быть предпочтительным. Второе условие можно проверить последовательным умножением матрицы  $\mathbf{R}$  самой на себя, т.е. путем вычисления последовательности

$$\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \dots, \mathbf{R}^{2^p}, \dots$$

с проверкой на каждом шаге нормы этих матриц. В качестве нормы может быть выбрана, например, величина

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| .$$

Проверку можно прекратить, если достигнуто условие  $\|\mathbf{R}^{2^p}\| < 1$ . Для установления факта неустойчивости можно потребовать, чтобы норма  $\|\mathbf{R}^{2^p}\|$  достигала достаточно большой величины, например,  $10^8$  (что, однако, не является гарантией того, что при дальнейшем возведении в степень норма не начнет убывать).

Отметим, что второй способ неприемлем в случае, когда рассматривается система без диссипации, т.к. в этом случае мультипликаторы системы лежат

на границе единичного круга [27]. Тогда необходимо вычислять собственные значения матрицы  $\mathbf{R}$ .

Описанный алгоритм позволяет строить области неустойчивости в пространстве исследуемых параметров, давая возможность проверить любую из точек этого пространства.

В нашем случае система (5.55) получается из системы (5.53) и имеет порядок  $2(N - K)$ , причем вектор  $\mathbf{x}$  состоит из компонент:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} q_{K+1} \\ \vdots \\ q_N \\ \dot{q}_{K+1} \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{Bmatrix},$$

а матрица  $\mathbf{G}(t)$  имеет вид:

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\omega_{K+1}^2 - \frac{C_{K+1,K+1}(t)}{\mu_{K+1}} & \dots & -\frac{C_{K+1,N}(t)}{\mu_{K+1}} & -\varepsilon_{K+1} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{C_{N,K+1}(t)}{\mu_N} & \dots & -\omega_N^2 - \frac{C_{NN}(t)}{\mu_N} & \dots & \dots & -\varepsilon_N \end{bmatrix}.$$

Алгоритм исследования устойчивости системы (5.53) в случае, когда осесимметричная составляющая рассчитывается по линейным уравнениям, реализован в виде компьютерной программы. Исследование устойчивости здесь осуществляется в пространстве параметров  $\omega, P_0$ .

Выведем далее некоторые приближенные формулы для частного случая, когда учитывается одна неосесимметричная форма колебаний, т.е.  $K = N - 1$ . В этом случае нелинейные уравнения колебаний с учетом соотношений (5.47) - (5.50) принимают вид:

$$\begin{aligned} \mu_p(\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r=1}^{N-1} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s=1}^{N-1} b_{pqrs} q_q q_r q_s + \\ + q_N^2 (a_{pNN} + 2 \sum_{q=1}^{N-1} b_{pqNN} q_q) = F_p P_0 \cos \omega t ; \quad (p = 1, \dots, N-1); \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\mu_N(\ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N) + q_N (2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{qNN} q_q + 3 \sum_{q,r=1}^{N-1} b_{qrNN} q_q q_r) + b_{NNNN} q_N^3 = 0 . \quad (5.59)$$

Предполагая, что осесимметричные колебания малы, перепишем систему (5.58), (5.59), пренебрегая некоторыми членами, в виде:

$$\mu_p(\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + a_{pNN} q_N^2 = F_p P_0 \cos \omega t \quad (p = 1, \dots, N-1); \quad (5.60)$$

$$\mu_N(\ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N) + q_N (2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{qNN} q_q) + b_{NNNN} q_N^3 = 0 . \quad (5.61)$$

В окрестности главного параметрического резонанса  $\omega = \frac{\omega_N}{2}$  справедливо предположение [19], что колебания переменной  $q_N$  имеют частоту  $\frac{\omega}{2}$ . Применим аналогично работам [80, 81] метод гармонического баланса, полагая в первом приближении, что

$$q_N = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2} . \quad (5.62)$$

Подставив (5.62) в (5.60), получим:

$$q_p = a_p \sin \omega t + b_p \cos \omega t + c_p , \quad (5.63)$$

где

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{-aba_{pNN}(\omega_p^2 - \omega^2) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)a_{pNN}\varepsilon_p\omega + F_p P_0 \varepsilon_p \omega}{\mu_p[(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} ; \\ b_p &= \frac{aba_{pNN}\varepsilon_p\omega - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)a_{pNN}(\omega_p^2 - \omega^2) + F_p P_0(\omega_p^2 - \omega^2)}{\mu_p[(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} ; \\ c_p &= -\frac{a_{pNN}(a^2 - b^2)}{2\mu_p\omega_p^2} . \end{aligned}$$

Затем из (5.61) получаем после несложных преобразований два уравнения относительно  $a$  и  $b$  :

$$\begin{aligned} \left[ \mu_N \eta + E_0(\omega) A^2 - F_0(\omega) P_0 \right] a - \left[ \frac{1}{2} \mu_N \varepsilon_N \omega + E_1(\omega) A^2 - F_1(\omega) P_0 \right] b &= 0 ; \\ \left[ \mu_N \eta + E_0(\omega) A^2 + F_0(\omega) P_0 \right] b + \left[ \frac{1}{2} \mu_N \varepsilon_N \omega + E_1(\omega) A^2 + F_1(\omega) P_0 \right] a &= 0 ; \end{aligned} \quad (5.64)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \eta &= \omega_N^2 - \frac{\omega^2}{4} ; \quad A^2 = a^2 + b^2 ; \\ E_0(\omega) &= \frac{3}{4} a_{NNN} - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{a_{pNN}^2}{2\mu_p} \left[ \frac{2}{\omega_p^2} + \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2} \right] ; \\ E_1(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{a_{pNN}^2 \varepsilon_p \omega}{2\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} ; \\ F_0(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} (\omega_p^2 - \omega^2)}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} ; \\ F_1(\omega) &= \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} \varepsilon_p \omega}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]} . \end{aligned}$$

В частном случае отсутствия демпфирования, когда  $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_N = 0$  , имеем:

$$E_1(\omega) = F_1(\omega) = 0 ,$$

и тогда аналогично [80, 81] получаем три решения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a = b = 0 ; \\ 2) \quad & \mu_N \eta + E_0(\omega) A^2 - F_0(\omega) P_0 ; \quad b = 0 ; \\ 3) \quad & \mu_N \eta + E_0(\omega) A^2 + F_0(\omega) P_0 ; \quad a = 0 ; \end{aligned} \quad (5.65)$$

первое из которых соответствует осесимметричным колебаниям, а остальные - связанным осесимметричным и неосесимметричным колебаниям, причем одно из этих двух решений устойчиво.

Из (5.65) получается условие параметрического возбуждения неосесимметричной формы:

$$P_0 = \pm \frac{\mu_N \eta}{F_0(\omega)}, \quad (5.66)$$

определяющее границу области неустойчивости в окрестности главного параметрического резонанса.

В общем случае рассмотрим систему (5.64) как систему однородных линейных алгебраических уравнений и из условия существования нетривиального решения получим биквадратное уравнение относительно амплитуды  $A$  неосесимметричной формы колебаний:

$$\begin{aligned} [E_0^2(\omega) - E_1^2(\omega)]A^4 + [2\mu_N \eta E_0(\omega) + \mu_N \varepsilon_N \omega E_1(\omega)]A^2 + \\ + \mu_N^2 \left[ \eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4} \right] = [F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)]P_0^2. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Граница области параметрического возбуждения неосесимметричной формы определяется соотношением:

$$P_0 = \pm \mu_N \sqrt{\frac{\eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4}}{F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)}}. \quad (5.68)$$

Заметим, что в случае колебаний закрепленной на жестком основании конструкции, возбуждаемых периодическим продольным смещением этого основания с амплитудой  $W_0$ , в приведенных выше формулах достаточно положить:

$$P_0 = W_0, \quad F_p = \omega^2 \mu_{0p} \quad (p = 1, \dots, N-1),$$

где  $\mu_{0p}$  определено соотношением (4.49).

В качестве примера приведем результаты расчета области параметрического возбуждения неосесимметричной формы для цилиндрической оболочки с полусферическим днищем, заполненной несжимаемой жидкостью (см. рис. 5.1). Колебания возбуждаются продольным смещением нижнего торца цилиндра. Параметры конструкции следующие:



$$\frac{L}{R} = 6, \quad \frac{R}{h} = 200, \quad \nu = 0,3, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 2,7.$$

В расчетах учитывались три низших тона осесимметричных колебаний и один низший тон колебаний с числом волн по окружности  $m = 4$ . Демпфирование не учитывалось. Значения безразмерного частотного параметра

$$\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho_0 R^3}{Eh}},$$

вычисленные с помощью метода конечных элементов, для осесимметричных тонов равны (в скобках приведены значения работы [81]):

$$\lambda_1 = 0,1759 \ (0,1742),$$

$$\lambda_2 = 0,5118 \ (0,5075),$$

$$\lambda_3 = 0,8071 \ (0,8015),$$

и для неосесимметричного тона:

$$\lambda_4 = 0,0688 \ (0,058).$$

Различие результатов для  $\lambda_4$  связано с тем, что в работе [81] введены при расчете некоторые упрощающие предположения (пренебрежение влиянием днища и использование уравнений теории пологих оболочек).

С помощью упомянутой выше программы были вычислены коэффициенты нелинейных уравнений (5.60), (5.61). Положение нижней границы области параметрического возбуждения неосесимметричного тона определялись как по приближенной формуле (5.66), так и точно с помощью описанного выше метода (имеется в виду точно в рамках учтенного числа тонов колебаний).

На графике (рис. 5.1) показано положение границы области параметрического возбуждения, вычисленное точно (сплошная линия), приближенно (штрих-пунктирная линия), а также полученное в работе [81] (штриховая линия). Можно заметить, что в окрестности главного параметрического резонанса полученные здесь результаты хорошо согласуются с результатами работы [81]. Отличие в правой части графика связано лишь с различием значений частотного параметра  $\lambda_4$ .

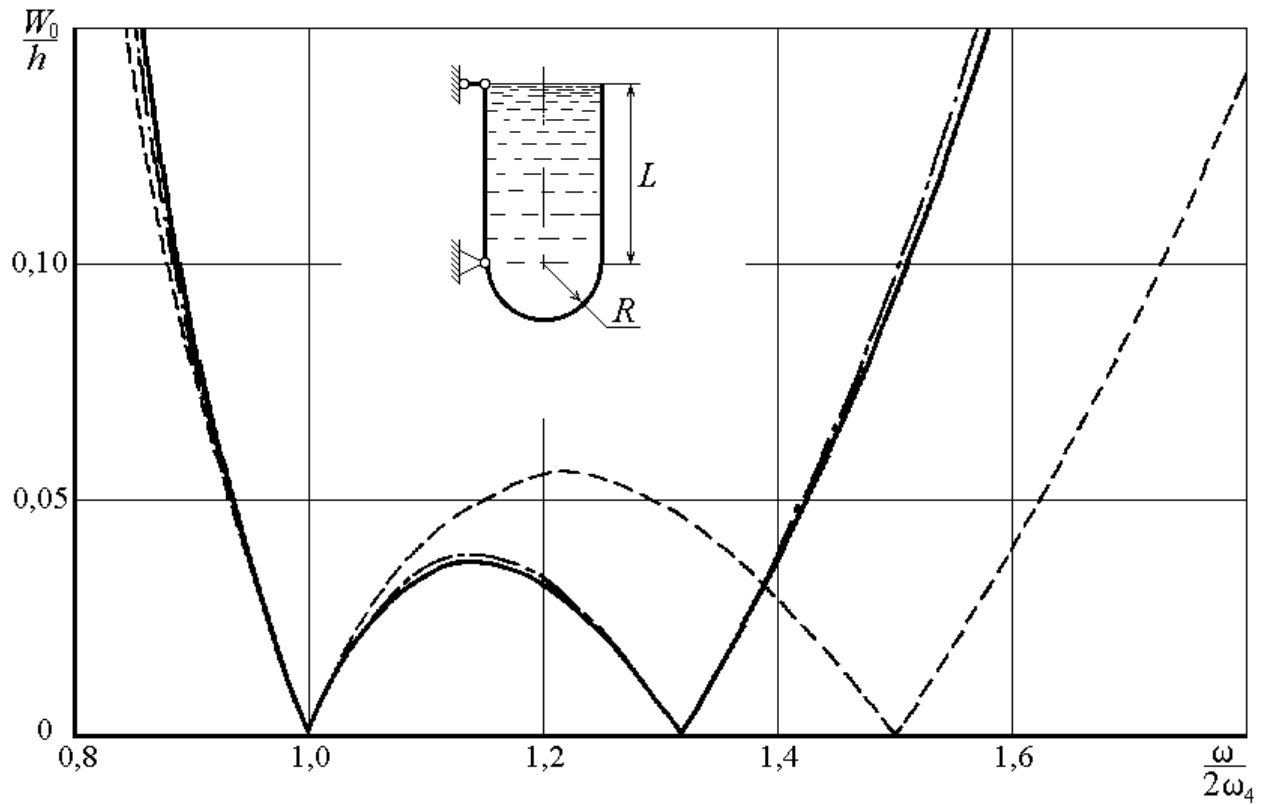


Рис. 5.1.

Близость точных и приближенных результатов говорит об удовлетворительной точности формулы (5.66) вблизи главного параметрического резонанса. Кроме того, это показывает, что кубические члены, связывающие осесимметричные и неосесимметричные формы (в формуле (5.54) они дают коэффициенты  $C_{pq}^{cc}$ ,  $C_{pq}^{cs}$ ,  $C_{pq}^{ss}$ ), оказывают незначительное влияние на положение границы области неустойчивости. Заметим здесь же, что на рис. 5.1 показана лишь нижняя граница области неустойчивости.

### 5.5. Уравнения продольных колебаний с учетом нелинейности поведения корпуса. Метод решения.

Запишем теперь уравнения колебаний в замкнутом контуре “корпус - топливная магистраль - двигатель”, в которых учтена геометрическая нелинейность поведения корпуса ракеты как оболочечной конструкции с жидкостью. Наличие нелинейных связей между осесимметричными и неосесимметричными формами колебаний, показанное выше, требует в общем случае учета в разложении колебаний корпуса не только осесимметричных, но и неосесимметричных форм. Обобщая уравнения (5.30) на этот случай, получаем уравнения продольных колебаний в виде:

$$\begin{aligned}
 M_{\Sigma} \ddot{q}_0 + \sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{0i} \ddot{s}_i &= \delta P ; \\
 \mu_k (\ddot{q}_k + \varepsilon_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k) + \sum_{q,r=1}^{N_n} a_{kqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s=1}^{N_n} b_{kqrs} q_q q_r q_s + \sum_{i=1}^{N_i} \lambda_{ki} \ddot{s}_i &= \bar{w}_{pk} \delta P ; \\
 \mu_p (\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r=1}^{N_n} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s=1}^{N_n} b_{pqrs} q_q q_r q_s &= 0 ; \\
 a_i (\ddot{s}_i + \varepsilon_{s_i} \dot{s}_i + \omega_{s_i}^2 s_i) + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_{ki} \ddot{q}_k &= 0 ; \\
 \delta p_0 = \sum_{i=1}^{N_i} k_{s_i} s_i ; \\
 \delta P = L_{\delta}(\delta p_0) ; \\
 (k = 1, \dots, N_k ; p = N_k + 1, \dots, N_n ; i = 1, \dots, N_i)
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

при начальных условиях:

$$\begin{aligned}
 q_k(0) = q_{k0} ; \quad \dot{q}_k(0) = q_{k1} ; \quad (k = 0, \dots, N_n) \\
 s_i(0) = s_{i0} ; \quad \dot{s}_i(0) = s_{i1} ; \quad (i = 1, \dots, N_i)
 \end{aligned}$$

где  $N_k$  - количество учтенных в разложении движения корпуса осесимметричных (продольно-радиальных) форм колебаний,  $N_n$  - полное число учтенных форм (предполагается, что формы с  $(N_k + 1)$ -й по  $N_n$ -ю неосесимметричные). Коэффициенты при нелинейных членах определяются формулами (5.38). В ос-

тальном сохранены обозначения, принятые в уравнениях (5.30). Уравнения записаны в предположении отсутствия связи неосесимметричных форм колебаний с колебаниями жидкости в трубопроводе, что справедливо, если трубопровод присоединен к центру днища бака.

Получим явный вид оператора  $L_\delta$ , используя задание динамических свойств двигателя в виде амплитудно-фазовой частотной характеристики. Частотная характеристика двигателя  $W(i\omega)$  обычно задается на ограниченном интервале частот  $0 \leq \omega \leq \Omega$ . Будем считать, что при  $\omega > \Omega$   $W(i\omega) = 0$ . Для низкочастотных колебаний это предположение не приведет к существенным погрешностям.

Последнее из соотношений (5.69) перепишем в виде:

$$\delta P(t) = \int_0^t K_w(t - \tau) \delta p_0(\tau) d\tau, \quad (5.70)$$

где в соответствии с известными формулами теории автоматического регулирования

$$K_w(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\operatorname{Re} W(i\omega) \cos \omega t - \operatorname{Im} W(i\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (5.71)$$

Это позволяет рассматривать систему (5.69) как систему интегро-дифференциальных уравнений. Методы численного интегрирования таких систем разработаны. В настоящей работе использован метод, описанный в [166].

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}); \\ \mathbf{z}(t) &= \int_0^t \mathbf{K}(t, \tau, \mathbf{y}(\tau)) d\tau; \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0; \end{aligned} \quad (5.72)$$

где  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  - векторы, а вектор-функции  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{K}$  удовлетворяют условиям существования и единственности решения.

В работе [166] описана модификация линейных многошаговых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнений вида (5.72) и доказана ее сходимость.

Если обозначить  $h$  - шаг решения,

$$t_n = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{y}(t_n),$$

то общую формулу линейных многошаговых методов можно записать в виде:

$$\alpha_k \mathbf{y}_{n+k} + \dots + \alpha_0 \mathbf{y}_n = h \{ \beta_k \mathbf{F}_{n+k} + \dots + \beta_0 \mathbf{F}_n \}, \quad (5.73)$$

где

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}(t_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n), \quad \mathbf{z}_n = h \sum_{i=1}^n w_{ni} \mathbf{K}(t_n, t_i, \mathbf{y}_i).$$

В качестве одного из условий сходимости метода в [166] указана ограниченность весовых коэффициентов  $w_{ni}$  для всех  $n$  и  $i \leq n$ , а также сходимость к интегралу аппроксимирующей его суммы:

$$h \sum_{i=0}^n w_{ni} f(t_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$$

для любой непрерывной функции  $f(t)$ .

Условия, налагаемые на коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, \dots, k$ ), аналогичны условиям сходимости в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  могут быть взяты такими же, как в известных многошаговых методах.

Для реализации алгоритма решения по формуле (5.73) требуется по крайней мере  $k$  начальных значений  $\mathbf{y}_i$ . Для их получения в работе [166] предложена итерационная процедура, основанная на формулах Симпсона:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{6} \left\{ \mathbf{F}(t_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) + 4\mathbf{F}(t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{z}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{z}_{n+1}) \right\} ; \\
 \mathbf{y}_{n+2} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{3} \left\{ \mathbf{F}(t_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) + 4\mathbf{F}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{z}_{n+1}) + \mathbf{F}(t_{n+2}, \mathbf{y}_{n+2}, \mathbf{z}_{n+2}) \right\} ; \\
 \mathbf{z}_{n+1} &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n w_i^s \mathbf{K}(t_{n+1}, t_i, \mathbf{y}_i) + \\
 &\quad + \frac{h}{6} \left\{ \mathbf{K}(t_{n+1}, t_n, \mathbf{y}_n) + 4\mathbf{K}(t_{n+1}, t_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}) + \mathbf{K}(t_{n+1}, t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \right\} ; \\
 \mathbf{z}_{n+2} &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n+2} w_i^s \mathbf{K}(t_{n+2}, t_i, \mathbf{y}_i) ;
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

где значения  $\mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{z}_{n+\frac{1}{2}}$  могут быть получены при помощи квадратичной интерполяции:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{3}{8} \mathbf{y}_n + \frac{3}{4} \mathbf{y}_{n+1} - \frac{1}{8} \mathbf{y}_{n+2} ; \\
 \mathbf{z}_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{3}{8} \mathbf{z}_n + \frac{3}{4} \mathbf{z}_{n+1} - \frac{1}{8} \mathbf{z}_{n+2} ;
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

а  $w_i^s$  - весовые коэффициенты метода Симпсона: 1, 4, 2, 4, ..., 2, 4, 1. Как отмечается в работе [166], эта итерационная процедура может быть использована также в качестве метода решения системы (5.72).

Для решения системы (5.69) была разработана компьютерная программа, использующая процедуру решения систем интегро-дифференциальных уравнений (5.72). Эта процедура реализует схему “предиктор - корректор” с задаваемым числом коррекций, основанную на методах Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона третьего порядка.

Коэффициенты в формулах (5.73) в этом случае равны для предиктора:

$$\alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_1 = \alpha_0 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_2 = \frac{23}{12}, \quad \beta_1 = -\frac{4}{3}, \quad \beta_0 = \frac{5}{12},$$

для корректора:

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_2 = \frac{5}{12}, \quad \beta_1 = \frac{2}{3}, \quad \beta_0 = -\frac{1}{12}.$$

Для вычисления квадратур использованы формулы Грегори третьего порядка, для которых при  $m \geq 3$  весовые коэффициенты имеют значения:

$$\begin{aligned}w_{m0} &= w_{mm} = \frac{5}{12} ; \\w_{m1} &= w_{m,m-1} = \frac{13}{12} ; \\w_{mi} &= 1 , \quad 2 \leq i \leq m-2 .\end{aligned}$$

Первые пять значений решения получаются при помощи итерационных формул (5.74), (5.75).

Этот вариант процедуры соответствует описанному в работе [166] примеру. Процедура проверена на тестовых задачах и показала хорошую точность и сходимость к точному решению.

## 5.6. Исследование динамики продольных автоколебаний гидроупругой системы с регулятором.

Рассмотрим упрощенную модель гидроупругой системы, взаимодействующей с регулятором таким образом, что образуется замкнутый контур, в котором могут развиваться автоколебательные процессы (рис. 5.2).

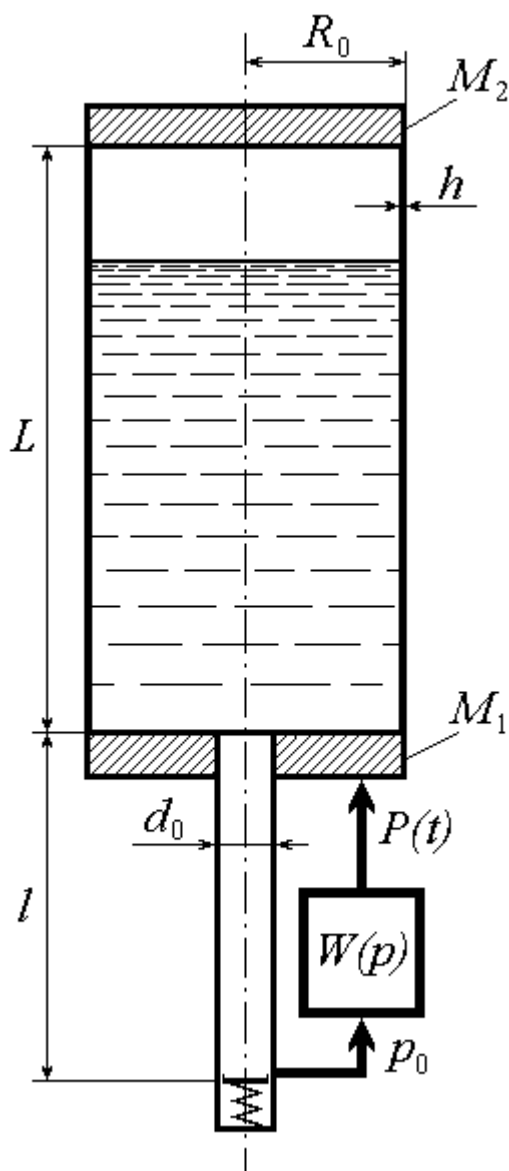


Рис. 5.2.

Эта модель включает упругую конструкцию с жидкостью, представленную в данном случае заполненной водой гладкой цилиндрической оболочкой



радиуса  $R_0$ . Нижнее и верхнее днища - жесткие диски массой  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Длина оболочки  $L$ , глубина жидкости  $H$ . Конструкция свободно подвешена. К нижнему торцу ее может быть приложена продольная сила  $P(t)$ .

К центру днища цилиндрического бака присоединен трубопровод длиной  $l$  и диаметром  $d_0$ , закрытый снизу упругой мембраной. Считаем, что толщина стенок трубопровода достаточно большая, чтобы низшая частота колебаний жидкости в нем определялась упругостью закрывающей его мембраны. Величина силы  $P(t)$  управляется давлением  $p_0$  в нижнем сечении трубопровода через регулятор с заданной амплитудно-фазовой частотной характеристикой.

В качестве конкретных параметров системы возьмем значения:

$$L = 2,2 \text{ м}, \quad R_0 = 0,3 \text{ м}, \quad h = 0,0015 \text{ м},$$

$$E = 6,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \nu = 0,3, \quad \rho = 2648 \text{ кг/м}^3,$$

$$M_1 = 481,264 \text{ кг}, \quad M_2 = 326,334 \text{ кг}, \quad l = 1,6 \text{ м}, \quad d_0 = 0,06 \text{ м}.$$

Частотные характеристики регулятора приведены на рис. 5.3.

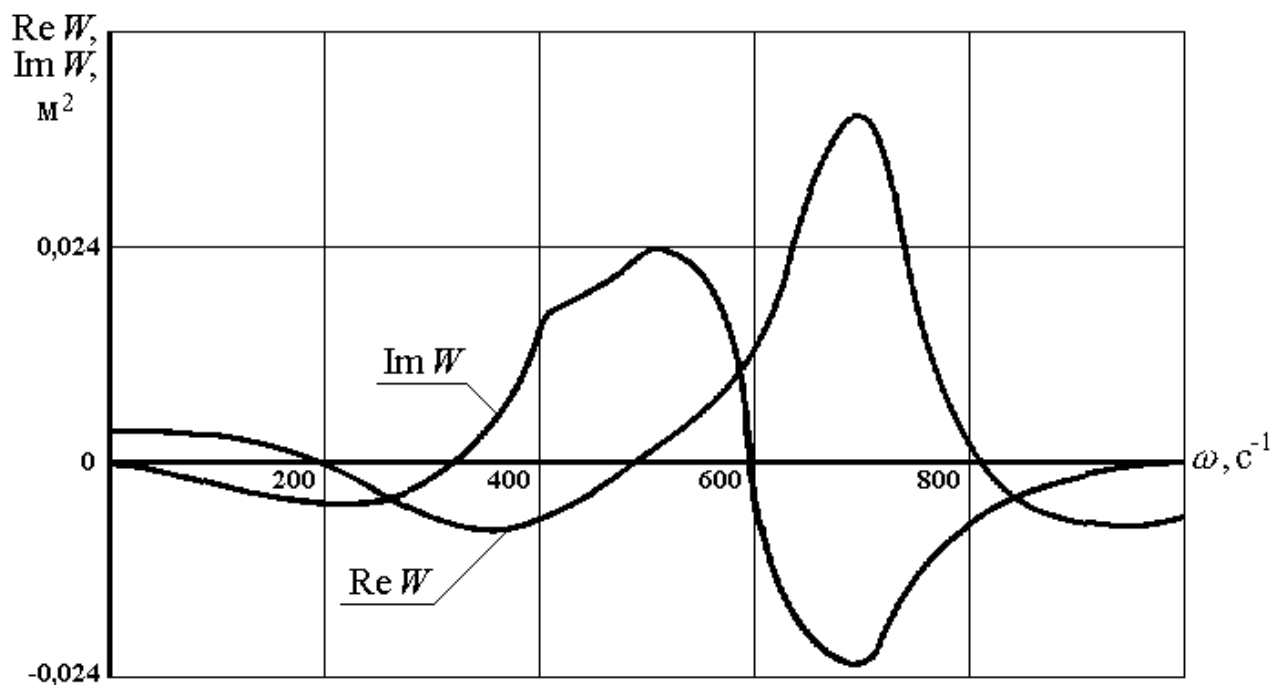


Рис. 5.3.

### 5.6.1. Параметрическое возбуждение неосесимметричных колебаний.

Достаточным условием развития автоколебаний в контуре является неустойчивость нулевого решения, наличие которой определяется из исследования линеаризованной замкнутой системы.

Первым этапом исследования динамических процессов в системе является определение динамических характеристик упругой конструкции с жидкостью - собственных частот и форм колебаний. На основе собственных форм определяются и коэффициенты системы уравнений (5.69): обобщенные массы, коэффициенты при нелинейных членах, множители при обобщенных силах.

Динамические характеристики конструкции рассчитаны для четырех уровней заполнения оболочки жидкостью:

$$H = L, \quad H = 0,75L, \quad H = 0,5L, \quad H = 0,25L,$$

и на рис. 5.4(а-г) представлены зависимости собственных частот четырех низших тонов от числа волн по окружности  $m$  для каждого из уровней.

Из этих зависимостей видно, что низшие собственные частоты соответствуют формам колебаний с  $m = 4$ . Нижняя часть спектра характеризуется высокой плотностью частот, что способствует возникновению разнообразных резонансных эффектов при колебаниях за счет нелинейности поведения оболочки. В частности, среди собственных частот неосесимметричных колебаний имеются такие, что их удвоенные значения близки к собственным частотам продольных (продольно-радиальных) колебаний. Это увеличивает возможность их параметрического возбуждения при продольном гармоническом воздействии  $P = P_0 \cos \omega t$ .

С целью исследования этих эффектов в “чистом” виде рассмотрим колебания конструкции с жидкостью без трубопровода и регулятора при действии гармонической силы. В предыдущих разделах был описан механизм возбуждения параметрических неосесимметричных колебаний оболочечных конст-

рукций с жидкостью и даны методы построения областей неустойчивости на плоскости параметров  $\omega, P_0$ .

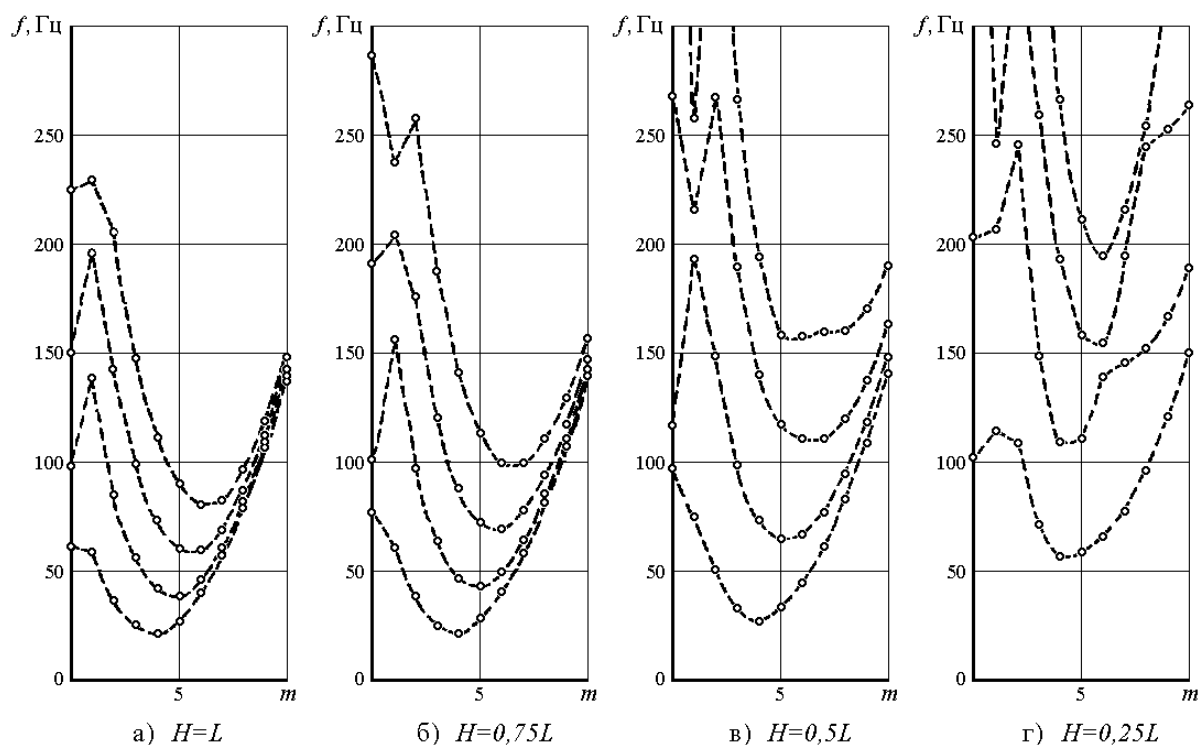


Рис. 5.4.

Предположим, что осесимметричные колебания конструкции происходят в линейной области, т.е. установившийся осесимметричный отклик конструкции (в отсутствие неосесимметричной составляющей) можно рассчитывать по линейным соотношениям, используя формулы (5.54). В расчетах учтем три низших тона осесимметричных (продольно-радиальных) колебаний и один низший тон неосесимметричных колебаний (для различных значений  $m$ ).

Приведем результаты исследования уровня заполнения  $H = L$ . С помощью упомянутой в разделе 5.4 программы были вычислены коэффициенты нелинейных связей нормальных координат. Границы областей неустойчивости строились в окрестности низшего тона осесимметричных колебаний. Логарифмические декременты учтенных тонов колебаний полагались равными 0,05.

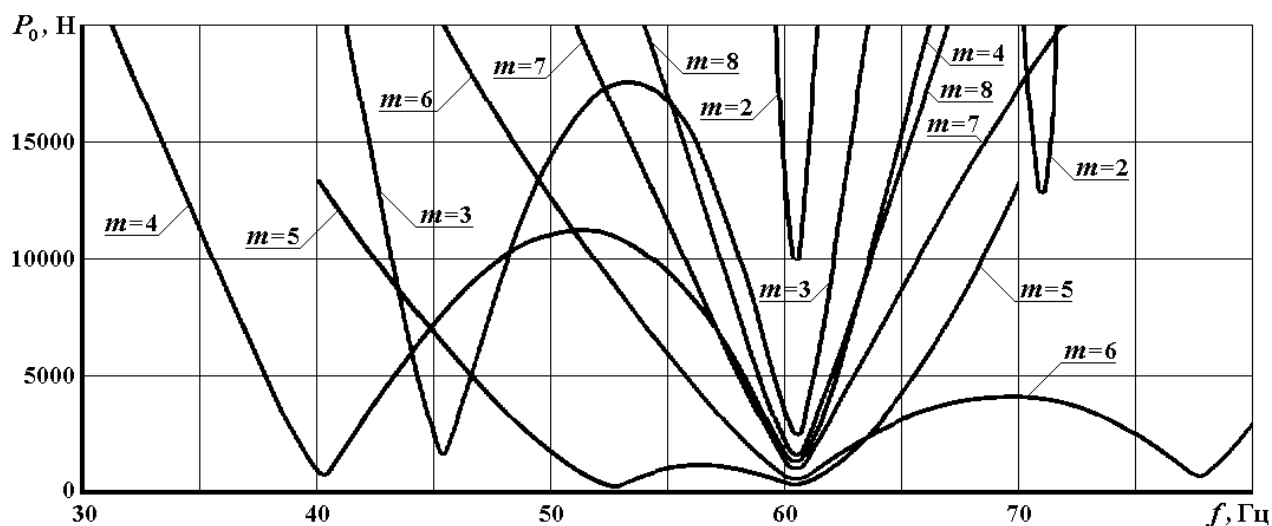


Рис. 5.5.

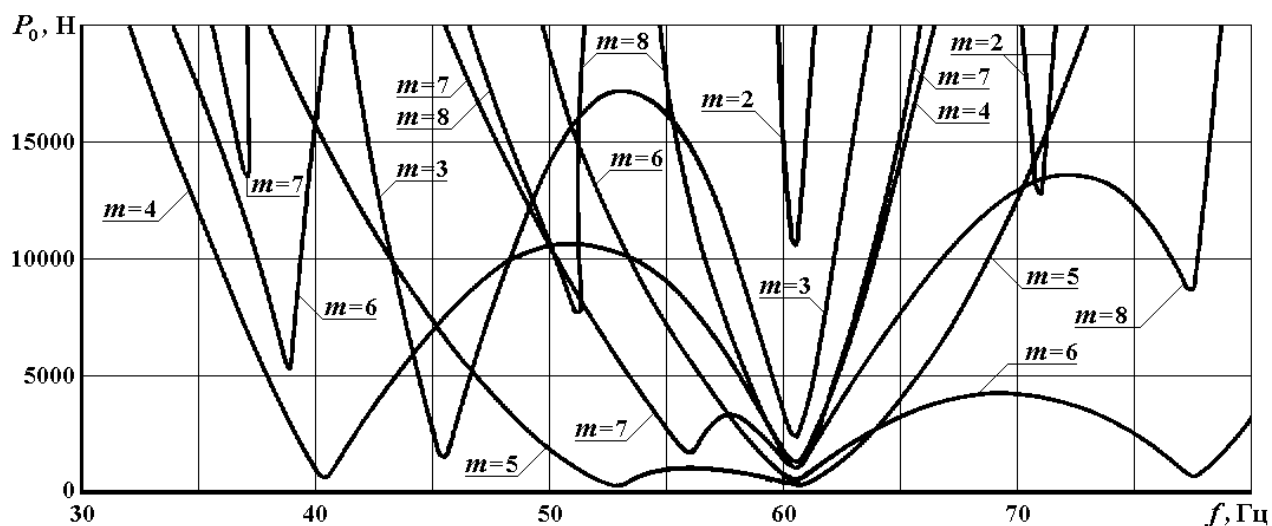


Рис. 5.6.

На рис. 5.5 показаны границы областей параметрического возбуждения низших тонов неосесимметричных колебаний с  $m = 2 \div 8$ , вычисленные по приближенным формулам (5.68), а на рис. 5.6 - вычисленные с помощью описанного в разделе 5.4 алгоритма, основанного на теории Флоке-Ляпунова. Сравнение этих графиков показывает, что удовлетворительную точность приближенные формулы дают лишь в окрестности главных параметрических резонансов. На рис. 5.6 можно видеть пики, соответствующие побочным резонансам, которые не учитываются формулами (5.66), (5.68). Заметим, что при одновременном учете в уравнениях двух или более неосесимметричных тонов

колебаний могут быть получены также пики, соответствующие различным комбинационным резонансам в системе.

Результаты, приведенные на графике (рис. 5.6), показывают, что возбуждение неосесимметричных форм колебаний, являющееся существенно нелинейным эффектом, происходит при таких значениях амплитуды  $P_0$ , когда осесимметричные колебания еще не выходят за пределы применимости линейной теории. Это видно из нижней части графика, где величина амплитуды  $P_0$  заведомо такова, что при отсутствии неосесимметричных составляющих не приводит к заметным нелинейным эффектам. Из графика видно также, что наиболее легко возбудимым в окрестности первого тона осесимметричных колебаний является низший тон неосесимметричных колебаний с  $m = 5$ .

Отметим в заключение, что на графиках (рис. 5.5, 5.6) приведены лишь нижние границы областей неустойчивости. Для заданного  $m$  при увеличении  $P_0$  возможно вновь попадание в область устойчивости, причем число чередований областей при увеличении  $P_0$  бесконечно. Это легко понять, если представить себе график в виде соответствующим образом деформированной (в частности, за счет резонансов на частотах осесимметричных колебаний) диаграммы Айнса-Стретта. При этом, если не учитывать демпфирование, то в окрестности частот осесимметричных тонов горизонтальное сечение плоскости параметров будет состоять из бесконечного числа чередующихся отрезков устойчивости и неустойчивости.

При учете демпфирования картина несколько меняется: области неустойчивости отходят от оси абсцисс, причем верхние участки области неустойчивости отходят тем дальше, чем выше они были расположены при отсутствии демпфирования. Для иллюстрации сказанного на рис. 5.7 показана граница области неустойчивости формы низшего тона колебаний модели с  $m = 6$  в окрестности низшей собственной частоты осесимметричных колебаний (область неустойчивости отмечена штриховкой). Практическое значение таких промежуточных областей устойчивости пренебрежимо мало ввиду того, что они

очень узки и, как правило, перекрываются областями неустойчивости форм с другими значениями  $m$ .

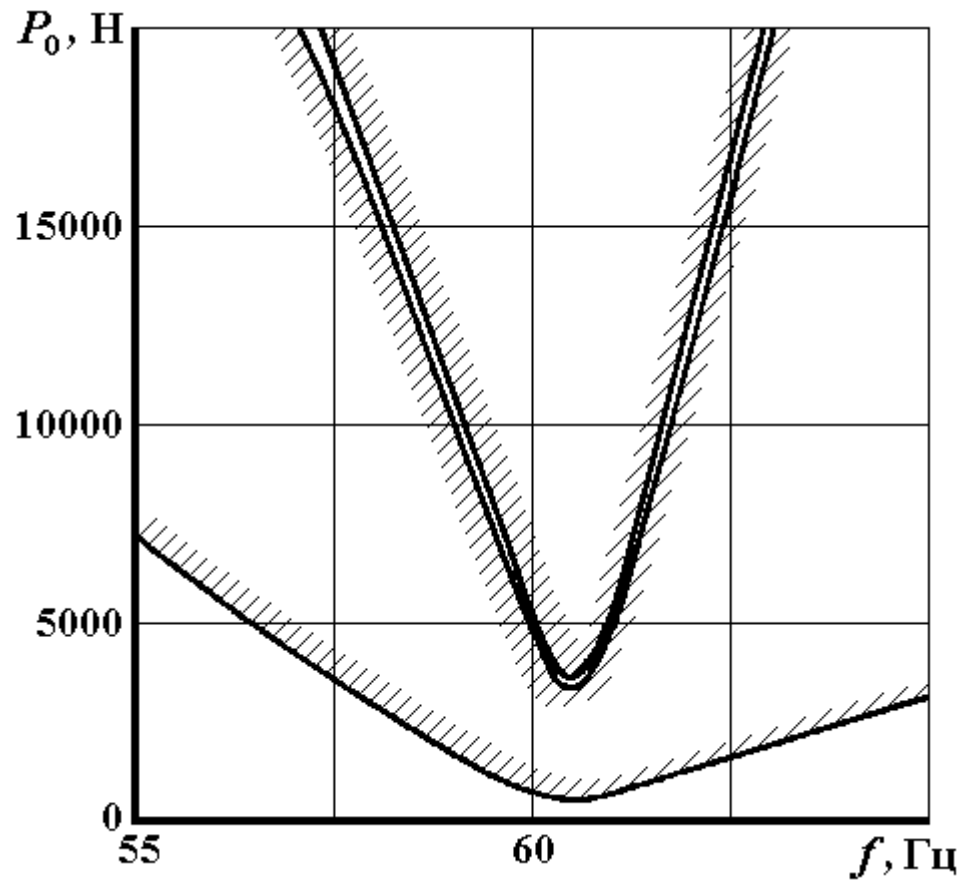


Рис. 5.7.

#### 5.6.2. Нелинейные продольные автоколебания гидроупругой системы с регулятором.

Исследуем теперь, каким образом нелинейность поведения оболочечной конструкции с жидкостью влияет на динамику продольных колебаний замкнутой гидроупругой системы с регулятором. С этой целью выполнено численное интегрирование системы уравнений (5.69) при заданных ненулевых начальных значениях переменных. Эти начальные значения играли роль внешних возмущений, действующих на систему и выводящих ее из состояния неустойчивого равновесия.

Сначала выполним интегрирование без учета в уравнениях колебаний нелинейных членов. В проведенных расчетах учитывались три низших тона осесимметричных колебаний конструкции с жидкостью (дополнительно к нулевому - продольному смещению модели как твердого тела). В линеаризованной системе в зависимости от того, устойчива она или нет, возможны две ситуации: либо начавшиеся от каких-то внешних причин колебания остаются ограниченными (или затухают), либо они неограниченно возрастают по амплитуде (когда система неустойчива).

Исследования выполнены для двух значений собственной частоты колебаний жидкости в трубопроводе:  $f_s = 10$  Гц и  $f_s = 58$  Гц. Расчеты, проведенные по описанной в разделе 5.5 программе, показали, что в первом случае система устойчива, а во втором реализуется неустойчивость на частоте, близкой к частоте первого тона упругих колебаний оболочки с жидкостью.

В качестве начальных условий при интегрировании системы задавались нулевые значения для всех обобщенных координат и их производных, кроме

$$q_1(0) = 0,000015 .$$

Такое значение соответствует начальной деформации оболочки по форме первого тона с максимальным прогибом  $0,01h$ , поскольку собственные формы были нормированы при расчетах по максимальному прогибу оболочки. Таким образом, значение каждой из обобщенных координат равно в каждый момент времени максимуму прогиба по соответствующей собственной форме. Полная же величина прогиба есть суперпозиция значений, получаемых для собственных форм.

На рис. 5.8 показано изменение продольной силы воздействия регулятора на модель во времени при частоте  $f_s = 10$  Гц, а на рис. 5.9 - при частоте  $f_s = 58$  Гц. Из рисунков видно, что в первом случае амплитуда колебаний остается ограниченной и небольшой по величине, в то время как во втором случае наблюдается быстрый экспоненциальный рост амплитуды. Это вполне соот-

ветствует результатам исследования устойчивости системы частотными методами.

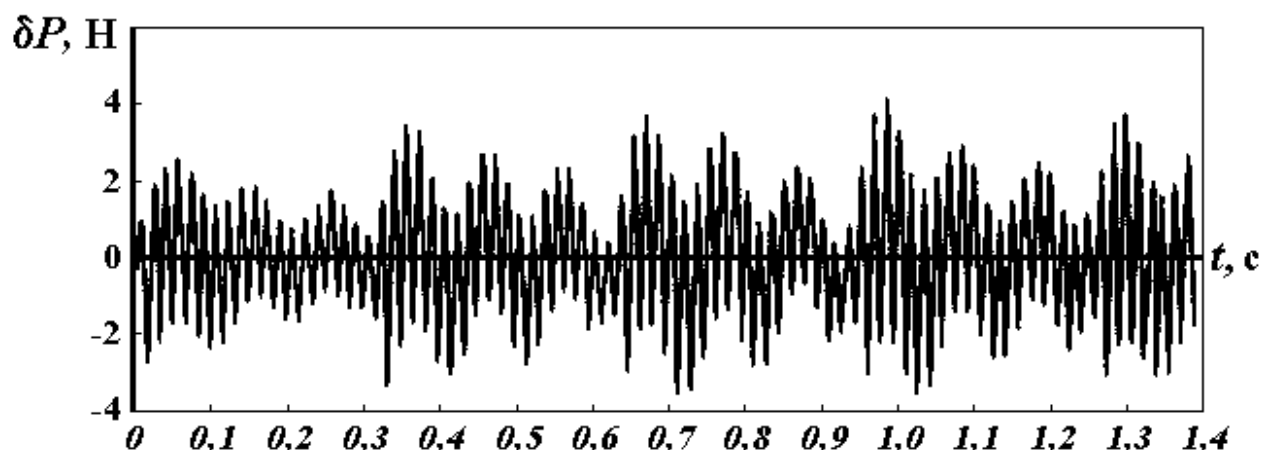


Рис. 5.8.

Первый случай, когда система устойчива, не представляет интереса для исследования. Поэтому в дальнейших расчетах полагаем, что собственная частота колебаний жидкости в трубопроводе  $f_s = 58$  Гц.

Попытаемся учесть нелинейность поведения оболочки лишь в рамках осесимметричных колебаний. Для этого введем в уравнения колебаний оболочки с жидкостью нелинейные члены, ограничиваясь тонами осесимметричных колебаний. Начальные условия возьмем те же, что и раньше. Результаты расчета в виде зависимости продольной силы от времени показаны на рис. 5.10. На графике видна некоторая тенденция к ограничению амплитуды колебаний, однако проявляется она при недопустимо больших значениях, соответствующих физическому разрушению системы.

Развивающиеся в неустойчивой “в малом” системе колебания с частотой около 60 Гц (как можно заметить из рис. 5.9) приводят при достижении определенной амплитуды продольной силы к реализации условий параметрического возбуждения целого набора собственных форм неосесимметричных колебаний, причем при этих амплитудах силы нелинейность осесимметричной составляющей еще не проявляется (как это видно из сравнения рис. 5.9 и 5.10). В



этих условиях наличие сколь угодно малой начальной неосесимметричной деформации конструкции (или действие сколь угодно малого внешнего неосесимметричного возмущения) приведет к возникновению и развитию неосесимметричных колебаний.

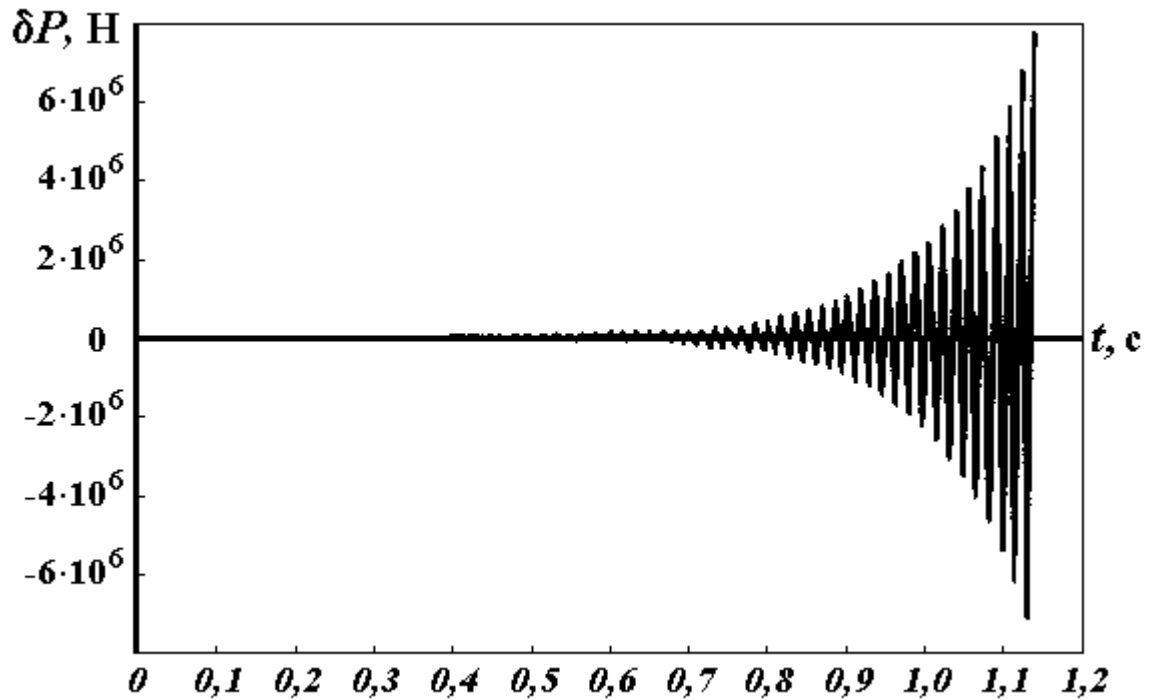


Рис. 5.9.

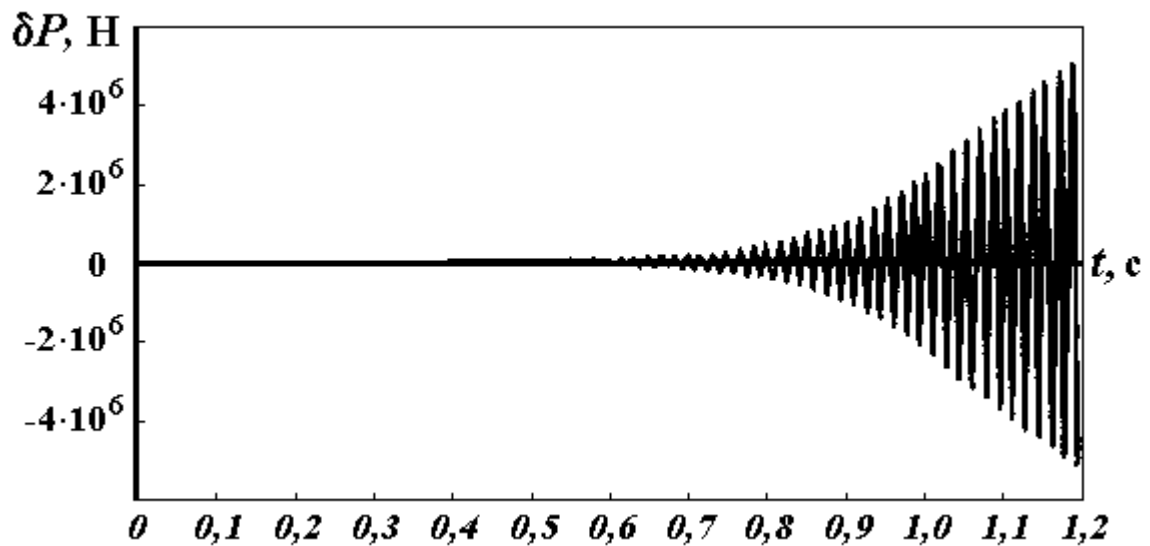


Рис. 5.10.

Учтем из всех возможных неосесимметричных собственных форм лишь одну - ту, которая параметрически возбуждается при наименьшей амплитуде продольной силы на частоте около 60 Гц. Это форма первого тона колебаний с числом волн по окружности  $m = 5$ . Ее следует учесть дополнительно к указанным тонам осесимметричных колебаний вместе со всеми нелинейными членами в уравнениях (5.69). (Таким образом, в этих уравнениях  $N_k = 3$ ,  $N_n = 4$ ).

Начальные условия зададим ненулевыми лишь для  $q_1$  и  $q_4$ , причем

$$q_4(0) = 0,000015,$$

(что соответствует максимальному прогибу по неосесимметричной форме  $0,01h$ ), а для  $q_1$  рассмотрим два варианта:

$$q_1(0) = 0,000015 \text{ и } q_1(0) = 0,0000015,$$

(соответственно  $0,01h$  и  $0,001h$ ). Это позволит оценить, в какой мере переходный процесс определяется начальными условиями.

Результаты расчетов первого ( $q_1(0) = 0,01h$ ) и второго ( $q_1(0) = 0,001h$ ) вариантов приведены соответственно на рис. 5.11 и рис. 5.12, где показаны зависимости от времени силы продольного воздействия регулятора  $\delta P$ , давления на выходе из трубопровода  $\delta p_0$  и обобщенной координаты неосесимметричной формы колебаний  $q_4$  (максимального прогиба оболочки по неосесимметричной форме).

На начальном отрезке времени амплитуды силы и давления возрастают (примерно так же, как и без учета нелинейности), в то время как амплитуда неосесимметричных колебаний меняется слабо (во втором варианте даже уменьшается). При достижении продольной силой некоторого значения, соответствующего уровню параметрического возбуждения неосесимметричной формы, картина резко меняется. Происходит быстрое нарастание амплитуды колебаний неосесимметричной составляющей до величины порядка толщины оболочки  $h$ . В это же время прекращается рост амплитуд продольной силы и

давления на выходе из трубопровода и в дальнейшем эти величины остаются ограниченными. Отметим также, что при этом в колебаниях оболочки преобладающей является неосесимметричная составляющая, амплитуда которой примерно на два порядка превосходит амплитуду осесимметричных колебаний.

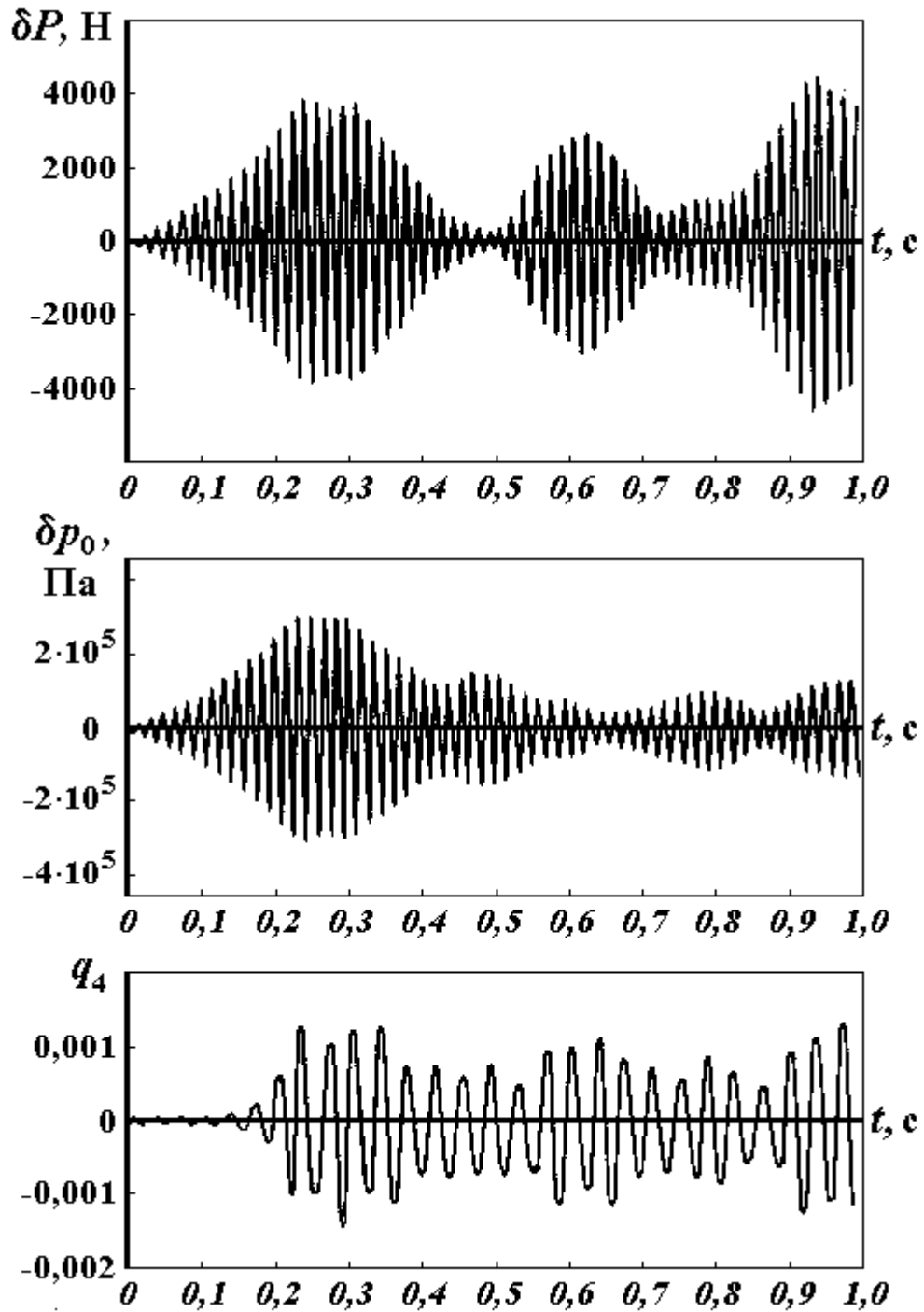


Рис. 5.11.

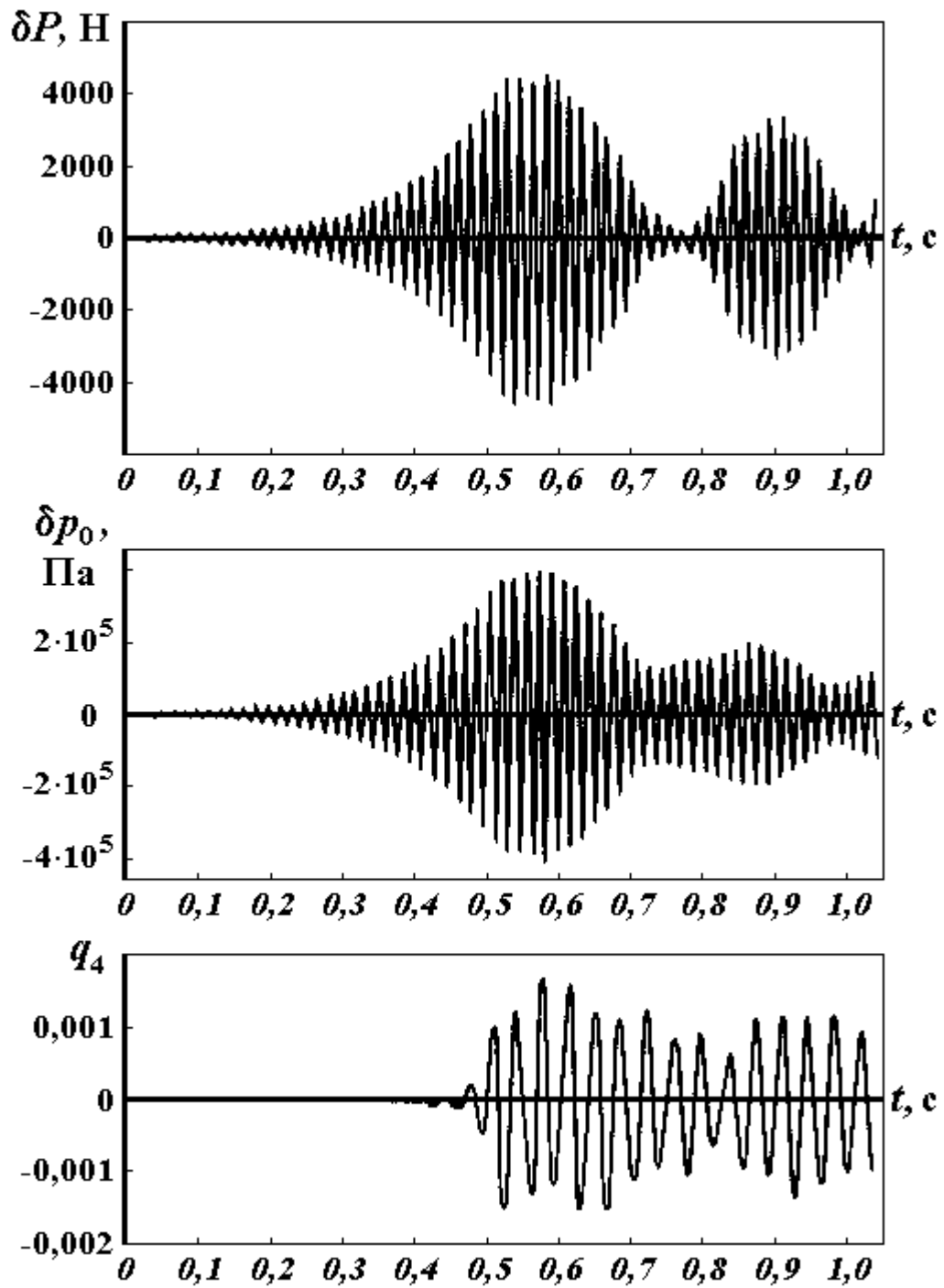


Рис. 5.12.

На рис. 5.11 и 5.12 видно качественное соответствие переходных процессов для обоих вариантов начальных условий. При этом количественные отличия максимальных значений амплитуд продольной силы не превышают 10-

15% . Такое соответствие результатов позволяет сделать вывод о том, что характер исследуемого переходного процесса определяется не начальными условиями, которые являются внешним фактором, а в основном внутренними причинами, заключающимися в характере взаимодействия осесимметричной и неосесимметричной составляющих колебаний.

Возрастание амплитуды продольной силы (и, соответственно, осесимметричной составляющей колебаний), тенденция к которому определяется неустойчивостью системы “в малом”, приводит к возбуждению и росту неосесимметричной составляющей, которая в свою очередь оказывает подавляющее действие на амплитуду колебаний давления на выходе из трубопровода и, следовательно, на амплитуду продольной силы. Фактически, энергия, сообщаемая конструкции за счет работы продольной силы, переходит в энергию параметрически возбуждаемых неосесимметричных колебаний оболочки.

Этим же механизмом можно объяснить и некоторые количественные различия на графиках продольной силы для двух вариантов начальных условий на рис. 5.11 и 5.12. Во втором варианте меньшая величина начального возмущения приводит к более затянутому начальному этапу, связанному с раскачкой осесимметричных колебаний. Достижение продольной силой уровня параметрического возбуждения неосесимметричной формы происходит позже, и к этому времени амплитуда неосесимметричной составляющей успевает уменьшиться почти вдвое (это получено из результатов расчета, но на графике не заметно из-за масштаба рисунка). Поэтому амплитуда осесимметричной составляющей успевает вырасти до более высокого значения, чем в первом варианте, пока амплитуда неосесимметричной формы возрастает до требуемой величины. Так как рост амплитуды параметрически возбуждаемой неосесимметричной формы происходит очень быстро, количественное отличие максимальных значений амплитуд продольной силы оказывается невелико.

Результаты проведенного исследования показывают, что нелинейность поведения оболочечной конструкции, приводящая к возбуждению неосесим-

метричных оболочечных колебаний, оказывает существенное влияние на амплитуды колебаний, развивающихся в случае неустойчивости системы с регулятором.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлена методология исследования динамических свойств сложных упругих и гидроупругих систем, основанная на корректном и непротиворечивом подходе к задаче определения динамических характеристик входящих в систему конструкций, содержащих жидкость, и высокоэффективном и надежном методе модального синтеза подконструкций, обеспечивающем оценку точности получаемых результатов.

Основные результаты, полученные в процессе выполненных исследований, можно сформулировать следующим образом.

1. Сформулированы и доказаны основные теоремы метода корректирующих рядов, составляющие принципиально новую идеологическую основу модального синтеза подконструкций при исследовании динамических свойств сложных систем в ограниченном частотном интервале. Операция усечения ряда из собственных форм подконструкции заменяется усечением степенного корректирующего ряда при конечном числе собственных форм в модальном разложении колебаний. Коэффициенты степенного ряда вычисляются рекуррентно с помощью последовательности статических задач.

2. Получена асимптотическая оценка погрешности усечения модального разложения при увеличении порядка корректирующего ряда, дающая априорную оценку точности результатов синтеза подконструкций.

3. Выведены соотношения метода корректирующих рядов как для дискретных моделей подконструкций, так и для континуальных моделей. Рассмотрены различные варианты синтеза в зависимости от условий закрепления внешних степеней свободы подконструкций при определении их собственных частот и форм: методы жестких и свободных границ, а также гибридный метод, когда часть внешних степеней свободы закреплена, а часть свободна. Исследованы различные методы формирования матриц динамических коэффициентов влияния подконструкций.

4. Разработан численно устойчивый алгоритм вычисления корректирующих векторов (или функций). Показано, что в ходе рекуррентного процесса они должны вычисляться в подпространстве, ортогональном к учтенным в разложении собственным формам, при этом на каждом шаге должна выполняться дополнительная ортогонализация решения.

5. Разработан программный комплекс для исследования динамических характеристик сложных пространственных стержневых систем, включающий программу расчета собственных частот и форм колебаний подконструкций, препроцессор, постпроцессор для формирования баз данных, содержащих информацию о динамических характеристиках подконструкций и применяемых при синтезе корректирующих векторов, а также программы для исследования динамических характеристик составной конструкции с использованием метода корректирующих рядов. На основе аналогичных принципов разработан программный комплекс для исследования составных осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость. Проведены численные исследования сходимости метода корректирующих рядов на ряде простых примеров, а также на примерах конструкций типа корпусов жидкостных ракет и орбитальной космической станции (стержневая модель). Полученные результаты демонстрируют высокие показатели точности метода корректирующих рядов и скорости вычислений при невысокой требовательности к параметрам вычислительных систем.

6. Сформулирована непротиворечивая постановка краевой задачи и вариационный принцип для описания динамического поведения упругой конструкции, взаимодействующей с ограниченным объемом жидкости в условиях однородного гравитационного поля. Предложенная формулировка применима к произвольным регулярным (кусочно-гладким) поверхностям контакта конструкции с жидкостью.

7. Разработан алгоритм решения задачи определения динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, взаимодействующих



щих с ограниченными объемами жидкости, основанный на методе конечных элементов. Вычисляются как осесимметричные, так и неосесимметричные формы колебаний с учетом влияния начального напряженно-деформированного состояния, обусловленного внутренним давлением в полостях конструкции (включая гидростатическое давление) и ее собственным весом. Программная реализация алгоритма на различных электронных вычислительных системах показала его высокую надежность в процессе многолетней эксплуатации в условиях конструкторских бюро ракетно-космической отрасли. Он включен в фонд алгоритмов РКА и использовался в процессе проектно-конструкторских работ при создании ракет Зенит, Энергия-Буран, Космос, Рокот, Прибой и других. Новый программный комплекс позволяет в полном объеме учитывать гравитационные эффекты, связанные с образованием поверхностных волн и деформацией поверхности контакта жидкости со стенками сосуда.

8. Разработана методика исследования амплитуд продольных автоколебаний жидкостной ракеты с учетом нелинейности деформаций оболочек корпуса и эффекта параметрического возбуждения неосесимметричных форм колебаний. Проведенное исследование показало, что, во-первых, учет геометрической нелинейности в рамках предположения об осесимметричности колебаний не дает существенного эффекта в плане ограничения амплитуд продольных автоколебаний, и во-вторых, учет эффекта параметрического возбуждения неосесимметричных тонов оказывает существенное влияние на характер переходного процесса и приводит к значительному ограничению амплитуд продольных колебаний. Этот результат показывает необходимость учета нелинейности поведения корпуса при оценке максимальных амплитуд продольных колебаний, развивающихся в связи с неустойчивостью в контуре «корпус - топливная магистраль - двигатель», а методика открывает путь исследования данного вопроса в ходе проектно-конструкторских разработок данного класса изделий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамсон Х.Н., Кана Д.Д.* Некоторые экспериментальные исследования динамической устойчивости тонких оболочек, содержащих жидкость. // Проблемы механики твердого деформированного тела. - Л.: Судостроение, 1970. - С. 11 - 19.
2. *Азаров В.Л., Лутичев Л.Н., Тавризов Г.А.* Математические методы исследования сложных физических систем. - М.: Наука, 1975. - 342 с.
3. *Александрович Л.И., Лампер Р.Е.* Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1966. - М.: Наука, 1966. - С. 25 - 27.
4. *Анисимов А.В., Забудкин В.В., Лиходед А.И., Пономарев Д.А.* Динамическое нагружение пилотируемых космических станций сложной пространственной компоновки // Космонавтика и ракетостроение. - 1998. - Вып. 13. - С. 130 - 140.
5. *Анисимов А.В., Выломов В.Н., Забудкин В.В., Лиходед А.И., Пономарев Д.А.* Методика расчета динамических нагрузок на сложные ракетные конструкции с выделением квазистатических составляющих // Космонавтика и ракетостроение. - 1995. - Вып. 4. - С. 95 - 107.
6. *Анисимов А.М.* Применение конечно-разностных методов к расчету осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 1968. - № 3. - С. 23 - 31.
7. *Анисимов А.М.* Собственные осесимметричные колебания совмещенных сосудов. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М., 1976. - С. 13 - 21.

8. Антонов В.Н. Применение метода суммарных представлений при исследовании колебаний оболочек с жидкостью. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М., 1976. - С. 22 - 26.

9. Антонов В.Н. Колебания соосных цилиндрических оболочек, частично заполненных сжимаемой жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1977. - № 3. - С. 118 - 124.

10. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Гнуни В.Ц. Динамическая устойчивость моментного состояния цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - Новосибирск, 1974. - С. 20 - 21.

11. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Параметрические колебания цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью переменной глубины // Прикладная механика. - 1966. - Т. 2. - № 3. - С. 21 - 26.

12. Балакирев Ю.Г. Осесимметричные колебания соосных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. - М.: Наука, 1970.

13. Балакирев Ю.Г. Исследование устойчивости системы упругий корпус - топливные магистрали - двигатели для жидкостных ракет пакетной компоновки // Известия Академии наук. Механика твердого тела. - 1994. - № 2. - С. 129 - 137.

14. Балакирев Ю.Г., Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Нелинейные продольные автоколебания оболочечных конструкций с жидкостью. // 13 Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек, Таллин, 1983. Ч. 1. А-В. - Таллин, 1983. - С. 84 - 89.

15. Балакирев Ю.Г., Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Нелинейные автоколебания регулируемых систем, содержащих оболочки с жидкостью. // Теория и расчет элементов тонкостенных конструкций. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. - С. 6 - 19.

16. Балакирев Ю.Г., Мурыгин В.Е. О построении областей устойчивости колебаний упругого объекта с регулятором. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М., 1976. - С. 27 - 31.

17. Богадица Э.С., Брусиловский А.Д., Шмаков В.П. Численная реализация метода расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных жидкостью. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. - Томск, Томский ун-т, 1972. - С. 3 - 16.

18. Богадица Э.С., Брусиловский А.Д., Шмаков В.П. Применение численного метода к расчету собственных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Прикладная механика. - 1977. - Т. 13. - № 1. - С. 81 - 85.

19. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. - М.: Гостехиздат, 1956. - 600 с.

20. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. - 339 с.

21. Болотин В.В. К устойчивости параметрически возбуждаемых систем // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1974. - № 5. - С. 83 - 88.

22. Брусиловский А.Д., Швейко Ю.Ю., Шмаков В.П. Продольные колебания упругих конструкций с тонкостенными полостями, содержащими жидкость. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (Труды III семинара). - Томск, Томский ун-т, 1978. - С. 21 - 31.

23. Брусиловский А.Д., Шмаков В.П., Яблоков В.А. Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1973. - № 3. - С. 99 - 110.

24. Бурман З.И., Артюхин Г.А., Зархин Б.Я. Программное обеспечение матричных алгоритмов и метода конечных элементов в инженерных расчетах. - М.: Машиностроение, 1988. - 256 с.

25. *Бурман Я.З., Зархин Б.Я.* Определение динамической реакции упругих конструкций на основе разложения по собственным формам и векторам Ланцоша // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1991. - № 6. - С. 122 - 131.

26. *Бублик Б.Н., Меркулов В.И.* О динамической устойчивости тонких упругих оболочек, наполненных жидкостью // Прикладная математика и механика. - 1960. - Т. 24. - № 5. - С. 941 - 946.

27. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В.Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. - 352 с.

28. *Вольмир А.С., Михнев В.Ф., Терских В.Н., Тихомиров А.Б.* Многоуровневые методы исследования сложных упругих систем // Проблемы устойчивости и предельной несущей способности конструкций: Межвузовский тематический сборник трудов ЛИСИ. - Л.: ЛИСИ, 1983. - С. 25 - 34.

29. *Вольмир А.С., Терских В.Н.* Исследование динамики конструкций из композитных материалов на основе метода суперэлементов // Механика композитных материалов. - 1979. - № 4. - С. 652 - 655.

30. *Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т.* Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований. - М.: Машиностроение, 1989. - 248 с.

31. *Горбунов Ю.А., Новохатская Л.М., Шмаков В.П.* Теоретическое и экспериментальное исследование спектра собственных неосесимметричных колебаний конической оболочки с жидкостью при наличии внутреннего давления. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. - Томск, Томский ун-т, 1975. - С. 47-52.

32. *Григолюк Э.И.* Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью. // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. - М.: Наука, 1970. - С. 755 - 778.

33. Григолюк Э.И., Шклярчук Ф.Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // Прикладная математика и механика. - 1970. - Т. 34. - № 3. - С. 401 - 411.

34. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (Труды III семинара). - Томск, Томский ун-т, 1978. - С. 55 - 60.

35. Григорьев В.Г. Расчет динамических характеристик сложных оболочечных конструкций с жидкостью. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сборник научных докладов IV симпозиума. - М.: ЦНТИ "Волна", 1980. - С. 102 - 107.

36. Григорьев В.Г. Расчет динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость, при осесимметричных колебаниях. Программа инв. N 0365П: Аннотация. // Справочно-информационный бюллетень ОФАП САПР, вып. 14. ГОНТИ-1, 1981.

37. Григорьев В.Г. Устранение погрешностей при синтезе подконструкций по методу жестких границ и корректирующие ряды в ортогональном подпространстве // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1997. - № 3. - С. 48-54.

38. Григорьев В.Г. О построении матриц при синтезе конструкций по методу жестких границ с использованием корректирующих рядов // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1997. - № 4. - С. 93-99.

39. Григорьев В.Г. О вычислительных аспектах применения корректирующих рядов при синтезе подконструкций по методу свободных границ // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1998. - № 4. - С. 17-27.

40. Григорьев В.Г. Колебания и устойчивость упругих сосудов с жидкостью при действии гравитационного поля. // Материалы V Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред". - М.: Издательство "ГРАФРОС", 1999. - С. 33.

41. Григорьев В.Г. О расчете колебаний упругих оболочек с жидкостью в условиях однородного гравитационного поля. // Механика оболочек и пластин: Сборник докладов XIX Международной конференции по теории оболочек и пластин. - Нижний Новгород: Издательство ННГУ, 1999. - С. 51 - 54.

42. Григорьев В.Г. О вариационных принципах в динамике упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью. // Материалы VI Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. - М.: Издательство “ГРАФРОС”, 2000. - С. 30 - 31.

43. Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Модальный синтез подконструкций с использованием корректирующих последовательностей в исследовании динамики больших космических конструкций. // Крупногабаритные космические конструкции. Тезисы докладов научно-технической конференции. - Севастополь, 1990. - С. 40 - 41.

44. Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Повышение точности динамического синтеза подконструкций в методе жестких границ для дискретных моделей // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1997. - № 2. - С. 108 - 122.

45. Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Использование корректирующих рядов для повышения точности динамического синтеза подконструкций в варианте жестких границ. // Тезисы докладов III Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. - М.: Издательство “ЛАТМЭС” МГАТУ, 1997. - С. 46 - 47.

46. Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Синтез подконструкций методом свободных границ с использованием корректирующих рядов. // Материалы IV Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. - М.: Издательство “ГРАФРОС”, 1998. - С. 100 - 105.

47. Григорьев В.Г., Шмаков В.П. Модальный синтез суперэлементов с применением корректирующих рядов // XVI Международная конференция “Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Методы

граничных и конечных элементов”, 23 - 26 июня 1998 г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов. - СПб., 1998. - Т. 1. - С. 31 - 32.

48. *Григорьев В.Г., Шмаков В.П.* Исследование динамики сложных упругих систем на основе синтеза подконструкций с использованием аналитических и дискретных моделей. // Материалы V Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. - М.: Издательство “ГРАФРОС”, 1999. - С. 33 - 34.

49. *Григорьев Е.Т.* Об устойчивости продольных колебаний оболочки с жидкостью // Прикладная механика. - 1967. - Т. 3. - № 6. - С. 23 -30.

50. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. - М.: Мир, 1984.

51. *Динамика ракет* // Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П. и др. - М.: Машиностроение, 1990. - 464 с.

52. *Дмитриев С.Н.* О частотном критерии в методе синтеза форм колебаний // Динамика систем и конструкций. Труды МГТУ им Н.Э.Баумана № 545. - М: Изд-во МГТУ, 1990. - С. 51 - 69.

53. *Дмитриев С.Н.* Формирование частотного уравнения системы в методе остаточных податливостей // Механика в авиации и космонавтике. - М: Машиностроение, 1995. - С. 65 - 69.

54. *Друзь Б.И., Огай С.А., Хованец В.А.* Применение метода конечных элементов к задаче о колебаниях жидкости в отсеке, закрытом мембраной // Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам. - 1978. - № 36. - С. 147 - 155.

55. *Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г.* Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. - Л.: Судостроение, 1984. - 237 с.

56. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 541 с.



57. *Ивантеев В.И., Чубань В.Д.* Расчет частот и форм свободных колебаний конструкции методом многоуровневой динамической конденсации // Ученые записки ЦАГИ. - 1984. - Т. 15. - № 4. - С. 81 - 82.

58. *Ильгамов М.А.* Об условиях на поверхности контакта упругой оболочки и идеальной жидкости в лагранжевом представлении // Прикладная математика и механика. - 1977. - Т. 41. - № 3. - С. 509 - 519.

59. *Ильгамов М.А.* Введение в нелинейную гидроупругость. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. - 200 с.

60. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. - М.: Издательство МГУ, 1978. - 287 с.

61. *Карцов С.К., Перминов М.Д.* Исследование колебаний сложных конструкций методом синтеза форм колебаний // Колебания сложных упругих систем. - М.: Наука, 1981. - С. 12 - 18.

62. *Кобычкин В.С., Шмаков В.П., Яблоков В.А.* Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1968. - № 5. - С. 46 - 54.

63. *Колесников К.С.* Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. - М.: Машиностроение, 1971. - 260 с.

64. *Колесников К.С.* Динамика ракет. - М.: Машиностроение, 1980. - 376 с.

65. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям - диакоптика. - М.: Наука, 1972. - 544 с.

66. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика, части I, II. - М.: Физматгиз, 1963.

67. *Лампер Р.Е.* К расчету собственных колебаний баков методом Ритца с варьируемым параметром // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. - М.: Наука, 1970. - С. 351 - 354.

68. *Лиходед А.И.* О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1986. - № 1. - С. 180 - 188.

69. *Маневич Л.И., Прокопало Е.Ф., Шукуров А.Х.* Исследование параметрических колебаний оболочки, заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М., 1976. С. 279 - 284.

70. *Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений* // Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. - Л.: Судостроение, 1979. - 288 с.

71. *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. - М.: Машиностроение, 1971. - 463 с.

72. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. - 512 с.

73. *Моисеев Н.Н.* К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости // Прикладная математика и механика. - 1959. - Т. 23. - № 5. - С. 862 - 878.

74. *Мокеев В.В.* Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Известия Академии наук. Механика твердого тела. - 1998. - № 6. - С. 166 - 174.

75. *Натанзон М.С.* Влияние собственной частоты колебаний жидкости в топливоподающем тракте на продольную устойчивость корпуса ракеты // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. - 1969. - № 3. - С. 111 - 118.

76. *Натанзон М.С.* Продольные автоколебания жидкостной ракеты. - М.: Машиностроение, 1977. - 205 с.

77. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. - Л.-М.: Гостехиздат, 1948. - 118 с.

78. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 432 с.

79. *Образцов И.Ф., Вольмир А.С., Терских В.Н.* Метод суперэлементов в динамике сложных структур // Доклады АН СССР. - 1980. - Т. 255. - № 1. - С. 59 - 61.

80. *Образцова Е.И.* Нелинейные параметрические колебания цилиндрической оболочки с жидкостью при продольном возбуждении // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 1976. - № 6. - С. 87 - 93.

81. *Образцова Е.И., Шклярчук Ф.Н.* Нелинейные параметрические колебания цилиндрического бака с жидкостью // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1979. - № 4. - С. 133 - 145.

82. *Павловский В.С.* Устойчивость цилиндрической оболочки с жидкостью при продольных вибрационных воздействиях. // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. - Томск, Томский ун-т, 1975. - С. 77 - 84.

83. *Павловский В.С., Филин В.Г.* Параметрическая неустойчивость цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // Прикладная механика. - 1975. - Т. 11. - № 6. - С. 72 - 81.

84. *Павловский В.С., Филин В.Г.* Устойчивость колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью в условиях нелинейных резонансов // Прикладная механика. - 1979. - Т. 15. - № 8. - С. 46 - 55.

85. *Пановко О.Я., Постнов В.А.* Использование метода подструктур для определения собственных чисел в задачах колебаний и устойчивости упругих конструкций // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. - М.: Машиностроение, 1984. - С. 172 - 184.

86. *Перминов М.Д., Петров В.Д.* Исследование вынужденных колебаний сложных систем методом расчленений // Динамика и прочность упругих и гидроупругих систем. - М.: Наука, 1975. - С. 9 - 12.

87. *Пилипенко В.В., Задонцев А.П., Григорьев Ю.Е., Белецкий А.С.* Оценка амплитуд продольных колебаний ракет-носителей космических аппаратов // Механика в авиации и космонавтике. - М., 1995. - С. 27 - 34.

88. *Пилипенко В.В., Задонцев А.П., Натанзон М.С.* Кавитационные автоколебания и вопросы динамики гидросистем. - М.: Машиностроение, 1977. - 352 с.

89. *Постнов В.А., Москалев А.Н.* О применении метода подструктур для определения и разделения корней частотного уравнения консервативных систем // Прикладная механика. - 1979. - Т. 15. - № 3. - С. 94 - 96.

90. *Постнов В.А., Тарануха Н.А.* Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1990. - 318 с.

91. *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1975. - 416 с.

92. *Рабинович Б.И.* Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности // Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. - 1959. - № 4. - С. 63 - 68.

93. *Рабинович Б.И., Шмаков В.П., Кобычкин В.С.* К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью. // Исследования по теории сооружений. Вып. 18. - М.: Стройиздат, 1970. - С. 68 - 84.

94. *Рапопорт И.М.* Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. - М.: Машиностроение, 1966. - 393 с.

95. *Самойлов Е.А., Павлов Б.С.* Колебания полусферической оболочки, заполненной жидкостью // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. - 1964. - № 3.

96. *Сахабутдинов Ж.М.* Нелинейные задачи гидроупругости в лагранжевых координатах // Труды семинара по теории оболочек. - Вып. 2. - Казань: Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1971. - С. 165 - 187.

97. *Сидельников Р.В., Ямчук В.В.* Расчет колебаний осесимметричных конструкций с жидкостью методом конечных элементов // Сборник научных трудов Челябинского политехнического института. - 1979. - № 227. - С. 24 - 29.

98. *Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций* // Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. - М.: Машиностроение, 1975.

99. *Шклярчук Ф.Н.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при продольных колебаниях. // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, 1969. - М.: Наука, 1970. - С. 619 - 624.

100. *Шклярчук Ф.Н.* О параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при продольном возбуждении. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. - Новосибирск, Новосибирский электротехнический институт, 1973. - С. 314 - 329.

101. *Шклярчук Ф.Н.* Динамика конструкций летательных аппаратов. - М.: МАИ, 1983. - 79 с.

102. *Шмаков В.П.* Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. - 1964. - № 1. - С. 170 - 173.

103. *Шмаков В.П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова-Галеркина // Известия АН СССР. Механика твердого тела. - 1981. - № 2. - С. 80 - 92.

104. *Шмаков В.П.* Метод синтеза динамических характеристик упругих модульных конструкций // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1991. - № 1. - С. 4 - 10.

105. *Шмаков В.П.* Аппроксимация гармонического отклика упругой конечно-мерной системы в зависимости от частотного диапазона внешнего воздействия // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 1995. - № 2. - С. 96 - 110.

106. *Шмаков В.П., Григорьев В.Г.* О новых подходах к решению задач динамики крупногабаритных модульных космических конструкций. // Международная конференция "Научно-технические проблемы космонавтики и раке-

тостроения”. Тезисы и аннотации докладов. - Г. Калининград Московской области, ЦНИИмаш, 1996. - С. 252.

107. *Шмаков В.П., Григорьев В.Г.* Синтез динамических характеристик аналитических и дискретных моделей подконструкций с использованием корректирующих рядов // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. - 2000. - <sup>1</sup> 2. - С. 5 - 19.

108. *Aganovic I.* Oscillations of an elastic body with cavities partially filled with liquid // Glasnik Matematicki. - 1974. - V. 9 (29). - No. 1 - P. 161 - 171.

109. *Aganovic I.* On a spectral problem of hydroelasticity // Journal de Мйcanique. - 1981. - V. 20. - No. 3. - P. 409 - 414.

110. *Akkas N., Akay H.U., Yilmaz C.* Applicability of general-purpose finite element programs in solid-fluid interaction problems // Computers and Structures. - 1979. - V. 10. - No. 5. - P. 773 - 783.

111. *Akkas N., Yilmaz C.* Dynamics of elastic structures in acoustic media using general purpose finite element programs // Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar. - 1978. - V. 25. - No. 1. - P. 4 - 6.

112. *Ando A.* Vibration analysis of submerged structure by finite element method // Japan Shipbuilding and Marine Engineering. - 1978. - V. 12. - No. 3. - P. 5 - 10.

113. *Arora J.S., Nguyen D.T.* Eigensolution for large structural systems with substructures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1980. - V. 15. - No. 3. - P. 333 - 341.

114. *Balmüs E.* Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition // AIAA Journal. - 1996. - V. 34. - No. 6. - P. 1256 - 1260.

115. *Bamford R., Wada B.K., Garba J.A., Chisholm J.* Dynamic analysis of large structural systems // Synthesis of Vibrating Systems. / Ed. Neubert V.H., Raney J.P. - New York: ASME, 1971. - P. 57 - 71.

116. *Benfield W.A., Hruda R.F.* Vibration analysis of structures by component mode substitution // *AIAA Journal*. - 1971. - V. 9. - No. 7. - P. 1255 - 1261.

117. *Bennighof J.K.* Component mode iteration for frequency calculations // *AIAA Journal*. - 1987. - V. 25. - No. 7. - P. 996 - 1002.

118. *Berger H., Boujot J., Ohayon R.* On a spectral problem in vibration mechanics: computation of elastic tanks partially filled with liquids // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. - 1975. - V. 51. - No. 2. - P. 272 - 298.

119. *Berger H., Chaquin J.P., Morand H., Ohayon R.* Nouveaux développements sur les méthodes de calcul des vibrations d'un système évolutif couplé fluid-structure: application au lanceur Ariane. // *Int. Symp. Innovative Numer. Anal. Appl. Eng. Sci., Versailles, 1977. - S.l., 1977. - P. 5/17 - 5/21.*

120. *Berger H., Ohayon R.* Une méthode de calcul par éléments finis des mouvements de liquides dans des réservoirs rigides ou déformables. // *Bulletin de Association technique maritime et aeronautique*. - 1974. - No. 74. - P. 241 - 253.

121. *Boujot J.* Sur l'analyse des caractéristiques vibratoires d'un liquide contenu dans réservoir. // *Journal de mechanique*. - 1972. - V. 11. - No. 4. - P. 649 - 671.

122. *Boujot J.* Mathematical formulation of fluid-structure interaction problems // *M<sup>2</sup>AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. - 1987. - V. 21. - No. 2. - P. 239 - 260.

123. *Chung T.J., Rush R.H.* Dynamically coupled motion of surface-fluid-shell system. // *Transactions ASME. Ser. E. Journal of Applied Mechanics*. - 1976. - V. 43. - No. 3. - P. 507 - 508.

124. *Cook R.D.* Comment on "Discrete element idealization of an incompressible liquid for vibration analysis" and "Discrete element structural theory of fluids" by D.A.Hunt // *AIAA Journal*. - 1973. - V. 11. - No. 5. - P. 766 - 767.

125. *Coppolino R.* A numerically efficient finite element hydroelastic analysis. // *Proc. AIAA/ASME/SAE 17th Structures, Structural Dynamics and Materials*

Conference, King of Prussia, Pennsylvania, May 5-7, 1976. - S.I., 1976. - P. 298 - 312.

126. *Craig R.R.* Substructure coupling for dynamic analysis // Advances in Civil Engineering Through Engineering Mechanics. Proc. Second Annual Eng. Mechanics Division Specialty Conference, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, USA. May 23-25, 1977. - New York: ASCE, 1977. - P. 389 - 392.

127. *Craig R.R.* Methods of component mode synthesis // The Shock and Vibration Digest. - 1977. - V. 9. - No. 11. - P. 3 - 10.

128. *Craig R.R.Jr., Bampton M.C.C.* Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA Journal. - 1968. - V. 6. - No. 7. - P. 1313 - 1319.

129. *Craig R.R.Jr., Chang C.-J.* Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. - 1976. - V. 14. - No. 11. - P. 1633 - 1635.

130. *Craig R.R.Jr., Chang C.-J.* A review of substructure coupling methods for dynamic analysis // Advances in Engineering Science, V. 2, NASA CP-2001, 1976. - P. 393 - 408.

131. *Curnier A.* On three modal synthesis variants // Journal of Sound and Vibration. - 1983. - V. 90. - No. 4. - P. 527 - 540.

132. *Dowell E.H.* Free vibration of an arbitrary structure in terms of component modes // Transactions ASME. Ser. E. Journal of Applied Mechanics. - 1972. - V. 39. - No. 3. - P. 727 - 732.

133. *Dubois J.J., De Rouvray A.L.* An improved fluid superelement for the coupled solid-fluid-surface wave dynamic interaction problem // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. - 1978. - V. 6. - No. 3. - P. 235 - 245.

134. *Felippa C.A., Ohayon R.* Mixed variational formulation on finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction // Journal of Fluids and Structures. - 1990. - V. 4. - No. 1. - P. 35 - 57.

135. *Gladwell G.M.* Branch mode analysis of vibrating systems // Journal of Sound and Vibration. - 1964. - V. 1. - No. 1. - P. 41 - 59.



136. *Goldman R.L.* Vibration analysis by dynamic partitioning // *AIAA Journal*. - 1969. - V. 7. - No. 6. - P. 1152 - 1154.

137. *Gupta K.K.* Eigenproblem solution by a combined Sturm sequence and inverse iteration technique // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. - 1973. - V. 7. - No. 1. - P. 17 - 42.

138. *Gupta K.K.* Free vibration analysis of coupled fluid-structure systems // *Finite Element Flow Analysis. Proceedings of the 4th International Symposium Finite Element Methods in Flow Problems*, Tokyo, July 26-29, 1982. - Tokyo: University of Tokyo Press, 1982. - P. 797 - 802.

139. *Guyan R.J.* Reduction of stiffness and mass matrices // *AIAA Journal*. - 1965. - V. 3. - No. 2. - P. 380.

140. *Hale A.L., Meirovitch L.* A general substructure synthesis method for the dynamic simulation of complex structures // *Journal of Sound and Vibration*. - 1980. - V. 69. - No. 2. - P. 309 - 326.

141. *Hale A.L., Meirovitch L.* A procedure for improving discrete substructure representation in dynamic synthesis // *AIAA Journal*. - 1982. - V. 20. - No. 8. - P. 1128 - 1136.

142. *Hale A.L., Meirovitch L.* A general procedure for improving substructure representation in dynamic synthesis // *Journal of Sound and Vibration*. - 1982. - V. 84. - No. 2. - P. 269 - 287.

143. *Hamdi M.A., Ousset Y., Verchery G.* A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. - 1978. - V. 13. - No. 1. - P. 139 - 150.

144. *Hasselman T.K., Kaplan A.* Dynamic analysis of large systems by complex mode synthesis // *Transactions ASME. Ser. G. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. - 1974. - V. 96. - No. 3. - P. 327 - 333.

145. *Hintz R.M.* Analytical methods in component modal synthesis // *AIAA Journal*. - 1975. - V. 13. - No. 8. - P. 1007 - 1016.

146. *Hou S.N.* Review of modal synthesis techniques and a new approach // The Shock and Vibration Bulletin. - 1969. - No. 40, Pt. 4. - P. 25 - 39.

147. *Hunt D.A.* Discrete element idealization of an incompressible liquid for vibration analysis // AIAA Journal. - 1970. - V. 8. - No. 6. - P. 1001 - 1004.

148. *Hunt D.A.* Discrete element structural theory of fluids // AIAA Journal. - 1971. - V. 9. - No. 3. - P. 457 - 461.

149. *Hurty W.C.* Dynamic analysis of structural systems using component modes // AIAA Journal. - 1965. - V. 3. - No. 4. - P. 678 - 685.

150. *Hurty W.C.* Introduction to modal synthesis techniques // Synthesis of Vibrating Systems. / Ed. Neubert V.H., Raney J.P. - New York: ASME, 1971. - P. 1 - 13.

151. *Hurty W.C., Collins J.D., Hart G.C.* Dynamic analysis of large structures by modal synthesis techniques // Computers and Structures. - 1971. - V. 1. - No. 4. - P. 535 - 563.

152. *Ichikawa T., Hagiwara I.* Frequency response analysis of large-scale damped structures using component mode synthesis // JSME International Journal. Ser. C. - 1996. - V. 39. - No. 3. - P. 450 - 455.

153. *Irons B.* Structural eigenvalue problems: elimination of unwanted variables // AIAA Journal. - 1965. - V. 3. - No. 5. - P. 961 - 962.

154. *Irretier H.* A modal synthesis method with free interfaces and residual flexibility matrices for frame structures // Stavebnicky nasopis. - 1989. - V. 37. - No. 9. - P. 601 - 610.

155. *Jezequel L., Seito H.D.* Component modal synthesis methods based on hybrid models. Part I. Theory of hybrid models and modal truncation methods // Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics. - 1994. - V. 61. - No. 1. - P. 100 - 108.

156. *Jezequel L., Seito H.D.* Component modal synthesis methods based on hybrid models. Part II. Numerical tests and experimental identification of hybrid

models // Transactions ASME. Journal of Applied Mechanics. - 1994. - V. 61. - No. 1. - P. 109 - 116.

157. *Jordan P.F.* Vibration tests of a pressurized torus shell // AIAA Paper. - 1967. - No. 73.

158. *Kana D.D., Craig R.R., Jr.* Parametric oscillations of a longitudinally excited cylindrical shell containing liquid // Journal of Spacecraft and Rockets. - 1968. - V. 5. - No. 1. - P. 13 - 21.

159. *Kaneko I., Lawo M., Thierauf G.* On computational procedures for the force method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1982. - V. 18. - No. 10. - P. 1469-1495.

160. *Khabbaz G.R.* Dynamic behavior of liquids in elastic tanks // AIAA Journal. - 1971. - V. 9. - No. 10. - P. 1985 - 1990.

161. *Kiefling L., Feng G.C.* Fluid-structure finite element vibrational analysis // AIAA Journal. - 1976. - V. 14. - No. 2. - P. 199 - 203.

162. *Kubomura K.* A theory of substructure modal synthesis // Transactions ASME. Ser. E. Journal of Applied Mechanics. - 1982. - V. 49. - No. 4. - P. 903 - 908.

163. *Kuhar E.J., Stahle C.V.* Dynamic transformation method for modal synthesis // AIAA Journal. - 1974. - V. 12. - No. 5. - P. 672 - 678.

164. *Leung Y.T.* An accurate method of dynamic substructuring with simplified computation // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1979. - V. 14. - No. 8. - P. 1241 - 1256.

165. *Leung A.Y.T.* Damped dynamic substructures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1988. - V. 26. - No. 11. - P. 2355 - 2365.

166. *Linz P.* Linear multistep methods for Volterra integro-differential equations // Journal of the ACM. - 1969. - V. 16. - No. 2. - P. 295 - 301.

167. *Lu X.* Simplified dynamic condensation in multy-substructure systems // Computers and Structures. - 1988. - V. 30. - No. 4. - P. 851 - 854.

168. *MacNeal R.H.* A hybrid method of component mode synthesis // Computers and Structures. - 1971. - V. 1. - No. 4. - P. 581 - 601.
169. *Meirovitch L., Hale A.L.* On the substructure synthesis method // AIAA Journal. - 1981. - V. 19. - No. 7. - P. 940 - 947.
170. *Morand H., Ohayon R.* Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid-structure systems. Finite element results // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1979. - V. 14. - No. 5. - P. 741-755.
171. *Morosow G., Abbott P.* Mode selection // Synthesis of Vibrating Systems. / Ed. Neubert V.H., Raney J.P. - New York: ASME, 1971. - P. 72 - 77.
172. *Ohayon R.* Fluid-structure modal analysis. New symmetric continuum-based formulations. Finite element applications // Proc. Int. Conf. Numer. Meth. Eng.: Theory and Appl., Swansea, 6-10 July, 1987: NUMETA'87. Vol. 2. - Dodrecht etc., 1987. - P. T46/1 - T46/8.
173. *Ohayon R., Felippa C.A.* The effect of wall motions on the governing equations of contained fluids // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. - 1990. - V. 57. - No. 3. - P. 783 - 785.
174. *Ohayon R., Sampaio R., Soize C.* Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. - 1997. - V. 64. - No. 2. - P. 292 - 298.
175. *Ohayon R., Valid R.* True symmetric formulations of free vibrations of fluid-structure interaction - Applications and extensions // Numerical Methods for Coupled Problems: Proceedings of the International Conference, Swansea, 7-11 September, 1981. - Swansea, U.K.: Pineridge Press, 1981. - P. 335 - 345.
176. *Ohayon R., Valid R.* True symmetric variational formulations for fluid-structure interaction in bounded domains - Finite elements results // Numerical Methods in Coupled Systems. - Chichester e.a.: John Wiley & Sons, 1984. - P. 293 - 325.

177. *Pinson L.D., Brown C.G.* A finite element method for nonaxisymmetric vibrations of pressurized shells of revolution partially filled with liquid // AIAA Paper. - 1973. - No. 399.

178. *Radovich N.A.* Analytical model for missile axial oscillation caused by engine-structure coupling // AIAA Publication, CP-12. - 1965. - P. 68 - 75.

179. *Radwan H., Genin J.* Non-linear modal equations for thin elastic shells // International Journal of Non-linear Mechanics. - 1975. - V. 10, - No. 1. - P. 15 - 29.

180. *Rubin S.* Longitudinal instability of liquid rockets due to propulsion feedback (POGO) // Journal of Spacecraft and Rockets. - 1966. - V. 3. - No. 8. - P. 1188 - 1195.

181. *Rubin S.* Improved component-mode representation for structural dynamic analysis // AIAA Journal. - 1975. - V. 13. - No. 8. - P. 995 - 1006.

182. *Shmakov V.P., Grigoriev V.G.* Effective synthesis of dynamic model of complex elastic structure for problems of control // Multiple criteria and game problems under uncertainty. Abstracts. The Fourth International Workshop (8-14 September, 1996). - Moscow, 1996. - P. 107.

183. *Simpson A.* The Kron methodology and practical algorithm for the eigenvalue, sensitivity and response analyses of large scale structural systems // Aeronautical Journal. - 1980. - V. 84. - No. 839. - P. 417 - 433.

184. *Spyrakos C.C., Beskos D.E.* Dynamic response of frameworks by fast Fourier transform // Computers and Structures. - 1982. - V. 15. - No. 5. - P. 495 - 505.

185. *Turner G.L., Milsted M.G., Hanks P.* The adaptation of Kron's method for use with large finite-element models // Transactions ASME. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. - 1986. - V. 108. - No. 4. - P. 405 - 410.

186. UAI/NASTRAN 11.8. User's Guide. - Torrance, California USA: Universal Analytics, Inc., 1995.

187. *Ujihara B.H., Guyan R.J.* Hydroelastic properties of a full scale S-II LOX tank // AIAA Paper. - 1972. - No. 173.

188. *Valid R., Ohayon R., Berger H.* Le calcul des r servoirs  lastiques partiellement remplis de liquides, pour la prévision de l'effet pogo // Recherche A rospatiale. - 1974. - No. 6. - P. 367 - 379.

189. *Welch P.W., Ujihara B.H.* Zero-g mercury dynamics analysis // AIAA Paper. - 1973. - No. 1121.

190. *Wick R.S.* The effect of vehicle structure on propulsion system dynamics and stability // Jet Propulsion. - 1956. - V. 26. - No. 10 (part 1). - P. 878 - 887.

191. *Yu I.-W.* Solution of large unsymmetric eigensystems for fluid/structure interaction problems // Nuclear Science and Engineering. - 1986. - V. 92. - No. 1. - P. 157 - 161.

192. *Yu I.-W.* Subspace iteration for eigensolution of fluid-structure interaction problems // Transactions of the ASME. Journal of Pressure Vessels Technol. - 1987. - V. 109. - No. 2. - P. 244 - 248.

193. *Zienkiewicz O.C., Bettles P.* Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1978. - V. 13. - No. 1. - P. 1 - 16.