

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО

На правах рукописи

Иванов Михаил Игоревич

**ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНЫХ
ОБЛАСТЯХ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор С.В. Нестеров

Москва – 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Сейши в плоских бассейнах. Основные уравнения и точные решения	
1. Основные уравнения задачи.....	14
2. Точные решения	17
Глава 2. Исследование сейшевых колебаний в бассейнах различной формы	
1. Построение численного алгоритма.....	23
2. Конформное отображение. Бассейны.....	26
3. Классификация мод невращающихся бассейнов. Расщепление собственных частот.....	29
4. Влияние геометрии бассейна на собственные частоты.....	31
5. Характерные моды невращающихся бассейнов	33
6. Вращение.....	45
7. Разложение волнового поля вблизи амфидромической точки	48
Глава 3. Приливное уравнение Лапласа, волны Гаурвица и формула Хафа	
1. Вывод приливного уравнения Лапласа.....	56
2. Волны Гаурвица.....	58
3. Формула Хафа	59
Глава 4. Интегрирование приливного уравнения Лапласа. Функции Хафа	
1. Интегрирование задачи на собственные значения.....	64
2. Частоты и моды для небольших гироскопических чисел	66
3. Волны для больших гироскопических чисел	76
4. Отрицательные гироскопические числа	89
Заключение.....	101
Литература.....	102

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность проблемы. Анализ метеорологических, океанологических и пр. данных показывает, что главенствующую роль в крупномасштабных процессах в атмосфере и гидросфере играют периодические процессы, важнейшим классом которых являются собственные колебания. Исследование таких колебаний представляет значительную сложность в связи как с большим числом воздействующих факторов (сила тяжести, центробежная и кориолисовы силы, сферическая геометрия Земли или исследуемой планеты и др.), так и с непотенциальностью изучаемых течений. В связи с этим посвящённые данной теме работы хотя и многочисленны, но большей частью фрагментарны, а некоторые важные вопросы и вовсе не освещены. Необходимо также отметить, что с исследуемыми задачами тесно связана задача об океанских и атмосферных приливах, имеющая многочисленные приложения в геофизике, метеорологии, океанологии и т.д.

Первая часть диссертации (гл. 1-2) посвящена решению задачи о собственных гармонических колебаниях поверхности жидкости, заключённой в плоском бассейне (т.е. таком, в котором поверхность невозмущённой жидкости имеет нулевую кривизну). Изучение таких колебаний привлекало внимание многих исследователей в связи с задачей о сейшах в озёрах и внутренних морях, а также задачей о приливах. В зависимости от периода сейши производится учёт или неучёт вращения Земли. Для простейших форм бассейнов (круг, круговое кольцо) имеется аналитическое решение [25, 31, 32, 34]. Решение выражается через цилиндрические функции. Для эллиптического бассейна точное решение существует только при отсутствии вращения [2, 26, 31, 32, 49, 50, 64-66]. Решение даётся функциями Матье. Сейши в эллиптических бассейнах при наличии вращения исследовались в [51, 52], причём проводилось сравнение аналитических результатов с экспериментальными, полученными автором ста-

ты в лаборатории Л. Прандтля в Гёттингене. Также исследовались прямоугольные [40, 47, 55, 58, 95, 98] и полукруглые бассейны [45, 97]. Некоторые работы были посвящены исследованию сейш в бассейнах, имеющих форму правильного n -угольника [102] или кругового сектора [95]. Праудменом были исследованы сейши в почти круглом бассейне [96].

Значительное число работ посвящено численному исследованию сейш и приливных волн в реальных акваториях, таких как озеро Байкал [54], Красное море [53], Чёрное море [97], Мексиканский залив [92], Великие озёра в Северной Америке [56, 92, 94, 99, 100], Каспийское море [27] и др.

Отдельно следует выделить исследования, касающиеся особенностей гармонического волнового течения, не зависящего от формы контура бассейна. В литературе были рассмотрены амфидромические точки [87] (точки нулевой амплитуды гармонических колебаний) и фазовые седла [89]. Исследованию спектра задачи о сейшах с позиции теории дифференциальных уравнений в частных производных была посвящена работа Рохлина [28].

Также изучались бассейны непостоянной глубины. Были получены решения для бассейна, имеющего форму параболической чаши (параболоида вращения) [25], полукруглого бассейна с таким же законом изменения глубины (половина параболоида вращения) [45] и эллиптического параболоида [37, 38, 63]. В случае, когда глубина бассейна не является постоянной, в нём существуют гармонические колебания с периодом большим, чем период вращения самого бассейна, называемые топографическими волнами Россби.

Из приведённого обзора можно видеть, что в настоящее время в гидродинамике имеется разрыв между бассейнами простой конфигурации (круговой, кольцеобразный, прямоугольный) и бассейнами, аппроксимирующими реальные асимметричные акватории с их сложной береговой линией.

Вторая часть диссертации (гл. 3-4) посвящена решению приливного уравнения Лапласа. В 1775 году при исследовании динамических приливов Лаплас получил дифференциальное уравнение, описывающее собственные гармонические колебания тонкого слоя жидкости, покрывающего вращающийся шар, в

настоящее время носящее его имя. Выведенное для океана постоянной глубины, это уравнение, однако, применимо к более широкому классу задач, в частности, к нему сводятся задача метеорологии о приливах в атмосфере Земли [1, 15, 24, 30, 91, 105, 106, 111, 113] или исследование колебаний вращающихся звёзд [39, 41, 74, 75, 107].

Вид и поведение решений приливного уравнения Лапласа зависят от величины безразмерного параметра $\beta = 4\omega^2 a^2 / gh$ (названного в диссертации гироскопическим числом), где ω – угловая скорость вращения шара, a – его радиус, g – ускорение свободного падения, h – глубина океана. В случае исследования вынужденных колебаний или колебаний атмосферы гироскопическое число является неизвестным и определяет значение h , которое в этом случае называется эквивалентной глубиной и не обязательно равно действительной глубине океана или атмосферы.

Приливное уравнение Лапласа представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с сингулярными коэффициентами. С их наличием и связана основная сложность задачи. В XIX веке наибольшего продвижения в решении задачи достигли Маргулес [84-86] и Хаф [61, 62]. Маргулес искал решения в виде разложения по тригонометрическим функциям, Хаф – в виде разложения по присоединённым сферическим функциям. Этими исследователями было установлено, что приливное уравнение Лапласа имеет решения двух родов. К первому роду были отнесены короткопериодические колебания, ко второму роду были отнесены долгопериодные колебания, переходящие в пределе в установившиеся течения на неподвижном шаре. Эти течения аналитически получены Гаурвицем [57] (а позднее – Нимтэном [88]) и называются волнами Гаурвица. Колебания первого рода в пределе $\beta \rightarrow 0$ исчезают. Колебания первого рода могут распространяться как по направлению вращения планеты, так и против; колебания второго рода распространяются только против направления вращения планеты. Хафом была выведена формула для приближённого вычисления собственных частот [62]. Сравнение приближённых частот с частотами,

вычисленными более точными методами, показывает очень высокую точность формулы Хафа при β порядка единицы-двух, что соответствует условиям Земли как при исследовании океана, так и атмосферы в баротропном приближении.

Колебаниям второго рода отвечают медленные волны, движущиеся против направления вращения планеты с периодами больше суток. Первоначально их существование было выявлено лишь математически. Однако в 1939 году Россби с сотрудниками при анализе метеорологических данных установил существование в атмосфере Земли крупномасштабных медленно перемещающихся областей высокого и низкого давления, названных им центрами действия атмосферы и дал простейшую теорию этого явления в предположении нулевой кривизны земной поверхности [101]. Гаурвиц рассмотрел более реалистичную модель сферической Земли и обнаружил, что эти волны представляют собой колебания второго рода приливного уравнения Лапласа [57]. Они получили название планетарных волн или волн Россби. Эти волны в некотором роде аналогичны топографическим волнам Россби, о которых говорилось выше.

В дальнейшем исследованию собственных функций приливного уравнения Лапласа (получившим название функций Хафа) было посвящено значительное число работ. Чаще всего использовался метод Хафа разложения искомого решения по присоединённым сферическим функциям [9-12, 15, 24, 35, 48, 76, 104]. Отдельные решения приливного уравнения Лапласа можно найти в многочисленных работах, посвящённых решению тех или иных метеорологических задач [67-73, 78-80, 103, 109-112].

Исследовались также колебания в зональном океане (океане, ограниченном кругами широты) [3, 43], полярном океане (океане, покрывающем один из полюсов и ограниченном кругом широты) [42], океане, ограниченном двумя меридианами [44, 46, 90]. Первая задача не представляет математической трудности, т.к. здесь приливное уравнение Лапласа не имеет особенностей. Голдсброу была подробно исследована задача о полусуточных колебаниях в

океане, изменение глубины которого меняется по закону $h = h_0 \sin^2 \theta$, где θ - коширота [44].

В [29] изучались эффекты, вызванные вязкостью покрывающей шар жидкости, и дана оценка момента сил приливного трения.

Математические сложности, связанные с тем, что на полюсах сферы коэффициенты приливного уравнения Лапласа становятся сингулярными, привели к возникновению приближения β -плоскости, смысл которого заключается в замене криволинейной геометрии сферы плоской с одновременной линеаризацией параметра Кориолиса. Приближению β -плоскости посвящена обширная литература [77, 79, 81, 82, 103, 108, 114].

В [59, 60, 93] приливное уравнение Лапласа рассматривалось как одно из уравнений математической физики и были подвергнуты исследованию такие свойства его решений, как ортогональность и полнота.

Пожалуй, наиболее подробные исследования были проведены Лонге-Хиггинсом [83], а также Шварцтраубером и Касахарой [104]. Лонге-Хиггинс [83] использовал для интегрирования приливного уравнения Лапласа как метод Хафа (разложение по сферическим гармоникам), так и метод Маргулеса (разложение по тригонометрическим функциям) и вычислил функции Хафа для широкого диапазона гироскопических чисел (в том числе и для отрицательных). Однако, в силу сложности задачи, во многих случаях автору пришлось ограничиться построением асимптотических форм. Другое асимптотическое исследование было проведено Диким [13, 14], который независимо исследовал случай больших положительных и отрицательных гироскопических чисел, но получил значительно менее полные результаты, чем Лонге-Хиггинс. В работе Шварцтраубера и Касахары [104] построены обширные таблицы частот функций Хафа для различных положительных гироскопических чисел вплоть до 10^5 . Аналогичных вычислений для отрицательных гироскопических чисел не проводилось.

Особые точки приливного уравнения Лапласа регулярны и поэтому к нему может быть применена теория Фукса. Это было сделано в [36, 39, 75]. Одна-

ко полное решение задачи не было получено – в [36] автор ограничился только аналитическим исследованием некоторых свойств функций Хафа, а авторы [39, 75] получили лишь решения, интересные им с точки зрения астрофизики, к тому же предложенный ими метод отличается громоздкостью и приводит к появлению большого числа искусственно введённых свободных неизвестных, что весьма затрудняет сходимость к истинному решению.

Можно видеть, что полное решение приливного уравнения Лапласа до сих пор не получено. В частности, неясен вопрос о пределах применимости асимптотик, предложенных Диким и Лонге-Хиггинсом. Кроме того, остаётся неизвестным характер изменения формы мод (и числа их нулей) при изменении частоты. Краевая задача для приливного уравнения Лапласа (при заданном гироскопическом числе) представляет собой обобщённую задачу Штурма-Лиувилля, квадрат искомой собственной частоты входит в коэффициенты уравнения нелинейным образом. В связи с этим изменение числа нулей функций Хафа при изменении частоты не сводится к обычному для линейных задач Штурма-Лиувилля увеличению числа нулей на единицу при переходе к следующей по номеру моде и в спектре могут присутствовать различные моды с явно различными частотами, имеющие одно и то же азимутальное волновое число.

В соответствии с изложенным сформулируем цель работы.

Целью работы является исследование свободных гармонических колебаний в бассейнах сложной формы и установление зависимостей между конфигурацией бассейна и характером волнового движения в нём, а также исследование решений приливного уравнения Лапласа на всей сфере для широкого диапазона гироскопических чисел (в особенности – отрицательных). Одной из целей диссертации являлось сравнение полученных численных решений с известными из литературы асимптотиками с целью определения диапазона их применимости, а также исследование влияния определяющих параметров приливного уравнения Лапласа – гироскопического числа, собственной частоты, широтного и азимутального волнового числа – на вид соответствующих мод.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 114 наименований.

В первой главе выводятся уравнения, описывающие распространение гармонических гравитационных поверхностных волн в плоских бассейнах, т.е. таких, где в отсутствие возмущающих сил поверхность жидкости имеет нулевую кривизну. Данное приближение оправдано при рассмотрении столь крупных бассейнов, как, например, Чёрное море. Жидкость считается идеальной, нелинейными членами пренебрегаем. Поток жидкости через границу бассейна полагаем нулевым. Исследование проводится в приближении теории мелкой воды, изучаемые волны считаются пологими. На жидкость действуют сила тяжести (при этом ускорение свободного падения считается постоянным ввиду малой толщины гидросферы Земли), центробежная сила и сила Кориолиса. Кориолисово ускорение полагаем постоянным, что отвечает случаю сравнительно не крупных бассейнов (единицы градусов), расположенных вне высоких широт. В такой постановке задача моделирует распространение сейш в замкнутых бассейнах. В ряде случаев простой геометрии бассейна задача допускает точные решения, приведённые автором. Вводятся числа подобия. К главе прилагаются таблицы, содержащие вычисленные автором частоты и моды для кольцеобразных бассейнов с различным отношением радиусов внутреннего и внешнего колец.

Во второй главе строится метод интегрирования задачи о сейшах в плоских бассейнах постоянной глубины, являющийся модификацией метода Бабенко. Бассейн должен допускать конформное отображение на круг. Чтобы оценить качество метода, рассматриваются задачи, имеющие точное решение, которое сравнивается с численным. Далее строятся конформные отображения для бассейнов сложной формы и изучаются сейшевые колебания как в случае невращающихся, так и в случае вращающихся бассейнов. Показано, что характер волнового движения зависит главным образом от числа осей симметрии бассейна. Установлено существование сильно асимметричных мод в невращающихся бассейнах, возникающих при особом соотношении между числом

осей симметрии бассейна и числом осей симметрии кругового прообраза моды. Исследовано свойство расщепления собственных частот. Выявлены и другие эффекты, связанные с геометрией бассейна.

В третьей главе ставится задача о собственных гармонических колебаниях тонкого слоя жидкости, покрывающей вращающийся шар, и выводится приливное уравнение Лапласа. Рассмотрен частный случай нулевой эквивалентной глубины, для которого приливное уравнение Лапласа допускает точные решения – волны Гаурвица. На основании формулы Хафа рассмотрено качественное поведение собственных частот.

В четвёртой главе строится метод численного интегрирования приливного уравнения Лапласа, использующий свойства рядов Фукса голоморфного решения. С помощью метода получены неосесимметричные решения приливного уравнения Лапласа для различных значений определяющих параметров в широком диапазоне и исследованы их свойства. Для найденных решений (носящих название функций Хафа) разработана система классификации. Исследован характер влияния различных определяющих параметров (гироскопического числа, собственной частоты, широтного и азимутального чисел) на функции Хафа. Проведено сравнение численных результатов с асимптотическими формулами.

В диссертации принят следующий способ нумерации формул: внутри одной главы формулы нумеруются двумя числами, первое из которых представляет номер параграфа, а второе – номер формулы в параграфе. Если делается ссылка на формулу из другой главы, то спереди добавляется ещё одно число, соответствующее номеру главы. Нумерация таблиц и фигур – сквозная.

Все числовые данные, приведённые в таблицах, округлены; численные расчёты были проведены с более высокой точностью, доходившей (при исследовании функций Хафа отрицательных гироскопических чисел) до 15 значащих цифр.

Научная новизна.

1. Для задачи с косой производной модифицирован метод численного интегрирования Бабенко.

2. Исследованы сейшевые колебания в односвязных бассейнах с двумя, тремя и четырьмя осями симметрии (вращающихся и невращающихся), а также в кольцеобразном бассейне. Установлен характер влияния числа осей симметрии бассейна, площади и контура береговой линии на собственные частоты и характер волнового движения в бассейне.

3. Разработан метод численного интегрирования приливного уравнения Лапласа.

4. Получены неосесимметричные гармоники приливного уравнения Лапласа (функции Хафа) и изучены их свойства при различных значениях определяющих параметров. Задача решена как для положительных, так и для отрицательных гироскопических чисел. Предложена классификация функций Хафа в обоих случаях, основанная на универсальном (для гироскопических чисел одного и того же знака) характере следования мод при изменении собственной частоты.

5. Получены частоты и моды (функции Хафа) в широком диапазоне изменения эквивалентной глубины. Проверены известные в литературе асимптотические формулы. Сделаны выводы о диапазоне их применимости.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались

- на семинаре ИПМех РАН «Проблемы механики сплошной среды» (руководители – проф. С.В. Нестеров и проф. Д.В. Георгиевский)
- на семинаре лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций (руководитель – проф. Р.В. Гольдштейн)
- на семинаре кафедры механики композитов МГУ им. М.В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» (руководители – проф. Д.В. Георгиевский и проф. М.В. Шамолин)
- на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель – член-корр. РАН И.А. Шишмарев)

- на Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию со дня рождения Л.И. Седова (Москва, 2007)

Публикации. Основное содержание диссертации изложено в шести публикациях автора (из них четыре – в реферируемых журналах), список которых приведён ниже.

По результатам диссертации написаны следующие работы [16-21]:

1. Иванов М.И. О колебаниях жидкости под действием силы Кориолиса в плоских бассейнах постоянной глубины // Тез. докл. межд. научн. конф. «Современные проблемы механики, математики, информатики». Тула: ТГУ, 2003. С. 145-146.
2. Иванов М.И. О свободных приливах в плоских бассейнах постоянной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2004. №5. С. 119-130.
3. Иванов М.И. Собственные гармонические колебания гравитирующей жидкости в бассейнах сложной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №1. С. 131-148.
4. Иванов М.И. Неосесимметричные решения приливного уравнения Лапласа и волны Россби // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №4. С. 151-161.
5. Иванов М.И. Функции Хафа. Собственные колебания жидкости на вращающемся шаре // Тез. докл. Всеросс. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию Л.И. Седова. М.: МИАН, 2007. С.68-69.
6. Иванов М.И. О горизонтальной структуре приливных колебаний атмосферы // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №3. С. 125-139.

На защиту выносятся:

1. Исследование свойств сейш во вращающихся и невращающихся кольцеобразных бассейнах.
2. Модификация метода Бабенко для задачи с косой производной.
3. Решение задачи о сейшах в односвязных вращающихся и невращающихся бассейнах, допускающих конформное отображение на внутренность круга.
4. Метод численного интегрирования приливного уравнения Лапласа.

5. Решение приливного уравнения Лапласа в случае неосесимметричных колебаний (для положительных и отрицательных гироскопических чисел).

Автор выражает благодарность своему руководителю С.В. Нестерову и Л.Д. Акуленко за поддержку и внимание к работе. Автор также благодарит А.А. Бармина и В.Г. Байдулова, высказавших замечания, позволившие улучшить изложение результатов работы, С.Д. Алгазина – за предоставленные материалы, своих руководителей по лаборатории Р.В. Гольдштейна и А.Л. Попова, проявивших понимание во время подготовки рукописи диссертации. Автор также выражает благодарность заведующей отделом аспирантуры ИПМех РАН Г.Н. Агашиной за постоянное участие.

ГЛАВА 1. СЕЙШИ В ПЛОСКИХ БАССЕЙНАХ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

1. Основные уравнения задачи. Уравнения гидродинамики вращающейся гравитирующей жидкости имеют вид [36]:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g \nabla \chi + \nabla \Pi + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{u} - вектор скорости, p - удельное давление, ρ - плотность, $g\chi$ - потенциал силы тяжести, g - ускорение свободного падения, считающееся постоянным ввиду малой толщины гидросферы Земли, χ - динамическая высота, $\boldsymbol{\Omega}$ - вектор Кориолиса, направленный по оси вращения Земли к Северному полюсу мира, Π - потенциал центробежной силы.

Задача должна быть дополнена граничным условием непротекания на твёрдой поверхности и двумя условиями на свободной поверхности:

$$\mathbf{n} \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

$$p = p_0 = \text{const.}, \quad \frac{D\xi}{Dt} = w \quad (1.4)$$

где \mathbf{n} - единичная нормаль к поверхности, $\xi(x, y, t)$ - координата свободной поверхности, w – вертикальная компонента скорости.

Полагаем плотность и угловую скорость вращения ω постоянными. Вводим прямоугольную систему координат xuz , вращающуюся вокруг оси z с угловой скоростью ω . Пусть при отсутствии вращения и возмущающих сил свободный уровень жидкости располагается по плоскости xu . Тогда потенциал центробежной силы выразится как $\Pi = -\frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)$, вектор Кориолиса бу-

дет иметь вид $\Omega = (0, 0, 2\omega)$, а для динамической высоты будет справедливо $\chi = z$. Также считаем, что компоненты скорости относительного движения малы вместе со всеми своими производными (исследуемые волны являются пологими). В таком случае уравнение (1.1) получит следующее выражение [25, 32]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \omega^2 x - 2\omega v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \omega^2 y + 2\omega u &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

Обозначим бассейн через Γ . На границе бассейна $\partial\Gamma$ и на дне $z = -h$ имеем граничное условие (1.3), а на свободной поверхности $z = 0$ имеем условия (1.4).

Пренебрежём вертикальными ускорениями частиц жидкости, так как они малы по сравнению с g . Тогда третье уравнение (1.5) и граничные условия на свободной поверхности жидкости (1.4) дают известное уравнение гидростатики для функции давления

$$\begin{aligned}p - p_0 &= g\rho(z_0 + \zeta - z) \\ z_0 &= \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + \text{const.}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Здесь $z_0 + \zeta = \xi(x, y, t)$ представляет собой возвышение уровня жидкости над плоскостью xy , z_0 - ордината свободной поверхности жидкости при относительном равновесии под действием гравитационных и центробежных сил.

Подставляя (1.6) в первые два уравнения (1.5), получаем уравнения для функции отклонения поверхности возмущённой жидкости от формы относительного равновесия ζ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2\omega v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - 2\omega u\tag{1.7}$$

Вводится функция глубины рассматриваемого слоя жидкости $h(x,y)$, причём отсчёт глубины ведётся от поверхности относительного равновесия. Полагая, что горизонтальное движение точек каждой вертикали одинаково, проинтегрируем уравнение неразрывности (1.2) по вертикальной координате. Получим:

$$-\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.7)-(1.8) дополняется граничным условием непротекания (1.3):

$$lu + mv = 0 \quad (1.9)$$

где l, m - направляющие косинусы нормали к стенкам бассейна.

Будем предполагать, что компоненты скорости по осям x и y и уклонение ζ подчиняются гармоническому закону:

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t, \quad v = v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t, \\ \zeta &= \zeta_1 \cos \sigma t + \zeta_2 \sin \sigma t \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вводя комплексную функцию $Z = \zeta_1 + i\zeta_2$ и внося (1.10) в (1.7), получим:

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{Re}(Ze^{-\sigma ti}) \\ \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g}u &= \operatorname{Re}\left[\left(-\sigma i \frac{\partial Z}{\partial x} + 2\omega \frac{\partial Z}{\partial y}\right)e^{-\sigma ti}\right] \\ \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g}v &= -\operatorname{Re}\left[\left(\sigma i \frac{\partial Z}{\partial y} + 2\omega \frac{\partial Z}{\partial x}\right)e^{-\sigma ti}\right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Внесение (1.10) с учётом (1.11) в уравнение неразрывности (1.8) даёт уравнение для функции Z :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{g}Z = \frac{2\omega}{\sigma i} \frac{D(h, Z)}{D(x, y)} \quad (1.12)$$

Граничное условие (1.9) для функции Z с учётом (1.11) получит вид:

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma} = -\frac{2\omega}{\sigma i} \left.\frac{\partial Z}{\partial s}\right|_{\partial\Gamma} \quad (1.13)$$

где dn - дифференциал внутренней нормали, ds - дифференциал длины контура, отсчитываемый в положительном направлении, $\partial\Gamma$ - граница бассейна. При предположении постоянной глубины бассейна краевая задача (1.12)-(1.13) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + k^2 Z = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} \\ \frac{\partial Z}{\partial n} = -\frac{2\omega}{\sigma i} \frac{\partial Z}{\partial s}, \quad (x, y) \in \partial\Gamma \end{aligned} \quad (1.14)$$

Учёт вращения бассейна имеет смысл, когда период сейши сопоставим с сутками, т.е. для медленных колебаний крупных бассейнов, таких как внутренние моря.

2. Точные решения. Из [25, 32] известны точные аналитические решения задачи о свободных приливах в плоских круговых бассейнах с постоянной глубиной. Переходя к полярным координатам $x + iy = re^{i\theta}$, получаем следующее частное решение:

$$Z = J_m(kr) \exp(i(m\theta + \varepsilon)) \quad (2.1)$$

Здесь m - целое число. k определяется из граничного условия как решение уравнения:

$$kaJ'_m(ka) + \frac{2\omega m}{\sigma} J_m(ka) = 0, \quad (2.2)$$

где a - радиус бассейна. В случае вращающегося бассейна будем иметь волну

$$\zeta = J_m(kr) \cos(\sigma t - m\theta + \varepsilon), \quad \sigma^2 = 4\omega^2 + ghk^2 \quad (2.3)$$

При наличии вращения бассейна происходит расщепление частот свободных колебаний невращающейся жидкости. Для волны (2.3) существует m узловых диаметров, при $m = 0$ мода является стоячей, при $m = 1$ имеет форму склона или скоса, при $m = 2$ - седла, при $m = 3$ - тройного седла (седло с тремя осями симметрии). Кроме того, существует некоторое число узловых окружностей,

которое зависит от номера корня ka уравнения (2.2). Радиусы узловых окружностей находятся из уравнения $J_m(kr_0) = 0$.

Аналитическое решение имеет задача о сейшах в кольцеобразном бассейне [32, 34]. Оно выражается через бесселевы функции первого и второго родов:

$$\zeta = (AJ_m(kr) + BY_m(kr)) \cos(\sigma t - m\theta + \varepsilon), \quad \sigma^2 = 4\omega^2 + ghk^2 \quad (2.4)$$

Граничные условия получают вид:

$$\begin{aligned} kr_1 (AJ_m'(kr_1) + BY_m'(kr_1)) + \frac{2\omega m}{\sigma} (AJ_m(kr_1) + BY_m(kr_1)) &= 0 \\ kr_2 (AJ_m'(kr_2) + BY_m'(kr_2)) + \frac{2\omega m}{\sigma} (AJ_m(kr_2) + BY_m(kr_2)) &= 0 \end{aligned}, \quad (2.5)$$

где r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы кольцеобразного бассейна. Собственные частоты определяются из условия существования нетривиальных решений системы (2.5):

$$\begin{vmatrix} kr_1 J_m'(kr_1) + \frac{2\omega m}{\sigma} J_m(kr_1) & kr_1 Y_m'(kr_1) + \frac{2\omega m}{\sigma} Y_m(kr_1) \\ kr_2 J_m'(kr_2) + \frac{2\omega m}{\sigma} J_m(kr_2) & kr_2 Y_m'(kr_2) + \frac{2\omega m}{\sigma} Y_m(kr_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

Одна из констант A и B должна быть выбрана произвольно, вторая находится из любого из условий (2.5).

Числами подобия для краевой задачи (1.14) являются безразмерные величины: $\alpha = 4\omega^2 S / \pi gh$, где S – площадь бассейна, представляющее аналог гироскопического числа, определяющего характер собственных колебаний в задаче о вращающемся шаре (см. главу 3), и безразмерная собственная частота $K = k\sqrt{S/\pi} = \sigma\sqrt{S/\pi gh}$. Безразмерное число α для реальных бассейнов обычно порядка 0.1 (например, Чёрное море) и увеличивается в несколько раз для мелких бассейнов с большой площадью (типа Аральского моря).

В табл. 1 приведены величины K для кольцеобразных бассейнов с различными отношениями радиусов внутреннего и внешнего колец и отношения коэффициентов B/A . Как можно видеть, эти отношения весьма сложным обра-

зом зависят от формы моды и вида бассейна, что связано с особенностями распределения нулей функций Бесселя. Величины нормированных собственных частот, в основном, падают с уменьшением относительной толщины кольца (за исключением случая стоячей волны, для которой проявляется противоположная тенденция), некоторые возмущения в эту картину вносят моды, имеющие круговые узловые линии. Наличие и количество таких узловых линий, так же как и в случае кругового бассейна, однозначно определяется номером корня определяющего уравнения (2.6). В первой строке табл. 1 приведены собственные числа для мод без круговых узловых линий, во второй – для мод с одной круговой узловой линией.

В табл. 2 приведены величины K и B/A для тех же бассейнов с учётом вращения (рассмотрены типичные для реальных бассейнов значения параметра α). Частоты стоячих мод, которые не зависят от угловой скорости вращения бассейна, не приводятся. Для круглого бассейна с увеличением α безразмерные собственные частоты растут, в то время как для кольцеобразного бассейна зависимость безразмерной собственной частоты от α имеет максимум, после которого частоты K начинают падать, устремляясь к нулю (а отвечающие им частоты приближаться к частоте вращения бассейна). Соответствующее экстремуму α тем меньше, чем меньше волновое число m и чем сильнее рассматриваемый бассейн отличается от кругового.

Для эллиптической области также существует аналитическое решение (для невращающегося бассейна). Введём эллиптические координаты ξ и η по формулам $x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, a и b - полуоси эллипса. Тогда в (1.14) можно разделить переменные. В итоге получим систему Матье [26, 32]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{2} c^2 k^2 \operatorname{ch} 2\xi - q \right) \Xi &= 0 \\ \frac{d^2 \mathrm{H}}{d\eta^2} + \left(q - \frac{1}{2} c^2 k^2 \cos 2\eta \right) \mathrm{H} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решениями системы (2.7) являются функции Матье. Как можно видеть, разделение переменных здесь неполное, переменные разделяются через константу разделения. Граничными условиями для задачи (2.7) будут:

$$\begin{aligned}\Xi'(\xi_0) &= 0, \quad \xi_0 = \text{Arch} \frac{a}{c} \\ H(\eta + 2\pi) &= H(\eta)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Эти условия определяют неизвестные параметры – постоянную разделения q и собственное число k .

Отметим, что характер разделения переменных определяет вид узловых линий для сейш в эллиптическом бассейне. Узловые линии будут двух типов: замкнутые узловые линии будут представлять собой эллипсы, конфокальные с контуром (в круговом бассейне они вырождаются в окружности), а разомкнутые представляют гиперболы, также конфокальные с контуром (в круговом бассейне они вырождаются в прямой крест). Соответствующие собственные частоты и моды неоднократно исследовались [2, 26, 49, 50, 64-66].

Для остальных бассейнов решения ищутся в виде рядов.

Таблица 1

	r_1/r_2				
m	0	0.2	0.4	0.6	0.8
0	-	-	-	-	-
	3.832	4.150	4.941	6.344	9.443
1	1.841	1.671	1.340	1.010	0.668
	5.331	4.861	5.187	6.433	9.467
2	3.054	2.974	2.605	2.013	1.336
	6.706	6.364	5.880	6.694	9.539
3	4.201	4.114	3.765	3.003	2.003
	8.015	7.803	6.906	7.111	9.658
4	5.318	5.210	4.841	3.976	2.671
	9.282	9.086	8.114	7.666	9.821
m	B/A				
0	-	-	-	-	-
	0	0.417	26.238	1.282	-0.898
1	0	-0.091	-0.233	-0.323	-0.364
		-0.374	0.329	-0.532	1.289
2	0	-0.013	-0.131	-0.304	-0.409
		-0.201	-0.280	-63.569	-0.477
3	0	-0.0013	-0.056	-0.248	-0.416
		-0.047	-0.468	1.050	10.752
4	0	-0.00012	-0.020	-0.188	-0.408
		-0.0081	-0.402	0.276	0.413

Таблица 2

$\alpha=0.1$	r_1/r_2				
m	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	1.957	1.741	1.345	0.973	0.591
2	3.163	3.077	2.662	2.015	1.303
3	4.304	4.216	3.847	3.026	1.986
4	5.415	5.306	4.931	4.015	2.662
m	B/A				
1	0	-0.146	-0.401	-0.646	-1.071
2	0	-0.018	-0.191	-0.473	-0.790
3	0	-0.0018	-0.077	-0.352	-0.685
4	0	-0.00016	-0.027	-0.255	-0.616
$\alpha=1$	r_1/r_2				
m	0	0.2	0.4	0.6	0.8
1	2.124	1.747	1.085	0.330	0
2	3.344	3.241	2.676	1.845	0.911
3	4.485	4.395	3.962	2.967	1.765
4	5.594	5.485	5.085	4.020	2.512
m	B/A				
1	0	-0.345	-1.396	2.506	-
2	0	-0.035	-0.393	-1.303	5.610
3	0	-0.0031	-0.142	-0.720	-3.171
4	0	-0.00005	-0.047	-0.466	-1.729

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЙШЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ В БАССЕЙНАХ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

1. Построение численного алгоритма. Зададим $x+iy = \psi(\xi)$, где $\xi = \rho e^{i\varphi}$, а функция $\psi(\xi)$ задаёт конформное отображение внутренности круга на область Γ . Тогда краевая задача (1.1.14) получит вид:

$$\Delta Z + k^2 \left| \psi'(\xi) \right|^2 Z = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma^2 - 4\omega^2}{gh} \quad (1.1)$$

$$\rho=1: \quad \frac{\partial Z}{\partial \rho} = -\frac{2\omega}{\sigma i} \frac{\partial Z}{\partial \varphi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Для решения задачи применялся метод "без насыщения" [6]. Для построения этого алгоритма используется интерполяционная формула Бабенко для функции двух переменных в круге. Интерполяционные узлы выбираются так, что их плотность увеличивается к границе области. Это позволяет точнее учитывать краевые эффекты.

Во внутренности круга выбирается mN интерполяционных узлов вида:

$$\xi_{vl} = r_v e^{i\theta_l}, \quad r_v = \cos \frac{(2v-1)\pi}{4m}, \quad v=1 \dots m, \quad (1.2)$$

$$\theta_l = \frac{2\pi l}{N}, \quad N = 2n+1, \quad l=0 \dots 2n$$

Далее используется интерполяционный полином вида:

$$(P_M f)(r, \theta) = \sum_{l=0}^{2n} \sum_{v=1}^m f_{vl} L_{vl}(r, \theta), \quad f_{vl} = f(\xi_{vl}),$$

$$L_{vl}(r, \theta) = \frac{2T_{2m}(r)}{NT'_{2m}(r_v)} \left(\frac{D_n(\theta - \theta_l)}{r - r_v} - \frac{D_n(\theta - \theta_l + \pi)}{r + r_v} \right), \quad (1.3)$$

$$D_n(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\theta, \quad T_m(r) = \cos(m \arccos x)$$

С использованием формулы Грина определяется условие разрешимости краевой задачи (1.1):

$$\int_{|s| \leq 1} Z(\xi) ds = 0 \quad (1.4)$$

то есть, условие разрешимости аналогично условию разрешимости задачи Неймана для оператора Лапласа, рассматривавшейся в [5, 7]. С точки зрения гидродинамики условие разрешимости (1.4) означает сохранение объёма колеблющейся жидкости.

Обозначим $f(\xi) = k^2 Z(\xi)$. Решение задачи (1.1) будет даваться формулой:

$$Z(\xi) = - \int_{|\zeta| \leq 1} K(\xi, \zeta) \left| \psi'(\zeta) \right|^2 f(\zeta) d\zeta + \int_0^{2\pi} K_0(\xi, \theta) \mathcal{G}(\theta) d\theta$$

$$K(\xi, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \xi \bar{\zeta}}{\xi - \zeta} \right|, \quad K_0(\xi, \theta) = \frac{1 - \rho^2}{2\pi(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \varphi))} \quad (1.5)$$

$$\xi = \rho e^{i\varphi}, \quad \mathcal{G}(\theta) = Z|_{\partial\Gamma}$$

где $K(\xi, \zeta)$ есть функция Грина оператора Лапласа в круге. Чертой обозначена операция комплексного сопряжения.

Подынтегральные функции формулы (1.5) заменяются их интерполяционными полиномами вида (1.3) с интерполяционными узлами (1.2). Для функции $\left| \psi'(\zeta) \right|^2 f(\zeta)$ используется интерполяционный полином (1.3), а для $\mathcal{G}(\theta)$ применяется тригонометрическая интерполяция:

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} D_n(\theta - \theta_j) \psi_j, \quad \psi_j = \psi(\theta_j), \quad \theta_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0 \dots 2n \quad (1.6)$$

Функция D_n была определена выше формулой (1.3). В итоге искомая функция будет выражена посредством

$$\begin{aligned}
Z(\xi) &= \sum_{p=1}^M H_p(\xi) f_p + \sum_{j=0}^{2n} H_j^0(\xi) \mathcal{G}_j \\
H_{vl}(\xi) &= \frac{1}{N} a_{v0}(\rho) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^n a_{vk}(\rho) \cos k(\varphi - \theta_l) \\
H_{vl}(\xi) &= - \int_{|\zeta| \leq 1} K(\xi, \zeta) L_{vl}(\zeta) d\zeta, \quad \zeta = re^{i\theta}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где L_{vl} определяется согласно (1.3), а $K(\xi, \zeta)$ - согласно (1.5). У матрицы H один индекс (p) вместо двух (v и l) получается перенумерацией. Матрица H_j^0 определяется выражением:

$$H_j^0 = \frac{2}{N} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{L=1}^n \rho^L \cos L(\varphi - \theta_j) \right\}, \quad \xi = \rho e^{i\varphi}, \tag{1.8}$$

получающимся при подстановке интерполяционного полинома (1.6) во второе слагаемое правой части формулы (1.5).

В формуле (1.7) искомая функция $Z(\xi)$ выражена через неизвестные значения граничной функции $\mathcal{G}(\theta)$. Однако для значений $Z(\xi)$ на границе имеется краевое условие (1.1.13). После подстановки формулы (1.7) в это краевое условие с учётом (1.8) получится следующая система уравнений для нахождения функции \mathcal{G} :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^N B_{ij} \mathcal{G}_j + \sum_p H'_p(\theta_i) f_p &= 0 \\
H'_{vl}(\theta_i) &= \frac{1}{N} a'_{v0}(1) + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^n a'_{vk}(1) \cos k(\theta_i - \theta_l) \\
B_{kj} &= \sum_{L=1}^n (L \cos L\theta_{k-j} + CiL \sin L\theta_{k-j}), \quad C = \frac{2\omega}{\sigma}, \quad k, j = 0 \dots N-1
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для нахождения граничной функции необходимо решить систему уравнений (1.9). Эта система существенно отличается от аналогичной в случае задачи Неймана, рассмотренной в [5, 7], где матрица B вещественна. Система (1.9) может быть решена при любых значениях $C < 1$. Опуская некоторые вычислительные подробности, получаем:

$$Z(\xi) = \sum_i H_i(\xi) f_i + \sum_{p=0}^{2n} \left\{ H_p^0(\xi) \left(\zeta_N - \sum_{q=1}^N C_{pq} \sum_i H_i'(\theta_q) f_i \right) \right\} \quad (1.10)$$

Значение ζ_N должно быть найдено из условия разрешимости (1.4). При этом элементы матрицы C находятся по формуле:

$$C_{pq} = \frac{2}{(2n+1)^2} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\exp(i\theta_j^{p-q})}{(C+1)j} + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\exp(i\theta_j^{p-q})}{(1-C)(N-j)} \right) \quad (1.11)$$

$$\theta_j^{p-q} = \frac{2\pi}{N} (p-q)j, \quad p, q = 1 \dots N$$

Здесь матрица C - эрмитова. Полученная формула для элементов матрицы C обобщает аналогичную формулу для задачи Неймана.

Формула (1.10) позволяет построить матрицу дискретной задачи. Для нахождения собственных чисел существуют специальные численные алгоритмы. Численный алгоритм решения задачи (1.1) для краевых условий Неймана изложен в [5, 7]. Тексты программ, реализующих этот алгоритм, приведены в [4].

2. Конформное отображение. Бассейны. Для применения алгоритма необходимо построить конформное отображение $\psi(\xi)$ внутренности круга на бассейн Γ . В дальнейшем исследуются бассейны с двумя и более осями симметрии. Радиус кривизны R и площадь бассейна S определяются формулами [8]:

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'}, \quad S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x dy - y dx) \quad (2.1)$$

Далее перечисляются рассмотренные автором типы контуров с конформными отображениями внутренности круга на них.

Эпитрохоида. Конформное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \xi \left(1 + \frac{\varepsilon \xi^n}{n+1} \right), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \\ |\psi'(\xi)|^2 &= 1 + 2\varepsilon \rho^n \cos n\varphi + \varepsilon^2 \rho^{2n} \\ R &= \frac{(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos n\varphi)^{3/2}}{1 + (n+1)\varepsilon^2 + (n+2)\varepsilon \cos n\varphi}, \quad S = \pi \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{n+1} \right)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь n - число осей симметрии эпитрохоиды. Контур является строго выпуклым при $\varepsilon < 1/(n+1)$, при $\varepsilon < 1$ не имеет точек возврата.

Эллиптическая лемниската Бута имеет две оси симметрии и получается из круга конформным отображением вида [22]:

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \frac{2p\xi}{\xi^2 + p^2}, \quad p > 1 \\ |\psi'(\xi)|^2 &= \frac{4p^2(\rho^4 - 2p^2\rho^2 \cos 2\varphi + p^4)}{(\rho^4 + 2p^2\rho^2 \cos 2\varphi + p^4)^2} \\ R &= \frac{2p(1 + p^4 - 2p^2 \cos 2\varphi)^{3/2}}{(p^4 - 1)(1 + p^4 - 6p^2 \cos 2\varphi)}, \quad S = \frac{4\pi p^2(p^4 + 1)}{(p^2 - 1)^2(p^2 + 1)^2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

При $p \geq 1 + \sqrt{2}$ контур представляет собой овал, а при $1 < p < 1 + \sqrt{2}$ имеет точки перегиба, то есть является невыпуклым.

Обобщённая лемниската Бута. Рассмотрим функцию вида

$$\psi(\xi) = \xi \Psi(\xi), \quad \Psi(e^{i\pi k/n}) = 1\tag{2.4}$$

где $\Psi(\xi)$ непрерывна, а k и n - целые числа. Тогда (2.4) конформно отображает внутренность круга на внутренность некоторого контура, имеющего n осей симметрии. Возьмём

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= \xi \Psi(\xi) = \xi \left(1 - \frac{\varepsilon \xi^n}{n-1} \right)^{-1} \\
|\psi'(\xi)|^2 &= \frac{1 + \varepsilon^2 \rho^{2n} + 2\varepsilon \rho^n \cos n\varphi}{\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{n-1} \right)^2 \rho^{2n} - 2 \frac{\varepsilon}{n-1} \rho^n \cos n\varphi \right)^2} \\
S &= \pi \frac{(n-1)^3 (1-n-\varepsilon^2)}{(1-n+\varepsilon)^2 (1-n-\varepsilon)^2}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Выражение для радиуса кривизны громоздко, поэтому мы его не выписываем. Соотношения (2.5) описывают некое семейство контуров. При $n=2$ это эллиптическая лемниската Бута. Таким образом, введенная формулой (2.5) кривая есть обобщенная лемниската Бута.

Для получения усложненной эпитрохоиды возьмём

$$\begin{aligned}
\psi(\xi) &= \xi \Psi(\xi) = \xi \left(1 + \frac{\varepsilon \xi^n}{n+1} + \frac{\varepsilon \xi^{2n}}{2n+1} \right), \quad S = \pi \left(1 + \frac{(3n+2)\varepsilon^2}{(n+1)(2n+1)} \right) \\
|\psi'(\xi)|^2 &= 1 + \varepsilon^2 \rho^{2n} + \varepsilon^2 \rho^{4n} + 2\varepsilon \rho^n (1 + \varepsilon \rho^{2n}) \cos n\varphi + 2\varepsilon \rho^{2n} \cos 2n\varphi \\
R &= \frac{(1 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1+\varepsilon)\cos n\varphi + 2\varepsilon \cos 2n\varphi)^{3/2}}{1 + 2\varepsilon^2 + 3n\varepsilon^2 + \varepsilon(2+n+2\varepsilon+3n\varepsilon)\cos n\varphi + 2\varepsilon(n+1)\cos 2n\varphi}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Отображение (2.6) отличается от (2.1) только последним членом. Назовём полученную кривую усложненной эпитрохоидой. Введенный контур интересен тем, что в некотором роде занимает промежуточное положение между n -осной и $2n$ -осной эпитрохоидами.

3. Классификация мод невращающихся бассейнов. Расщепление собственных частот. Для исследования приливных волн и сейш особенно важно построение так называемой генетической классификации мод, связывающей каждую моду в бассейне некоторой формы с её круговым прообразом. В частности, это необходимо для идентификации найденных численно мод. Характер такой классификации главным образом зависит от числа осей симметрии бассейна ввиду качественного сходства мод бассейнов с совпадающим количеством осей симметрии. Ниже предлагается генетическая классификация мод для бассейнов, рассмотренных в предыдущем разделе.

В круглом невращающемся бассейне узлы мод располагаются по прямым (узловым диаметрам) и по окружностям (узловым окружностям). Каждой волне с m узловыми диаметрами и n узловыми окружностями ($m \geq 1$) (обозначим её $\{m, n\}$) отвечает двукратное собственное число. Будем считать, что $\{m, n\}$ представляет собой пару одинаковых волн. Кроме того, в круглом бассейне существуют стоячие волны $\{0, n\}$, не имеющие узловых диаметров. Им отвечают простые собственные числа [25, 32].

Далее будем рассматривать бассейны с двухосной симметрией. При отклонении формы бассейна от круга волны одной пары $\{m, n\}$ приобретают устойчивые различия. Одна из волн становится симметричной относительно большей оси бассейна, а другая – антисимметричной, при этом наблюдается полное расщепление частот собственных колебаний – все моды имеют разные скорости. Назовём первую волну косинусоидальной, а вторую – синусоидальной. Эти обозначения имеют то преимущество, что соответствуют классификации функций Матье [26]. Из этого определения вытекает, что синусоидальная волна имеет узловую линию, совпадающую с большей осью бассейна. Обозначим через C_m^n косинусоидальную моду, через S_m^n синусоидальную моду той же пары и через E^n стоячую волну, круговой прообраз которой имеет n узловых окружностей. В целях удобства обозначения моды, круговой прообраз которых

не имеет узловых окружностей, в дальнейшем будут записываться как $C_m = C_m^0$ и $S_m = S_m^0$.

Рассмотрим бассейны с n осями симметрии ($n \geq 3$). Назовём поперечником бассейна прямую, соединяющую две противоположные точки границы и проходящую через центр бассейна. Для бассейнов с $n=2$ максимальным поперечником является большая ось, а минимальным – малая.

В бассейнах с тремя и более осями симметрии наблюдается неполное расщепление частот собственных колебаний. Расщепляются частоты лишь тех мод, индекс m которых кратен числу осей симметрии бассейна. Физический смысл этого явления легко понятен. Скорость движения волны зависит от протяжённости слоя воды, испытывающего поднятие или опускание. Чем большую площадь охватывает такой слой и чем дальше он отходит от узловой линии, тем медленнее колебания массы жидкости. Косвенным признаком расщепления частот является неравенство длин узловых линий у волн одной пары.

Если число осей симметрии бассейна не кратно m , то узловые линии волн одной пары имеют одинаковые длины и, следовательно, угловые скорости вращения этих волн совпадают. Соответствующая собственная частота – кратная. Такие волны не являются ни косинусоидальными, ни синусоидальными, а асимметричными и будут обозначаться A_m . При этом их узловые линии проходят через центр бассейна. Линии изовысот одной моды представляют зеркальное отражение линий изовысот другой моды той же пары. В этом смысле асимметричные моды являются зеркальными двойниками.

Однако если число осей симметрии бассейна кратно m , то длины соответствующих узловых линий неравны, а это приводит к расщеплению частот собственных колебаний. В таком случае в паре волн $\{m, n\}$ возможно выделить косинусоидальную волну C_m^n и синусоидальную волну S_m^n . Косинусоидальная волна симметрична относительно максимального поперечника бассейна, а синусоидальная – антисимметрична.

Наличие ненулевой скорости вращения приводит к полному расщеплению собственных частот для всех форм бассейнов, в том числе и круглой.

4. Влияние геометрии бассейна на собственные частоты. Исследуем зависимость собственных частот от геометрии бассейна. Рассмотрим бассейны с двумя осями симметрии. Зафиксируем длины большой оси a и малой оси b . Тогда зависимость площади бассейнов разных типов от длин осей будет иметь вид:

$$\begin{aligned} S_{el} &= \pi ab, \quad S_{ep} = \pi(a^2 - ab + b^2), \quad S_{lem} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{2} \\ S_{сер} &= \frac{\pi(31a^2 - 52ab + 46b^2)}{25} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь S_{el} - площадь эллипса, S_{ep} - площадь эпитрохоиды, S_{lem} - площадь лемнискаты Бута, $S_{сер}$ - площадь усложнённой эпитрохоиды. Из (4.1) следует, что наибольшую площадь имеет эпитрохоида, площадь лемнискаты Бута чуть меньше, ещё меньшую площадь имеет эллипс, а наименьшую площадь имеет усложнённая эпитрохоида (последнее справедливо, если $a \leq 46/31b$). Сами бассейны показаны на фиг. 1,а.

В табл. 3 приведены безразмерные собственные частоты при отсутствии вращения для этих четырёх типов бассейнов (I – эпитрохоида, II – лемниската Бута, III – эллипс, IV – усложнённая эпитрохоида). В таблице приведены данные как для выпуклых бассейнов, так и для невыпуклых. В бассейнах с фиксированными длинами осей безразмерные собственные частоты одной и той же моды близки. Небольшое влияние на величины безразмерных собственных частот имеет кривизна береговой линии, но оно становится заметным только при больших различиях в кривизнах. Это подтверждают данные табл. 3 для бассейнов с сильно неравными осями и особенно для усложнённой эпитрохоиды, которая значительно отличается от прочих рассмотренных бассейнов по кривизне. Чем более форма бассейна отклоняется от круглой, тем сильнее отличаются

безразмерные собственные частоты синусоидальной и косинусоидальной мод одной пары.

Чрезвычайно любопытным представляется построение таблиц средней безразмерной собственной частоты мод одной пары $(K_c + K_s)/2$, где K_c – безразмерная собственная частота косинусоидальной моды, а K_s – безразмерная собственная частота синусоидальной моды той же пары (табл. 4). Средние безразмерные собственные частоты гораздо меньше зависят от кривизны бассейна, чем безразмерные собственные частоты отдельных мод, при этом при отдалении формы бассейна от круглой средняя безразмерная собственная частота пары нестоячих волн, в общем, падает, тогда как средняя безразмерная собственная частота стоячей волны (которая просто равна её безразмерной собственной частоте) растёт.

Рассмотрим бассейны с четырьмя осями симметрии, имеющие равные максимальные поперечники a и одинаковые значения параметра ε конформного отображения, характеризующего степень отклонения формы бассейна от круга (фиг. 1,б). Тогда площади бассейнов будут равны:

$$\begin{aligned} S_{ep} &= \frac{5(5 + \varepsilon^2)\pi a^2}{(5 + \varepsilon)^2}, \quad S_{lem} = \frac{3(3 + \varepsilon^2)\pi a^2}{(3 + \varepsilon)^2}, \\ S_{sep} &= \frac{45(45 + 14\varepsilon^2)\pi a^2}{(45 + 2\varepsilon + 12\varepsilon^2)^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

В табл. 5 приведены собственные частоты для трёх типов невращающихся бассейнов с четырьмя осями симметрии (I – эпитрохоидальный бассейн, II – бассейн, имеющий форму обобщённой лемнискаты, III – бассейн, имеющий форму усложнённой эпитрохоиды). Табл. 5 и табл. 6, где приведены средние безразмерные собственные частоты мод одной пары, имеют важное отличие от таблиц для бассейнов с двумя осями симметрии, связанное со стоячими волнами. Безразмерная собственная частота стоячей волны при отдалении формы бассейна от круга в бассейне с четырьмя осями симметрии падает (как и сред-

ние безразмерные собственные частоты всех прочих мод), тогда как в бассейне с двумя осями симметрии она повышается.

Из построенных таблиц следует вывод, что слабо отличающиеся по форме бассейны имеют близкие собственные частоты, то есть спектр бассейна устойчив к малому изменению формы последнего. Более тонкие различия всецело зависят от конфигурации бассейна (кривизны береговой линии) и расположения узловых линий у различных мод, поэтому их исчерпывающий анализ в рамках численного исследования практически невозможен. Однако выявленных свойств вполне достаточно для практических целей за исключением, быть может, бассейнов с сильно изрезанными границами.

5. Характерные моды невращающихся бассейнов. Рассмотрим невращающиеся бассейны с двумя осями симметрии. Для выпуклых бассейнов стоячий прилив, в общем, подобен таковому для эллиптического бассейна (узловые линии замкнуты и выпуклы), но для невыпуклых бассейнов это не так. В невыпуклых бассейнах с достаточно большими участками вогнутости границы (например, в эпитрохоидальном бассейне при достаточно большом значении ε) узловые линии становятся разомкнутыми и пересекаются с границей бассейна. Переход от замкнутых узловых линий к разомкнутым, то есть касание узловой линии и границы контура, для эпитрохоидального бассейна происходит при значении $\varepsilon = 0.4$. (Такое значение, в общем, заставляет подозревать, что в задаче существует точное решение). Карта изовысот стоячей волны при этом значении ε показана на фиг. 2,а. На фигурах изображены приливные отклонения ζ поверхности жидкости от формы равновесия. Узловая линия имеет линзовидную форму и не является гладкой. При дальнейшем увеличении ε узловые линии размыкаются и становятся невыпуклыми (фиг. 2,б). Узловые линии на фигурах выделены жирным.

То же наблюдается и для прочих невыпуклых бассейнов с достаточно большими участками вогнутости границы. Касание узловых линий с контуром бассейна происходит в максимально удалённых друг от друга точках границы —

на концах большой оси, а разомкнутые узловые линии касаются границы бассейна вблизи этих точек.

Подобное же размыкание узловых линий происходит не только для волны E^1 , но и для прочих мод с индексом $n > 0$, то есть таких, прообраз которых в круглом бассейне имеет хотя бы одну узловую окружность.

Далее рассмотрим бассейны, имеющие три и более осей симметрии. Опять рассматриваем невыпуклые бассейны. Замкнутая узловая линия стоячей волны имеет сходство с равносторонним n -угольником со сглаженными углами (фиг. 2,г). Разомкнутые узловые линии стоячей волны подобны гиперболам и отсекают выступающие части контура. Их количество равно числу осей симметрии бассейна (фиг. 2,в). Значительное отличие от случая бассейнов с двумя осями симметрии очевидно. Друг с другом разомкнутые узловые линии стоячей волны E^1 никогда не пересекаются.

Размыкание узловых линий при наличии вращения приводит к изменению числа амфидромических точек моды (точек постоянной нулевой амплитуды прилива). В частности, для моды E^1 двухосной эпитрохоиды число амфидромических точек возрастает до шести, в то время как для эллиптического бассейна оно равняется четырём. Кроме того, изменяется расположение амфидромических точек.

Рассмотрим эпитрохоиду с тремя осями симметрии ($n=3$) в случае нулевой угловой скорости вращения. В этом контуре расщепляются только собственные частоты форм, имеющих кратное трём число осей симметрии. Моды с некрратным трём числом осей симметрии асимметричны, притом эта асимметрия – сильная, так как асимметричны даже узловые линии. Характерная мода показана на фиг. 3. Построенная мода не является ни косинусоидальной, ни синусоидальной. Будем обозначать эту моду как A_m , где m есть число узловых диаметров у её кругового прообраза. Существует пара таких мод с равными угловыми скоростями. При этом эти моды не могут быть переведены одна в дру-

гую поворотом бассейна, а их карты изовысотных линий получаются одна из другой зеркальным отражением (фиг. 3,в).

Однако в случае ненулевой угловой скорости вращения бассейна асимметрия этих мод утрачивается. В частности, линии равных амплитуд прилива имеют m осей симметрии (фиг. 4).

Рассмотрим пары волн, у которых расщеплены собственные частоты. Косинусоидальные моды C_m в невращающихся бассейнах с m осями симметрии имеют m непересекающихся узловых линий, сходных с гиперболами, и, следовательно, в центре бассейна амплитуда прилива не равна нулю (фиг. 5,а). Это приводит к тому, что соответствующие моды вращающихся бассейнов имеют m амфидромических точек, симметрично расположенных вокруг геометрического центра бассейна (фиг. 5,б). Таким образом, данные моды (фиг. 5,в) приобретают значительное сходство с модой E^1 , особенно сильное для случая вращающихся бассейнов.

Рассмотрим случай, когда индекс моды m не равен числу осей симметрии бассейна, но имеет с ним общий делитель, не равный единице. Здесь собственные частоты расщепляются, однако косинусоидальная мода C_m имеет совсем иной вид, чем в случае совпадения числа m с числом осей симметрии бассейна, так как её узловые линии пересекаются в центре бассейна и образуют прямой крест (фиг. 6,а,б).

Таблица 3

Тип бассейна	C_1	S_1	C_2	S_2	E^1	C_3	S_3
$e = 0.2, b^2 = 0.96a^2$							
I	1.824	1.858	3.053	3.054	3.833	4.201	4.201
II	1.824	1.858	3.053	3.054	3.833	4.201	4.201
III	1.824	1.859	3.053	3.054	3.833	4.201	4.201
IV	1.822	1.859	2.991	3.117	3.829	4.204	4.198
$e = 0.4, b^2 = 0.84a^2$							
I	1.769	1.915	3.047	3.043	3.858	4.191	4.194
II	1.769	1.916	3.040	3.051	3.858	4.191	4.193
III	1.769	1.916	3.033	3.059	3.858	4.190	4.193
IV	1.740	1.929	2.802	3.323	3.816	4.257	4.145
$e = 0.6, b^2 = 0.64a^2$							
I	1.669	2.023	3.019	2.992	3.971	4.133	4.172
II	1.662	2.034	2.976	3.033	3.985	4.135	4.156
III	1.660	2.037	2.933	3.079	3.984	4.155	4.165
IV	1.533	2.140	2.545	3.437	3.834	4.281	3.793
$e = 0.8, b^2 = 0.36a^2$							
I	1.519	2.160	2.981	2.827	4.150	3.934	4.192
II	1.464	2.271	2.812	2.955	4.369	3.920	4.075
III	1.445	2.311	2.615	3.178	4.429	3.751	4.109
IV	1.015	2.576	2.676	3.749	4.459	4.705	2.756

Таблица 4

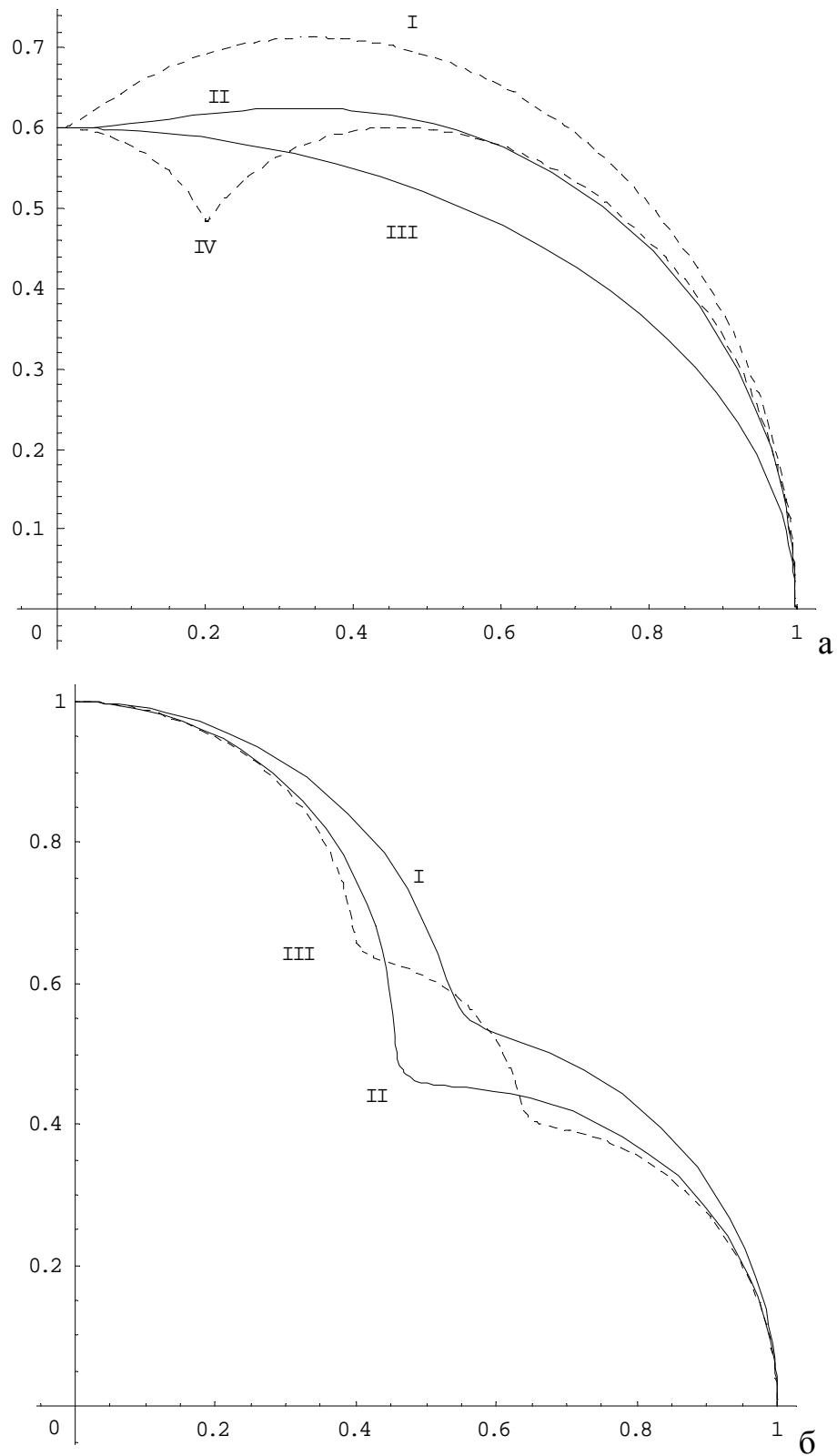
Тип бассейна	$\{1,0\}$	$\{2,0\}$	$\{0,1\}$	$\{3,0\}$
круглый	1.841	3.054	3.832	4.201
$e = 0.2, b^2 = 0.96a^2$				
I	1.841	3.054	3.833	4.201
II	1.841	3.054	3.833	4.201
III	1.842	3.054	3.833	4.201
IV	1.841	3.054	3.829	4.201
$e = 0.4, b^2 = 0.84a^2$				
I	1.842	3.045	3.858	4.193
II	1.843	3.046	3.858	4.192
III	1.843	3.046	3.858	4.192
IV	1.835	3.063	3.816	4.201
$e = 0.6, b^2 = 0.64a^2$				
I	1.846	3.006	3.971	4.153
II	1.848	3.005	3.985	4.146
III	1.849	3.006	3.984	4.160
IV	1.837	2.991	3.834	4.037
$e = 0.8, b^2 = 0.36a^2$				
I	1.840	2.904	4.150	4.063
II	1.868	2.884	4.369	3.998
III	1.878	2.897	4.429	3.930
IV	1.800	3.213	4.459	3.731

Таблица 5

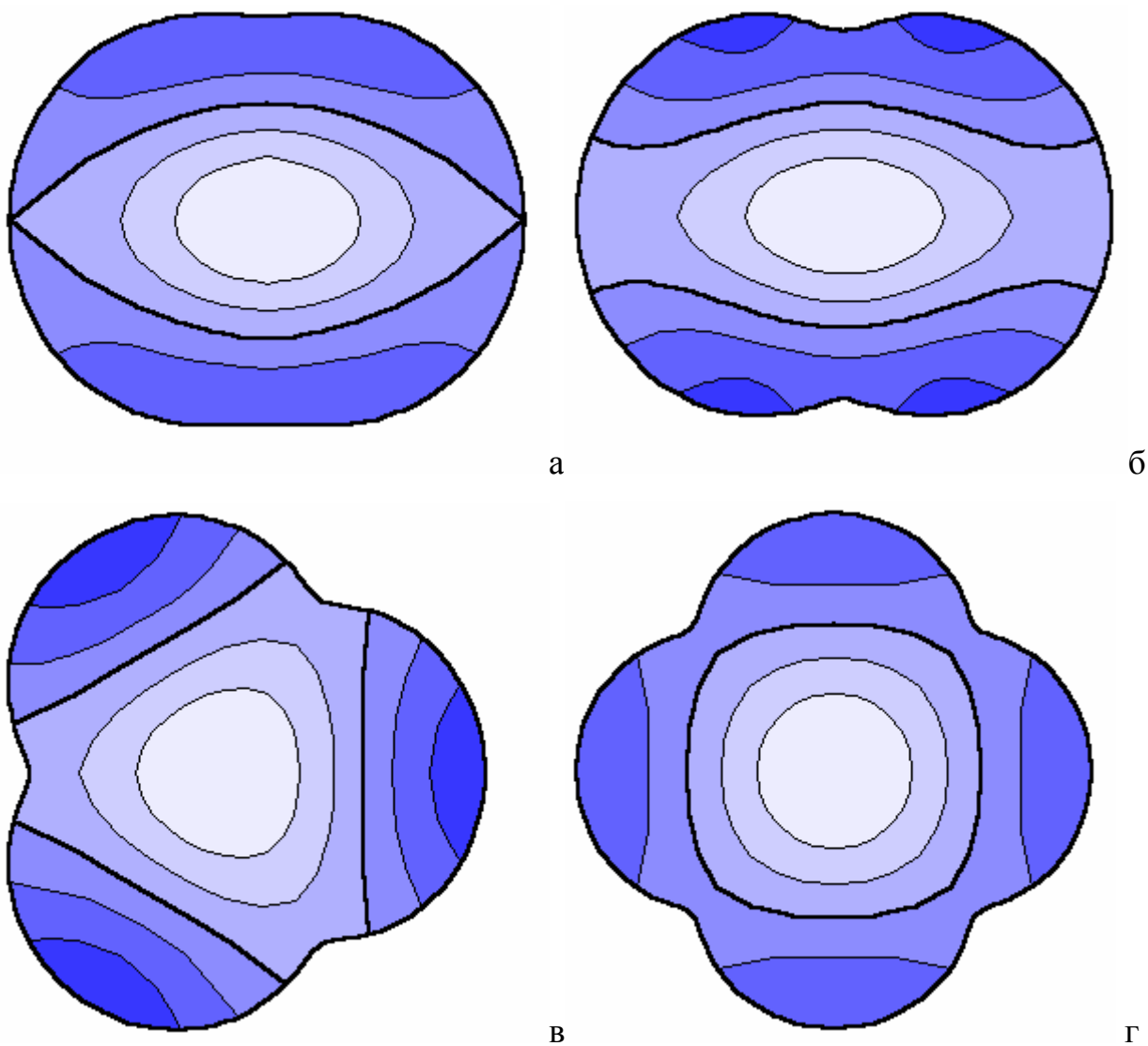
Тип бассейна	A_1	C_2	S_2	E^1	A_3
$\varepsilon = 0.2$					
I	1.836	2.903	3.204	3.813	4.190
II	1.826	2.800	3.302	3.782	4.171
III	1.810	2.700	3.205	3.612	3.799
$\varepsilon = 0.4$					
I	1.820	2.760	3.336	3.770	4.160
II	1.782	2.560	3.518	3.675	4.106
III	1.712	2.272	3.329	3.177	-
$\varepsilon = 0.6$					
I	1.797	2.633	3.436	3.724	4.120
II	1.720	2.334	3.671	3.568	4.035
III	1.576	1.952	3.358	2.940	-

Таблица 6

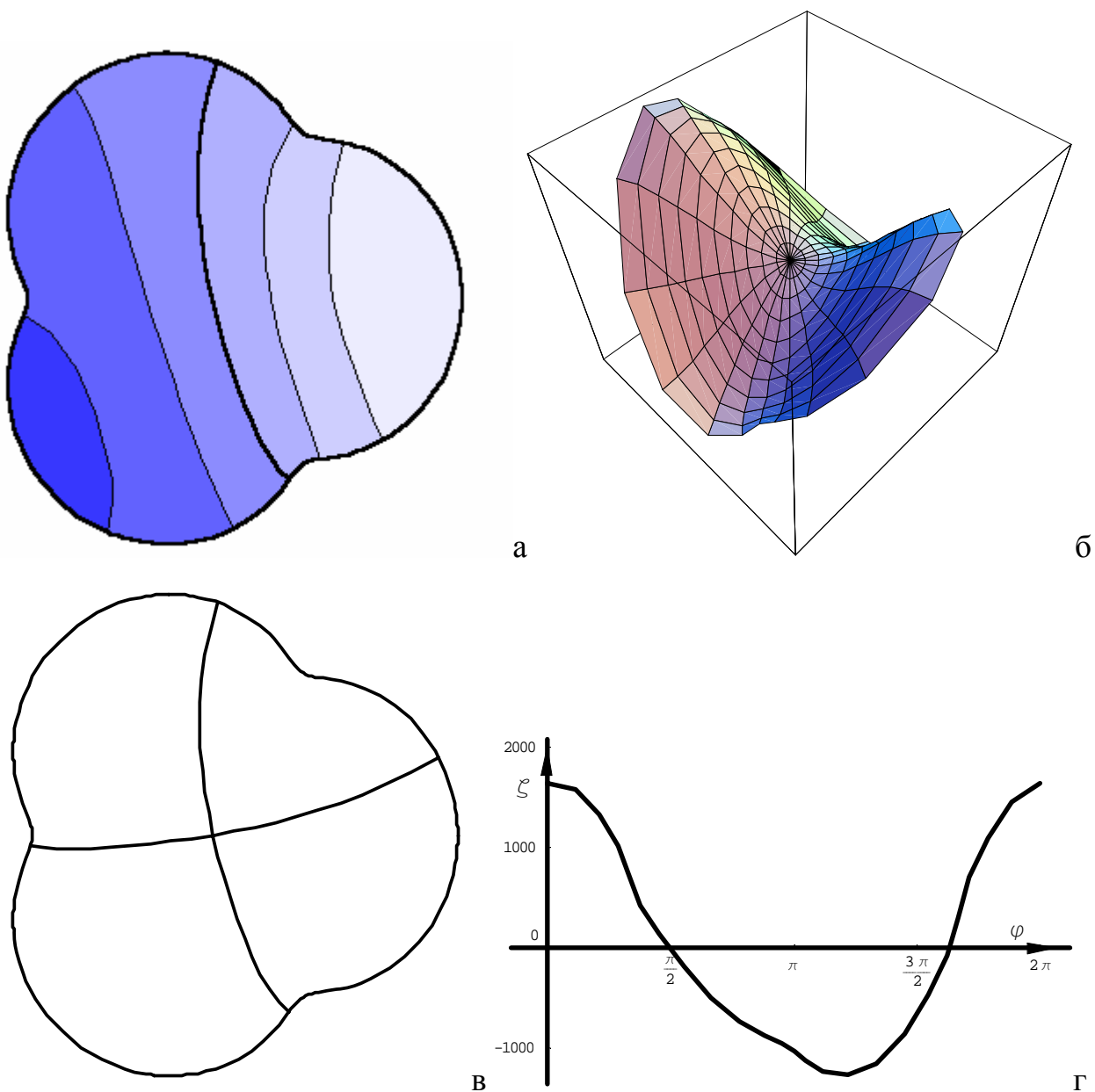
Тип бассейна	$\{1,0\}$	$\{2,0\}$	$\{0,1\}$	$\{3,0\}$
круглый	1.841	3.054	3.832	4.201
$\varepsilon = 0.2$				
I	1.836	3.054	3.813	4.190
II	1.826	3.051	3.782	4.171
III	1.810	2.953	3.612	3.799
$\varepsilon = 0.4$				
I	1.820	3.048	3.770	4.160
II	1.782	3.039	3.675	4.106
III	1.712	2.801	3.177	-
$\varepsilon = 0.6$				
I	1.797	3.035	3.724	4.120
II	1.720	3.003	3.568	4.035
III	1.576	2.655	2.940	-



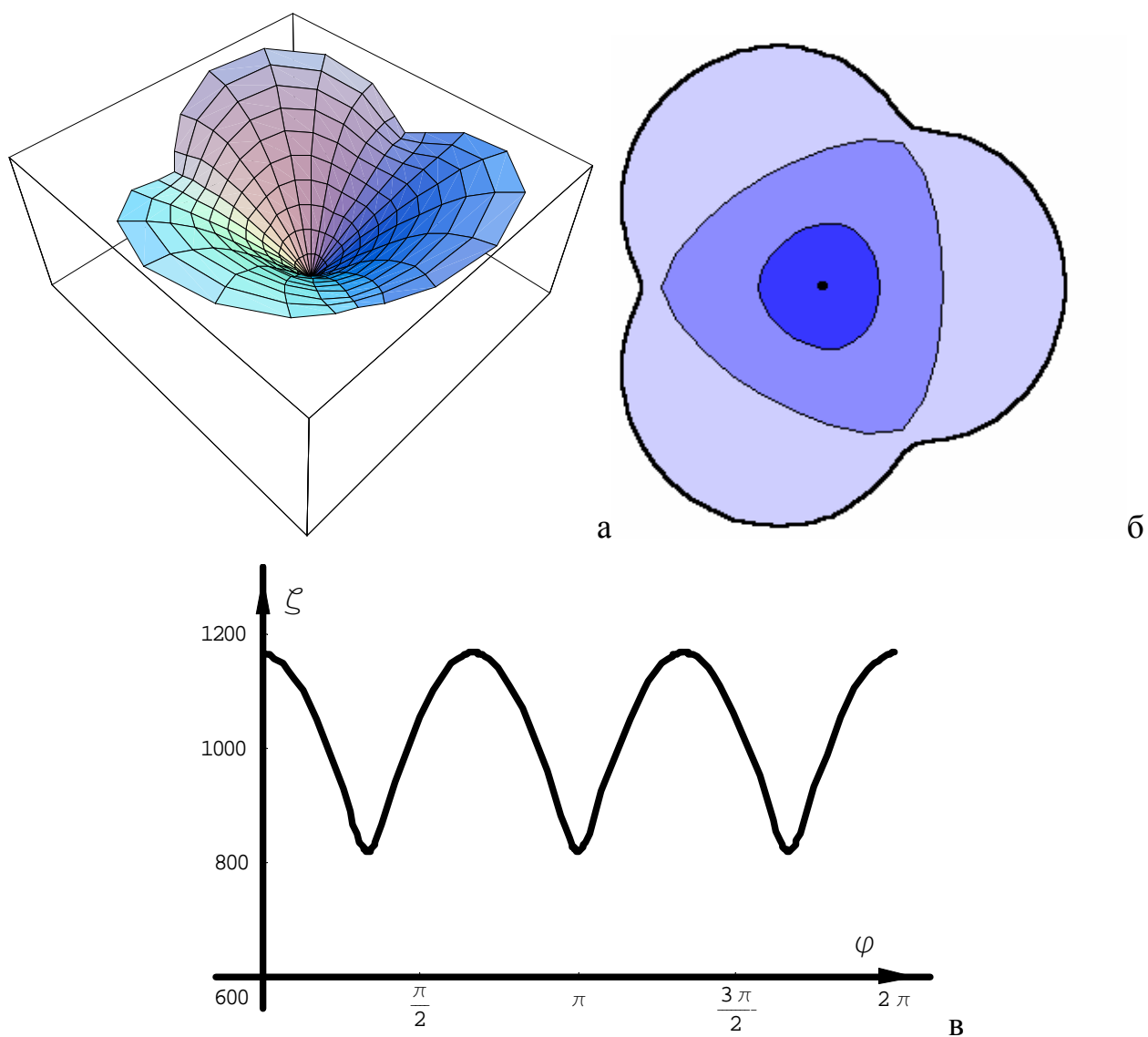
Фиг. 1. Четверти бассейнов: а – с двумя осями симметрии $b=0.6a$ (I – эпитрохоида, II – лемниската Бута, III – эллипс, IV – усложнённая эпитрохоида), б – с четырьмя осями симметрии $\varepsilon=0.6$ (I – эпитрохоида, II – обобщённая лемниската, III – усложнённая эпитрохоида).



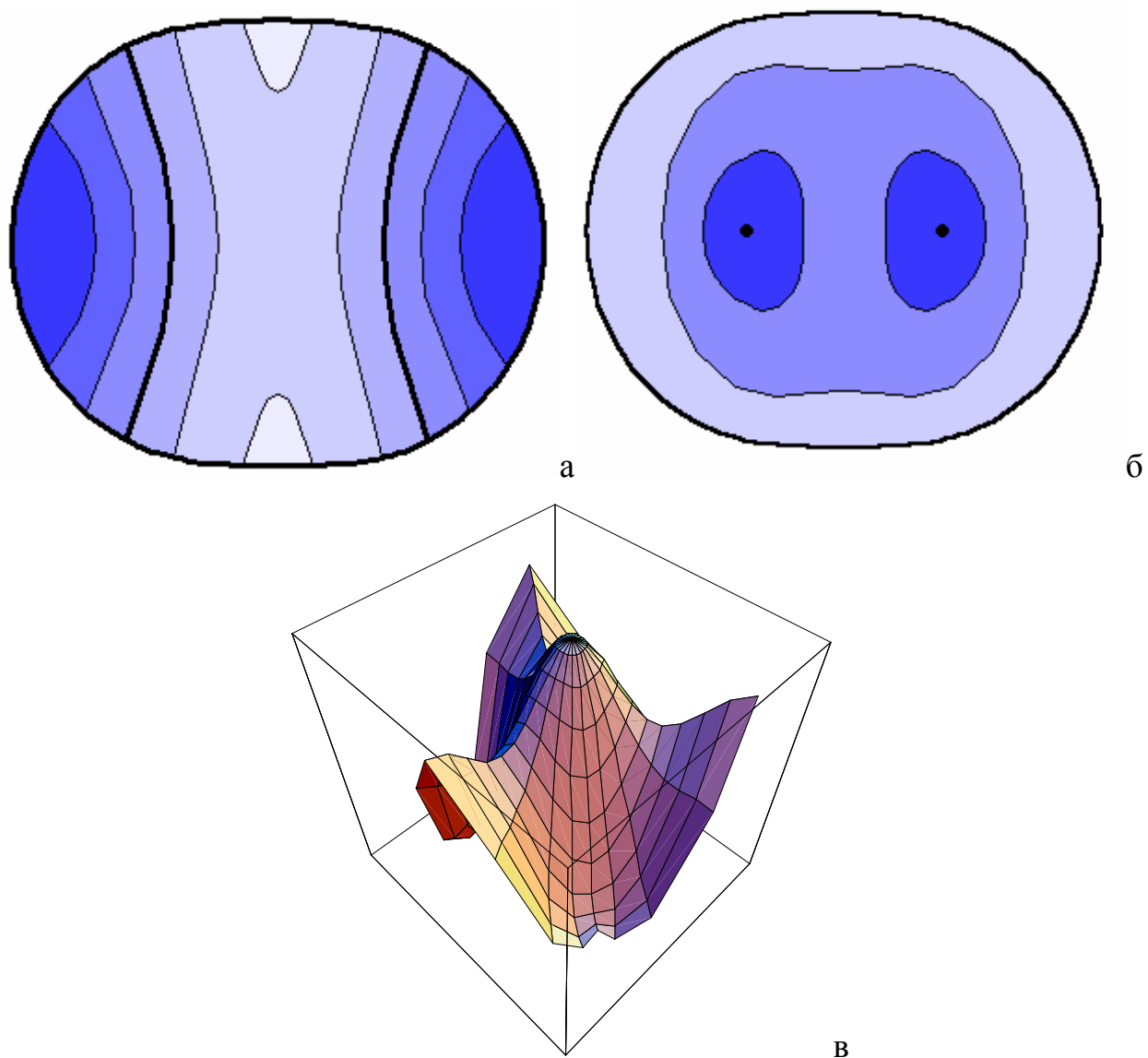
Фиг. 2. Изовысоты моды E^1 в эпитрохоидальных бассейнах (n, ε, K) : а – $(2, 0.4, 4.015)$; б – $(2, 0.6, 4.116)$; в – $(3, 0.6, 3.558)$; г – $(4, 0.6, 3.724)$.



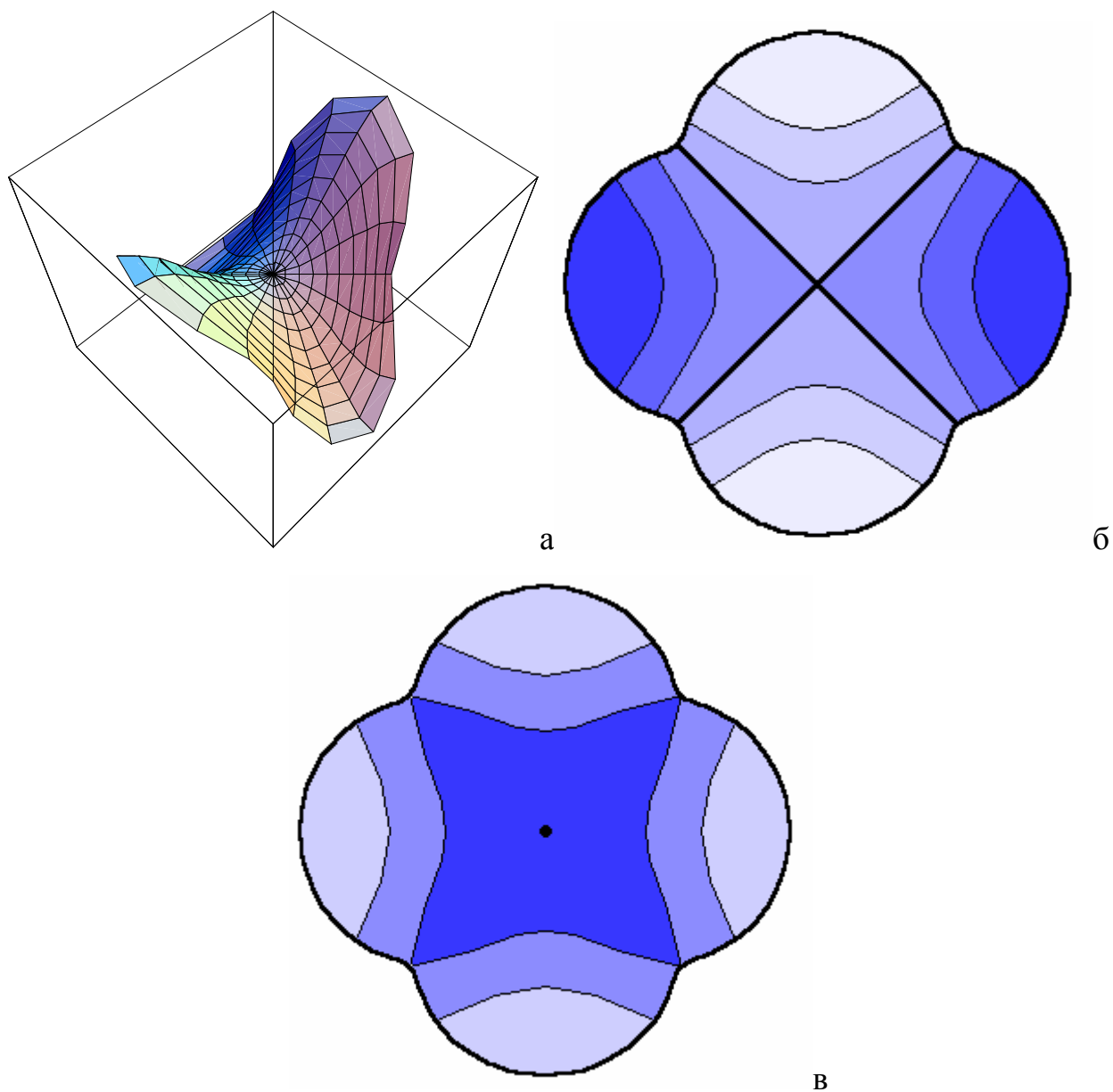
Фиг. 3. Асимметричная мода A_1 в эпитрохоидальном бассейне $(n, \varepsilon, K) = (3, 0.6, 1.674)$: а – карта изовысот моды; б – мода в аксонометрической проекции; в – узловые линии парных мод; г – приливные уклонения на границе бассейна, $\varphi \in [0, 2\pi]$.



Фиг. 4. Амплитуда моды A_1 во вращающейся эпитрохоиде $(n, \varepsilon, K, \alpha) = (3, 0.6, 1.626, 0.165)$: а – её амплитудная поверхность в аксонометрической проекции; б – карта изовысот амплитудной поверхности; в – амплитуда моды на границе бассейна, $\varphi \in [0, 2\pi]$.



Фиг. 5. Моды с нецентральными узловыми линиями: а – карта изовысот моды C_2 в невращающейся эллиптической лемнискате Бута $(p, K)=(2.5, 2.917)$; б – карта изовысот амплитудной поверхности C_2 во вращающейся эллиптической лемнискате Бута $(p, K, \alpha)=(2.5, 2.675, 0.447)$; в – аксонометрическая проекция моды C_3 в невращающейся эпитрохоиде $(n, \varepsilon, K)=(3, 0.6, 4.705)$.



Фиг. 6. Мода C_2 в эпिटрохоиде с четырьмя осями симметрии: а – аксонометрическая проекция моды в невращающейся эпिटрохоиде $(n, \varepsilon, K)=(4, 0.6, 2.633)$; б – карта изовысот моды; в – карта изовысот амплитудной поверхности моды $(n, \varepsilon, K, \alpha)=(4, 0.6, 2.633, 0.433)$ во вращающейся эпिटрохоиде.

6. Вращение. В случае ненулевой угловой скорости вращения бассейна выделим для приливной волны два предельных состояния. Симметричное относительно большой оси состояние назовём косинусоидальной волной $C(x,y)$, а антисимметричное – синусоидальной $S(x,y)$. Эти волны наследуют свойства соответствующих волн невращающегося бассейна. В невращающихся бассейнах существуют также асимметричные моды, исчезающие при появлении ненулевой угловой скорости вращения бассейна. Приливное отклонение ζ в любой момент времени может быть выражено комбинацией косинусоидального и синусоидального состояний:

$$\zeta(x,y) = C(x,y)\cos\sigma t + S(x,y)\sin\sigma t \quad (6.1)$$

Для нахождения значения прилива в любой момент времени достаточно определить лишь две функции $C(x,y)$ и $S(x,y)$.

Рассмотрим вращающийся эллиптический бассейн. Рассматривалось фиксированное значение $2\omega/\sigma=C$. Численные расчёты для различных C и ε вынесены в табл. 7-8. При увеличении как величины эксцентриситета эллипса, так и параметра C происходит изменение порядка следования мод по отношению к случаю круглого невращающегося бассейна.

Различие между вращающимися и невращающимися модами показано на фиг. 7. У вращающихся мод больше амплитуда приливной волны. Основные различия между вращающейся и невращающейся модами имеются у границы бассейна, что связано с различием в краевых условиях, и в расположении точки нулевого прилива – у вращающейся моды эти точки расположены ближе к центру бассейна. На основании фигуры можно сделать вывод, что наличие вращения не влияет качественным образом на форму соответствующих мод.

Вращение влияет на эволюцию моды во времени, при этом эволюция зависит от характера собственной формы. На фиг. 8 изображена мода «седло». У этой моды в центре эллипса высота прилива равна нулю только в конкретные моменты времени $t = (2n-1)\pi/2\sigma$, $n=1,2,3,\dots$, отвечающие состоянию синусоидальной волны. Косинусоидальная волна, контурная карта которой показана

на фиг. 8,а, имеет две непересекающиеся линии нулевой высоты прилива, которые при $\omega = 0$ представляют гиперболы. Через промежуток времени $\pi/2\sigma$ волна поворачивается и становится синусоидальной (фиг. 8,б). В центре эллипса высота прилива становится равной нулю, а линии нулевой высоты прилива образуют крест в центре бассейна, совпадающий с пересекающимися большой и малой осями эллипса. Мода «седло» имеет две амфидромические точки (точки, в которых высота прилива в любой момент времени равна нулю), расположенные на большой оси эллипса.

Все эллиптические моды, прообразы которых в круге имеют нечётное число осей симметрии, имеют в центре бассейна амфидромическую точку. Все эти моды, кроме первой, асимметричны. Эта асимметрия – слабая, так как линии нулевой высоты прилива остаются симметричными. Иллюстрацией этого может служить мода «тройное седло» (фиг. 9). Сама мода (косинусоидальная волна) изображена на фиг. 9,б в аксонометрической проекции. Как косинусоидальная, так и синусоидальная волны имеют три непересекающиеся линии нулевой высоты прилива – одну прямую, совпадающую с малой осью эллипса для косинусоидальной волны (для синусоидальной волны – с большой осью эллипса), и две кривые, сходные с гиперболами. На фиг. 10 изображены колебания высоты прилива в точках на границе бассейна, расположенных через равные углы $2\pi/3$. Видно, что колебания высоты прилива в этих точках асинхронны – мода асимметрична. В круглом бассейне для прообраза этой моды колебания в этих точках синхронны. Мода «тройное седло» имеет пять амфидромических точек, одна из которых совпадает с центром бассейна.

Моды в бассейнах, имеющих две оси симметрии, в большинстве случаев подобны таковым для случая вращающегося эллиптического бассейна. Исключение составляют те моды невыпуклых бассейнов, у которых в косинусоидальном состоянии узловые линии размыкаются. Изменения по сравнению с выпуклыми бассейнами претерпевают и синусоидальные состояния рассматриваемых мод. Следствием этого является изменение числа амфидромических точек соответствующей моды.

Фиг. 4,б, 5,б, 6,в, 12,а показывают распределение амплитуд приливных мод для различных форм бассейнов (изоамплитудные карты). Число осей симметрии линий равных амплитуд любой моды совпадает с числом осей симметрии соответствующего бассейна. Поэтому вид амплитудных поверхностей мало изменяется для различных форм бассейнов и в значительно большей степени зависит от количества и расположения амфидромических точек.

Наиболее существенные изменения относительно случая круглого бассейна среди первых мод претерпевает стоячая волна [2]. В [2] рассматривалась только первая стоячая мода. Для второй стоячей моды изменения оказываются ещё значительнее (фиг. 11). Прообраз этой моды в круглом бассейне имеет круговую симметрию, которая утрачивается в эллиптическом. Построенная мода имеет восемь амфидромических точек. В эллиптическом случае косинусоидальная мода (фиг. 11,в) имеет две седловые точки, расположенные на большой оси эллипса, и две замкнутые линии нулевой высоты прилива, имеющие общий центр симметрии, совпадающий с центром бассейна (напомним, что в невращающемся бассейне эти линии являются софокусными эллипсами).

При наличии вращения в отличие от кругового бассейна для второй стоячей волны не существует момента времени, когда высота прилива всюду равна нулю. На фиг. 11,г показан момент наименьшей высоты прилива, соответствующей случаю всюду нулевого прилива в невращающемся бассейне. Здесь имеется только одна седловая точка – в центре бассейна. В этом положении мода имеет три линии нулевой высоты прилива – одну замкнутую и две пересекающиеся, совпадающие с большой и малой осями эллипса.

При переходе из косинусоидального состояния волны (фиг. 11,а) в синусоидальное в некоторый момент времени внешняя (ближняя к границе) линия нулевого прилива размыкается и превращается в две незамкнутые линии, каждая из которых проходит через две амфидромические точки. При последующей эволюции во времени эти линии сближаются, пересекают

внутреннюю замкнутую линию нулевого прилива и в синусоидальном состоянии (фиг. 11,б) касаются друг друга в центре бассейна, образуя прямой крест. При этом следует обратить внимание, что за промежуток времени $\pi/2\sigma$ мода повернулась на некоторый угол, следовательно, стоячая мода стала движущейся.

7. Разложение волнового поля вблизи амфидромической точки.

Большой прикладной интерес представляют моды с единственной амфидромической точкой, так как они описывают самые медленные колебания. Линии равных амплитуд таких приливных мод заостряются вблизи впадин (мысов) бассейна (фиг. 4,б, 6,в, 7,а), то есть, каждая линия приближается к точкам границы, наименее отстоящим от геометрического центра бассейна (в котором располагается амфидромическая точка) и отдаляется от точек, наиболее отстоящих от центра. Это говорит о том, что значения амплитуды на границе бассейна тем больше, чем дальше граница расположена от амфидромической точки.

Волновое поле вблизи амфидромической точки должно удовлетворять уравнению Гельмгольца [87]. Таким образом, в некоторой окрестности амфидромической точки имеет место формула [87]:

$$Z(\xi) \approx c_m J_m(k\rho_a) \exp(\pm im\varphi_a) \approx a_m \rho_a^m \exp(\pm im\varphi_a),$$

где $\xi = \rho_a \exp(i\varphi_a)$, (ρ_a, φ_a) - полярные координаты с центром в амфидромической точке, а a_m и c_m - некоторые комплексные коэффициенты. Следовательно, для амплитуды прилива в окрестности амфидромической точки будет справедлива формула:

$$|Z(\xi)| \approx c_m J_m(k\rho_a) \approx a_m \rho_a^m \quad (7.1)$$

Амплитуда приливной волны при наличии только одной амфидромической точки во внутренности бассейна хорошо описывается формулой (7.1). В связи с этим представляет интерес вопрос, насколько отличаются реальное решение задачи (1.1) от аппроксимации (7.1). Это иллюстрируют фиг. 12,а,б. Для наибольшей показательности автором выбран

контур весьма сложной конфигурации – четырёхосная усложнённая эпитрохоида. При этом колебания амплитуды граничного прилива (1.1) хотя и значительно превышают таковые для приближения (7.1), но подобны им (фиг. 12,в). Следовательно, аппроксимация (7.1) качественно верно описывает граничный прилив. Однако по сравнению с приближением (7.1) линии равных амплитуд реальной моды имеют более сложную конфигурацию (фиг. 4,б, 6,в, 12,а), особенно вблизи берега, весьма чувствительную к форме бассейна (линии равных амплитуд (7.1) – окружности). Это говорит о том, что более точная чем (7.1) аппроксимация амплитуды должна зависеть от полярного угла φ . Разность между амплитудой и её аппроксимацией $|Z(\xi)| - c_m J_m(k\rho_a)$ имеет вид некоторой седлообразной фигуры с n осями симметрии, сходной с косинусоидальным седлом C_n этого бассейна (фиг. 12,г).

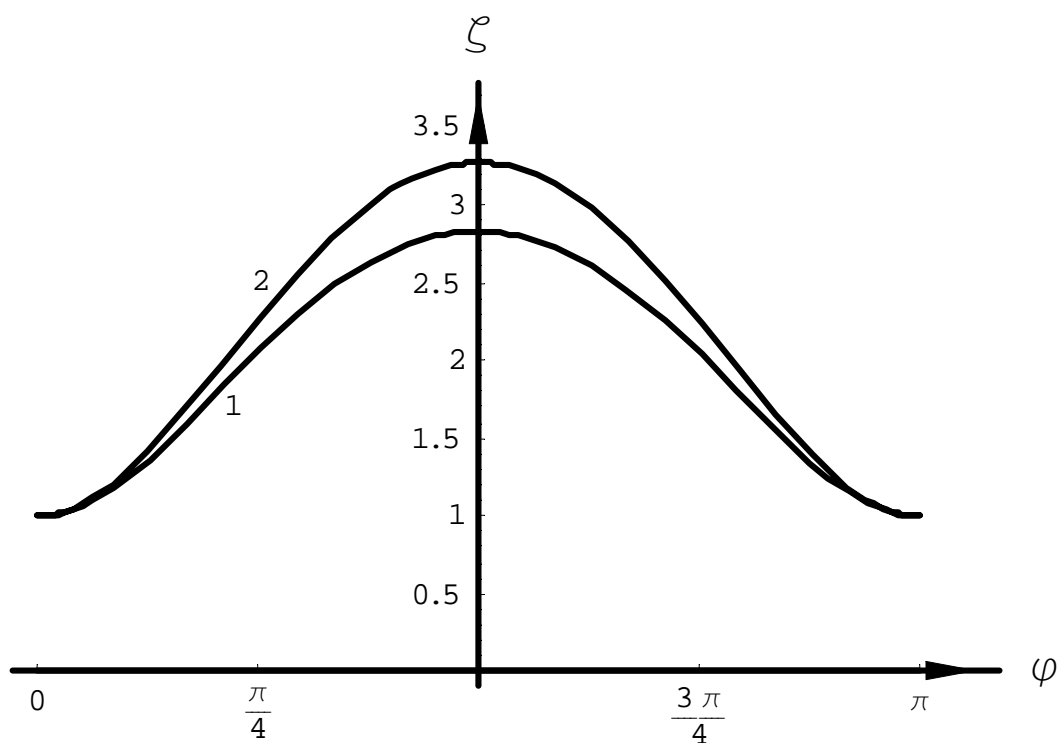
Из сказанного следует, что использование приближения (7.1) оправдано только в малой окрестности амфидромической точки и вблизи границы бассейна (где (7.1) даёт лишь качественное приближение), так как данная аппроксимация не учитывает зависимости амплитуды истинного решения от полярного угла.

Таблица 7

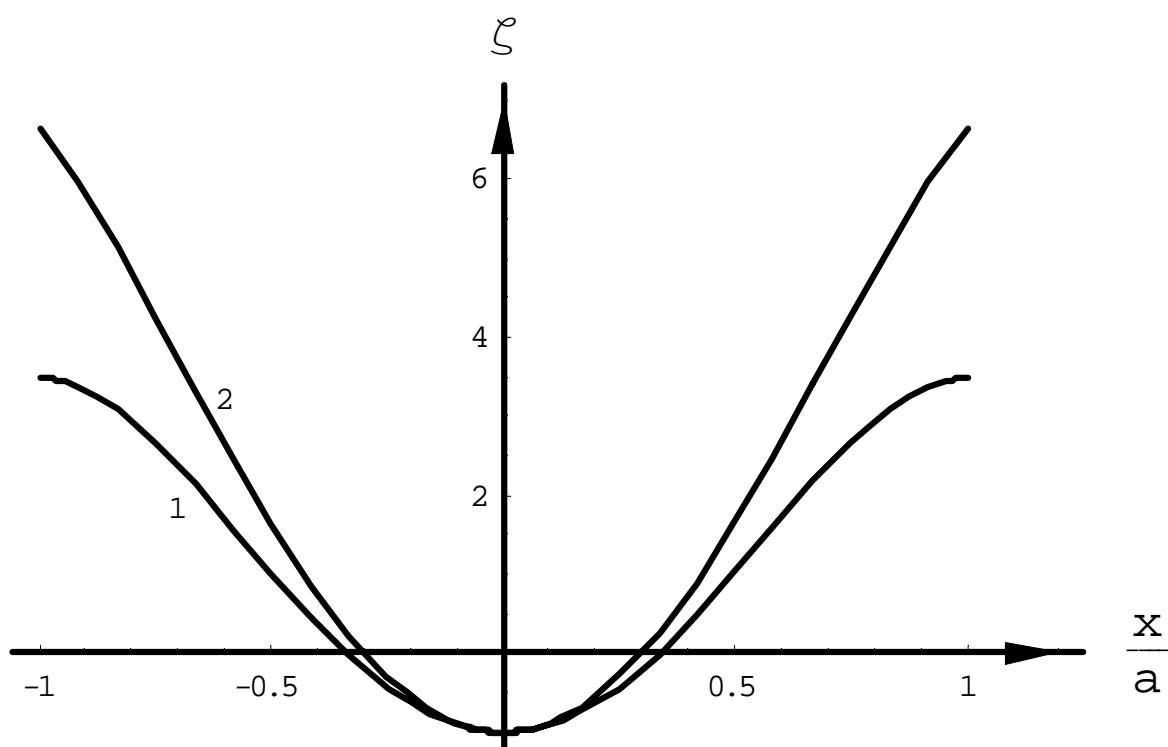
C	C_1	S_1	C_2	S_2	E^1	C_3	S_3	C_1^1	S_1^1
0.02	1.830	1.852	3.034	3.074	3.832	4.173	4.228	5.284	5.328
	1.826	1.856	3.031	3.077	3.832	4.172	4.230	5.282	5.352
0.1	1.783	1.891	2.946	3.151	3.832	4.055	4.331	5.140	5.313
	1.761	1.915	2.934	3.164	3.832	4.047	4.339	5.134	5.481
0.2	1.717	1.933	2.825	3.237	3.832	3.891	4.445	4.938	5.293
	1.674	1.984	2.934	3.164	3.832	4.100	4.295	5.228	5.292
0.5	1.465	1.981	2.362	3.253	3.832	3.426	4.138	4.714	5.020
	1.357	2.166	2.300	3.209	3.832	3.518	4.105	4.773	4.993

Таблица 8

ε	0	0.1	0.25	0.5	0.8	0	0.1	0.25	0.5	0.8
мода	$C = 0$					$C = 0.02$				
C_1	1.841	1.837	1.814	1.723	1.445	1.830	1.829	1.812	1.722	1.445
S_1	1.841	1.845	1.869	1.965	2.311	1.852	1.852	1.871	1.966	2.311
C_2	3.054	3.054	3.051	2.999	2.615	3.034	3.033	3.032	2.993	2.615
S_2	3.054	3.054	3.054	3.064	3.177	3.074	3.074	3.073	3.070	3.178
E^1	3.832	3.832	3.836	3.899	4.429	3.832	3.832	3.836	3.900	4.429
C_3	4.201	4.201	4.200	4.168	3.751	4.173	4.173	4.172	4.147	3.749
S_3	4.201	4.201	4.200	4.183	4.108	4.228	4.228	4.227	4.204	4.109
N	$C = 0.2$					$C = 0.5$				
C_1	1.717	1.717	1.712	1.661	1.413	1.465	1.464	1.460	1.428	1.243
S_1	1.933	1.933	1.938	1.995	2.315	1.981	1.982	1.989	2.036	2.321
C_2	2.825	2.825	2.823	2.801	2.536	2.362	2.362	2.360	2.341	2.170
S_2	3.237	3.237	3.236	3.214	3.204	3.253	3.253	3.251	3.232	3.029
E^1	3.832	3.832	3.836	3.901	4.432	3.832	3.832	3.836	3.909	4.476
C_3	3.891	3.891	3.900	3.869	3.617	3.426	3.426	3.426	3.398	3.340
S_3	4.446	4.446	4.446	4.418	4.157	4.714	4.714	4.714	4.680	4.444

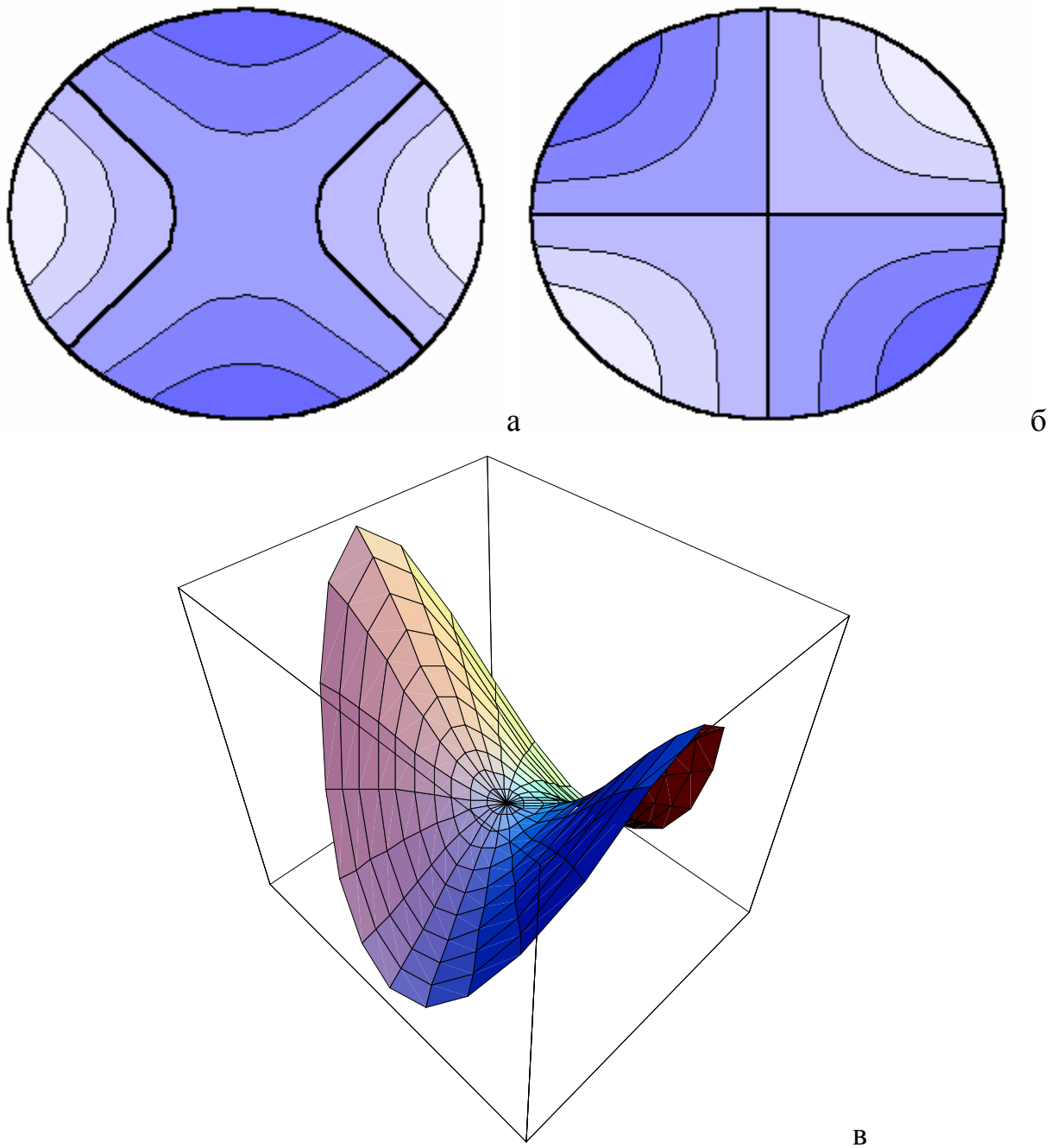


а

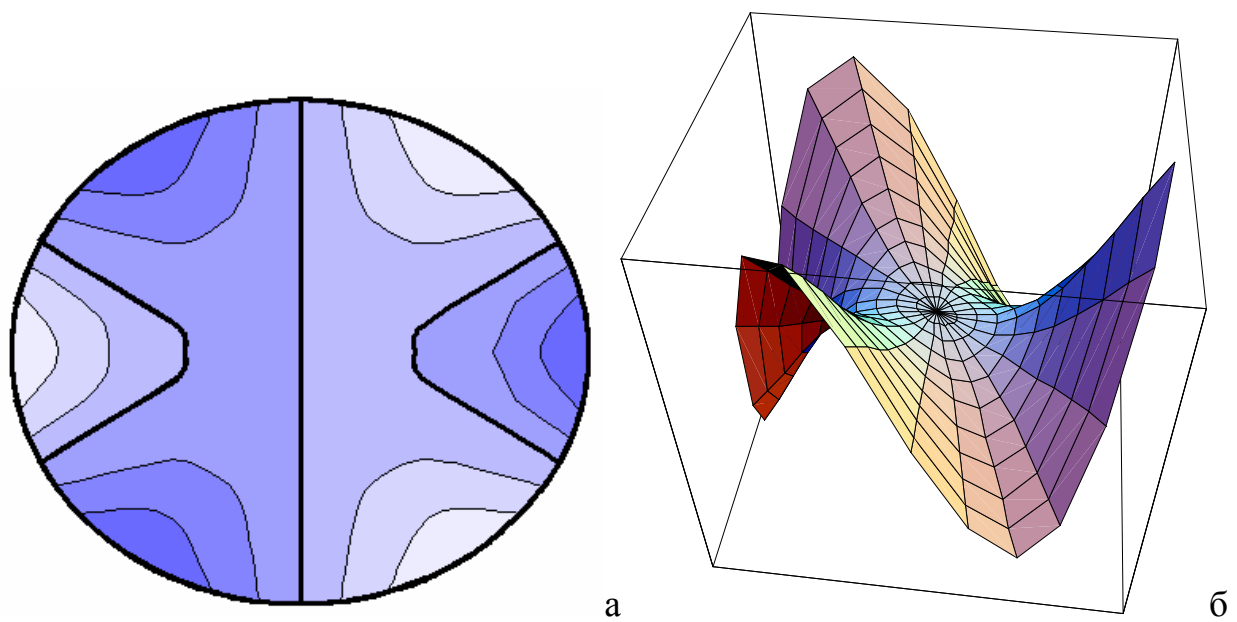


б

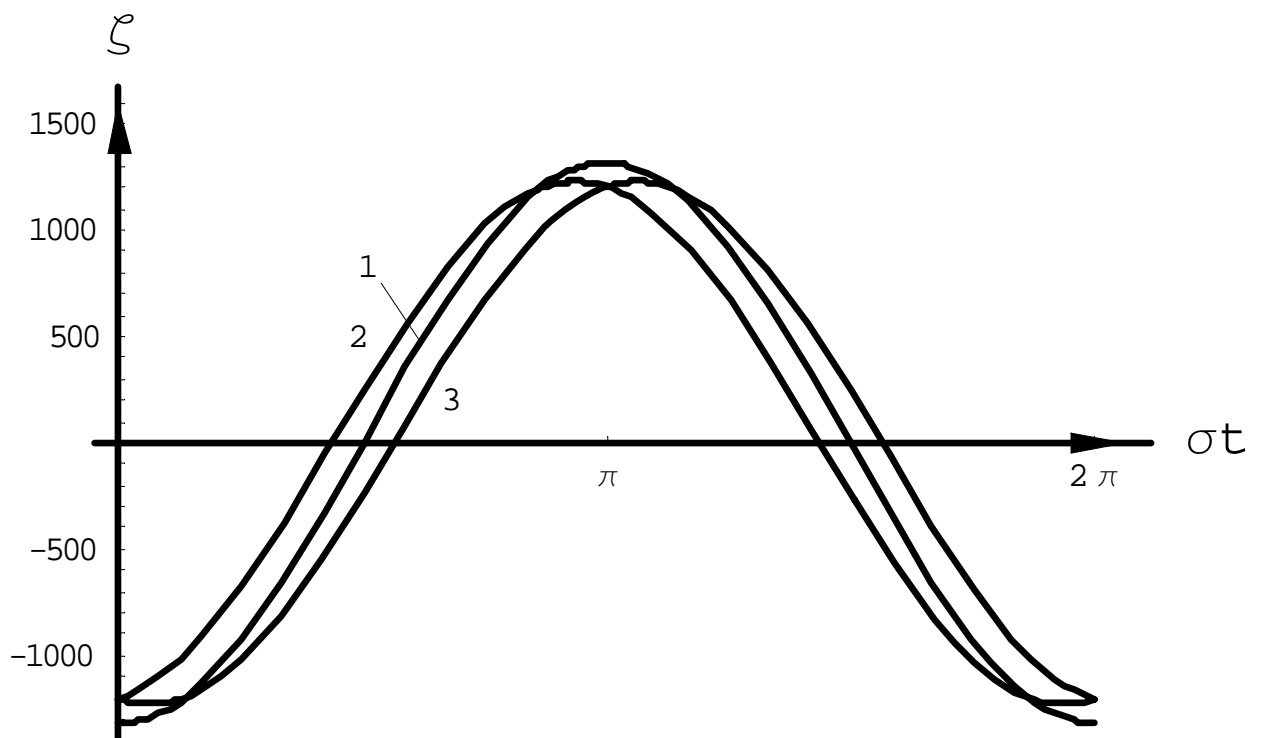
Фиг. 7. Влияние наличия вращения на форму мод ($\varepsilon = 0.5$): а – стоячий прилив на границе эллипса $\partial\Gamma$, $\varphi \in [0, \pi]$: 1 – $(K, \alpha) = (3.899, 0)$, 2 – $(K, \alpha) = (3.909, 3.820)$; б – профиль прилива вдоль большой оси эллипса $x/a \in [-1, 1]$, $y = 0$: 1 – $(K, \alpha) = (2.999, 0)$, 2 – $(K, \alpha) = (2.341, 1.371)$.



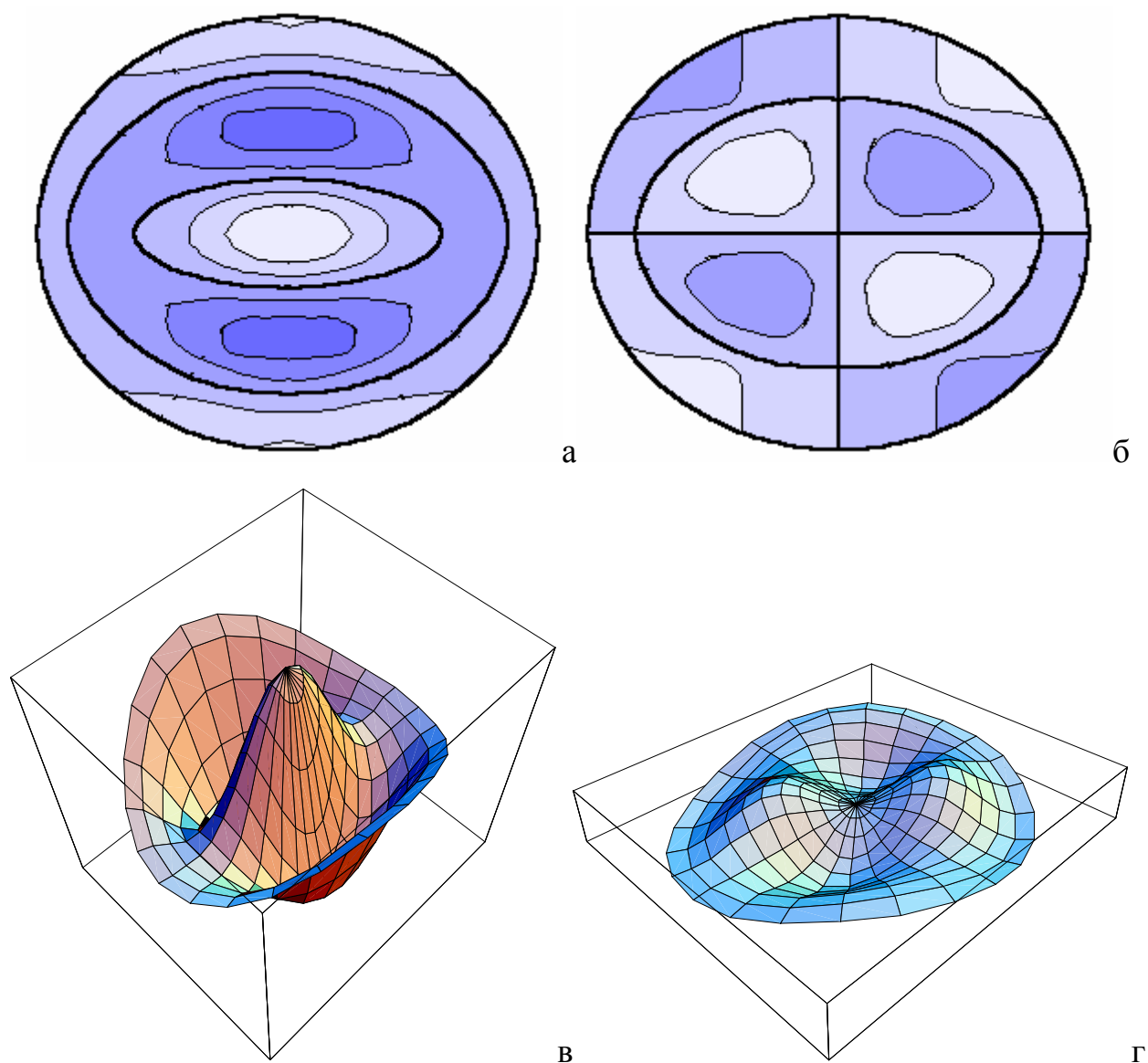
Фиг. 8. Мода «седло» в эллипсе $\varepsilon=0.5$ $(K, \alpha)=(2.341, 1.371)$: а – контурная карта косинусоидальной волны; б – контурная карта синусоидальной волны; в – косинусоидальная волна в аксонометрической проекции.



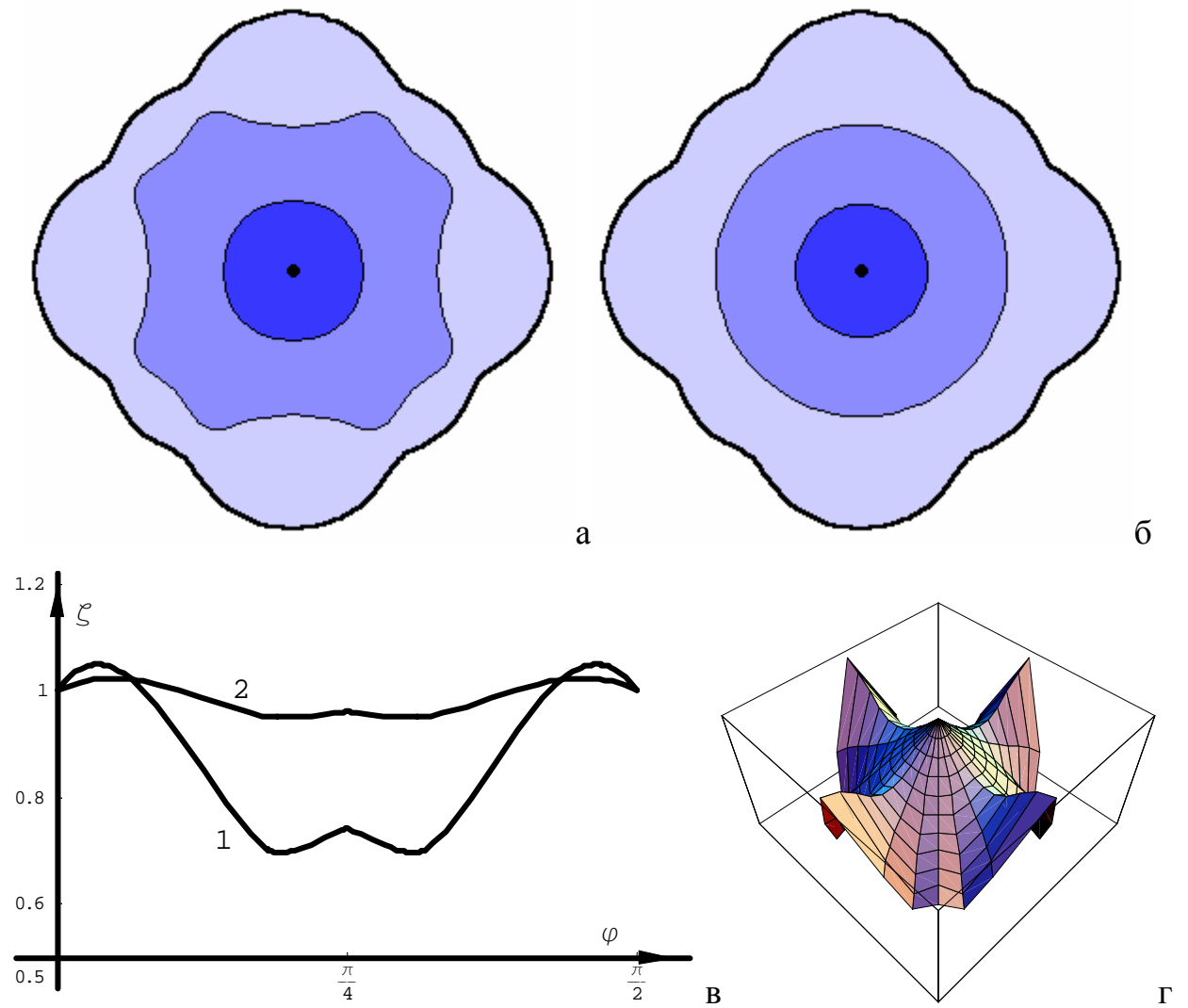
Фиг. 9. Мода «тройное седло» в эллипсе $\varepsilon=0.5$ $(K, \alpha)=(2.424, 1.469)$: а – контурная карта косинусоидальной волны; б – косинусоидальная волна в аксонометрической проекции.



Фиг. 10. Асимметрия моды «тройное седло» в эллипсе $\varepsilon=0.5$ $(K, \alpha)=(3.232, 2.611)$ – колебания высоты прилива в точках границы эллипса $\partial\Gamma$: 1 – $\varphi=0$, 2 – $\varphi=2\pi/3$, 3 – $\varphi=4\pi/3$.



Фиг. 11. Вторая стоячая волна в эллипсе $\varepsilon=0.5$ $(K, \alpha)=(7.296, 13.308)$: а – контурная карта косинусоидальной волны; б – контурная карта синусоидальной волны; в – косинусоидальная волна в аксонометрической проекции; г – синусоидальная волна в аксонометрической проекции.



Фиг. 12. Мода C_1 во вращающейся усложнённой эпитрохоиде $(n, \varepsilon, K, \alpha) = (4, 0.4, 1.776, 0.197)$: а – карта изовысот её амплитудной поверхности; б – карта изовысот аппроксимированной амплитудной поверхности; в – сравнение амплитуд граничного прилива, $\varphi \in [0, \pi/2]$: 1 – истинное решение, 2 – аппроксимация; г – разность между истинным решением и аппроксимацией.

ГЛАВА 3. ПРИЛИВНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА, ВОЛНЫ ГАУРВИЦА И ФОРМУЛА ХАФА

1. Вывод приливного уравнения Лапласа. Выведем уравнение Лапласа из задачи о колебаниях тонкого слоя жидкости на вращающемся шаре. Рассмотрим краевую задачу (1.1.1)-(1.1.4). Введём сферическую систему координат $\{\theta, \varphi, r\}$, вращающуюся вокруг земной оси с постоянной угловой скоростью ω . В сферической системе координат имеем $\Pi = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$, $\chi = r$, $\Omega = (2\omega \cos \theta, -2\omega \sin \theta, 0)$. Будем рассматривать Землю как сферу, покрытую слоем воды, глубина которого h много меньше радиуса Земли a . Тогда (1.1.1) преобразуется к виду [24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta + 2\omega w \sin \theta &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{p}{\rho} + \Pi \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - 2\omega v \sin \theta &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \Pi + gr \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пренебрегая вертикальными скоростями и ускорениями частиц жидкости, проинтегрируем третье уравнение системы (3.1) в пределах от r до ζ , где ζ есть возвышение поверхности жидкости над уровнем равновесного эллипсоида, определяющегося действием гравитационной и центробежной сил, выразим величину $p/\rho + \Pi$ через ζ и подставим в первые два уравнения системы (1.1) [24]. Ввиду малой толщины слоя воды будем полагать, что колебания всех частиц одной вертикали происходят одинаково, что позволяет проинтегрировать уравнение неразрывности (1.1.2) по радиальной координате. Учитывая ма-

лую эллиптичность Земли (1/289) и полагая глубину h постоянной, получим [24, 28, 30]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \theta &= -\frac{g}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \theta &= -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{h}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial (u \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (1.2)$$

Будем искать решения (1.2) в виде гармонических функций $u = Ue^{-i\sigma t}$, $v = Ve^{-i\sigma t}$, $\zeta = Ze^{-i\sigma t}$. Тогда можно свести систему (1.2) к одному уравнению на функцию Z [30]:

$$\begin{aligned}4am\sigma i \sin \theta Z &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h \sin \theta}{f^2 - \cos^2 \theta} \left[2\omega \cot \theta \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - i\sigma \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right] \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h}{f^2 - \cos^2 \theta} \left[2\omega \cos \theta \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\sigma i}{\sin \theta} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right] \right)\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $f = \frac{\sigma}{2\omega}$, $m = \frac{\omega^2 a}{g}$. Введём $\mu = \cos \theta$, $\beta = \frac{4\omega^2 a^2}{gh}$. Будем искать решения

(1.3) в виде $Z = Y(\mu)e^{in\varphi}$. Получим [1, 28, 34]:

$$f \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{\partial Y}{\partial \mu} \right) + \left(\frac{n(f^2 + \mu^2)}{(f^2 - \mu^2)^2} - \frac{n^2 f}{(1 - \mu^2)(f^2 - \mu^2)} + \beta f \right) Y = 0 \quad (1.4)$$

Здесь обозначено: θ - коширота, ω - угловая скорость вращения планеты, σ - угловая скорость волны, n - широтное волновое число (число волн на параллели), g - ускорение свободного падения, a - радиус планеты, h - эквивалентная глубина. Уравнение (1.4) есть приливное уравнение Лапласа.

В дальнейшем подвергнем изучению уравнение (1.4). Будем рассматривать сферу, целиком покрытую водой. Механически это наиболее интересный случай, однако его исследование представляет значительную математическую

трудность, т.к. в область значений переменной μ входят полюса сферы, являющиеся особыми точками уравнения (1.4).

Уравнение (1.4) не инвариантно относительно замен n на $-n$ и f на $-f$, но инвариантно относительно их синхронной замены. Это означает, что отрицательным значениям n отвечают волны, распространяющиеся против направления вращения Земли. Поэтому, не ограничивая общности, можно рассматривать лишь положительные значения n .

Рассмотрим неосесимметричные колебания $n \geq 1$. Граничными условиями для сферы, целиком покрытой водой, будут условия [34]:

$$Y(\pm 1) = 0 \quad (1.5)$$

Это очевидно ввиду того обстоятельства, что при $n \geq 1$ на сфере существует по меньшей мере один меридиан, значение волнового возмущения на котором всегда равно нулю, а такой меридиан обязан пройти через оба полюса сферы.

Задача (1.4), (1.5) представляет собой сингулярную обобщённую задачу Штурма-Лиувилля, причём в общем случае уравнение (1.4) имеет 4 особые точки: полюса сферы $\mu = \pm 1$ и так называемые критические широты $\mu = \pm f$. Когда $|f| > 1$, количество особых точек сокращается до двух (полюса сферы).

2. Волны Гаурвица. При $\beta = 0$ уравнение (1.4) имеет точные решения, известные как волны Гаурвица [12, 55, 86, 102]:

$$\begin{aligned} f_n^s &= -\frac{n}{(n+s+1)(n+s+2)} \\ Y_n^s &= \frac{s+2}{(2n+2s+3)(n+s+2)^2} P_{n+s+2}^n(\mu) + \\ &+ \frac{2n+s+1}{(2n+2s+3)(n+s+1)^2} P_{n+s}^n(\mu) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $n > 0$ - широтное волновое число, $s \geq -1$ - номер моды (азимутальное волновое число), $P_s^n(\mu)$ - присоединённые (ненормированные) функции

Лежандра. Как можно видеть, все собственные частоты для случая невращающейся планеты отрицательны и при этом находятся в интервале $[-1/2, 0)$. Пронормированные собственные функции показаны на фиг. 13. Количество нулей каждой моды равно модулю азимутального волнового числа и возрастает по мере увеличения периода (за исключением самой быстрой волны, имеющей один нуль на экваторе, азимутальное число которой равно -1). Две моды имеют один нуль, их азимутальные волновые числа есть 1 и -1 . С ростом s экстремумы мод смещаются к полюсам, а возвышение вблизи экватора приближается по абсолютной величине к нулю. Симметричные моды около экватора имеют характерный М-образный профиль. В случае наличия нескольких экстремумов, максимальную величину из них имеет ближайший к полюсу. Таким образом, волны Гаурвица являются в некотором смысле полярными.

3. Формула Хафа. Собственные частоты уравнения Лапласа на всей сфере были достаточно подробно исследованы аналитически [59, 60, 81, 102]. Хафом была получена формула для приближённого нахождения собственных частот в этом случае [60]:

$$f^2 \frac{k(k+1) + nf^{-1}}{k^2(k+1)^2} - \frac{(k-1)^2(k-n)(k+n)}{k^2(2k-1)(2k+1)(k(k-1) + nf^{-1})} - \frac{(k+2)^2(k-n+1)(k+n+1)}{(k+1)^2(2k+1)(2k+3)((k+1)(k+2) + nf^{-1})} = \frac{1}{\beta} \quad (3.1)$$

Здесь $k \geq n$ - целое число. Отметим, что формула (3.1) получена удержанием нескольких членов в разложении решения по сферическим функциям и является неуточняемой.

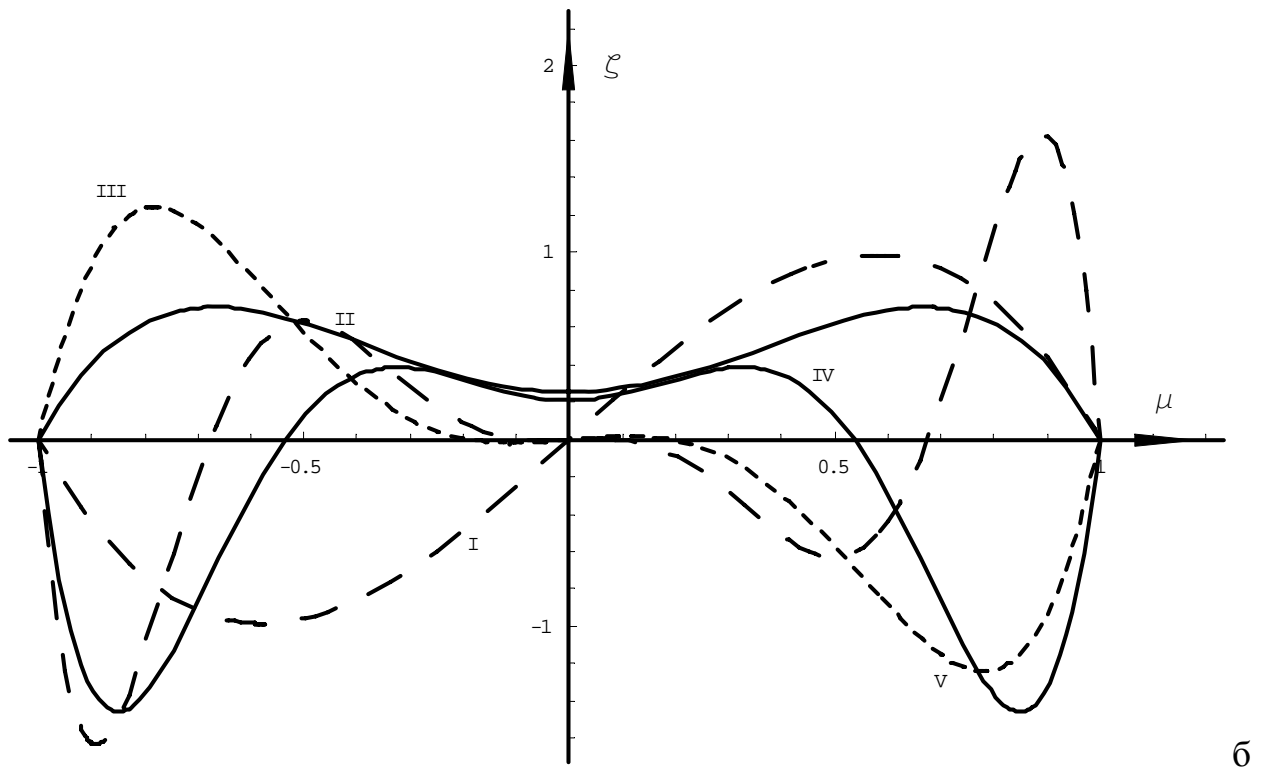
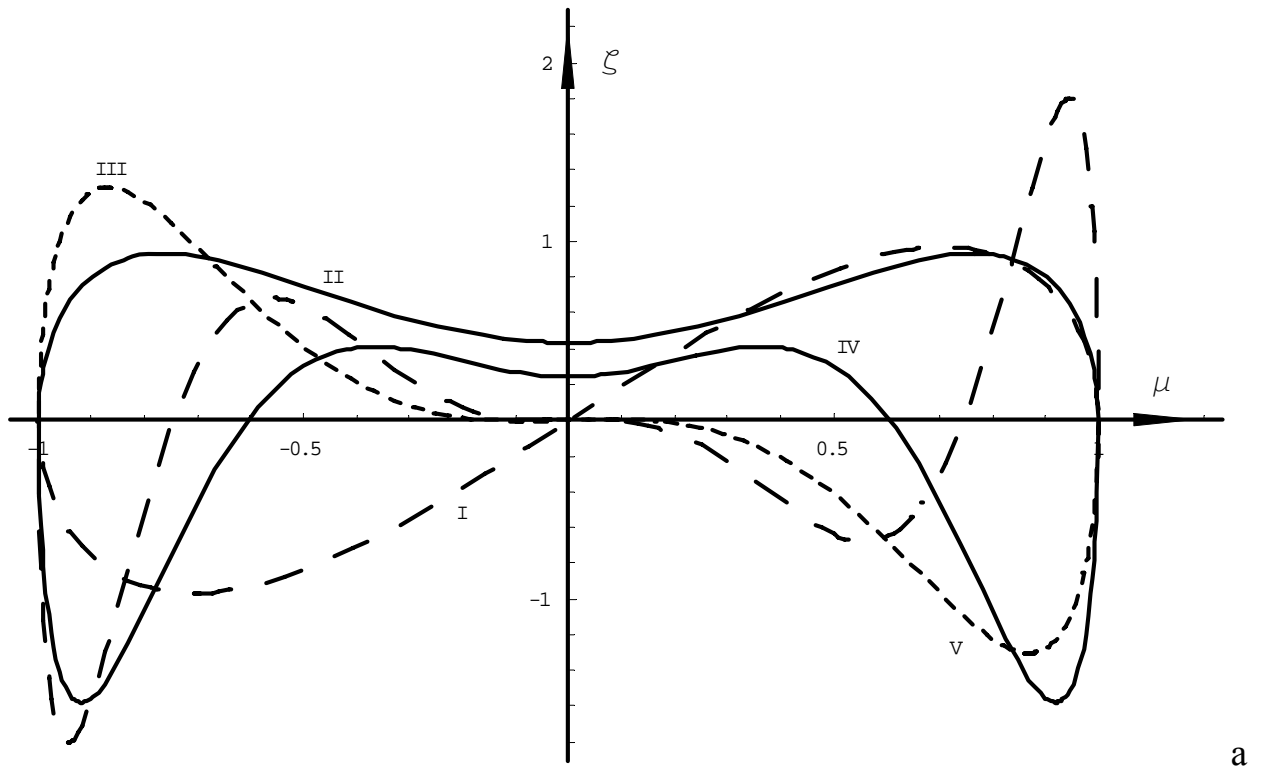
Зафиксируем β . Аналитическое исследование формулы (3.1) показывает, что для каждого конкретного значения n и k собственная частота f принимает 4 различных значения, 3 из которых отрицательны, а 1 – положительно (за исключением случаев $n = 0$ и $k = n$). Собственные колебания принято разделять на два рода [30]. К колебаниям первого рода относят два больших по модулю

корня уравнения (3.1), один из которых положителен, а другой – отрицателен (отрицательный корень по абсолютной величине больше). Им отвечают короткопериодические волны, движущиеся как в направлении вращения Земли, так и против него (вторые имеют меньший период обращения). В осесимметричном случае ($n = 0$) других колебаний нет (уравнение (3.1) имеет только 2 равных по модулю корня разных знаков), притом положительная и отрицательная волны имеют равный период. Эти колебания в случае неосесимметричных колебаний дополняются колебаниями второго рода, которые соответствуют двум меньшим по модулю отрицательным корням уравнения (3.1) (им отвечают волны, при стремящейся к нулю скорости вращения Земли переходящие в волны Гаурвица (2.1)). Частоты этих колебаний образуют уплотняющийся вблизи нуля спектр, а сами волны всегда движутся против направления вращения Земли. Периоды колебаний второго рода всегда превышают сутки. При $n = k$ уравнение Хафа имеет только 3 корня: два отрицательных и один положительный.

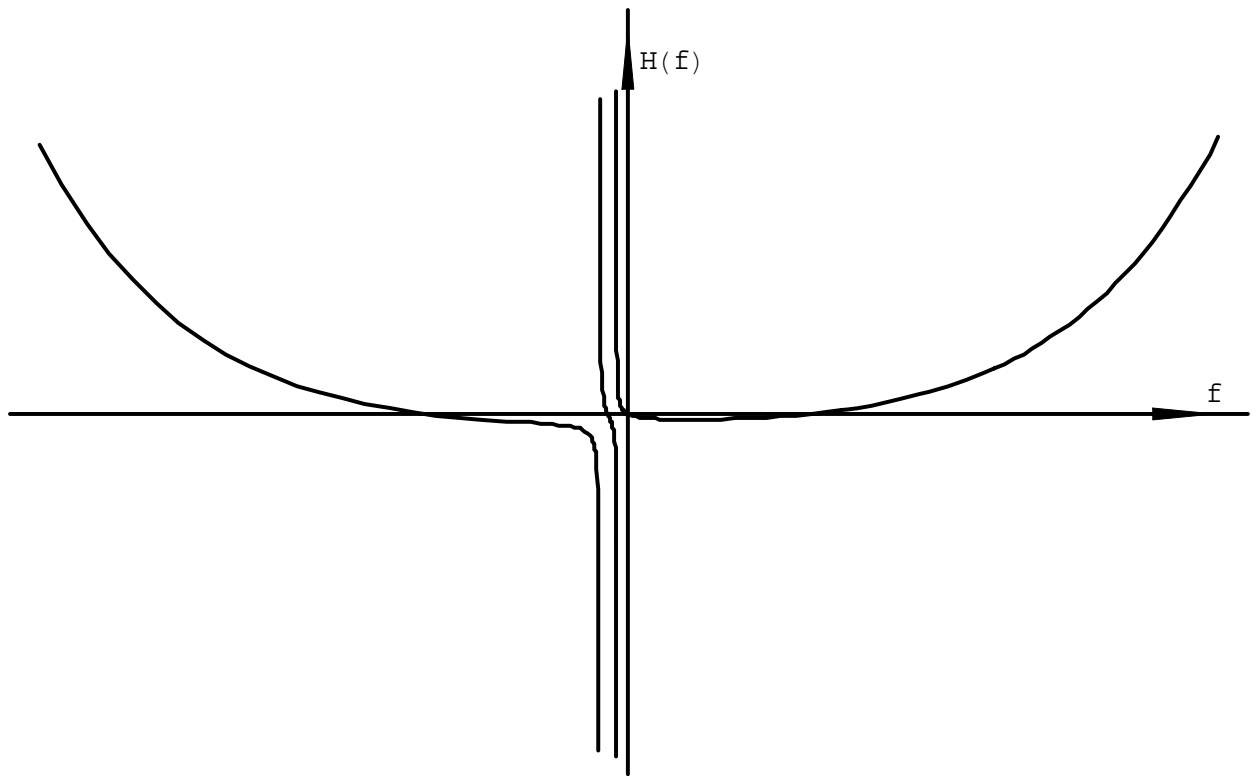
На фиг. 14 качественно показано поведение функции, определяющейся левой частью формулы (3.1) (в случае неосесимметричных колебаний). Собственные частоты находятся при пересечении графика с горизонтальной прямой $1/\beta$. Крайние ветви графика соответствуют колебаниям первого рода (их общей асимптотой является парабола), средние – колебаниям второго рода (асимптоты – вертикальные прямые, отвечающие частотам волн Гаурвица). Можно видеть, что частоты колебаний второго рода ограничены сверху по модулю, а частоты колебаний первого рода с ростом $1/\beta$ стремятся к бесконечности.

В дальнейшем будем называть безразмерный параметр β гироскопическим числом. Гироскопическое число с точностью до постоянного множителя представляет собой отношение кинетической энергии частицы атмосферы (или океана), движущейся с ней как единое целое, к потенциальной энергии этой частицы, приобретаемой ей при подъёме в поле силы тяжести планеты на величину эквивалентной глубины (которая для океана просто равна его реальной глубине). Поэтому для медленно вращающихся планет (например, Венеры) гироскопическое число близко к нулю, а для быстро вращающихся (например,

Юпитера) – велико [9]. Для Земли (как для атмосферы, так и для океана) гироскопическое число имеет порядок около единицы.



Фиг. 13. Волны Гаурвица R_i для значений $\{i, f\}$: а – $n=1$ ($1 - \{-1, -1/2\}$, $2 - \{0, -1/6\}$, $3 - \{1, -1/12\}$, $4 - \{2, -1/20\}$, $5 - \{3, -1/30\}$); б – $n=2$ ($1 - \{-1, -1/3\}$, $2 - \{0, -1/6\}$, $3 - \{1, -1/10\}$, $4 - \{2, -1/15\}$, $5 - \{3, -1/21\}$).



Фиг. 14. Качественное поведение функции $H(f)$, определяющейся левой частью формулы Хафа.

ГЛАВА 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИЛИВНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА. ФУНКЦИИ ХАФА.

1. Интегрирование задачи на собственные значения. Рассмотрим особые точки уравнения (3.1.4). Согласно теории Фукса они являются регулярными особыми точками, а поведение интегралов уравнения (3.1.4) будет определяться значениями корней характеристического уравнения [22, 31]. Для полюсов шара характеристические показатели равны $n/2$ и $-n/2$, откуда следует, что один из фундаментальных интегралов всегда будет голоморфен, тогда как другой будет на полюсе обращаться в бесконечность.

Построим в окрестности полюса шара ряд Фукса для голоморфного решения. Воспользуемся приближённым равенством $1 - \mu^2 \approx 2(1 \oslash \mu)$, $\mu \rightarrow \pm 1$, чтобы получить выражение, пригодное для обоих полюсов. Тогда имеем

$$\begin{aligned} F(\mu) = & (1 - \mu^2)^{\frac{n}{2}} + \\ & + \frac{n(2 - f + f^2) + n^2 f(1 + f) + 2\beta f(1 - f)(1 + f)^2}{8(n + 1)f(1 + f)} (1 - \mu^2)^{\frac{n}{2} + 1} + \\ & + O\left((1 - \mu^2)^{\frac{n}{2} + 2}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $F(\mu)$ – всюду голоморфный фундаментальный интеграл уравнения Лапласа. Аналогичное разложение в окрестности обоих полюсов сферы было получено ещё Эккартом [34], но использовалось лишь для качественного исследования уравнения Лапласа, собственные частоты и моды не вычислялись.

Второй фундаментальный интеграл обращается в особые точки в бесконечность, т.к. будет содержать член $(1 - \mu^2)^{-n/2}$ [31], и поэтому должен быть отброшен, как не имеющий физического смысла.

Рассмотрим теперь критические широты. Для любого n характеристические показатели критических широт равны 2 и 0. Отсюда следует, что один интеграл будет голоморфен, а другой – ограничен вместе со своей первой производной. Следовательно, любое решение уравнения Лапласа будет конечно на критической широте.

Зафиксируем β , f и n . Удержим в ряде (1.1) несколько первых членов. Обозначим такой ряд как $F^*(\mu)$. (В описанном ниже численном решении автором удерживались первые два члена). В малой окрестности $[\mu_0, 1]$ конечный ряд $F^*(\mu)$ совпадает с искомой функцией $Y(\mu)$ с точностью до членов высших порядков малости (не ограничивая общности, можно рассматривать только одно полушарие), где μ_0 – некоторое число, близкое к единице.

Составим граничные условия

$$Y(\mu_0) = F^*(\mu_0) \quad (1.2)$$

$$Y'(\mu_0) = F^{*'}(\mu_0) \quad (1.3)$$

Решение краевой задачи (1.1)-(1.3) при фиксированном f ($|f| \neq 1$) может быть проведено стандартными численными методами, например, методом Рунге-Кутты. Оно даёт набор функций, зависящих от f . Гармоники задачи (3.1.4), (3.1.5) (называемые функциями Хафа) обязательно должны быть симметричны или антисимметричны. Легко видеть, что других мод быть не может. Требуя выполнения одного из условий

$$Y(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$Y'(0) = 0 \quad (1.5)$$

получаем соответствующие собственные функции (условию (1.4) удовлетворяют антисимметричные моды, а условию (1.5) – симметричные). Устремляя $\mu_0 \rightarrow 1$, получаем решения спектральной задачи (3.1.4), (3.1.5).

Численная реализация метода показала, что получающиеся собственные значения и формы обладают устойчивостью к включению в формулу (1.1) более старших членов ряда Фукса и уменьшению радиуса окрестности полюса сферы, где решение уравнения Лапласа заменяется этим рядом, что подтверждает корректность разработанного метода.

2. Частоты и моды для небольших гироскопических чисел. Для малых гироскопических чисел собственные частоты хорошо аппроксимируются формулой Хафа (3.3.1) [60]. При $\beta \rightarrow 0$ собственные частоты колебаний первого рода стремятся к значениям

$$f_n^s = \sqrt{\frac{(n+s)(n+s+1)}{\beta}}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

а моды – к функциям Лежандра [33]:

$$\Theta_n^s = P_{n+s}^n(\mu) \quad (2.2)$$

Собственные частоты и моды колебаний второго рода близки к частотам и волнам Гаурвица.

С увеличением гироскопического числа формула Хафа становится менее точной, но в диапазоне реальных гироскопических чисел для Земли и землеподобных планет всё ещё даёт вполне удовлетворительные результаты. (Отмеченное справедливо, если исследуются только собственные колебания; изучение вынужденных колебаний требует решать задачу в гораздо более широком диапазоне гироскопических чисел, включая и отрицательные значения). Ниже построены табл. 9-11, позволяющие оценить точность формулы Хафа. В них сравнены частоты собственных колебаний на всей сфере, вычисленные по формуле (3.3.1) и соответствующие результаты численного интегрирования краевой задачи (3.1.4), (3.1.5) для значений $\beta = \beta_0/3$, β_0 и $3\beta_0$, соответственно, где $\beta_0 = 19.648$ – числовое значение безразмерного параметра β , отвечающее средней глубине мирового океана [3]. Можно видеть, что рост β приводит к снижению собственной частоты, а переход к большим значениям n – напротив, к увеличению собственной частоты (за единственным исключением).

При малых β или больших n точность формулы Хафа следует признать весьма высокой. С другой стороны, сравнение таблиц показывает, что формула Хафа даёт лишние (продублированные) собственные частоты, относящиеся к колебаниям второго рода.

Отметим, что во вторых половинах табл. 9-11 гармоники сгруппированы иначе, чем принято в литературе [30]. К колебаниям первого рода относятся P-, FN- и SN-волны, к колебаниям второго рода – R-волны и I-волна (R_{-1}). Основаниями для такой классификации служат свойства гармоник.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Нижним индексом будем обозначать число нулей гармоники в промежутке между двумя полюсами (сами полюса, в которых мода обращается в нуль вследствие краевых условий (3.1.5), в счёт брать не будем). Младшей модой класса будем называть моду, имеющую наименьшее число нулей, старшей – соответственно, имеющую наибольшее.

В самом общем виде последовательность волн, движущихся как по (первая строка), так и против направления вращения Земли (последующие строки), с возрастанием абсолютной величины собственного числа выглядит так

$$\begin{aligned} &P_0, P_1, P_2, \dots \\ &\dots, R_2, R_1, R_0, I=R_{-1}, SN_2, SN_3, \dots, SN_i, FN_{i-1}, FN_i, FN_{i+1}, \dots \\ &(\dots, R_2, R_1, R_0, I=R_{-1}, SN_2, FN_1, FN_2, FN_3, \dots; \\ &\dots, R_2, R_1, R_0, I=R_{-1}, FN_0, FN_1, FN_2, \dots) \end{aligned}$$

В скобках представлены возможные варианты при малых i . Нижняя последовательность отвечает случаю, когда SN-волны отсутствуют (как, например, в табл. 9 для $n = 2, 3$).

Волны, направление движения которых совпадает с направлением вращения Земли, обозначены как P-волны («положительные волны»). В литературе их относят к классу гравитационных волн [102, 107]. Они отличаются друг от друга только числом нулей и для рассмотренных значений β сходны с тригонометрическими функциями (а не с присоединёнными функциями Лежандра), т.к. имеют по сути равные величины экстремумов (фиг. 15). Самая младшая

мода этого класса (P_0), известная как волна Кельвина [102, 107], обращается в нуль только на полюсах шара.

Долгопериодные моды, движущиеся в отрицательном направлении (R-волны), суть волны Россби (фиг. 16), аналогичные волнам Гаурвица п.3. Рост β приводит к смещению к экватору экстремумов соответствующих мод. В литературе их относят к классу гироскопических волн [102, 107].

Следующая за R_0 гармоника - I-волна (её также можно обозначить как R_{-1} , фиг. 16). Она, как и волны Россби, относится к колебаниям второго рода (класс R-волн), но имеет смысл выделить её в отдельный подкласс «промежуточных волн», т.к. по ряду свойств она отличается от обычных R-волн. Эта волна представляет собой антисимметричное колебание с единственным нулём на экваторе, сходное с модой P_1 . Кроме того, эта гармоника единственная во всём спектре, частота которой понижается при переходе к большим значениям n . Эта мода известна как смешанная гравитационно-гироскопическая волна [102, 107].

Вид P- и R-волн при $n=2$ аналогичен случаю $n=1$ и потому соответствующие фигуры не показаны. Единственное качественное отличие заключается в характере подхода моды к полюсу, который определяется по (1.1).

Класс SN-волн относится уже к первому роду. Периоды волн данного класса не могут быть меньше полусуток, поэтому возможен случай, когда в спектре SN-волны будут отсутствовать. Если же они присутствуют, младшая SN-мода всегда симметрична и имеет два нуля между полюсами и экстремум на экваторе, с повышением частоты количество нулей увеличивается (фиг.17). Ближайший к полюсу экстремум SN-моды, расположенный вблизи критической широты, чаще всего по величине гораздо меньше, чем остальные экстремумы.

Значение $f = -1$ – критическое, при переходе через него свойства мод меняются. Волны с $f < -1$ обозначены как FN-волны (фиг.17). В отличие от SN-волн они имеют почти равные экстремумы (что, видимо, связано с отсутствием критической широты) и сходны с P-волнами. При этом у младшей FN-

моды всегда на один нуль меньше, чем у старшей SN-моды. У последующих FN-мод количество нулей растёт. Эта особенность может привести к ситуации, когда почти идентичные по форме гармоника (и движущиеся в одном и том же направлении) отвечают сильно различающимся значениям собственной частоты. Как SN-, так и FN-моды относят к классу гравитационных волн [102, 107]. В принципе, SN- и FN-моды представляют собой подклассы одного класса – N-волн (короткопериодических колебаний, движущихся против направления вращения планеты).

Таблица 9

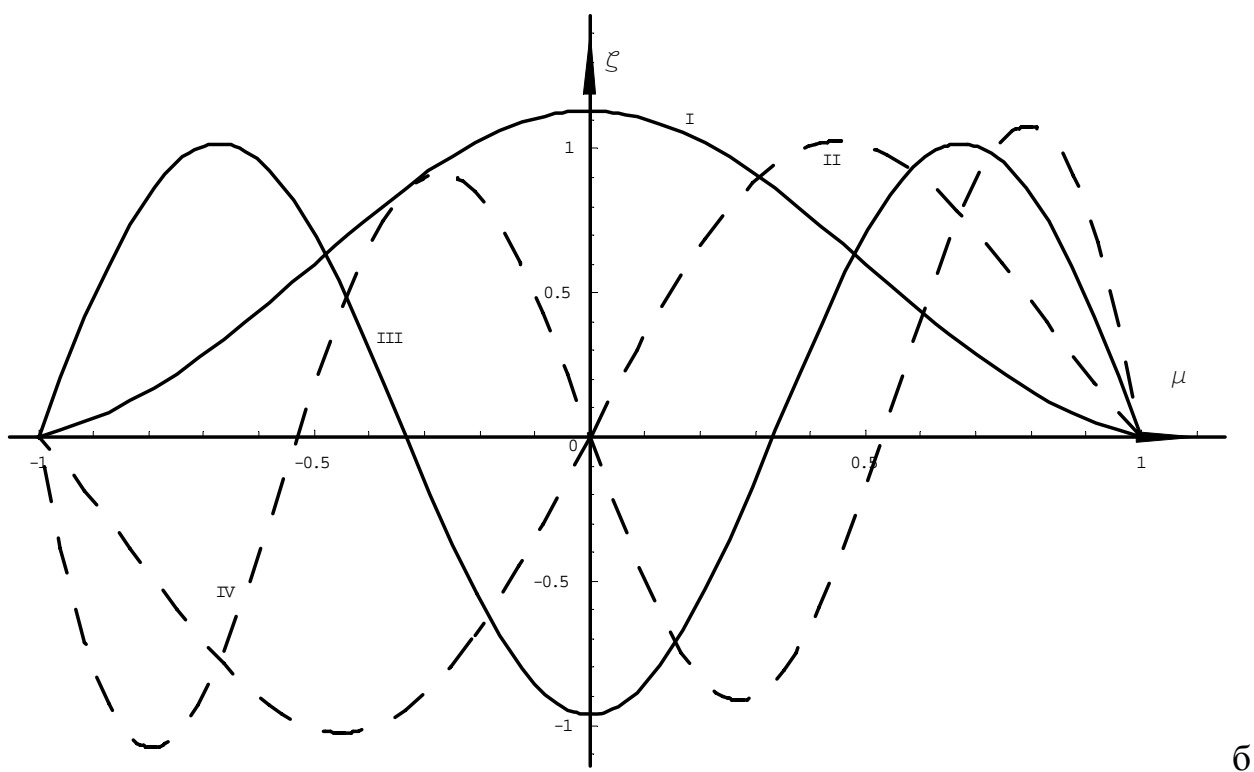
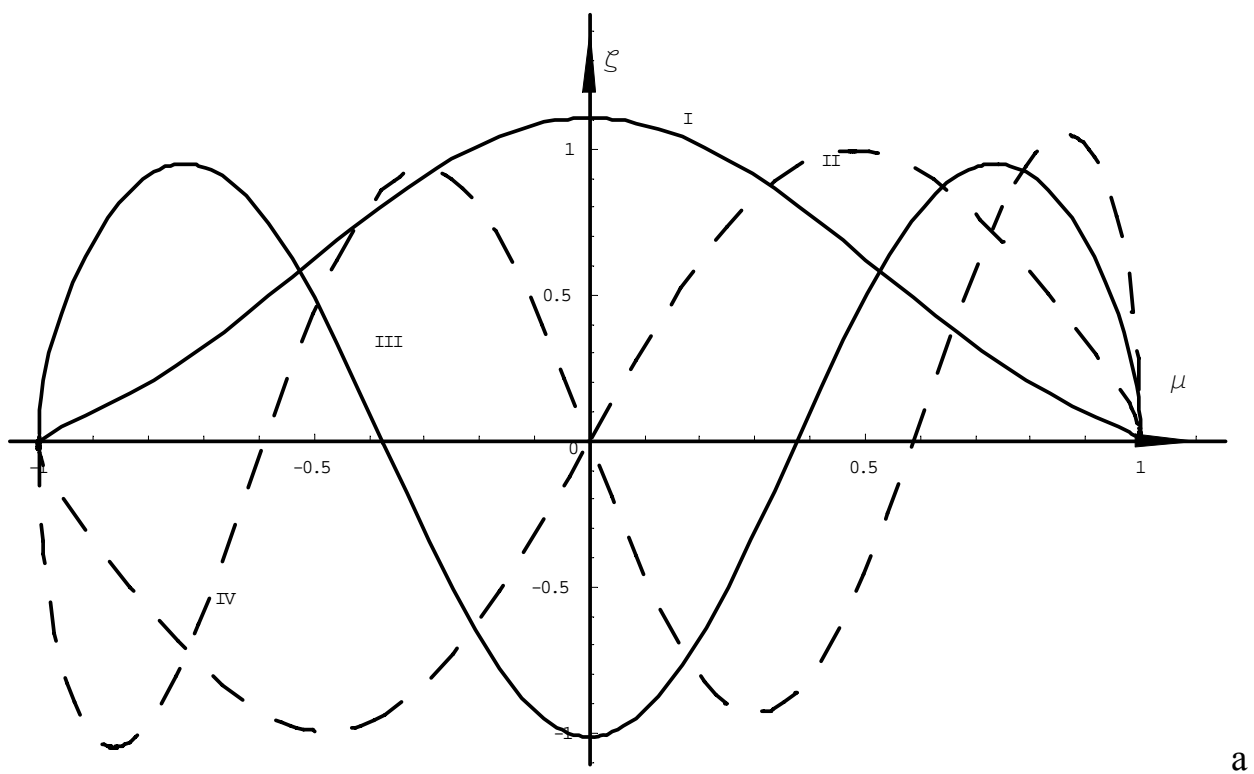
n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.440	-0.990	-	-0.117	0.434	-0.109	-	-0.970	-
1	1	1.017	-1.262	-0.437	-0.068	1.010	-0.065	-0.436	-	-1.252
1	2	1.452	-1.556	-0.152	-0.044	1.450	-0.043	-	-	-1.559
1	3	1.845	-1.902	-0.078	-0.031	1.845	-0.030	-	-	-1.905
1	4	2.229	-2.266	-0.048	-0.023	2.230	-0.022	-	-	-2.267
2	0	0.858	-1.211	-	-0.147	0.855	-0.140	-	-	-1.200
2	1	1.368	-1.564	-0.314	-0.091	1.365	-0.088	-0.314	-	-1.558
2	2	1.798	-1.911	-0.158	-0.062	1.797	-0.061	-	-	-1.911
2	3	2.200	-2.273	-0.096	-0.045	2.200	-0.044	-	-	-2.274
2	4	2.593	-2.644	-0.065	-0.034	2.593	-0.034	-	-	-2.645
3	0	1.268	-1.527	-	-0.142	1.267	-0.138	-	-	-1.523
3	1	1.741	-1.903	-0.242	-0.095	1.739	-0.093	-0.242	-	-1.901
3	2	2.165	-2.272	-0.145	-0.069	2.164	-0.067	-	-	-2.272
3	3	2.570	-2.645	-0.097	-0.052	2.569	-0.051	-	-	-2.645
3	4	2.966	-3.022	-0.070	-0.041	2.966	-0.040	-	-	-3.022

Таблица 10

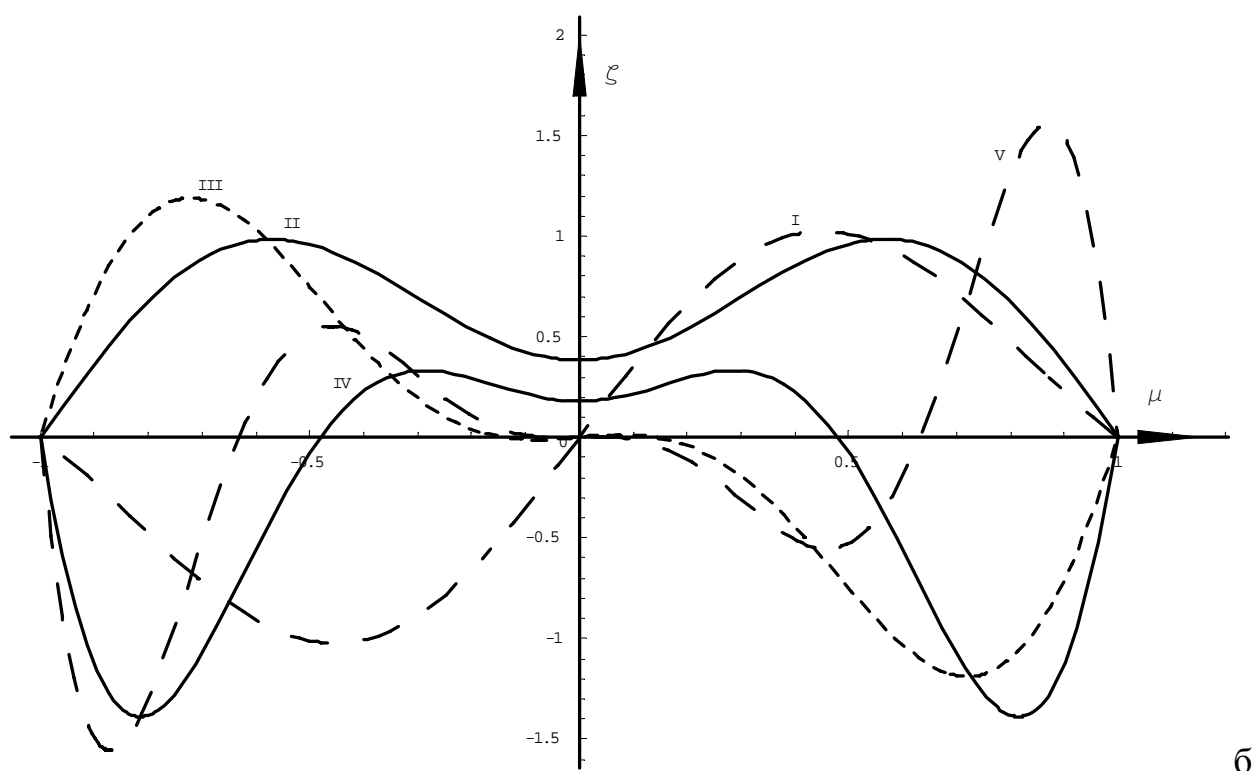
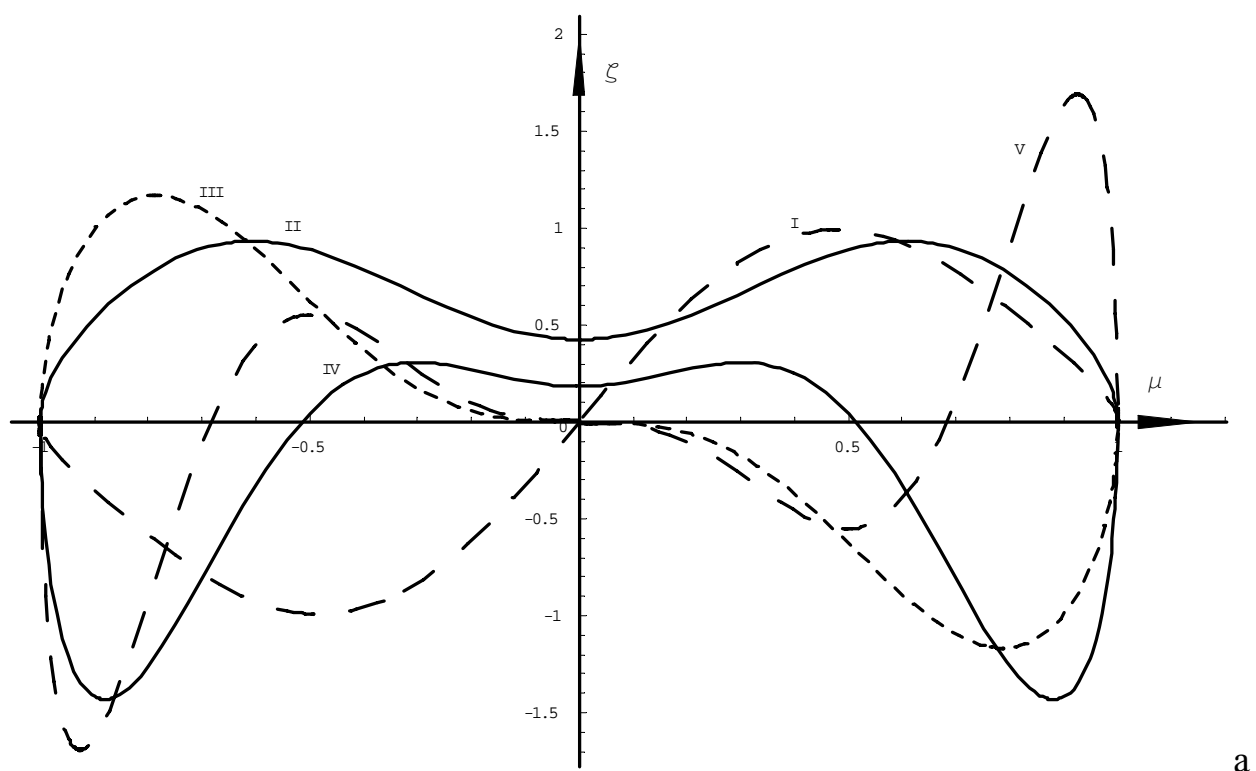
n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.255	-0.843	-	-0.079	0.240	-0.072	-	-0.765	-
1	1	0.678	-0.997	-0.382	-0.049	0.652	-0.046	-0.372	-0.955	-
1	2	0.957	-1.084	-0.137	-0.036	0.943	-0.033	-	-	-1.102
1	3	1.181	-1.248	-0.072	-0.027	1.179	-0.025	-	-	-1.260
1	4	1.393	-1.435	-0.045	-0.020	1.394	-0.019	-	-	-1.441
2	0	0.487	-0.867	-	-0.120	0.478	-0.110	-	-0.836	-
2	1	0.849	-1.082	-0.290	-0.076	0.835	-0.071	-0.288	-	-1.059
2	2	1.120	-1.251	-0.148	-0.055	1.112	-0.051	-	-	-1.250
2	3	1.355	-1.438	-0.091	-0.041	1.353	-0.039	-	-	-1.440
2	4	1.579	-1.635	-0.062	-0.032	1.579	-0.030	-	-	-1.638
3	0	0.719	-0.991	-	-0.129	0.714	-0.120	-	-0.978	-
3	1	1.043	-1.225	-0.231	-0.086	1.033	-0.081	-0.231	-	-1.213
3	2	1.307	-1.427	-0.139	-0.063	1.303	-0.060	-	-	-1.423
3	3	1.547	-1.630	-0.093	-0.049	1.545	-0.047	-	-	-1.630
3	4	1.776	-1.837	-0.067	-0.039	1.776	-0.037	-	-	-1.838

Таблица 11

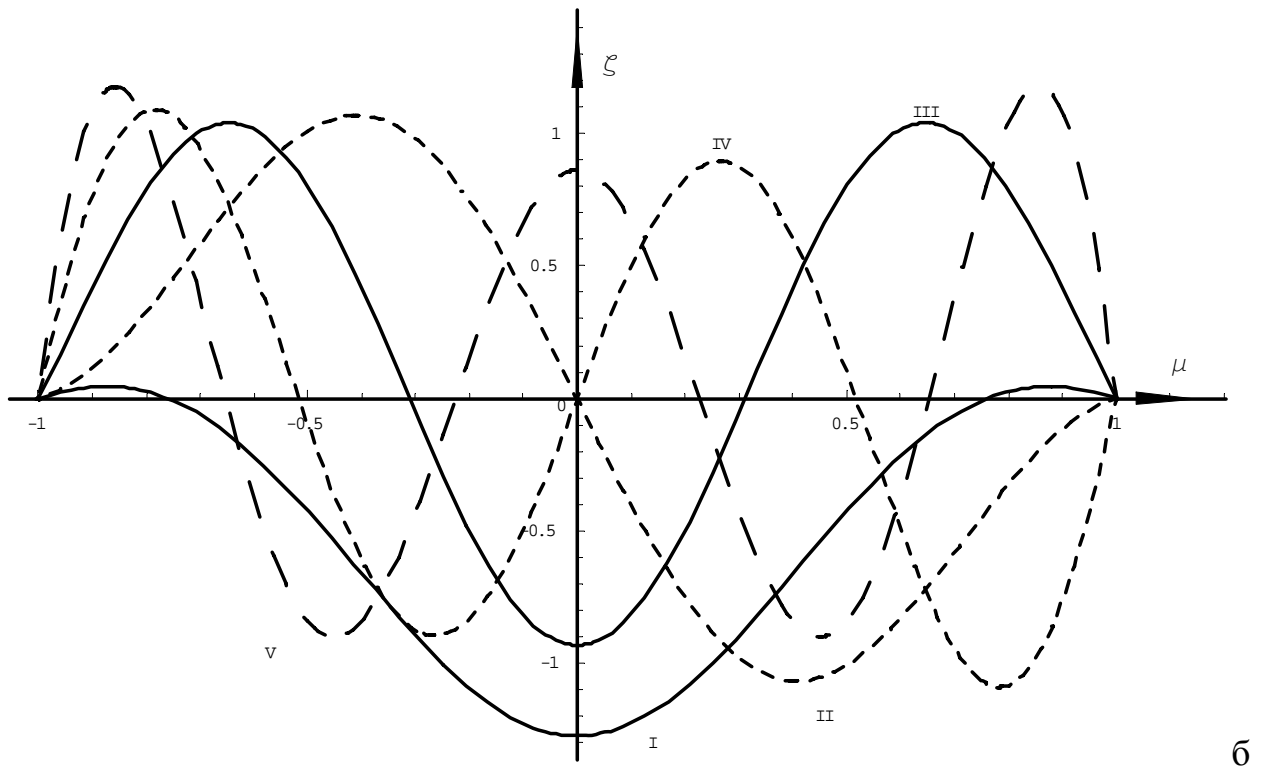
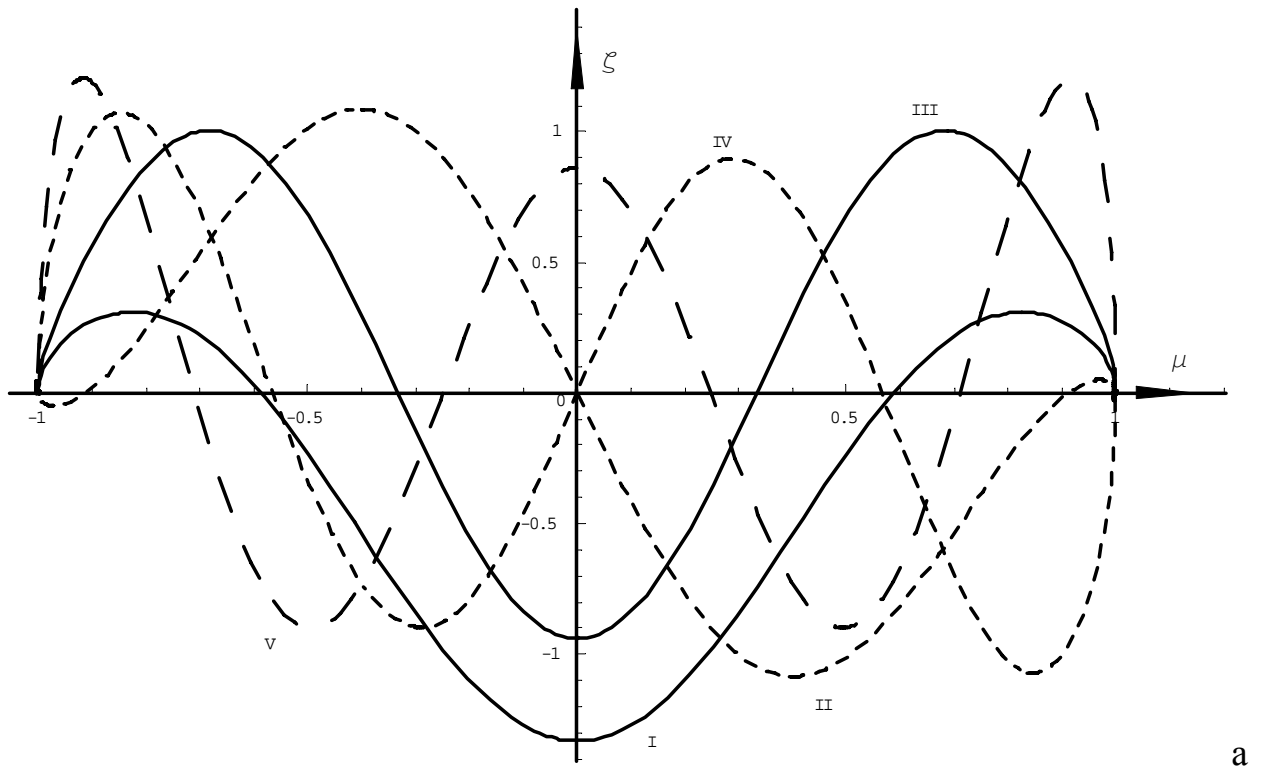
n	$k-n$	Колебания первого рода		Колебания второго рода		P	R	I	SN	FN
1	0	0.163	-0.786	-	-0.044	0.135	-0.043	-	-0.598	-
1	1	0.517	-0.902	-0.338	-0.027	0.448	-0.027	-0.302	-0.764	-
1	2	0.719	-0.874	-0.123	-0.022	0.667	-0.020	-	-0.882	-
1	3	0.851	-0.934	-0.065	-0.018	0.828	-0.016	-	-0.971	-
1	4	0.965	-1.016	-0.042	-0.015	0.960	-0.014	-	-	-1.048
2	0	0.292	-0.710	-	-0.082	0.269	-0.074	-	-0.617	-
2	1	0.583	-0.870	-0.262	-0.051	0.541	-0.048	-0.250	-0.786	-
2	2	0.772	-0.933	-0.134	-0.039	0.741	-0.036	-	-0.914	-
2	3	0.916	-1.015	-0.083	-0.031	0.900	-0.029	-	-	-1.020
2	4	1.042	-1.109	-0.057	-0.026	1.037	-0.024	-	-	-1.119
3	0	0.419	-0.717	-	-0.102	0.404	-0.092	-	-0.671	-
3	1	0.671	-0.890	-0.214	-0.066	0.644	-0.062	-0.210	-0.840	-
3	2	0.852	-0.994	-0.128	-0.050	0.831	-0.046	-	-0.975	-
3	3	0.999	-1.097	-0.087	-0.040	0.988	-0.037	-	-	-1.093
3	4	1.133	-1.203	-0.063	-0.033	1.128	-0.030	-	-	-1.205



Фиг. 15. Положительные волны $P_i \{i, f\}$: а – $n=1$ (I – $\{0, 0.240\}$, II – $\{1, 0.652\}$, III – $\{2, 0.943\}$, IV – $\{3, 1.179\}$); б – $n=2$ (I – $\{0, 0.478\}$, II – $\{1, 0.835\}$, III – $\{2, 1.112\}$, IV – $\{3, 1.353\}$).



Фиг. 16. Волны Россби $R_i \{i, f\}$: а – $n=1$ (I – $\{-1, -0.372\}$, II – $\{0, -0.072\}$, III – $\{1, -0.046\}$, IV – $\{2, -0.033\}$, V – $\{3, -0.025\}$); б – $n=2$ (I – $\{-1, -0.288\}$, II – $\{0, -0.110\}$, III – $\{1, -0.071\}$, IV – $\{2, -0.051\}$, V – $\{3, -0.039\}$).



Фиг. 17. Отрицательные волны: а – $n=1$ (I – $\{SN_2, -0.765\}$, II – $\{SN_3, -0.955\}$, III – $\{FN_2, -1.102\}$, IV – $\{FN_3, -1.260\}$, V – $\{FN_4, -1.441\}$); б – $n=2$ (I – $\{SN_2, -0.836\}$, II – $\{FN_1, -1.059\}$, III – $\{FN_2, -1.250\}$, IV – $\{FN_3, -1.440\}$, V – $\{FN_4, -1.638\}$).

3. Волны для больших гироскопических чисел. Рассмотрим случай больших (более 1000) положительных гироскопических чисел. Такие гироскопические числа возникают при исследовании собственных колебаний атмосфер планет-гигантов (или в задаче о вынужденных колебаниях).

Известны две асимптотики для собственных частот при больших β [13, 81]. В [13] для интегрирования приливного уравнения Лапласа использовался метод Цваана, заимствованный из квантовой механики. В итоге частоты были найдены с неопределёнными знаками, а для собственных функций были найдены асимптотики с ветвлением, содержащие эллиптический интеграл. С использованием численных данных автором записаны формулы Дикого с определёнными знаками, а соответствующие моды – классифицированы.

В [81] построена другая асимптотика для собственных частот. Для её получения приливное уравнение Лапласа интегрировалось через сфероидальные функции. Кроме того, Лонге-Хиггинс получил явные выражения собственных форм.

Для волны Кельвина P_0 асимптотики имеют вид (1 – асимптотика Дикого, 2 – асимптотика Лонге-Хиггинса):

$$1. f = \frac{n}{\sqrt{\beta}}; \quad 2. f = \frac{n}{\sqrt{\beta}} + \frac{n}{4\beta} \quad (3.1)$$

Главные члены асимптотик тождественны. Собственная форма (нормированная) согласно [81] выражается как:

$$\Theta(\mu) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{\operatorname{erf}(\sqrt[4]{\beta})}} \sqrt[8]{\beta} \exp\left(-\frac{\sqrt{\beta} \mu^2}{2}\right) \quad (3.2)$$

Для прочих положительных волн P_k , $k=1,2,\dots$ имеем:

$$1. f = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4(2k-1)^3 \sqrt{\beta}}}{2(2k-1)\sqrt{\beta}}; \quad 2. f = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt[4]{\beta}} + \frac{n}{2(2k-1)\sqrt{\beta}} \quad (3.3)$$

Здесь также главные члены совпадают (а также совпадает и следующий). Собственные формы (ненормированные) выражается через полиномы Эрмита:

$$\Theta(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{\beta}\mu^2}{2}\right) \left((k-1)H_{k-2}\left(\sqrt[4]{\beta}\mu\right) - \frac{1}{2}H_k\left(\sqrt[4]{\beta}\mu\right) \right) \quad (3.4)$$

Для отрицательных волн N_k , $k=2,3,\dots$ имеем:

$$1. f = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4(2k-1)^3\sqrt{\beta}}}{2(2k-1)\sqrt{\beta}}; 2. f = -\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt[4]{\beta}} - \frac{n}{2(2k-1)\sqrt{\beta}} \quad (3.5)$$

Можно видеть, что асимптотика собственной частоты по Лонге-Хиггинсу получается переменной знака из асимптотики (3.3), а собственные формы согласно [81] определяются по (3.4), т.е., совпадают с таковыми для P_k при одном и том же k .

Для волны R_{-1} имеем асимптотику

$$1. f = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4\sqrt{\beta}}}{2\sqrt{\beta}} \quad (3.6)$$

В [81] асимптотика для R_{-1} отсутствует.

Для остальных волн Россби R_k , $k=0,1,\dots$ асимптотики Дикого и Лонге-Хиггинса совпадают и имеют вид:

$$f = -\frac{n}{(2k+3)\sqrt{\beta}} \quad (3.7)$$

Соответствующие собственные формы (ненормированные) записываются как

$$\Theta(\mu) = \frac{1}{\sqrt[4]{\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{\beta}\mu^2}{2}\right) \left(H_k\left(\sqrt[4]{\beta}\mu\right) + \frac{1}{2(k+2)}H_{k+2}\left(\sqrt[4]{\beta}\mu\right) \right) \quad (3.8)$$

В табл. 12 представлены значения собственных частот приливного уравнения Лапласа для гироскопического числа равного 1200 (по Голицыну и Дикому оно соответствует условиям Юпитера) при $n=1-4$. В скобках приведены соответствующие собственные частоты по Дикому и Лонге-Хиггинсу. Можно сделать вывод о высокой точности рассмотренных асимптотик. Собственные

частоты для широкого диапазона положительных гироскопических чисел представлены в табл. 13.

Из табл. 12 видно, что частоты N-волн практически не зависят от широтного волнового числа n (и для Р-волн имеется лишь слабая зависимость, за исключением волны P_0). При этом формулы Дикого показывают незначительное уменьшение абсолютной величины для собственного числа N-волн с ростом широтного волнового числа, в то время как формула Лонге-Хиггинса говорит об обратной тенденции (что находится в согласии с численными результатами). Характер поведения собственных частот соответствует выводам, полученным в п.2 этой главы для небольших значений гироскопического числа, а именно: с увеличением n все частоты растут, кроме частоты волны R_{-1} , которая падает.

Отметим, что волна P_0 имеет очень малую частоту, что в [13] послужило причиной ошибочно отнести её к колебаниям второго рода. Действительно, в пределе при устремлении гироскопического числа к нулю эта мода не стремится к одному из течений Гаурвица с конечной частотой, что определяет волны второго рода, и, кроме того, из фигур, приведённых ниже, ясно, что форма этой моды типична для Р-волны.

Соответствующие моды приведены на фиг. 18-20 (для $n=1$ и $n=2$). Во всех случаях мы имеем волны, существенно отличные от нуля лишь в узкой приэкваториальной зоне [9, 81]. Волны для различных значений широтного волнового числа практически ничем не отличаются друг от друга и визуально неотличимы. Этот вывод можно сделать хотя бы из того обстоятельства, что в выражения для асимптотик функций Хафа (3.2), (3.4) и (3.8) не входит широтное волновое число. Объяснение этого явления, очевидно, связано с тем, что все волны локализованы вблизи экватора, тогда как значение n характеризует степень подхода функции Хафа к полюсу, согласно (1.1). Кроме того, многие функции Хафа имеют почти одинаковые собственные частоты. Аналогичные графики функций Хафа второго рода были построены в [9, 81]. Все моды, в от-

личие от случая небольших гироскопических чисел, имеет явно неравные величины экстремумов.

Сравнение асимптотик и численных решений при $\beta=1200$ показывает их близость. Относительная погрешность, введённая как квадратичная норма разности численного решения и асимптотики (и асимптотика, и численное решение предварительно были пронормированы на единицу), для мод, показанных на фиг. 18-20, не превысила 0.1, а для волны Кельвина – даже 0.01. Естественно ожидать, что с ростом гироскопического числа эта погрешность будет ещё снижаться. Увеличение как широтного волнового числа, так и азимутального приводит к расхождению между асимптотикой и численным решением.

С ростом периода (и азимутального волнового числа) у волн Россби увеличивается область, в которой они существенно отличны от нуля, при этом их значения в экваториальной области уменьшаются (фиг. 21,а), так что две колебательные области начинают разделяться областью относительного покоя. С дальнейшим увеличением широтного волнового числа приходим к фиг. 21,б, где волны Россби заполняют и околополярные области, подобно случаю небольших гироскопических чисел. То же самое происходит и с колебаниями первого рода (фиг. 22). С ростом собственной частоты колебательные области также продвигаются к полюсам, но разница с фиг. 21 заключается в том, что нет области относительного покоя.

Т.к. мы сейчас рассматриваем моды с большим числом экстремумов, построим огибающие для каждой изучаемой функции Хафа (фиг. 23), построенные полиномиальной интерполяцией экстремумов. Из их рассмотрения видно, что значение частоты $|f|=1$ является критическим – при переходе через него кривизна огибающей меняется на противоположную: при $|f|<1$ огибающая имеет выпуклость, обращённую вверх, а при $|f|>1$ выпуклость обращена вниз. При этом при удалении от критического значения эти свойства огибающей проявляются всё ярче. Имеется одно общее свойство всех огибающих волн первого рода – они принимают почти постоянные значения на большом участке

около экватора, и резко уходят вверх или вниз вблизи полюса. У огибающих волн второго рода (выпуклых вверх) это свойство отсутствует, т.е. все экстремумы имеют явно различные значения величины.

Таблица 12

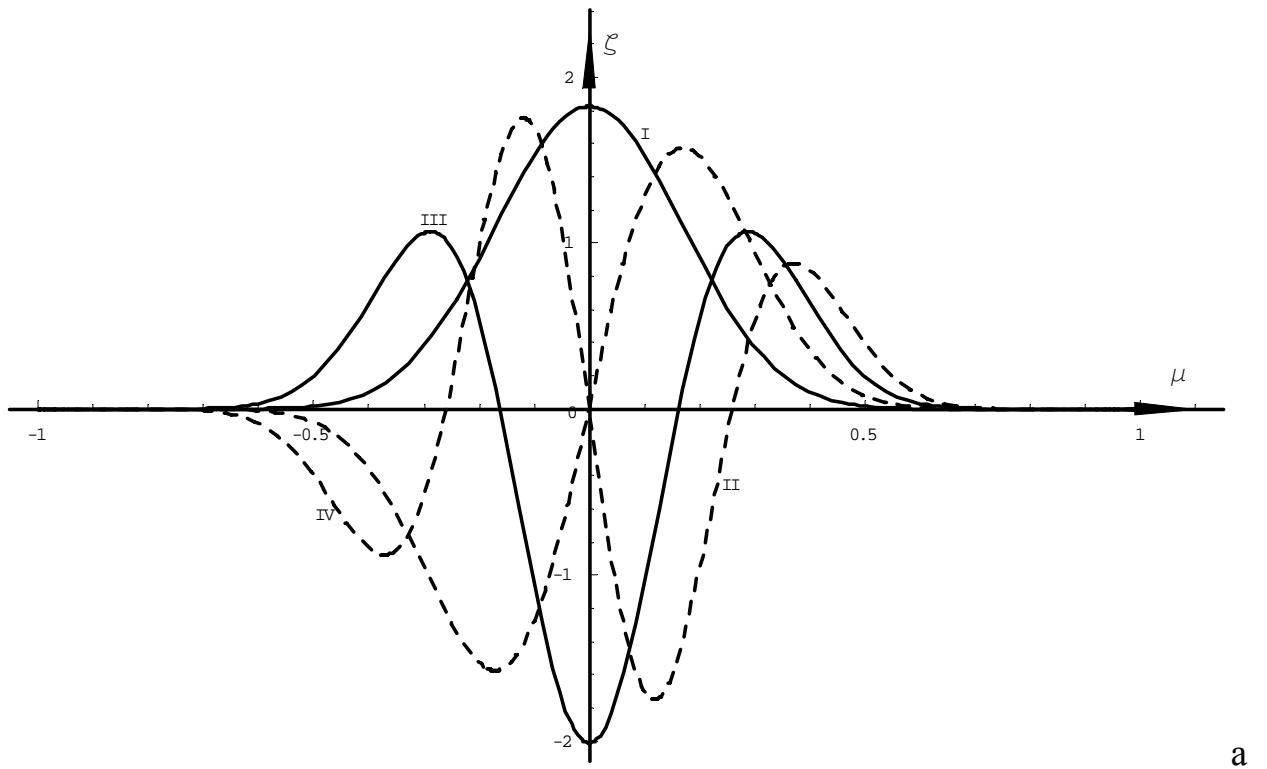
<i>n</i>	1	2	3	4
P	0.0291(0.0289;0.0291)	0.0583(0.0577;0.0582)	0.0872(0.0866;0.0872)	0.1163(0.1155;0.1163)
	0.1859(0.1895;0.1843)	0.2026(0.2012;0.1988)	0.2205(0.2186;0.2132)	0.2395(0.2372;0.2276)
	0.2999(0.2991;0.2991)	0.3088(0.3041;0.3039)	0.3202(0.3091;0.3087)	0.3334(0.3142;0.3135)
	0.3814(0.3828;0.3828)	0.3882(0.3857;0.3857)	0.3971(0.3887;0.3886)	0.4077(0.3916;0.3915)
	0.4477(0.4516;0.4516)	0.4534(0.4537;0.4536)	0.4609(0.4558;0.4557)	0.4702(0.4578;0.4578)

N	-0.289(-0.290;-0.299)	-0.288(-0.285;-0.304)	-0.291(-0.280;-0.309)	-0.296(-0.276;-0.314)
	-0.375(-0.377;-0.383)	-0.375(-0.374;-0.386)	-0.377(-0.371;-0.387)	-0.382(-0.369;-0.392)
	-0.443(-0.447;-0.452)	-0.443(-0.445;-0.454)	-0.446(-0.443;-0.456)	-0.450(-0.441;-0.458)
	-0.500(-0.508;-0.511)	-0.501(-0.507;-0.513)	-0.504(-0.505;-0.515)	-0.508(-0.503;-0.516)
	-0.551(-0.562;-0.565)	-0.552(-0.561;-0.566)	-0.554(-0.560;-0.567)	-0.559(-0.558;-0.569)

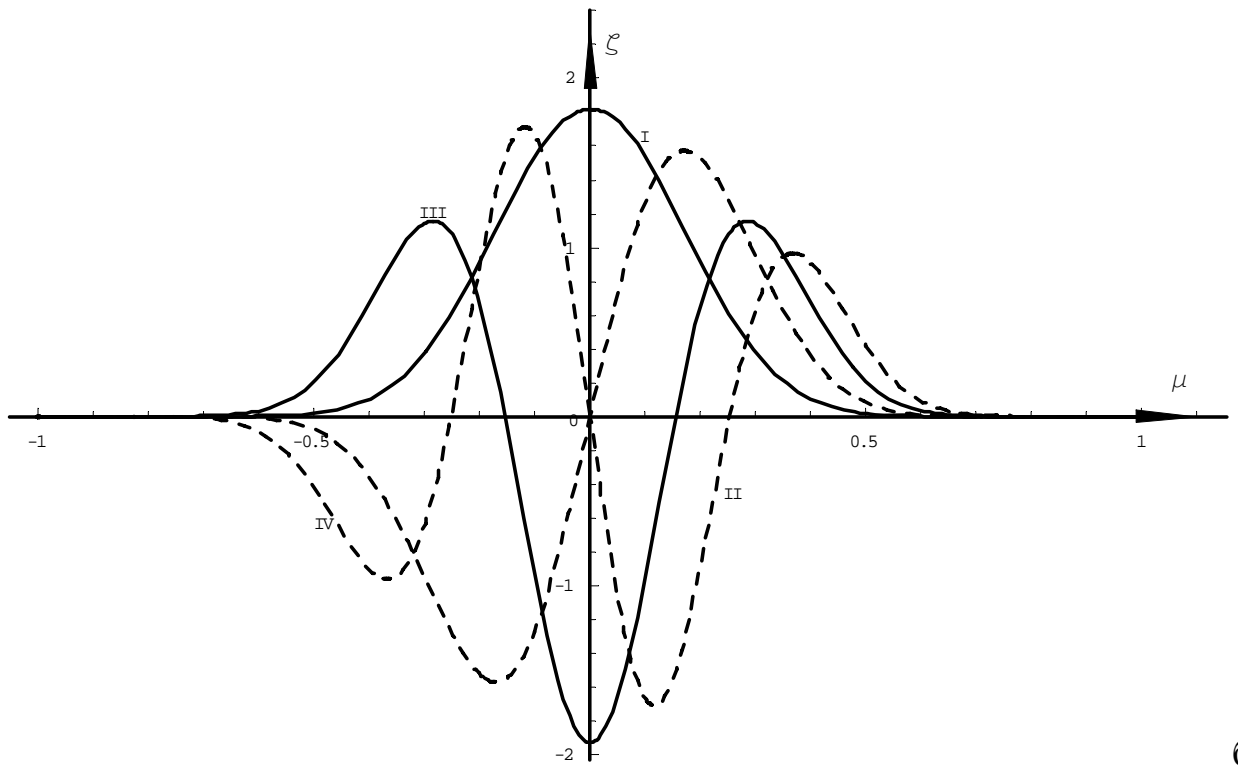
I	-0.156(-0.156;-)	-0.144(-0.143;-)	-0.132(-0.132;-)	-0.121(-0.122;-)
R	-0.0096(-0.0096;-0.0096)	-0.0187(-0.0192;-0.0192)	-0.0269(-0.0289;-0.0289)	-0.0338(-0.0385;-0.0385)
	-0.0058(-0.0058;-0.0058)	-0.0115(-0.0115;-0.0115)	-0.0167(-0.0167;-0.0167)	-0.0214(-0.0231;-0.0231)
	-0.0042(-0.0041;-0.0041)	-0.0083(-0.0082;-0.0082)	-0.0120(-0.0124;-0.0124)	-0.0157(-0.0165;-0.0165)
	-0.0033(-0.0032;-0.0032)	-0.0065(-0.0064;-0.0064)	-0.0096(-0.0096;-0.0096)	-0.0125(-0.0128;-0.0128)

Таблица 13

	$n=1$				$n=2$			
β	P	N	I	R	P	N	I	R
0	-	-	-0.500	-0.167 -0.0833 -0.0500 -0.0333 ...	-	-	-0.333	-0.167 -0.100 -0.0667 -0.0476 ...
$5 \cdot 10^{-5}$	200 346 490 632 775 ...	-200 -346 -490 -632 -775 ...	-0.500	-0.167 -0.0833 -0.0500 -0.0333 ...	346 490 632 775 916 ...	-347 -346 -633 -775 -917 ...	-0.333	-0.167 -0.100 -0.0667 -0.0476 ...
0.01	13.90 24.42 34.61 44.70 54.76 ...	-14.40 -24.59 -34.69 -44.75 -54.79 ...	-0.500	-0.167 -0.0833 -0.0500 -0.0333 ...	24.33 34.56 44.68 54.74 64.79 ...	-24.66 -34.73 -44.78 -54.81 -64.84 ...	-0.333	-0.167 -0.100 -0.0667 -0.0476 ...
19.648	0.240 0.652 0.943 1.179 1.394 ...	-0.765 -0.955 -1.102 -1.260 -1.441 ...	-0.372	-0.0721 -0.0457 -0.0329 -0.0248 ...	0.478 0.835 1.112 1.353 1.579 ...	-0.836 -1.059 -1.250 -1.440 -1.638 ...	-0.288	-0.1104 -0.0712 -0.0513 -0.0389 ...
1200	0.0291 0.1859 0.2999 0.3814 0.4477 ...	-0.289 -0.375 -0.443 -0.500 -0.551 ...	-0.156	-0.0096 -0.0058 -0.0042 -0.0033 ...	0.0583 0.2026 0.3088 0.3882 0.4534 ...	-0.288 -0.375 -0.443 -0.501 -0.552 ...	-0.144	-0.0187 -0.0115 -0.0083 -0.0065 ...

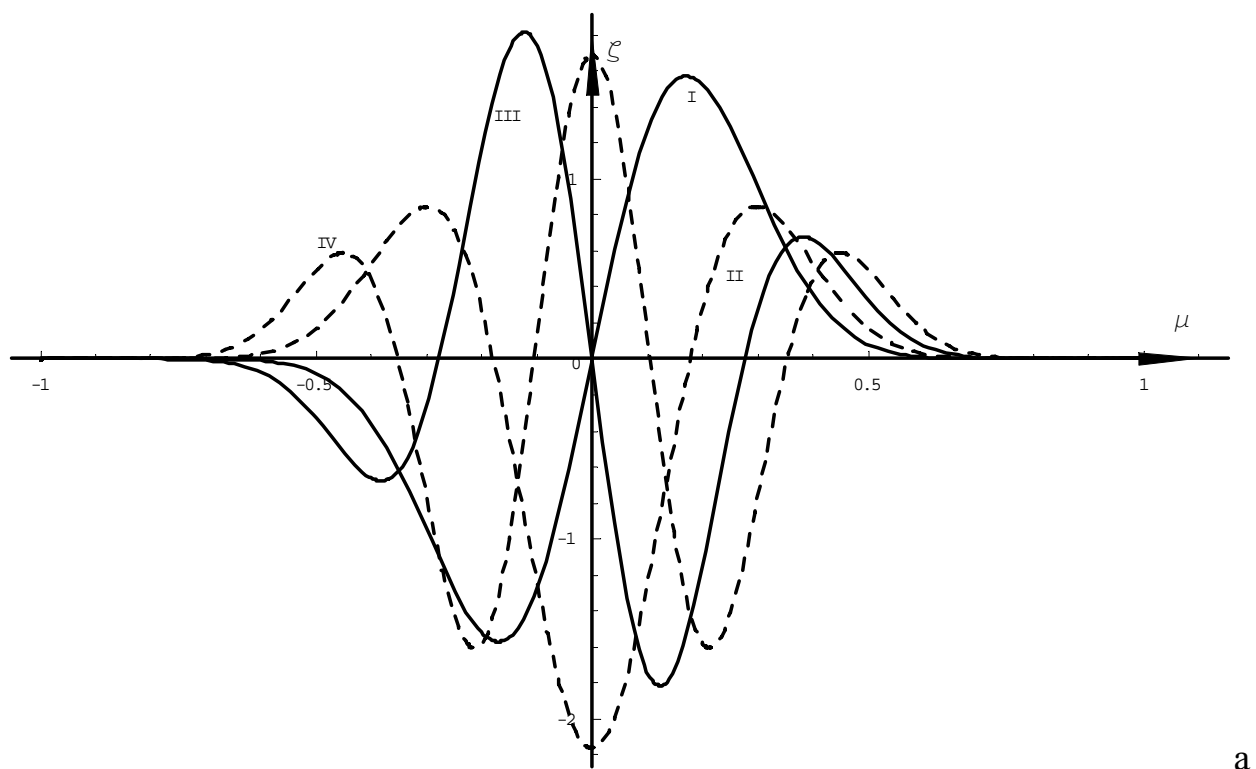


a

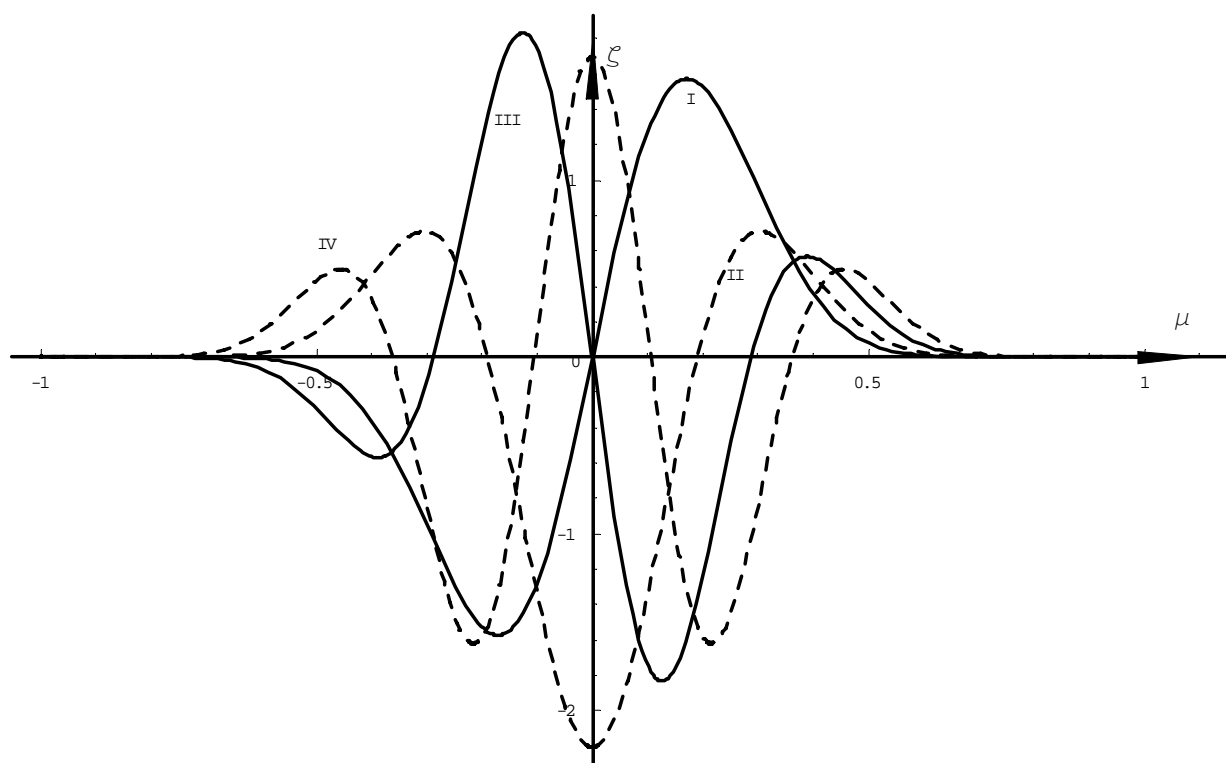


б

Фиг. 18. Положительные волны $P_i \{i, f\}$: а – $n=1$ (I – $\{0, 0.0281\}$, II – $\{1, 0.1859\}$, III – $\{2, 0.2999\}$, IV – $\{3, 0.3814\}$); б – $n=2$ (I – $\{0, 0.0593\}$, II – $\{1, 0.2026\}$, III – $\{2, 0.3088\}$, IV – $\{3, 0.3882\}$).

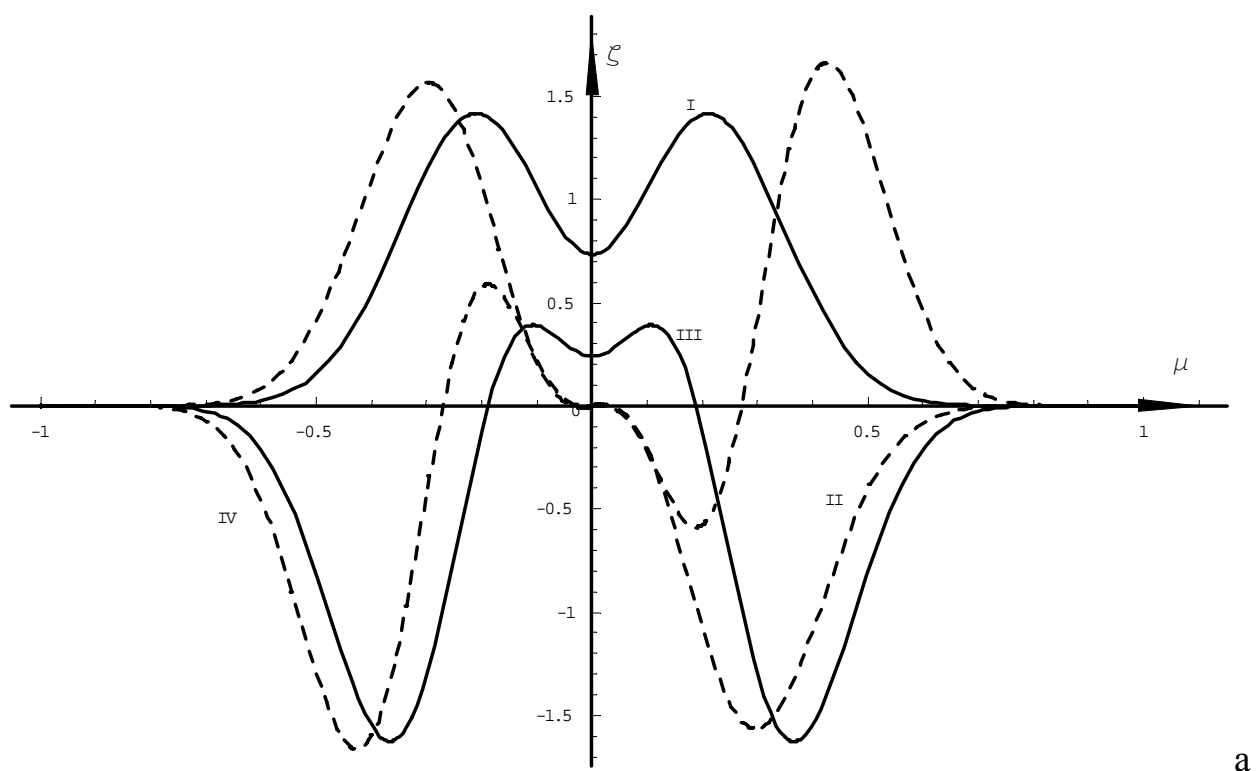


a

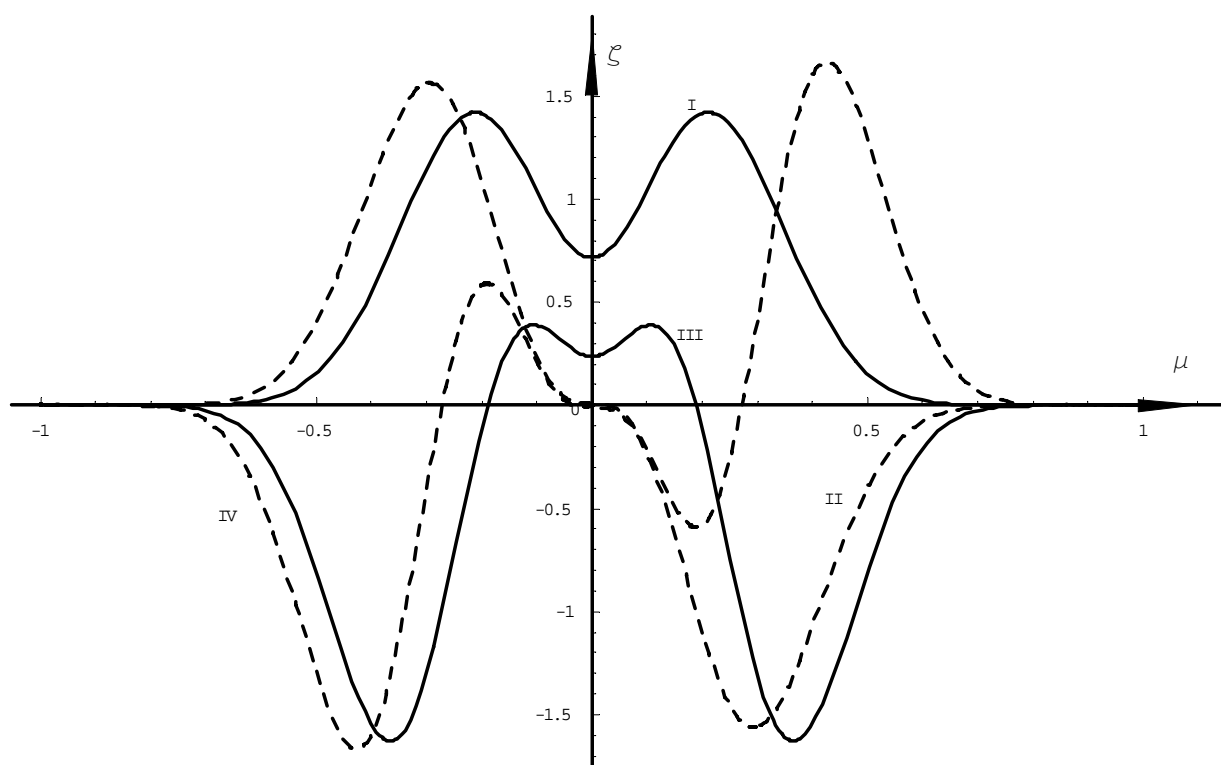


б

Фиг. 19. Промежуточная волна и отрицательные волны: а – $n=1$ (I – $\{R_{-1}, -0.156\}$, II – $\{N_2, -0.289\}$, III – $\{N_3, -0.375\}$, IV – $\{N_4, -0.443\}$); б – $n=2$ (I – $\{R_{-1}, -0.144\}$, II – $\{N_2, -0.288\}$, III – $\{N_3, -0.375\}$, IV – $\{N_4, -0.443\}$).

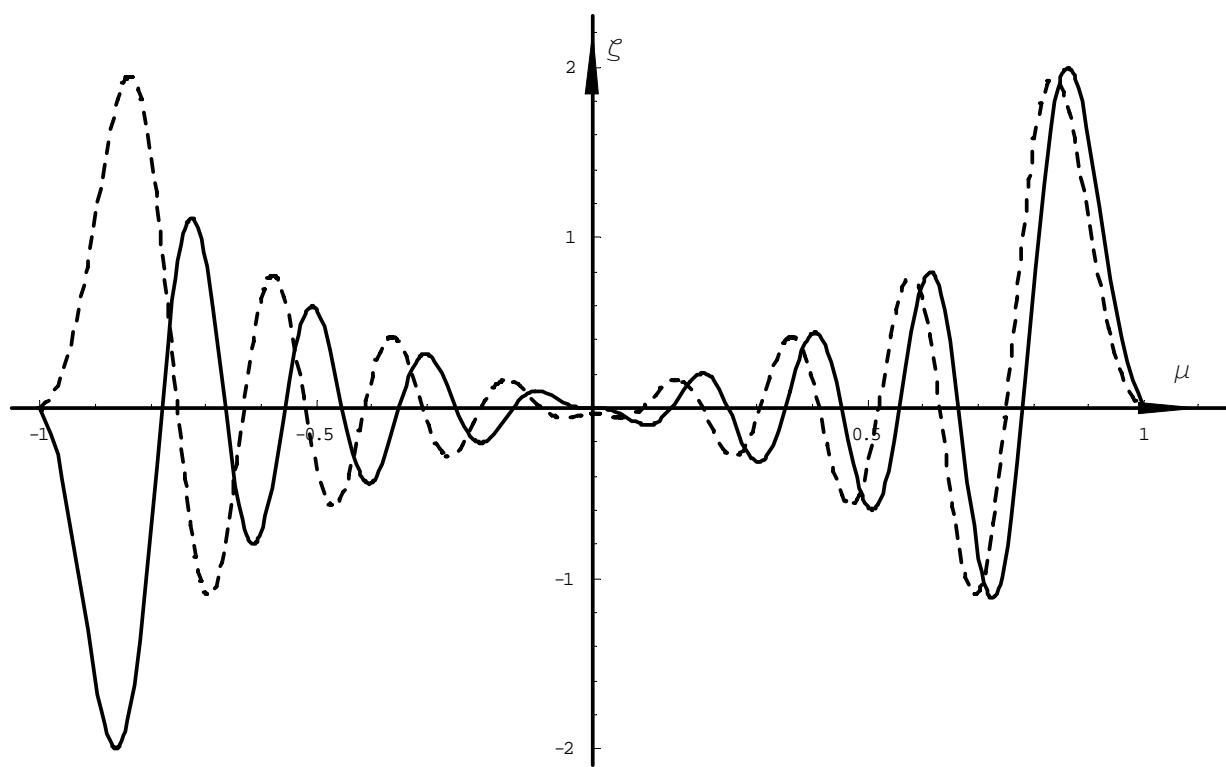
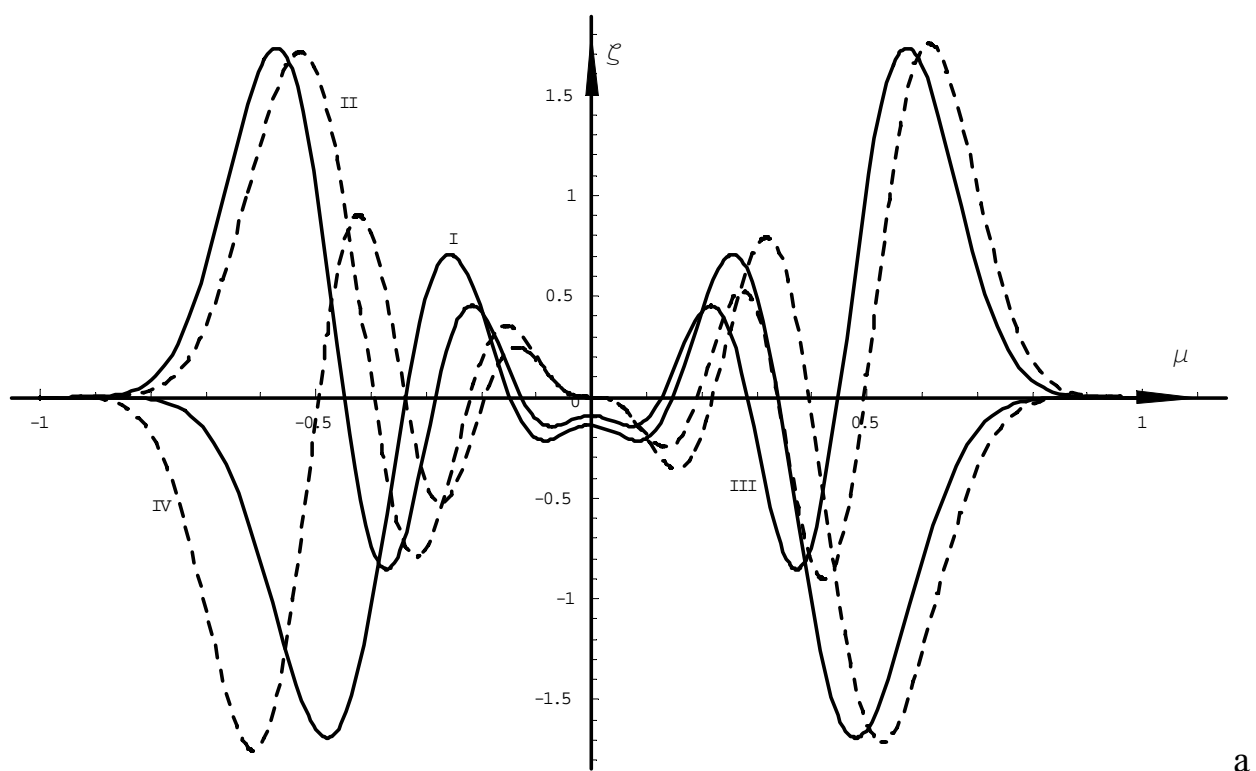


a

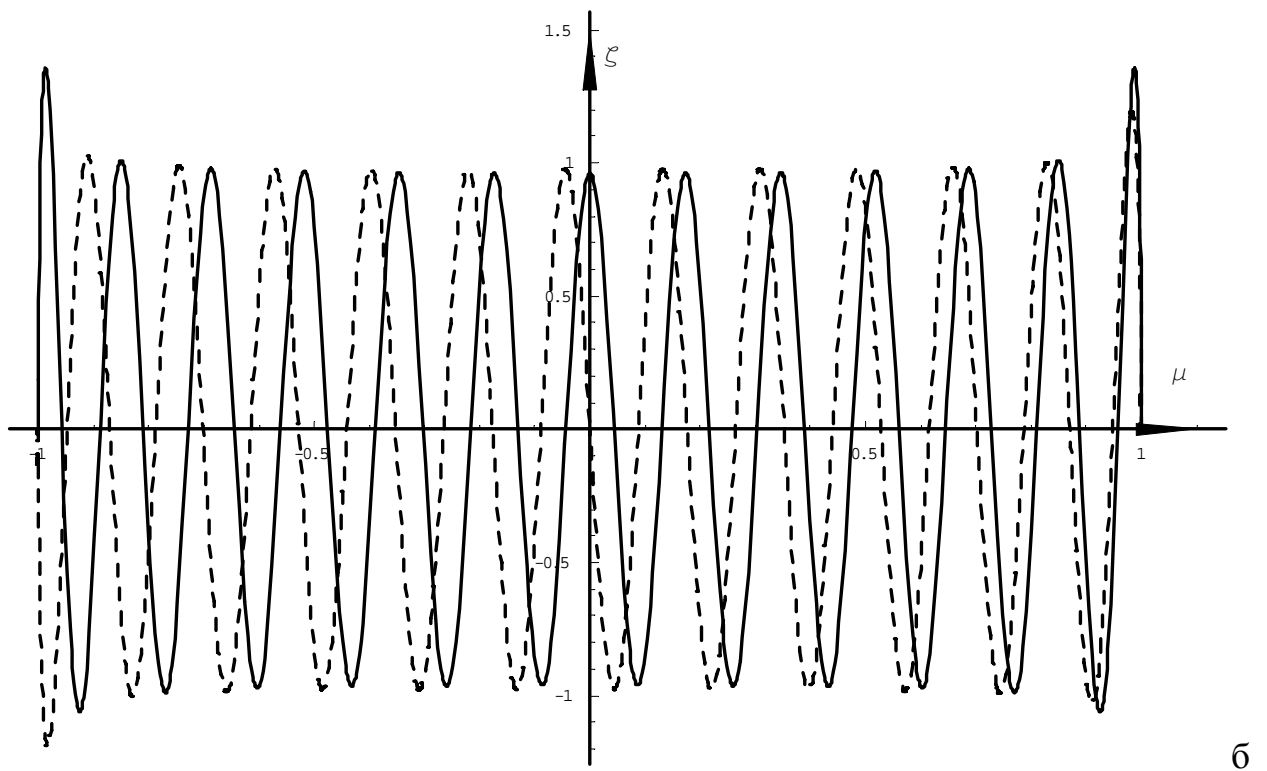
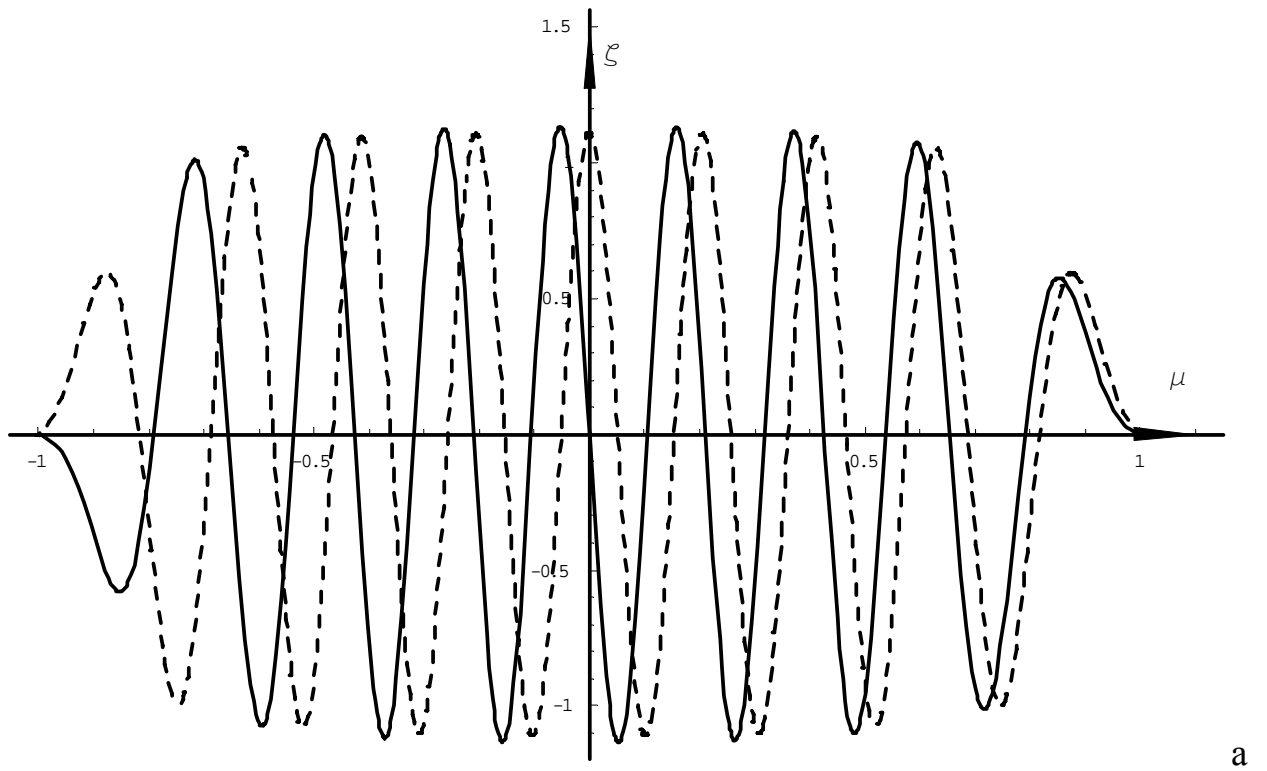


б

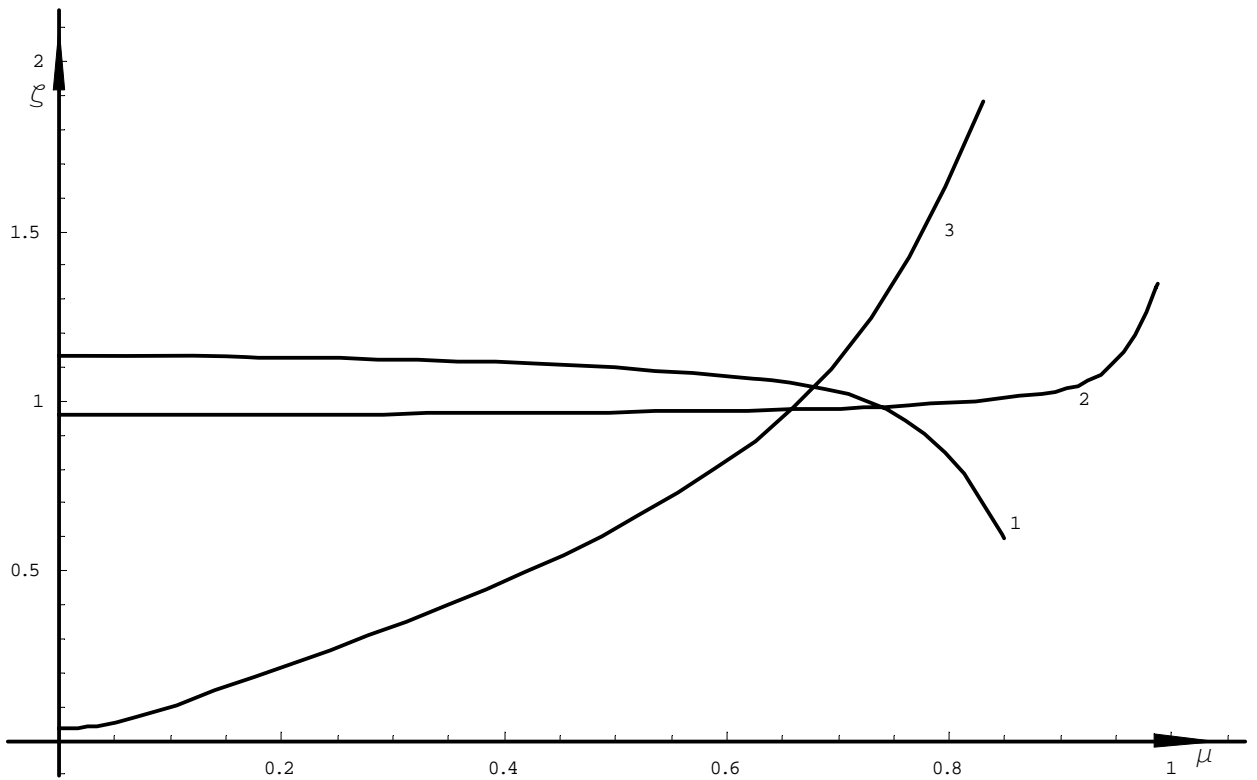
Фиг. 20. Волны Россби $R_i \{i, f\}$: а – $n=1$ (I – $\{0, -0.0096\}$, II – $\{1, -0.0058\}$, III – $\{2, -0.0042\}$, IV – $\{3, -0.0033\}$); б – $n=2$ (I – $\{0, -0.0187\}$, II – $\{1, -0.0115\}$, III – $\{2, -0.0083\}$, IV – $\{3, -0.0065\}$).



Фиг. 21. Волны Россби при больших азимутальных числах, $n=1$: а – (I – $\{R_4, -0.00273\}$, II – $\{R_5, -0.00233\}$, III – $\{R_6, -0.00204\}$, IV – $\{R_7, -0.00181\}$); б – $\{R_{15}, -0.001015\}$ и $\{R_{14}, -0.001068\}$.



Фиг. 22. Положительные волны для больших азимутальных чисел, $n=1$: а – $\{P_{15}, 0.86176\}$ и $\{P_{16}, 0.8861\}$; б – $\{P_{24}, 1.0457\}$ и $\{P_{23}, 1.027\}$.



Фиг. 23. Огибающие функций Хафа с большими азимутальными волновыми числами, $n=1$, $\beta=1200$: 1 – $\{P_{15}, 0.8618\}$, 2 – $\{P_{24}, 1.0457\}$, 3 – $\{R_{14}, 1.068 \cdot 10^{-3}\}$.

4. Отрицательные гироскопические числа. Рассмотрим отрицательные гироскопические числа, возникающие при решении задачи о вынужденных колебаниях океана или атмосферы. Достаточно большое число свойств функций Хафа можно понять, исследуя графическое представление формулы Хафа (3.3.1) (фиг. 14). Если модуль гироскопического числа невелик, то мы попадаем в область, расположенную под параболической асимптотой и имеем только 2 отрицательных корня, отвечающих колебаниям большого периода. В противном случае, т.е. когда мы оказываемся в области между параболической асимптотой и осью абсцисс, имеем 4 корня, что и в случае положительных β , причём положительных и отрицательных корней – по два. Т.е., в отличие от случая положительных β в положительном направлении здесь распространяются две волны, а не одна. Эти рассуждения подтверждаются численными расчётами, результаты которых будут приведены ниже.

Функции Хафа для отрицательных гироскопических чисел обладают интересным свойством: они входят как бы парами, но вырождения нет – все собственные числа однократны, а две моды одной «пары» (симметричная и антисимметричная) имеют очень близкие собственные частоты, неограниченно сближающиеся при увеличении абсолютной величины гироскопического числа. Это особенность была отмечена ещё Диким [14], который при построении асимптотических формул для собственных частот такой «пары» обнаружил, что они отличаются лишь членами высших порядков малости. Это обстоятельство делает крайне трудным численное нахождение соответствующих собственных форм (при том, что численное нахождение соответствующих собственных частот не представляет принципиальных трудностей). Легко понять, чем обусловлены эти особенности. Построив некоторые характерные моды (фиг. 24-27), можно видеть, что мода практически не отличается от нуля в большой приэкваториальной области и лишь вблизи полюсов имеет существенно отличные от нуля значения. Таким образом, симметричные и антисимметричные моды одной «пары» почти точно переводятся одна в другую зеркальным отражением одной из ветвей.

Для всех волн существует ограничивающее значение частоты, соответствующее полусуточному периоду, мод с большими по модулю частотами нет. В общем случае в спектре присутствуют как волны, движущиеся против направления вращения планеты, так и волны, движущиеся по направлению вращения (последние появляются при больших модулях гироскопических чисел). Волн первого типа – бесконечное число, волн второго типа – конечное.

Трудности численного нахождения собственных форм вынуждают использовать для больших по модулю гироскопических чисел асимптотические формулы.

В [83] выведены асимптотические формулы для больших отрицательных значений гироскопического числа. Функции Хафа выражались через решения уравнения Уиттакера и, окончательно, через полиномы Лагерра. В силу «вырождения» мод асимптотики для «парных» симметричной и антисимметричной мод на одной полусфере тождественны, а собственные частоты равны. k -ую «пару» образуют волны с $2k$ и $2k+1$ нулями.

Все моды в [83] были разделены на три класса. Моды всех трёх классов имеют значительное внешнее сходство. К первому классу были отнесены все отрицательные волны, которые по ряду параметров (большие периоды, направление движения) можно считать экстраполированными на отрицательные гироскопические числа волнами Россби. Обозначим их как R_i (i – число нулей моды, азимутальное волновое число). Для них в [83] были записаны следующие асимптотические выражения с использованием полиномов Лагерра (моды здесь и далее не нормированы):

$$f = -1 + \frac{2n+2k-1}{\sqrt{-\beta}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\Theta(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{-\beta}\theta^2}{2}\right) \left(\sqrt[4]{-\beta}\theta\right)^n \times \\ &\times \left(2L_{k-1}^n\left(\sqrt{-\beta}\theta^2\right) + L_k^{n-1}\left(\sqrt{-\beta}\theta^2\right)\right), \quad \theta = \arccos \mu, \quad k > 0 \quad (4.2) \\ \Theta(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{-\beta}\theta^2}{2}\right) \left(\sqrt[4]{-\beta}\theta\right)^n, \quad k = 0\end{aligned}$$

Можно видеть, что периоды волн первых «пар» чуть больше полусуток и с увеличением абсолютной величины гироскопического числа все более приближаются к полусуткам.

Асимптотика Лонге-Хиггинса показывает лишь порядок следования «пар», тогда как порядок следования конкретных мод остаётся неопределённым. Численные исследования показывают, что исследуемым модам свойственно особое чередование нулей, т.к. антисимметричная мода имеет всегда большую собственную частоту, чем симметричная. Порядок следования мод в направлении увеличения абсолютной величины частоты можно записать в виде:

$$\dots, R_5, R_2, R_3, R_0, R_1$$

Положительные волны в [83] были разделены на два класса. К первому классу Лонге-Хиггинс отнёс волны с периодами несколько больше полусуток, а ко второму – ультрадолгопериодные волны. Первый класс является в некотором роде парным по отношению к классу R-волн, т.к. имеет похожий спектр (но волны движутся в противоположном направлении). Назовём соответствующие колебания антиволнами Россби и обозначим как aR_i . Уменьшая частоту, приходим к ультрадолгопериодным волнам. Обозначим их как L_i .

Распределение волн при отрицательных гироскопических числах (в направлении роста собственной частоты) имеет вид:

$$L_1, L_0, L_3, L_2, \dots, L_{2k}, aR_{2k+2}, aR_{2k+3}, aR_{2k}, aR_{2k+1}, \dots, aR_2, aR_3$$

Следует обратить внимание, что исследуемым модам свойственно особое чередование нулей. Старшая aR -волна имеет 3 нуля, тогда как старшая R-волна

имеет только 1 нуль. При переходе от aR-волн к L-волнам количество нулей уменьшается на 2.

Для aR волн имеются следующие асимптотики [81]:

$$f = 1 - \frac{2n+2k+1}{\sqrt{-\beta}}, \quad k=1,2,3... \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mu) = & \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{-\beta}\theta^2}{2}\right) \left(\sqrt[4]{-\beta}\theta\right)^n \left(2\sqrt{-\beta}\theta^2 L_{k-2}^{n+2}\left(\sqrt{-\beta}\theta^2\right) + \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{-\beta}\theta^2 - 2n - 2\right) L_{k-1}^{n+1}\left(\sqrt{-\beta}\theta^2\right)\right), \quad k > 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Theta(\mu) = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \exp\left(-\frac{\sqrt{-\beta}\theta^2}{2}\right) \left(\sqrt[4]{-\beta}\theta\right)^n \left(\sqrt{-\beta}\theta^2 - 2n - 2\right), \quad k = 1$$

Для ультрадолгопериодных волн в [81] были получены асимптотики:

$$f = \frac{n}{-\beta} + \frac{4n+4k+2}{(-\beta)^{\frac{3}{2}}}, \quad k=0,1,2... \quad (4.5)$$

$$\Theta(\mu) = -\frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\sqrt{-\beta}\theta^2}{2}\right) \left(\sqrt[4]{-\beta}\theta\right)^n L_k^n\left(\sqrt{-\beta}\theta^2\right) \quad (4.6)$$

Отметим, что все асимптотики справедливы лишь для мод с небольшими широтными и азимутальными волновыми числами.

В табл. 14 приведены результаты сравнения численно найденных собственных частот с асимптотическими при $\beta = -1200$. (В случае неравенства собственных частот одной «пары» в пределах ошибок округления приводятся обе частоты, разделённые вертикальной чертой). В большей части таблицы сходжение результатов лишь качественное. Для меньших по модулю гироскопических чисел результаты ещё менее удовлетворительны. Сравнение с асимптотическими формулами проводилось лишь там, где имелось некоторое сходжение результатов, фактически, только для мод с малыми азимутальными волновыми числами.

Численные исследования показали, что все моды отрицательных гироскопических чисел (как движущиеся по направлению вращения планеты, так и против) имеют период, больший полусуток.

Отметим достаточно чёткую границу между антиволнами Россби и ультрадолгопериодными волнами: период самой медленной aR-волны превосходит период самой быстрой L-волны в 5-10 раз. Вблизи этой границы (где расположены волны с большими азимутальными числами) имеем более выраженное расхождение между частотами одной «пары». С ростом широтного волнового числа уменьшается количество положительных волн. При определённом значении широтного волнового числа положительные волны исчезают. Это согласуется с выводами, которые можно получить из формулы Хафа (3.3.1). Те же выводы справедливы и для меньших по абсолютной величине гироскопических чисел ($\beta = -100$, табл. 15).

Моды всех классов имеют сильное сходство с обычными волнами Гаурвица или Россби, большая часть энергии колебаний которых сосредоточена в околополярных областях (с увеличением n энергия колебаний распределяется по всей сфере более равномерно). На фиг. 24 представлены R-волны для сравнительно небольшого по модулю гироскопического числа ($\beta = -100$). Представлены отдельные моды. На фиг. 25 показаны положительные волны для $\beta = -100$.

Однако в отличие от случая положительных гироскопических чисел, увеличение абсолютной величины β приводит к ещё более сильному смещению энергии колебаний к полюсам (в то время как для положительных β имеет место противоположная тенденция, ср. рис. 18-20). Фиг. 26 иллюстрирует это свойство волн отрицательных гироскопических чисел. Волны представлены только для одного полушария, что позволяет показать сразу обе волны «пары», поскольку, как уже было сказано выше, в пределе $\beta \rightarrow -\infty$ (и с высокой точностью для достаточно больших β) антисимметричная мода получается из симметричной зеркальным отображением одной из половин. В связи с трудно-

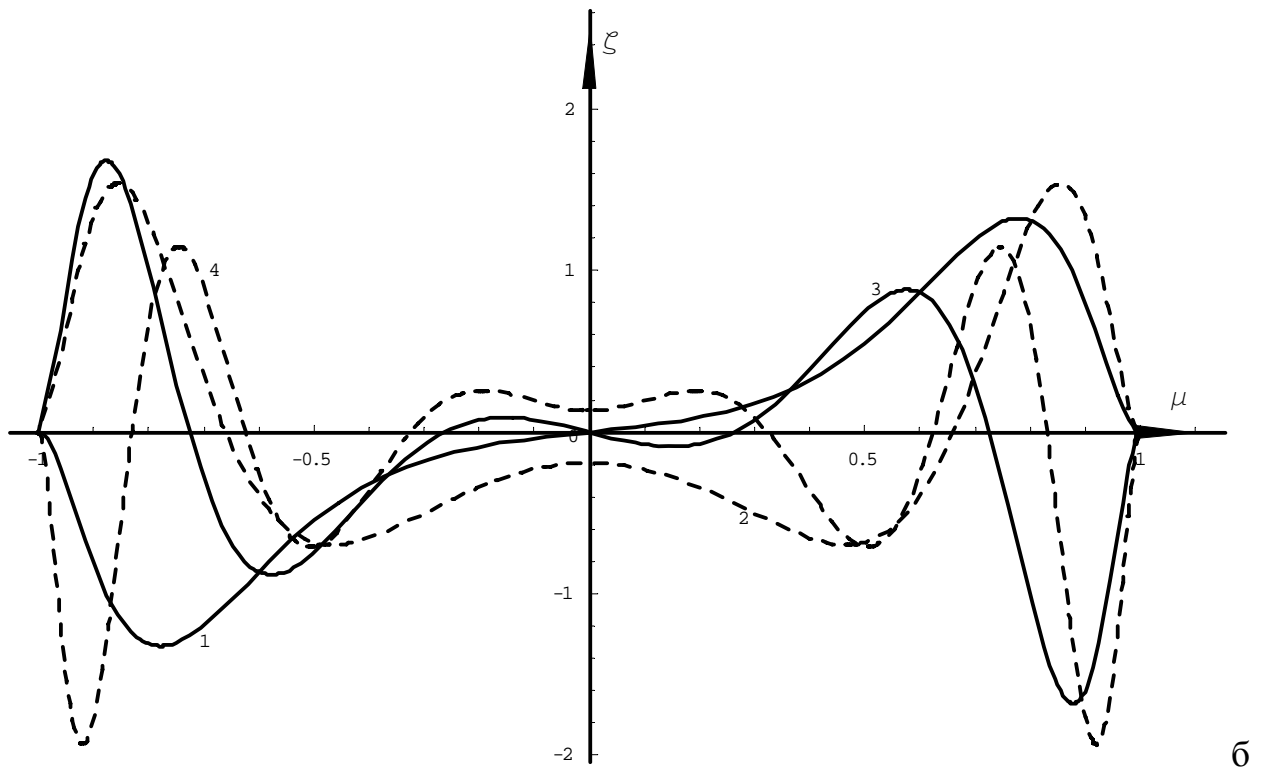
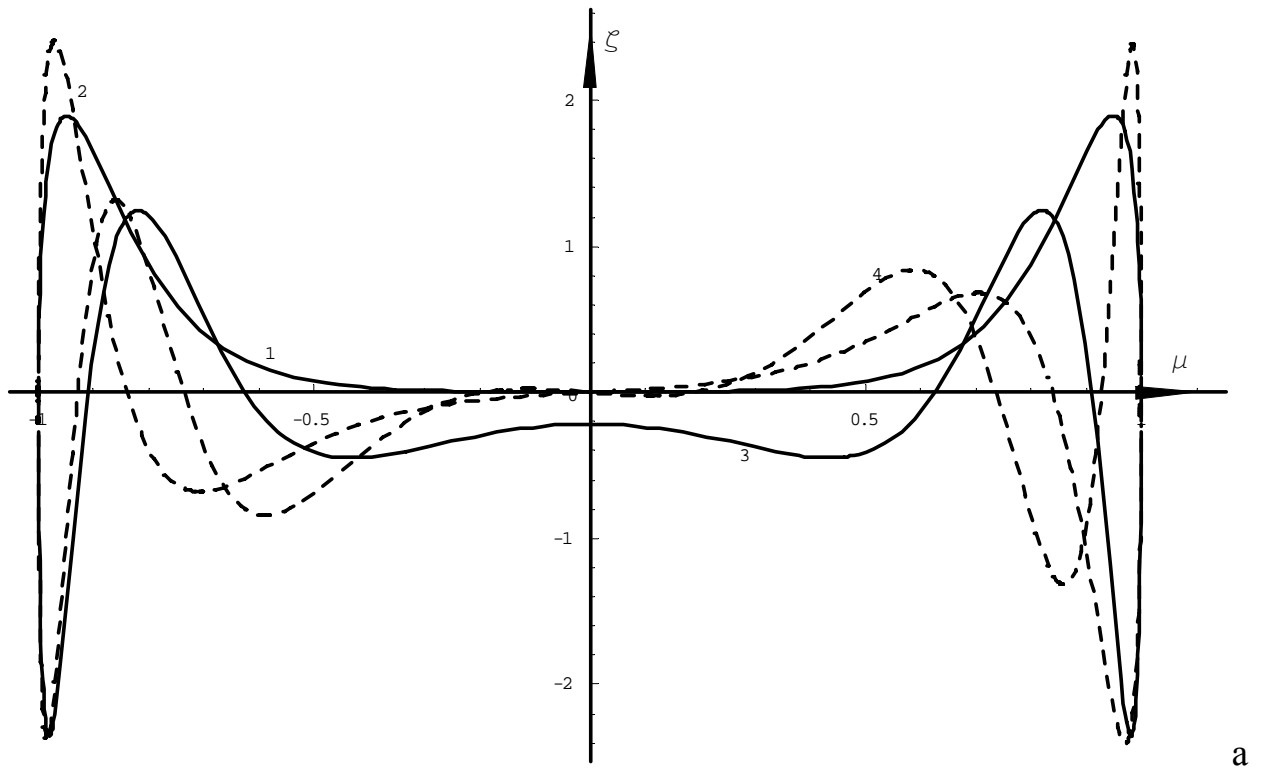
стями вычисления вместо некоторых волн приводятся их асимптотики (4.2), (4.4) и (4.6). Исследования волн для меньших гироскопических чисел показали хорошее согласие численных результатов с приведёнными асимптотиками. Тонкие различия присутствуют у мод с достаточно большими азимутальными числами и связаны с меньшей «полярностью» численных решений по сравнению с асимптоиками Лонге-Хиггинса (фиг. 27). Распределение энергии колебаний у численно полученных мод более равномерно, чем у асимптотик.

Таблица 14

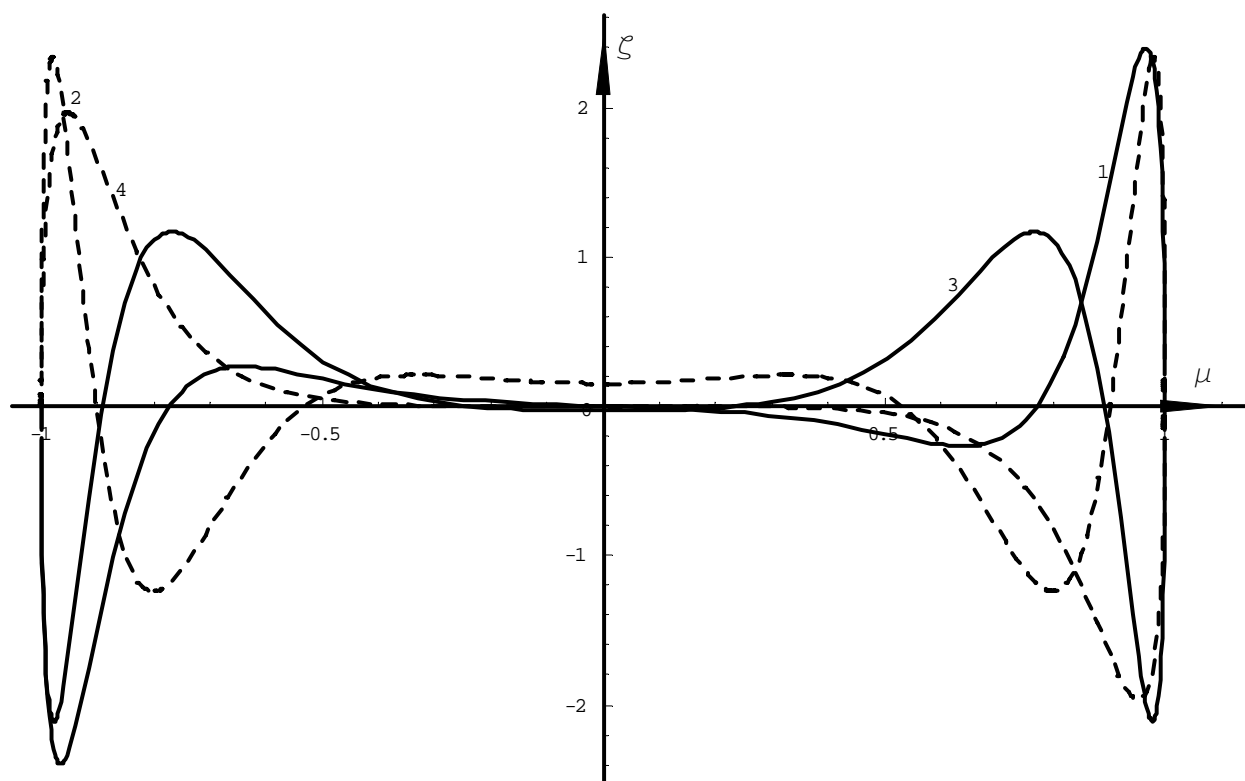
n	1	2	3	4
k	R-волны			
0	-0.9707 (-0.9711)	-0.9405 (-0.9134)	-0.9093 (-0.8557)	-0.8770 (-0.7979)
1	-0.9111 (-0.9134)	-0.8799 (-0.8557)	-0.8476 (-0.7979)	-0.8143 (-0.7402)
2	-0.8496 (-0.8557)	-0.8172 (-0.7979)	-0.7834 (-0.7402)	-0.7483 (-0.6825)
3	-0.7855 (-0.7979)	-0.7517 (-0.7402)	-0.7156 (-0.6825)	-0.6789 (-0.6247)
4	-0.7186 (-0.7402)	-0.6830 (-0.6825)	-0.6456 (-0.6247)	-0.6063 (-0.5670)
k	aR-волны			
1	0.9111 (0.8557)	0.8799 (0.7979)	0.8474 (0.7402)	0.8137 (0.6825)
2	0.8495 (0.7979)	0.8170 (0.7402)	0.7831 (0.6825)	0.7478 (0.6247)
3	0.7855 (0.7402)	0.7514 (0.6825)	0.7159 (0.6247)	0.6785 (0.5670)
4	0.7185 (0.6825)	0.6826 (0.6247)	0.6448 (0.5670)	0.6049 (0.5093)
5	0.6480 (0.6247)	0.6098 (0.5670)	0.5692 (0.5093)	0.5256 (0.4515)
6	0.5728	0.5315	0.4870	0.4368
7	0.4916	0.4457	0.3949	0.3360
8	0.4013	0.3481	0.2855 0.2853	0.2032
9	0.2962 0.2959	0.2271 0.2256	-	-
10	0.1588 0.1473	-	-	-
k	L-волны, $\cdot 10^{-3}$			
9	18.75 19.69	-	-	-
8	7.049 7.051	21.17 21.24	-	-
7	4.230	10.74	22.06	48.31
6	2.961	7.032	12.97	22.44
5	2.246	5.141	9.010	14.44
4	1.790 (1.363)	4.003 (2.293)	6.807 (3.222)	10.47 (4.151)
3	1.477 (1.266)	3.249 (2.196)	5.413 (3.125)	8.116 (4.055)
2	1.249 (1.170)	2.715 (2.010)	4.458 (3.029)	6.567 (3.959)
1	1.077 (1.074)	2.318 (2.003)	3.767 (2.933)	5.477 (3.863)
0	0.942 (0.978)	2.014 (1.907)	3.244 (2.837)	4.671 (3.766)

Таблица 15

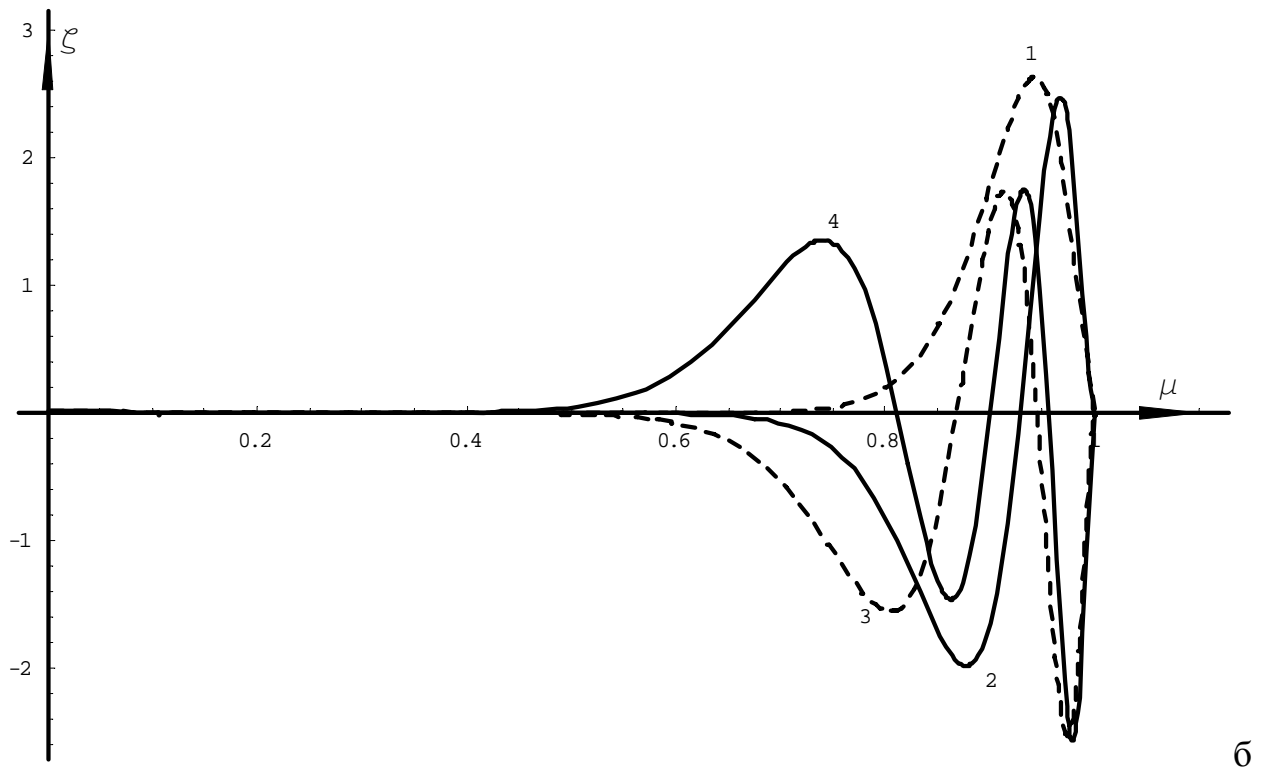
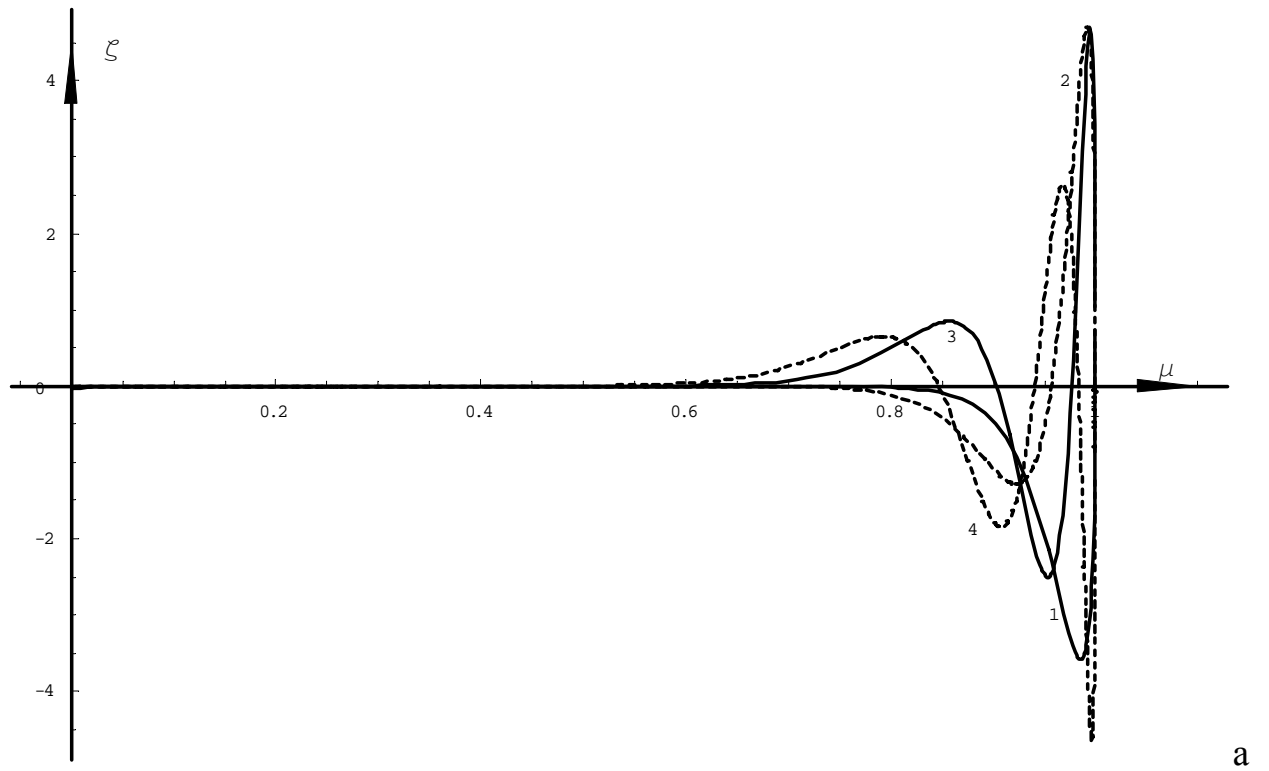
n	1	2	3	4
Отрицательные волны				
R_1	-0.8946	-0.7759	-0.6381	-0.4731
R_0	-0.8946	-0.7759	-0.6380	-0.4726
R_3	-0.6675	-0.5256	-0.3573	-0.2296
R_2	-0.6674	-0.5246	-0.3461	-0.1929
R_5	-0.3955	-0.2541	-0.1651	-0.1176
R_4	-0.3831	-0.1798	-0.1024	-0.0814
R_7	-0.1061	-0.0760	-0.0653	-0.0592
R_6	-0.0421	-0.0461	-0.0463	-0.0450
R_9	-0.0238	-0.0318	-0.0348	-0.0358
R_8	-0.0162	-0.0236	-0.0273	-0.0293
Положительные волны				
aR_3	0.6651	0.5117	-	-
aR_2	0.6651	0.5115	-	-
aR_5	0.3748	-	-	-
aR_4	0.3689	-	-	-
L_2	0.0408	-	-	-
L_3	0.0406	-	-	-
L_0	0.0168	0.0504	-	-
L_1	0.0168	0.0504	-	-



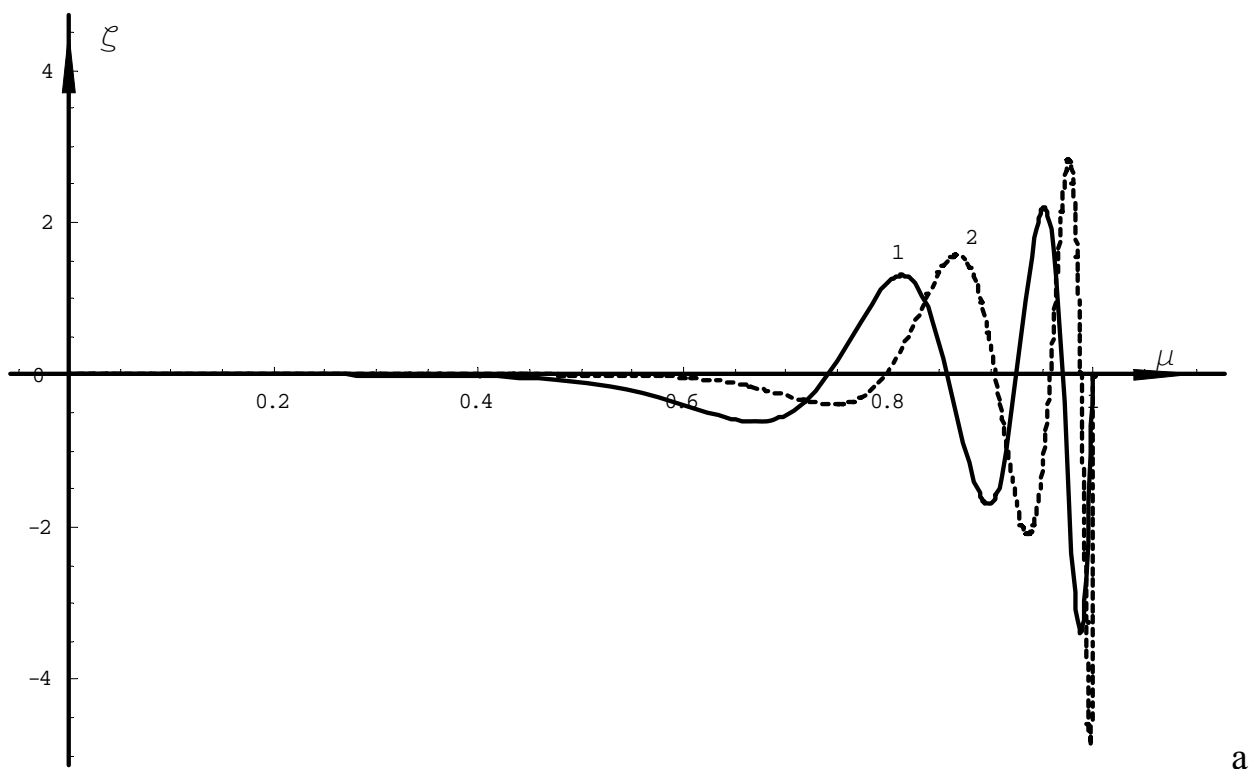
Фиг. 24. R-моды для $\beta = -100$, $\{i, f\}$: а - $n=1$ (1 – $\{0, -0.8946\}$, 2 – $\{3, -0.6675\}$, 3 – $\{4, -0.3831\}$, 4 – $\{7, -0.1061\}$); б - $n=4$ (1 – $\{1, -0.4731\}$, 2 – $\{2, -0.1929\}$, 3 – $\{5, -0.1176\}$, 4 – $\{6, -0.0450\}$).



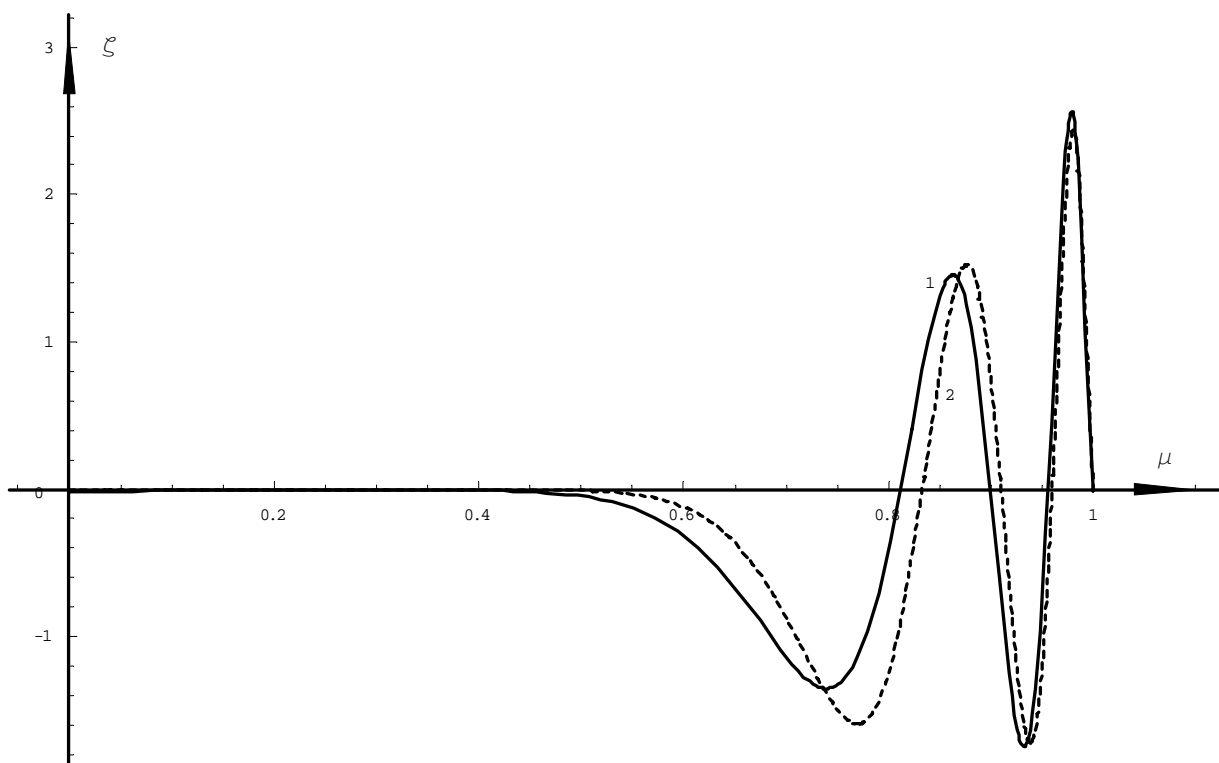
Фиг. 25. Положительные волны для $\beta = -100$, $n=1$: 1 – $\{aR_3, 0.6651\}$,
2 – $\{aR_4, 0.3689\}$, 3 – $\{L_2, 0.0408\}$, 4 – $\{L_1, 0.0168\}$.



Фиг. 26. R- и L-волны при $\beta = -1200$: а – R-волны, $n=1$, $\{i, f\}$: 1 – аппроксимация R_{0-1} , 2 – аппроксимация R_{2-3} , 3 – $\{4-5, -0.8496\}$, 4 – $\{6-7, -0.7855\}$; б – L-волны, $n=4$, $\beta = -1200$, $\{i, f\}$: 1 – аппроксимация L_{0-1} , 2 – аппроксимация L_{2-3} , 3 – $\{4-5, 6.567 \cdot 10^{-3}\}$, 4 – $\{6-7, 8.116 \cdot 10^{-3}\}$.



а



б

Фиг. 27. Сравнение функций Хафа (кривая 1) с асимптотиками Лонге-Хиггинса (кривая 2), $\beta = -1200$: а – $n=3$, $\{R_{6-7}, -0.6456\}$; б – $n=4$, $\{L_{6-7}, 8.116 \cdot 10^{-3}\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами своей диссертационной работы автор считает следующие:

1. Исследованы сейшевые колебания в односвязных бассейнах с двумя, тремя и четырьмя осями симметрии (вращающихся и невращающихся), а также в кольцеобразном бассейне. Установлен характер влияния числа осей симметрии бассейна, площади и контура береговой линии на собственные частоты и характер волнового движения в бассейне. Последнее имеет значение для более адекватной аппроксимации реальных бассейнов математическими контурами.

2. Разработан метод численного интегрирования приливного уравнения Лапласа. Использование построенного метода, по мнению автора диссертации, предпочтительнее, чем использование обычных методов разложения по сферическим или тригонометрическим функциям, в силу его значительно большей простоты и универсальности.

3. Получены неосесимметричные гармоники приливного уравнения Лапласа (функции Хафа) и изучены их свойства при различных значениях определяющих параметров. Задача решена как для положительных, так и для отрицательных гироскопических чисел в широком диапазоне значений. Предложена классификация функций Хафа в обоих случаях, основанная на универсальном (для гироскопических чисел одного и того же знака) характере следования мод при изменении собственной частоты. В трудных для вычисления случаях (большие отрицательные гироскопические числа) предлагается комбинированное использование численного алгоритма и асимптотических формул Лонге-Хиггинса, сравнение которых с численными решениями показало их хорошее схождение уже для относительно небольших по абсолютной величине гироскопических чисел. Решения, полученные этим методом, могут рассматриваться как эталонные в задачах метеорологии, климатологии и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акасофу С.-И., Чепмен С. Солнечно-земная физика. Ч.1. М.: Мир, 1974. 384 с.
2. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне // Изв. РАН. МЖГ. 2001. №4. С. 129-142.
3. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В., Шматков А.М. Собственные колебания поверхности вращающегося сферического слоя жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1999. №3. С. 85-95.
4. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической матфизики. I. Спектральные задачи для уравнения Лапласа. Препринт №671. М.: ИПМ РАН. 2000. 39 с.
5. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Научный мир, 2002. 155 с.
6. Бабенко К.И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. 848 с.
7. Бабенко К.И., Алгазин С.Д. Об одном численном алгоритме решения задачи на собственные значения для линейных дифференциальных операторов. Препринт №46. М.: ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, 1978. 80 с.
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: ГИТТЛ, 1957. 608 с.
9. Голицын Г.С., Дикий А.Л. Собственные колебания атмосфер в зависимости от скорости вращения планеты // Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана. 1966. Т. 2. №3. С. 223-235.
10. Голицын Г.С., Дикий А.Л. Собственные периоды и собственные функции для сжимающейся баротропной сферической атмосферы // В сб. «Динамика крупномасштабных атмосферных процессов». М.: Наука, 1967. С. 200-203.

11. Дикий Л.А. Собственные колебания бароклинной атмосферы над сферической Землёй // Изв. АН СССР, сер. геофиз. 1961. №5. С. 756-765.
12. Дикий Л.А. Земная атмосфера как колебательная система // Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана. 1965. Т. 1. №5. С. 469-489.
13. Дикий Л.А. Об асимптотике решений приливного уравнения Лапласа // ДАН СССР. 1966. Т. 170. №1. С. 67-70.
14. Дикий Л.А. Об асимптотике приливного уравнения Лапласа для отрицательных значений эквивалентной глубины // Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана. 1968. Т. 4. №2. С. 206-209.
15. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 196 с.
16. Иванов М.И. О колебаниях жидкости под действием силы Кориолиса в плоских бассейнах постоянной глубины // Тез. докл. межд. научн. конф. «Современные проблемы механики, математики, информатики». Тула: ТГУ, 2003. С. 145-146.
17. Иванов М.И. О свободных приливах в плоских бассейнах постоянной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2004. №5. С. 119-130.
18. Иванов М.И. Собственные гармонические колебания гравитирующей жидкости в бассейнах сложной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №1. С. 131-148.
19. Иванов М.И. Неосесимметричные решения приливного уравнения Лапласа и волны Россби // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №4. С. 151-161.
20. Иванов М.И. Функции Хафа. Собственные колебания жидкости на вращающемся шаре // Тез. докл. Всеросс. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию Л.И. Седова. М.: МИАН, 2007. С. 68-69.
21. Иванов М.И. О горизонтальной структуре приливных колебаний атмосферы // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №3. С. 125-139.
22. Иванов В.И., Попов В.Ю. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.

23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань, 2003. 576 с.
24. Кочин Н.Е. Собрание сочинений. Т.1. М.-Л.: ОНТИ, 1949. 616 с.
25. Ламб Г. Гидродинамика. Т.1. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003. 452 с.
26. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 476 с.
27. Рабинович Б.И., Левянт А.С. Численное исследование собственных колебаний во вращающихся водоёмах со сложной границей и рельефом дна // В сб. «Колебания и волны в сплошных средах: аналитические и численные методы». Ниж. Новгород: Ниж. политех. инст., 1992. С. 96-103.
28. Рохлин Д.Б. О спектральной задаче теории приливов в ограниченной области // Докл. РАН. 1997. Т. 353. №5. С. 619-621.
29. Сальникова М.Г., Самсонов В.А. О движении вязкой несжимаемой жидкости на вращающемся шаре в центральном поле ньютоновского притяжения // Изв. РАН. МЖГ. 1995. №2. С. 133-141.
30. Сидоренков Н.С. Атмосферные процессы и вращение Земли. СПб.: Гидрометеиздат, 2002. 367 с.
31. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 304 с.
32. Сретенский Л.Н. Динамическая теория приливов. М.: Наука, 1987. 472 с.
33. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 352 с.
34. Холодова Е.С. Волны во вращающейся жидкости // Докл. межд. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» Саранск, 1995. С. 286-294.
35. Чепмен С., Линдзен Р. Атмосферные приливы: термические и гравитационные. М.: Мир, 1972. 295 с.
36. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 328 с.

37. Ball F.K. The effect of rotation on the simpler modes of motion of a liquid in an elliptic paraboloid // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 529-545.
38. Ball F.K. Second-class motions of a shallow liquid // J. Fluid Mech. 1965. V. 23. P. 545-561.
39. Bildsten L., Ushomirsky G., Cutler C. Ocean g-modes in rotating neutron stars // Astrophys. J. 1996. V. 460. P. 827-831.
40. Corkan R.H., Doodson A.T. Free tidal oscillations in a rotating square sea // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1952. V. 215. №1121. P. 147-162.
41. Dziembovski W.A., Daszynska-Daszkiewicz J., Pamyatnykh A.A. Excitation and visibility of slow modes in rotating B-type stars // MNRAS. 2006. doi: 10.1111/j. 1365-2966.2006.11139.x 8 pp.
42. Goldsbrough G.R. The dynamical theory of the tides in a polar basin // Proc. L. Math. Soc. (2). 1915. V. 14. P. 31-66.
43. Goldsbrough G.R. The dynamical theory of the tides in a zonal ocean // Proc. L. Math. Soc. (2). 1915. V. 14. P. 207-229.
44. Goldsbrough G.R. The tides in ocean on a rotating globe, part I // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1928. V. 117. P. 692-718.
45. Goldsbrough G.R. The tides in ocean on a rotating globe, part II // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1929. V. 122. P. 228-245.
46. Goldsbrough G.R., Colborne D.C. The tides in ocean on a rotating globe, part III // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1929. V. 126. P. 1-15.
47. Goldsbrough G.R. The tidal oscillations in rectangular basins // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1931. V. 132. P. 689-701.
48. Goldsbrough G.R. The tides in ocean on a rotating globe, part IV // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1933. V. 140. P. 241-253.
49. Goldstein S. A note on certain approximate solutions of linear differential equation of second order with an application to the Mathieu equation // Proc. L. Math. Soc. (2). 1928. V. 28. P. 81-90.

50. Goldstein S. The free oscillations of water in a canal of elliptic plan // Proc. L. Math. Soc. (2). 1928. V. 28. P. 91-101.
51. Goldstein S. A special case of tidal motion in elliptic basins // MNRAS Geoph. Suppl. 1928. V. 2. №1. P. 44-56.
52. Goldstein S. Tidal motion in a rotating elliptic basins of constant depth // MNRAS Geoph. Suppl. 1929. V. 2. №4. P. 213-231.
53. Grace S.F. The semi-diurnal lunar tidal motion of the Red Sea // MNRAS Geoph. Suppl. 1930. V. 2. №6. P. 273-296.
54. Grace S.F. The semi-diurnal lunar tidal motion of lake Baikal and the derivation of the Earth-tides from the water-tides // MNRAS Geoph. Suppl. 1931. V. 2. №7. P. 301-309.
55. Grace S. F. Tidal oscillations in rotating rectangular basins of uniform depth // MNRAS Geoph. Suppl. 1931. V. 2. №8. P. 385-398.
56. Hamblin P.F. On the free surface oscillations of Lake Ontario // Limnol. Ocenogr. 1982. V. 29. №6. P. 1039-1049.
57. Haurwitz B. The motion of atmospheric disturbances on the spherical Earth // J. Mar. Res. 1940. V. 3. P. 254-267.
58. Helal M.A. Shallow water waves in a rotating rectangular basin // Int. J. Math. and Math. Sci. 2000. V. 24. №10. P. 649-661.
59. Holl P. Die vollständigkeit des orthogonalsystems der Houghfunktionen // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (2). 1970. V. 7. P. 159-168.
60. Homer M.S. Boundary value problem for the Laplace tidal wave equation // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1990. V. 428. №1874. P. 157-180.
61. Hough S.S. On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, part I. On Laplace's "Oscillations of the first species" and on the dynamics of ocean currents // Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A). 1897. V. 189. P. 201-257.

62. Hough S.S. On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, part II. On the general integration of Laplace's dynamical equations // *Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A)*. 1898. V. 191. P. 139-185.
63. Hukuda H. On the quasi-Lame's equation with application to lake seiches // *Dyn. Atm. and Oceans*. 1986. V. 10. №2. P. 111-127.
64. Jeffreys H. On certain approximate solutions of linear differential equations on the second order // *Proc. L. Math. Soc. (2)*. 1924. V. 23. P. 428-436.
65. Jeffreys H. On certain solutions of Mathieu's equation // *Proc. L. Math. Soc. (2)*. 1924. V. 23. P. 437-448.
66. Jeffreys H. The free oscillations of water in an elliptical lake // *Proc. L. Math. Soc. (2)*. 1924. V. 23. P. 455-476.
67. Kasahara A. Normal modes of ultralong waves in the atmosphere // *Mon. Wea. Rev.* 1976. V. 104. P. 669-690.
68. Kasahara A. Numerical integration of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions // *J. Atm. Sci.* 1977. V. 34. P. 687-701.
69. Kasahara A. Further studies of a spectral model of the global barotropic primitive equations with Hough harmonic expansions // *J. Atm. Sci.* 1978. V. 35. P. 2043-2051.
70. Kasahara A., Qian J.-H. Normal modes of a global nonhydrostatic atmospheric model // *Mon. Wea. Rev.* 2000. V. 128. №10. P. 3357-3375.
71. Kato S. Diurnal atmospheric oscillation, part I. Eigenvalues and Hough functions // *J. Geophys. Res.* 1966. V. 71. P. 3201-3209.
72. Kato S. Diurnal atmospheric oscillation, part II. Thermal excitation in the upper atmosphere // *J. Geophys. Res.* 1966. V. 71. P. 3211-3214.
73. Kato S. Diurnal and semi-diurnal atmospheric tidal oscillation. Eigenvalues and Hough functions // *Rep. Ionosph. Space Res. Japan*. 1966. V. 20. P. 448-463.
74. Lai D. Dynamical tides in rotating binary stars // *Astrophys. J.* 1997. V. 490. P. 847-862.

75. Lee U., Saio H. Low-frequency non-radial oscillations in rotating stars, part I. Angular dependence // *Astrophys. J.* 1997. V. 491. P. 839-845.
76. Lindzen R.S. On the theory of the diurnal tide // *Mon. Wea. Rev.* 1966. V. 94. №5. P. 295-301.
77. Lindzen R.S. Planetary waves on beta-planes // *Mon. Wea. Rev.* 1967. V. 95. P. 441-451.
78. Lindzen R.S. The application of classical atmospheric tidal theory // *Proc. Roy. Soc. L. (A)*. 1968. V. 303. P. 299-316.
79. Lindzen R.S. Dynamics in atmospheric physics. Cambridge Univ. Press, 1990. 310 pp.
80. Lindzen R.S., Batten E.S., Kim J.-W. Oscillations in atmospheres with tops // *Mon. Wea. Rev.* 1968. V. 96. №3. P. 133-140.
81. Longuet-Higgins M.S. Planetary waves on a rotating sphere // *Proc. Roy. Soc. L. (A)*. 1964. V. 279. P. 446-473.
82. Longuet-Higgins M.S. Planetary waves on a rotating sphere, part II // *Proc. Roy. Soc. L. (A)*. 1965. V. 284. P. 40-68.
83. Longuet-Higgins M.S. The eigenfunctions of Laplace's tidal equations over a sphere // *Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A)*. 1968. V. 262. P. 511-607.
84. Margules M. Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1892. B. 101. S. 597-626.
85. Margules M. Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale, Teil II // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1893. B. 102. S. 11-56.
86. Margules M. Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale, Teil III // *Sitz. der Math.-Naturwiss. Klasse. Kais. Akad. Wiss. Wien. Abt. IIa*. 1893. B. 102. S. 1369-1421.
87. Martin P.A., Dalrymple R.A. On amphidromic points // *Proc. Roy. Soc. L. (A)*. 1994. V. 444. P. 91-104.

88. Neamtan S.M. The motion of harmonic waves in the atmosphere // J. Meteorol. 1946. V. 3. P. 53-56.
89. Nye J.F., Hajnal J.V., Hannay J.H. Phase saddles and dislocations in two-dimensional waves such as the tides // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1988. V. 417. P. 7-20.
90. O'Connor W.P. The complex wavenumber eigenvalues of Laplace's tidal equations for oceans bounded by meridians // Proc. Math. Phys. Sci. 1995. V. 449. №1935. P. 51-64.
91. Pekeris C.L. Atmospheric oscillations // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1937. V. 158. P. 650-671.
92. Platzman G.W. Two-dimensional free oscillations in natural basins // J. Phys. Oceanogr. 1972. V. 2. P. 117-138.
93. Platzman G.W. The atmospheric tide as a continuous spectrum: lunar semidiurnal tide in a surface pressure // Meteorol. Atmos. Phys. 1988. V. 38. P. 70-88.
94. Platzman G.W., Rao D.B. Spectra of Lake Erie water levels // J. Geoph. Res. 1964. V. 69. P. 2525-2535.
95. Pnueli A., Pekeris C.I. Free tidal oscillations in rotating flat basins of the form of rectangles and of sectors of circles // Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A). 1968. V. 263. №1138. P. 149-171.
96. Proudman J. On some cases of tidal motion of rotating sheets of water // Proc. L. Math. Soc. (2). 1913. V. 12. P. 453-473.
97. Proudman J. On the tides in a flat semicircular sea of uniform depth // MNRAS Geoph. Suppl. 1928. V. 2. №1. P. 32-43.
98. Rao D.B. Free gravitational oscillations in rotating rectangular basins // J. Fluid Mech. 1966. V. 25. P. 523-555.
99. Rao D.B., Mortimer C.H., Schwab D.J. Surface normal modes of Lake Michigan: Calculations compared with spectra of observed water level fluctuations // J. Phys. Oceanogr. 1976. V. 6. P. 577-588.

100. Rao D.B., Schwab D.J. Two-dimensional normal modes in arbitrary enclosed basins: Application to Lakes Ontario and Superior // Phil. Trans. Roy. Soc. L. (A). 1976. V. 281. P. 63-96.
101. Rossby C.-G. et coll. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action // J. Mar. Res. 1939. V. 2. P. 38-55.
102. Safwat H. Gravity waves in basins whose plan is a regular n -gon // ZAMM. 1986. V. 66. №2. P. 121-124.
103. Sawada R. Long atmospheric waves on the sphere and on the polar plane // Arch. Met. Geoph. Biokl. (A). 1966. V. 15. P. 129-167.
104. Schwarztrauber P.N., Kasahara A. The vector harmonic analysis of Laplace's tidal equations // Siam J. Sci. Stat. Comput. 1985. V. 6. P. 464-491.
105. Siebert M. Atmospheric tides // Advances in Geophysics 1961. V. 7. P. 105-182.
106. Taylor G.I. The oscillations of the atmosphere // Proc. Roy. Soc. L. (A). 1936. V. 156. P. 318-326.
107. Unno W., Osaki Y., Ando H., Shibahashi H. Nonradial oscillation of stars. Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1979. 330 pp.
108. Veronis G. On the approximations involved in transforming the equations of motion from a spherical surface to the β -plane, part I. Barotropic systems // J. Mar. Res. 1963. V. 21. P. 110-124.
109. Volland H. Atmospheric tidal and planetary waves. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988. 364 pp.
110. Volland H. Rossby-Haurwitz waves with zero zonal wavenumber // Beitr. Phys. Atm. 1989. V. 62. P. 77-89.
111. Volland H. Atmosphere and Earth's rotation // Surveys in Geophysics. 1996. V. 17. P. 101-144.
112. Volland H. Atmospheric tides // In Tidal Phenomena (ed. by H. Wilhelm, W. Zurm, H.-G. Wenzel). Springer Verlag, 1997. 221 pp.

113. Wilkes M.V. Oscillations of Earth's atmosphere. Cambridge Univ. Press, 1949.
114. Wu Z., Moore D.W. The completeness of eigenfunctions of the tidal equation on an equatorial beta plane // J. Atm. Sci. 2004. V. 61. №6. P. 769-774.