

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

---

*На правах рукописи*  
УДК 532.546:534-18

Ильясов Хисам Хисамович

ИССЛЕДОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ  
ГИДРОУПРУГИХ СРЕДАХ

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор С.Я. Секерж-Зенькович

Москва – 2005

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Поверхностные волны на границе пористой флюидонасыщенной среды</b>	<b>11</b>
1.1 Уравнения распространения акустических волн в пористой флюидонасыщенной среде . . . . .	11
1.2 Волны на границе пористого полупространства . . . . .	16
<b>2 Преломление и отражение акустических волн пористым слоем в жидкости</b>	<b>27</b>
2.1 Моделирование преломления нестационарного акустического импульса пористым слоем в жидкости . . . . .	27
2.2 Приближенное решение для слоя малой толщины . . . . .	47
<b>3 Распространение сейсмоакустических волн в трехслойной модели океана</b>	<b>62</b>
3.1 Волны в упругом слое, заключенном между сжимаемой жидкостью и упругой средой . . . . .	63
3.2 Волны в пористом слое, заключенном между жидкостью и упругой средой . . . . .	79
<b>Заключение</b>	<b>87</b>
<b>Литература</b>	<b>89</b>
<b>Приложение</b>	<b>96</b>

## Введение

Математическое моделирование волновых процессов в слоистых гидроупругих средах является важной и актуальной проблемой. Интерес к этим исследованиям стимулируется, в первую очередь, потребностями сейсморазведки и гидроакустики в надежной интерпретации данных наблюдений. Анализ работ в этой области показывает, что в последнее время интенсивно ведутся работы по изучению процессов отражения, преломления и распространения акустических волн в слоистых средах, содержащих пористые флюидонасыщенные прослойки. При этом особое внимание уделяется влиянию на свойства волн движения насыщающей жидкости относительно скелета пористой среды.

Началом активных исследований волновых процессов в насыщенных пористых средах послужила работа Я.И. Френкеля [28], посвященная так называемому сейсмoeлектрическому эффекту. В результате анализа линеаризованных уравнений движения твердой и жидкой фаз Я.И. Френкелем было выведено дисперсионное уравнение для продольных волн в пористой среде и найдено его приближенное решение, соответствующее волнам первого и второго рода. Вслед за этой работой уравнения распространения звуковых волн в газонасыщенной пористой среде в одномерном приближении были получены в книге К. Цвиккера и К. Костена [29]. Одна из широко распространенных в настоящее время моделей была предложена М. Био (М. Biot) в серии работ 50–60-х гг. [36, 37, 38, 39, 40]. Как показано Л.Я. Косачевским [17], предложенная Био система уравнений движения пористой среды опирается на те же соотношения между напряжениями и деформациями, что и в работе Я.И. Френкеля, но отличается большей общностью. Теория распространения звуковых волн в насыщенной пористой среде также изучалась П.П. Золотаревым [15], В.Н. Николаевским [24] и Х.А. Рахматулиным [26]. Подробный анализ уравнений распространения звука в насыщенной пористой среде, предложенных различными авторами, дан В.Н. Николаевским в [25].

Важным результатом исследований звука в насыщенной пористой среде явилось предсказание существования трех типов собственных волн: продольных волн первого и второго рода (называемых иногда быстрой и медленной продольными волнами) и поперечной волны (волны сдвига). Если быстрая продольная и сдвиговая волны по своей природе близки к волнам в безграничной упругой среде, то медленная продольная волна с ее значительными дисперсией и затуханием, вызванным перемещением частиц жидкости относительно

скелета, является новой свойственной именно пористой среде.

Значительный интерес к акустике насыщенных пористых сред породила экспериментальная работа Т. Plona [84], в которой впервые была зарегистрирована медленная продольная волна в пористой среде искусственного происхождения. Несмотря на успешное подтверждение выводов теории для искусственных материалов, результаты экспериментальных исследований демонстрировали значительное расхождение дисперсии и затухания для сред естественного происхождения [59, 91, 92, 93]. С целью получения согласованных результатов теории и эксперимента рядом авторов были предложены новые модели акустики пористых сред. В большинстве своем эти модели в той или иной степени сводились к системе уравнений Био с зависящими от частоты коэффициентами.

Так в работах R. Stoll, T. Kan, A. Turgut, T. Yamamoto [90, 93], посвященных исследованию осадочных пород, кроме потерь, обусловленных относительным движением жидкости и скелета, учитывались потери от движения частиц скелета в точках контакта. Это делалось за счет введения в уравнения Био комплекснозначного модуля сдвига скелета. С аналогичной целью в работах А.В. Бакулина и Л.А. Молоткова [34] предлагалось использовать комплекснозначные плотности сред. В модели, развиваемой в работах J. Dvorkin, G. Mavko, A. Nur, M. Diallo и др. [56, 59, 60, 61], учитывались дополнительные потери, связанные с течением жидкости в микротрещинах в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. В работах D. Johnson и др. [73, 74] предлагалось учитывать зависимость от частоты вязких потерь, вызванных движением жидкости относительно скелета. Другие модели пористой среды, отличные от модели Био, предлагались в работах Л.Д. Акуленко и С.В. Нестерова [1, 2, 3], Т.У. Артикова [4], И.Я. Эдельман и К. Wilmanski [62].

В отличие от упругих сред волны в насыщенных пористых средах обладают существенными дисперсией и затуханием. Исследованию влияния этих факторов на отражение и преломление акустических волн посвящены работы [9, 17, 18, 30, 32, 50, 51, 53, 55, 58, 65, 78, 85, 90]. Отражение от свободной границы пористой среды изучали Л.Я. Косачевский [17], Н. Deresiewicz [50, 51]. Задача отражения и преломления волны на границе раздела двух пористых сред в случае нормального падения решалась J. Geertsma, D. Smit [65]. Ими же были получены решения для нормального падения волны на границы раздела упругой и пористой сред и на границу раздела жидкости и пористой среды как предельные случаи предыдущей задачи. Отражение на границе раздела двух произвольных пористых сред исследовалось в работах Н. Deresiewicz [53]; на границе раздела жидкости и газа в пористой среде – N. Dutta, Н. Ode [58]; от группы пористых слоев – Л.Я. Косачевским [18], Н. Deresiewicz [55]; от пористого слоя с меняющимися по толщине параметрами – М. Stern и др. [89]; от случайной последовательности пористых слоев – S. Pride и др. [85]; на границе жидкости и пористой среды – D. Albert [32], R. Stoll, T. Kan [90]. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов для отражения волн на границе

жидкости и пористой среды проведено D. Johnson и др. [74] и Kunyu Wu и др. [78].

Упрощенные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны через границу раздела жидкости и пористой среды в предположении бесконечно жесткого материала скелета выведены в работе A. Denneman и др. [49]. Приближенные аналитические выражения для коэффициента отражения низкочастотного сигнала от пористого слоя, заключенного между жидкостью и упругой средой, получены Г. Бордаковым и др. в [9].

Влияние пористости и насыщенности на распространение поверхностных волн изучалось в работах [23, 31, 52, 54, 62, 64]. Поверхностная волна на свободной границе пористой среды как вырожденный случай отражения исследовалась Л.Я. Косачевским [17]. Решение для поверхностной волны на свободной границе пористой среды было получено Л.А. Молотковым в результате предельного перехода при исследовании акустических волн в слое. Поверхностные волны на границе жидкости и пористой среды изучались в работах Н. Deresiewicz [54], И.Я. Эдельман, К. Wilmanski [62], S. Feng, D. Johnson [64].

Разнообразие моделей распространения звука в пористых средах, многопараметричность моделей, зависимость некоторых параметров от частоты требуют тщательного сравнения теоретических результатов с данными экспериментов. В первую очередь это касается одного из ключевых выводов теории – существования в насыщенной пористой среде медленной продольной волны.

Медленная продольная волна впервые была зарегистрирована Т. Plona в 1980 г. [84] в водонасыщенных пористых средах искусственного происхождения. В эксперименте исследовалось прохождение импульсного акустического сигнала через пористые пластины, погруженные в жидкость. Пластины изготавливались спеканием мелких стеклянных шариков. В более поздней работе D. Johnson, Т. Plona [71] были измерены скорости всех трех типов волн в пористых средах с жестким и нежестким скелетами (для нежесткого скелета спекание шариков не производилось). Сравнение результатов измерений со значениями скоростей, получаемых из уравнений Био показало хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов.

Несмотря на успешные результаты экспериментов Т. Plona и D. Johnson, оставался неясным вопрос о применимости теории Био для естественных пористых сред. В работе L. Adler, P. Nagy [82] было проведено исследование естественных пористых материалов с воздушным заполнением. Использование заполненной воздухом пористой среды объяснялось авторами тем, что в такой среде медленная продольная волна обладает значительно меньшим затуханием по сравнению с волной в среде, заполненной жидкостью. Кроме того, при использовании методики, аналогичной Т. Plona, большая часть энергии падающей волны переходит в быструю продольную волну и (если угол падения волны, отличен от нуля) в волну сдвига. В случае заполнения газом доля энергии падающей волны, сообщаемая медленной продольной волне, существенно выше, чем в случае заполнения

жидкостью. Кроме этого, из-за более низкого значения вязкости газа, существенно ниже и затухание медленной продольной волны (детальное обсуждение различий в поведении пористой среды заполненной жидкостью или газом дано в работе D. Albert [32].

Впервые медленная волна в заполненной жидкостью пористой среде естественного происхождения с жестким скелетом была зарегистрирована в работах O. Kelder, D. Smeulders [76, 77].

В работе A. Turgut, T. Yamamoto [93] при исследовании скоростей и затухания акустических волн в морских осадках проводилось прямое измерение сигнала в толще среды двумя приемниками. По разности времен прохождения импульсов через толщу осадочной породы и различию их амплитуд, регистрируемых каждым из приемников, делалось заключение о скоростях и декрементах затухания собственных волн в среде. По результатам измерений в модель вносилось дополнительное затухание с помощью комплексного модуля сдвига скелета. В отличие от работы T. Plona в данной работе не рассматривалась медленная продольная волна, что в первую очередь связано с большими значениями затухания медленной волны в низкочастотной области.

Свойства поверхностных волн на границе жидкости и пористой среды экспериментально исследовались в работе M. Mayers, P. Nagy, L. Adler [81]. Результаты измерений, по мнению авторов, показали хорошее согласование с теоретическими данными работы S. Feng, D. Johnson [64].

Из проведенного анализа работ, посвященных исследованиям волновых процессов в слоистых средах с пористыми прослойками, можно сделать следующие выводы. Большое разнообразие моделей распространения акустических волн в насыщенных пористых средах требует тщательного сравнения теоретических и экспериментальных данных. При этом особое внимание следует уделять возбуждаемой в пористой среде медленной продольной волне. Для понимания сложных многопараметрических процессов, происходящих на границах пористых сред, представляется актуальным построение аналитических и аналитико-численных решений.

В соответствии со сказанным выше определим основные задачи диссертации:

- Аналитико-численное исследование распространения, отражения и преломления акустических волн в слоистых гидроупругих системах, образованных жидкими, пористыми и упругими средами.
- Моделирование лабораторных и натурных измерений.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

В первой главе приводятся уравнения распространения акустических волн в безграничной пористой флюидонасыщенной среде в приближении теории Био и выражения для

вычисления коэффициентов модели через параметры среды. Выписываются формулы для нахождения скоростей распространения быстрой, медленной продольных волн и волны сдвига. Здесь же приведены варианты модификаций уравнений Био, позволяющие учитывать различные свойства среды.

Далее рассматривается задача распространения волн вдоль свободной границы пористого полупространства в случае, когда скорость медленной продольной волны меньше скорости волны сдвига. Из граничных условий на свободной поверхности пористой среды и выражений для потенциалов смещений частиц жидкости и скелета выводится дисперсионное соотношение для нахождения постоянных распространения волн. Это же соотношение переформулируется в полиномиальном виде, который облегчает задачу нахождения решений. Проводится анализ дисперсионного соотношения на предмет существования неизлучающихся решений в случае отсутствия в пористой среде вязких потерь. В зависимости от пористости среды численно находится область значений модуля сдвига скелета пористой среды, для которой существуют неизлучающиеся поверхностные волны. Показывается, что эта область достаточно узкая и для большого диапазона значений параметров, реально встречающихся пористых сред, волны на границе будут излучающимися. В случае малой пористости среды выводятся аналитические соотношения для границ области существования неизлучающихся решений.

Для случая, когда скорости поверхностной и поперечной волн близки друг другу, находятся приближенные аналитические выражения для корней дисперсионного уравнения. Проводится сравнение результатов вычислений по полученным приближенным формулам с точными результатами для различных параметров пористых сред, взятым из публикаций.

Далее рассматриваются свойства волн на границе пористой среды с учетом потерь, обусловленных вязкостью жидкости. В зависимости от модуля сдвига скелета пористой среды анализируется скорость распространения волны на границе и ее затухание при переходе от неизлучающихся к излучающимся решениям.

Во второй главе изучается отражение и преломление акустических волн пористым слоем в жидкости. Первая часть главы посвящена моделированию лабораторного эксперимента, в котором впервые была обнаружена медленная продольная волна в пористой среде естественного происхождения с жестким скелетом.

Сначала определяются необходимые для проведения моделирования параметры пористой среды. По значениям скоростей быстрой, медленной продольных и поперечной волн, взятым из эксперимента, находятся коэффициент присоединенных масс, объемный модуль упругости и модуль сдвига скелета пористой среды. Поскольку эти параметры нелинейным образом зависят друг от друга и частоты, для их вычисления предлагается процедура, позволяющая за несколько итераций (2-3) получить значения с приемлимой для расчетов точностью. Затем описывается математическая модель эксперимента и выводятся формулы для определения зависимости давления в жидкости в плоскости наблюдения по

давлению в плоскости излучения.

Далее излагается вычислительная процедура и проводятся расчеты преломления акустического импульса пористой пластиной в жидкости. Для выбора модели пористой среды, наиболее адекватно описывающей результаты эксперимента, в расчетах используются различные модификации уравнений Био. Расчеты проводятся по “традиционной” модели Био с постоянными коэффициентами, по моделям, учитывающим потери в пористой среде за счет введения комплексного модуля сдвига скелета или комплексной плотности среды, по модели “динамической проницаемости”, в которой учитывается изменение коэффициента вязких потерь в зависимости от частоты, по модели “боковых течений”, в которой жидкость течет в порах не только в направлении параллельном распространению волны но и в поперечном. Также используются различные варианты граничных условий между пористой средой и жидкостью, позволяющие учесть полное и частичное протекание жидкости, а также полное непротекание.

В результате расчетов показывается, что ни одна из моделей не позволяет получить результаты похожие на наблюдаемые в эксперименте. Наилучшее согласование результатов моделирования с экспериментом получается для модели, сочетающей динамическую проницаемость с комплексным значением модуля сдвига скелета пористой среды.

Во второй части главы выводятся формулы для асимптотического разложения потенциалов на границах слоя в случае его малой толщины, позволяющие уменьшать размерность решаемой задачи и получать решение с точностью до членов квадратично зависящих от толщины слоя. Данный подход применяется для решения задачи об отражении плоских монохроматических волн от пористого слоя, погруженного в жидкость. Исходная система уравнений восьмого порядка заменяется эквивалентной ей системой пятого порядка, учитывающей величины, квадратично зависящие от толщины слоя. Из решения полученной системы с помощью программы Maple находится приближенное аналитическое выражение для коэффициента отражения от пористого слоя. Для проверки выведенных формул приводится сравнительный анализ значений коэффициента отражения, найденного по приближенным формулам с точным значением, полученным в результате численного решения полной задачи. Показывается, что учет членов квадратично зависящих от толщины слоя в разложениях потенциала на границах, приводит более чем трехкратному увеличению диапазона частот, в котором применимы приближенные формулы для вычисления коэффициента отражения.

В третьей главе моделируются результаты натурных наблюдений сверхдальнего распространения порожденной землетрясением сейсмоакустической волны вдоль океанского дна. В них была зафиксирована поверхностная, почти монохроматическая волна, скорость распространения которой близка к скорости акустической волны в жидкости.

Рассматривается трехслойная модель океана, включающая слой жидкости, слой донных отложений и упругое основание. Проводится анализ свойств трех первых нормальных



волн в зависимости от параметров слоя осадков. В первой части главы решается задача, где слой осадков считается упругой средой, у которой скорость продольной волны немного превышает скорость акустической волны в жидкости, а скорость поперечной волны значительно меньше скоростей волн в жидкости и упругом основании. Изучается случай бесконечно глубокого океана и с помощью аналитико – численной процедуры рассчитываются зависимости от частоты фазовых и групповых скоростей трех первых нормальных волн в системе. Показывается, что в точках зарождения второй и третьей нормальных волн фазовая скорость совпадает с групповой и равняется скорости волны в жидкости. С ростом частоты наблюдается быстрый спад групповой скорости, причем с ростом номера нормальной волны крутизна этого участка уменьшается. Такие участки скачкообразного изменения групповой скорости могут приводить к появлению на сейсмограммах участков с почти постоянной частотой. Отмечается, что в цитируемых работах наблюдается разрыв между фазовой и групповой скоростями в точках зарождения второй и третьей нормальных волн, с помощью которого авторы объясняют результаты натурных наблюдений.

Далее рассматривается задача распространения волн в случае океана конечной глубины. Показывается значительное различие в поведении нормальных волн по сравнению с бесконечно глубоким океаном. Отмечается, что в той части дисперсионных кривых, где фазовая скорость волн близка к скорости волны в жидкости, у зависимости групповой скорости от частоты уже нет быстрого спада, что не позволяет объяснить наблюдение почти монохроматических поверхностных волн. Утверждение подкрепляется результатами расчетов, которые показывают, что изменение толщины слоя и скорости собственных волн в нем не оказывают существенного влияния на фазовые и групповые скорости в интересующем нас диапазоне частот.

В следующем разделе главы слой осадков моделируется пористой средой. Изучаются свойства поверхностных волн с учетом и без учета вязких потерь в среде. Показывается, что в точке зарождения фазовые и групповые скорости второй нормальной волны равны скорости волны сдвига в упругом основании, далее с увеличением частоты также наблюдается быстрое падение групповой скорости, которое затем замедляется и сменяется участком нарастания до скоростей, близких скорости акустических волн в жидкости. С повышением частоты у групповой скорости снова наблюдается участок быстрого спада в той области, где фазовая скорость поверхностных волн близка к скорости волн в жидкости. Исследуется влияние упругих свойств пористой среды и толщины слоя осадков на поведение поверхностных волн. Показывается, что в случае пористой среды существует диапазон частот, близкий к наблюдаемым, в котором возможно распространение почти монохроматических поверхностных волн. Делается вывод о целесообразности моделирования слоя осадков пористой средой для объяснения наблюдаемых на сейсмограммах волн.

Научная новизна работы:

- Показана возможность существования поверхностных волн в пористом полупространстве для ранее неизученного случая сочетания скоростей волн.
- Выполнено моделирование лабораторного эксперимента, в котором впервые зарегистрирована волна Био в насыщенном жидкостью пористом образце естественного происхождения.
- Разработан метод приближенного решения задач о распространении волн на границах тонкого флюидонасыщенного слоя.
- Проведено моделирование натурных наблюдений сверхдальнего распространения сейсмоакустических волн вдоль океанского дна.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6, 7, 8, 14, 16, 41, 42] и представлялись в докладах на 61 конференции EAGE (Хельсинки, 7–11 июня 1999 г.); на международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной П.Я. Полубариновой–Кочиной (Москва 6–8 сентября 1999 г.); на научном семинаре МГУ им. М.В. Ломоносова "Граничные задачи электродинамики" под рук. А.Г. Свешникова, А.С. Ильинского (2005 г.); в Институте механики МГУ, на семинаре по механике сплошных сред под рук. А.Г. Куликовского, А.А. Бармина, В.П. Карликова (2005 г.); на семинарах в Институте проблем механики РАН.

На защиту выносятся:

- Решение задачи распространения поверхностных волн на границе пористого полупространства для ранее неизученного случая сочетания скоростей волн.
- Решение задачи о преломлении акустического импульса пористым слоем в жидкости. Анализ адекватности использованных моделей пористой среды известным экспериментам.
- Метод приближенного решения задач о распространении волн на границах тонкого флюидонасыщенного слоя.
- Аналитические выражения для коэффициента отражения монохроматической волны тонким пористым слоем в жидкости.
- Решение задачи распространения поверхностных волн в модели океана с придонным слоем осадков, моделируемом упругой или пористой средами.

# Глава 1

## Поверхностные волны на границе пористой флюидонасыщенной среды

### 1.1 Уравнения распространения акустических волн в пористой флюидонасыщенной среде

Теория распространения акустических волн в пористой среде представлена Био в ряде работ [36, 37, 39, 40]. В рамках теории Био пористая среда представляется в виде однородного жесткого скелета с проницаемыми (неизолированными) порами полностью заполненными жидкостью, пористость и проницаемость скелета считается одинаковой во всех сечениях. Длина акустической волны полагается существенно большей, чем размер пор. Смещения частиц каждой из компонент связаны следующими уравнениями [90]:

$$\begin{aligned} H \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - C \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} &= \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} \\ C \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - M \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} &= \rho_f \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\vec{w} = \beta(\vec{u} - \vec{U})$ ,  $\vec{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$  – смещение частиц скелета пористой среды,  $\vec{U} = \{U_x, U_y, U_z\}$  – смещение частиц жидкости,  $\rho = (1 - \beta)\rho_r + \beta\rho_f$  – средняя плотность пористой среды,  $\rho_r$ ,  $\rho_f$  – плотность частиц скелета и плотность жидкости в порах, соответственно,  $\beta$  – пористость среды,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости в порах,  $\kappa$  – гидравлический коэффициент проницаемости пор,  $m = (1 + \alpha)\rho_f/\beta$ ,  $\alpha$  – коэффициент дополнительных (присоединенных) масс.

Параметры  $H$ ,  $C$ ,  $M$  – упругие модули теории Био, являются слабо изменяющимися с

частотой величинами и представляются как [90, 93]

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(K_r - K_s)^2}{D_r - K_s} + K_s + \frac{4}{3}\mu & D_r &= K_r \left( 1 + \beta \left( \frac{K_r}{K_f} - 1 \right) \right) \\
 C &= \frac{K_r(K_r - K_s)}{D_r - K_s} & K_s &= \left( \frac{2n}{1 - 2n} + \frac{2}{3} \right) \mu, \\
 M &= \frac{K_r^2}{D_r - K_s}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $K_r$  – объемный модуль упругости зерен скелета,  $K_f$  – объемный модуль упругости жидкости в порах,  $K_s$  – объемный модуль упругости скелета,  $\mu$  – модуль сдвига скелета,  $n$  – коэффициент Пуассона скелета пористой среды.

Связь тензоров напряжения и деформации для пористой среды представляется как (вместо  $i, j$  и  $k$  полагается  $x, y, z$ )

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii} &= H e - 2\mu(\epsilon_{jj} + \epsilon_{kk}) - C\zeta \\
 \sigma_{ij} &= 2\mu\epsilon_{ij} \quad i \neq j \\
 P_f &= M\zeta - C e.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  – компоненты тензора малой деформации,  $P_f$  – давление жидкости в порах,  $e = \text{div } \vec{u}$ ,  $\zeta = \text{div } \vec{w}$ .

Представим смещения  $\vec{u}$  и  $\vec{w}$  через скалярный и векторный потенциалы

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \text{grad } \Phi_s + \text{rot } \vec{\Psi}_s \\
 \vec{w} &= \text{grad } \Phi_f + \text{rot } \vec{\Psi}_f.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Далее мы будем рассматривать двумерные движения пористой среды в плоскости  $XZ$ . Можно показать, что для этого случая векторные потенциалы  $\vec{\Psi}_s$  и  $\vec{\Psi}_f$  имеют ненулевые только  $Y$  – компоненты  $\vec{\Psi}_s = \{0, \Psi_s, 0\}$ ,  $\vec{\Psi}_f = \{0, \Psi_f, 0\}$ . В последующем изложении под  $\Psi_s$ ,  $\Psi_f$  мы будем подразумевать именно эти величины. Подставляя выражения для потенциалов (1.4) в уравнения Био (1.1) и, применяя к полученным уравнениям операции  $\text{div}$  и  $\text{rot}$ , получаем

$$H \text{div grad } \Phi_s - C \text{div grad } \Phi_f = \rho \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
 C \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_s - M \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_f &= \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \Phi_f}{\partial t} \\
 \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \Psi_s &= \rho \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial t^2} \\
 0 &= \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial t^2} - m \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \Psi_f}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Первое и второе уравнения последней системы описывают продольные волны (сжатия) в пористой среде, для которых  $\operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{rot} \vec{w} = 0$ , а третье и четвертое уравнения – поперечную (сдвиговую) волну, для которой  $\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w} = 0$ .

Для плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси  $X$  в безграничной пористой среде, потенциалы могут быть представлены в виде  $\Phi_s = A_s e^{i(\omega t - kx)}$ ,  $\Phi_f = A_f e^{i(\omega t - kx)}$  и  $\Psi_s = B_s e^{i(\omega t - kx)}$  и  $\Psi_f = B_f e^{i(\omega t - kx)}$ . Из условия нетривиальной разрешимости первых двух уравнений системы (1.5) получается следующее уравнение для вычисления волновых чисел быстрой продольной ( $k_+$ ) и медленной продольной ( $k_-$ ) волн

$$(C^2 - HM)k^4 + \omega^4(\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C)k^2 - \omega^4(\rho\tilde{m} - \rho_f^2) = 0. \tag{1.6}$$

В последнем выражении через  $\tilde{m}$  обозначена величина  $m - i\rho_f\nu/(\omega\kappa)$ .

Волновое число поперечной волны ( $k_s$ ) находится из третьего и четвертого уравнений системы (1.5)

$$k_s^2 = \omega \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\mu\tilde{m}}. \tag{1.7}$$

При этом коэффициенты  $A_s$ ,  $A_f$ ,  $B_s$ ,  $B_f$  связаны между собой следующими соотношениями  $A_f = F_\pm A_s$  и  $B_f = F_s B_s$ , где через  $F_\pm$  и  $F_s$  обозначены величины

$$F_+ = \frac{Hk_+^2 - \rho\omega^2}{Ck_+^2 - \rho_f\omega^2}, \quad F_- = \frac{Hk_-^2 - \rho\omega^2}{Ck_-^2 - \rho_f\omega^2}, \quad F_s = \frac{\rho_{2f}}{\tilde{m}_2}. \tag{1.8}$$

Коэффициент  $F_+$  или  $F_-$  выбирается в зависимости от того, какой волне соответствует решение – быстрой или медленной.

Из (1.6) можно получить следующие соотношения между постоянными распространения продольных волн в пористой флюидонасыщенной среде

$$k_+^2 + k_-^2 = \omega^2 \frac{\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C}{HM - C^2}, \quad k_+^2 k_-^2 = \omega^4 \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{HM - C^2}. \tag{1.9}$$

В том случае, когда скорость медленной продольной волны существенно меньше скорости быстрой волны  $k_+ \ll k_-$ , что эквивалентно соотношению

$$(HM - C^2)(\rho\tilde{m} - \rho_f^2)/(\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C)^2 \ll 1,$$

в выражении для  $k_+^2 + k_-^2$  можно пренебречь величиной  $k_+^2$  и как и в [65, 93] использовать следующие приближенные соотношения

$$k_+^2 \approx \omega^2 \frac{\rho \tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C} \quad \text{и} \quad k_-^2 \approx \omega^2 \frac{\tilde{m}H + \rho M - 2\rho_f C}{HM - C^2}. \quad (1.10)$$

Уравнения Био в форме (1.1) учитывают только потери, связанные с вязкостью жидкости в порах, но для достаточного широкого класса пористых сред этого недостаточно. В случае применения теории Био к задачам распространения акустических волн в средах с нежестким скелетом, в котором частицы слабо связаны либо вообще не связаны между собой, требуется учет дополнительных потерь энергии в скелете. В работах R. Stoll, T. Kan, A. Turgut, T. Yamamoto [90, 92, 93] для этой цели предлагалось использовать комплексный модуль сдвига скелета  $\mu = \mu_r(1 + i\delta)$ . А в работе А.В. Бакулина и Л.А. Молоткова [34] потери энергии внутри скелета вводились через комплексные плотности сред

$$\rho = \rho + \frac{A}{D + i\omega}, \quad \rho_f = \rho_f + \frac{B}{D + i\omega}, \quad \tilde{m} = \tilde{m} + \frac{C}{D + i\omega}, \quad (1.11)$$

где  $A, B, C, D$  – некоторые константы.

В серии статей J. Dvorkin, G. Mavko, A. Nur, M. Diallo и др. [56, 59, 60, 61] были выведены уравнения акустических колебаний для трещиноватой пористой среды. Авторы предполагают (рис. 1.1), что создаваемая акустической волной деформация скелета приводит к течению жидкости по порам в направлении распространения волны (как и в теории Био) и по микротрещинам в перпендикулярном волне направлении (т.н. “боковое течение”, S squirt flow).

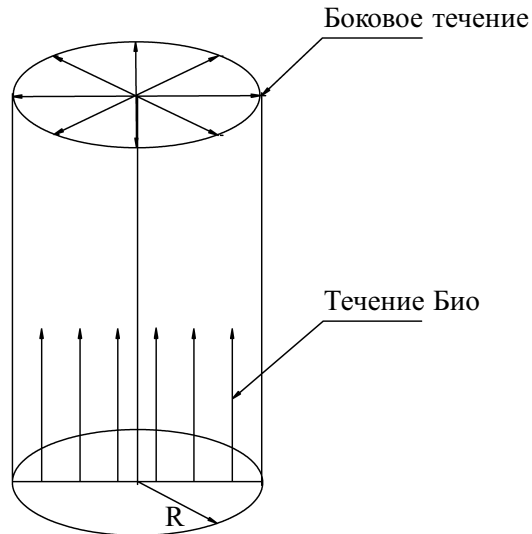


Рис. 1.1.

Для описания течения жидкости в поперечном направлении вводится дополнительный параметр – характеристический радиус  $R$ , который представляет собой расстояние, на ко-

тором избыточное давление жидкости спадает до среднего невозмущенного значения. По мнению авторов модели, характеристической радиус является таким же фундаментальным параметром пористой среды как проницаемость и не зависит от частоты и насыщающей поры жидкости. Величина  $R$  по данным работ [59, 60] колеблется в пределах от десятых долей миллиметра до нескольких миллиметров.

В результате анализа “бокового течения” жидкости в порах вводится поправочный коэффициент  $S$ , на который домножается давление жидкости в порах

$$S = \left(1 - \frac{2J_1(\lambda R)}{\lambda R J_0(\lambda R)}\right); \quad \lambda = \sqrt{\frac{\tilde{m}}{M}}. \quad (1.12)$$

Из чего получается, что уравнения в модели J. Dvorkin, A. Nur (BISQ модели) отличаются от исходных уравнений Био только значениями упругих констант

$$H' = H + \frac{C^2}{M}(S - 1); \quad C' = CS; \quad M' = MS,$$

где  $H, C, M$  упругие модули теории Био, определяемые выражениями (1.2), а  $H', C', M'$  – упругие модули, используемые в рамках BISQ модели.

В уравнениях, предложенных в работе D. Johnson и др. [73, 74], используется тот факт, что затухание, описываемое законом Дарси, справедливо для случая низких частот, когда толщина скин-слоя  $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$  существенно больше размеров пор. С ростом частоты толщина скин-слоя уменьшается, и течение жидкости в порах становится потенциальным везде, кроме тонкого слоя вблизи стенок. Таким образом потери в среде определяются именно этим тонким слоем. Предлагаемые авторами изменения сводятся к введению частотной зависимости коэффициента проницаемости пористой среды по следующему закону:

$$\tilde{m} = m - i \frac{\nu \rho_f}{\kappa \omega} \sqrt{1 + 4i \left(\frac{m \kappa}{\Lambda \rho_f}\right)^2 \frac{\omega}{\nu}}. \quad (1.13)$$

Параметр модели  $\Lambda$  имеет размерность длины и обычно принимает значения от нескольких микрометров до нескольких десятков микрометров [74].

## 1.2 Волны на границе пористого полупространства

Как известно [10], на свободной поверхности упругой среды может распространяться незатухающая поверхностная волна, называемая волной Рэлея. Большой интерес к изучению низкочастотных волн данного типа был вызван в первую очередь задачами сейсморазведки, т.к. именно рэлеевская волна обладает наименьшим затуханием по сравнению с другими типами волн, возбуждаемыми при землетрясениях. Позже рэлеевские волны высоких частот стали использоваться для неразрушающего контроля и определения физических свойств различных материалов.

В работе Л.Я. Косачевского [17] было показано, что при определенном сочетании свойств, на свободной поверхности пористой среды может распространяться волна, близкая по своим свойствам к волне Рэлея. Позже точно такое же решение было получено как предельный случай в работе Л.А. Молоткова [23] при изучении волн, распространяющихся в изолированном пористом слое. Как и классическая волна Рэлея, волны данного типа вызывают не меньший интерес при решении различных задач акустики [31] и сейсморазведки [80]. Имеются все основания полагать, что небольшая (около длины волны [13]) глубина локализации аналогичных волн позволит использовать решение для свободной границы пористой среды и в более сложных задачах. Результат, подтверждающий данное утверждение, был получен в работе J. Allard и др. [31] при исследовании пористой среды с воздушным заполнением.

В отличие от волны Рэлея, поверхностная волна на границе пористой среды будет обладать затуханием, обусловленным вязкими потерями. Для того чтобы в дальнейшем разделить затухание, вызванное потерями в среде, и затухание, вызванное излучением, будем говорить о излучающихся (комбинированное затухание) и неизлучающихся (присутствуют только потери в среде) волнах.

Изложенные в работах Л.Я. Косачевского и Л.А. Молоткова результаты описывают достаточно редко наблюдаемый на практике случай, когда скорость волны сдвига в пористой среде меньше скорости медленной продольной волны, поэтому представляет интерес изучение ситуации, когда, наоборот, скорость медленной продольной волны меньше скорости волны сдвига. При рассмотрении данной задачи нас в первую очередь будут интересовать условия существования неизлучающихся волн, т.е. волн, которые могут распространяться с малым затуханием на большие расстояния.

В данном разделе изучается распространение поверхностных волн на свободной границе пористой среды при условии, что скорость медленной продольной волны меньше чем скорость волны сдвига. Аналитически исследуется дисперсионное уравнение в случае отсутствия вязких потерь в среде на наличие вещественного корня и находится его приближенное решение для случая малой пористости или близости корня к скорости волны сдвига. Показывается, что для выбранного соотношения между скоростями волн в



пористой среде неизлучающиеся поверхностные волны могут существовать только для определенного диапазона параметров среды. Проводится анализ решений в случае наличия вязких потерь в среде при переходе от неизлучающихся решений к излучающимся.

## Дисперсионное соотношение

Рассмотрим задачу о распространении гармонических с частотой  $\omega$  волн вдоль свободной границы пористой среды. Пусть пористая среда занимает нижнее полупространство (рис. 1.2).

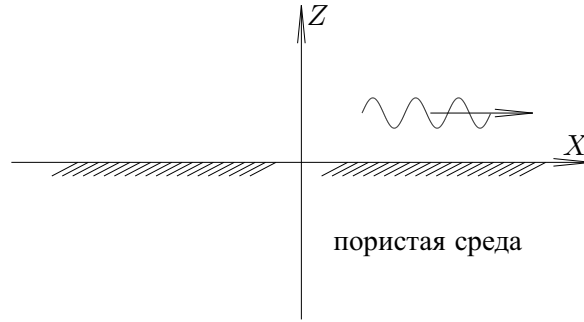


Рис. 1.2.

Введем систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы ось  $X$  совпадала с границей раздела пористой среды, а ось  $Z$  была направлена вертикально вверх.

На границе пористой среды потребуем удовлетворения следующих граничных условий: равенства нулю нормальной, тангенциальной компонент тензора напряжений и давления поровой жидкости

$$H \operatorname{div} \vec{u} - 2\mu \epsilon_{xx} - C \operatorname{div} \vec{w} = 0$$

$$2\mu \epsilon_{xz} = 0$$

$$M \operatorname{div} \vec{w} - C \operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

что в форме потенциалов может быть представлено как

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2} - 2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x \partial z} \right) &= 0 \\ \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \rho_f \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial t^2} - \tilde{m} \frac{\partial^2 \Phi_f}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Потенциалы для пористой среды запишем в виде

$$\begin{aligned}\Phi_s &= (A_1 e^{\tau_+ z} + A_2 e^{\tau_- z}) e^{i(\omega t - kx)} \\ \Phi_f &= (F_+ A_1 e^{\tau_+ z} + F_- A_2 e^{\tau_- z}) e^{i(\omega t - kx)} \\ \Psi_s &= A_3 e^{\tau_s z} e^{i(\omega t - kx)} \\ \Psi_f &= F_s A_3 e^{\tau_s z} e^{i(\omega t - kx)},\end{aligned}\tag{1.15}$$

где  $F_+$ ,  $F_-$  и  $F_s$  определяются формулами (1.8),  $A_1 \dots A_3$  – неизвестные амплитуды,  $\tau_+ = \sqrt{k^2 - k_+^2}$ ,  $\tau_- = \sqrt{k^2 - k_-^2}$ ,  $\tau_s = \sqrt{k^2 - k_s^2}$  – поперечные постоянные распространения. Ветви квадратного корня в выражениях для  $\tau_+$ ,  $\tau_-$  и  $\tau_s$  выбираются таким образом, чтобы их вещественная часть была положительной (в дальнейшем, если не будет оговорено особо, ветви квадратного корня будут выбираться аналогично).

Подстановка потенциалов (1.15) в граничные условия (1.14) приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных амплитуд  $A_1$ – $A_3$  (для упрощения записи ниже приводится матрица коэффициентов перед амплитудами).

$$\begin{bmatrix} 2\mu k^2 - (\rho - \rho_f F_+) & 2\mu k^2 - (\rho - \rho_f F_-) & -2i\mu k \tau_s \\ 2ik\tau_+ & 2ik\tau_- & 2k^2 - k_s^2 \\ \rho_f - \tilde{m}F_+ & \rho_f - \tilde{m}F_- & 0 \end{bmatrix}\tag{1.16}$$

Приравнивание нулю детерминанта полученной системы дает дисперсионное соотношение для нахождения постоянных распространения волн на границе пористой среды.

$$4k^2 \tau_s (\tau_- (\rho_f - \tilde{m}F_+) - \tau_+ (\rho_f - \tilde{m}F_-)) + (F_+ - F_-) \tilde{m} (2k^2 - k_s^2)^2 = 0\tag{1.17}$$

Или же в полиномиальном виде (максимальная степень по  $k$  равна 14), где  $\chi = k^2$ ,  $\xi = \tau_+^2 \equiv k^2 - k_+^2$ ,  $\zeta = \tau_-^2 \equiv k^2 - k_-^2$ ,  $\theta = \tau_s^2 \equiv k^2 - k_s^2$

$$\begin{aligned}\{16\chi^2 \theta [\zeta (\rho_f - \tilde{m}F_+)^2 + \xi (\rho_f - \tilde{m}F_-)^2] - (F_+ - F_-)^2 \tilde{m}^2 (\chi + \theta)^4\}^2 - \\ - 1024 \chi^4 \theta^2 \zeta \xi (\rho_f - \tilde{m}F_+)^2 (\rho_f - \tilde{m}F_-)^2 = 0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

## Анализ дисперсионного соотношения

В работе [17], посвященной распространению поверхностных волн на границе пористой среды, приводится условие существования решений дисперсионного соотношения

в случае сжимаемой невязкой поровой жидкости в предположении, что скорость распространения волны сдвига в безграничной пористой среде меньше, чем скорость медленной волны сжатия. Т.е. для постоянных распространения выполняется следующее условие  $k_+ < k_- < k_s$ . Однако, в геофизических приложениях часто наблюдается другое соотношение между постоянными распространения  $k_+ < k_s < k_-$  (см. табл. 3.5 приложения). Как и в [17], мы будем рассматривать случай невязкой сжимаемой жидкости и искать действительные решения дисперсионного уравнения (незатухающие поверхностные волны).

Во-первых, найдем области возможного существования вещественных корней. Допустим, скорость поверхностной волны выше, чем скорость быстрой волны сжатия в пористой среде ( $k \in [0, k_+]$ ). В этом случае  $\tau_{\pm}$ ,  $\tau_s$  — чисто мнимые величины и первое слагаемое в дисперсионном уравнении будет вещественным. Т.к. второе слагаемое в дисперсионном уравнении всегда вещественно (при вещественных  $k$ ), то в этом диапазоне  $k$  возможно существование вещественного решения дисперсионного соотношения. В диапазоне  $k \in ]k_+, k_s[$   $\tau_s$  и  $\tau_-$  мнимы, а  $\tau_+$  — вещественная, при  $k \in ]k_s, k_-[$   $\tau_-$  — мнимая, а  $\tau_+$ ,  $\tau_s$  — вещественные, откуда следует, что при  $k \in ]k_+, k_-[$  первое слагаемое дисперсионного уравнения имеет мнимую часть и дисперсионное уравнение в этом диапазоне волновых чисел не имеет вещественных решений. В случае  $k \in ]k_-, \infty[$  все слагаемые в дисперсионном уравнении вещественны, и в этом диапазоне возможно наличие вещественного решения.

При  $k = k_-$  левая часть дисперсионного уравнения принимает вид

$$(F_+ - F_-)\tilde{m}(2k_-^2 - k_s^2)^2 - 4k_-^2\tau_s\tau_+(\rho_f - \tilde{m}F_-). \quad (1.19)$$

При  $k \rightarrow \infty$  имеем  $\tau_{\pm} \approx k - k_{\pm}^2/(2k)$ ;  $\tau_s \approx k - k_s^2/(2k)$ ;  $\tau_s\tau_{\pm} \approx k^2 - (k_s^2 + k_{\pm}^2)/2$ . Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение и, отбрасывая члены при малых степенях  $k$ , получаем

$$2[\rho_f(k_+^2 - k_-^2) + \tilde{m}(F_+k_-^2 - F_-k_+^2) - \tilde{m}k_s^2(F_+ - F_-)]k^2. \quad (1.20)$$

Таким образом, если выражения (1.19) и (1.20) разных знаков, то возможно существование вещественного решения.

Теперь рассмотрим поведение решений дисперсионного уравнения в зависимости от взаимного расположения волновых чисел для медленной и сдвиговой волн. В том случае, когда скорость волны сдвига меньше скорости медленной волны сжатия, согласно [17] существует вещественное решение при различных знаках у выражений (1.20) и значения левой части дисперсионного уравнения при  $k = k_s$

$$(F_+ - F_-)\tilde{m}k_s^4. \quad (1.21)$$

Изменяя параметры среды, будем сближать скорости медленной и сдвиговой волн до тех пор, пока они не совпадут (например, изменяя модуль сдвига скелета в пористой среде). Если для среды с таким сочетанием параметров существует незатухающая поверхностная волна, а, как следует из выражения (1.21), если решение в этой точке существует, то оно не совпадает с  $k_s$ , тогда незатухающее решение дисперсионного уравнения существует и при  $k_s < k_-$  до тех пор, пока  $k_- < k^*$  ( $k^*$  – волновое число поверхностной волны) и выражения (1.21) и (1.20) разных знаков.

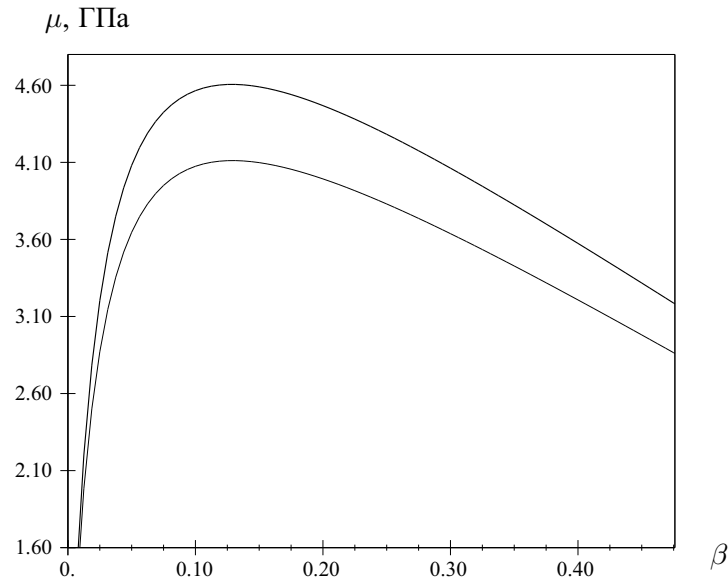


Рис. 1.3. Область существования незатухающих поверхностных волн на границе пористой среды

На рис. 1.3 представлены зависимости модуля сдвига скелета пористой среды от пористости для случая, когда скорость медленной продольной волны равна скорости волны сдвига (нижняя кривая) и когда скорость медленной продольной волны равна скорости поверхностной волны (верхняя кривая). Область над нижней кривой соответствует средам, в которых скорость медленной продольной волны ниже, чем скорость волны сдвига, а область под верхней кривой (она рассматривалась в работе [17]) соответствует параметрам среды при которых существует незатухающая поверхностная волна.

Параметры пористой среды, взятые для расчета, приведены в следующей таблице

$\rho_r$	$\rho_f$	$K_r$	$K_f$	$\alpha$	$n$
2700 кг/м <sup>3</sup>	1000 кг/м <sup>3</sup>	36 ГПа	2,3 ГПа	0,25	0,25

Таблица 1.1.

Таким образом, область между кривыми на рис. 1.3 определяет параметры, для которых в средах существует незатухающая поверхностная волна и при этом скорость волны сдвига выше, чем скорость медленной продольной волны.

При  $k_+^2/k_-^2 \ll 1$  и стремлении к нулю пористости среды величина  $\tilde{m}$  стремится к бесконечности, а волновые числа быстрой продольной и сдвиговой волн стремятся к соответствующим величинам в упругой среде:

$$k_+^2 = \omega^2 \left( \frac{\rho}{H} - \frac{\rho_f^2}{H\tilde{m}} \right), \quad k_-^2 = \omega^2 \tilde{m} \left( \frac{H}{HM - C^2} + \frac{\rho M - 2\rho_f C}{(HM - C^2)\tilde{m}} \right), \quad (1.22)$$

$$k_s^2 = \omega^2 \left( \frac{\rho}{\mu} - \frac{\rho_f^2}{\mu\tilde{m}} \right), \quad (1.23)$$

другие величины ведут себя как

$$F_+ = -\frac{\rho_f^2 H}{(\rho C - \rho_f H)\tilde{m}}, \quad F_- = \frac{H}{C} - \frac{\rho_f(HM - C^2)}{\tilde{m}HC}. \quad (1.24)$$

Пренебрежем вторым слагаемым в выражении для  $k_-$  (1.22) и представим волновое число медленной волны как  $k_-^2 \approx \omega^2 \tilde{m} H / (MH - C^2)$ . Тогда решение для  $\mu$ , такого что  $k_s = k_-$ , получается из квадратного уравнения

$$\mu^2 + \left( \frac{3}{4} \left( \frac{C^2}{M} + k_s \right) - \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}^2} M \right) \mu - \frac{3}{4} \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}^2} k_s M = 0. \quad (1.25)$$

В том случае, когда корень дисперсионного уравнения совпадает с волновым числом для медленной волны ( $k = k_-$ ), и пористость среды стремится к нулю, дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$F_- \tilde{m} (4k^3 \tau_s - (2k^2 - k_s^2)^2) = 0.$$

При выводе последнего выражения учитывалось, что при стремлении к нулю пористости среды  $\tilde{m}$  стремится к бесконечности, а  $F_+$  стремится к нулю. Или, делая замену  $\tilde{k} = k/k_s$ ,  $\tilde{\tau}_s = \sqrt{\tilde{k}^2 - 1}$ , получим

$$(2\tilde{k}^2 - 1)^2 - 4\tilde{k}^3 \tilde{\tau}_s = 0, \quad (1.26)$$

откуда, если  $\gamma$  есть решение уравнения (1.26), то значения  $\mu$ , для которых  $k_- = k^*$ , получаются как решения квадратного уравнения

$$\mu^2 + \left( \frac{3}{4} \left( \frac{C^2}{M} + k_s \right) - \gamma \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}^2} M \right) \mu - \frac{3}{4} \frac{\rho\tilde{m} - \rho_f^2}{\tilde{m}^2} k_s M = 0. \quad (1.27)$$

Решения, полученные по формулам (1.25, 1.27) для параметров из табл. 1.1, представлены на рис. 1.4

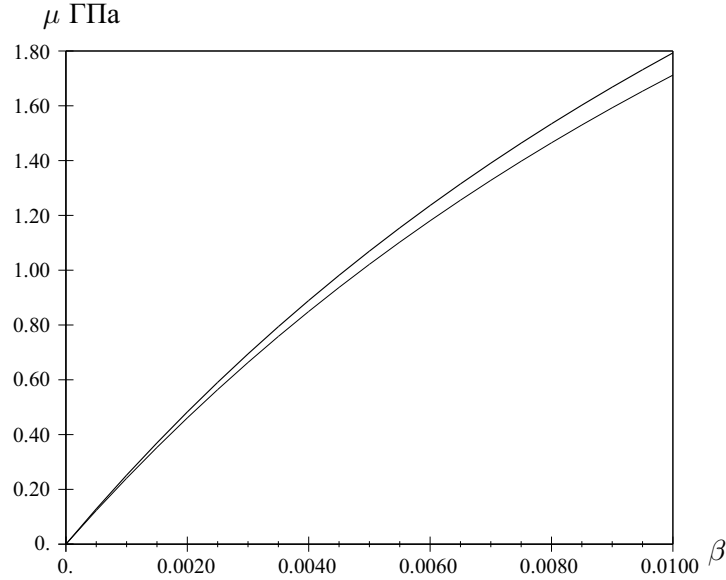


Рис. 1.4. Область существования вещественных корней, асимптотические формулы для малой пористости

### Асимптотическое поведение дисперсионного уравнения при малой пористости

Представим дисперсионное соотношение в следующем виде

$$(2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2\tau_s\tau_+ + 4k^2\tau_s(\tau_- - \tau_+)\frac{\rho_f - \tilde{m}F_+}{\tilde{m}(F_+ - F_-)} = 0. \quad (1.28)$$

Как видно из последнего выражения, первые два слагаемых по форме соответствуют дисперсионному соотношению для случая свободной границы упругой среды (за исключением того, что скорости волны сдвига и быстрой продольной волны отличаются от своих значений при нулевой пористости). При  $\beta \rightarrow 0$  величина  $\tilde{m}$  стремится к бесконечности, и, как следует из (1.22) и (1.24), справедливы следующие разложения

$$\begin{aligned} k_+^2/\omega^2 &\approx \rho/H + O(1/\tilde{m}) \\ k_-^2/\omega^2 &\approx \tilde{m} [H/(MH - C^2) + O(1/\tilde{m})] \\ F_+ &\approx O(1/\tilde{m}) \\ F_- &\approx H/C + O(1/\tilde{m}). \end{aligned}$$

С учетом того, что  $\tau_- \sim \sqrt{\tilde{m}}$ , последний член выражения (1.28) можно преобразовать к виду

$$4k^2\tau_s \left[ \frac{(\tau_- - \tau_+)F_+}{(F_- - F_+)} - \frac{(\tau_- - \tau_+)\rho_f}{\tilde{m}(F_- - F_+)} \right],$$

откуда видно, что выражение в скобках убывает как  $1/\sqrt{\tilde{m}}$  (для конечных  $k$ ) и решение дисперсионного соотношения ( $k_r^*$ ) можно представить в виде суммы решения уравнения  $(2k^2 - k_s^2)^2 - 4k^2\tau_s\tau_+ = 0$ , которое мы обозначим как  $k_r$  и малой величины  $\delta$ . В этом случае  $\tau_i \approx \tau_i^*(1 + \delta k_r/(k_r^2 - k_i^2))$ , где  $\tau_i^* = \sqrt{k_r^2 - k_i^2}$ . Разлагая дисперсионное соотношение по  $\delta$  и, ограничиваясь членами первого порядка малости, получим

$$k_r^* = k_r + \frac{(\rho_f - \tilde{m}F_+)k_r\tau_s^*(\tau_+^* - \tau_-^*)}{\tilde{m}(F_+ - F_-) \left[ 2(2k_r^2 - k_s^2) - \tau_s^*\tau_+^* \left( 2 + \frac{k_r^2}{k_r^2 - k_+^2} + \frac{k_r^2}{k_r^2 - k_s^2} \right) \right]}. \quad (1.29)$$

При уменьшении пористости второе слагаемое в (1.29) стремится к нулю, а скорости быстрой волны сжатия и волны сдвига пористой среды стремятся к соответствующим значениям для упругой среды. Таким образом, решение дисперсионного соотношения переходит в волну Рэлея, и мы можем говорить, что решением уравнения (1.17) является волна типа волны Рэлея. Следует отметить, что при  $\beta \rightarrow 0$   $k_- \rightarrow \infty$  и  $\tau_-^*$  становится мнимой величиной, т.е. распространение поверхностной волны будет происходить с затуханием.

## Приближенное решение дисперсионного уравнения

Численный анализ решений дисперсионного уравнения (1.17) показывает, что скорость поверхностной волны близка к скорости волны сдвига в пористой флюидонасыщенной среде. Исходя из этого, выведем приближенное решение дисперсионного уравнения. Пусть  $k = k_s + \delta$ , где  $\delta \ll k_s$ , тогда  $k^2 \approx k_s^2 + 2\delta k_s$  и  $\tau_s \approx \sqrt{2\delta k_s}$ . Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение, получаем приближенное выражение для постоянной распространения поверхностной волны

$$k^* = k_s + \frac{1}{2k_s} \left( \frac{1}{4} \frac{(F_+ - F_-)\tilde{m}k_s^2}{(\tau_+(\rho_f - \tilde{m}F_-) - \tau_-(\rho_f - \tilde{m}F_+))} \right)^2, \quad (1.30)$$

а в случае  $k_- = k_s$

$$k^* = k_- + \frac{1}{2k_-} \left( \frac{(F_+ - F_-)\tilde{m}k_-^2}{4\tau_+(\rho_f - \tilde{m}F_-)} \right)^2. \quad (1.31)$$

Результаты зависимости постоянной распространения поверхностной волны от пористости в точке  $k_- = k_s$  по формуле (1.31) и точное решение дисперсионного уравнения

представлены на рис. 1.5. Параметры пористой среды указаны в табл. 1.1.

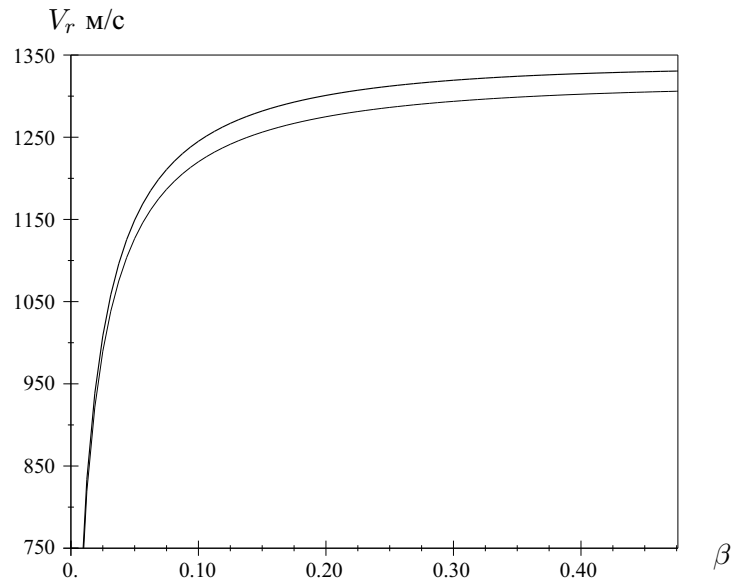


Рис. 1.5. Точное и приближенное решение дисперсионного соотношения

Результаты расчетов, проведенных по формулам (1.29) и (1.30) для различных пористых сред, параметры которых приведены в табл. 3.5 приложения, сведены в табл. 1.2. Как видно из полученных результатов, формулы (1.29) и (1.30) дают хорошее приближение для корня дисперсионного соотношения даже в случае сравнительно больших значений пористости среды.

	1	2	3	4	5	6
$k_r$	1433,2	465	582,8	120,8	562,8	150,2
$k_r^*$	1489,3	485,6	1448,5	125,8	1555,8	157,6
$k_r^{**}$	1433,5	473	1392,3	122,9	1500	153

Таблица 1.2.

Приведенные выше рассуждения о наличии вещественного корня у дисперсионного соотношения относятся к случаю невязкой жидкости (т.е. собственные потери в пористой среде отсутствуют). Однако, вывод формул никоим образом не был связан с этим фактом, и поэтому приближенные решения для корней справедливы и в случае вязкой жидкости в порах.



## Вытекающие поверхностные волны <sup>1</sup>

Как отмечалось ранее, в случае, когда скорость медленной волны сжатия меньше скорости волны сдвига, существует область вещественных решений (для невязкой жидкости), зависящая от параметров среды. Если параметры пористой среды не принадлежат данной области, то решение дисперсионного соотношения становится комплексным и волна типа Рэлея на границе пористой среды будет затухать в направлении вдоль границы и нарастать вглубь пористой среды (волны такого типа для случая границы упругой среды рассматривались в [11, 12]). Рассмотрим более подробно поведение вытекающей поверхностной волны на границе пористой среды. Из выражений (1.14) и (1.15) следует следующая связь между смещениями частиц скелета и относительного смещения частиц жидкости пористой среды

$$u_x = \left\{ -ik \left( e^{\tau_+ z} - \frac{\tilde{m} - \rho_f F_+}{\tilde{m} - \rho_f F_-} e^{\tau_- z} \right) + \frac{2ik\tau_s(\tau_+(\tilde{m} - \rho_f F_-) - \tau_-(\tilde{m} - \rho_f F_+))}{(2k^2 - k_s^2)(\tilde{m} - \rho_f F_-)} e^{\tau_s z} \right\} A e^{i(\omega t - kx)}$$

$$u_z = \left\{ \tau_+ e^{\tau_+ z} - \tau_- \frac{\tilde{m} - \rho_f F_+}{\tilde{m} - \rho_f F_-} e^{\tau_- z} + \frac{2k^2(\tau_+(\tilde{m} - \rho_f F_-) - \tau_-(\tilde{m} - \rho_f F_+))}{(2k^2 - k_s^2)(\tilde{m} - \rho_f F_-)} e^{\tau_s z} \right\} A e^{i(\omega t - kx)}$$

В случае вытекающей поверхностной волны постоянная распространения  $k$  будет комплексной величиной с отрицательной мнимой частью, что дает экспоненциальное затухание волн по оси  $OX$ . Поперечные постоянные распространения  $\tau_+$ ,  $\tau_s$  будут иметь положительную вещественную часть, т.е. компоненты волны, соответствующие быстрой и сдвиговой волнам в пористой среде будут экспоненциально затухать вглубь пористой среды. Поперечная же постоянная, соответствующая медленной волне в пористой среде  $\tau_-$  будет, наоборот, отрицательной, что свидетельствует о нарастании данной компоненты вглубь пористой среды. Такое поведение волны в пористой среде можно трактовать как переизлучение энергии переносимой компонентами быстрой и сдвиговой волн в энергию, переносимую компонентой медленной волны. Интересной особенностью вытекающей волны в пористой среде является то, что в отличие от случая вытекающих волн на границе между жидкостью и упругой средой, энергия перераспределяется между компонентами волны в одной и той же среде, а не между волнами в различных средах.

Ниже представлены результаты расчетов скоростей и затухания на длину волны поверхностных волн на границе пористого полупространства. Параметры для расчета те же, что и у предыдущих графиков.

<sup>1</sup>В иностранной литературе для обозначения таких волн используется термин leaky waves.

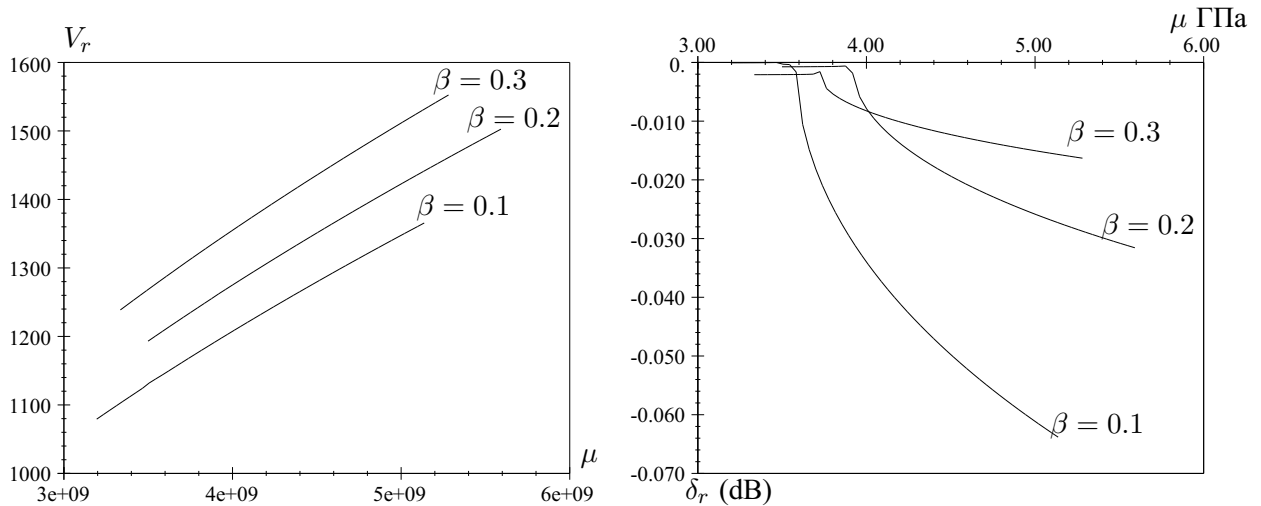


Рис. 1.6. Скорость (левый график) и затухания (правый график) поверхностных волн для пористой среды при наличии потерь

Расчеты, проведенные для случая пористой среды с ненулевым значением вязкости жидкости, демонстрируют резкое нарастание декремента затухания (затухания на длину поверхностной волны) при переходе от поверхностной волны к вытекающей волне – правый график на рис. 1.6, при монотонном изменении скорости волны – левый график на том же рисунке.

## Выводы

В результате исследования поверхностных волн на границе пористого флюидонасыщенного полупространства можно сделать следующие выводы.

Свойства поверхностных волн на границе пористого полупространства существенным образом зависят от скорости медленной продольной волны. Для сред, у которых скорость медленной продольной волны меньше скорости поперечной волны, неизлучающиеся поверхностные волны существуют только в сравнительно узком диапазоне значений модуля сдвига скелета среды. Границу между решениями разных типов можно характеризовать с помощью значения модуля сдвига скелета пористой среды  $\mu_b$ , выше которого волны будут излучающимися. При понижении пористости среды значение  $\mu_b$  быстро уменьшается, и для большинства реальных сред с жестким скелетом волны на границе будут излучающимися.

Результаты расчетов показывают, что часто величины скоростей поверхностной волны и поперечной волны в безграничной пористой среде близки. Это позволяет использовать разложение по малому параметру для нахождения аналитических выражений скорости поверхностной волны на границе пористого полупространства.

## Глава 2

# Преломление и отражение акустических волн пористым слоем в жидкости

### 2.1 Моделирование преломления нестационарного акустического импульса пористым слоем в жидкости

Отличительным признаком пористой среды по сравнению с упругой является медленная продольная волна, существование которой предсказывается теорией. Экспериментальному обнаружению и исследованию свойств этой волны посвящены многочисленные работы.

Впервые медленная волна была обнаружена в 1980 г. Т. Plona [84] в искусственной пористой среде, заполненной водой. Эксперимент проводился с использованием промышленных излучателей и приемников диаметрами 25 – 28,6 мм на частотах 500 кГц и 2,25 МГц. Образцы пористой среды изготавливались спеканием стеклянных шариков диаметрами 0,21 – 0,29 мм при температуре 700 – 740°C. Размеры образцов варьировались от 14 до 21 мм по толщине и от 90 до 100 мм в диаметре.

Схема проведения эксперимента была следующей (рис. 2.1). В емкость с водой помещался плоский образец пористой среды (пористая пластина), по обе стороны от которого на некотором расстоянии располагались источник и приемник ультразвуковых импульсов. Излучаемые источником импульсы проходили в воде до поверхности пластины, затем частично отражались и частично преломлялись на ней. В результате преломления в пластине возбуждались три типа собственных волн: быстрая и медленная продольные и поперечная волна (при нормальном падении волны на поверхность пластины поперечная волна не возбуждалась). Из-за разницы в скоростях волн в пористой среде каждая из них достигала другой плоскости пластины в разное время и в результате отражения/преломления порождала в жидкости за образцом импульс, который затем регистрировался приемником. По времени задержки импульсов и вычислялась скорость распространения соответствующей волны.

ющей волны в пористой среде. В более поздней работе 1982 г. D. Johnson, T. Plona [71] повторили эксперимент для неконсолидированной пористой среды (стеклянные шарики не спекались) и консолидированной среды с водным заполнением и заполнением жидким гелием.

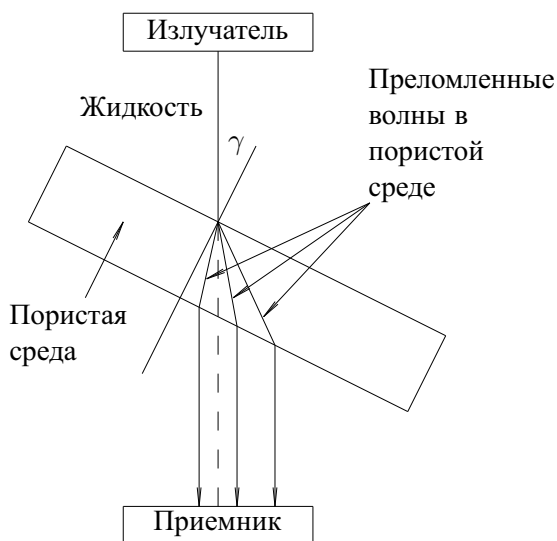


Рис. 2.1. Схема эксперимента Plona 1980 г. [84].

Вслед за работами Т. Plona с использованием похожих методик было предпринято множество попыток обнаружения медленной продольной волны в пористых средах естественного происхождения. Поскольку затухание медленной волны в естественной пористой среде существенно выше, нежели в искусственной, в ряде экспериментов для его уменьшения использовались порозаполнители с низким коэффициентом вязкости. Так, например, в работах D. Johnson, T. Plona, C. Scala, 1982 г. [72] с искусственной пористой средой и D. Johnson, D. Hemmick, H. Kojima, 1994 г. [74] с пористыми средами искусственного и естественного происхождения в качестве порозаполнителя использовался жидкий гелий. Однако, как отмечалось в [82], основной сложностью в экспериментах является не столько затухание медленной волны, сколько сложность ее возбуждения в пористой среде и выделения на фоне сигналов от быстрой и поперечной волн с существенно большими амплитудами. Для уменьшения сигналов от быстрой продольной и поперечной волн эксперимент P. Nagy, L. Adler, B. Bonner, 1990 г. [82] (средняя частота сигнала 150 кГц) проводился для пористой среды с воздушным заполнением. Значительное различие в плотностях у жидкости и материала скелета позволило снизить коэффициенты преобразования энергии падающей волны в сдвиговую и быструю продольную волны и тем самым “выделить” сигнал от медленной продольной волны на фоне других сигналов. В работе F. Boyle, N. Chotiros, 1992 г. [44] медленная продольная волна была обнаружена в водозаполненной среде с нежестким скелетом.

Медленная продольная волна в насыщенной водой пористой сред естественного про-

исхождения была впервые зарегистрирована в экспериментах О. Kelder, D. Smeulders, 1996-1997 гг. [76, 77]. Особый интерес данных работ состоит в том, что в них имеется подробная информация о свойствах исследуемой среды и результаты эксперимента в виде сейсмограмм. Опубликованные данные позволяют провести подробное сравнение теории и эксперимента.

В настоящем разделе проводится математическое моделирование преломления акустического импульса пористой пластиной в жидкости. Результаты расчетов сравниваются с данными лабораторного эксперимента О. Kelder, D. Smeulders.<sup>1</sup>

### Наблюдение медленной продольной волны в водонасыщенном песчанике, анализ результатов эксперимента

Как следует из описания эксперимента О. Kelder, D. Smeulders, схема его проведения была близка к процедуре Т. Plona. В качестве образца использовалась пластина прямоугольной формы толщиной 21 мм, вырезанная из песчаника (Лимбург, Нидерланды). Образец на 90% состоял из кварца с средним размером частиц от 100 до 300 мкм. Необходимо отметить высокие значения пористости среды (33%) и проницаемости (5 Дарси). Насыщение пластины водой производилось в вакууме, после чего она размещалась на вращающейся платформе в емкости с водой между пьезоэлектрическим источником и приемником акустических импульсов. К сожалению, размеры излучателя и приемника авторами не приводятся.

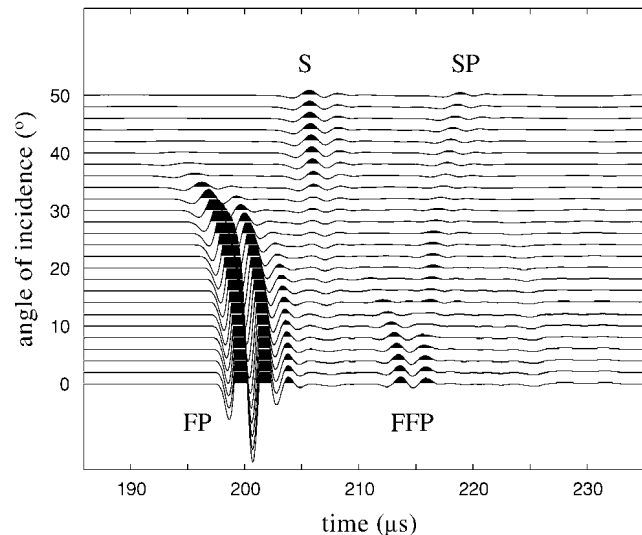


Рис. 2.2. Прохождение импульса через пористую пластину, погруженную в жидкость. Результаты эксперимента [77].

Измерения проводились для различных углов наклона образца по отношению к направ-

<sup>1</sup>Сравнение результатов математического моделирования с этим экспериментом проводилось в работах В. Arnsten, J. Carcione, B. Gurevich, O. Kelder, D. Smeulders [33, 68].

лению от источника к приемнику. Результаты наблюдений приведены в виде сейсмограмм с шагом в 2 градуса по углу наклона оси пластины к направлению источник – приемник (рис. 2.2, воспроизведено по статье [77]).

Символами FP на сейсмограммах отмечены импульсы, соответствующие быстрой волне в пористой среде, символами SP – медленной, символом S – волне сдвига. Символы FFP обозначают импульсы, полученные в результате двукратного отражения быстрой волны от поверхностей образца. В соответствии с сейсмограммами, угол отсечки для быстрой продольной волны в пористой среде составляет  $32^\circ$ . Отсечка для волны сдвига в приведенном на сейсмограммах диапазоне углов наклона пластины не наблюдается.

Из сейсмограмм на рис. 2.2 видно, что импульс, соответствующий быстрой продольной волне при нормальном падении, был зафиксирован приемником через 197 микросекунд после его излучения. Исходя из скорости быстрой волны в пористой среде (она равнялась 2810 м/с), время прохождения импульсом пластины составляет 7,47 микросекунд. Тогда расстояние между источником и приемником сигнала будет равным приблизительно 30 сантиметрам. Предполагая, что образец пористой среды располагался симметрично между источником и приемником, получим расстояние от каждого из них до образца около 14 сантиметров. На частоте сигнала равной 500 кГц длина волны в жидкости приблизительно равна 3 миллиметрам, т.е. расстояние от источника сигнала до образца превосходит длину волны в жидкости почти в 47 раз. Поскольку размеры излучателя в статье не приводятся, будем считать, что его характеристики соизмеримы с теми значениям, которые сообщаются другими авторами. Так, например, в экспериментах Т. Plona [84] использовались круглые излучатели диаметром 2,5 и 2,8 см., а в экспериментах Y. Bouzidi, D. Schmitt [43] – прямоугольные размером 10x7,5 см. Исходя из этого можно полагать, что волна, падающая на образец, близка к плоской.

Импульсы на сейсмограммах по внешним признакам близки к импульсу Риккера:  $\cos(\Omega t)e^{-bt^2}$  со следующими значениями параметров  $\Omega = \pi \cdot 10^6$  рад/с (по данным авторов, частота внутри импульса равнялась 500 кГц),  $b = 6,25 \cdot 10^{-12}$  1/с<sup>2</sup>. Величина  $b$  выбиралась по максимальному соответствию результатам эксперимента. Отметим также, что на сейсмограммах наблюдается небольшая асимметричность импульса отклика для быстрой продольной волны, вызванная по-видимому дисперсией волн в пористой среде.

## Оценка параметров пористой среды<sup>2</sup>

Для нахождения параметров модели Био воспользуемся данными сред, приведенными в работе [77], они сведены в таблицу 2.1. Значения плотности и объемного модуля упругости материала скелета взяты по книге Б.П. Беликова, К.С. Александрова, Т.В. Рыжовой [5]

---

<sup>2</sup>Аналогичная задача рассматривалась в работе С. Hickey, J. Sabatier [70] для моделирования результатов эксперимента N. Chotiros [48], но из-за недостаточности исходных данных, в ней не были однозначно определены основные упругие константы пористой среды.

равными  $2655 \text{ кг/м}^3$  и  $38,2 \text{ ГПа}$  соответственно. Используемое значение модуля упругости несколько отличается от значений принятых в других работах. Так, например, в работах R. Stoll [90], A. Turgut, T. Yamamoto [93] значение данного параметра принимается равным  $36 \text{ ГПа}$ , а в работе S. Domenico [57] использовалось значение равное  $40 \text{ ГПа}$ . Плотность воды взята равной  $1012 \text{ кг/м}^3$  (для соленой воды), объемный модуль упругости воды, вычисленный через скорость акустической волны в жидкости, составил  $2,25 \text{ ГПа}$ , вязкость воды взята равной  $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Параметр	Значение
пористость	$33\% \pm 1\%$
проницаемость	$5 \pm 0,5 \text{ Дарси}$
скорость быстрой продольной волны	$2810 \pm 40 \text{ м/с}$
скорость медленной продольной волны	$870 \pm 20 \text{ м/с}$
скорость волны сдвига	$1515 \pm 25 \text{ м/с}$
минеральный состав образца	более 90% кварца
толщина образца	21 мм
скорость волны в воде	$1491 \pm 2 \text{ м/с}$

Таблица 2.1.

Для проведения расчетов требуется найти следующие параметры модели Био: объемный модуль упругости и модуль сдвига скелета, а также коэффициент присоединенных масс. Эти три параметра не зависят друг от друга и могут быть однозначно определены по значениям скоростей собственных волн пористой среды. Выразим из (1.7) модуль сдвига скелета пористой среды  $\mu$

$$\mu = V_s^2 \left( \rho - \frac{\beta \rho_f}{1 + \alpha - i\nu\beta/(\omega\kappa)} \right). \quad (2.1)$$

В последнем выражении второй член в скобках, как правило, существенно меньше чем  $\rho$ , поэтому в первом приближении можно воспользоваться формулой  $\mu = \rho V_s^2$ , что по виду совпадает с обычным соотношением для скорости поперечной волны в упругой среде. В результате получаем первое приближение для значения модуля сдвига скелета пористой среды:  $\mu = 4,85 \text{ ГПа}$ .

Чтобы определить объемный модуль упругости скелета  $K_s$  воспользуемся выражением для волнового числа быстрой продольной волны  $k_+$  (1.10), которое преобразуем к следующему виду

$$V_+^2 = \frac{H}{\rho} + \frac{M - 2\frac{\rho_f}{\rho}C + \left(\frac{\rho_f}{\rho}\right)^2 H}{\tilde{m} - \frac{\rho_f^2}{\rho}}.$$

Второе слагаемое в последнем выражении обычно также значительно меньше первого и поэтому для нахождения первоначального приближения к  $K_s$  можно положить  $V_+^2 \approx H/\rho$ , откуда

$$K_s \approx \frac{3K_r^2 + D_r(4\mu - 3\rho V_+^2)}{6K_r - 3D_r + 4\mu - 3\rho V_+}. \quad (2.2)$$

В результате подстановки в последнюю формулу уже вычисленного значения модуля сдвига получаем  $K_s = 5,7$  ГПа.

Коэффициент присоединенных масс  $\alpha$  определяется из соотношения для суммы квадратов волновых чисел быстрой и медленной продольных волн в (1.9)

$$\alpha = \beta \frac{(HM - C^2)}{\rho_f H} \left( \frac{1}{V_+^2} + \frac{1}{V_-^2} \right) + \beta \frac{2C - \frac{\rho}{\rho_f}M}{H} - 1 + i \frac{\beta \nu}{\omega \kappa}. \quad (2.3)$$

После подстановки в последнее выражение уже вычисленных значений  $\mu$  и  $K_s$  и при пренебрежении последним слагаемым (случай высоких частот) получим  $\alpha = 1,1$ .

Второе приближение для модуля сдвига скелета пористой среды  $\mu$  равное 4,49 ГПа вычисляется по формуле (2.1), но уже с учетом второго слагаемого в скобках. Значение  $K_s$  теперь можно узнать по следующей формуле, полученной из выражения для произведения квадратов волновых чисел в (1.9)

$$K_s = \frac{K_r \left( (\beta K_r + (1 - \beta)K_f) (\rho \tilde{m} - \rho_f^2) V_+^2 V_-^2 - \frac{4}{3} \mu K_r K_f \right)}{K_f (K_r^2 + (\rho \tilde{m} - \rho_f^2) V_+^2 V_-^2)}. \quad (2.4)$$

Подстановка в эту формулу уже вычисленных значений для  $\mu$  и  $\alpha$  дает  $K_s = 6,06$  ГПа.

Поскольку формулы (2.1), (2.3), (2.4) для вычисления  $\mu$ ,  $\alpha$  и  $K_s$  являются строгими, то их последовательное применение (без упрощающего пренебрежения какими-либо элементами) позволяет найти необходимые значения параметров с высокой степенью точности. В результате вычислений получаем следующие окончательные значения параметров:  $K_s = 6,12$  ГПа,  $\alpha = 1,088$ ,  $\mu = 4,5$  ГПа.



## Математическая модель эксперимента

Рассмотрим следующую модель проведения эксперимента, показанную на рис. 2.3. Пусть в безграничной сжимаемой жидкости параллельно друг другу находятся плоские источник и приемник акустического сигнала. Введем систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы ось  $OX$  располагалась параллельно источнику и приемнику на одинаковом от них расстоянии, а ось  $OZ$  — перпендикулярно. Координаты точек в системе  $XOZ$  будем обозначать большими буквами  $X$  и  $Z$ . На одинаковом расстоянии от источника и приемника располагается пористая пластина толщины  $2h$ , которая может поворачиваться относительно начала системы координат  $XOZ$ .

Введем систему координат  $X'O'Z'$ , связанную с пластиной таким образом, чтобы начала систем координат  $O$  и  $O'$  совпадали, ось  $O'X'$  была параллельна границам пластины, а ось  $O'Z'$  — перпендикулярна. Обозначим через  $\alpha$  угол между осями  $OZ$  и  $O'Z'$ . Координаты точек в системе  $X'O'Z'$  будем обозначать маленькими буквами  $x$  и  $z$ .

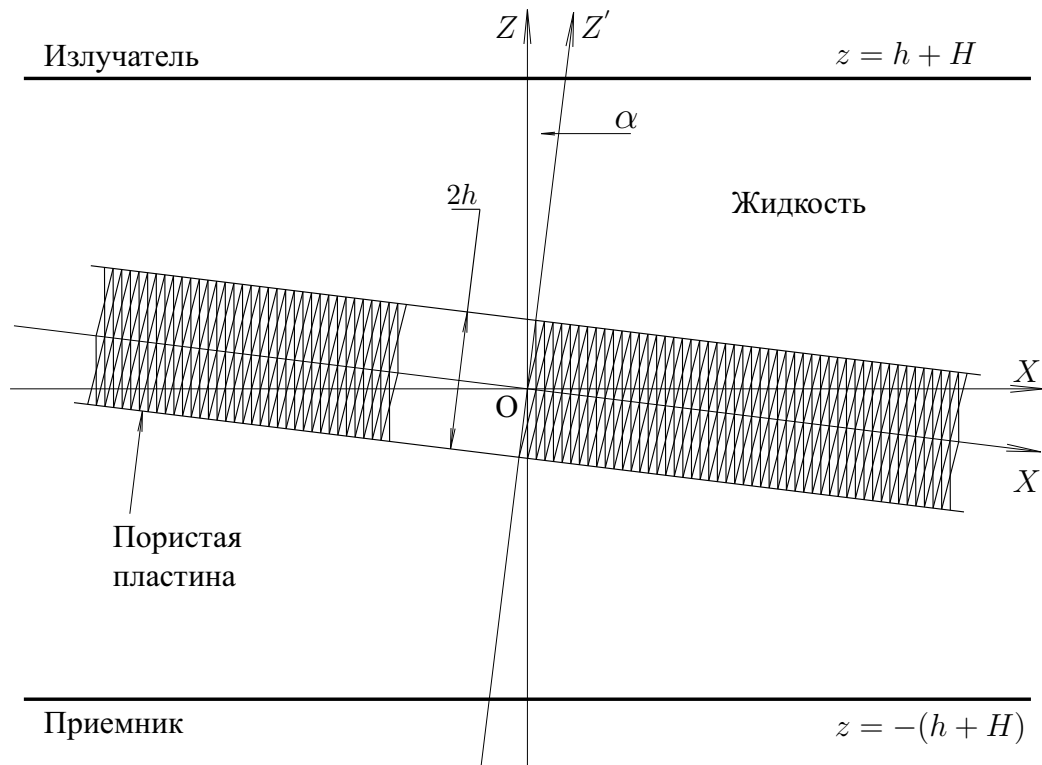


Рис. 2.3. Схема моделирования эксперимента O. Kelder, D. Smeulders, 1997 г. [77]

Пусть расположенный в жидкости источник ( $z = h + H$ ) излучает плоскую нестационарную волну в направлении, противоположном направлению оси  $OZ$ . Воспользуемся Фурье-преобразованием по времени для потенциала смещений частиц жидкости в падающей волне  $\Phi(X, Z, t)$  и представим его в следующем виде

$$\Phi(X, Z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega, \quad \text{где} \quad \zeta = t + \frac{Z - (h + H)}{V_{1f}}. \quad (2.5)$$

В плоскости  $Z = h + H$  предыдущее выражение принимает вид

$$\Phi(X, h + H, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Из чего следует, что спектральная плотность амплитуды падающей на пластину волны  $S(\omega)$  является Фурье-преобразованием по времени сигнала, излучаемого источником и в случае импульса Риккера  $\cos(\Omega t) e^{-bt^2}$  равна  $S(\omega) = \sqrt{\pi/(b)} e^{-\Omega^2/(4b)}$ .

Как видно из (2.5) потенциал  $\Phi(X, Z, t)$  будет удовлетворять волновому уравнению в жидкости

$$K_{1f} \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

и фазовая скорость волны  $V_{1f}$  равна  $\sqrt{K_{1f}/\rho_{1f}}$ .

В системе координат  $X'O'Z'$  потенциал представляется как

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\xi(x,z)} d\omega, \quad (2.6)$$

где  $\xi(x, z) = t - \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha + (h + H)}{V_{1f}}$

На поверхности пластины  $z = h$  потенциал для падающей волны будет иметь вид

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\xi(x,h)} d\omega, \quad (2.7)$$

где  $\xi(x, h) = t - \frac{x \sin \alpha - h \cos \alpha + (h + H)}{V_{1f}}$

из чего следует, что падающую на слой нестационарную плоскую волну можно рассматривать как совокупность плоских монохроматических волн

$$S(\omega)e^{i(\omega\tilde{t}-kx+\tau_{1f}(z-h))}, \quad \text{где} \quad \tilde{t} = t - \frac{H + h(1 - \cos \alpha)}{V_{1f}},$$

падающих под углом  $\alpha$  на слой. В последнем выражении использованы следующие обозначения  $k_{1f} = \omega/V_{1f}$ ,  $k = k_{1f} \sin \alpha$ ,  $\tau_{1f} = k_{1f} \cos \alpha \equiv \sqrt{k_{1f}^2 - k^2}$ .

В результате падения акустической волны на слой волна частично отразится от слоя, поэтому с учетом отраженной волны потенциал над пористым слоем можно записать в виде

$$\Phi_{1f}(x, z, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( S(\omega)e^{i(\omega\tilde{t}-kx+\tau_{1f}(z-h))} + R(\omega)e^{i(\omega\tilde{t}-kx-\tau_{1f}(z-h))} \right) d\omega$$

где  $R(\omega)$  – неизвестная спектральная амплитуда отраженной волны.

Потенциалы в пористой среде представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_{2s}(x, z, \tilde{t}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_2(\omega)e^{i\tau_+z} + A_3(\omega)e^{-i\tau_+z} + \right. \\ &\quad \left. + A_4(\omega)e^{i\tau_-z} + A_5(\omega)e^{-i\tau_-z} \right] e^{i(\omega\tilde{t}-kx)} d\omega \\ \Phi_{2f}(x, z, \tilde{t}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ F_+(A_2(\omega)e^{i\tau_+z} + A_3(\omega)e^{-i\tau_+z}) + \right. \\ &\quad \left. + F_-(A_4(\omega)e^{i\tau_-z} + A_5(\omega)e^{-i\tau_-z}) \right] e^{i(\omega\tilde{t}-kx)} d\omega \\ \Psi_{2s}(x, z, \tilde{t}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A_6(\omega)e^{i\tau_s z} + A_7(\omega)e^{-i\tau_s z} \right] e^{i(\omega\tilde{t}-kx)} d\omega \\ \Psi_{2f}(x, z, \tilde{t}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_s \left[ A_6(\omega)e^{i\tau_s z} + A_7(\omega)e^{-i\tau_s z} \right] e^{i(\omega\tilde{t}-kx)} d\omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $A_2(\omega)$ ,  $A_3(\omega)$ ,  $A_4(\omega)$ ,  $A_5(\omega)$ ,  $A_6(\omega)$  и  $A_7(\omega)$  – неизвестные амплитуды,  $\tau_{\pm} = \sqrt{k_{\pm}^2 - k^2}$ ,  $\tau_s = \sqrt{k_s^2 - k^2}$ ,  $k_{\pm}$ ,  $k_s$  – волновые числа распространения быстрой, медленной и сдвиговой волн в безграничной пористой среде, величины  $F_{\pm}$ ,  $F_s$  определяются формулами (1.8). В выражениях для  $\tau_i$  выбирается такая ветвь квадратного корня, чтобы вещественная часть  $\tau_i$  была положительной.

Потенциал в жидкости за пластиной в системе координат  $X'O'Z'$  запишем как

$$\Phi_{3f}(x, z, \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) e^{i\omega \tilde{\xi}(x, z)} d\omega, \quad (2.9)$$

$$\text{где } \tilde{\xi}(x, z) = \tilde{t} - \frac{x \sin \alpha - (z + h) \cos \alpha}{V_{1f}}$$

Тогда в плоскости наблюдения  $Z = -(h + H)$  потенциал в прошедшей волне будет определяться следующим соотношением

$$\Phi(X, Z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D(\omega) e^{i\omega \hat{t}} d\omega, \quad \text{где } \hat{t} = t - 2 \frac{H + h(1 - \cos \alpha)}{V_{1f}} \quad (2.10)$$

На границах раздела жидкость-пористая среда потребуем удовлетворения следующих условий: непрерывности движения жидкости в и вне пористой среды, равенства нормальных напряжений в пористой среде давлению в жидкости, равенства нулю тангенциальной составляющей напряжений пористой среды, пропорциональности скачка давления на границе пористой среды относительной скорости жидкости в пористой среде (аналогично работам [64, 78])

$$\begin{aligned} U'_z &= (1 - \beta)u_z + \beta U_z \equiv u_z - w_z \\ -P'_f &= H \operatorname{div} \vec{u} - 2\mu \epsilon_{xx} - C \operatorname{div} \vec{w} \\ 2\mu \epsilon_{xz} &= 0 \\ M \operatorname{div} \vec{w} - C \operatorname{div} \vec{u} - P'_f &= T\beta(U_z - u_z) \equiv -Tw_z, \end{aligned}$$

где  $\beta$  – пористость,  $w = \beta(\vec{u} - \vec{U})$ ,  $\vec{u}$  – смещение частиц скелета пористой среды,  $\vec{U}$  – смещение частиц жидкости в пористой среде,  $\epsilon_{xx}$  и  $\epsilon_{xz}$  – компоненты тензора малой деформации,  $\vec{U}'$  – смещение частиц жидкости вне пористой среды,  $P'_f$  – давление в жидкости вне пористой среды;  $H$ ,  $M$ ,  $C$  – упругие модули теории Био,  $T$  – коэффициент, определяющий проницаемость границ пористой среды ( $T = 0$  соответствует полностью проницаемой,  $T = \infty$  – полностью непроницаемой границам). Индексами  $x$ ,  $z$  обозначены проекции векторов смещения частиц жидкости и скелета на соответствующие оси координат.

В силу линейности граничных условий их можно рассматривать отдельно для каждого значения частоты  $\omega$  и тем самым перейти от самих потенциалов к их частотным представлениям (т.е. к подинтегральным выражениям), а производные по времени заменять на домножение  $i\omega$ .

На верхней плоскости пластины ( $z = h$ ) граничные условия в форме потенциалов

представляются как

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_{1f}}{\partial z} &= \frac{\partial(\Phi_{2s} - \Phi_{2f})}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi_{2s} - \Psi_{2f})}{\partial x} \\
 \omega^2 \rho_{1f} \Phi_{1f} &= \omega^2 \rho_2 \Phi_{2s} - \omega^2 \rho_{2f} \Phi_{2f} + 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) \\
 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) &+ \omega^2 (\rho_2 \Psi_{2s} - \rho_{2f} \Psi_{2f}) = 0 \\
 \omega^2 \rho_{1f} \Phi_{1f} - \omega^2 \rho_{2f} \Phi_{2s} + \omega^2 \tilde{m}_2 \Phi_{2f} &= T \left( \frac{\partial \Phi_{2f}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{2f}}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

на нижней плоскости пластины ( $z = -h$ ) как

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_{3f}}{\partial z} &= \frac{\partial(\Phi_{2s} - \Phi_{2f})}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi_{2s} - \Psi_{2f})}{\partial x} \\
 \omega^2 \rho_{3f} \Phi_{3f} &= \omega^2 \rho_2 \Phi_{2s} - \omega^2 \rho_{2f} \Phi_{2f} + 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) \\
 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) &+ \omega^2 (\rho_2 \Psi_{2s} - \rho_{2f} \Psi_{2f}) = 0 \\
 \omega^2 \rho_{3f} \Phi_{3f} - \omega^2 \rho_{2f} \Phi_{2s} + \omega^2 \tilde{m}_2 \Phi_{2f} &= T \left( \frac{\partial \Phi_{2f}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{2f}}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

В приведенных выше уравнениях индекс 1 относится к жидкости над пористой средой, индекс 2 – к пористой среде, индекс 3 – к жидкости под пористой средой. После подстановки выражений для потенциалов в граничные условия мы получим линейную систему из восьми уравнений относительно восьми неизвестных спектральных амплитуд  $R(\omega)$ ,  $A_2(\omega) - A_7(\omega)$  и  $D(\omega)$ . По причине громоздкости получаемой системы мы ее не будем здесь приводить.

Для нахождения зависимости потенциала от времени в точке наблюдения нам нужно найти из полученной системы восьми уравнений спектральную плотность амплитуды, прошедшей через пластину волны  $D(\omega)$ , и воспользоваться выражением (2.10) для преобразования потенциала из частотной формы в временную.

Отметим, что несмотря на то что задача была нами сформулирована в терминах потенциалов, в случае перехода в падающей и прошедшей волнах от потенциалов к давлениям результат будет практически тем же. Пусть в падающей на пористый слой волне задано давление  $P_1$ . Тогда, для каждой из частот потенциал в падающей волне будет определяться из выражения  $P_1 = -\rho_{1f} \partial^2 \Phi_{1f} / \partial t^2$ , откуда следует, что  $\Phi_{1f} = P_1 / (\rho_{1f} \omega^2)$ . Следовательно спектральная плотность амплитуды падающей волны будет равна  $S(\omega) / (\rho_{1f} \omega^2)$ , где под  $S(\omega)$  подразумевается Фурье-образ зависимости давления в жидкости от времени в плоскости излучения. В силу линейности задачи все амплитуды потенциалов в пористом слое

$A_2(\omega) - A_7(\omega)$  и за слоем  $D(\omega)$  будут поделены на коэффициент  $\rho_{1f}\omega^2$ . При переходе от спектральной плотности потенциала к спектральной плотности давления в жидкости за пористым слоем нужно домножить величину  $D(\omega)$  на  $\rho_{3f}\omega^2$ . Из чего следует, что давление в жидкости за слоем будет отличаться от потенциала множителем  $\rho_{3f}/\rho_{1f}$ . В нашем случае жидкость до и после пористого слоя одинакова, т.е. разница между решением задачи через потенциалы смещения в жидкости или через давление отсутствует.

## Методика проведения расчетов

Основная сложность полученных в предыдущем разделе выражений состоит в том, что в них требуется вычисление интегралов с бесконечными пределами от спектральной плотности амплитуды в прошедшей через пористую пластину волне  $D(\omega)$ . Ниже мы опишем модификацию первоначальной задачи, которая приводит к тем же самым результатам, но существенно проще в вычислительном плане.

Главной проблемой в исходной модели является то, что излучаемый источником акустический сигнал непериодичен и тем самым имеет бесконечный спектр. Допустим теперь, что источник излучает импульсы такой же формы, как и в эксперименте, но повторяющиеся во времени с некоторым периодом  $T$ . Если интервал по времени между импульсами достаточно велик, то к началу излучения источником очередного импульса отклики от предыдущего импульса успеют стать настолько малыми, что их влияние на текущие наблюдения будут ничтожны. Таким образом мы переходим от непериодического во времени процесса к периодическому и можем заменить в исходных выражениях интегралы Фурье на соответствующие ряды. Следующее упрощение вычислительной задачи получается если учесть тот факт, что частотная зависимость излучаемых источником импульсов есть быстро спадающая функция. Следовательно, при расчетах можно ограничиться некоторой максимальной частотой в рядах Фурье без существенных потерь в точности.

В результате мы приходим к следующей вычислительной процедуре. Излучаемый источником периодический во времени импульсный сигнал нужно представить в виде ряда Фурье с ограниченным количеством членов. Затем для каждой из частот диапазона вычислить значение коэффициента прохождения плоской волны через слой. Произведение спектральной амплитуды исходного сигнала на коэффициент прохождения даст нужное значение спектральной амплитуды волны  $D(\omega)$ , прошедшей через пластину. Для получения сигнала в плоскости приемника следует произвести обратное Фурье-преобразование для  $D(\omega)$  по формуле (2.10).

## Результаты расчетов

В соответствии с описанным выше методом были проведены численные расчеты отражения импульсного сигнала от пористого слоя, погруженного в жидкость. Период сле-

дования импульсов источника был выбран равным  $T_p = 0,25 \cdot 10^{-3}$  с, что обеспечивает достаточное затухание откликов от волн в пористой среде до начала следующего импульса. Необходимая для проведения расчетов зависимость коэффициента прохождения акустической волны через пористую пластину определялась аналитически с помощью системы Maple. Восстановление сигнала в плоскости приемника производилось численно с помощью дискретного Фурье-преобразования.

Расчеты проводились по “традиционной” модели Био с постоянными коэффициентами [40]; по моделям, учитывающим потери в пористой среде за счет введения комплексного модуля сдвига скелета [93] или комплексной плотности среды [34]; по модели “динамической проницаемости”, в которой учитывается изменение коэффициента вязких потерь в зависимости от частоты [73]; по модели “боковых течений” [59], в которой жидкость течет в порах не только в направлении параллельном распространению волны, но и в поперечном. Анализировались различные варианты условий на границе между пористой средой и жидкостью, учитывающие полное и частичное протекание на границе, а также полное непротекание. По результатам расчетов строились зависимости давления в жидкости за пористой пластиной от времени и угла падения волны (микросейсмограммы).

Для того чтобы определить принадлежность откликов на сейсмограммах тому или иному типу волны в пористой среде было проведено несколько расчетов по модели Био с вещественным модулем сдвига и проницаемыми границами пористого слоя. Первый расчет велся с указанными выше параметрами жидкости и пористой среды, результаты представлены на рис. 2.4.

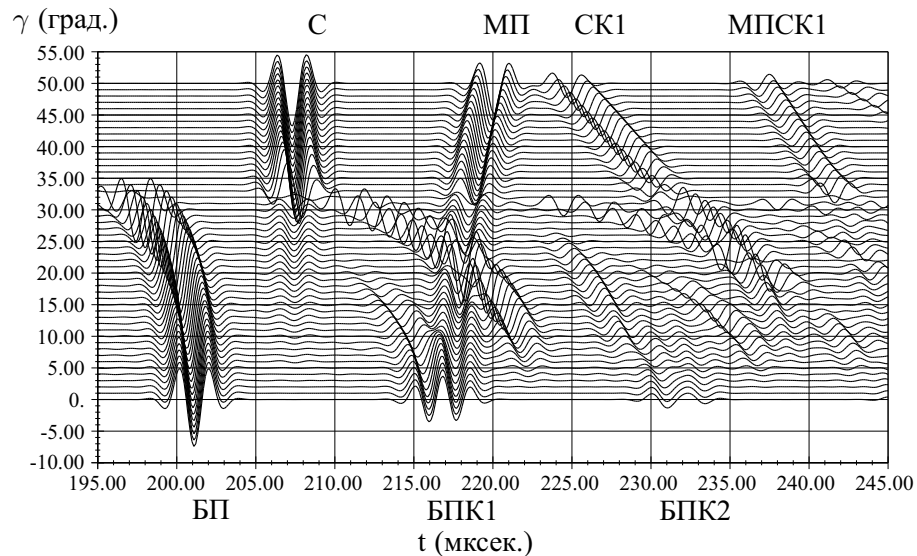


Рис. 2.4. Прохождение импульса через пористый слой. Модель Био, проницаемые границы.

Второй расчет проводился таким образом, чтобы исключить на сейсмограммах отклики, порожденные медленной волной в пористой среде. Для этого проницаемость пористой

среды была уменьшена в 100 раз и составила  $\kappa = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ .

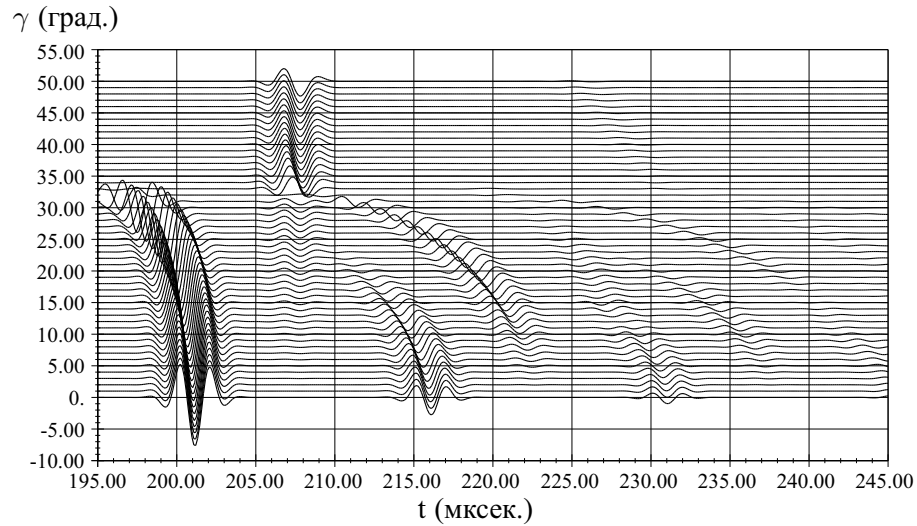


Рис. 2.5. Прохождение импульса через пористый слой с уменьшенной пористостью. Модель Био, проницаемые границы.

На результатах этого расчета (рис. 2.5) видно, что импульсы, помеченные на рис. 2.4 как МП, соответствуют медленной продольной волне. Кроме этого можно отметить, что уменьшение проницаемости пористой среды привело к незначительному увеличению коэффициентов затухания кратных откликов быстрой продольной волны и волны сдвига, что связано с изменением коэффициентов отражения соответствующих волн.

Третий расчет проводился с уменьшенными в 100 раз значениями проницаемости ( $\kappa = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$ ) и модуля сдвига скелета пористой среды ( $\mu = 4,51 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ).

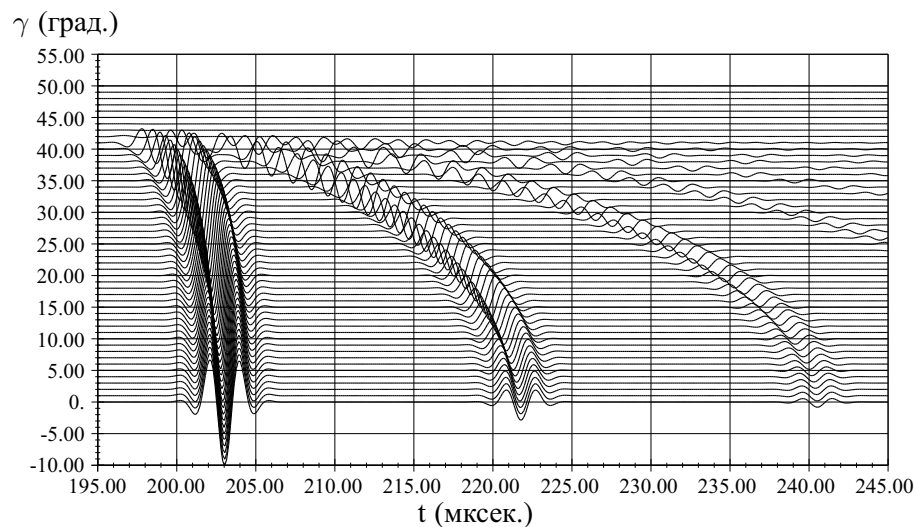


Рис. 2.6. Прохождение импульса через слой с уменьшенной пористостью и модулем сдвига скелета пористой среды. Модель Био, проницаемые границы.

Приведенный на рис. 2.6 результат расчета показывает, что импульсы—отклики, отмеченные на рис. 2.4 как С, СК1, СК2 соответствуют возбуждаемой в пористом слое волне



сдвига. При этом импульс С порождается однократно прошедшей через слой волной, а импульсы СК1 и СК2 – результат внутреннего отражения и трехкратного (пятикратного) прохождения волны через слой.

Оставшиеся на рис. 2.6 импульсы соответствуют быстрой продольной волне и ее кратному отражению. Эти же отклики помечены на рис. 2.4 как БП, БПК1, БПК2. Обозначенный на рисунке как МПСК1 импульс соответствует однократному прохождению медленной волны через слой, отражению с преобразованием в волну сдвига, которая потом и порождает этот импульс. Аналогичные "смешанные" импульсы можно наблюдать и для других волн, если увеличить время наблюдения.

Проведенный по модели Био с действительным модулем сдвига и проницаемой границей расчет показывает, что для этой модели характерно завышение амплитуды отклика, соответствующего медленной продольной волне, и кратных откликов, соответствующих быстрой продольной волне и волне сдвига (рис. 2.4).

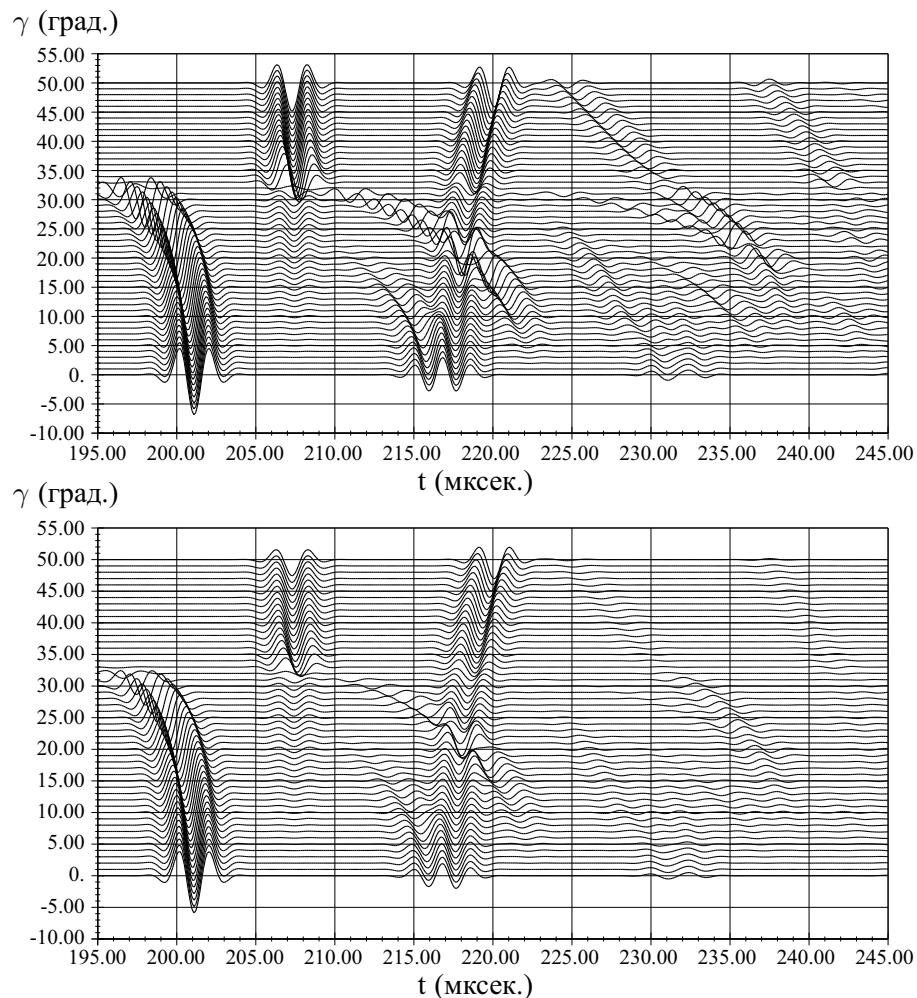


Рис. 2.7. Прохождение импульса через слой с комплексным модулем сдвига,  $\delta = 0,01$  (верхний график),  $\delta = 0,03$  (нижний график).

Следующая группа расчетов проводилась по модели Био с комплексным значением

модуля сдвига скелета пористой среды. Было проведено несколько расчетов с одинаковыми значениями вещественной части модуля сдвига и различающимися мнимыми частями (менялось значение параметра  $\delta$ , характеризующего неидеальность скелета  $\mu = \mu_0(1+i\delta)$ ).

Как видно из рис. 2.7, введение мнимой части у модуля сдвига скелета пористой среды приводит к ослаблению в первую очередь откликов, связанных с волной сдвига и менее ярко выраженному ослаблению откликов, связанных с быстрой продольной волной.

Увеличение параметра  $\delta$  от значения 0,01 до 0,03 приводит почти к полному исчезновению кратных откликов волны сдвига, как это и наблюдается на сейсмограммах эксперимента (рис. 2.2). Однако, данная модель практически не оказывает влияния на амплитуды импульсов, отвечающих медленной продольной волне, которые, как видно из рис. 2.7, в случае  $\delta = 0,03$  практически сравниваются по амплитуде с импульсами от волны сдвига. В эксперименте же, как следует из рис. 2.2, амплитуда импульсов от медленной волны приблизительно в 1,5–2 раза меньше амплитуды импульсов от волны сдвига. Не согласуется с экспериментом и соотношение амплитуд первого и кратных импульсов быстрой продольной волны.

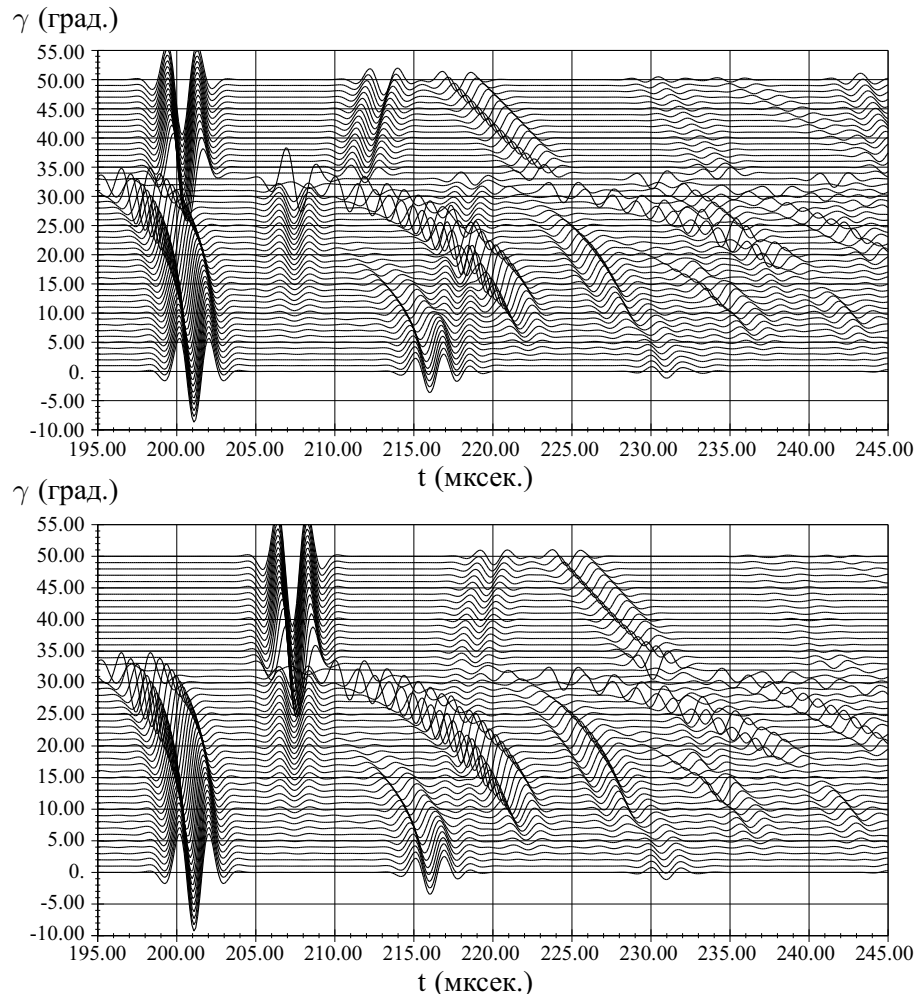


Рис. 2.8. Прохождение импульса через слой с частично проницаемыми границами,  $T = 2 \cdot 10^{13}$  (верхний график),  $T = 4 \cdot 10^{13}$  (нижний график) .

Результаты расчетов по модели Био с частичной проницаемостью границ, напротив, демонстрируют значительное ослабление медленной продольной волны и менее заметное для волны сдвига. Уменьшение параметра непроницаемости границы  $T$  ( $T = \infty$  соответствует непроницаемой границе) приводит к возрастанию амплитуды импульсов от быстрой волны и первого импульса от волны сдвига, в то время, как кратные отклики от волны сдвига, наоборот, затухают сильнее (рис. 2.8). С увеличением параметра непроницаемости значение амплитуды первого отклика волны сдвига становится близким по значению первому отклику быстрой продольной волны. Значения кратных откликов быстрой продольной волны от параметра проницаемости границы практически не зависят и их затухание существенно ниже наблюдаемого в эксперименте. В целом, при увеличении параметра  $T$  поведение пористого слоя становится близким к поведению упругой пластины.

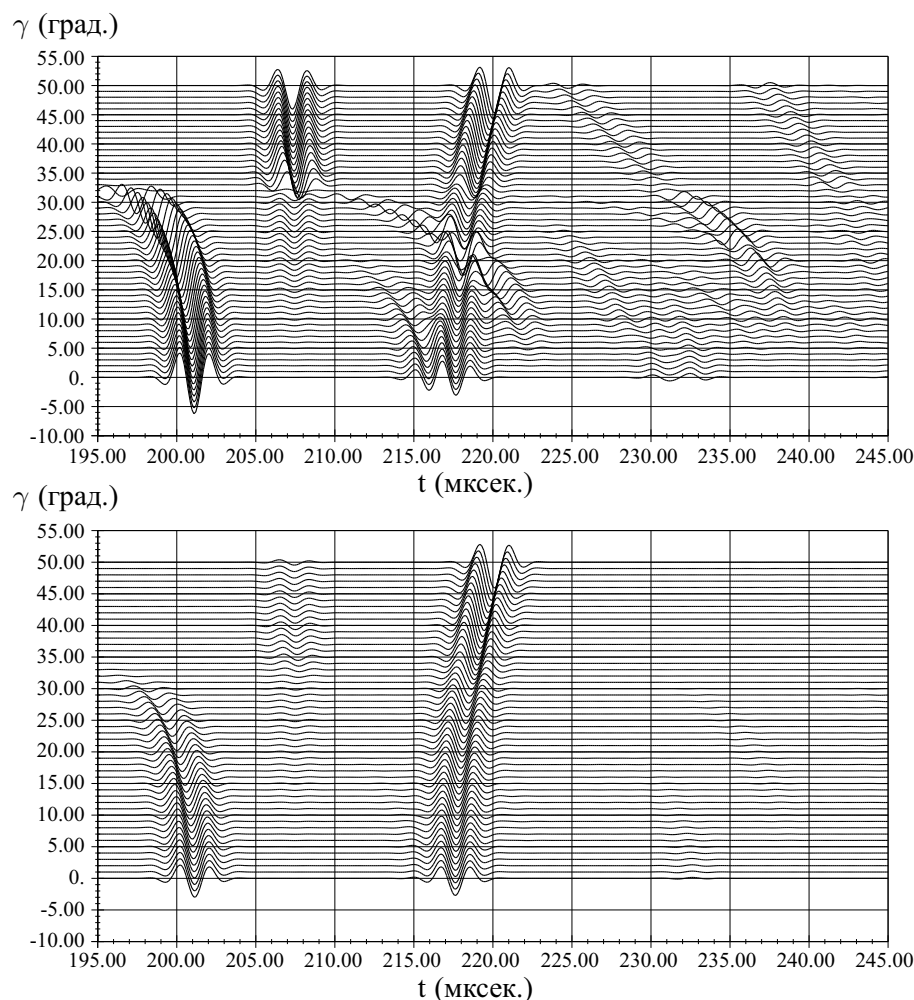


Рис. 2.9. Прохождение импульса через слой. Модель с комплексной плотностью среды,  $A = 9,5 \cdot 10^7$ —верхний график,  $A = 5 \cdot 10^8$ —нижний график.

При использовании модели с комплексной плотностью среды [34] изменение параметра  $A$ , напротив, влияет в основном на отклики от быстрой продольной волны и волны

сдвига (рис. 2.9). Причем, как видно из рис. 2.9, для волны сдвига изменение происходит синхронно для всех откликов, из чего можно заключить, что в основном меняются коэффициенты прохождения через границы жидкость—пористая среда, а собственно затухание волны в пористой среде меняется очень слабо. Для быстрой волны с ростом параметра  $\Lambda$  уменьшается амплитуда первого отклика, но судить о кратных откликах не представляется возможным из-за более высокого значения декремента затухания. На отклик от медленной волны влияние приблизительно такое же, как и в случае модели с комплексным модулем сдвига, но в модели с комплексным модулем сдвига (рис. 2.7) амплитуда отклика от медленной волны уменьшается больше.

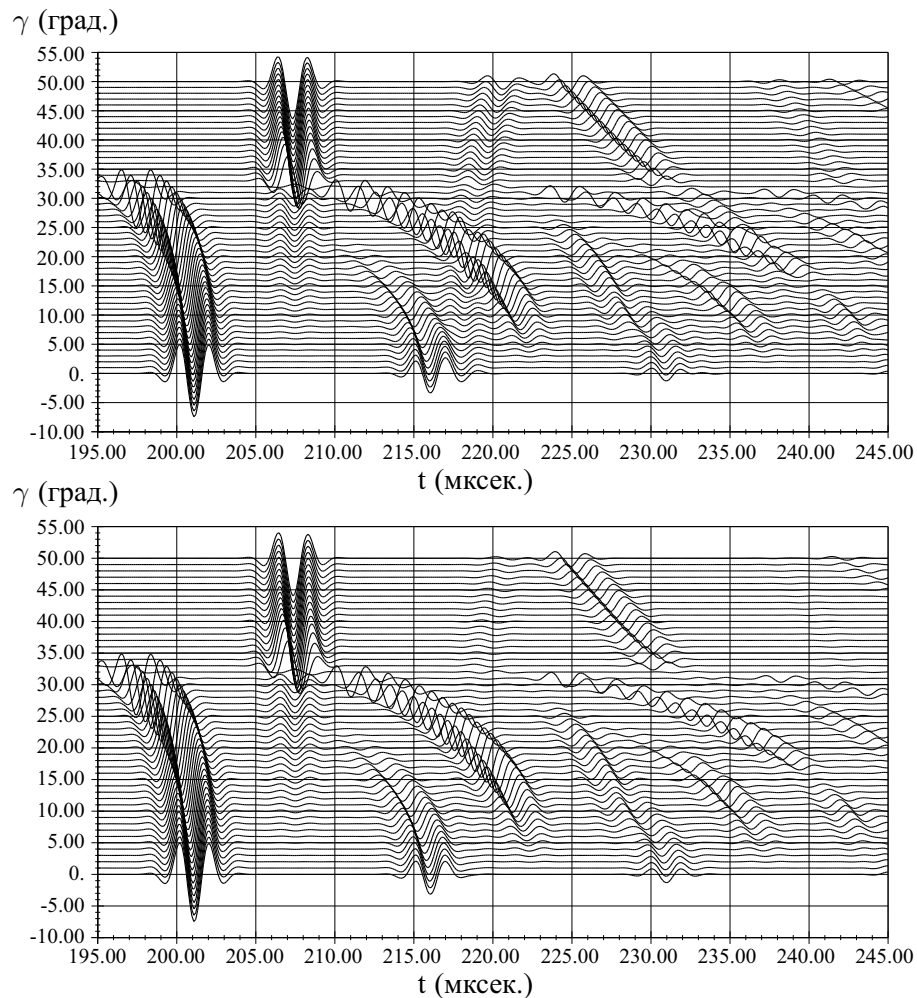


Рис. 2.10. Прохождение импульса через слой. Модель динамической проницаемости,  $\Lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ —верхний график,  $\Lambda = 10^{-5}$ —нижний график.

Расчеты по модели динамической проницаемости [74] при различных значениях параметра  $\Lambda$  представлены на рис. 2.10. Как видно из приведенных зависимостей, основные изменения при изменении параметра  $\Lambda$  происходят с откликами медленной продольной волны, причем с ростом параметра  $\Lambda$  возрастают и амплитуды откликов. Также наблюдается незначительное влияние параметра  $\Lambda$  на отклики от волны сдвига и их затухание.

С уменьшением  $\Lambda$  уменьшается амплитуда первого отклика от волны сдвига и возрастает затухание ее кратных откликов. На отклики от быстрой продольной волны изменение параметра  $\Lambda$  практически не оказывает никакого воздействия.

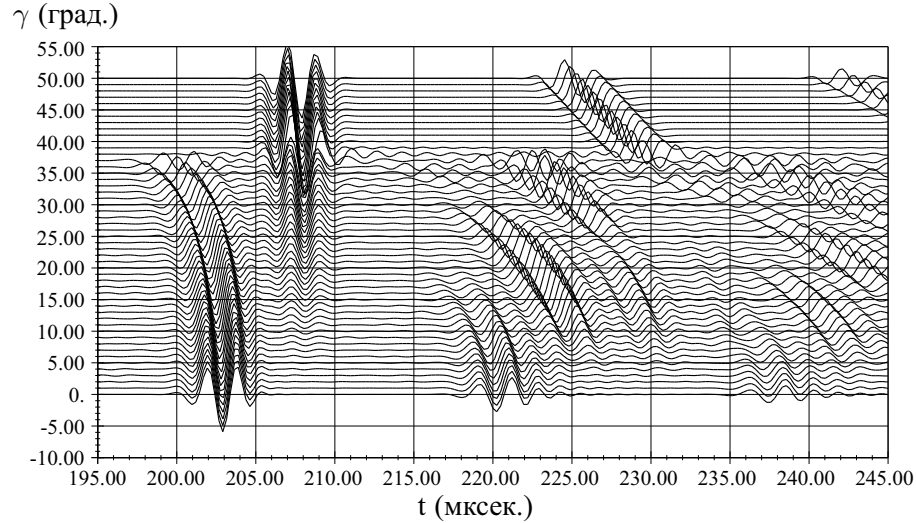


Рис. 2.11. Прохождение импульса через слой. Модель боковых течений  $R = 0,3 \cdot 10^{-3}$  м.

Результаты расчетов (рис. 2.11), проведенных по модели боковых течений [59] показывают, что данная модель, как и модель динамической проницаемости и условия частичного протекания жидкости на границах, оказывает влияние в основном на отклик от медленной продольной волны. Для использованных в расчетах значений характеристического радиуса  $R$  отклик от медленной продольной волны на сейсмограммах не виден. Заметим, что в отличие от остальных, модель боковых течений заметно меняет скорость быстрой продольной волны.

Существенным недостатком данной модели является то, что на высоких частотах мнимая часть параметра  $\lambda$  в (1.12) стремится к нулю. В результате чего, стоящая в знаменателе величина  $J_0(\lambda R)$  также будет стремиться к нулю в районе корней функции Бесселя  $J_0$ . По этой причине приходится ограничивать допустимые значения характеристического радиуса  $R$ .

Как видно из приведенных выше результатов, ни одна из моделей не дает полного соответствия экспериментальным данным. Учитывая особенности поведения каждой из моделей, используем комбинацию модели динамической проницаемости с комплексным модулем сдвига в пористой среде.

Серия проведенных расчетов показывает, что достаточно близким к эксперименту (по внешним признакам) является расчет со следующими параметрами:  $\Lambda = 1,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta = 0,06$ . Результаты расчета приведены на рис. 2.12.

Следует заметить, что для такого сочетания параметров на сейсмограммах наблюдается небольшая асимметричность у отклика, соответствующего быстрой продольной волне. Аналогичный эффект можно увидеть и на сейсмограммах эксперимента.

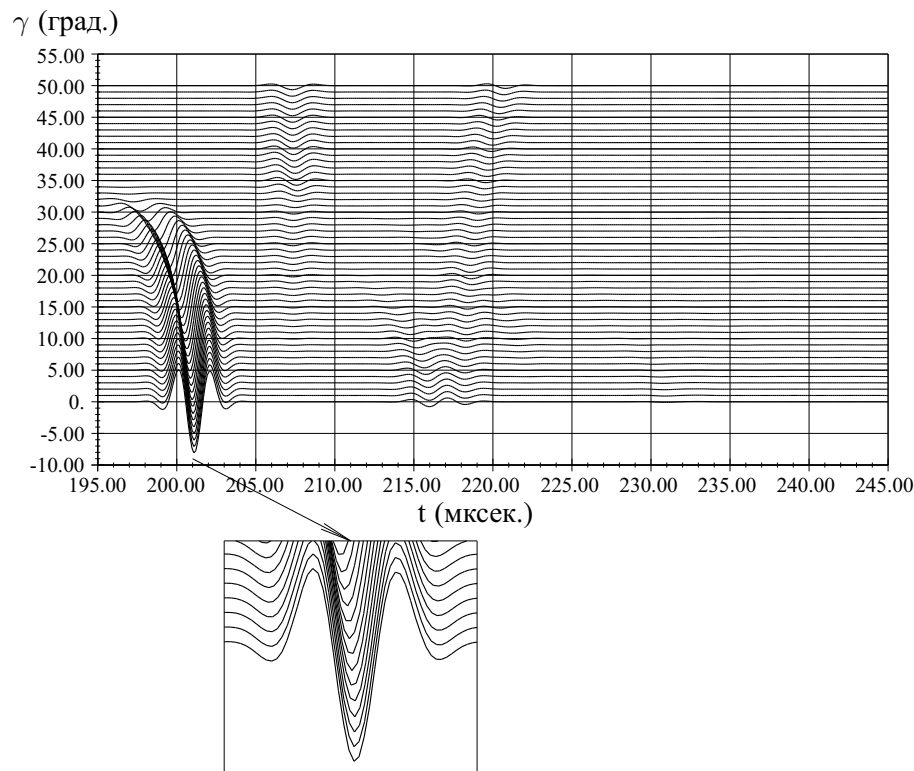


Рис. 2.12. Прохождение импульса через слой. Комбинирование модели динамической проницаемости с комплексным модулем сдвига скелета пористой среды  $\Lambda = 1,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\delta = 0,06$ .

## Выводы

На основании проведенного аналитико-численного моделирования прохождения акустического импульса через пористую пластину в жидкости можно сделать следующие выводы.

Математическое моделирование эксперимента О. Kelder, D. Smeulders позволило провести в широком диапазоне частот детальное сравнение свойств быстрой, медленной продольных и поперечной волн для различных моделей распространения звука в пористых средах. При этом ни по одной из них не были получены результаты, близкие к наблюдаемым в эксперименте. Было установлено, что для модели Био характерно завышение амплитуды медленной волны и занижение затухания у всех трех типов волн в пористой среде; для модели “боковых течений” и частично проницаемых границ наблюдается ярко выраженная тенденция к подавлению медленной продольной волны при практически не изменяющихся свойствах других волн; для модели комплексной плотности среды свойственно занижение быстрой и поперечной волн при неизменных свойствах медленной волны. Во время расчетов возникли вычислительные трудности при использовании модели “боковых течений”, связанные с корнями функции Бесселя. В результате чего пришлось ограничивать значения параметра модели  $R$ . Наиболее близкий к наблюдаемому в эксперименте результат был получен для сочетания модели “динамической проницаемости” с комплексным модулем сдвига скелета пористой среды.

## 2.2 Приближенное решение для слоя малой толщины

Явления отражения и преломления акустических волн на границах сред интенсивно используются в сейсмологии, подводной акустике и неразрушающем контроле. Значительный интерес для практического использования представляют исследования этих явлений на границе с пористой средой. Поскольку наиболее полное представление о процессе могут дать аналитические выражения для коэффициентов отражения и преломления, то именно такие работы представляют особый интерес. К сожалению, даже при наличии мощных современных пакетов компьютерной алгебры (Maple, Mathematica и др.), аналитически могут быть решены только простые задачи. Очень часто для получения наглядного результата приходится делать упрощающие допущения в модели распространения акустических волн в пористой среде или налагать ограничения на свойства сред (пренебрежение поперечными волнами, бесконечная жесткость скелета [20, 49]).

В данном разделе изучаются задачи отражения плоских волн от границы пористого флюидонасыщенного слоя в предположении малости толщины слоя по сравнению с длинами волн в этой среде. В первой части разрабатывается методика упрощения систем исходных уравнений при решении задач распространения волн в тонком слое. Показывается, что полученные системы уравнений совпадают с исходными с точностью до квадратичных членов при разложении решения в ряд по толщине слоя. Предлагаемый подход аналогичен предложенному в [27] при изучении внутренних волн в стратифицированном океане. В последующих разделах разработанная методика применяется для получения коэффициентов отражения плоских волн от пористого флюидонасыщенного слоя. В отличие от работы Г.А. Бордакова и др. [9], рассматривается отражение волны от слоя при падении под углом, отличным от прямого, и используется разложение, дающее более точное решение.

### Разложение потенциалов на границах слоя

Рассмотрим задачу о распространении волн (поверхностные волны, отражение волн) в слое малой толщины  $2h$ . Введем прямоугольную систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы центр координат совпадал с серединой слоя, ось  $OX$  была параллельна границам слоя, а ось  $OZ$  была направлена вертикально вверх. Пусть уравнения, описывающие распространение волн в слое имеют вид

$$L_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = L_2 \Phi \quad (2.13)$$

где  $L_1, L_2$  – линейные операторы,  $\Phi = \{\phi^1, \dots, \phi^n\}$  – потенциалы волн, распространяющихся в слое. Представим потенциалы в виде разложений по степеням  $z$  в точке  $z = 0$ .

$$\phi^i = \phi_0^i + \phi_1^i z + \phi_2^i z^2 + O(z^3) \quad (2.14)$$

Разрешая систему (2.13) относительно вторых производных от потенциалов  $\partial^2 \Phi / \partial z^2$  и подставляя в него разложения потенциалов по степеням  $z$  из (2.14), получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = L_1^{-1} L_2 \phi_0 + z L_1^{-1} L_2 \phi_1 + z^2 L_1^{-1} L_2 \phi_2 + O(z^3),$$

где  $\phi_i = \{\phi_i^1, \phi_i^2 \dots \phi_i^n\}$ .

Интегрируя последнее равенство в пределах слоя и учитывая, что  $\phi_0$  есть ни что иное как значения потенциалов в центре слоя  $\Phi(0)$ , имеем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_h - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{-h} = 2h L_1^{-1} L_2 \Phi(0) + O(h^3), \quad (2.15)$$

где через  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_h$  и  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{-h}$  обозначены производные от потенциалов на границах слоя.

Далее представим потенциалы в центре слоя в виде разложений по степеням  $z$  на границах слоя ( $z = \pm h$ )

$$\Phi(0) = \Phi(\pm h) \mp \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\pm h} h + \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{\pm h} \frac{h^2}{2} + O(h^3). \quad (2.16)$$

После чего воспользуемся выражением (2.13) для замены вторых производных в последнем равенстве

$$\Phi(0) = \Phi(\pm h) \mp \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\pm h} h + L_1^{-1} L_2 \Phi(\pm h) \frac{h^2}{2} + O(h^3).$$

Разрешая последнее равенство относительно значений потенциалов на границах слоя, получаем следующие выражения

$$\Phi(\pm h) = \left( L_1 + \frac{h^2}{2} L_2 \right)^{-1} L_1 \left( \Phi(0) \pm \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{\pm h} h \right) + O(h^3). \quad (2.17)$$

Как будет показано, выражение (2.17) позволяет записать условия на границах пористого слоя с точностью до членов порядка  $h^2$ , используя при этом только значения потенциалов в середине слоя в качестве неизвестной величины.

## Отражение монохроматических волн от поверхности слоя

Уравнения для нахождения коэффициентов отражения от слоя и прохождения через слой плоских монохроматических волн представляется в виде линейной системы уравнений  $Aa = b$ , где  $A$  – матрица, получаемая из граничных условий на поверхностях раздела



сред,  $a = \{a^1, \dots, a^n\}$  – амплитуды волн, возбуждаемых в средах,  $b = \{b^1, \dots, b^n\}$ .

Матрица  $A$ , также как и векторы  $a$  и  $b$  является функцией от полутолщины слоя  $h$ . Раскладывая обе части системы  $Aa = b$  по степеням  $h$ , получаем

$$A_0 a_0 + (A_0 a_1 + A_1 a_0)h + (A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0)h^2 + O_1(h^3) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + O_2(h^3).$$

Так как последнее равенство должно удовлетворяться при произвольных значениях  $h$ , то компоненты вектора  $a$  находятся из решения последовательности уравнений

$$\begin{aligned} A_0 a_0 &= b_0 \\ A_0 a_1 + A_1 a_0 &= b_1 \\ A_0 a_2 + A_1 a_1 + A_2 a_0 &= b_2. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находится  $a_0$ , из второго  $a_1$ , из третьего  $a_2$ . Дальнейшее увеличение числа коэффициентов в разложении влияет на степени  $h$  выше второй. Отсюда следует, что при разложении матрицы  $A$  в ряд по степеням  $h$  с точностью до членов порядка  $h^2$ , решение уравнения  $\tilde{A}a = b$ , где  $\tilde{A} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2$  совпадает с точным решением уравнения  $Aa = b$  до членов порядка  $h^2$  включительно. Поскольку коэффициенты матрицы  $A$  получаются в результате подстановки в граничные условия выражений для потенциалов на границах слоя, то применение разложения (2.17) приводит к решению приближенной задачи об отражении волн от слоя с точностью до членов второго порядка малости по  $h$ .

## Дисперсионное соотношение, поверхностные волны

Дисперсионное соотношение для нахождения собственных волн в слоистой среде получается в результате приравнивания к нулю детерминанта матрицы коэффициентов  $A$  при неизвестных амплитудах волн в средах. С учетом того, что детерминант матрицы можно представить в виде

$$\det A = \sum_p (-1)^{t(p)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n},$$

где  $n$  – размерность матрицы,  $t(p)$  – функция перестановок, зависящая от индексов элементов произведения  $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ , то разложение элементов матрицы  $A$  в ряд по степеням  $h$  и пренебрежение членами выше квадратичных, дает погрешность в детерминанте не хуже чем  $O(h^3)$ . Принимая во внимание то, что элементы матрицы  $A$  являются функциями как полутолщины слоя  $h$ , так и волнового числа  $k$ , разложим детерминант матрицы  $A$  в ряд

по степеням  $h$ . Тогда дисперсионное соотношение будет выглядеть следующим образом

$$\det A \equiv D_0(k) + hD_1(k) + h^2D_2(k) + O(h^3) = 0. \quad (2.18)$$

Далее, раскладывая  $D_i(k)$  в ряды по степеням  $k$ , и учитывая разложение для волнового числа  $k = k_0 + k_1h \dots$ , можно заметить, что только первые члены (2.18) содержат степени  $h$  меньше третьей, и тем самым позволяют получить решение дисперсионного уравнения с точностью до членов порядка  $h^2$ .

### Метод тонкого слоя

Предположим, что потенциал вида  $\Phi(x, z, t)$  является решением волнового уравнения (2.13). И пусть условия, соответствующие верхней и нижней границам слоя, записываются как

$$\begin{aligned} L_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_h + \widehat{L}_3 \Phi(h) &= b_h \\ L_4 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{-h} + \widehat{L}_4 \Phi(-h) &= b_{-h}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $L_3, \widehat{L}_3, L_4, \widehat{L}_4$  – линейные операторы. Поскольку обычно число условий на каждой из границ превышает число потенциалов в слое, разделим условия на каждой границе на две части таким образом, чтобы в первой группе число уравнений совпадало с числом потенциалов в слое, а во вторую группу вошли оставшиеся уравнения. Обозначим операторы первой группы для верхней границы как  $L_{03}$  и  $\widehat{L}_{03}$ , для нижней границы – как  $L_{04}$  и  $\widehat{L}_{04}$ . Операторы второй группы для верхней границы обозначим как  $L_{13}$  и  $\widehat{L}_{13}$ , для нижней границы – как  $L_{14}$  и  $\widehat{L}_{14}$ . Векторы правых частей для соответствующих операторов обозначим через  $b_{0h}, b_{1h}, b_{0-h}$  и  $b_{1-h}$ .

Пользуясь выражением (2.17), заменим потенциалы на границах слоя в (2.19) через их производные и значения потенциалов в центре слоя:

$$\begin{aligned} [L_{03} + h\widehat{L}_{03}G] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_h + \widehat{L}_{03}G\Phi(0) &= b_{0h} \\ [L_{04} - h\widehat{L}_{04}G] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{-h} + \widehat{L}_{04}G\Phi(0) &= b_{0-h} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$[L_{13} + h\widehat{L}_{13}G] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_h + \widehat{L}_{13}G\Phi(0) = b_{1h}$$

$$\left[ L_{14} - h\widehat{L}_{14}G \right] \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{-h} + \widehat{L}_{14}G\Phi(0) = b_{1-h}, \quad (2.21)$$

где для упрощения выражений введено обозначение

$$G = \left( L_1 + \frac{h^2}{2}L_2 \right)^{-1} L_1$$

Теперь выразим из равенств (2.20) значения производных на границах слоя и подставим в уравнение (2.15) и в уравнения (2.21):

$$\begin{aligned} & \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03}G \right]^{-1} \left( b_{0h} - \widehat{L}_{03}G\Phi(0) \right) - \\ & - \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04}G \right]^{-1} \left( b_{0-h} - \widehat{L}_{04}G\Phi(0) \right) = 2hL_1^{-1}L_2\Phi(0) \\ & \left[ L_{13} + h\widehat{L}_{13}G \right] \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03}G \right]^{-1} \left( b_{0h} - \widehat{L}_{03}G\Phi(0) \right) + \widehat{L}_{13}G\Phi(0) = b_{1h} \\ & \left[ L_{14} - h\widehat{L}_{14}G \right] \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04}G \right]^{-1} \left( b_{0-h} - \widehat{L}_{04}G\Phi(0) \right) + \widehat{L}_{14}G\Phi(0) = b_{1-h}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В результате мы получили систему уравнений, из которой можно найти решение исходной задачи с точностью до членов, квадратично зависящих от толщины слоя. Количество уравнений в выведенной нами системе уменьшилось по сравнению с первоначальной системой на количество потенциалов в слое.

Если же ограничиваться в решении задачи членами линейно зависящими от толщины слоя, тогда выражения (2.16) и (2.17) примут вид

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \Phi(\pm h) \mp \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\pm h} + O(h^2) \\ \Phi(\pm h) &= \Phi(0) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{\pm h} + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

а в выражениях (2.22) нужно положить  $G$  равным единице:

$$\begin{aligned} & \left( \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04} \right]^{-1} \widehat{L}_{04} - \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03} \right]^{-1} \widehat{L}_{03} - 2hL_1^{-1}L_2 \right) \Phi(0) = \\ & = \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04} \right]^{-1} b_{0-h} - \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03} \right]^{-1} b_{0h} \\ & \left( \widehat{L}_{13} - \left[ L_{13} + h\widehat{L}_{13} \right] \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03} \right]^{-1} \widehat{L}_{03} \right) \Phi(0) = \\ & = b_{1h} - \left[ L_{13} + h\widehat{L}_{13} \right] \left[ L_{03} + h\widehat{L}_{03} \right]^{-1} b_{0h} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \left( \widehat{L}_{14} - \left[ L_{14} - h\widehat{L}_{14} \right] \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04} \right]^{-1} \widehat{L}_{04} \right) \Phi(0) = \\ = b_{1-h} - \left[ L_{14} - h\widehat{L}_{14} \right] \left[ L_{04} - h\widehat{L}_{04} \right]^{-1} b_{0-h}. \end{aligned}$$

Пользуясь выражениями (2.17) и (2.20), можно представить значения потенциалов на границах слоя через значения потенциалов в центре слоя.

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= G \left( \Phi(0) + \left( L_{03} + h\widehat{L}_{03}G \right)^{-1} \left( b_{0h} - \widehat{L}_{03}G\Phi(0) \right) \right) \\ \Phi(-h) &= G \left( \Phi(0) - \left( L_{04} - h\widehat{L}_{04}G \right)^{-1} \left( b_{0-h} - \widehat{L}_{04}G\Phi(0) \right) \right) \end{aligned}$$

Изложенная в данном разделе методика реализована в виде пакета процедур [14] для системы аналитических преобразований Maple. Пакет позволяет преобразовывать исходные системы уравнений, описывающие распространение волн в слое, в системы уравнений меньшей размерности с учетом членов до  $h^2$  включительно.

## Отражение монохроматических волн от тонкого пористого слоя в жидкости

Воспользуемся изложенной в предыдущем разделе методикой для нахождения коэффициента отражения плоских монохроматических волн от тонкого пористого слоя в жидкости. Для этого рассмотрим пористый слой толщиной  $2h$ , окруженный с обеих сторон невязкими сжимаемыми жидкостями. Введем систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы ось  $Z$  была направлена вертикально вверх, а ось  $X$  проходила через середину слоя параллельно его границам. Параметры, относящиеся к жидкостям над пористым слоем, будем обозначать индексом 1, параметры пористого слоя – индексом 2, а параметры жидкости под пористым слоем – индексом 3.

Смещения частиц жидкостей в случае акустических колебаний удовлетворяют обычным волновым уравнениям:

$$K_{1f} \text{grad div } \vec{U}_{1f} = \rho_{1f} \frac{\partial^2 \vec{U}_{1f}}{\partial t^2}, \quad K_{3f} \text{grad div } \vec{U}_{3f} = \rho_{3f} \frac{\partial^2 \vec{U}_{3f}}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

где  $\vec{U}_{1f}$ ,  $\vec{U}_{3f}$  – смещения частиц жидкостей;  $\rho_{1f}$ ,  $\rho_{3f}$  – плотности жидкостей;  $K_{1f}$ ,  $K_{3f}$  – объемные модули упругости жидкостей. В дальнейшем вместо смещений  $\vec{U}_{1f}$  и  $\vec{U}_{3f}$  мы будем использовать потенциалы смещений частиц жидкости  $\Phi_{1f}$ :  $\vec{U}_{1f} = \text{grad } \Phi_{1f}$  и  $\Phi_{3f}$ :  $\vec{U}_{3f} = \text{grad } \Phi_{3f}$ .

Все дальнейшие выкладки мы будем проводить в безразмерной форме. Для чего введем нормирующие плотность  $\rho_0$  и скорость  $V_0$ . Заменим во всех выражениях плотности сред  $\rho_i$

на безразмерные величины  $\rho_i/\rho_0$ , а упругие модули  $H_i$  на безразмерные  $H_i/H_0$ , где  $H_0 = \rho_0 V_0^2$ . Под  $H_i$  подразумеваются объемные модули упругости жидкостей  $K_{1f}$ ,  $K_{3f}$  сверху и снизу пористой среды; объемные модули упругости жидкости  $K_{2f}$ , частиц скелета  $K_{2r}$ , скелета  $K_{2s}$  пористой среды; также модуль сдвига скелета  $\mu_2$  пористой среды. Размерное время  $t$  заменим на безразмерное  $\omega t$ , а размерные координаты  $x$  и  $z$  на безразмерные  $\omega x/V_0$  и  $\omega z/V_0$ . Отметим, что в результате подобных преобразований вид волновых уравнений и граничных условий остается таким же как и до обезразмеривания.

На границах раздела жидкость – пористая среда потребуем непрерывности движения жидкости в пористой среде и вне нее, равенства давления в жидкости нормальной компоненте тензора напряжений в пористой среде, равенства нулю тангенциальной компоненты тензора напряжений в пористой среде, равенства давлений жидкости в пористой среде и за ее пределами.

На верхней границе пористой среды ( $z = h$ ) граничные условия в форме потенциалов представляются как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1f}}{\partial z} &= \frac{\partial(\Phi_{2s} - \Phi_{2f})}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi_{2s} - \Psi_{2f})}{\partial x} \\ \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} &= \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) \\ 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) &- \left( \rho_2 \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Psi_{2f}}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} &= \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \tilde{m}_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

На нижней границе пористой среды ( $z = -h$ ) как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{3f}}{\partial z} &= \frac{\partial(\Phi_{2s} - \Phi_{2f})}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi_{2s} - \Psi_{2f})}{\partial x} \\ \rho_{3f} \frac{\partial^2 \Phi_{3f}}{\partial t^2} &= \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) \\ 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) &- \left( \rho_2 \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Psi_{2f}}{\partial t^2} \right) = 0 \\ \rho_{3f} \frac{\partial^2 \Phi_{3f}}{\partial t^2} &= \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \tilde{m}_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Пусть из жидкости 1 на пористый слой под углом  $\gamma$  падает плоская монохроматическая волна с единичной амплитудой. Представим потенциалы в каждой из сред в следующем виде

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1f} &= [e^{i\tau_1(z-h)} + A_1 e^{-i\tau_1(z-h)}] e^{i(t-kx)} \\
 \Phi_{2s} &= A_2(z) e^{i(t-kx)} \\
 \Phi_{2f} &= A_3(z) e^{i(t-kx)} \\
 \Psi_{2s} &= A_4 e^{i(t-kx)} \\
 \Psi_{2f} &= F_s \Psi_{2s} \\
 \Phi_{3f} &= A_5 e^{i(t-kx+\tau_3(z+h))}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

где  $\tau_1 = \sqrt{k_{1f}^2 - k^2}$ ,  $\tau_3 = \sqrt{k_{3f}^2 - k^2}$ , а  $k_{1f}$  и  $k_{3f}$  – волновые числа волн в жидкости над и под пористым слоем соответственно. Отметим, что безразмерная полутолщина слоя  $h$  выражается через размерную как  $\omega h / V_0$ .

### Получение системы уравнений в приближении тонкого слоя

В соответствии с методом тонкого слоя подставим выражения для потенциалов (2.28) в уравнения Био (1.5) и представим последние в следующем виде

$$\begin{aligned}
 H_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - C_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} &= (H_2 k^2 - \rho_2) A_2 - (C_2 k^2 - \rho_{2f}) A_3 \\
 C_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - M_2 \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} &= (C_2 k^2 - \rho_{2f}) A_2 - (M_2 k^2 - \tilde{m}_2) A_3 \\
 \frac{\partial^2 A_4}{\partial z^2} &= (k^2 - k_{2s}^2) A_4
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Откуда следует, что операторы  $L_1$ ,  $L_2$  выражения (2.13) принимают вид

$$L_1 = \begin{bmatrix} H_2 & -C_2 & 0 \\ C_2 & -M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} (H_2 k^2 - \rho_2) & -(C_2 k^2 - \rho_{2f}) & 0 \\ (C_2 k^2 - \rho_{2f}) & -(M_2 k^2 - \tilde{m}_2) & 0 \\ 0 & 0 & (k^2 - k_{2s}^2) \end{bmatrix}$$

После замены потенциалов в граничных условиях (2.26), (2.27) на (2.28) и приведения выражений к виду (2.20), (2.21) получаем следующие системы уравнений. На верхней

границе слоя

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial z} + ik(F_{2s} - 1)A_4 = i\tau_1(1 - A_1) \\
& 2ik\mu_2 \frac{\partial A_4}{\partial z} + (\rho_2 - 2\mu_2 k^2) A_2 - \rho_{2f} A_3 = \rho_{1f}(1 + A_1) \\
& 2ik \frac{\partial A_2}{\partial z} + (2k^2 - k_{2s}^2) A_4 = 0 \\
& \rho_{2f} A_2 - \tilde{m}_2 A_3 = \rho_{1f}(1 + A_1)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

и на нижней границе слоя

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial z} + ik(F_{2s} - 1)A_4 = i\tau_3 A_5 \\
& 2ik\mu_2 \frac{\partial A_4}{\partial z} + (\rho_2 - 2\mu_2 k^2) A_2 - \rho_{2f} A_3 = \rho_{3f} A_5 \\
& 2ik \frac{\partial A_2}{\partial z} + (2k^2 - k_{2s}^2) A_4 = 0 \\
& \rho_{2f} A_2 - \tilde{m}_2 A_3 = \rho_{3f} A_5,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

где через  $F_{2s}$  обозначена величина  $\frac{\rho_{2f}}{\tilde{m}_2}$ .

Для формирования операторов  $L_{03}-L_{14}$  воспользуемся первым, четвертым и третьим уравнением из условий на верхней (2.30) и нижней (2.31) границах слоя. Операторы записаны именно для такого порядка следования уравнений.

$$L_{03} = L_{04} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ik & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_{03} = \hat{L}_{04} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ik(F_s - 1) \\ \rho_{2f} & -\tilde{m}_2 & 0 \\ 0 & 0 & (2k^2 - k_{2s}^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L_{13} &= L_{14} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 2ik\mu_2 \end{bmatrix} \\
\hat{L}_{13} &= \hat{L}_{14} = \begin{bmatrix} \rho_2 - 2\mu_2 k^2, & -\rho_{2f}, & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$b_{0h} = \begin{bmatrix} i\tau_1(1 - A_1), & \rho_{1f}(1 + A_1), & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{1h} = [\rho_{1f}(1 + A_1)]$$

$$b_{0-h} = \begin{bmatrix} i\tau_3 A_5, & \rho_{3f} A_5, & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{1-h} = [\rho_{3f} A_5]$$

После подстановки полученных выражений в (2.24) получаем следующую систему уравнений, описывающих отражение монохроматической волны от пористого слоя в жидкости с точностью до членов порядка  $h$

$$\begin{aligned} & -2 \left[ \mathfrak{F} \frac{\rho_{2f}}{h} + h \left( k^2 - \frac{(\rho_{2f} C_2 - \rho_2 M_2)}{C_2^2 - H_2 M_2} \right) \right] A_2 + 2 \left[ \mathfrak{F} \frac{\tilde{m}_2}{h} - h \frac{(\tilde{m}_2 C_2 - \rho_{2f} M_2)}{C_2^2 - H_2 M_2} \right] A_3 = \\ & = \mathfrak{F} \left( i\tilde{m}_2 \tau_1 (1 - A_1) - \frac{\rho_{1f}}{h} (1 + A_1) - (i\tilde{m}_2 \tau_3 + \frac{\rho_{3f}}{h}) A_5 \right) \\ & -2 \left[ \mathfrak{G} \frac{\rho_{2f}}{h} + h \frac{(\rho_2 C_2 - \rho_{2f} H_2)}{C_2^2 - H_2 M_2} \right] A_2 + 2 \left[ \mathfrak{G} \frac{\tilde{m}_2}{h} - h \left( k^2 + \frac{(\tilde{m}_2 H_2 - \rho_{2f} C_2)}{C_2^2 - H_2 M_2} \right) \right] A_3 = \\ & = i\rho_{2f} \tau_1 \mathfrak{F} (1 - A_1) - \frac{\rho_{1f}}{h} \mathfrak{G} (1 + A_1) - i\rho_{2f} \tau_3 \mathfrak{F} A_5 - \frac{\rho_{3f}}{h} \mathfrak{G} A_5 \\ & \left[ \frac{1}{h} - h(k^2 - k_{2s}^2) \right] A_4 = \frac{k \left[ \tilde{m}_2 \tau_1 (1 - A_1) + \frac{i\rho_{1f}}{h} (1 + A_1) + \left( \tilde{m}_2 \tau_3 - \frac{i\rho_{3f}}{h} \right) A_5 \right]}{hk_{2s}^2 (\tilde{m}_2 - \rho_{2f})} \\ & \left[ (\rho_2 - 2\mu_2 k^2) (1 - \rho_{2f} \mathfrak{F}) + \rho_{2f}^2 \mathfrak{G} - 4 \frac{\rho_{2f} \mu_2 k^2}{h^2 k_{2s}^2 (\tilde{m} - \rho_{2f})} \right] A_2 + \\ & + \left[ (\rho_2 - 2\mu_2 k^2) \tilde{m}_2 \mathfrak{F} - \rho_{2f} (1 + \tilde{m}_2 \mathfrak{G}) + 4 \frac{\tilde{m}_2 \mu_2 k^2}{h^2 k_{2s}^2 (\tilde{m} - \rho_{2f})} \right] A_3 + \\ & + \frac{2ik\mu_2}{hk_{2s}^2} (2k^2 - \mathfrak{F}) A_4 = \\ & = \rho_{1f} (1 + A_1) - h(\rho_2 - 2\mu_2 k^2) \mathfrak{F} \left( \frac{\rho_{1f}}{h} (1 + A_1) - i\tilde{m}_2 \tau_1 (1 - A_1) \right) + \\ & + h\rho_{2f} \left( \mathfrak{G} \frac{\rho_{1f}}{h} (1 + A_1) - i\rho_{2f} \mathfrak{F} \tau_1 (1 - A_1) \right) + \\ & + 4 \frac{ik^2 \mu_2}{hk_{2s}^2 (\tilde{m}_2 - \rho_{2f})} \left( \tilde{m}_2 \tau_1 (1 - A_1) + \frac{i\rho_{1f}}{h} (1 + A_1) \right) \\ & \left[ (\rho_2 - 2\mu_2 k^2) (1 - \rho_{2f} \mathfrak{F}) + \rho_{2f}^2 \mathfrak{G} - 4 \frac{\rho_{2f} \mu_2 k^2}{h^2 k_{2s}^2 (\tilde{m} - \rho_{2f})} \right] A_2 + \\ & + \left[ (1 - 2\mu_2 k^2) \tilde{m}_2 \mathfrak{F} - \rho_{2f} (1 + \tilde{m}_2 \mathfrak{G}) + 4 \frac{\tilde{m}_2 \mu_2 k^2}{h^2 k_{2s}^2 (\tilde{m} - \rho_{2f})} \right] A_3 + \\ & + \frac{2ik\mu_2}{hk_{2s}^2} (2k^2 - \mathfrak{F}) A_4 = \\ & = \rho_{3f} A_5 - h(\rho_2 - 2\mu_2 k^2) \mathfrak{F} \left( i\tilde{m}_2 \tau_3 + \frac{\rho_{3f}}{h} \right) A_5 + \end{aligned}$$



$$+h\rho_{2f} \left( i\rho_{2f}\mathfrak{F}\tau_3 + \mathfrak{G}\frac{\rho_{3f}}{h} \right) A_5 - \\ -4\frac{ik^2\mu_2}{hk_{2s}^2(\tilde{m}_2 - \rho_{2f})} \left( \tilde{m}_2\tau_3 - \frac{i\rho_{3f}}{h} \right) A_5$$

где для краткости были использованы следующие обозначения

$$\mathfrak{F} = \frac{2k^2 - k_{2s}^2}{k_{2s}^2(\tilde{m}_2 - \rho_{2f})}; \quad \mathfrak{G} = \frac{2k^2 F_s - k_{2s}^2}{k_{2s}^2(\tilde{m}_2 - \rho_{2f})}$$

Разрешение полученной системы относительно  $A_1$  дает коэффициент отражения плоской монохроматической волны от пористого флюидонасыщенного слоя с точностью до линейно зависящих от полутолщины слоя членов.

Даже в предположении малой толщины слоя выражения для коэффициентов отражения получаются слишком громоздкими. Поэтому далее будем считать угол падения волны на пористый слой малым, и разложим коэффициент отражения в ряд по волновому числу  $k$ . В разложении будем предполагать величины  $\tau_1, \tau_3$  независимыми от  $k$  (справедливость такого подхода будет проиллюстрирована численными примерами). В результате коэффициент отражения примет вид

$$R = \frac{\rho_{3f}\tau_1 - \rho_{1f}\tau_3}{\rho_{3f}\tau_1 + \rho_{1f}\tau_3} + 4i\frac{\rho_{1f}\tau_1}{(\rho_{3f}\tau_1 + \rho_{1f}\tau_3)^2} \times \\ \times \left( \frac{(\rho_2\tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2)}{\rho_2 + \tilde{m}_2 - 2\rho_{2f}}\tau_3^2 - \frac{H_2 + M_2 - 2C_2}{H_2M_2 - C_2^2}\omega^2\rho_{3f}^2 \right) h + \\ + 4i\frac{\rho_{1f}\rho_{3f}^2\tau_1}{(\rho_{3f}\tau_1 + \rho_{1f}\tau_3)^2(\rho_2\tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2)} \left( (\rho_2 - 2\rho_{2f}) + \right. \\ \left. + \left( 2\frac{(M_2 - C_2)\mu_2}{(H_2M_2 - C_2^2)} - 1 \right)^2 \tilde{m}_2 + 4\frac{(M_2 - C_2)\rho_{2f}\mu_2}{(H_2M_2 - C_2^2)} \right) hk^2. \quad (2.32)$$

Первый член в последнем выражении в точности соответствует коэффициенту отражения акустической волны от границы раздела двух жидкостей. Разложение коэффициента отражения с учетом зависимости величин  $\tau_1, \tau_3$  от  $k$  приводит к следующей формуле

$$R = \frac{\rho_{3f}k_1 - \rho_{1f}k_3}{\rho_{3f}k_1 + \rho_{1f}k_3} + \frac{\rho_{1f}\rho_{3f}(k_1^2 - k_3^2)}{(\rho_{3f}k_1 + \rho_{1f}k_3)^2 k_1 k_3} k^2 + \\ + 4i\frac{\rho_{1f}k_1}{(\rho_{3f}k_1 + \rho_{1f}k_3)^2} \left( \frac{(\rho_2\tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2)}{\rho_2 + \tilde{m}_2 - 2\rho_{2f}}k_3^2 - \frac{H_2 + M_2 - 2C_2}{H_2M_2 - C_2^2}\omega^2\rho_{3f}^2 \right) h + \\ + 4i\frac{\rho_{1f}}{(\rho_{3f}k_1 + \rho_{1f}k_3)^2} \left[ \left( \frac{\rho_{3f}k_3 + \rho_{1f}k_1}{(\rho_{3f}k_1 + \rho_{1f}k_1)k_3} - \frac{1}{2k_1} \right) \left( \frac{\rho_2\tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2}{\rho_2 + \tilde{m}_2 - 2\rho_{2f}}k_3^2 - \right. \right. \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{H_2 + M_2 - 2C_2}{H_2 M_2 - C_2^2} \omega^2 \rho_{3f}^2 \left) - \frac{\rho_2 \tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2}{\rho_2 + \tilde{m}_2 - 2\rho_{2f}} k_1 \right] h k^2 + \\
 & + 4i \frac{\rho_{1f} \rho_{3f}^2 k_1}{(\rho_{3f} k_1 + \rho_{1f} k_3)^2 (\rho_2 \tilde{m}_2 - \rho_{2f}^2)} \left( (\rho_2 - 2\rho_{2f}) + \left( 2 \frac{(M_2 - C_2) \mu_2}{(H_2 M_2 - C_2^2)} - 1 \right)^2 \tilde{m}_2 + \right. \\
 & \left. + 4 \frac{(M_2 - C_2) \rho_{2f} \mu_2}{(H_2 M_2 - C_2^2)} \right) h k^2
 \end{aligned}$$

Кроме приведенных выше разложений коэффициента отражения от пористого слоя с учетом членов, линейно зависящих от  $h$  и квадратично от  $k$ , с использованием системы аналитических преобразований на компьютере Maple, были найдены разложения коэффициентов отражения от тонкого пористого слоя в жидкости по полутолщине слоя  $h$ . Были получены разложения с учетом линейных по  $h$  членов и с учетом линейных и квадратичных по  $h$  членов. Дальнейшее разложение по степеням волнового числа  $k$  в этих выражениях не использовалось. Полные формулы для коэффициентов отражения в линейном и квадратичном приближении слишком велики и поэтому здесь не приводятся. Однако, результаты расчетов по ним будут нами обсуждаться в следующем разделе.

Также отметим следующие факты. Во-первых, в разложении коэффициента отражения по волновому числу присутствует только квадратичный член. Во-вторых, приближенное выражение для коэффициента отражения было нами получено с использованием только значений потенциалов в центре слоя. По этой причине в выведенных формулах не содержатся (в явном виде) волновые числа для быстрой продольной, поперечной и, самое главное, медленной продольной волн. Сказанное означает, что разложение коэффициента отражения от тонкого пористого слоя в жидкости в ряд по частоте ( $\omega$ ) будет содержать только целые степени  $\omega$ .

В работе А.Г. Бордакова и др. [9] было отмечено, что в разложении по частоте коэффициента отражения волны от пористого полупространства присутствуют полуцелые степени. Данное исследование показывает, что полуцелые степени по частоте в разложении коэффициента отражения от пористого слоя в жидкости могут появиться только тогда, когда толщина слоя сравнима с длиной медленной продольной волны в пористой среде или больше ее.

## Результаты расчетов

Как было ранее отмечено, использование дополнительного частичного разложения приближенного коэффициента отражения по волновому числу  $k$  (формула 2.32) дает результат практически ничем не отличающийся от расчетов по формулам без разложения по  $k$  и с полным разложением по  $k$ . Для параметров сред, взятых в соответствии с работой [77], результаты по всем трем формулам отличаются не более чем на 1%. Принимая во внимание данный факт, все остальные расчеты мы будем проводить с использованием

формулы (2.32).

В дальнейших расчетах для анализа применимости той или иной приближенной формулы для коэффициента отражения мы будем использовать т.н. граничную частоту  $f_b$ , начиная с которой погрешность вычислений по приближенным формулам превысит некоторую наперед заданную величину. В качестве погрешности будем использовать следующую величину  $|R_a - R_s|/|R_s|$ , где  $R_s$  – точное значение коэффициента отражения,  $R_a$  – значение коэффициента отражения, полученное по приближенным формулам.

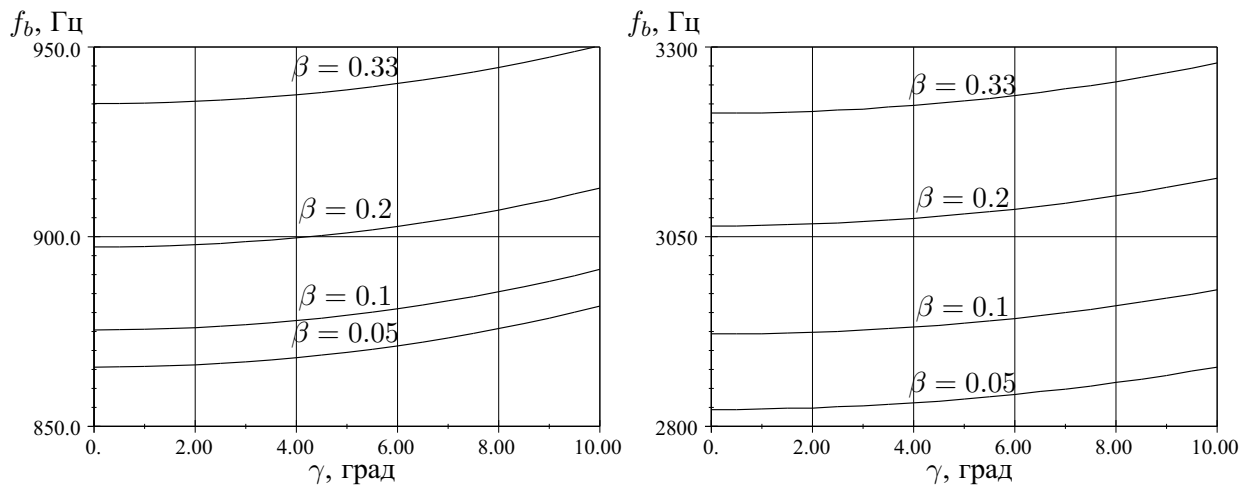


Рис. 2.13. Границы применимости приближенных выражений для расчета коэффициента отражения в зависимости от пористости среды.

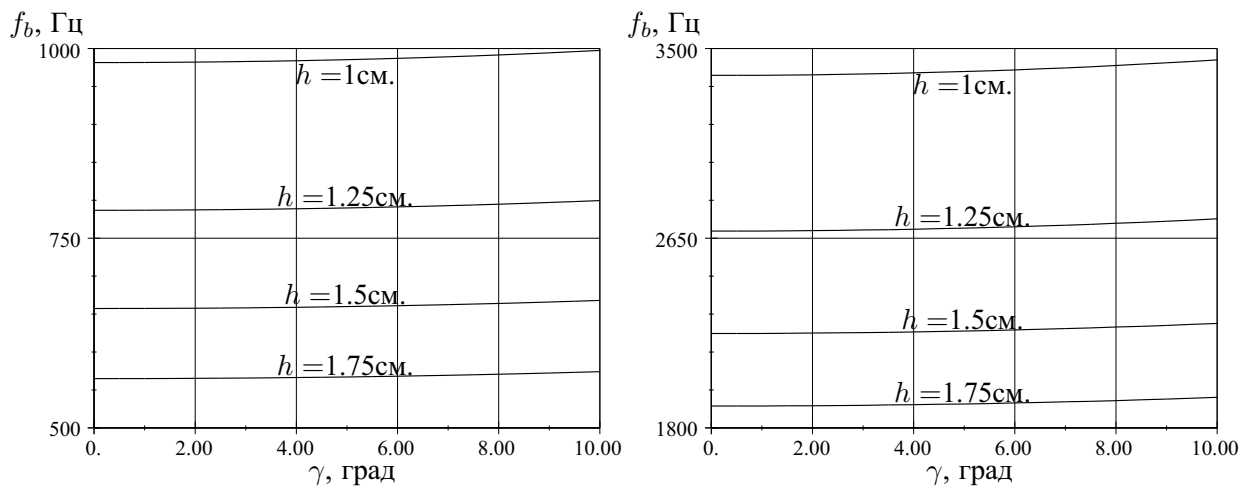


Рис. 2.14. Границы применимости приближенных выражений для расчета коэффициента отражения в зависимости от толщины пористого слоя.

На рис. 2.13 приведены результаты расчетов граничной частоты в зависимости от угла падения  $\gamma$  волны на слой для различных значений пористости слоя  $\beta$ ; на рис. 2.14 приведены результаты расчетов граничной частоты при различных значениях толщины пористого слоя; на рис. 2.15 приведены результаты расчетов граничной частоты в зависимости от

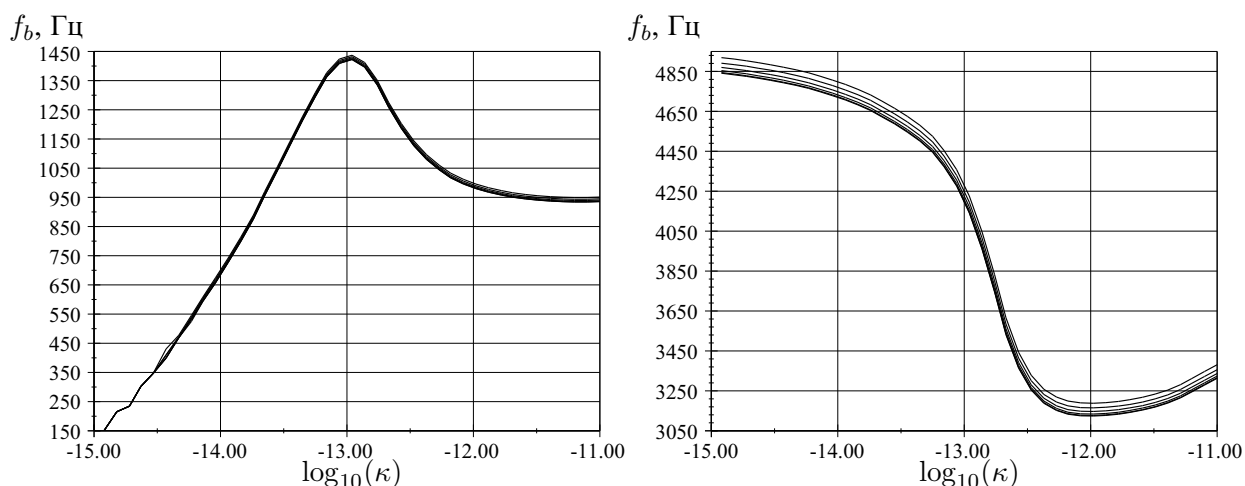


Рис. 2.15. Границы применимости приближенных выражений для расчета коэффициента отражения в зависимости от логарифма проницаемости пористой среды.

проницаемости пористой среды. Относительная погрешность для расчетов принята равной 10% от точного значения, параметры сред взяты такими же, как и в [77] (таблица 3.5 приложения, столбец под номером 3). Слева на графиках приведены результаты расчетов по формулам, учитывающим линейные по  $h$  члены, справа – по формулам, учитывающим квадратичные по  $h$  члены.

Как видно из графиков, с ростом угла падения точность приближенных формул незначительно увеличивается, что является следствием уменьшения постоянных распространения в пористой среде, а соответственно и изменений потенциалов внутри слоя, в соответствии с формулой  $\tau_i = \sqrt{(k_i^2 - k_1^2 \sin^2(\gamma))}$ . Отметим и тот момент, что учет в разложении коэффициента отражения членов с  $h^2$  почти вдвое повышает границы применимости приближенных выражений.

## Выводы

В результате проведенного исследования поведения коэффициента отражения от тонкого пористого слоя в жидкости, можно сделать следующие выводы.

Предложены формулы асимптотического разложения потенциалов на границах тонкого слоя, использование которых позволяет уменьшить размерность задач о распространении волн вдоль слоя или отражении волн от слоя. Применение этих формул позволило найти приближенное аналитическое выражение коэффициента отражения плоской монохроматической волны от пористого слоя в жидкости.

Анализ приближенного выражения для коэффициента отражения показал, что оно не содержит членов, которые зависели бы от частоты как корень квадратный. Появление в коэффициенте отражения членов, зависящих от частоты как корень квадратный, возможно

только в том случае, когда толщина слоя сравнима или больше длины медленной волны в пористой среде.

Результаты расчетов по полученным аналитическим выражениям показывают, что учет в разложениях членов квадратично зависящих от толщины слоя приводит к более чем трехкратному увеличению диапазона частот, в котором применимы приближенные формулы.

## Глава 3

# Распространение сейсмоакустических волн в трехслойной модели океана

2 июня 2000 г. сейсмической станцией Hawaii-2 были зарегистрированы сигналы отголоска землетрясения, произошедшего на побережье Калифорнии. Аппаратурой станции были зафиксированы колебания как в воде на расстоянии полуметра выше поверхности дна, так и в самом дне на полметра ниже поверхности. Поскольку спектральный состав сигналов гидрофонов и сейсмометров был достаточно схожим, можно предположить, что полученные данные соответствовали поверхностной волне, распространявшейся вдоль океанского дна. Исходя из значения расстояния от эпицентра до точки наблюдения (2160 км) и разности во времени с момента землетрясения до момента регистрации (1430 с), скорость волны составила 1510 м/с, что по величине близко к скорости звука в жидкости. Длительность сигналов составила около 40 с в течении которых спектральный состав колебаний оставался почти постоянным [45, 46].

Результаты измерений Hawaii-2 2 июня 2000 г. представляют крайний интерес в силу того, что обычно скорости поверхностных волн на границе с жидкостью значительно отличаются от скорости в самой жидкости (например, волна Стоунли на границе жидкость–упругая среда).

В статьях R. Battler, C. Lomnitz [45, 46] необычное поведение волны, зарегистрированной Hawaii-2 объясняется сейсмоакустической связью волн в океане и океанском дне при наличии слоя осадков. Поскольку в [45, 46] и в более ранней работе [80] имеется ряд неточностей и, возможно, неправильное толкование работы M. Ewing, W. Jardetsky, F. Press [63], представляет определенный интерес анализ поведения кратных поверхностных волн в модели океанского дна, учитывающей слой придонных осадков.

### 3.1 Волны в упругом слое, заключенном между сжимаемой жидкостью и упругой средой

В данном разделе с использованием приближенной модели океана изучаются свойства поверхностных волн, распространяющихся вдоль океанского дна. Модель океана состоит из слоя (или полупространства), заполненного сжимаемой жидкостью, упругого слоя придонных осадков и упругого основания (океанского дна). В результате численного решения дисперсионного уравнения находятся зависимости фазовых и групповых скоростей первых трех типов поверхностных волн для случаев ограниченной и неограниченной жидкости. Показывается, что у зависимостей групповой скорости от частоты для второй и третьей мод присутствует резкий спад в точке зарождения волн.

#### Дисперсионное соотношение

Рассмотрим задачу о распространении плоских монохроматических волн в модели океана с придонным слоем осадков. Жидкость будем полагать сжимаемой и невязкой, а осадки и океанское дно – идеально упругими. Параметры, относящиеся к жидкости, будем обозначать индексом 1, к слою осадков – индексом 2, океанскому дну – индексом 3. Введем систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы ось  $OX$  была параллельна границам сред и проходила через середину слоя осадков, а ось  $OZ$  была направлена вертикально вверх. Толщину слоя осадков возьмем равной  $2h$ , а толщину слоя жидкости равной  $L$ .

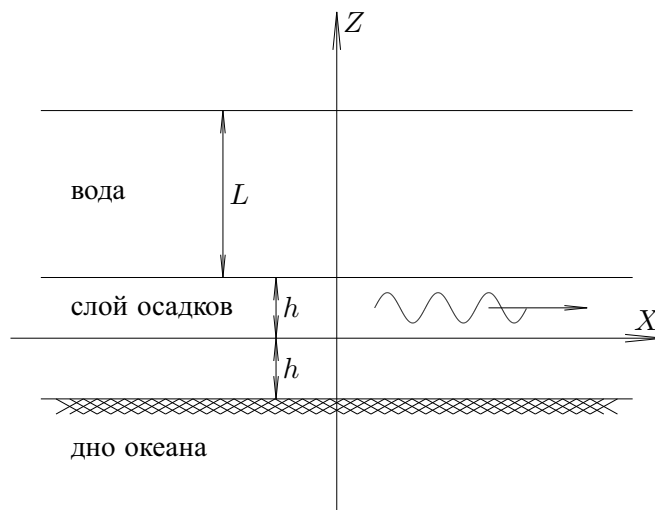


Рис. 3.1. трехслойная модель океана

В рамках данной модели мы не будем учитывать влияния воздушной среды на распространение волн по причине существенного различия плотностей воздуха и воды, поэтому в дальнейшем верхнюю границу жидкости будем полагать свободной.

В случае акустических колебаний смещения частиц жидкости  $\vec{U}_{1f}$  удовлетворяют следующему волновому уравнению

$$K_{1f} \text{grad div } \vec{U}_{1f} = \rho_{1f} \frac{\partial^2 \vec{U}_{1f}}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

где  $\rho_{1f}$  – плотность жидкости, а  $K_{1f}$  – объемный модуль упругости жидкости.

Смещения частиц  $\vec{u}_2$  и  $\vec{u}_3$  в каждой из упругих сред удовлетворяют уравнению

$$(\lambda_i + \mu_i) \text{grad div } \vec{u}_i + \mu_i (\text{div grad}) \vec{u}_i = \rho_i \frac{\partial^2 \vec{u}_i}{\partial t^2}, \quad (3.2)$$

в котором индекс  $i$  заменяется на 2 или 3 в зависимости от того, к какой среде относятся уравнения. В последнем выражении через  $\rho_i$  обозначены плотности, а через  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  коэффициенты Ламе упругих сред.

Поскольку жидкость полагается невязкой, представим вектор смещения частиц жидкости через скалярный потенциал

$$\vec{U}_{1f} = \text{grad } \Phi_{1f},$$

а векторы смещения частиц упругих сред через скалярный и векторный потенциалы

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \text{grad } \Phi_2 + \text{rot } \vec{\Psi}_2 \\ \vec{u}_3 &= \text{grad } \Phi_3 + \text{rot } \vec{\Psi}_3. \end{aligned}$$

В случае двумерной задачи у векторных потенциалов  $\vec{\Psi}_2$  и  $\vec{\Psi}_3$  отличными от нуля будут только одни  $Y$  компоненты, которые мы будем в дальнейшем обозначать через  $\Psi_2$  и  $\Psi_3$ .

Все последующие выкладки будем производить в безразмерной форме. Для чего введем нормирующие плотность  $\rho_0$  и скорость  $V_0$ . Заменим во всех выражениях плотности сред  $\rho_i$  на безразмерные величины  $\rho_i/\rho_0$ , а упругие модули  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  на безразмерные  $\lambda_i/H_0$  и  $\mu_i/H_0$ , где  $H_0 = \rho_0 V_0^2$ . Размерное время  $t$  заменим на безразмерное  $\omega t$ , а размерные координаты  $x$  и  $z$  на безразмерные  $\omega x/V_0$  и  $\omega z/V_0$ . Отметим, что в результате подобных преобразований вид волновых уравнений и граничных условий остается таким же, как и до обезразмеривания.

На верхней свободной границе жидкости ( $z = h + L$ ) потребуем обращения в нуль давления, что в форме потенциалов можно представить как

$$\rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} = 0.$$



На границе жидкости и слоя осадков ( $z = h$ ) потребуем непрерывности нормальных компонент смещений обеих сред, равенства давления в жидкости нормальной компоненте тензора напряжений упругой среды и обращения в нуль тангенциальной компоненты тензора напряжений упругой среды. Данные условия могут быть выражены через потенциалы сред в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{1f}}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} &= \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} \right) \\ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right) &= 0.\end{aligned}$$

На границе раздела слоя осадков и океанского дна ( $z = -h$ ) потребуем равенства нормальных и тангенциальных компонент смещений частиц и тензоров напряжений обеих сред. Через потенциалы эти граничные условия выражаются как

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \\ \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} \right) &= \rho_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} - 2\mu_3 \left( \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial z} \right) \\ \mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} \right) &= \mu_3 \left( \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} \right).\end{aligned}$$

Потенциалы в средах зададим в следующем виде (где  $A_1$ – $A_7$  — неизвестные амплитуды)

$$\begin{aligned}\Phi_{1f} &= [A_1 e^{\tau_{1f}(z-h)} + A_2 e^{-\tau_{1f}(z-h)}] e^{i(t-kx)} \\ \Phi_2 &= [A_3 e^{\tau_{2p}z} + A_4 e^{-\tau_{2p}z}] e^{i(t-kx)} \\ \Psi_2 &= [A_5 e^{\tau_{2s}z} + A_6 e^{-\tau_{2s}z}] e^{i(t-kx)} \\ \Phi_3 &= A_7 e^{\tau_{3p}(z+h)} e^{i(t-kx)} \\ \Psi_3 &= A_8 e^{\tau_{3s}(z+h)} e^{i(t-kx)},\end{aligned}$$

что соответствует плоским монохроматическим волнам, распространяющимся вдоль оси  $OX$ .

Из условия удовлетворения потенциалов волновым уравнениям в соответствующих средах (3.1), (3.2) получаем следующие соотношения для постоянных распространения:

$\tau_{1f} = \sqrt{k^2 - k_{1f}^2}$ ,  $\tau_{2p} = \sqrt{k^2 - k_{2p}^2}$ ,  $\tau_{2s} = \sqrt{k^2 - k_{2s}^2}$ ,  $\tau_{3p} = \sqrt{k^2 - k_{3p}^2}$  и  $\tau_{3s} = \sqrt{k^2 - k_{3s}^2}$ , где  $k_{1f} = V_0/V_{1f}$ ,  $k_{2p} = V_0/V_{2p}$ ,  $k_{2s} = V_0/V_{2s}$ ,  $k_{3p} = V_0/V_{3p}$  и  $k_{3s} = V_0/V_{3s}$  представляют собой постоянные распространения собственных волн в каждой из сред,  $V_{1f} = \sqrt{K_{1f}/\rho_{1f}}$  – скорость собственной волны для жидкости,  $V_{2p} = \sqrt{H_2/\rho_2}$  (где  $H_2 = \lambda_2 + \mu_2$ ) и  $V_{2s} = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$  – скорости продольной и поперечной собственных волн для материала слоя,  $V_{3p} = \sqrt{H_3/\rho_3}$  (где  $H_3 = \lambda_3 + \mu_3$ ) и  $V_{3s} = \sqrt{\mu_3/\rho_3}$  – скорости продольной и поперечной собственных волн для материала упругого полупространства. Ветви квадратного корня в формулах для  $\tau_i$  выбираются таким образом, чтобы вещественная часть  $\tau_i$  была положительной, что обеспечивает экспоненциальное затухание волн вдоль оси  $OZ$  при удалении от границ.

После подстановки выражений для потенциалов в граничные условия и сокращения общего множителя  $e^{i(t-kx)}$  получаем систему уравнений относительно неизвестных амплитуд волн  $A_1$ – $A_8$ . Матрица коэффициентов перед неизвестными амплитудами приведена на стр. 67.

Далее произведем следующие преобразования полученной матрицы. Поделим первую строку на  $\rho_{1f}e^{\tau_{1f}\tilde{L}}$  и используем ее для обнуления коэффициентов первого столбца во второй и третьей строках. В результате матрица изменится следующим образом (мы приводим только левую верхнюю часть матрицы, которая изменилась при преобразовании)

$$\begin{array}{ccc} 1 & e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}} & \dots \\ 0 & -\tau_{1f}(1 + e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}}) & \dots \\ 0 & \rho_{1f}(1 - e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Теперь поделим второй столбец матрицы на  $1 + e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}}$ , что приводит к следующему результату

$$\begin{array}{ccc} 1 & e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}} / (1 + e^{-2\tau_{1f}\tilde{L}}) & \dots \\ 0 & -\tau_{1f} & \dots \\ 0 & \rho_{1f} \text{th}(\tau_{1f}\tilde{L}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (3.3)$$

Если теперь произвести замену

$$\tilde{\rho}_{1f} = \rho_{1f} \text{th}(\tau_{1f}\tilde{L}) \quad (3.4)$$

то можно заметить, что в строках и столбцах со второго по восьмой располагается матрица, полностью аналогичная матрице для случая безграничной жидкости. Из этого следует, что задача со слоем жидкости конечной толщины и одной свободной границей может

$$\begin{bmatrix}
\rho_{1f}e^{\tau_{1f}\tilde{L}} & \rho_{1f}e^{-\tau_{1f}\tilde{L}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\tau_{1f} & -\tau_{1f} & \tau_{2p} & -\frac{\tau_{2p}}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -ik & -\frac{ik}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & 0 & 0 \\
\rho_{1f} & \rho_{1f} & \mu_2(2k^2 - k_{2s}^2) & \frac{\mu_2(2k^2 - k_{2s}^2)}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -2i\mu_2k\tau_{2s} & \frac{2i\mu_2k\tau_{2s}}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2ik\tau_{2p} & -\frac{2ik\tau_{2p}}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & (2k^2 - k_{2s}^2) & \frac{(2k^2 - k_{2s}^2)}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\tau_{2p}}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -\tau_{2p} & -\frac{ik}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & -ik & \tau_{3p} & ik \\
0 & 0 & -\frac{ik}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -ik & -\frac{\tau_{2s}}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & \tau_{2s} & ik & \tau_{3s} \\
0 & 0 & -\frac{\xi(2k^2 - k_{2s}^2)}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -\xi(2k^2 - k_{2s}^2) & \frac{2i\xi k\tau_{2s}}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & -2i\xi k\tau_{2s} & (2k^2 - k_{3s}^2) & -2ik\tau_{3s} \\
0 & 0 & \frac{2i\xi k\tau_{2p}}{e^{2\tau_{2p}\tilde{h}}} & -2i\xi k\tau_{2p} & \frac{\xi(2k^2 - k_{2s}^2)}{e^{2\tau_{2s}\tilde{h}}} & \xi(2k^2 - k_{2s}^2) & -2ik\tau_{3p} & -(2k^2 - k_{3s}^2)
\end{bmatrix}$$

где  $\xi = \frac{\mu_2}{\mu_3}$ ,  $\tilde{h} = \omega h/V_0$ ,  $\tilde{L} = \omega L/V_0$ .

быть сведена к задаче с жидким полупространством, но с видоизмененной плотностью жидкости  $\tilde{\rho}_{1f}$  в соответствии с формулой (3.4).

Искомое дисперсионное уравнение может быть получено приравниванием к нулю детерминанта системы на стр. 67 или видоизмененной системы (3.3). Само дисперсионное соотношение не приводится в силу его громоздкости.

## Волны в системе воздух–упругий слой–упругое полупространство

В работах R. Battler, C. Lomnitz [45, 46] необычное поведение поверхностной волны, зарегистрированной станцией Hawaii-2, объясняется как результат сейсмоакустической связи волн в воде и океанском дне. При этом авторы ссылаются на раздел работы M.Ewing, W. Jardetsky, F. Press [63], посвященный акустической связи волн в воздухе и упругой среде. Поскольку в статье [45] подвергается сомнению правильность полученных в [63] дисперсионных кривых, нами было проведено несколько расчетов, призванных подтвердить или опровергнуть эти утверждения.

Были произведены расчеты зависимостей фазовой скорости от частоты  $V_{\Phi}(f)$  основных типов волн для случая упругого слоя на упругом основании и случая упругого слоя, заключенного между воздухом и упругой средой. Параметры для расчетов, взятые в соответствии с [63], представлены в таблице 3.1.

параметр	$\rho_{1f}$	$K_{1f}$	$\rho_2$	$H_2$	$\mu_2$	$\rho_3$	$H_3$	$\mu_3$	h
ед. изм.	кг/м <sup>3</sup>	МПа	кг/м <sup>3</sup>	ГПа	ГПа	кг/м <sup>3</sup>	ГПа	ГПа	м
значение	1,2	0,1276	1200	0,1665	0,07135	1668	2,282	0,9778	2

Таблица 3.1.

Расчет групповых скоростей проводился с помощью численного дифференцирования  $V_{\Phi}(f)$  по следующей формуле

$$V_{\text{Гр}} \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{d(\omega/V_{\Phi})}{d\omega}} = \frac{V_{\Phi}^2}{V_{\Phi} - f \frac{dV_{\Phi}}{df}}$$

Результаты расчетов приведены на рис. 3.2. В левой части рисунка представлены зависимости от частоты фазовой и групповой скоростей основной поверхностной волны для упругого слоя на упругом полупространстве. Справа на рисунке показаны зависимости от частоты фазовой и групповой скоростей поверхностной волны для упругого слоя, граничащего с одной стороны с воздухом, а с другой стороны с упругой средой. Графики фазовой скорости выделены жирными линиями. Дисперсионные кривые для различных случаев специально приведены раздельно, т.к. одной из причин ошибочного толкования работы [63] явилось именно объединение графиков.

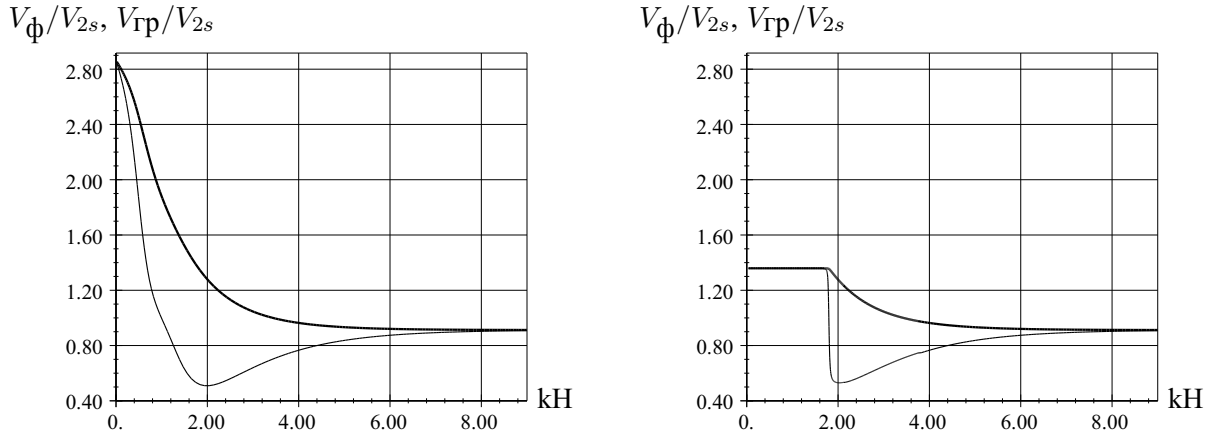


Рис. 3.2. Фазовые и групповые скорости поверхностных волн в системах упругий слой–упругое основание (слева) и воздух–упругий слой–упругое основание (справа).

Рассмотрим сперва результаты расчетов для упругого слоя на упругом основании. Как следует из матрицы граничных условий на стр. 67 в дисперсионное соотношение частота входит только через безразмерную толщину слоя  $\tilde{h} = \omega h/V_0$ . Тогда устремление частоты к нулю должно сказываться на дисперсионном соотношении точно так же, как и стремление к нулю толщины слоя, а следовательно, решением дисперсионного соотношения при  $\omega = 0$  будет значение скорости волны Рэлея для упругого полупространства. С ростом частоты безразмерная толщина слоя также растет, и для бесконечно больших частот дисперсионное уравнение вырождается в уравнение волны Стоунли для двух упругих полупространств. Это означает, что при стремлении частоты к бесконечности решением дисперсионного уравнения будет значение скорости волны Стоунли на границе двух упругих полупространств. Из аналогичных рассуждений для случая контакта упругого слоя с воздухом и упругой средой следует, что на низких частотах решением дисперсионного уравнения должно быть значение скорости волны Стоунли на границе упругого полупространства и воздуха, а для высоких частот – значение скорости волны Стоунли на границе двух упругих сред. Как видно из графиков, данные рассуждения полностью подтверждаются расчетами (рис. 3.2).

Сравнение кривых для двух различных случаев показывает, что при наличии воздуха скорость поверхностной волны почти не меняется в достаточно широком диапазоне частот (от 0 и почти до 22 Гц) до того самого момента, когда скорость волны для слоя на упругом основании не сравняется со скоростью акустической волны в воздухе. После чего происходит резкое изменение фазовой скорости, сопровождающееся скачкообразным падением групповой скорости до минимума. Почти сразу же за этим участком дисперсионные кривые в обоих случаях практически совпадают. В работе [63] (страница 235) участок дисперсионных кривых для случая воздух–упругий слой–упругое полупространство от нулевой частоты до точки минимума групповой скорости (около 24 Гц) объясняется результатом

акустической связи волн в средах.

Кроме решения, показанного на графиках, для системы воздух–упругий слой–упругое полупространство существует комплекснозначное решение с вещественной частью, ведущее себя аналогично решению в случае слоя со свободной границей. Это решение обрывается в районе резкого спада групповой скорости у вещественного решения, показанного на рис. 3.2 справа.

Полученные данные (насколько позволяет сравнение с источником) подтверждают результаты работы [63] особенно в той части, которая подвергалась сомнению в [45]. Детальный анализ показывает, что резкое изменение групповой скорости для случая с воздухом происходит на участке частот конечного размера, а не в одной точке, как утверждается в [45].

## Поверхностные волны в системе жидкость–упругий слой–упругое полупространство

Теперь рассмотрим дисперсионные кривые для идеально–упругого слоя, заключенного между сжимаемой невязкой жидкостью и идеальной упругой средой. Параметры для расчетов приведены в таблице 3.2.

параметр	$\rho_{1f}$	$K_{1f}$	$\rho_2$	$H_2$	$\mu_2$	$\rho_3$	$H_3$	$\mu_3$	h
ед. изм.	кг/м <sup>3</sup>	ГПа	кг/м <sup>3</sup>	ГПа	ГПа	кг/м <sup>3</sup>	ГПа	ГПа	м
значение	1000	2,28	1100	2,64	0,12	1920	37,2	9,3	42.5

Таблица 3.2. *Параметры сред для расчета волн в трехслойной модели океана*

Упругие модули определялись по значениям плотностей сред и скоростей продольных и поперечных волн, приведенных в работах [45, 46]. Скорости волн в средах (в метрах в секунду) приведены в таблице ниже

$V_{1f}$	$V_{2p}$	$V_{2s}$	$V_{3p}$	$V_{3s}$
1510	1550	329,67	4400	2200

С помощью аналитико-численной процедуры для системы компьютерной алгебры Maple были рассчитаны зависимости фазовой скорости от частоты для трех первых типов волн (мод). Затем с помощью численного дифференцирования полученных зависимостей находились значения групповой скорости. Применение системы Maple было вызвано необходимостью получения достаточной точности, превышающей возможности обычных численных расчетов.

Ниже на рис. 3.3 представлены зависимости от частоты фазовых и групповых скоростей трех первых типов волн для упругого слоя, заключенного между сжимаемой жидкостью и упругой средой. Жидкость над упругим слоем сверху неограничена (случай океана

бесконечной глубины). Жирные линии на рисунках соответствуют фазовой, а тонкие – групповой скорости. Номера возле кривых обозначают номера соответствующих типов волн, причем единица соответствует основной волне.

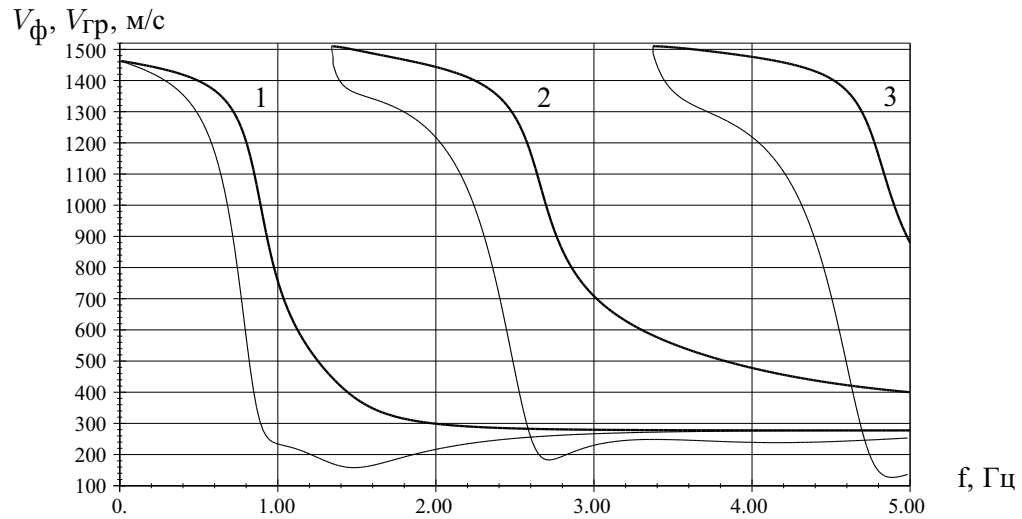


Рис. 3.3. Фазовые и групповые скорости трех первых типов волн в упругом слое, заключенном между жидкостью и упругой средой.

Как видно из результатов расчетов (рис. 3.3), полученные кривые существенным образом отличаются от данных работ [45, 46]. Так фазовая скорость основной волны при нулевой частоте в [45, 46] значительно превышает 1500 м/с, а у нас она равна 1463 м/с. В предыдущем разделе нами было показано, что при уменьшении частоты безразмерная толщина слоя  $\omega h/V_0$  стремится к нулю, и решением дисперсионного уравнения является значение скорости волны Стоунли для границы жидкости и упругой среды. Дополнительно проведенные расчеты показывают, что в нашем случае это значение как раз и равняется 1463 м/с.

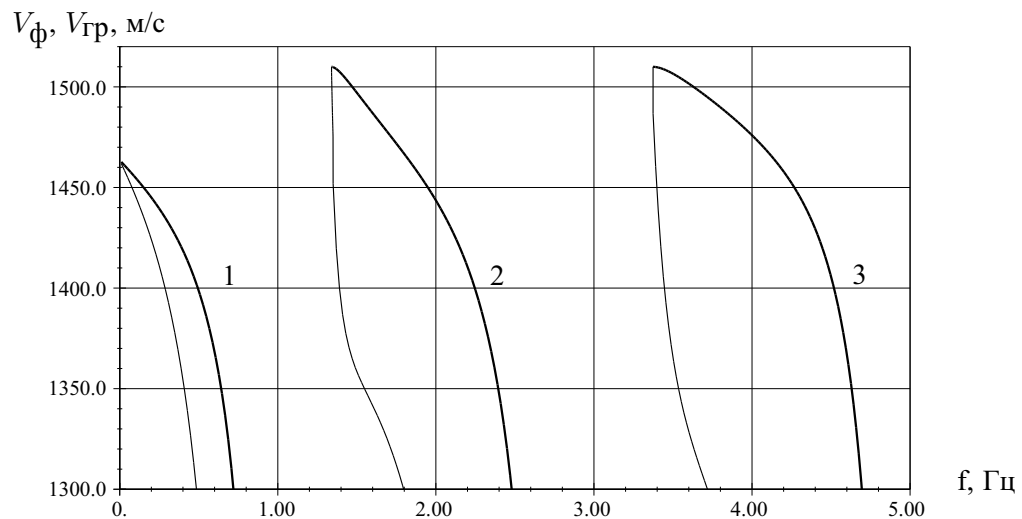


Рис. 3.4. Фрагмент предыдущего графика, масштаб взят таким же как и в [45].

Следующее отличие связано с поведением групповой скорости для основной волны. Из расчетов следует, что у зависимости групповой скорости от частоты присутствует только один минимум в районе 1,48 Гц, в то время как, в [45, 46] их несколько и один из них на частоте около 0,25 Гц.

Другие отличия касаются второй и третьей мод системы. Особенно это хорошо видно на рис. 3.4, где дисперсионные кривые построены в более крупном масштабе, аналогичном [45].

Во-первых, в точках зарождения кратных типов волн значения фазовой и групповой скоростей совпадают и равны 1510 м/с – скорости волн в безграничной жидкости. Далее с ростом частоты наблюдается резкий спад групповой скорости, причем с ростом номера моды крутизна этого участка уменьшается. В работах R. Battler и др., напротив, утверждается, что на начальном участке дисперсионных кривых присутствует некий “разрыв” между фазовой и групповой скоростью. Во-вторых, для фазовой скорости равной 1500 м/с значения групповой скорости для второй и третьей мод составляют в наших расчетах 1365 и 1323 м/с соответственно, а в [45] эти значения равны 1455 и 1483 м/с. В третьих, дисперсионные кривые в работе [45] сдвинуты в область высоких частот по сравнению с рис. 3.4.

Как показано в монографии [63], быстрый спад групповой скорости в зависимости от частоты приводит к появлению на сейсмограммах участков с почти постоянной частотой. В работах [45, 46] зафиксирован именно такой случай, причем начальное время сигнала соответствует скорости волны в жидкости. Из рис. 3.3 видно, что быстрый спад групповой скорости наблюдается для второй моды на частоте 1.34 Гц, а для третьей — на частоте 3.4 Гц, причем в обоих случаях значение групповой скорости в точке зарождения соответствующей моды совпадает со скоростью волны в жидкости. Авторы работ [45] и [46] приводят близкие значения частот и полагают, что их расчеты объясняют результаты наблюдений необычных волн. Отметим, что поскольку результаты получены по модели океана бесконечной глубины, подобный вывод не совсем корректен.

Теперь рассмотрим случай, когда жидкость ограничена (в [45] эта задача не рассматривалась). Параметры сред для расчетов возьмем такими же, как и в предыдущем случае, а толщину слоя жидкости  $L$  положим равной 4979 м (что соответствует глубине океана в месте расположения станции Hawaii-2).

На рис. 3.5 представлены зависимости фазовых скоростей от частоты, а на рис. 3.6 зависимости от частоты фазовых и групповых скоростей для первых трех типов волн. Как и ранее на рисунках толстыми линиями выделены зависимости для фазовых скоростей, а номерами обозначены различные типы волн. Расчеты проводились с помощью той же аналитико-численной процедуры, что и для полубезграничной жидкости.



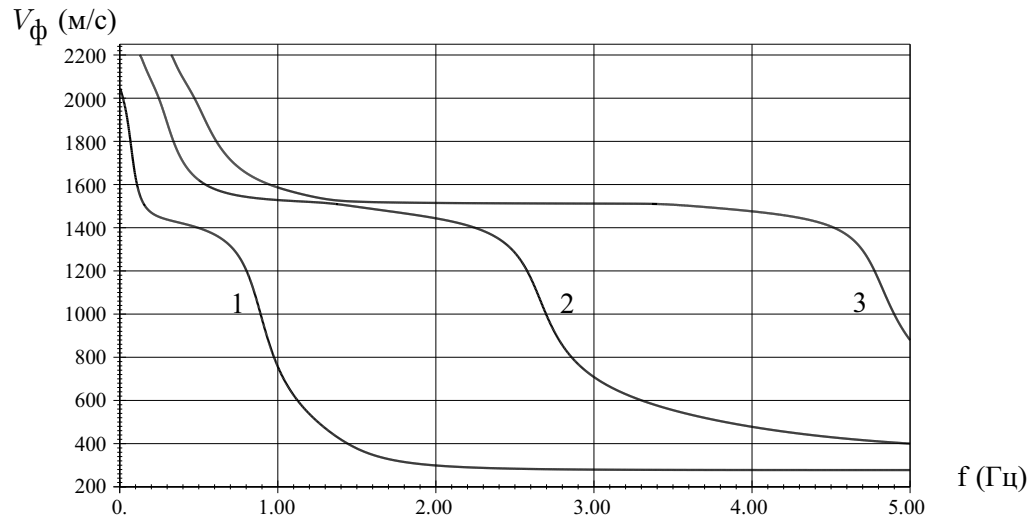


Рис. 3.5. Фазовые скорости первых трех типов колебаний в упругом слое, заключенном между жидким слоем и упругой средой.

Как видно из графиков, теперь при стремлении частоты к нулю скорость основного типа волны стремится к значению 2043.5 м/с, что соответствует скорости волны Рэлея для нижнего упругого полупространства. Это объясняется тем, что теперь частота входит в дисперсионное соотношение через безразмерную полутолщину слоя осадков  $\omega h/V_0$  (как и раньше) и через безразмерную толщину слоя жидкости:  $\omega H/V_0$ . При стремлении частоты к нулю обе эти величины стремятся к нулю, и дисперсионное соотношение переходит в соотношение для упругого полупространства со свободной границей. Значение фазовой скорости в точках зарождения второй и третьей моды теперь равно 2200 м/с — скорости поперечной волны в нижней упругой среде. Такое изменение вызвано тем, что для вещественных решений (неизлучающихся волн) максимально возможное значение скорости поверхностной волны равняется наименьшей из скоростей собственных волн для неограниченных в поперечном направлении сред. В данной задаче только нижняя упругая среда неограничена в направлении  $Z$ , а для нее наименьшей является скорость поперечной волны.

Из рис. 3.5 видно, что у всех типов волн на начальном участке наблюдается быстрое уменьшение фазовой скорости. Далее следует относительно пологий участок в районе скорости волны в жидкости (1510 м/с). С ростом номера волны протяженность этого участка увеличивается, а крутизна уменьшается. Вслед за пологим участком снова следует участок быстрого спада скорости, переходящий снова в пологий. При стремлении частоты к бесконечности дисперсионные кривые асимптотически стремятся к скорости волны Стоунли на границе двух упругих сред.

Сравнение рис. 3.5 и рис. 3.6 с дисперсионными кривыми для случая жидкого слоя на упругом основании (рис. 3.7) показывает, что в области низких частот дисперсионные кривые для системы жидкий слой–упругий слой–упругое полупространство ведут себя точно

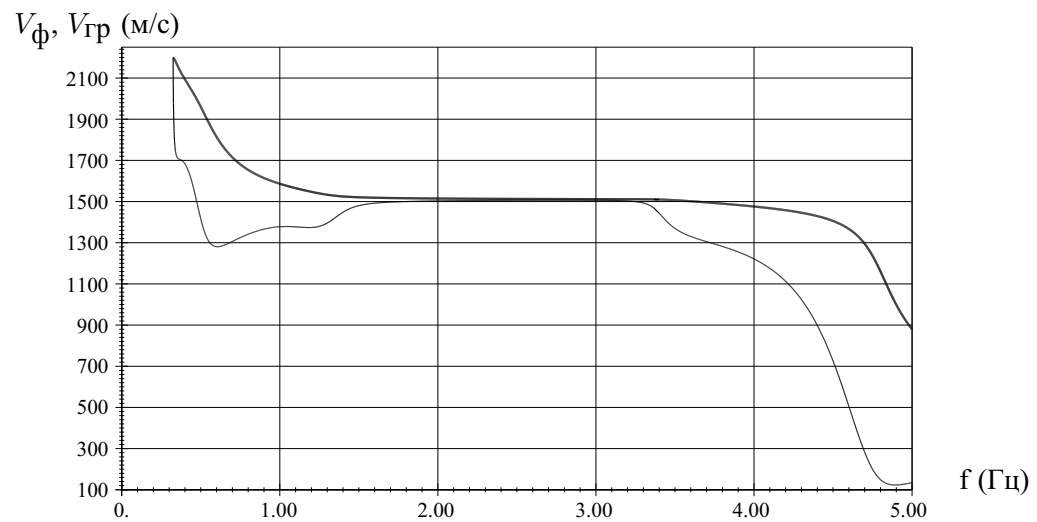
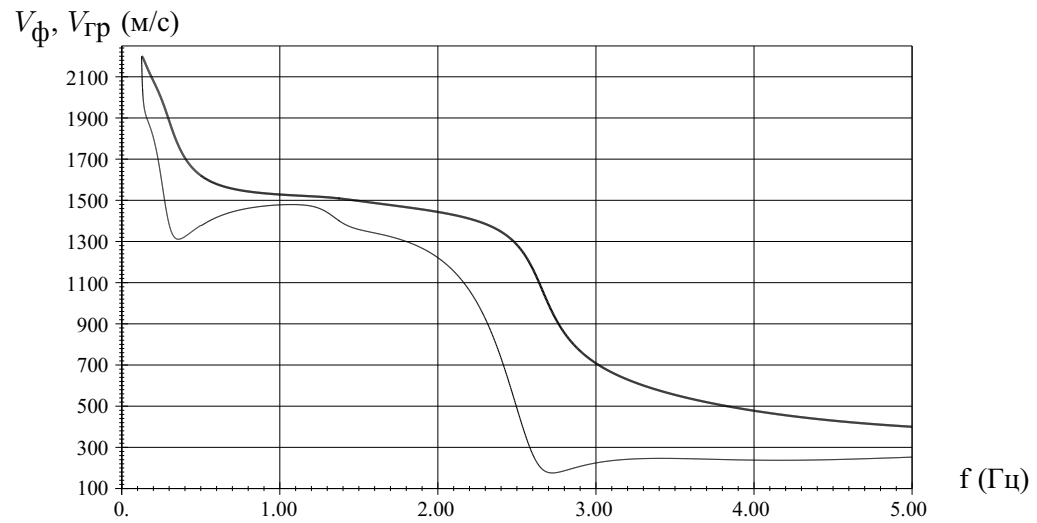
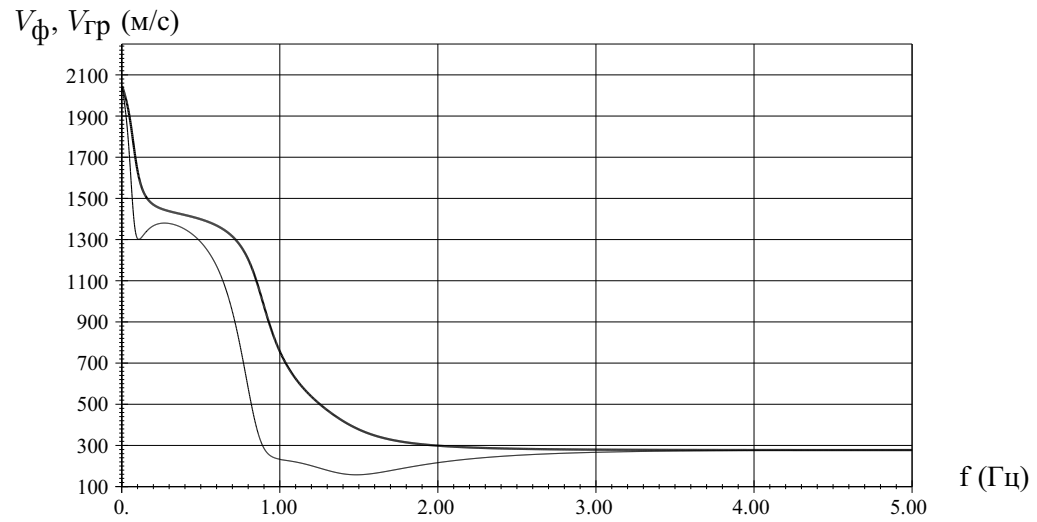


Рис. 3.6. Фазовые и групповые скорости для первой, второй и третьей мод (сверху вниз) в упругом слое, заключенном между жидким слоем и упругой средой.

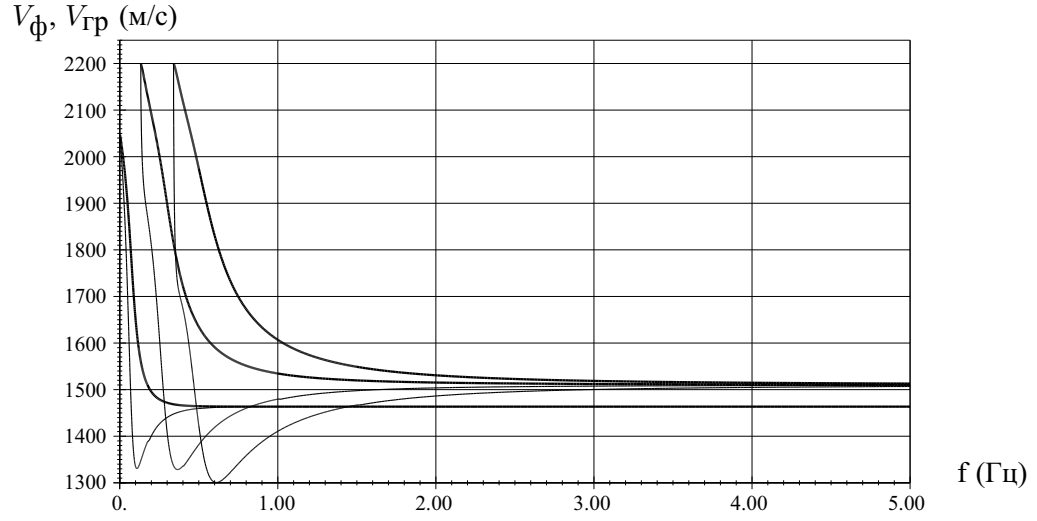


Рис. 3.7. Фазовые скорости первых трех типов колебаний в жидком слое, лежащем на упругом основании.

так же, как и дисперсионные кривые для слоя жидкости на упругом полупространстве.

Из близости дисперсионных кривых для случая с упругим слоем и без него можно получить приближенную формулу для частот зарождения кратных типов волн. Для этого возьмем дисперсионное уравнение для слоя жидкости на упругом основании (это модифицированное уравнение Стоунли [10] с учетом ограниченности жидкости)

$$\mu_3 \tau_{1f} \left[ (2k^2 - k_{3s}^2)^2 - 4k^2 \tau_{3p} \tau_{3s} \right] + \rho_{1f} \operatorname{th}(\tau_{1f} \tilde{L}) \tau_{3p} k_{3s}^2 = 0.$$

В точке зарождения кратных мод фазовая скорость равняется скорости поперечной волны в нижней упругой среде, следовательно  $k = k_{3s}$  и  $\tau_{3s} = 0$ . После преобразований получаем

$$\rho_3 \tau_{1f} + \rho_{1f} \operatorname{th}(\tau_{1f} \tilde{L}) \tau_{3p} = 0,$$

где  $\tau_{1f} = V_0 \sqrt{1/V_{3s}^2 - 1/V_{1f}^2}$ ,  $\tau_{3p} = V_0 \sqrt{1/V_{3s}^2 - 1/V_{3p}^2}$ . Поскольку  $V_{3s} > V_{1f}$ , величина под корнем в  $\tau_{1f}$  отрицательна и можно записать  $\tau_{1f} = iV_0 \sqrt{1/V_{1f}^2 - 1/V_{3s}^2}$ . Тогда с учетом того, что  $\tilde{L} = 2\pi f L / V_0$  получаем следующее выражение для начальных частот кратных мод (в этом выражении все величины подразумеваются размерными)

$$f_m = \frac{\pi m - \arctg \left[ \frac{\rho_3}{\rho_{1f}} \frac{\sqrt{\left(\frac{V_{3s}}{V_{1f}}\right)^2 - 1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_{3s}}{V_{3p}}\right)^2}} \right]}{2\pi L \sqrt{\frac{1}{V_{1f}^2} - \frac{1}{V_{3s}^2}}}, \quad \text{где } m = 1, 2, 3... \quad (3.5)$$

Применение полученной формулы позволяет упростить процедуру нахождения кратных мод в случае ограниченности жидкости.

Из результатов расчетов по модели океана конечной глубины (рис. 3.6) видно, что зависимости групповой скорости от частоты на тех участках, где раньше наблюдался резкий спад, стали более пологими и уже не могут использоваться для объяснения участков волн с постоянной частотой на сейсмограммах.

Далее рассмотрим влияние толщины слоя осадков на дисперсионные кривые. На рис. 3.8 представлены зависимости фазовых скоростей, а на рис. 3.9 фазовых и групповых скоростей от частоты для первых трех мод при изменении толщины слоя.

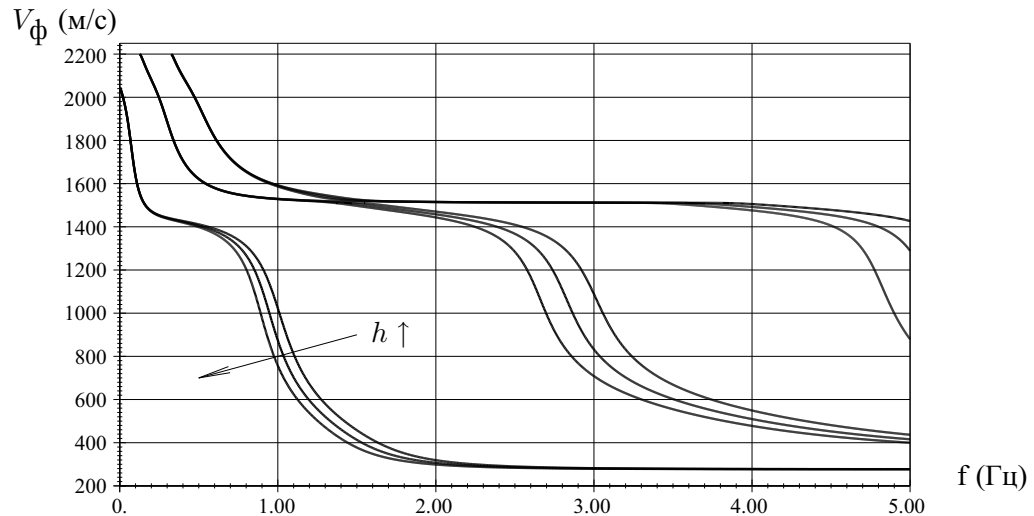


Рис. 3.8. Влияние изменения толщины слоя осадков на фазовые скорости первых трех типов колебаний. Толщина слоя осадков равна 75, 80 и 85 метрам.

Как видно из графиков, увеличение толщины слоя осадков приводит к росту крутизны дисперсионных кривых в их центральной части, где скорость поверхностных волн значительно меньше скорости волны в жидкости. Эти участки не представляют для нас особого интереса. В области же скоростей, близких к скорости волны в жидкости, крутизна зависимости фазовой скорости от частоты для второй и третьей моды остается практически неизменной. С ростом толщины слоя осадков зависимости от частоты групповой скорости второй и третьей моды сдвигаются в сторону низких частот почти не изменяя своего на-

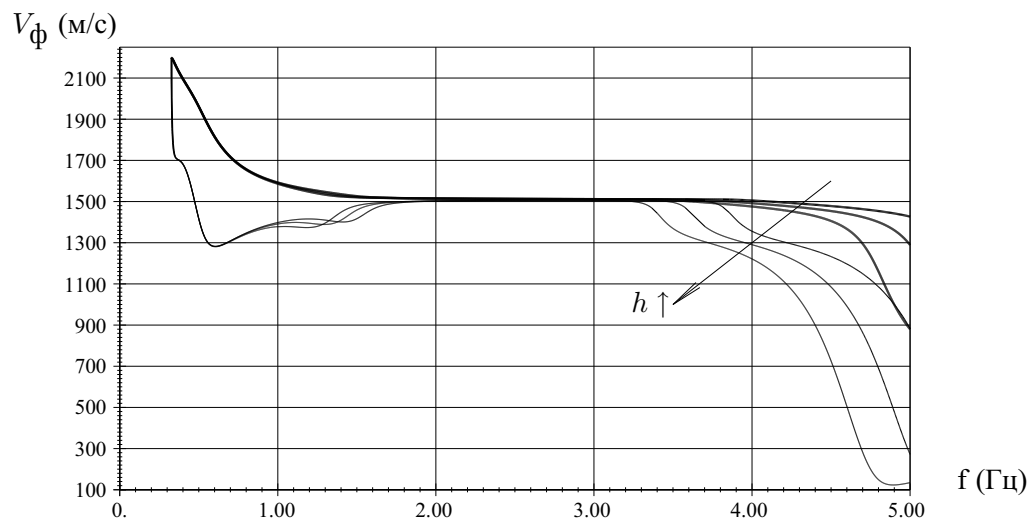
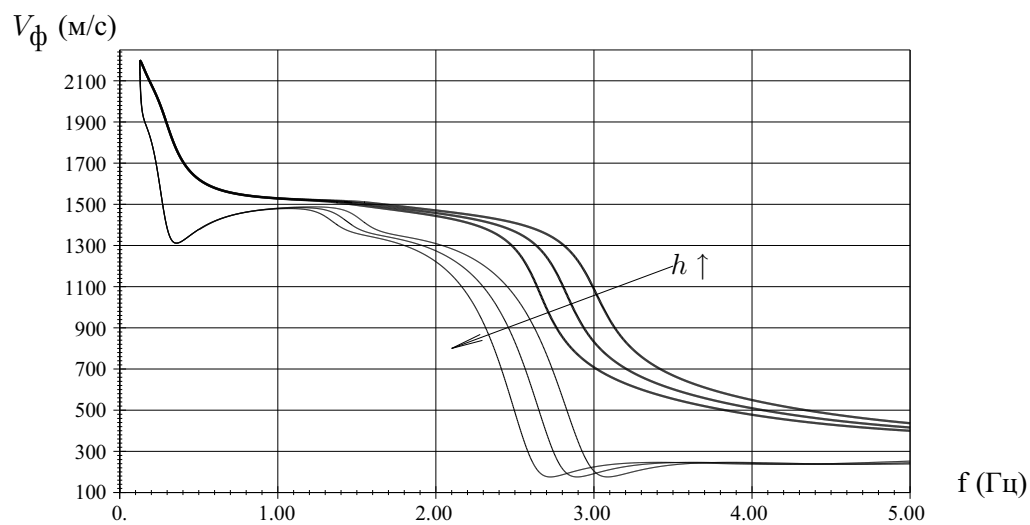
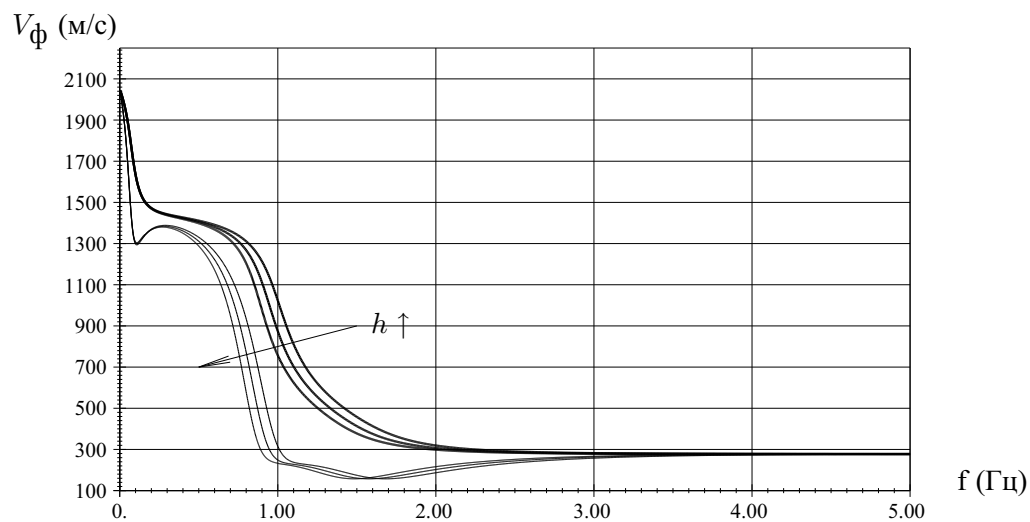


Рис. 3.9. Влияние толщины слоя осадков на фазовые и групповые скорости для основной, первой и второй волн (сверху вниз) . Толщина слоя осадков 75, 80, 85 м.

клона. Анализ поведения дисперсионных кривых при изменении других параметров слоя осадков показывает, что они не оказывают значительного влияния на поведение групповой скорости в интересующем нас диапазоне.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что результаты наблюдений необычной волны станцией Hawaii-2 не могут быть объяснены в рамках трехслойной модели океана в том случае, когда слой жидкости конечен, а слой осадков описывается упругой средой.

## 3.2 Волны в пористом слое, заключенном между жидкостью и упругой средой

### Дисперсионное соотношение

Рассмотрим теперь распространение плоских монохроматических волн в модели океана со слоем осадков, описываемым пористой средой. Введем систему координат  $XOZ$  таким образом, чтобы ось  $Z$  была направлена вертикально вверх, а ось  $X$  была параллельна границам раздела сред и проходила через середину пористого слоя, см. рис. 3.1. Величины, относящиеся к жидкости будем обозначать цифрой 1, к пористой среде – цифрой 2, к упругой среде – цифрой 3. Как и раньше, мы не будем учитывать влияния воздуха на верхней границе жидкости ( $z = h + L$ ) и будем полагать данную границу свободной.

В предыдущем разделе нами было показано, что граничные условия для системы, содержащей слой жидкости одна из границ которого свободная, могут быть сведены к граничным условиям для жидкого полупространства с видоизмененной плотностью среды. Поэтому далее мы будем рассматривать задачу для полубезграничной жидкости, в которой для случая слоя жидкости будем заменять плотность жидкости  $\rho_{1f}$  в соответствии с формулой (3.4).

На границе раздела жидкость–пористая среда потребуем непрерывности движения жидкости внутри и вне пористой среды, равенства давления в жидкости нормальной компоненте тензора напряжений пористой среды, равенства нулю тангенциальной компоненты тензора напряжений пористой среды, равенства давлений жидкости внутри и вне пористой среды. В форме потенциалов граничные условия можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{1f}}{\partial z} &= \frac{\partial(\Phi_{2s} - \Phi_{2f})}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi_{2s} - \Psi_{2f})}{\partial x} \\ \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} &= \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) \\ 0 &= 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) - \left( \rho_2 \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Psi_{2f}}{\partial t^2} \right) \\ \rho_{1f} \frac{\partial^2 \Phi_{1f}}{\partial t^2} &= \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \tilde{m}_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

На границе раздела пористой и упругой сред потребуем непрерывности нормальной и тангенциальной компонент смещения частиц скелета пористой среды и частиц упругой среды, непрерывности нормальной и тангенциальной компонент тензоров напряжений пористой и упругой сред, непротекания поровой жидкости в твердое тело

$$\begin{aligned}
u_{2z} &= u_{3z}, & u_{2x} &= u_{3x} \\
H_2 \operatorname{div} \vec{u}_2 - 2\mu_2 \epsilon_{2xx} - C_2 \operatorname{div} \vec{w}_2 &= H_3 \operatorname{div} \vec{u}_3 - 2\mu_3 \epsilon_{3xx} \\
2\mu_2 \epsilon_{2xz} &= 2\mu_3 \epsilon_{3xz} \\
w_{2z} &= 0.
\end{aligned}$$

Или в форме потенциалов

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{2s}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{2s}}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \\
\frac{\partial \Phi_{2s}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_{2s}}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \\
\rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_{2f} \frac{\partial^2 \Phi_{2f}}{\partial t^2} - 2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x \partial z} \right) &= \rho_3 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial t^2} - 2\mu_3 \left( \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial z} \right) \quad (3.7) \\
2\mu_2 \left( \frac{\partial^2 \Phi_{2s}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial x^2} \right) - \left( \rho \frac{\partial^2 \Psi_{2s}}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Psi_{2f}}{\partial t^2} \right) &= \mu_3 \left( 2 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial z^2} \right) \\
\frac{\partial \Phi_{2f}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{2f}}{\partial x} &= 0
\end{aligned}$$

Потенциалы в безразмерной форме для каждой из сред запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
\Phi_{1f} &= A_1 e^{-\tau_{1f}(z-h)} e^{i(t-kx)} \\
\Phi_{2s} &= [A_2 e^{\tau_{2+}z} + A_3 e^{-\tau_{2+}z} + A_4 e^{\tau_{2-}z} + A_5 e^{-\tau_{2-}z}] e^{i(t-kx)} \\
\Phi_{2f} &= [F_{2+} (A_2 e^{\tau_{2+}z} + A_3 e^{-\tau_{2+}z}) + F_{2-} (A_4 e^{\tau_{2-}z} + A_5 e^{-\tau_{2-}z})] e^{i(t-kx)} \\
\Psi_{2s} &= [A_6 e^{\tau_{2s}z} + A_7 e^{-\tau_{2s}z}] e^{i(t-kx)} \\
\Psi_{2f} &= F_{2s} [A_6 e^{\tau_{2s}z} + A_7 e^{-\tau_{2s}z}] e^{i(t-kx)} \\
\Phi_{3s} &= A_8 e^{\tau_{3p}(z+h)} e^{i(t-kx)} \\
\Psi_{3s} &= A_9 e^{\tau_{3s}(z+h)} e^{i(t-kx)}
\end{aligned} \quad (3.8)$$

где выражения для  $F_{2+}$ ,  $F_{2-}$  и  $F_{2s}$  определяются как

$$F_{2+} = \frac{H_2 k_{2+} - \rho_2}{C_2 k_{2+} - \rho_{2f}}, \quad F_{2-} = \frac{H_2 k_{2-} - \rho_2}{C_2 k_{2-} - \rho_{2f}} \quad \text{и} \quad F_{2s} = \frac{\rho_{2f}}{\tilde{m}_2}.$$

Величины  $\tau_i$  определяются по формулам  $\tau_{1f} = \sqrt{k^2 - k_{1f}^2}$ ,  $\tau_{2+} = \sqrt{k^2 - k_{2+}^2}$ ,  $\tau_{2-} = \sqrt{k^2 - k_{2-}^2}$ ,  $\tau_{2s} = \sqrt{k^2 - k_{2s}^2}$ ,  $\tau_{3p} = \sqrt{k^2 - k_{3p}^2}$ ,  $\tau_{3s} = \sqrt{k^2 - k_{3s}^2}$  в которых  $k_{1f}$  – постоянная распространения волны в жидкости,  $k_{2+}$ ,  $k_{2-}$  и  $k_{2s}$  – постоянные распространения быстрой,



медленной и волны сдвига в пористой среде;  $k_{3p}$  и  $k_{3s}$  – постоянные распространения продольной и сдвиговой волн в упругой среде. Ветви квадратного корня выбираются таким образом, чтобы вещественная часть  $\tau_i$  была положительной.

В результате подстановки выражений для потенциалов в граничные условия получаем систему уравнений относительно неизвестных амплитуд  $A_1$ – $A_9$ . Матрица коэффициентов перед амплитудами приведена на стр. 82.

Дисперсионное соотношение получается при приравнении нулю детерминанта полученной системы. Из-за слишком большого размера результирующего выражения оно здесь не приводится.

### Выбор параметров пористой среды

В расчетах использовались следующие параметры пористой среды, приведенные в таблице 3.3. Значения были выбраны в соответствии с данными пористых сред из работ A.Turgut, T. Yamamoto [93], R. Stoll, T. Kan [90], в которых проводились исследования осадочных пород. Коэффициент Пуассона скелета пористой среды был взят равным 0,25, как и в работе [90]. Модуль сдвига скелета пористой среды выбирался таким образом, чтобы значение скорости поперечной волны в слое осадков было близко к аналогичным значениям из работ R. Butler, C. Lomnitz [45, 46]. Во время расчетов значение модуля сдвига скелета было скорректировано с целью согласования результатов моделирования и натурных наблюдений. В табл. 3.3 значения параметров указаны уже с учетом корректировки. Для этих величин скорости волн в пористой среде равны 1752 м/с для быстрой продольной, 538,7 м/с для медленной продольной и 417 м/с для поперечной волн (скорости вычислены на частоте 1 Гц). Параметры жидкости над слоем осадков и упругого основания использовались те же, что и в расчетах со слоем осадков, моделируемом упругой средой.

параметр	$\rho_r$	$\rho_f$	$\beta$	$K_r$	$K_f$	$K_s$	$\mu$	$\alpha$	$\nu$	$\kappa$
ед. изм.	кг/м <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>		ГПа	ГПа	ГПа	ГПа		м/с <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>
значение	2650	1000	0,47	36	2,28	0,435	0,261	0,25	10 <sup>-6</sup>	5 · 10 <sup>-7</sup>

Таблица 3.3.

В том случае, когда слой осадков моделируется упругой средой, участок с фазовой скоростью близкой к скорости звука в воде у первой моды располагается ниже 1 Гц. Это означает, что результаты наблюдений R. Butler, C. Lomnitz не связаны с возбуждением первой моды на дне океана. При моделировании слоя осадков пористой средой это утверждение также справедливо, поэтому далее первая мода не будет рассматриваться. С учетом того, что возбуждение кратных типов волн в океанском дне становится все более проблематичным с ростом номера волны, все внимание будет уделено изучению свойств

$$\begin{bmatrix}
-\tau_{1f} & -\tau_{2+}\mathfrak{B}_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{\tau_{2+}\mathfrak{B}_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & -\tau_{2-}\mathfrak{B}_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{\tau_{2-}\mathfrak{B}_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & ik\mathfrak{B}_{2s}e^{\tau_{2s}h} & \frac{ik\mathfrak{B}_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & 0 & 0 \\
-\rho_{1f} \operatorname{th}(\tau_{1f}\tilde{L}) & \mathfrak{A}_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{\mathfrak{A}_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & \mathfrak{A}_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{\mathfrak{A}_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & 2i\xi_{2s}e^{\tau_{2s}h} & -\frac{2i\xi_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & 0 & 0 \\
0 & -2i\xi_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{2i\xi_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & -2i\xi_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{2i\xi_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & \mathfrak{A}_{2s}e^{\tau_{2s}h} & \frac{\mathfrak{A}_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & 0 & 0 \\
-\rho_{1f} & \mathfrak{C}_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{\mathfrak{C}_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & \mathfrak{C}_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{\mathfrak{C}_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\tau_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & \tau_{2+}e^{\tau_{2+}h} & -\frac{\tau_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & \tau_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{ik}{e^{\tau_{2s}h}} & ik e^{\tau_{2s}h} & \tau_{3p} & -ik \\
0 & \frac{ik}{e^{\tau_{2+}h}} & ik e^{\tau_{2+}h} & \frac{ik}{e^{\tau_{2-}h}} & ik e^{\tau_{2-}h} & \frac{\tau_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & -\tau_{2s}e^{\tau_{2s}h} & -ik & -\tau_{3s} \\
0 & \frac{\mathfrak{A}_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & \mathfrak{A}_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{\mathfrak{A}_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & \mathfrak{A}_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{2i\xi_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & -2i\xi_{2s}e^{\tau_{2s}h} & 2\mu_3k^2 - \rho_3 & -2i\mu_3k\tau_{3s} \\
0 & -\frac{2i\xi_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & 2i\xi_{2+}e^{\tau_{2+}h} & -\frac{2i\xi_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & 2i\xi_{2-}e^{\tau_{2-}h} & \frac{\mathfrak{A}_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & \mathfrak{A}_{2s}e^{\tau_{2s}h} & 2i\mu_3k\tau_{3p} & 2\mu_3k^2 - \rho_3 \\
0 & \frac{F_{2+}\tau_{2+}}{e^{\tau_{2+}h}} & -F_{2+}\tau_{2+}e^{\tau_{2+}h} & \frac{F_{2-}\tau_{2-}}{e^{\tau_{2-}h}} & -F_{2-}\tau_{2-}e^{\tau_{2-}h} & -\frac{ikF_{2s}}{e^{\tau_{2s}h}} & -ikF_{2s}e^{\tau_{2s}h} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

где  $\mathfrak{A}_{2\pm,2s} = (\rho_2 - \rho_{2f}F_{2\pm} - 2\mu k^2)$ ,  $\mathfrak{B}_{2\pm,2s} = (1 - F_{2\pm,2s})$ ,  $\mathfrak{C}_{2\pm} = \rho_{2f} - \tilde{m}F_{2\pm}$ ,  $\xi_{2\pm,2s} = \mu k\tau_{2\pm,2s}$ .

второй моды. Еще одним доводом в пользу исследования второй моды будет то, что на спектрограммах в статьях [45, 46] спектральная плотность амплитуды волны на частоте 1,45 Гц существенно выше, чем на частоте 3,53 Гц. А как следует из рис. 3.3 резкий перепад групповой скорости в районе 1,5 Гц следует ожидать у второй моды.

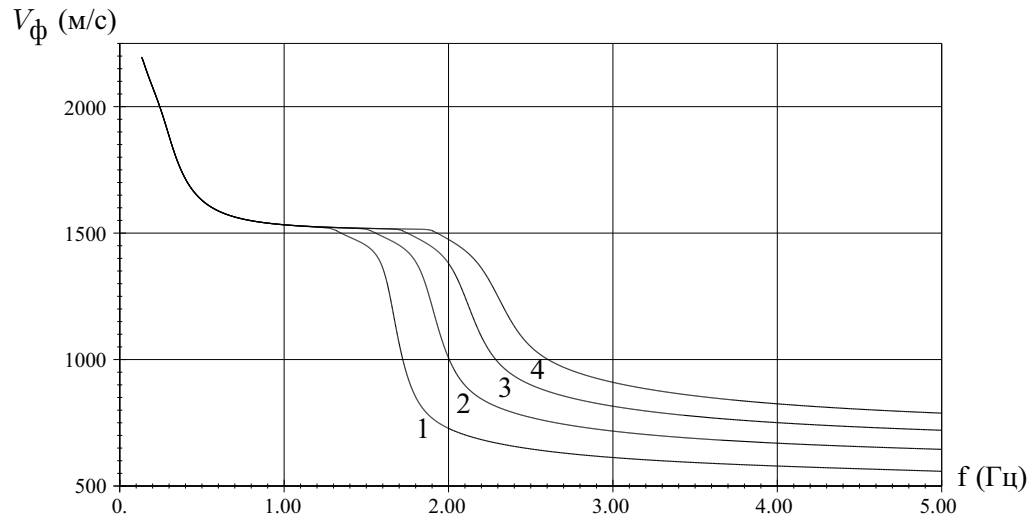


Рис. 3.10. Фазовая скорость второй моды для пористого слоя, заключенного между слоем жидкости и упругой средой при синхронном изменении объемного модуля упругости и модуля сдвига скелета.

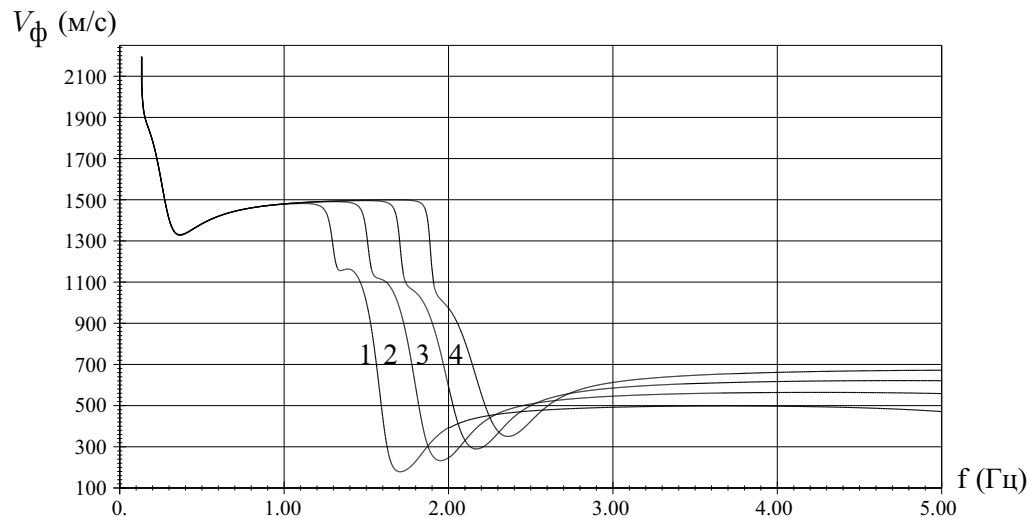


Рис. 3.11. Групповая скорость второй моды для пористого слоя, заключенного между слоем жидкости и упругой средой при синхронном изменении объемного модуля упругости и модуля сдвига скелета.

На рис. 3.10 представлены зависимости фазовой скорости от частоты для второй моды. Расчеты выполнены для четырех различных значений объемного модуля упругости и модуля сдвига скелета пористой среды. Во всех случаях коэффициент Пуассона скелета

полагался равным 0,25. Кривая под номером 1 соответствует значениям параметров пористой среды, приведенным в табл. 3.3. По сравнению с кривой под номером 1 величины объемного модуля упругости и модуля сдвига скелета для кривой под номером 2 были увеличены в 1,3 раза, для кривой под номером 3 – в 1.6 раза, для кривой под номером 4 – в 1.9 раза.

На рис. 3.11 приведены зависимости от частоты групповой скорости, соответствующие кривым на рис. 3.10. Как видно из рисунков, изменение упругих модулей скелета не влияет на начальный участок дисперсионных кривых. Эта часть почти полностью повторяет дисперсионные кривые жидкого слоя на упругом основании рис. 3.7. Для нас же наиболее интересным является диапазон частот от 1 до 2 Гц. Синхронное повышение модулей скелета приводит к удлинению участка резкого падения групповой скорости и сдвигу этого участка в область высоких частот. Интересно отметить, что на кривой с номером 1 наблюдается локальный минимум групповой скорости на частоте около 1,3 Гц, который пропадает на кривых 2–4. С. Pekeris было показано, что в случае точечного источника, амплитуды волн, соответствующих минимуму групповой скорости, изменяются с расстоянием как  $r^{-5/6}$ , в то время как для остальных волн амплитуда изменяется как  $r^{-1}$  [63]<sup>1</sup>. Это означает, что волны, соответствующие минимуму групповой скорости будут выделяться на сейсмограммах своими амплитудами.

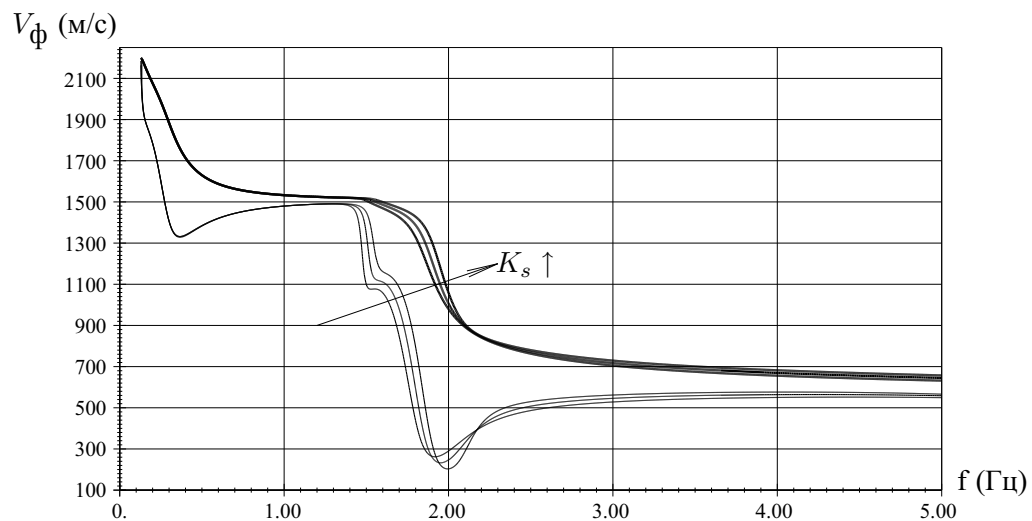


Рис. 3.12. Влияние изменения объемного модуля упругости скелета пористой среды на фазовую и групповую скорости второй моды.

На рис. 3.12 показано влияние изменения объемного модуля упругости скелета пористой среды на зависимости от частоты фазовой и групповой скоростей второй моды. Значение модулей упругости скелета  $K_s$  для расчетов было взято равным 0,51, 0,57 и 0,62 ГПа. Величина модуля сдвига скелета полагалась равной 0,34 ГПа, остальные па-

<sup>1</sup>Точки стационарного значения групповой скорости называются фазой Эйри (С. Pekeris).

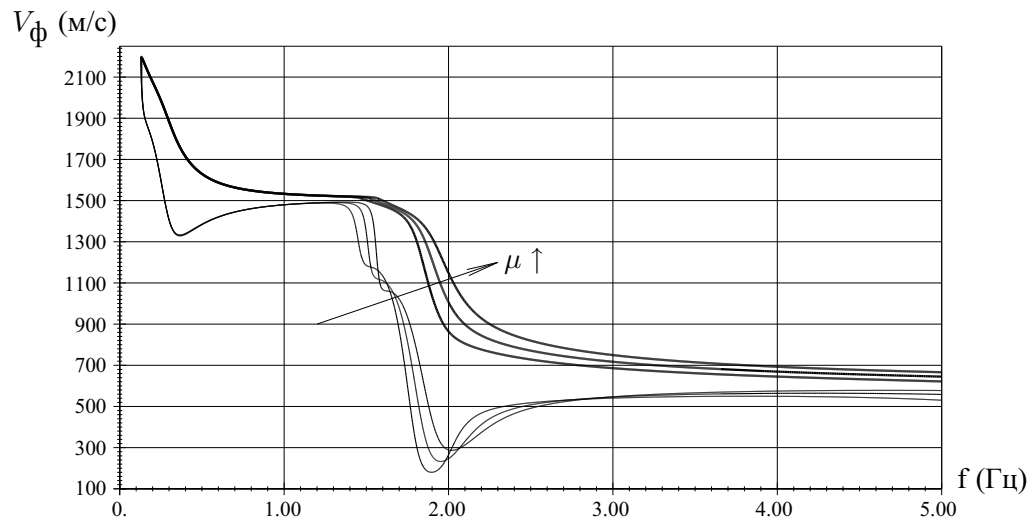


Рис. 3.13. Влияние изменения модуля сдвига скелета пористой среды на фазовую и групповую скорости второй моды.

параметры оставались такими же, как и в предыдущем расчете. Как видно из графиков, уменьшение объемного модуля упругости скелета приводит к расширению области резкого падения групповой скорости в районе 1,5 Гц. Причем для самого малого значения  $K_s$  на зависимостях от частоты групповой скорости наблюдается локальный минимум (как и на рис. 3.11). Увеличение области резкого падения групповой скорости сопровождается уменьшением частоты, на которой это падение происходит.

Рисунок 3.13 демонстрирует зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты для различных значений модуля сдвига скелета. Расчеты проводились для следующих значений модуля сдвига  $\mu$  скелета: 0,3, 0,34 и 0,37 ГПа. Объемный модуль упругости скелета  $K_s$  был взят равным 0,57 ГПа. Из рис. 3.13 видно, что увеличение модуля сдвига скелета пористой среды приводит к расширению области скачка групповой скорости и сдвигу этой части кривой в область высоких частот. Из рис. 3.11 и рис. 3.13 видно, что увеличение объемного модуля упругости пористой среды с одновременным уменьшением модуля сдвига приведет к сокращению области скачка групповой скорости при сохранении частоты, на которой этот скачок происходит. Т.е. подбором этих параметров возможно обеспечить свойства поверхностных волн близкие к наблюдаемым.

Результаты расчетов для разных значений толщины слоя осадков показывают, что влияние этого параметра на свойства поверхностных волн в случае пористой среды мало чем отличаются от случая упругой среды. Как видно из рис. 3.14, при увеличении толщины слоя осадков крутизна дисперсионных кривых возрастает и они сдвигаются в область низких частот.

Анализ зависимостей групповой скорости от частоты для второй моды показывает, что такое поведение поверхностной волны может явиться объяснением сейсмограмм, полученных станцией Hawaii-2 2 июня 2000 г. А изменение параметров слоя осадков позволяет в широких пределах изменять длительность и частоту наблюдаемой поверхностной вол-

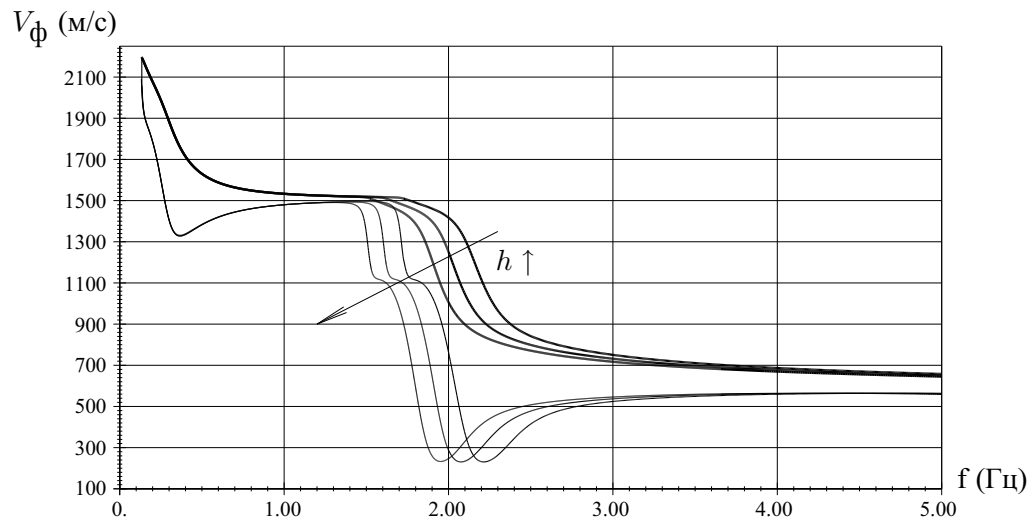


Рис. 3.14. Влияние толщины слоя осадков на фазовую и групповую скорости второй моды. Толщина слоя осадков равна 85, 80 и 75 метрам.

ны. Наличие же для некоторых значений параметров локального минимума у зависимости групповой скорости от частоты будет приводить к возрастанию амплитуд волн на концах участков сейсмограмм с постоянной частотой.

## Выводы

В результате проведенного моделирования сверхдальнего распространения поверхностных волн вдоль океанского дна с учетом слоя осадков можно сделать следующие выводы.

Выполненные с высокой арифметической точностью расчеты зависимостей от частоты фазовых и групповых скоростей поверхностных волн показывают, что в точках зарождения волн фазовая и групповая скорости совпадают. В дальнейшем с ростом частоты наблюдается резкое падение групповой скорости, которое ошибочно толковалось в работах R. Butler, C. Lomnitz как некий “разрыв” между скоростями. Анализ зависимостей от частоты фазовой и групповой скоростей первых трех нормальных волн в океане конечной глубины со слоем осадков, моделируемым упругой средой, показал, что их поведение не позволяет объяснить наблюдение почти монохроматических поверхностных волн. Моделирование слоя осадков пористой средой, напротив, демонстрирует, что в этом случае существует диапазон частот, близкий к наблюдаемым, в котором возможно распространение почти монохроматических поверхностных волн. Изменение параметров пористой среды влияет на частоту и длительность этих волн. При некоторых сочетаниях параметров на зависимостях групповой скорости от частоты за участком резкого спада следует локальный минимум. Этот минимум (фаза Эйри) приведет к возрастанию амплитуд квазимонохроматических волн ближе к концу сейсмограмм.

## Заключение

В заключение приведем основные результаты диссертации.

1. Исследованы особенности распространения поверхностных волн на свободной границе пористого флюидонасыщенного полупространства для ранее неизученного случая, когда скорость медленной продольной волны меньше скорости поперечной волны. Показано, что при этих условиях поверхностные волны могут существовать в узком диапазоне значений модуля сдвига и пористостей среды.
2. Разработан комплекс аналитических процедур для системы Maple, позволяющий получать уравнения для решения задач об отражении, преломлении и распространении плоских монохроматических волн в слоистых системах, состоящих из пористых, жидких и упругих сред.
3. Проведено моделирование лабораторного эксперимента по возбуждению медленной продольной волны в пористой среде естественного происхождения (O. Kelder, D. Smeulders, 1997 г.) Дано сравнение результатов расчетов преломления импульсного сигнала пористым слоем в жидкости для различных методов описания пористой среды. Установлено, что рассчитанные сейсмограммы близки к результатам эксперимента в случае использования моделей, учитывающих изменение с частотой коэффициента проницаемости среды и затухание, вызванное потерями в скелете пористой среды.
4. Разработан метод для приближенного решения задач о распространении волн на границах тонкого, по сравнению с длиной волны, пористого слоя. Получено аналитическое выражение для коэффициента отражения плоских монохроматических волн от тонкого пористого слоя в жидкости. Проведено сравнение результатов расчетов по полученным формулам с решением задачи, полученным численными методами.
5. Выполнено моделирование натуральных наблюдений сверхдальнего распространения сейсмоакустических волн в океане (R. Butler, C. Lomnitz, 2002 г.). Проанализированы особенности распространения свободных сейсмоакустических волн с использованием трехслойной модели океана, учитывающей слой придонных осадков. Показано, что в случае моделирования слоя осадков упругой средой не удастся описать результаты натуральных наблюдений. При использовании для слоя осадков модели пористой среды существует диапазон частот, в котором возможно распространения волн, близких по своим свойствам к наблюдаемым.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6, 7, 8, 16, 14, 41, 42]. По результатам первой главы опубликована работа [16]. Результаты второй главы докладывались на 61 конференции EAGE (Хельсинки, 1999 г.), на конференции “Современные

проблемы теории фильтрации” (Москва, 1999 г.). По содержанию второй главы опубликованы работы [6, 8]. По содержанию третьей главы опубликована работа [7]. Для решения задач о распространении, отражении и преломлении акустических волн в слоистых средах, содержащих жидкие, упругие и пористые прослойки, разработан комплекс аналитических процедур для системы Maple (защищено авторским свидетельством [14]). С использованием данного программного комплекса получены результаты второй и третьей глав.



## Литература

- [1] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом. // МТТ, 2002. № 5. С. 145–156.
- [2] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью. // МТТ, 2005. № 1. С. 109–119.
- [3] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Динамическая модель пористой среды, заполненной вязкой жидкостью. // ДАН, сер. Механика, 2005. Т. 401. № 5. С. 630–633.
- [4] Артиков Т.У. Волны в слоистых пористых средах. // Ташкент, Изд-во “Фан” УзССР, 1987. 268 с.
- [5] Беликов Б. П., Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. М.: Наука, 1970. 274 с.
- [6] Бордаков Г.А., Ильясов Х.Х., Миколаевский Э.Ю., Секерж–Зенькович С.Я. О влиянии тонкого флюидонасыщенного пористого слоя на поверхностные волны Рэлея и Стоунли. М.: Институт проблем механики РАН, 1996. Препринт № 562. 20 с.
- [7] Бордаков Г.А., Ильясов Х.Х., Миколаевский Э.Ю., Секерж–Зенькович С.Я. О влиянии квазитонкого флюидонасыщенного слоя на поверхностные волны Рэлея и Стоунли. // ЖВММФ, 1998. Т. 38. № 4. С. 651–658.
- [8] Бордаков Г.А., Ильясов Х.Х., Миколаевский Э.Ю., Секерж–Зенькович С.Я. Расчет отражения и преломления акустического импульса пористым слоем в жидкости. // ЖВММФ, 2000. Т. 40. № 2. С. 233–237.
- [9] Бордаков Г.А., Миколаевский Э.Ю., Секерж–Зенькович С.Я. Отражение нестационарных низкочастотных волн в сжимаемой жидкости от пористой среды при нормальном падении. // Вулканология и сейсмология, 2000. Т. 22. № 1. С. 72–76.
- [10] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
- [11] Бреховских Л.М. Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

- [12] Викторов И.А., О вытекающих поверхностных волнах в изотропном твердом теле. // ДАН, 1976. Т. 228. № 3. С. 579–581.
- [13] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
- [14] Елизаров А.А., Ильясов Х.Х. Свидетельство РФ о официальной регистрации программы для ЭВМ № 2004612048 моделирования распространения акустических волн в слоистых пористых средах (PoroDisp). Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 2.09.2004.
- [15] Золотарев П.П. Распространение звуковых волн в насыщенной газом пористой среде с жестким скелетом. // Инженерный журнал, 1964. Т. IV. С. 111–120.
- [16] Ильясов Х.Х. Распространение поверхностных волн на свободной границе пористой флюидонасыщенной среды. // ЖВММФ, 2004. Т. 44. № 12, С. 2268–2275.
- [17] Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах. // ПММ, 1959. Т. XXIII. № 6. С. 1115–1123.
- [18] Косачевский Л.Я. Об отражении звуковых волн от слоистых двухкомпонентных сред. // ПММ, 1961. Т. XXV. № 6. С. 1076–1082.
- [19] Крауклис П.В., Крауклис Л.А. О затухании медленной интерференционной волны в трещиноватом слое. // Зап. научн. семинаров ПОМИ, 1998. Т. 250. С. 153–160.
- [20] Крауклис П.В. Крауклис Л.А. Интерференционная медленная волна в пороакустическом слое Био. // Зап. научн. семинаров ПОМИ, 1999. Т. 257. С. 137–148.
- [21] Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 464 с.
- [22] Ляховицкий Ф.М., Юдасин Л.А. Влияние порозаполнителя и пластовых условий на скорости и поглощение упругих волн в песчаниках. // Изв АН СССР. Физика Земли, 1981. № 4. С. 43–57.
- [23] Молотков Л.А. О распространении нормальных волн в изолированном пористом флюидонасыщенном слое Био. // Зап. научных семинаров ПОМИ, 1999. Т. 257. С. 165–183.
- [24] Николаевский В.Н. О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах. // Инж. Журн. 1963. Т. III, вып. 2. С. 251–261.
- [25] Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.

- [26] Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. // ПММ, 1956. Т. XX. С. 184–195.
- [27] Филиппс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 267 с.
- [28] Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1944. Т. VIII, № 4. С. 133–149.
- [29] Цвиккер К., Костен К. Звукопоглощающие материалы. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 160 с.
- [30] Achenbach J.D., Adler L., Jungman A., Roberts R. Reflection from a boundary with periodic roughness: theory and experiment. // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74. P. 1025–1032.
- [31] Allard J.F., Jansens G., Lauriks W., Vermeir G. Frame-borne surface waves in air-saturated porous media. // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 111. № 2. P. 690–696.
- [32] Albert D.G. A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials. // J. Appl. Phys. 1993. V. 73. P. 28–36.
- [33] Arntsen B., Carcione J.M. Numerical simulation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone. // Geophysics, 2001. V. 66. № 3. P. 890–896.
- [34] Bakulin A.V., Molotkov L.A. Application of complex Biot densities for the description of attenuation and dispersion in porous rocks // EAGE 60th Conference and technical exhibition –Leipzig, Germany, 8–12 June, 1998. P 085.
- [35] Best A., McCann C. Seismic attenuation and pore-fluid viscosity in clay-rich reservoir sandstones. // Geophysics, 1995. V. 60. № 5. P. 1386–1397.
- [36] Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. // J. Appl. Phys. 1955. V. 26. № 2. P. 182–185.
- [37] Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range. II. Higher frequency range. // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. № 2. P. 168–191.
- [38] Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients if the theory of consolidation. // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 594–601.
- [39] Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation on porous dissipative media. // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34. P. 1254–1264.

- [40] Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. // J. App. Phys. 1962. V. 33. № 4. P. 1482–1498.
- [41] Bordakov G.A., Ilyasov H.H., Mikolaevsky E.Yu., Sekerzh–Zen’kovich S.Ya. Wave refraction with a porous plate in liquid -comparison of Biot’s and BISQ theories. // 61-st EAGE conference, Helsinki 7–11 June. 1999. № 2-03.
- [42] Bordakov G.A., Ilyasov H.H., Sekerzh–Zen’kovich S.Ya. Acoustic pulse transmission through porous layer immersed in a fluid. Testing porous media models. // Modern approaches to flows in porous media, international conference dedicated to P.Ya. Polubarinova-Kochina, abstracts, Moscow, september 6-8, 1999. P. 104–106.
- [43] Bouzidi Y., Schmitt D.R. Definitive detection of the slow compressional wave in saturated syntetic rock. // CSEG Geophysics. 2002.
- [44] Boyle F.A., Chotiros N.P. Experimental detection of a slow acoustic wave in sediement at shallow grazing angles. // J. Acoust. Soc. Am. 1992. V. 91. P. 2615–2619.
- [45] Butler R., Lomnitz C., Novaro O. Coupled modes at interfaces: A review. // Geofisica International, 2002. V. 41. № 2. P. 77–86.
- [46] Butler R., Lomnitz C. Coupled seismoacoustic modes on seafloor. // Geophysical Research Letters, 2002. V. 29. № 10. 10.1029/2002GL014722, 2002.
- [47] Chandler R.N., Johnson D.L. The equivalence of quasistatic flow in fluid-saturated porous media and Biot’s slow wave in the limit of zero frequency. // J.Appl.Phys. 1981. V. 52. № 5. P. 3391–3395.
- [48] Chotiros N.P. Biot model of sound propagation in water saturated sand. // J. Acoust. Soc.Am. 1995. V. 97. P. 199–214
- [49] Denneman A.I.M., Drijkoningen G.G., Smeulders D.M.J., Wapenaar K. Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface. // Geophysics, 2002. V. 67. № 1. P. 282–291.
- [50] Deresiewicz H. The effect on boundaries on wave propogation in a liquid–filled porous solid: I. Reflection of plane waves at a free plane boundary (non–dissipative case). // Bul Seismol. Soc. Am. 1960. V. 50. № 4. P. 599–607.
- [51] Deresiewicz H., Rice J.T. The effect on boundaries on wave propogation in a liquid–filled porous solid: III. Reflection of plane waves at a free plane boundary (general case). // Bul Seismol. Soc. Am. 1962. V. 52. № 2. P. 595–625.

- [52] Deresiewicz H. The effect on boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: IV. Surface waves in a half-space. // Bull. Seismol. Soc. Am. 1962. V. 52. № 3. P. 627–638.
- [53] Deresiewicz H., Rice J.T. The effect on boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: V. Transmission across plane interface. // Bull. Seismol. Soc. Am. 1964. V. 54. № 1. P. 409–416.
- [54] Deresiewicz H. The effect on boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: VII. Surface waves in a half-space in the presence of a liquid layer. // Bull. Seismol. Soc. Am. 1964. V. 54. № 1. P. 425–430.
- [55] Deresiewicz H., Levy A. The effect of boundaries on wave propagation in a liquid-filled porous solid: X. Transmission through a stratified medium. // Bull. Seismol. Soc. Am. 1967. V. 57. № 3. P. 381–391.
- [56] Diallo M.S., Appel E. Acoustic wave propagation in saturated porous media: reformulation of the Biot/Squirt flow theory. // J. Appl. Geophys. 2000. V. 44. P. 313–325.
- [57] Domenico S.N. Elastic properties of unconsolidated porous sand reservoirs. // Geophysics, 1977. V. 42. № 7. P. 1339–1368.
- [58] Dutta N.C., Ode H. Seismic reflections from a gas–water contact. // Geophysics, 1983. V. 48. № 2. P. 148–162.
- [59] Dvorkin J., Nur A. Dynamic poroelasticity: A unified model with the squirt and the Biot mechanisms. // Geophysics, 1993. V. 58. № 4. P. 524–533.
- [60] Dvorkin J., Nolen–Hoeksema R., Nur A. The squirt–flow mechanism: Macroscopic description. // Geophysics, 1994. V. 59. P. 428–438.
- [61] Dvorkin J., Mavko G., Nur A. Squirt flow in fully saturated rocks. // Geophysics, 1995. V. 60. № 1. P. 97–107.
- [62] Edelman I., Wilmanski K. Asymptotic analysis of surface waves at a vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces. // Continuum Mech. Thermodyn. 2002. P. 25–44.
- [63] Ewing W.M., Jardetsky W.S., Press F. Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill. 1957. 380 p.
- [64] Feng S., Johnson D.L. High–frequency acoustic properties of a fluid/porous solid interface. I. New surface mode. II. The 2D reflection Green’s function. // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 74. № 3, P. 906–924.

- [65] Geertsma J., Smit D.C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids. // *Geophysics*, 1961. V. 26. № 2. P. 169–181.
- [66] Goloshubin G.M., Bakulin A.V. Seismic reflectivity of a thin porous fluid-saturated layer versus frequency. // *SEG 1998 Expanded abstracts*.
- [67] Gurevich B., Zyrianov V.B., Lopatnikov S.L. Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effect of fluid flow and scattering. // *Geophysics*. 1997. V. 62. № 1. P. 319–324.
- [68] Gurevich B., Kelder O., Smeulders D.M.J. Validation of the slow compressional wave in porous media: comparison of experiments and numerical simulations. // *Transport in porous media*, 1999. V. 36. P. 149–160.
- [69] Gurevich B. Effect of fluid viscosity on elastic wave attenuation in porous rocks. // *Geophysics*, 2002. V. 67. № 1. P. 264–270.
- [70] Hickey C.J., Sabatier J.M. Choosing Biot parameters for modeling water-saturated sand. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. V. 102. № 3. P. 1480–1484.
- [71] Johnson D.L., Plona T.J. Acoustic slow waves and the consolidation transition. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1982. V. 72. № 2. P. 556–565.
- [72] Johnson D.L., Plona T.J., Scala C. Tortuosity and acoustic slow waves. // *Phys. Rev. Lett.* 1982. V. 49. № 25. P. 1840–1844.
- [73] Johnson D.L., Koplik J., Dashen R. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 176. P. 379–402.
- [74] Johnson D.L., Hemmick D.L., Kojima H. Probing porous media with first and second sound. I. Dynamic permeability. II. Acoustic properties of water-saturated porous media. // *J. Appl. Phys.* 1994. V. 76. P. 104–125.
- [75] Jones S.M., McCann C., Astin T.R., Sothcott J. The effect of pore-fluid salinity on ultrasonic wave propagation in sandstones. // *Geophysics*, 1998. V. 63. № 3. P. 928–934.
- [76] Kelder O., Smeulders D.M.J. Measurement of ultrasonic bulk properties of water-saturated porous media. // *EAGE Amsterdam'96 Extended abstracts book*, 1996. Paper C 025.
- [77] Kelder O., Smeulders D.M.J. Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandstone. // *Geophysics*, 1997. V. 62. № 6. P. 1794–1796.
- [78] Kunyu Wu, Qiang Xue, Adler L., Reflection and transmission of elastic waves from a fluid-saturated porous solid boundary. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 87. № 6. P. 2349–2358.

- [79] Lauriks W., Kelders L., Allard J.F. Surface waves and leaky waves above porous layer. // *Wave motion*. 1998. V. 28. P. 59–67.
- [80] Lomnitz C., Flores J., Novaro O., Seligman T.H., Esquivel R. Seismic coupling of interface modes in sedimentary basins: a recipe for disaster. // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1999. V. 89. № 1. P. 14–21.
- [81] Mayers M.J., Nagy P.B., Adler L. et al. Excitation of surface waves of different modes at fluid–porous solid interface. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1986. V. 79. № 2. P. 249–252.
- [82] Nagy P.B., Adler L., Bonner B. P. Slow wave propagation in air-filled porous materials and natural rocks. // *Appl. Phys. Lett.* 1990. V. 56. № 25. P. 2504–2506.
- [83] Norris A. The tube wave as a Biot slow wave. // *Geophysics*, 1987. V. 52. № 5. P. 694–696.
- [84] Plona T.J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. // *Appl. Phys. Lett.* 1980. V. 36. P. 259–261.
- [85] Pride S.R., Tromeur E., Berryman J.G. Biot slow-wave effects in stratified rock. // *Geophysics*. 2002. V. 67. № 1, P. 271–281.
- [86] Schroder C.T., Scott W.R. On the complex conjugate roots of the Rayleigh equation: The leaky surface wave. // *J. Acoust. Soc. Am.* 2001. V. 110. № 6, P. 2867–2877.
- [87] Sharma M.D. Dispersion in oceanic crust during earthquake preparation. // *Solid and structures*, 1999. V. 36. P. 3469–3482.
- [88] Shatilo A.P., Sondergeld C., Rai C.S. Ultrasonic attenuation in Glenn Pool rocks, northeastern Oklahoma. // *Geophysics*, 1998. V. 63. № 2. P. 465–478.
- [89] Stern M., Bedford A., Millwater H.R. Wave reflection from a sediment layer with depth-dependent properties. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. № 5. P. 1781–1788.
- [90] Stoll R.D., Kan T.-K. Reflection of acoustic waves at water–sediment interface. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. V. 70. № 1. P. 149–156.
- [91] Stoll R.D. Marine sediment acoustic. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. № 5. P. 1789–1799.
- [92] Stoll R.D. Velocity dispersion in water-saturated granular sediment. // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 111. № 2. P. 149–156.
- [93] Turgut A., Yamamoto T. Measurements of acoustic wave velocities and attenuation in marine sediments. // *J. Acoust. Soc. Am.* 1990. V. 87. № 6. P. 2376–2383.
- [94] Zhanfang Liu, Boer R. Dispersion and attenuation of surface waves in a fluid-saturated porous medium. // *Transport in porous media*, 1997. V. 29. P. 207–223.

## Приложение

### Свойства пористых сред по данным различных источников

В таблице 3.5 приведены параметры пористых сред, использованных в работах различных авторов (часть данных взята непосредственно из работ, часть вычислена).

вел-на	ед.изм.	1*	2	3*	4	5	6*
$\rho_r$	кг/м <sup>3</sup>		2650	2655	2650	2480	2480 2760
$\rho_f$	кг/м <sup>3</sup>	1,3	1000	1012	1000	1000	1000
$K_r$	ГПа		36	38,2	36	49,9	49,9
							36,6
$\mu$	ГПа		$10^{-2}$ –1	4,51	0,0261		3,26 7,63
$K_f$	ГПа	$8,48 \cdot 10^{-5}$	2,3	2,25	2	2,25	2,25 2,22
$\nu$	м <sup>2</sup> /с	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$			
$\kappa$	м <sup>2</sup>	$6 \cdot 10^{-12}$ $0,6 \cdot 10^{-12}$ $0,4 \cdot 10^{-12}$	$0,5 \cdot 10^{-13}$ – $10^{-12}$	$5 \cdot 10^{-12}$	$10^{-6}$ – $5 \cdot 10^{-9}$		$2,7 \cdot 10^{-11}$ $1,68 \cdot 10^{-11}$
$\alpha$		1,3 2,0 3,0	0,25	1,088		0,79	0,58 0,89
$\beta$	%	30 22 20	30–45	33	47	38	36,6 40,2
$\delta$		—	0.02	—			
$\Lambda$	м	—	—	—	—	—	$19,4 \cdot 10^{-6}$
$V_+$	м/с			2810			
$V_-$	м/с	215 190 164		870			
$V_{sh}$	м/с			1515			
размер частиц	м	$1,2 \cdot 10^{-4}$ $0,4 \cdot 10^{-3}$ $0,2 \cdot 10^{-3}$		$0,2 \cdot 10^{-3}$			
толщина образца	мм	1,73 2 1		21			
ест. иск.		иск./ест.	—	ест.	—	—	иск.

Таблица 3.5.



Цифры в верхнем ряду таблицы соответствуют следующим публикациям: 1 – P. Nagy, L. Adler, B. Bonner, 1990 [82], 2 – A. Turgut, T. Yamamoto, 1990 [93], 3 – O. Kelder, D. Smeulders, 1997 [77], 4 – R. Stoll, T. Kan, 1981 [90], 5 – S. Feng, D. Johnson, 1983 [64], 6 – D. Johnson, T. Plona, 1982 [71], звездочками отмечены экспериментальные работы. Для экспериментальных работ в нижнем ряду указано происхождение образцов пористой среды – естественное или искусственное.