

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем механики

На правах рукописи

КАЗАКОВ КИРИЛЛ ЕВГЕНЬЕВИЧ

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
И ИЗНОСА УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ
ТЕЛ СО СЛОЖНЫМИ СВОЙСТВАМИ
И ФОРМОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
А.В. Манжиров

Москва – 2007

Оглавление

Введение	4
0.1 Обзор литературы	5
0.2 Описание работы	7
0.3 Определяющие соотношения теории вязкоупругости стареющих тел	11
1. Общие уравнения	11
2. Одноосное растяжение	13
3. Случай единого ядра ползучести	14
4. Вязкоупругие характеристики стареющего материала и их возможные аппроксимации	15
0.4 Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений	17
1. Обобщенная проекционная задача для операторного уравнения	17
2. Смешанные интегральные уравнения на ограниченном замкнутом множестве	19
 Глава 1 Конформный контакт штампа и вязкоупругого ос-	
нования	25
1.1 Плоская задача	26
1. Постановка задачи	26
2. Метод решения	29
3. Задача о нахождении эксцентриситета приложения нагрузки по заданному углу поворота	34
4. Случай задания осадки штампа	36
5. Решение уравнения с известной правой частью	37
6. Численные расчеты	39
1.2 Осесимметричная задача	51
1. Постановка задачи	51
2. Метод решения	54
3. Случай задания осадки штампа	57
4. Численные расчеты	58
1.3 Основные результаты и выводы	62

Глава 2	Контактные задачи для тел с поверхностно неоднородными покрытиями	63
2.1	Плоская задача	64
1.	Постановка задачи	64
2.	Решение плоской задачи	66
3.	Случай задания угла поворота штампа	68
4.	Случай задания осадки штампа	69
5.	Решение уравнения с известной правой частью	70
6.	Численные расчеты	71
2.2	Осесимметричная задача	81
1.	Постановка задачи	81
2.	Решение осесимметричной задачи	83
3.	Решение уравнения с известной правой частью	84
2.3	Основные результаты и выводы	86
Глава 3	Износ упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями	87
3.1	Плоская задача	88
1.	Постановка задачи	88
2.	Решение плоской задачи	91
3.	Задача о нахождении эксцентриситета приложения нагрузки по заданному углу поворота	94
4.	Случай задания осадки штампа	95
5.	Решение уравнения с известной правой частью	97
6.	Численные расчеты	98
3.2	Осесимметричная задача	107
1.	Постановка задачи	107
2.	Решение осесимметричной задачи	108
3.	Решение уравнения с известной правой частью	110
3.3	Основные результаты и выводы	112
Заключение		113
Приложение	Об эффективности применения обобщенного проекционного метода	114
Список литературы		120

Введение

Диссертационная работа посвящена решению новых плоских и осесимметричных задач механики контактного взаимодействия и износа тел с покрытиями. В ней исследуются закономерности эволюции контактных характеристик вязкоупругих стареющих оснований с неоднородными покрытиями и покрытиями, имеющими реальную форму поверхности, а также износ упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Изучаются эффекты, связанные с наличием неоднородности и учетом реальной формой поверхности покрытий, а также с наличием процесса износа.

Рассмотренные в диссертации задачи механики контактного взаимодействия и износа тел с покрытиями являются актуальными как с точки зрения фундаментальных вопросов теории, так и с точки зрения различных приложений. В теоретическом плане эти задачи интересны тем, что впервые учитывают наличие таких факторов как конформность контактирующих поверхностей, сложная форма поверхности тел, поверхностная неоднородность покрытий и тем, что для их решения необходимо развивать новые математические методы (поскольку известные методы удовлетворительных результатов не дают). С точки зрения приложений интерес к этим задачам вызван как раз тем, что новые их особенности продиктованы потребностями в описании свойств неоднородности и сложной формы поверхности покрытий, которые они приобретают вследствие технологических процессов нанесения и шлифовки. Без учета подобного рода свойств воссоздать реальные картины процессов контактного взаимодействия тел с покрытиями невозможно.

0.1 Обзор литературы

Началом исследований контактных задач считается 1981 год, когда первое решение контактной задачи взаимодействия упругих тел дал Г. Герц [103] (хотя основная работа [104], которая, по всей видимости более доступна, вышла в 1895). Основополагающими работами по контактным задачам считаются также работы Я. Буссинеска [101], С.А. Чаплыгина и пр. Из-за отсутствия необходимой математической базы развитие контактных задач в последующие 40–50 лет заключалось, в основном, в экспериментальной проверке теории и развитии ее применений в инженерном деле (следует отметить работы А.Н. Динника, Н.М. Беляева и др.).

В 20-х, а тем более в 30-х и 40-х годах академиком Н.И. Мусхелишвили и его учениками была развиты эффективные математические методы функции комплексного переменного для решения задач теории упругости и, в частности, для решения контактных задач (см. [74, 75]). Следует также отметить математический аппарат, созданный академиком А.М. Ляпуновым [106], используемый для решения ряда контактных задач, в частности, в работах И.Я. Штаермана (см. [98] и более ранние статьи). Следует также отметить основополагающие работы В.М. Абрамова, Л.А. Галина, А.Ю. Ишлинского, Н.А. Кильчевского, М.Я. Леонова, А.И. Лурье, В.И. Моссаковского, Г.Н. Савина, Д.И. Шермана и пр.

Итак, с середины XX века развитие механики контактных взаимодействий шло стремительными темпами и не могло не вызвать появления обзорной монографии. Таким трудом в 1976 году стала коллективная обзорная книга «Развитие контактных задач в СССР» под редакцией Л.А. Галина [91]. Она включает в себя работы множества соавторов, каждый из которых уже к тому времени был широко известен, а многие из них являлись основателями научных школ. В этой монографии собраны сведения и решения более чем из 1000 источников. В ней указаны такие направления развития теории контактных взаимодействий как статические и динамические, плоские и пространственные, температурные контактные задачи, рассматриваются как упругие материалы, так и вязкоупругие. Отметим, что до появления указанной книги вышли сборники [57, 58, 69, 70], монографии таких авторов, как Н.Х. Арутюнян [12], И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко [22], Л.А. Галин [24], Ф.Д. Гахов [27], В.И. Довнорович [37], Д.Д. Ивлев [38], А.И. Лурье [61, 62], В.С. Никишин, Г.С. Шапиро [76], В.В. Панасюк,

М.И. Теплый [77], Я.С. Уфлянд [97], ряд обзорных статей по соответствующей тематике.

В дальнейшем, механика контактных взаимодействий развивается высокими темпами, выходит ряд монографий, следующих авторов: В.М. Александров, Н.Х. Арутюнян, В.А. Бабешко, И.И. Ворович, Л.А. Галин, А.Г. Горшков, И.Г. Горячева, В.Т. Гринченко, М.Н. Добычин, К. Джонсон, Н.А. Кильчевский, Е.В. Коваленко, А.В. Манжиров, Е.М. Морозов, В.И. Моссаковский, С.М. Мхитарян, В.Э. Наумов, В.З. Партон, П.И. Перлин, А.Н. Подгорный, Д.А. Пожарский, Г.Я. Попов, В.Б. Поручиков, В.С. Проценко, В.Л. Рвачев, Б.Л. Ромалис, В.С. Саркисян, В.М. Сеймов, Б.Н. Сметанин, Б.В. Соболев, Д.В. Тарлаковский, М.И. Теплый, А.Ф. Улитко и многие другие [2–6, 16–19, 23, 26, 29, 30, 33, 34, 36, 53, 72, 73, 78, 81–84, 90, 92, 94, 95, 99, 102].

В 2001 году выходит книга «Механика контактных взаимодействий» [71], призванная подытожить полученные за прошедшие после выхода «Механики контактных задач в СССР» годы многочисленные публикации, так как с тех пор эта область получила дальнейшее развитие, а область ее практического приложения значительно расширилась, особенно в новейших областях современной техники. В ней сосредоточено большое число обзорных работ, приведено множество современных методов решения контактных задач. Рассматриваются широкие спектр контактных задач. В частности, в рамках настоящей диссертации, нельзя не отметить 3 параграфа данной книги, которые наиболее тесно связаны с темой диссертации. В статье А.В. Манжирова [63] дается обзор контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих тел, приводится проекционный метод решения, развитие которого последует в [65, 108]. Статья Е.В. Коваленко [54] посвящена подробнейшему обзору контактных задач для тел с покрытиями, в ней обсуждаются проблемы: 1) моделирования физико-механических свойств покрытий, 2) контакта жестких или упругих тел с линейно-деформируемыми основаниями, армированными тонкими покрытиями, 3) износа и долговечности покрытий. Однако задачи износа более широко рассмотрены в статье И.Г. Горячевой, И.А. Солдатенкова [31]. В ней обсуждаются различные виды закона изнашивания, разнообразные постановки износо-контактных задач, приводится история развития задач об износе. Не повторяя текст этих обзоров, приведем лишь авторов основных монографий, которые вышли до 2001 года и связаны с износо-контактными задачами: Л.А. Галин, И.Г. Горячева, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов, И.В. Крагельский, А.С. Проников [26, 30, 60, 88, 89].

Из приведенного обзора видно, что начиная с середины XX века контактные задачи получили огромную популярность, которая сохраняется и развивается и по сей день. В 2001 году выходит монография И.Г. Горячевой [32], посвященная изучению напряженного состояния и характера разрушения поверхностей при фрикционном взаимодействии. В 2004 году В.М. Александров и М.И. Чебаков [7] выпускают книгу, посвященную обобщению исследований авторов в области статических и динамических задач контактного взаимодействия тел сложной конфигурации, неоднородных тел и задач с усложненными условиями в зоне контакта. В 2005 году те же теми же авторами пишется книга [8]. В 2006 появляются монографии С.М. Айзиковича, В.М. Александрова, А.В. Белокося, Л.И. Кренева, И.С. Трубчика [1] и В.В. Калинин, Т.И. Белянковой [40]. В 2007 переиздаются [8] и [72].

Целью диссертационной работы является постановка контактных задач для упругих и вязкоупругих тел с конформными и поверхностно неоднородными покрытиями, форма и неоднородность которых описываются быстро осциллирующими функциями; развитие проекционного метода для решения смешанных интегральных уравнений плоских и осесимметричных задач; исследование процесса износа упругого основания с поверхностно неоднородным покрытием; решение модельных задач и всестороннее исследование процессов контактного взаимодействия и их особенностей; формулировка выводов и рекомендаций практического характера.

В следующем разделе дается более детальное содержание работы.

0.2 Описание работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка литературы. Последний включает 112 наименований. Основные результаты диссертации отражены в публикациях [42–52, 66, 67, 105, 107]. Общее количество иллюстраций в работе — 42.

В **главе 1** исследуется контактное взаимодействие жесткого штампа и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампа и покрытия являются конформными (взаимоповторяющимися). Подобная задача может возникнуть, например, когда штамп погружается в затвердевающее покрытие до его полного отверждения,

в результате чего поверхность покрытия принимает форму основания штампа. Примерами таких покрытий может служить слой клея, бетона в его молодом возрасте, многих полимерных материалов. Рассмотрены плоские и осесимметричные контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований в случае их конформного контакта с жесткими штампами. Даны их постановки. Получены разрешающие смешанные интегральные уравнения. При решении этих уравнений использован обобщенный проекционный метод, который реализован для конкретных типов уравнений плоских и осесимметричных задач. Решен ряд модельных задач, включая задачи, в которых форма штампа описывается быстро осциллирующими функциями. Изучено влияние формы основания штампа на напряженно-деформированное состояние области контакта и на кинематические характеристики штампа.

Глава 2 посвящена задачам контактного взаимодействия жесткого штампа и вязкоупругих оснований с тонкими упругими поверхностно неоднородными покрытиями, то есть покрытиями, свойства которых меняются от точки к точке его поверхности, но постоянны по глубине. Поверхностная неоднородность покрытия возникает обычно вследствие особенностей нанесения этого покрытия на основной слой, а также при поверхностной обработке уже нанесенных покрытий (лазерная обработка, ионная имплантация и т. д.). Поверхностная неоднородность может быть вызвана также использованием различных материалов при изготовлении покрытий. Рассматриваются плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Изучается влияние вида неоднородности покрытия на контактные напряжения под штампом, а также на его осадку и угол поворота.

В **главе 3** рассматриваются плоские и осесимметричные контактные задачи износа упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Считается, что между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием осуществляется идеальный контакт. Предполагается, что скорость изнашивания слоя прямо пропорциональна касательным усилиям и осредненному значению модуля скорости скольжения и обратно пропорциональна твердости покрытия, а касательные усилия и контактные давления связаны законом Кулона. Рассматриваются кусочно однородные покрытия, отношения твердостей и жесткостей которых совпадают, а также покрытия, технологический процесс нанесения или упрочнения которых делает их твердости и жесткости зависящими

от координат точек поверхности, но не влияет на их отношение.

Представленные в диссертации исследования опираются, в первую очередь, на классические подходы механики контактных взаимодействий и трибологии, идеи теории контактных задач для тел с покрытиями, на теории классических и смешанных интегральных уравнений, на проекционный метод решения последних. При этом используются результаты и методы уравнений математической физики, интегральных уравнений, функционального и математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением строгих математических методов при построении решений поставленных задач и их анализе. Она основывается также на практических оценках погрешностей выполняемых приближенных вычислений, сопоставлении получаемых в частных случаях результатов с заранее прогнозируемыми или известными.

Все рассмотренные в диссертации задачи исследованы впервые. Их решения построены в аналитическом виде на основании проекционного метода теории смешанных интегральных уравнений. При этом быстро осциллирующие функции формы поверхности или неоднородности покрытий выделены в решении в явном виде.

На основании проведенных расчетов обнаружены и исследованы механические эффекты, возникающие при учете неоднородности покрытия и сложной формы его поверхности. Изучена задача износа упругого основания с поверхностно неоднородным покрытием. Получены ее аналитическое решение и простые асимптотические формулы поведения основных характеристик при больших значениях времени, удобные для использования в инженерной практике.

Все исследования выполнены в рамках плановой тематики Института проблем механики Российской академии наук «Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруговязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей» (Гос. рег. № 0120.0503826) и проектов, финансируемых грантом Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1, Отделением энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (программа № 13 ОЭ) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00002, № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

В следующих двух вводных параграфах дается описание определяющих соотношений вязкоупругого стареющего материала, принимаемых далее во всех рассматриваемых задачах, а также излагается применяемый в работе обобщенный проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений. Это делается с целью избавления читателя от необходимости обращаться к соответствующей оригинальной литературе по мере чтения основных глав диссертации и для придания работе определенной степени логической замкнутости.

0.3 Определяющие соотношения теории вязкоупругости стареющих тел

1. Общие уравнения.

В диссертационной работе мы будем иметь дело с основаниями, изготовленными из линейных вязкоупругих однородно стареющих (и, в частности, из упругих) изотропных материалов, и исходить из определяющих соотношений вида [14–17]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}_v) \frac{\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)}{3k(t - \tau^*)}, \\ e_{ij}(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}_s) \frac{s_{ij}(\mathbf{r}, t)}{2G(t - \tau^*)}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) &= s_{ij}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{3}\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) = e_{ij}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t)\delta_{ij}, \\ \mathcal{V}_i f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t f(\mathbf{r}, \tau) K_i(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau, \quad i = v, s.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Здесь τ^* — момент изготовления тела (считается, что все тело изготовлено в один и тот же момент времени), $\tau_0 \geq \tau^*$ — момент начала загрузки тела; δ_{ij} — символ Кроннекера; $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ — компоненты тензоров напряжений и малой деформации как функции точки тела с радиус-вектором \mathbf{r} и времени t , $s_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и $e_{ij}(\mathbf{r}, t)$ — девиаторные компоненты тех же тензоров соответственно; $k(t)$ — модуль упругомгновенной деформации при всестороннем сжатии, $G(t)$ — модуль упругомгновенной деформации при чистом сдвиге. \mathcal{I} — тождественный оператор, \mathcal{V}_v и \mathcal{V}_s — линейные интегральные операторы Вольтерра, ядра ползучести которых для объемной и сдвиговой деформации определяются как [10–13, 68]

$$\begin{aligned}K_v(t, \tau) &= k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{k(\tau)} + d(t, \tau) \right], \\ K_s(t, \tau) &= G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right],\end{aligned}$$

где $d(t, \tau)$, $\omega(t, \tau)$ ($t \geq \tau \geq 0$) — соответствующие меры ползучести, для которых по определению выполняются тождества

$$d(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geq 0.\tag{0.2}$$

Функции компонентов тензоров напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)$ и малой деформации $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)$ считаются непрерывными по времени при $t \geq \tau^*$.

Функции

$$\delta_v(t, \tau) = k(\tau)^{-1} + d(t, \tau), \quad \delta_s(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau),$$

из выражений для ядер $K_v(t, \tau)$ и $K_s(t, \tau)$ называются функциями удельной деформации материала при всестороннем сжатии и чистом сдвиге. Они описывают относительное изменение объема и углов сдвига к моменту времени t под действием постоянных указанных элементарных напряженных состояний единичной интенсивности, приложенных в момент времени τ . Учитывая (0.2) данные функции можно привести к виду

$$\delta_v(t, \tau) = \frac{1}{k(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_v(t, s)}{k(s)} ds, \quad \delta_s(t, \tau) = \frac{1}{G(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_s(t, s)}{G(s)} ds. \quad (0.3)$$

При условиях, накладываемых обычно на модули упругомгновенной деформации и меры ползучести, решения уравнений (0.1) существуют, единственны и могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{kk}(\mathbf{r}, t) &= 3k(t - \tau^*)(\mathcal{I} + \mathcal{W}_v)\varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t), \\ s_{ij}(\mathbf{r}, t) &= 2G(t - \tau^*)(\mathcal{I} + \mathcal{W}_s)e_{ij}(\mathbf{r}, t), \\ (\mathcal{I} + \mathcal{W}_i) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}_i)^{-1}, \\ \mathcal{W}_i f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t f(\mathbf{r}, \tau) R_i(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau, \quad i = v, s, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где \mathcal{W}_v и \mathcal{W}_s — интегральные операторы Вольтерра, ядра релаксации $R_v(t, \tau)$ и $R_s(t, \tau)$ которых являются резольвентами соответствующих ядер ползучести. Аналогично ядрам ползучести, ядра релаксации представимы в виде

$$\begin{aligned} R_v(t, \tau) &= \frac{1}{k(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[D(t, \tau) - k(\tau) \right], \\ R_s(t, \tau) &= \frac{1}{G(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\Omega(t, \tau) - G(\tau) \right], \end{aligned}$$

где $D(t, \tau)$, $\Omega(t, \tau)$ ($t \geq \tau \geq 0$) — соответствующие меры ползучести. Соотношения (0.1) и (0.4) эквивалентны.

Отметим, что приведенные выше соотношения очень хорошо описывают, в частности, механическое поведение бетона при не слишком высоких напряжениях и скоростях их изменения [12, 17, 100, 109], полимеров [111], стеклопластиков [110].

2. Одноосное растяжение.

Пусть в момент времени $t = \tau_0 \geq \tau^*$ к призматическому образцу прикладывается напряжение, изменяющееся по закону $\sigma_{11}(t)$ и направленное по его оси. Тогда на основании соотношений (0.1) полная относительная и поперечная деформации образца из изотропного материала определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}(t)}{E(t - \tau^*)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_{11}(\tau)}{E(\tau - \tau^*)} K_t(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau, \\ \varepsilon_{22}(t) = \varepsilon_{33}(t) &= -\frac{\nu(t - \tau^*) \sigma_{11}(t)}{E(t - \tau^*)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma_{11}(\tau)}{E(\tau - \tau^*)} K^t(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau.\end{aligned}\quad (0.5)$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned}K_t(t, \tau) &= E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right], \\ K^t(t, \tau) &= E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\nu(\tau)}{E(\tau)} + \tilde{\nu}(t, \tau) C(t, \tau) \right],\end{aligned}$$

первая из которых есть ядро ползучести при одноосном растяжении. Также введены обозначения

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{9 k(t) G(t)}{3 k(t) + G(t)}, \quad C(t, \tau) = \frac{d(t, \tau) + 3 \omega(t, \tau)}{9}, \\ \nu(t) &= \frac{3 k(t) - 2G(t)}{6 k(t) + 2G(t)}, \quad \tilde{\nu}(t, \tau) = \frac{3 \omega(t, \tau) - 2d(t, \tau)}{6 \omega(t, \tau) + 2d(t, \tau)}.\end{aligned}\quad (0.6)$$

Величины $E(t)$ и $C(t, \tau)$ называются модулем упругомгновенной деформации и мерой ползучести при одноосном растяжении, а величины $\nu(t)$ и $\tilde{\nu}(t, \tau)$ — коэффициентами Пуассона для упругомгновенной деформации и деформации ползучести. Вследствие того, что $C(\tau, \tau) \equiv 0$ (см. формулы (0.2)) функцией удельной деформации при одноосном растяжении $\delta_t(t, \tau) = E(\tau)^{-1} + C(t, \tau)$ можно представить в виде

$$\delta_t(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_t(t, s)}{E(s)} ds.$$

Первое из уравнений (0.5), разрешенное относительно растягивающего напряжения $\sigma_{11}(t)$, имеет вид

$$\frac{\sigma_{11}(t)}{E(t - \tau^*)} = \varepsilon_{11}(t) + \int_{t_0}^t \varepsilon_{11}(\tau) R_t(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau,$$

где $R_t(t, \tau)$ — ядро релаксации при одноосном растяжении, являющееся резольвентой ядра ползучести $K_t(t, \tau)$.

Соотношения (0.6), связывающие различные вязкоупругие характеристики рассматриваемого стареющего материала, в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2[1 + \nu(t)]G(t)}{3[1 - 2\nu(t)]}, & D(t, \tau) &= \frac{3[1 - 2\tilde{\nu}(t, \tau)]\omega(t, \tau)}{2[1 + \tilde{\nu}(t, \tau)]}, \\ E(t) &= 2[1 + \nu(t)]G(t), & C(t, \tau) &= \frac{\omega(t, \tau)}{2[1 + \tilde{\nu}(t, \tau)]}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

3. Случай единого ядра ползучести.

Ползучесть некоторых распространенных конструкционных материалов, в том числе бетона и полимеров, хорошо описывается уравнениями состояния (0.1) при условии постоянства и равенства между собой коэффициентов Пуассона для упругомгновенной деформации и деформации ползучести [9, 12, 39, 111], то есть при

$$\nu(t) \equiv \tilde{\nu}(t, \tau) \equiv \nu = \text{const.}$$

Из соотношений (0.7) следует, что все три введенные ранее ядра ползучести совпадают, то есть

$$K_v(t, \tau) \equiv K_s(t, \tau) \equiv K_t(t, \tau) = K(t, \tau),$$

а следовательно, и их резольвенты

$$R_v(t, \tau) \equiv R_s(t, \tau) \equiv R_t(t, \tau) = R(t, \tau).$$

Тогда определяющие соотношения (0.1) и (0.4) сводятся к следующей связи между компонентами тензоров напряжений и деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}) \frac{(1 + \nu)\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) - \nu\sigma_{kk}(\mathbf{r}, t)\delta_{ij}}{2E(t - \tau^*)}, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E(t - \tau^*)}{1 + \nu} (\mathcal{I} + \mathcal{W}) \left[\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk}(\mathbf{r}, t)\delta_{ij} \right], \\ \mathcal{V}f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t f(\mathbf{r}, \tau) K(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau, \\ \mathcal{W}f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t f(\mathbf{r}, \tau) R(t - \tau^*, \tau - \tau^*) d\tau. \end{aligned} \quad (0.8)$$

4. Вязкоупругие характеристики стареющего материала и их возможные аппроксимации.

В этом параграфе приведены основные свойства модуля упругомгновенной деформации $E(t)$ и меры ползучести $C(t, \tau)$, которые характеризуют поведение вязкоупругого стареющего материала при одноосном растяжении. Следует отметить, что аналогичные функции, отвечающие за сдвиг и всестороннее сжатие, обладают теми же свойствами, что и функции, отвечающие за одноосное растяжение. В [14, 15, 17] можно найти детальное описание каждого приведенного ниже свойства.

Экспериментальные исследования (см., например, [9, 28, 85, 112]) свидетельствуют о том, что модуль упругомгновенной деформации $E(t)$ стареющих материалов как функция времени t является непрерывным при $t \geq 0$ и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} E(t) > 0, \quad \frac{dE(t)}{dt} \geq 0, \\ \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = E_\infty, \quad \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dE(t)}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (0.9)$$

где $E_\infty > 0$ — значение модуля упругости для материала весьма старого возраста.

Анализ экспериментальных данных, основанный на изучении опытных кривых ползучести стареющих материалов в области линейной ползучести (см., например, [9, 13, 20, 41, 87, 109]) показывает, что в условиях естественного старения их мера ползучести $C(t, \tau)$ как функция времени t и момента приложения нагрузки τ при $t > \tau \geq 0$ ограничена и непрерывна по t и удовлетворяет свойствам

$$\begin{aligned} C(\tau, \tau) &\equiv 0, \quad C(t, \tau) > 0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t, \tau) = \varphi(\tau), \\ \exists f(s) : C(t, \tau) &= O[f(t - \tau)], \quad \tau \rightarrow +\infty, \\ \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} &\geq 0, \quad \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial C(t, \tau_2)}{\partial t} &> \frac{\partial C(t, \tau_1)}{\partial t}, \quad t > \tau_2 > \tau_1 \geq 0, \\ \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} &< 0. \end{aligned} \quad (0.10)$$

Функция $\varphi(\tau)$ — функция старения. Она является непрерывной и ограниченной, и при этом у нее существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi(\tau) = \varphi_\infty > 0, \quad (0.11)$$

характеризующий предельное значение меры ползучести материала, нагруженного в значительном возрасте.

Далее укажем те аппроксимирующие выражения для модуля упругомгновенной деформации и меры ползучести, которые будут использоваться в диссертационной работе при расчетах.

Для модуля упругомгновенной деформации часто используется экспоненциальная зависимость вида [9, 12, 14, 15, 17, 85, 100, 112]

$$E(t) = E_0(1 - \chi_0 e^{-\alpha_0 t}), \quad \alpha_0 > 0,$$

но поскольку изменение модуля упругости многих стареющих материалов и, в частности, бетона в процессе его старения несущественно, то мы будем принимать далее $E(t) = \text{const}$.

Принимая во внимание то, что процесс старения может считаться независимым от процесса деформирования (см. [11, 12]), меру ползучести представим в виде произведения двух функций, одна из которых учитывает процесс старения материала, а другая — влияние длительности его нагружения:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\psi(t-\tau)}], \quad (0.12)$$

где $\psi > 0$ — коэффициент, определяющий скорость ползучести. Одним из преимуществ меры ползучести в форме (0.13) является существование замкнутого аналитического выражения для резольвенты $R_s(t, \tau)$ ядра ползучести, порождаемого этой мерой [13].

Функцию старения аппроксимируем также экспоненциальной зависимостью, полагая [14, 15, 17, 85, 86]

$$\varphi(\tau) = C_0 + A_0 e^{-\chi \tau}, \quad (0.13)$$

где $A_0, C_0 > 0$ и $\chi > 0$ — константы материала. В [79] показано, что для наличия всех свойств (0.10), (0.11) у меры ползучести, заданной выражениями (0.12), (0.13), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие ограничения на параметры ее аппроксимации

$$C_0 + A_0 \left(1 - \frac{\chi}{\psi}\right) \geq 0, \quad A_0 \geq 0.$$

Напомним еще раз, что всюду выше заведомо предполагается выполнение условий $C_0 > 0, \psi > 0, \chi > 0$.

0.4 Проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений

В разделе описывается обобщенный проекционный метод, позволяющий решать смешанные интегральные уравнения (см. [65, 108]). Эффективность применения описанного метода показана в Приложении.

1. Обобщенная проекционная задача для операторного уравнения.

Рассмотрим операторное уравнение

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)y(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}y(t) = f(t), \quad (0.14)$$

где $y(t)$ и $f(t)$ — непрерывные функции t из гильбертова пространства H , $c(t) > 0$ — непрерывная скалярная функция t ; \mathcal{I} — единичный оператор; \mathcal{F} — вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор из H в H ; \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 — операторы Вольтерра по t , причем для любых непрерывных по t скалярных функций $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ операторы $(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)$, $\{\mathcal{I} - [\omega_1(t)\mathcal{V}_1 + \omega_2(t)\mathcal{V}_2]\}$ и им обратные не выводят функции из класса непрерывных.

Гильбертово пространство H можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $H = H^\circ \oplus H^*$. Тогда непрерывные функции t со значениями из пространства H можно записать в виде алгебраической суммы функций из подпространства H° и подпространства H^*

$$f(t) = f^\circ(t) + f^*(t), \quad y(t) = y^\circ(t) + y^*(t), \quad (0.15)$$

где $f^\circ(t)$, $y^\circ(t)$ — непрерывные функции t из подпространства H° , а $f^*(t)$, $y^*(t)$ — непрерывные функции t из подпространства H^* .

Обобщенная проекционная задача состоит в следующем: Пусть функции $f(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнению (0.14) и представимы в виде (0.15). Для заданных функций $y^\circ(t)$ и $f^*(t)$ необходимо найти неизвестные функции $y^*(t)$ и $f^\circ(t)$.

Введем оператор \mathcal{P}° ортогонального проектирования из пространства H в подпространство H° . Оператор $\mathcal{P}^* = \mathcal{I} - \mathcal{P}^\circ$ проектирует пространство H на подпространство H^* . Также имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\circ f(t) &= f^\circ(t), & \mathcal{P}^* f(t) &= f^*(t), \\ \mathcal{P}^\circ y(t) &= y^\circ(t), & \mathcal{P}^* y(t) &= y^*(t). \end{aligned}$$

Подействуем оператором \mathcal{P}^* на уравнение (0.14). В результате получим новое уравнение, которое после некоторых преобразований приобре-

тает вид

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)y^*(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^*\mathcal{F}y^*(t) = f^*(t) - (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^\circ\mathcal{F}y^\circ(t). \quad (0.16)$$

Можно показать, что оператор $\mathcal{P}^*\mathcal{F}$ является компактным, самосопряженным и положительно определенным оператором из H^* в H^* .

Пусть φ_k — собственные функции оператора $\mathcal{P}^*\mathcal{F}$ соответствующие собственным значениям γ_k :

$$\mathcal{P}^*\mathcal{F}\varphi_k = \gamma_k\varphi_k. \quad (0.17)$$

Эти собственные функции образуют базис пространства H^* и тогда любую непрерывную функцию t из пространства H^* можно представить в виде разложения по этому базису

$$\begin{aligned} y^*(t) &= \sum_i a_i(t)\varphi_i, & f^*(t) &= \sum_i f_i(t)\varphi_i, \\ \hat{f}^*(t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^*\mathcal{F}y^*(t) = \sum_i \hat{f}_i^*(t)\varphi_i, \end{aligned} \quad (0.18)$$

где $a_i(t)$, $f_i(t)$ и $\hat{f}_i^*(t)$ непрерывны по t .

Подставляя представления (0.18) в (0.16) и используя (0.17) получим уравнение для определения функций разложения $a_i(t)$, а следовательно и неизвестной функции $y^*(t)$:

$$\begin{aligned} a_i(t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}^i)^{-1}\tilde{f}_i^*(t) = (\mathcal{I} + \mathcal{W}^i)\tilde{f}_i^*(t), \\ \mathcal{V}^i &= \frac{c(t)\mathcal{V}_1 + \gamma_i\mathcal{V}_2}{c(t) + \gamma_i}, & \tilde{f}_i^*(t) &= \frac{f_i(t) - \hat{f}_i^*(t)}{c(t) + \gamma_i}, \end{aligned} \quad (0.19)$$

где \mathcal{W}^i — резольвентный оператор Вольтерра для оператора \mathcal{V}^i .

Замечание 1. Поскольку функция $c(t)$ и собственные значения γ_i положительны, а $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i \rightarrow 0$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{V}^i \rightarrow \mathcal{V}_1$, то операторы \mathcal{V}^i и функции $\tilde{f}_i^*(t)$ всегда определены. Решение уравнения (0.16) существует и единственно в выбранных классах функций.

Определив функцию $y^*(t)$ можно найти и $f^\circ(t)$. Для этого подействуем на уравнение (0.14) оператором \mathcal{P}° . После простейших арифметических преобразований мы получим уравнение для определения неизвестной функции $f^\circ(t)$:

$$f^\circ(t) = c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)y^\circ(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^\circ\mathcal{F}(y^\circ(t) + y^*(t)). \quad (0.20)$$

2. Смешанные интегральные уравнения на ограниченном замкнутом множестве.

Рассмотрим смешанное интегральное уравнение с N дополнительными условиями ($\mathbf{r} \in \Omega$, $t \in [\tau_0, T]$):

$$c(t)m(\mathbf{r})(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(\mathbf{r}, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}q(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad (0.21)$$

$$\int_{\Omega} q(\boldsymbol{\xi}, t) f_i(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} = M_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (0.22)$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) f_i(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}, t),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор в \mathbb{R}^n , Ω — ограниченное замкнутое множество в \mathbb{R}^n , $c(t)$ — непрерывная по t на интервале $[\tau_0, T]$ заданная функция, $\alpha_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) — непрерывные по t на интервале $[\tau_0, T]$ искомые функции, $q(\mathbf{r}, t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t на $[\tau_0, T]$ искомая функция, $g(\mathbf{r}, t)$ — непрерывная в $L_2(\Omega)$ по t заданная функция, $m(\mathbf{r})$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$, $\{f_1(\mathbf{r}), \dots, f_N(\mathbf{r})\}$ — некоторая система N линейно независимых функций из $L_2(\Omega)$; \mathcal{I} — тождественный оператор, \mathcal{V}_k ($k = 1, 2$) — интегральные операторы Вольтерры с непрерывными либо полярными ядрами $K_k(t, \tau)$, \mathcal{F} — вполне непрерывный, самосопряженный и положительно определенный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ с ядром $F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$.

Сделав в (0.21), (0.22) замену переменных по формулам

$$\tilde{q}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{r}, t) \sqrt{m(\mathbf{r})}, \quad \tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \frac{f(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}, \quad \tilde{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})}{\sqrt{m(\mathbf{r})} \sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}}$$

придем к интегральному уравнению и дополнительным условиям

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)\tilde{q}(\mathbf{r}, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\tilde{\mathcal{F}}\tilde{q}(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}, t), \quad (0.23)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{f_i(\boldsymbol{\xi})}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}} d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} = M_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (0.24)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} - \frac{g(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}, \quad (0.25)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} \tilde{F}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, t) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}},$$

которые в дальнейшем и предстоит решать. Значок тильды в дальнейшем будем опускать.

Замечание 2. Если оператор \mathcal{F} является вполне непрерывным, самосопряженным и положительно определенным оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, то он называется оператором Гильберта–Шмидта.

Для построения решения смешанного интегрального уравнения (0.23) с дополнительными условиями (0.24) введем базис специального вида в $L_2(\Omega)$ с явной зависимостью от функции $1/\sqrt{m(\mathbf{r})}$. Для этого дополним систему N линейно независимых функций $\{f_1(\mathbf{r}), \dots, f_N(\mathbf{r})\}$ так, чтобы получилась полная система в $L_2(\Omega)$, а затем воспользуемся следующими соотношениями

$$\int_{\Omega} p_i(\boldsymbol{\xi}) p_j(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} = \delta_{ij}, \quad p_n(\mathbf{r}) = \frac{P_n(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}},$$

$$P_1(\mathbf{r}) = \frac{f_1(\mathbf{r})}{\sqrt{H_{11}}}, \quad P_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{r}) & f_2(\mathbf{r}) & \cdots & f_n(\mathbf{r}) \end{vmatrix}, \quad (0.26)$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} \frac{f_i(\boldsymbol{\xi}) f_j(\boldsymbol{\xi})}{m(\boldsymbol{\xi})} d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для функций $p_1(\mathbf{r}), \dots, p_N(\mathbf{r})$ из полученного базиса в $L_2(\Omega)$ выполнены следующие соотношения:

$$p_i(\mathbf{r}) = \frac{P_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = \sum_{k=1}^i a_{ik} \frac{f_k(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (0.27)$$

Обращая система алгебраических уравнений (0.27), получим

$$\frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = \sum_{k=1}^i b_{ik} p_k(\mathbf{r}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (0.28)$$

матрица $[b_{ik}]$ которой является обратной по отношению к матрице $[a_{ik}]$ исходной системы.

Гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств: $L_2(\Omega) = L_2^{\circ}(\Omega) + L_2^*(\Omega)$. Здесь $L_2^{\circ}(\Omega)$ — евклидово пространство с базисом $\{p_1(\mathbf{r}), \dots, p_N(\mathbf{r})\}$, а $L_2^*(\Omega)$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_{N+1}(\mathbf{r}), p_{N+2}(\mathbf{r}), \dots\}$. Заметим, что любые непрерывные функции t из $L_2(\Omega)$ могут быть представлены в виде суммы непрерывных функций t со значениями из $L_2^{\circ}(\Omega)$

и $L_2^*(\Omega)$. Для функции $q(\mathbf{r}, t)$ это представление имеет вид

$$q(\mathbf{r}, t) = q^\circ(\mathbf{r}, t) + q^*(\mathbf{r}, t), \quad q^\circ(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N q_k^\circ(t) p_k(\mathbf{r}). \quad (0.29)$$

Используя дополнительные условия (0.24) совместно с (0.28) и (0.29), получим следующую систему уравнений

$$\sum_{k=1}^i b_{ik} q_k^\circ(t) = M_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (0.30)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$q_i^\circ(t) = \sum_{k=1}^i a_{ik} M_k(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (0.31)$$

Принимая во внимание (0.27) правая часть (0.25) уравнения (0.23) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, t) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \frac{f_i(\mathbf{r})}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} - \frac{g(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} = f^\circ(\mathbf{r}, t) + f^*(\mathbf{r}, t), \\ f^\circ(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=k}^N [\alpha_i(t) b_{ik} - g_k^\circ(t)] p_k(\mathbf{r}), \quad f^*(\mathbf{r}, t) = -g^*(\mathbf{r}, t), \\ \frac{g(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} &= g^\circ(\mathbf{r}, t) + g^*(\mathbf{r}, t), \quad g^\circ(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N g_k^\circ(t) p_k(\mathbf{r}), \\ g_k^\circ(t) &= \int_{\Omega} \frac{g(\boldsymbol{\xi}, t)}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}} p_k(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (0.32)$$

Заметим, что в представлении (0.29)–(0.32) для функции $q(\mathbf{r}, t)$ из дополнительных условий (0.24) определена функция $q^\circ(\mathbf{r}, t)$, а функцию $q^*(\mathbf{r}, t)$ необходимо найти. У функции $f(\mathbf{r}, t)$ наоборот — требуется найти $f^\circ(\mathbf{r}, t)$, а $f^*(\mathbf{r}, t)$ задается известной функцией $g(\mathbf{r}, t)/\sqrt{m(\mathbf{r})}$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную задачу как особый случай обобщенной проекционной задачи, рассмотренной в §1 текущего раздела.

Опираясь на обобщенный метод, введем оператор ортогонального проектирования, отображающий пространство $L_2(\Omega)$ на $L_2^\circ(\Omega)$

$$\mathcal{P}^\circ f(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{\xi}) \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{r}) p_i(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (0.33)$$

Оператор ортогонального проектирования $\mathcal{P}^* = \mathcal{I} - \mathcal{P}^\circ$ отображает пространство $L_2(\Omega)$ на $L_2^*(\Omega)$. Также имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\circ f(\mathbf{r}, t) &= f^\circ(\mathbf{r}, t), & \mathcal{P}^* f(\mathbf{r}, t) &= f^*(\mathbf{r}, t), \\ \mathcal{P}^\circ q(\mathbf{r}, t) &= q^\circ(\mathbf{r}, t), & \mathcal{P}^* q(\mathbf{r}, t) &= q^*(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\quad (0.34)$$

Как и в §1 этого раздела, подействовав оператором \mathcal{P}^* на уравнение (0.23), получим интегральное уравнение в подпространстве $L_2^*(\Omega)$ (с известной правой частью) для определения функции $q^*(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned}\sigma(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q^*(\mathbf{r}, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^*\mathcal{F}q^*(\mathbf{r}, t) &= \\ &= -g^*(\mathbf{r}, t) - (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}^*\mathcal{F}q^\circ(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad t \in [\tau_0, T], \\ \mathcal{P}^*\mathcal{F}f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\Omega} F^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}, t) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}},\end{aligned}\quad (0.35)$$

$$F^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = F^F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) - \int_{\Omega} F^F(\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}) \sum_{i=1}^N p_i(\mathbf{r}) p_i(\mathbf{s}) d\Omega_{\mathbf{s}}.$$

Оператор $\mathcal{P}^*\mathcal{F}$ является оператором Гильберта-Шмидта, действующим из $L_2^*(\Omega)$ в $L_2^*(\Omega)$. Решение уравнения (0.35) будем строить в виде ряда по собственным функциям этого оператора, которые образуют базис пространства $L_2^*(\Omega)$.

Пусть $\varphi_k(\mathbf{r})$ — собственные функции оператора $\mathcal{P}^*\mathcal{F}$, соответствующие собственным значениям γ_k . Тогда

$$\mathcal{P}^*\mathcal{F}\varphi_k(\mathbf{r}) = \gamma_k\varphi_k(\mathbf{r}), \quad k = N+1, N+2, \dots \quad (0.36)$$

Собственные функции $\varphi_k(\mathbf{r})$ можно представить в виде разложения по базисным функциям $p_k(\mathbf{r})$:

$$\varphi_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(\mathbf{r}). \quad (0.37)$$

Так как ядро $F^F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$ можно разложить в двойной ряд по функциям $p_k(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}F^F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} p_m(\mathbf{r}) p_n(\boldsymbol{\xi}), \\ R_{mn} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} F^F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) p_m(\mathbf{r}) p_n(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\mathbf{r}} d\Omega_{\boldsymbol{\xi}},\end{aligned}$$

то с учетом (0.35) можно получить разложение в двойной ряд и ядра $F^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$:

$$F^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} R_{mn} p_m(\mathbf{r}) p_n(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{i=1}^N \sum_{n=N+1}^{\infty} R_{in} p_n(\mathbf{r}) p_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (0.38)$$

Заметим, что коэффициенты разложения ядра $F^*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$ совпадают с соответствующими коэффициентами ядра $F^F(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi})$. Это позволяет нам не пересчитывать коэффициенты новой задачи, а использовать уже имеющуюся информацию.

Подставляя (0.37) и (0.38) в (0.36), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения собственных значений γ_k и соответствующих собственных функций $\varphi_k(\mathbf{r})$ (а точнее коэффициентов $\varphi_i^{(k)}$, связанных с собственными функциями соотношениями (0.37)). Эта система имеет вид:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} R_{mn} \varphi_n^{(k)} = \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad m = N+1, N+2, \dots \quad (0.39)$$

Теперь можно построить решение уравнения (0.35). Для этого представим функции $q^*(\mathbf{r}, t)$ и $g^*(\mathbf{r}, t)$ в виде рядов по собственным функциям $\varphi_k(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} q^*(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} q_k^*(t) \varphi_k(\mathbf{r}), \quad g^*(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} g_k^*(t) \varphi_k(\mathbf{r}), \\ g_k^*(t) &= \int_{\Omega} \frac{g(\boldsymbol{\xi}, t)}{\sqrt{m(\boldsymbol{\xi})}} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) d\Omega_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (0.40)$$

и подставим их в (0.35). Тогда, учитывая (0.29)–(0.32) и (0.34)–(0.38), получим последовательность уравнений Вольтерра второго рода для определения неизвестных функций $q_k^*(t)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} - \mathcal{V}^k) q_k^*(t) &= \tilde{f}_k^*(t), \\ \mathcal{V}^k f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t K_k^*(t, \tau) f(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \\ \mathcal{V}^k &= \frac{c(t) \mathcal{V}_1 + \gamma_k \mathcal{V}_2}{c(t) + \gamma_k}, \quad K_k^*(t, \tau) = \frac{c(t) K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}, \\ \tilde{f}_k^*(t) &= -\frac{1}{c(t) + \gamma_k} \left[g_k^*(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \sum_{i=1}^N K_k^{(i)} q_i^{\circ}(t) \right], \\ K_k^{(i)} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} R_{in}^h \varphi_n^{(k)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = N+1, N+2, \dots \end{aligned} \quad (0.41)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} q_k^*(t) &= (\mathcal{I} - \mathcal{V}^k)^{-1} \tilde{f}_k^*(t) = (\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \tilde{f}_k^*(t), \\ \mathcal{W}_k f(\mathbf{r}, t) &= \int_{\tau_0}^t R_k^*(t, \tau) f(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (0.42)$$

где $R_k^*(t, \tau)$ — резольвента ядра $V^k(t, \tau)$ из уравнения (0.41).

Таким образом, окончательно имеем:

$$q(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{r})}} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n a_{nk} M_k(t) P_n(\mathbf{r}) + \sum_{k=N+1}^{\infty} q_k^*(t) \Phi_k(\mathbf{r}) \right], \quad (0.43)$$

где функции $\Phi_k(\mathbf{r}) = \varphi_k(\mathbf{r}) \sqrt{m(\mathbf{r})}$ можно вычислить по формулам аналогичным (0.37)

$$\Phi_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=N+1}^{\infty} \varphi_i^{(k)} P_i(\mathbf{r}).$$

Отметим, что в решении в явном виде выделена функция $\sqrt{m(\mathbf{r})}$, что позволяет нам проводить аналитические вычисления даже для быстро осциллирующих и разрывных функций $m(\mathbf{r})$.

Подействовав оператором \mathcal{P}° на выражение (0.35) можно получить уравнения для нахождения неизвестных функций $\alpha_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) = \sum_{i=k}^N a_{ik} \left\{ g_i^\circ(t) + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \sum_{m=1}^i a_{im} M_m(t) + \right. \\ \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[\sum_{j=1}^N R_{ji} \sum_{m=1}^j a_{jm} M_m(t) + \sum_{j=N+1}^{\infty} K_j^{(i)} q_j^*(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (0.44)$$

ГЛАВА 1

Конформный контакт штампа и вязкоупругого основания

В главе впервые исследуется контактное взаимодействие жесткого штампа и вязкоупругого основания с тонким покрытием в случае, когда поверхности штампа и покрытия являются конформными (взаимоповторяющимися). Подобная задача может возникнуть, например, когда штамп погружается в затвердевающее покрытие до его полного отверждения, в результате чего поверхность покрытия принимает форму основания штампа. Примерами таких покрытий может служить слой клея, бетона в его молодом возрасте, многих полимерных материалов. Рассмотрены плоские и осесимметричные контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований в случае их конформного контакта с жесткими штампами. Даны их постановки. Получены разрешающие смешанные интегральные уравнения. При решении этих уравнений использован обобщенный проекционный метод, который реализован для конкретных типов уравнений плоских и осесимметричных задач. Решен ряд модельных задач, включая задачи, в которых форма штампа описывается быстро осциллирующими функциями. Изучено влияние формы основания штампа на напряженно-деформированное состояние области контакта и на кинематические характеристики штампа.

Основные результаты главы отражены в работах [45–52, 107].

1.1 Плоская задача

1. Постановка задачи.

На недеформируемом подстилающем основании лежит вязкоупругий слой с покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавливается гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ и эксцентриситетом ее приложения $e(t)$ (рис. 1.1). Считается, что форма покрытия в недеформированном состоянии (при $t < \tau_0$) совпадает с формой штампа. Область контакта со временем не изменяется, длина линии контакта равна $2a$. Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта ($h(x) \ll 2a$). И тонкое покрытие, и нижний слой произвольной толщины H изготовлены из вязкоупругого материала и стареют однородно (покрытие — в момент времени $\tau_1 \leq \tau_0$, нижний слой — в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$). В данном разделе будем рассматривать случай плоской деформации.

Замечание 1. Отметим, что в случае плоской задачи сила $P(t)$ на самом деле является силой на единицу длины и измеряется, например, не Н, а в Н/м. В следующих разделах мы не будем еще раз указывать на это обстоятельство.

Для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(x, t) = -q(x, t)$, действующей на том же участке ($-a \leq x \leq a$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(x, t)$ можно записать в форме [17]:

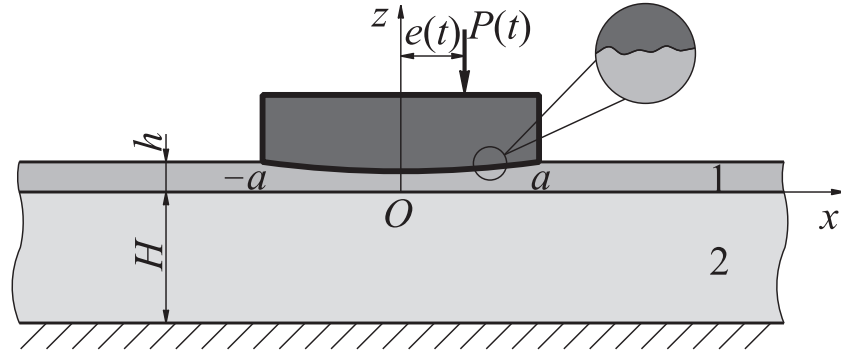
$$u_z(x, t) = k_\nu(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t)h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{F}f(x, t) = \int_{-a}^a k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) f(\xi, t) d\xi,$$

$$\mathcal{V}_k f(x, t) = \int_{\tau_0}^t K^{(k)}(t - \tau_k, \tau - \tau_k) f(x, \tau) d\tau, \quad k = 1, 2,$$

$$K^{(k)}(t, \tau) = E_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C^{(k)}(t, \tau) \right], \quad k = 1, 2,$$

где $E_k(t - \tau_k)$ — модули упругомгновенной деформации покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$), ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя; \mathcal{I} — тождественный оператор; \mathcal{V}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$), $C^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) — меры ползучести при растяжении; k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем, причем



Фиг. 1.1. Конформный контакт штампа и вязкоупругого основания в плоском случае

в случае гладкого контакта покрытия и слоя

$$k_\nu = 1 - \nu_1^2, \quad (1.2)$$

а в случае идеального контакта

$$k_\nu = \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{1 - \nu_1}, \quad (1.3)$$

ν_1 — коэффициент Пуассона покрытия, \mathcal{F} — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{\text{pl}}[(x - \xi)/H]$, которое имеет вид [3, 22]

$$k_{\text{pl}}(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du, \quad (1.4)$$

причем в случае гладкого контакта нижнего слоя с недеформируемым основанием

$$L(u) = \frac{\text{ch } 2u - 1}{\text{sh } 2u + 2u}, \quad (1.5)$$

а в случае идеального контакта

$$L(u) = \frac{2\kappa \text{sh } 2u - 4u}{2\kappa \text{ch } 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_2. \quad (1.6)$$

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (1.1) получим интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде:

$$k_\nu (\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t) h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x, \quad (1.7)$$

$$-a \leq x \leq a,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота.

Уравнение (1.7) дополним условиями равновесия штампа на слое

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = M(t). \quad (1.8)$$

Здесь через $M(t) = e(t)P(t)$ обозначен момент приложения силы $P(t)$.

Сделаем в (1.7) и (1.8) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \\ \lambda &= \frac{H}{a}, \quad \delta^*(t^*) = k_P \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = k_P \alpha(t), \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{k_m E_1(t - \tau_1)}, \\ m^*(x^*) &= \frac{k_m k_\nu}{1 - \nu_2^2} \frac{h(x)}{2a}, \quad q^*(x^*, t^*) = \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ P^*(t^*) &= \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2k_P M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a^2}, \\ \mathcal{V}_k^* f(x^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_k(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*, \quad k = 1, 2, \\ K_1(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_2)}{E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \\ K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \\ \mathcal{A}^* f(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\ k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Безразмерные коэффициенты k_m и k_P вводятся исключительно для улучшения вида функций $m^*(r^*)$, $c^*(t^*)$, $P^*(t^*)$ и $M^*(t^*)$ (чтобы при численных расчетах они не сильно отличались по значениям). Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$\begin{aligned} c(t)m(x)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{A}q(x, t) &= \delta(t) + \alpha(t)x, \\ -1 \leq x \leq 1, \end{aligned} \quad (1.10)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q(\xi, t) d\xi = M(t). \quad (1.11)$$

Ядро $k_{\text{pl}}(x, \xi)$ является симметричным положительно определенным ядром Фредгольма. Умножая на $\sqrt{m(x)}$ уравнение (1.10) и вводя обозна-

чения

$$Q(x, t) = \sqrt{m(x)}q(x, t), \quad k(x, \xi) = \frac{k_{\text{pl}}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{F}Q(x, t) = \int_{-1}^1 k(x, \xi)Q(\xi, t) d\xi,$$

интегральное уравнение (1.10) приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}}, \quad (1.13)$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Дополнительные условия (1.11) также подвергаются преобразованию:

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (1.14)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (1.13), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (1.14). В следующем параграфе мы проведем процедуру его решения обобщенным проекционным методом, описанным в разделе 0.4 для самого общего случая.

2. Метод решения.

Применение метода разделения переменных Фурье и других классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит, к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра, что вносит теоретические трудности и существенные вычислительные проблемы при решении конкретных задач. Использование обобщенного проекционного метода [65] для построения решения задач позволяет получать вместо бесконечных систем последовательности независимых интегральных уравнений Вольтерра для коэффициентов разложения контактных давлений в ряды по специальным базисам пространства $L_2[-1, 1]$, а также выражения для осадки и угла поворота штампа.

Будем искать решение уравнения (1.13) при условиях (1.14) в классе функций непрерывных по времени t в гильбертовом простран-

стве $L_2[-1, 1]$ (см., например [17, 21]). Для этого построим сначала ортонормированную в $L_2[-1, 1]$ систему функций такую, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(x)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от x и весовой функции $1/\sqrt{m(x)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании [93]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p_i(\xi) p_j(\xi) d\xi &= \delta_{ij}, \quad p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{m(x)}}, \\ P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}}, \quad P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \\ J_n &= \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{m(\xi)} d\xi, \quad \Delta_{-1} = 1, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при $m(x) = \text{const}$ многочлены $p_n(x)$ являются ортонормированными полиномами Лежандра.

Гильбертово пространство $L_2[-1, 1]$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1, 1] = L_2^{(1)}[-1, 1] \oplus L_2^{(2)}[-1, 1]$, где $L_2^{(1)}[-1, 1]$ — евклидово пространство с базисом $\{p_0(x), p_1(x)\}$, а $L_2^{(2)}[-1, 1]$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_2(x), p_3(x), \dots\}$. Подынтегральная функция и правая часть также представляются в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1, 1]$ и $L_2^{(2)}[-1, 1]$, соответственно, то есть

$$Q(x, t) = Q_1(x, t) + Q_2(x, t), \quad f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t),$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(x, t) &= z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x), \quad f(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}}, \\ f_1(x, t) &= \left[\sqrt{J_0}\delta(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) \right] p_0(x) + \left[\frac{\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) \right] p_1(x), \\ f_2(x, t) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Заметим, что в представлении для $Q(x, t)$ нам известно слагаемое $Q_1(x, t)$, функции разложения которого определяются дополнитель-

ными условиями (1.14):

$$z_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1(t) = \frac{J_0 M(t) - J_1 P(t)}{\sqrt{J_0(J_0 J_2 - J_1^2)}}, \quad (1.16)$$

а слагаемое $Q_2(x, t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $f_1(x, t)$, а функция $f_2(x, t) \equiv 0$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи, поставленной и решенной в [65] методом, рассмотренным в разделе 0.4. Для наглядности еще раз продемонстрируем его применительно к нашей ситуации в частном случае двумерной задачи на конечном интервале $-1 \leq x \leq 1$ с $N = 2$ дополнительными условиями.

На основании [56] можно ввести оператор ортогонального проектирования (ортопроектор), который отображает пространство $L_2[-1, 1]$ в $L_2^{(1)}[-1, 1]$:

$$\mathcal{P}_1 \phi(x, t) = \int_{-1}^1 \phi(\xi, t) [p_0(x)p_0(\xi) + p_1(x)p_1(\xi)] d\xi.$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathcal{P}_2 = \mathcal{I} - \mathcal{P}_1$ переводит пространство $L_2[-1, 1]$ в $L_2^{(2)}[-1, 1]$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_i f(x, t) = f_i(x, t), \quad \mathcal{P}_i Q(x, t) = Q_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Следуя [65], подействуем на уравнение (1.13) оператором ортогонального проектирования \mathcal{P}_2 . В результате получим уравнение для определения $Q_2(x, t)$ с известной правой частью

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q_2(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_2 \mathcal{F} Q_2(x, t) = -(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_2 \mathcal{F} Q_1(x, t). \quad (1.17)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathcal{P}_2 \mathcal{F}$, который, как можно показать на основании [65], является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(2)}[-1, 1]$ в $L_2^{(2)}[-1, 1]$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}[-1, 1]$ [56]. Спек-

тральная задача для оператора $\mathcal{P}_2\mathcal{F}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2\mathcal{F}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \\ \varphi_k(x) &= \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(x), \quad k = 2, 3, \dots, \\ k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \\ \sum_{n=2}^{\infty} R_{mn} \varphi_n^{(k)} &= \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad m = 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{1.18}$$

Отметим, что если функция $m(x)$ является симметричной, то коэффициенты разложения ядра R_{ij} удовлетворяют соотношению: $R_{ij} = 0$ если $i + j = 1, 3, 5, \dots$ (нечетное). Представив искомую функцию $Q_2(x, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) в $L_2^{(2)}[-1, 1]$, то есть

$$Q_2(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x),$$

и подставив это представление в (1.17), получим, что неизвестные функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$) можно найти по формуле

$$\begin{aligned}z_k(t) &= -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[z_0(t) K_k^{(0)} + z_1(t) K_k^{(1)} \right]}{c(t) + \gamma_k}, \\ K_k^{(0)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \mathcal{W}_k f(x, t) &= \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, 3, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{c(t) K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Следует отметить, что полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t) P_0(x) + z_1(t) P_1(x) + \dots \right],$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит и связанную с ней заменой (1.9) функцию толщины покрытия $h(ax) \sim m(x)$. Решение такого вида позволяет производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, имеющих толщину, которая описывается быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Этого невозможно добиться другими известными методами.

Полностью определив контактные давления под штампом можно найти и неизвестные осадку и угол поворота штампа. Для этого подействуем оператором \mathcal{P}_1 на уравнение (1.13):

$$\begin{aligned} c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q_1(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{F}Q(x, t) = \\ = \left[\sqrt{J_0}\delta(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) \right] p_0(x) + \left[\sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_0}}\alpha(t) \right] p_1(x). \end{aligned}$$

Полученное равенство непосредственно дает формулы для угла поворота $\alpha(t)$ и осадки $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_1(t) + \right. \\ \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)}z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t)\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_0(t) + \right. \\ \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)}z_k(t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в вид зависимости угла поворота штампа от времени вносит значительный вклад непостоянная толщина покрытия. Даже если нагрузка приложена центрально, покрытие переменной толщины способно вызвать перекося штампа, причем, если основание вязкоупругое, этот перекося будет меняться с течением времени.

Замечание 2. В полученных выражениях осадка штампа $\delta(t)$ выражена через угол его поворота $\alpha(t)$. Можно получить выражения, в которых, наоборот, угол поворота выражен через осадку штампа. Для этого необходимо первые две базисные функции заменить на

$$\check{p}_0(x) = \frac{x}{\sqrt{J_2m(x)}}, \quad \check{p}_1(x) = \frac{J_2 - J_1x}{\sqrt{J_2(J_0J_2 - J_1^2)m(x)}}. \quad (1.19)$$

Тогда функции осадки и угла поворота примут вид

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ -\delta(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)\check{z}_0(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[\check{R}_{00}\check{z}_0(t) + \check{R}_{01}\check{z}_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \check{K}_k^{(0)} z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) &= \sqrt{\frac{J_2}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)\check{z}_1(t) \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[\check{R}_{10}\check{z}_0(t) + \check{R}_{11}\check{z}_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \check{K}_k^{(1)} z_k(t) \right] \right\}.\end{aligned}$$

В полученных соотношениях функции $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$) остаются прежними, а функции $\check{z}_0(t)$, $\check{z}_1(t)$ и коэффициенты \check{R}_{00} , $\check{R}_{01} = \check{R}_{10}$, \check{R}_{11} , $\check{K}_k^{(0)}$ и $\check{K}_k^{(1)}$ меняются (о вычислении коэффициентов разложения ядра \check{R}_{ij} см. §4 данного раздела).

Таким образом, построено аналитическое решение (в рядах с любой наперед заданной точностью с выделением особенности) плоской контактной задачи для вязкоупругого слоя с тонким покрытием, повторяющим форму штампа, позволяющее эффективно решать задачи даже с быстро осциллирующими функциями, описывающими форму основания штампа.

3. Задача о нахождении эксцентриситета приложения нагрузки по заданному углу поворота.

Можно поставить следующую задачу: определить правило изменения эксцентриситета $e(t)$ нагрузки $P(t)$, чтобы обеспечить необходимый закон изменения угла поворота $\alpha(t)$. При этом считается, что сама нагрузка $P(t)$ задана.

Для этого в уравнении (1.13) функция $\alpha(t)$ считается заданной, первое дополнительное условие из (1.14) остается в силе, а второе превращается в уравнение для нахождения функции $e(t)$:

$$e(t) = \frac{1}{P(t)} \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi. \quad (1.20)$$

Метод решения поставленной задачи аналогичен проделанному выше. Отличие состоит в том, что задача становится одномерной ($N = 1$).

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательные формулы для вычисления контактных давлений под штампом:

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k(t)\tilde{\varphi}_k(x), \\
 z_0(t) &= \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \tilde{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{W}}_k) \frac{-\alpha(t)g_k^\alpha + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)z_0(t)K_k^\alpha}{c(t) + \tilde{\gamma}_k}, \\
 \tilde{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \tilde{\varphi}_n^{(k)} = \tilde{\gamma}_k \tilde{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad K_k^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} R_{0n} \tilde{\varphi}_n^{(k)}, \\
 g_k^\alpha &= \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}} \int_{-1}^1 p_1(\xi) \tilde{\varphi}_k(\xi) d\xi = \tilde{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}, \\
 \widetilde{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \tilde{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\tilde{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\tilde{K}_k^*(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \tilde{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \tilde{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ \sim ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи при неизвестном угле поворота. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (1.21) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, используя формулу (1.20) можно найти и закон изменения эксцентриситета приложения нагрузки

$$e(t) = \frac{1}{P(t)} \left[\frac{J_1}{\sqrt{J_0}} z_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^\alpha \tilde{z}_i(t) \right] = \frac{J_1}{J_0} + \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i^\alpha z_i(t), \tag{1.22}$$

с помощью которой будет обеспечиваться необходимый режим изменения угла поворота штампа. В частности, можно обеспечить постоянное равенство нулю угла поворота штампа $\alpha(t) \equiv 0$.

Выражение для осадки штампа также претерпевает изменения

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^\alpha \tilde{z}_k(t) \right] \right\}.$$

4. Случай задания осадки штампа.

В случае задания осадки штампа необходимо немного изменить систему базисных функций: первые две базисные функции $\check{p}_0(x)$ и $\check{p}_1(x)$ принимают вид (1.19), а остальные вычисляются по обычным правилам (1.15), $\check{p}_k(x) \equiv p_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$). В этом случае функцию разложения $z_0(t)$ можно определить из второго дополнительного условия (1.14):

$$\check{z}_0(t) = \frac{M(t)}{\sqrt{J_2}},$$

а первое дополнительное условие (1.14) — это уравнение для нахождения силы приложения:

$$P(t) = \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi. \quad (1.23)$$

Окончательные формулы для определения контактных давлений под штампом принимают форму

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \check{z}_0(t)\check{p}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \check{z}_k(t)\check{\varphi}_k(x), \\ \check{z}_0(t) &= \frac{M(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \check{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{W}}_k) \frac{-\delta(t)g_k^\delta + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\check{z}_0(t)K_k^\delta}{c(t) + \check{\gamma}_k}, \\ \check{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \check{\varphi}_i^{(m)}\check{p}_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{mn}\check{\varphi}_n^{(k)} = \check{\gamma}_k\check{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\ k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \check{R}_{mn}\check{p}_m(x)\check{p}_n(\xi), \quad K_k^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{0n}\check{\varphi}_n^{(k)}, \\ g_k^\delta &= \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}} \int_{-1}^1 \check{p}_1(x)\check{\varphi}_k(\xi) d\xi = \check{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0J_2 - J_1^2}{J_2}}, \\ \check{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \check{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

ядра $\check{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\check{K}_k^*(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \check{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \check{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ \sim ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2 и §3. Таким образом, после нахождения при помощи записанных выше соотношений контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, используя формулу (1.23) можно найти и силу приложения

нагрузки

$$P(t) = \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} \check{z}_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^{\delta} \check{z}_i(t) = \frac{J_1}{J_2} M(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^{\delta} \check{z}_i(t). \quad (1.24)$$

Замечание 3. Отметим, что коэффициенты разложения ядра \check{R}_{mn} выражаются через коэффициенты R_{mn} . Так как базисные функции $\check{p}_k(x)$ ($k = 0, 1$) можно выразить через $p_k(x)$ ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \check{p}_0(x) &= k_0^{(0)} p_0(x) + k_1^{(0)} p_1(x), \quad \check{p}_1(x) = k_0^{(1)} p_0(x) + k_1^{(1)} p_1(x), \\ k_0^{(0)} &= -k_1^{(1)} = \frac{J_1}{\sqrt{J_0 J_2}}, \quad k_1^{(0)} = k_0^{(1)} = \sqrt{1 - \frac{J_1^2}{J_0 J_2}}, \end{aligned}$$

то коэффициенты разложения \check{R}_{mn} представимы в виде:

$$\begin{aligned} \check{R}_{mn} &= \sum_{i,j=1}^2 k_i^{(m)} k_j^{(n)} R_{ij} = \\ &= k_0^{(m)} k_0^{(n)} R_{00} + [k_0^{(m)} k_1^{(n)} + k_1^{(m)} k_0^{(n)}] R_{01} + k_1^{(m)} k_1^{(n)} R_{11}, \quad m, n = 0, 1, \\ \check{R}_{nk} &= \check{R}_{kn} = \sum_{i=1}^2 k_i^{(n)} R_{ik} = k_0^{(n)} R_{0k} + k_1^{(n)} R_{1k}, \quad n = 0, 1, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \check{R}_{kl} &= R_{kl}, \quad k, l = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

После вычисления контактных давлений под штампом можно найти и угол поворота штампа:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ -\delta(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + c(t) (\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \check{z}_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[\check{R}_{00} \check{z}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{\delta} z_k(t) \right] \right\}.$$

5. Решение уравнения с известной правой частью.

Разумеется этим же методом можно решить и задачу с известной правой частью, то есть когда заданы функции осадки $\delta(t)$ и угла поворота $\alpha(t)$ штампа, а требуется определить закон изменения силы $P(t)$ и эксцентриситета ее приложения $e(t)$ (либо момента $M(t)$) для обеспечения такого режима.

Дополнительные условия (1.14) превращаются в уравнения для нахождения функций $P(t)$ и $e(t)$:

$$P(t) = \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi, \quad e(t) = \frac{1}{P(t)} \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi. \quad (1.25)$$

Метод решения практически такой же, как и ранее, только теперь уже не требуется разделять пространство на два, так как правая часть полностью известна. Все также необходимо строить ортонормированную систему функций специального вида и с целью избежания решения бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра переходить к новым базисным функциям.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем лишь окончательные формулы для вычисления контактных давлений под штампом:

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{z}_k(t) \hat{\varphi}_k(x), \\
 \hat{z}_k(t) &= (\mathcal{I} + \widehat{\mathcal{W}}_k) \frac{\delta(t) \hat{g}_k^\delta + \alpha(t) \hat{g}_k^\alpha}{c(t) + \hat{\gamma}_k}, \quad \widehat{\mathcal{W}}_k f(x, t) = \int_1^t \hat{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \\
 \hat{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} \hat{\varphi}_n^{(k)} = \hat{\gamma}_k \hat{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \\
 \hat{g}_k^\alpha &= \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} \int_{-1}^1 p_0(\xi) \hat{\varphi}_k(\xi) d\xi + \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}} \int_{-1}^1 p_1(\xi) \hat{\varphi}_k(\xi) d\xi = \\
 &= \hat{\varphi}_0^{(k)} \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \hat{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}, \quad \hat{g}_k^\delta = \sqrt{J_0} \int_{-1}^1 p_0(\xi) \hat{\varphi}_k(\xi) d\xi = \hat{\varphi}_0^{(k)} \sqrt{J_0}.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\hat{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^*(t, \tau) = \frac{c(t) K_1(t, \tau) + \hat{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \hat{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ \wedge ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решениями задач из §2–§4. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (1.26) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, используя соотношения (1.25) можно найти и функции $P(t)$ и $e(t)$:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}_i^\delta \hat{z}_i(t), \quad e(t) = \frac{1}{P(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{g}_i^\alpha \hat{z}_i(t). \tag{1.27}$$

6. Численные расчеты.

Рассмотрим двухслойное основание, нижний слой которого изготовлен из упругого материала, а верхний — из вязкоупругого стареющего. Между слоями — идеальный контакт. Считается, что изменение модуля упругости вязкоупругого материала несущественно, то есть $E_1(t) \equiv E_1$. Механизм ползучести материала покрытия представим в виде (0.12), (0.13):

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi\tau}) [1 - e^{-\psi(t-\tau)}]. \quad (1.28)$$

Зададимся следующими значениями параметров для стального основания, покрытого слоем бетона [11] или полимера

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} = 0.025, \quad \nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.1, \quad c(t) \equiv 1, \\ C_0 E_1 = 0.5522, \quad A_0 E_1 = 4, \quad \chi\tau_0 = 0.31, \quad \psi\tau_0 = 0.6 \quad (\tau_0 = 10 \text{ сут}). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Без ограничения общности, момент изготовления вязкоупругого слоя примем равным нулю, $\tau_1 = 0$.

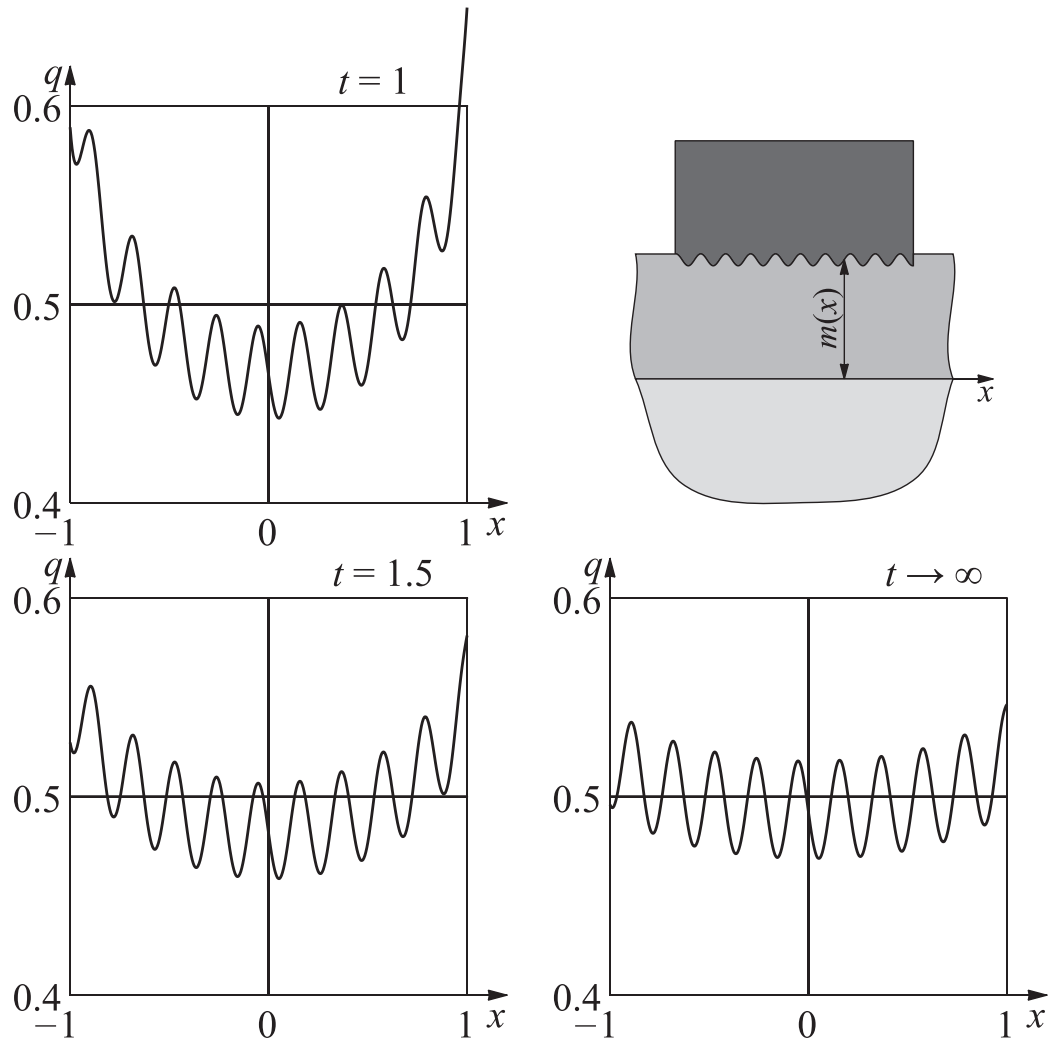
Рассмотрим случай, когда заданы нагрузка $P(t) \equiv 1$ и эксцентриситет $e(t) \equiv 0$. Будем считать, что функция $m(x)$, прямо пропорциональная высоте покрытия и форме основания штампа, задается формулой

$$m(x) = 1 + 0.05 \sin(30x), \quad x \in [-1, 1].$$

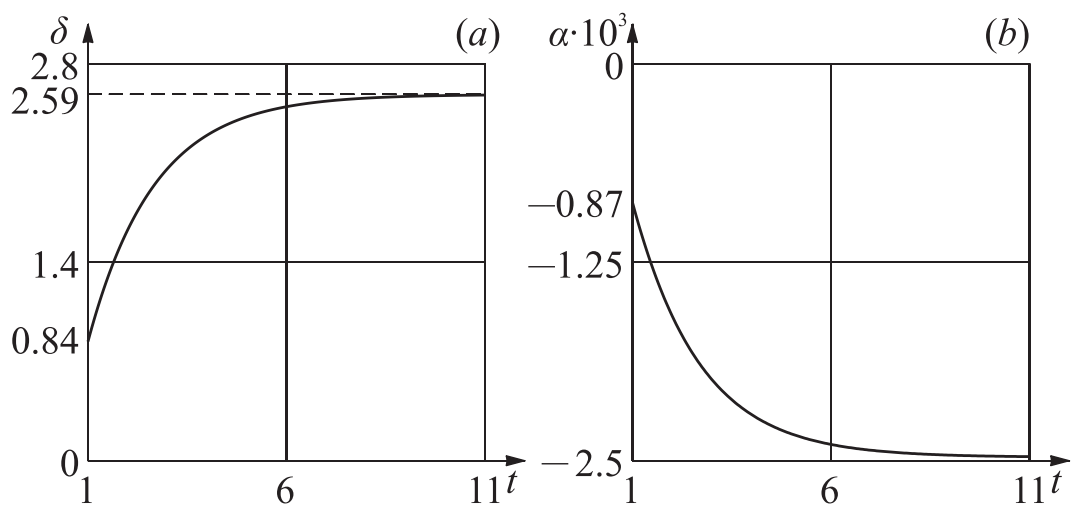
Эта функция несимметрична и имеет множество локальных экстремумов. На рис. 1.2 показано распределение контактных давлений под штампом в различные моменты времени ($t = 1$, $t = 10$ и установившееся распределение, $t \rightarrow \infty$). С течением времени контактные давления перераспределяются, однако всюду в явном виде видна зависимость от функции $1/m(x)$. На рис. 1.3 представлены зависимости осадки и угла поворота штампа от времени. Видно, что с течением времени и осадка, и угол поворота стремятся к некоторому асимптотическому значению, так как материал в довольно старом возрасте уже практически не изменяет своих свойств, а длительность загрузки велика. Заметим, что вследствие переменной толщины покрытия, даже при нулевой эксцентриситете приложения нагрузки, угол поворота может быть не равен нулю и меняется с течением времени. В рассмотренном случае он очень мал и, в принципе, им можно пренебречь, но существуют примеры, когда он уже на несколько порядков больше, и следовательно, наличие угла необходимо учитывать при проектировании.

Чтобы более детально исследовать зависимость поведения штампа от вида функции $m(x)$, рассмотрим этот процесс при

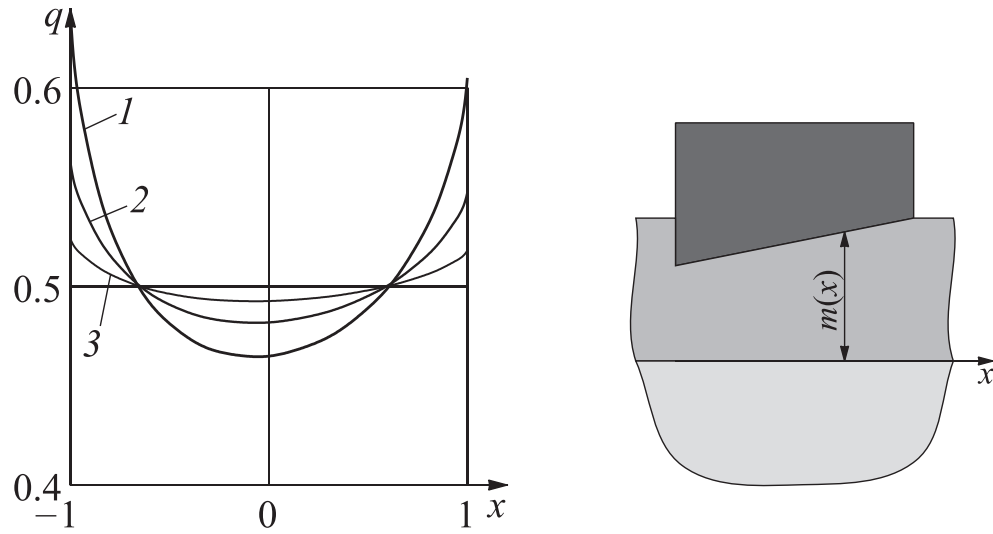
$$m(x) = 1 + 0.2x. \quad (1.30)$$



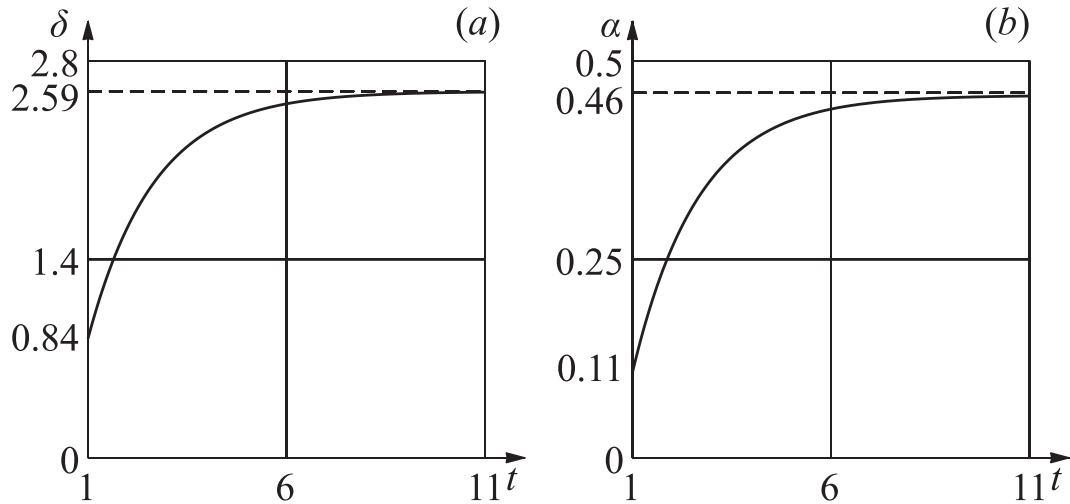
Фиг. 1.2. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.05 \sin(30x)$



Фиг. 1.3. Изменение осадки (a) и угла поворота (b) штампа от времени при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.05 \sin(30x)$

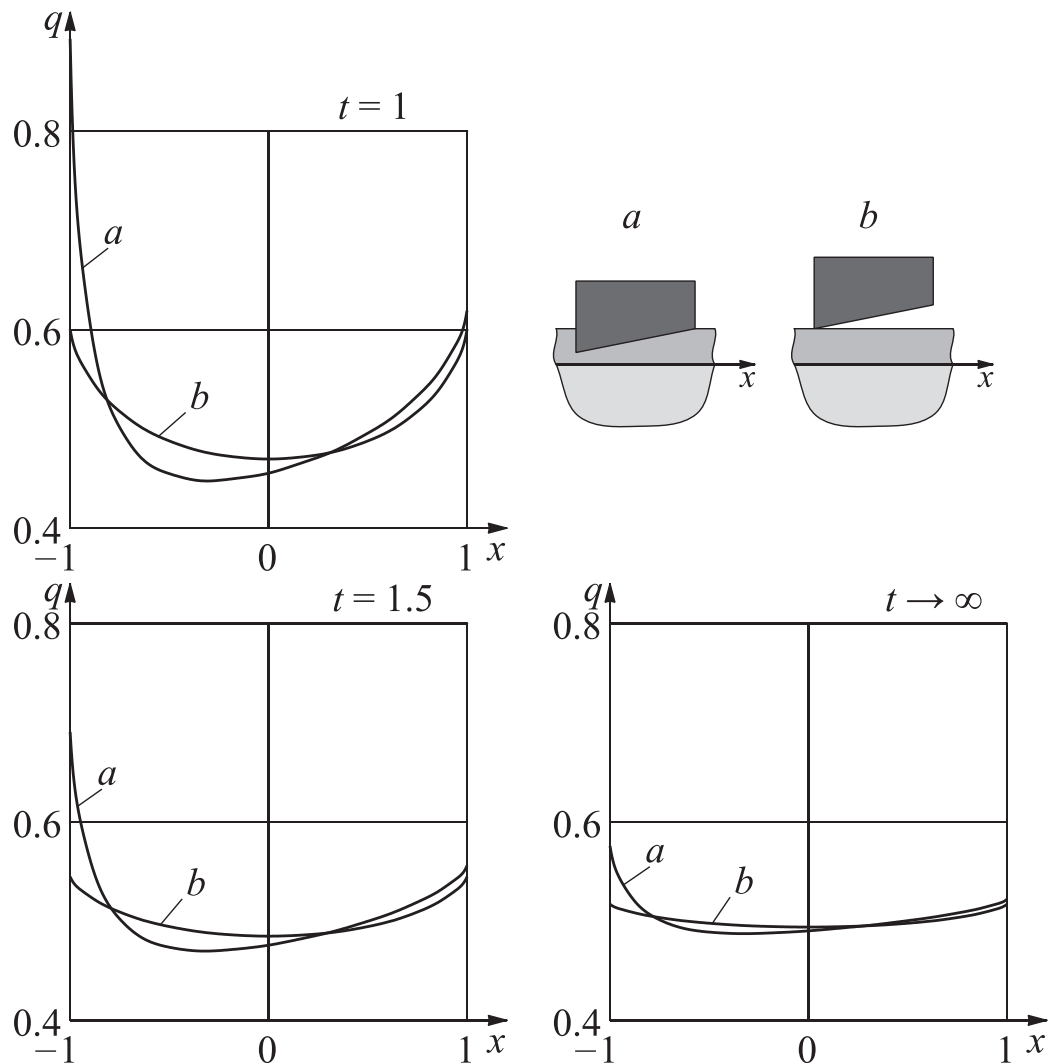


Фиг. 1.4. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.2x$ (1 — $t = 1$, 2 — $t = 1.5$, 3 — установившееся распределение)



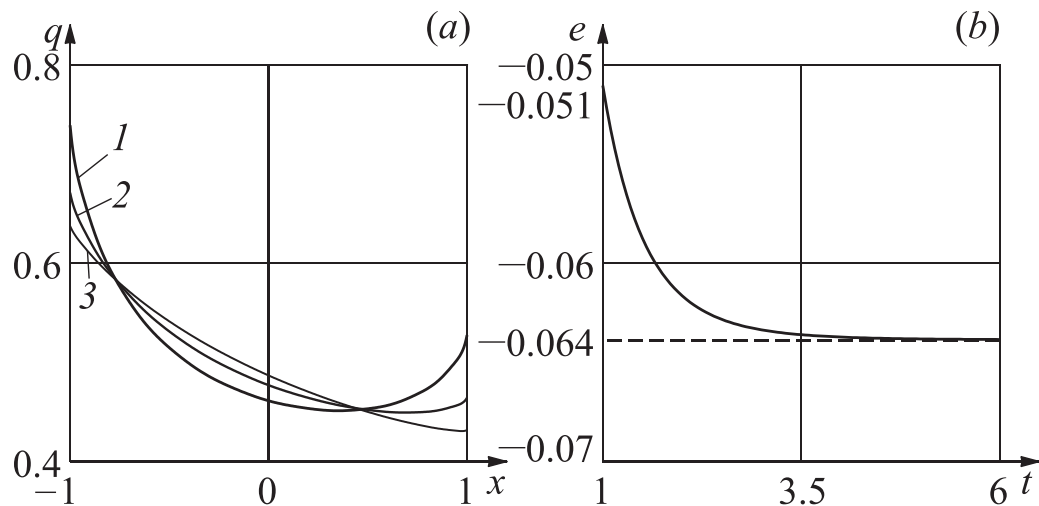
Фиг. 1.5. Изменение осадки (a) и угла поворота (b) штампа от времени при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.2x$

На рис. 1.4 показано распределение контактного давления при симметричном приложении единичной нагрузки ($P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$). Рис. 1.5 b показывает, что штамп наклоняется по часовой стрелке (график всюду положителен), причем численное значение угла на 2 порядка больше, чем в предыдущем примере. Отметим, что графики осадок штампа 1.3 a и 1.5 a практически идентичны. Это связано с тем, что осадка в основном зависит от функции $z_0(t) = P(t)/\sqrt{J_0}$, а они в данном случае практически совпадают, так как в обоих вариантах прикладывается единичная нагрузка, а интегралы $J_0 = \int_{-1}^1 1/m(\xi) d\xi$, равные площадям под функциями $1/m(x)$, почти одинаковы. Угол же связан уже и с $z_1(t)$, а они сильно разнятся в рассмотренных случаях.



Фиг. 1.6. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ при конформном контакте (a) и при плоском покрытии и штампе, форма которого задается линейной функцией (b)

Следует также отметить тот факт, что поведение штампа и распределение контактных давлений в случае, когда покрытие повторяет форму штампа (случай a), и в случае, когда покрытие имеет постоянную толщину (случай b), сильно отличаются друг от друга (о решении таких задач можно посмотреть в [17]). Если форма основания штампа задается линейной функцией, то график контактных давлений в случае a несимметричен относительно оси $x = 0$ (рис. 1.4, графики a), а в случае b он уже симметричен (рис. 1.6, графики b). В рассмотренном примере для случая a угол поворота меняется с течением времени, а для случая b угол поворота вообще от него не зависит (это не общий результат, а исключительная особенность решения при линейном задании формы основания штампа) и равен углу наклона основания штампа в момент времени $t = \tau_0 - 0$

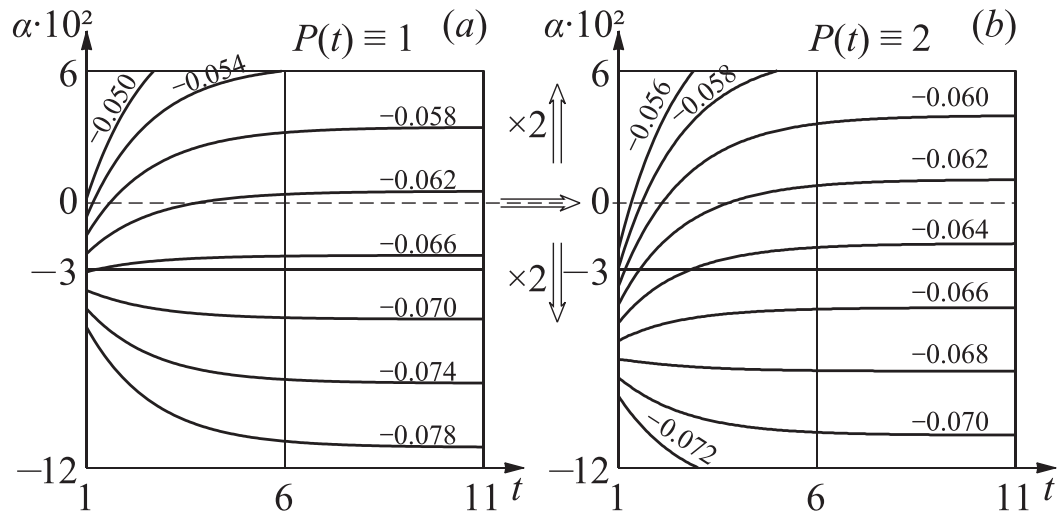


Фиг. 1.7. Распределение контактного давления (a) и зависимость эксцентриситета приложения нагрузки (b) при $P(t) \equiv 1$, $\alpha(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.2x$ (для распределения давлений: 1 — $t = 1$, 2 — $t = 1.5$, 3 — установившееся распределение)

(до начала приложения нагрузки). Разумеется, в случае более сложного задания формы основания штампа (даже уже при квадратичном) или при ненулевом эксцентриситете, угол поворота будет меняться с течением времени и зависеть от силы, однако с помощью рассмотренного примера мы показали, что решение для случая a нельзя использовать для получения решения для случая b . Каждая из этих постановок является самостоятельной задачей и требует отдельного подхода.

Если у нас есть возможность менять эксцентриситет приложения нагрузки с течением времени, то для любой известной формы основания штампа можно определить функцию $e(t)$ и распределение контактных давлений $q(x, t)$. На рис. 1.7 b показана функция $e(t)$ соответствующая изменению эксцентриситета при $m(x)$, заданной формулой (1.30). При таком режиме, как видно из рис. 1.7 a , контактные давления под штампом сильно отличаются контактных давлений в случае, когда эксцентриситет приложения равен нулю (рис. 1.4).

На рис. 1.8 a показаны графики зависимости угла поворота от времени при $P(t) \equiv 1$ для заданной формулой (1.30) функции $m(x)$ при различных значениях эксцентриситета приложения нагрузки e . Интерес представляют из себя кривые которые при $t = 1$ располагаются ниже нуля, а при $t \rightarrow \infty$ — выше нуля ($e \in (-0.0625, -0.051)$). Это означает, что для таких значений эксцентриситета приложения штамп за счет упругой составляющей сначала отклоняется против часовой стрелки, но потом из-за того, что материал покрытия вязкоупругий, сразу же начинает поворачиваться по часовой стрелке, причем в какой то момент вре-



Фиг. 1.8. Зависимость угла поворота $\alpha(t)$ от времени при $P(t) \equiv 1$ (a) и при $P(t) \equiv 2$ (b) для $m(x) = 1 + 0.2x$ при различных значениях эксцентриситета приложения нагрузки e

мени меняется знак угла. Ниже следует область ($e \in (-0.067, -0.0625)$), где происходит примерно то же самое, что и в предыдущей области, только угол не переходит через нуль. Особый интерес представляет из себя значение эксцентриситета ($e \approx -0.067$), при котором в начальный момент времени штамп поворачивается, а затем движется практически поступательно, без изменения этого угла.

Свойство 1. Вообще говоря, в общем случае для участка приложения нагрузки $[e_-, e_+]$ (об определении значений $e_- \geq -1$ и $e_+ \leq 1$ см. далее) существуют 3 подобласти: 1) подобласть $(e_{\text{right}}, e_+]$, в которой в начальный момент времени штамп поворачивается по часовой стрелке и затем продолжает отклоняться в ту же сторону ($\alpha(t) > 0$, $\dot{\alpha}(t) > 0$); 2) подобласть $[e_-, e_{\text{left}})$, в которой в начальный момент времени штамп поворачивается против часовой стрелки и затем продолжает отклоняться в ту же сторону ($\alpha(t) > 0$, $\dot{\alpha}(t) > 0$); 3) подобласть $(e_{\text{left}}, e_{\text{right}})$, в которой в начальный момент времени штамп отклоняется в одну сторону, а потом начинает поворачиваться в другую ($\alpha(t)\dot{\alpha}(t) \leq 0$, $\dot{\alpha}(t) \neq 0$). В зависимости от функции $m(x)$ одна из точек e_{left} и e_{right} является точкой, в которой в начальный момент времени $\alpha(1) = 0$, а другая — в которой изменение угла поворота с течением времени практически несущественно ($\alpha(t) \approx \text{const}$). В случае симметричности функции $m(x)$ эти две точки совпадают, причем $e_{\text{left}} = e_{\text{right}} = 0$. В это случае остается всего две области. Отметим, что в упругом случае точки e_{left} и e_{right} также совпадают, однако $e_{\text{left}} = e_{\text{right}} = e_0$ ($e_0 = 0$ только при симметричности $m(x)$), а

подобласти имеют вид: 1) подобласть $(e_0, e_+]$, где $\alpha(t) \equiv \alpha > 0$; 2) подобласть $[e_-, e_0)$, где $\alpha(t) \equiv \alpha < 0$. Очевидно, что в точке e_0 угол наклона $\alpha(t) \equiv 0$.

Свойство 2. Можно показать, что при постоянной силе $P(t) \equiv P$ осадка, угол поворота штампа и распределение контактных давлений прямо пропорциональны этой силе, то есть

$$\delta(P, t) = P f_\delta(t), \quad \alpha(P, t) = P f_\alpha(t), \quad q(P, x, t) = P f_q(x, t). \quad (1.31)$$

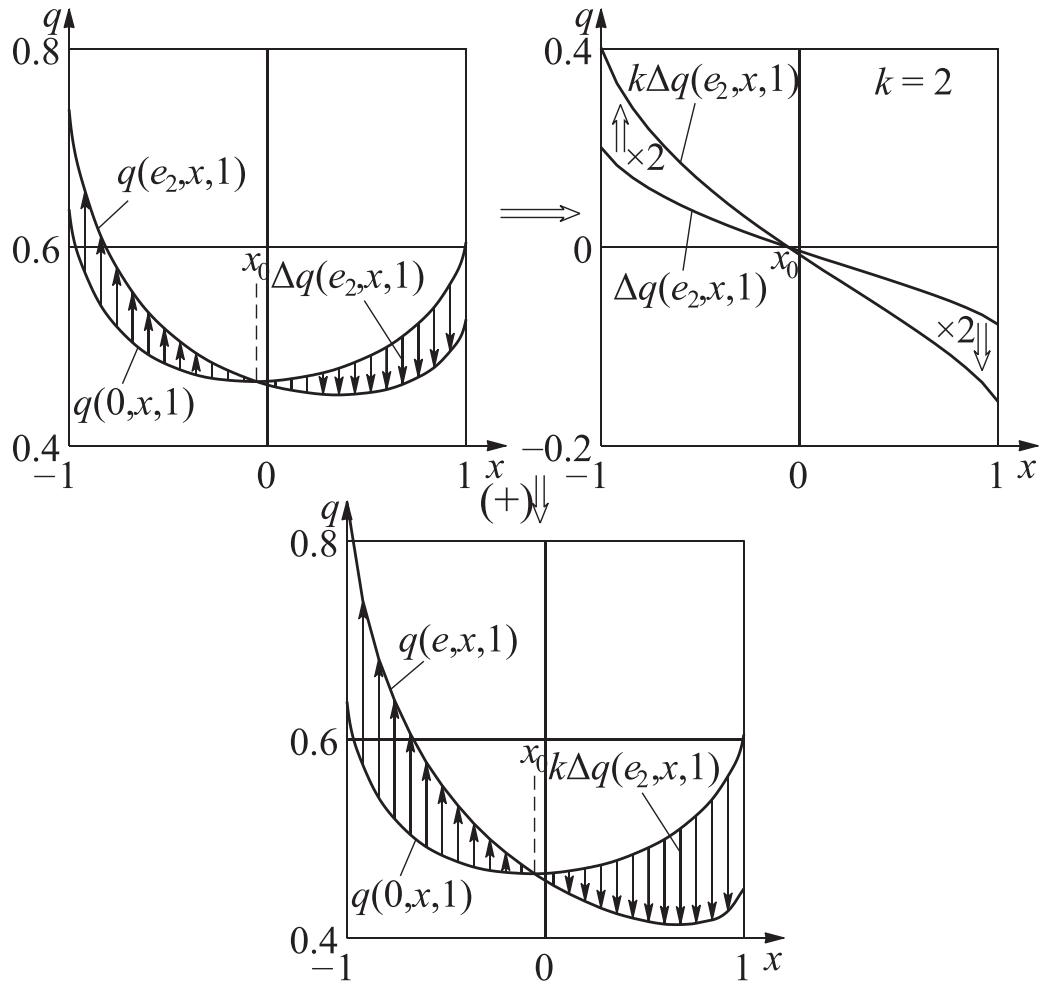
Следствие 1. Для получения зависимости какой-либо характеристики (осадки, угла поворота, контактных давлений) от времени либо от координаты при заданном эксцентриситете $e(t)$ для силы \tilde{P} можно воспользоваться известной зависимостью соответствующей характеристики при том же эксцентриситете, но при силе P . Для этого необходимо всего лишь растянуть график соответствующей функции по вертикали с коэффициентом $k = \tilde{P}/P$ (для угла поворота это отражено на рис. 1.8 при $P(t) \equiv 1$ (a) и $P(t) \equiv 2$ (b)).

Следствие 2. При любой постоянной силе приложения нагрузки подобласти $[e_-, e_{\text{left}})$, $(e_{\text{left}}, e_{\text{right}})$ и $(e_{\text{right}}, e_+]$ не изменяются.

Следствие 3. Если при каком-либо значении силы приложения P при заданном эксцентриситете $e(t)$ происходит отрыв штампа от основания (то есть существует область, где $q(x, t) < 0$), то при любом другом значении силы приложения \tilde{P} при том же эксцентриситете ее приложения также будет происходить отрыв, причем на том же интервале. Справедливо и обратное утверждение, что если при какой-либо силе отрыва не происходит, то и при любом другом значении силы отрыва также не будет.

Свойство 3. Можно показать, что при постоянном эксцентриситете $e(t) \equiv e$ приложения нагрузки $P(t)$ осадка, угол поворота штампа и контактные давления есть некоторая линейная функция параметра e , то есть

$$\begin{aligned} \delta(e, t) &= f_1^\delta(t) + e f_2^\delta(t), & \alpha(e, t) &= f_1^\alpha(t) + e f_2^\alpha(t), \\ q(e, x, t) &= f_1^q(x, t) + e f_2^q(x, t). \end{aligned} \quad (1.32)$$



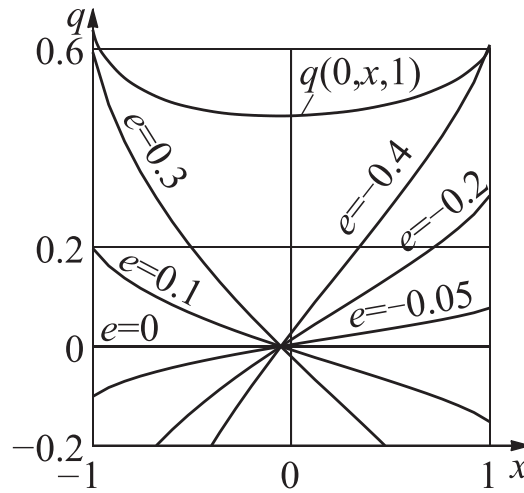
Фиг. 1.9. Преобразование графика контактного давления при изменении эксцентриситета приложения нагрузки ($P(t) \equiv 1$, $m(x) = 1 + 0.2x$)

Следствие. Если известно по крайней мере 2 каких-либо распределения требуемой характеристики $\vartheta(x, t)$ (осадки, угла поворота или распределения контактных давлений) при значениях эксцентриситета e_1 и e_2 , то по ним можно определить распределения этой характеристики для любого другого значения эксцентриситета e по простой формуле

$$\vartheta(e, x, t) = f_1^\vartheta(x, t) + e f_2^\vartheta(x, t), \quad \vartheta = \delta, \alpha, q,$$

$$f_1^\vartheta(x, t) = \frac{e_2 \vartheta(e_1, x, t) - e_1 \vartheta(e_2, x, t)}{e_2 - e_1}, \quad f_2^\vartheta(x, t) = \frac{\vartheta(e_2, x, t) - \vartheta(e_1, x, t)}{e_2 - e_1}.$$

Продemonстрируем реализацию следствия 1 на примере. Рассмотрим контактные давления, соответствующие $e_1 = 0$ и $e_2 = -0.051$ при $t = 1$ (см. рис. 1.9). Так как $e_1 = 0$, функции $f_1^q(x, 1)$ и $f_2^q(x, 1)$ принимают



Фиг. 1.10. Графическое определение области допустимых значений эксцентриситета ($P(t) \equiv 1$, $m(x) = 1 + 0.2x$)

намного более простой вид, а именно

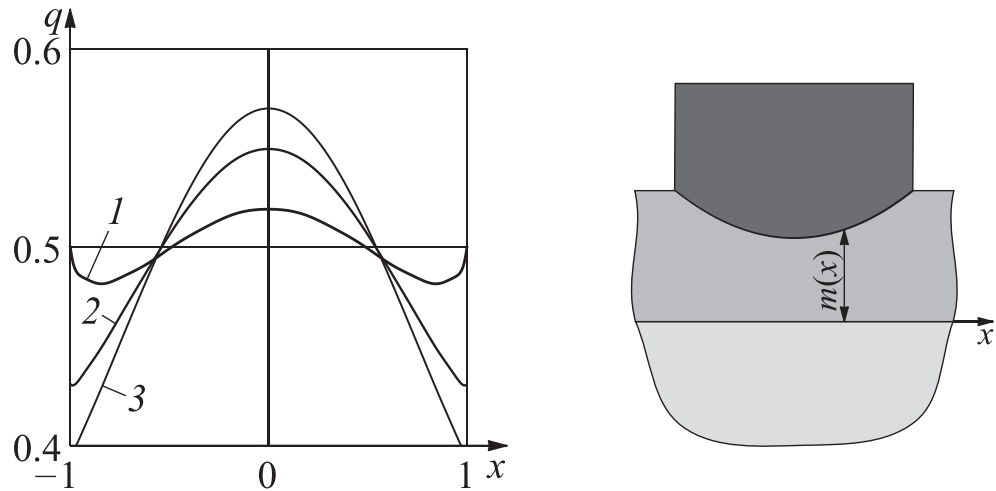
$$f_1^q(x, 1) = q(0, x, 1), \quad f_2^q(x, 1) = \frac{q(e_2, x, 1) - q(0, x, 1)}{e_2},$$

и тогда

$$q(e, x, 1) = q(0, x, 1) + \frac{e}{e_2} \Delta q(e_2, x, 1), \quad \Delta q(e_2, x, 1) = q(e_2, x, 1) - q(0, x, 1).$$

Таким образом, для построения распределения давления при эксцентриситете e необходимо растянуть график разности функций $\Delta q(e_2, x, 1)$ в $k = |e/e_2|$ раз и отразить, если $e/e_2 < 0$, а затем сместить его на $q(0, x, 1)$. В примере, изображенном на рис. 1.9, преобразуется распределение контактного давления при эксцентриситете $e = -0.051$ к распределению контактного давления при $e = -0.102$ ($k = 2$). Из полученных зависимостей для контактных давлений также видно, что в любой момент времени t существует точка x_0 , в которой любых двух эксцентриситов e_1 и e_2 выполняется равенство $q(e_1, x_0, t) = q(e_2, x_0, t)$. В рассмотренном примере $x_0 \approx -0.055$ при $t = 0$.

С помощью изложенного выше свойства решения можно графически находить область допустимых значений $[e_-, e_+]$ эксцентриситета в момент времени t (рис. 1.10). Для этого сначала необходимо нарисовать график $q(0, x, t)$ ($x \in [-1, 1]$). А затем на том же чертеже начать наносить функции $f_q(e_k, x, t) = \frac{e_k}{e_2} \Delta q(e_2, x, t)$. Если кривые $f_q(e_k, x, t)$ и $q(0, x, t)$ не пересекаются в области $[-1, 1]$, то в данный момент времени t эксцентриситет e_k не вызывает отрыва штампа от слоя. В случае пересечения кривых штамп отрывается и постановка задачи становится некорректной,



Фиг. 1.11. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 0.7 + 0.4x^2$ ($1 - t = 1$, $2 - t = 1.5$, $3 -$ установившееся распределение)

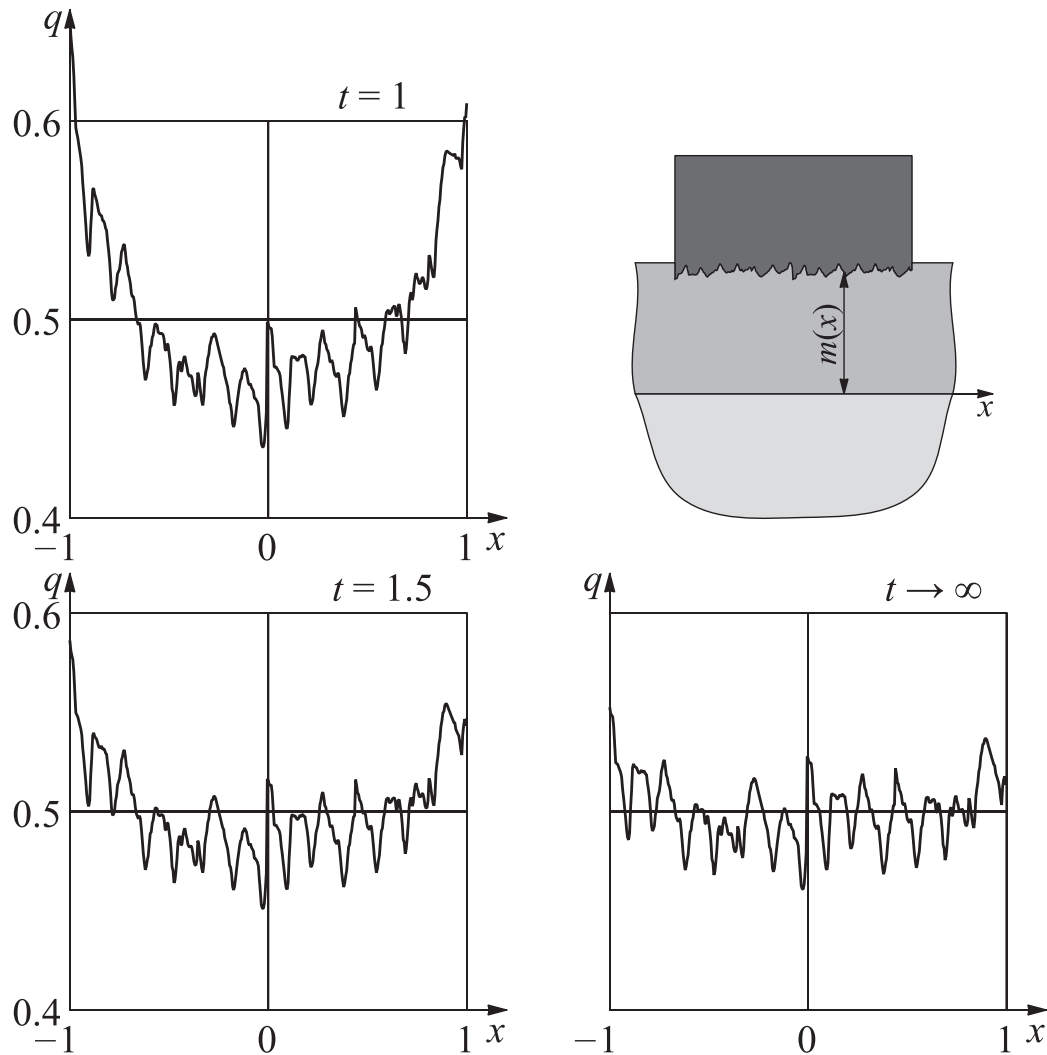
так как область контакта не равна $[-1, 1]$. В случае $m(x) = 1 + 0.2x$ значения эксцентриситета приложения в начальный момент времени $t = 1$ должны быть в интервале $e(1) \in [-0.39, 0.32]$. В дальнейшем этот интервал изменяется, причем в зависимости от параметров задачи может как уменьшаться, так и увеличиваться.

Если при прочих равных параметрах функцию $m(x)$ взять в виде

$$m(x) = 0.7 + 0.4x^2,$$

то есть толщина слоя по краям больше толщины слоя в центре, то распределение контактных давлений изменит свой вид и максимум его будет не по краям, а в центре (рис. 1.11), причем сначала график будет иметь вид синусоиды, а с течением времени трансформируется в выгнутую вверх параболу. Такой вид распределения значительно отличается от традиционного вида распределения контактных давлений, когда параболла выгнута в противоположную сторону. Этот пример показывает, что тонкое покрытие переменной толщины может привести к значительному перераспределению контактных давлений.

Отметим, что с помощью примененного в данной главе метода можно решать контактные задачи для оснований с покрытиями и штампов, имеющих сложный профиль поверхности, например, изображенный на рис. 1.12. Именно такие поверхности, а не идеализированные, как в предыдущих примерах, и встречаются на практике. Профили реальных поверхностей определяются экспериментально при помощи специальных измерительных приборов, причем функции $m(x)$ в этом случае оказыва-



Фиг. 1.12. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$

ются сильно осциллирующими. Как видно из примера, что полученные решения улавливают все особенности профиля поверхности.

Таким образом, с помощью изложенных выше примеров показано, что распределение контактных давлений и поведение штампа существенно зависят от формы покрытия (или штампа, поскольку речь идет о конформном контакте). Показано, что учет явления конформного контакта приводит к результатам, принципиальным образом отличающимся от классического случая. Исследовано влияние силы и эксцентриситета ее приложения на характер решения. В частности, установлено, что угол наклона штампа может менять свой знак с течением времени даже при постоянных силе и эксцентриситете; существует эксцентриситет приложения постоянной силы, при котором угол наклона не меняется с течением времени, причем этот эксцентриситет не зависит от величины силы;

при постоянной силе приложения контактные давления, осадка и угол поворота штампа прямо пропорциональны ее значению, откуда следует, что характер поведения штампа на слое не зависит от значения силы (если при каком-либо значении постоянной силы, действующей на штамп, происходит отрыв, то и при любом другом значении отрыв также будет происходить; если при какой-либо постоянной силе угол поворота меняет свой знак с течением времени, то и при любой другой он также будет менять этот знак, причем в тот же самый момент времени и т. д.). Предложены графические методы решения контактных задач по нескольким уже известным решениям, а также метод определения области приложения нагрузки.

1.2 Осесимметричная задача

1. Постановка задачи.

Постановка, да и метод решения, как это будет показано ниже, осесимметричной задачи аналогична постановке для случая плоской задачи.

На недеформируемом подстилающем основании лежит вязкоупругий слой с покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавливается гладкий жесткий кольцевой штамп с силой $P(t)$, приложенной по его оси (рис. 1.13). Считается, что форма покрытия в недеформированном состоянии (при $t < \tau_0$) совпадает с формой штампа. Область контакта со временем не изменяется и ограничена окружностями радиусов a и b ($a < b$). Покрытие считается тонким по сравнению с областью контакта ($h(r) \ll (b - a)$). И тонкое покрытие, и нижний слой произвольной толщины H изготовлены из вязкоупругого материала и стареют однородно (покрытие — в момент времени $\tau_1 \leq \tau_0$, нижний слой — в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$).

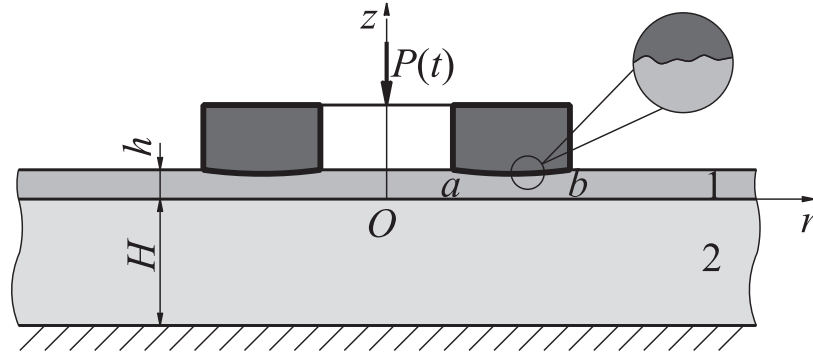
Как и прежде, для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(r, t) = -q(r, t)$, действующей на том же кольцевом участке ($a \leq r \leq b$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(r, t)$ можно записать в форме [17]:

$$u_z(r, t) = k_\nu(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(r, t)h(r)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{D} \frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{D}f(r, t) = \int_a^b k_{\text{as}}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) f(\rho, t) \rho d\rho,$$

где, как и в плоском случае, $E_k(t - \tau_k)$ — модули упругомгновенной деформации покрытия ($k = 1$) и нижнего слоя ($k = 2$), ν_2 — коэффициент Пуассона нижнего слоя; \mathcal{I} — тождественный оператор, \mathcal{V}_k — интегральные операторы Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$), $C^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) — меры ползучести при растяжении (см. плоскую задачу), k_ν — безразмерный коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия с нижним слоем и вычисляемый либо по формуле (1.2), либо по формуле (1.3), \mathcal{D} — интегральный оператор с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{\text{as}}(r/H, \rho/H)$, которое имеет вид [3, 22]

$$k_{\text{as}}(r, \rho) = \int_0^\infty L(u) J_0(ru) J_0(\rho u) du, \quad (1.34)$$



Фиг. 1.13. Конформный контакт штампа и вязкоупругого основания в осесимметричном случае

где $J_0(s)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. В зависимости от условий на нижней грани основания функция $L(u)$ определяется либо по формуле (1.5), либо по формуле (1.6).

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (1.33) получим интегральное уравнение исследуемой осесимметричной контактной задачи в виде:

$$k_\nu(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(r, t)h(r)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F} \frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t), \quad (1.35)$$

$$a \leq r \leq b,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа. Разумеется, по сравнению с плоским случаем ушла одна степень свободы и пропала неизвестная величина, отвечающая за наклон штампа.

Уравнение (1.35) следует дополнить условием равновесия штампа на слое (количество уравнений равновесия также уменьшилось)

$$2\pi \int_a^b q(\rho, t)\rho d\rho = P(t), \quad (1.36)$$

Здесь через $M(t) = e(t)P(t)$ обозначен момент приложения силы $P(t)$.

Сделав в (1.35) и (1.36) замену переменных по формулам

$$(r^*)^2 = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad \lambda = \frac{H}{b - a}, \quad \eta = \frac{a}{b - a}, \quad \xi^2 = \frac{b + a}{b - a},$$

$$t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \delta^*(t^*) = k_P \frac{\delta(t)}{b - a},$$

$$\begin{aligned}
q^*(r^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad m^*(r^*) = \frac{k_m k_\nu}{1 - \nu_2^2} \frac{h(r)}{2(b - a)}, \\
c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{k_m E_1(t - \tau_1)}, \quad P^*(t^*) = \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2(t - \tau_2)(b^2 - a^2)}, \\
\mathcal{V}_k^* f(r^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_k(t^*, \tau^*) f(r^*, \tau^*) d\tau^*, \quad k = 1, 2, \\
K_1(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_2)}{E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \\
K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \\
\mathcal{B}^* f(r^*, t^*) &= \int_0^1 k_{\text{as}}^*(r^*, \rho^*) f(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*, \\
k_{\text{as}}^*(r^*, \rho^*) &= \frac{\xi^2}{\lambda} k_{\text{as}} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b + a}{H} k_{\text{as}} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Безразмерные коэффициенты k_m и k_P несут тот же смысл, что и в случае плоской задачи. Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(r)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)q(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{B}q(r, t) = \delta(t), \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{1.38}$$

и дополнительное условие

$$\int_0^1 q(\rho, t) \rho d\rho = P(t). \tag{1.39}$$

Ядро $k_{\text{as}}(r/H, \rho/H)$ является симметричным положительно определенным ядром Фредгольма. Умножая на $\sqrt{m(r)}$ уравнение (1.38) и вводя обозначения

$$\begin{aligned}
Q(r, t) &= \sqrt{m(r)} q(r, t), \quad k(r, \rho) = \frac{k_{\text{as}}(r, \rho)}{\sqrt{m(r)} \sqrt{m(\rho)}}, \\
\mathcal{D}Q(r, t) &= \int_0^1 k(r, \rho) Q(\rho, t) \rho d\rho,
\end{aligned} \tag{1.40}$$

интегральное уравнение (1.38) с несимметричным ядром Шмидта приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{D}Q(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}}, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{1.41}$$

Дополнительное условие (1.39) также подвергаются преобразованию:

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = P(t). \quad (1.42)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (1.41), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительное условие (1.42).

2. Метод решения.

Как и для случая плоской деформации применим обобщенный проекционный метод, описанный в 0.4 (отличие состоит в том, что в данной постановке на одну степень свободы меньше).

Решение уравнения (1.41) при дополнительном условии (1.42) будем искать в классе функций непрерывных по времени t в пространстве $L_2(0, 1)$ (см., например [17, 21]). Для этого построим сначала ортонормированную в $L_2(0, 1)$ систему функций такую, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(r)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от r и весовой функции $1/\sqrt{m(r)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании [93]

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_i^\circ(\rho) p_j^\circ(\rho) \rho d\xi &= \delta_{ij}, \quad p_n^\circ(r) = \frac{P_n^\circ(r)}{\sqrt{m(r)}}, \\ P_0^\circ(r) &= \frac{1}{\sqrt{I_0}}, \quad P_n^\circ(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}^\circ \Delta_n^\circ}} \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & \cdots & I_n \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2n} \end{vmatrix}, \\ I_n &= \int_0^1 \frac{\rho^{2n+1}}{m(\rho)} d\rho, \quad \Delta_{-1}^\circ = 1, \quad \Delta_n^\circ = \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & \cdots & I_n \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_n & I_{n+1} & \cdots & I_{2n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Отметим, что при $m(r) = \text{const}$ многочлены $p_n^\circ(r)$ можно вычислять по формулам

$$p_n^\circ(r) = \sqrt{4n+1} P_n^L(1-2r^2),$$

где $P_n^L(r)$ — полиномы Лежандра.

Гильбертово пространство $L_2(0, 1)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(0, 1) = L_2^{(0)}(0, 1) \oplus$

$L_2^{(1)}(0, 1)$, где $L_2^{(0)}(0, 1)$ — евклидово пространство с единственной базисной функцией $p_0^\circ(r)$, а $L_2^{(1)}(0, 1)$ — гильбертово пространство с базисом $\{p_1^\circ(r), p_2^\circ(r), \dots\}$. Подынтегральная функция и правая часть представимы в виде алгебраической суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(0, 1)$ и $L_2^{(1)}(0, 1)$, соответственно, то есть

$$Q(r, t) = Q_0(r, t) + Q_1(r, t), \quad f(r, t) = f_0(r, t) + f_1(r, t),$$

где

$$Q_0(r, t) = v_0(t)p_0^\circ(r), \quad f(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}},$$

$$f_1(r, t) = \sqrt{I_0}\delta(t)p_0^\circ(r), \quad f_2(r, t) \equiv 0.$$

Заметим, что в представлении для $Q(r, t)$ нам известно слагаемое $Q_0(r, t)$, функция разложения которого определяется дополнительным условием (1.42):

$$v_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{I_0}}, \quad (1.44)$$

а слагаемое $Q_1(r, t)$ требуется найти. Для правой части наоборот — требуется определить $f_0(r, t)$, а функция $f_1(r, t) \equiv 0$. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи, поставленной и решенной в [65] методом, рассмотренным в разделе 0.4. Продемонстрируем его применительно к нашей ситуации в частном случае двумерной задачи на конечном интервале $0 \leq r \leq 1$ с $N = 1$ дополнительными условиями.

Аналогично проделанному в §2 раздела 1.1 для плоских задач, можно ввести оператор ортогонального проектирования, отображающий пространство $L_2(0, 1)$ в $L_2^{(0)}(0, 1)$:

$$\mathcal{P}_0\phi(r, t) = \int_0^1 \phi(\rho, t)p_0^\circ(r)p_0^\circ(\rho)\rho d\rho.$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathcal{P}_1 = \mathcal{I} - \mathcal{P}_0$ переводит пространство $L_2(0, 1)$ в $L_2^{(1)}(0, 1)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{P}_i f(r, t) = f_i(r, t), \quad \mathcal{P}_i Q(r, t) = Q_i(r, t), \quad i = 0, 1.$$

Следуя [65], подействуем на уравнение (1.41) оператором ортогонального проектирования \mathcal{P}_1 . В результате получим уравнение для определения $Q_1(r, t)$ с известной правой частью

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q_1(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{D}Q_1(r, t) = -(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{F}Q_0(r, t). \quad (1.45)$$

Его решение необходимо строить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{D}$, который, как можно показать на основании [65], является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(1)}(0, 1)$ в $L_2^{(1)}(0, 1)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(1)}(0, 1)$ [56]. Спектральная задача для оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{D}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1\mathcal{D}\psi_k(r) &= \beta_k\psi_k(r), \\ \psi_k(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(k)} p_i^{\circ}(r), \quad k = 1, 2, \dots, \\ k(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} p_m^{\circ}(r) p_n^{\circ}(\rho), \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \psi_n^{(k)} &= \beta_k \psi_m^{(k)}, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1.46}$$

Представив теперь искомую функцию $Q_1(r, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\psi_k(r)$ ($k = 1, 2, \dots$) в $L_2^{(1)}(0, 1)$, то есть

$$Q_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \psi_k(r),$$

и подставив это представление в (1.45), получим, что неизвестные функции разложения $v_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) можно найти по формуле

$$\begin{aligned}v_k(t) &= -(\mathcal{I} + \mathcal{Y}_k) \frac{(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)v_0(t)T_k}{c(t) + \beta_k}, \\ T_k &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n} \psi_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{Y}_k f(r, t) &= \int_1^t R_k^{\circ}(t, \tau) f(r, \tau) d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $R_k^{\circ}(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^{\circ}(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \beta_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \beta_k}.$$

Как и в плоском случае, полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[v_0(t) P_0^{\circ}(r) + \dots \right],$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой (1.37) функцию толщины покрытия $h(r)$.

Теперь, отыскав $Q_1(r, t)$, можно найти и неизвестную функцию осадки штампа. Для этого подействуем оператором \mathcal{P}_0 на уравнение (1.41):

$$c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)Q_0(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{P}_1\mathcal{D}Q(r, t) = \sqrt{I_0}\delta(t)p_0^o(r).$$

Полученное равенство непосредственно дает формулу осадки $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{I_0}} \left\{ c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)v_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[T_{00}v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k v_k(t) \right] \right\}.$$

Таким образом, построено аналитическое решение (в рядах с любой наперед заданной точностью) осесимметричной контактной задачи для вязкоупругого слоя с тонким покрытием, повторяющим форму штампа.

3. Случай задания осадки штампа.

Разумеется и для осесимметричного случая этим же методом можно решить задачу с известной правой частью, то есть когда задана функция осадки $\delta(t)$, а требуется определить закон изменения силы $P(t)$ для обеспечения такого режима.

Дополнительное условие (1.42) превращается в уравнение для нахождения функции $P(t)$:

$$P(t) = \int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho, \quad (1.47)$$

Метод решения практически такой же, как и ранее, только теперь уже не требуется разделять пространство на два, так как правая часть полностью известна. Все также необходимо строить ортонормированную систему функций специального вида и с целью избежания решения бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра переходить к новым базисным функциям.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем лишь окончательные формулы для вычисления контактных давлений под

ШТАМПОМ:

$$\begin{aligned}
 q(r, t) &= \frac{Q(r, t)}{\sqrt{m(r)}}, \quad Q(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{v}_k(t) \hat{\psi}_k(r), \\
 \hat{v}_k(t) &= (\mathcal{I} + \hat{\mathcal{Y}}_k) \frac{\delta(t) g_k^\delta}{c(t) + \hat{\beta}_k}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_k f(r, t) = \int_1^t \hat{R}_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau, \\
 \hat{\psi}_m(r) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\psi}_i^{(m)} p_i^\circ(r), \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} \hat{\psi}_n^{(k)} = \hat{\beta}_k \hat{\psi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
 k(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} p_m^\circ(r) p_n^\circ(\rho), \quad g_k^\delta = \int_0^1 \frac{\hat{\psi}_k(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = \hat{\psi}_0^{(k)} \sqrt{I_0}.
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Функции $p_k^\circ(x)$ вычисляются по формулам (1.43), а ядра $\hat{R}_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^\circ(t, \tau) = \frac{c(t) K_1(t, \tau) + \hat{\beta}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \hat{\beta}_k}.$$

Значком ‘ $\hat{}$ ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (1.48) контактных давлений под штампом $Q(r, t)$, используя формулу (1.47) можно найти и функцию $P(t)$:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^\delta \hat{v}_k(t). \tag{1.49}$$

4. Численные расчеты.

Решение осесимметричной задачи является первым шагом к решению пространственной задачи. Однако сама по себе такая задача намного более бедна эффектами, нежели плоская, так как в ней присутствует всего одна степень свободы — осадка штампа. Все качественные выводы, сделанные для плоской задачи и не относящиеся к повороту, переносятся и на осесимметричные задачи.

Из всего вышесказанного следует, что исследовав контактную задачу в плоской постановке, вряд ли удастся найти какие-либо особенности в решении осесимметричной задачи. Так что в этом параграфе рассмотрим всего лишь один пример и покажем, что графики распределения контактных давлений для наглядности необходимо преобразовывать (это связано с нелинейной заменой переменных).

Как и в плоском случае, рассмотрим двухслойное основание, нижний слой которого изготовлен из упругого материала, а верхний — из вязкоупругого стареющего, для которого $E_1(t - \tau_1) \equiv E_1$, а мера ползучести $C(t, \tau)$ задается уравнением (1.28). Между слоями осуществляется идеальный контакт. Материалы возьмем те же самые, то есть зададимся теми же параметрами (1.29), что и ранее. Также будем считать, что $\tau_1 = 0$.

Пусть функция толщины $h(r)$ имеет вид, показанный на рис. 1.14 *a* (на самом деле на этом рисунке изображена линейно преобразованная функция $m^{**}(r) = k_m k_\nu (1 - \nu_2^2)^{-1} h((b - a)(r + \eta)) 0.5(b - a)^{-1}$). Тогда соответствующая ей функция $m(r)$ представляется графиком, изображенным на рис. 1.14 *b*.

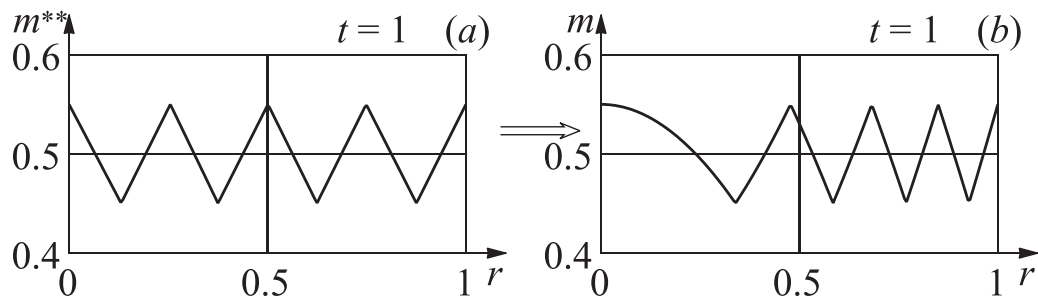
Распределения контактных давлений $q(x, t)$ в различные моменты времени для этого случая показаны на рис. 1.15 *a, c, e*. Однако из-за нелинейности преобразования вид функции $q(r, t)$ не совсем наглядно отражает реальное распределение. Можно показать, что для того, чтобы преобразовать его к удобному для восприятия виду, необходимо строить не $q(r, t)$, а преобразованную функцию $q^{**}(r^{**}, t)$, определяемую из соотношения

$$q^{**}(r^{**}, t) = q(r, t) = q\left(\sqrt{\frac{(r^{**} + \eta)^2 - \eta^2}{\xi^2}}, t\right), \quad r^{**} = \sqrt{\xi^2 r^2 + \eta^2} - \eta.$$

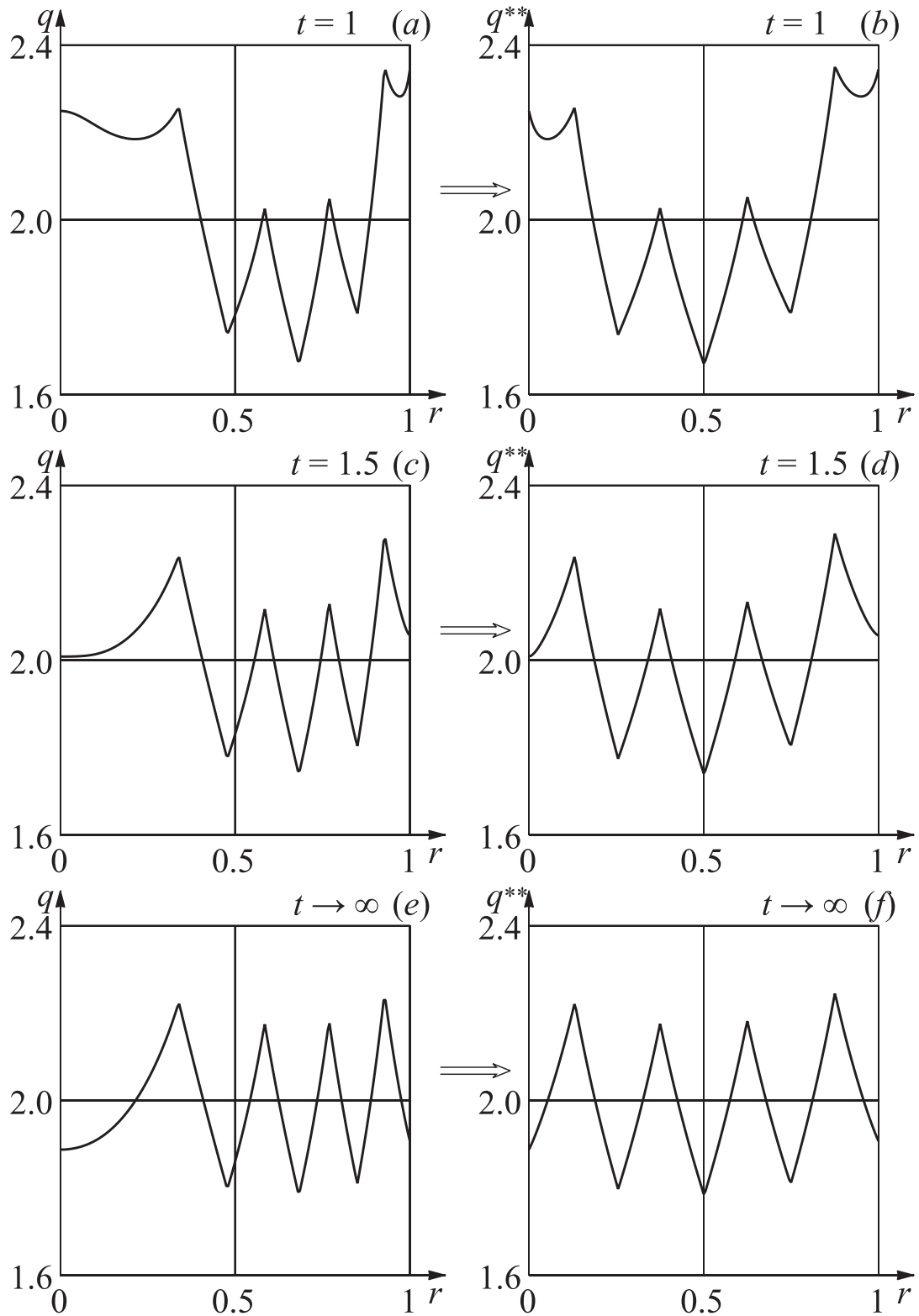
Графики функции $q^{**}(r, t)$ показаны на рис. 1.15 *b, d, f*. Следует заметить, что условие равновесия штампа на слое (1.39) преобразуется в

$$\int_0^1 q^{**}(\rho) \frac{\rho + \eta}{\xi^2} d\rho = P(t).$$

График осадки качественно имеет практически тот же вид, что и в плоском случае.



Фиг. 1.14. Функции толщины покрытия при различных преобразованиях (*a* — линейное, *b* — нелинейное)



Фиг. 1.15. Распределение контактного давления в различных координатах для различных моментов времени

Как и в плоском случае, при постоянной силе $P(t) \equiv P$ распределение контактных давлений и осадка прямо пропорциональны значению этой

силы, причем

$$\delta(P, t) = P f_{\delta}(t), \quad q(P, r, t) = P f_q(r, t).$$

Это означает, что для получения зависимости какой-либо характеристики (осадки или контактных давлений) от времени либо от координаты при силе \tilde{P} можно воспользоваться известной зависимостью соответствующей характеристики при силе P , для чего необходимо всего лишь растянуть график соответствующей функции по вертикали с коэффициентом $k = \tilde{P}/P$.

Как видно из примера при построении распределения контактного давления следует обязательно переходить к старым переменным, либо к переменным, связанным с начальными какой-либо линейной заменой, так как при рассмотрении полученной функции $q(r, t)$ можно ошибиться с местом расположения экстремумов, а также принять неправильное заключение о каких-либо особенностях этого распределения (например, в рассмотренном случае производная функции $q(r, t)$ равна нулю при $r = 0$, в то время как в действительности производная контактных давлений на внутреннем радиусе кольца отлична от нуля, что показывает график функции $q^{**}(r, t)$).

1.3 Основные результаты и выводы

Сформулируем основные результаты, полученные в первой главе.

1. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи о конформном контакте между вязкоупругими стареющими основаниями с покрытиями и жесткими штампами. Показана важность учета конформного контакта, его существенное отличие от классического гладкого. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы основания выделена явно, что позволяет проводить расчеты для реальных форм поверхности покрытий, описываемых быстро осциллирующими функциями.
2. Исследовано влияние силы и эксцентриситета ее приложения (в плоском случае) на характер решения. В частности, установлено, что угол наклона штампа может менять свой знак с течением времени даже при постоянной силе и эксцентриситете; существует эксцентриситет приложения постоянной силы, при котором угол наклона не меняется с течением времени, причем этот эксцентриситет не зависит от величины силы; при постоянной силе приложения контактные давления, осадка и угол поворота штампа прямо пропорциональны ее значению, откуда следует, что характер поведения штампа на слое не зависит от значения силы (если при каком-либо значении постоянной силы, действующей на штамп, происходит отрыв, то и при любом другом значении отрыв также будет происходить; если при какой-либо постоянной силе угол поворота меняет свой знак с течением времени, то и при любой другой он также будет менять этот знак, причем в тот же самый момент времени и т. д.). Отмечено, что с помощью использованного метода можно решать контактные задачи для оснований с покрытиями и штампов, имеющих сложный профиль поверхности, определяемый экспериментально при помощи специальных измерительных приборов и описывающийся сильно осциллирующими функциями. Предложены графические методы решения контактных задач по нескольким уже известным решениям, основанный на линейности решения относительно силы и эксцентриситета ее приложения, а также метод определения области приложения нагрузки.
3. Показано применение проекционного метода решения смешанных интегральных уравнений в конкретных случаях плоских и осесимметричных контактных задачах для тел с покрытиями со сложной формой поверхности.

ГЛАВА 2

Контактные задачи для тел с поверхностно неоднородными покрытиями

Исследуется контактное взаимодействие жесткого штампа и вязкоупругого основания с тонким упругим поверхностно неоднородным покрытием, то есть покрытием, свойства которого меняются от точки к точке его поверхности, но постоянны по глубине. Поверхностная неоднородность покрытия возникает обычно вследствие особенностей нанесения этого покрытия на основной слой, а также при поверхностной обработке уже нанесенных покрытий (лазерная обработка, ионная имплантация и т. д.). Поверхностная неоднородность может быть вызвана также использованием различных материалов при изготовлении покрытий. Далее рассматриваются плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Изучается влияние вида неоднородности покрытия на контактные напряжения под штампом, а также на его осадку и угол поворота.

Основные результаты главы отражены в работах [42, 44, 46, 48–50, 66].

2.1 Плоская задача

1. Постановка задачи.

На недеформируемом подстилающем основании лежит вязкоупругий слой с упругим покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавливается гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ и эксцентриситетом ее приложения $e(t)$ (рис. 2.1). Область контакта со временем не изменяется, длина линии контакта равна $2a$, а форма основания штампа задается функцией $g(x)$ ($g(x) \geq 0$, $\exists x_0 \in [-a, a] : g(x_0) = 0$). Тонкое упругое покрытие толщины h ($h \ll 2a$), свойства которого зависят от продольной координаты x [66, 64], лежит на нижнем вязкоупругом слое произвольной толщины H , изготовленном в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$ и стареющем однородно. В данном разделе будем рассматривать случай плоской деформации.

Как и в разделе 1, для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(x, t) = -q(x, t)$, действующей на том же участке ($-a \leq x \leq a$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(x, t)$ можно записать в форме [17]:

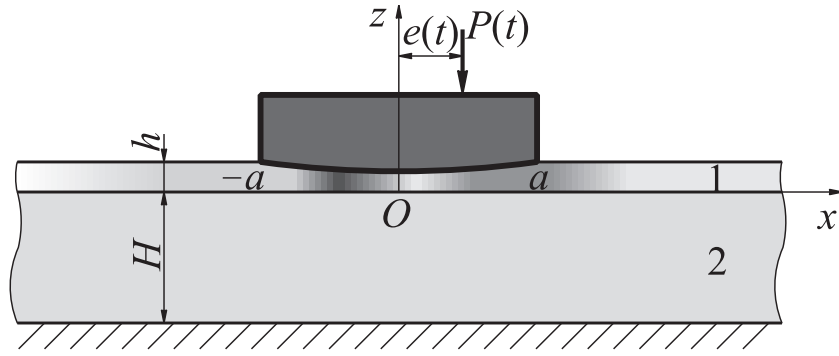
$$\begin{aligned} u_z(x, t) &= \frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}\frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ \mathcal{F}f(x, t) &= \int_{-a}^a k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right)f(\xi, t) d\xi, \\ \mathcal{V}_2f(x, t) &= \int_{\tau_0}^t K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)f(x, \tau) d\tau, \\ K^{(2)}(t, \tau) &= E_2(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C^{(2)}(t, \tau)\right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации вязкоупругого слоя; \mathcal{I} — тождественный оператор; \mathcal{V}_2 — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, $C^{(2)}(t, \tau)$ — мера ползучести при растяжении; $R(x)$ — функция жесткости покрытия, зависящая от условий его соединения с нижним слоем, причем в случае гладкого контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)}{1 - \nu_1^2(x)}, \quad (2.2)$$

а в случае идеального контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)[1 - \nu_1(x)]}{[1 + \nu_1(x)][1 - 2\nu_1(x)]}, \quad (2.3)$$



Фиг. 2.1. Плоская контактная задача для вязкоупругого основания с упругим неоднородным покрытием

$\nu_1(x)$ и $E_1(x)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга покрытия, \mathcal{F} — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{\text{пл}}[(x - \xi)/H]$, которое имеет вид (1.4)–(1.6).

Приравнявая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (2.1) получим интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде:

$$\frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}\frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (2.4)$$

$$-a \leq x \leq a,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота. Условия равновесия штампа на слое совпадают с уравнениями (1.8).

Сделав в (2.4) и (1.8) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \\ \delta^*(t^*) &= k_P \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = k_P \alpha(t), \quad g^*(x^*) = k_P \frac{g(x)}{a}, \\ c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad m^*(x^*) = \frac{E_0}{R(x)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{2a}, \\ q^*(x^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ P^*(t^*) &= \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2k_P M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a^2}, \quad (2.5) \\ \mathcal{V}_2^* f(x^*, t^*) &= \int_1^{t^*} K_2(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*, \\ K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* f(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\ k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Безразмерный коэффициент k_P вводится исключительно для улучшения вида функций $P^*(t^*)$ и $M^*(t^*)$. Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(x)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{A}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.6)$$

с дополнительными условиями (1.11). Деля на $\sqrt{m(x)}$ уравнение (2.6) и вводя обозначения (1.12), интегральное уравнение (2.6) приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t)Q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} - \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.7)$$

Дополнительные условия (1.11) приводятся к виду:

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (2.8)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (2.7), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (2.8).

В следующем параграфе мы приведем лишь окончательные аналитические результаты, так как метод решения подобной задачи был подробно описан в §2 раздела 1.1.

2. Решение плоской задачи.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, проведенных в предыдущем разделе, приведем лишь решение поставленной задачи (2.7), (2.8).

Функция $Q(x, t)$ представляется в виде

$$Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x).$$

Здесь полиномы $p_0(x)$ и $p_1(x)$ задаются формулами (1.15), функции разложения $z_0(t)$ и $z_1(t)$ находятся из соотношений (1.16), собственные функции $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) ищутся из (1.18), а функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$) определяются из

$$z_k(t) = -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{g_k + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) [z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k}$$

$$K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$\mathcal{W}_k f(x, t) = \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau,$$

где собственные значения γ_k , собственные векторы $\varphi_n^{(k)}$ ($k, n = 2, 3, \dots$) и коэффициенты R_{mn} ($m, n = 0, 1, \dots$) разложения ядра интегрального оператора \mathcal{F} ищутся по формулам (1.18), а $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, 3, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{\gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Коэффициенты g_k ($k = 0, 1, \dots$) — это коэффициенты разложения функции $g(x)/\sqrt{m(x)}$ по базисным функциям:

$$\frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}} = g_0 p_0(x) + g_1 p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \varphi_k(x).$$

$$g_0 = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} p_0(\xi) d\xi, \quad g_1 = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} p_1(\xi) d\xi, \quad (2.9)$$

$$g_k = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \varphi_k(\xi) d\xi, \quad k = 2, 3, \dots$$

Как и в предыдущем разделе, полученное решение имеет структуру:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t) P_0(x) + z_1(t) P_1(x) + \dots \right],$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит и связанную с ней заменой (2.5) функцию жесткости покрытия $R(ax) \sim 1/m(x)$. Решение такого вида позволяет производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, функции жесткости которых могут быть быстро осциллирующими и даже разрывными.

Помимо контактных давлений под штампом, определяются и осадка и угол поворота штампа

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ g_1 + c(t) z_1(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{10} z_0(t) + R_{11} z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)} z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c(t) z_0(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00} z_0(t) + R_{01} z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)} z_k(t) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Следует отметить, что в вид зависимости угла поворота штампа от времени вносит значительный вклад поверхностная неоднородность покрытия. Даже если основание штампа симметрично и нагрузка приложена центрально, неоднородное покрытие способно вызвать перекося штампа, причем, если основание вязкоупругое, этот перекося будет меняться с течением времени.

Таким образом, построено аналитическое решение (в рядах с любой наперед заданной точностью) плоской контактной задачи для вязкоупругого слоя с тонким упругим неоднородным покрытием.

3. Случай задания угла поворота штампа.

Как и в §3 раздела 1.1 можно поставить задачу об определении эксцентриситета $e(t)$ приложения нагрузки $P(t)$ для обеспечения необходимого закона изменения угла поворота $\alpha(t)$.

Второе из дополнительных условий (2.8) переходит в уравнение для нахождения функции $e(t)$ эксцентриситета приложения нагрузки (1.20).

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательные формулы для вычисления контактных давлений под штампом для задачи с поверхностно неоднородным покрытием:

$$\begin{aligned}q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = z_0(t) p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k(t) \tilde{\varphi}_k(x), \\ z_0(t) &= \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \tilde{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{W}}_k) \frac{\tilde{g}_k - \alpha(t) g_k^\alpha + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) z_0(t) K_k^\alpha}{c(t) + \tilde{\gamma}_k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \tilde{\varphi}_n^{(k)} = \tilde{\gamma}_k \tilde{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\
k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad K_k^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} R_{0n} \tilde{\varphi}_n^{(k)}, \\
\tilde{g}_k &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \tilde{\varphi}_k(\xi) d\xi, \quad g_k^\alpha = \tilde{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}, \\
\widetilde{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \tilde{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\tilde{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\tilde{K}_k^*(t, \tau) = \frac{\tilde{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \tilde{\gamma}_k}.$$

Значком ‘~’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи при неизвестном угле поворота. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (2.10) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, можно найти и закон изменения эксцентриситета приложения нагрузки по формуле (1.22), с помощью которой будет обеспечиваться необходимый режим изменения угла поворота штампа. В частности, можно обеспечить постоянное равенство нулю угла поворота штампа $\alpha(t) \equiv 0$.

Выражение для осадки штампа также претерпевает изменения

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c(t) z_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00} z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^\alpha \tilde{z}_k(t) \right] \right\}, \\
g_0 &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} p_0(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

4. Случай задания осадки штампа.

Для построения решения в случае задания осадки штампа необходимо систему базисных функций $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) заменить на $\check{p}_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$): первые две базисные функции $\check{p}_0(x)$ и $\check{p}_1(x)$ принимают вид (1.19), а остальные вычисляются по обычным правилам (1.15), $\check{p}_k(x) \equiv p_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$).

Первое дополнительное условие (2.8) переходит в уравнение для нахождения силы $P(t)$ приложения нагрузки (1.23).

Окончательные формулы для определения контактных давлений под штампом имеют вид

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \check{z}_0(t) \check{p}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \check{z}_k(t) \check{\varphi}_k(x), \\
 \check{z}_0(t) &= \frac{M(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \check{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{W}}_k) \frac{\check{g}_k - \delta(t) g_k^\delta + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \check{z}_0(t) K_k^\delta}{c(t) + \check{\gamma}_k}, \\
 \check{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \check{\varphi}_i^{(m)} \check{p}_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{mn} \check{\varphi}_n^{(k)} = \check{\gamma}_k \check{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \check{R}_{mn} \check{p}_m(x) \check{p}_n(\xi), \quad K_k^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{0n} \check{\varphi}_n^{(k)}, \\
 \check{g}_k &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \check{\varphi}_k(\xi) d\xi, \quad g_k^\delta = \check{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}, \\
 \check{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \check{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

ядра $\check{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\check{K}_k^*(t, \tau) = \frac{\check{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \check{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ \sim ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2 и §3. Таким образом, после нахождения при помощи записанных выше соотношений контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, можно найти и силу приложения нагрузки по формуле (1.24). О представлении коэффициентов разложения \check{R}_{mn} через R_{mn} см. раздел 1.1, замеч. 3.

После вычисления контактных давлений под штампом можно найти и угол поворота штампа:

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left\{ -\delta(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \check{g}_0 + c(t) \check{z}_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[\check{R}_{00} \check{z}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^\delta \check{z}_k(t) \right] \right\}, \\
 \check{g}_0 &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \check{p}_0(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

5. Решение уравнения с известной правой частью.

При решении задачи с известной правой частью дополнительные условия (2.8) превращаются в уравнения для нахождения функций нагрузки $P(t)$ и эксцентриситета $e(t)$ ее приложения (1.25).

Приведем окончательные формулы для нахождения контактных давлений под штампом:

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{z}_k(t) \hat{\varphi}_k(x), \\
 \hat{z}_k(t) &= (\mathcal{I} + \widehat{\mathcal{W}}_k) \frac{-\hat{g}_k + \delta(t) \hat{g}_k^{\delta} + \alpha(t) \hat{g}_k^{\alpha}}{c(t) + \hat{\gamma}_k}, \\
 \widehat{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \hat{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \\
 \hat{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} \hat{\varphi}_n^{(k)} = \hat{\gamma}_k \hat{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad \hat{g}_k = \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \hat{\varphi}_k(\xi) d\xi, \\
 \hat{g}_k^{\delta} &= \hat{\varphi}_0^{(k)} \sqrt{J_0}, \quad \hat{g}_k^{\alpha} = \hat{\varphi}_0^{(k)} \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \hat{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}},
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\hat{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^*(t, \tau) = \frac{\hat{\gamma}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \hat{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ $\hat{}$ ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решениями задач из §2 и §3. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (2.11) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, по формулам (1.27) можно найти и функции $P(t)$ и $e(t)$.

6. Численные расчеты.

Вследствие схожести математических моделей для контактной задачи с покрытием переменной толщины ((1.13), (1.14)) и контактной задачи с неоднородным покрытием ((2.7), (2.8)) качественные эффекты также будут схожи, однако из-за небольшого различия этих моделей и по причине различных начальных физических постановок они будут всё же несколько отличаться.

Опишем сначала основные отличия в математических постановках главы 1 и главы 2.

1. При рассмотрении тел с покрытиями переменной толщины приходилось иметь дело с такими функциями $m(x)$ для которых выполнялось

бы $m(x) = m \pm \Delta m(x) > 0$, $\Delta m(x) \ll m$ ($\forall x \in [-1, 1]$). Теперь же, при исследовании контактных задач для тел с поверхностью неоднородными покрытиями такого ограничения нет, то есть на функцию $m(x)$ накладывается единственное ограничение: $m(x) > 0$. Это обстоятельство позволяет рассматривать в качестве $m(x)$ более сложные функции и описывать чрезвычайно экзотические распределения контактных давлений, вызванные неоднородностью покрытия.

2. В постановке (2.7), (2.8) в правой части интегрального уравнения теперь присутствует функция формы основания штампа $g(x)$. Далее будут рассмотрены штампы, форма которых представляет из себя плоскость, параболу, синусоиду с небольшим количеством периодов и т.д., что является стандартным выбором для формы штампа в большинстве исследований.

3. Рассматриваются основания, состоящие из вязкоупругого слоя произвольной толщины и упругого поверхностно неоднородного покрытия.

Перейдем теперь непосредственно к численным расчетам контактных задач для оснований с поверхностно неоднородными покрытиями.

Рассмотрим двухслойное основание, нижний слой которого изготовлен из вязкоупругого стареющего материала, а верхний — из упругого. Будем считать, что изменение модуля упругости вязкоупругого материала несущественно, и тогда $E_2(t - \tau_2) \equiv E_2$. Меру ползучести материала нижнего слоя представим в виде (0.12), (0.13):

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi\tau}) [1 - e^{-\psi(t-\tau)}]. \quad (2.12)$$

Зададимся следующими значениями параметров

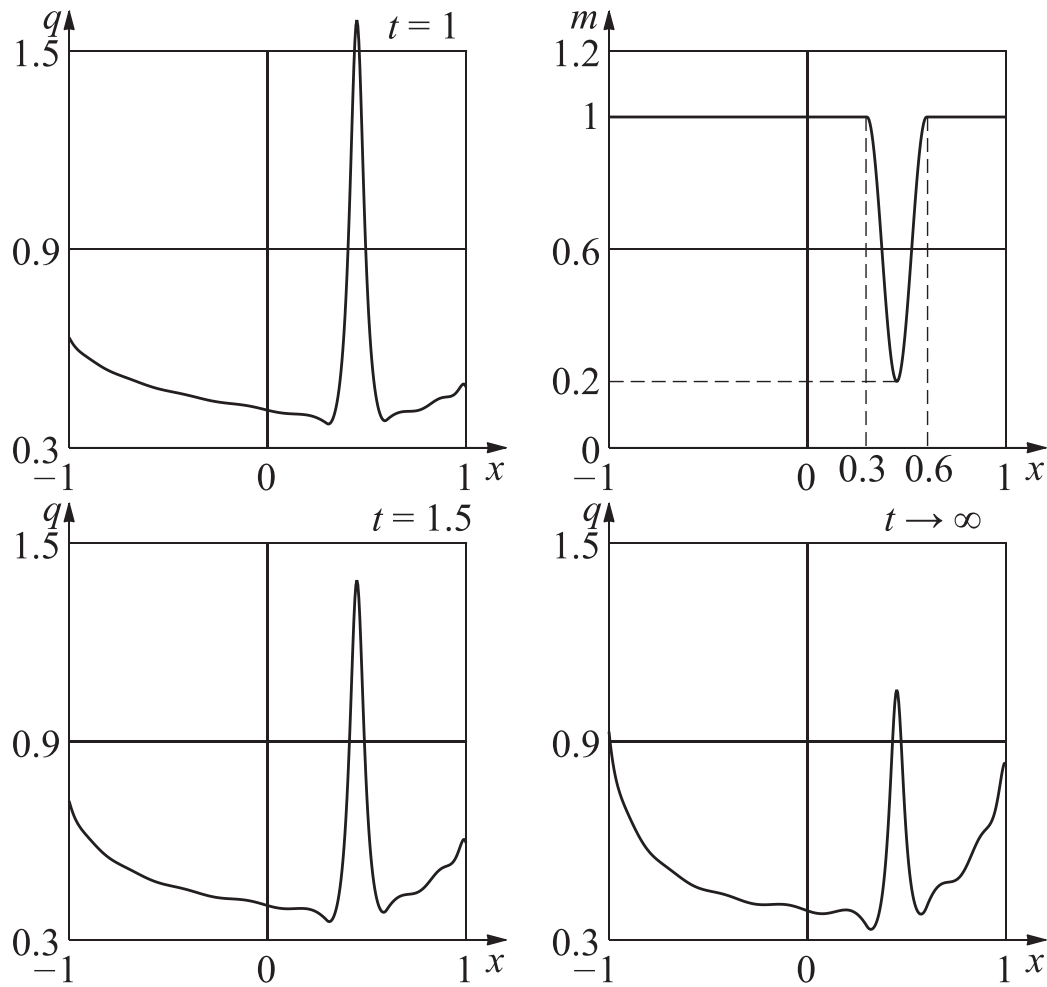
$$\begin{aligned} \nu_2 = 0.1, \quad c(t) \equiv 1, \quad C_0 E_2 = 0.5522, \quad A_0 E_2 = 4, \\ \chi \tau_0 = 0.31, \quad \psi \tau_0 = 0.6 \quad (\tau_0 = 10 \text{ сут}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Без ограничения общности, момент изготовления вязкоупругого слоя примем равным нулю, $\tau_2 = 0$.

Рассмотрим, для примера, задачу с функцией $m(x)$, заданной уравнением

$$m(x) = \begin{cases} 0.6 + 0.4 \cos \frac{2\pi(x-0.3)}{0.3} & \text{при } x \in [0.3, 0.6], \\ 1 & \text{при } x \notin [0.3, 0.6]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Такой вид функции моделирует покрытие, жесткость которого сильно увеличена в области $x \in [0.3, 0.6]$ (вспомним, что $m(x) \sim 1/R(ax)$)

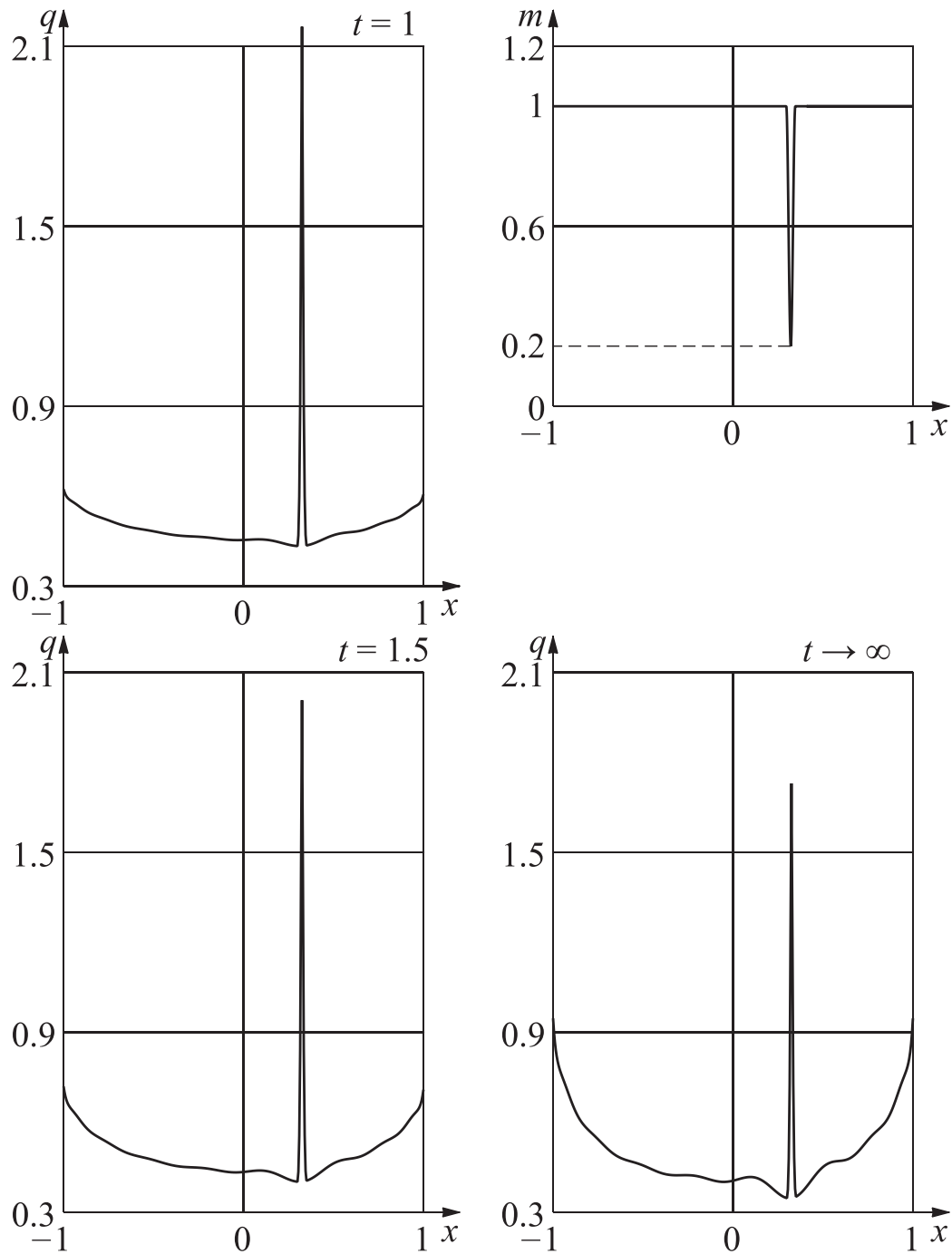


Фиг. 2.2. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.14)

вследствие, например, поверхностной обработки. Штамп считается плоским. Распределение контактных давлений в различные моменты времени при нулевом эксцентриситете приложения единичной силы показано на рис. 2.2. Как видно, в месте повышенной жесткости появляется пик контактных напряжений, значения в котором в начальный момент времени отличаются от средних более чем в 3 раза. Однако это не означает, что если жесткость в какой-либо точке в n раз больше, чем в другой, то и контактное давление в этой точке будет отличаться в n раз. Для того, чтобы это показать рассмотрим функцию $m(x)$, заданную соотношением

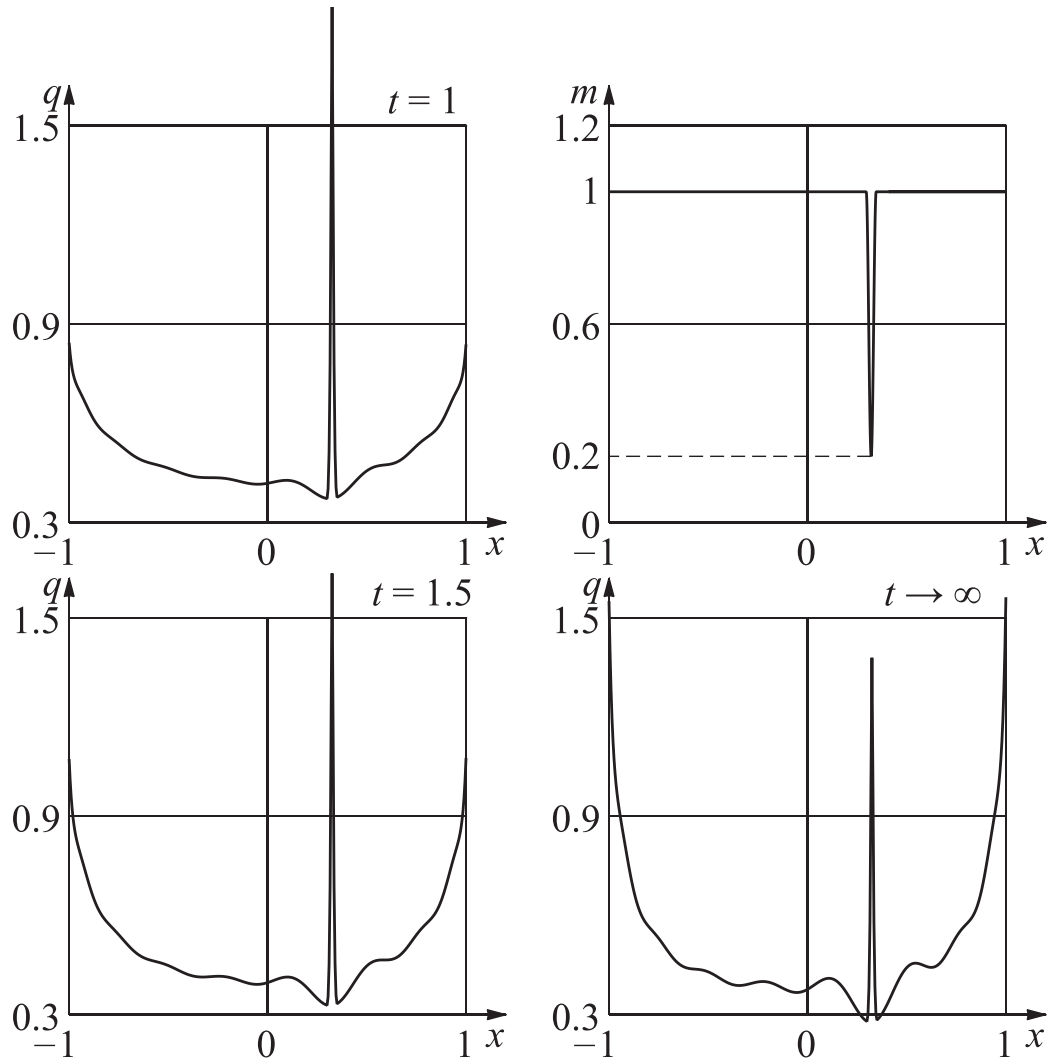
$$m(x) = \begin{cases} 0.6 + 0.4 \cos \frac{2\pi(x-0.3)}{0.05} & \text{при } x \in [0.3, 0.35], \\ 1 & \text{при } x \notin [0.3, 0.35]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Эта функция отличается от (2.14) только тем, что уменьшен интервал, в котором $m(x) \neq 0$. В остальном они схожи. На рис. 2.3 показано



Фиг. 2.3. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.15)

распределение контактных давлений в начальный момент времени для при (2.15). Как видно при уменьшении интервала значения контактных давлений отличаются уже в 4.5 раза, то есть можно сделать вывод, что чем уже такой интервал, тем сильнее там скачок контактных давлений. В обоих случаях с течением времени пик давлений спадает, однако по краям штампа давления наоборот возрастают.

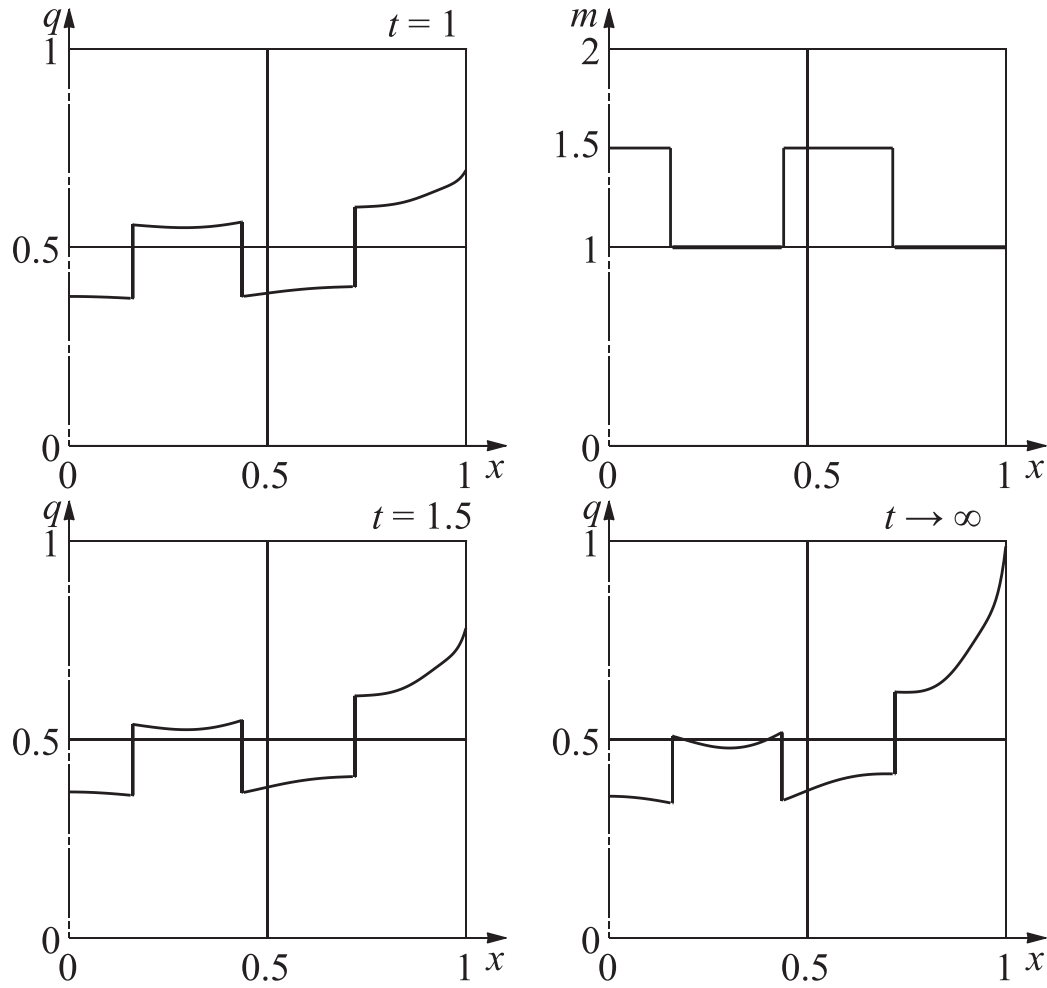


Фиг. 2.4. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv 0.3$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.15)

Следует отметить, что подобные распределения получены, когда жесткость покрытия намного меньше жесткости основного слоя. Как только мы начнем использовать для нижнего слоя более мягкий материал, этот пик начнет спадать (рис. 2.4). После некоторого предела контактные давления по краям начнут превышать значения контактных давлений на участке увеличенной жесткости.

Графики осадки и угла поворота не представляют из себя ничего нового по сравнению с тем, что мы видели в предыдущей главе. Очевидно, что штамп будет поворачиваться против часовой стрелки, так как справа покрытие имеет усиленный участок.

Зачастую для неоднородных и неоднородно упрочненных поверхностей использует функция жесткости $R(x)$, принадлежащая к классу ку-



Фиг. 2.5. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.16)

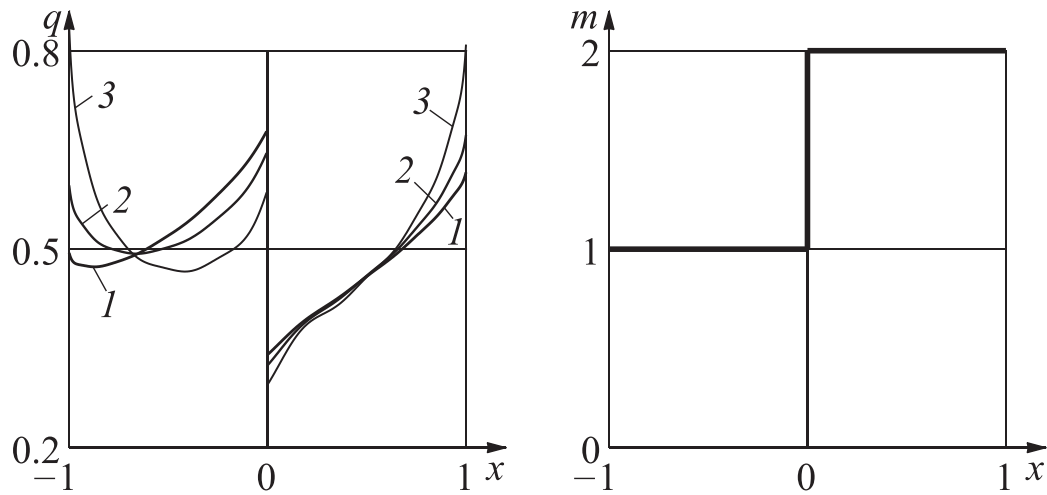
сочнопостоянных функций и имеющая вид

$$R(x) = \begin{cases} R_1, & \text{если } x \in \Omega \setminus \omega, \\ R_2, & \text{если } x \in \omega, \end{cases}$$

где ω — совокупность всех упрочненных зон, $\Omega \setminus \omega$ — совокупность всех неупрочненных зон; $R_2 > R_1$. На рис. 2.5 показаны распределения контактных давлений для случая, когда зоны упрочнения равномерно расположены по оси x . Функция, описывающая жесткость покрытия, расположена симметрично относительно оси y , а функция $m(x)$ имеет вид

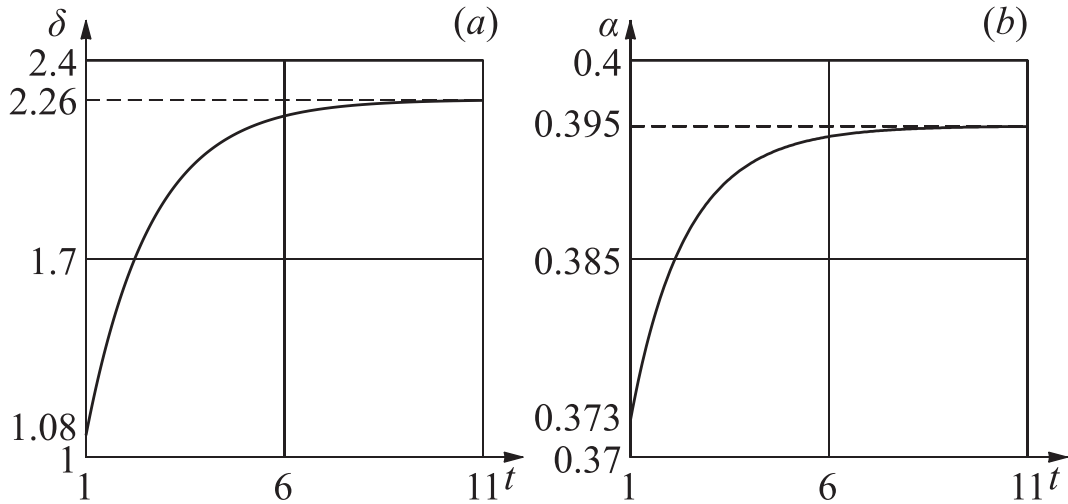
$$m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{7}(4i-7), \frac{1}{7}(4i-5)], \\ 1.5, & \text{если } x \in [\frac{1}{7}(4i-5), \frac{1}{7}(4i-3)], \end{cases} \quad (2.16)$$

Также предполагается, что штамп плоский. Видно, что контактные давления испытывают разрывы в местах изменения жесткости покрытия. С



Фиг. 2.6. Распределение контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.17)

(1 — $t = 1$, 2 — $t = 1.5$, 3 — установившееся распределение)



Фиг. 2.7. Изменение осадки (a) и угла поворота (b) штампа от времени при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x)$, определяемой формулой (2.17)

течением времени на каждом из участков происходит перераспределение контактных давлений, причем на всех участках это перераспределение происходит по разному: на краях штампа оно увеличивается, а ближе к центру уменьшается.

В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда для покрытия используются два материала, граница раздела которых проходит по оси штампа, то есть

$$m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0, \\ 2, & \text{если } x \geq 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

Графики контактных давлений представлены на рис. 2.6. Видно, что для

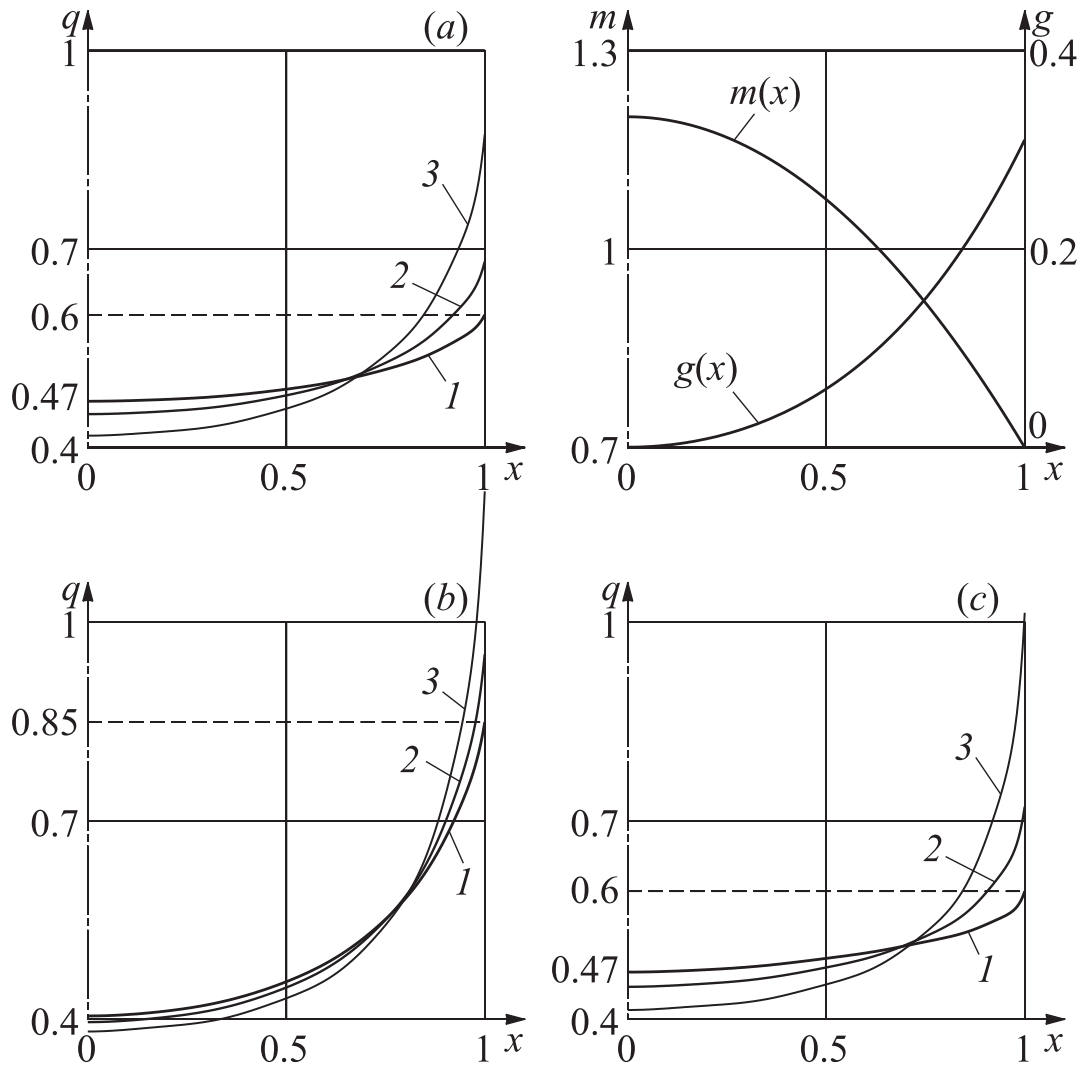
различных участков напряжения меняются совершенно по разному. Для более жесткого ($x < 0$) в начальный момент времени напряжения справа ($x = 0$) превышают напряжения слева ($x = -1$), но при увеличении t график меняет свой вид и уже слева напряжения становятся больше, чем справа. В то же время более мягкий материал ведет себя более стабильно: как в начальный момент времени, так и при $t \rightarrow \infty$ напряжения справа больше напряжений слева. Разумеется несимметричность жесткости вызывает значительный перекося штамп на слое. Графики осадки и угла поворота штампа представлены на рис. 2.7.

Продemonстрируем теперь влияние формы штампа на распределение контактных давлений в случае поверхностной неоднородности покрытия постоянной толщины. На рис. 2.8 *a* показано распределение контактных давлений при контакте плоского штампа и основания с однородным покрытием ($m(x) \equiv 1.2$). Если взять неоднородное покрытие, у которого жесткость по краям превышает жесткость в середине ($m(x) = 1.2 - 0.5x^2$), то график распределения контактных давлений изменится и примет вид, изображенный на рис. 2.8 *b*. Но если на такое основание действовать не плоским штампом, а штампом, форма основания которого описывается уравнением $g(x) = 0.21x^2 + 0.1x^4$, то, по крайней мере при $t = 1$, распределение контактных давлений (рис. 2.8 *c*) вновь станет схожим по численным значениям со случаем, когда неоднородность отсутствует, а штамп плоский. Разумеется, в последующие моменты времени распределения контактных давлений в случаях *a* и *c* начинают сильнее отличаться друг от друга, причем в случае *c* давление изменяется сильнее. Графики осадок штампов для всех трех случаев представлены на рис. 2.9. Уменьшение осадки в случае *b* по сравнению со случаем *a* связано с увеличением средней жесткости покрытия при прочих равных условиях. В случае *c* из-за выгнутости штампа происходит перераспределение контактных давлений, в результате чего штамп получает возможность глубже внедриться в основание по сравнению со случаем *b*.

В конце данного параграфа оговоримся лишь о выполнении или модификации свойств, упомянутых в §6 раздела 1.1.

1. Свойство 1 остается без изменения.

2. Свойство 2 не применимо к рассматриваемой задаче в общем случае, так как в правой части интегрального уравнения появляется функция формы основания штампа, не зависящая от силы P . Оно в нашем случае приобретает вид, схожий с (1.32), то есть при постоянной си-



Фиг. 2.8. Распределения контактного давления при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для различных случаев: *a* — плоский штамп и однородное покрытие ($m(x) \equiv 1.2$), *b* — плоский штамп и неоднородное покрытие ($m(x) = 1.2 - 0.5x^2$), *c* — штамп с формой $g(x) = 0.21x^2 + 0.1x^4$ и неоднородное покрытие ($m(x) = 1.2 - 0.5x^2$).

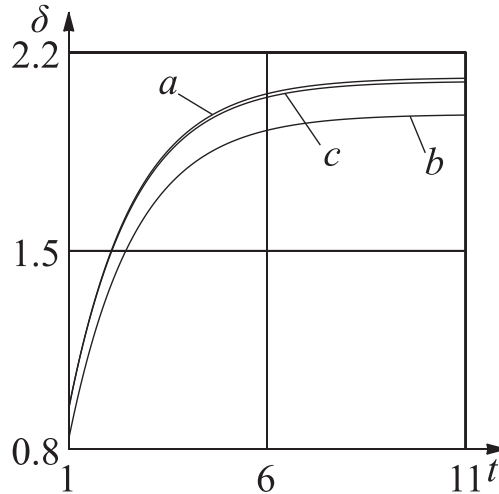
Всюду 1 — $t = 1$, 2 — $t = 1.5$, 3 — установившееся распределение

ле $P(t) \equiv P$ осадка, угол поворота штампа и контактные давления есть некоторая линейная функция параметра P , то есть

$$\begin{aligned}\delta(P, t) &= \tilde{f}_1^\delta(t) + P\tilde{f}_2^\delta(t), & \alpha(P, t) &= \tilde{f}_1^\alpha(t) + P\tilde{f}_2^\alpha(t), \\ q(P, x, t) &= \tilde{f}_1^q(x, t) + P\tilde{f}_2^q(x, t).\end{aligned}$$

Значок ‘ \sim ’ подчеркивает, что функции \tilde{f} отличны от функций f из (1.32). Следствие и графические методы из свойства 3 переносятся и на переформулированное второе с учетом замены e на P и ограничений на значения силы P .

3. Свойство 3, следствие из него и графические методы остаются в



Фиг. 2.9. Осадка штампа при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для различных случаев:
 a — плоский штамп и однородное покрытие ($m(x) \equiv 1.2$),
 b — плоский штамп и неоднородное покрытие ($m(x) = 1.2 - 0.5x^2$), c — штамп с
 формой $g(x) = 0.21x^2 + 0.1x^4$ и неоднородное покрытие ($m(x) = 1.2 - 0.5x^2$)

силе и для рассматриваемой задачи.

Таким образом в данном параграфе было показано, что при расчете двухслойных оснований необходимо учитывать поверхностную неоднородность покрытий, которая может возникать вследствие упрочнения либо особенностей нанесения этих покрытий на основное тело. Произведены расчеты как для покрытий, жесткости которых изменены локально, так и для покрытий, жесткости которых описываются кусочнопостоянными функциями. Рассмотрен случай, когда покрытие состоит из двух материалов, граница раздела которых совпадает с осью штампа. Проиллюстрировано влияние формы штампа на распределение контактных давлений и на осадку штампа.

2.2 Осесимметричная задача

1. Постановка задачи.

Постановка, да и метод решения, как это будет показано ниже, осесимметричной задачи аналогична постановке для случая плоской задачи.

На недеформируемом подстилающем основании лежит вязкоупругий слой с покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавлируется гладкий жесткий кольцевой штамп с силой $P(t)$, приложенной по его оси (рис. 2.10). Область контакта со временем не изменяется и ограничена окружностями радиусов a и b ($a < b$), а форма основания штампа задается функцией $g(r)$. Тонкое упругое покрытие толщины h ($h \ll (b - a)$), свойства которого зависят от продольной координаты x [66, 64], лежит на нижнем вязкоупругом слое произвольной толщины H , изготовленном в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$ и стареющем однородно.

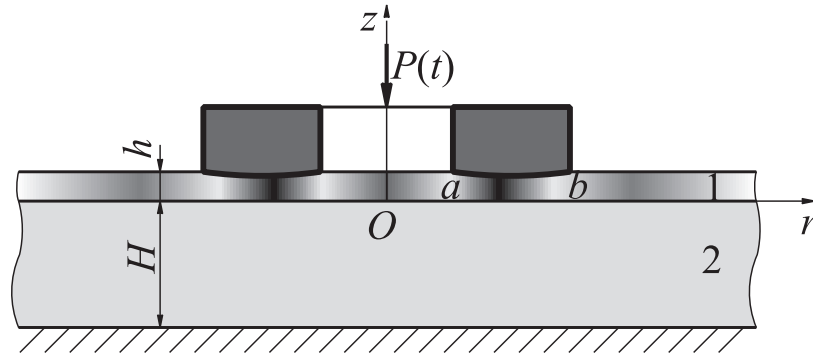
Для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(r, t) = -q(r, t)$, действующей на том же кольцевом участке ($a \leq r \leq b$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(r, t)$ можно записать в форме [17]:

$$u_z(r, t) = \frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{D}\frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{D}f(r, t) = \int_a^b k_{as}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right)f(\rho, t)\rho d\rho,$$

где, как и в плоском случае, ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации вязкоупругого слоя; \mathcal{I} — тождественный оператор, \mathcal{V}_2 — интегральный оператор Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, $C^{(2)}(t, \tau)$ — мера ползучести при растяжении (см. плоскую задачу); $R(r)$ — функция жесткости покрытия, зависящая от условий его соединения с нижним слоем и вычисляемый либо по формуле (2.2), либо по формуле (2.3), \mathcal{D} — интегральный оператор с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{as}(r/H, \rho/H)$, которое имеет вид (1.34).

Приравнявая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (2.18) получим интегральное уравнение исследуемой осесимметричной контактной задачи в



Фиг. 2.10. Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с упругим неоднородным покрытием

виде:

$$\frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{D}\frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) - g(r), \quad (2.19)$$

$$a \leq r \leq b,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа. Разумеется, по сравнению с плоским случаем ушла одна степень свободы и пропала неизвестная величина, отвечающая за наклон штампа. Условие равновесия штампа на слое в рассматриваемом осесимметричном случае имеет вид (1.36).

Сделав в (2.19) и (1.36) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad \lambda = \frac{H}{b - a}, \quad \eta = \frac{a}{b - a}, \quad \xi^2 = \frac{b + a}{b - a}, \\ t^* &= \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \delta^*(t^*) = k_P \frac{\delta(t)}{b - a}, \quad g^*(r^*) = k_P \frac{g(r)}{b - a}, \\ q^*(r^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad m^*(r^*) = \frac{E_0}{R(r)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{2(b - a)}, \\ c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad P^*(t^*) = \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2(t - \tau_2)(b^2 - a^2)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{V}_2^* f(x^*, t^*) = \int_1^{t^*} K_2(t^*, \tau^*) f(x^*, \tau^*) d\tau^*,$$

$$K_2(t^*, \tau^*) = K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0,$$

$$\mathcal{B}^* f(r^*, t^*) = \int_0^1 k_{\text{as}}^*(r^*, \rho^*) f(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*,$$

$$k_{\text{as}}^*(r^*, \rho^*) = \frac{\xi^2}{\lambda} k_{\text{as}} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b + a}{H} k_{\text{as}} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right).$$

Безразмерный коэффициент k_P несет тот же смысл, что и в случае плоской задачи. Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим

смешанное интегральное уравнение

$$c(t)m(r)q(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{B}q(r, t) = \delta(t) - g(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (2.21)$$

с дополнительным условием (1.39). Деля на $\sqrt{m(r)}$ уравнение (2.21) и вводя обозначения (1.40), интегральное уравнение (2.21) приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t)Q(r, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)\mathcal{D}Q(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.22)$$

Дополнительное условие (1.39) приводится к виду

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = P(t). \quad (2.23)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (2.22), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительное условие (2.24).

2. Решение осесимметричной задачи.

Функция $Q(r, t)$ для осесимметричного случая представима в виде следующего ряда

$$Q(r, t) = v_0(t)p_0^\circ(r) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\psi_k(r).$$

Полином $p_0^\circ(r)$ задан формулой (1.43), функция $v_0(t)$ находится из соотношения (1.44), собственные функции $\psi_k(r)$ ($k = 1, 2, \dots$) ищутся из (1.47), а функции разложения $v_k(t)$ ($K = 1, 2, \dots$) определяются из

$$v_k(t) = -(\mathcal{I} + \mathcal{Y}_k) \frac{g_k + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)v_0(t)T_k}{c(t) + \beta_k},$$

$$T_k = \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n}\psi_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\mathcal{Y}_k f(r, t) = \int_1^t R_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau.$$

где собственные значения β_k , собственные векторы $\psi_n^{(k)}$ ($k, n = 1, 2, \dots$) и коэффициенты T_{mn} ($m, n = 0, 1, \dots$) разложения ядра интегрального

оператора \mathcal{D} ищутся по формулам (1.47), а $R_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau) = \frac{\beta_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \beta_k}.$$

Коэффициенты g_k ($k = 0, 1, \dots$) — это коэффициенты разложения функции $g(r)/\sqrt{m(r)}$ по базисным функциям:

$$\begin{aligned} \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}} &= g_0 p_0^\circ(r) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \psi_k(r). \\ g_0 &= \int_0^1 \frac{g(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} p_0^\circ(\rho) \rho d\rho, \quad g_k = \int_0^1 \frac{g(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \psi_k(\rho) \rho d\rho, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Как и ранее, полученное решение имеет структуру:

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[v_0(t) P_0^\circ(r) + \dots \right],$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой (2.20) функцию жесткости покрытия $R(r)$.

Приведем теперь уравнение для определения функции осадки штампа

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{I_0}} \left\{ g_0 + c(t) v_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[T_{00} v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k v_k(t) \right] \right\}.$$

Таким образом, построено аналитическое решение осесимметричной контактной задачи о взаимодействии жесткого кольцевого штампа и вязкоупругого стареющего слоя при наличии поверхностно неоднородного упругого покрытия.

3. Решение уравнения с известной правой частью.

Запишем теперь без вывода решение поставленной осесимметричной контактной задачи с известной правой частью. Дополнительное условие (2.24) превращается в уравнение для нахождения функции силы приложения (1.47).

Приведем окончательные формулы для вычисления контактных на-

пряжений под штампом:

$$\begin{aligned}
 q(r, t) &= \frac{Q(r, t)}{\sqrt{m(r)}}, \quad Q(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{v}_k(t) \hat{\psi}_k(r), \\
 \hat{v}_k(t) &= (\mathcal{I} + \hat{\mathcal{Y}}_k) \frac{-\hat{g}_k + \delta(t) g_k^\delta}{c(t) + \hat{\beta}_k}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_k f(r, t) = \int_1^t \hat{R}_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau, \\
 \hat{\psi}_m(r) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\psi}_i^{(m)} p_i^\circ(r), \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} \hat{\psi}_n^{(k)} = \hat{\beta}_k \hat{\psi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
 k(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} p_m^\circ(r) p_n^\circ(\rho), \\
 \hat{g}_k &= \int_0^1 \frac{g(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \hat{\psi}_k(\rho) \rho d\rho, \quad g_k^\delta = \int_0^1 \frac{\hat{\psi}_k(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = \hat{\psi}_0^{(k)} \sqrt{I_0}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Функции $p_k^\circ(x)$ вычисляются по формулам (1.43), а ядра $\hat{R}_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^\circ(t, \tau) = \frac{\hat{\beta}_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \hat{\beta}_k}.$$

Значком ‘ $\hat{}$ ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (2.25) напряжений под штампом $Q(r, t)$, по формуле (1.49) можно найти и функцию $P(t)$.

2.3 Основные результаты и выводы

Сформулируем основные результаты и выводы, полученные в главе 2.

1. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи для поверхностно неоднородных вязкоупругих слоистых оснований. Такой тип неоднородности учтен впервые, причем в полученном решении функция жесткости верхнего тонкого слоя выделена явно, что дает возможность расчета как быстро осциллирующих, так и кусочно-постоянных функций жесткости, которые часто встречаются на практике.
2. Произведены расчеты как для покрытий, жесткости которых изменены локально, так и для покрытий, жесткости которых описываются кусочнопостоянными функциями. Показано, что при расчете двухслойных оснований необходимо учитывать поверхностную неоднородность покрытий, которая может возникать вследствие упрочнения либо особенностей нанесения этих покрытий на основное тело.

ГЛАВА 3

Износ упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями

В главе рассмотрены контактные задачи износа упругих оснований с поверхностно неоднородными покрытиями. Считается, что между слоями, а также между нижним слоем и подстилающим основанием осуществляется идеальный контакт. Предполагается, что скорость изнашивания слоя прямо пропорциональна касательным усилиям и осредненному значению модуля скорости скольжения и обратно пропорциональна твердости покрытия, а касательные усилия и контактные давления связаны законом Кулона. Рассматриваются кусочно однородные покрытия, отношения твердостей и жесткостей которых совпадают, а также покрытия, технологический процесс нанесения или упрочнения которых делает их твердости и жесткости зависящими от координат точек поверхности, но не влияет на их отношение. Для исследования плоских и осесимметричных износо-контактных задач применяются те же методы и подходы, что и при исследовании контактных задач, рассмотренных в предыдущих двух главах.

Основные результаты главы отражены в работах [43, 46, 49, 50, 67, 105].

3.1 Плоская задача

1. Постановка задачи.

На недеформируемом подстилающем основании лежит упругий слой с покрытием, на который с момента времени τ_0 вдавлируется гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ и эксцентриситетом ее приложения $e(t)$, который, кроме того, движется в направлении, перпендикулярном плоскости Oxz (рис. 3.1). Осредненное значение модуля скорости скольжения штампа по поверхности основания равно V . Длина линии контакта со временем не изменяется и равна $2a$, а форма основания штампа задается функцией $g(x)$. Тонкое упругое покрытие толщины h ($h \ll 2a$), свойства которого зависят от продольной координаты x [64, 66], лежит на нижнем упругом слое произвольной толщины H . Между нижним слоем и подстилающим основанием, а также между слоями, осуществляется идеальный контакт.

Как и в разделах 1.1, 2.1, для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(x, t) = -q(x, t)$, действующей на том же участке ($-a \leq x \leq a$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(x, t)$ можно записать в форме [17]:

$$u_1(x, t) = \frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2} \mathcal{F}q(x, t), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{F}f(x, t) = \int_{-a}^a k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) f(\xi, t) d\xi,$$

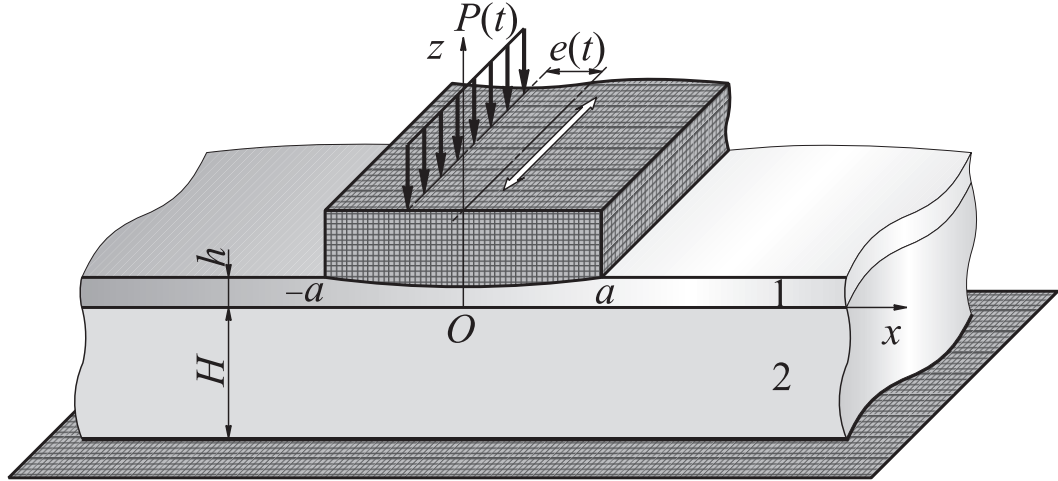
где ν_2 и E_2 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга нижнего слоя; $R(x)$ — функция жесткости покрытия, вычисляемая по формуле (2.3).

Эксперименты показывают [88, 96], что скорость изнашивания слоя прямо пропорциональна действующим под штампом касательным усилиям $\tau(x, t)$ и осредненному значению модуля скорости скольжения V (см., например, [2, 55, 30]) и обратно пропорциональна твердости покрытия ([64, 107]):

$$v_2(x, t) = \frac{k_1 V \tau(x, s)}{T(x)}.$$

где k_1 — некоторый безразмерный коэффициент. Тогда вертикальное перемещение верхней грани покрытия вследствие линейного износа задается формулой

$$u_2(x, t) = \frac{k_1 V}{T(x)} \int_{\tau_0}^t \tau(x, s) ds. \quad (3.2)$$



Фиг. 3.1. Износ вязкоупругого основания с неоднородным упругим покрытием в плоском случае

Предполагая, что сила трения связана с контактным давлением законом Кулона (см., например, [2]), то есть

$$\tau(x, t) = k_2 q(x, t),$$

и используя (3.2), получим

$$u_2(x, t) = \frac{k_1 k_2 V}{T(x)} \int_{\tau_0}^t q(x, s) ds. \quad (3.3)$$

Здесь k_2 — коэффициент трения. Обычно в литературе употребляется такой термин, как коэффициент износа $K_u(x)$. В рассматриваемом случае $K_u(x) = k_1 k_2 / T(x)$.

Поскольку рассматриваются кусочно однородные покрытия, отношения твердостей и жесткостей которых совпадают, а также покрытия, технологический процесс нанесения или упрочнения которых делает их твердости и жесткости зависящими от координат точек поверхности, но не влияет на их отношение (см., например [80]), то функции твердости и жесткости связаны соотношением

$$R(x) = k_T T(x).$$

Следует отметить, что при определении деформаций основания мы пренебрегаем силами трения в области контакта, а также инерционными силами, возникающими вследствие движения штампа. Постановка задачи износа с такими предположениями дана также и в [2, 25, 59].

Также мы предполагаем, что необратимые перемещения за счет износа $u_2(x, t)$ малы по сравнению с толщиной покрытия h и соизмеримы

с нормальными упругими перемещениями контактирующих тел $u_1(x, t)$. Учитывая это при определении напряженно-деформированного состояния тела граничные условия относятся к неизношенной поверхности.

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, $u_1 + u_2 = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x)$, с учетом (3.1)–(3.3) получим интегральное уравнение исследуемой задачи износа в форме

$$\frac{q(x, t)h}{k_T T(x)} + \frac{k_1 k_2 V}{T(x)} \int_{\tau_0}^t q(x, s) ds + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2} \mathcal{F} q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (3.4)$$

$$-a \leq x \leq a,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота. Условия равновесия штампа на слое совпадают с уравнениями (1.8).

Сделав в (3.4) и (1.8) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \\ \delta^*(t^*) &= k_P \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = k_P \alpha(t), \quad g^*(x^*) = k_P \frac{g(x)}{a}, \\ c^* &= \frac{E_2}{E_0}, \quad m^*(x^*) = \frac{E_0}{k_T T(x)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{2a}, \\ q^*(x^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2}, \quad V^* = k_1 k_2 k_T \frac{V \tau_0}{h}, \\ P^*(t^*) &= \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2 a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2k_P M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2 a^2}, \\ \mathcal{A}^* f(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) f(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\ k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}} \left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Безразмерный коэффициент k_P вводится исключительно для улучшения вида функций $P^*(t^*)$ и $M^*(t^*)$ (чтобы при численных расчетах они не сильно отличались по значениям). Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$cm(x) \left[q(x, t) + V \int_1^t q(x, \tau) d\tau \right] + \mathcal{A} q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (3.6)$$

$$-1 \leq x \leq 1,$$

с дополнительными условиями (1.11). Умножая на $\sqrt{m(x)}$ уравнение (3.6) и вводя обозначения (1.12), интегральное уравнение (3.6) приво-

дится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$\begin{aligned} c \left[Q(x, t) + V \int_1^t Q(x, \tau) d\tau \right] + \mathcal{F}Q(x, t) = \\ = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} - \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Дополнительные условия (1.11) приводятся к виду:

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (3.8)$$

Таким образом мы получили разрешающее смешанное двумерное интегральное уравнение (3.7), а также дополнительные условия (3.8).

В следующем параграфе мы приведем лишь окончательные аналитические результаты, так как метод решения подобной задачи был подробно описан в §2 раздела 1.1.

2. Решение плоской задачи.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, проведенных в предыдущем разделе, приведем лишь решение поставленной задачи (3.7), (3.8).

Как и во всех рассмотренных ранее плоских задачах, функция $Q(x, t)$ представляется в виде

$$Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x).$$

Здесь полиномы $p_0(x)$ и $p_1(x)$ задаются формулами (1.15), функции разложения $z_0(t)$ и $z_1(t)$ находятся из соотношений (1.16), собственные функции $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) ищутся из (1.18), а функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, 3, \dots$) определяются из

$$\begin{aligned} z_k(t) &= -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{g_k + z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}}{c + \gamma_k} \\ K_k^{(0)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, \\ \mathcal{W}_k f(x, t) &= \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где собственные значения γ_k , собственные векторы $\varphi_n^{(k)}$ ($k, n = 2, 3, \dots$) и коэффициенты R_{mn} ($m, n = 0, 1, \dots$) разложения ядра интегрального оператора \mathcal{F} ищутся по формулам (1.18), коэффициенты g_k ($k = 0, 1, \dots$) разложения функции формы основания $g(x)/\sqrt{m(x)}$ определяются по формуле (2.9), а $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, 3, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \gamma_k}.$$

Замечание 1. Функцию $z_k(t)$ можно представить и в более наглядном виде

$$\begin{aligned} z_k(t) &= -\frac{g_k + z_0(1)K_k^{(0)} + z_1(1)K_k^{(1)}}{c + \gamma_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \gamma_k}\right] - \\ &\quad - \int_1^t \frac{\dot{z}_0(\tau)K_k^{(0)} + \dot{z}_1(\tau)K_k^{(1)}}{c + \gamma_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \gamma_k}\right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{c + \gamma_k} \left\{ g_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \gamma_k}\right] + z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)} \right\} + \\ &\quad + cV \int_1^t \frac{z_0(\tau)K_k^{(0)} + z_1(\tau)K_k^{(1)}}{(c + \gamma_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \gamma_k}\right] d\tau. \end{aligned}$$

Как и ранее, полученное решение имеет структуру:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \dots \right], \quad (3.10)$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит и связанную с ней заменой (3.5) функцию твердости покрытия $T(ax) \sim 1/m(x)$. Решение такого вида позволяет производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, функции твердости которых могут быть как разрывными, так и осциллирующими.

Осадку и угол поворота штампа можно определить из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0J_2 - J_1^2}} \left\{ g_1 + c \left[z_1(t) + V \int_1^t z_1(\tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)} z_k(t) \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c \left[z_0(t) + V \int_1^t z_0(\tau) d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)} z_k(t) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В частности, при постоянных силе P и моменте M , действующих на штамп, при больших значениях времени в представлении контактных давлений остаются только главные члены разложения и тогда уравнение (3.10) можно представить в виде произведения функции твердости $T(x)$ и некоторой линейной функции, то есть

$$q(x, t) = AT(ax)(1 + \Theta x), \quad (3.13)$$

где коэффициент Θ обусловлен наличием перекоса штампа за счет приложенного момента M или продольной неоднородности покрытия. Коэффициенты A и Θ можно определить из дополнительных условий (1.11):

$$A = \tilde{A} \frac{1 - \nu_2^2}{E_0} \frac{2a}{h}, \quad \tilde{A} = P \frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2 - e J_1}, \quad \Theta = \frac{e J_0 - J_1}{J_2 - e J_1},$$

$$J_0 = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{m(\xi)}, \quad J_1 = \int_{-1}^1 \frac{\xi d\xi}{m(\xi)}, \quad J_2 = \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 d\xi}{m(\xi)}.$$

Отметим, что эти коэффициенты не зависят от функции формы основания штампа, то есть при любой функции $g(x)$ распределение контактных давлений при больших значениях будет абсолютно одинаковым. В случае, когда момент равен нулю несимметричность распределения контактных давлений объясняется исключительно неоднородностью покрытия. Очевидно, что в случае нулевого момента (нулевого эксцентриситета приложения нагрузки) перекося контактных давлений будет вызван только неоднородностью покрытия ($\Theta = -J_1/J_2$). В случае симметричной неоднородности $J_1 = 0$ и, следовательно, $\tilde{A} = P J_0$, $\Theta = e J_0/J_2$.

При постоянных силе P и моменте приложения нагрузки M осадка и угол поворота стремятся к линейным по времени функциям

$$\alpha_\infty(t) = cV \frac{J_0 M - J_1 P}{J_0 J_2 - J_1^2} t + [c(1 - V) + R_{11}] \frac{J_0 M - J_1 P}{J_0 J_2 - J_1^2} + \frac{P R_{10} + g_1 \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_0 J_2 - J_1^2}},$$

$$\delta_\infty(t) = -\frac{J_1}{J_0} \alpha_\infty(t) + cV \frac{P}{J_0} t + [c(1 - V) + R_{00}] \frac{P}{J_0} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left(R_{01} \frac{J_0 M - J_1 P}{\sqrt{J_0 J_2 - J_1^2}} + g_0 \right).$$

3. Задача о нахождении эксцентриситета приложения нагрузки по заданному углу поворота.

Если необходимо выдерживать заданный закон изменения угла поворота $\alpha(t)$, регулируя при этом эксцентриситет $e(t)$ приложения нагрузки $P(t)$, то второе из дополнительных условий (3.8) переходит в уравнение для нахождения функции $e(t)$ эксцентриситета приложения нагрузки (1.20), а окончательные формулы для вычисления контактных давлений под штампом для задачи с поверхностно неоднородным покрытием принимают вид:

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{z}_k(t)\tilde{\varphi}_k(x), \\
 z_0(t) &= \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad \tilde{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{W}}_k) \frac{\tilde{g}_k - \alpha(t)g_k^\alpha + z_0(t)K_k^\alpha}{c + \tilde{\gamma}_k}, \\
 \tilde{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn} \tilde{\varphi}_n^{(k)} = \tilde{\gamma}_k \tilde{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \quad K_k^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} R_{0n} \tilde{\varphi}_n^{(k)}, \\
 \tilde{g}_k &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \tilde{\varphi}_k(\xi) d\xi, \quad g_k^\alpha = \tilde{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}}, \\
 \widetilde{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \tilde{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\tilde{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\tilde{K}_k^*(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \tilde{\gamma}_k}.$$

Значком ‘~’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи при неизвестном угле поворота. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (3.14) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, можно найти и закон изменения эксцентриситета приложения нагрузки по формуле (1.22), с помощью которой будет обеспечиваться необходимый режим изменения угла поворота штампа. В частности, можно обеспечить постоянное равенство нулю угла поворота штампа $\alpha(t) \equiv 0$.

Замечание 2. Функция $\tilde{z}_k(t)$ можно определить и из более наглядного соотношения

$$\begin{aligned}\tilde{z}_k(t) &= -\frac{\tilde{g}_k - g_k^\alpha \alpha(1) + z_0(1)K_k^\alpha}{c + \tilde{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \tilde{\gamma}_k}\right] - \\ &\quad - \int_1^t \frac{-g_k^\alpha \dot{\alpha}(\tau) + \dot{z}_0(\tau)K_k^\alpha}{c + \tilde{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \tilde{\gamma}_k}\right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{c + \tilde{\gamma}_k} \left\{ \tilde{g}_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \tilde{\gamma}_k}\right] - g_k^\alpha \alpha(t) + z_0(t)K_k^\alpha \right\} + \\ &\quad + cV \int_1^t \frac{-g_k^\alpha \alpha(\tau) + z_0(\tau)K_k^\alpha}{(c + \tilde{\gamma}_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \tilde{\gamma}_k}\right] d\tau.\end{aligned}$$

Выражение для осадки штампа также претерпевает изменения

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c \left[z_0(t) + V \int_1^t z_0(\tau) d\tau \right] \right. \\ &\quad \left. + R_{00} z_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^\alpha \tilde{z}_k(t) \right\}, \\ g_0 &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} p_0(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

4. Случай задания осадки штампа.

Для построения решения в случае задания осадки штампа необходимо систему базисных функций $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) заменить на $\check{p}_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$): первые две базисные функции $\check{p}_0(x)$ и $\check{p}_1(x)$ принимают вид (1.19), а остальные вычисляются по обычным правилам (1.15), $\check{p}_k(x) \equiv p_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$).

Первое дополнительное условие (3.8) переходит в уравнение для нахождения силы $P(t)$ приложения нагрузки (1.23).

Окончательные формулы для определения контактных давлений под штампом имеют вид

$$\begin{aligned}q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \check{z}_0(t)\check{p}_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \check{z}_k(t)\check{\varphi}_k(x), \\ \check{z}_0(t) &= \frac{M(t)}{\sqrt{J_2}}, \quad \check{z}_k(t) = -(\mathcal{I} + \mathcal{W}_k) \frac{\check{g}_k - \delta(t)g_k^\delta + \check{z}_0(t)K_k^\delta}{c + \tilde{\gamma}_k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \check{\varphi}_i^{(m)} \check{p}_i(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{mn} \check{\varphi}_n^{(k)} = \check{\gamma}_k \check{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\
k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \check{R}_{mn} \check{p}_m(x) \check{p}_n(\xi), \quad K_k^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \check{R}_{0n} \check{\varphi}_n^{(k)}, \\
\check{g}_k &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \check{\varphi}_k(\xi) d\xi, \quad g_k^\delta = \check{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_2}}, \\
\check{W}_k f(x, t) &= \int_1^t \check{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

ядра $\check{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\check{K}_k^*(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \check{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ \sim ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2 и §3. Таким образом, после нахождения при помощи записанных выше соотношений контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, можно найти и силу приложения нагрузки по формуле (1.24). О представлении коэффициентов разложения \check{R}_{mn} через R_{mn} см. раздел 1.1, замеч. 3.

Замечание 3. Функция $\check{z}_k(t)$ определяется из более наглядного соотношения

$$\begin{aligned}
\check{z}_k(t) &= -\frac{\check{g}_k - g_k^\delta \delta(1) + \check{z}_0(1) K_k^\delta}{c + \check{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \check{\gamma}_k}\right] - \\
&\quad - \int_1^t \frac{-g_k^\delta \dot{\delta}(\tau) + \dot{\check{z}}_0(\tau) K_k^\delta}{c + \check{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \check{\gamma}_k}\right] d\tau = \\
&= -\frac{1}{c + \check{\gamma}_k} \left\{ \check{g}_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \check{\gamma}_k}\right] - g_k^\delta \delta(t) + \check{z}_0(t) K_k^\delta \right\} + \\
&\quad + cV \int_1^t \frac{-g_k^\delta \delta(\tau) + \check{z}_0(\tau) K_k^\delta}{(c + \check{\gamma}_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \check{\gamma}_k}\right] d\tau.
\end{aligned}$$

После вычисления контактных давлений под штампом можно найти и угол поворота штампа:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_2}} \left[-\delta(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_2}} + \check{g}_0 + c\check{z}_0(t) + \check{R}_{00} \check{z}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^\delta \check{z}_k(t) \right], \\
\check{g}_0 &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \check{p}_0(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

5. Решение уравнения с известной правой частью.

При решении задачи с известной правой частью дополнительные условия (3.8) превращаются в уравнения для нахождения функций нагрузки $P(t)$ и эксцентриситета $e(t)$ ее приложения (1.25).

Приведем окончательные формулы для нахождения контактных давлений под штампом:

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= \frac{Q(x, t)}{\sqrt{m(x)}}, \quad Q(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{z}_k(t) \hat{\varphi}_k(x), \\
 \hat{z}_k(t) &= (\mathcal{I} + \widehat{\mathcal{W}}_k) \frac{-\hat{g}_k + \delta(t) \hat{g}_k^{\delta} + \alpha(t) \hat{g}_k^{\alpha}}{c + \hat{\gamma}_k}, \\
 \widehat{\mathcal{W}}_k f(x, t) &= \int_1^t \hat{R}_k^*(t, \tau) f(x, \tau) d\tau, \\
 \hat{\varphi}_m(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\varphi}_i^{(m)} p_i(x), \\
 \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} \hat{\varphi}_n^{(k)} &= \hat{\gamma}_k \hat{\varphi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
 k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \\
 \hat{g}_k &= \int_{-1}^1 \frac{g(\xi)}{\sqrt{m(\xi)}} \hat{\varphi}_k(\xi) d\xi, \\
 \hat{g}_k^{\delta} &= \hat{\varphi}_0^{(k)} \sqrt{J_0}, \quad \hat{g}_k^{\alpha} = \hat{\varphi}_0^{(k)} \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + \hat{\varphi}_1^{(k)} \sqrt{\frac{J_0 J_2 - J_1^2}{J_0}},
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Функции $p_k(x)$ вычисляются по формулам (1.15), а ядра $\hat{R}_k^*(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^*(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \hat{\gamma}_k}.$$

Значком ‘ $\hat{}$ ’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решениями задач из §2 и §3. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (3.15) контактных давлений под штампом $Q(x, t)$, по формулам (1.27) можно найти и функции $P(t)$ и $e(t)$.

Замечание 4. Функции $\hat{z}_k(t)$ определяется из более наглядных соот-

ношений

$$\begin{aligned}\hat{z}_k(t) &= -\frac{\hat{g}_k - \hat{g}_k^\alpha \alpha(1) - \hat{g}_k^\delta \delta(1)}{c + \hat{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \hat{\gamma}_k}\right] - \\ &\quad - \int_1^t \frac{-\hat{g}_k^\alpha \dot{\alpha}(\tau) - \hat{g}_k^\delta \dot{\delta}(\tau)}{c + \hat{\gamma}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \hat{\gamma}_k}\right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{c + \hat{\gamma}_k} \left\{ \hat{g}_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \hat{\gamma}_k}\right] - \hat{g}_k^\alpha \alpha(t) - \hat{g}_k^\delta \delta(t) \right\} + \\ &\quad + cV \int_1^t \frac{-\hat{g}_k^\alpha \alpha(\tau) - \hat{g}_k^\delta \delta(\tau)}{(c + \hat{\gamma}_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \hat{\gamma}_k}\right] d\tau.\end{aligned}$$

6. Численные расчеты.

В этом параграфе будем рассматривать упругие основания, износ которых будет происходить с $V = 0.2$.

Исследуем сначала влияние жесткости нижнего слоя на распределение контактных давлений, а также на профиль поверхности, образующейся по прошествии некоторого времени (как уже говорилось, если жесткость покрытия переменная величина, то первоначально ровная поверхность становится волнистой).

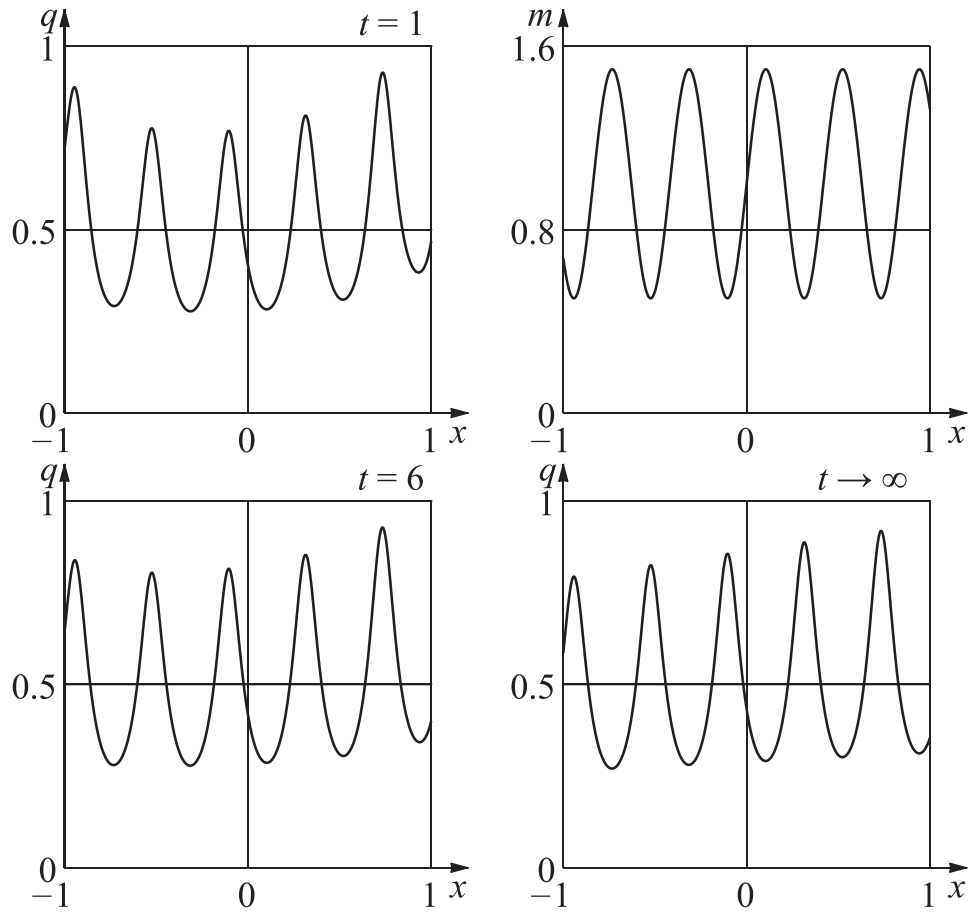
Пусть мягкое покрытие с неоднородностью, описываемой периодической функцией, лежит на довольно жестком нижнем слое. Соответствующие этим условиям значения параметров можно взять в виде

$$c = 1, \quad m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x).$$

На рис. 3.2 показано распределение контактных давлений для различных моментов времени при изнашивании описанного основания плоским штампом, на который с нулевым эксцентриситетом действует единичная сила. Видно, что при $t \rightarrow \infty$ распределение контактных давлений описывается уравнением (3.13), то есть произведение некоторой линейной функции на твердость покрытия. Если построить профиль поверхности в зависимости от времени t (то есть тот профиль, который образуется при снятии штампа с покрытия в момент времени t), то видно, что с течением времени появляется слабая волнистость поверхности (рис. 3.3) (в качестве начальной поверхности принимается неизношенная поверхность).

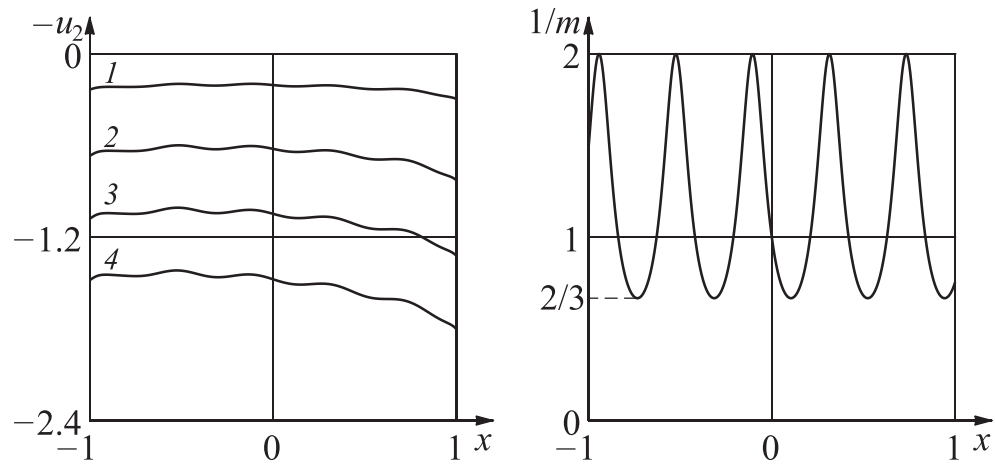
Если же при прочих равных условиях взять нижний слой мягче (жесткость нижнего слоя все равно должна быть на меньше жесткости верхнего), то есть теперь

$$c = 0.1, \quad m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x),$$



Фиг. 3.2. Распределение контактных давлений при различных моментах времени.

$$P(t) \equiv 1, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 1, g(x) \equiv 0$$



Фиг. 3.3. Профиль изношенной поверхности в различные моменты времени.

$$P(t) \equiv 1, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 1, g(x) \equiv 0$$

$$(1 - t = 3.5, 2 - t = 8.5, 3 - t = 13.5, 4 - t = 18.5)$$

а с учетом замены (3.5) $P \equiv 10$, становится видно, что и распределение контактного давления меняется с течением времени сильнее, чем в предыдущем случае (рис. 3.4), и волнистость поверхности становится бо-

лее сильной (рис. 3.5). Таким образом, в случае более жесткого нижнего слоя износ покрытия более равномерен. Отметим еще раз, что численные значения силы P в рассмотренных двух примерах различны и отличаются в 10 (во столько же отличаются и значения параметра c). При этом, в соответствии с (3.5), значение необезразмеренной силы остается прежним.

Графики осадки и угла поворота для случая более жесткого нижнего слоя показаны на рис. 3.6, а для более мягкого — на рис. 3.7. Видно, что в первом случае переходный этап практически отсутствует и графики выходят на асимптоты. Во втором случае этот период присутствует и он значителен. Также, по сравнению с предыдущим случаем, величины осадок и углов поворота значительно больше (начальные значения отличаются примерно в 5 раз), однако скорости изменения осадки и угла поворота уже при $t = 21$ практически одинаковы.

Если изменить форму основания штампа на параболическую:

$$g(x) = x^2,$$

то, как уже было отмечено, график контактных давлений при $t \rightarrow \infty$ не изменится, однако в промежуточные моменты времени он будет отличен от представленных ранее (рис. 3.8). Отличаются и профили изношенной поверхности (рис. 3.9). Они несколько выравниваются по сравнению с предыдущим случаем.

В следующей группе примеров покажем, как влияют локальные упрочнения на распределение контактных давлений и на процесс износа, выясним в каких местах покрытия выгоднее производить упрочнения.

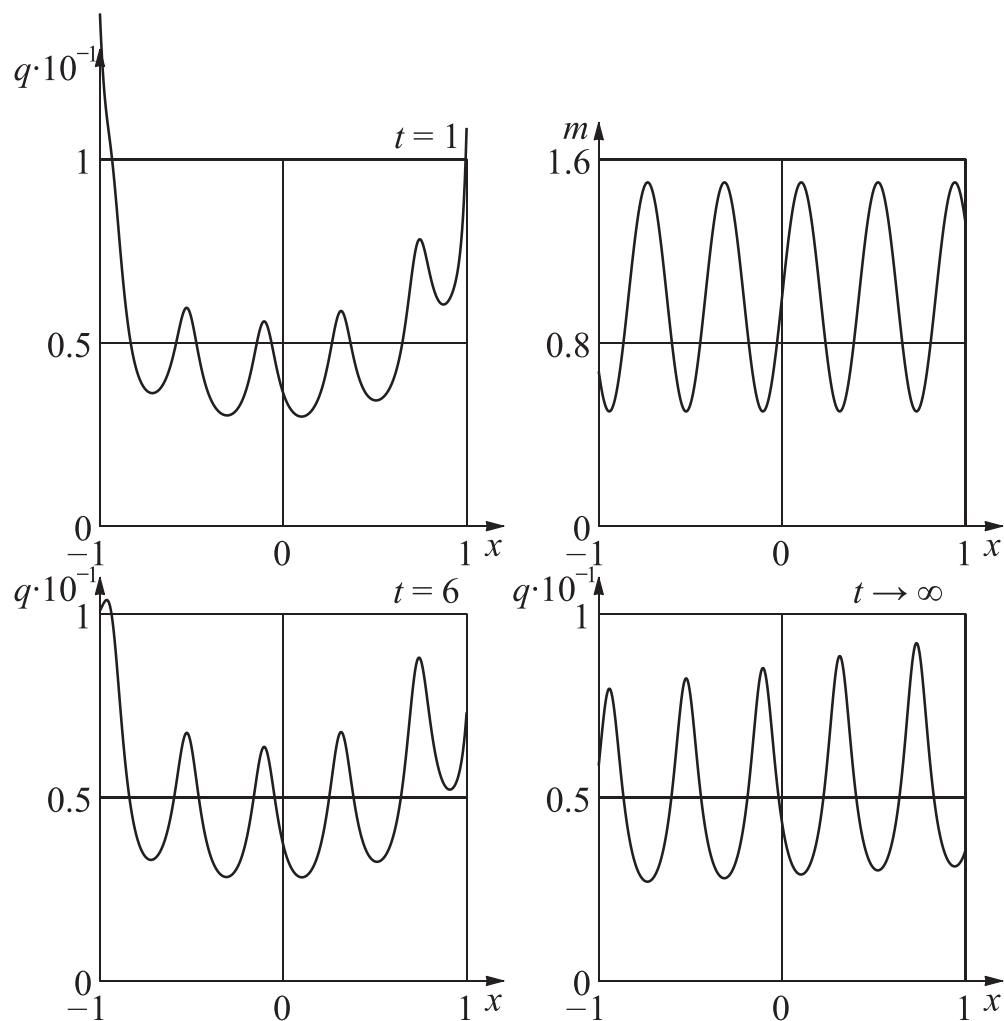
Рассмотрим слой с покрытием, для которого

$$c = 1, \quad m(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } x \in [-0.4, -0.1] \text{ или } x \in [0.1, 0.4], \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.16)$$

то есть когда более твердый материал расположен ближе к центру. Распределение контактных давлений для различных моментов времени представлено на рис. 3.10, а графики профилей изношенной поверхности в различные моменты времени и осадка штампа — на рис. 3.11.

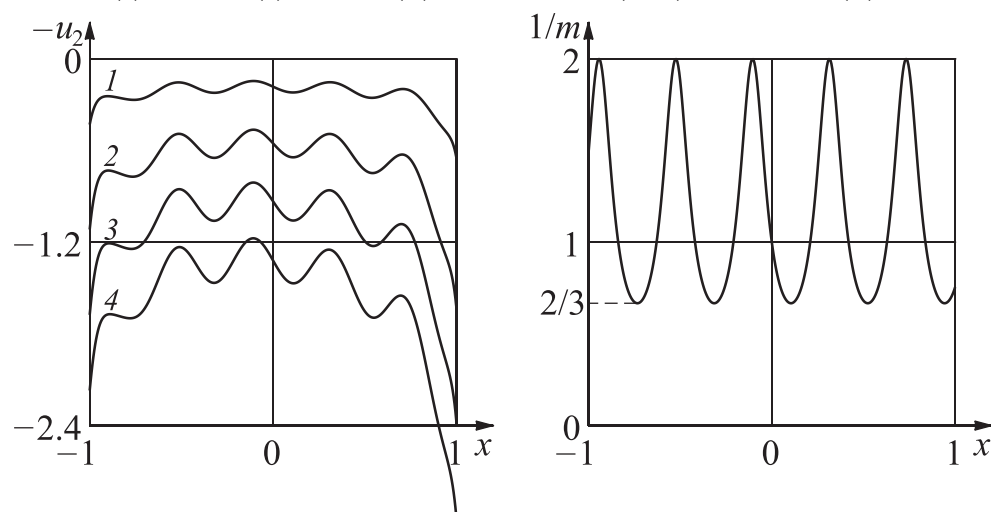
Если же более прочные участки находятся по краям контактной зоны, то есть

$$c = 1, \quad m(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } x \in [-1, -0.7] \text{ или } x \in [0.7, 1], \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.17)$$



Фиг. 3.4. Распределение контактных давлений при различных моментах времени.

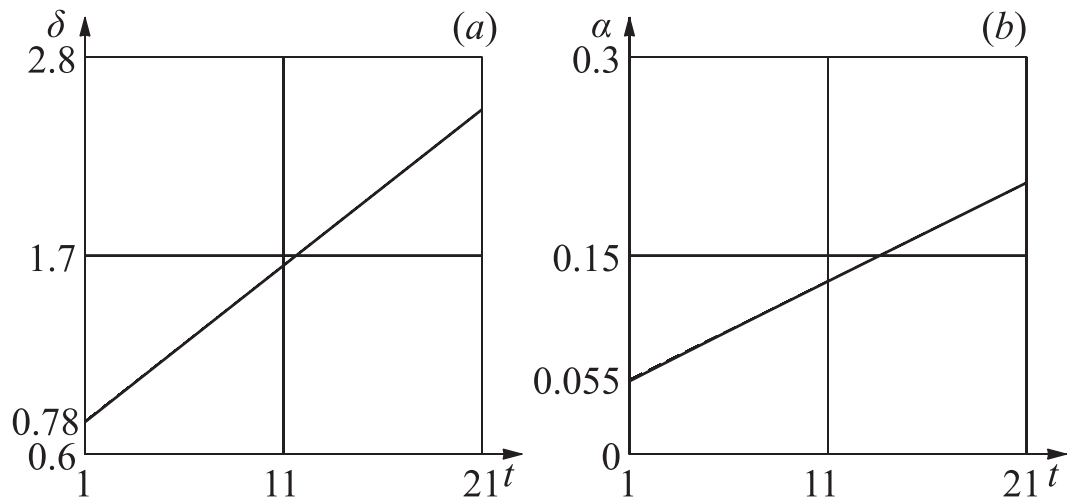
$$P(t) \equiv 10, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) \equiv 0$$



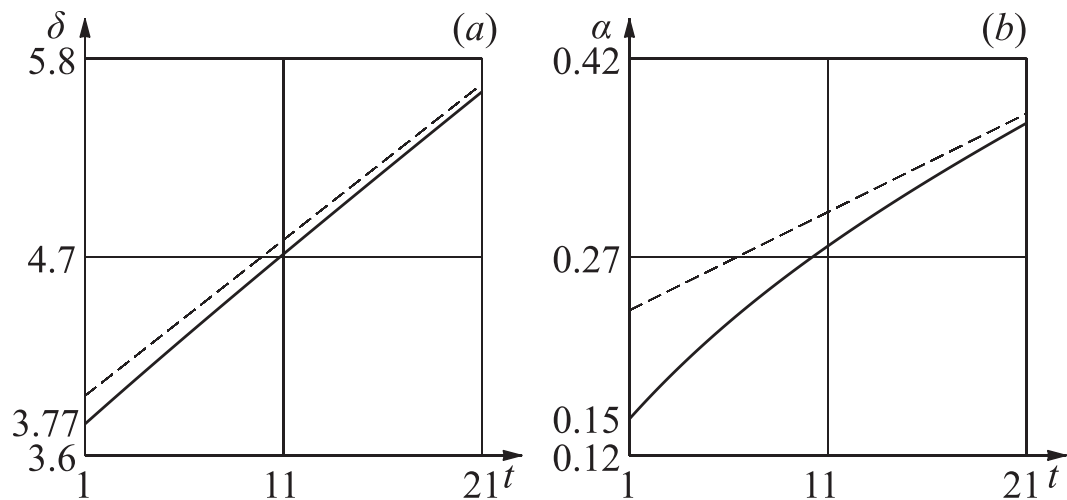
Фиг. 3.5. Профиль изношенной поверхности в различные моменты времени.

$$P(t) \equiv 10, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) \equiv 0$$

$$(1 - t = 3.5, 2 - t = 8.5, 3 - t = 13.5, 4 - t = 18.5)$$



Фиг. 3.6. Изменение осадки (a) и угла поворота (b) штампа от времени при $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x)$, $c = 1$, $g(x) \equiv 0$

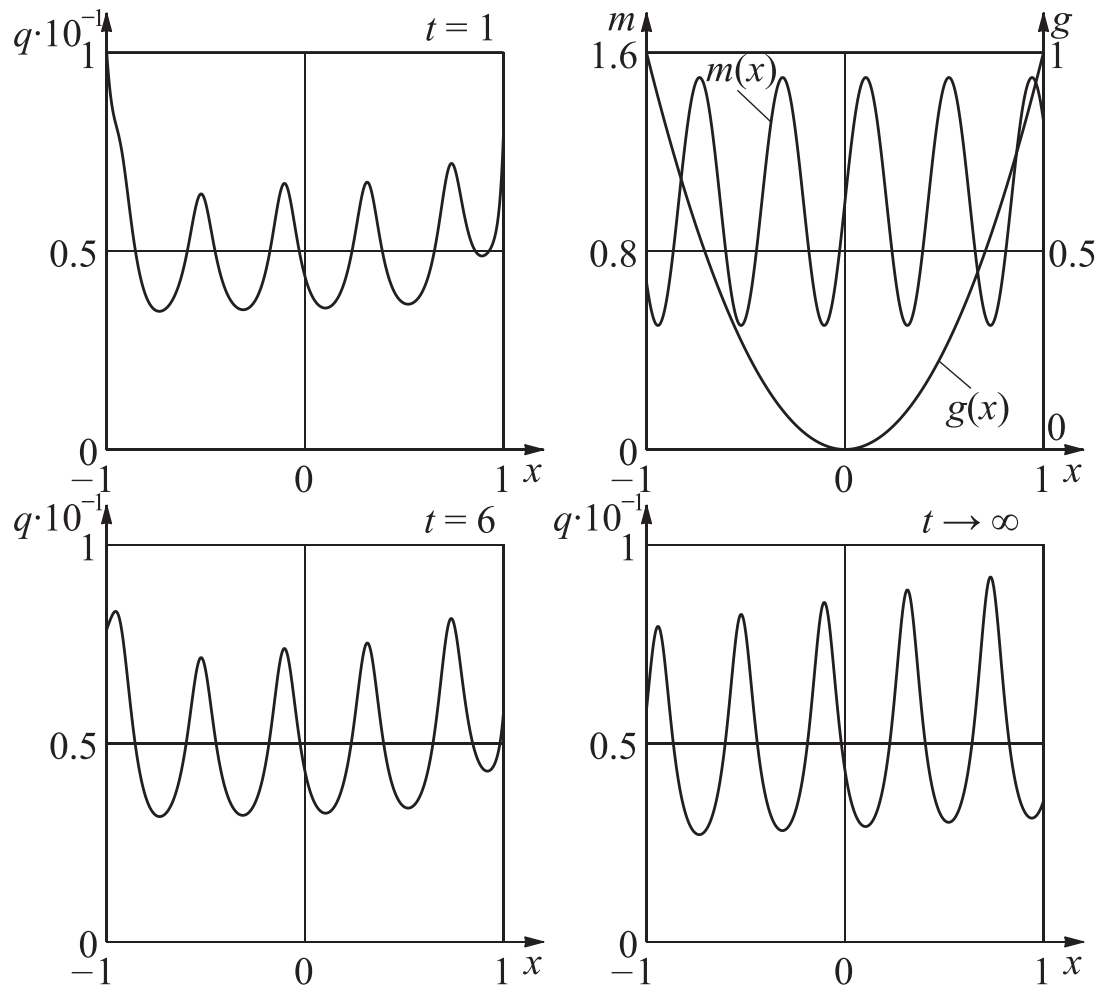


Фиг. 3.7. Изменение осадки (a) и угла поворота (b) штампа от времени при $P(t) \equiv 10$, $e(t) \equiv 0$ для $m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x)$, $c = 0.1$, $g(x) \equiv 0$

то соответствующие графики представлены на рис. 3.12 и 3.13. Видно, что с точки зрения более равномерного износа лучше располагать места упрочнений по краю контактной зоны, а не ближе к центру. Осадка же практически не изменяется от случая к случаю, так как средние жесткости покрытий в рассмотренных случаях одинаковы.

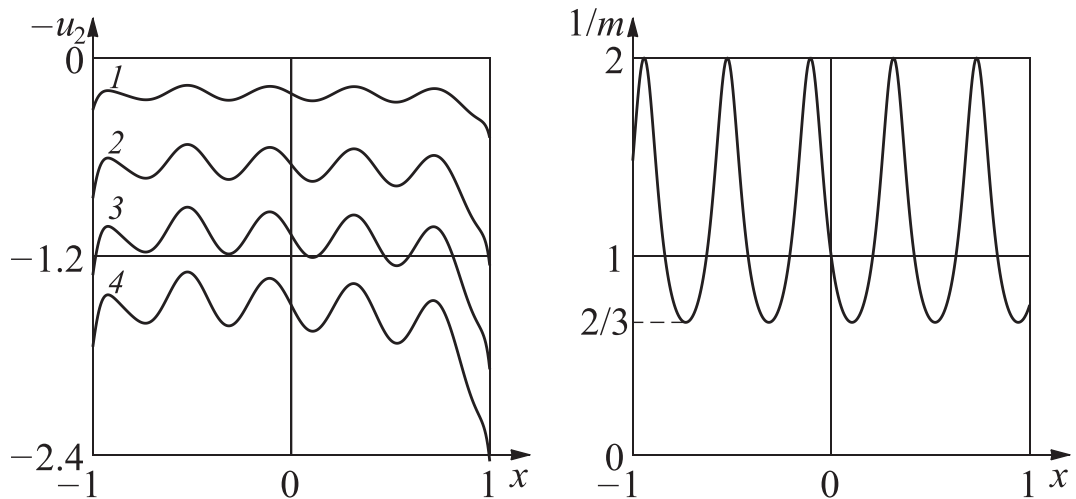
Итак, рассмотрев ряд примеров, можно сделать несколько выводов.

Во-первых, в процессе износа штамп изнашивает различные участки покрытия по-разному, в результате чего при снятии нагрузки образуется некоторый профиль поверхности. Если, например, твердость описывается некоторой осциллирующей функцией, то образуется волнистая поверхность. Также установлено, что чем меньше жесткость нижнего слоя,



Фиг. 3.8. Распределение контактных давлений при различных моментах времени.

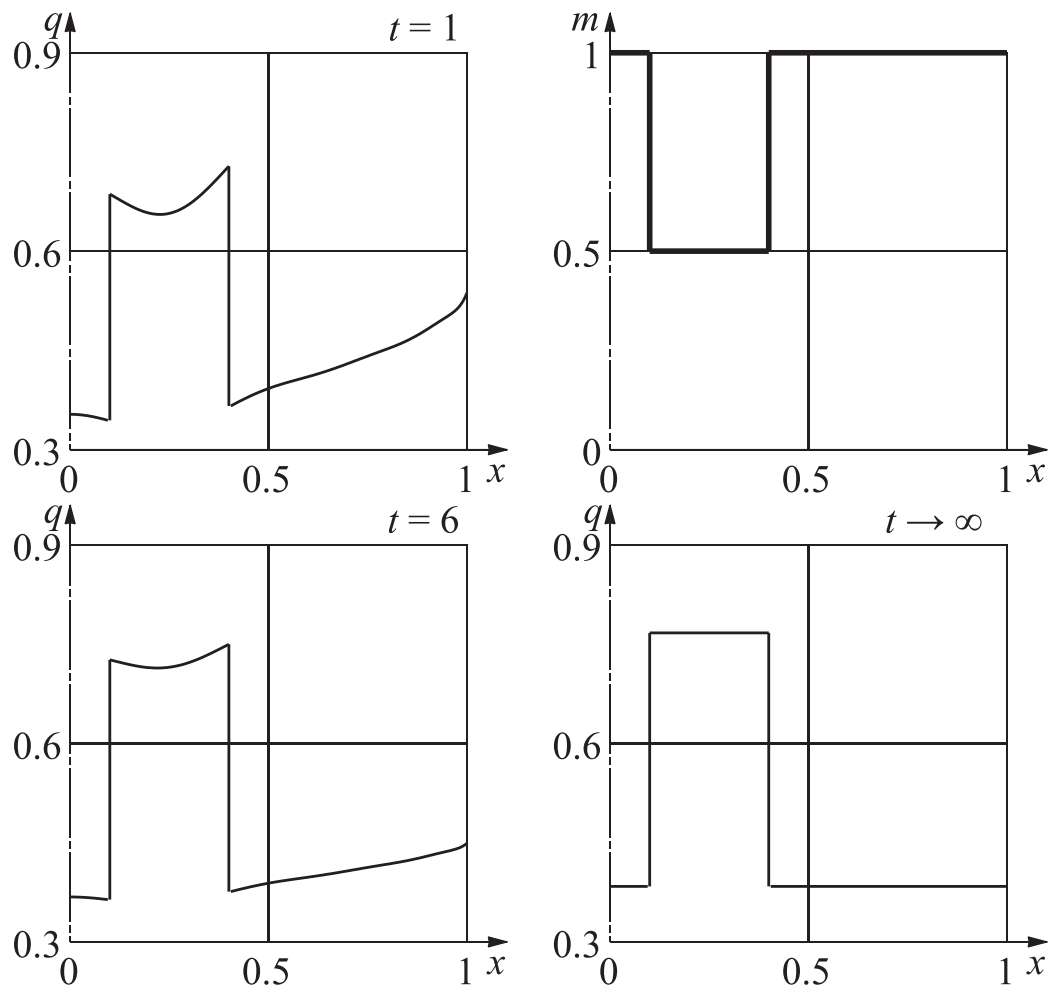
$$P(t) \equiv 10, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) = x^2$$



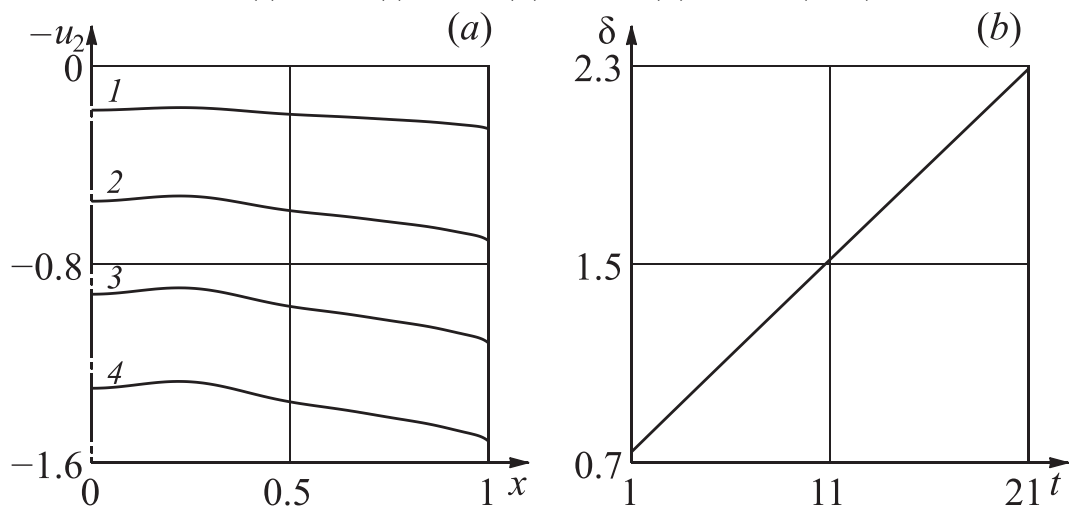
Фиг. 3.9. Профиль изношенной поверхности в различные моменты времени.

$$P(t) \equiv 10, e(t) \equiv 0, m(x) = 1 + 0.5 \sin(15x), c = 0.1, g(x) = x^2$$

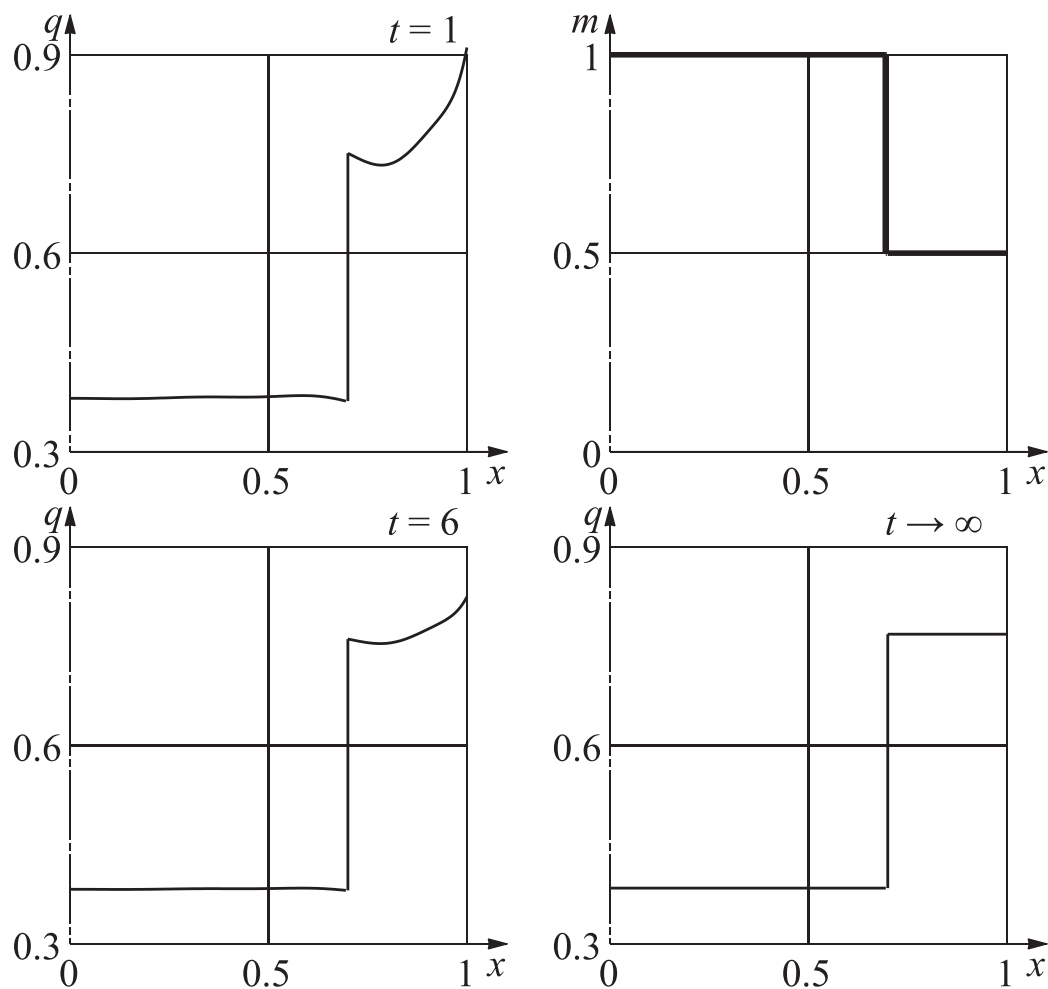
$$(1 - t = 3.5, 2 - t = 8.5, 3 - t = 13.5, 4 - t = 18.5)$$



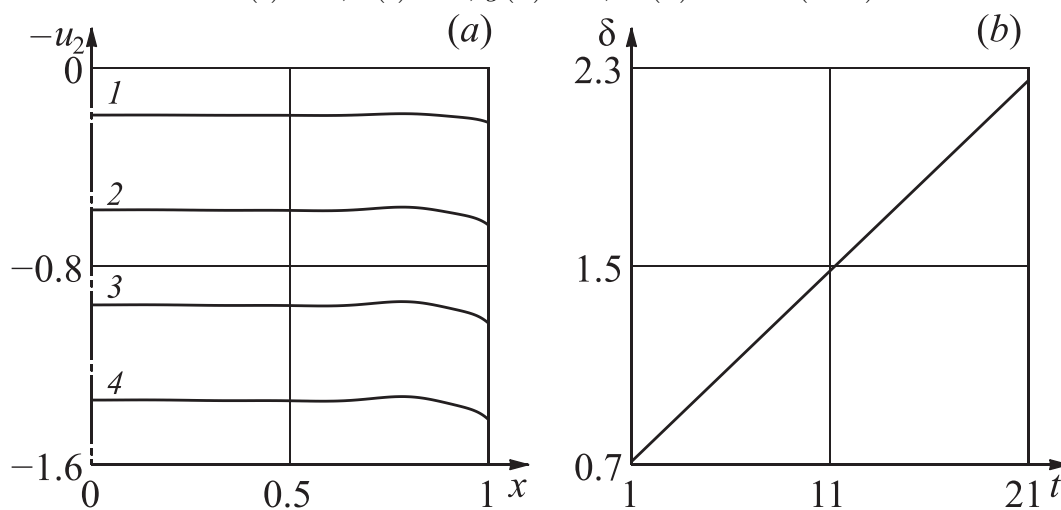
Фиг. 3.10. Распределение контактных давлений при различных моментах времени.
 $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$; $m(x)$ и c по (3.16)



Фиг. 3.11. Профиль изношенной поверхности (a) в различные моменты времени и осадка штампа (b). $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$; $m(x)$ и c по (3.16)
 (1 — $t = 3.5$, 2 — $t = 8.5$, 3 — $t = 13.5$, 4 — $t = 18.5$)



Фиг. 3.12. Распределение контактных давлений при различных моментах времени. $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$; $m(x)$ и c по (3.17)



Фиг. 3.13. Профиль изношенной поверхности (a) в различные моменты времени и осадка штампа (b). $P(t) \equiv 1$, $e(t) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$; $m(x)$ и c по (3.17) ($1 - t = 3.5$, $2 - t = 8.5$, $3 - t = 13.5$, $4 - t = 18.5$)

тем неравномернее происходит износ.

Во-вторых, при упрочнении поверхности следует учитывать тот факт, что с точки зрения более равномерного износа (то есть чтобы по всей площадке контакта износ происходил примерно одинаково) выгоднее располагать области упрочнений по краям области контакта. Суммарная осадка штампа практически не зависит от расположения этих упрочненных зон.

3.2 Осесимметричная задача

1. Постановка задачи.

Постановка задачи в осесимметричном случае схожа с постановкой в плоском случае (рис. 3.14). Как и всюду ранее штамп заменяется некоторой распределенной нагрузкой $p(r, t) = -q(r, t)$. Не останавливаясь на описании остальных предположений (они такие же, как и в случае плоской задачи износа) приведем лишь интегральное уравнение осесимметричной задачи износа:

$$\frac{q(r, t)h}{k_T T(r)} + \frac{k_1 k_2 V}{T(r)} \int_{\tau_0}^t q(r, \tau) d\tau + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H E_2} \mathcal{D}q(r, t) = \delta(t) - g(r), \quad (3.18)$$

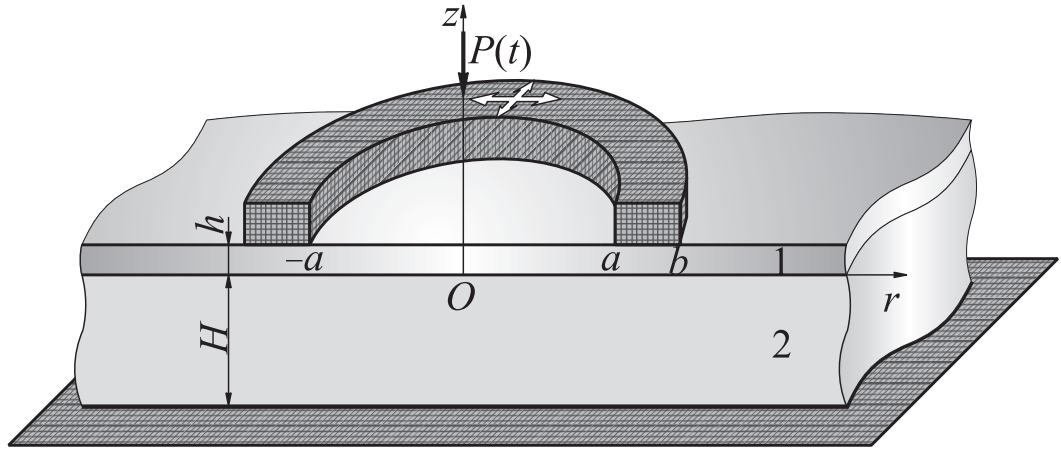
$$a \leq r \leq b.$$

Здесь a и b — внутренний и внешний радиусы кольцевого штампа, h и H — толщины покрытия и нижнего слоя ($h \ll (b - a)$), V — осредненное значение модуля скорости скольжения штампа по слою, τ_0 — момент начала загрузки, ν_2 и E_2 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга нижнего слоя; $T(r)$ — функция твердости покрытия, \mathcal{D} — интегральный оператор с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{as}(r/H, \rho/H)$, которое имеет вид (1.34), $\delta(t)$ — осадка штампа, $g(r)$ — функция формы основания штампа. Условие равновесия штампа на слое в рассматриваемом осесимметричном случае имеет вид (1.36)

Сделав в (3.18) и (1.36) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & (\rho^*)^2 &= \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, & \lambda &= \frac{H}{b - a}, & \eta &= \frac{a}{b - a}, & \xi^2 &= \frac{b + a}{b - a}, \\ t^* &= \frac{t}{\tau_0}, & \tau^* &= \frac{\tau}{\tau_0}, & \tau_2^* &= \frac{\tau_2}{\tau_0}, & \delta^*(t^*) &= k_P \frac{\delta(t)}{b - a}, & g^*(r^*) &= k_P \frac{g(r)}{b - a}, \\ q^*(r^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(r, t)}{E_2}, & V^* &= k_1 k_2 k_T \frac{V \tau_0}{h}, & c^* &= \frac{E_2}{E_0}, \\ m^*(r^*) &= \frac{E_0}{k_T T(r)(1 - \nu_2^2)} \frac{h}{2(b - a)}, & P^*(t^*) &= \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2(b^2 - a^2)}, \\ \mathcal{B}^* f(r^*, t^*) &= \int_0^1 k_{as}^*(r^*, \rho^*) f(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*, \\ k_{as}^*(r^*, \rho^*) &= \frac{\xi^2}{\lambda} k_{as} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b + a}{H} k_{as} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Безразмерный коэффициент k_P несет тот же смысл, что и в случае плоской задачи. Опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение



Фиг. 3.14. Износ вязкоупругого основания с неоднородным упругим покрытием в осесимметричном случае

$$cm(r) \left[q(r, t) + V \int_1^t q(r, \tau) d\tau \right] + \mathcal{B}q(r, t) = \delta(t) - g(r), \quad (3.20)$$

$$0 \leq r \leq 1,$$

с дополнительным условием (1.39). Деля на $\sqrt{m(r)}$ уравнение (3.20) и вводя обозначения (1.40), интегральное уравнение (3.20) приводится к интегральному уравнению с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта

$$c(t) \left[Q(r, t) + V \int_1^t Q(r, \tau) d\tau \right] + \mathcal{D}Q(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad (3.21)$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

Дополнительное условие (1.39) приводится к виду

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = P(t). \quad (3.22)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (3.21), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительное условие (3.22).

2. Решение осесимметричной задачи.

Функция $Q(r, t)$ для осесимметричного случая представима в виде следующего ряда

$$Q(r, t) = v_0(t)p_0^\circ(r) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\psi_k(r).$$

Полином $p_0^\circ(r)$ задан формулой (1.43), функция $v_0(t)$ находится из соотношения (1.44), собственные функции $\psi_k(r)$ ($k = 1, 2, \dots$) ищутся из (1.47), а функции разложения $v_k(t)$ ($K = 1, 2, \dots$) определяются из

$$\begin{aligned} v_k(t) &= -(\mathcal{I} + \mathcal{Y}_k) \frac{g_k + v_0(t)T_k}{c + \beta_k}, \\ T_k &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n} \psi_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \mathcal{Y}_k f(r, t) &= \int_1^t R_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

где собственные значения β_k , собственные векторы $\psi_n^{(k)}$ ($k, n = 1, 2, \dots$) и коэффициенты T_{mn} ($m, n = 0, 1, \dots$) разложения ядра интегрального оператора \mathcal{D} ищутся по формулам (1.47), коэффициенты g_k ($k = 0, 1, \dots$) разложения функции формы основания $g(r)/\sqrt{m(r)}$ определяются по формуле (2.24), а $R_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots$) — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \beta_k}.$$

Как и ранее, полученное решение имеет структуру:

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[v_0(t) P_0^\circ(r) + \dots \right], \quad (3.23)$$

то есть удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой (3.19) функцию жесткости покрытия $R(r)$.

Замечание 5. Функции $v_k(t)$ можно представить в более наглядной форме

$$\begin{aligned} v_k(t) &= -\frac{g_k + v_0(1)T_k}{c + \beta_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \beta_k}\right] - \int_1^t \frac{\dot{v}_0(\tau)T_k}{c + \beta_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \beta_k}\right] d\tau = \\ &= -\frac{1}{c + \beta_k} \left\{ g_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \beta_k}\right] + v_0(t)T_k \right\} + \\ &\quad + cV \int_1^t \frac{v_0(\tau)T_k}{(c + \beta_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \beta_k}\right] d\tau. \end{aligned}$$

Приведем теперь уравнение для определения функции осадки штампа

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{I_0}} \left\{ g_0 + c \left[v_0(t) + V \int_1^t v_0(\tau) d\tau \right] + T_{00}v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} T_k v_k(t) \right\}.$$

Таким образом, построено аналитическое решение осесимметричной контактной задачи о взаимодействии жесткого кольцевого штампа и слоя при наличии поверхностно неоднородного покрытия.

При постоянной силе P , действующей на штамп, для упругого основания при больших значений времени в представлении контактных давлений остается только один главный член разложения, а уравнение (3.23) преобразуется в

$$q(r, t) = \frac{A}{m(r)},$$

то есть контактные давления под штампом становятся прямо пропорциональными твердости покрытия. Коэффициент A можно определить из дополнительного условия (1.39):

$$A = \frac{P}{I_0}, \quad I_0 = \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{m(\rho)}.$$

Как и в плоском случае этот коэффициент не зависит от функции формы основания штампа, то есть при любой функции $g(r)$ распределение контактных давлений при больших значениях будет абсолютно одинаковым.

При постоянной силе P осадка стремится к линейной по времени функции

$$\delta_\infty(t) = cV \frac{P}{I_0} t + [c(1 - V) + T_{00}] \frac{P}{I_0} + \frac{g_0}{\sqrt{I_0}}.$$

3. Решение уравнения с известной правой частью.

Запишем теперь без вывода решение поставленной осесимметричной контактной задачи с известной правой частью. Дополнительное условие (3.22) превращается в уравнение для нахождения функции силы приложения (1.47).

Приведем окончательные формулы для вычисления контактных напряжений под штампом:

$$q(r, t) = \frac{Q(r, t)}{\sqrt{m(r)}}, \quad Q(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{v}_k(t) \hat{\psi}_k(r),$$

$$\hat{v}_k(t) = (\mathcal{I} + \hat{\mathcal{Y}}_k) \frac{-\hat{g}_k + \delta(t) g_k^\delta}{c + \hat{\beta}_k}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_k f(r, t) = \int_1^t \hat{R}_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau,$$

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_m(r) &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\psi}_i^{(m)} p_i^{\circ}(r), \\
\sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} \hat{\psi}_n^{(k)} &= \hat{\beta}_k \hat{\psi}_m^{(k)}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \\
k(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} p_m^{\circ}(r) p_n^{\circ}(\rho), \\
\hat{g}_k &= \int_0^1 \frac{g(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \hat{\psi}_k(\rho) \rho d\rho, \quad g_k^{\delta} = \int_0^1 \frac{\hat{\psi}_k(\rho)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = \hat{\psi}_0^{(k)} \sqrt{I_0}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Функции $p_k^{\circ}(x)$ вычисляются по формулам (1.43), а ядра $\hat{R}_k^{\circ}(t, \tau)$ ($k = 0, 1, \dots$) являются резольвентами ядер

$$\hat{K}_k^{\circ}(t, \tau) = -\frac{cV}{c + \hat{\beta}_k}.$$

Значком ‘^’ здесь помечены те величины, которые изменились по сравнению с решением задачи из §2. Таким образом, после нахождения при помощи соотношений (3.24) напряжений под штампом $Q(r, t)$, по формуле (1.49) можно найти и функцию $P(t)$.

Замечание 6. Функции $\hat{v}_k(t)$ можно представить и с помощью более наглядного соотношения

$$\begin{aligned}
\hat{v}_k(t) &= -\frac{\hat{g}_k - g_k^{\delta} \delta(1)}{c + \hat{\beta}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \hat{\beta}_k}\right] - \int_1^t \frac{-g_k^{\delta} \delta(\tau)}{c + \hat{\beta}_k} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \hat{\beta}_k}\right] d\tau = \\
&= -\frac{1}{c + \hat{\beta}_k} \left\{ \hat{g}_k \exp\left[-\frac{cV(t-1)}{c + \hat{\beta}_k}\right] - g_k^{\delta} \delta(t) \right\} + \\
&\quad + cV \int_1^t \frac{-g_k^{\delta} \delta(\tau)}{(c + \hat{\beta}_k)^2} \exp\left[-\frac{cV(t-\tau)}{c + \hat{\beta}_k}\right] d\tau.
\end{aligned}$$

3.3 Основные результаты и выводы

1. Предложена простейшая модель износа поверхностно неоднородного упругого основания. Решены соответствующие износо-контактные задачи в аналитическом виде в плоском и осесимметричном случаях. Получены простые асимптотические формулы, пригодные для использования в инженерных расчетах. Например, показано, что в плоском случае при постоянных силе и моменте, действующих на штамп, при больших значениях времени контактные давления представимы в виде произведения функции твердости $T(x)$ и некоторой линейной функции, то есть $q(x, t) = AT(ax)(1 + \Theta x)$, где коэффициент Θ обусловлен наличием перекоса штампа за счет приложенного момента M или продольной неоднородности покрытия. Отмечено, что коэффициенты A и Θ не зависят от формы основания штампа. В осесимметричном же случае контактные давления при больших значениях времени и при постоянной силе просто пропорциональны функции твердости.
2. Показано, что в процессе износа штамп изнашивает различные участки покрытия по разному, в результате чего при снятии нагрузки образуется некоторый профиль поверхности. Если, например, твердость описывается некоторой осциллирующей функцией, то образуется волнистая поверхность. Также установлено, что чем меньше жесткость нижнего слоя, тем неравномернее происходит износ.
3. При упрочнении поверхности следует учитывать тот факт, что с точки зрения более равномерного износа (то есть чтобы по всей площадке контакта износ происходил примерно одинаково) выгоднее располагать более твердые области по краям области контакта. Суммарная осадка штампа практически не зависит от расположения этих зон.

Заключение

Сформулируем основные выводы и перечислим наиболее важные научные результаты выполненных в диссертации исследований.

1. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи о конформном контакте между вязкоупругими стареющими основаниями с покрытиями и жесткими штампами. Показана важность учета конформного контакта, его существенное отличие от классического гладкого. Решение задач получено в аналитическом виде, причем в выражениях для контактных напряжений функция формы основания выделена явно, что позволяет проводить расчеты для реальных форм поверхности покрытий, описываемых быстро осциллирующие функции.
2. Поставлены и решены плоские и осесимметричные задачи для поверхностно неоднородных вязкоупругих слоистых оснований. Такой тип неоднородности учтен впервые, причем в полученном решении функция жесткости верхнего тонкого слоя выделена явно, что дает возможность расчета как быстро осциллирующих, так и кусочно-постоянных функций жесткости, которые часто встречаются на практике.
3. Предложена простейшая модель износа поверхностно неоднородного упругого основания. Решена соответствующая износо-контактная задача в аналитическом виде. Получены простые асимптотические формулы, пригодные для использования в инженерных расчетах.
4. Развита проекционный метод решения смешанных интегральных уравнений для использования в конкретных плоских и осесимметричных контактных и износо-контактных задачах для тел с поверхностно неоднородными покрытиями и покрытиями со сложной формой поверхности.
5. Все задачи сопровождаются детальными модельными расчетами, а также графиками, на которых впервые показаны распределения контактных напряжений в случаях реальных функций поверхностной неоднородности и экспериментально измеренного профиля поверхности. На основании анализа полученных решений и расчетов обнаружены новые механические эффекты. Сделаны практически важные выводы.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Об эффективности применения обобщенного проекционного метода

В приложении показываются достоинства использованного обобщенного проекционного метода по сравнению с обычными методами решения такого рода задач даже при отсутствии вязкоупругости и известной правой частью.

Использованный в данной работе проекционный метод позволяет единообразно подойти к решению сложных разнообразных контактных задач, как к решению некоторой общей проекционной задачи. В частности, он показывает, что в случае плоской контактной задачи существует четыре различных варианта постановки: 1) когда заданы осадка и угол поворота штампа (то есть правая часть уравнения задана), 2) когда заданы осадка штампа и момент приложения нагрузки, 3) когда заданы угол поворота штампа и сила приложения нагрузки, 4) когда заданы сила и момент приложения нагрузки. Каждая из постановок представляет из себя отдельную задачу со своим специфическим интегральным оператором, что приводит к необходимости для каждой из четырех задач строить свою систему собственных функций.

Следует заметить, что решения задач с неполной информацией о правой части и дополнительными условиями (случаи 1)–3)) не были ранее получены даже для упругого материала. Это удалось сделать только при помощи проекционного метода А.В. Манжирова. Более того, он позволил построить новое эффективное решение классической задачи для интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром Шмидта при заданной правой части, отличающееся от классического решения данного Шмидтом и приведенного в книге Гурса [35].

Чтобы это показать, рассмотрим интегральное уравнение плоской контактной задачи для упругого основания с тонким неоднородным по-

крытием, которое после соответствующей замены переменных имеет вид

$$Q(x) + \mathcal{F}Q(x) = \frac{\delta}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha x}{\sqrt{m(x)}} + \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad q(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad (\text{П.1})$$

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k_{\text{pl}}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) \frac{f(\xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}} dx.$$

Здесь $q(x)$ — контактные давления под штампом, $m(x)$ — функция, характеризующая жесткость покрытия (обратная зависимость), \mathcal{F} — интегральный оператор с симметричным положительно определенным ядром типа Гильберта-Шмидта, δ — осадка штампа, α — угол его поворота, а $g(x)$ — форма его основания. Ядро $k_{\text{pl}}[(x-\xi)/\lambda]$ интегрального оператора \mathcal{F} возьмем в форме (1.4). Считается, что осадка и угол поворота штампа заданы и требуется найти распределение контактных давлений под штампом.

Замечание. Для случая, когда форма покрытия и форма штампа комформны, интегральное уравнение имеет практически такой же вид, только слагаемое $g(x)/\sqrt{m(x)}$ отсутствует, а функция $m(x)$ теперь уже характеризует толщину покрытия (прямая пропорциональность). Так что уравнение П.1 является наиболее общим для двух этих случаев.

Напомним, что решая эту задачу обобщенным проекционным методом мы строили специальную ортонормированную систему функций, учитывающую весовую функцию $m(x)$. Для разложения в ряд функций типа $x^i/\sqrt{m(x)}$ по такому базису требуется конечное число базисных функций, а именно $(i+1)$. Таким образом первые два члена в левой части П.1 раскладываются в ряд лишь по первым двум базисным функциям. Функция формы основания обычно задается какой-либо гладкой функцией, так что для разложения последнего члена в левой части П.1 в ряд обычно требуется достаточно небольшое количество таких базисных функций.

Если же решать поставленную задачу обычным методом, то есть использовать представление функции $Q(x, t)$ в виде ряда по традиционным ортогональным полиномам ([35]), например, полиномам Лежандра (см., например, [17]), то для разложения первых двух членов в левой части П.1 в ряд потребуется неограниченное число базисных функций, а поскольку функция $m(x)$ может быть сильноосциллирующей и даже разрывной, то этот ряд будет довольно долго сходиться. При большом количестве членов ряда будут накапливаться всяческие вычислительные ошибки, так что больше ~ 40 членов ряда вряд ли удастся использовать.

Из-за такого ограничения не удастся должным образом разложить левую часть уравнения П.1, а, следовательно, и получить корректное решение задачи.

Продemonстрируем написанное выше на ряде численных примеров.

Во всех дальнейших примерах примем $\lambda = 2$, $\delta = 1$, $\alpha = 0$, $g(x) \equiv 0$, а функция $L(u)$ вычисляется по формуле (1.6) при $\nu_2 = 0.3$.

Рассмотрим сначала пример с довольно простой функцией $m(x)$:

$$m(x) = 0.4 + 0.2 \cos 14x.$$

На рис. П.1 показаны графики функции $Q(x) = q(x)\sqrt{m(x)}$ для различного количества базисных функций (a — использование полиномов Лежандра, b — использование специальных базисных функций). Видно, что для получения корректного графика функции для случая a достаточно 16 — 19 полиномов, причем с ростом количества полиномов функция $Q(x)$ значительно меняет свой вид (при 7 полиномах она вообще имеет вид параболы). Для случая b достаточно уже 7 полиномов. Дальнейшее увеличение количества полиномов в обоих случаях не приводит к сильному изменению графиков функции $Q(x)$.

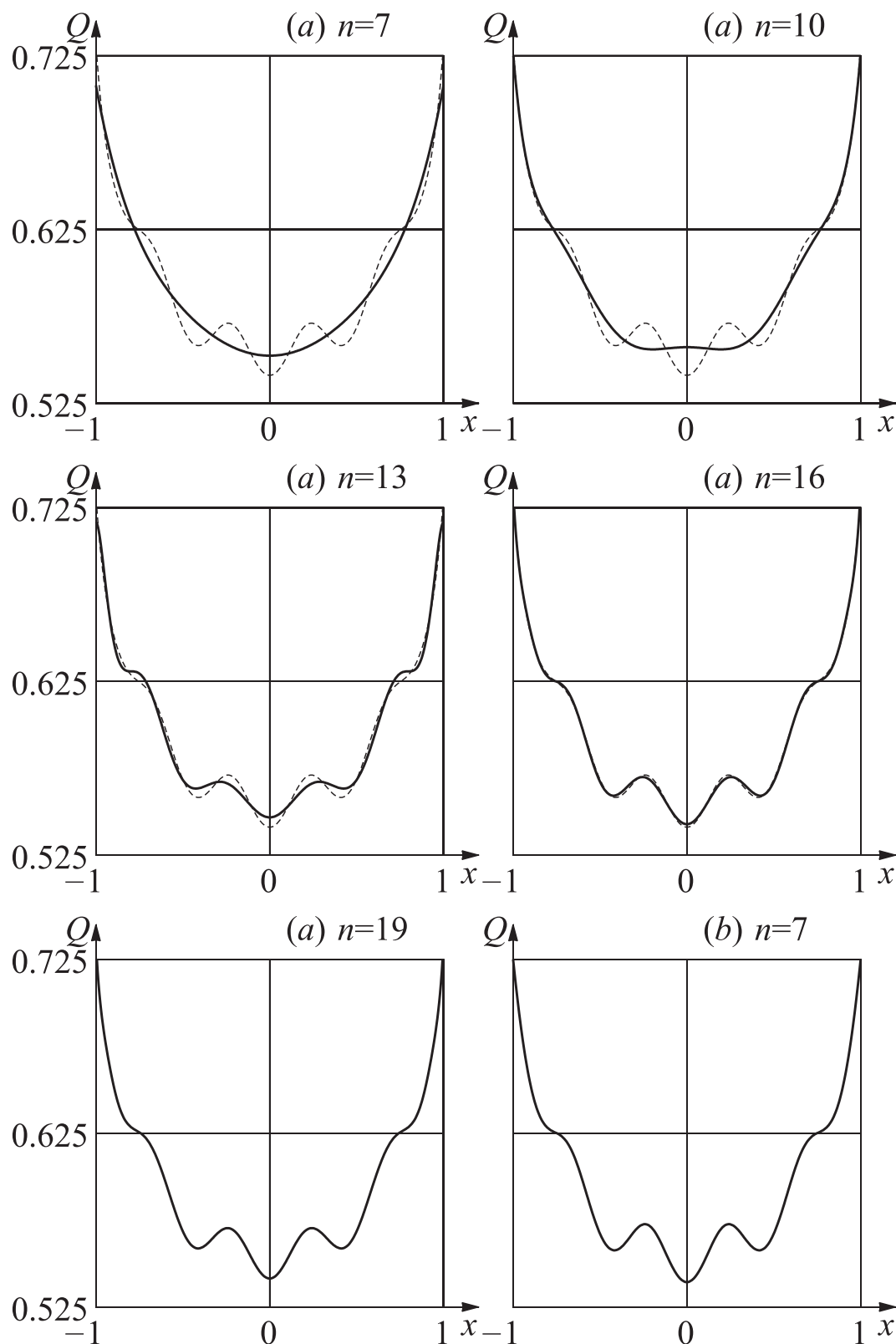
Таким образом при довольно простой функции $m(x)$ удастся добиться сходимости решения и в том и в другом случаях, однако количество аппроксимирующих многочленов различно. В данном примере оно отличается в 2 — 3 раза. Показано, что специального вида базис позволяет строить приемлемые решения даже при малом количестве базисных функций.

В следующем примере возьмем более сложную функцию, которая имеет большее число экстремумов и ее значения на интервале $[-1, 1]$ могут отличаться на порядок.

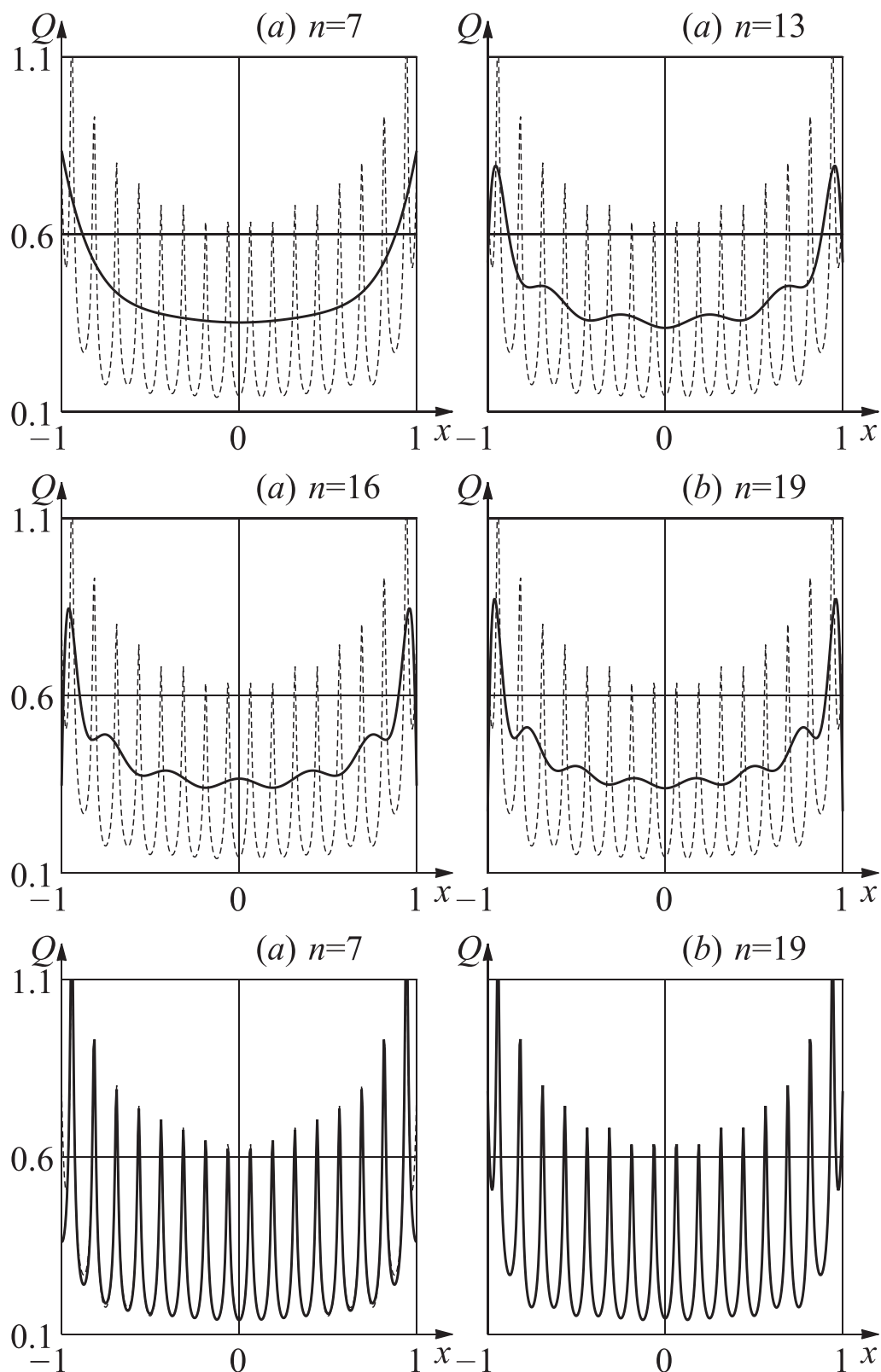
Возьмем теперь функцию $m(x)$ в виде

$$m(x) = 0.22 + 0.2 \cos 50x.$$

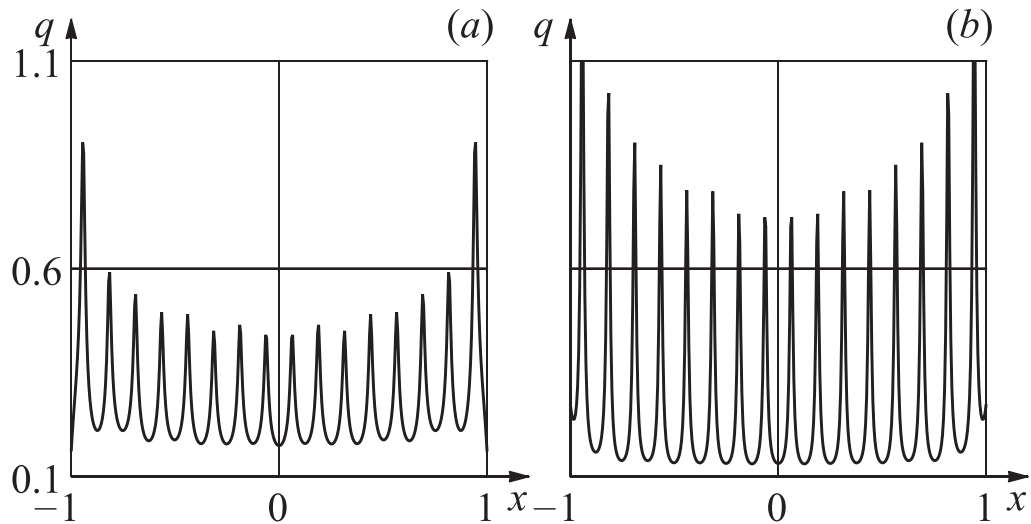
На рис. П.2 показаны графики функции $Q(x) = q(x)\sqrt{m(x)}$ для различного количества базисных функций (a — использование полиномов Лежандра, b — использование специальных базисных функций). Видно, что в случае a решение является абсолютно неправильным даже при 19 базисных функциях. Разумеется, при их увеличении решение должно сходиться, однако его будет невозможно получить из-за вычислительных погрешностей (уже при 25 многочленах можно столкнуться с большими вычислительными проблемами). В случае b даже при 7 многочленах



Фиг. П.1. Сравнение решения для различного количества аппроксимирующих многочленов при $m(x) = 0.4 + 0.2 \cos 14x$: a — использование полиномов Лежандра, b — использование специальных базисных функций



Фиг. П.2. Сравнение решения для различного количества аппроксимирующих многочленов при $m(x) = 0.22 + 0.2 \cos 50x$: *a* — использование полиномов Лежандра, *b* — использование специальных базисных функций



Фиг. П.3. Сравнение решения для $q(x)$ при $m(x) = 0.22 + 0.2 \cos 50x$:
 a — использование полиномов Лежандра, b — использование специальных базисных функций

решение имеет приемлемый вид. Отличие проявляется лишь на концах отрезка $[-1, 1]$, однако это обстоятельство не меняет общей картины. В данном примере достаточно уже 15 — 19 аппроксимирующих многочленов. На рис. П.3 показаны графики функции $q(x)$ при 19 базисных функциях. На них также видно сильное отличие решений при использовании различных методов.

Таким образом мы показали, что для непостоянных функций $m(x)$ обычный метод с использованием классических ортогональных полиномов, в частности, полиномов Лежандра, неприменим даже в упругом случае. Он приводит к абсолютно неправильному результату при ограничении числа базисных функций. Для решения подобных задач необходимо использовать специальные базисные функции, учитывающие вид функции $m(x)$. Решение таких задач обобщенным проекционным методом позволяет в решении в явном виде выделить особенность $1/m(x)$, в то время как обычный метод решения выделяет лишь $1/\sqrt{m(x)}$, что сильно сказывается на решении, так как оставшаяся часть $1/\sqrt{m(x)}$ приходится аппроксимировать с помощью конечного числа базисных функций, что невозможно для быстро осциллирующих и даже разрывных функций $m(x)$, которые могут встретиться в задачах с реальными характеристиками, полученными из экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 237 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. №5. С. 58–66.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
4. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение. 176 с.
5. Александров В.М., Сметанин Б.Н., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1986.
6. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
7. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
8. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. 108 с.
9. Александровский С.В., Васильев П.И. Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.
10. Арутюнян Н.Х. Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // Докл. АН АрмССР. 1947. Т. 7. № 5. С. 203–209.
11. Арутюнян Н.Х. Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 6. С. 609–622.
12. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
13. Арутюнян Н.Х. Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 155–202.

14. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
15. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э.* Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
16. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э.* Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
17. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
18. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
19. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
20. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
22. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
23. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
24. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.
25. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости при наличии износа // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 981–986.
26. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
27. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
28. *Гольденблатт И.И., Николаенко Н.А.* Теория ползучести строительных материалов и ее приложения. М.: Госстройиздат, 1960. 256 с.

29. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
30. Горячева И.Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
31. Горячева И.Г., Солдатенков И.А. Контактные задачи с учетом износа. М.: Физматлит, 2001. С. 438–458.
32. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
33. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
34. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Пространственные задачи теории упругости. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.
35. Гурса Э. Курс математического анализа. Том третий. Часть II. Интегральные уравнения и вариационное исчисление. М.-Л.: ГТТИ, 1934. 318 с.
36. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
37. Довнорович В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск: Изд-во БГУ, 1959. 107 с.
38. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
39. Каган-Розенцвейг Л.М., Харлаб В.Д. Об учете старения бетона в задачах линейной теории ползучести // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. тр. — Л.: ЛИСИ, 1985. С. 99–106.
40. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих сред. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
41. Карапетян К.С. Влияние старения бетона на зависимость между напряжением и деформациями ползучести // Изв. АН. АрмССР. Серия физ.-мат. наук. 1959. Т. 12. № 4. С. 57–88.
42. Казаков К.Е., Минеева О.М. Осесимметричная контактная задача для упругого основания с тонким неоднородным покрытием //

- Междунар. молод. науч. конф. «XXXI Гагаринские чтения», Секция №3, Механика и моделирование материалов и технологий, Москва, 5–9 апреля 2005 г. Тез. докл. — Москва: ИПМех РАН, 2005. С. 20–21.
43. *Казаков К.Е.* Об износе поверхностно неоднородного основания // Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 171–174.
44. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого основания с тонким неоднородным покрытием // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения академика РАН И. И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Т. 1. — Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2005. С. 93–97.
45. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача для вязкоупругого тела с покрытием переменной толщины // XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 4–8 апреля 2006 г. — М.: МАТИ, 2006. Т. 1. С. 124–125.
46. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Ракетно-космическая техника. Фундаментальные и прикладные проблемы механики: Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию В. И. Феодосьева. Москва, 4–6 мая 2006 г. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. С. 53.
47. *Казаков К.Е.* Плоские контактные задачи для тел с покрытиями переменной толщины // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. М. И. Лобачевского, 2006. С. 103.
48. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел со сложными свойствами и формой поверхности // Междунар. молод. науч. конф. «XXXIII Гагаринские чтения», Секция №3, Механика и моделирование материалов и технологий, Москва, 3–7 апреля 2007 г. Тез. докл. — М.: ИПМех РАН, 2007. С. 30–31.
49. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54). С. 176–196.

50. *Казаков К.Е.* Контактные задачи для тел с покрытиями // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Тезисы докладов Международной конференции / Под ред. акад. Н. Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2007. 128 с. С. 53–54.
51. *Казаков К.Е.* Осесимметричная контактная задача о склейке // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Труды Международной конференции, посвященной 95-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. 25–28 сентября 2007, Цахкадзор, Армения. — Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2007. 531 с. С. 200–204.
52. *Казаков К.Е.* Плоский конформный контакт штампа и вязкоупругого основания с покрытием // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XI Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 26–29 ноября 2007 г. — Ростов-на-Дону: Издательство ООО «ЦВВР», 2007. (в печати)
53. *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 320 с.
54. *Коваленко Е.В.* Контактные задачи для тел с покрытиями. М.: Физматлит, 2001. С. 459–475.
55. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
56. *Колмагоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 496 с.
57. Контактные задачи и их инженерные приложения. М.: НИИМАШ, 1969.
58. Концентрация напряжений. Киев: Наукова думка, 1971.
59. *Коровчинский М.В.* Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. — М.: Наука, 1971. 240 с.
60. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 576 с.
61. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.

62. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
63. *Манжиров А.В.* Контактные задачи для неоднородных стареющих вязкоупругих тел. // *Механика контактных взаимодействий*. — М.: Физматлит, 2001. С. 549–565.
64. *Манжиров А.В.* Износ поверхностно неоднородного шероховатого упругого слоя кольцевым штампом // *Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием*, 13–16 октября 2003 г., г. Ростов-на-Дону, г. Азов, Россия. — Ростов-на-Дону: «Новая книга», 2004. С. 260–264.
65. *Манжиров А.В.* Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии // *Смешанные задачи механики деформируемого тела: Материалы V Рос. конф. с междунар. участием* / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 221–224.
66. *Манжиров А.В., Казаков К.Е.* Плоские и осесимметричные контактные задачи для вязкоупругих стареющих тел с поверхностно неоднородными покрытиями // *Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сборник статей к 75-летию со дня рождения Е. И. Шемякина*. — М.: Физматлит, 2006. С. 411–422.
67. *Манжиров А.В., Казаков К.Е.* Износ вязкоупругого основания с неоднородным покрытием // *Сборник трудов международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы трибологии»*, июнь 2007 г., в 2-х томах. Том 1. — М: Машиностроение, 2007 г. 507 с. С. 338–351.
68. *Маслов Г.Н.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона // *Изв. НИИ гидротехники*. 1941. Т. 28. С. 175–188.
69. *Механика в СССР за 30 лет. (1917–1947)*. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 416 с.
70. *Механика в СССР за 50 лет*. В 4 томах. М.: Наука, 1972.
71. *Механика контактных взаимодействий*. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
72. *Морозов Е.М., Зернин М.В.* Контактные задачи механики разрушения. М.: Машиностроение, 1999. 544 с.

73. *Моссаковский В.И., Качаловская Н.Е., Голикова С.С.* Контактные задачи математической теории упругости. Киев: Наукова думка, 1985. 176 с.
74. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1933.
75. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 448 с.
76. *Никишин В.С., Шапиро Г.С.* Задачи теории упругости для многослойных сред. М.: Наука, 1969. 132 с.
77. *Панасюк В.В., Теплий М.Й.* Деякі контактні задачі теорії пружності. Київ: Наукова думка, 1975. 196 с.
78. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
79. *Паршин Д.А.* Деформирование наращиваемых тел под действием массовых сил. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 2006. 236 с.
80. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
81. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П. и др.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.
82. *Попов Г.Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев-Одесса: Вища школа, 1982. 168 с.
83. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
84. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
85. *Прокопович И.Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 260 с.
86. *Прокопович И.Е., Улицкий И.И.* О теориях ползучести бетона // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1963. № 10. С. 13–34.

87. *Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А.* Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
88. *Проников А.С.* Износ и долговечность станков. М.: Машгиз, 1957. 172 с.
89. *Проников А.С.* Надежность машин. М.: Машиностроение, 1978. 592 с..
90. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наукова думка, 1977. 235 с.
91. Развитие контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
92. *Саркисян В.С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос. Ереван: Ереван. ун-т, 1983. 260 с.
93. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962. 500 с.
94. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976. 284 с.
95. *Теплый М.И.* Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Вища школа, 1983. 176 с.
96. *Хрущев М.М., Бабичев М.А.* Абразивное изнашивание. М.: Наука, 1970. 252 с.
97. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
98. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
99. *Alexandrov V.M., Pozharskii D.A.* Three-Dimensional Contact Problems. Kluwer Academic Publishers, 2001. 406 p.
100. *Bažant Z.P.* Mathematical models for creep and shrinkage of concrete // Creep and shrinkage in concrete structures / Ed. by Z.P. Bažant and F.H. Wittmann. London: John Wiley & Sons Ltd., 1982. P. 163–256.
101. *Boussinesque J.* Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et d. mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villars, 1885. 772 p.

102. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dortrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 360 p.
103. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper (On contact problem of elastic solids) // J. Reine Angew. Math. 92, 1881. P. 156–171.
104. *Hertz H.* Gesammelte Werke. Bd. I. Leipzig, 1895.
105. *Manzhirrov A.V., Kazakov K.E., Fedotov I.* Wear of elastic foundations with inhomogeneous coatings // 35th Solid Mechanics Conference. Volume of Abstracts. Krakow, September 4–8, 2006. — Warsaw: In-t of Fund. Tech. Research of the Polish Academy of Sciences, 2006. P. 279–280.
106. *Liapounoff A.* Sur les figures d'équilibre. Pt. 3. St.-Pétersbourg, 1912.
107. *Manzhirrov A.V., Kazakov K.E.* Contact problems for covered solids with real surface shape // Proceedings. Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. November 22–24, 2006, IIT Delhi. — New Delhi: IIT Delhi, 2006. P. 63–70
108. *Polyanin A.D., Manzhirrov A.V.* Handbook of Integral Equations, Second Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/ CRC, 2008 (in press).
109. *Ross A.D.* Creep of concrete under variable stress // J. Amer. Concr. Inst. 1958. Vol. 29. No. 9. P. 739–758.
110. *Struik L.C.E.* Physical aging in plastics and other glassy materials // Polym. Eng. and Sci. Vol. 17, No. 3, 1977. P. 165–173
111. *Struik L.C.E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.
112. *Takaku A., Kobayashi T., Terui S., Okui N., Shimizu J.* Changes of tensile modulus and contractive stress of acrylic fibres during thermal stabilisation for carbon fibre production // Fibre Sci. and Technol. 1981. V. 15. No. 2. P. 87–98.