

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

На правах рукописи

Князев Денис Вячеславович

ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ

01.02.05. – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
С.Н. Аристов

Пермь – 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА	10
1.1 Библиографический обзор точных решений уравнений движения вязкой жидкости	10
1.1.1 Конические течения	17
1.1.2 Решения линейные по двум пространственным переменным	23
1.1.3 Решения линейные по одной пространственной переменной	35
1.2 Класс точных решений уравнений гидродинамики с пространственным ускорением и его общие свойства	40
ГЛАВА 2. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ	44
2.1 Вращательно-симметричные локализованные вихри в идеальной жидкости с дифференциальной закруткой	44
2.1.1. Постановка задачи	45
2.1.2 Точное решение задачи и его анализ	47
2.2 Стационарные периодические цепочки локализованных вихрей в идеальной жидкости	54
2.2.1 Постановка и решение задачи	54
2.2.2 Периодическая мода	59
2.2.3 Однородная мода	60
2.2.4 Анализ результатов	63
Основные результаты главы 2	69
ГЛАВА 3. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ	70
3.1 Стационарное течение вязкой жидкости, вызываемое осевым деформированием цилиндрической поверхности	70
3.1.1 Постановка задачи	71
3.1.2 Осесимметричные течения	74

3.1.3 Вращательно-симметричные течения	79
3.2 Новое точное решение задачи о течении Куэтта - Пуазейля	87
3.2.1 Постановка задачи	87
3.2.2 Классическое решение задачи Куэтта - Пуазейля	90
3.2.3 Новое решение задачи Куэтта - Пуазейля	90
3.3 Устойчивость вращательно-симметричных режимов стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане	99
3.3.1 Основное течение	99
3.3.2 Возмущения конечной амплитуды	102
3.3.3 Интегральные соотношения для монотонных возмущений	108
3.3.4 Метод решения спектральной задачи	109
3.3.5 Устойчивость одноячеистого режима течения жидкости в цилиндрическом стакане	111
3.3.6 Неустойчивость двухячеистого режима течения жидкости в цилиндрическом стакане	117
Основные результаты главы 3	121
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	125

ВВЕДЕНИЕ

Нет сомнения в том, что всякое реальное течение жидкости является вихревым. В связи с этим вопросы исследования структуры вихрей, их генерации, эволюции и взаимодействия между собой представляются актуальными для гидродинамики в целом. В настоящее время известно лишь небольшое количество точных решений гидродинамических уравнений, адекватно описывающих структуру вихрей. К их числу можно отнести, например, вихри Бюргерса и Салливана. Между тем внутреннее устройство вихря, его интенсивность и масштаб в значительной степени определяют устойчивость вихревого образования и характер его взаимодействия с другими вихрями и потоком в целом. Так известно, что крупные атмосферные вихри обладают значительно большим временем жизни по сравнению с мелкими, что указывает на высокую степень их устойчивости и позволяет рассматривать такие вихри как автономные образования. В то же время, наличие в потоке чётко выраженных вихревых структур является одним из основных факторов, определяющих всю картину течения, складывающуюся в результате взаимодействия вихрей различной топологии и масштаба. Характер вихревых взаимодействий играет определяющую роль в протекании каскадных процессов в турбулентности, которые могут приводить либо к диссипации энергии (прямой каскад), либо к возникновению различных когерентных структур (обратный каскад). Теоретическое изучение этих и многих других процессов, связанных с исследованием дестабилизирующей или, напротив, организующей роли вихревых взаимодействий, в настоящее время, по-видимому, далеко от завершения. В связи с этим отыскание новых точных решений уравнений гидродинамики, описывающих вихревые течения жидкости, является актуальной задачей. Представляется, что её решение открывает наиболее простой и корректный путь к получению ряда теоретически и практически важных результатов.

Целью данной работы является описание структуры вращательно-симметричных вихрей и их воздействия на поток несжимаемой жидкости в ограниченных и бесконечных цилиндрических областях на основе класса точных решений уравнений гидродинамики с пространственным ускорением (линейностью) по продольной координате.

Содержание работы. Диссертация состоит из трёх глав, введения и заключения.

В первой главе диссертации приведён обзор литературы, посвящённой точным решениям уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, и выполнена классификация точных решений. Все известные классы точных решений гидродинамических уравнений отнесены к двум типам: конические течения и решения линейные по части пространственных переменных.

Во втором разделе первой главы приведён класс точных решений вращательно-симметричных решений уравнений гидродинамики, характеризуемый линейной зависимостью азимутальной и продольной компоненты скорости от осевой координаты (решения с пространственным ускорением по осевой координате). С его помощью выполнена редукция уравнений Навье-Стокса к одномерной системе уравнений в частных производных для неизвестных функций, зависящих только от радиальной координаты и времени. Проведён анализ некоторых общих свойств, присущих решениям редуцированной системы.

Во второй главе рассмотрены радиально локализованные течения идеальной несжимаемой жидкости, занимающей неограниченный объём.

В первом разделе при помощи класса точных решений с пространственным ускорением найдено семейство точных решений уравнений Эйлера, описывающее колоннообразные вихри со всюду регулярным полем скорости, обращающимся в нуль на бесконечном удалении от оси симметрии. Показано, что внутренняя структура таких вихревых образований определяется отношением их радиального масштаба

к осевому. Квадрат этого отношения принимает счётное множество положительных целочисленных значений, то есть имеет место квантование вихрей, описываемых вышеупомянутым классом точных решений.

Во втором разделе описана структура периодических вдоль оси симметрии цепочек радиально локализованных вихрей. Показано, что при дискретных значениях энергии вихрей цепочки вблизи неё может возникать бесконечное (счётное) множество течений с характерным радиальным масштабом, превосходящим масштаб самой цепочки.

В третьей главе рассмотрены течения вязкой жидкости, происходящие под действием различных внешних факторов, в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями.

В первом разделе исследована задача о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между полубесконечными коаксиальными цилиндрами, вызываемом осевым деформированием внутреннего цилиндра. В случае растяжения внутреннего цилиндра задача интерпретирована как приближенная модель движения, возникающего в большом цилиндрическом сосуде при истечении жидкости через центральное отверстие на дне. При этом, растягивающийся внутренний цилиндр моделирует боковую поверхность струи, формирующуюся в жидкости непосредственно над отверстием. В случае сжатия цилиндра задача может быть интерпретирована как течение, возникающее в результате проникновения струи в заполненный жидкостью сосуд с непроницаемым дном.

При помощи класса точных решений с пространственным ускорением проблема описания вышеупомянутых течений сведена к исследованию спектральной краевой задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Роль собственного значения играет число Рейнольдса, построенное по скорости деформирования внутреннего цилиндра. Анализ спектра значений числа Рейнольдса выявил неединственность решения задачи. В частности, установлена возможность

существования вращательно-симметричных и не закрученных осесимметричных режимов течения при одинаковых числах Рейнольдса. Найдена точка ветвления решений, описывающих эти два режима.

В качестве примера разрешимости задачи об увлечении неограниченного объёма жидкости растягивающимся цилиндром приведено точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее радиально локализованное закрученное течение с азимутальной скоростью, не оказывающей влияние на полоидальную циркуляцию.

Во втором разделе рассмотрена задача об установившемся течении вязкой жидкости между неподвижным и вращающимся цилиндрами в присутствии заданной разности средних давлений между двумя сечениями кольцевого канала. Решение данной задачи вновь построено в рамках класса точных решений уравнений Навье-Стокса с пространственным ускорением вдоль осевой координаты, что, в частности, предполагает отказ от допущения об однородности потока в продольном направлении, характерного для классического решения задачи Куэтта-Пуазейля.

Отличительными особенностями найденного решения являются наличие у жидкости собственной торсионной закрутки, не связанной с вращением внутреннего цилиндра, и ненулевой радиальной компоненты скорости. Вследствие этих особенностей определяющая роль в формировании картины движения принадлежит силам инерции, что в свою очередь обуславливает некоторые необычные свойства решения. Одним из этих свойств является пропорциональность расхода угловой скорости вращения внутреннего цилиндра.

Третий раздел посвящён исследованию монотонной устойчивости одно и двухячейного режимов стационарного течения вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре с непроницаемым дном (стакане) относительно специальных возмущений конечной амплитуды.

В качестве основных течений выбраны два режима движения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане, описываемые в рамках класса точных

решений с пространственным ускорением. Выбор вида возмущений обусловлен требованием точной редукции амплитудных уравнений к линейной системе. Следствием специфики выбора типа возмущений и накладываемых на них дополнительных условий (граничных, нормировки и замкнутости) является дискретность спектра декрементов, положительным значениям которых соответствует затухание возмущений. Спектральная задача решена численно. Для одноячейстого основного течения не удалось обнаружить возмущения, растущие со временем. В случае двухячейстого основного режима в исследованной области параметров обнаружено одно нарастающее возмущение.

Научная новизна результатов исследования. Найдено счётное семейство точных стационарных решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости, описывающих радиально локализованные вихри различной пространственной структуры, определяемой отношением радиального и осевого масштабов течения.

Обнаружен класс периодических и локализованных в пространстве точных решений уравнений Эйлера. В рамках данного класса в конечном виде описано счётное семейство цепочек локализованных вихрей, обладающих конечной энергией. Показано, что при дискретном наборе энергий вихрей пространственно периодического движения на их фоне могут возникать радиально локализованные вращательно-симметричные течения большего масштаба (по сравнению с фоновым течением) с энергией, целиком определяемой периодом цепочки.

В рамках исследуемого класса точных решений уравнений Навье-Стокса исследована модельная задача о стационарном истечении вязкой жидкости из цилиндрического сосуда. Обнаружено ответвление решений с ненулевой азимутальной составляющей поля скорости от незакрученного режима истечения (бифуркация вращения).

Найдено новое точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами

в присутствие заданного неоднородного продольного градиента давления. Полученное решение обладает рядом существенных отличий от классического решения, описывающего течение Куэтта-Пуазейля.

В точной постановке показана неустойчивость двухячеистого режима стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане относительно возмущений специального вида.

Практическая значимость работы. Проведённые теоретические исследования могут быть использованы при анализе результатов натурных и лабораторных наблюдений закрученных потоков жидкости, а также при проектировании и изучении работы узлов некоторых технологических конструкций.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23-29 августа 2001г.; Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.), III международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения» (Красноярск, 25-29 августа 2002 г.), Всероссийских конференциях «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 10-14 мая 2004 г.) и «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП-2004)» (Абрау-Дюрсо, 4-7 сентября 2004 г.).

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН.

Диссертация состоит из трёх глав, введения, заключения и списка цитируемой литературы (200 наименований). В работе приводится 25 рисунков, одна схема и таблица. Общий объём диссертации составляет 140 страниц. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах [31, 8, 7, 32, 4, 13].

Работа является составной частью плановой научно-исследовательской темы Лаборатории Гидродинамической устойчивости ИМСС УрО РАН «Гидродинамика и тепломассообмен в вязких жидкостях в условиях взаимодействия поверхностных сил» (01.20.06 04353).

ГЛАВА 1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

В первом разделе настоящей главы выполнен краткий обзор работ по точным решениям уравнений движения вязкой жидкости и приведена их формальная классификация по виду поля скорости. В обзоре основное внимание уделено работам, посвящённым анализу нелинейных свойств решений уравнений Навье – Стокса, близких к свойствам решений задач, рассматриваемых в данной диссертации. Во втором разделе приведён используемый в дальнейшем класс точных решений уравнений гидродинамики и проанализированы некоторые свойства редуцированной системы уравнений.

1.1. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ ОБЗОР ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Движение вязкой несжимаемой жидкости подчиняется системе уравнений Навье-Стокса, состоящей из закона изменения импульса (записанного в форме Громеки - Ламба) и условия несжимаемости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = -\nabla \left(P + \frac{v^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } \vec{v}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь \vec{v} – вектор скорости; P – давление, отнесённое к постоянной плотности; ν – коэффициент кинематической вязкости среды. Первое векторное уравнение (1.1) – уравнение баланса сил инерции, вязкости и градиента давления в движущейся среде.

Формулировка конкретной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости состоит в задании начальных и граничных условий для системы (1.1). Наиболее распространёнными краевыми условиями в гидродинамике являются условия прилипания жидкости к твёрдым поверхностям,

ограничивающим область течения и условия на свободной границе. При изучении движения в неограниченных (частично ограниченных) объёмах на решения уравнений Навье-Стокса часто накладываются требования периодичности или стремления потока к некоторому заданному состоянию (в том числе покою) на бесконечности.

Численные и аналитические исследования вязких течений наталкивается на серьёзные трудности связанные, прежде всего, с наличием в уравнениях движения как линейных, так и нелинейных слагаемых, представляющих различные вышеперечисленные силы, действующие на частицу жидкости в процессе её движения. Другой серьёзной проблемой является отсутствие в системе уравнений Навье-Стокса эволюционного уравнения для давления. Использование вместо (1.1) системы уравнений для завихрённости, не содержащей давления в явном виде, но имеющей более высокий порядок, приводит к необходимости формулировки дополнительных граничных условий, приближённых вариантов которых может быть множество [127]. Исключение давления из уравнений не избавляет от необходимости его вычисления, поскольку давление может фигурировать в граничных условиях, как, например, в задачах со свободными границами. Определённый прогресс в решении проблемы давления достигнут в недавней работе Аристова и Пухначёва [14], где для случая вращательно-симметричных течений вязкой жидкости получена новая, эквивалентная (1.1), форма записи уравнений движения и сформулировано необходимое число краевых условий для случая твёрдых границ. Как бы то ни было, задача исследования свойств уравнений (1.1) и разработки эффективных методов их решения далека от своего решения. Одним из основных направлений исследования системы (1.1) является отыскание возможных типов (классов) её точных решений.

Ясно, что в связи с серьёзными математическими трудностями, точное решение может быть найдено лишь для небольшого числа сравнительно

простых задач. Тем не менее, это не умаляет значимости точных решений для теории и приложений, поскольку любое решение наследует определённые свойства присущие полным уравнениям Навье-Стокса и одновременно свободно от ряда допущений, характерных для приближённых моделей. Роль, играемая классами решений уравнений гидродинамики, выходит далеко за рамки простых тестов, предназначенных для проверки правильности уже имеющихся теоретических представлений или отладки численных схем. Исследование классов точных решений даёт возможность получения совершенно новых, порой неожиданных результатов. Некоторые примеры таких исследований будут приведены далее.

Решением некоторого заданного уравнения, как известно, называется функция, которая будучи подставленной в это уравнение, обращает его в тождество. Аналогично вводится определение решения системы уравнений. В гидродинамике известно лишь очень небольшое количество точных решений (слово «точных» подчёркивает то, что речь идёт не о приближённых решениях (1.1)), удовлетворяющих жёстким требованиям данного только что классического определения. По этой причине понятие точного решения со временем трансформировалось и расширялось. Не пытаясь дать строгого определения, укажем лишь на то, что в настоящее время понимается под термином «класс точных решений» большинством исследователей [3, 182]. Класс точных решений это такое представление гидродинамических полей, которое позволяет редуцировать исходную систему уравнений Навье-Стокса к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или к уравнениям в частных производных относительно функций не более чем двух аргументов, один из которых, как правило, связан со временем. К этому можно добавить требование сохранения редуцированной системой высокого порядка, например, того же, что (1.1).

Данное таким образом «определение» точного решения указывает на основной способ их получения, связанный с уменьшением количества переменных, от которых зависят искомые величины. Сокращение числа аргументов может быть достигнуто, например, путём учёта симметрий, заложенных в постановке исследуемой задачи (плоскопараллельность, осе – или центральносимметричность). Для нахождения автомодельных связей между переменными могут быть полезны принципы теории размерностей и подобия [46]. По-видимому, наиболее теоретически развитыми методами отыскания симметрий и точных решений нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и уравнений Навье-Стокса, являются методы группового анализа [43, 3].

Особое место среди всевозможных решений уравнений Навье-Стокса (1.1) занимают потенциальные течения и течения Бельтрами - Тркала. Поля скоростей течений этих двух типов соответственно имеют вид $\vec{v} = \nabla \phi$ (ϕ – скалярная функция координат и времени) и $\vec{v} = \lambda \text{rot } \vec{v}$ ($\lambda = \text{const}$), позволяющий избавиться от нелинейности в правой части (1.1) и свести задачу к решению линейных уравнений. Порядок этих линейных уравнений значительно ниже порядка исходной системы (1.1), что, например, не позволяет удовлетворить условиям прилипания жидкости к твёрдым границам. Последнее обстоятельство указывает на ограниченность области применимости безвихревых течений и течений Бельтрами - Тркала, но не обесценивает их вовсе. В первую очередь это относится к потенциальным течениям, обнаруженным ещё основателем теоретической гидродинамики Л. Эйлером [59], успешно применяемым в классической теории поверхностных волн и в теории течения идеальной жидкости [33]. Не смотря на то, что в случае безвихревого течения диссипативные слагаемые в уравнениях движения тождественно обращаются в ноль, потенциальные решения могут быть использованы для описания движений вязкой жидкости. Ярким примером этому является задача Забабахина о заполнении пузырька вязкой жидкостью [29], в

которой при потенциальном течении влияние вязких напряжений проявляется через условия на свободной границе.

Методы исследования потенциальных течений подробно описаны во многих учебниках по гидродинамике (например, [33]), а важнейшие результаты, касающиеся течений Бельтрами - Тркала и их обобщения ($\text{rot}(\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}) = 0$) изложены в обзорах [45, 170, 182]. В дальнейшем течения дух этих типов не обсуждаются.

Наибольший интерес представляют классы точных решений, сохраняющие нелинейные свойства исходных уравнений Навье-Стокса. Дальнейший материал этого раздела посвящён краткому обзору ряда задач, решённых в рамках таких нелинейных классов решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости. В задачи этого обзора отнюдь не входит полный охват всех имеющихся работ по точным решениям гидродинамических уравнений или установление хронологии обнаружения классов точных решений. Основное внимание уделено тем задачам, где отчётливо проявляются нелинейные свойства решений уравнений движения, такие как потеря единственности и ветвление решений, исчезновение решения при некоторых значениях параметров задачи, а также упомянуты отдельные работы, связанные с исследованием устойчивости точных решений. Все перечисленные свойства встречаются в задачах, изученных в данной диссертации.

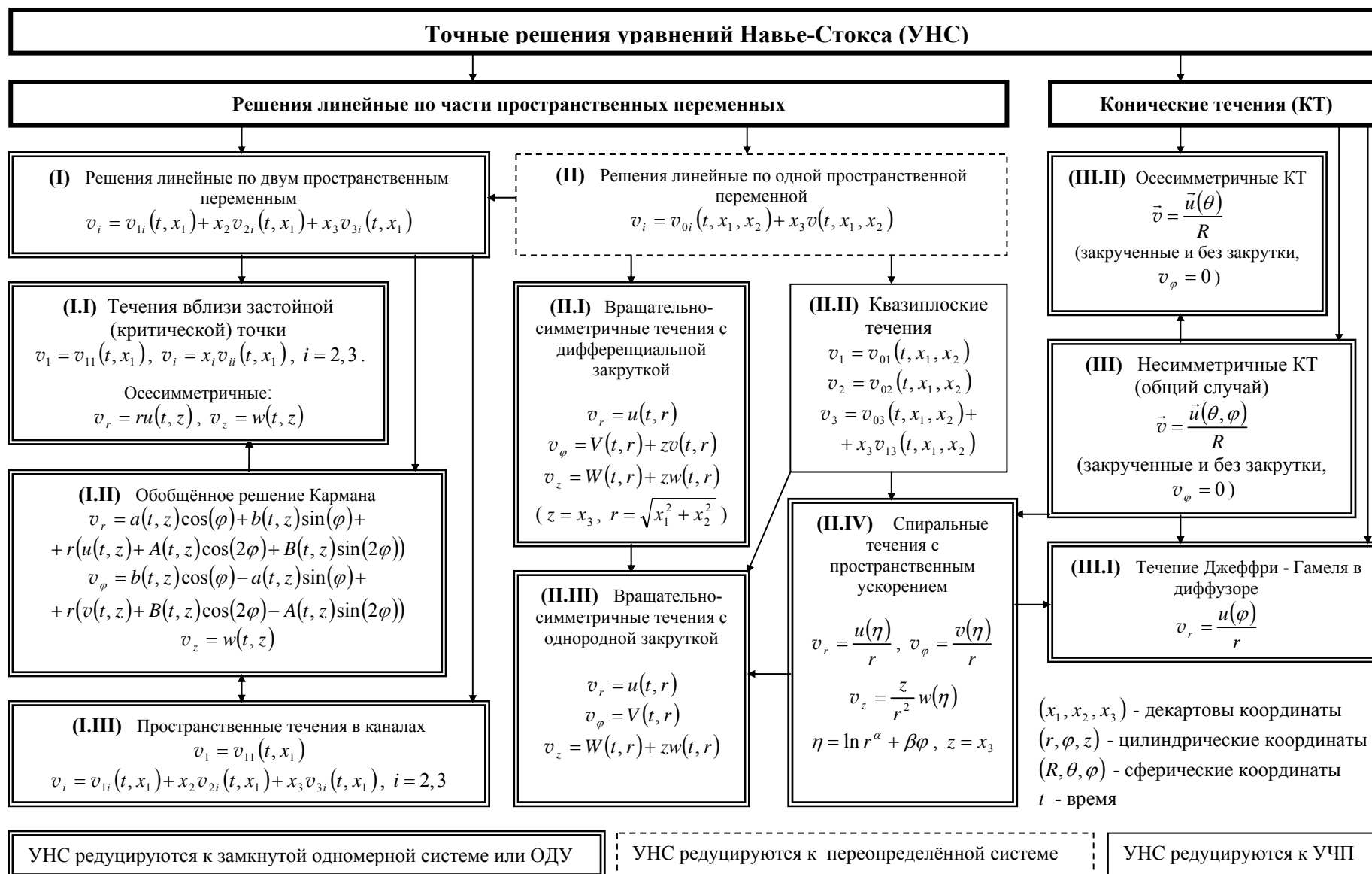
В литературе имеется несколько обзорных работ по точным решениям уравнений Навье-Стокса [70, 69, 90, 190]. Сравнительно недавно опубликованы обзоры [45, 170, 182, 185]. Подробнейший обзор В.В. Пухначёва [45] выполнен с позиций группового анализа дифференциальных уравнений и охватывает большое число современных работ по всему спектру известных точных решений уравнений Навье-Стокса. Особое внимание в этом обзоре уделено задачам со свободными границами. Обзоры Ванга (C.Y. Wang) [170, 182, 185] менее развёрнуты, по сравнению с [45], но содержат большую ссылочную информацию о

работах зарубежных авторов. Обстоятельный теоретический анализ ряда точных решений уравнений гидродинамики дан в монографии [27]. Книга [3] содержит изложение современных теоретико-групповых методов анализа дифференциальных уравнений применяемых к уравнениям Навье-Стокса, Эйлера и Обербека - Буссинеска. Некоторые классические задачи гидродинамики, допускающие точное решение, разобраны в широко известных учебниках [34, 16, 56, 38].

По-видимому, все известные в настоящее время классы точных решений уравнений Навье-Стокса могут быть отнесены к двум категориям: конические течения, в которых скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от начала координат, и решения линейные по части пространственных переменных (схема 1). Такая формальная классификация по виду поля скорости с одной стороны представляется общей, но с другой стороны, вероятно, не является конструктивной, поскольку не указывает конкретные направления поиска новых типов решений уравнений (1.1).

Основные классы точных решений, встречающиеся в дальнейшем обзоре, представлены на схеме 1. Сами классы точных решений заключены на схеме в двойные рамки и пронумерованы римскими цифрами в круглых скобках. Ссылки на них в тексте приводятся именно в таком виде (римские цифры в круглых скобках). Стрелки показывают связи между классами. Необходимо отметить, что не все использованные на схеме названия общеприняты. Кроме того, приведены два вида представления поля скорости (II) и (II.II) не являющиеся классами точных решений (1.1) в смысле данного выше «определения». Их включение в схему оправдано тем, что на взгляд автора настоящей диссертации, они могут послужить отправной точкой для поиска новых точных решений уравнений движения вязкой жидкости. Представление скорости (II) редуцирует уравнения Навье-Стокса к переопределённой системе, анализ совместности которой даёт все известные классы точных решений с линейной зависимостью

Схема 1



скорости от части пространственных координат. Для полей скорости типа (II.II) получается замкнутая система уравнений, частым случаем которой выступает класс (II.IV).

1.1.1 Конические течения

Классическим примером точного решения уравнений Навье-Стокса, отнесённого здесь к классу конических течений (III.I), является задача о стационарном течении вязкой жидкости вызываемым, наличием однородного источника или стока, расположенного на линии пересечения двух твёрдых плоскостей, наклонённых друг к другу под некоторым углом α . Впервые эта задача была рассмотрена Джеффри (Jeffrey) [113] и Гамелем (Hamel) [106], а различные её аспекты обсуждались в целом ряде последующих работ [27, 33, 97, 16]. Исследования показали, что сходящееся (конфузорное) течение существует при всех числах Рейнольдса, построенных по расходу и кинематической вязкости жидкости. В то же время в задаче о диффузоре (расходящееся течение) было обнаружено исчезновение одних решений и появление других по достижении конечных критических значений числа Рейнольдса. При этом установлено, что чистое расходящееся течение сменяется движениями с противотоками как симметричными, так и несимметричными относительно биссектрисы угла α . В работах [26, 97] показано, что счётное множество решений задачи о диффузоре бифурцирует от потенциального стока ($v_r = Q/(2\pi r)$). Там же и в недавних работах [1, 2] исследован вопрос о последовательности возникновения новых режимов течения в задаче Джеффри - Гамеля.

Течение Джеффри-Гамеля с одной или обеими свободными границами исследовано в монографии [3]. Выводы этого исследования в значительной мере отличаются от изложенных выше и иллюстрируют влияние типа граничных условий на получаемые результаты. Достаточно сказать, что при наличии свободных границ угол раствора α и расход не могут считаться независимыми параметрами задачи, как это имеет место в

случае твёрдых стенок, поскольку положение свободной границы заранее не известно. Анализ задачи с двумя свободными границами показал возможность существования только конфузороного течения реализующегося в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса ($-8\pi < Re < 0$). При этом оказалось, что в зависимости от величины Re задача может иметь от одного до семи решений, каждое из которых ответвляется от состояния покоя. Тем самым обнаружена неоднозначность зависимости решения от параметра Re и возможность бифуркационного возникновения движения непосредственно из состояния покоя, что указывает на то, что последнее не является изолированным в противоположность случаю одних только твёрдых границ.

Таким образом, анализ такого, сравнительно простого, точного решения как течение Джеффри–Гамеля даёт возможность обнаружить и корректно исследовать целый ряд свойств, присущих уравнениям Навье–Стокса, таких как исчезновение решения при конечных значениях параметра, неединственность решения в зависимости от величины этого параметра, потеря симметрии течения, возникновение множественных бифуркаций.

Изучение незакрученных осесимметричных конических течений началось с работы Слэзкина [50], где впервые показано, что представление гидродинамических полей вида (III.II) редуцирует систему Навье–Стокса к одному обыкновенному дифференциальному уравнению. Яцеевым [61] было найдено общее решение уравнения Слэзкина в виде гипергеометрических функций. В [61], а так же в работах Сквайра (Squire) [146, 145] приведён ряд частных решений, описывающих струйные течения, наиболее известным из них является затопленная струя Ландау [37].

В [145] Сквайром была предпринята попытка исследования задачи о струе бьющей из малого отверстия на плоскости. При этом оказалось невозможным одновременно удовлетворить условиям регулярности потока

на оси струи и условиям прилипания на плоскости. Вследствие этого, решение Сквайра следует интерпретировать как струйное течение, индуцированное движением вещества плоскости типа меридионального стока. Другие примеры струй индуцированных различными типами движений вещества плоскости приведены в [129, 130, 193, 21, 22, 144, 152]. Решение Сквайра представляет собой пример образования предельно сильных струй при конечных значениях числа Рейнольдса, построенного по обильности источника и коэффициенту кинематической вязкости. При приближении Re к конечному пороговому значению вблизи оси образуется струйный пограничный слой, толщина которого, по достижении Re критического значения, обращается в нуль и возникает струя с бесконечным импульсом. Обобщение задачи Сквайра на случай закрученных течений выполнено в работах [21, 193].

Неизбежная сингулярность скорости на оси при выполнении условий прилипания на твёрдых конических поверхностях (в частности на плоскости) является следствием представления гидродинамических полей в виде (III.II). Данное свойство осесимметричных конических течений играет определяющую роль при постановке и интерпретации результатов исследования целого ряда задач. Одним из способов конкретизации осевой сингулярности в рамках класса (III.II) является обобщение подхода Ландау [37] связанного с рассмотрением потока импульса через конус малого угла раствора окружающего ось. Данный подход развит в монографии [27] и призван моделировать некоторые интегральные характеристики реальных гидродинамических структур, образующихся в приосевой зоне, таких как тонкие турбулентные струи, однородные линейные источники массы или момента импульса.

Руководствуясь идеями близкими к вышеизложенному методу Шнайдер (Schneider) [138] построил квазиавтомодельное решение задачи о струе бьющей из точечного источника на плоскости. Для этого осевая сингулярность была задана в виде совместимом со струёй Шлихтинга

(Schlichting) [56], а возникающее в результате эжекции вторичное течение окружающей струю жидкости численно описывалось в рамках класса конических течений (III.II). При этом удалось удовлетворить условиям прилипания на твёрдой плоскости. Качественное сравнение результатов Шнайдера с данными экспериментов выполнено в [27].

В работе [52] эта же задача решена методом сращиваемых асимптотических разложений при больших значениях числа Рейнольдса. Область течения разбивается на три подобласти. В приосевом пограничном слое, как и в работе [138], течение описывается струёй Шлихтинга. В основной области движение жидкости совпадает с течением, индуцированным однородным линейным стоком перпендикулярным плоскости (см. далее). Решение в этих двух областях сшивается в разделяющей их промежуточной зоне.

Задача о взаимодействии однородного линейного источника или стока мощности Q (на единицу длины) с плоскостью обсуждалась в работах [58, 20, 27]. В [27] отмечено, что в случае источника существуют и имеют физический смысл ограниченные, но не аналитические на оси решения. В работе Голубинского и Сычёва [20] предполагалась ограниченность осевой скорости на линии источников и численно было показано, что решение задачи существует лишь для $Re = Q/\nu < 0,848$. При этом, вблизи критического значения числа Рейнольдса нарушается единственность и решений становится два.

Осесимметричное закрученное течение вида (III.II), моделирующее взаимодействие потенциального вихря ($v_\varphi = \Gamma/(2\pi r)$) с твёрдой плоскостью (или конусом), исследовано в [126, 121, 122, 24, 103, 102, 140]. В работе [126] решение задачи разыскивалось в рамках приближения пограничного слоя, а в [121, 122] решение получено в пренебрежении условиями прилипания на плоскости. М.А. Гольдштиком [24] было доказано существование и единственность решения в ограниченном

диапазоне чисел Рейнольдса (по [140] $Re < 5,53$). Проблема исчезновения решения при конечных Re обсуждалась в [103, 140] (а также смотреть ссылки из [27]). В работе Серрина (Serrin) [140] она решена ценой отказа от требования ограниченности осевой скорости на оси вихря (допускается логарифмическая сингулярность), но при этом теряется свойство единственности. При больших числах Рейнольдса задача о взаимодействии потенциального вихря с перпендикулярной ему плоскостью в работе [51] исследована методом сращиваемых асимптотических разложений, что позволило определить коэффициент при логарифмической сингулярности поля скорости на оси. Взаимодействие потенциального вихря со свободной поверхностью изучено в [41].

Общий случай неосесимметричных конических течений (III) рассмотрен Аристовым [10, 11]. Было установлено, что все гидродинамические поля выражаются через одну скалярную функцию углов, удовлетворяющую нелинейному уравнению $\Delta f = a + b e^{-f/\nu}$ (a и b - константы). Автору [10, 11] удалось показать, что в одном из частных случаев приведённое выше уравнение сводится к известному уравнению Лиувилля [120], все решения которого выражаются через произвольные гармонические функции. Последнее обстоятельство позволяет, в рамках класса конических течений, получать сколь угодно много точных решений трёхмерных уравнений гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

Как и некоторые другие классы точных решений уравнений Навье-Стокса, конические течения допускают распространение на случай движений вязкой жидкости, происходящих под действием осложняющих внешних факторов (конвекция, наличие магнитного поля и тому подобное). В работе [17] исследована задача о течении вязкой проводящей жидкости в диффузоре. Магнитное поле индуцируется током, протекающим в вершине диффузора. Установлено, что поле, тормозя жидкость, делает профиль скорости более плоским по сравнению с течением без поля. Другим проявлением воздействия поля является

увеличение критического значения числа Рейнольдса, при котором происходит нарушение симметрии течения (смотреть выше).

Струйные течения проводящей жидкости типа Ландау и Сквайра в безындукционном приближении изучены в серии работ Щербинина с соавторами [55, 57, 58]. В [57] обнаружено нетипичное ускорение (а не торможение) потока жидкости бесконечно большой проводимости меридиональным ($H_\varphi = 0$) магнитным полем. МГД – аналоги струйных течений в азимутальном ($H_R = 0$, $H_\theta = 0$, $H_\varphi \neq 0$) поле исследованы в [55]. Отмечено, что при такой конфигурации магнитного поля в жидкости индуцируется электрическое поле. Показано, что азимутальное поле вызывает фокусировку струи вблизи оси её симметрии. Указано также, что фокусировки можно добиться и при $H_\theta \neq 0$. В работе [53] на основе обобщения класса осесимметричных конических течений с ненулевой закруткой, полученного в [54], исследована задача о взаимодействии вихревой нити с конической поверхностью в присутствии азимутального магнитного поля (обобщение [24]).

Известные «теоремы запретов» утверждают невозможность реализации магнитного динамо при осесимметричном течении жидкости. Тем ни менее в работе [25] показано существование критического числа Рейнольдса (для данного магнитного числа Прандтля), при котором от чисто гидродинамического решения Сквайра [145] ответвляется некоторое новое решение с ненулевой радиальной составляющей магнитного поля. Данный результат, по мнению авторов, не противоречит теоремам Каулинга и Брагинского поскольку последние предполагают более сильное чем $1/R$ убывание магнитного поля на бесконечности.

В работах [191, 6, 12] приведены обобщения класса конических течений на случай вязкого сжимаемого газа с коэффициентами вязкости и температуропроводности, вообще говоря, степенным образом зависящими от температуры. Более того, в [191, 6] показано, что в случае сжимаемой

среды поле скорости допускает представление в виде $\vec{v} = R^m \vec{u}$, где m - произвольное действительное число. Там же установлено существование конечного набора значений параметра автомодельности m при которых происходят бифуркации к режимам закрученных спиральных течений от невращательных режимов.

1.1.2 Решения линейные по двум пространственным переменным

По-видимому, наиболее общая формулировка задачи о течениях с линейной зависимостью поля скорости от части пространственных координат (I, II) (из (II) отмечен случай (II.II)) применительно к вязкой жидкости принадлежит А.Ф. Сидорову [47, 48]. В [5] показано, что класс (I.III) применим для описания конвективных течений вязкой магнитной жидкости во вращающейся системе координат (частный случай приведён в [49]). Отметим, что представления (I.II) и (I.III) полностью эквивалентны, а (I.I) их частный случай.

Течения вблизи застойной (критической) точки. При потенциальном обтекании потоком несжимаемой жидкости на поверхности тела нормальная составляющая поля скорости обращается в ноль, а касательная имеет конечное значение, то есть условия прилипания не выполняются. Тем не менее, на обтекаемой поверхности всегда имеется, по крайней мере, одна точка, где нулевое значение принимают обе компоненты скорости, такая точка называется застойной или критической. В окрестности критической точки скорость плоского потенциального течения и функция тока имеют вид [38]

$$v_1 = -a x_1, \quad v_2 = a x_2, \quad \psi = -a x_1 x_2, \quad a = const. \quad (1.2)$$

Поскольку, как указано выше, при потенциальном обтекании условия прилипания не выполняются, то следует считать, что критическая точка располагается не на самой поверхности тела, а у внешней границы пограничного слоя. В том случае, когда форма обтекаемой поверхности

может быть локально аппроксимирована плоскостью задача о течении между застойной точкой и этой твёрдой поверхностью допускает точное решение в рамках класса (I.I).

Плоская задача о стационарном течении вблизи застойной точки ортогональном плоскости (перпендикулярной оси x_1 , $v_{33} = 0$, см. (I.I)), по-видимому, впервые была решена Хименцем (Hiemenz) [108]. В осесимметричной постановке (I.I) данная задача исследована в [111]. Общий случай трёхмерного течения вблизи критической точки изучен в работах [87, 112]. Стюартом (Stuart) [150] впервые было описано плоское течение около застойной точки при натекании потока на плоскость, наклонённую к нему под некоторым углом, что эквивалентно наложению на движение жидкости (1.2) сдвигового течения с функцией тока $\psi \sim x_1^2$. Позднее эта задача вновь была рассмотрена в работах [157, 89]. Вангом [176, 173, 183, 184] исследован ряд задач касающихся течений, возникающих вблизи застойной точкой на деформируемой (растягивающейся или сжимающейся) жидкой поверхности.

Класс точных решений линейных по двум пространственным переменным (I) допускает прибавление к компонентам вектора скорости (I.I) дополнительных мод, независимых от планарных координат x_2 , x_3 , это позволяет исследовать характер течения с застойной точкой около подвижных и проницаемых поверхностей. Плоскопараллельное течение вблизи стационарно движущейся вдоль оси x_2 плоскости было изучено в [136], осесимметричная задача решена в работах [168, 119]. Задача о застойной точке, расположенной вблизи колеблющейся плоскости решена в [96] (класс (I) допускает нестационарные решения). Стюарт [151] исследовал задачу о колебаниях, возникающих при однородном отборе жидкости через проницаемую плоскость, из параллельного ей (плоскости) потока. Комбинированное влияние колебаний плоскости и её проницаемости на течение вблизи застойной точки изучено в работе [189].

Было установлено, что при стремлении скорости отвода (подвода) жидкости через пронизаемую плоскость к бесконечности решение стремится к некоторому конечному пределу, а при увеличении частоты колебаний сдвиг фазы касательных напряжений, возникающих на плоскости (относительно фазы колебаний самой плоскости), стремится к $5\pi/4$.

В рамках класса точных решений уравнений Навье-Стокса (II.III), в работах [186, 167] исследована задача о стационарном течении вблизи кругового цилиндра, индуцированного движением жидкости на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) с полем скорости вида

$$v_r = k \left(\frac{a}{r} - r \right), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r v_\varphi = 0, \quad v_z = 2kz, \quad k, a - \text{const}, \quad (1.3)$$

Распределение скорости (1.3) является, в некотором смысле, аналогом потенциального течения в окрестности застойной точки (1.2). Автором [186] было показано, что жидкость, движущаяся из бесконечности, может растекаться по цилиндру, как вдоль его образующих, так и в перпендикулярном им направлении. В работе [100] исследовалось застойное течение вблизи цилиндра, поступательно движущегося в осевом направлении и вращающегося с постоянной угловой скоростью. Статья [101] посвящена анализу нестационарной задачи о течении в застойной области около цилиндра, колеблющегося в осевом направлении. В сравнительно недавней работе [84] исследовалось установившееся движение жидкости от застойной точки (1.3) к пронизаемому цилиндру, вращающемуся вокруг своей оси с постоянной скоростью. Было установлено, что при подаче жидкости во внешний поток через пористую боковую поверхность цилиндра вблизи неё образуется зона интенсивного спирального течения.

Пространственные течения в каналах. Плоскопараллельное течение вязкой жидкости в канале со стенками равной проницаемости и в присутствии продольного градиента давления, в рамках класса точных решений (I.I) ($v_{33} = 0$, ось x_2 - параллельна оси канала), впервые было рассмотрено Берманом (Berman) [72]. Им же, в предположении симметрии течения относительно срединной плоскости, было получено асимптотическое разложение решения при малых числах Рейнольдса, построенных по ширине канала и скорости подвода/отвода массы жидкости через проницаемые боковые стенки. Дальнейшие численные и асимптотические исследования течений в каналах с проницаемыми границами были, в основном, выполнены Терриллом (Terrill) с соавторами [160, 161, 141, 165]. В частности были построены асимптотические разложения для симметричных вдувов и отсосов большой интенсивности (ранее исследовались в [195]), а также численно изучены режимы с несимметричным расходом жидкости через границы. Подробное изложение результатов Террилла и других авторов можно найти в обзорных работах [80, 115, 42].

Устойчивость решений задачи Бермана изучена в [200]. В случае симметричного подвода массы была показана единственность и устойчивость решения при всех числах Рейнольдса. В тоже время в случае отвода установлено, что симметричные относительно срединной плоскости решения с увеличением числа Рейнольдса становятся неустойчивыми и переходят в несимметричные стационарные режимы, которые в свою очередь также теряют устойчивость и сменяются периодическими во времени течениями. Далее была показана возможность существования хаотических режимов, аналогичных аттрактору Лоренца. В работах [79, 80] установлено, что хаотическое поведение, впервые обнаруженное в [200], чувствительно к асимметрии граничных условий.

Течение жидкости в канале, стенки которого сжимаются с постоянным пространственным ускорением, в рамках (I.I) ($v_{33} = 0$, ось x_2 -

параллельна оси канала) исследовано в [139]. Подобная задача, но с растягивающимися стенками, рассмотрена в [74]. Установлено, что решение симметричное относительно срединной плоскости существует во всём диапазоне чисел Рейнольдса, построенных по скорости растяжения стенок и полуширине канала, но при этом с ростом величины данного безразмерного параметра обнаруживается потеря единственности решения. Для $0 < Re \leq 310$ - решение единственно, далее возникает ещё одно решение, а при $Re \geq 337,4$ возбуждается третий режим. При стремлении числа Рейнольдса к бесконечности все три решения стремятся к одному пределу.

Комбинированные течения с деформируемыми и проницаемыми стенками исследованы в [187, 198, 169, 179, 177, 105, 83, 85]. В работе [187] основное внимание уделено режимам с малой проницаемостью стенок канала. Изучение нестационарной динамики данного вида течений указывает на возможность перехода к хаосу путём удвоения периода. В статье [198] представлены результаты исследования устойчивости частного решения задачи о плоском течении, индуцируемом растяжением границ и их проницаемостью, задаваемое функцией тока вида $\psi \sim x_1 x_2$. Анализ линейной устойчивости данного движения относительно плоских возмущений показал, что критическим является число Рейнольдса, построенное по скорости отвода жидкости и полуширине канала, равное $Re_{\text{плоск}} = 4,51$. Исследование устойчивости относительно возмущений, перпендикулярных плоскости течения $x_1 x_2$, выполненное в рамках класса (I.I) $(v_{33}(t, x_1) \neq 0)$, показало, что критическим является $Re_{\text{простр}} = 1,71 < Re_{\text{плоск}}$. Таким образом, пространственные возмущения оказались более опасными, чем плоские.

Классом точных решений линейных по двум пространственным переменным (I) допускается автомодельность вида $\eta = x_1 / \sqrt{t_0 - t}$. Названное обстоятельство авторам [86] позволило рассмотреть

нестационарную задачу о течении вязкой жидкости между двумя проницаемыми плоскостями, расстояние между которыми изменяется обратно пропорционально квадратному корню времени протекания процесса. В названной статье имеется большое количество ссылок на работы, относящиеся к экспериментальному исследованию течений в каналах и трубах с проницаемыми стенками.

Общая трёхмерная постановка задачи о течении вязкой жидкости между проницаемыми плоскостями в рамках (I.III) ($v_{1i} = 0$, ось x_1 перпендикулярна плоскостям) дана в работе [158]. Одно из практически важных приложений такого рода течений связано с проблемами конструирования транспортных средств на воздушной подушке. Так в работе [109] изучалось осесимметричное стационарное течение между двумя дисками, через один из которых производится подача жидкости (напомним, что (I.III) и (I.II) эквивалентны). Ранее Гольдштиком и Яворским исследована постановка, допускающая вращение пористого диска с возможностью, как подвода, так и отвода жидкости через его поверхность [99, 27]. Коксом (Cox) [78] было показано, что задача, рассмотренная в [109] обладает решениями с неосесимметричным распределением поля скорости в условиях симметричном распределении давления. При этом обнаружилось, что для несимметричного режима течения подъёмная сила, удерживающая один из дисков наплаву, больше в сравнении с подъёмной силой, создаваемой осесимметричным потоком. В недавней работе [107] (допускался не только вдув, но и отвод жидкости) установлено, что несимметричные решения Кокса ответвляются (при отсосе жидкости) от симметричных, описанных в [109], по средствам подкритической вилочной бифуркации. Обе вновь возникающие ветви несимметричного режима сливаются при стремлении скорости вдува к бесконечности.

В статье [107] изучена задача о течении между проницаемыми плоскостями с неосесимметричным распределением давления, а также

задача о симметричном однородном отводе жидкости через проницаемые диски с использованием представления (I.П). В ходе исследования последней задачи были обнаружены четыре режима течения: а) осесимметричное течение без закрутки [99], б) осесимметричные течения с ненулевой тангенциальной составляющей скорости [99], в) неосесимметричные движения без закрутки и г) неосесимметричный закрученный режим. Несимметричные движения без закрутки ответвляются от симметричных (а)→в), а закрученные течения ответвляются от незакрученных (а)→б), в)→г)). Впервые бифуркация вращения для осесимметричных режимов бала найдена в [99].

Как вытекает из вышеизложенного, нестационарные постановки задач класса (I) дают возможность изучить различные механизмы неустойчивости течений вязкой жидкости и даже описать переход к хаотическим (во времени) режимам. Данное обстоятельство ещё раз подчёркивает важность изучения точных решений уравнений гидродинамики, поскольку последние, пусть в обеднённом виде, наследуют свойства полной системы уравнений Навье-Стокса.

Обобщения класса точных решений Кармана. Как отмечалось ранее обобщённое (несимметричное) решение Кармана (von Karman) (I.П) есть ничто иное, как класс точных решений (I.П) записанный в цилиндрической системе координат. Обусловленные использованием цилиндрических координат симметрии позволяют сформулировать и изучить ряд новых задач, решения которых обладают рядом специфических свойств. В первую очередь это задачи связанные с исследованием закрученных течений индуцированных вращением ограничивающих жидкость границ (твёрдых дисков). Именно такого рода движениям жидкости здесь и будет уделено основное внимание. Более полный обзор решений уравнений гидродинамики относящихся к классу Кармана можно найти в [196].

Задача об осесимметричном течении вязкой жидкости, заполняющей полупространство над вращающимся твёрдым диском бесконечного радиуса, впервые поставлена Карманом [166] (в (I. II) $a = b = A = B = 0$ – класс Кармана). Единственное решение этой задачи численно получено в [77]. Бёдевадт (Bödewadt) [73] применил класс Кармана к изучению взаимодействия твердотельно вращающейся на бесконечности жидкости с покоящейся плоскостью, обнаружив неединственность решения. Как показали последующие исследования множественность решений и их изолированность друг от друга являются отличительной особенностью течений кармановского типа. Особенно ярко это свойство проявляется в задаче о течении жидкости между двумя соосно вращающимися с угловыми $\Omega_1 \leq \Omega_2 \neq 0$ бесконечными дисками, отстоящими один от другого на расстояние H (в (I. II) $a = b = A = B = 0$).

По-видимому, впервые эта двухпараметрическая задача (как и некоторые другие) была сформулирована в работе [66] Бэтчелором. Роль параметров играют отношение угловых скоростей дисков $s = \Omega_1 / \Omega_2 \in [-1; 1]$ ($s < 0$ – диски вращаются в разных направлениях, $s = 0$ – один из дисков покоится, $s > 0$ – диски вращаются в одну сторону) и число Рейнольдса $Re = \Omega_2 H^2 / \nu$. Вообще говоря, есть ещё и третий параметр, связанный с радиальным градиентом давления. Проведя качественный анализ, Бэтчелор пришёл к заключению, что почти во всём слое между дисками жидкость находится в твердотельном вращении, а вблизи дисков образуются пограничные слои ($s \geq 0$).

Иной вывод получил Стюартсон (Stewartson) [147]. В результате изучения движения жидкости между покоящимся и вращающимся дисками, а также при противовращении дисков, он заключил, что в ядре, то есть в основной массе жидкости, вращение практически отсутствует, локализуясь в пограничных слоях вблизи подвижных дисков. При строгом противовращении $s = -1$ решение Стюартсона симметрично относительно середины слоя.

Дальнейшие исследования показали существование обоих режимов. Лэнс (Lance) и Роджерс (Rogers) [135], для $s = 0$, обнаружили течение типа Бэтчелора с твердотельно вращающимся ядром. Авторами [124] для точного контрвращения $s = -1$, в предположении симметрии относительно середины зазора между дисками, теоретически доказано существование и единственность симметричного решения типа Стюартсона. Для $s = 0$ - ротор-статор в [125, 128] численно обнаружены оба решения. В [125] установлено существование решения с твердотельно вращающимся ядром при всех значениях числа Рейнольдса, в то время как стюартсоновский тип движения возникает лишь при некотором конечном значении этого параметра. Результаты исследований, представленные в [128], указывают на устойчивость решения Бэтчелора. Кроме этого, с ростом числа Рейнольдса авторами [125, 128, 117, 67] продемонстрировано появление всё новых решений всё более сложной структуры. При больших Re Пирсоном (Pearson) [131] описано течение, обладающее большей по сравнению со скоростями дисков, угловой скоростью вращения ядра. Все эти результаты подтверждаются расчётами [110], выполненными для фиксированного значения $Re = 625$ во всём диапазоне отношения угловых скоростей дисков s . Было обнаружено двадцать различных ветвей решения. В [75], со ссылкой на диссертацию [156], приведены результаты исследований задачи о течении между вращающимися дисками во всём диапазоне значений s для чисел Рейнольдса от нуля до тысячи. Утверждается, что найдено девятнадцать ветвей решения, причём обнаружена только одна бифуркация от симметричного режима Стюартсона к паре несимметричных решений, имеющая место в случае точного противовращения дисков при $Re = 119,8$. Все остальные ветви решения изолированы друг от друга, что нетипично для гидродинамики. При любой величине отношений угловых скоростей решение существует и единственно только до $Re < 55$, а для больших значениях числа Рейнольдса решение всегда не единственно. Анализ устойчивости,

проведённый в [128], установил неустойчивость решения Стюартсона и устойчивость течения, предсказанного Бэтчелором.

Наличие множества изолированных решений обсуждаемой задачи при достаточно больших значениях числа Рейнольдса побудило ряд исследователей к изучению вопроса о реализуемости того или иного решения в условиях реального течения между дисками конечного радиуса. Исследование данной проблемы велось, в основном, в двух направлениях: прямой численный счёт и лабораторный эксперимент. Существенным фактором, определяющим результаты такого рода исследований, оказались граничные условия, реализующиеся в эксперименте или задаваемые при численном расчёте на боковой цилиндрической поверхности (торце), ограничивающей зазор между дисками.

Эксперименты [154] проведены в условиях, когда на торце зазора выполнялись условия прилипания и непротекания. Для моделирования последних цилиндрическая боковая поверхность покрывалась слоем масла. Прямые численные расчёты [88] осуществлялись при выполнении требования прилипания к боковой цилиндрической поверхности. Ограниченные возможности численного метода [88] не позволили выполнить расчёты при больших числах Рейнольдса, для которых автомодельное решение предсказывает множественность режимов. Кроме того, затруднения вызвали расчёты при малом отношении ширины зазора к радиусу дисков H/R , вследствие необходимости использования очень подробной сетки. Тем ни менее результаты [88] указывают на то, что в приосевой области численное решение близко к автомодельному (в [45] утверждается, что использовать термин «автомодельное» по отношению к решениям кармановского типа не совсем верно). Для преодоления трудностей, с которыми столкнулись авторы [88] в расчётах с большими числами Рейнольдса и малыми величинами отношения H/R , в [75] было предложено использовать приближённую модель погранслоного характера. В рамках данной модели на торце были поставлены условия,

моделирующие твёрдый цилиндр (закрытый торец) и влияние большого массива жидкости в который погружены диски (открытые торцы). Необходимо отметить специальный характер сформулированных краевых условий, ориентированный на фильтрацию «нефизичных», по мнению авторов [75], решений.

Основные результаты [75] находятся в хорошем согласии с лабораторными и численными экспериментами [88, 154, 155] и в основном состоят в следующем. С ростом числа Рейнольдса краевые эффекты всё глубже проникают внутрь слоя. В результате этого автомодельное течение оказывается локализованным в узкой приосевой области. Более того, влияние торцов в некоторых расчётах влекло за собой полное исчезновение автомодельной зоны и потерю осевой симметрии. Установлено, что выбор типа торцевых условий существенно влияет на то, какой автомодельный режим формируется у оси симметрии. Так в условиях «открытого торца» наблюдается течение Стюартсона, а при «закрытом торце» - режим Бэтчелора. Предсказанная [156] смена симметричного относительно середины слоя течения несимметричным при $s = -1$ действительно имеет место, однако это происходит при Re значительно превышающем теоретически найденное $Re = 119,8$ (смотреть выше).

Множественность и изолированность решений имеет место не только в задаче о течении между вращающимися дисками, но и во многих других задачах, разрешимых в рамках класса Кармана. Например, аналогичными свойствами обладает, упоминавшаяся ранее, задача о течении между пористым неподвижным и вращающимся диском [98] (см. так же [63, 106, 149, 94, 116, 28, 134, 163, 188, 181, 178, 192] и монографию [27]). Интерес к этой задаче обусловлен тем, что она служит простейшей моделью платформы на воздушной подушке. Кроме того, в ходе решения этой задачи, вероятно впервые, была обнаружена осесимметричная бифуркация вращения [98]. Подробное обсуждение проблемы неединственности

решения этой задачи и постановки торцевых граничных условий в экспериментах можно найти в [27].

Другим примером, неединственности изолированных решений, является задача, в которой один из дисков заменён свободной поверхностью [143, 174]. В нестационарной постановке задача о движении в слое жидкости со свободной поверхностью, растекающейся (собирающейся) по вращающемуся диску, сформулирована в [44].

В случае, когда скорость вращения диска изменяется обратно пропорционально времени, последняя задача допускает введение автомодельной переменной, сводящей проблему к исследованию системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта автомодельная задача решена в [36]. Выявлена не монотонность зависимости толщины слоя от начальной угловой скорости вращения диска Ω . При небольших начальных угловых скоростях толщина слоя увеличивается, но, начиная с некоторого значения параметра Ω жидкость, начинает радиально растекаться по диску, вызывая сужение слоя. Замечательно, что в обоих случаях вблизи свободной поверхности среда обладает большей угловой скоростью, чем диск, и вращается в противоположном ему направлении. При больших скоростях вращения диска (большое число Рейнольдса) обнаружены две непересекающиеся ветви решения. Отмечено, что автомодельное решение существует только до определённого значения параметра, характеризующего отношение толщины слоя, к скорости вращения диска.

Все описанные выше задачи решены в рамках классического класса Кармана $a = b = A = B = 0$. Обобщённое представление этого класса точных решений (I.И) уравнений гидродинамики было использовано в [137] для решения задачи о течении жидкости вблизи вращающегося диска, перемещающегося в собственной плоскости. Ванг [175, 171, 180] изучил вращение диска в сдвиговом потоке. Беркер (Berker) [70, 69, 68] используя (I.И) ($A = B = 0$) рассмотрел задачу о течении, инициированном несоосным

вращением двух дисков. Им же была обнаружена неоднозначная разрешимость данной задачи. Исследования были продолжены в [62, 92, 86]. Проницаемость эксцентрических дисков учтена в [133]. Сравнительно недавняя работа [93] посвящена нестационарным постановкам задач о течении между смещёнными дисками, там же можно найти более полный обзор по затронутой тематике. Исследованию частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса методами теории групп Ли, частным случаем которых является (I.III), посвящена работа [39].

1.1.3 Решения линейные по одной пространственной переменной

Из всех известных в настоящее время классов точных решений уравнений гидродинамики, по-видимому, наименее изученным является класс решений с полем скорости, линейно зависящим от одной из пространственных переменных. В частности это связано с тем, что представление гидродинамических полей в виде (II) приводит, как отмечалось ранее, к переопределённой системе уравнений. В работе [48] отмечена нетривиальная разрешимость данной переопределённой системы и в качестве примеров этого приведены решения (I) и (II.II). Для решений уравнений гидродинамики с линейной зависимостью поля скорости от одной из пространственных координат авторами монографии [27] предложено название «течения с пространственным ускорением».

Анзац (II.II) не является классом точных решений в том смысле, который был описан в начале настоящего обзор. Тем ни менее (II.II) представляется интересным объектом исследований, поскольку результирующие уравнения имеют много общего с плоскими и погранслойными моделями движения жидкости. В тоже время (II.II) позволяет учесть пространственную структуру течения за счёт ненулевой составляющей скорости v_3 . Важным примером нестационарной эволюции потока, который может быть отнесен к типу (II.II), является временная неустойчивость, впервые описанная Крайком (Craik) и Криминале (Criminale) [82, 81] и впоследствии обобщённая в работах [64, 95]. Так в

[64] исследовалась устойчивость течения $v_1 = qx_1$, $v_2 = qx_2$, $v_3 = -2qx_3$ относительно плоских (плоскость x_1x_2) пространственно периодических возмущений. Было показано, что в том случае, когда возмущения ориентированы друг относительно друга строго определённым образом, их суперпозиция точно удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса, а амплитуды этих возмущений эволюционируют по закону $A(t) = A(0)\exp(-qt - (1 - e^{-2qt})Q^2/q)$. Согласно которому, при отрицательных q на начальном этапе своего развития возмущения экспоненциально быстро нарастают, что с точки зрения линейной теории является признаком неустойчивости. Однако в дальнейшем этот рост прекращается и происходит затухание возмущений во времени. Авторами [95] (с использованием лагранжевых переменных) показано, что при специальном подборе пространственно периодических возмущений свойством временной неустойчивости обладает произвольное основное течение. Столь смелые выводы [95] были подвергнуты критике в работе [118].

В ходе подготовки настоящего обзора удалось обнаружить лишь две работы [40, 148], где рассматриваются течения вязкой жидкости типа (II.IV). В работе [40] класс точных решений (II.IV) использован для построения моделей конвективных вихрей на различных стадиях их развития. Так при $u = \text{const}$ решение было соотнесено с начальной стадией формирования вихря, в ходе которой преобладает конвергенция скорости. Случай $v = \text{const}$ интерпретирован как развитая стадия вихря с симметричным потенциальным распределением азимутальной скорости. Случай $w = 0$ соответствует течению в приповерхностном слое ($z \rightarrow 0$), индуцированному потенциальным вихрестокком.

В работе [148] в рамках класса (II.IV) исследована задача о течении вязкой жидкости в угле между твёрдыми плоскостями на линии пересечения которых (совпадает с осью z) располагается линейный

источник (сток). Отличие [148] от течения Деффри – Гамеля заключается в том, что кроме чисто радиального течения допускается возможность движения жидкости в осевом (вдоль оси z) и азимутальном направлениях. В этих предположениях рассмотрены два режима течения. Первый режим соответствует радиальному движению жидкости, индуцированному однородным линейным источником, с наложенным на него поперечным течением вдоль оси z ($v_\varphi = 0, v_z = w(\varphi)/r$). Как и следовало ожидать, движения в этих двух направлениях оказались не зависимыми друг от друга, причём радиальное течение совпадает с классическим течением Джеффри – Гамеля. Решения второго типа принадлежат классу (II.IV) с $\alpha = 0$ и описывают трехмерные движения вязкой жидкости от линейного источника, интенсивность которого пропорциональна расстоянию z от начала координат. Исследование показало, что течения этого типа обладают определёнными свойствами симметрии относительно биссектрисы угла между твёрдыми плоскостями, такими, что v_r – чётная функция угла φ , v_φ – нечётная. Также было установлено, что решение существует не для всякой величины удельного расхода, кроме того, оно (решение) может оказаться не единственным. Показано, что одна из ветвей решения данной задачи ответвляется от течения Джеффри – Гамеля.

Точные решения уравнений Навье - Стокса типа (II.III) неоднократно применялись для описания течений вязкой жидкости в трубах с подвижными и проницаемыми боковыми поверхностями. К этому же классу относятся две широко известные модели осесимметричных вязких вихрей, известные как одноячеистый вихрь Бюргера [76] и двухячеистый вихрь Салливана [153]. Поля скорости этих вихрей имеют вид

$$\begin{aligned} v_r &= -\alpha r/2 \\ v_\varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp(-\alpha r^2/4\nu)\right) \\ v_z &= \alpha z, \quad \alpha, \Gamma - const \end{aligned}$$

$$v_r = -\frac{\alpha r}{2} + \frac{6\nu}{r} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right)$$

$$v_z = \alpha z \left(1 - 3 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right)$$

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{H(x)}{H(\infty)}$$

$$H(x) = \int_0^x \exp\left(-t + 3 \int_0^t \frac{1-e^{-s}}{s} ds\right) dt, \quad x = \frac{\alpha r^2}{4\nu}$$

Эволюция смерчееобразных вихрей типа Бюргерса и Салливана изучена Красновым и Кикнадзе [35].

В работах [23, 123, 164, 162, 142, 194, 159, 71] (см. монографию [27]), с использованием класса (II.III), рассматривалась задача о стационарном течении вязкой жидкости в трубе с проницаемой боковой поверхностью. В результате этих исследований была показана неединственность решения задачи в зависимости от числа Рейнольдса, построенного по скорости подвода (отбора) жидкости через пористую поверхность трубы. Кроме того, было обнаружено исчезновение решений в ограниченном диапазоне значений числа Рейнольдса. Аналогичные свойства неединственности и исчезновения решения были обнаружены при изучении течения жидкости в продольно растягивающейся трубе [74].

Неединственность является типичной чертой решений гидродинамических задач, и вопрос отбора физически реализуемых течений решается, как правило, путём исследования их устойчивости. В свою очередь проблема исчезновения решений в каком-либо диапазоне параметров представляется более сложной. Применительно к задаче о течении в пористой трубе [23, 162] эта проблема была решена путём рассмотрения течений типа (II.I) с не равной нулю азимутальной компонентой скорости [132, 163]. Оказалось, что на том участке спектра

Re , где решение без закрутки пропадает, существует вращательно-симметричное решение, одна из ветвей которого бифурцирует от режимов, изученных в [23, 162]. Подобный анализ был выполнен и для течения в растягивающейся трубе [74], но бифуркации вращения обнаружить не удалось.

В работе [163] обращено особое внимание на нетривиальную разрешимость задачи о незакрученном течении с линейно изменяющейся вдоль оси трубы продольной компонентой скорости при нулевом числе Рейнольдса. В связи с этим авторами [163] ставился, но остался не решённым, вопрос о существовании при $Re = 0$ вращательно-симметричного решения (II.I). Эта проблема была исследована в [9], где доказано существование двух решений задачи о стационарном течении вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре, на боковой поверхности которого выполняются условия прилипания.

Устойчивость некоторых режимов течения вязкой жидкости в трубах с проницаемыми и деформируемыми стенками исследована в работах [114, 65, 199, 197].

Настоящая работа посвящена решению ряда задач о течении несжимаемой жидкости с полем скорости вида (II.I). Основные результаты этого исследования изложены в работах [31, 8, 7, 32, 4, 13].

1.2 КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ И ЕГО ОБЩИЕ СВОЙСТВА

В настоящей работе рассматриваются вращательно-симметричные течения жидкости с линейной зависимостью азимутальной и продольной компонент скорости потока от осевой координаты z цилиндрической системы координат (r, φ, z) . В монографии [27] точные решения уравнений гидродинамики, обладающие подобной структурой поля скорости, названы «течениями с пространственным ускорением».

Предполагая осевую симметрию движения, представим давление, отнесённое к постоянной плотности жидкости и компоненты вектора скорости потока в цилиндрической системе координат в виде

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{\nu}{R} \frac{u(\tau, x)}{\sqrt{x}} \\v_\varphi &= \frac{\nu}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} (V(\tau, x) + Z v(\tau, x)) \\v_z &= -2 \frac{\nu}{R} \left(W(\tau, x) + Z \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} \right) \\P &= P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R^2} (B(\tau, x) - 4ZF(\tau, x) - 2Z^2G(\tau, x))\end{aligned}\tag{1.4}$$

Здесь R – некоторый характерный линейный масштаб течения; $x = (r/R)^2$, $Z = z/R$ – безразмерные пространственные переменные; $\tau = (2\nu/R^2)t$ – безразмерное время; P_0 – размерная константа. В качестве масштаба скорости используется отношение ν/R , поэтому новые неизвестные u, v, G, W, V, F, B безразмерны.

Подставляя (1.4) в систему уравнений (1.1) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях Z , получим систему уравнений в частных производных для функции u, v, G, W, V, F, B

$$\begin{aligned} u_{\tau x} + uu_{xx} - u_x u_x + 2G &= 2(xu_{xx})_x \\ v_{\tau} + uv_x - v u_x &= 2xv_{xx} \\ 4x^2 G_x + v^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} W_{\tau} + uW_x - u_x W + 2F &= 2(xW_x)_x \\ V_{\tau} + uV_x - vW &= 2xV_{xx} \\ 4x^2 F_x + vV &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$B + \frac{u^2}{4x} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{V(x)}{x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int \frac{\partial U}{x \partial \tau} dx = u_x \quad (1.7)$$

Система (1.5) – (1.7) замкнута в том смысле, что количество уравнений совпадает с числом неизвестных. Таким образом, полученная система является точным следствием полных уравнений Навье-Стокса (с осевой симметрией), а представление гидродинамических полей (1.4) – класс точных решений. Левые части уравнений (1.5) – (1.7) содержат силы инерции и части градиента давления, а правые – силы вязкости. Нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной.

Нетрудно заметить, что уравнения (1.5) образуют замкнутую подсистему для определения неизвестных u, v, G . Функции W, V, F находятся из линейной подсистемы (1.6), подчинённой (1.5). Если две группы неизвестных u, v, G и W, V, F не связаны между собой начальными или граничными условиями, то о течениях вида (1.4) можно говорить как о суперпозиции фонового (основного) потока (u, v, G) и индуцируемого им вторичного течения (W, V, F). В этом случае

существенным является то обстоятельство, что вторичное течение не оказывает влияния на фоновый поток.

Анализ системы (1.5), (1.6) показывает, что $W = C u_x$, $V = C v$, $F = C G$ удовлетворяют уравнениям (1.6) если u , v , G – решение (1.5). Это свойство связано с возможностью трансляции решений уравнений Навье-Стокса вдоль оси симметрии z .

Ещё одним следствием свойств симметрии, заложенных в уравнениях движения вязкой жидкости, является возможность растяжения решений (1.5), (1.6) в радиальном направлении:

$$\begin{aligned} x \rightarrow L^2 x_*, \quad \tau \rightarrow L^2 \tau_*, \quad u \rightarrow u_*, \quad v \rightarrow v_*/L, \quad G \rightarrow G_*/L^4 \\ W \rightarrow lW_*, \quad V \rightarrow lLV_*, \quad F \rightarrow F_*l/L^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь L и l – любые действительные числа. Преобразование (1.8) оказывается полезным при численном решении конкретных краевых задач, поскольку позволяет избавиться от части граничных условий за счёт того, что область интегрирования перестаёт быть фиксированной.

Специфическим свойством нестационарной системы (1.5), (1.6) является возможность введения автомодельной переменной x/τ :

$$\begin{aligned} \xi = \frac{x}{\tau}, \quad u = u_*(\xi), \quad v = \frac{v_*(\xi)}{\sqrt{\tau}}, \quad G = \frac{G_*(\xi)}{\tau^2} \\ W = \tau^k W_*(\xi), \quad V = \tau^{k+1/2} V_*(\xi), \quad F = \tau^{k-1/2} F_*(\xi) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для новых неизвестных со звёздочками получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (u_* - \xi)u_*'' - u_*' u_*' - u_*' + 2G_* = 2(\xi u_*'')' \\ 2(u_* - \xi)v_*' - (2u_*' + 1)v_* = 4\xi v_*'', \quad 4\xi^2 G_*' + v_*^2 = 0 \end{aligned}$$

$$(u_* - \xi)W_*' - (u_*' - k)W_* + 2F_* = 2(\xi W_*')'$$

$$2(u_* - \xi)V_*' - 2v_* W_* + (2k + 1)V_* = 4\xi V_*'', \quad 4\xi^2 F_*' + v_* V_* = 0$$

Штрихом обозначено дифференцирование по ξ , а k – любое действительное число. В силу линейности уравнений (1.6), W , V , F (вида (1.9)) могут быть представлены как суммы решений последней системы, соответствующие различным k .

Система (1.5) может быть приведена к автономному виду, то есть к виду, не содержащему явно независимую переменную. Для этого достаточно произвести замену переменных

$$\xi = -\ln(x), \quad u = U(\xi), \quad v = e^{\frac{\xi}{2}} Y(\xi), \quad G = e^{2\xi} g(\xi) \quad (1.10)$$

приводящую стационарные $(\partial(\bullet)/\partial\tau)$ уравнения (1.5) к виду

$$2U_{\xi\xi\xi} = U_{\xi}U_{\xi} - (U + 4)U_{\xi\xi} - (U + 2)U_{\xi} - 2g$$

$$4Y_{\xi\xi} = (2U_{\xi} - U - 3)Y - 2(U + 4)Y_{\xi} \quad (1.11)$$

$$4g_{\xi} = Y^2 - 8g$$

В заключение этого короткого раздела отметим, что (1.4) можно интерпретировать как первые члены разложения скорости и давления в ряд Тейлора по переменной z . Условием обрыва ряда в данной ситуации служит требование точного выполнения уравнений Навье-Стокса. С такой точки зрения (1.4) выступает не только как точное решение (1.1), но и как некоторое приближение более общего представления гидродинамических полей. Это приближение описывает локальные по z свойства движения жидкости.

ГЛАВА 2. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Обращение к модели идеальной жидкости нередко бывает оправдано тем, что многие реальные жидкости обладают незначительной вязкостью (для воздуха $\nu = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, для воды $\nu = 14.9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$), действие которой оказывается существенным лишь вблизи твёрдых поверхностей. Поэтому, при изучении ряда явлений, например волновых или геофизических, использование уравнений Эйлера, которые проще уравнений Навье-Стокса, позволяет получить удовлетворительные результаты. Кроме того, решения, полученные для невязкой среды, могут служить ориентирами или отправными точками при исследовании вязких решений.

В двух разделах этой главы получены точные решения уравнений Эйлера, описывающие семейства регулярных локализованных стационарных вихрей с линейной и периодической зависимостью поля скорости от осевой координаты z .

2.1 ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВИХРИ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАКРУТКОЙ

В данном разделе, в рамках исследуемого класса точных решений уравнений гидродинамики, обсуждаются стационарные решения уравнений Эйлера, описывающие пространственно локализованные вращательно-симметричные вихревые течения идеальной жидкости с линейно (дифференциально) изменяющейся по высоте азимутальной составляющей скорости.

В теории идеальной жидкости широко и эффективно используемой моделью является потенциальный вихрь $v_\varphi = \Gamma/(2\pi r)$, обладающий сингулярностью на линии $r = 0$ и нулевой завихрённостью всюду, кроме

оси симметрии. Принято считать, что сингулярный потенциальный вихрь адекватно описывает периферию многих реальных вихревых образований, но при этом он не даёт никакой информации о ядре течения. В связи с этим представляется важным теоретическое описание всюду регулярных вихрей, что может представлять определённый интерес для различных приложений. Так при исследовании некоторых крупномасштабных атмосферных явлений, как, например, тропические циклоны, характеризующихся большими скоростями движения среды, в первом приближении допустимо считать силы инерции преобладающими над силами вязкости и использовать в качестве базовой модель идеальной жидкости.

2.1.1 Постановка задачи. Рассмотрим вращательно-симметричное стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в полупространстве $z \geq 0$ над непроницаемой плоскостью $z = 0$. Будем считать, что на бесконечном удалении от оси симметрии течения ($r \rightarrow \infty$) жидкость покоится, а на самой оси поле скорости регулярно. В соответствии с этим граничные условия запишутся в виде

$$r = 0: v_r = v_\varphi = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0; \quad r \rightarrow \infty: v_r = v_\varphi = v_z = 0. \quad (2.1)$$

Принимая продольную и окружную компоненты поля скорости пропорциональными координате z , представим гидродинамические величины в виде аналогичном (1.4) ($\partial(\bullet)/\partial\tau = 0$ и обезразмеривание не проводится)

$$\begin{aligned} v_r(x) &= \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \\ v_z(x, z) &= -2zu'(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$v_{\varphi}(x, z) = \sqrt{\frac{2}{x}} z v(x)$$

$$P(x, z) = P_0 + 2B(x) - 4z^2 G(x)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по переменной $x = r^2$. После подстановки представления (2.2) в уравнения движения идеальной жидкости, последние редуцируются к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка, аналогичных (1.5) с равными нулю правыми частями

$$\begin{aligned} u'u' - uu'' - 2G &= 0 \\ vu' - uv' &= 0 \\ 4x^2 G' &= -v^2 \\ B &= -\frac{u^2}{4x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Второе уравнение (2.3) очевидным образом интегрируется и даёт

$$v = \frac{u}{L_z}, \quad L_z = \text{const}$$

Продифференцировав первое уравнение из (2.3) и подставив выражение для G' из третьего уравнения, получим нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка для определения u . Последнее может быть один раз проинтегрировано и тем самым сведено к одному обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно u . Все остальные неизвестные функции находятся после его решения. Окончательно система (2.3) может быть переписана в виде

$$u'' = \left(\frac{1}{L_r^4} - \frac{1}{2L_z^2 x} \right) u, \quad (2.4)$$

$$v = \frac{u}{L_z}, \quad B = -\frac{u^2}{4x}, \quad G = G(0) - \frac{1}{4L_z^2} \int_0^x \left(\frac{u(s)}{s} \right)^2 ds \quad (2.5)$$

где L_r – постоянная интегрирования.

Таким образом, для отыскания вращательно-симметричных движений идеальной несжимаемой жидкости класса (2.2) локализованных вблизи оси своей симметрии достаточно найти решения линейного уравнения (2.4) с граничными условиями, вытекающими из (2.1) и (2.2)

$$x = 0: \quad u = 0, \quad |u'| < \infty; \quad x \rightarrow \infty: \quad u = u' = 0 \quad (2.6)$$

Использование класса точных решений уравнений Эйлера (2.2) предполагает, что на некотором расстоянии $z = h$ от подстилающей плоскости $z = 0$ жидкость приводится в состояние вращения специальным образом, согласующимся с (2.2), (2.4), что и служит причиной движения. Как будет показано далее, высота h имеет порядок L_z .

2.1.2 Точное решение задачи и его анализ. Выполним преобразование неизвестной функции u и её аргумента x , обеспечивающее экспоненциальное убывание всех гидродинамических полей в радиальном направлении

$$\xi = 2 \left(\frac{r}{L_r} \right)^2 = 2 \frac{x}{L_r^2}, \quad u = \xi w(\xi) \exp \left(-\frac{\xi}{2} \right) \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.4), для новой неизвестной функции w вновь получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\xi \ddot{w} + (2 - \xi) \dot{w} + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{L_r}{L_z} \right)^2 - 1 \right) w = 0$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу ξ .

Последнее уравнение имеет решение в виде многочленов, что обеспечивает выполнение краевых условий (2.6) для функции u . Нетрудно убедиться в том, что полиномиальные решения существуют лишь тогда, когда имеет место следующее соотношение:

$$\left(\frac{L_r}{L_z} \right)^2 = 4N > 0 \quad (2.8)$$

Здесь N - произвольное натуральное число.

Равенство (2.8) показывают, что исследуемая задача обладает счётным набором решений. Функции w_N , при этом, представляются полиномами Лагерра первого порядка $N - 1$ степени [60, 30]

$$w_N(\xi) = C_N L_{N-1}^{(1)}(\xi) \equiv C_N \frac{e^\xi}{\xi(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{d\xi^{N-1}} (\xi^N e^{-\xi}) = C_N \sum_{n=0}^{N-1} a_{N,n} \xi^n \quad (2.9)$$

$$a_{N,n} = \frac{(-1)^n N!}{n!(n+1)! (N-n-1)!}.$$

Здесь C_N - произвольные постоянные.

Функция $u_N(\xi)$ (см. (2.7), (2.9)) непрерывна и ограничена при всех неотрицательных значениях аргумента, а так же имеет N неотрицательных действительных нулей [60], наименьший из которых

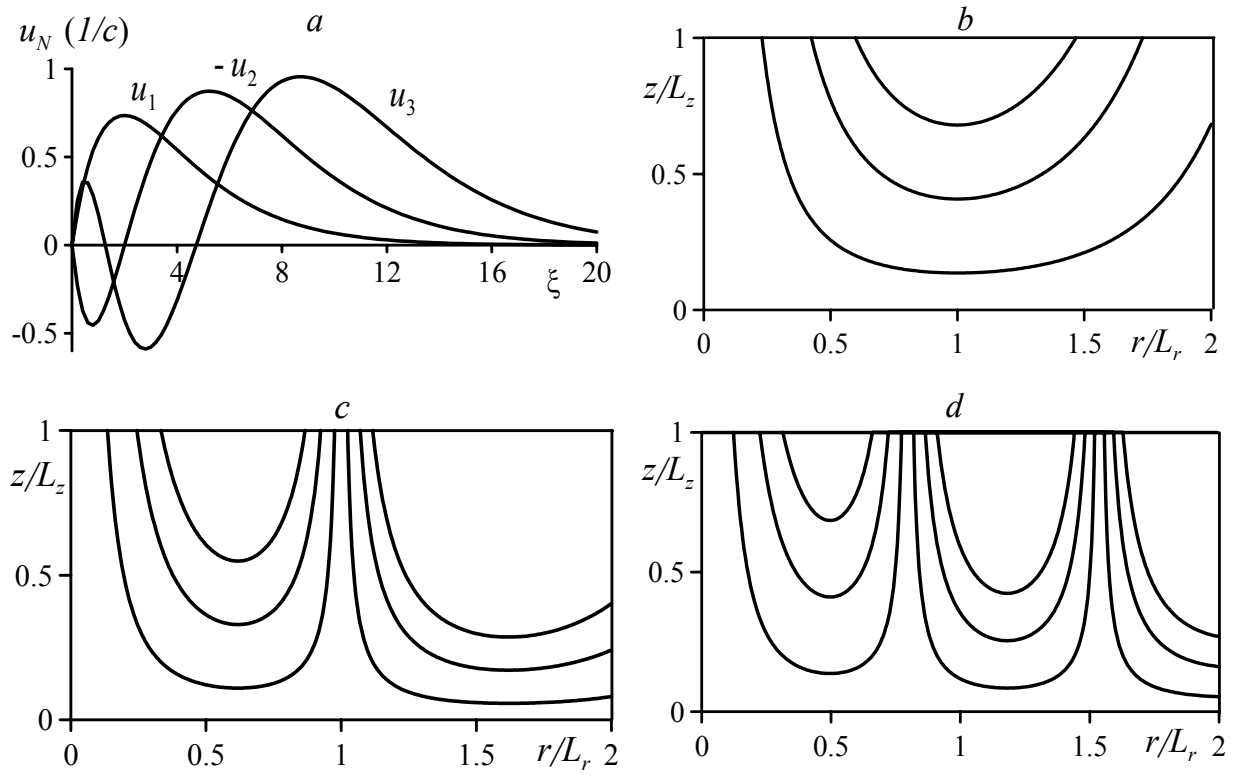


Рис. 1 Графики первых трёх функций семейства (2.7), (2.9) (a) и соответствующие им изолинии функции тока, совпадающие с изолиниями азимутальной компоненты скорости. *b*: $N=1$; *c*: $N=2$; *d*: $N=3$

$\xi = 0$ (см. рис. 1, а) . Для элементов множества $\{u_N(\xi)\}$ выполняется своеобразное соотношение ортогональности: u_N ортогонально всем функциям множества кроме самой себя и своих соседей u_{N-1} и u_{N+1} :

$$\int_0^\infty u_i(\xi) u_j(\xi) d\xi = C_i C_j \cdot \begin{cases} 0, & i \neq j, i-1, i+1 \\ 2i^2, & i = j \\ -\sqrt{i \cdot j}, & i = j-1, j+1 \end{cases}$$

На ряду с множеством функций $\{u_N\}$ можно рассмотреть семейство, состоящее из тех же функций, делённых на $\sqrt{\xi}$

$$\left\{ U_N = \frac{u_N(\xi)}{\sqrt{\xi}} \right\} \quad (2.10)$$

Если константы C_N в (2.9) выбраны равными $1/\sqrt{N}$ (что далее принимается всюду), то функции из последнего множества (2.10) обладают свойством ортонормированности

$$\int_0^\infty U_i(\xi) U_j(\xi) d\xi = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

В соответствии с исходной постановкой задачи течение жидкости рассматривается в полубесконечной области, не имеющей характерного линейного размера. Полученное решение, тем ни менее, зависит от двух величин обладающих размерностью длины – L_r и L_z . Смысл этих величин нетрудно установить, анализируя безразмерные соотношения

$$\xi = 2 \frac{x}{L_r^2}, \quad \frac{v_\varphi}{v_r} = \sqrt{2} \frac{z}{L_z} \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что L_r и L_z можно считать характерным радиальным и осевым масштабами вихря соответственно.

Как отмечалось ранее, с физической точки зрения решения класса (2.2) могут описывать локальное по координате z поведение идеальной жидкости. Это означает, что в общем случае представление (2.2) справедливо тогда, когда $z/L_z < 1$. Из последнего неравенства вытекает, что $L_z \sim h$, где h – то расстояние от подстилающей плоскости, на котором жидкость приводится в состояние вращения. Обратим внимание на то, что при z , стремящемся к h , второе соотношение (2.11) принимает вид $v_\varphi/v_r \rightarrow \sqrt{2} h/L_z \sim \sqrt{2}$ формально близкий к равенству, справедливому (не зависимо от z) для потенциального вихрестока с циркуляцией Γ и мощностью Q

$$\frac{v_\varphi}{v_r} = \frac{\Gamma/(2\pi r)}{Q/(2\pi r)} = \frac{\Gamma}{Q}$$

при $\Gamma/Q \sim \sqrt{2}$.

Кроме того, что постоянная L_z играет роль вертикального масштаба решения, она также определяет интенсивность закрутки вихря (2.11): «короткие» вихри обладают большей окружной скоростью по сравнению с «длинными».

Согласно (2.8), при фиксированном вертикальном (осевом) масштабе вихря, с увеличением номера N горизонтальный масштаб вихря растёт по коренному закону. В месте с увеличением N усложняется и его структура. Решение с номером N описывает вихрь с N - ячеистой структурой полоидальной циркуляции (рис. 1 $b - d$), задаваемой функцией тока ψ , определяемой как

$$\psi = zu, \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

В плане ячейки вихря представляют собой концентрические кольца. В соседних ячейках радиальная и азимутальная скорости потока имеют обратные направления.

Траектории жидких частиц, рассматриваемого течения идеальной жидкости, задаются следующими равенствами

$$z(r) = \frac{\psi(r_0, z_0)}{u_N(r)}, \quad \varphi(r) = \varphi_0 + \frac{\sqrt{2}}{L_z^2} z_0 u_N(r_0) \int_{r_0}^r \frac{ds}{s u_N(s)}.$$

Здесь r_0, φ_0, z_0 - лагранжевы координаты жидкой частицы, исполняющие роль постоянных интегрирования.

Схематичное изображение траектории одной частицы для течения, описываемого функцией $u_1(\xi) = \xi e^{-\xi/2}$ ($N=1$), приведено на рис. 2. Линии тока представляют собой вложенные спирали. Двигаясь вниз (в сторону противоположную положительному направлению оси z) по внутренней спирали жидкая частица удаляется от оси симметрии течения, при этом её вертикальная и окружная компоненты поля скорости убывают. Достигнув непроницаемой плоскости, частица переходит на внешнюю спираль и начинает подниматься, удаляясь от плоскости (v_z, v_φ - растут). Движение идеальной жидкости является обратимым, в силу этого возможна противоположная картина движения, когда жидкая частица опускается по внешней спирали и поднимается по внутренней, при этом частица постоянно удаляется от оси течения в радиальном направлении. Направление закрутки потока также может быть произвольным в силу исходного допущения об осесимметричности движения.

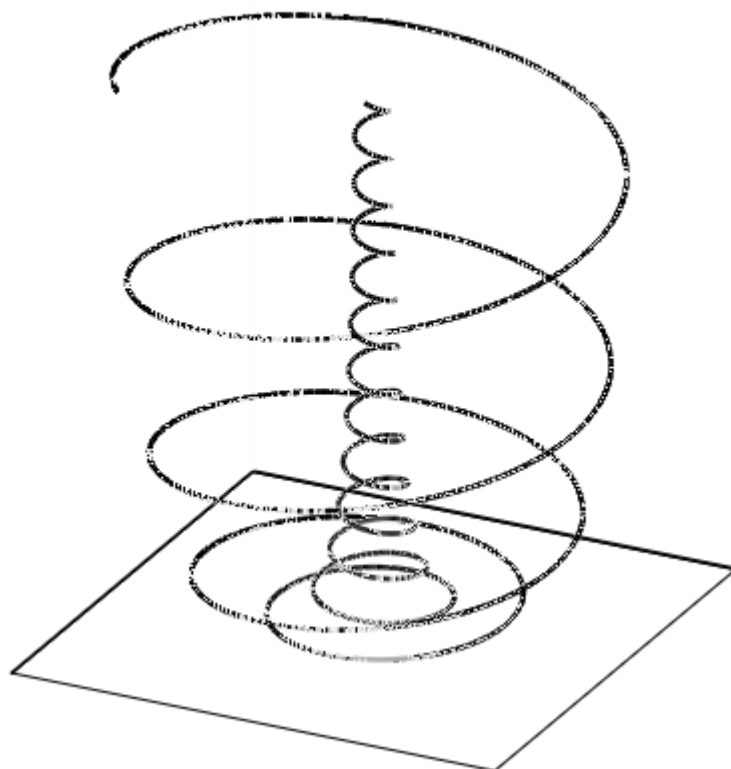


Рис. 2 Траектория частицы жидкости в одноячеистом вихре над непроницаемой плоскостью

2.2 СТАЦИОНАРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦЕПОЧКИ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВИХРЕЙ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В предыдущем пункте исследовались осесимметричные течения идеальной несжимаемой жидкости, в которых окружная и осевая компоненты скорости считались линейными функциями продольной координаты z (см. (2.2)). В этом пункте будет показано, что уравнения Эйлера допускают стационарные решения периодические по z . На основе этих решений описаны цепочки вихрей, локализованных вблизи оси своего вращения. При этом оказывается, что при устремлении волнового числа к нулю периодические решения переходят в результаты предыдущего раздела данной главы.

2.2.1 Постановка и решение задачи. Рассматривается вращательно-симметричное стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости в неограниченном пространстве. Будем считать движение периодическим вдоль оси симметрии потока z и затухающим при удалении от неё. Предполагая регулярность гидродинамических полей во всей области течения, включая ось симметрии, выпишем ограничения, накладываемые на поле скорости:

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, z) &= \vec{v}(r, z + \lambda) \\ r = 0: v_r = v_\varphi &= 0, \quad |v_z| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: v_r = v_\varphi = v_z = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение уравнений Эйлера в цилиндрической системе координат будем искать в виде суммы периодической по переменной z и однородной по этой переменной частей:

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{2k} z) \\
v_z &= -2 \left(\frac{du(x)}{dx} \frac{\sin(\sqrt{2k} z)}{\sqrt{2k}} + W(x) \right) \\
v_\varphi &= \sqrt{\frac{2}{x}} \left(v(x) \frac{\sin(\sqrt{2k} z)}{\sqrt{2k}} + V(x) \right) \\
P &= P_0 + 2 \left(B(x) - 4F(x) \frac{\sin(\sqrt{2k} z)}{\sqrt{2k}} - 2G(x) \left(\frac{\sin(\sqrt{2k} z)}{\sqrt{2k}} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь, как и прежде, $x = r^2$, $P_0 = \text{const}$.

Представление (2.13) удовлетворяет условиям периодичности по координате z (2.12) с периодом $\lambda = \sqrt{2}\pi/k$, где k - волновое число. Нетрудно видеть, что при стремлении волнового числа k к нулю, или, что, то же самое, при бесконечном увеличении периода λ , формулы (2.13) переходят в стационарный вариант представления (2.2) ($W = V = F = 0$). Таким образом, в случае установившегося движения, соотношения (2.2) являются предельным случаем (2.13). Это позволяет ожидать, что движения описываемые (2.13), обладают рядом свойств течений (2.2), исследованных в предыдущем пункте.

Подставляя представление гидродинамических полей (2.13) в уравнения Эйлера и приравнявая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях синусов и косинусов, получим для определения неизвестных функций $u(x)$, $v(x)$, $G(x)$ замкнутую, систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями, следующими из (2.12):

$$\begin{aligned}
uu'' - u'u' + 2G &= 0, \\
uv' - vu' &= 0, \\
4x^2G' &= -(v^2 - k^2u^2),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$x=0: u=v=0, |u'| < \infty, \quad x \rightarrow \infty: u=v=u'=0.$$

Неизвестные $W(x), V(x), F(x)$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений с граничными условиями, следующими из (2.12):

$$\begin{aligned}
uW' - u'W + 2F &= 0 \\
uV' - vW &= 0 \\
4x^2F' &= -(vV - k^2xuW)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$x=0: V=0, |W| < \infty, \quad x \rightarrow \infty: V=W=0$$

Однородная по высоте z часть давления $B(x)$ находится при помощи квадратуры:

$$B(x) = \int \frac{V^2(x)}{2x^2} dx - \frac{u^2(x)}{4x}.$$

В (2.14) и (2.15) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной x .

Уравнения (2.14) изолированы, их интегрирование позволяет определить $u(x), v(x), G(x)$ и тем самым описать поле скоростей неоднородного по высоте z движения (2.13). После этого, $W(x), V(x)$ и $F(x)$ находятся из линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.15), одним из решений которой является тривиальное – нулевое. Физически это означает, что на фоне движения,

подчиняющегося (2.14), может существовать, не влияющее на него (то есть (2.14)), однородное по z течение, определяемое (2.15).

Преобразуем уравнения (2.14). Второе из них очевидным образом интегрируется и даёт

$$v = \alpha u, \quad \alpha = \text{const}.$$

Теперь продифференцировав один раз первое уравнение (2.14) и подставив в него, с использованием последнего интеграла, G' из третьего уравнения системы, получим одно нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно $u(x)$. Это уравнение однократно интегрируется, после чего (2.14) сведётся к одному уравнению и квадратурам

$$\begin{aligned} u'' &= \left(\frac{1}{L_r^4} - \frac{\alpha^2 - k^2}{2x} \right) u \\ x=0: u &= 0, \quad |u'| < \infty, \quad x \rightarrow \infty: u = u' = 0 \\ v &= \alpha u, \quad G = G_0 - \frac{\alpha^2 - k^2}{4} \int_0^x \left(\frac{u(s)}{s} \right)^2 ds \end{aligned} \tag{2.16}$$

где G_0 и L_r - постоянные интегрирования. Отметим, что задача (2.16) получена (в предположение $\alpha^2 \neq k^2$) способом аналогичным тому, каким была выведена система (2.4) - (2.6). Обе эти задачи имеют сходный вид, а следовательно и обладают аналогичными решениями.

Используя (2.16), нетрудно упростить систему (2.15). Принимая во внимание связь между u и v , задаваемую равенством из (2.16), получим:

$$V' = \alpha W$$

Продифференцируем первое выражение (2.15), и подставим в него F' . Воспользовавшись последним равенством, $V' = \alpha W$, и первым уравнением из (2.16), исключаем W и u'' . В результате получается линейное уравнение третьего порядка относительно V , которое может быть один раз проинтегрировано. После всех этих элементарных преобразований (2.15) сводится к одному уравнению для определения V , остальные неизвестные находятся по его решениям.

$$V'' = \left(\frac{1}{L_r^4} - \frac{\alpha^2}{2x} \right) V + \gamma$$

$$x = 0: V = 0, |V'| < \infty, x \rightarrow \infty: V = V' = 0 \quad (2.17)$$

$$W = \frac{V'}{\alpha}, F = F_0 - \frac{\alpha}{4} \int_0^x \left(V(s) - \frac{k^2}{\alpha^2} s V'(s) \right) u(s) ds$$

Здесь F_0 γ - постоянные интегрирования; а α, L_r те же, что в (2.16).

Таким образом, решение исследуемой здесь проблемы сводится к отысканию решений двух линейных краевых задач на собственные функции и собственные значения (2.16), (2.17) для линейных уравнений второго порядка, формально совпадающих с исследованной ранее системой (2.4) - (2.6).

Далее полагается, что постоянная γ в первом уравнении (2.17) равняется нулю, что гарантирует наличие решений требуемого вида. Воспользовавшись результатами предыдущего раздела, нетрудно выписать решения задач (2.16), (2.17):

$$u_N(\xi) = A_N \xi L_{N-1}^{(1)}(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad \xi = 2 \frac{x}{L_r^2} = 2 \left(\frac{r}{L_r} \right)^2, \quad (\alpha^2 - k^2) L_r^2 = 4N \quad (2.18)$$

$$V_M(\xi) = B_M \xi L_{M-1}^{(1)}(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad (\alpha L_r)^2 = 4M \quad (2.19)$$

где N и M – натуральные числа; A_N, B_M – произвольные константы; $L_k^{(1)}(\xi)$ – полиномы Лагерра (смотреть (2.9) и [60]).

2.2.2 Периодическая мода. Решение $V(x) = W(x) = F(x) = 0$, наряду с (2.19), удовлетворяет системе (2.17). При этом представление поля скорости (2.13) принимает вид:

$$\begin{aligned} v_r^{(P)} &= \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{2}kz), & v_\varphi^{(P)} &= \sqrt{\frac{2}{x}} \alpha u(x) \frac{\sin(\sqrt{2}kz)}{\sqrt{2}k} \\ v_z^{(P)} &= -2u'(x) \frac{\sin(\sqrt{2}kz)}{\sqrt{2}k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

где u есть одна из функций семейства (2.18). Выражения (2.20), (2.18) удовлетворяют уравнениям Эйлера и краевым условиям (2.12), тем самым, доставляя решение сформулированной выше задаче. Счётное множество λ – периодических и локализованных в пространстве решений (2.18), (2.20) (периодическая мода) зависит от трёх параметров: $\lambda = \sqrt{2}\pi/k$, L_r , α . Период λ определяет масштаб вихрей, составляющих цепочку (2.20), в направлении продольной оси z . Поперечный (радиальный) размер этих вихрей тесно связан с постоянной L_r (смотреть (2.18)). Значение этого параметра подробно обсуждалось в первом разделе данной главы. Величина α определяет интенсивность закрутки вихрей, что отражено вторым равенством (2.20).

Кинетическая энергия одного вихря, слагающего цепочку (2.20), вычисленная с использованием свойств ортогональности функций u_N и u_N/\sqrt{x} , установленных в предыдущем разделе, согласно общей формуле:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\lambda \int_0^{2\pi} (v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2) r d\phi dz dr \quad (2.21)$$

равна ($v_r = v_r^{(P)}$, $v_z = v_z^{(P)}$, $v_\phi = v_\phi^{(P)}$):

$$E_P = A_N^2 \frac{\lambda \pi}{4} \left(1 + \frac{3N}{2\pi^2} \left(\frac{\lambda}{L_r} \right)^2 \right) \quad (2.22)$$

Как следует из (2.22), энергия вихрей (2.20) (2.18) прямо пропорциональна их номеру и быстро увеличивается с ростом периода λ . Кроме этого, она зависит от масштабного коэффициента L_r , остающегося пока не вполне определённым. Таким образом z - периодическая мода (2.20), (2.18), течения типа (2.13), характеризуется значительным произволом, связанным с выбором номера N и величин α и L_r , связанных друг с другом и волновым числом k (считается известным) посредством соотношения $(\alpha^2 - k^2)L_r^2 = 4N$.

2.2.3. Однородная мода. В соответствие с (2.13) на фоне периодической моды (2.20) может развиваться однородное по z течение, определяемое (2.19). Происходить это может только в том случае, если между величинами α и L_r имеет место связь (2.19): $\alpha^2 L_r^2 = 4M$. В таком случае можно записать:

$$\left(\frac{\lambda}{L_r}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(M-N)} > 0, \quad (\alpha \lambda)^2 = 2\pi^2 \frac{M}{M-N} > 0 \quad (2.23)$$

Формулы (2.23) выражают величины α и L_r через номера N и M , относящиеся соответственно к периодической и однородной моде и период λ . При этом, как следует из (2.23), однородная по z мода необходимо обладает большим номером в сравнение с чисто периодическим движением $M > N$. Согласно результатам предшествующего анализа, последнее неравенство означает, что однородное течение обладает большим поперечным пространственным масштабом, а его радиальная структура усложнена большим количеством ячеек. Но соотношения (2.23) накладывают определённые ограничения не только на однородную моду. Согласно им, периодическое движение (2.20) допускает генерацию, на своём фоне, однородной компоненты течения (с номером M) только в том случае, если вихри периодической цепочки (2.20) обладают энергиями

$$E_P = A_N^2 \frac{\lambda \pi}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{N}{M-N} \right). \quad (2.24)$$

Замечательно, что энергия однородного по z течения

$$\begin{aligned} v_r^{(H)} = v_r - v_r^{(P)} = 0, \quad v_\varphi^{(H)} = v_\varphi - v_\varphi^{(P)} &= \sqrt{\frac{2}{x}} V(x) \\ v_z^{(H)} = v_z - v_z^{(P)} &= -2W(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.13) полностью определяется частотой k (периодом λ) периодического течения (2.20):

$$E_H = \frac{3}{2} B_M^2 \pi \lambda = B_M^2 \frac{3\pi^2}{\sqrt{2k}} \quad (2.26)$$

Здесь $E_H = E - E_p$, где E - полная энергия (2.13), вычисленная по формуле (2.21) (энергия взаимодействия мод равна нулю). Следовательно, кинетическая энергия однородного движения в (2.25) не зависит от топологии самого этого движения и периодической моды, задаваемых выбором номеров M и N . Анализируя (2.24), (2.26), нетрудно прийти к выводу о том, что чем более сложной радиальной структурой (с большим числом ячеек M и большим радиальным масштабом) обладает «вторичный» режим (2.25), тем большую энергию E_p должно иметь «основное» течение (2.20).

Как указывалось ранее, представление (2.20) удовлетворяет уравнениям Эйлера, этим же свойством обладает и (2.25). Но при этом последнее выражение для гидродинамических полей приводит к не доопределенной системе (смотреть (2.15)):

$$x^2 \frac{dP}{dx} = V^2(x), \quad W = W(x)$$

где V и W – произвольные функции аргумента x , а P - давление, отнесённое к постоянной плотности. Названное обстоятельство отражает известное свойство уравнений Эйлера для плоских и осесимметричных течений идеальной жидкости, заключающееся в том, что такого рода движения характеризуются произвольной завихрённостью, зависящей только от функции тока [3].

Цепочка периодических вдоль оси z и локализованных вблизи этой оси вихрей (2.13), (2.18), (2.19) есть суперпозиция мод (2.20) и (2.25). Вторая, из которых, возникает на фоне первой при строго определённых

значениях энергии E_p (2.24) и имеет большой поперечный масштаб, связанный с большим количеством радиальных ячеек (номер $M > N$). При неизменности длины продольной волны λ , вторичный режим, вне зависимости от его радиальной структуры (номер M), обладает постоянной энергией E_H (2.26), зависящей только от периода фонового течения.

2.2.4. Анализ результатов. Траектории жидких частиц находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\varphi}{v_\varphi} = \frac{dz}{v_z} = dt$$

где t - время, а все остальные величины считаются его функциями. Наряду с траекториями вновь удобно рассматривать функцию тока полоидальной циркуляции поля скорости, которая для течения (2.13) вводится как

$$\psi = u_N \frac{\sin(\sqrt{2}kz)}{\sqrt{2}k} + \sqrt{\frac{M-N}{M}} \frac{V_M}{k}, \quad v_r = \frac{\partial \psi}{r \partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi}{r \partial r}.$$

Функция тока ψ_p периодического течения (2.20) отличается от ψ тем, что второе слагаемое в правой части равно нулю.

На рис. 3 и 4 качественно изображены изолинии функции тока λ – периодического потока ψ_p (рис. 3) и траектории двух жидких частиц (рис. 4) при $N=1$, $\alpha \lambda = 2\pi$ ($A_1 = 1$). Течение представляет собой периодическую последовательность (цепочку) локализованных вблизи оси симметрии вихрей. Соседние вихри обладают обратно направленными полоидальной и азимутальной циркуляциями скорости.

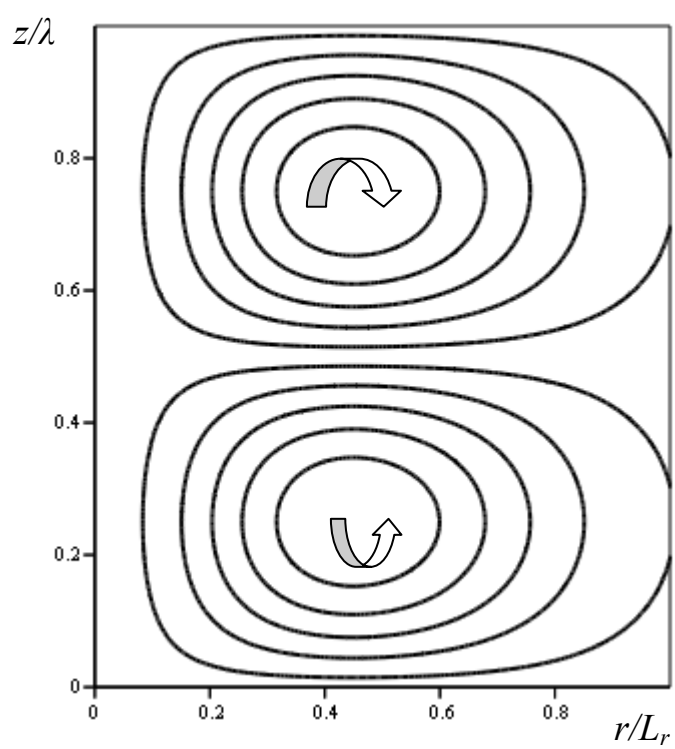


Рис. 3 Изолинии функции тока ψ_p в одноячейстой ($N=1$) периодической цепочке

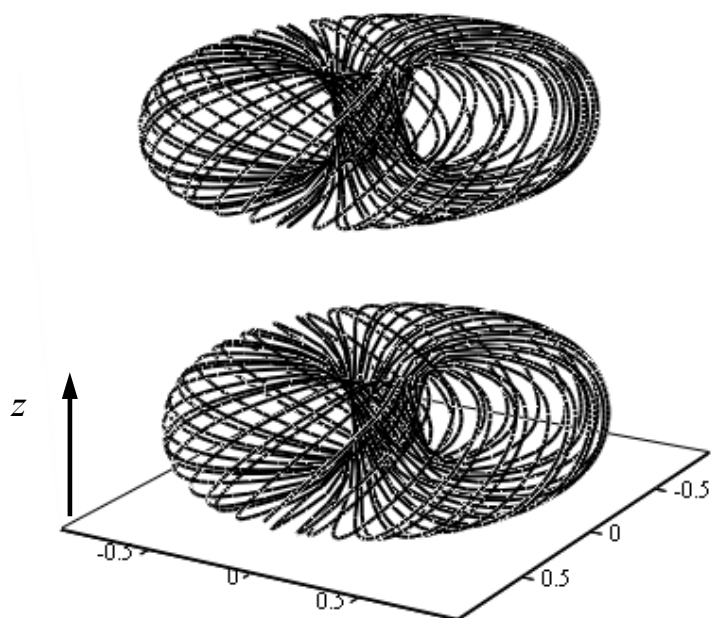


Рис 4 Траектории двух жидких частиц в одноячейстой ($N=1$) периодической цепочке

На рис. 5 ($A_1=1$, $B_2=1/\sqrt{2}$) представлена качественная картина изолиний функции тока ψ для решения уравнений Эйлера (2.13) ($N=1$, $M=2$), описывающего суперпозицию периодической и однородной по z моды. Область течения можно условно разбить на пять подобластей. Вид пространственных траекторий трёх частиц изображён на рис. 6. Топология течения формируется двумя цепочками локализованных вихрей, отмеченных как II, IV и тремя проточными зонами I, III, V. Соседние вихри одной цепочки, например II, обладают однонаправленными циркуляциями, но при этом соседние вихри, принадлежащие различным цепочкам, имеют противоположные по знаку полоидальную и азимутальную циркуляции скорости. Частицы жидкости в вихрях из областей II, IV движутся по траекториям, намотанным на некоторые трёхмерные торы, и не покидают пределов своего вихря. Линии тока в проточных зонах I, III, V представляют собой спирали различной формы и с различной величиной шага. Пусть в приосевой области I жидкость течёт всюду против оси z (движение идеальной жидкости обратимо), одна из линий тока принадлежащих данной области приведена на рис. 5 I. В проточной области III, расположенной между цепочками вихрей осевая скорость v_z положительна. Внутри этой зоны, по мере удаления от оси симметрии, происходит смена направления закрутки потока. В области V, вблизи внешней цепочки вихрей IV, продольная составляющая скорости направлена вдоль оси симметрии потока, но с удалением от этой оси знаки скоростей v_z , v_φ меняются. Необходимо отметить, что для течения (2.13) расход жидкости через любую плоскость $z = const$, в силу (2.18), (2.19), остаётся нулевым, следовательно, в проточных областях вдоль оси z в обоих направлениях переносится одинаковое количество жидкости.

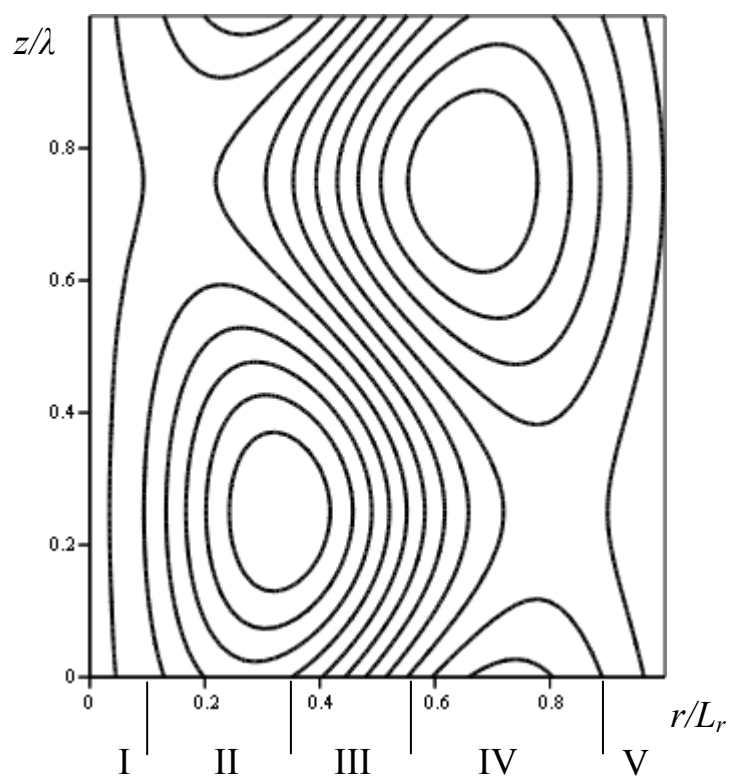


Рис. 5 Изолинии функции тока для суперпозиции λ - периодической ($N=1$) и однородной ($M=2$) моды

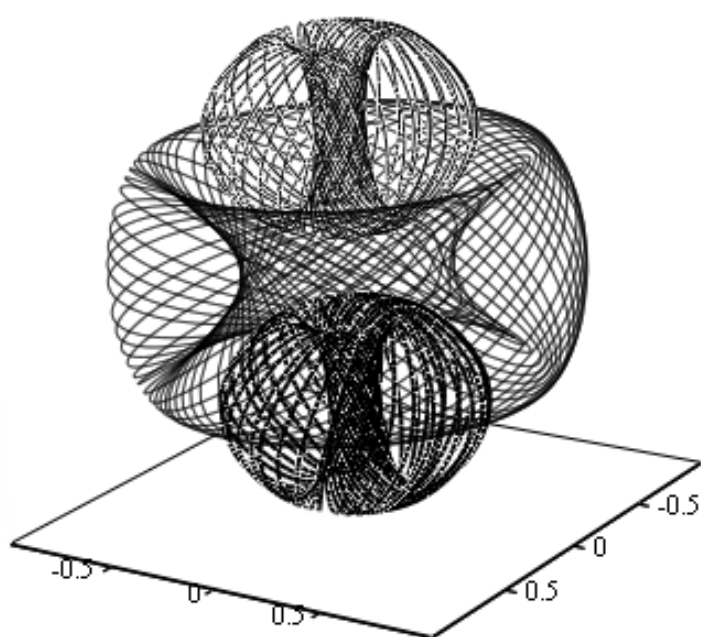


Рис. 6 Траектории трёх частиц для суперпозиции λ - периодической ($N=1$) и однородной ($M=2$) моды

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ГЛАВЫ 2

В первом разделе главы исследована задача о локализованном в радиальном направлении, закрученном вихревом течении идеальной несжимаемой жидкости над непроницаемой плоскостью. В конечном виде получено счётное множество регулярных во всей области течения, включая ось симметрии, решений данной задачи, экспоненциально убывающих в радиальном направлении при удалении от оси течения. Решения из найденного семейства описывают вихри с различным числом концентрических циркуляционных ячеек (количество ячеек совпадает с номером решения). Показано, что решение существует лишь положительных целочисленных значениях отношения квадратов радиального и осевого масштабов вихря.

Во втором разделе главы в конечном виде получено счётное множество точных решений уравнений Эйлера, описывающих стационарные, периодические вдоль оси z цепочки пространственно локализованных осесимметричных вихрей. Описанное движение представляет собой суперпозицию двух мод: периодической и однородной по продольной координате. Установлена связь параметров задачи, характеризующих радиальный размер L_r и интенсивность закрутки α , с длиной продольной волны λ и видом радиальной структуры каждой из мод, задаваемых номерами решений N и M . Показано, что вихри, составляющие λ – периодические цепочки, обладают конечными энергиями. При этом было доказано, что вторичная – однородная мода определённого типа может генерироваться на фоне основной – периодической моды, только в том случае если кинетическая энергия последней принимает одно из конечного числа значений. Примечательно, что при этом энергия однородного движения целиком определяется периодом λ .

ГЛАВА 3. ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Третья глава диссертации посвящена теоретическому исследованию течений вязкой жидкости в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями. Рассмотренные задачи имеют непосредственное отношение к важнейшей, в прикладном и теоретическом плане, проблеме описания движений жидкости в трубах. В первом разделе с применением численных и аналитических методов решена задача о течении жидкости вблизи продольно деформирующегося цилиндра. Вторым раздел посвящён анализу точного решения уравнений Навье – Стокса, обобщающего классическое решение задачи Куэтта – Пуазейля. В последнем разделе изучена монотонная устойчивость двух стационарных режимов течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане относительно специальных возмущений с конечной амплитудой.

3.1 СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ОСЕВЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этом разделе рассматривается стационарное течение вязкой жидкости между бесконечными коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых растягивается или сжимается вдоль своей оси со скоростью $v_z = Sz$. Одно из сечений зазора между цилиндрами закрыто непроницаемой перегородкой.

Интерес к данной задаче, в частности, связан с тем, что она может служить грубой моделью движения, возникающего в большом сосуде при квазистационарном истечении жидкости через центральное отверстие малого радиуса. При этом растягивающийся внутренний цилиндр моделирует «поверхность» струи, формирующейся в жидкости,

заполняющей сосуд, непосредственно над отверстием в дне. Непроницаемая перегородка играет роль свободной поверхности жидкости. В случае сжатия цилиндра ($S < 0$) задача может быть интерпретирована как течение, возникающее в результате проникновения струи в заполненный жидкостью сосуд с непроницаемым дном.

3.1.1 Постановка задачи. Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой жидкости, заключённой между двумя полубесконечными коаксиальными цилиндрами радиусов $R_0 < R_1$, вызываемое осевым деформированием внутреннего цилиндра. Одно из поперечных сечений зазора между цилиндрами закрыто непроницаемой перегородкой, а на боковых поверхностях выполняются условия прилипания:

$$r = R_0: v_r = v_\varphi = 0, v_z = Sz, \quad r = R_1: v_r = v_\varphi = v_z = 0 \quad (3.1)$$

Здесь v_r, v_φ, v_z - компоненты скорости в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , начало которой расположено на непроницаемом торце, а S - заданный параметр, характеризующий скорость растяжения ($S > 0$) или сжатия ($S < 0$) внутреннего цилиндра.

В соответствии с граничными условиями (3.1) решение задачи естественно искать в виде, предполагающем линейную зависимость части компонент скорости от осевой координаты z , то есть в рамках класса точных решений (1.4) $(\partial(\bullet)/\partial\tau = 0, W = V = F = 0, R = R_1)$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\nu}{R_1} \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \\ v_\varphi &= \frac{\nu}{R_1} \sqrt{\frac{2}{x}} Z v(x) \\ v_z &= -2 \frac{\nu}{R_1} Z u'(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$P = P_0 + 2 \left(\frac{\nu}{R_1} \right)^2 \left(u'(x) - \frac{u^2(x)}{4x} - 2Z^2 g(x) \right)$$

Здесь P_0 – значение давления P , отнесённого к постоянной плотности, на боковой поверхности внешнего цилиндра в плоскости непроницаемого торца $z = 0$; $Z = z/R_1$. Штрихом обозначено дифференцирование по безразмерной переменной $x = (r/R_1)^2$.

Как было установлено в разделе 1.2, поле скорости вида (3.2) тождественно удовлетворяет условию несжимаемости, а уравнения Навье-Стокса в точности редуцируются к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для безразмерных неизвестных u , v и g

$$\begin{aligned} 2xu''' &= 2g + (u-2)u'' - u'u' \\ 2xv'' &= uv' - vu' \\ 4x^2g' &= -v^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

с граничными условиями, следующими из (3.1)

$$\begin{aligned} x = x_0: \quad u = v = 0, \quad u' &= -\text{Re}/x_0 \\ x = 1: \quad u = u' = v &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Положительным значениям числа Рейнольдса $\text{Re} = SR_0^2/(2\nu)$ соответствует растяжение внутреннего цилиндра, а отрицательным – его сжатие. Заданный параметр $x_0 = (R_0/R_1)^2$ определяет геометрию задачи.

Анализ системы (3.3), (3.4) показывает, что она обладает решениями двух типов. К первому типу относятся решения, описывающие вращательно-симметричные течения жидкости с отличной от нуля азимутальной составляющей скорости ($v \neq 0$). Решения второго типа

представляют собой осесимметричные движения с нулевой закруткой потока ($v = 0$). В последнем случае из всех уравнений (2.3) остаётся только первое, а неоднородная по z составляющая давления $g = g_0 = \text{const}$.

Наличие двух различных режимов течения заранее указывает на неединственность решения, то есть следует ожидать, что в некоторых интервалах чисел Рейнольдса возможно одновременное существование обоих вышеуказанных типов движения жидкости. Это в свою очередь делает правомерным вопрос о возможности их взаимного ветвления.

Решение краевой задачи (3.3), (3.4) затрудняется её нелинейностью и требует привлечения численных методов. С этой целью формулируется задача Коши с дополнительными параметрами, определяемыми частью граничных условий. Нетрудно заметить, что начальные условия предпочтительно ставить на правом конце отрезка интегрирования, так как при $x = x_0$ необходимо удовлетворить лишь первым двум граничным условиям (3.4), а число Рейнольдса можно принимать в качестве вычисляемой величины.

Удобно ввести логарифмическую переменную и новые неизвестные (см. раздел 1.2 (1.10), (1.11))

$$\xi = -\ln(x), \quad u = U(\xi), \quad v = e^{\frac{\xi}{2}} V(\xi), \quad g = e^{2\xi} G(\xi)$$

Тогда (3.3) переходит в автономную систему

$$2U_{\xi\xi\xi} = U_{\xi}U_{\xi} - (U + 4)U_{\xi\xi} - (U + 2)U_{\xi} - 2G$$

$$2V_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(2U_{\xi} - U - 3)V - (U + 4)V_{\xi}$$

$$4G_{\xi} = V^2 - 8G$$

дополняемую начальными условиями

$$\xi = 0: \quad U = U_\xi = V = 0, \quad U_{\xi\xi} = U_0'', \quad V_\xi = V_0', \quad G = G_0$$

Значения любых двух из параметров U_0'' , V_0' , G_0 , при фиксированном третьем, находятся из требований, диктуемых первыми двумя граничными условиями (3.4)

$$\xi = \xi_0 = -\ln(x_0): \quad U(U_0'', V_0', G_0) = V(U_0'', V_0', G_0) = 0$$

Число Рейнольдса вычисляется по формуле $Re = U_\xi(\xi_0)$. Осесимметричному течению ($V \equiv 0$) соответствует $V_0' = 0$ и $G = g_0 \exp(-2\xi)$. Все приводимые далее численные результаты получены для $x_0 = 0.01$.

3.1.2 Осесимметричные течения ($v \equiv 0$). Зависимости параметров U_0'' и G_0 от числа Рейнольдса для осесимметричной задачи представлены на рис. 7 штриховыми линиями. Кривые, изображающие зависимости $U_0''(Re)$, $G_0(Re)$, неоднозначны, но могут быть разделены на отдельные ветви ($B_1 - B_4$) такие, что вдоль каждой из них решение единственно. В области умеренных положительных чисел Рейнольдса ($Re < Re_2 = 6.429$) решение единственно. При $Re \geq Re_2$ свойство единственности теряется, так как наряду с ветвью B_1 , выходящей из состояния покоя при нулевом числе Рейнольдса, существуют ещё две ветви решения – B_2 и B_3 . Первая из них продолжает B_1 в сторону значений числа Рейнольдса меньших $Re_3 = 88.072$. Вторая ветвь продолжает B_2 в направлении возрастания числа Рейнольдса от значения Re_2 . Единственная ветвь B_4 осесимметричной задачи о сжатии цилиндра возникает, как и B_1 , из состояния покоя $Re = 0$.

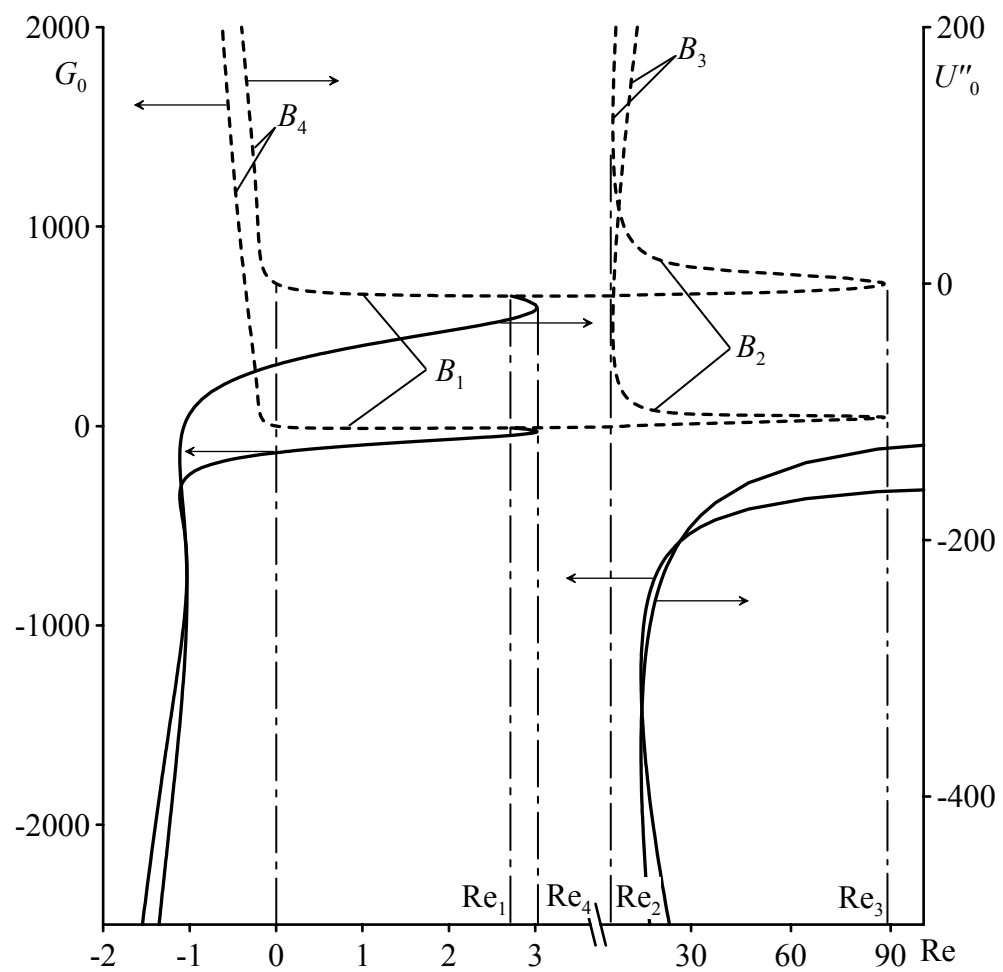


Рис. 7 Зависимость параметров U''_0 и G_0 от числа Рейнольдса осесимметричной (пунктирные кривые) и вращательно-симметричной (сплошные кривые) задачи

При малых числах Рейнольдса решение задачи без закрутки, принадлежащее ветвям B_1 и B_4 , приближённо может быть найдено в виде разложения по натуральным степеням этого параметра. В случае $|\text{Re}| < x_0$ для получения хорошего приближения достаточно ограничиться первыми членами рядов, что соответствует ползущему течению Стокса:

$$\begin{aligned}
 u = u_1 \text{Re} + \dots &= \left(\frac{g_{01}}{2} x^2 + x(C_1 \ln(x) + C_2) + C_3 \right) \text{Re} + \dots \\
 g_0 = g_{01} \text{Re} + \dots &= 2 \frac{1 + x_0 (\ln(x_0) - 1)}{x_0 (1 - x_0) \gamma} \text{Re} + \dots \\
 \gamma &= 2(1 - x_0) + (1 + x_0) \ln(x_0)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Постоянные C_i , найденные из граничных условий, равны:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{1 - x_0}{x_0 \gamma}, \quad C_2 = \frac{1 - x_0^2 + 2x_0 \ln(x_0)}{x_0 (1 - x_0) \gamma} \\
 C_3 &= \frac{1 - x_0 + \ln(x_0)}{\gamma}
 \end{aligned}$$

Сжатие внутреннего цилиндра (втекающая струя, $\text{Re} < 0$), согласно (3.5) и численным расчётам, индуцирует дивергентное радиальное течение заполняющей сосуд жидкости с компенсирующим потоком вдоль боковой поверхности внешнего цилиндра, направленным от непроницаемого дна $z = 0$. При небольших числах Рейнольдса ($\text{Re} < -0.188$) максимальное по абсолютной величине значение продольной скорости достигается на поверхности сжимающегося цилиндра (рис. 8, a ; далее V_r , V_z , V_φ – обезразмеренные на ν/R_1 компоненты скорости при $Z = 1$). С увеличением абсолютного значения числа Рейнольдса максимум осевой скорости

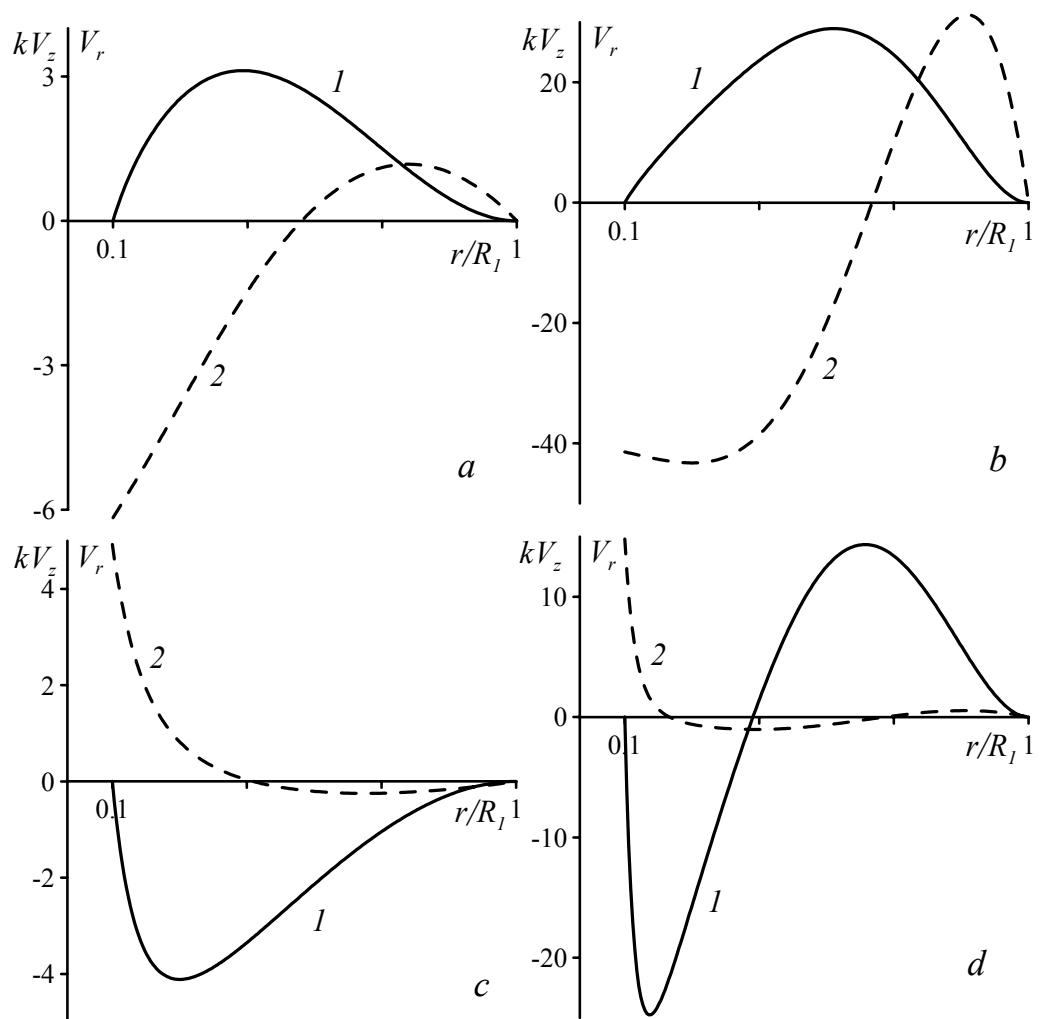


Рис. 8 Профили безразмерных компонент скорости V_r (1) и V_z (2) осесимметричного течения при различных значениях числа Рейнольдса:

$a - \text{Re} = -0.154, k = 4^{-1}$, ветвь B_4 ; $b - \text{Re} = -0.622, k = 3^{-1}$, ветвь B_4 ; $c - \text{Re} = 0.493, k = 20^{-1}$, ветвь B_1 ; $d - \text{Re} = 7.395, k = 10^{-2}$, ветвь B_2

смещается во внутреннюю область потока. Одновременно происходит сужение зоны восходящего течения вблизи недеформируемого цилиндра и интенсификация в ней радиального движения (рис. 8, *b*).

Растягивающийся цилиндр (вытекающая струя, $Re > 0$), увлекая за собой жидкость, заполняющую сосуд, вызывает в ней конвергентное радиальное движение и продольное течение вдоль внешнего цилиндра, направленное к «свободной поверхности» $z = 0$ (рис. 8, *c*).

Более сложную картину стационарного потока дают решения, принадлежащие ветвям B_2 и B_3 . Вблизи боковых поверхностей, ограничивающих область течения, жидкость движется сонаправленно растяжению внутреннего цилиндра. Между этими двумя областями располагается зона противотока, в центре которой происходит смена знака радиальной компоненты скорости (рис. 8, *d*).

Осесимметричная задача об увлечении вязкой жидкости продольно деформируемым цилиндром радиуса R_0 допускает рассмотрение предельного случая, соответствующего бесконечно удалённому внешнему цилиндру $R_1 = \infty$ [15, 172]. Само по себе такое обобщение нетривиально, так как допускается далеко не всеми точными решениями уравнений гидродинамики. Замечательно также и то, что в случае $Re = 8/3$ известно решение данной задачи, выражающееся элементарными функциями:

$$u = 8 \frac{1-x}{1+2x}, \quad u' = -\frac{24}{(1+2x)^2}, \quad g_0 = 0 \quad (3.6)$$

В равенствах (3.6), а также определении x , Z и формулах (3.2) ($v = 0$), радиус R_1 заменён на R_0 .

Нетрудно убедиться в том, что к осесимметричному течению (3.2), (3.6) может быть добавлена, не оказывающая на него влияния, однородная по координате z азимутальная компонента скорости

$$v_{\varphi} = \frac{\nu \Gamma}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{2}{x}} \left(1 - \frac{243}{211} \frac{80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1}{(1+2x)^5} \right) \quad (3.7)$$

В принятой ранее интерпретации точное решение уравнений Навье-Стокса (3.6), (3.7) описывает истечение жидкости из полубесконечного слоя ограниченного «свободной поверхностью» $z = 0$ (рис. 9). Окружная и радиальная компоненты скорости решения (3.6), (3.7) убывают как $1/r$, а вертикальная компонента как $1/r^4$ (рис. 10). Следовательно, на большом удалении от деформируемого цилиндра течение близко к потенциальному вихресток с мощностью, определяемой числом Рейнольдса и произвольной безразмерной циркуляцией Γ . Следует отметить, что хотя на бесконечности жидкость покоится, тем не менее, её осевой момент импульса (циркуляция) при $r = \infty$ отличен от нуля, что и служит источником закрутки потока.

3.1.3 Вращательно-симметричные течения ($v \neq 0$). Анализ зависимостей параметров U_0'' , V_0' , G_0 от числа Рейнольдса показывает, что в исследованном диапазоне безразмерного комплекса Re решение вращательно-симметричной задачи разбивается на семь различных ветвей $B_5 - B_{11}$ (рис. 7, 11). Неоднозначность решения в зависимости от Re имеет место, как при растяжении, так и при сжатии внутреннего цилиндра. В интервале $(Re_1; Re_4) = (2.722; 3.020)$ каждому числу Рейнольдса соответствуют два решения, принадлежащие ветвям B_5 , B_6 . На отрезке $[Re_5; Re_6] = [-1.114; -1.029]$ количество решений, лежащих на ветвях $B_7 - B_9$, варьируется от одного до трёх. Решения, относящиеся к B_{10} и B_{11} , одновременно существуют при $Re > Re_7 = 14.931$.

Ветвь B_5 бифурцирует от решения без закрутки, принадлежащего ветви B_1 , при числе Рейнольдса Re_1 ($U_0'' = -9.701$, $G_0 = -9.468$). В результате

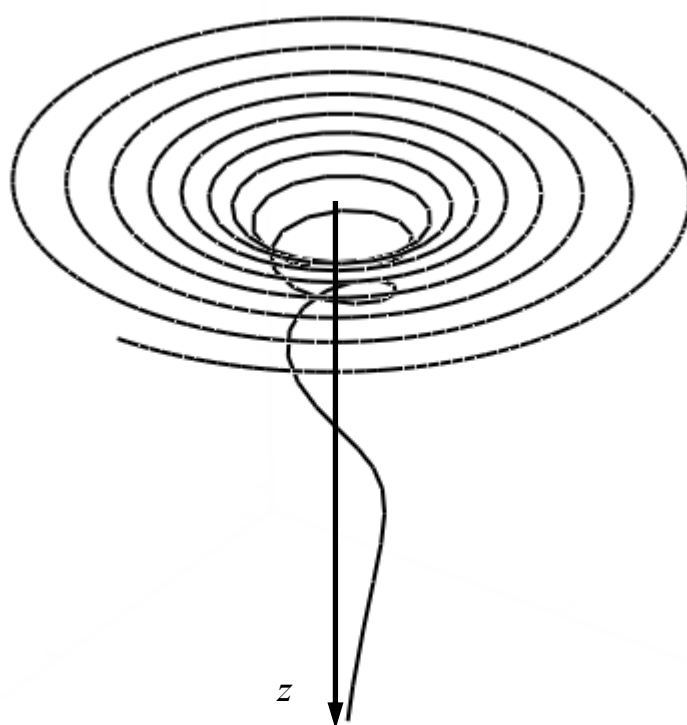


Рис. 9 Траектория одной частицы для течения, описываемого решением (3.6), (3.7) при $\Gamma = 100$

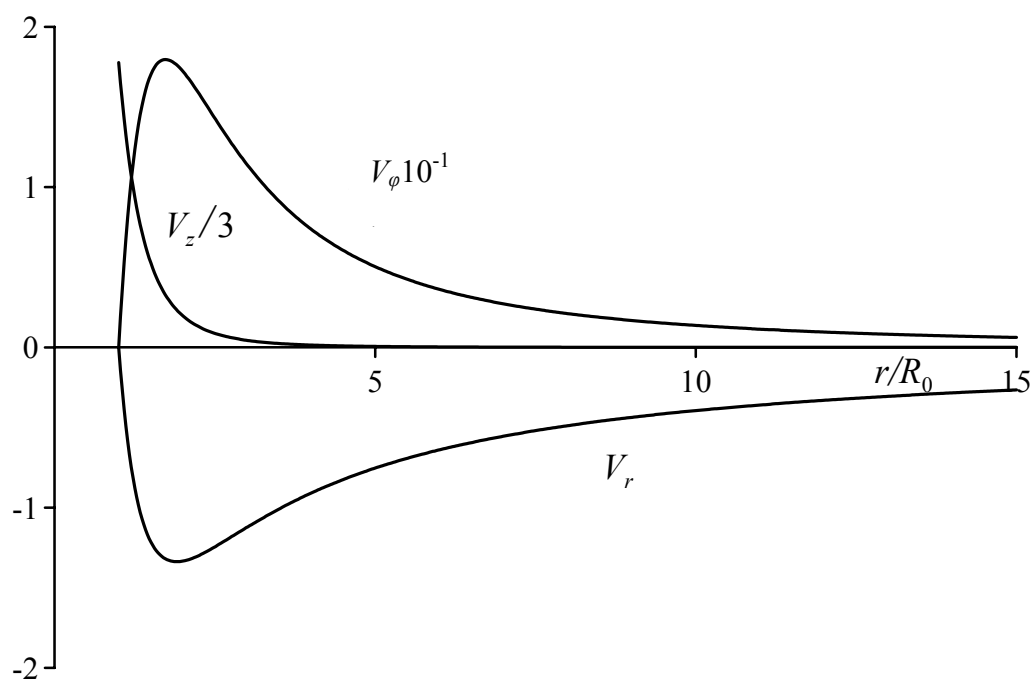


Рис. 10 Безразмерные профили скорости для течения, описываемого решением (3.6), (3.7) при $\Gamma = 100$

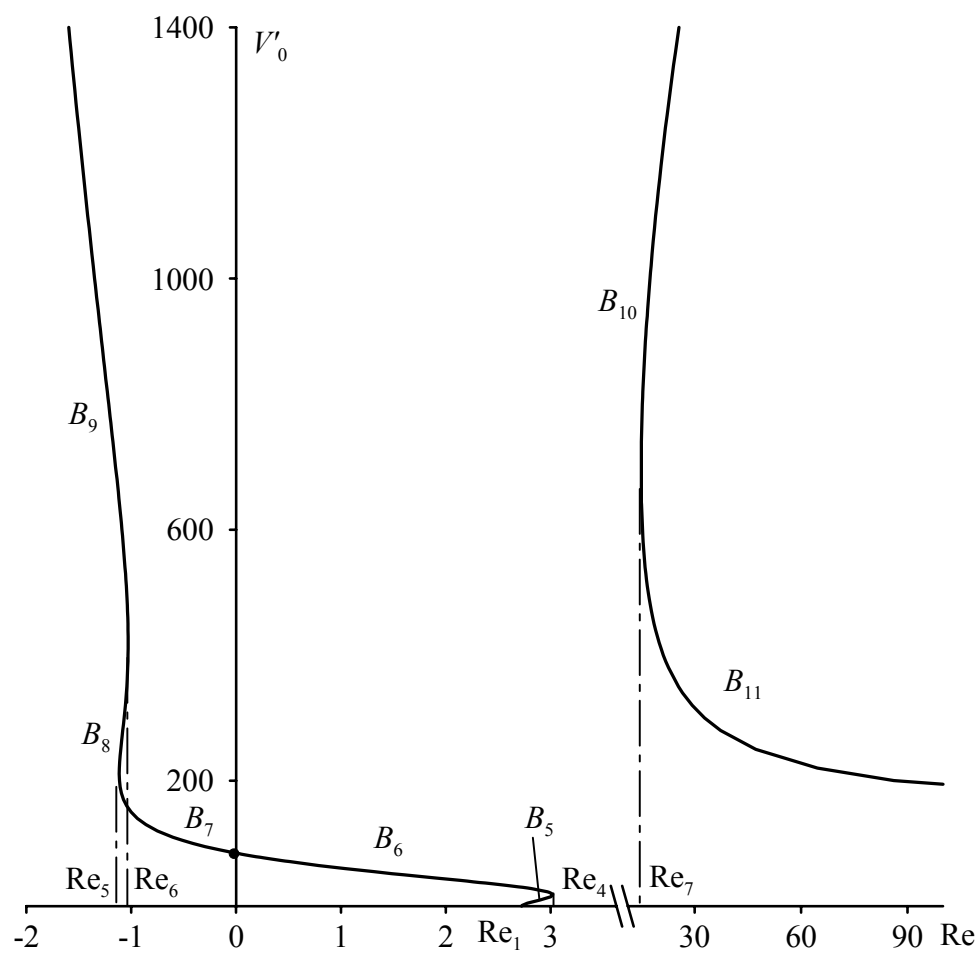


Рис. 11 Зависимость параметра V'_0 от числа Рейнольдса

бифуркации рождаются два решения вращательно-симметричной задачи, отличающихся друг от друга лишь знаком азимутальной составляющей скорости v_φ . В рассматриваемом случае наличие осесимметричной бифуркации вращения не противоречит закону сохранения момента импульса, поскольку речь идёт лишь о сколь угодно близости двух стационарных состояний потока жидкости (с закруткой и без таковой) с частью компонент поля скорости (3.2), неограниченных по осевой координате z . В тоже время последнее обстоятельство указывает на то, что наличие возмущений, обладающих дифференциальной закруткой, является одним из факторов, благоприятствующих «спонтанному» возникновению вращения при истечении жидкости из сосуда.

Ветвь B_6 продолжает B_5 в направлении чисел Рейнольдса меньших Re_4 вплоть до $Re = 0$, при котором вращательно-симметричная задача (3.3), (3.4), обладает нетривиальным решением ($U_0'' = -63.404$, $V_0' = 84.569$, $G_0 = -133.815$), описывающим закрученное течение с нулевым расходом между двумя бесконечными ((3.2) допускает включение в рассмотрение области $z < 0$) твёрдыми цилиндрами (рис. 7; 11; 12, d). В следующем разделе диссертации этот результат используется для построения обобщённого точного решения задачи Куэтта-Пуазейля о течении жидкости под действием неоднородного продольного градиента давления с расходом, зависящим от угловых скоростей вращения цилиндров.

Ветвь $B_7 - B_9$ непрерывно продолжает B_6 в область отрицательных значений числа Рейнольдса, что соответствует задаче о сжатии внутреннего цилиндра (рис. 9).

В диапазоне чисел Рейнольдса от Re_4 до Re_7 решений системы (3.3), (3.4) численно обнаружить не удалось. Это позволяет говорить возможной изолированности ветвей B_{10} , B_{11} и исчезновении вращательно-симметричного решения задачи об увлечении жидкости растягивающимся цилиндром в вышеуказанной области значений числа Рейнольдса.

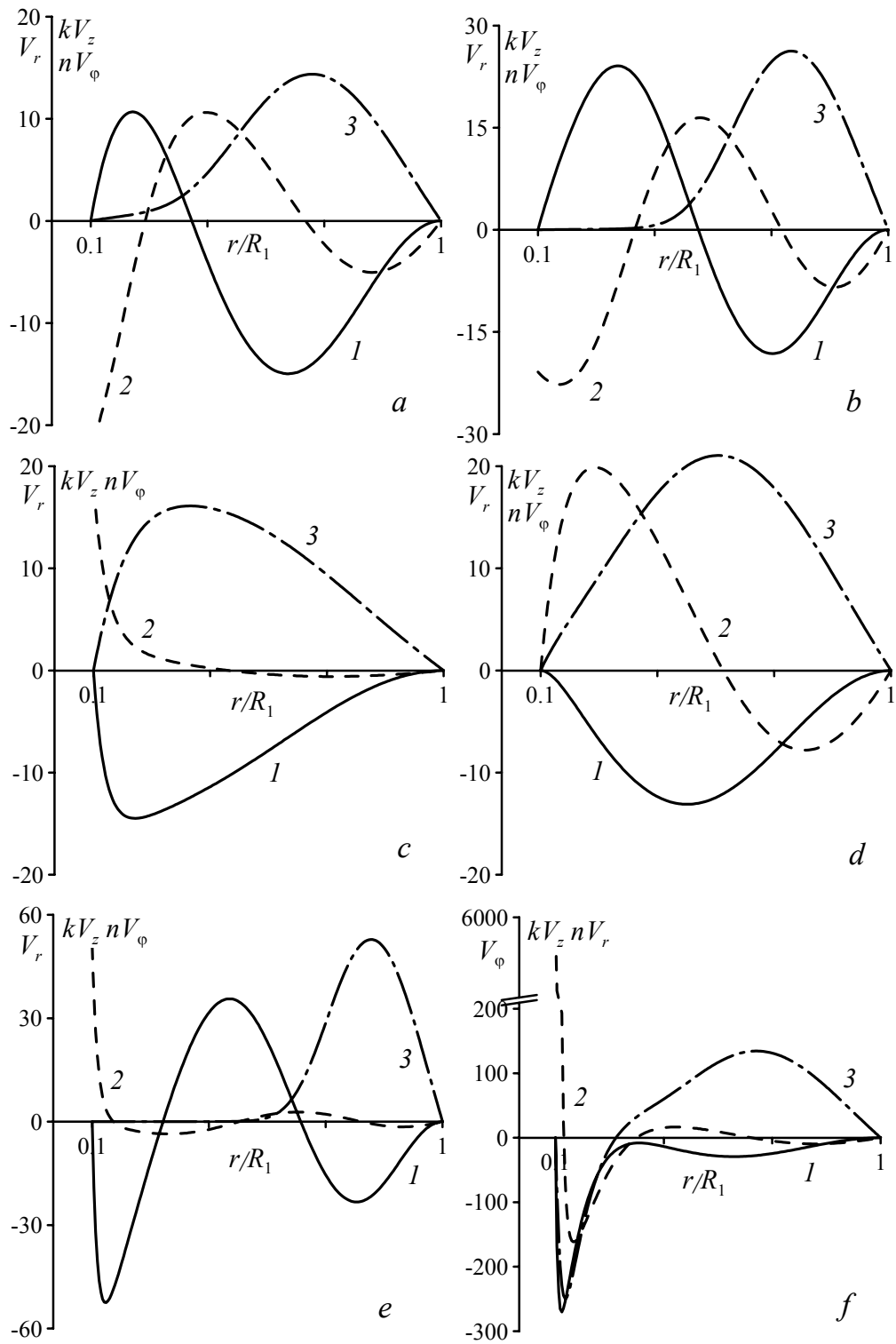


Рис. 12 Профили безразмерных компонент скорости V_r (1), V_z (2), V_ϕ (3) вращательно-симметричного течения при различных значениях числа Рейнольдса: $a - \text{Re} = -1.112$, $k = n = 10^{-1}$, ветвь B_8 ; $b - \text{Re} = -1.044$, $k = n = 10^{-1}$, ветвь B_9 ; $c - \text{Re} = 2.734$, $k = 30^{-1}$, $n = 3^{-1}$, ветвь B_6 ; $d - \text{Re} = 0$, $k = n = 4^{-1}$, ветвь B_6 ; $e - \text{Re} = 25.582$, $k = 10^{-2}$, $n = 10^{-1}$, ветвь B_{10} ; $f - \text{Re} = 136.858$, $k = 5^{-1}$, $n = 2^{-1}$, ветвь B_{11} .

Необходимо отметить, что при этом осесимметричные течения, принадлежащие ветвям $B_1 - B_3$, продолжают существовать (рис. 7).

Характер вращательно-симметричного течения (3.2) – (3.4) в значительной мере складывается под влиянием сил инерции, действием которых, как было установлено выше, невозможно пренебречь даже при сколь угодно малых значениях числа Рейнольдса. Именно силы инерции, вызываемые сдвигом в процессе деформирования цилиндра, определяют вид распределения давления и сил вязкого трения в жидкости.

Сжимающийся цилиндр (втекающая струя, $Re < 0$) увлекает за собой окружающую жидкость, индуцируя, сравнительно слабое (v_r не зависит от Z) радиально расходящееся течение, обеспечивающее перенос осевого кинетического момента на периферию, где под действием градиента давления, уравнивающего центробежную силу, радиальная скорость изменяет своё направление (рис. 12, *a, b*). Такое радиальное движение неизбежно приводит к появлению внутреннего осевого противотока, в то время как у цилиндрических поверхностей, ограничивающих область течения, продольная компонента скорости v_z сонаправлена сжатию внутренней стенки.

При умеренных положительных числах Рейнольдса (ветви B_5, B_6) центробежная сила направлена противоположно радиальному потоку жидкости, увлекаемой растягивающимся цилиндром (вытекающей струей, $Re > 0$), что препятствует переносу момента импульса на периферию. В результате этого, азимутальная скорость вблизи внутреннего цилиндра оказывается заметно больше, чем вблизи внешнего (рис. 12, *c*). С уменьшением скорости растяжения (уменьшение Re) эффект «запирания» радиального потока момента импульса ослабевает, и профили скоростей сглаживаются (рис. 12, *d*).

Решения, принадлежащие ветвям B_{10}, B_9 , дают сложную картину течения, её отличительной особенностью является смена направления

закрутки потока – вблизи внутреннего цилиндра и на периферии жидкость вращается в противоположных направлениях (рис. 12, *e, f*). Это приводит к тому, что течение приобретает характер своеобразной суперпозиции: в периферийной зоне движение качественно схоже с индуцированным сжатием цилиндра (рис. 12, *e, b*), а вблизи внутреннего цилиндра решение аналогично принадлежащим ветвям B_5 , B_6 (рис. 12, *e, c*).

3.2 НОВОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ КУЭТТА-ПУАЗЕЙЛЯ

Исследование течений вязкой жидкости в трубах и каналах является одной из классических проблем гидродинамики, что обусловлено её большим прикладным значением. В ряде случаев удаётся получить точные решения гидродинамических уравнений, описывающие потоки такого рода. Так широко известно точное решение задачи о течении жидкости в цилиндрических трубах под действием постоянного продольного градиента давления, найденное Пуазейлем. Задача об установившемся сдвиговом течении, вызываемом вращением с различными угловыми скоростями коаксиальных цилиндров, решена Куэттом. В данной разделе исследована задача о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости, заключённой между двумя коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается с постоянной угловой скоростью, в присутствии неоднородного продольного градиента давления.

3.2.1 Постановка задачи. Рассмотрим вращательно-симметричное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между бесконечными коаксиальными цилиндрами. Пусть внутренний цилиндр радиуса R_0 вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно собственной оси, а внешний цилиндр радиуса R_1 покоится. Будем также считать известной разность средних давлений в двух поперечных сечениях зазора S_1 и S_2 , отстоящих друг от друга на расстояние h . Требуется определить гидродинамические поля возникающего в этих условиях течения, а также вычислить расход. Будем считать, что ось z цилиндрической системы координат (r, φ, z) совпадает с общей осью цилиндров, а её начало расположено в сечении S_1 .

Движение жидкости подчиняется системе уравнений Навье – Стокса (1.1) дополненной условиями прилипания на цилиндрических границах зазора:

$$r = R_0 : \quad v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = \omega R_0; \quad r = R_1 : \quad v_r = v_z = v_\varphi = 0 \quad (3.8)$$

Согласно постановке задачи помимо граничных условий следует задать разность средних по сечениям S_1 и S_2 давлений:

$$\Delta P = \frac{1}{\pi(R_1^2 - R_0^2)} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} (P(r)_{z=0} - P(r)_{z=h}) r d\varphi dr \quad (3.9)$$

Полагая продольную и окружную компоненты скорости линейными функциями координаты z , вращательно-симметричное стационарное решение задачи (3.8), (3.9) будем искать в виде (1.4) ($\partial(\bullet)/\partial\tau = 0$, $R = R_1$)

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\nu}{R_1} \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \\ v_\varphi &= \frac{\nu}{R_1} \sqrt{\frac{2}{x}} (V(x) + Z v(x)) \\ v_z &= -2 \frac{\nu}{R_1} (W(x) + Z u'(x)) \\ P &= P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R_1^2} (B(x) - 4Z F'(x) - 2Z^2 G(x)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь P_0 – давление на стенке внутреннего цилиндра в сечении S_1 ; $x = (r/R_1)^2$ и $Z = z/R_1$ – новые безразмерные переменные. Штрихом обозначено дифференцирование по x .

Представление гидродинамических полей (3.10) позволяет редуцировать уравнения Навье-Стокса с условиями (3.8), (3.9) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных неизвестных u, v, G, W, V, F

$$\begin{aligned} 2xu''' &= 2G + (u-2)u'' - u'u', & 2xv'' &= uv' - vu' \\ 4x^2G' &= -v^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$x = x_0: u = u' = v = 0, \quad x = 1: u = u' = v = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} 2xW'' &= 2F' + (u-2)W' - u'W, & 2xV'' &= uV' - vW \\ 4x^2F'' &= -vV \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$x = x_0: W = 0, \quad V = \Omega, \quad F = F_0, \quad x = 1: W = V = F = 0 \quad (3.14)$$

$$B = u' - \frac{u^2}{4x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(\frac{V(t)}{t} \right)^2 dt$$

где $x_0 = (R_0/R_1)^2$, а $\Omega = \omega R_0^2 / \sqrt{2}\nu$ – безразмерная компонента осевого момента импульса $\vec{M}_1 = \Omega \vec{z}$ вращающегося цилиндра, играющая роль числа Рейнольдса; \vec{z} – единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси z .

Константа F_0 связана с заданной разностью средних давлений (3.9) в сечениях S_1 и S_2 равенством

$$\Delta P = \frac{8\nu^2}{R_1^2 - R_0^2} H \left(\frac{Hg}{2} - F_0 \right), \quad H = h/R_1, \quad g = \int_{x_0}^1 G(x) dx$$

Ещё раз отметим, что неизвестные u, v, G определяются не содержащей параметров (кроме заданного x_0) изолированной подсистемой (3.11), (2.12), а подчинённая ей краевая задача (3.13), (3.14) линейна

относительно W , V и F . Это позволяет считать движение вязкой жидкости вида (3.10) суперпозицией фонового потока (u, v, G) и индуцированного им, а также вращением внутреннего цилиндра, однородного в осевом направлении течения (W, V, F) .

3.2.2 Классическое решение задачи Куэтта – Пуазейля. В отсутствие фонового потока $(u = 0, v = 0, G = 0)$ решение задачи (3.13), (3.14) совпадает с решением Куэтта – Пуазейля:

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\varphi = \frac{\nu}{R_1} \sqrt{\frac{2}{x}} \Omega V = \frac{\sqrt{2} \nu \Omega}{R_1 \sqrt{x}} \frac{1-x}{1-x_0} \\ v_z &= -2 \frac{\nu}{R_1} W = \frac{(1-x_0) R_1 \Delta P}{4 \nu H} \left(\frac{1-x}{1-x_0} - \frac{\ln x}{\ln x_0} \right) \\ \Delta P &= -\frac{8 \nu^2 H}{R_1^2 - R_0^2} F_0 \\ Q &= \frac{\pi R_1^3 \Delta P}{8 \nu H} (1-x_0^2) \left(1 + \frac{2}{\ln x_0} \frac{1-x_0}{1+x_0} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(Q – объёмный расход жидкости).

Данный режим течения характеризуется нулевым радиальным потоком массы: $v_r = 0$. Вследствие этого полоидальная и азимутальная циркуляции не взаимодействуют. Полоидальная циркуляция полностью определяется продольным градиентом давления, а азимутальная – скоростью вращения внутреннего цилиндра. По той же причине расход, пропорциональный перепаду давления, не зависит от угловой скорости ω .

3.2.3 Новое решение задачи Куэтта – Пуазейля. В разделе 3.1 настоящей диссертации показано, что тривиальное решение нелинейной краевой задачи (3.11), (3.12) не единственно. Система (3.11), (3.12) эквивалентна (3.3), (3.4) при $Re = 0$. Напомним, что это решение описывает вращательно-симметричное течение вязкой жидкости в зазоре

между неподвижными бесконечными цилиндрами с нулевым расходом и нулевым средним (по всему объёму) осевым моментом импульса. Источником этого движения является закрутка жидкости (в соответствии с (3.10)) в равноотстоящих от плоскости S_1 сечениях $z = h_1$, $z = -h_1$. Торсионное вращение среды приводит к появлению в ней радиального продольного градиентов давления (см. первое и третье уравнения (3.11)), индуцирующих течения в соответствующих направлениях.

Численный анализ задачи (3.11), (3.12) показал, что для всех значений геометрического параметра $x_0 = 0.01 \div 0.90$ знак функции v сохраняется. Это означает, что направление безразмерного вектора осевого момента импульса фонового течения $\vec{M}_2 = v Z \vec{z}$ во всех точках выбранного нормального сечения зазора $Z = const$ не меняется. Функция $u \leq 0$ также не меняет знак (рис. 12, d).

В силу линейности задачи (3.13), (3.14) зависимость её решения от входящих в граничные условия параметров F_0 , Ω также должна быть линейной. В этом легко убедиться, выполнив замену

$$\begin{aligned} W &= \Omega W_1 - \frac{F_0}{g} u' \\ V &= \Omega V_1 - \frac{F_0}{g} v \\ F &= \Omega F_1 + \frac{F_0}{g} \int_x^1 G(s) ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

где новые неизвестные W_1 , V_1 , F_1 удовлетворяют уравнениям (3.13) с не содержащими параметры граничными условиями

$$x = x_0: \quad W_1 = F_1 = 0, \quad V_1 = 1; \quad x = 1: \quad W_1 = V_1 = F_1 = 0 \quad (3.17)$$

В соответствии с (3.16) имеет место линейная зависимость продольной и окружной компонент скорости (3.10) от заданного среднего перепада давления ΔP и безразмерного осевого момента импульса вращающегося цилиндра Ω .

Графики функций W_1 , V_1 , F_1' ($x_0 = 0,01$, $W_1'(x_0) = -26,286$, $V_1'(x_0) = -12,658$, $F_1'(x_0) = 22,976$) приведены на рис. 13.

Важной характеристикой течений в трубах и каналах является расход. Из (3.10) с учётом краевых условий и (3.16) находим

$$Q = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} v_z r d\varphi dr = 2\pi v R_1 \Omega q, \quad q = - \int_{x_0}^1 W_1 dx. \quad (3.18)$$

В течении Куэтта–Пуазейля (3.15) жидкость движется вдоль канала в направлении падения давления с расходом, пропорциональным $\Delta P/H$. Анализ формулы (3.18) приводит к иному выводу: расход пропорционален угловой скорости вращения внутреннего цилиндра и не зависит от перепада давления, а также от относительной длины участка зазора H , к которому эта разность давлений приложена.

Столь необычное поведение потока обусловлено наличием в нём фонового течения специального вида (3.11), (3.12), нарушающего монотонность продольного распределения давления. Это течение в совокупности с движением, индуцируемым вращением внутреннего цилиндра, формирует самосогласованное поле сил инерции, в качестве одной из характеристик которого целесообразно ввести вектор

$$\vec{J} = \vec{z} \frac{\partial I}{\partial Z} = \Omega v \vec{z}$$

с потенциалом I равным скалярному произведению осевых моментов импульса вращающегося цилиндра и фонового течения $(\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2) = \Omega v Z$.

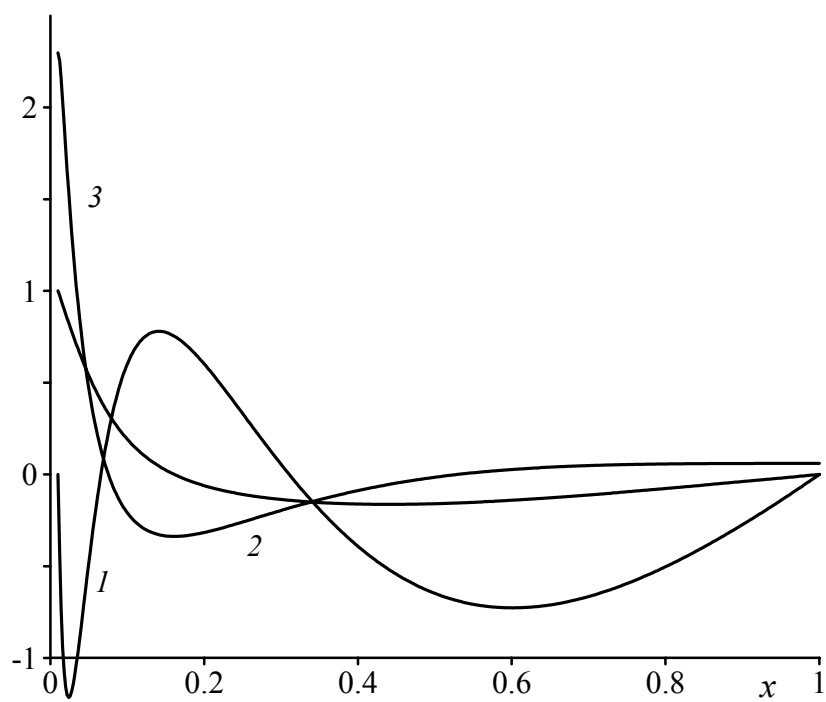


Рис. 13 Графики функций $1 - W_1(x) \cdot 10$; $2 - V_1(x)$; $3 - F_1'(x) \cdot 10^{-1}$. $x_0 = 0.01$

Нетрудно убедиться в том, что направление вектора среднего потока жидкости $\vec{j} = Q\vec{z}$ однозначно определяется полем \vec{J} . Для этого достаточно вспомнить, что система (3.11) – (3.13), (3.17) допускает преобразование неизвестных u, v, G, W, V, F и соответствующее ему преобразование векторов (1.8)

$$\begin{aligned} v \rightarrow -v: \quad u \rightarrow u, \quad G \rightarrow G, \quad W_1 \rightarrow -W_1, \quad V_1 \rightarrow V_1, \quad F_1 \rightarrow -F_1 \\ \vec{J} \rightarrow -\vec{J}: \quad \vec{j} \rightarrow -\vec{j}, \quad \vec{M}_1 \rightarrow -\vec{M}_1. \end{aligned}$$

Учитывая также результаты численного исследования задачи (3.11) – (3.13), (3.17) (рис. 14), согласно которым при $v \geq 0$ ($v \leq 0$) постоянная q положительна (отрицательна) во всём диапазоне значений геометрического параметра x_0 , можно сделать вывод, что векторы \vec{j} и \vec{J} сонаправлены. Таким образом, средний перенос массы в течении (3.10) происходит в направлении увеличения потенциала I (как функции Z), то есть в ту часть канала, где его внутренняя стенка и фоновый поток вращаются в одном направлении ($\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2 = I > 0$).

Линиями тока классического течения Куэтта-Пуазейля (3.15) являются цилиндрическими спиралями с постоянным шагом. Течение типа (3.10) обладает гораздо более сложной пространственной структурой. На рис. 15 и 16 представлены качественные картины изолиний безразмерных функции тока Ψ и величины осевого момента импульса M течения (3.10), определённых как

$$\Psi = \frac{\psi}{\nu R_1} = \Omega \int_{x_0}^x W_1 ds + \left(Z - \frac{F_0}{g} \right) u, \quad M = \frac{rv_\varphi}{\sqrt{2}\nu} = \Omega V_1 + \left(Z - \frac{F_0}{g} \right) v$$

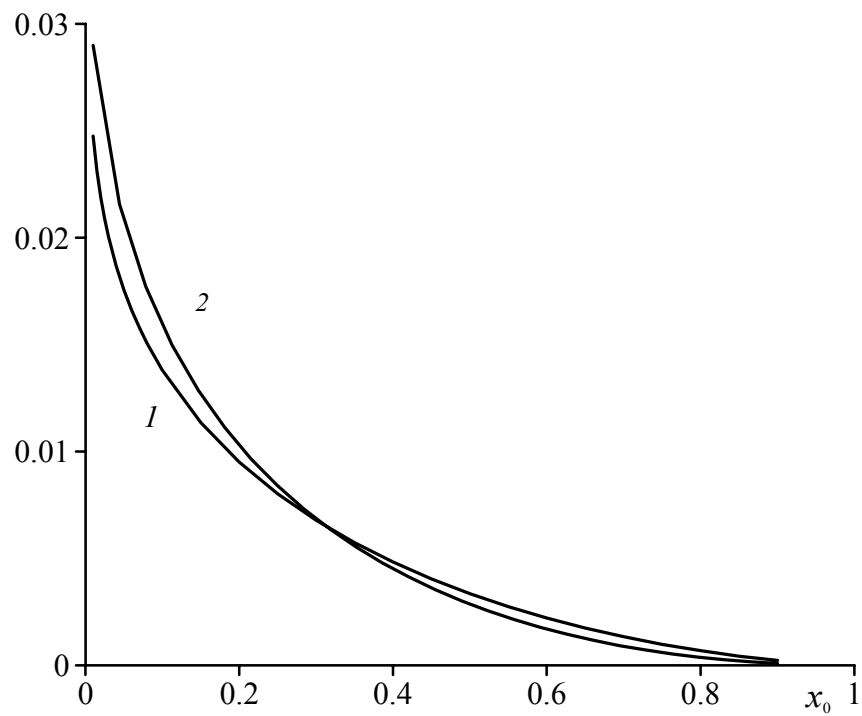


Рис. 14 Зависимость безразмерного расхода от отношения квадратов радиусов внутреннего и внешнего цилиндров x_0 . 1 - для течения (3.10), $q = Q/(2\pi R_1 \Omega)$; 2 - для течения Куэтта–Пуазейля (3.15), $-Q/(20\pi R_1 F_0)$.

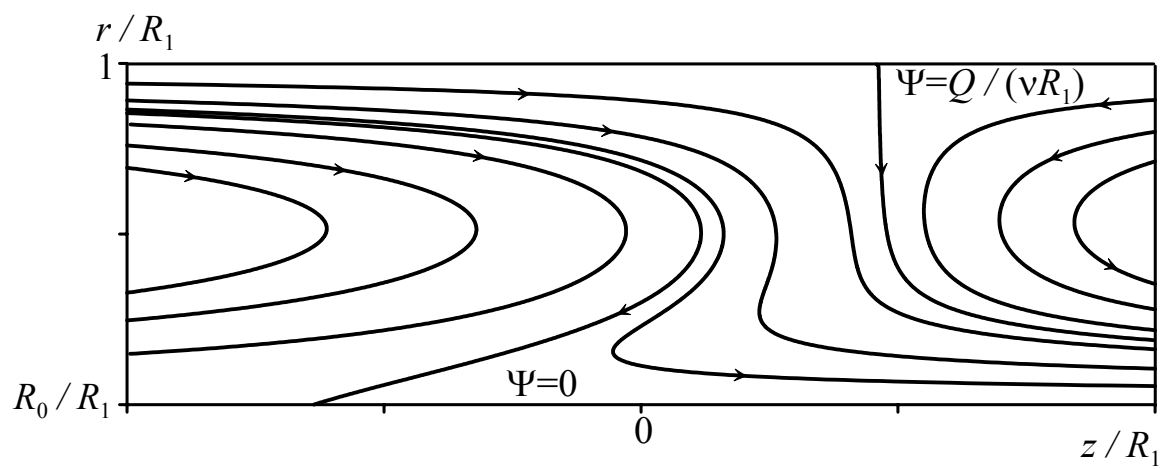


Рис. 15 Картина изолинии безразмерной функции тока Ψ . $x_0 = 0.01$,
 $\Omega = 100$, $F_0 = 1$

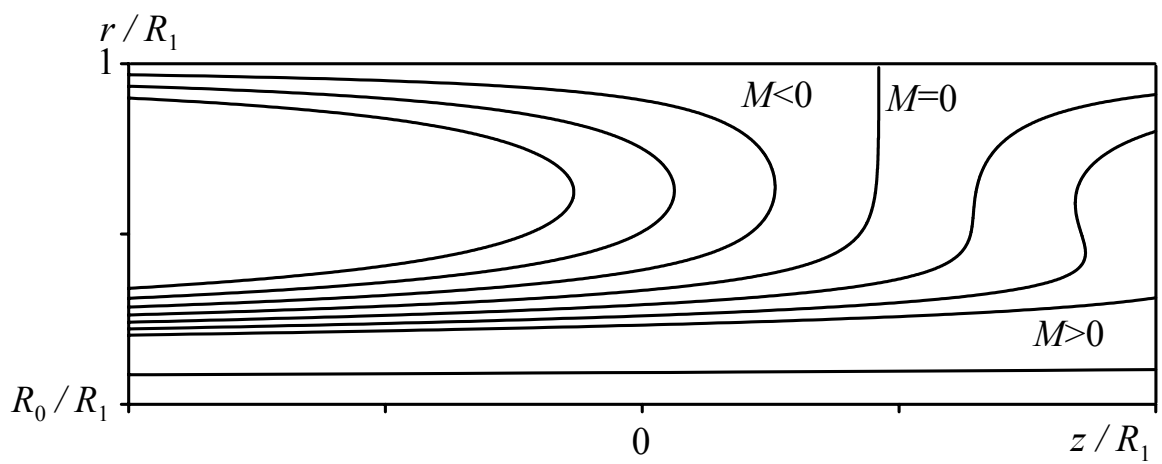


Рис. 16 Картина изолинии безразмерного осевого момента импульса M .
 $x_0 = 0.01$, $\Omega = 100$, $F_0 = 1$

Полоидальное течение, представленное на рис. 15 ($v \geq 0$, $\Omega > 0$), условно можно разделить на три области: проточная зона, расположенная между изолиниями $\Psi = 0$ и $\Psi = Q/\nu R_1$, и две рециркуляционные зоны, $\Psi < 0$ и $\Psi > Q/\nu R_1$. В проточной области, при отрицательных z , жидкость движется вдоль внешнего цилиндра (рис. 15), вращаясь в сторону противоположную вращению внутреннего цилиндра (рис. 16). В окрестности сечения $z = 0$ поток, изменяя направление закрутки, перемещается к внутренней стенке зазора и течёт вдоль неё, почти твердотельно вращаясь. Поскольку $u \leq 0$, во всей области течения жидкие частицы движутся по направлению к внутреннему цилиндру – вращающаяся стенка зазора подсасывает к себе жидкость.

Обратим внимание на то, что при x близких к единице функции G и F' остаются почти постоянными. Поэтому вблизи твёрдой внешней стенки давление слабо меняется в радиальном направлении, что указывает на наличие пограничного слоя. В результате столкновения потоков проточной зоны и рециркуляционного течения $\Psi > Q/\nu R_1$ происходит отрыв пограничного слоя от внешней твёрдой стенки в точке ответвления от последней изолинии $\Psi = Q/\nu R_1$. Отрыв потока происходит и на вращающемся цилиндре (изолиния $\Psi = 0$). Он сопровождается возникновением возвратного течения в проточной области (рис. 15).

3.3 УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ РЕЖИМОВ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТАКАНЕ

В работе С.Н. Аристова [9] описано вращательно-симметричное стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости внутри цилиндра круглого поперечного сечения. В [9] обнаружены три режима движения: незакрученный режим, одноячеистый и двухячеистый закрученные режимы. Наибольший интерес представляют два последних типа течений, поскольку они демонстрируют пример самоиндуцированных вязких вихрей.

Данный раздел посвящён исследованию поведения возмущений, некоторого специального вида, эволюционирующих на фоне вязкого цилиндрического вихря (название заимствовано из работы [9]), при одно – и двухячеистом закрученных режимах. Вид возмущений выбран таким образом, что бы иметь возможность, не прибегая к обычному в таких случаях предположению о малости амплитуд, редуцировать полную систему уравнений гидродинамики к одномерной линейной системе для нестационарных возмущений.

3.3.1 Основное течение. Приведём некоторые результаты работы [9] необходимые для дальнейшего изложения.

Рассматривается установившееся осесимметричное течение вязкой жидкости внутри круглого бесконечного цилиндра радиуса R с непроницаемым дном $z = 0$. На боковой поверхности цилиндра выполняются условия прилипания. Три компоненты скорости и отнесённое к постоянной плотности давление, в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , представляются в виде

$$\begin{aligned}
v_r^{(0)} &= \frac{\nu}{R} \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \\
v_\varphi^{(0)} &= \frac{\nu}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} Z v(x) \\
v_z^{(0)} &= -2 \frac{\nu}{R} Z \frac{du(x)}{dx} \\
P^{(0)} &= P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R^2} (B_0(x) - 2Z^2 G(x))
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $x = (r/R)^2$, $Z = z/R$ – безразмерные квадрат радиуса и продольная координата; $P_0 = \text{const}$; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Представление (3.19) позволяет редуцировать полную систему уравнений Навье-Стокса к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для новых безразмерных неизвестных $u(x)$, $v(x)$, $G(x)$

$$\begin{aligned}
2xu''' &= 2G + (u - 2)u'' - u'u' \\
2xv'' &= u v' - v u' \\
4xG' &= -v^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по переменной x .

В качестве граничных условий в работе [9], приняты условия прилипания к твёрдой поверхности, ограничивающего область течения, цилиндра, а также регулярности и аналитичности всех гидродинамических полей на оси симметрии потока $r = 0$ [27], что даёт возможность дополнить (3.20) следующими граничными условиями

$$x = 0: \quad u = v = 0, \quad u'' = G - \frac{u'u'}{2} \tag{3.21}$$

$$x=1: \quad u=u'=v=0$$

Однородная по переменной Z часть давления находится после интегрирования задачи (3.20), (3.21) по формуле

$$B=u'-\frac{u^2}{4x}.$$

В рассмотрение, в принципе, можно включить и область $z < 0$. При этом будут выполнены следующие условия симметрии течения: радиальная компонента скорости и давление являются симметричными функциями координаты z , а окружная и продольная составляющие поля скоростей

$$\text{антисимметричны} \quad (v_{\varphi}^{(0)}(x, -Z) = -v_{\varphi}^{(0)}(x, Z),$$

$$v_z^{(0)}(x, -Z) = -v_z^{(0)}(x, Z)) \text{ относительно среднего сечения цилиндра, } z=0.$$

Вследствие перечисленных свойств симметрии гидродинамических полей (3.19) и принятых граничных условий, среднее значение момента импульса и расход жидкости, данного течения, равны нулю.

Краевая задача (3.20), (3.21) интегрировалась численно с использованием метода Рунге-Кутты. Для этого формулировалась эквивалентная задача Коши с начальными условиями

$$x=0: \quad u=v=0, \quad u''=G-\frac{u'u'}{2}, \quad u'=\alpha, \quad v'=\beta, \quad G=\gamma \quad (3.22)$$

содержащими три параметра α , β , γ . Значения этих параметров выбирались таким образом, что бы удовлетворить граничным условиям на правом конце интервала интегрирования

$$x=1: \quad u(\alpha, \beta, \gamma)=u'(\alpha, \beta, \gamma)=v(\alpha, \beta, \gamma)=0$$

Система (3.20), (3.21) представляет собой краевую задачу для однородной системы шестого порядка с шестью однородными граничными условиями. В силу этого, задача (3.20), (3.21) обладает тривиальным нулевым решением, а нетривиальное решение может существовать только для отдельных значений параметров из набора α , β , γ . Иными словами, отличное от нуля решение краевой задачи (3.20), (3.21) может существовать лишь для отдельных значений числа Рейнольдса. В качестве последнего можно принять безразмерный параметр α , пропорциональный продольной скорости на оси симметрии течения. Как упоминалось выше, в [9] описаны три режима течения, приведём соответствующие им значения параметров α , β , γ начальной задачи:

- 1) одначеистый режим с закруткой: $\alpha = -47.756$, $\beta = 136.720$, $\gamma = 1342.790$;
- 2) двухачеистый режим с закруткой: $\alpha = 121.502$, $\beta = 22.089$, $\gamma = 1891.179$;
- 3) незакрученный режим: $\alpha = 17.657$, $\beta = 0$, $\gamma = 43.581$.

Графики функций $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$ и $G(x)$ представлены на рис. 17 и 18. Подробный анализ результатов и описание картины течения можно найти в цитируемой здесь оригинальной статье С.Н. Аристова.

3.3.2 Возмущения конечной амплитуды. Рассмотрим неустановившееся течение представляющее собой суперпозицию вязкого цилиндрического вихря (3.19) и нестационарных возмущений имеющих, вообще говоря, конечные амплитуды

$$v_r = v_r^{(0)}, v_\varphi = v_\varphi^{(0)} + v_\varphi^*, v_z = v_z^{(0)} + v_z^*, P = P^{(0)} + P^*$$

Нетрудно убедиться в том, что если возмущения представлены в виде, допускаемом классом точных решений (1.4),

$$\begin{aligned}
v_r^* &= 0 \\
v_\varphi^* &= \frac{\nu}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} V(\tau, x) \\
v_z^* &= -2 \frac{\nu}{R} W(\tau, x)
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

$$P^* = P_* + 2 \frac{\nu^2}{R^2} (B_*(\tau, x) - 4ZF(\tau, x))$$

то безразмерные функции W , V , F и B_* удовлетворяют системе однородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных ($P_* = \text{const}$)

$$\begin{aligned}
W_\tau + 2F + uW' - u'W - 2(xW')', \\
V_\tau + uV' - vW - 2xV'', \\
4x^2 F' = -vV, \\
B_* = \int_0^x \frac{V(s)^2}{2s^2} ds.
\end{aligned}
\tag{3.24}$$

Индекс τ обозначает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = 2\nu t/R^2$, а штрихи, как и ранее, производные по пространственной переменной x .

Подчеркнём, что система (3.24) является точным следствием полных уравнений Навье-Стокса. Достичь этого удалось выбором вида возмущений (3.23). С этим связано одно важное отличие рассматриваемого здесь случая от общего подхода, применяемого при анализе устойчивости течений. Неявно подразумевается, что появившиеся в потоке возмущения, в том числе и малые, способны разрушить основное течение, после чего на месте последнего (за счёт его энергии) возникает новое стационарное или неустановившееся движение. В данном случае это не так.

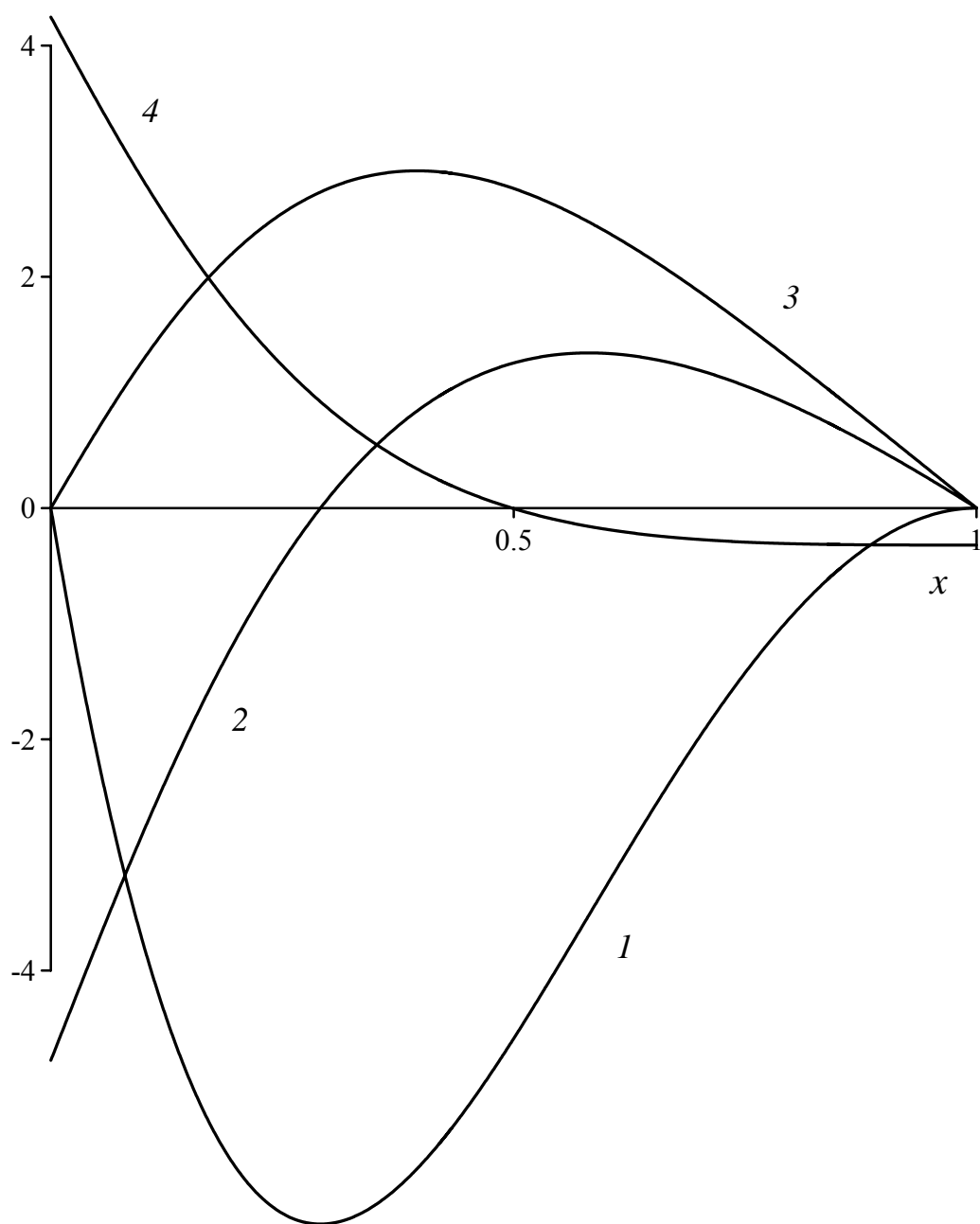


Рис. 17 Графики решения для одноячеистого вращательно-симметричного режима: $1 - u(x)$; $2 - u'(x) \cdot 10^{-1}$; $3 - v(x) \cdot 10^{-1}$; $4 - G(x) \cdot 10^{-2.5}$

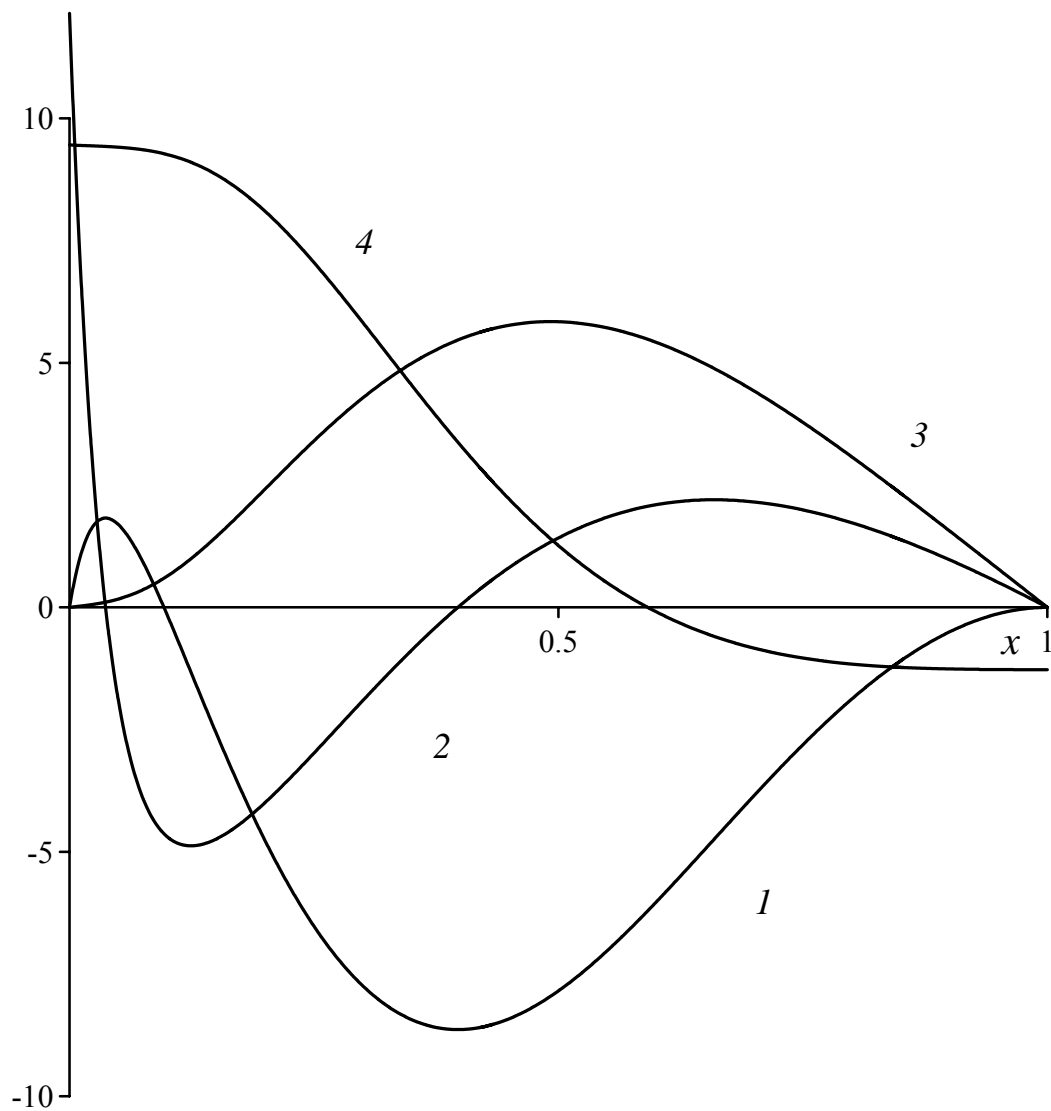


Рис. 18 Графики решения для двухячеистого вращательно-симметричного режима: $1 - u(x)$; $2 - u'(x) \cdot 10^{-1}$; $3 - v(x) \cdot 10^{-1}$; $4 - G(x)/200$

Возмущения типа (3.23) не способны уничтожить основное течение, поскольку они не зависят от продольной координаты z . Поэтому следует говорить не о потере устойчивости движения (3.19), в описанном выше смысле, а о том, что на его фоне развивается нестационарное течение, обладающее собственной энергией. Исходное же течение играет роль организующего фактора (а не источника энергии), определяющего структуру вновь возникающего потока.

Явление самоорганизации давно известно в гидродинамике и при этом остаётся мало изученным, в связи с этим несомненный интерес представляет изучение механизмов его вызывающих. В этом смысле вязкий цилиндрический вихрь является важным примером организующего воздействия. Представляя собой сравнительно слабое (скорость пропорциональна вязкости) и «незаметное» с интегральной точки зрения движение (средний момент и расход равны нулю), течение (3.19) является необходимым для поддержания вторичного потока (3.23).

В полной постановке, система уравнений (3.24) должна быть дополнена краевыми условиями, заключающимися в требование регулярности всех полей на оси симметрии $x = 0$, требовании прилипания жидкости к стенкам цилиндра, а также условием замкнутости течения, то есть нулевого расхода. Кроме того, должны быть сформулированы начальные условия. Здесь мы ограничимся лишь исследованием отдельных частных решений, как это обычно делается при линейном анализе устойчивости.

Частные решения системы (3.24) ищутся в виде

$$\{W, V, F\} = \left\{ \frac{\partial W_*(x)}{\partial x}, V_*(x), F_*(x) \right\} \exp(-\lambda \tau) \quad (3.25)$$

Декремент λ в общем случае является комплексной величиной (разумеется, имеет смысл лишь действительная часть выражения (3.25)).

Амплитудные уравнения записываются как

$$\begin{aligned} 2xW_*''' &= 2F_* + (u - 2)W_*'' - (u' + \lambda)W_*' \\ 2xV_*'' &= uV_*' - vW_*' - \lambda V_* \\ 4x^2F_*' &= -vV_* \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из требования замкнутости течения (нулевого расхода) получаем

$$Q = \int_0^R v_z r d\varphi dr = -2\pi \nu R \int_0^1 W(x) dx = -2\pi \nu R (W_*(1) - W_*(0)) e^{-\lambda \tau} = 0$$

это эквивалентно тому, что $W_*(0) = W_*(1)$, но поскольку (3.35) определяет амплитуду W_* с точностью до произвольной комплексной постоянной, не ограничивая общности можно считать, что $W_*(0) = W_*(1) = 0$. Ещё одно ограничение можно получить как следствие линейности и однородности (3.26) и краевых условий к ней. В силу этого любое решение находится с точностью до постоянного действительного множителя, что позволяет требовать, например, $\text{Real}(W_*'(0)) = 1$ – условие нормировки. В результате имеем

$$\begin{aligned} x=0: W_* = V_* = 0, \text{Real}(W_*'(0)) &= 1, \quad W_*'' = F_* - \frac{u' + \lambda}{2} W_*', \\ x=1: W_* = V_* = W_*' &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Система (3.26), (3.27) – задача на собственные функции и собственные значения, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ (истинный декремент - $2\nu\lambda/R^2$). Возмущения, возникшие на фоне цилиндрического вихря затухают со временем, если действительная часть декремента, положительна и нарастают – при отрицательных λ_r . Нулевым значениям собственных чисел (или их

действительных частей) отвечают стационарные (или периодические во времени) нейтральные возмущения.

Нетрудно убедиться в том, что нейтральным стационарным возмущением ($\lambda = 0$), разделяющим область нарастающих и убывающих мод служит решение

$$W_* = C u, \quad V_* = C v, \quad F_* = C G, \quad C = \text{const}. \quad (3.28)$$

Смысл этого критического движения заключается в параллельном переносе основного течения (3.19) вдоль продольной оси на расстояние C или, что то же самое, в произволе выбора начала системы координат на оси z .

3.3.3 Интегральные соотношения для монотонных возмущений.

Пусть мнимая часть декремента, а вместе с ней и амплитуд, равна нулю. В этом случае все возможные возмущения ведут себя монотонно, экспоненциально быстро нарастая или затухая со временем.

Для отыскания спектра монотонных возмущений можно, так же, воспользоваться принципом минимума. После исключения, при помощи дифференцирования, из (3.26) функции F_* , умножим первое уравнение этой системы на $x^n W'_*$, а второе на $x^n V_*$. Результирующие выражения сложим и проинтегрируем по переменной x от нуля до единицы. Приняв $n > 0$ и учитывая граничные условия (3.27), получим интегральное тождество

$$\lambda K + N = M$$

$$K = \int_0^1 x^n ((n+2)x W'_* W'_* + V_*^2) dx > 0 \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^1 x^n \left((n+2)(2(n+1)^2 + (n+1)u + 2xu') - x^2 u'' \right) W_*' W_*' dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 x^{n-1} (xu' + nu + 2n(n+1)) V_*^2 dx + 2(W_*'')_{x=1}^2 > 0 \\
M &= 2 \int_0^1 x^{n+1} (x(u + 5 + 3n) W_*'' W_*'' + V_*' V_*') dx > 0
\end{aligned}$$

Положительности интегралов N и M можно добиться выбором показателя n . Это возможно, поскольку функция $u(x)$ и её производные ограничены и степени n в свободных членах выше, чем степени этой постоянной в сомножителях u . Нетрудно показать (проще всего это сделать графически), что для одно – и двухъячеистого режимов вязкого цилиндрического вихря можно принять $n = 9$.

В силу выше изложенного, имеют место, следующие неравенства

$$-\frac{N}{K} \leq \lambda \leq \frac{M}{K} \quad (3.30)$$

указывают на дискретность спектра λ (декременты можно упорядочить по возрастанию). В силу (3.29) и (3.30) λ можно искать как минимум функционала $(M - N)/K$.

3.3.4 Метод решения спектральной задачи. Краевая задача для системы шестого порядка (3.26) с семью граничными условиями (3.27), очевидно, разрешима не при всех значениях параметра λ . Более того, как указывалось выше, следует ожидать дискретности спектра собственных значений. Данное обстоятельство создаёт определённые трудности при численном интегрировании подобного рода систем. Для их преодоления разработан ряд алгоритмов [18, 19], например, метод пошагового интегрирования с ортогонализацией или дифференциальной прогонки. В

данном случае предлагается подход, заключающийся во временном отказе от части граничных условий.

Для системы дифференциальных уравнений (3.26) формулируется задача Коши с начальными условиями

$$x=0: W_* = V_* = 0, W'_* = 1, W''_* = F_* - \frac{u' + \lambda}{2} W'_*, V'_* = a, F_* = b \quad (3.31)$$

содержащими два параметра a и b . Зафиксировав λ подбором этих параметров (используя, например, метод секущих Ньютона) можно добиться выполнения двух краевых условий прилипания (3.27) на правом конце отрезка интегрирования: $V_*(1) = W'_*(1) = 0$. Возможность этого можно проиллюстрировать соображениями физического плана. Оставшееся условие, $W_*(1) = 0$, связано с требованием нулевого расхода возмущённого течения. Отказ от данного требования значительно расширяет спектр возможных возмущений, делая его непрерывным (или кусочно-непрерывным). Действительно. Поступающая в цилиндр дополнительная масса жидкости обеспечивает непрерывный перенос по потоку новых возмущений различного вида, удовлетворяющих, разумеется, условиям прилипания ($V_*(1) = W'_*(1) = 0$). Данное обстоятельство и порождает непрерывный спектр, внутри которого содержатся моды с нулевым расходом. Их отыскание заключается в нахождении нулей безразмерной функции (коэффициент расхода)

$$q(\lambda) \equiv \frac{Q e^{\lambda \tau}}{-2\pi \nu R} = W_*(1)$$

Таким образом, уравнение $q(\lambda) = 0$ – дисперсионное соотношение.

Проблема численного построения дисперсионной кривой облегчается тем, что одна из её точек известна - $\lambda = 0$ (см. (3.28)). Двигаясь от этой

точки по декременту можно построить $q(\lambda)$ в широком диапазоне значений аргумента и найти её нули.

3.3.5 Устойчивость одноячейного режима течения жидкости в цилиндрическом стакане. На рис. 19, 20 изображены графики коэффициента расхода $q(\lambda)$ в ограниченном диапазоне положительных и отрицательных значениях аргумента для одноячейного режима вязкого цилиндрического вихря. Как предполагалось ранее, спектр собственных значений, в задаче с ненулевым расходом, является кусочно-непрерывным. Решение существует для любого расхода, но не для всех значений параметра λ , так как функция $q(\lambda)$ имеет разрывы второго рода (см. рис. 19 и 20). Как явствует из рисунков, кривая $q(\lambda)$ не пересекается с осью λ в области отрицательных значений этой величины. Следовательно, все монотонные возмущения вида (3.23), возникающие на фоне одноячейного основного течения, затухают со временем. Нижней границей спектра декрементов, в данном случае, является $\lambda = 0$. В таблице 1 приведены первые значения λ и соответствующих параметров начальной задачи (3.26), (3.31) a и b эквивалентной (3.26), (3.27).

Формы нестационарных возмущений, отвечающие первым двум положительным декрементам, представлены на рис. 21. Функции W'_* , V_* и F_* немонотонны. Количество точек экстремума увеличивается вместе с ростом номера собственного числа λ . Глобальные экстремумы этих функций находятся в области прилегающей к оси течения.

Заметим, что выбранный здесь способ отыскания действительных собственных значений задачи (3.26), (3.27), связанный с временным отказом от условия замкнутости потока, позволил показать неустойчивость течения в трубе (не в стакане) относительно конечноамплитудных возмущений вида (3.23) с ненулевым расходом.

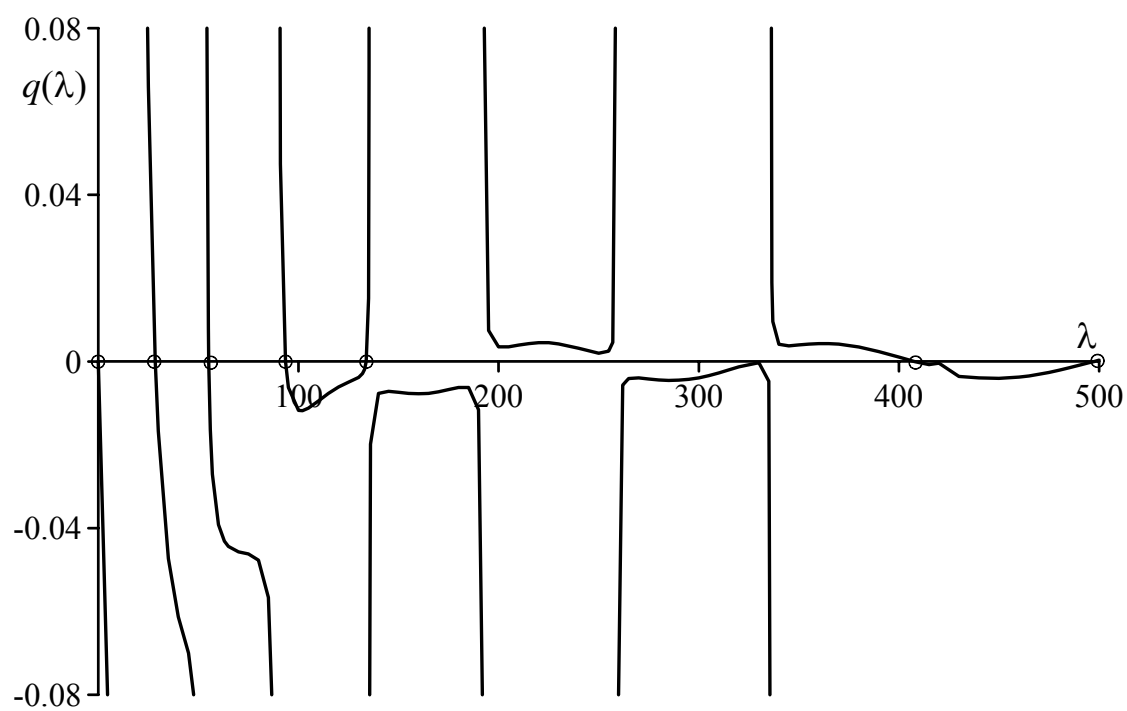


Рис. 19 Зависимость коэффициента расхода от положительных значений декремента λ для одноячейного основного режима течения

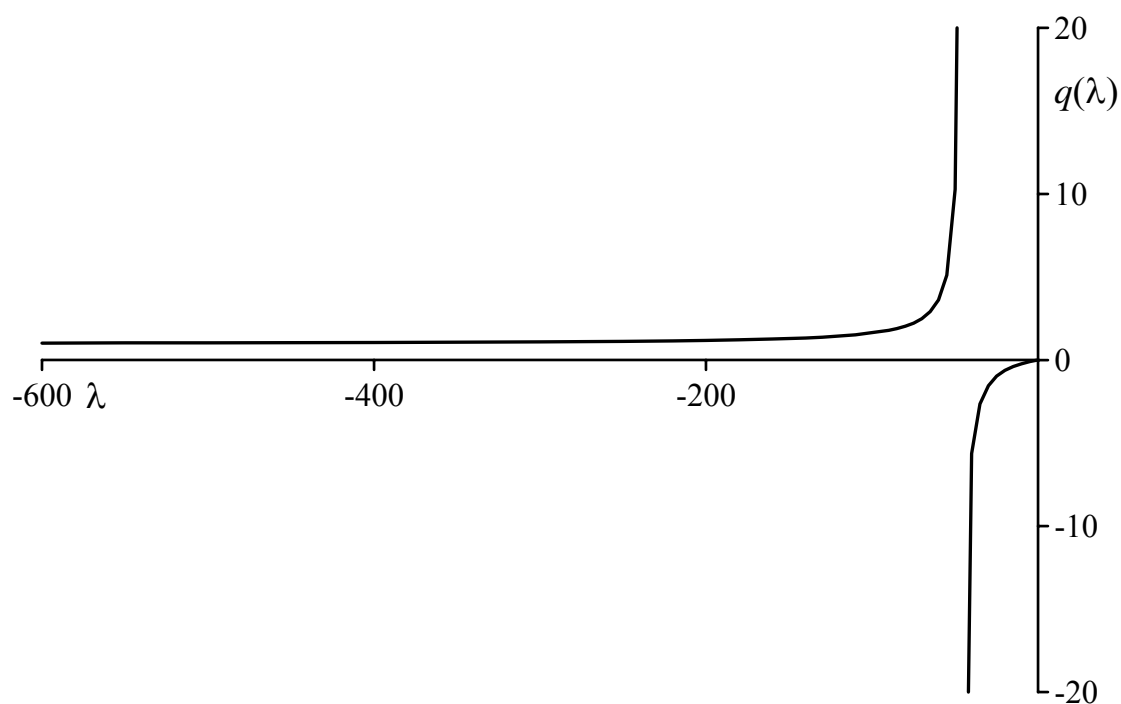


Рис. 20 Зависимость коэффициента расхода от отрицательных значений декремента λ для одноячейного основного режима течения

Таблица 1

Основное течение	λ	a	b
Одноячейное	28,4442	-11,9352	-27,1526
	55,2310	-28,8654	-33,3980
	93,5298	-29,2011	-22,0387
	133,8452	113,0913	55,7329
	407,7215	29,9158	4,9510
	497,5542	24,0639	3,3719
	518,2064	336,5396	44,5422
Двухячейное	-60,5504	0,0981	0,2411
	39,4277	2,3034	19,1275
	62,3089	31,0002	38,7676
	96,4060	-22,0194	-3,5314
	122,1185	14,1030	-4,5125
	144,2553	82,9446	-9,1953
	196,7538	6,5875	-2,3601
	268,8722	563,6424	33,5594
	301,9636	19,8046	1,4615
	383,2693	20,1689	0,4965

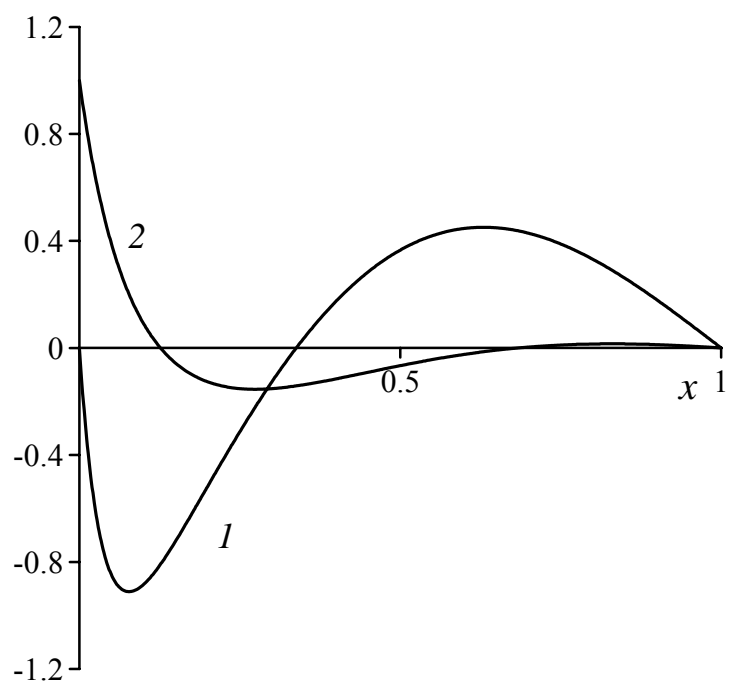


Рис. 21 Форма возмущения первого положительного уровня спектра $\lambda = 28.442$, эволюционирующего на фоне одноячеистого режима. 1 – $V_* \cdot 3$; 2 – W'_*

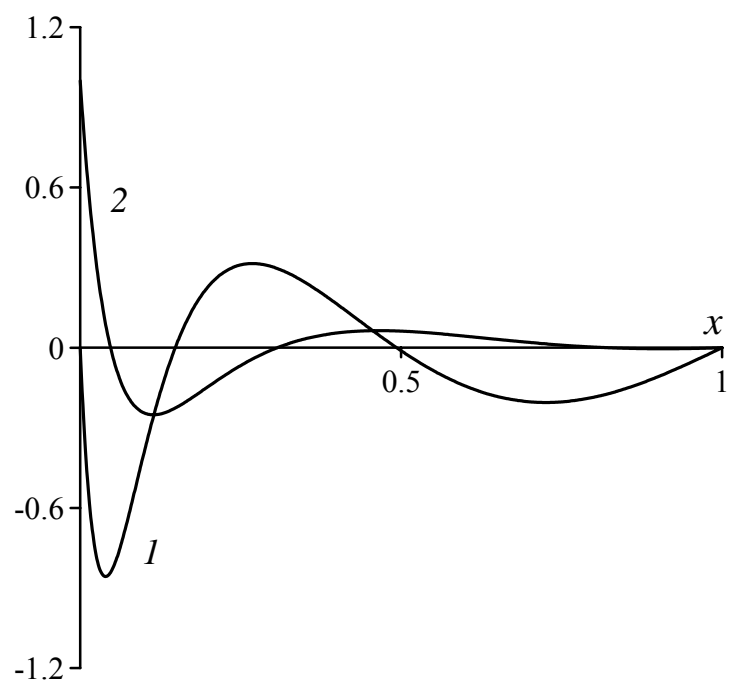


Рис. 22 Форма возмущения второго положительного уровня спектра $\lambda = 55.231$, возникающего на фоне одноячеистого режима.
 $1 - V_* \cdot 3; 2 - W'_*$

3.3.6 Неустойчивость двухячеистого режима течения жидкости в цилиндрическом стакане. На рисунках 23, 24 изображены графики функции $q(\lambda)$ в положительной и отрицательной областях изменения аргумента для основного течения представляющего собой двухячеистый вязкий цилиндрический вихрь. Как и ранее, спектр собственных значений, в задаче с ненулевым расходом, является кусочно-непрерывным – имеются точки разрывов второго рода.

Кривая $q(\lambda)$ имеет одно пересечение с осью $\lambda < 0$ ($\lambda = -60,5504$), что означает наличие, в задаче с нулевым расходом, единственной растущей со временем монотонной моды. Формы этого возмущения изображены на рис. 25. Примечательно, что направление закрутки неустойчивой моды, почти всюду, обратно направлению вращения основного течения, а функция $F(x)$ положительна. Существование экспоненциально быстро растущего возмущения, по-видимому, приводит к неустойчивости возникающего нестационарного движения.

Положительные нули функции $q(\lambda)$ отвечают монотонно затухающим возмущениям. Топология возмущений для второго рассматриваемого здесь режима основного течения качественно схожа с той, что была обнаружена в случае одноячеистого вихря: глобальные экстремумы функций располагаются в области прилегающей к оси и общее количество экстремумов увеличивается с ростом номера декремента. Величины первых декрементов приведены в таблице 1.

Как и в случае одноячеистого основного режима, течение в бесконечной трубе (без непроницаемой перегородки) с отличным от нуля расходом оказывается неустойчиво относительно рассматриваемых здесь возмущений.

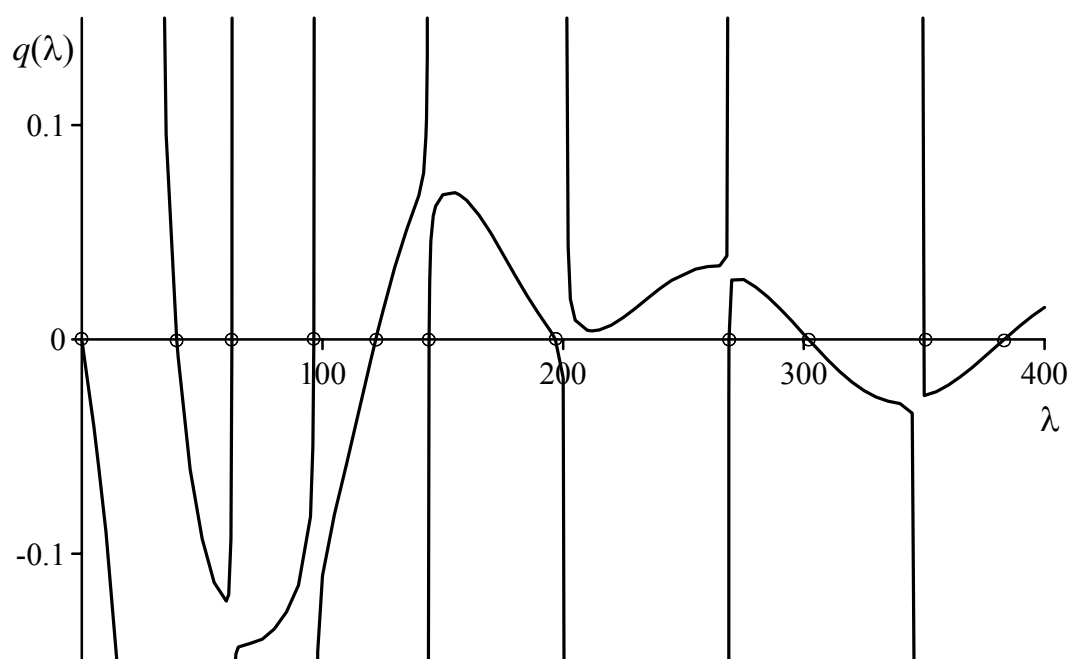


Рис. 23 Зависимость коэффициента расхода от положительных значений декремента λ для двухячеистого основного режима течения

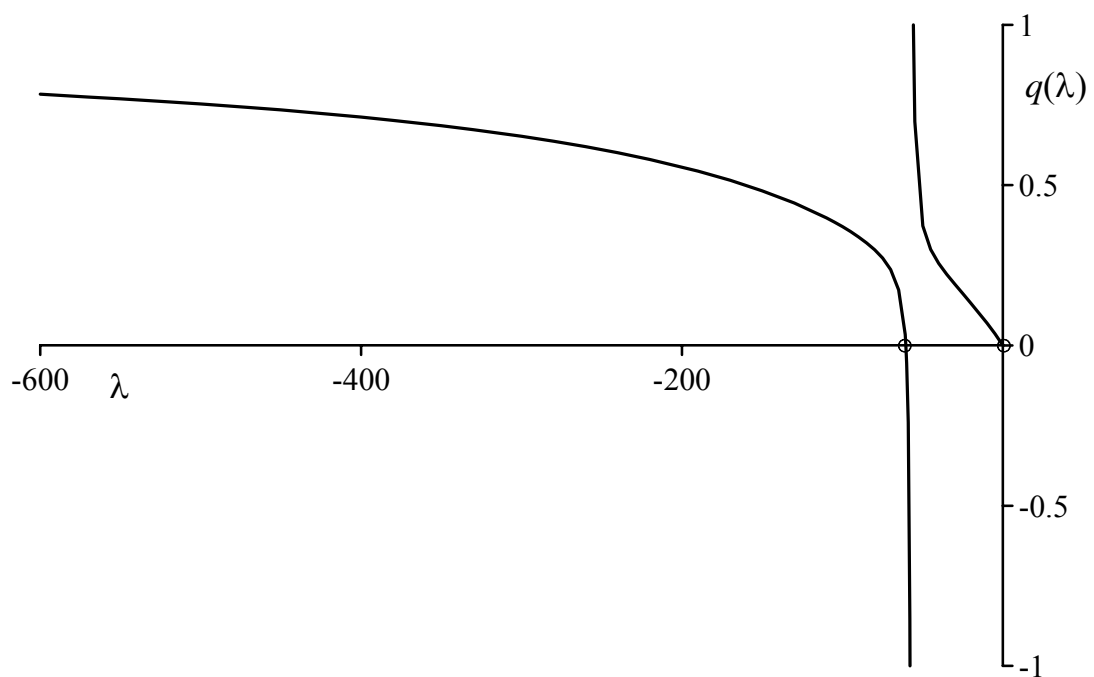


Рис. 24 Зависимость коэффициента расхода от отрицательных значений декремента λ для двухячеистого основного режима течения

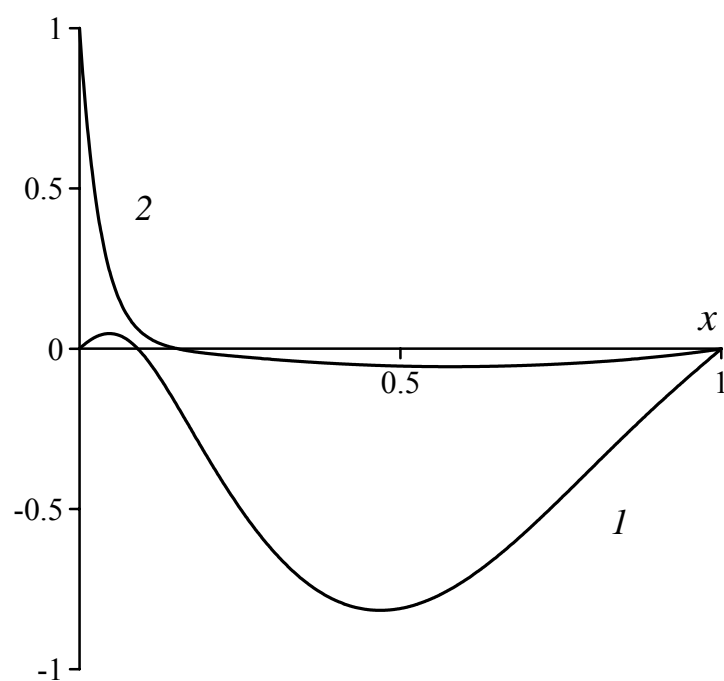


Рис. 25 Форма возмущения, нарастающего на фоне двухячейного основного режима. $1 - V_* \cdot 20$; $2 - W'_*$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ГЛАВЫ 3

В первом разделе, в рамках класса точных решений уравнений гидродинамики, предполагающего линейную зависимость части компонент скорости от осевой координаты, рассмотрено стационарное течение вязкой жидкости между продольно деформирующимся и твёрдым цилиндром. Численное исследование зависимости решения задачи от числа Рейнольдса, положительным значениям которого отвечает растяжение внутреннего цилиндра, а отрицательным – сжатие, выполнено для отношения радиусов цилиндров равного 0.1.

Основные результаты проведённого исследования заключаются в следующем:

- 1) установлено существование двух режимов течения: осесимметричного – без закрутки и вращательно-симметричного, обладающего ненулевой азимутальной составляющей скорости;
- 2) растяжение внутреннего цилиндра приводит к потере единственности осесимметричного решения при $Re = 6.429 \div 88.072$;
- 3) вращательно-симметричное решение неединственно при $Re = -1.114 \div -1.029$, $Re = 2.722 \div 3.020$, $Re > 14.931$;
- 4) вращательно-симметричное решение задачи в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса ($Re = 3.020 \div 14.931$) численно найти не удалось;
- 5) вращательно-симметричное решение ответвляется от осесимметричного при $Re = 2.722$;
- 6) при нулевом числе Рейнольдса вращательно-симметричная задача обладает нетривиальным решением, описывающим закрученное течение вязкой жидкости, заключённой между твёрдыми коаксиальными цилиндрами, с нулевым расходом;

7) приведён пример точного решения, описывающего осесимметричное закрученное течение вязкой жидкости в полубесконечном слое, вызванное растяжением цилиндра.

Во втором разделе получено точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости под действием перепада давления в зазоре между коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается с постоянной угловой скоростью. От классического результата Куэтта-Пуазейля найденное решение отличается наличием радиального переноса массы, обеспечивающего взаимодействие полоидальной и азимутальной циркуляций. Установлена линейная зависимость расхода от угловой скорости вращения внутреннего цилиндра.

В третьем разделе рассмотрена задача об эволюции монотонных возмущений, возникающих на фоне двух специальных типов вращательно-симметричного стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в полу бесконечном цилиндре [9]. Задача решена в точной постановке в рамках рассматриваемого в данной работе класса точных решений уравнений Навье-Стокса. Установлена дискретность спектра собственных чисел задачи. Показано, что все возмущения, рассматриваемого здесь вида, возникшие на фоне одноячеистого основного течения, затухают во времени. Среди возмущений, эволюционирующих на фоне двухячеистого вязкого цилиндрического вихря, обнаружено (по меньшей мере) одно нарастающее во времени. В обоих случаях описано стационарное критическое движение, разделяющее области устойчивости и неустойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Найдено счётное семейство точных стационарных решений уравнений Эйлера, описывающих радиально локализованные вихри в полубесконечном слое идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что структура вихря с номером N определяется отношением его характерных поперечных и радиальных масштабов.

2. Изучен класс точных стационарных пространственно периодических решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости. В рамках данного класса найден счётный набор решений, описывающих цепочки радиально локализованных вихрей различной конфигурации. Показано, что на фоне цепочки с номером N может генерироваться счётный набор различных локализованных движений среды большего пространственного масштаба. Установлено, что все эти движения обладают одинаковой энергией, целиком определяемой периодом цепочки.

3. В задаче о течении вязкой жидкости между деформирующимся и твёрдым цилиндром обнаружена бифуркация закрученных режимов течения от движений без закрутки. Найдены области неоднозначной зависимости вращательно-симметричных и осесимметричных решений от числа Рейнольдса.

4. Найдено новое точное решение задачи о стационарном течении вязкой жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается с постоянной угловой скоростью, в присутствии неоднородного продольного градиента давления. Полученное решение характеризуется ненулевым радиальным потоком массы жидкости, обеспечивающим взаимодействие полоидальной и азимутальной циркуляций. Показана пропорциональность расхода жидкости угловой скорости вращения внутреннего цилиндра.

5. В точной конечноамплитудной постановке исследована устойчивость одно – и двухячеистого режимов вращательно-симметричного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане. Установлено, что двухячеистый режим течения является неустойчивым относительно монотонных возмущений выбранного вида. Найдена нижняя граница устойчивой части дискретного спектра возмущений.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Акуленко Л.Д., Гордиевский Д.В., Куманшев С.А. Регулярно продолжаемые по числу Рейнольдса решения задачи Джеффри-Гамеля // Известия АН. Механика жидкости и газа. 2004, 1, с. 15-32
- 2 Акуленко Л.Д., Куманшев С.А. Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре // Доклады Академии наук. 2004, 399, 5, с. 620-624
- 3 Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначёв В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Н.: Наука. 1994, 318 с.
- 4 Аристов С.Н., Князев Д.В. Обобщённое точное решение задачи о течении Куэтта-Пуазейля // Нижний Новгород: Аннот. докладов «IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике». 22-28 августа 2006, 2, с. 14-15.
- 5 Аристов С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Пермь: ИМСС УрО РАН. Диссертация д.ф.-м.н. 1990, 303 с.
- 6 Аристов С.Н. Класс точных решений уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа // Доклады Академии наук. 1990, 313, 6, с. 1403-1406
- 7 Аристов С.Н. Князев Д.В. Вращательно-симметричное течение вязкой жидкости между коаксиальными растягивающимися цилиндрами // Красноярск: Труды III Международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения». 25-29 августа 2002, с. 21-25.
- 8 Аристов С.Н. Князев Д.В. Вязкий вихрь между коаксиальными цилиндрами // Екатеринбург: Труды XXXIII Региональной молодёжной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики». 28 января – 1 февраля 2002, с. 84-88.
- 9 Аристов С.Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой

- жидкости // Доклады Академии наук. 2001, 377, с. 477-480
- 10 Аристов С.Н. Точное решение задачи о точечном источнике // Доклады Академии наук. 1995, 343, 1, с. 50-52
 - 11 Аристов С.Н. Трёхмерные конические течения вязкой несжимаемой жидкости // Известия АН. Механика жидкости и газа. 1998, 6, с. 144-148
 - 12 Аристов С.Н., Грабовский В.И. Автомодельное решение уравнений Навье-Стокса для течений газа во вращающихся логарифмически-спиральных плоских каналах // Известия АН. Механика жидкости и газа. 1995, 6, с. 44-50
 - 13 Аристов С.Н., Князев Д.В. Новое точное решение задачи о вращательно-симметричном течении Куэтта - Пуазейля // Прикладная механика и техническая физика. 2007, 48, 5, с. 71-77.
 - 14 Аристов С.Н., Пухначёв В.В. Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Доклады Академии наук. 2004, 394, 5, с. 611-614
 - 15 Бурдэ Г.И. О движении жидкости вблизи растягивающегося кругового цилиндра // Прикладная математика и механика. 1989, 53, 4, с. 343-345.
 - 16 Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973, 758 с.
 - 17 Ватажин А.Б. О течении в диффузоре в присутствии магнитного поля // Прикладная математика и механика. 1960, 24, с. 524-629
 - 18 Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972, 392 с.
 - 19 Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука. 1989, 320 с.
 - 20 Голубинский А.А., Сычёв В.В. Об одном автомодельном решении уравнений Навье-Стокса // Учёные записки ЦАГИ. 1976, 7, 8, с. 11-17
 - 21 Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Н.: Наука. 1981, 366 с.

- 22 Гольдштик М.А. О закрученных струях // Известия АН. Механика жидкости и газа. 1979, 1, с. 26-36
- 23 Гольдштик М.А. Один класс точных решений уравнений Навье – Стокса // Прикладная механика и техническая физика. 1966, 2, с. 106-109
- 24 Гольдштик М.А. одно парадоксальное решение уравнений Навье-Стокса // Прикладная математика и механика. 1960, 24, с. 610-621
- 25 Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Генерация полоидального магнитного поля в струйных течениях // Письма в ЖЭТФ. 1989, 49 с. 266-268
- 26 Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Потеря симметрии в течении от линейного источника вязкой жидкости // Известия АН. Механика жидкости и газа. 1989, 2, с. 35-45
- 27 Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Н.: Наука. 1989, 336 с.
- 28 Дорфман Л.А. Течение вязкой жидкости между неподвижным и обдуваемым вращающимися дисками // Известия АН. Механика жидкости и газа. 1966, 2, с. 86-91
- 29 Забабахин Е.И. Заполнение пузырьков вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. 1960, 6, с. 1129
- 30 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1961, 703 с.
- 31 Князев Д.В. Исследование устойчивости цилиндрического вихря в вязкой жидкости // Пермь: Аннот. докладов «VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике». 23-25 августа 2001, с. 329
- 32 Князев Д.В. Трёхмерное решение задачи о течении Куэтта-Пуазейля // Пермь: «Гидродинамика». 2004, 14, с. 109-119.
- 33 Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз. 1963, ч. I, 583 с.

- 34 Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Физматгиз. 1963, ч. II, 727 с.
- 35 Краснов Ю.К. Эволюция «смерчей». М.: Наука. Нелинейные волны, структуры и бифуркации. 1987, с. 174-189
- 36 Лаврентьева О.М. Течение вязкой жидкости в слое на вращающемся плоскости // Прикладная механика и техническая физика. 1989, 5, с. 41-48
- 37 Ландау Л.Д. Новое точное решение уравнений Навье-Стокса // Доклады Академии наук СССР. 1944, 43, с. 286-288
- 38 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986, 733 с.
- 39 Мелешко С.В., Пухначёв В.В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса // Прикладная механика и техническая физика. 1999, 40, 2, с. 24-33
- 40 Нетребя С.Н. О спиральных течениях вязкой несжимаемой жидкости // Метеорология и гидрология. 1988, 4, с. 15-24
- 41 Никулин В.В. Взаимодействие линейного вихря со свободной поверхностью // Новосибирск: ИГ СО АН СССР. Динамика сплошной среды. 1979, 42, с. 31-32
- 42 Новиков П.А., Любин Л.Я. Гидродинамика щелевых систем. Минск: Наука и техника. 1988, 344 с.
- 43 Овсянников Л.В. групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978, 400 с.
- 44 Пухначёв В.В. Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемое частично инвариантными решениями уравнений Навье-Стокса // Новосибирск: ИГ СО АН СССР. Динамика сплошной среды. 1972, 10, с. 125-137
- 45 Пухначёв В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006, 1, с. 6-76
- 46 Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1967, 428 с.

- 47 Сидоров А.Ф. Избранные труды. Механика, математика. М.: Физматлит. 2001, 576 с.
- 48 Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Числ. и аналит. методы решения задач мех. сплош. сред. УНЦ АН СССР. – Свердловск, 1981, с. 101-117
- 49 Синицын В.Ю. Два класс течений вязкой несжимаемой проводящей жидкости // ВИНТИ. № 5957-B89. 1989, 45 с.
- 50 Слёзкин Н.А. об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости // Учёные записки МГУ. 1934, 2, с. 89-90
- 51 Судаков В.Г., Сычёв В.В. Асимптотическая теория вязкого взаимодействия вихря с плоскостью // Известия АН. Механика жидкости и газа. 2002, 6, с. 22-30
- 52 Судаков В.Г., Сычёв В.В. Об истечении струи из малого отверстия на плоскости // Известия АН. Механика жидкости и газа. 2003, 1, с. 31-36
- 53 Шилова Е.И, Щербинин Э.В. Вихревые МГД – течения в конусе // Магнитная гидродинамика. 1971, 2, с. 33-38
- 54 Шилова Е.И, Щербинин Э.В. Некоторые аспекты теоретического анализа пространственного МГД – течения в диффузоре // Магнитная гидродинамика. 1971, 1, с. 11-17
- 55 Шилова Е.И, Щербинин Э.В. Некоторые точные решения уравнений Навье-Стокса в магнитной гидродинамике // Магнитная гидродинамика. 1969, 4, с. 59-64
- 56 Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 711 с.
- 57 Щербинин Э.В. Об одном классе точных решений в магнитной гидродинамике // Магнитная гидродинамика. 1969, 4, с. 46-58
- 58 Щербинин Э.В. Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле. Рига. Зинатне. 1973. 303 с.
- 59 Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей // Известия АН.

- Механика жидкости и газа. 1999, 6, с. 26-54 (Перевод мемуара: Euler L. Principes generaux du mouvement des fluids // Memoires de l'Academie royale des sciences et belles lettres, Berlin, 1757. Т. 11 (1755) p. 274-315 = Opera omnia, ser. II. V. 12. p. 54-91)
- 60 Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968, 344 с.
- 61 Яцеев В.И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1953, 20, 11, с. 1031-1034
- 62 Abbott T. N. G. Walters K. Rheometrical flow systems. Part 2. Theory for the orthogonal rheometer, including an exact solution of the Navier-Stokes equations // J. Fluid Mech. 1970, 40, p. 205-213
- 63 Ackroyd J. A. D. On the steady flow produced by a rotating disc with either surface suction or injection // J. Eng. Math. 1978, 12, p. 207-220
- 64 Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech. 2002, 464, p. 209-215
- 65 Banks W.H.H., Zatorska M.B. Swirling flow in a porous pipe with an accelerating wall // Acta Mech. 1996, 119, p. 1-12
- 66 Batchelor G.K. Note on class of solutions of the Navir-Stokes equations representing steady rotationally – symmetric flow // Q. J. Mech. Appl. Math. 1951, 4, p. 29-41
- 67 Berker R. A new solution of the Navier-Stokes equation for the motion of a fluid contained between two parallel plates rotating about the same axis // Arch. Mech. 1979, 31, p. 265-280
- 68 Berker R. An exact solution of the Navier-Stokes equation - the vortex with curvilinear axis // Int. J. Eng. Sci. 1982, 20, p. 217-230
- 69 Berker R. Integration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Berlin: Springer-Verlag. Handbuch der Physik (ed. S. Flugge). 1963, VIII/2, p. 1-384

- 70 Berker R. Sur Quelques Cas d'Integration des Equations du Mouvement d'un Fuide Visquex Incompressible. Paris-Lille: Taffin-Lefort. 1936
- 71 Berman A. S. Laminar flow in an annulus with porous walls // J. Appl. Phys. 1958, 29, p. 71-75
- 72 Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953, 24, p. 1232-1235
- 73 Bodewadt U. T. Die Drehstromung uber festem Grunde // ZAMM. 1940, 20 p. 241-253
- 74 Brady J. F., Acrivos A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier-Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981, 112, p. 127-150
- 75 Brady J.F., Durlofsky L. On rotating disk flow // J. Fluid Mech. 1987, 175, p. 363-394
- 76 Burgers I. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948, 1, p. 171-199
- 77 Cochran W. G. 1934. The flow due to a rotating disc // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1934, 30, p. 365-375
- 78 Cox S.M. Non – axisymmetric flow between an air table and a floating disk // Phys. Fluids. 2002, 14, p. 1540-1543
- 79 Cox S.M. Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls // J. Fluid Mech. 1991, 227, p. 1-33
- 80 Cox S.M., King A.C. On the asymptotic solution of a high-order nonlinear ordinary differential equation // Proc. R. Soc. London A. 1997, 453, p. 711-728
- 81 Craik A. The stability of unbounded two – and three-dimensional flow subject to body forces: some exact solutions // J. Fluid Mech. 1989, 189, p. 275-293
- 82 Craik A., Criminale W. Evolution of wavelike disturbances in shear flow: a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations // Proc. Royal Soc. London A. 1986, 406, p. 13-36

- 83 Crane L. J. Flow past a stretching plate // ZAMP. 1970, 21, p. 645-647
- 84 Cuning G.M., Davis A.M.J. Weidman P.D. Radial stagnation flow on a rotating circular cylinder with uniform transpiration // J. Eng. Math. 1998, 33, p. 113-128
- 85 Danberg J. E. A nonsimilar moving – wall boundary - layer problem // Q. Appl. Math. 1976, 34, p. 305-309
- 86 Dauenhauer E.C., Majdalani J. Exact self-similarity solution of the Navir-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls // Phys. Fluids. 2003, 15, 1485-1495
- 87 Davey A. Boundary layer flow at a saddle point of attachment // J. Fluid Mech. 1961, 10, p. 593-610
- 88 Dijkstra D., Heijst G.J. F. The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder // J. Fluid Mech. 1983, 123, p. 123-154
- 89 Dorrepaal J. M. An exact solution of the Navier-Stokes equation which describes non-orthogonal stagnation point flow in two dimensions // J. Fluid Mech. 1986, 163, p. 141-147
- 90 Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H. Report of the Committee on Hydrodynamics // Bull. Natl. Res. Counc. (US). 1932, 84, p. 155-332
- 91 Ekman V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents // Ark. Mat. Astron. Fys. 1905, 2, p. 1-52
- 92 Erdogan M. E. Flow due to eccentric rotating a porous disk and a fluid at infinity // J. Appl. Mech. 1976, 43, p. 203-204
- 93 Erdogan M.E. Flow induced by non-coaxial rotation of a disk executing non-torsional oscillations and a fluid rotating at infinity // Int. J. Eng. Sci. 2000, 38, 175-196
- 94 Evans D. J. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disc with uniform suction // Q. J. Mech. Appl. Math. 1969, 22, p. 467-485
- 95 Fabijonas B.R., Holm D.D. Multi-frequency Craik-Criminale

- solutions of the Navier-Stokes equation // J. Fluid Mech. 2004, 506, p. 207-215
- 96 Glauert M.B. The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders // J. Fluid Mech. 1956, 1, p. 97-110
 - 97 Goldshtik M., Hussain F., Shtern V. Symmetry breaking in vortex-source and Jeffrey-Hamel flows // J. Fluid Mech. 1911, 232, p. 521-566
 - 98 Goldshtik M.A. Javorsky N.J. On the flow between a porous rotating disk and plane // J. Fluid Mech. 1989, 207, p. 1-19
 - 99 Goldshtik M.A., Javorsky N.J. On the flow between porous rotating disk and plane // J. Fluid Mech. 1989, 207, p. 1
 - 100 Gorla R. S. R. Nonsimilar axisymmetric stagnation flow on a moving cylinder // Int. J. Eng. Sci. 1978, 16, p. 397-400
 - 101 Gorla R.S.R. Unsteady viscous flow in the vicinity of an axisymmetric stagnation point on a circular cylinder // Int. J. Eng. Sci. 1979, 17, p. 87-93
 - 102 Guilloud J. C., Arnault J. Sur une nouvelle famille de solutions exactes des equations de Navier-Stokes // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 1971, 273, p. 586-588
 - 103 Guilloud J. C., Arnault J., Dicrescenzo C. Etude d'une nouvelle famille de solutions des equations de Navier-Stokes // J. Mec. 1973, 12, p. 47-74
 - 104 Gupta A. S. Ekman layer on a porous plate // Phys. Fluids. 1972, 15, p. 930-931
 - 105 Gupta P. S., Gupta A. S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Can. J. Chem. Eng. 1977, 55, p. 744-746
 - 106 Hamel G. Spiralformige Bewegungen zaher Flussigkeiten // Jahresber. Dtsch. Mat. Ver. 1916, 25, p. 34-60
 - 107 Hewit R.E., Duck P.W., Al-Azhari Extension to three-dimensional flow in a porous channel // Fluid Dyn. Res. 2003, 33, p. 17-33
 - 108 Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichformigen

- Flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Polytech. J. 1911, 326, p. 321-324
- 109 Hinch E.J., Lemaitre J. The effect of viscosity on the height of disks floating above an air table // J. Fluid Mech. 1994, 273, p. 313
- 110 Holodniok M., Kubicek M., Hlavacek V. Computation of the flow between two rotating coaxial disk: multiplicity of steady-state solutions // J. Fluid Mech. 1981, 108, p. 227-240
- 111 Homann F. Der Einfluss grosser Zahigkeit bei der Stromung um den Zylinder und um die Kugel // ZAMM, 1936, 16, p. 153-164
- 112 Howarth L. The boundary layer in three-dimensional flow - Part II. The flow near a stagnation point // Philos. Mag. Ser. 1951, 742 p. 1433-1440
- 113 Jeffrey G. B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid // Philos. Mag. Ser. 6. 1915, 29, p. 455-465
- 114 Johnson E.C., Lueptow R.M. Hydrodynamic stability of flow between rotating porous cylinders with radial and axial flow // Phys. Fluids. 1997, 9, p. 3687-3696
- 115 King J.R., Cox S.M. Asymptotic analysis of the steady-state and time-depend Berman problem // J. Eng. Math. 2001, 39, p. 87-130
- 116 Kuiken H. K. The effect of normal blowing on the flow near a rotating disk of infinite extent // J. Fluid Mech. 1971, 47, p. 789-798
- 117 Lai C.-Y., Rajagopal K.R., Szeri A.Z. Asymmetric flow between parallel rotating disks // J. Fluid Mech. 1984, 146, p. 203-225
- 118 Le Dizes S., Leblanc S. Note on "Multi-frequency Crait-Criminale solutions of the Navier-Stokes equation" by B.R. Fabijonas and D.D. Holm // J. Fluid Mech. 2006, 550, p. 43-50
- 119 Libby P. A. Wall shear at a three dimensional stagnation point with a moving wall // AIAA J. 1974, 12, p. 408-409
- 120 Liouville J. Sur l'equation aux differences partielles $\frac{d \log \lambda}{d u d v} \pm \frac{\lambda}{a^2} = 0$
// J. Math Pure Appl. 1853, 19, p. 71-72

- 121 Long R. R. Vortex motion in a viscous fluid // J. Meteorol. 1958, 15, p. 108-112
- 122 Long R.R. A vortex in an infinite viscous fluid // J. Fluid Mech. 1961, 11, p. 170-187
- 123 Marques F., Sanchez J., Weidman P.D. Generalized Couette – Poiseuille flow with boundary mass transfer // J. Fluid Mech. 1998, 374, p. 221-249
- 124 McLeod J.B., Parter S.V. On the flow between two counter-rotating infinite plane disks // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974, 54, p. 301-327
- 125 Mellor G.L., Chapple P.J., Stokes V.K. On the flow between a rotating and stationary disk // J. Fluid Mech. 1968, 31, p. 95-112
- 126 Muller K.N. Zur theorie des Wirbelstrahles // Z. Angew. Math. Mech. 1959, 38 (5/6), p. 170-187
- 127 Napolitano M., Pascasio G., Quartapelle L. A review of vorticity conditions in the numerical solution of the $\zeta - \psi$ equations // Computers & Fluids. 1999, 28, p. 139-185
- 128 Nguyen N.D., Ribault J.P., Florent P. Multiple solutions for flow between coaxial disks // J. Fluid Mech. 1975, 68, p. 369-388
- 129 Paull R., Pillow A. F. Conically similar viscous flows. Part 2. One parameter swirl free flows // J. Fluid Mech. 1985, 155: 343-358
- 130 Paull R., Pillow A. F. Conically similar viscous flows. Part 3. Characterization of axial causes in swirling flow and the one parameter flow generalized by a uniform half-line source of kinematic swirl angular momentum // J. Fluid Mech. 1985, 155, p. 359-379
- 131 Pearson C.E. Numerical solutions for the time-dependent viscous flow between two rotating coaxial disks // J. Fluid Mech. 1965, 21, p. 623-633
- 132 Prager S. Spiral flow in a stationary porous pipe // Phys. Fluids. 1964, 7, p. 907-908
- 133 Rajagopal K.R. A class of exact solutions to the Navier-Stokes

- equations // Int. J. Eng. Sci. 1984, 22, p. 451-458
- 134 Rasmussen H. Steady flow between two porous disks // ZAMP. 1970, 21, p. 187-195
 - 135 Rogers M. H., Lance G. N. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of an infinite rotating disk // J. Fluid Mech. 1960, 7, p. 617-631
 - 136 Rott N. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point // Q. Appl. Math. 1956, 13, p. 444-451
 - 137 Rott N., Lewellen W. S. Boundary layers due to the combined effects of rotation and translation // Phys. Fluids. 1967, 10, p. 1867-1873
 - 138 Schneider W. Flow induced by jets and plums // J. Fluid Mech. 1981, 108, p. 55-66
 - 139 Secomb T.W. Flow in a channel with pulsating walls // J. Fluid Mech. 1978, 88, p. 273
 - 140 Serrin J. The swirling vortex // Phil. Trans. R. Soc. London. 1972, 271 (1214), p. 327-360
 - 141 Shrestha G. M., Terrill R. M. Laminar flow with large injection through parallel and uniformly porous walls of different permeability // Q. J. Mech. Appl. Math. 1968, 21, p. 413-432
 - 142 Skalak F. M., Wang C. Y. On the nonunique solutions of laminar flow through a porous tube or channel // SIAM J. Appl. Math. 1978, 34, p. 535-544
 - 143 Sparrow E. M., Gregg J. L. A theory of rotating condensation // J. Heat Transfer. 1959, 81, p. 113-120
 - 144 Squire H. B. Radial jets. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. 50 Jahre Grenzschichtforschung. (Ed. H. Gortler, W. Tollmien). 1955, p. 47-54.
 - 145 Squire H. B. Some viscous fluid flow problems I: jet emerging from a hole in a plane wall // Philos. Mag. Ser. 1952, 743, p. 942-945
 - 146 Squire, H. B. The round laminar jet // Q. J. Mech. Appl. Math. 1951, 4, p. 321-329

- 147 Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953, 5, p. 333-341
- 148 Stow S.R., Duck P.W., Hewitt R.E. Three-dimensional extension to Jeffery – Hamel flow // Fluid Dyn. Res. 2001, 29, p. 25-46
- 149 Stuart J. T. On the effects of uniform suction on the steady flow due to a rotating disk // Q. J. Mech. Appl. Math. 1954, 7, p. 446-457
- 150 Stuart J. T. The viscous flow near a stagnation point when the external flow has uniform vorticity // J. Aerosp. Sci. 1959, 26, p. 124-125
- 151 Stuart J.T. A solution of the Navier-Stokes and energy equations illustrating the response of skin friction and temperature of an infinite plate thermometer to fluctuations in the stream velocity // Proc. Royal Soc. London A. 1955, 231, p. 116-130
- 152 Stuart, J. T. A simple corner flow with suction // Q. J. Mech. Appl. Math. 1966, 19, p. 217-220
- 153 Sullivan R. D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations // J. Aerosp. Sci. 1959, 26, p. 767-768
- 154 Szeri A.Z., Giron A., Schneider S.J., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Part I (Basic flow) // J. Fluid Mech. 134, p. 103-131
- 155 Szeri A.Z., Giron A., Schneider S.J., Kaufman H. N. Flow between rotating disks. Part II (Stability) // J. Fluid Mech. 134, p. 133-154
- 156 Szeto R.K.-H. The flow between rotating coaxial discs. California. Institute of Technology. Ph.D. Thesis.
- 157 Tamada K. Two-dimensional stagnation point flow impinging obliquely on a plane wall // J. Phys. Soc. Jap. 1979, 46, p. 310-311
- 158 Taylor C.L., Banks W.H.H., Zatorska M.B., Drazin P.G. Three-dimensional flow in a porous channel // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991, 44, p. 105-115
- 159 Terrill R. M. An exact solution for flow in a porous pipe // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 1982, 33, p. 547-552
- 160 Terrill R. M. Laminar flow in a uniformly porous channel //

- Aeronaut. Q. 1964, 15, p. 299-310
- 161 Terrill R. M., Shrestha G. M. Laminar flow through parallel and uniformly porous walls of different permeability // ZAMP. 1965, 16, p. 470-482
 - 162 Terrill R. M., Thomas P. W. Laminar flow in a uniformly porous pipe // Appl. Sci. Res. 1969, 21, p. 37-67
 - 163 Terrill R. M., Thomas P. W. Spiral flow in a porous pipe // Phys. Fluids. 1973, 16, p. 356-359
 - 164 Terrill R.M. Flow through a porous annulus // Appl. Sci. Res. 1967, 17, 3, p. 204-222
 - 165 Terrill R.M. Heat transfer in laminar flow between parallel porous plates // Int. J. Heat Mass Trans. 1965, 8, p. 1491-1497
 - 166 von Karman T. Über laminare und turbulente Reibung // ZAMM. 1921, 1, p. 233-252
 - 167 Wang C. Y. Axisymmetric stagnation flow on a cylinder. Q. Appl. Math. 1974, 32, p. 207-213
 - 168 Wang C. Y. Axisymmetric stagnation flow towards a moving plate // AIChE J. 1973, 119, p. 1080-1081
 - 169 Wang C. Y. Effect of spreading of material on the surface of a fluid-an exact solution // Int. J. Non-Linear Mech. 1971, 6, p. 255-62
 - 170 Wang C. Y. Exact solution of the Navier-Stokes equations-the generalized Beltrami flows, review and extension // Acta Mech. 1990, 81, p. 69-74
 - 171 Wang C. Y. Fluid dynamics of the circular porous slider // J. Appl. Mech. 1974, 41, p. 343-347
 - 172 Wang C. Y. Fluid flow due to a stretching cylinder // Phys. Fluids. 1988, 31, p. 466-468
 - 173 Wang C. Y. Impinging stagnation flows // Phys. Fluids. 1987, 30, p. 915-917
 - 174 Wang C. Y. Melting from a horizontal rotating disk // J. Appl. Mech. 1989, 56, p. 47-50

- 175 Wang C. Y. Shear flow over a rotating plate // Appl. Sci. Res. 1989, 46, p. 89-96
- 176 Wang C. Y. Stagnation flow on the surface of a quiescent fluid-an exact solution of the Navier-Stokes equations // Q. Appl. Math. 1985, 43, p. 215-223
- 177 Wang C. Y. Stretching a surface in a rotating fluid // J. Appl. Math Phys. (ZAMP). 1988, 39, p. 177-185
- 178 Wang C. Y. Symmetric viscous flow between two rotating porous discs - moderate rotation // Q. Appl. Math. 1976, 34, p. 29-38
- 179 Wang C. Y. The three-dimensional flow due to a stretching flat surface // Phys. Fluids. 1984, 27, p. 1915-1917
- 180 Wang C. Y., Skalak F. Fluid dynamics of a long porous slider // J. Appl. Mech. 1975, 42, p. 893-894
- 181 Wang C. Y., Watson L. T Viscous flow between rotating discs with injection on the porous disc // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1979, 30, p. 773-787
- 182 Wang C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991, 23, p. 159-177
- 183 Wang C.Y. Flow due to a stretching boundary with partial slip – an exact solution of the Navier-Stokes equations // Chem. Eng. Sci. 2002, 57,p. 3745-3747
- 184 Wang C.Y. Stagnation flow with slip: Exact solution of the Navier-Stokes equations // ZAMP. 2003,54, p. 184-189
- 185 Wang, C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier-Stokes equations // Appl. Mech. Rev. 1989, 42, p. 269-282
- 186 Wang, C. Y. On a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations // J. Appl. Mech. 1966, 33, p. 696-698
- 187 Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. On transition to chaos in a two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls // J. Fluid Mech. 1990, 212, p.451-485
- 188 Watson L. T, Li T. Y., Wang C. Y. Fluid dynamics of the elliptic

- porous slider // J. Appl. Mech. 1978, 45, p. 435-436
- 189 Weidman P.D., Mahaligam S. Axisymmetric stagnation – point flow impinging on a transversely oscillating plate with suction // J. Eng. Math. 1997, 31, p. 305-318
 - 190 Whitham G. B. The Navier-Stokes equations of motion. Oxford: Clarendon. Laminar Boundary Layers. 1963. (Ed. L. Rosenhead) p. 114-162
 - 191 Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA J. 1967, 5, p. 2128-2134
 - 192 Wilson L. O., Schryer N. L. Flow between a stationary and a rotating disk with suction // J. Fluid Mech. 1978, 85, p. 479-496
 - 193 Yih C.-S., Wu F. Conical vortices: a class or exact solutions of the Navier-Stokes equations // Phys. Fluids. 1982, 25, p. 2147-2158
 - 194 Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Trans. ASME. 1956, 78, p. 719-724
 - 195 Yuan S.W. Further investigation of laminar flow in channel with porous walls // J. Appl. Phys. 1956, 27, p. 267
 - 196 Zandbergen P. J., Dijkstra D. Von Karman swirling flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987, 19, p. 465-491
 - 197 Zatorska M.B., Banks W.H.H. Flow in a pipe driven by suction at an accelerating wall // Acta Mech. 1995, 110, p. 111-121
 - 198 Zatorska M.B., Banks W.H.H. New solution for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls // Fluid Dyn. Res. 2003, 33, p. 57-71
 - 199 Zatorska M.B., Banks W.H.H. Suction-driven flow in a porous pipe // ZAMM. 1995, 75, p. 21-30
 - 200 Zatorska M.B., Drazin P.G., Banks W.H.H. On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls // Fluid Dyn. Res. 1988, 4, p. 151-160