

Учреждение Российской академии наук

Институт проблем механики

им. А.Ю. Ишлинского РАН

На правах рукописи

Любичева Анастасия Николаевна

**КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ИЗНАШИВАНИЕ
НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:

Академик РАН И.Г. Горячева

Москва – 2008

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ С ВЫХОДЯЩИМИ НА ПОВЕРХНОСТЬ ФАЗОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ	19
1.1 Расчет остаточных напряжений вблизи протяженного включения.....	20
1.2 Расчет остаточных напряжений вблизи полусферического включения.....	29
1.3 Сравнительная оценка величины напряжений у включений разной формы.....	39
1.4 Напряженное состояние упругих тел с включениями при контактном взаимодействии	40
1.5 Заключение	50
ГЛАВА 2 АНАЛИЗ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ПЯТЕН КОНТАКТА ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНДЕНТОРОВ ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ.....	52
2.1 Постановка задачи.	53
2.2 Модель вязкоупругого материала.....	54
2.3 Метод решения.....	55
2.4 Решение периодической задачи для произвольной полосы	56
2.5 Результаты расчетов и их анализ.....	60
2.6 Заключение	65
ГЛАВА 3 УСТАНОВИВШЕЕСЯ РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗНАШИВАНИИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ВЯЗКОУПРУГИМ ТЕЛОМ	66
3.1 Постановка задачи	67
3.2 Модель вязкоупругого материала.....	69
3.3 Метод решения.....	70
3.4 Пример.....	72
3.5 Результаты расчета.....	75
3.6 Заключение	78
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.....	79
ЛИТЕРАТУРА	81

Введение

Механика контактного взаимодействия является одним из ведущих направлений в механике деформируемого твердого тела. Несмотря на то, что получены решения большого количества контактных задач, как аналитическими методами, так и численными, построение и исследование моделей контактного взаимодействия остается актуальным и сегодня в связи с разработкой новых материалов и технологий, предъявлением новых требований к условиям и срокам эксплуатации узлов трения. Научный интерес к этой проблеме обусловлен многообразием процессов и явлений, протекающих при контактном взаимодействии и трении поверхностей.

При постановке классических контактных задач преимущественно используется модель однородного изотропного тела, рассматривается взаимодействие гладких поверхностей [19, 57, 77]. С развитием математического аппарата, возросшей мощностью вычислительной техники появилась возможность при постановке контактных задач учитывать шероховатость поверхностей, вязкоупругие свойства контактирующих тел, наличие на поверхности контакта пленок и покрытий, эффекты адгезии, трения и изнашивания.

Повышенный интерес, как с точки зрения фундаментальной науки, так и с прикладного значения, представляет изучение контактного взаимодействия неоднородных тел. В этой работе уделяется внимание неоднородностям следующих видов: механическим, геометрическим и триботехническим.

Впервые задачи о контактном взаимодействии неоднородных тел были поставлены в середине прошлого века при расчетах фундаментов и оснований в строительстве, покрытий дорожных одежд, плит на многослойных основаниях [42, 43]. Затем, с появлением покрытий с непрерывно изменяющимися механическими свойствами (многослойных,

функционально-градиентных) проблема математического моделирования такого рода материалов снова обострилась. Решению контактных задач при наличии покрытий, а также определению напряженно-деформированного состояния слоистых тел посвящено большое количество исследований (обзоры работ в этом направлении содержатся в монографиях [2, 3]).

Механические неоднородности возникают в процессе создания, обработки и при эксплуатации материала. Особое место в их ряду занимают фазовые включения. Образование вторичных структур в материале и/или на его поверхности приводит к локальному изменению механических характеристик. Локальные структурные и фазовые превращения в виде «белой зоны» - нетравящейся полосы в стволе стальных орудий были обнаружены в начале прошлого столетия В.П. Кравз-Тарнавским [58]. Необычные свойства этой структуры - нетравимость реактивами, высокая твердость привлекают внимание исследователей. В результате совместного действия локализованной пластической деформации и мгновенного подъема температуры с последующим быстрым отводом тепла в холодную массу металла происходит локальное фазовое превращение, зачастую приводящее к разрушению этого участка.

Существуют противоречивые мнения о структуре «белой зоны»: бесструктурный или мелкоигольчатый мартенсит, сопряженная когерентная аустенитно-мартенситная структура и тому подобное. Большинство исследователей считают «белую зону» результатом закалки в микрообъемах, происходящей на фоне значительной пластической деформации. Разнообразие структурных состояний «белой зоны» связано со сложностью и специфическим протеканием процессов ее формирования.

Исследования «белой зоны», образующейся на поверхности стали при фрикционно-упрочняющей обработке, механоультразвуковой обработке, высокоскоростном трении показали, что белые слои обладают высокой прочностью, повышенным сопротивлением разрушению при сжатии, высокой

коррозионной стойкостью, усталостной прочностью и износостойкостью [15, 58].

Обычно при контактном взаимодействии «белая зона», которую далее будем называть включением, образуется в подповерхностных слоях материала и непосредственно на поверхности. К последнему случаю относятся включения на поверхностях валков холодной прокатки и катания железнодорожных колес, в узлах трения (поверхности зубьев тяжело нагруженных зубчатых передач) [58]. В условиях контактного взаимодействия при циклических нагрузках разрушение поверхности часто происходит по границе включения и основного материала.

Подповерхностные включения, как показывает практика, имеют форму близкую к эллипсоиду. На поверхности встречаются мартенситные включения различной формы: от практически круговой до сильно вытянутой; глубина их не велика [1]. Твердость включений значительно выше твердости окружающего материала.

В настоящее время большое внимание уделяется построению моделей сред, содержащих вторичные структуры, и исследованию перемещения границы между фазами при термомеханических воздействиях [39, 44, 54, 55, 64]. Развитие этой области науки идет, преимущественно, по двум направлениям. Первое - введение дополнительных параметров состояния (например, концентрация новой фазы), определение соотношений для этих параметров, экспериментальная проверка модели и затем - численный эксперимент [54, 55]. Второе направление подразумевает явное рассмотрение межфазной границы, постановку граничных условий на ней и изучение кинетики развития новой фазы [39, 44, 64].

В данной работе фазовые включения будут рассмотрены в ином аспекте. Включение является не только концентратором напряжений, но и источником. Появление включения в материале сопровождается локальным изменением плотности и, как следствие, возникновением остаточных

напряжений. О существовании остаточных напряжений в различных материалах известно давно. Технологические остаточные напряжения могут играть как положительную, так и отрицательную роль при эксплуатации изделий. Измерить эти «нежелательные» напряжения бывает также трудно, как и предотвратить их появление [65].

Классической работой, где представлена модель для определения остаточных напряжений, обусловленных фазовыми превращениями в неограниченном теле, является работа Дж. Эшелби [68]. Эта модель, основанная на решении плоской задачи теории упругости, позволяет аналитически определять остаточные напряжения внутри включения, занимающего эллиптическую область в бесконечной упругой среде. Решение получено с помощью предельного перехода. Предполагается, что упругие характеристики в процессе превращения не изменяются.

Следует упомянуть также работу [76], которая, хотя и не связана с моделированием фазовых включений, дает решение плоской задачи об эллиптическом включении с разрезом в бесконечной упругой среде. В этой работе включение и матрица различаются упругими свойствами, решение получено с помощью функции напряжений, а существование разреза между фокусами эллипса позволяет воспользоваться конформным отображением эллиптической области на круг. Решения получены для различных граничных условий (заданное напряжение во включении или на бесконечности).

Полное решение задачи о напряженном состоянии, определяемом фазовыми превращениями в эллиптической области, получено в [68]. В этой работе также как и у Эшелби рассмотрена задача о фазовом превращении, выражающемся изменением размеров и формы превращенного включения без изменения его упругих свойств. Построены уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние, возникающее в результате фазовых превращений, аналогичные уравнениям термоупругости Дюамеля-

Неймана. Построенные уравнения обобщают классический подход Эшелби и позволяют с единых позиций рассматривать как распределенные, так и фронтальные превращения, а также учитывать их неоднородность, то есть различную степень превращения в различных точках. Детально рассмотрена плоская задача о фазовом превращении эллиптического включения. Построены явные аналитические выражения для полей напряжений во включении и в матрице.

Однако включения, выходящие на поверхность, ранее не рассматривались. Актуальность изучения напряженного состояния поверхностных слоев материалов, имеющих включения другой фазы, в условиях контактного взаимодействия определяется широким использованием указанных материалов в тяжело нагруженных узлах трения и необходимостью прогнозирования надежности и долговечности сопряжений.

Как упоминалось выше, в классической постановке контактной задачи предполагается идеальная гладкость поверхностей. В действительности поверхности твердых тел шероховаты и представляют собой систему выступов и впадин. Шероховатость вносит изменения в характер контактного взаимодействия, что подтверждено экспериментальными исследованиями Н.Б. Демкина [37], К. Кендала и Д. Табора [80] и других авторов.

К геометрическим неоднородностям относятся естественная или специально полученная микрогеометрия поверхности. Естественная микрогеометрия обычно называется шероховатостью поверхности, а специально полученная - микрорельефом. При контактном взаимодействии геометрически неоднородных поверхностей имеет место дискретность контакта. Она вносит неоднородность в распределение контактных и внутренних напряжений, приводит к цикличности нагружения при скользящем контакте и другим явлениям. Для объяснения разрушения поверхностных слоев материала и управления этим процессом необходимо

развивать модели контактного взаимодействия шероховатых тел и тел с регулярным микрорельефом.

Если каким-либо образом определена форма поверхности, то решение контактной задачи возможно численно [60], причем точность зависит от возможностей вычислительной техники и точности измерений. Результаты, очевидно, носят частный характер. Кроме того, они становятся непригодными при изменении формы, например, при изнашивании.

Первая попытка учесть шероховатость поверхностей в постановке контактной задачи была предпринята И.Я. Штаерманом [67]. Им было введено в рассмотрение комбинированное основание, при нагружении которого помимо деформации упругого тела возникают дополнительные локальные деформации, обусловленные шероховатостью поверхностей. В этой же работе рассмотрена плоская периодическая контактная задача для синусоидального штампа и упругого однородного основания. В данном случае периодическая поверхность выступает в роли модели тела с регулярным микрорельефом. Решение плоской периодической контактной задачи для системы штампов с учетом сил трения приведено в работах Е.А. Кузнецова и Г.А. Гороховского [49-52], где также есть подробный анализ напряженно-деформированного состояния приповерхностных слоев. В работе [38] рассмотрена периодическая контактная задача для поверхности, имеющей синусоидальную волнистость в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Подобные модели позволяют в некоторых случаях получить аналитические зависимости для контактных характеристик и проанализировать влияние множественности взаимодействий для поверхностей с регулярным рельефом. Ограниченность результатов связана с тем, что такая модель шероховатой поверхности включает в себя только один уровень неровностей по высоте.

Широкое распространение при расчетах характеристик шероховатых поверхностей нашла модель Гринвуда-Вильямсона [73]. Суть модели состоит в следующем: неровности моделируются набором сфер одинаковой кривизны с заданным распределением по высоте, связь контактного давления с деформацией неровностей определяется с помощью модели Герца, учитывается число неровностей на единицу площади, их форма и распределение по высоте. Решение задачи сводится к системе интегральных уравнений для определения давления в области контакта и осуществляется численно при помощи итерационной процедуры. При существенных достоинствах модели – определении сближения, номинального и фактического давления и области контакта, она не учитывает взаимного влияния отдельных неровностей.

Пространственные задачи для системы цилиндрических или сферических штампов с учетом их взаимного влияния исследованы в работах [26, 29, 30]. Предположение о сохранении круговой формы пятна фактического контакта, а также замена действия штампов, отличных от рассматриваемого, сосредоточенными силами, позволило свести задачу к системе алгебраических уравнений. Данная модель позволила исследовать влияние характера расположения штампов (плотности контакта) на распределение нагрузок между ними для системы штампов одинаковой и различной высоты. Поскольку порядок системы уравнений соотносим с количеством неровностей, эта модель хороша для случая не очень большого количества областей контакта.

Многие явления, имеющие место при фрикционном взаимодействии тел, не могут быть объяснены с помощью модели идеально упругого тела. К ним относится зависимость силы трения от температуры и скорости, фрикционный разогрев и т.д. Это побудило привлечь к рассмотрению более сложные модели, учитывающие несовершенную упругость материалов. А.Ю.Ишлинским [40, 41] рассмотрена задача о качении жесткого катка по

вязкоупругому основанию, описываемого одномерной моделью Кельвина-Фойгхта. Как показывают результаты теоретических исследований, учет вязкоупругих свойств материала ведет к асимметрии в распределении контактных давлений, изменению размеров и смещению площадки контакта, к зависимости этих характеристик от скорости перемещения тел. Не менее важным аспектом изучения контакта вязкоупругих тел является возможность оценки потерь энергии при трении и коэффициента трения.

Обычно выделяют два механизма, вносящих вклад в диссипацию энергии при трении: адгезионный и деформационный [16, 46]. Деформационная составляющая силы трения связана с потерями энергии при деформировании поверхностных слоёв материала. Ее роль возрастает при трении влажных шероховатых поверхностей за счет уменьшения фактической площади контакта и наличия смазочной пленки, уменьшающей адгезию контактирующих поверхностей [47]. Экспериментальное исследование деформационных потерь при трении наилучшим образом освещено в работе Гринвуда и Тейбора [72]. В этой работе была проверена гипотеза о том, что трение скольжения сферы по смазанному высокоэластичному телу по существу должно быть равным трению качению такой же сферы. Кроме того, в ней сделана приближенная количественная оценка деформационных потерь при трении, которая хорошо согласуется с результатами проводимых авторами экспериментов.

Для теоретических оценок деформационной составляющей силы трения используются различные модели вязкоупругого материала [48]. В работе [47] получена приближенная оценка деформационной составляющей коэффициента трения при скольжении жесткой сферы по неидеально упругому полупространству. Более строгий расчёт этой величины проведён в [32] на основе модели цилиндрической неровности, скользящей по поверхности вязкоупругого полупространства, свойства которого характеризуются произвольным дискретным спектром времен релаксации.

Сила трения при этом оценивалась путём вычисления равнодействующей усилий на площадке контакта, распределение которых относительно оси неровности оказывается несимметричным вследствие вязкоупругих свойств материала.

Для шероховатых тел большой интерес представляет изучение влияния дискретности контакта на величину силы трения при их скольжении по вязкоупругому материалу. Исследование влияния микрогеометрии индентора и несовершенной упругости материала на напряженно-деформированное состояние тел при трении скольжения было проведено в работах [33, 71]. Рассмотрена периодическая контактная задача в плоской постановке для вязкоупругого слоя, моделируемого телом Максвелла [71] (Кельвина [33]), при этом учитывались упругие свойства подложки. Однако двумерная постановка обладает рядом ограничений, в частности, нельзя отследить изменение формы площадки контакта и оценить сближение тел при различных скоростях скольжения и нагрузках.

Таким образом, построено значительное количество моделей контактного взаимодействия упругих тел с шероховатыми поверхностями. Однако для материалов, обладающих вязкоупругими свойствами, влияние параметров микрогеометрии на контактные характеристики изучено недостаточно. Исследование этого вопроса даст возможность, в частности, оценить влияние параметров микрогеометрии поверхности на потери энергии при трении.

Нельзя обойти вниманием интерес к износоконтактным задачам.. Триботехнические неоднородности, как уже отмечалось можно выделить в отдельную группу, поскольку существуют такие способы обработки поверхностей, которые, значительно не меняя упругие характеристики материала, влияют на их износостойкость. Последнюю принято характеризовать коэффициентом изнашивания $K(x,y)$. Коэффициент линейного износа определяет скорость изменения формы поверхности в

направлении нормали к ней за счет изнашивания. В случае структурной неоднородности коэффициент изнашивания является функцией более или менее сложного вида. Это обстоятельство оказывает влияние на формоизменение поверхности в процессе трения, на перераспределение давлений в области контакта, и другие характеристики. Чтобы оценить упомянутое влияние необходимо решить износоконтактную задачу.

Первой в ряду работ, посвященных износоконтактным задачам, следует отметить работу М.В. Коровчинского [45]. В этой работе при постановке контактной задачи наряду с упругими перемещениями $u(x,y,t)$, обусловленными деформацией тел при контакте, предлагается учитывать сравнимые с ними перемещения $w(x,y,t)$, вызванные процессом линейного износа и увеличивающиеся в процессе истирания взаимодействующих тел. Для определения величины износных перемещений $w(x,y,t)$ автор предлагает использовать математическую модель нелинейного закона изнашивания, полученную эмпирически.

Общий метод решения пространственных и плоских контактных задач с износом при постоянной области контакта изложен в работах Л.А. Галина и И.Г. Горячевой [20-22], Горячевой [26], а также в монографиях [27, 32]. Условие контакта с использованием линейного закона изнашивания и интегрального представления упругих перемещений через контактное давление позволяет свести задачу к определению собственных значений и собственных функций некоторых интегральных операторов. Доказано, что при установившемся режиме изнашивания распределение давления на контакте принимает стационарное значение. Незвестная функция давления представляется в виде ряда по экспонентам, в котором коэффициенты являются неизвестными функциями координат, а аргументы экспонент – линейные отрицательные функции времени. Исследованы разные случаи постановки задачи: штамп не перемещается вдоль оси; случай линейного износа, когда осадка штампа растет со временем линейно; случай

произвольно меняющейся силы с выходом ее на асимптоту. В каждом из перечисленных случаев задача сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма (однородных и неоднородных) с симметричным положительным ядром.

Значительное развитие теории износоконтактных задач связано с работами В.М. Александрова, Е.В. Коваленко [7-12].

В работе [7] рассмотрена осесимметричная износоконтактная задача о вдавливании кольцевого штампа в линейно-деформируемое основание с жесткой подложкой. Используется закон абразивного изнашивания. Условие контакта штампа и основания позволяет составить интегральное уравнение для нахождения неизвестного распределения давления на контакте в любой момент времени. Предложенный метод решения дает возможность построить асимптотические разложения при относительно большом времени для всех основных характеристик.

Плоские контактные задачи теории упругости рассматриваются в работах [8, 9, 10]. В [8] поверхность упругого основания изнашивается бесконечным цилиндрическим штампом. При постановке и решении задачи используется линейный закон износа. В [9] для решения полученного уравнения ищется в виде ряда по собственным функциям непрерывного, самосопряженного, положительно определенного оператора. В [10] для решения подобного уравнения используются асимптотические разложения.

В работе [4] дана общая постановка плоских контактных задач теории упругости с учетом трения и износа в области контакта, а также шероховатости взаимодействующих поверхностей. Для частного случая показана возможность построения асимптотического решения для переменной области контакта.

Перечисленные выше работы, в основном, касаются общих вопросов постановки и решения износоконтактных задач. В дальнейшем можно выделить несколько направлений, связанных с учетом тепловыделения в

области контакта [12, 5, 6]. Большое количество работ посвящено прикладным задачам – расчету на износ различных пар трения. Обзор исследований в области износоконтактных задач содержится в монографии [2].

Наиболее близким к данной работе направлением является исследование износоконтактных задач, в которых износостойкость одного из контактирующих тел является переменной по поверхности [13, 31, 34, 35].

В работах [31, 34, 35], а также монографиях [27, 32] рассмотрены математические постановки ряда износоконтактных задач для неоднородных упругих тел с переменной по поверхности износостойкостью. Такие задачи возникли в связи с развитием метода локального упрочнения поверхностей. Кроме того, при некоторых видах сплошного упрочнения поверхности, в частности при лазерном, как показывает практика, невозможно добиться равномерного изменения структуры поверхности [74].

В [31] рассмотрена плоская износоконтактная задача для структурно неоднородного материала. Неоднородные свойства материала моделируются зависимостью коэффициента износа от координат точки поверхности. Коэффициент износа является кусочно-постоянной функцией. Предполагая существование асимптотически устойчивого режима изнашивания, авторы получили решение, позволяющее исследовать влияние параметров функции износостойкости на стационарную форму поверхности и установившуюся скорость изнашивания.

Вопрос о существовании асимптотики устойчивого режима изнашивания при постоянной площади контакта и нагрузке рассматривается в работе [35] для общего случая переменной функции износостойкости. Исследование замкнутой системы уравнений, состоящей из закона изнашивания с линейной зависимостью скорости износа от давления, уравнения равновесия, условия контакта, а также уравнения, связывающего упругие перемещения и контактные давления посредством некоторого

оператора A , позволило сформулировать для этого оператора условия, являющиеся достаточными для асимптотической устойчивости стационарного решения системы.

Доказательство асимптотической устойчивости стационарного решения для отдельных операторов при нелинейной зависимости скорости износа от давления проведено в работе [25].

В [29] исследованы пространственные контактные задачи для структурно неоднородных тел. Для используемого в работе интегрального оператора, связывающего упругие перемещения с давлением, показано существование асимптотически устойчивого режима изнашивания для нелинейной зависимости скорости износа от давления. В установившемся режиме рассматривается влияние параметров неоднородности коэффициента износостойкости на установившуюся форму поверхности и установившуюся скорость изнашивания для случаев ограниченной и бесконечной областей контакта при разных видах относительного движения контактирующих тел. В некоторых случаях показана возможность решения обратной задачи – определения коэффициента износостойкости, позволяющего получать поверхности с некоторыми заданными параметрами ее формы.

Разработанный метод решения износосеконтактных задач для структурно-неоднородных материалов был применен в [70] для анализа процесса химико-механического полирования.

Решение периодической двумерной контактной задачи для упругого слоя при учете износа и сил трения представлено в работе [13]. Предлагается эффективный метод решения интегрального уравнения для случая, когда износостойкость поверхности одного из взаимодействующих тел меняется по пространственной переменной периодическим образом.

Расчет эксплуатационных характеристик сопряжений, установившегося рельефа поверхности при изнашивании структурно-

неоднородных тел, взаимодействующих с упругими и вязкоупругими материалами, остается актуальной прикладной задачей.

Итак, перечисленные исследования показывают, что механические, геометрические и триботехнические неоднородности оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние приповерхностных слоев и характер их разрушения. Математическое моделирование контактного взаимодействия и изнашивания в процессе трения элементов трибосопряжений позволяет не только прогнозировать их долговечность, но и управлять их работой за счет выбора материалов с необходимыми свойствами.

Целью диссертации является анализ контактных характеристик и их изменения при изнашивании на основе постановки и решения контактных задач с учетом геометрических и механических параметров неоднородности взаимодействующих тел.

Задачи исследования:

- определить остаточные напряжения вблизи включений различной формы, выходящих на поверхность и возникающих в результате фазовых переходов; провести анализ влияния остаточных напряжений на напряженно-деформированное состояние при контактном взаимодействии;
- провести анализ взаимного влияния пятен контакта на контактные характеристики и деформационную составляющую коэффициента трения при скольжении геометрически неоднородных поверхностей с микрорельефом по вязкоупругому полупространству;
- изучить особенности изнашивания композиционного материала, обладающего переменным по поверхности коэффициентом износа, при скольжении по нему вязкоупругого тела

В первой главе определяются остаточные напряжения вблизи включений, возникающих на поверхности полупространства в результате фазового перехода. В связи с тем, что на практике встречаются включения различной формы, даны постановка и решение плоской и осесимметричной задач. Изучены особенности напряженного состояния вблизи включений различной формы. Проведен анализ влияния выходящих на поверхность включений на распределение поверхностных и внутренних напряжений в условиях контактного взаимодействия.

Во второй главе дано решение пространственной контактной задачи о взаимодействии периодической системы жестких сферических инденторов с вязко-упругим основанием, определена деформационная составляющая коэффициента трения. Исследовано влияние параметров микрогеометрии поверхности на потери энергии при трении. Проведен анализ контактных характеристик (формы площадки контакта, распределения контактных давлений, нормальных перемещений поверхности) при различных уровнях нагрузки и скоростях скольжения.

В третьей главе исследована плоская контактная задача об изнашивании композиционного материала, обладающего переменной износостойкостью, вязкоупругим контртелом. Переменный по поверхности коэффициент износостойкости описывается периодической кусочно-постоянной функцией. В установившемся режиме рассматривается влияние параметров неоднородности, а именно соотношения коэффициентов износостойкости компонент материала и их геометрических размеров, на установившуюся форму поверхности. Обсуждаются особенности изнашивания неоднородного материала вязкоупругим контртелом.

Автор выражает благодарность своему руководителю Горячевой Ирине Георгиевне за поддержку и внимание к работе. Благодарит также сотрудников лаборатории трибологии ИПМех РАН Добычина М.Н.,

Торскую Е.В., Маховскую Ю.Ю. за предоставленные материалы, поддержку и полезные замечания.

Глава 1 Контактное взаимодействие тел с выходящими на поверхность фазовыми включениями

Обозначения:

x, y, z	:	Декартова система координат	
r, θ, z	:	Цилиндрическая система координат	
$u_i^{(j)}$:	Компоненты вектора перемещений	[м]
		$j=1$ основной материал; $j=2$ включение	
ε	:	Величина скачка перемещений	[м]
σ_{ij}	:	Компоненты тензора напряжений	[Па]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:	Главные напряжения	[Па]
$p_f(x), q_f(x)$:	Фиктивная распределенная нормальная и касательная нагрузки	[Па]
τ_{max}	:	Максимальные касательные напряжения	[Па]
τ_m	:	Максимальное значение τ_{max}	[Па]
l, R	:	Характерные размеры включений	[м]
E	:	Модуль упругости	[Па]
ν	:	Коэффициент Пуассона	—
ρ_1, ρ_2	:	Плотности основного материала и включения	[кг/м ³]
D	:	Минимальное расстояние между осью включения и центром площадки контакта	[м]
Ω	:	Область контакта	
a	:	Радиус площадки контакта	[м]
p_0	:	Максимальное давление на площадке контакта	[Па]
$\sigma_{ij}^{(C)}$:	Внутренние напряжения, возникающие в результате контактного взаимодействия	[Па]
$\sigma_{ij}^{(R)}$:	Остаточные напряжения	[Па]
$\hat{x}, \hat{z}, \hat{r}, \hat{p}(x), \hat{\sigma}_{ij}$:	Безразмерные координаты и функции	—
$\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{r}, \tilde{p}(x), \tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{R}$			
\tilde{A}, \tilde{B}			

A, B : Постоянные для определения остаточных [Па] напряжений в случаях протяженного и полусферического включений.

1.1 Расчет остаточных напряжений вблизи протяженного включения

Постановка задачи. Если включение имеет вытянутую форму и один из его характерных размеров существенно больше другого ($l \gg R$, рис. 1), то задача может быть решена в плоской постановке. Рассмотрим упругое полупространство, на поверхность которого выходит включение. Это включение также является упругим и представляет собой полуцилиндр с полукругом радиуса R в основании, плоская грань которого расположена на поверхности полупространства (рис. 1). Основной материал и включение имеют одинаковые модули Юнга E и коэффициенты Пуассона ν . Плотность материала включения ρ_2 после фазового превращения несколько меньше, чем плотность окружающего его материала ρ_1 . За счет этого включение стремится занять больший объем, чему препятствует окружающий материал матрицы. Можно провести аналогию между рассматриваемой задачей и задачей термоупругости: цилиндр «расширяется» как при нагреве, но «остывания» не происходит.

Пусть форма области не претерпевает изменений, а меняется только её размер. Введем декартову (Oxz) и полярную ($Or\theta$) системы координат, как показано на рис.1.

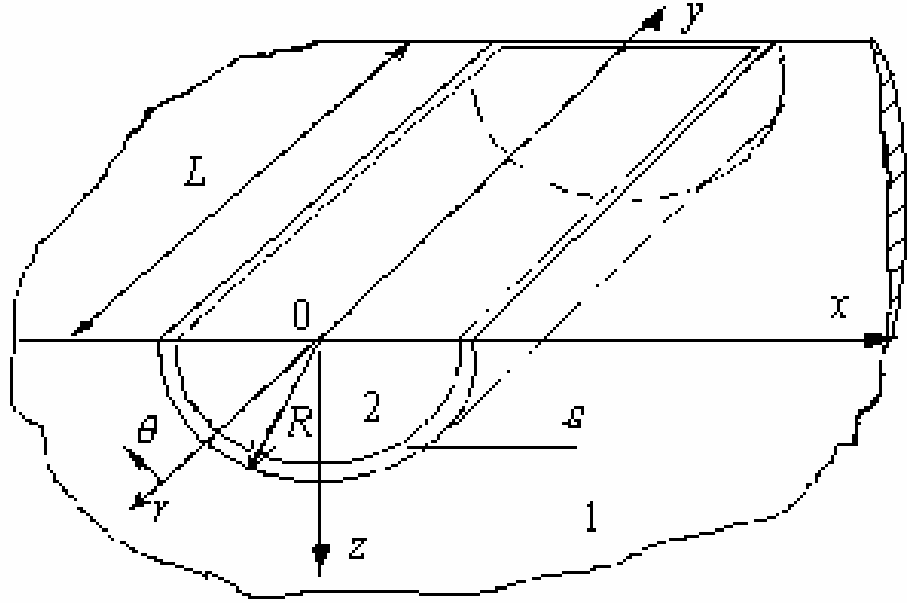


Рис. 1 Схема расположения включения протяженной формы.

На границе включения и матрицы нормальная к границе раздела компонента смещений (т.е. радиальная компонента) терпит скачок:

$$u_r^{(1)} - u_r^{(2)} = \varepsilon \quad (1.1.1)$$

Величина скачка ε определяется отношением плотностей материалов, формой и размером включения. По закону сохранения массы в данном случае имеем:

$$(1/2)\rho_2\pi(R+\varepsilon)^2 = (1/2)\rho_1\pi R^2 \quad (1.1.2)$$

или

$$\frac{\varepsilon}{R} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} - 1. \quad (1.1.3)$$

Внешняя граница полупространства свободна от напряжений, т.е.:

$$\sigma_z^{(R)}\Big|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}^{(R)}\Big|_{z=0} = 0, \quad \tau_{yz}^{(R)}\Big|_{z=0} = 0. \quad (1.1.4)$$

Итак, необходимо решить краевую задачу теории упругости, т.е. определить напряженное состояние упругого полупространства с включением

по известным граничным условиям (1.1), (1.4). Очевидно, остаточные напряжения должны убывать на бесконечности.

Метод решения. Решение поставленной задачи представим в виде суммы двух напряженных состояний:

$$\sigma_{ij}^{(R)} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}. \quad (1.1.5)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(1)}$ соответствует напряженному состоянию бесконечной упругой плоскости с круговым включением. Второе слагаемое $\sigma_{ij}^{(2)}$ представляет собой напряженное состояние нижней полуплоскости, возникающее в результате действия на её границе ($z=0$) фиктивной распределенной нагрузки $p_f(x) = -\sigma_z^{(2)}|_{z=0}$, $q_f(x) = \tau_{xz}^{(2)}|_{z=0}$. Фиктивная нагрузка вводится для того, чтобы удовлетворить граничные условия (2.4). Для этого необходимо выполнение равенства:

$$p_f(x) = \sigma_z^{(1)}|_{z=0}, \quad q_f(x) = -\tau_{xz}^{(1)}|_{z=0}. \quad (1.1.6)$$

Первая вспомогательная задача представляет собой задачу сопряжения для упругого диска, вставленного в круговую полость меньшего радиуса в бесконечной упругой плоскости, выполненной из того же материала. На границе диска и окружающего его материала скачек смещений определяется соотношением (1.1). Решение этой задачи получено в [66, 57] и имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \begin{cases} -A, & x^2 + z^2 < R^2 \\ -AR^2 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}, & x^2 + z^2 > R^2 \end{cases} \\ \sigma_z^{(1)} &= \begin{cases} -A, & x^2 + z^2 < R^2 \\ AR^2 \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2}, & x^2 + z^2 > R^2 \end{cases}, \\ \tau_{xz}^{(1)} &= \begin{cases} 0, & x^2 + z^2 < R^2 \\ -2AR^2 \frac{xz}{(x^2 + z^2)^2}, & x^2 + z^2 > R^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

где

$$A = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\varepsilon}{R}. \quad (1.1.8)$$

Из (1.1.6), (1.1.7) следуют граничные условия (при $z=0$) для решения второй вспомогательной задачи:

$$p_f(x) = \begin{cases} -A, & |x| < R \\ AR^2 \frac{1}{x^2}, & |x| > R \end{cases}, \quad q_f(x) = 0 \quad (1.1.9)$$

Принимая во внимание то обстоятельство, что к границе полуплоскости приложена нормальная нагрузка, для определения составляющих напряжений $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_z^{(2)}$ и $\tau_{xz}^{(2)}$, действующих в нижней полуплоскости, воспользуемся соотношениями [38]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)} &= -\frac{2z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_f(s)(x-s)^2 ds}{((x-s)^2 + z^2)^2}, \\ \sigma_z^{(2)} &= -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_f(s) ds}{((x-s)^2 + z^2)^2}, \\ \tau_{xz}^{(2)} &= -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_f(s)(x-s) ds}{((x-s)^2 + z^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Введем безразмерные координаты и функции:

$$\hat{x} = x/R, \quad \hat{z} = z/R, \quad \hat{p}(\hat{x}) = \frac{p_f(\hat{x})}{A}, \quad \hat{\sigma}_{ij}^{(R)} = \frac{\sigma_{ij}^{(R)}}{A}. \quad (1.1.11)$$

Выражение для фиктивной нагрузки $p_f(x)$ в безразмерных координатах имеет вид:

$$\hat{p}(\hat{x}) = \begin{cases} -1, & |\hat{x}| < 1 \\ \frac{1}{\hat{x}^2}, & |\hat{x}| > 1 \end{cases}, \quad \hat{q}(\hat{x}) = 0 \quad (1.1.12)$$

Подставляя его в (1.1.10), будем иметь:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^{(2)} &= -\frac{2\hat{z}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{(\hat{x}-s)^2 ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} - \int_{-1}^1 \frac{(\hat{x}-s)^2 ds}{((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} + \int_1^{\infty} \frac{(\hat{x}-s)^2 ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} \right], \\ \hat{\sigma}_z^{(2)} &= -\frac{2\hat{z}^3}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} - \int_{-1}^1 \frac{ds}{((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} + \int_1^{\infty} \frac{ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} \right], \\ \hat{\tau}_{xz}^{(2)} &= -\frac{2\hat{z}^2}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{(\hat{x}-s)ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} - \int_{-1}^1 \frac{(\hat{x}-s)ds}{((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} + \int_1^{\infty} \frac{(\hat{x}-s)ds}{s^2((\hat{x}-s)^2 + \hat{z}^2)^2} \right].\end{aligned}\quad (1.1.13)$$

Проводя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned}\pi\hat{\sigma}_x^{(2)} &= -\frac{\pi(\hat{x}^4 - 6\hat{x}^2\hat{z}^2 + \hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{3\hat{x}\hat{z}^3 + \hat{z}\hat{x}^3 + \hat{x}^2\hat{z} - \hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} + \frac{\hat{z}^3 - \hat{z}\hat{x}^3 - \hat{x}^2\hat{z} + 3\hat{x}\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} - \\ &- \frac{\hat{z}(\hat{x}+1)}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} + \frac{\hat{z}(\hat{x}-1)}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}\hat{x}^2}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{2\hat{z}(\hat{x}^3 - \hat{x}\hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ &+ \left[\arctg\left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}}\right) - \arctg\left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}}\right) \right] \left(\frac{(\hat{x}^4 - 6\hat{x}^2\hat{z}^2 + \hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} + 1 \right)\end{aligned}\quad (1.1.14)$$

$$\begin{aligned}\pi\hat{\sigma}_z^{(2)} &= -\frac{\pi(\hat{x}^4 + \hat{x}^2\hat{z}^2 - 3\hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{\hat{z}\hat{x}^3 - \hat{x}^2\hat{z} + \hat{z}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} + \frac{\hat{z}\hat{x}^3 + \hat{x}^2\hat{z} - \hat{z}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} + \\ &+ \frac{\hat{z}(\hat{x}+1)}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{\hat{z}(\hat{x}-1)}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{4\hat{x}\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ &+ \left[\arctg\left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}}\right) - \arctg\left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}}\right) \right] \left(\frac{(\hat{x}^4 + \hat{x}^2\hat{z}^2 - 3\hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} + 1 \right)\end{aligned}\quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned}\pi\hat{\tau}_{xz}^{(2)} &= -\frac{2\hat{z}\pi(\hat{x}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{2\hat{x}\hat{z}^2 - 3\hat{x}^2\hat{z}^2 - \hat{z}^4}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} - \frac{2\hat{x}\hat{z}^2 + 3\hat{x}^2\hat{z}^2 - \hat{z}^4}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} - \\ &- \frac{\hat{z}^2}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} + \frac{\hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}^2\hat{x}}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{\hat{z}^2(3\hat{x}^2 - \hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ &+ \left[\arctg\left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}}\right) - \arctg\left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}}\right) \right] \left(\frac{2\hat{z}(\hat{x}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \right)\end{aligned}\quad (1.1.16)$$

Решение исходной задачи при $z > 0$ получим, подставляя (1.1.7) и (1.1.14)-(1.1.16) в (1.1.5).

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^{(R)} = & -\frac{(\hat{x}^4 - 6\hat{x}^2\hat{z}^2 + \hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{3\hat{x}\hat{z}^3 + \hat{z}\hat{x}^3 + \hat{x}^2\hat{z} - \hat{z}^3}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} + \frac{\hat{z}^3 - \hat{z}\hat{x}^3 - \hat{x}^2\hat{z} + 3\hat{x}\hat{z}^3}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}(\hat{x}+1)}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}(\hat{x}-1)}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}\hat{x}^2}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{2\hat{z}(\hat{x}^3 - \hat{x}\hat{z}^2)}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\pi} \left[\arctg \left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}} \right) - \arctg \left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}} \right) \right] \left[\frac{(\hat{x}^4 - 6\hat{x}^2\hat{z}^2 + \hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} + 1 \right] + \frac{1}{\pi} \begin{cases} -1, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 < 1 \\ -\frac{\hat{x}^2 - \hat{z}^2}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2}, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z^{(R)} = & -\frac{(\hat{x}^4 + \hat{x}^2\hat{z}^2 - 3\hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{\hat{z}\hat{x}^3 - \hat{x}^2\hat{z} + \hat{z}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^3}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} + \frac{\hat{z}\hat{x}^3 + \hat{x}^2\hat{z} - \hat{z}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^3}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}(\hat{x}+1)}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}(\hat{x}-1)}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}^3}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{4\hat{x}\hat{z}^3}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ & + \left[\arctg \left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}} \right) - \arctg \left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}} \right) \right] \left[\frac{(\hat{x}^4 + \hat{x}^2\hat{z}^2 - 3\hat{z}^4)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} + 1 \right] + \frac{1}{\pi} \begin{cases} -1, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 < 1 \\ \frac{\hat{x}^2 - \hat{z}^2}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2}, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{xz}^{(R)} = & -\frac{2\hat{z}(\hat{x}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} - \frac{2\hat{x}\hat{z}^2 - 3\hat{x}^2\hat{z}^2 - \hat{z}^4}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2]} - \frac{2\hat{x}\hat{z}^2 + 3\hat{x}^2\hat{z}^2 - \hat{z}^4}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2[(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2]} - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}^2}{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} - \frac{4\hat{z}^2\hat{x}}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2} + \frac{\hat{z}^2(3\hat{x}^2 - \hat{z}^2)}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \ln \left(\frac{(\hat{x}+1)^2 + \hat{z}^2}{(\hat{x}-1)^2 + \hat{z}^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\pi} \left[\arctg \left(\frac{\hat{x}+1}{\hat{z}} \right) - \arctg \left(\frac{\hat{x}-1}{\hat{z}} \right) \right] \left[\frac{2\hat{z}(\hat{x}^3 - 3\hat{x}\hat{z}^2)}{(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^3} \right] + \begin{cases} 0, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 > 1 \\ -2\frac{\hat{x}\hat{z}}{\pi(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^2}, & \hat{x}^2 + \hat{z}^2 < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Для вычисления максимальных касательных напряжений воспользуемся соотношением:

$$\hat{\tau}_{\max}^{(R)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\hat{\sigma}_z^{(R)} - \hat{\sigma}_x^{(R)} \right)^2 + \left(\hat{\tau}_{xz}^{(R)} \right)^2} \quad (1.1.20)$$

Аналитические выражения для компоненты напряжений $\hat{\sigma}_x$ и максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{max}$ на границе ($z=0$) полупространства имеют вид:

$$\hat{\sigma}_x^{(R)} = \begin{cases} 0 & |\hat{x}| < 1 \\ -\frac{2}{\hat{x}^2} & |\hat{x}| > 1 \end{cases}, \quad (1.1.21)$$

$$\hat{\tau}_{max}^{(R)} = \begin{cases} 0, & |\hat{x}| < 1 \\ \frac{1}{\hat{x}^2}, & |\hat{x}| > 1 \end{cases}. \quad (1.1.22)$$

Максимальное значение $\hat{\tau}_{max}^{(R)} = 1$ на поверхности ($z=0$) и достигается в точках $|\hat{x}| = 1 + 0$.

Анализ результатов. Распределение остаточных напряжений вблизи протяженного включения представлено на рис. 2-4. Графики даны в безразмерных координатах, значения напряжений отнесены к постоянной A (1.1.8). Функции $\hat{\sigma}_x^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$, $\hat{\sigma}_z^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$, $\hat{\tau}_{max}^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$ являются четными, а функция $\hat{\tau}_{xz}(\hat{x}, \hat{z})$ – нечетной по координате \hat{x} .

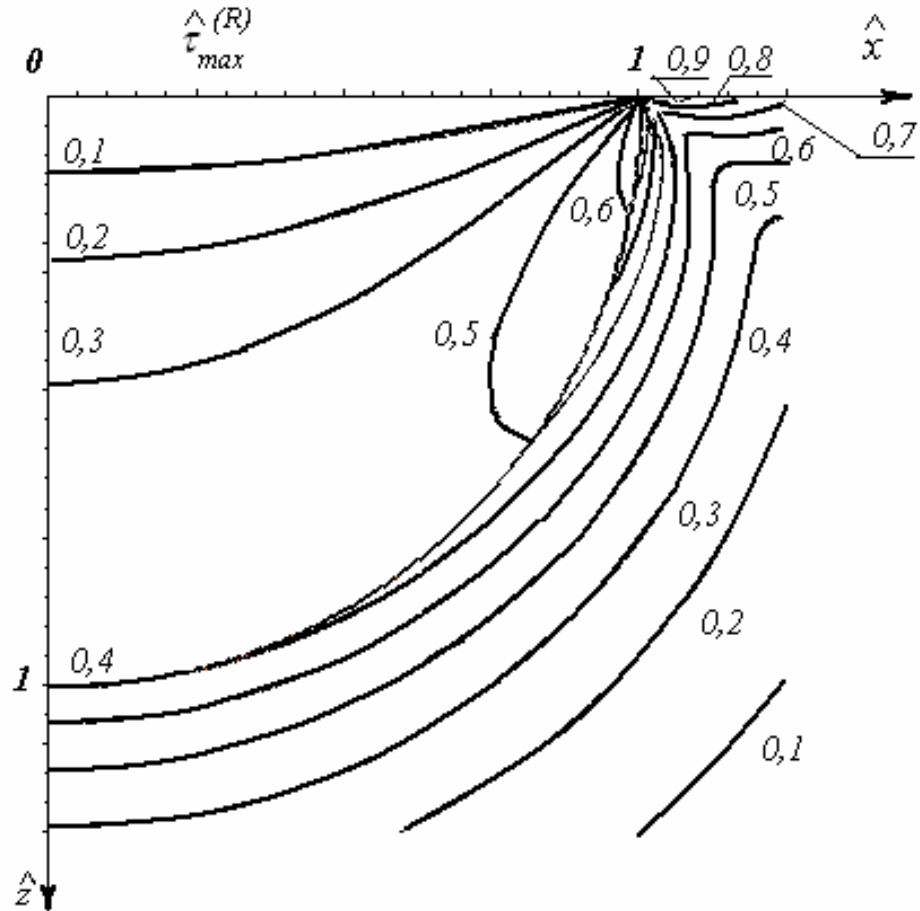


Рис.2 Изолинии максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$ вблизи протяженного включения.

Изолинии максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ изображены на рис.2. Значения $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ терпят разрыв вдоль границы между включением и основным материалом в точках $(\hat{x}^2 + \hat{z}^2)^{1/2} = 1$. Функция $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$ достигает своего максимального значения $\hat{\tau}_{\max}^{(R)} = 1$ в точках $(\pm 1, 0)$, т.е. на поверхности полупространства в основном материале.

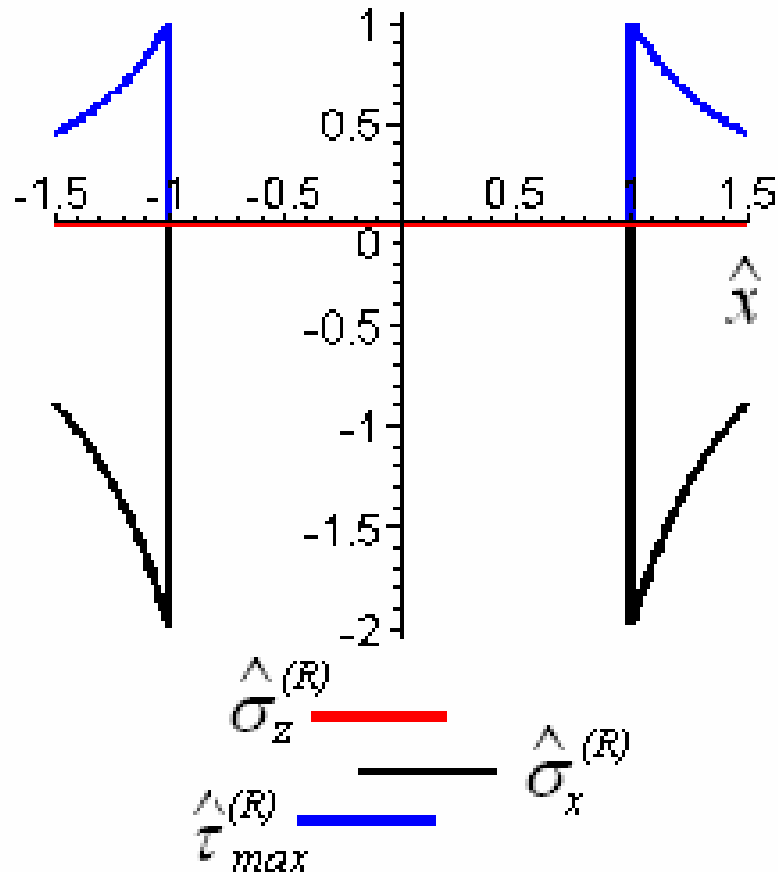


Рис.3 Распределение максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ и компоненты напряжений $\hat{\sigma}_x^{(R)}$ на границе полупространства ($z=0$), имеющего протяженное включение.

На рис.3. приведены графики компоненты напряжений $\hat{\sigma}_x^{(R)}$ и максимальных касательных $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$ при $z=0$ т.е. у поверхности полупространства, построенные по формулам (1.1.17) - (1.1.19). Напряжения $\hat{\sigma}_x^{(R)}$ равны нулю вдоль поверхности включения ($|\hat{x}| < 1$) и являются сжимающими вдоль поверхности основного материала при ($|\hat{x}| > 1$).

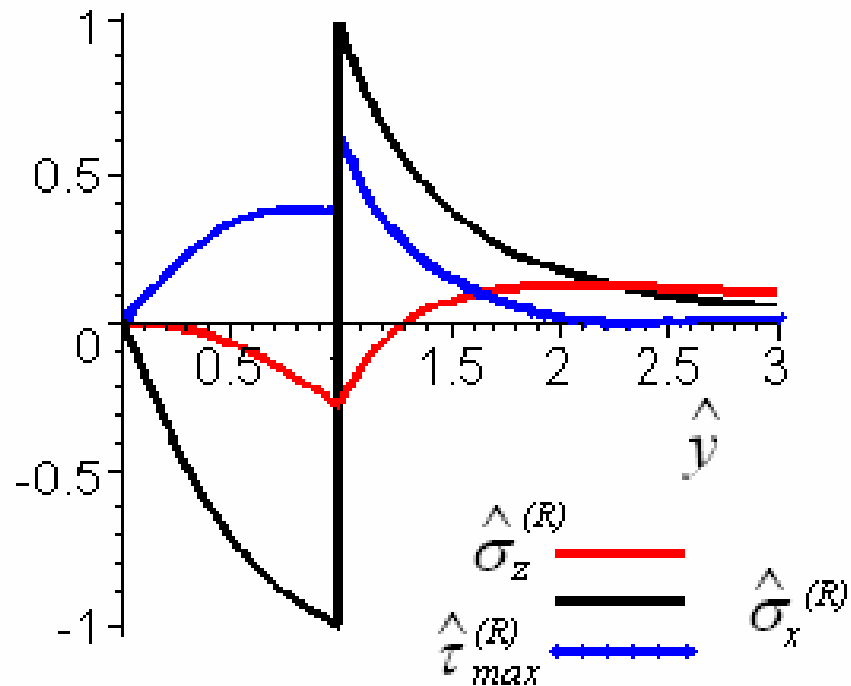


Рис.4 Распределение остаточных напряжений $\hat{\sigma}_x^{(R)}$, $\hat{\sigma}_z^{(R)}$, $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ вдоль оси Oz ($\hat{x}=0$), проходящей через ось симметрии протяженного включения.

На оси симметрии включения ($\hat{x}=0$), напряженное состояние является главным $\hat{\tau}_{xz}^{(R)}=0$ (рис.4). Напряжения $\hat{\sigma}_x^{(R)}$ терпят разрыв в точке $(0, 1)$, они сжимающие во включении и растягивающие в основном материале. Расчеты показывают, что в точке $\hat{z}=1+0$ растягивающие напряжения имеют абсолютный максимум $\hat{\sigma}_x^{(R)}=1$. Функция напряжения $\hat{\sigma}_z^{(R)}(\hat{x}, \hat{z})$ является непрерывной на оси симметрии, хотя ее производная при $\hat{z}=1$ терпит скачок. Максимальные касательные напряжения имеют на оси локальный максимум $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}=0.63$, при $\hat{z}=1+0$.

1.2 Расчет остаточных напряжений вблизи полусферического включения

Постановка задачи. Рассмотрим теперь включение в форме полусферы радиуса R , находящееся в упругом полупространстве и выходящее на его поверхность (рис.5). Как и в предыдущем случае, материал включения и

полупространства является упругим, плотности основного материала и включения ρ_1 и ρ_2 , соответственно, E и ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона, одинаковые для двух сред.

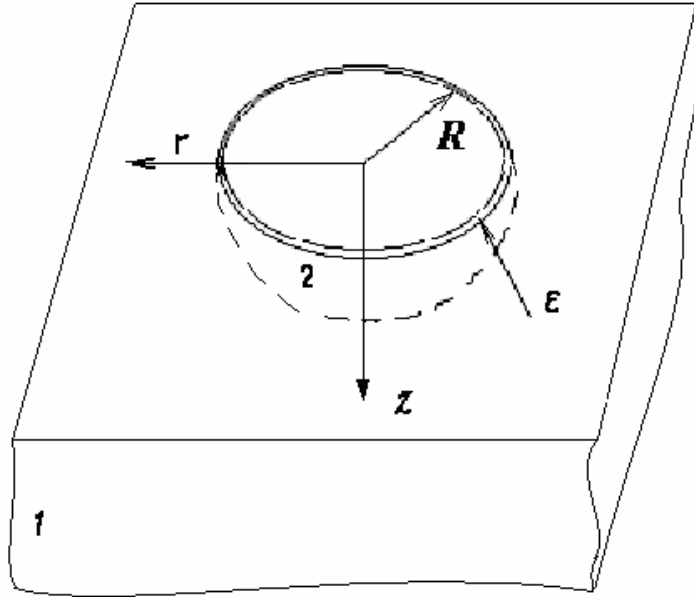


Рис. 5 Схема расположения включения полусферической формы

В сферической системе координат (ρ, φ, ψ) перемещения $u_\rho^{(i)}$ по нормали к границе раздела материалов полупространства ($i=1$) и включения ($i=2$) терпят разрыв на поверхности ($\rho=R$), возникающий вследствие разной плотности материалов. На границе между включением и основным материалом имеет место следующее условие:

$$u_\rho^1 - u_\rho^2 = \varepsilon, \quad (1.2.1)$$

где величина ε вычисляется из закона сохранения массы. Для данной формы включения получим:

$$\frac{\Delta V}{V} = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2\pi R^2 \varepsilon}{2/3\pi R^3}, \quad \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \quad (1.2.2)$$

Метод решения. Для решения осесимметричной задачи воспользуемся, как и в предыдущем случае, принципом суперпозиции. Представим напряжения в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(R)} &= \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)}, \sigma_z^{(R)} = \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}, \sigma_\theta^{(R)} = \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_\theta^{(2)}, \\ \tau_{rz}^{(R)} &= \tau_{rz}^{(1)} + \tau_{rz}^{(2)}, \tau_{r\theta}^{(R)} = \tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(2)}, \tau_{\theta z}^{(R)} = \tau_{\theta z}^{(1)} + \tau_{\theta z}^{(2)},\end{aligned}\quad (1.2.3)$$

где компоненты напряжения с индексом 1 $\sigma_{ij}^{(1)}$ являются решением пространственной задачи теории упругости о концентрации напряжений вблизи сферического отверстия радиуса R , в которое вставлен шар большего радиуса $(R+\varepsilon)$. Решение этой задачи в сферических координатах (ρ, φ, ϕ) имеет вид [59]:

$$\sigma_\rho^{(1)} = \begin{cases} -B, & \rho \leq R \\ -B \frac{R^3}{\rho^3}, & \rho > R \end{cases}, \quad \sigma_\phi^{(1)} = \sigma_\varphi^{(1)} = \begin{cases} -B, & \rho \leq R \\ \frac{1}{2} B \frac{R^3}{\rho^3}, & \rho > R \end{cases}. \quad (1.2.4)$$

где $\rho^2 = (r^2 + z^2)$, постоянная B равна:

$$B = \frac{E}{2-\nu} \frac{\varepsilon}{R}. \quad (1.2.5)$$

Компоненты напряжений с индексом 2 $\sigma_{ij}^{(2)}$ в соотношениях (1.2.3) могут быть найдены из решения первой основной задачи для упругого полупространства с граничными условиями при $z=0$ вида:

$$\sigma_z^{(2)} = \begin{cases} B, & r \leq R \\ -\frac{1}{2} B \frac{R^3}{r^3}, & r > R \end{cases}, \quad \tau_{rz}^{(2)} = \tau_{\theta z}^{(2)} = 0. \quad (1.2.6)$$

Т.е. фиктивное давление:

$$p_f(r) = \begin{cases} -B, & r \leq R \\ \frac{1}{2} B \frac{R^3}{r^3}, & r > R \end{cases}. \quad (1.2.6a)$$

Метод расчета напряжений внутри осесимметрично нагруженного упругого полупространства изложен в [53] и основан на известном решении задачи Буссинеска и принципе суперпозиции.

Суммарное напряженное состояние в произвольной точке упругого полупространства с включением, определяемое выражением (1.2.3) и удовлетворяющее условию свободной границы, т.е. $\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$, а также скачку перемещений (1.2.1), в общем случае может быть получено численно.

Однако в частных случаях, на оси симметрии включения и на границе полупространства можно получить аналитические выражения для компонент тензора напряжений.

Введем безразмерные координаты и переменные:

$$\hat{z} = z / R, \quad \hat{r} = r / R, \quad \hat{\sigma}_{ij}^{(R)} = \sigma_{ij}^{(R)} / B. \quad (1.2.7)$$

На оси симметрии Oz ($r=0$) напряженное состояние является главным ($\tau_{ij}^{(2)}=0$) и определяется в соответствии с (1.2.3). Компоненты напряжений с индексом 1 получим из (1.2.4) при $r=0$

$$\hat{\sigma}_r^{(1)} \Big|_{r=0} = \begin{cases} -1, & \hat{z} \leq 1 \\ -\frac{1}{\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases}, \quad \hat{\sigma}_z^{(1)} \Big|_{r=0} = \hat{\sigma}_\theta^{(1)} \Big|_{r=0} = \begin{cases} -1, & \hat{z} \leq 1 \\ \frac{1}{2\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Напряжения с индексом 2 вычисляются аналитически. Для этого воспользуемся выражениями [62]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_\theta, \\ \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z &= -\frac{P(1+\nu)z}{\pi\rho^3}, \\ \sigma_z &= -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Здесь P сосредоточенная сила, приложенная в начале координат.

Рассмотрим кольцевой элемент площадью $2\pi r dr$ и радиусом r . Нагрузка на кольцо равна $2\pi r p_f(r) dr$. Подставляя это в выражение (1.2.9), интегрируя по всей области, где приложена фиктивная нагрузка, и проводя простые преобразования, находим:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} &= \frac{3}{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{2\pi\hat{r}\hat{z}^3}{(\hat{r}^2 + \hat{z}^2)^{5/2}} d\hat{r} - \int_1^\infty \frac{2\pi\hat{r}\hat{z}^3}{2\hat{r}^3(\hat{r}^2 + \hat{z}^2)^{5/2}} d\hat{r} \right) = \\ &= 1 - \frac{\hat{z}^3}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right),\end{aligned}\quad (1.2.10a)$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_r^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} + \hat{\sigma}_\theta^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} + \hat{\sigma}_z^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} &= \frac{(1+\nu)}{\pi} \left(\int_0^1 \frac{2\pi\hat{r}\hat{z}}{(\hat{r}^2 + \hat{z}^2)^{3/2}} d\hat{r} - \int_1^\infty \frac{2\pi\hat{r}\hat{z}}{2\hat{r}^3(\hat{r}^2 + \hat{z}^2)^{3/2}} d\hat{r} \right); \\ \hat{\sigma}_r^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} = \hat{\sigma}_\theta^{(2)}\Big|_{\hat{r}=0} &= \frac{1}{2} + \nu + \frac{(1+\nu)}{\hat{z}^3} + \frac{\hat{z}^3}{2(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - \frac{(1+\nu)(2\hat{z}^4 + \hat{z}^2 + 2)}{2\hat{z}^3\sqrt{1 + \hat{z}^2}} \\ &+ \frac{1}{4\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right).\end{aligned}\quad (1.2.10б)$$

Выражения (1.2.8), (1.2.10) позволяют вычислить максимальные касательные напряжения в полупространстве с включением на оси Oz :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_r^{(R)}\Big|_{r=0} &= \frac{1+2\nu}{2} + \frac{\hat{z}^3}{2(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} + \frac{(1+\nu)}{\hat{z}^3} \left(1 - \frac{2\hat{z}^4 + \hat{z}^2 + 2}{2\sqrt{1 + \hat{z}^2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right) + \begin{cases} -1, & \hat{z} \leq 1 \\ -\frac{1}{\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases} \\ \hat{\sigma}_z^{(R)}\Big|_{r=0} &= 1 - \frac{\hat{z}^3}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right) + \begin{cases} -1, & \hat{z} \leq 1 \\ \frac{1}{2\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases} \\ \hat{\sigma}_\theta^{(R)}\Big|_{r=0} &= \frac{1+2\nu}{2} + \frac{\hat{z}^3}{2(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} + \frac{(1+\nu)}{\hat{z}^3} \left(1 - \frac{2\hat{z}^4 + \hat{z}^2 + 2}{2\sqrt{1 + \hat{z}^2}} \right) + \\ &+ \frac{1}{4\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1 + \hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right) + \begin{cases} -1, & \hat{z} \leq 1 \\ \frac{1}{2\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases} \\ \hat{\tau}_{\max}^{(R)}\Big|_{r=0} &= \frac{|\hat{\sigma}_r - \hat{\sigma}_z|}{2} = \frac{1}{4} \left| \begin{cases} f, & \hat{z} < 1 \\ f + \frac{4}{\hat{z}^3}, & \hat{z} > 1 \end{cases} \right|\end{aligned}\quad (1.2.11)$$

где

$$f = 2\nu - 1 + \frac{(1+\nu)}{\hat{z}^4} \left(2 - 5\sqrt{1+\hat{z}^4} \right) + \frac{3\hat{z}^3}{(1+\hat{z}^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\hat{z}^3} \left(\frac{3\hat{z}^4 + 12\hat{z}^2 + 8}{(1+\hat{z}^2)^{3/2}} - 8 \right).$$

На поверхности полупространства при $z=0$ выражение (1.2.4) для безразмерных напряжений $\hat{\sigma}_{ij}^{(1)}$ имеет вид:

$$\hat{\sigma}_r^{(1)} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -1, & \hat{r} \leq 1 \\ -\frac{1}{\hat{r}^3}, & \hat{r} > 1 \end{cases}, \quad \hat{\sigma}_z^{(1)} \Big|_{z=0} = \hat{\sigma}_\theta^{(1)} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -1, & \hat{r} \leq 1 \\ \frac{1}{2\hat{r}^3}, & \hat{r} > 1 \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Для расчета компонент напряжений с индексом 2 при $z=0$ воспользуемся решением задачи о равномерном давлении $p(a)=const$, приложенном к круговой области радиуса a внешней границы полупространства. Если центр области нагружения расположен в начале координат, то напряженное состояние при $z=0$ определяется выражением [38]:

$$\sigma_r = \frac{p(a)}{2} \begin{cases} -(1+2\nu), & r \leq a \\ \frac{(1-2\nu)a^2}{r^2}, & r > a \end{cases}, \quad \sigma_\theta = \frac{p(a)}{2} \begin{cases} -(1+2\nu), & r \leq a \\ -\frac{(1-2\nu)a^2}{r^2}, & r > a \end{cases}. \quad (1.2.13)$$

Это выражение позволяет вычислить напряжения на поверхности полупространства, возникающие от действия фиктивного постоянного давления в области $r < 1$. Область $r > 1$ разобьем на тонкие кольца толщиной da и положим давление внутри каждого из колец радиуса a ($1 < a < \infty$) постоянным. На основе решения (1.2.13) можно получить распределение напряжений, возникающих от постоянного давления $p(a)$, приложенного к кольцевой области с внутренним радиусом a и шириной da .

$$\sigma_r = \frac{p(a)}{2} \begin{cases} 0, & r < a \\ -\left[1 + 2\nu + (1 - 2\nu)\frac{a^2}{r^2}\right], & a < r < a + da \\ (1 - 2\nu)\left(\frac{(a + da)^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^2}\right), & r \geq a + da \end{cases} . \quad (1.2.14a)$$

$$= \frac{p(a)}{2} \begin{cases} 0, & r < a \\ -\left[1 + 2\nu + (1 - 2\nu)\frac{a^2}{r^2}\right], & a < r < a + da \\ (1 - 2\nu)\frac{2ada}{r^2}, & r \geq a + da \end{cases}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p(a)}{2} \begin{cases} 0, & r < a \\ -(1 + 2\nu) + (1 - 2\nu)\frac{a^2}{r^2}, & a < r < a + da \\ -(1 - 2\nu)\frac{2ada}{r^2}, & r \geq a + da \end{cases} . \quad (1.2.14б)$$

$$p(a) = \frac{1}{2a^3} .$$

Здесь пренебрегается членами порядка $o(da^2)$.

Затем необходимо просуммировать напряжения, возникающие от действия постоянного давления в круге $r=1$ и всех кольцах $1 < a < \infty$. При $da \rightarrow 0$ перейдем к интегралу по области $(1, r)$, так как давление на кольцах радиуса $r < a < \infty$ дает нулевой вклад в напряженное состояние на поверхности полупространства в точке $r < a$. Для распределенной нагрузки $p_f(r) = -\sigma_z^{(2)}$, определяемой (1.2.6а), напряжения в безразмерных координатах с учетом (1.2.13) (1.2.14) представим в виде:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_r^{(2)}\Big|_{z=0} &= \frac{1}{2} \begin{cases} 1+2\nu, & \hat{r} \leq 1 \\ -\frac{1-2\nu}{\hat{r}^2} + \int_1^{\hat{r}} \frac{1-2\nu}{\hat{r}^2 a^2} da, & \hat{r} > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} 1+2\nu, & \hat{r} \leq 1 \\ -\frac{1-2\nu}{\hat{r}^3}, & \hat{r} > 1 \end{cases} \\
\hat{\sigma}_\theta^{(2)}\Big|_{z=0} &= \frac{1}{2} \begin{cases} -(1+2\nu), & \hat{r} \leq 1 \\ -\frac{1-2\nu}{\hat{r}^2} - \int_1^{\hat{r}} \frac{1-2\nu}{\hat{r}^2 a^2} da, & \hat{r} > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} 2\nu-1, & \hat{r} \leq 1 \\ \frac{1-2\nu}{\hat{r}^3}, & \hat{r} > 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

С учетом выражений (1.2.4) для $\sigma_{ij}^{(1)}$ при $z=0$ получим напряжения в произвольной точке r на поверхности полупространства с включением. Здесь отличными от нуля компонентами напряжений являются σ_r и σ_θ , для которых получены аналитические выражения:

$$\hat{\sigma}_r^{(R)}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \begin{cases} 2\nu-1, & |\hat{r}| \leq 1 \\ \frac{2\nu-3}{\hat{r}^3}, & |\hat{r}| > 1 \end{cases}, \quad \hat{\sigma}_\theta^{(R)}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \begin{cases} 2\nu-1, & |\hat{r}| \leq 1 \\ \frac{2-2\nu}{\hat{r}^3}, & |\hat{r}| > 1 \end{cases} \tag{1.2.16}$$

Поскольку поверхность пространства свободна от напряжений ($\sigma_z=0$ при $z=0$), Максимальные касательные напряжения $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ вычисляются по формуле:

$$\hat{\tau}_{\max}^{(R)} = \frac{1}{4} \begin{cases} |2\nu-1|, & |\hat{r}| \leq 1 \\ \left| \frac{4\nu-5}{\hat{r}^3} \right|, & |\hat{r}| > 1 \end{cases}. \tag{1.2.17}$$

Максимальное значение $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ на поверхности ($z=0$) достигается в точках $|\hat{r}|=1+0$.

Анализ результатов. Отметим, что оба решения плоской и пространственной задач, соответствующие выражениям (1.1.17) - (1.1.20) и (1.2.3), (1.2.10), (1.2.16) не зависят напрямую от характерного размера включения R , а только от отношения ε/R . Расчеты проводились при значении коэффициента Пуассона $\nu=0.3$.

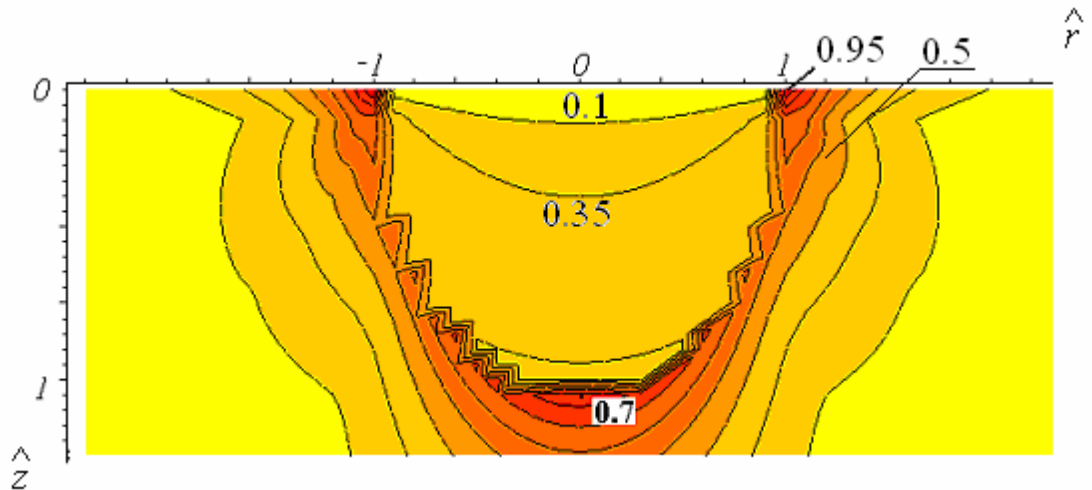


Рис.6. Изолинии максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{max}^{(R)}(\hat{r}, \hat{z})$ в полупространстве с полусферическим включением (произвольное сечение, проходящее через ось симметрии).

Изолинии максимальных касательных напряжений, возникающих вблизи полусферического включения, приведены на рис. 6. Как и в случае вытянутого включения, граница материалов является концентратором остаточных напряжений, причем значения максимальных касательных напряжений в основном материале выше, чем во включении.

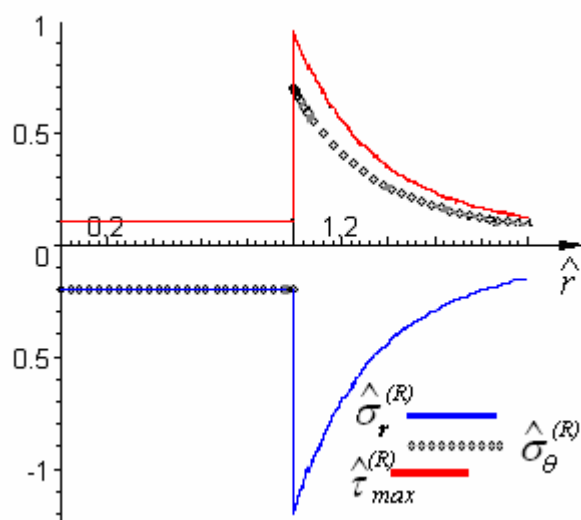


Рис.7. Распределение остаточных напряжений $\hat{\sigma}_r^{(R)}$, $\hat{\sigma}_\theta^{(R)}$, $\hat{\tau}_{max}^{(R)}$ на поверхности полупространства, имеющего полусферическое включение.

На рис.7. приведены графики напряжений $\hat{\sigma}_r^{(R)}$, $\hat{\sigma}_\theta^{(R)}$ и максимальных касательных напряжений $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ на поверхности полупространства при $\hat{z}=0$, построенные по формулам (1.2.16) - (1.2.17). Напряжения $\hat{\sigma}_r^{(R)}$ являются сжимающими у поверхности полупространства и терпят разрыв в точках $(\pm 1, 0)$. Компонента напряжений $\hat{\sigma}_\theta^{(R)}$ является сжимающей у поверхности включения ($\hat{r} < 1$) и растягивающей у поверхности основного материала при ($\hat{r} > 1$). Растягивающие напряжения достигают локального максимума $\hat{\sigma}_\theta^{(R)} = 0.7$ в точке $(1+0, 0)$. Абсолютный максимум максимальных касательных напряжений имеет место на границе полупространства в основном материале при $(\hat{z} = 0, \hat{r} = 1+0)$ и составляет $\hat{\tau}_{\max}^{(R)} = 0.95$.

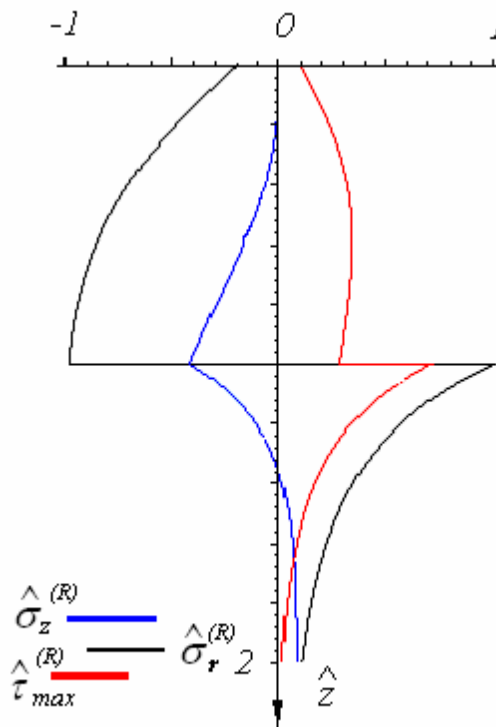


Рис.8. Распределение остаточных напряжений $\hat{\sigma}_r^{(R)}$, $\hat{\sigma}_z^{(R)}$, $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ под поверхностью вдоль оси симметрии включения полусферической формы.

На оси симметрии включения ($\hat{r}=0$) отличными от нуля компонентами напряжений являются $\hat{\sigma}_r^{(R)} = \hat{\sigma}_\theta^{(R)}$ и $\hat{\sigma}_z^{(R)}$, которые определяются соотношениями (1.2.10), (1.2.11). Напряжения $\hat{\sigma}_r^{(R)}$ меняются скачком на границе включения, а функция $\hat{\sigma}_z^{(R)}(\hat{z})$ является непрерывной, хотя ее производная при $\hat{z}=1$ меняет знак (рис. 8). На оси симметрии включения в основном материале $(0,1+0)$ достигается абсолютный максимум растягивающих напряжений $\hat{\sigma}_r^{(R)}=1$. Значения $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}$ на оси симметрии включения имеют локальный максимум на границе в основном материале в точке $\hat{z}=1+0$, который по величине составляет $\hat{\tau}_{\max}^{(R)}=0.7$.

1.3 Сравнительная оценка величины напряжений у включений разной формы

Изучение распределения напряжений вблизи протяженного и сферического включений показывает, что в обоих случаях граница включения и основного материала является концентратором остаточных напряжений, причем наиболее опасным местом с точки зрения разрушения являются области основного материала вблизи поверхности полупространства; этот результат хорошо согласуется с данными наблюдений. На оси симметрии включения в основном материале имеет место локальный максимум τ_{\max} .

Проведем количественный анализ напряжений для мартенситных включений расположенных на поверхности полупространства. Материал полупространства – перлит. Учитывая, что для рассматриваемых материалов модуль упругости составляет $E=0.21 \cdot 10^{12}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, а плотность перлита $\rho_1=7.8$ г/см³ уменьшается при фазовом превращении до $\rho_2=7.75$ г/см³, получим из (1.1.3) и (1.1.8) относительное увеличение радиуса протяженного включения $\varepsilon/R=0.003$ и постоянную $A=346$ МПа. Максимум максимальных касательных напряжений вблизи протяженного включения достигает значения $\max(\tau_{\max})=346$ МПа. Для включения в форме полусферы в

соответствии с (1.2.2) (1.2.5) параметры задачи составляют $\varepsilon/R=0.002$ и $B=247$ МПа. Таким образом, максимальное значение максимальных касательных напряжений вблизи полусферического включения равно $\max(\tau_{max})=234.65$ МПа. Максимумы растягивающих напряжений в обоих случаях локализованы на оси симметрии в основном материале ($r=0, z=R+0$). В двумерном случае он составляет $|\sigma_x|=346$ МПа, в случае полусферического включения $|\sigma_r|=247$ МПа.

Приведенные выше значения сравнимы с прочностными характеристиками материала, что говорит о возможном разрушении, появлении микротрещин при наложении поля остаточных напряжений на поле напряжений, возникающее при контактном взаимодействии.

1.4 Напряженное состояние упругих тел с включениями при контактном взаимодействии

Постановка задачи. Исследуется контактное взаимодействие жесткого тела и упругого полупространства с выходящим на поверхность включением. Рассматриваются включения, образовавшиеся в результате фазового перехода, которые моделируются длинным полуцилиндром и полусферой. Выходящая на поверхность граница включения предполагается плоской (т.е. мы пренебрегаем возможным формоизменением границы в процессе фазового превращения). Основной материал и включение являются упругими и имеют одинаковые модули Юнга E и коэффициенты Пуассона ν . Трение на границе отсутствует.

Расположение включений и схема контакта изображены на рис.9, где приняты следующие обозначения: R – радиус включения, L – длина протяженного включения, D – минимальное расстояние между осью включения и центром площадки контакта. Введем декартову ($Oxyz$) и цилиндрическую ($Or\theta z$) системы координат, ось Oz направим вглубь полупространства.

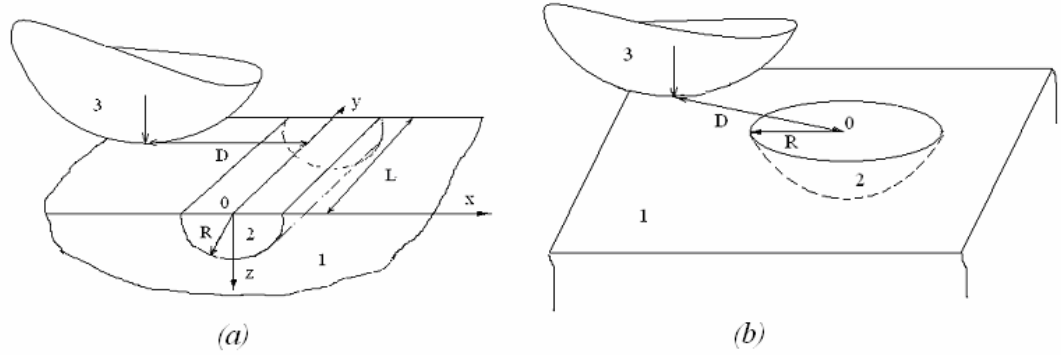


Рис. 9 Схема контакта жесткого индентора и упругого полупространства с включением в форме полуцилиндра (a) и полусферы (b).

Граничные условия на поверхности полупространства при $z=0$ имеют вид:

$$\sigma_z|_{z=0} = \begin{cases} p(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \notin \Omega \end{cases}, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = \tau_{yz}|_{z=0} = 0. \quad (1.4.1)$$

Здесь $p(x, y)$ - давление внутри области контакта Ω . Предполагается, что напряженное состояние, возникающее при контактном взаимодействии, не приводит к изменению формы и размеров включения и задачи определения внутренних контактных и остаточных напряжений можно решать отдельно.

Метод решения. Напряженное состояние полупространства с включением при контактном взаимодействии определяется методом суперпозиции:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(R)}, \quad (1.4.2)$$

где $\sigma_{ij}^{(C)}$ – внутренние напряжения, возникающие в результате контактного взаимодействия, $\sigma_{ij}^{(R)}$ – остаточные напряжения.

Чтобы получить выражения для компонент тензора внутренних напряжений $\sigma_{ij}^{(C)}$ в полупространстве соотношениями [14]:

$$\sigma_x^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left(\frac{z}{r^3} \left(\frac{3(x-\xi)^2}{r^2} - (1-2\nu) \right) + (1-2\nu) \left(\frac{(y-\eta)^2 + z^2}{r^3(z+r)} - \frac{(x-\xi)^2}{r^2(z+r)^2} \right) \right) d\xi d\eta$$

$$\sigma_y^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left(\frac{z}{r^3} \left(\frac{3(y-\eta)^2}{r^2} - (1-2\nu) \right) + (1-2\nu) \left(\frac{(x-\xi)^2 + z^2}{r^3(z+r)} - \frac{(y-\eta)^2}{r^2(z+r)^2} \right) \right) d\xi d\eta$$

$$\sigma_z^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} 3p(\xi, \eta) \frac{z^3}{r^5} d\xi d\eta \quad (1.4.3)$$

$$\tau_{xy}^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \left(\frac{3(x-\xi)(y-\eta)z}{r^5} - (1-2\nu) \frac{(x-\xi)(y-\eta)(z-2r)}{r^3(r+z)^3} \right) d\xi d\eta$$

$$\tau_{yz}^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} 3p(\xi, \eta) \frac{(y-\eta)z^2}{r^5} d\xi d\eta$$

$$\tau_{xz}^{(C)} = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} 3p(\xi, \eta) \frac{(x-\xi)z^2}{r^5} d\xi d\eta$$

Здесь $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$.

Аналитические соотношения, позволяющие рассчитывать остаточные напряжения $\sigma_{ij}^{(R)}$ в упругом полупространстве с включением, получены в пунктах 1.1, 1.2. Заметим, что эти напряжения зависят от постоянного коэффициента, который определяется отношением плотностей материалов, его упругими характеристиками и формой включения. Для протяженного и полусферического включений значение этого коэффициента определяются с помощью (1.1.8) и (1.2.5) соответственно.

Распределение остаточных напряжений вблизи протяженного включения рассматривалось вдали от его концов. Компонента тензора напряжений $\sigma_n^{(R)}$ была рассчитана по формуле:

$$\tilde{\sigma}_y^{(R)} = \nu(\tilde{\sigma}_x^{(R)} + \tilde{\sigma}_z^{(R)})$$

В приведенных далее расчетах внутренних напряжений предполагалось, что индентор является сферическим. Распределение контактных давлений тогда определяется теорией Герца [38], а площадка контакта представляет собой круг радиуса a .

В частных случаях, когда центр площадки контакта совпадает с осью протяженного и центром полусферического включений получены

аналитические соотношения для компонент тензора напряжений на поверхности полупространства и на оси симметрии включения.

Напряжения, вблизи протяженного включения на оси симметрии при $x=0$ согласно (1.1.17), (1.1.18) и формулам Герца имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x|_{x=0} = & -\frac{\tilde{A}}{\pi} \left(\frac{\pi \tilde{R}^2}{\tilde{z}^2} - \frac{2\tilde{R}^3}{\tilde{z}(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} + \frac{2\tilde{z}\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} - 2\left(1 + \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{z}^2}\right) \text{arctg}(\tilde{R}/\tilde{z}) \right) + \\ & + \tilde{A} \begin{cases} -1, & \tilde{z} < \tilde{R} \\ \tilde{R}^2/\tilde{z}^2, & \tilde{z} > \tilde{R} \end{cases} - (1+\nu)(1 - \tilde{z} \text{arctg}(1/\tilde{z})) + \frac{1}{2(1+\tilde{z}^2)} \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_z|_{x=0} = & -\frac{\tilde{A}}{\pi} \left(\frac{3\pi \tilde{R}^2}{\tilde{z}^2} - \frac{2\tilde{R}^3}{\tilde{z}(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} - \frac{4\tilde{R}}{\tilde{z}} + \frac{2\tilde{z}\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} - 2\left(1 - \frac{3\tilde{R}^2}{\tilde{z}^2}\right) \text{arctg}(\tilde{R}/\tilde{z}) \right) - \\ & - \tilde{A} \begin{cases} 1, & \tilde{z} < \tilde{R} \\ \tilde{R}^2/\tilde{z}^2, & \tilde{z} > \tilde{R} \end{cases} - \frac{1}{1+\tilde{z}^2} \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_y|_{x=0} = & -\nu \frac{4\tilde{A}}{\pi} \left(\frac{\pi \tilde{R}^2}{\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{R}^3}{\tilde{z}(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} - \frac{\tilde{R}}{\tilde{z}} + \frac{\tilde{z}\tilde{R}}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)} - \left(1 - \frac{\tilde{R}^2}{\tilde{z}^2}\right) \text{arctg}(\tilde{R}/\tilde{z}) \right) - \\ & - \tilde{A}\nu \begin{cases} 2, & \tilde{z} < \tilde{R} \\ 0, & \tilde{z} > \tilde{R} \end{cases} - (1+\nu)(1 - \tilde{z} \text{arctg}(1/\tilde{z})) + \frac{1}{2(1+\tilde{z}^2)} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

здесь и далее $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / p_0$; $\tilde{A} = A / p_0$; $\tilde{z} = z / a$; $\tilde{x} = x / a$; $\tilde{R} = R / a$; p_0 – максимальное давление на площадке контакта.

На поверхности полупространства при $z=0$:

$$\tilde{\sigma}_x|_{z=0} = -\tilde{A} \begin{cases} \left(1 + (\tilde{R}^2/\tilde{x}^2)\right), & \tilde{x} < \tilde{R} \\ 0, & \tilde{x} > \tilde{R} \end{cases} + \begin{cases} (1-2\nu)(1 - (1-\tilde{x}^2)^{3/2})/3\tilde{x}^2, & \tilde{x} < 1 \\ (1-2\nu)/3\tilde{x}^2, & \tilde{x} > 1 \end{cases} \quad (1.4.7)$$

$$\tilde{\sigma}_z|_{z=0} = -\tilde{A} \begin{cases} 1 + (\tilde{R}^2/\tilde{x}^2), & \tilde{x} < \tilde{R} \\ 2\tilde{R}^2/\tilde{x}^2, & \tilde{x} > \tilde{R} \end{cases} + \begin{cases} -\sqrt{1-\tilde{x}^2}, & \tilde{x} < 1 \\ 0, & \tilde{x} > 1 \end{cases} \quad (1.4.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_y|_{z=0} = & -2\nu \tilde{A} \begin{cases} \left(1 + (\tilde{R}^2/\tilde{x}^2)\right), & \tilde{x} < \tilde{R} \\ \tilde{R}^2/\tilde{x}^2, & \tilde{x} > \tilde{R} \end{cases} + \\ & + \begin{cases} -(1-2\nu)(1 - (1-\tilde{x}^2)^{3/2})/3\tilde{x}^2 - 2\nu\sqrt{1-\tilde{x}^2}, & \tilde{x} < 1 \\ -(1-2\nu)/3\tilde{x}^2, & \tilde{x} > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Напряжения, вблизи полусферического включения на оси симметрии при $r=0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_z|_{r=0} &= -\frac{1}{1+\tilde{z}^2} + \tilde{B} \left\{ 1 - \frac{\tilde{z}^3}{(1+\tilde{z}^2)^{3/2}} - \frac{1}{2\tilde{z}^3} \left[\frac{3\tilde{z}^4 + 12\tilde{z}^2 + 8}{(1+\tilde{z}^2)^{3/2}} - 8 \right] - \left\{ \frac{1}{\tilde{z}^3}, \quad \tilde{z} > \tilde{R} \right\} \right. \\
\tilde{\sigma}_r|_{r=0} &= (1+\nu) \left[\tilde{z} \arctg\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2(1+\tilde{z}^2)} - \frac{1}{2} \tilde{B} \left\{ \frac{1}{\tilde{z}^3}, \quad \tilde{z} > \tilde{R} \right\} + \\
&+ \frac{1}{2} \tilde{B} \left[1 + 2\nu + \frac{2(1+\nu)}{\tilde{z}^3} + \frac{\tilde{z}^3}{(1+\tilde{z}^2)^{3/2}} - \frac{(1+\nu)(2\tilde{z}^4 + \tilde{z}^2 + 2)}{\tilde{z}^3 \sqrt{1+\tilde{z}^2}} + \frac{1}{2\tilde{z}^3} \left[\frac{3\tilde{z}^4 + 12\tilde{z}^2 + 8}{(1+\tilde{z}^2)^{3/2}} - 8 \right] \right]
\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

$$\tilde{\sigma}_\theta|_{r=0} = \tilde{\sigma}_r|_{r=0}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{\max}|_{r=0} &= \frac{1}{2} \left| (1+\nu) \left[\tilde{z} \arctg\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) - 1 \right] + \frac{3}{2(1+\tilde{z}^2)} + \tilde{B} \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \tilde{z} \leq \tilde{R} \\ \frac{3\tilde{R}^3}{2\tilde{z}^3}, \quad \tilde{z} > \tilde{R} \end{array} \right. \right. \\
&+ \frac{\tilde{B}}{2} \left[2\nu - 1 + \frac{2(1+\nu)\tilde{R}^3}{\tilde{z}^3} + \frac{3\tilde{z}^3}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} - \frac{(1+\nu)(2\tilde{z}^4 + \tilde{z}^2\tilde{R}^2 + 2\tilde{R}^4)}{\tilde{z}^3(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{1/2}} + \right. \\
&\left. \left. + \frac{3\tilde{R}^2}{2\tilde{z}^3} \left(\frac{3\tilde{z}^4 + 12\tilde{z}^2\tilde{R}^2 + 8\tilde{R}^4}{(\tilde{R}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} - 8 \right) \right] \right|
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

здесь $\tilde{B} = B/p_0$; $\tilde{r} = r/a$.

На поверхности полупространства при $z=0$:

$$\tilde{\sigma}_r|_{z=0} = \begin{cases} \frac{(1-2\nu)\tilde{r}}{3} - \sqrt{1-\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| \leq 1 \\ \frac{(1-2\nu)}{3\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| > 1 \end{cases} + \frac{\tilde{B}}{2} \begin{cases} (2\nu-1), & |\tilde{r}| \leq \tilde{R} \\ \frac{2\nu-3}{\tilde{r}^3} \tilde{R}^3, & |\tilde{r}| > \tilde{R} \end{cases}, \tag{1.4.12}$$

$$\tilde{\sigma}_\theta|_{z=0} = - \begin{cases} \frac{(1-2\nu)\tilde{r}}{3} + 2\nu\sqrt{1-\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| \leq 1 \\ \frac{(1-2\nu)}{3\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| > 1 \end{cases} + \frac{\tilde{B}}{2} \begin{cases} (2\nu-1), & |\tilde{r}| \leq \tilde{R} \\ -\frac{2\nu-2}{\tilde{r}^3} \tilde{R}^3, & |\tilde{r}| > \tilde{R} \end{cases},$$

$$\tilde{\tau}_{\max}|_{z=0} = \left| \begin{cases} \frac{(1-2\nu)\tilde{r}}{3} - (1+2\nu)\sqrt{1-\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| \leq 1 \\ \frac{(1-2\nu)}{3\tilde{r}^2}, & |\tilde{r}| > 1 \end{cases} + \frac{\tilde{B}}{4} \begin{cases} 2\nu-1, & |\tilde{r}| \leq \tilde{R} \\ \frac{4\nu-5}{\tilde{r}^3} \tilde{R}^3, & |\tilde{r}| > \tilde{R} \end{cases} \right|, \tag{1.4.13}$$

Результаты расчетов. В результате аналитических и численно-аналитических расчетов, проведенных при различных взаимных положениях

индентора и включения, определены значения компонент тензора напряжений и главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, в каждой точке, что позволило получить распределение максимальных касательных напряжений в полупространстве с включением.

$$\tau_{\max} = 0.5 \max |(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_1 - \sigma_3)|. \quad (1.4.14)$$

Вычисления показывают, что значения растягивающих напряжений не велики по сравнению с максимальными касательными: их максимальное значение при совпадении центров площадки контакта и включения не превышает $0,04p_0$ и достигается на границе включения в основном материале. В связи с этим основное внимание было уделено анализу максимальных касательных напряжений.

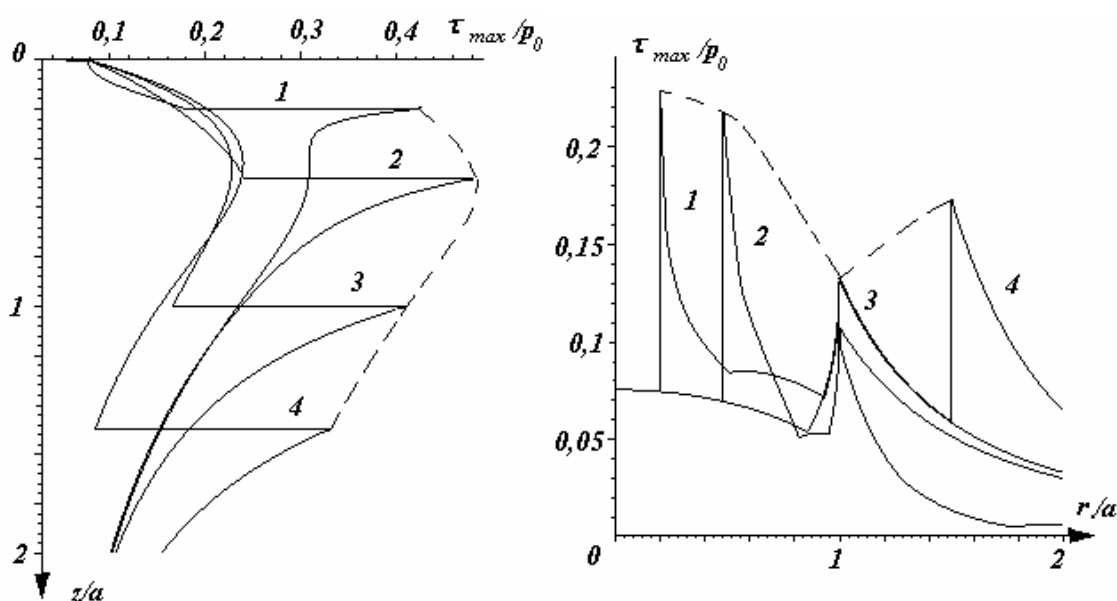


Рис. 10. Распределение максимальных касательных напряжений в случае совпадения центра площадки контакта с центром полусферического включения (а) - вдоль оси симметрии при $r=0$ и (б) - на поверхности полупространства при $z=0$. (Кривая 1 – $R/a=0.2$; 2 – $R/a=0.48$; 3 – $R/a=1$; 4 – $R/a=1.5$).

На рис. 10 – 12 приведены результаты расчетов максимальных касательных напряжений для полусферического включения при значении коэффициента $B=p_0/4,1$. Распределение τ_{max} на оси симметрии полусферического включения, рассчитанное по формулам (1.4.10), (1.4.11) при разных соотношениях радиусов площадки контакта a и включения R изображено на рис. 10а: $a>R$ (кривые 1,2) $a=R$ (3) $a<R$ (4). Пунктирной линией отмечена огибающая максимальных значений $\tau_{max}(z)$.

На границе между включением и основным материалом имеет место разрыв напряжений. Величина скачка составляет $[\tau_{max}] \sim 0,24p_0$. Максимальное значение τ_{max} достигается на границе включения в основном материале. Локальный максимум τ_{max} во включении не превышает значения $0,24p_0$ на глубине $z \sim 0,48a$. Огибающая $\tau_m = \max(\tau_{max})$ имеет не монотонный характер, максимальное значение τ_m составляет $0,485p_0$ в случае, когда радиус включения равен $R=0,48a$.

Распределение τ_{max} на поверхности полупространства при $z=0$ (рис. 10б) так же зависит от относительных размеров зоны контакта и включения, функция τ_{max} имеет разрыв на границе включения и разрыв производной на границе зоны контакта. Огибающая линия имеет точку минимума $\tau_{max} \approx 0,13p_0$, (при $R=a$) и горизонтальную асимптоту $\tau_{max} \approx 0,23p_0$ в случае, когда размер включения велик.

Если центр области контакта не совпадает с центром полусферического включения, картина распределения напряжений меняется в зависимости от того, каково их взаимное расположение. На рис.11 приведены изолинии максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства при различных взаимных положениях области контакта и включения. (Здесь начало координат расположено в центре включения, а зона контакта смещена по оси Оу на расстояние $D=0.1a$ рис. (а), $D=0.2a$ рис. (б), $D=0.3a$ рис. (в), $D=0.5a$ рис. (г), $D=0.7a$ рис. (д).) Максимальные значения максимальных

касательных напряжений $\tau_m = \max(\tau_{max}) = 0.412p_0$ имеют место, когда расстояние между центрами площадки контакта и включением составляет $D=0,7a$ (рис.11д) и локализуются на пересечении границ включения и пятна контакта. Проведенный анализ влияния смещения D на максимальные значения τ_{max} показал, что τ_m всегда локализуется на пересечении границ области контакта и включения, в основном материале.

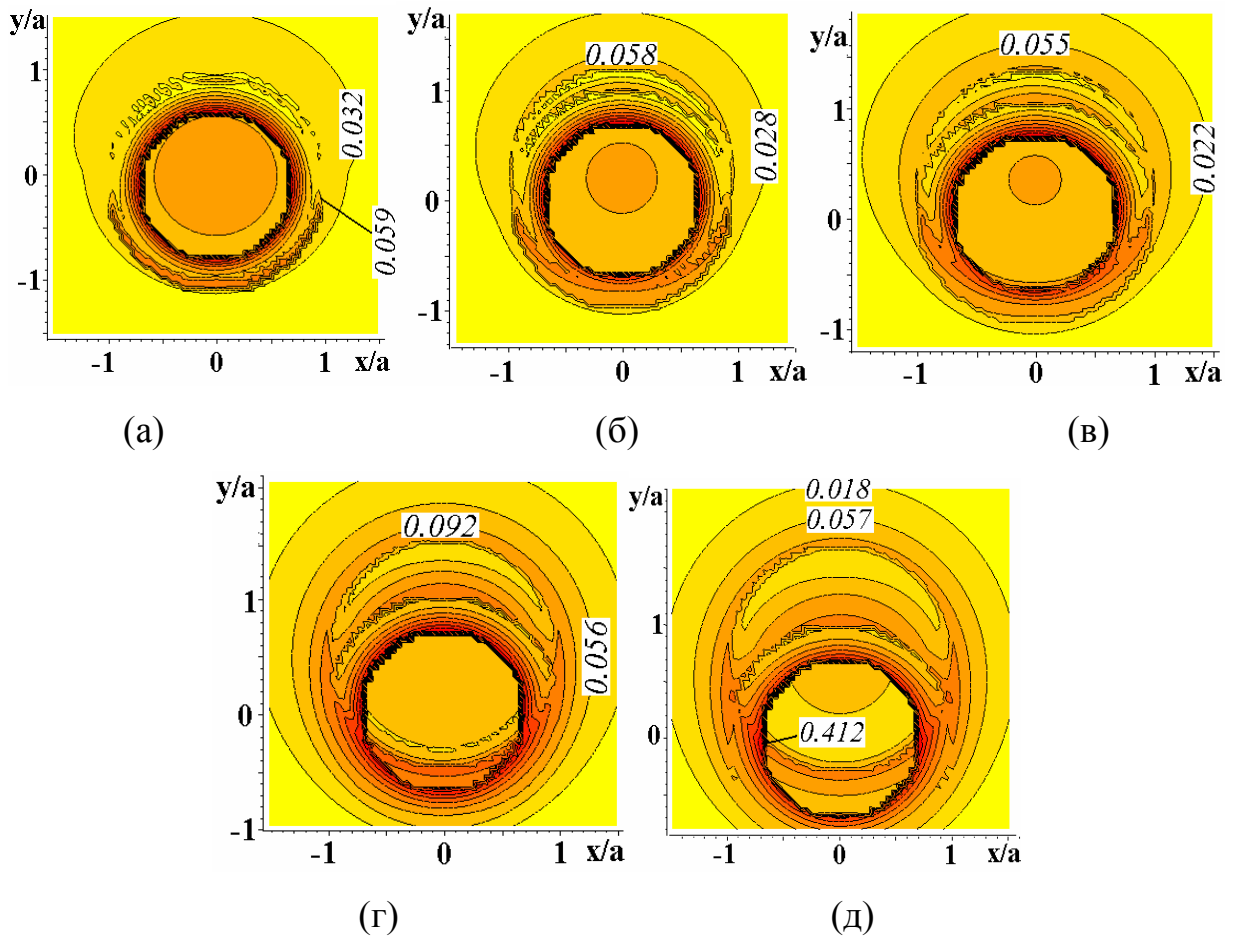


Рис.11. Распределение максимальных касательных напряжений по отношению к p_0 при прохождении пятна контакта по поверхности полусферического включения при $z=0$ $R=0.7a$ и смещении относительно оси y : $D=0.1a$ (а), $D=0.2a$ (б), $D=0.3a$ (в), $D=0.5a$ (г), $D=0.7a$ (д).

На рисунке 12 отражены результаты расчетов максимальных касательных напряжений под поверхностью в плоскости, проходящей через центры пятна контакта и включения.

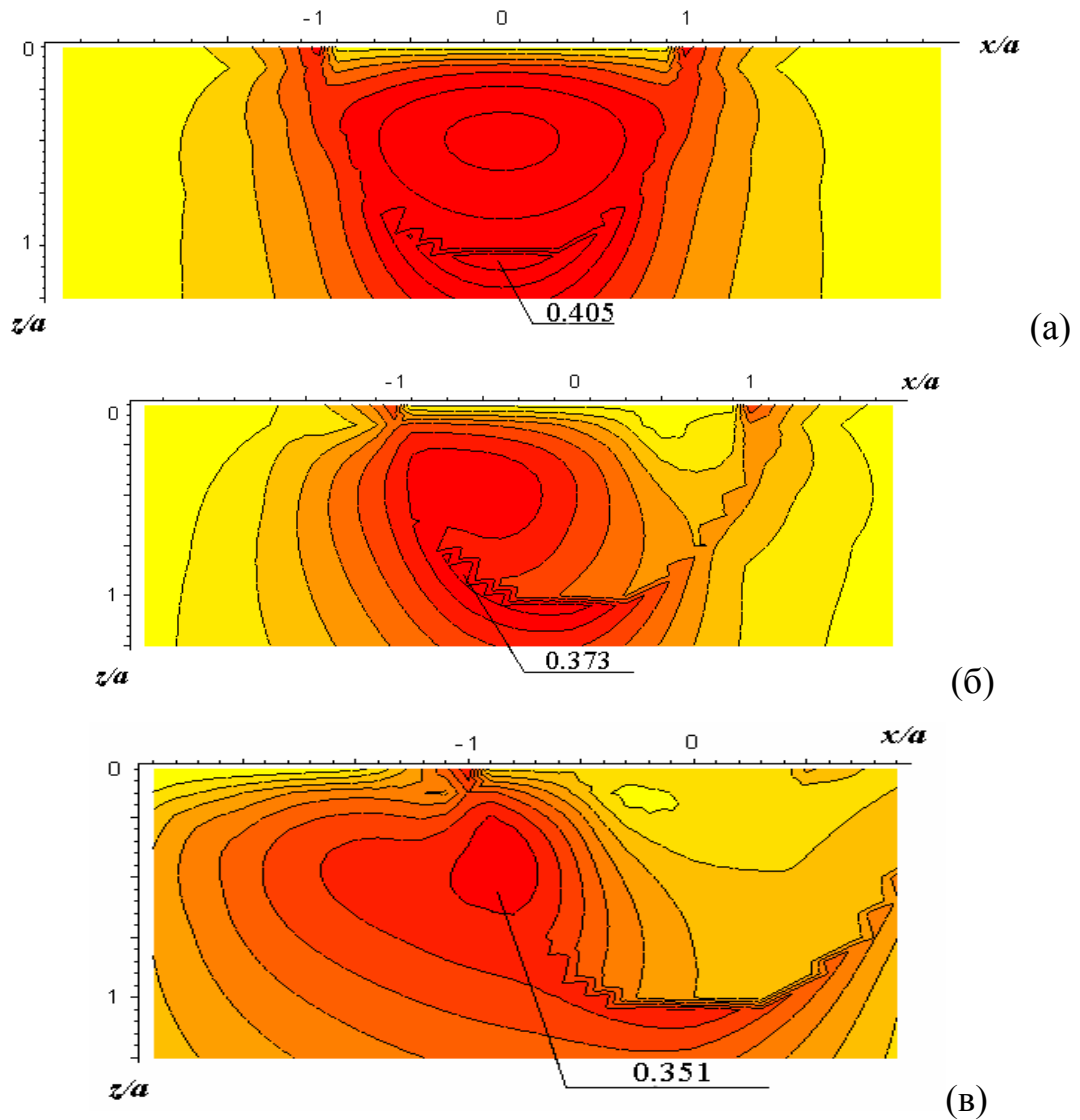


Рис.12. Распределение максимальных касательных напряжений по отношению к p_0 при прохождении пятна контакта по полусферическому включению под поверхностью при $R=a$ и смещении относительно оси x :

$D=0$ (а), $D=0.6a$ (б), $D=a$ (в).

Максимальное значение $\tau_m = 0.41p_0$ под поверхностью имеет место при совпадении центров включения и пятна контакта, в этом случае оно сравнимо с максимальными значениями τ_m на поверхности.

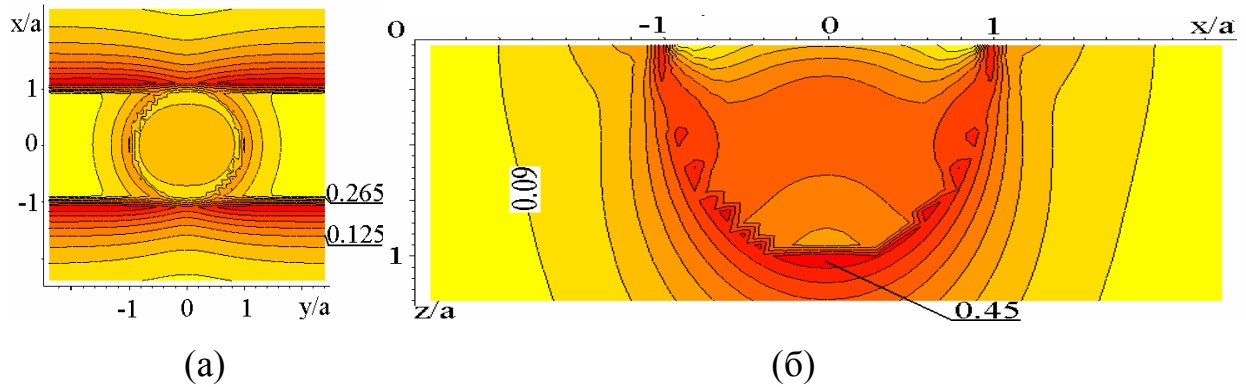


Рис.13. Распределение максимальных касательных напряжений по отношению к максимальному давлению на площадке контакта p_0 (центр площадки контакта совпадает с осью протяженного включения $D=0$, радиусы области контакта и включения равны $a=R$) на поверхности при $z=0$ (а) и под поверхностью при $y=0$ (б).

На рис.13 приведены распределения максимальных касательных напряжений в случае, когда область контакта радиуса $a=R$ совпадает с осью симметрии протяженного включения ($A=p_0/2,9$). В этом случае на поверхности ($z=0$) максимальные значения напряжений локализуются вдоль границ включения со стороны основного материала. Под поверхностью, также на границе включения со стороны основного материала при $z=a+0$, имеет место максимальное значение максимальных касательных напряжений $\tau_m = (\tau_{max})_{max} = 0,45p_0$. Заметим, что при контактном взаимодействии без включения τ_m составляет $0,31p_0$ и располагается на глубине $z \sim 0,48a$.

Расчеты показали, что при смещении пятна контакта относительно оси протяженного включения значение τ_m уменьшается, при этом точка

максимума локализуется под поверхностью. При дальнейшем увеличении значения D максимум максимальных касательных напряжений в полупространстве уменьшается, при этом точка максимума приближается к поверхности. Предельный случай – максимальное значение остаточных напряжений, которое локализуется на поверхности на границе включения и основного материала.

Проведем количественный анализ напряжений вблизи выходящих на поверхность мартенситных включений при контактном взаимодействии железнодорожного колеса с рельсом. Плотность основного материала (перлита) $\rho_1=7.8 \text{ г/см}^3$ уменьшается при фазовом превращении до значения $\rho_2=7.75 \text{ г/см}^3$. Учитывая, что для рассматриваемых материалов модуль упругости составляет $E=0.21 \cdot 10^{12} \text{ Па}$, а коэффициент Пуассона $\nu=0.3$ получим из соотношения (4) постоянные $A=346 \text{ МПа}$ и $B=247 \text{ МПа}$. Принимая, максимальное давление на площадке контакта колесо – рельс равным $p_0=1010 \text{ МПа}$ получим, например, наибольшее значение максимальных касательных напряжений вблизи полусферического включения $\tau_m=416 \text{ МПа}$. В однородном материале эта величина составляет $\approx 310 \text{ МПа}$.

1.5 Заключение

Предложен метод определения напряженного состояния упругого полупространства с выходящими на поверхность включениями различной формы при контактном взаимодействии. Основными характеристиками, определяющими суммарное поле напряжений, помимо распределения контактного давления являются форма включения, его характерный размер, взаимное положение и относительные размеры области контакта и включения.

Анализ напряженного состояния показывает, что значения максимальных касательных напряжений, возникающих при контактном

взаимодействии в полупространстве с включениями, превышают наибольшие величины напряжений в однородном полупространстве. Если включение имеет протяженную форму, максимальные значения максимальных касательных напряжений локализуются на оси симметрии на границе включения со стороны основного материала. При полусферической форме включения максимальные значения τ_{max} имеют место на поверхности, при этом существует расстояние между центрами включения и области контакта, которое обеспечивает их наибольшие величины.

Таким образом, наличие включения в одном из контактирующих тел существенно меняет распределение напряжений в этом теле и, следовательно, может повлиять на характер разрушения.

Глава 2 Анализ взаимного влияния пятен контакта при скольжении периодической системы инденторов по вязкоупругому основанию

Обозначения:

x', y', z'	:	Декартова неподвижная система координат	
x, y, z	:	Декартова подвижная система координат	
$w(x, y)$:	Нормальные перемещения поверхности слоя;	[м]
$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$:	Компоненты тензоров деформаций и напряжений	
t	:	Время	[с]
$f(x, y), R$:	Форма и радиус индентора	
l	:	расстояние между соседними инденторами	[м]
V	:	Скорость скольжения	[м/с]
P	:	Нагрузка на один индентор	[Н]
$p(x, t)$:	Функция распределения давлений	[Па]
E^*	:	Модуль упругости приведенный	[Па]
ν	:	Коэффициент Пуассона	—
E_L, E_I	:	Длительный и мгновенный модуль упругости основания	[Па]
$T_\sigma, T_\varepsilon, c$:	Время релаксации, последствий вязкоупругого основания, и их отношение	[с], [с],-
$h; h/E^*$:	Толщина слоя; Податливость слоя	[м], [м/Па]
δ	:	Сближение тел в результате действия нагрузки;	[м]
Ω	:	Область контакта	
$(-a(y), b(y))$:	Граница площадки контакта;	[м]
Δy	:	Ширина полосы	[м]
y_{max}	:	Полуширина площадки контакта в направлении оси y	[м]

a_H	:	Радиус площадки контакта рассчитанный по формулам Герца при E_L	[м]
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}, \hat{\delta}, \hat{l}, \hat{p}_j, \hat{P}, c, \zeta, \hat{a}_H$:	Безразмерные координаты и функции	—
M	:	Момент сопротивления движению индентора	
μ	:	Деформационная составляющая коэффициента трения	

2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим скольжение периодической системы жестких инденторов вдоль поверхности вязкоупругого материала. Скорость скольжения постоянна, форма инденторов описывается функцией $f(x,y)$, их вершины расположены периодически вдоль оси Ox с периодом l . Введем неподвижную систему координат (x',y',z') так, что ее начало в момент времени $t = 0$ расположено в вершине одного из инденторов, ось x' направлена вдоль вектора скорости V , а ось z' вглубь полупространства. Также введем систему координат (x, y, z) связанную с жестким телом и движущуюся со скоростью V (рис 14). Будем считать, что движение установившееся, а, следовательно, все напряжения и деформации не зависят от времени в системе координат (x,y,z) .

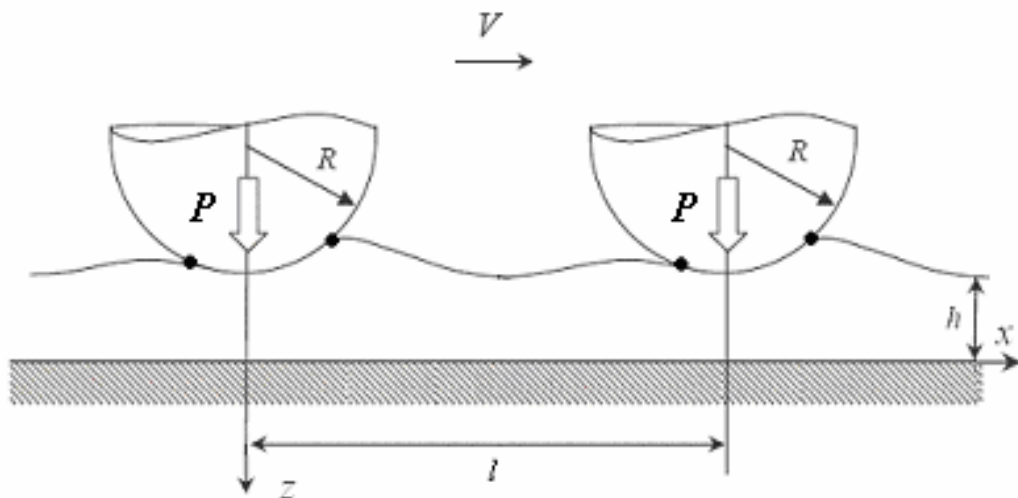


Рис. 14. Схема контакта

Пусть каждый индентор имеет форму параболоида с радиусом кривизны R :

$$f(x, y) = -\frac{1}{2R}(x^2 + y^2), \quad x \in (0, l). \quad (2.1.1)$$

В зоне контакта Ω выполняется условие:

$$w(x, y) = \delta + f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.1.2)$$

где $w(x, y)$ - нормальные перемещения границы вязкоупругого слоя вследствие его деформирования; δ - сближение тел за счет деформирования.

Контактное давление $p(x, y)$ вне площадок контакта и на её границе $(-a(y), b(y))$ равно нулю:

$$p(x, y) = 0, \quad (x, y) \notin \Omega, \quad p(-a(y)) = p(b(y)) = 0 \quad (2.1.3)$$

Нормальные перемещения и давление по координате x удовлетворяют условиям периодичности в любой точке на поверхности (x, y) :

$$w(x, y) = w(x + l, y), \quad p(x, y) = p(x + l, y). \quad (2.1.4)$$

Уравнение равновесия для каждого индентора имеет вид:

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P, \quad (2.1.5)$$

где P нагрузка на один индентор.

2.2 Модель вязкоупругого материала.

В качестве модели материала используем одномерную модель слоя на жестком основании и обобщенную модель Кельвина. Нормальные перемещения слоя $w(x, y)$ связаны с давлением $p(x, y)$ соотношением:

$$w(x', y', t) + T_{\varepsilon} \frac{dw(x', y', t)}{dt} = \frac{(1 - \nu^2)h}{E_L} \left(p(x', y', t) + T_{\sigma} \frac{dp(x', y', t)}{dt} \right) \quad (2.2.1)$$

где T_{ε} и T_{σ} – времена последействия и релаксации, E_L – длительный модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, отношение толщины слоя к приведенному модулю h/E^* характеризует податливость слоя, мгновенный модуль упругости E_1 определяется отношением $T_{\varepsilon} E_L / T_{\sigma}$.

$$E^* = \frac{E_L}{1 - \nu^2}$$

Параметр $c = T_\varepsilon/T_\sigma$ равен $10^5 \div 10^7$ для аморфных полимеров, $10 \div 10^2$ для полимеров с высокой степенью кристалличности. Необходимо заметить, что одномерная модель материала - аналог упругой модели Винклера, может быть использована в случае, когда толщина вязкоупругого слоя h много меньше ширины площадки контакта $(a+b)$.

Как уже отмечалось, в системе координат $(0, x, y, z)$ связанной с движущимся телом $(x = x' - Vt, y = y', z = z')$ компоненты вектора смещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} не зависят явно от времени и являются функциями координат (x, y, z) . Компоненты тензоров деформаций и напряжений в движущейся $(0, x, y, z)$ и неподвижной $(0, x', y', z')$ системах координат связаны между собой равенствами [24]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}' + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{ij}'}{\partial t} &= \varepsilon_{ij} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \varepsilon_{ij}^*, \\ \sigma_{ij}' + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial t} &= \sigma_{ij} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij}^*, \\ u_i - T_\varepsilon V \frac{\partial u_i}{\partial x} &= u_i^*, \\ p(x) - T_\sigma V \frac{\partial p(x)}{\partial x} &= p^*(x). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Введенные функции ε_{ij}^* σ_{ij}^* удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела.

В подвижной системе координат соотношение (2.2.1) имеет вид:

$$w(x, y) - T_\varepsilon V \frac{dw(x, y)}{dx} = \frac{h}{E^*} \left(p(x, y) - T_\sigma V \frac{dp(x, y)}{dx} \right) \quad (2.2.3)$$

2.3 Метод решения

Для решения трехмерной контактной задачи воспользуемся методом полос (иначе метод плоских сечений) предложенный Хайнесом и

Оллертоном [75]. Метод был развит в работе Калкера [79] для определения зон сцепления и проскальзывания при качении. Разобьем зону контакта на $2N$ тонких полос параллельных направлению скольжения (рис 15). Для каждой полосы будем решать соответствующую плоскую периодическую задачу, пренебрегая при этом взаимодействием полос.

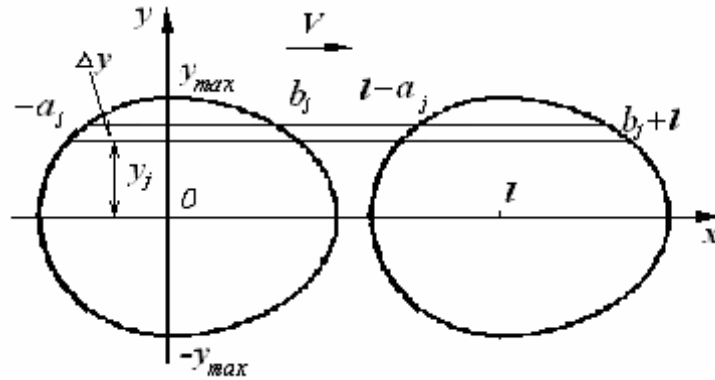


Рис. 15 Метод полос

На рисунке 15 изображены две соседние площадки контакта и характерная полоса шириной Δy с номером j , находящаяся на расстоянии y_j от оси x , y_{max} – полуширина площадки контакта в направлении оси y . Нормальные перемещения границы вязкоупругого слоя в j -ой полосе определяются выражением:

$$w_j(x, y_j) = \delta - \frac{1}{2R}(x^2 + y_j^2), \quad x \in \Omega_j \quad (2.3.1)$$

Условия периодичности в каждой полосе:

$$w_j(x, y_j) = w_j(x + l, y_j), \quad p_j(x, y_j) = p_j(x + l, y_j).$$

Для выбранной одномерной модели материала метод полос дает точное решение задачи.

2.4 Решение периодической задачи для произвольной полосы

Введем безразмерные координаты и переменные:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= x/R; \quad \hat{y} = y/R; \quad \hat{w} = w/R; \quad \hat{\delta} = \delta/R; \quad \hat{l} = l/R; \\ \hat{p}_j &= \frac{2p_j}{R} \frac{h}{E^*}; \quad \hat{P} = \frac{2P}{R^3} \frac{h}{E^*}; \quad \zeta = 2a_H/T_\sigma V; \quad \hat{a}_H = 2a_H/R.\end{aligned}\quad (2.4.1)$$

Здесь a_H – радиус площадки контакта рассчитанный по формулам Герца при длительном модуле упругости. Этот параметр характеризует приложенную нагрузку.

$$a_H = \sqrt[3]{\frac{3PR}{4E^*}}.$$

С учетом принятых обозначений, выражения (2.3.1) и его производной по координате x соотношение (2.2.3) преобразуется к виду:

$$\hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) - \frac{\hat{a}_H}{\zeta} \frac{d\hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j)}{d\hat{x}} = 2\hat{\delta} - \hat{x}^2 - \hat{y}_j^2 + \frac{2c\hat{a}_H}{\zeta} \hat{x} \quad (2.4.2)$$

Разрешив уравнение (2.4.2), получим распределение давлений в j -ой полосе зоны контакта:

$$\hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) = \frac{\zeta}{\hat{a}_H} \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{x}} e^{(\hat{x}-\xi)\zeta/\hat{a}_H} \left(\xi^2 - \frac{2c\hat{a}_H}{\zeta} \xi - 2\hat{\delta} + \hat{y}_j^2 \right) d\xi, \quad (2.4.3)$$

при этом одно из граничных условий на конце площадки контакта при $x = a_j$ будет выполнено тождественно:

$$\hat{p}_j(-\hat{a}_j) \equiv 0, \quad -\hat{a}_j = \hat{a}(\hat{y}_j)$$

Интегрируя выражение (2.4.3), получим:

$$\hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) = e^{(\hat{x}+\hat{a}_j)\zeta/\hat{a}_H} \left(\hat{a}_j^2 - C_1\hat{a}_j - C_{2j} \right) - \hat{x}^2 - C_1\hat{x} + C_{2j}, \quad (2.4.4)$$

где

$$C_1 = 2\hat{a}_H(1-c)/\zeta, \quad C_{2j} = 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - 2\hat{a}_H^2(1-c)/\zeta. \quad (2.4.5)$$

В выражение для контактного давления (2.4.4) входит неизвестная граница площадки контакта $a_j = a(y_j)$. Для ее определения запишем второе граничное условие (2.1.3) для давления на набегающей стороне области контакта $b_j = b(y_j)$ и соотношение (2.4.2) на ненагруженных участках $(p_j(x, y_j) = 0$ при $x \in (b_j, l - a_j)$, см. рис. 15):

$$\hat{p}_j(\hat{b}_j) = e^{(\hat{b}_j + \hat{a}_j)\zeta / \hat{a}_H} (\hat{a}_j^2 - C_1 \hat{a}_j - C_{2j}) - \hat{b}_j^2 - C_1 \hat{b}_j + C_{2j} = 0, \quad (2.4.6)$$

$$\hat{w}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) - \frac{a_H c}{\zeta} \frac{d\hat{w}_j(\hat{x}, \hat{y}_j)}{d\hat{x}} = 0, \quad \hat{x} \in (\hat{b}_j, \hat{l} - \hat{a}_j) \quad (2.4.7)$$

Решением уравнения (2.4.7) является функция:

$$\hat{w}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) = \hat{w}_{0j} e^{\hat{x}\zeta / c a_H}, \quad \hat{x} \in (\hat{b}_j, \hat{l} - \hat{a}_j) \quad (2.4.8)$$

Так как нормальные перемещения непрерывны, на границе зоны контакта (при $x = l - a_j$, $x = b_j$) с учетом (2.3.1) справедливы соотношения:

$$2\hat{w}_{0j} e^{(\hat{l} - \hat{a}_j)\zeta / \hat{a}_H c} = 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{a}_j^2 \quad (2.4.9)$$

$$2\hat{w}_{0j} e^{\hat{b}_j \zeta / \hat{a}_H c} = 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{b}_j^2 \quad (2.4.10)$$

Исключая постоянную \hat{w}_{0j} из последних соотношений и преобразуя (2.4.6), получим систему уравнений для определения границ зоны контакта a_j , b_j в каждой полосе:

$$\begin{aligned} e^{(\hat{a}_j + \hat{b}_j - \hat{l})\zeta / c \hat{a}_H} (2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{a}_j^2) &= 2\hat{\delta} - \hat{y}_j^2 - \hat{b}_j^2 \\ e^{(\hat{b}_j + \hat{a}_j)\zeta / c \hat{a}_H} (\hat{a}_j^2 - C_1 \hat{a}_j - C_{2j}) &= \hat{b}_j^2 + C_1 \hat{b}_j - C_{2j} \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Система уравнений (2.4.11) и соотношение (2.4.4) позволяют найти распределение давлений и границу зоны контакта в j -ой полосе при известном внедрении δ .

Внедрение δ , соответствующее заданной нагрузке P , можно вычислить, используя итерационную процедуру. Нагрузка на индентор, определяется уравнением равновесия (2.1.5), которое с учетом принятых обозначений преобразуется к виду:

$$\hat{P} = 2 \int_0^{(2\hat{\delta})^{1/2}} \int_{-\hat{a}(y)}^{\hat{b}(y)} \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = 2 \sum_{j=1}^N \Delta \hat{y} \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} \hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) d\hat{x}. \quad (2.4.12)$$

Здесь $(2\hat{\delta})^{1/2} = y_{max}$ полуширина площадки контакта в направлении оси y .

При исследовании задачи о качении цилиндра по границе вязкоупругого основания в [24] установлено, что сопротивление движению

цилиндра существует даже при отсутствии тангенциальных напряжений в области контактного взаимодействия. Предположим, что тангенциальные напряжения на площадке контакта пренебрежимо малы. Это позволяет изучить только механическую составляющую силы трения. Поскольку нормальные напряжения направлены к центру индентора, сила реакции также направлена к центру, и ее компоненты T_d и P_I направлены вдоль осей Ox Oz соответственно (рис.16). Если длина площадки контакта $(a+b)$ много меньше радиуса индентора R , справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\hat{P}_1 &= 2 \sum_{j=1}^N \Delta y \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} \hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) \cos \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \approx 2 \sum_{j=1}^N \Delta y \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} \hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) d\hat{x}, \\ \hat{T}_d &= 2 \sum_{j=1}^N \Delta y \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} \hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) \sin \varphi(\hat{x}) d\hat{x} \approx \hat{M} / \hat{R}, \quad \hat{R} = 1, \\ \hat{M} &= \iint_{\Omega} \hat{x} \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \sum_{j=1}^N \Delta y \int_{-\hat{a}_j}^{\hat{b}_j} \hat{x} \hat{p}_j(\hat{x}, \hat{y}_j) d\hat{x}.\end{aligned}\tag{2.4.13}$$

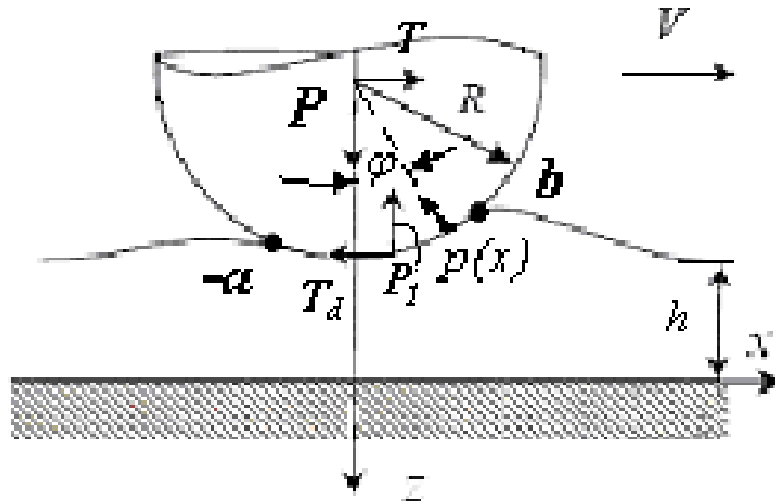


Рис. 16 Схема сил, действующих на индентор при его скольжении по вязкоупругому основанию.

Коэффициент трения μ является отношением силы трения T_d и нагрузки P :

$$\mu = \hat{T}_d / \hat{P}. \quad (2.4.14)$$

2.5 Результаты расчетов и их анализ

Анализ выражения (2.4.4) и системы (2.4.11) показывает, что контактные характеристики зависят от следующих безразмерных параметров: относительного внедрения δ/R , свойств материала $c = T_\varepsilon/T_\sigma$, параметров характеризующих нагрузку $\hat{P} = 2Ph/R^3E^*$, a_H/R , аналога числа Деборы $\zeta = 2a_H/T_\sigma V$ и относительного расстояния между вершинами инденторов l/R (высокая плотность контакта соответствует малым значениям l/R).

На рисунке 17 показана зависимость деформационной составляющей коэффициента трения μ от параметра ζ для различного расстояния между вершинами инденторов l/R для разной податливости слоя h/E^* .

Вычисления проводились для следующих величин: $c = 1000$; $R = 0.0005$ м; $E_L = 5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,499$; $P = 0.01 \text{ Н}$.

Замечание: Безразмерная нагрузка \hat{P} зависит от выбранной для модели податливости слоя h/E^* . Податливость можно выбрать сравнивая расчетные данные с экспериментом, или сопоставляя расчетные данные при $V \rightarrow 0$ с решением задачи Герца при модуле Гука E_L (должны совпадать либо размер площадки контакта либо распределение контактного давления). В работе использованы значения податливости $h/E^* = 5 \cdot 10^{-10}$ и $h/E^* = 2 \cdot 10^{-10}$ м/Па.

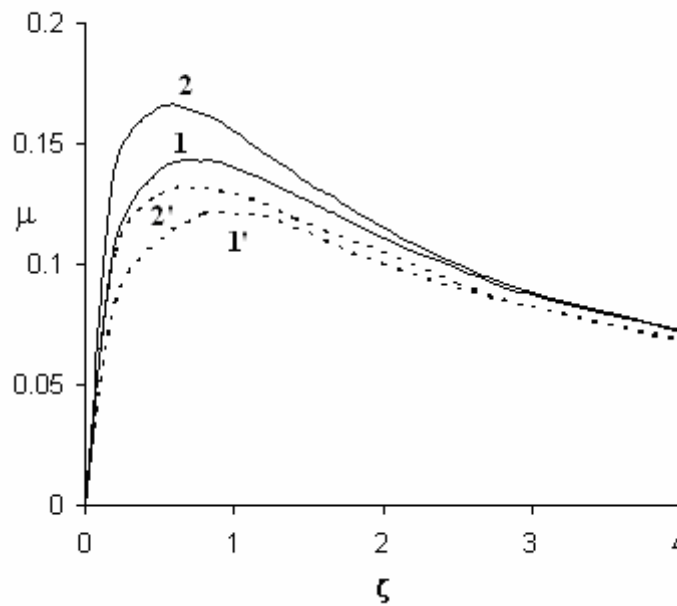


Рис. 17 Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения от параметра ζ ; сплошные линии $\hat{P}=0,08$, пунктирные линии $\hat{P}=0,032$; при высокой плотности контакта $l/R=1$ кривые (1, 1'); при малой плотности контакта $l/R=10$ кривые (2, 2')

Результаты показывают, что коэффициент трения уменьшается с уменьшением расстояния l/R . С ростом податливости слоя (и/или значения параметра c) увеличивается значение коэффициента трения, а также усиливается влияние плотности контакта. Максимальное значение коэффициента трения μ смещается в сторону больших значений ζ при увеличении расстояния l/R и прочих равных значениях параметров. Деформационная составляющая коэффициента трения μ стремится к нулю при $\zeta \rightarrow 0$ (при $V \rightarrow +\infty$) и $\zeta \rightarrow +\infty$ (при $V \rightarrow 0$).

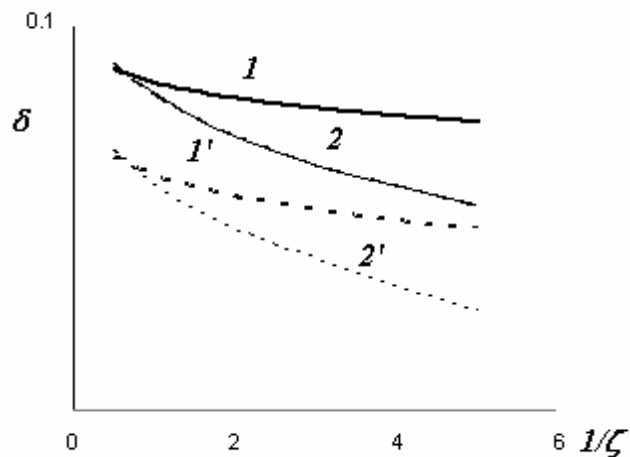


Рис. 18 Зависимость внедрения в центре индентора от параметра $1/\zeta$; сплошные линии $\hat{P}=0,08$, пунктирные линии $\hat{P}=0,032$; при высокой плотности контакта $l/R=1$ кривые (1, 1'); при малой плотности контакта $l/R=10$ кривые (2, 2')

На рис 18 приведен график зависимости внедрения индентора δ от параметра $1/\zeta$ (этот параметр прямо пропорционален скорости скольжения) для разного расстояния l/R и податливости слоя. Эти зависимости иллюстрируют эффект «всплытия» контртела при больших скоростях скольжения, характерный для вязкоупругих материалов. При малых скоростях скольжения ($V \rightarrow 0$, $1/\zeta \rightarrow 0$) внедрение каждого индентора одинаково для большой и малой плотности контакта. Это объясняется тем, что свободная поверхность между инденторами успевает полностью восстановиться. Взаимное влияние пятен контакта на величину внедрения с ростом скорости скольжения увеличивается. Для изучения этого эффекта ниже проведен анализ контактных характеристик.

На рисунках 19 – 20 даны форма площадки контакта при $z=0$ (a), распределение контактных давлений (b) и нормальные перемещения в средней полосе при $y=0$ (c).

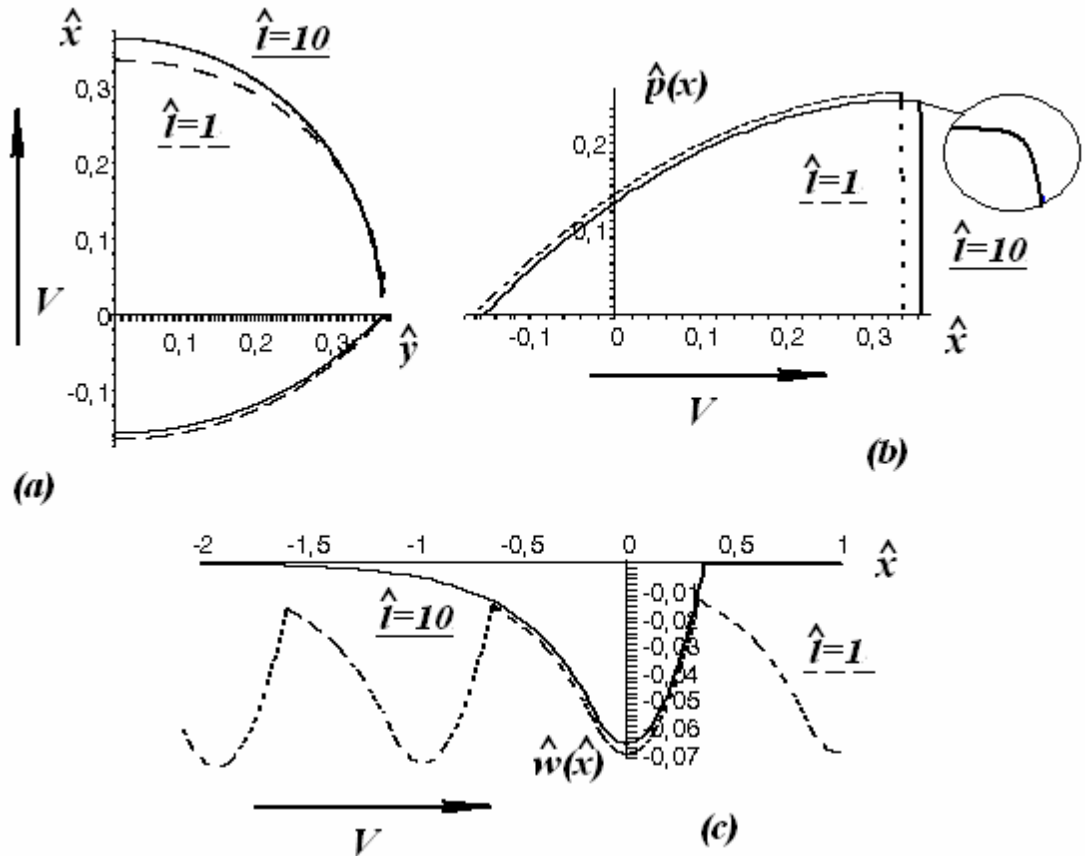


Рис. 19 $\zeta=1$. Форма площадки контакта на поверхности тела (a), распределение контактных давлений (b) и нормальные перемещения в среднем сечении при $y=0$ (c); сплошные линии $l/R=10$ пунктирные линии $l/R=1$

На рис. 19 графики построены при значении параметра ζ равного единице, т.е. вблизи максимального значения коэффициента трения. Площадка контакта в этом случае не симметрична, а максимум контактного давления локализован вблизи набегающего края. Эффект взаимного влияния проявляется за счет неполного восстановления поверхности (рис. 19 c). Для малого расстояния между инденторами (пунктирная линия $l/R=1$; на рис. 19 c показаны четыре индентора друг за другом) восстановление не полное, а при удалении инденторов друг от друга (сплошная линия $l/R=10$) поверхность при $x/R=2$ почти полностью восстанавливается. Этим явлением объясняется

то, что коэффициент трения уменьшается с возрастанием плотности контакта, когда параметр ζ близок к единице.

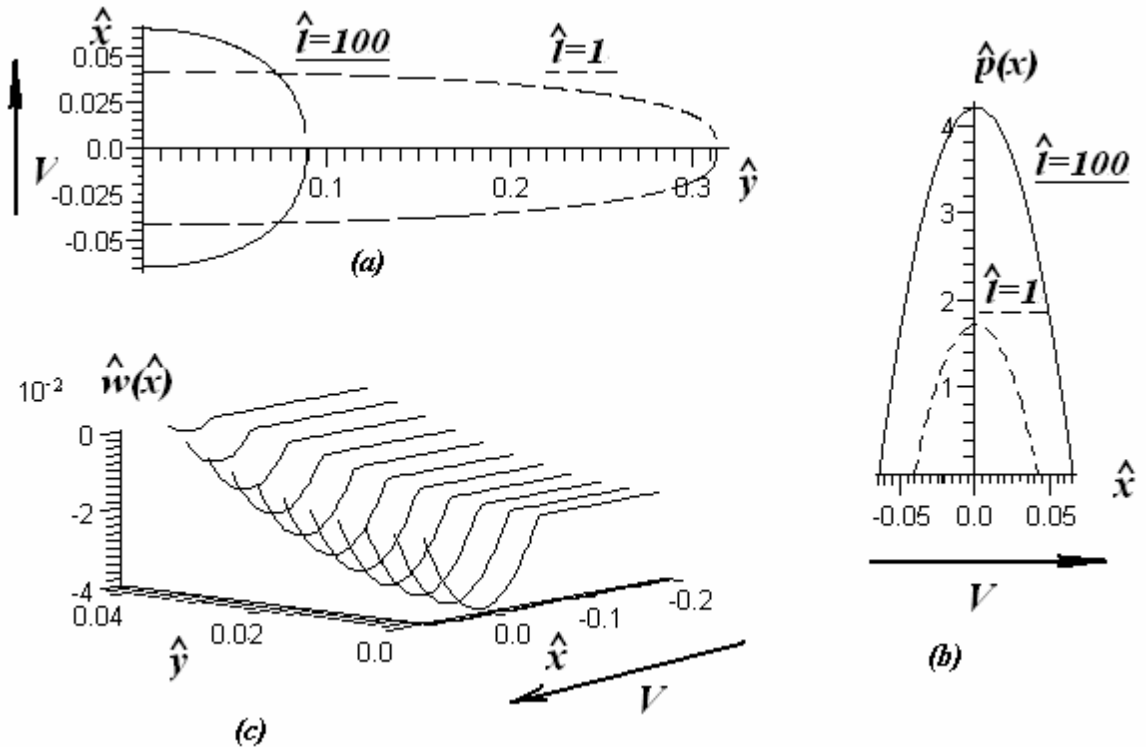


Рис. 20 $\zeta=10^{-5}$. Форма площадки контакта на поверхности тела (a), распределение контактных давлений (b) сплошные линии $l/R=100$ пунктирные линии $l/R=1$; и прогиб поверхности в нескольких сечениях при $l/R=1$ (c)

На рис. 20 графики построены при значении параметра ζ равного 10^{-5} , что соответствует большой скорости скольжения. Значение коэффициента трения в этом случае близко к нулю и давление в каждой полосе распределено симметрично. При малом расстоянии между инденторами площадка контакта становится эллиптической, сильно вытянутой в направлении, перпендикулярном скорости скольжения (рис. 20 a), при этом давление перераспределяется между полосами. По мере удаления от среднего сечения площадки к краям расстояние между соседними концами зон

контакта увеличивается, давление в полосе уменьшается. Для больших расстояний между инденторами площадка контакта становится круговой, давление в среднем сечении возрастает.

При малых скоростях скольжения площадка контакта является круговой, давление распределено симметрично, что соответствует упругому поведению материала (т.е. имеем упругое основание с длительным модулем упругости).

Отметим, что при больших расстояниях между инденторами результаты расчетов совпадают с результатами, полученными в [56] для единичного индентора.

2.6 Заключение

Разработана математическая модель для исследования эффекта взаимного влияния неровностей при контакте шероховатого тела с вязкоупругим основанием. Эффект возникает из-за неполного восстановления поверхности в свободных зонах. Предложенный подход базируется на решении пространственной периодической контактной задачи, для описания свойств основания используется одномерная модель стандартного вязкоупругого тела (обобщенная модель Кельвина).

Проведенный анализ эффекта взаимного влияния для различного уровня нагрузок и скоростей скольжения показал, что контактные характеристики и деформационная составляющая коэффициента трения существенно зависят от расстояния между инденторами. Деформационная составляющая коэффициента трения уменьшается с увеличением плотности контакта. Установлено, что при высоком значении скорости скольжения и малом расстоянии между инденторами пятна контакта имеют форму эллипса. Значение относительного внедрения с ростом плотности контакта увеличивается.

Глава 3 Установившееся решение периодической задачи об изнашивании композиционного материала вязкоупругим телом

Обозначения:

x', z'	:	Декартова неподвижная система координат	
x, z	:	Декартова подвижная система координат	
$u_i(x, t)$:	Компоненты вектора перемещений;	[м]
$\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$:	Компоненты тензоров деформаций и напряжений	
t	:	Время	[с]
$K_{\omega i}(x)$:	Коэффициент интенсивности износа поверхности i – ого участка	[м/с]
l, a	:	Период неоднородности жесткого тела и размер менее износостойкой зоны	[м]
V	:	Скорость скольжения	[м/с]
P/l	:	Внешняя нагрузка отнесенная к периоду	[Па]
$p(x, t)$:	Функция распределения давлений	[Па]
E	:	Модуль упругости	[Па]
ν	:	Коэффициент Пуассона	–
$\omega^*(x, t)$:	Износные перемещения границы тела	[м]
$T_\sigma, T_\varepsilon, \gamma$:	Время релаксации, последействия вязкоупругого основания, и их отношение	[с]
$f(x)$:	Форма поверхности жесткого неоднородного полупространства	
$D(t)$:	Сближение тел в результате действия нагрузки;	[м]
Ω	:	Область контакта	
m	:	Отношение коэффициентов интенсивности износа $K_{\omega 1}$ и $K_{\omega 2}$	
$A[p(x, t)]$:	Интегральный оператор	
p_1, p_2 и Δp	:	Значения ступенчатой функции давления и их	[Па]

	разность	
$\hat{x}, \hat{y},$ $\zeta, \hat{a}.$: Безразмерные координаты и функции	—
Amp	: Амплитудные значения функции $f_{\infty}(x)$	

Изнашивание тел с неоднородной структурой происходит неравномерно, их первоначально плоская рабочая поверхность становится волнистой. Такими неоднородными свойствами могут обладать композиционные материалы или материалы, поверхность которых подвергнута локальному упрочнению.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу изнашивания жесткого полупространства вязкоупругим телом с плоской внешней поверхностью. Вязкоупругое тело прижато к полупространству силой P/l и движется с постоянной скоростью V вдоль оси x . Неподвижная $(0, x', z')$ и движущаяся со скоростью V $(0, x, z)$ системы координат, а так же схема контакта изображены на рисунке 21. Пусть материал полупространства является композиционным или локально упрочненным материалом, который обладает переменным коэффициентом износа поверхности $K_{\omega}(x)$. При этом неоднородная структура материала является периодической с периодом l ($K_{\omega}(x+l) = K_{\omega}(x)$).

Скорость линейного изнашивания $\partial\omega_*(x,t)/\partial t$ связана с давлением $p(x,t)$ соотношением [47]:

$$\frac{\partial\omega_*(x,t)}{\partial t} = K_{\omega}(x) \left(\frac{p(x,t)}{\tilde{p}} \right)^{\alpha}, \quad (3.1.1)$$

где $\omega_*(x,t)$ – износные перемещения границы тела, $K_{\omega}(x)$, α – параметры, определяемые экспериментально, \tilde{p} - некоторое характерное давление. Здесь мы полагаем, что параметр α является постоянной величиной. Это допущение позволяет упростить дальнейшие выкладки и облегчить анализ

результатов, не искажая ситуацию качественно. Кроме того, в дальнейшем мы не будем рассматривать изнашивание вязкоупругого тела.

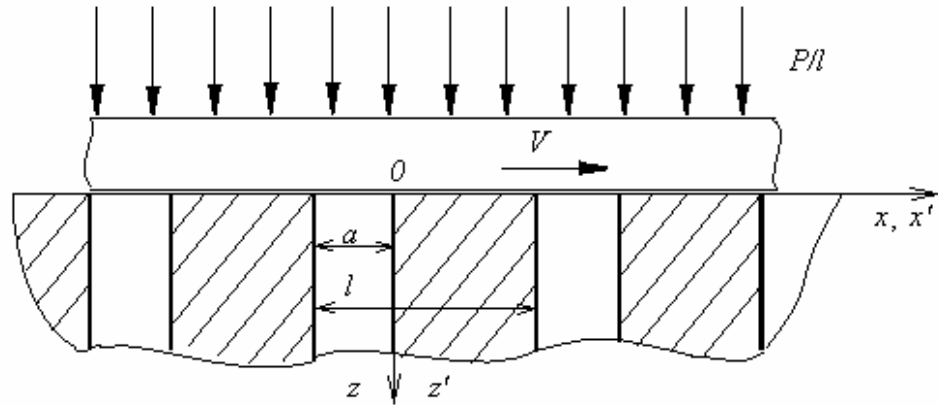


Рис.21 Схема скольжения вязкоупругого тела вдоль поверхности полупространства, имеющего неоднородную периодическую структуру.

Если реализуется полный контакт двух тел и поверхность жесткого полупространства в начальный момент времени совпадает с координатной плоскостью (x, y) , то условие контакта имеет вид:

$$u_z(x, t) + \omega_*(x, t) = D(t), \quad (3.1.2)$$

здесь $u_z(x, t)$ перемещения точек поверхности вязкоупругого тела, $D(t)$ – сближение тел в результате действия нагрузки. Полная нагрузка на период l при $z = 0$ определяется выражением:

$$P(t) = \int_0^l p(x, t) dx. \quad (3.1.3)$$

Рассматриваемая задача является плоской периодической с периодом l . Начальное давление распределено равномерно, т.е. $p(x, 0) = P(0)/l$, $x \in (-\infty, \infty)$. В процессе изнашивания происходит формоизменение первоначально плоской поверхности полупространства и перераспределение контактного давления $p(x, t)$. Пусть функция $f(x, t)$ описывает линию пересечения поверхности жесткого неоднородного полупространства с плоскостью (x, z) , причем в начальный момент времени $f(x, 0) = 0$. Необходимо определить асимптотику функции $f(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что при построении модели

мы пренебрегаем влиянием сил трения на распределение контактных давлений.

3.2 Модель вязкоупругого материала

Для описания свойств вязкоупругого тела воспользуемся двумерным аналогом модели Максвелла–Томсона. Определяющие соотношения в случае плоской деформации имеют вид [24]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x'}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t} \right), \\ \varepsilon_{z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{z'}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{z'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{z'}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{x'} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial t} \right), \\ \gamma_{x'z'} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x'z'}}{\partial t} &= \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{x'z'} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial t} \right).\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Здесь E и ν модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, отношение $T_\varepsilon E / T_\sigma$ представляет собой мгновенный модуль упругости, $1/T_\varepsilon$ – коэффициент скорости последействия ($T_\varepsilon > T_\sigma$).

Перейдем в систему координат $(0, x', z')$ связанную с движущимся вязкоупругим телом: $x = x' - Vt$, $z = z'$. В этой системе координат компоненты вектора смещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} не зависят явно от времени и являются функциями координат (x, z) . Компоненты тензоров деформаций ε_{ij} , напряжений σ_{ij} , вектора перемещений u_i и контактное давление p в подвижной $(0, x, z)$ и неподвижной $(0, x', z')$ системах координат связаны между собой равенствами [24]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}' + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{ij}'}{\partial t} &= \varepsilon_{ij} - T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \varepsilon_{ij}^*, \\ \sigma_{ij}' + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{ij}'}{\partial t} &= \sigma_{ij} - T_\sigma V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij}^*, \\ u_i - T_\varepsilon V \frac{\partial u_i}{\partial x} &= u_i^*, \\ p(x) - T_\sigma V \frac{\partial p(x)}{\partial x} &= p^*(x).\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

Введенные функции ε_{ij}^* σ_{ij}^* удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела. Определим связь между перемещениями точек поверхности $u_z^*(x)$ и контактным давлением $p^*(x)$ с помощью оператора $A[p^*(x)]$:

$$u_z^*(x) = A[p^*(x)]. \quad (3.2.3)$$

3.3 Метод решения

Система уравнений (3.1.1) - (3.1.3), (3.2.3) является замкнутой и позволяет определить контактное давление, форму изношенной поверхности, вязкоупругие перемещения и сближение тел при изнашивании. Найти решение этой системы в произвольный момент времени возможно только при использовании численных методов. Однако, если скорость износа $\partial\omega_*(x,t)/\partial t$ постоянна, то распределение давлений $p(x,t)$ согласно (3.1.1) не зависит от времени.

$$\frac{\partial\omega_*(x,t)}{\partial t} = D_\infty, \quad (3.3.1)$$

$$p_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x,t). \quad (3.3.2)$$

Условия (3.3.1), (3.3.2) на практике соответствуют условиям установившегося режима изнашивания. В этом режиме скорость скольжения V , область контакта Ω и сближение тел D не зависят от времени. При $t \rightarrow \infty$ контактное давление $p_\infty(x)$ и вязкоупругие $u_z^\infty(x)$ перемещения границы тела являются периодическими функциями координаты x в силу ограничений наложенных на функцию $K_\omega(x)$.

Кроме того, когда оператор $A[p(x)]$ не зависит от времени, существует стационарное решение системы (3.1.1) - (3.1.3), (3.2.3). В [27] показано, что стационарное решение асимптотически устойчивое, если $A[p(x)]$ вещественный, непрерывный, самосопряженный и положительно-определенный оператор.

Чтобы получить перемещения $u_z^{(\infty)}(x)$ необходимо решить дифференциальное уравнение:

$$u_z^{(\infty)}(x) - T_\varepsilon V \frac{\partial u_z^{(\infty)}(x)}{\partial x} = \mathbf{A} [p_\infty(x) - T_\sigma V \frac{\partial p_\infty(x)}{\partial x}]. \quad (3.3.3)$$

Примем обозначение:

$$\varphi(x) = \mathbf{A} [p_\infty(x)] = \int_0^l K(\xi - x) p_\infty(\xi) d\xi. \quad (3.3.4)$$

Ограничимся случаем, когда ядро $K(\xi - x)$ оператора $\mathbf{A}[p_\infty(x)]$ является периодической функцией с периодом l . В этом случае справедливо равенство:

$$\mathbf{A} \left[\frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}. \quad (3.3.5)$$

Докажем его, используя интегрирование по частям и свойство периодичности подынтегральных функций:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(x)}{dx} &= \int_0^l \frac{\partial K(\xi - x)}{\partial x} p_\infty(\xi) d\xi = - \int_0^l \frac{\partial K(\xi - x)}{\partial \xi} p_\infty(\xi) d\xi = \\ &= - \left[K(\xi - x) p_\infty(\xi) \Big|_{\xi=l} - K(\xi - x) p_\infty(\xi) \Big|_{\xi=0} \right] + \int_0^l K(\xi - x) \frac{\partial p_\infty(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \\ &= \int_0^l K(\xi - x) \frac{\partial p_\infty(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \mathbf{A} \left[\frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi} \right]. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3.3.3) имеет вид:

$$u_z^{(\infty)}(x) = \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{T_\varepsilon V (e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \int_0^l \left[\varphi(x + \chi) - T_\sigma V \frac{\partial \varphi(x + \chi)}{\partial x} \right] e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\chi. \quad (3.3.6)$$

Примем во внимание значение интеграла:

$$\int_0^l \frac{\partial \varphi(x + \chi)}{\partial x} e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\chi = \int_0^l \frac{\partial \varphi(x + \chi)}{\partial \chi} e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\chi = \left(e^{-\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1 \right) \varphi(x) + \frac{1}{T_\varepsilon V} \int_0^l \varphi(x + \chi) e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\chi. \quad (3.3.7)$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (3.3.6) и проводя элементарные преобразования, получим:

$$u_z^{(\infty)}(x) = \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \varphi(x) + \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{T_\varepsilon V (e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \int_0^l \varphi(x + \chi) e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\chi. \quad (3.3.8)$$

Это равенство можно еще упростить, проинтегрировав по частям последний интеграл и снова воспользовавшись свойством периодичности $\varphi(x+l) = \varphi(x)$:

$$\begin{aligned} u_z^{(\infty)}(x) &= \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \varphi(x) - \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{(e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \left[\varphi(x+l) e^{-\frac{l}{T_\varepsilon V}} - \varphi(x) - \int_0^l e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} \frac{\partial \varphi(x+\chi)}{\partial \chi} d\chi \right] = \\ &= \varphi(x) + \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{(e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \int_0^l e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} \frac{\partial \varphi(x+\chi)}{\partial \chi} d\chi. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Воспользуемся (3.3.5) и окончательно получим перемещения на поверхности вязкоупругого тела при $t \rightarrow \infty$:

$$u_z^{(\infty)}(x) = \varphi(x) + \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{(e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \int_0^l \int_0^l K(\xi - (x + \chi)) \frac{\partial p_\infty(\xi)}{\partial \xi} e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} d\xi d\chi. \quad (3.3.10)$$

Проанализируем выражение (3.3.10). Решение вязкоупругой задачи содержит решение упругой $\varphi(x)$ в явном виде. При предельном переходе к упругому случаю значение мгновенного модуля упругости стремится к значению модуля Юнга, т.е. отношение T_ε/T_σ стремится к единице и последнее слагаемое в соотношении (3.3.10) обращается в ноль. Заметим, что до настоящего момента мы проводили выкладки в общем виде, используя лишь свойства периодичности ядра $K(\xi-x)$ разностного интегрального оператора и функции $p_\infty(x)$.

3.4 Пример

Рассмотрим частный случай, изображенный на рисунке 21. Коэффициент износа $K_\omega(x)$ принадлежит к классу кусочно-постоянных функций:

$$K_{\omega}(x) = \begin{cases} K_{\omega 1}, & x \in [nl, a + nl], \\ K_{\omega 2}, & x \notin [nl, a + nl] \end{cases} \quad (3.4.1)$$

здесь $K_{\omega 1}$ и $K_{\omega 2}$ – коэффициенты износа поверхности внутри и вне заштрихованных полос $[nl+a, (n+1)l]$, ($K_{\omega 1} > K_{\omega 2}$). Распределение контактного давления при $t \rightarrow \infty$ получим, подставляя соотношения (3.3.1) и (3.4.1) в закон износа (3.1.1):

$$p_{\infty}(x) = \begin{cases} p_1 = \tilde{p} \left(\frac{D_{\infty}}{K_{\omega 1}} \right)^{1/\alpha}, & x \in [nl, a + nl], \\ p_2 = \tilde{p} \left(\frac{D_{\infty}}{K_{\omega 2}} \right)^{1/\alpha}, & x \notin [nl, a + nl] \end{cases}. \quad (3.4.2)$$

С учетом этого выражения преобразуем последний интеграл по аргументу ξ в (3.3.10):

$$\begin{aligned} & \int_0^l \frac{\partial p_{\infty}(\xi)}{\partial \xi} K(\xi - (x + \chi)) e^{-\frac{\chi}{T_e V}} d\xi = \\ & = e^{-\frac{\chi}{T_e V}} [K(a - (x + \chi))(p_2 - p_1) + K(l - (x + \chi))(p_1 - p_2)] = \\ & = \Delta p e^{-\frac{\chi}{T_e V}} [K(a - (x + \chi)) - K(-(x + \chi))], \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

здесь принято обозначение $\Delta p = p_2 - p_1$.

Ядро оператора $K(\xi - x)$ в случае плоской периодической контактной задачи для упругой полуплоскости известно [67] и имеет вид:

$$K(\xi - x) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{\pi E} \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi - x)}{l} \right|. \quad (3.4.4)$$

Используя соотношения (3.3.4), (3.4.2) – (3.4.4) преобразуем равенство (3.3.10):

$$u_z^{(\infty)}(x) = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left\{ \int_0^a p_1 \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi-x)}{l} \right| d\xi + \int_a^l p_2 \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(\xi-x)}{l} \right| d\xi + \right. \\ \left. + \frac{e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}}}{(e^{\frac{l}{T_\varepsilon V}} - 1)} \left(1 - \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon} \right) \Delta p \int_0^l e^{-\frac{\chi}{T_\varepsilon V}} \left[\ln 2 \left| \sin \frac{\pi(a-(x+\chi))}{l} \right| - \ln 2 \left| \sin \frac{\pi(-(x+\chi))}{l} \right| \right] d\chi \right\}. \quad (3.4.5)$$

Форму изношенной поверхности определяют износные перемещения границы тела $\omega^*(x, t)$. Однако износные перемещения границы неоднородного полупространства могут быть определены с точностью до неизвестной постоянной, которая, вообще говоря, зависит от времени (3.1.2). Определим форму поверхности $f(x)$ при $t \rightarrow \infty$ как:

$$f_\infty(x) = u_z^{(\infty)}(x) \quad (3.4.6)$$

Для упрощения расчетов перейдем к безразмерным переменным и обозначениям:

$$\hat{x} = x/l; \quad \hat{\chi} = \chi/l; \quad \hat{\xi} = \xi/l; \\ \hat{a} = a/l; \quad m = \frac{K_{\omega 2}}{K_{\omega 1}} \\ \zeta = l/T_\varepsilon V; \quad \gamma = \frac{T_\sigma}{T_\varepsilon}. \quad (3.4.7)$$

С помощью (3.4.1) выразим давление p_1 и p_2 через постоянную нагрузку, действующую на период, P_∞ и отношение коэффициентов интенсивности износа m :

$$p_1 = \frac{P_\infty m^{1/\alpha}}{(1 - \hat{a}m_1)l}; \quad p_2 = \frac{P_\infty}{(1 - \hat{a}m_1)l}, \quad (3.4.8)$$

здесь $m_1 = (1 - m^{1/\alpha})$.

Выражение, соответствующее форме изношенной поверхности жесткого неоднородного полупространства, с учетом принятых безразмерных обозначений, принимает вид:

$$f_{\infty}(\hat{x}) \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)P_{\infty}} = - \left\{ \frac{m^{1/\alpha}}{(1-\hat{a}m_1)} \int_0^{\hat{a}} \ln 2 |\sin \pi(\hat{\xi} - \hat{x})| d\hat{\xi} + \frac{1}{(1-\hat{a}m_1)} \int_{\hat{a}}^1 \ln 2 |\sin \pi(\hat{\xi} - \hat{x})| d\hat{\xi} + \right. \\ \left. + \frac{e^{\zeta}}{(e^{\zeta} - 1)} (1-\gamma) \frac{m_1}{(1-\hat{a}m_1)} \int_0^1 e^{-\hat{\chi}\zeta} [\ln 2 |\sin \pi(\hat{a} - (\hat{x} + \hat{\chi}))| - \ln 2 |\sin \pi(\hat{x} + \hat{\chi})|] d\hat{\chi} \right\} \quad (3.4.9)$$

Согласно проведенным в [27] расчетам для изнашивания при контакте упругого и локально упрочненного тела первые два интеграла в (3.4.9) можно выразить с помощью ряда т.е.:

$$f_{\infty}(\hat{x}) \frac{\pi^2 E}{2(1-\nu^2)P_{\infty}} = - \frac{m_1}{(1-\hat{a}m_1)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \hat{a}}{n^2} \cos \pi n (\hat{a} - 2\hat{x}) + \right. \\ \left. + \frac{e^{\zeta}}{(e^{\zeta} - 1)} \pi (1-\gamma) \int_0^1 e^{-\hat{\chi}\zeta} \ln \left| \frac{\sin \pi(\hat{a} - (\hat{x} + \hat{\chi}))}{\sin \pi(\hat{x} + \hat{\chi})} \right| d\hat{\chi} \right\} \quad (3.4.10)$$

Итак, установившаяся в процессе изнашивания форма поверхности зависит от следующих безразмерных комплексов:

\hat{a} , m – триботехнические свойства периодической структуры полупространства;

γ – отношение времен T_{σ} релаксации и T_{ε} последствия вязкоупругого материала;

$\zeta = (l/V)/T_{\varepsilon}$ – отношение времени прохождения вязкоупругим телом одного периода неоднородной структуры к времени T_{ε} последствия материала.

3.5 Результаты расчета

В результате проведенных вычислений согласно выражению (3.4.9) были построены графики формы поверхности жесткого тела в установившемся режиме изнашивания при различных значениях параметра $\zeta = l/T_{\varepsilon}V$ (рис. 22).

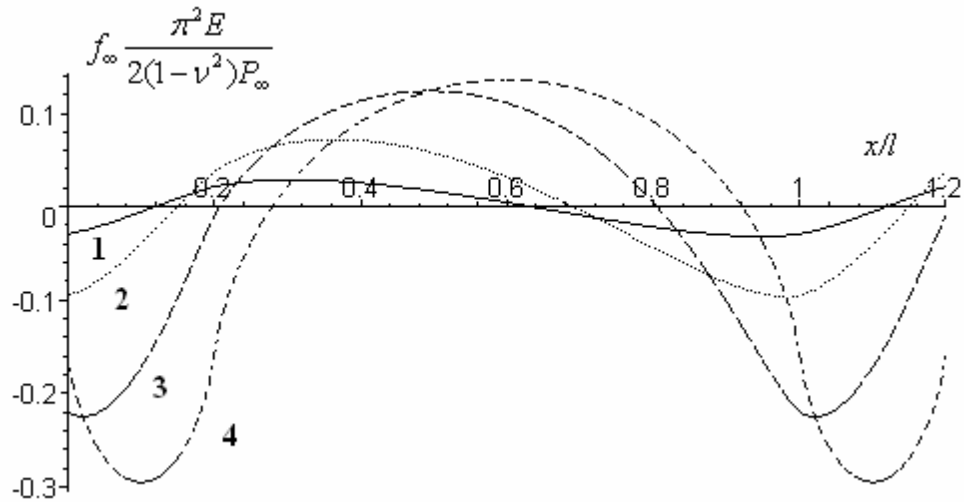


Рис.22 Установившаяся форма изношенной поверхности при $m_I=0,3$, $\hat{a}=0,2$, $\gamma=10^{-3}$, $\zeta=1$ – кривая 1; $\zeta=3$ – кривая 2; $\zeta=10$ – кривая 3; $\zeta=1000$ – кривая 4 (так же соответствует установившейся форме поверхности при изнашивании в контакте с упругим телом).

Отметим, что форма выступов изношенной поверхности при контакте с вязкоупругим телом при значениях $10^{-2} < \zeta < 10^2$ является не симметричной (кривые 1-3) в отличие от формы выступов при контакте с упругим телом (кривая 4). При $\zeta=100$ формы поверхности, полученные в результате решения вязкоупругой и упругой задач, отличаются не значительно, а при $\zeta=1000$ совпадают. При прочих равных условиях в зависимости от параметра $\zeta = l/T_\varepsilon V$ меняется глубина впадин (амплитуда волн).

Амплитуду волн определим как сумму модулей максимального и минимального значений функции $f_\infty(x)$. Для этого найдем корни уравнения:

$$\frac{\partial f_\infty(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \frac{\pi^2 E}{2(1-\nu^2)P_\infty} = 0. \quad (3.5.1)$$

После преобразований производная функции $f_\infty(x)$ может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial f_{\infty}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \frac{\pi^2 E}{2(1-\nu^2)P_{\infty}} = -\frac{m_1}{(1-\hat{a}m_1)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \pi n \hat{a} \sin \pi n (\hat{a} - 2\hat{x})}{n} + \right. \\ \left. + \frac{e^{\zeta}(1-\gamma)}{(e^{\zeta}-1)} \left[e^{-\zeta} \ln \left| \frac{\sin \pi (\hat{a} - (\hat{x}+1))}{\sin \pi (\hat{x}+1)} \right| - \ln \left| \frac{\sin \pi (\hat{a} - \hat{x})}{\sin \pi \hat{x}} \right| + \zeta \int_0^1 e^{-\hat{\chi}\zeta} \ln \left| \frac{\sin \pi (\hat{a} - (\hat{x} + \hat{\chi}))}{\sin \pi (\hat{x} + \hat{\chi})} \right| d\hat{\chi} \right] \right\}.$$

Вычисление корней уравнения (3.5.1), а также максимальных, минимальных и амплитудных значений Amp функции $f_{\infty}(x)$ проведено численно. На рис. 23 представлены зависимости амплитудных значений Amp функции $f_{\infty}(x)$ от параметра ζ при различных значениях параметра \hat{a} . Каждая кривая на рис. 23 имеет горизонтальную асимптоту. Асимптотическое значение амплитуды при соответствующих параметрах упрочнения (\hat{a}, m_1) показано на рис. 23 в скобках и определяется из решения задачи об изнашивании полупространства в контакте с упругим телом.

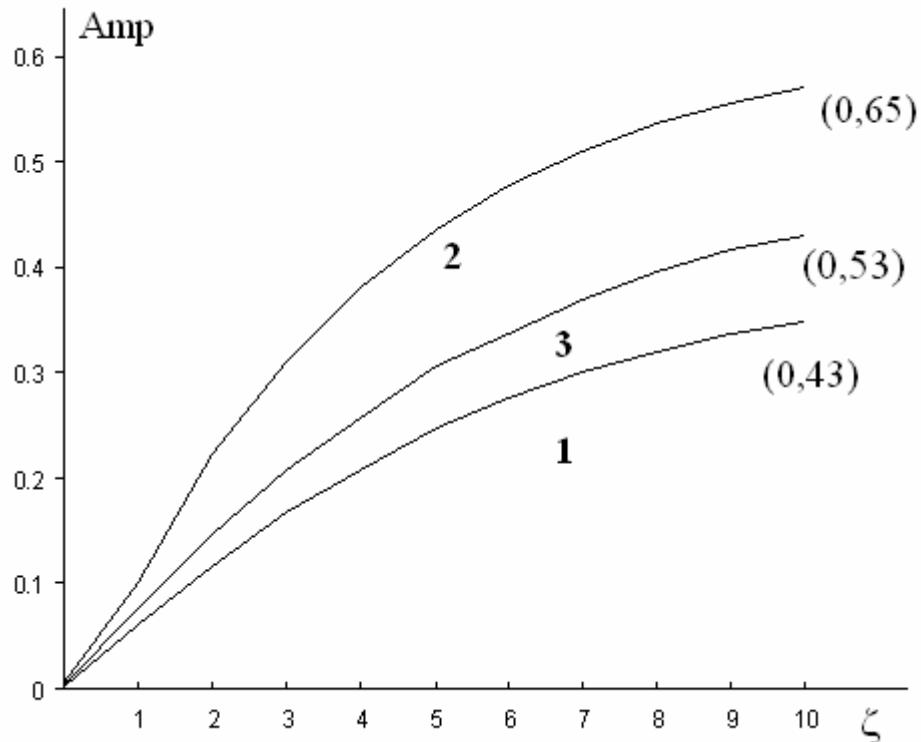


Рис.23 Зависимость амплитуды волны от параметра ζ при $m_1=0,3$, $\gamma=10^{-3}$, $a/l=0,2$ – кривая 1; $a/l=0,5$ – кривая 2; $a/l=0,8$ – кривая 3.

В заключение отметим, что скорость износа D_∞ определяется выражением:

$$D_\infty = \left\{ \frac{P_\infty}{\tilde{p}l \left[\hat{a}K_{\omega 1}^{-1/\alpha} + (1 - \hat{a})K_{\omega 2}^{-1/\alpha} \right]} \right\}^\alpha,$$

т.е. не зависит от свойств контртела, а зависит от триботехнических параметров приложенной нагрузки и закона износа.

3.6 Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

- Вязкоупругие свойства материала оказывают существенное влияние на формирование рельефа поверхности при изнашивании, причем форма поверхности существенно зависит от скорости скольжения.
- Форма выступов и впадин в диапазоне скоростей относительного скольжения от $10^{-3} l/T_\varepsilon$ до $10^3 l/T_\varepsilon$ является не симметричной. Наиболее выраженная асимметрия достигается при скорости скольжения $V=l/T_\varepsilon$.
- Глубина впадин (амплитуда волн) в контакте с вязкоупругим телом возрастает по мере увеличения отношения времени прохождения вязкоупругим телом одного периода неоднородной структуры l/V к времени последствия материала T_ε .

Полученные результаты могут быть применены для моделирования износа дорожного покрытия при контакте с шинами автомобиля. В процессе износа микро и макро рельеф дорожного полотна меняется, что приводит к изменению коэффициента сцепления. Поддержание оптимального коэффициента сцепления в течение длительного времени и прогнозирование его снижения обеспечивает необходимую безопасность движения транспорта.

Основные результаты работы

Предложен метод определения напряженного состояния упругого полупространства с выходящими на поверхность включениями различной формы при контактном взаимодействии. Основными характеристиками, определяющими суммарное поле напряжений, помимо распределения контактного давления являются форма включения, его характерный размер, взаимное положение и относительные размеры области контакта и включения.

Анализ напряженного состояния показывает, что значения максимальных касательных напряжений, возникающих при контактном взаимодействии в полупространстве с включениями, превышают наибольшие величины напряжений в однородном полупространстве. Если включение имеет протяженную форму, максимальные значения максимальных касательных напряжений локализуются на оси симметрии на границе включения со стороны основного материала. При полусферической форме включения максимальные значения τ_{max} имеют место на поверхности, при этом существует расстояние между центрами включения и области контакта, которое обеспечивает их наибольшие величины. Разработана математическая модель для исследования эффекта взаимного влияния неровностей при контакте шероховатого тела с вязкоупругим основанием. Эффект возникает из-за неполного восстановления поверхности в свободных зонах между неровностями вследствие реологических свойств материала. Предложенный подход базируется на решении пространственной периодической контактной задачи, для описания свойств основания используется одномерная модель стандартного вязкоупругого тела (обобщенная модель Кельвина).

Проведенный анализ эффекта взаимного влияния для различного уровня нагрузок и скоростей скольжения показал, что контактные характеристики и деформационная составляющая коэффициента трения

существенно зависят от расстояния между неровностями. Деформационная составляющая коэффициента трения уменьшается с увеличением плотности контакта. Установлено, что при высоком значении скорости скольжения и малом расстоянии между неровностями пятна контакта имеют форму эллипса. Значение относительного внедрения с ростом плотности контакта увеличивается.

Результаты настоящего исследования могут применяться для оценки коэффициента трения резин при скольжении вдоль поверхности с регулярной шероховатостью и наличии граничной смазки.

Вязкоупругие свойства материала оказывают существенное влияние на формирование рельефа поверхности при изнашивании, причем форма поверхности существенно зависит от скорости скольжения.

Форма выступов и впадин в диапазоне скоростей относительного скольжения от $10^{-3} l/T_\varepsilon$ до $10^3 l/T_\varepsilon$ является не симметричной. Наиболее выраженная асимметрия достигается при скорости скольжения $V=l/T_\varepsilon$.

Глубина впадин (амплитуда волн) в контакте с вязкоупругим телом возрастает по мере увеличения отношения времени прохождения вязкоупругим телом одного периода неоднородной структуры l/V к времени последдействия материала T_ε .

Полученные результаты могут быть применены для моделирования износа дорожного покрытия при контакте с шинами автомобиля. В процессе износа микро и макро рельеф дорожного полотна меняется, что приводит к изменению коэффициента сцепления. Поддержание оптимального коэффициента сцепления в течение длительного времени и прогнозирование его снижения обеспечивает необходимую безопасность движения транспорта.

Литература

1. Контактно-усталостные повреждения колес грузовых вагонов. Под ред. С.М. Захарова. – М.: ВНИИЖТ, 2004
2. Механика контактных взаимодействий. Под ред. Воровича И.И. и Александрова В.М. . – М.: Физматлит, 2001. – 672
3. Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконь А.В., Кренев Л.И., Трубчик И.С. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. – М.: Физматлит, 2006, 236с.
4. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел. – ДАН СССР, 1983, т. 271, №4, с.827-831
5. Александров В.М. Контактная задача при наличии износа, вызванного локальным оплавлением. – Физико-химическая механика, 1986, № 1
6. Александров В.М. Контактные задачи в трибологии. В кн.: Механика и научно-технический прогресс. – М., 1988, т.3, с. 170-180
7. Александров В.М. Коваленко Е.В. Осесимметричная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа. – МТТ, 1978, №5 , с. 58-66
8. Александров В.М. Коваленко Е.В. Контактные задачи теории упругости при наличии нелинейного износа. В кн.: Контактная жесткость в приборостроении и машиностроении. – Рига, 1979, с.62-63
9. Александров В.М. Коваленко Е.В. Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа. – ЖПМТФ, 1980, № 3, с. 163-172
10. Александров В.М. Коваленко Е.В. Плоские контактные задачи теории упругости для неклассических областей при наличии износа. – ЖПМТФ, 1980, № 3, с. 163-172

11. Александров В.М. Коваленко Е.В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа. – ДАН СССР, 1984, т. 275, № 4, с.827-831
12. Александров В.М. Коваленко Е.В. Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей. – ЖПМТФ, 1985, № 3, с.129-131
13. Александров В.М., Кудрова Ф.В. Точное решение периодической контактной задачи для упругого слоя при учете износа. – ПММ, 2002 (66), № 4, 647-654
14. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – Баку.: Азербайджанское государственное издательство учебно-педагогической литературы.- 1968
15. Бабей Ю.И., Сопрунюк Н.Г., Гурей В.М., Драчинская А.Г., Андриющенко В.А. – Металлофизика, 1980, т.2, №:, с.110-117
16. Боуден Ф.П., Табор Д. Трение и смазка твердых тел. – М.: Машиностроение, 1968. 543 с.
17. Вакуленко А.А. О микро и макро кинетике мартенситных превращений. – МТТ, № 5, 43-62, 2001г.
18. Гавриков М.В. Контактные задачи с учетом износа и монотонного роста зоны контакта – Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1990
19. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1953, 264с.
20. Галин Л.А., Горячева И.Г. Осесимметричная задача теории упругости при наличии износа. – ПММ, 1977, т. 41, Вып. 5, с. 807-812
21. Галин Л.А., Горячева И.Г. Контактные задачи теории упругости при наличии износа. В кн.: Теория трения, износа и проблемы стандартизации. Брянск, 1978, с. 251-265
22. Галин Л.А., Горячева И.Г. Контактные задачи и их приложение к теории трения и износа. – Трение и износ, 1980, т. 1, № 1, с. 105-119

23. Гольдштейн Р.В., Шифрин Е.И. – Плоская задача о напряженном состоянии, определяемом фазовыми превращениями в эллиптической области.- препринт № 714, ИПМ РАН, Москва, 2003
24. Горячева И.Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала – ПММ. – 1973 (37), №5, 877-885
25. Горячева И.Г. Контактная задача теории упругости для системы изнашиваемых штампов. – Изв. АН СССР, МТТ, 1987, № 6, с. 62-68
26. Горячева И.Г. Контактные задачи в трибологии. – Дисс. докт. физ.-мат. наук. 1987
27. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. - М.: Наука, 2001. – 478
28. Горячева И.Г., Горячев А.П., Садеги Ф. Контактное взаимодействие упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями в условиях трения качения или скольжения – Прикладная математика и механика – 1995 (59), вып. 4, 634-641
29. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Теоретические основы метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов. – Машиноведение, 1979, № 6 сс. 66-71
30. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Оценка точности метода расчета жесткости стыка шероховатых тел с учетом взаимного влияния микроконтактов. – Машиноведение, 1980, № 1 сс. 70-77
31. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Изнашивание неоднородно упрочненных поверхностей. – Трение и износ. – 1986 (7), № 6, 985-992
32. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256с.
33. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Влияние несовершенной упругости поверхностного слоя на контактные характеристики при скольжении шероховатых тел – Трение и износ - 1997 (18), №1, 5-12

34. Горячева И.Г., Торская Е.В. Контактные задачи при наличии износа для тел с переменным по поверхности коэффициентом износостойкости.//Трение и износ. – 1992 (13), № 1, 185-194
35. Горячева И.Г., Чекина О.Г. Управление формоизменением поверхностей при изнашивании.–Трение и износ, №1, 1989, (10), с.5-12
36. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений – М.: Наука, 1990, 312с.
37. Демкин Н.Б. Фактическая площадь касания твердых поверхностей. – М.: Издательство АН СССР, 1962, 112с.
38. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989г., 509с.
39. Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. О неединственности и устойчивости в задачах равновесия упругих двухфазных тел – Докл. РАН. 2003. Т.391, №2
40. Ишлинский А.Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трение качения) и смежных явлений. – В книге Трение и износ в машинах. М.-Л.: Издательство АН СССР, 1940, с. 255-264
41. Ишлинский А.Ю. Механика: идеи, задачи, приложения. – М.: Наука, 1985, 624с.
42. Коган Б.И. Напряжения и деформации в покрытиях с непрерывно меняющимся модулем упругости. – Труды Харьковского автомоб.-дор. института, 1957, Вып. 19, сс.53-56.
43. Коган Б.И., Зинченко В.Д. Напряженное состояние неоднородного слоя, покоящегося на упругом полупространстве. – Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. 1969. № 3.
44. Кондауров В.И. Фортов В.Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: Изд-во МФТИ, 2002, 336с.

45. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. В кн. Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. – М.: 1971, с. 130-140
46. Крагельский И.В. Трение и износ, изд. 2-е. – М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
47. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977, 576 с.
48. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. 339 с.
49. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. О фактическом контактном давлении. – Проблемы трения и изнашивания, 1977, Вып.12, с. 10
50. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Колебательные процессы, сопровождающие внешнее трение твердых тел. – Проблемы трения и изнашивания, 1979, Вып.15, с. 8
51. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Поля нормальных напряжений под скользящим периодическим индентором, моделирующим микрошероховатость поверхности. – Проблемы трения и изнашивания, 1979, Вып.16, с. 6
52. Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Влияние сил трения на распределение энергии под синусоидальным индентором. – Проблемы трения и изнашивания, 1980, Вып.18, с. 6
53. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – Государственное издательство технико-технической литературы, Москва, 1955, 491с.
54. Лурье С.А. О термодинамических определяющих соотношениях для материалов с памятью формы. – МТТ, 1997, №5, 110-122

55. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. – Изв. РАН. МТТ, 1995, №1, 197-2005с.
56. Морозов А.В., Маховская Ю.Ю. Теоретико-экспериментальная оценка деформационной составляющей коэффициента трения. - Трение и износ, 2007 (28), № 4, 335-344
57. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966, 707с.
58. Палатник Л.С. Равицкая Т.М. Островская Е.Л., Структура и динамическая долговечность сталей в условиях тяжелого нагружения. – Челябинск, Металлургия, 1988г., 159с.
59. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М. Наука, 1966, 752с.
60. Себра, Берт. Влияние волнистости и шероховатости поверхности на распределение нормального давления при герцевских контактах. – Проблемы трения и мазки, Труды американского общества инженеров-механиков, 1988, № 2 с. 63-71
61. Солдатенков И.А. Теоретический анализ изнашивания вязкоупругого покрытия винклеровского типа// Трение и износ -1996 (17), № 3, 331-339
62. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979, 560с.
63. Торская Е.В. определение параметров контактного взаимодействия и особенностей разрушения тел с неоднородными механическими и триботехническими характеристиками. – Дисс. канд. ф.-м. н., 1995.
64. Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. Равновесные двухфазные деформации и зоны фазовых переходов в приближении малых

- деформаций. - Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 121, 151-158, 2003
- 65.** Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах // М., Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1996, 240с.
- 66.** Шерман Д.И. Об одной задаче теории упругости // ДАН СССР, т. 27, № 9, 1940
- 67.** Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 270
- 68.** Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций // ИИЛ, Москва, 1963г., 247с.
- 69.** Braat G.F.M., Kalker J.J. Theoretical and experimental analysis of the rolling contact between two cylinders coated with multilayered viscoelastic rubber// Contact Mechanics, Computational Techniques, M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia, eds., Contact Mechanics Publications. Southampton, Boston - 1993, 115-126
- 70.** Chekina O.G., Keer L.M. Wear-contact problems and modeling of chemical mechanical polishing// J. Electrochem. Soc. – 1998. (145), N 6, 2100-2106
- 71.** Goryacheva I.G., Sadeghi F., Nickel D.A. Internal stresses in contact of a rough body and a viscoelastic layered semi-infinite plane// Journal of Tribology – 1996 (118), 131-136
- 72.** Greenwood J.A., Tabor D. The friction of hard sliders on lubricated rubber: the importance of deformation losses. Proc. Phys. Soc. 1958. Vol. 71. p. 989
- 73.** Greenwood J.A., Williamson J.B.R. Contact of nominally flat surfaces. – Proc. Roy. Soc., 1966, pp. 295-300
- 74.** Gureyev D.M., Mednikov S.I., Yamtchikov S.V. Laser radiation influence on the Surface wear of machine parts made of high-chromium cast

iron. – Proceedings of V-th international congress of Tribology. V. 2, Helsinki, 1989

75. Haines D.J., Ollerton E. Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces// Proc. Inst. Mech. Engrs.- 1963 (177), 95

76. Hardiman N.J. Elliptic elastic inclusion in an infinite elastic plate // Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol VII, Pt.2, 1954

77. Hertz H. Geseammelte Werke. 1895, B1, pp.179-195

78. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction// Jornal of Applied Mechanics - 1991 (58), 666-679

79. Kalker J.J. A strip theory for rolling with slip and spin// Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen – 1967 (B70), 10

80. Kendall K., Tabor D. An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces.- Proc. Roy. Soc., 1971, A323, p. 321-340