

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. Ишлинского

На правах рукописи

Мокров Михаил Сергеевич

**Отрицательное дифференциальное сопротивление,
неустойчивость и автоколебания в таунсендовском разряде**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-
математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф. Юрий Петрович Райзер

Москва, 2008 г

Оглавление

Основные обозначения	4
Введение.....	4
Глава 1. Обзор литературы.....	6
1.1 Пробой, зажигание таунсендовского разряда и его вольтамперная характеристика.	6
1.2 Автоколебания тока	11
1.3 О пространственной неустойчивости таунсендовского разряда.....	16
1.4 О численном моделировании тлеющего разряда.....	18
Глава 2. Применение метода Монте-Карло для расчетов коэффициентов ионизации, вторичной эмиссии и вольтамперной характеристики таунсендовского разряда в водороде и аргоне.....	19
2.1 Допущения, вопросы методики счета, входные данные.	19
2.2 Результаты расчетов.....	27
2.2.1 Водород	27
2.2.2 Аргон	35
2.3 Обсуждение полученных результатов	47
Глава 3. Автоколебания тока в таунсендовском разряде.....	50
3.1 Уравнение для электрической цепи	50
3.2 Уравнение для разрядного тока	52
3.3 Система уравнений для численного интегрирования и значения параметров	55
3.4 ВАХ и автоколебательные решения при малых pd	56
3.5 Автоколебания при больших pd	60
3.6 Автоколебания при переходе от таунсендовского разряда к тлеющему.....	62
3.7 Механизмы раскачки и стабилизации колебаний.....	64
3.8 Обсуждение результатов	72
Глава 4. Численное моделирование тлеющего разряда в плоской двумерной и трехмерной геометриях.	73
4.1 Постановка задачи.....	73
4.2 Конечно-разностные аппроксимации уравнений.....	75
4.3 Аппроксимация граничных условий.....	79
4.4 Метод решения конечно-разностных уравнений.....	81
4.5 Метод определения напряжения на электродах и распределения потенциала в разрядной области.....	83
4.6 К алгоритму численного решения.....	87
4.7 Диффузионные свойства используемых разностных схем.....	88

4.8 Результаты расчетов.....	90
4.8.1. Плоская двумерная геометрия.	90
4.8.2 Трехмерная геометрия.	94
4.9. Замечания об эффективности разработанной модели.	101
4.10 Выводы.	103
Заключение	103
Список основных публикаций по теме диссертации.....	105
Список цитированной литературы	105

Основные обозначения

N – плотность газа

V – напряжение

σ – проводимость; сечение столкновений

p – давление

d – длина разрядного промежутка

E – электрическое поле

f_{es} – «фактор ухода» электронов

g – коэффициент воспроизводства электронов

j – плотность тока

I – полный ток

γ – коэффициент вторичной эмиссии

R_{ID} – отрицательное дифференциальное сопротивление в пределе «нулевых» токов

n_e – плотность электронов

n_i – плотность ионов

α – ионизационный коэффициент

ν_i – частота ионизации

ν – скорость

R – сопротивление

C – электрическая емкость

f – частота

Введение

Одной из интересных и практически важных задач в механике и физике низкотемпературной плазмы является изучение условий, при которых осуществляется стационарное и пространственно однородное горение таунсендовского разряда. Такое горение при повышенных токах оказывается невозможным из-за развития неустойчивости. Проблеме неустойчивости таунсендовского разряда посвящено значительное число работ, но полной ясности в причинах развития неустойчивости и ее возможных результатах нет.

Практический интерес к неустойчивости таунсендовского разряда связан с тем, что такой разряд используется в высокоскоростном преобразователе инфракрасных изображений в видимые [1]. Прибор-преобразователь обладает рекордным быстродействием, $\sim 10^{-6}$ сек, в диапазоне длин волн $\lambda \sim 1\text{--}11$ мкм. В основу этого устройства положена тонкая плоская

система, состоящая из полупроводниковой пластины и разрядного промежутка. Полупроводник служит одновременно катодом для разряда и распределенным сопротивлением. Развитие неустойчивости, срывающее однородное и стационарное горение разряда, ограничивает допустимую силу разрядного тока, тем самым, снижая чувствительность прибора, поэтому необходимо провести пристальное изучение причин возникающей неустойчивости, что, возможно, откроет пути для ее частичного преодоления.

Результатом неустойчивости таунсендовского разряда в системе с полупроводниковым катодом является возникновение автоколебаний тока, однородного вдоль плоскостей электродов [2, 3]. Одной из целей диссертации является изучение факторов, контролирующих автоколебания, которые в настоящей работе трактуются с привлечением механической аналогии. Такая аналогия вполне естественна, т.к. автоколебания – традиционный объект изучения механики. Впрочем, рассматриваемые автоколебания тока в таунсендовском разряде и в самом деле имеют механическую природу, будучи колебаниями плотности и скорости ионного газа.

Предпосылкой появления автоколебаний является падающий характер вольтамперной характеристики $V_s(j)$ (ВАХ) таунсендовского разряда. Мерой отрицательного наклона ВАХ служит так называемое отрицательное дифференциальное сопротивление. При этом само электрическое сопротивление, которое пропорционально силе трения со стороны газа нейтральных частиц, испытываемой газами заряженных частиц при их движении в поле, всегда положительно. Опыт показывает, что зачастую ВАХ таунсендовского разряда с самого начала падает по линейному закону. Начальный наклон этой линии характеризуется величиной отрицательного дифференциального сопротивления в пределе «нулевых токов» (из расчета на единицу площади) $R_{1D} = |dV_s / dj|_{j=0}$. В проблеме автоколебаний в разряде значение R_{1D} является ключевым параметром, т.к. играет роль вынуждающей силы, раскачивающей автоколебания. Одной из задач диссертационной работы является выяснение механизмов и расчет R_{1D} (для водорода и аргона) при умеренных значениях произведения давления газа p на длину разрядного промежутка d , $pd \approx 1$ Торр см. Для этой цели пришлось провести изучение причин зависимости эффективного коэффициента вторичной эмиссии с катода от поля.

Развитие неустойчивости таунсендовского разряда с полупроводниковым катодом может приводить также к нарушению пространственной однородности таунсендовского разряда. В этом случае ток течет в виде множества нитей, часто упорядоченных в пространстве [4, 5, 6]. Почему ток в первоначально однородном вдоль плоскостей электродов таунсендовском разряде вдруг предпочитает течь через несколько пятен? Чем

определяется плотность тока в каждом пятне? Какую роль в этом процессе играет полупроводниковая пластина? Ее наличие существенно; на металлических электродах подобное явление не наблюдалось. В настоящее время на эти вопросы ответов нет.

Формирование токовых пятен на полупроводниковом катоде имеет много общего с явлениями самоорганизации, которые проявляются в механических, физических и других системах [7]. Структуры в газовом разряде привлекательны для исследования, т.к. физические процессы, отвечающие за рождение, движение и гибель заряженных частиц, относительно просты и хорошо известны. При этом главным инструментом исследования является численное моделирование процесса в трехмерных декартовых координатах. С целью последующего изучения природы токовых нитей, в работе разработана трехмерная программа для их расчета на основе гидродинамического описания электронного и ионного газов.

Глава 1. Обзор литературы

1.1 Пробой, зажигание таунсендовского разряда и его вольтамперная характеристика.

Рассмотрим плоский разрядный промежуток длины d , заполненный газом плотности N при давлении p , включенный в цепь вместе с источником питания. Координату x отсчитываем от катода. Повсюду считаем, что произведение $pd \sim 1$ Торр см. В этом случае при достаточно высоком напряжении на электродах осуществляется таунсендовский пробой, охватывающий весь объем промежутка [8]. Пробой промежутка по таунсендовскому механизму контролируется двумя процессами: (i) лавинообразным размножением электронов в объеме, стартующим от нескольких затравочных электронов, всегда имеющихся благодаря действию космических лучей; (ii) вторичной эмиссией электронов с катода под действием активных частиц.

Лавинообразное размножение электронов в объеме описывается с помощью ионизационного коэффициента α . Он характеризует число электрон-ионных пар, рожденных каким-нибудь электроном на единице длины его дрейфа вдоль направления электрического поля. Будем интересоваться суммарным числом электрон-ионных пар, M_α , рожденных в промежутке в результате вылета одного электрона с катода. Обычно M_α находится путем использования приближенной локальной связи ионизационного коэффициента α с электрическим полем $\alpha = \alpha[E(x)]$ [8]:

$$M_\alpha = \exp \left(\int_0^d \alpha[E(x)] dx \right) - 1, \quad (1.1)$$

При этом для связи ионизационного коэффициента $\alpha[E(x)]$ с локальным полем $E(x)$ часто принимается аппроксимация Таунсенда:

$$\alpha(E) = A p \cdot \exp(-B p / E) = \alpha_0 \exp(-E_0 / E), \quad \alpha_0 = A p, \quad E_0 = B p, \quad (1.2)$$

где A и B – известные из опыта константы.

Более строго M_α вычисляется с использованием «истинного» ионизационного коэффициента $\alpha = \alpha(x)$, связанного с функцией распределения электронов в точке x . Если оперировать $\alpha(x)$, то вместо (1.1) имеем:

$$M_\alpha = \exp \left(\int_0^d \alpha(x) dx \right) - 1 \quad (1.3)$$

Заметим, что при вычислении истинного $\alpha(x)$ учитываются нелокальные эффекты, благодаря которым ионизационная способность электронов в точке x определяется не полем в этой точке, как в (1.2), а распределением поля во всем пространстве.

Перейдем к рассмотрению вторичной эмиссии электронов с катода. В общем случае на катодной поверхности происходит сложный процесс вырывания электронов под действием множества различных агентов: положительных ионов, фотонов, быстрых и метастабильных атомов. Вероятность вырывания электрона с катода за счет всех упомянутых факторов характеризуется обобщенным коэффициентом γ , рассчитанным на один ион, приходящий на катод. Вместо вероятности γ иногда пользуются эффективным коэффициентом вторичной эмиссии $\gamma_{\text{eff}} = f_{\text{es}} \gamma$, где f_{es} так называемый «фактор ухода» электронов. По определению, $f_{\text{es}} = (J_{\text{emit}} - J_{\text{return}}) / J_{\text{emit}}$, где J_{emit} – поток электронов, эмитированных с катода; J_{return} – поток электронов, вернувшихся обратно в катод. «Фактор ухода» f_{es} характеризует вероятность возврата электрона, вылетающего с катода, обратно в катод благодаря анизотропному рассеянию при столкновении с атомом (молекулой) газа. Можно сказать, что γ_{eff} – это вероятность безвозвратного ухода электронов с катода. Вычислению растущей зависимости $f_{\text{es}} = f_{\text{es}}(E/N)$ посвящено значительное число работ [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

Процесс размножения электронов описывается коэффициентом воспроизводства электронов g , $g = \gamma_{\text{eff}} M_\alpha$. При пробое и в стационарном самостоятельном разряде выполняется условие:

$$g = \gamma_{\text{eff}} M_\alpha = 1, \quad (1.4)$$

выражающее полное воспроизводство электронов в промежутке.

Условие (1.4) в однородном пробивающем поле $E_T = V_T / d$ с M_α по (1.1) и $\alpha = \alpha(E)$ по (1.2) дает порог пробоя промежутка $V_T = V_T(p, d)$ (кривая Пашена):

$$V_T = \frac{B p d}{\ln(p d) + C}, \quad C = \ln \frac{A}{\ln(1 + 1 / \gamma_{\text{eff}})}, \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) качественно описывает экспериментальную кривую пробоя промежутка $V_T = V_T(pd)$, имеющую характерный минимум при $(pd)_{\min} \sim 1$ Торр см.

Явление пробоя носит пороговый характер. При этом для осуществления пробоя напряжение на электродах должно немного превышать пробивающее V_T . Тогда в первые мгновения развития разряда коэффициент воспроизводства электронов $g > 1$, в промежутке начнет развиваться ионизация, ток будет нарастать. Ограничивает ток внешнее сопротивление, включенное в цепь вместе с разрядным промежутком и источником питания. Если сопротивление достаточно велико, то в промежутке загорается слаботочный таунсендовский разряд, однородный в поперечном току направлении. Напряжение горения таунсендовского разряда $V \approx V_T$, плотность тока j и плотность пространственного заряда в промежутке невелики, поле $E(x)$ слабо искажено по сравнению с пробивающим $E_T = \text{const}$. В то же время эксперимент показывает, что ВАХ таунсендовского разряда $V_s(j)$ все же имеет слегка падающий характер. Это явление называют возникновением отрицательного дифференциального сопротивления. Как правило, в пределе «нулевых» токов напряжение на разряде V линейно спадает с ростом тока j . Пример ВАХ, измеренной на опыте, показан на рис.1.

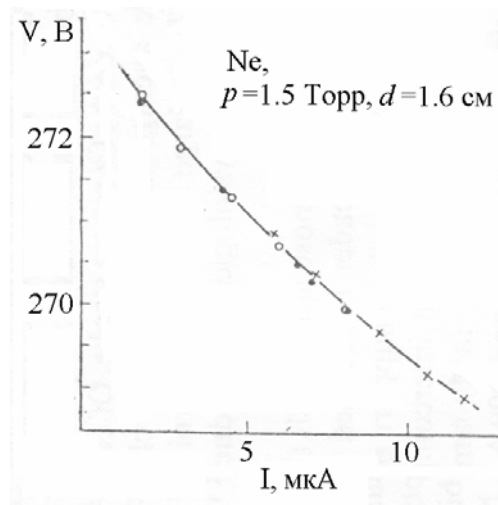


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика таунсендовского разряда в неоне [18]; $pd=2.4$ Торр см. Для неона $(pd)_{\min} \approx 4$ Торр см.

ВАХ таунсендовского разряда вычисляется из условия (1.4). Она находится аналитически, если ионизационный процесс описывается коэффициентом M_α по (1.1), рассчитанным в поле $E=E(x)$, формирующемся при протекании слабого тока. Если $\gamma_{\text{eff}} = \text{const}$, то ВАХ имеет вид: $V_s(j) = V_T + A_1 j^2$ [8, 19]. При «малых» $pd < \bar{e}(pd)_{\min}$, где $(pd)_{\min}$ — соответствует минимуму кривой Пашена (1.5), $\bar{e} = 2.72$, $A_1 > 0$ и ВАХ квадратично растущая. При «больших» $pd > \bar{e}(pd)_{\min}$, $A_1 < 0$ и ВАХ падающая. Знак A_1 определяется знаком второй производной от коэффициента Таунсенда $\alpha = \alpha(E)$, взятой в точке пробоя $E_T = V_T/d$.

Квадратичная ВАХ $V_S(j)=V_T+A_I j^2$ противоречит изображенной на рис. 1, а также измеренным в работах [20, 21, 22, 23], для промежутков с «малыми» pd . С целью устранить противоречие предполагается, что эффективный коэффициент вторичной эмиссии γ_{eff} растет с ростом поля у катода E_C [18, 24], которое, в свою очередь, повышается с током. При этом γ_{eff} представляется в виде: $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_T+d\gamma_{\text{eff}}/dE_C(E_C-E_T)$, $\gamma_T=\gamma_{\text{eff}}(E_T)$. В результате в ВАХ появляется требуемое линейное слагаемое: $V_S(j)=V_T-R_{ID}j+A_I j^2$, причем $R_{ID}\sim d\gamma_{\text{eff}}/dE_C>0$.

Выше речь шла о нахождении ВАХ в рамках M_α по (1.1) с использованием таунсендовского коэффициента $\alpha=\alpha(E)$. В этом приближении вопрос о физической природе отрицательного дифференциального сопротивления R_{ID} сводится к отысканию факторов, приводящих к росту $\gamma_{\text{eff}}=f_{\text{es}}\gamma$ с полем у катода E_C . Одним из таких факторов является рост вероятности f_{es} . Другие – связаны с повышением γ .

В работе [25] рассчитана ВАХ разряда в аргоне с учетом увеличения $f_{\text{es}}=f_{\text{es}}(E/N)$ для промежутков на правой ветви кривой Пашена. В [24] ВАХ таунсендовского разряда в водороде рассчитывается для условий пробоя далеко на левой кривой Пашена. Выбранное там значение $E/N\approx 3500$ Td столь велико, что соответствует $f_{\text{es}}\approx 1$. В таких условиях увеличение γ_{eff} с током происходит за счет эффектов кинетического вырывания электронов ионами, приходящими на катод с очень высокой энергией.

Для случая однородного в промежутке поля зависимость $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_{\text{eff}}(E/N)$ в аргоне рассчитана в работе [9]. Полученные результаты приведены на рис. 2 и 3 для очищенных и загрязненных примесями катодных поверхностей, соответственно. В расчете [9] используются истинные вероятности вырывания электронов активными агентами $\tilde{\gamma}$, взятые из экспериментов с пучками частиц в вакууме. Учитываются процессы рождения и гибели всех активных частиц в промежутке. На рис. 2, 3 $\gamma_i\equiv\tilde{\gamma}_i$ – вероятность выбивания электрона ионом; γ_{ph} , γ_{m} , γ_{a} – вероятности вырывания электрона соответственно фотонами, метастабильными атомами и быстрыми нейтральными атомами, рассчитанные на один приходящий к катоду ион. Величины γ связаны с истинными вероятностями $\tilde{\gamma}$, $\gamma=\tilde{\gamma}\Gamma/\Gamma_i$ (индексы опускаем), где Γ и Γ_i – потоки соответствующих частиц и ионов в катод.

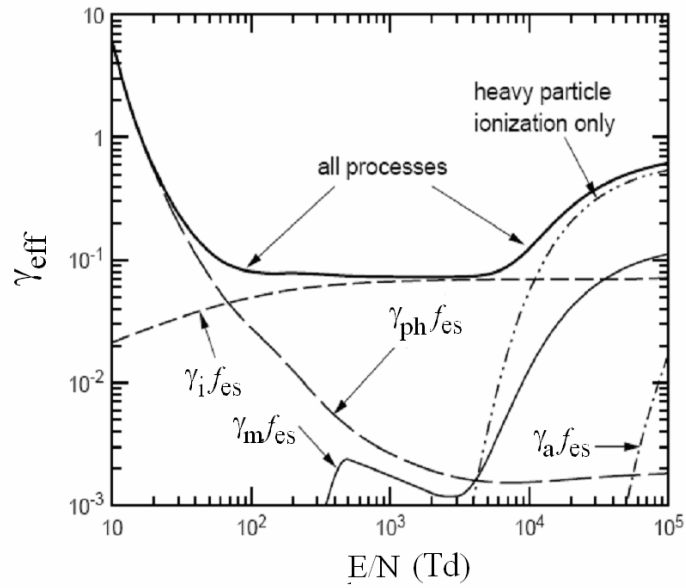


Рис. 2. Зависимость эффективного коэффициента вторичной эмиссии γ_{eff} от приведенного поля E/N для чистых катодов в аргоне. Показаны вклады всех активных частиц в γ_{eff} [9].

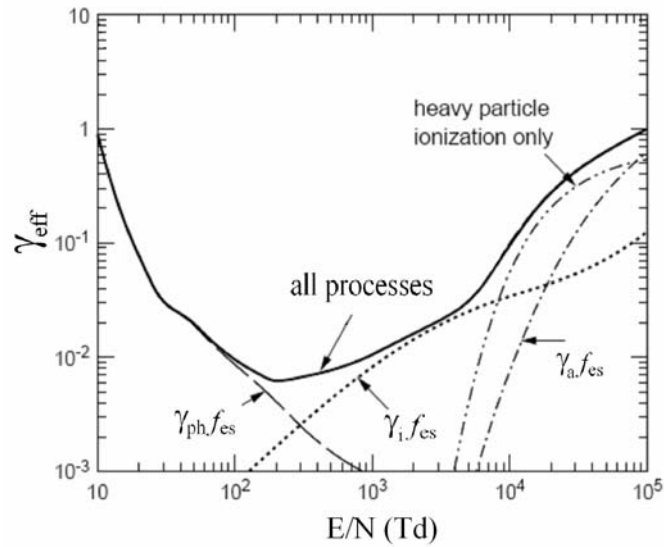


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для грязных катодов.

Выбору значений γ_{eff} , γ при моделировании разрядных процессов часто сопутствует произвол. Отчасти он оправдывается слабой чувствительностью получаемых результатов к этим значениям. Напротив, в проблеме возникновения отрицательного дифференциального сопротивления зависимости γ_{eff} и γ от E/N играют важную роль. Расчеты $\gamma_{\text{eff}} = \gamma_{\text{eff}}(E/N)$ типа [9], будучи информативными, довольно трудны, требуют множества входных данных и мало кому доступны. В связи с проблемой нахождения γ_{eff} упомянем два простейших способа ее определения, которые известны с давних пор.

Оценочные выражения для $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_{\text{eff}}(E/N)$ находятся из (1.4) с M_α , вычисленным по (1.1) в однородном пробивающем поле $E_T=V_T/d$. В работе [9] найденная таким элементарным способом $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_{\text{eff}}(E/N)$ согласуется с рассчитанной и показанной на рис. 2, 3.

Другой способ определения γ_{eff} основан на измерении зависимости тока i от длины промежутка d в несамостоятельном разряде с однородным полем E [26, 8, 9]. Пусть на катоде благодаря фотоэлектронам поддерживается слабый ток i_0 . Ток i , текущий в разрядном промежутке и измеряемый во внешней цепи, дается формулой:

$$i = \frac{i_0 f_{\text{es}} \exp(\alpha d)}{1 - \gamma_{\text{eff}} [\exp(\alpha d) - 1]} \quad (1.6)$$

Измеренная для $E=\text{const}$ зависимость $i=i(d)$ и формула (1.6) позволяют определить γ_{eff} .

В книгах [26, 8] приводится сводка значений $\gamma_{\text{eff}}=\gamma_{\text{eff}}(E/N)$ для многих газов. Полученные зависимости γ_{eff} от E/N немонотонны, их трудно интерпретировать без специального анализа, подобного проведенному в [9].

1.2 Автоколебания тока

Они наблюдаются в электрической цепи, содержащей источник питания V_0 , большое сопротивление R , плоский промежуток с таунсендовским разрядом и емкость C , включенную параллельно разряду. При колебаниях ток в разряде остается однородным вдоль электродов. Изучение автоколебаний в упомянутой системе проведено в работе [18] для случая разряда в неоне и промежутков с pd в области минимума кривой Пашена. В [18] измерены частоты возникающих колебаний и критические токи возбуждения колебаний в зависимости от параметров внешней цепи, а также развита простая теория явления, объясняющая наблюдаемые закономерности.

Автоколебания, подобные исследованным в [18], изучались также в работах [20, 21], посвященных водороду. В этих работах рассматриваются промежутки с $pd=0.5-3$ Торр см, что соответствует левой ветви и области минимума кривой Пашена. Автоколебания наблюдаются в широком диапазоне разрядных токов. Для их описания в работе [24] предложена модель, имеющая много общего с [18].

Автоколебания также возникают в таунсендовском разряде с полупроводниковым катодом [2, 3]. В этом случае полупроводниковая пластина вносит в цепь распределенные внешнее сопротивление и емкость. Система полупроводник - таунсендовский разряд положена в основу прибора-преобразователя инфракрасных изображений в видимые [1]. Прибор состоит из тонкого, $d_s \sim 0.1$ см, слоя полупроводника и разрядного промежутка длиной $d \sim 0.01-0.1$ см, подключенных к источнику постоянного напряжения V_0 . При этом один электрод располагается на внешней стороне полупроводника, не обращенной к разряду,

а второй служит анодом для разряда. Сопротивление полупроводника регулируется его подсветкой инфракрасным светом со стороны противоположной к разряду. Автоколебания тока, однородного вдоль плоскости электродов, регистрируются во внешней, по отношению к системе полупроводник-разряд, цепи.

В опытах [2] разрядный промежуток длиной $d=0.05, 0.1$ см заполнялся азотом при давлении $p=30.4$ Торр, $pd=1.52$ Торр см, 3.04 Торр см. Толщина полуизолирующего арсенида галлия (GaAs) $d_s=0.15$ см, поперечный диаметр системы $D=3$ см. На рис. 4, взятом из [2], темными кружками показаны измеренные значения проводимости полупроводника σ_s и напряжения V_0 , при которых стационарный таунсендовский разряд сменяется однородными автоколебаниями.

Данные, представленные на рис. 4, говорят, в частности, о том, что устойчивость разряда по отношению к возникновению автоколебаний не определяется однозначно протекающим током, она также зависит от параметров внешней цепи. На это указывают и более ранние исследования [18, 24]. Приведем пример. На рис. 4 обе пары значений, $V_0=500$ В, $\sigma_s=2.6 \times 10^{-7}$ Ом $^{-1}$ см $^{-1}$ и $V_0=560$ В, $\sigma_s=1.75 \times 10^{-7}$ Ом $^{-1}$ см $^{-1}$, соответствуют одинаковому току, $I=1.53$ мА [при оценке I напряжение на таунсендовском разряде V принято равным пробивному $V_T=375$ В, измеренному для рассматриваемых условий С. Штрмпелем (*Strümpel* С)]. Первая точка устойчива, в ней разряд стационарен, а вторая нет, и соответствует автоколебаниям (см. рис. 4).

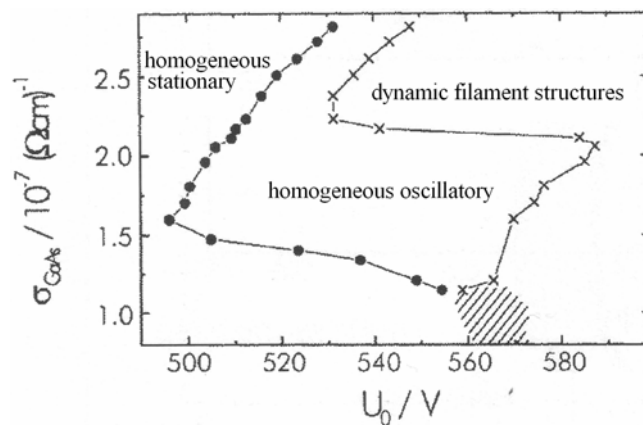


Рис. 4. Область существования стационарного разряда, однородных автоколебаний и динамических пространственных структур при $d=0.05$ см, измеренная в [2]. Темные кружки отвечают переходу от стационарного таунсендовского разряда к однородным автоколебаниям, крестики — переходу от однородных автоколебаний к сложным пространственно-временным токовым структурам.

При фиксированных емкости и условиях пробоя простая теория устанавливает, что критическая плотность тока для возбуждения колебаний j_{cr} обратно пропорциональна

внешнему сопротивлению R , $j_{cr} = \text{const}/R$, что согласуется с измерениями [18, 24]. В опытах [2] зависимость I_{cr} , $I_{cr} = j_{cr}S$, от сопротивления полупроводника R_S не анализируется. Если посчитать, что автоколебания в системе с полупроводником ничем не отличаются от таковых в схемах с сосредоточенным сопротивлением и емкостью, то любопытно извлечь зависимость I_{cr} от $1/R_S$ из данных [2] и соотнести ее с теоретической. Это сделано на рис. 5 с использованием данных рис. 4. При этом неизвестное напряжение на разряде принимается равным пробивающему, $V \approx V_T = 375$ В, что законно, т.к. разряд является таунсендовским. В самом деле, предельная плотность тока таунсендовского разряда, $j_L \approx \epsilon_0 \mu_+ V_T^2 / d^3$ [8], для рассматриваемого варианта с $d = 0.05$ см, $pd = 1.52$ Торр см, $V_T = 375$ В, составляет $j_L \approx 3.7 \times 10^{-3}$ А см⁻² (при оценке подвижность ионов азота принята равной $\mu_{+p} = 1140$ см² Торр В⁻¹ с⁻¹), что с площадью $S = 7.1$ см² дает $I_L = 26.3$ мА, в 13 раз выше максимального тока, представленного на рис. 5.

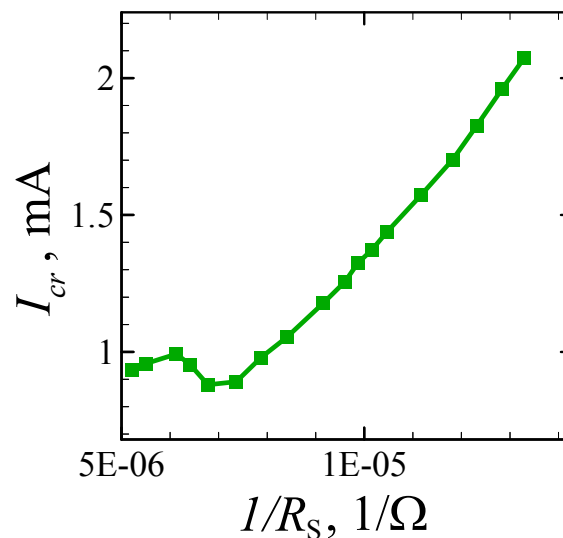


Рис. 5. Зависимость порогового тока для возбуждения автоколебаний от обратного сопротивления полупроводника. Построено по результатам измерений, проведенных в [2] при $d = 0.05$ см, $pd = 1.52$ Торр см.

Рис. 5 показывает, что при достаточно малых R_S , $R_S < 1.25 \times 10^5$ Ом, закономерность $I_{cr} = \text{const}/R_S$ выполняется. Для больших R_S это не так. Теперь автоколебания возникают на опыте при большем токе, чем это диктуется теорией. Если иметь в виду результаты экспериментов с сосредоточенным сопротивлением, для которых зависимость $I_{cr} = \text{const}/R_S$ подтверждается на опыте вплоть до очень малых токов, то можно сказать, что распределенное сопротивление R_S оказывает на разряд стабилизирующее действие. Вопрос о причинах такого действия в настоящее время не решен.

В опытах [3], постановка которых по существу повторяет [2], исследуются однородные автоколебания тока в таунсендовском разряде в азоте для широкого диапазона $pd=0.25\text{--}12.5$ Торр см. В этих экспериментах сопротивление полупроводника, задаваемое подсветкой, фиксируется, а ток наращивается за счет напряжения V_0 , приложенного к системе. В [3] измерены пороги возбуждения и распада пространственно-однородных автоколебаний, а также частоты возникающих колебаний.

Однородные автоколебания наблюдаются во всей охваченной опытами области $pd=0.25\text{--}12.5$ Торр см, хотя иногда существуют только в очень узком диапазоне приложенных напряжений. Пример экспериментальной осциллограммы автоколебаний при различных значениях V_0 показан на рис. 6. Амплитуда осцилляций растет с напряжением V_0 .

При типичной для опытов [3] проводимости полупроводника $\sigma_s \approx (0.5\text{--}1) \times 10^{-7} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, его толщине $d_s \approx 0.1$ см и диаметре $D=1.5$ см, сопротивление R_s составляет $R_s \approx 0.5\text{--}1$ МОм. При R_s близком к 1 МОм в эксперименте [3] проявилась прямая зависимость порогового тока для возбуждения колебаний j_{cr} от сопротивления R_s , что противоречит теоретической, $j_{cr} = \text{const}/R_s$. Этот результат перекликается с найденным [2] в пределе больших R_s . При более низких значениях, $R_s < 0.7$ МОм, в [3] пороговый ток j_{cr} немного убывает с ростом R_s , что ближе к теории и более ранним работам.

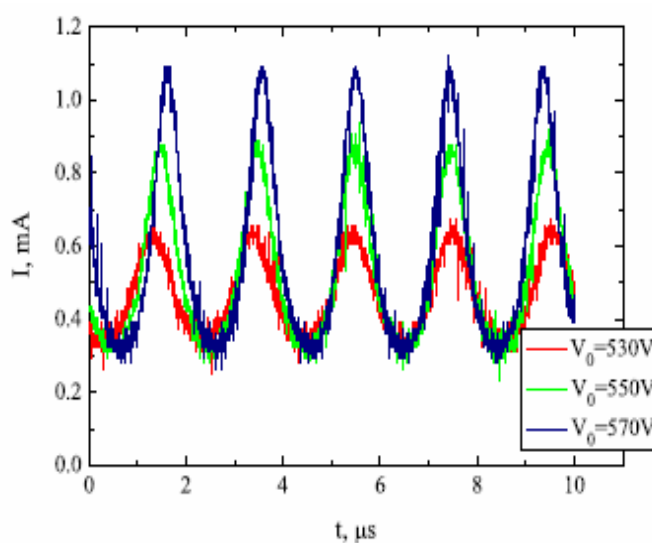


Рис. 6. Экспериментальная осциллограмма колебаний тока [3]. Азот, $d=0.08$ см, $pd=0.8$ Торр см.

Измеренные в [3] частоты автоколебаний f вблизи порога возбуждения, составляют 300–600 кГц. Такие измерения ценны при проверке теории, т.к. автоколебания у порога возникновения близки к синусоидальным, и их частоту можно найти аналитически из приближенных уравнений нестационарного колебательного процесса, $f = 1/C \cdot 1/\sqrt{RR_{ID}}$ [18, 24]. Таким образом, при неизменных емкости C и условиях пробоя частота автоколебаний f

уменьшается с ростом внешнего сопротивления R . Опыт [18] подтверждает эту закономерность. Напротив, в [3] обнаружено, что частота автоколебаний f не убывает с ростом сопротивления полупроводника R_s . Причина такого расхождения теории с опытом остается невыясненной.

Опишем то, как в [3] происходит распад автоколебаний вблизи верхнего предела их существования по приложенному напряжению. Когда этот предел превзойден, на осциллограмме тока появляются добавочные пики, нарушающие строго периодический автоколебательный процесс. При больших напряжениях, теряется пространственная однородность разряда (ток при этом хаотически пульсирует).

Автоколебания тока в разряде с полупроводниковым катодом исследовались численно в работах [28, 29]. При этом разряд описывается одномерной системой уравнений для электронов и ионов (в гидродинамическом приближении) и уравнением Пуассона. Эта система интегрируется совместно с уравнением внешней цепи, включающей полупроводник, подчиняющийся закону Ома, и источник питания V_0 . При моделировании разрядного процесса диффузией и потерями зарядов пренебрегается, эффективный коэффициент вторичной электрон-ионной эмиссии γ_{eff} полагается постоянным.

В [29] автоколебательные решения найдены для условий опытов [2], для «большого» $pd=3.04$ Торр см, $pd > \bar{e}(pd)_{\text{min}}$, $\bar{e}=2.72$. В численном счете получилось, что режим возбуждения автоколебаний «жесткий» и амплитуда автоколебаний возрастает с приложенным напряжением V_0 . То же самое происходит на опыте. Однако, в целом, несмотря на применение для описания разряда системы неупрощенных уравнений, согласие расчета [29] с экспериментом только качественное.

В [28] автоколебательные решения получены для условий, соответствующих области перехода к тлеющему разряду. При этом стационарная точка, вокруг которой возникает предельный цикл, лежит на ВАХ поднормального разряда, а максимальная плотность тока при осцилляциях приближается к нормальной плотности тока тлеющего разряда. Возникает вопрос о том, реализуемы ли на опыте пространственно однородные колебания в таких условиях. Ведь в поднормальном разряде уже начинает формироваться катодное пятно, поэтому протекание тока носит двумерный характер [8]. Отметим, что в расчете [28] с ростом приложенного к системе напряжения V_0 автоколебания постепенно превращались в хаотические колебания. Переход к хаосу происходит через серию последовательных бифуркаций с удвоением периода колебаний.

1.3 О пространственной неустойчивости таунсендовского разряда

Она исследовалась теоретически в работах [30, 31, 32, 25, 33]. В [33] найдено характерное время развития неустойчивости таунсендовского разряда. Нарушение пространственной однородности разряда иногда сопровождается возникновением незатухающих колебаний, как это происходит при некоторых условиях в поднормальном тлеющем разряде [32, 25]. Поднормальный разряд характеризуют катодным пятном [8], которое является «квазинормальным». Расчеты [32, 25] показывают, что при колебаниях тока поперечные размеры «квазинормального» катодного пятна не остаются постоянными, а также испытывают колебания с периодом, равным периоду осцилляций тока. Добавим, что в [27] возможные типы колебаний, возникающих в области перехода от таунсендовского разряда к тлеющему, изучались экспериментально.

Остановимся на следующем примере развития неустойчивости таунсендовского разряда в системе с полупроводниковым катодом – упорядоченных токовых структурах, проявившихся в опытах [5] (см. также [4, 6]). На рис. 7 изображена картина протекания тока, сфотографированная со стороны прозрачного анода системы полупроводник – разрядный промежуток. Токовые нити возникают, когда приложенное к системе напряжение V_0 превышает некоторое критическое значение. В качестве полупроводника используется кремний, с небольшой примесью цинка и золота; его проводимость в этих опытах очень мала $\sigma_s \sim 10^{-9} - 10^{-11} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$, что достигается охлаждением всей установки до температур $T \approx 90 \text{ К}$.

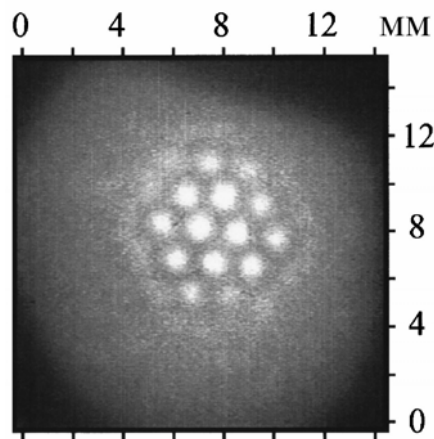


Рис. 7. Экспериментальная картина свечения разряда в азоте при $p=106.5$ Торр, $d=0.08$ см, $d_s=0.12$ см, $V_0=1.886$ кВ. Средняя плотность тока через систему - $\langle j \rangle = 6.54 \text{ мА см}^{-2}$ [5].

Токовые нити в системе с полупроводником также наблюдались в опытах [2], но в отличие от [5], они были нестационарными. Область их существования на диаграмме приложенное напряжение V_0 – проводимость полупроводника σ_s показана на рис. 4.

Формирование токовых структур в разряде с полупроводниковым катодом, в условиях опытов [2], исследуется теоретически в [34]. В модели рассматривается идеализированный

плоский двумерный разрядный процесс. Разряд описывается общепринятой системой, состоящей из электронного и ионного уравнений, а также уравнения Пуассона. Полупроводник считается плохим линейным проводником, распределение поля в котором находится с помощью уравнения Лапласа.

Сначала анализируется устойчивость разряда в линейном приближении по отношению к малым возмущениям (поперечным току) с различными масштабами длины. В соответствии с общими принципами анализа на устойчивость [8], система уравнений для электронов n_e , ионов n_{ion} , и потенциала φ линеаризуется относительно малых отклонений $\delta n_e(x,y)$, $\delta n_{ion}(x,y)$, $\delta \varphi(x,y)$ от стационарного решения $n_e(x)$, $n_{ion}(x)$, $\varphi(x)$, которое соответствует одномерному разрядному процессу. Решение полученной линеаризованной системы для $\delta n_e(x,y)$, $\delta n_{ion}(x,y)$, $\delta \varphi(x,y)$ ищется в виде плоских волн $\delta n_e = (\delta n_e)_a(x) \exp(\omega t + iky)$ и т.д., где координата y - направлена поперек электродов. Для функций $(\delta n_e)_a(x)$, $(\delta n_{ion})_a(x)$, $\delta \varphi_a(x)$ получается система дифференциальных уравнений, из которой численно находят дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$, где k – волновой вектор, связанный с λ , пространственным масштабом возмущения, «частота» ω в общем случае комплексна. Установлено, что масштабов λ таких, что $\text{Re}(\omega) > 0$ и $\text{Im}(\omega) = 0$ нет, что указывает на устойчивость разряда по отношению к пространственным возмущениям. Получается, что начальная стадия развития пространственных возмущений всегда имеет осциллирующий характер, т.е. если $\text{Re}(\omega) > 0$, то одновременно $\text{Im}(\omega) \neq 0$.

Масштаб λ , для которого характерное время развития неустойчивости минимальное, затем вводится в периодическое начальное условие, которое используется при численном интегрировании неупрощенной системы уравнений в частных производных. Например, при $\sigma_s = 5.87 \times 10^{-8} \text{ Ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, $V_0 = 1140 \text{ В}$ с наибольшей скоростью возрастают возмущения с $\lambda \approx 0.7$ см. Результаты численного моделирования [34] демонстрируют формирование нестационарной периодической токовой структуры. При этом максимальная плотность тока в центрах нитей порядка предельной для таунсендовского разряда.

Отметим, что образование упорядоченных токовых нитей наблюдается и в барьерном разряде, в котором разряд горит между двумя плоскими электродами, покрытыми диэлектриками. Электроды подключены к источнику переменного напряжения V_0 с частотой f . Возникновение токовых нитей в ячейках барьерного разряда было рассчитано численно с помощью двумерной [35, 36] и трехмерной моделей [37], базирующихся на общепринятой системе уравнений в частных производных для электронов, ионов (в гидродинамическом приближении), дополненной уравнением Пуассона.

О других случаях возникновения токовых структур в газовом разряде см. [38] и указанную там литературу.

1.4 О численном моделировании тлеющего разряда

Заключительная глава настоящей работы посвящена описанию модели газового разряда, горящего в промежутке между двумя плоскими металлическими электродами, в гидродинамическом приближении. Разработанная программа проверяется путем моделирования стационарного столба тлеющего разряда в плоской двумерной и трехмерной геометриях. Скажем здесь несколько слов о современном состоянии подобных моделей тлеющего разряда.

К настоящему времени такой классический объект как нормальный тлеющий разряд подробно изучен [8]. Хотя до сих пор на страницах ведущих научных журналов появляются работы, вскрывающие те или иные вопросы его физики, природа основных наблюдаемых закономерностей была установлена в работах конца 80-х, начала 90-х годов. Большую роль в достижении понимания того, как протекает реальный разрядный процесс, сыграло численное моделирование [39, 40, 41, 42, 43, 44]. В частности, благодаря разработке двумерных моделей была окончательно выяснена причина возникновения эффекта нормальной плотности тока [39, 40].

В настоящий момент трехмерные численные модели тлеющего разряда только начинают появляться. Отметим в этой связи работу [45], в которой предлагается эффективный алгоритм для решения такой задачи, который применяется для расчета стационарного столба тлеющего разряда с учетом нагрева нейтрального газа. Что касается двумерного разряда (как плоского, так и цилиндрического), то, модели, разработанные 20 лет назад, получили в настоящее время дальнейшее развитие. Возможности вычислительной техники позволяют рассчитывать двумерную структуру разряда с учетом добавочных физико-химических факторов. Это могут быть, например, нагрев газа [46], внешнее постоянное магнитное поле, химические реакции, поток нейтрального газа (см. книгу [47] и указанную там литературу). Изучение влияния на структуру разряда перечисленных процессов проводится в целях перспективных приложений в гиперзвуковой авиации.

Глава 2. Применение метода Монте-Карло для расчетов коэффициентов ионизации, вторичной эмиссии и вольтамперной характеристики таунсендовского разряда в водороде и аргоне.

Конечной целью этой главы является нахождение отрицательного дифференциального сопротивления таунсендовского разряда в водороде и аргоне.

Предварительно находятся ионизационные коэффициенты $\alpha = \alpha(E/N)$, частоты ионизации электронным ударом $\nu_i = \nu_i(E/N)$, скорости дрейфа электронов $\nu_{dr} = \nu_{dr}(E/N)$, которые сравниваются с опытом и расчетами других авторов. Вычисляются зависимости $\gamma_{eff} = \gamma_{eff}(E/N)$ и $f_{es} = f_{es}(E/N)$. Расчет вышеуказанных величин проводится с целью проверки методики. Эти величины также представляют интерес при построении моделей разрядов.

2.1 Допущения, вопросы методики счета, входные данные.

Рассмотрим процесс лавинообразного размножения электронов в плоском промежутке. Ось x направим от катода к аноду. Для строгого расчета коэффициента размножения M_α , связанного с истинным ионизационным коэффициентом $\alpha(x)$ по (1.3), вовсе не обязательно предварительно находить распределение $\alpha(x)$. Проще поступить другим, эквивалентным способом, обеспечивающим меньшую вычислительную погрешность. Этот способ основан на подсчете чисел ионизации, произведенных электронами в промежутке, из расчета на один вышедший с катода и не вернувшийся на него электрон. Предполагаем, что ионизация в объеме промежутка происходит только электронным ударом. С катода последовательно выпускаем N_{el} ($N_{el} \sim 5 \times 10^3 - 10^5$) электронов с некоторым заданным энергетическим спектром. Движение каждого из N_{el} электронов и всех его потомков моделируем методом Монте-Карло [48] с учетом столкновений с неподвижными атомами (молекулами) газа вплоть до попадания на электроды. Благодаря рассеянию на большие углы после упругих столкновений электрон, вылетевший с катода, может на него вернуться. Считаем катод полностью поглощающим. При попадании на анод медленные электроны к нему прилипают, а высокоэнергичные неупруго отражаются. Пусть в результате выпуска N_{el} электронов с катода в промежутке совершается актов M_{tot} ионизации, а к катоду прилипает N_C электронов. Число ионизаций, рассчитанное на один вышедший и не вернувшийся на катод электрон, M_α , есть $M_\alpha = M_{tot} / (N_{el} - N_C)$. Заметим, что электроны, родившиеся в промежутке, не могут попасть на катод.

Факт возможного возврата электронов на катод никак не учтен в M_α . Для его учета вводят $M=f_{es}M_\alpha$ – число ионизаций, рассчитанное на один выпущенный с катода электрон, причем числа N_C и N_{el} дают $f_{es}=1-N_C/N_{el}$ – «фактор ухода» электронов.

Отметим, что в зависимости от того, какую величину, M_α или M , использовать, меняется трактовка вероятности вторичной эмиссии. При использовании M_α говорят об эффективном коэффициенте γ_{eff} . Эффективный он в том смысле, что рассчитан с учетом возвращения некоторой доли эмитированных с катода электронов обратно в катод. Если оперировать M , то такой возврат электронов учитывается теперь при расчете M , коэффициента размножения электронов в объеме, поэтому в роли коэффициента вторичной эмиссии выступает истинная вероятность γ .

В настоящей работе эффективный коэффициент вторичной эмиссии γ_{eff} находится из (1.4) с M_α , рассчитанным методом Монте-Карло, в промежутке с однородным полем, соответствующем точке pd , V_T на измеренной кривой Пашена. Такой способ оценки γ_{eff} несколько уточняет общепринятый, при котором M_α находится по (1.1) с таунсендовской аппроксимацией ионизационного коэффициента $\alpha=\alpha[E(x)]$. Соотношение (1.4) может быть переписано в виде $\gamma M=1$, откуда путем использования значения M , вычисленного для условий пробоя, мы находим истинную вероятность вторичной эмиссии γ , рассчитанную на один приходящий к катоду ион.

В настоящей работе, как и в [14, 15, 16, 17], «фактор ухода» электронов f_{es} рассчитывается методом Монте-Карло. Заметим, что простейшую оценку f_{es} дает формула Томсона-Леба:

$$f_{es} = \frac{1}{1 + \bar{v}/4v_{dr}}. \quad (2.1)$$

В (2.1) \bar{v} – скорость хаотического движения электронов, которую обычно вычисляют по средней энергии спектра вылетающих с катода электронов, а v_{dr} – скорость дрейфа электронов, $v_{dr} \sim E/N$. Еще один способ определения f_{es} , уточняющий (2.1), основан на аналитическом решении кинетического уравнения для функции распределения электронов в двучленном приближении [10, 11, 12, 13].

Ионизационный коэффициент $\alpha(x)$ не выражается непосредственно через функцию распределения электронов (ФРЭ) $f(x, v, \vartheta)$, где ϑ – угол между направлениями скорости электрона \mathbf{v} и электрическим полем \mathbf{E} , $v = |\mathbf{v}|$. Через ФРЭ выражаются частота ионизации электронным ударом $\nu_i(x)$ и скорость дрейфа электронов $v_{dr}(x)$, отношение которых дает $\alpha(x)$:

$$v_i(x) = \frac{N \int v \sigma_{\text{ion}}(v) f(x, v, \vartheta) dv}{\int f(x, v, \vartheta) dv}, \quad v_{\text{dr}}(x) = \frac{\int v \cdot \cos \vartheta \cdot f(x, v, \vartheta) dv}{\int f(x, v, \vartheta) dv}, \quad dv = 2\pi v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$\alpha(x) = \frac{v_i(x)}{v_{\text{dr}}(x)} \quad (2.2)$$

Формулы (2.2) используются для расчета ионизационного коэффициента $\alpha(x)$, причем ФРЭ $f(x, v, \vartheta)$ рассчитывается по методике [48]. При этом вводится разностная сетка по координате x , по энергии ε и углу ϑ . Количество узлов сетки по x , ε , ϑ составляет 50, 500, 29, соответственно.

Рассчитанный по (2.2) ионизационный коэффициент $\alpha(x)$, как уже отмечалось выше, вообще говоря, не является функцией локального поля $E(x)/N$. Строго говоря, $\alpha = \alpha(E/N)$ только в случае поля, однородного во всем бесконечном пространстве. В этом смысле даже для короткого промежутка с постоянным полем $E(x) = \text{const}$ поле не является вполне однородным и $\alpha = \alpha(x)$. «Нелокальность» проявляет себя очень заметно, когда поле сильно неоднородное. Так обстоит дело, например, в тлеющем разряде, в направлении протекания тока. В этом случае благодаря эффектам «нелокальности» в структуре разряда появляются области отрицательного свечения и фарадеева темного пространства [41].

Заметим, что в случае квазистационарного разрядного процесса со слабым током ионизационный коэффициент $\alpha(x)$ входит в уравнение баланса числа зарядов:

$$\frac{d\Gamma_e(x)}{dx} = \alpha(x)\Gamma_e(x), \quad \alpha(x) = \frac{1}{\Gamma_e(x)} \frac{d\Gamma_e(x)}{dx}, \quad (2.3)$$

где $\Gamma_e(x) = \int v \cos \vartheta f dv = n_e v_{\text{dr}}$ – плотность потока электронов в точке x . При использовании метода Монте-Карло строгим эквивалентом соотношений (2.3) является равенство:

$$\alpha(x_i) = \frac{1}{N_i} \frac{N_{i+1} - N_i}{\Delta x_{i+1,i}}, \quad (2.4)$$

где N_i полное алгебраическое число пересечений электронами плоскости x_i (алгебраическое в том смысле, что пересечения слева направо берутся со знаком плюс, а справа налево – со знаком минус); $\Delta x_{i+1,i} = x_{i+1} - x_i$. Формулу (2.4) удобно использовать при отладке программы. Рассчитывать же ионизационный коэффициент предпочтительней по (2.2), что приводит к меньшей вычислительной погрешности.

Отметим, что число пересечений N_0 через плоскость $i=0$, совпадающую с поверхностью катода, отнесенное к числу выпущенных с катода электронов N_{el} , дает «фактор ухода»: $f_{\text{es}} = N_0/N_{\text{el}} \equiv 1 - N_C/N_{\text{el}}$. Последнее равенство эквивалентно определению f_{es} , $f_{\text{es}} =$

$(J_{\text{emit}} - J_{\text{return}})/J_{\text{emit}}$, где J_{emit} – поток электронов, вылетающих с катода; J_{return} – поток электронов, возвращающихся к катоду.

Точке V и j на ВАХ разрядного промежутка $V_s(j)$ соответствует полное воспроизводство электронов в промежутке (1.4). При нахождении ВАХ таунсендовского разряда коэффициент воспроизводства электронов g удобно рассматривать в зависимости от напряжения на промежутке V и плотности разрядного тока j , $g=g(V, j)$. Считая отклонения V от пробивного напряжения V_T малыми и токи j слабыми, раскладываем коэффициент воспроизводства g по степеням $V - V_T$ и j :

$$g(V, j) = 1 + (\partial g / \partial V)_T (V - V_T) + (\partial g / \partial j)_T j \quad (2.5)$$

В (2.5) сохранены только члены первого порядка по малым величинам $V - V_T$ и j . Приравняв правую часть (2.5) единице, получаем начальный участок ВАХ таунсендовского разряда:

$$V_s(j) = V_T - R_{1D} j, \quad R_{1D} = \frac{(\partial g / \partial j)_T}{(\partial g / \partial V)_T}, \quad (2.6)$$

Формула (2.6) в принципе решает вопрос о нахождении отрицательного дифференциального сопротивления таунсендовского разряда в пределе «нулевых» токов. В общем случае, однако, для производных $(\partial g / \partial V)_T$, $(\partial g / \partial j)_T$, входящих в (2.6), невозможно вывести аналитические формулы. Их приходится находить численно, по описанной ниже схеме.

Методом Монте-Карло вычисляем числа ионизаций M и коэффициенты воспроизводства электронов $g = \gamma M$ в слабо неоднородном поле $E(x)$, формирующемся при протекании небольшого тока. В качестве γ используется значение, найденное для «нулевого» тока (при однородном пробивающем поле). Значение γ предположительно соответствует потенциальному вырыванию электронов с катода ионами $\gamma = \gamma_i$. В таком случае вероятность вторичной эмиссии не зависит от кинетической энергии ионов и остается неизменной с ростом тока.

Для распределения поля $E(x)$ используется приближенное выражение, в которое напряжение на разряде V и плотность тока j входят в качестве параметров. Простейшим способом $E(x)$ находится из уравнения Пуассона, в котором принято $n_e \ll n_i$, $n_i(x) \approx \text{const} = j / [e v_{i \text{ dr}} (1 + \gamma_T)]$, где n_e , n_i – плотности электронов и ионов, e – заряд электрона. В последней формуле скорость дрейфа ионов $v_{i \text{ dr}}$ и эффективный коэффициент вторичной эмиссии, $\gamma_T = f_{\text{esT}} \gamma_i$, рассчитываются в пробойном поле $E_T = V_T / d$. Поле $E(x)$, получающееся в результате решения уравнения Пуассона в рассматриваемом приближении, линейно спадает от катода к аноду [19, 18]:

$$E(x) = \frac{V}{d} + \frac{j}{2(1 + \gamma_T) \varepsilon_0 v_{i \text{ dr}}} \cdot (d - 2x) \quad (2.7)$$

Уточненное по сравнению с (2.7) $E(x)$ получится, если решить уравнение Пуассона с плотностью ионов $n_i(x)$, найденной из уравнения непрерывности при $E_T = \text{const}$ [24]. При этом плотностью электронов n_e по сравнению с n_i опять следует пренебречь. В результате $E(x)$ имеет вид:

$$E(x) = \frac{V}{d} + \frac{j d}{\varepsilon_0 v_{i \text{ dr}} (1 + \gamma_T)} \Psi(x/d),$$

$$\Psi = \frac{1}{2} - \frac{1 - e^{-\alpha_T d}}{(\alpha_T d)^2} - \frac{x}{d} + \frac{e^{-\alpha_T (d-x)}}{\alpha_T d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(1 + \gamma_T) L_\gamma^2} - \frac{x}{d} + \frac{1}{L_\gamma} \left(\frac{\gamma_T}{1 + \gamma_T} \right)^{(1-x/d)}, \quad (2.8)$$

В (2.8) $L_\gamma = \ln(1/\gamma_T + 1)$, ε_0 – диэлектрическая постоянная вакуума; скорость дрейфа ионов $v_{i \text{ dr}}$ и таунсендовский коэффициент α_T вычисляются в пробойном поле E_T/N . Выражение для Ψ в (2.8) преобразовано с помощью равенства $\alpha_T \cdot d = L_\gamma$, которое вытекает из (1.1), (1.2), (1.4) в поле $E(x) = E_T = \text{const}$.

По сравнению с (2.7) формула (2.8) дает пониженное значение поля на протяжении некоторого расстояния от катода до некоторой точки в глубине промежутка и повышенное значение поля около анода. Площади под графиками $E(x)$ по (2.7) и (2.8) одинаковы и равны напряжению на промежутке V . При малых γ_T , $\gamma_T \ll 1$, распределение $E(x)$ по (2.8) слабо отличается от линейного распределения (2.7). В пределе $\gamma_T \rightarrow 0$ результаты (2.7) и (2.8) для $E(x)$ совпадают.

Отметим, что распределение $E(x)$ в широком диапазоне плотностей токов (в том числе и при слабых токах, характерных для таунсендовского разряда) рассчитывалось численно в [49] на основе одномерной системы гидродинамических уравнений для электронов и ионов, дополненных уравнением Пуассона.

Варьируя напряжение на разряде V и плотность тока j , получаем серию распределений поля $E(x)$ по (2.7) или (2.8), в которых рассчитываем $M = M(V, j)$. При этом значения V и j при расчетах задаем так, чтобы относительное отклонение напряжения V от V_T было невелико, $(V - V_T)/V_T < 0.1$, а плотность тока j не превышала j_L – предельной плотности тока для таунсендовского разряда, т.к. распределения поля (2.7), (2.8) при $j > j_L$ могут оказаться несправедливыми [8]. Для набора значений V, j расчеты дают таблицу коэффициентов воспроизводства $g(V, j) = \gamma_i \cdot M(V, j)$, в которой для некоторых V, j $g(V, j) > 1$, а для других – $g(V, j) < 1$. Если $g(V, j) > 1$, то плотности заряженных частиц и разрядный ток будут нарастать со временем, если $g(V, j) < 1$, то, наоборот, убывать. Значения V, j , соответствующие ВАХ, $V = V_s(j)$, где $g(V, j) = 1$, могут быть легко найдены из таблицы рассчитанных значений $g(V, j)$ линейной интерполяцией. Статистическая ошибка определения положения точки на ВАХ при этом не превышает 15%.

Для сечений столкновений электронов с атомами (молекулами) газа используются данные [50]. Они приведены на рис. 8 (для водорода) и на рис. 9 (для аргона). Заметим, что эффективное сечение это сумма транспортного сечения для упругих столкновений и полных сечений для всех неупругих процессов.

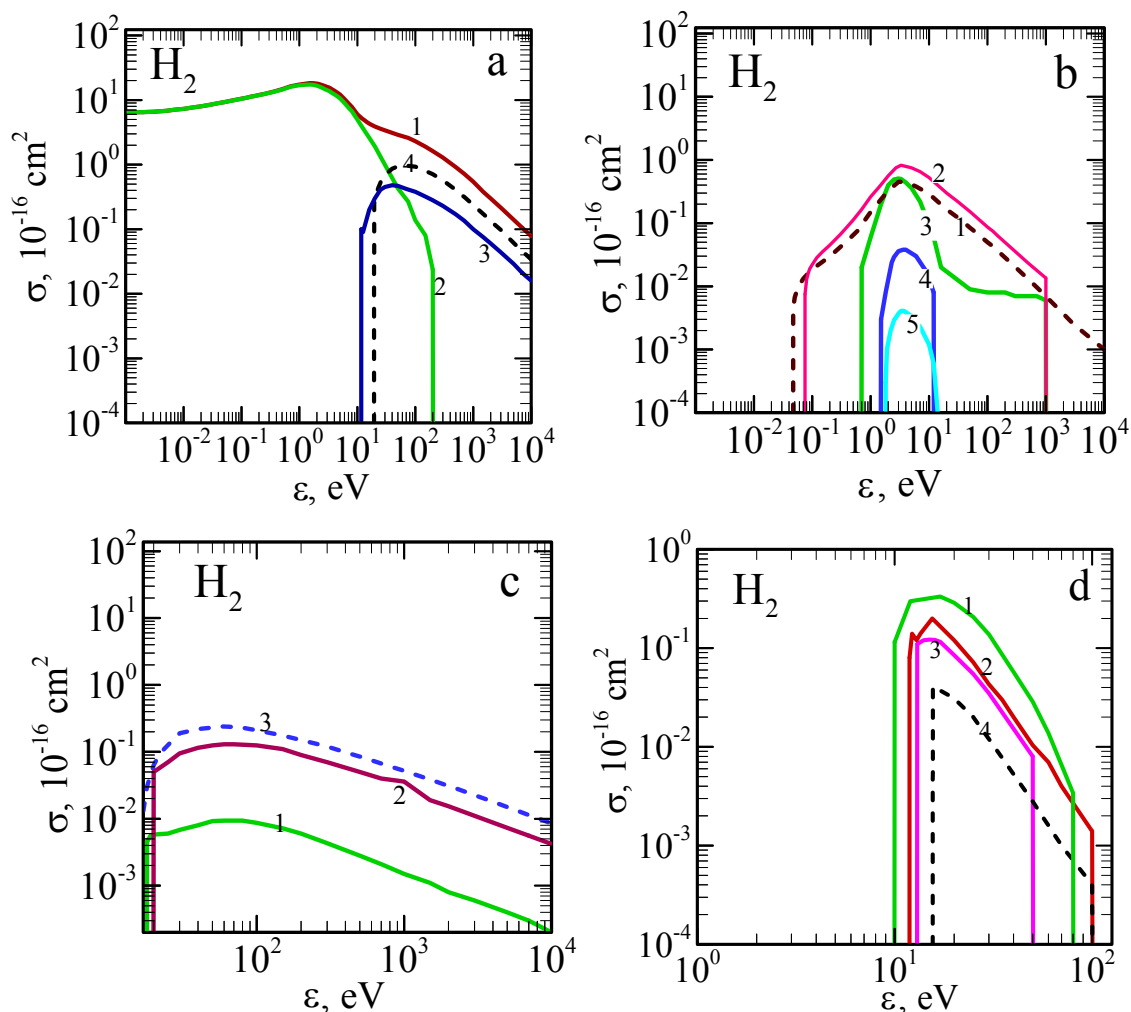


Рис. 8. Интегральные сечения столкновений электронов с молекулами H_2 [50]. (a) 1 - σ_{eff} – эффективное сечение, 2 - σ_{el} – транспортное сечение для упругих столкновений, 3 – сечения возбуждения уровней $B^1\Sigma_u^+$ и $C^1\Pi_u$ (им соответствует одна кривая, т.к. в масштабе рисунка эти сечения почти совпадают), 4 – сечение ионизации; (b) сечения возбуждения вращательных уровней: с изменениями вращательного квантового числа с $J=0$ до 2 (кривая 1) и $J=1$ до 3 (кривая 2), а также сечения возбуждения колебательных уровней: с изменениями колебательного квантового числа с $v=0$ до 1 (кривая 3), с $v=0$ до 2 (кривая 4), с $v=0$ до 3 (кривая 5); (c) сечения диссоциации H_2 электроном с одновременным возбуждением атома Н в состояния с главным квантовым числом $n=3$ (кривая 1) и $n=2$ (кривая 2), сечение возбуждения всех высоколежащих, ридберговских уровней (кривая 3); (d) сечения возбуждения уровней: $b^3\Sigma_u^+$ (кривая 1), $c^3\Pi_u$ (2), $a^3\Sigma_g^+$ (3); $d^3\Sigma$ (4).

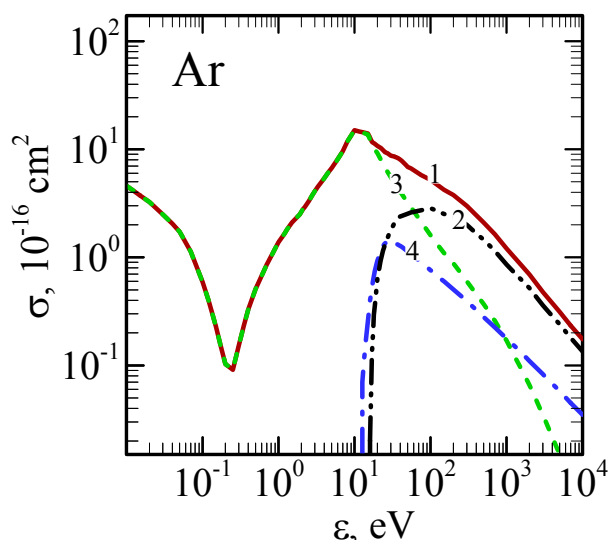


Рис. 9. Интегральные сечения столкновений электронов с атомами Ar [50]. 1- эффективное сечение; 2 – сечение ионизации; 3 – транспортное сечение для упругих столкновений; 4 – сечение возбуждения Ar в приближении одного «эффективного» уровня.

Объединение всех возбужденных уровней аргона в один «эффективный» значительно упрощает вычисления. Для описания неупругих процессов в Ar доступна также более детальная схема сечений, в которой индивидуально учтено возбуждение 25-ти уровней [51]. Ее, в частности, используют при расчетах коэффициентов возбуждения определенных уровней Ar. Знание таких коэффициентов помогает анализировать экспериментальные данные по излучению таунсендовского разряда в Ar [52].

Опишем модели, принятые в настоящей работе для расчетов углов рассеяния после столкновений электронов с молекулами (атомами).

Начнем с водорода. Угол рассеяния электрона после упругого столкновения рассчитывается путем использования экспериментальной вероятности рассеяния: при низких энергиях электронов, ϵ от 0 до $\epsilon=15$ эВ, из работы [53]; для умеренных, $15 < \epsilon < 100$ эВ, из [54]. При $100 < \epsilon < 200$ эВ полагается, что электроны после упругих столкновениях рассеиваются только вперед. При энергиях, превышающих 200 эВ, упругими столкновениями вообще пренебрегается, т.к. сечение этого процесса, σ_{el} , чрезвычайно мало, см. рис. 8.

После любого акта вращательного возбуждения электроны рассеиваются изотропно [55], после любого акта колебательного возбуждения – только вперед.

При ионизирующем столкновении электрона с H_2 угол его рассеяния, а также направление движения вторичного электрона определялись как в [48]. При этом доля энергии, передаваемая вторичному электрону, определялась по простой формуле, указанной в [56] со ссылкой на данные [57, 58].

При возбуждении $b^3\Sigma_u^+$, $d^3\Sigma$, ридберговских уровней, а также при столкновениях, приводящих к развалу молекулы H_2 с одновременным возбуждением образующегося атома H, рассеяние электронов полагается изотропным.

При неизменных остальных дифференциальных сечениях, указанных выше, для уровней $B^1\Sigma_u^+$, $C^1\Pi_u$, $a^3\Sigma_g^+$, $c^3\Pi_u$ задаются две возможности. В первом случае рассеяние электронов после возбуждения этих уровней считается изотропным. Ниже мы называем этот случай моделью I. Во втором случае, ниже – модель II, при низких энергиях $\varepsilon < 17.5$ эВ рассеяние полагается изотропным, при $17.5\text{эВ} < \varepsilon < 30\text{эВ}$ происходит в соответствии с экспериментальными вероятностями из [59], а при $\varepsilon > 30$ эВ электроны рассеиваются только вперед.

Отметим, что при проведении расчетов (для водорода) основная неопределенность связана с нехваткой знаний о законах рассеяния электронов по углам после неупругих столкновений с молекулами.

Переходим к аргону. Рассеяние электронов после упругих столкновений полагается изотропным. Заметим, что при таком подходе возможная анизотропия упругого рассеяния электронов по углам учитывается (приближенно), т.к. при расчете длины пробега для упругих столкновений используется транспортное сечение.

Угловое рассеяние электронов после возбуждения «эффективного» уровня Ar описывается дифференциальным сечением $\sigma(\varepsilon, \chi)$ из [60]:

$$\sigma(\varepsilon, \chi) = \frac{\sigma(\varepsilon)\varepsilon}{4\pi[1 + \varepsilon \sin^2(\chi/2)]\ln(1 + \varepsilon)}, \quad (2.9)$$

где $\sigma(\varepsilon) = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\varepsilon, \chi) \sin \chi d\chi$ - полное сечение возбуждения, χ – угол рассеяния, ε – энергия налетающего электрона за вычетом энергии возбуждения.

Характеристики электронов в аргоне после ионизационных столкновений рассчитываются подобно тому, как это сделано в случае водорода.

Укажем наконец принятый закон отражения электронов от анода. Считаем, что медленные электроны, с энергией $\varepsilon < 50$ эВ, поглощаются анодом. Коэффициент η неупругого отражения быстрых электронов, $\varepsilon > 50$ эВ, от анода взят из [61] и показан на рис.10а. Энергетический спектр отраженных электронов, заимствованный также из [61], изображен на рис.10b. Косинус угла между направлением скорости отраженного от анода электрона и осью x находится с помощью случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[-1, 0]$.

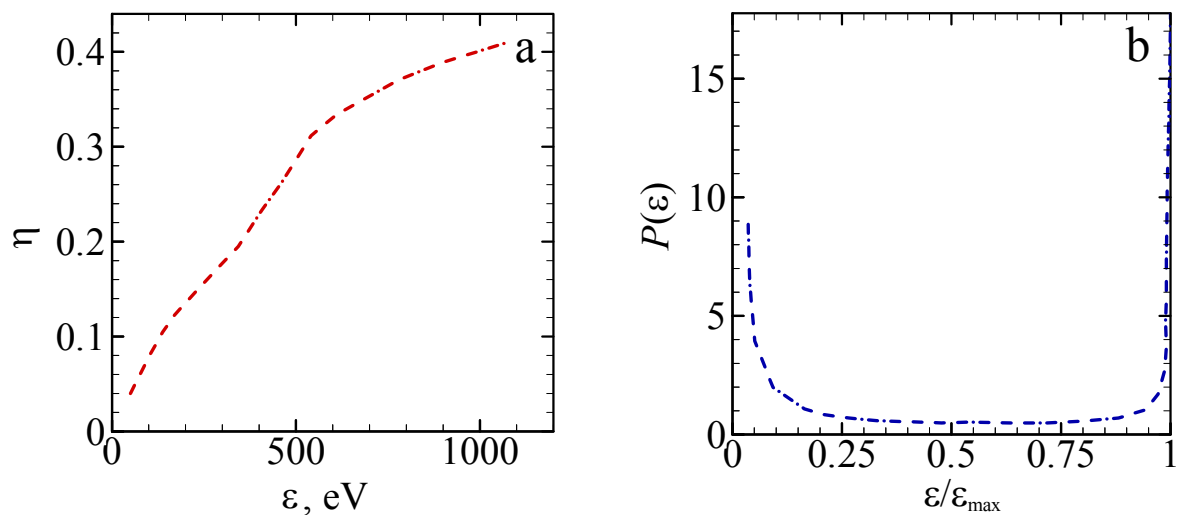


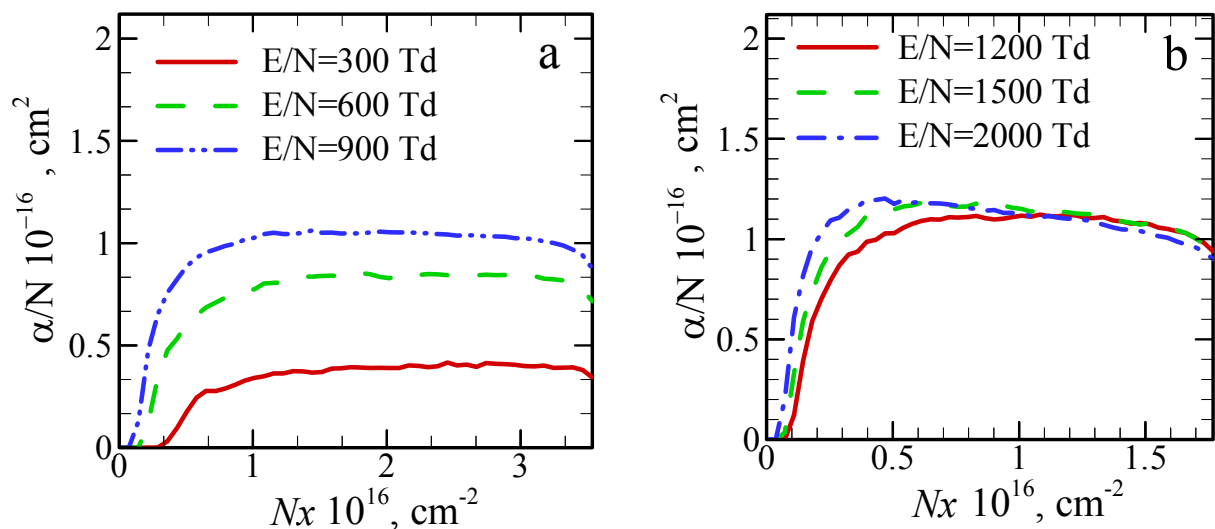
Рис. 10. (а) Зависимость коэффициента неупругого отражения электронов от позолоченного анода от энергии налетающего электрона; (б) Энергетический спектр электронов, испытавших неупругое отражение от металлической поверхности. Обе кривые построены по данным [61].

2.2 Результаты расчетов.

2.2.1 Водород

На рис. 11 приведены распределения приведенного ионизационного коэффициента $\alpha(x)/N$ вдоль длины разрядных промежутков, найденные методом Монте-Карло, при различных значениях однородного приведенного поля E/N . Расчет сделан по модели II.

Во всех случаях вблизи катода присутствует хорошо выраженный участок «нелокальности», где ионизационный коэффициент α мал и не определяется приложенным полем. С ростом E/N длина «нелокальности» сокращается, т.к. теперь «среднему» электрону нужно пройти меньшее расстояние, чтобы набрать энергию, достаточную для ионизации молекулы.



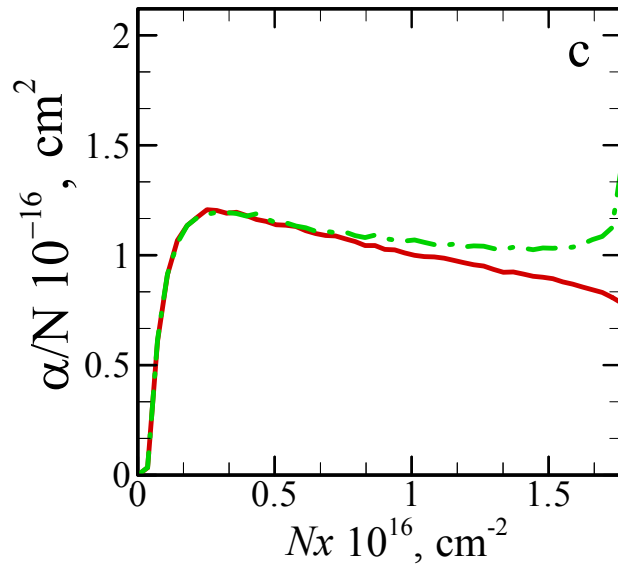


Рис. 11. Распределения приведенного ионизационного коэффициента $\alpha(x)/N$ от катода до анода (по Nx) при различных E/N . (a) $Nd = 3.54 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$; (b) другие E/N , $Nd = 1.77 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$; (c) $E/N = 3000 \text{ Td}$, $Nd = 1.77 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$. На рисунке (c) сплошной кривой показан ионизационный коэффициент, рассчитанный без учета отражения электронов от анода, а пунктиром – с учетом отражения.

На рис. 11a, для небольших значений $E/N < 1500 \text{ Td}$, распределение $\alpha(x)/N$ имеет протяженный участок, близкий к плато, на котором величина $\alpha(x)/N$ определяется приложенным полем. Этот участок соответствует установившемуся, равновесному спектру электронов, не зависящему от координаты вдоль промежутка. При более высоких $E/N > 1500 \text{ Td}$ плато в распределении $\alpha(x)/N$ исчезает, и ионизационная способность электронов с ростом Nx начинает убывать (см. рис.11 b, c). В этом случае спектр электронов неравновесный и зависит от x . В опытах [62, 63] установлено, что в водороде при $E/N < 1400 \text{ Td}$ электронный спектр везде, за исключением небольшой области вблизи катода, можно считать установившимся и равновесным. По нашим расчетам это справедливо при $E/N < 1500 \text{ Td}$, что неплохо согласуется с экспериментом. При очень высоких E/N отражение электронов от анода заметно влияет на распределение $\alpha(x)/N$, см. рис. 11c.

При невысоких $E/N < 1500 \text{ Td}$, и достаточно больших Nd $\alpha/N \approx \text{const}$ и определяется E/N , что служит аргументом в пользу простой теории с локальным таунсендовским коэффициентом. При этом скорость дрейфа электронов $v_{\text{dr}}(x)$ и частота ионизации $\nu_i(x)$ также практически не зависят от x , их значения определяются E/N . На рис.12–14 вычисленные в настоящей работе $\alpha/N = \alpha/N(E/N)$, $v_{\text{dr}} = v_{\text{dr}}(E/N)$, $\nu_i = \nu_i(E/N)$ сравниваются с

экспериментами и расчетом [66, 50], проведенным на основе решения кинетического уравнения в двухчленном приближении в бесконечном пространстве с однородным полем.

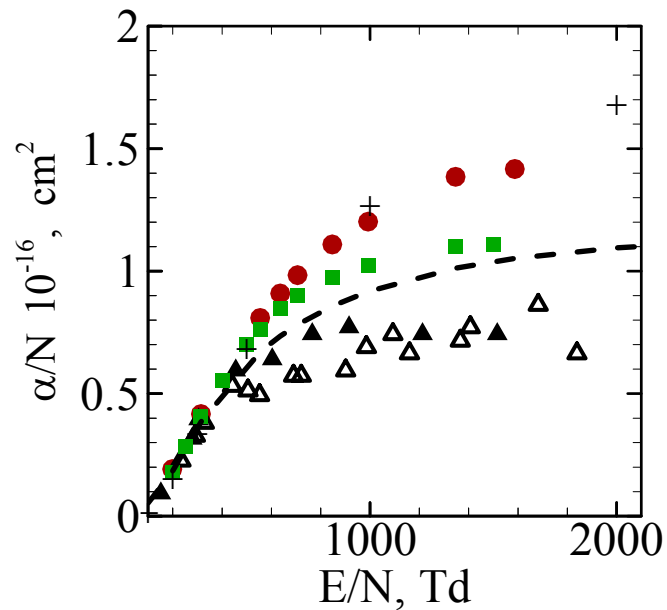


Рис. 12. Зависимость ионизационного коэффициента α/N от приведенного поля E/N . Водород, \bullet – расчеты методом Монте-Карло по модели I, \blacksquare – по модели II (см. текст); \blacktriangle – эксперимент [62, 63]; \triangle – эксперимент [64]; — — — интерполяционная формула [24]; + расчеты [66, 50].

Рис. 12 показывает, что расчеты α/N по модели I дают хорошее согласие с опытом лишь при низких $E/N < 500$ Td. При высоких E/N полного согласия расчета I с экспериментом нет. Так, при $E/N \approx 1000$ Td, теоретическое значение по I превышает экспериментальное в 1.5 раза. Рассчитанные по II α/N лучше согласуются с экспериментами [62, 63, 64] и с интерполяционной формулой [24], которая базируется на экспериментальных данных, отличающихся при высоких E/N от процитированных нами.

Улучшение согласия теоретических ионизационных коэффициентов с опытом, достигнутое благодаря использованию модели II, происходит за счет сильного завышения (для больших E/N) скорости дрейфа электронов (рис. 13), т.к. частоты ионизации $\nu_i = \nu_i(E/N)$ слабо чувствительны к выбору модели (рис. 14). Резкое возрастание ν_{dr} с E/N , получающееся в расчетах по модели II, противоречит эксперименту.

Отметим, что все три величины $\alpha/N=\alpha/N(E/N)$, $\nu_{dr}=\nu_{dr}(E/N)$, $\nu_i=\nu_i(E/N)$, рассчитанные по модели I, хорошо согласуются с результатами решения кинетического уравнения [66, 50] (рис. 12–14).

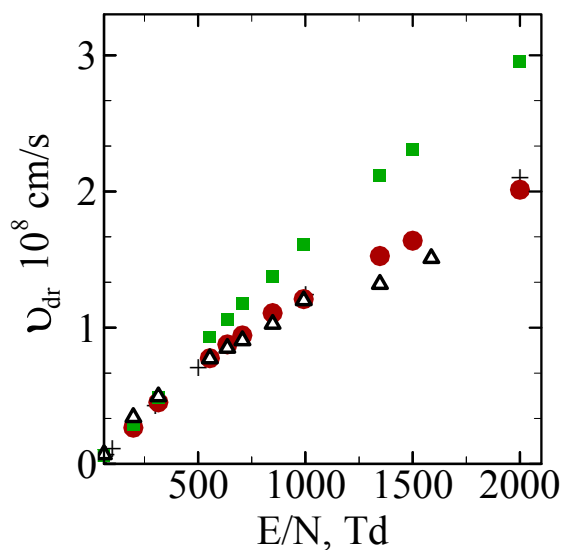


Рис. 13. Зависимость скорости дрейфа электронов ν_{dr} от приведенного поля E/N . Водород, ● — расчеты методом Монте-Карло по модели I, ■ — по модели II (см. текст); Δ — эксперимент [65]; + — расчет [66, 50].

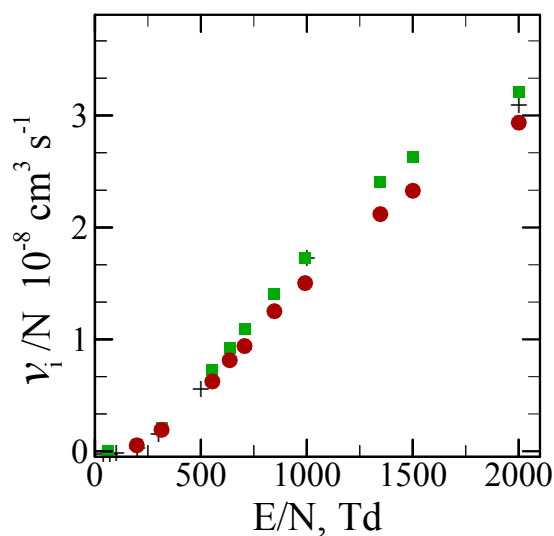


Рис. 14. Зависимость частоты ионизации электронным ударом ν_i/N от приведенного поля E/N . Водород, ● — расчет методом Монте-Карло по модели I, ■ — по модели II; + расчет [66, 50].

Ниже, при расчетах водорода, используется модель II, которая дает значения ионизационных коэффициентов α/N более близкие к эксперименту, чем I.

Коэффициенты вторичной эмиссии γ и γ_{eff} находим путем использования порогов пробоя, измеренных в [24, 26], и расчетов коэффициентов размножения электронов методом

Монте-Карло. Спектр электронов, вылетающих с катода, нужный при расчетах, считаем равномерным, лежащим в диапазоне от 0 до $\varepsilon_{\max}=7$ эВ. Такой спектр приближенно соответствует потенциальному вырыванию электронов положительными ионами [69]. Максимальная энергия эмитированных электронов, ε_{\max} , дается формулой: $\varepsilon_{\max}=I-2e\varphi$ [8], где I – потенциал ионизации газа, $e\varphi$ – работа выхода материала катода. При типичных для металлов $e\varphi \approx 4-5$ эВ, и $I=15.4$ эВ (для H_2), $\varepsilon_{\max} \approx 7$ эВ.

Для небольших pd , $pd \leq 3.14$ Торр см, используются пороги пробоя $V_T=V_T(pd)$ из [24]. Катодом в этих опытах служит позолоченная медь. Эксперимент показывает, что порог пробоя V_T при неизменном pd не воспроизводится от опыта к опыту. Для всего исследованного диапазона pd в [24] указаны наблюдаемые верхний и нижний пределы по V_T , полученные в результате проведения многих измерений. Пользуясь данными [24], мы провели усредненную кривую пробоя, параметры которой приводятся в первых четырех столбцах Таблицы 1 и закладываются в расчет. В остальных столбцах таблицы 1 представлены результаты расчетов M , γ , f_{eff} и γ_{eff} методом Монте-Карло.

Таблица 1. Коэффициенты размножения электронов M , вторичной эмиссии γ , γ_{eff} и «факторы ухода» электронов f_{es} , рассчитанные методом Монте-Карло для условий пробоя [24].

V_T , В	pd , Торр см	$Nd, 10^{16} \text{ см}^{-2}$	E_T/N , Тд	M	γ	f_{es}	γ_{eff}
1270	0.368	1.299	9777	1.130	0.8846	0.97	0.86
680	0.462	1.633	4164	3.353	0.298	0.94	0.28
540	0.525	1.856	2909	4.787	0.209	0.91	0.19
370	0.8	2.829	1308	13.24	0.0755	0.83	0.062
350	1.05	3.713	943	23.61	0.0423	0.77	0.033
348	1.23	4.349	800	32.80	0.0305	0.75	0.024
355	2.00	7.072	502	66.23	0.0151	0.64	0.0097
360	2.09	7.390	487	72.09	0.0139	0.63	0.0088
383	2.70	9.547	401	96.15	0.0104	0.59	0.0061
390	3.14	11.10	351	88.41	0.0113	0.55	0.0063

Для более высоких pd , $pd > 3.14$ Торр см, γ_{eff} и γ находятся с помощью кривой Пашена [26] (для катода из никеля). При таких pd расчеты коэффициентов M и M_a методом Монте-Карло требуют очень больших затрат. Поэтому для нахождения M_a приходится пользоваться (1.1) с $E(x)=E_T=\text{const}$ и с привлечением $\alpha/N=\alpha/N(E/N)$, измеренных на опыте. «Фактор ухода», нужный для вычисления M , $M=f_{\text{es}}M_a$, рассчитывается методом Монте-Карло. При

этом поле E_T/N задается равным пробивному, а значение pd – меньшим, чем таковое при пробое, для того, чтобы можно было сделать расчет. Результаты расчетов представлены в таблице 2, которая является продолжением таблицы 1, в область $pd > 3.14$ Торр см.

Таблица 2. То же в таблице 1, но для других pd . Порог пробоя $V_T = V_T(pd)$ взят из [26].

V_T , В	pd , Торр см	Nd , (10^{16} см^{-2})	E_T/N , Td	$\alpha/N(E/N)$ [65] (10^{-18} см^2)	M	γ	f_{es}	γ_{eff}
574	9.66	34.14	168	13.247	34.01	0.0294	0.36	0.011
619	12	42.29	146	9.298	17.36	0.0576	0.35	0.02
660	14.3	50.42	131	6.601	8.79	0.1139	0.33	0.0372
697	17	60.04	116	4.588	4.39	0.228	0.30	0.068

Из таблиц видно, что коэффициент вторичной эмиссии γ , рассчитанный на один приходящий к катоду ион, не постоянен. При изменении E/N от 400 до 1300 Td γ возрастает почти в 7 раз, тогда как f_{es} возрастает только в 1.4 раза (см. таблицу 1). Поэтому резкий рост γ_{eff} при $E/N > 400$ Td не может объясняться увеличением «фактора ухода» электронов. Таблица 2 показывает, что при низких $E/N \sim 100$ Td γ увеличивается с уменьшением E/N . Обе функции $\gamma(E/N)$ и $\gamma_{eff}(E/N)$ ведут себя немонотонно. Минимальное значение γ , $\gamma \approx 0.01$, достигается при $E/N \approx 400$ Td.

Опираясь на результаты анализа, выполненного в [9] для аргона, заключаем, что рост γ с увеличением E/N при $E/N > 600 - 700$ Td связан с возрастанием вероятности вырывания электронов энергичными ионами H^+ (протонами) и H_3^+ за счет кинетической энергии. При таких E/N эти частицы уже движутся в режиме убегания [67]. Рост γ с уменьшением E/N при $E/N < 400$ Td, чему соответствуют $pd > 3$ Торр см, по-видимому, связан с включением эмиссии фотонами. Анализ всех этих эффектов, сильно затрудненный скудостью или даже полным отсутствием необходимых данных, выходит за рамки настоящей работы. Отметим работу [68], где рассматривалось движение ионов и быстрых атомов при очень больших $E/N \sim 10^4$ Td и малых pd применительно к диагностике излучения в разрядах в водороде.

Для сравнения, на рис.15 представлены значения γ_{eff} , найденные в [24] и в настоящей работе. В той области приведенных полей E/N , где проводится сопоставление результатов, при нахождении γ_{eff} за основу взяты одни и те же $V_T = V_T(pd)$ – [24]. В цитированной работе γ_{eff} рассчитывалась путем использования коэффициента M_α , вычисленного по ионизационному коэффициенту $\alpha = \alpha(E/N)$, изображенному на рис. 12 пунктиром. Мы же рассчитываем M_α методом Монте-Карло. Рисунок 15 показывает, что полученные в обоих случаях значения γ_{eff} хорошо согласуются друг с другом.

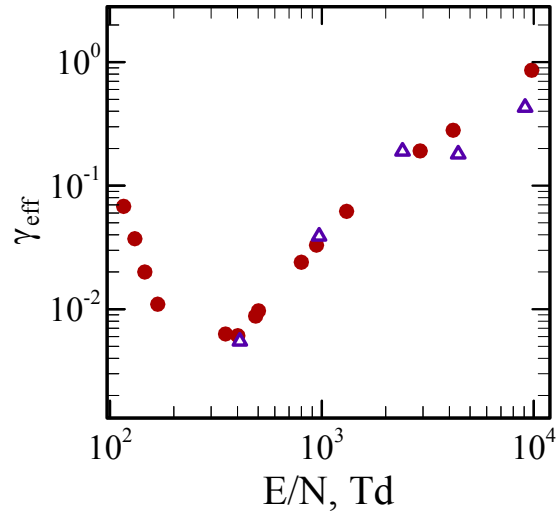


Рис. 15. Зависимость эффективного коэффициента вторичной эмиссии γ_{eff} , извлеченного из измеренных порогов пробоя, от приведенного поля E/N . Водород: ● – наши расчеты, ▲ – расчеты [24].

В АХ таунсендовского разряда в водороде рассчитываем для довольно узкого диапазона $pd=2 - 3$ Торр см, $E/N = 400-500$ Тд. При этом предполагаем, что основным механизмом эмиссии электронов с катода является потенциальное вырывание медленными ионами. В таком случае вероятность $\gamma=\gamma_i \approx \text{const}$, не зависит от энергии ионов и разрядного тока. Для распределения поля $E=E(x)$ при расчетах используется формула (2.7).

Заметим, что в водороде при рассматриваемых E/N возникает неопределенность в ионном составе. В разряде присутствуют ионы H_3^+ и H_2^+ , обладающие разной подвижностью. Так, при $E_T/N \approx 500$ Тд по данным [67], скорости их дрейфа в H_2 , $v_{\text{dr}}(\text{H}_3^+) = 1.82 \times 10^6 \text{ см с}^{-1}$ и $v_{\text{dr}}(\text{H}_2^+) = 2.84 \times 10^5 \text{ см с}^{-1}$, различаются в 6 раз. По разным данным и оценкам при $E/N \approx 400-500$ Тд в ионном составе преобладают H_3^+ , что мы и принимаем (при очень больших E/N преобладают H^+ [67]). Подчеркнем, что выбор скорости дрейфа ионов важен при расчетах АХ, т.к. от скорости дрейфа зависит распределение поля по (2.7), (2.8), и ей, в частности, характеризуется величина R_{ID} , отрицательного дифференциального сопротивления при «нулевых» токах.

На рис.16 приведены рассчитанные методом Монте-Карло АХ таунсендовского разряда $V = V_s(j)$ в водороде для двух значений $pd=2$ и 2.7 Торр см; межэлектродное расстояние в обоих случаях одинаково и равно $d=1$ см. Соответствующие этим двум pd характеристики пробоя указаны в Таблице 1.

Начальный линейный наклон ВАХ при $pd=2$ Торр см, $E_T/N \approx 502$ Td составляет $R_{ID} \approx 4.1 \cdot 10^5$ Ом см² (см. рис.16а). Для $pd=2.7$ Торр см, которому соответствует $E_T/N=400.7$ Td, получаем то же значение, $R_{ID} = 4.1 \cdot 10^5$ Ом см² (рис.16б). Последнее значение можно сравнивать с измеренным на опыте [24] для близких условий. При $pd=3.15$ Торр см, $d=1.05$ см, $V_T=410$ В, $E_T/N=410$ Td эксперимент дает $R_{ID}=5 \cdot 10^5$ Ом см², что неплохо согласуется с теоретическим.

Как уже говорилось выше, при расчетах ВАХ таунсендовского разряда полагаем, что в ионном составе преобладают H_3^+ , для которых, например при $E_T/N=400$ Td, скорость дрейфа составляет $v_{i\text{dr}}(H_3^+) = 1.44 \times 10^6$ см с⁻¹ [67]. Если бы мы положили, что в ионном составе преобладают H_2^+ , со скоростью $v_{i\text{dr}}(H_2^+) = 2.66 \cdot 10^5$ см с⁻¹, найденной путем экстраполяции данных [67] к $E_T/N=400$ Td, то рассчитанное отрицательное сопротивление возросло бы в $v_{i\text{dr}}(H_3^+)/v_{i\text{dr}}(H_2^+) \approx 5$ раз.

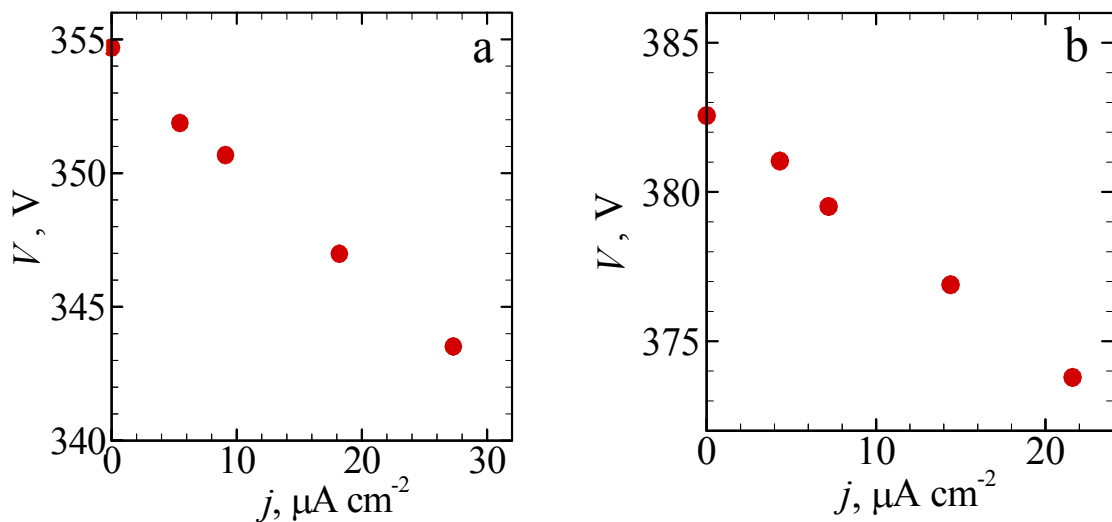


Рис.16. Рассчитанные методом Монте-Карло вольтамперные характеристики таунсендовского разряда в водороде. а – $pd=2$ Торр см; б – $pd=2.7$ Торр см, $d=1$ см.

В расчетах отрицательного сопротивления, результаты которых приведены на рис. 16, увеличение эффективного коэффициента γ_{eff} вызвано ростом «фактора ухода» электронов при повышении тока. Теоретическое выражение для R_{ID} [18, 24] в качестве одного из множителей содержит $\hat{\gamma}_{\text{eff}} = d \ln \gamma_{\text{eff}} / d \ln E_C$. Прделанные расчеты позволяют установить $\hat{\gamma}_{\text{eff}}$ для водорода в области $E_T/N = 400-500$ Td: $\hat{\gamma}_{\text{eff}} = \hat{f}_{\text{es}} \approx 0.2$.

Отметим, что вероятность вырывания электрона ионом $\gamma_i=0.010$, принятая нами при $pd=2$ Торр см, не совпадает с таковой для $pd=2.7$ Торр см, равной $\gamma_i=0.015$. Строго говоря, непостоянным является обобщенный коэффициент γ , рассчитанный на один акт ионизации в

промежутке. Мы полагаем, что для выбранных $E/N = 400\text{--}500$ Td γ соответствует потенциальному вырыванию электронов с катода ионами. Такое отождествление, по причине непостоянства найденного коэффициента γ , справедливо лишь приближенно, см. по этому поводу обсуждение полученных результатов.

Заметим, что ВАХ таунсендовского разряда в водороде при $pd=0.825$ Торр см и $pd=1.05$ Торр см, $E_T/N \approx 1300$ Td и 1000 Td рассчитывались в [70] с использованием локального коэффициента $\alpha = \alpha[E(x)/N]$ и зависимости γ_{eff} от поля у катода, взятой из [24]. Основной упор в этой работе делается на нахождении самосогласованных распределений плотности ионов $n_i(x)$ и поля $E(x)$ в промежутке при заданной плотности тока j . В качестве результатов приводятся графики, которые демонстрируют почти идеальное согласие рассчитанных ВАХ с измеренными в [22] (на глаз погрешность расчетов не превышает малых долей процента!). Между тем, при заданном токе плотность ионов $n_i \sim j/v_{i\text{ dr}}$, о чем говорят и выписанные в [70] формулы, хотя использованные в расчетах скорости дрейфа не приводятся. Из сказанного выше о недостаточной определенности ионного состава и большого разброса в скоростях дрейфа ясно, что это может привести к вариациям в результатах не в малые доли, а в десятки и сотни процентов. Тем более это относится к большим E_T/N , когда скорость ионов H^+ и H_3^+ непрерывно нарастает по пути к катоду [67], а плотность n_i , следовательно, падает, что вообще не учитывается при построении самосогласованного решения.

2.2.2 Аргон

На рис. 17–19 ионизационный коэффициент $\alpha N(E/N)$, скорость дрейфа электронов $v_{\text{dr}}(E/N)$, частота ионизации электронным ударом $\nu_{\text{ion}}/N(E/N)$ в аргоне, найденные в настоящей работе, сопоставляются с рассчитанными в [50]. В [50] эти зависимости получены путем решения кинетического уравнения для функции распределения электронов в бесконечном пространстве с однородным полем. При этом решение кинетического уравнения ищется в виде ряда по полиномам Лежандра, в котором учтены, как и в [71], первые шесть гармоник. На рис. 17 теоретический ионизационный коэффициент сравнивается с новейшими измерениями [72] и интерполяционной формулой из [9], обобщающей многие ранние эксперименты.

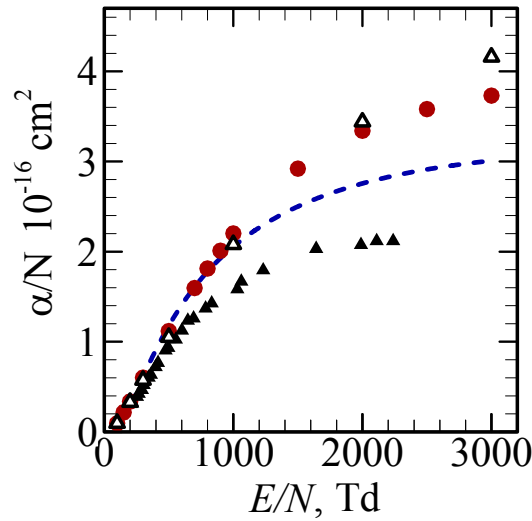


Рис. 17. Зависимость ионизационного коэффициента α/N от приведенного поля E/N . Аргон, ● — расчет методом Монте-Карло; Δ — расчет [50]; \blacktriangle — эксперимент [72]; — — — — интерполяционная формула [9].

Рассчитанные в настоящей работе α/N хорошо согласуются с найденными в [50]. Для $E/N < 1000$ Td оба расчета и интерполяционная формула [9] практически повторяют друг друга. При $1000 \text{ Td} < E/N < 3000 \text{ Td}$ между ними заметны различия, не превышающие 30%. Рисунок 17 также показывает, что результаты наших вычислений более или менее хорошо согласуются с экспериментальными α/N [72] только при $E/N < 1000$ Td.

Как показывают рис.18, 19 скорости дрейфа электронов $v_{dr}(E/N)$ и частоты ионизации электронным ударом $\nu_{ion}/N(E/N)$, полученные в настоящей работе, с приемлемой точностью воспроизводят представленные в [50].

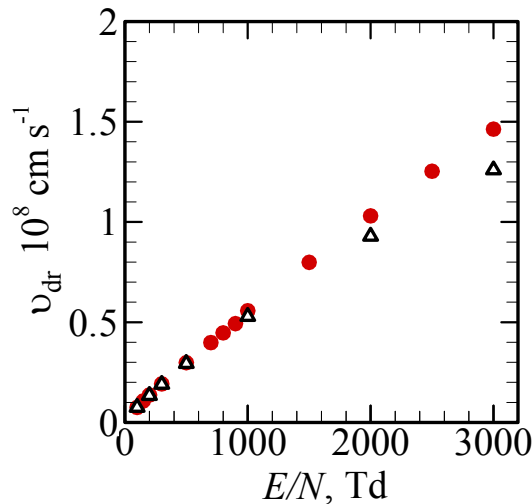


Рис. 18. Зависимость скорости дрейфа электронов v_{dr} от приведенного поля E/N . Аргон, ● — расчет методом Монте-Карло; Δ — расчет [50].

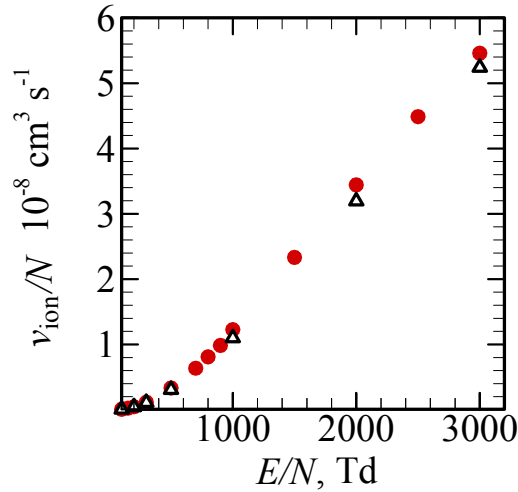


Рис. 19. Зависимость частоты ионизации электронным ударом ν_{ion}/N от приведенного поля E/N . Аргон, ● — расчет методом Монте-Карло; Δ — расчет [50].

На рис. 20 представлен результат расчета «фактора ухода» $f_{\text{es}} = f_{\text{es}}(E/N)$ электронов, эмитированных с металлического катода благодаря потенциальному вырыванию ионами. При этом энергетический спектр электронов, вылетающих с катода, задается равномерным в интервале от 0 до $\varepsilon_{\text{max}} = 7$ эВ. Величина ε_{max} в аргоне принимается такой же, как в случае водорода, поскольку потенциалы ионизации I этих газов близки [$I(\text{H}_2) = 15.4$ эВ, $I(\text{Ar}) = 15.8$ эВ]. На том же рисунке проводится сравнение f_{es} , полученного нами, с рассчитанным в [17]. Для этого рассматривается один из вариантов [17], когда все электроны покидают катод с одинаковой энергией $\varepsilon_0 = 1$ эВ, а электроды считаются поглощающими. (В нашей программе автоматически учитывалось неупругое отражение электронов от анода, но здесь оно несущественно.) Рисунок 20 демонстрирует удовлетворительное согласие результатов. Небольшое расхождение, по-видимому, связано с различными наборами сечений, положенных в основу обеих моделей.

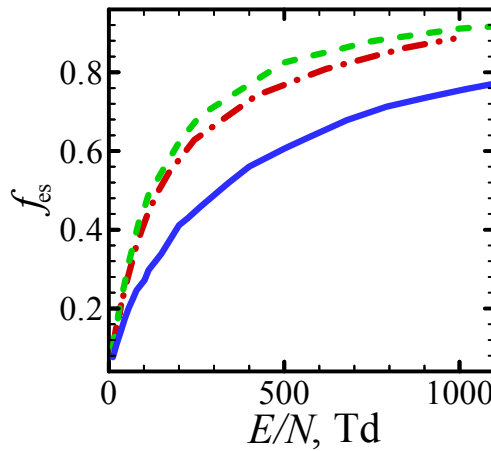


Рис. 20. Зависимость «факторов ухода» электронов в аргоне f_{es} от приведенного поля E/N . Расчеты методом Монте-Карло. Непрерывная кривая получена в настоящей работе и

соответствует равномерному энергетическому спектру в диапазоне от 0 до 7 эВ. Двум другим кривым отвечает монохроматический спектр с $\varepsilon_0 = 1$ эВ: пунктир – наш расчет, пунктир с точкой – из [17].

Рисунок 20 показывает, что для фиксированного E/N «фактор ухода», соответствующий спектру, $\varepsilon_0 = 1$ эВ, заметно превышает f_{es} для равномерного спектра, у которого средняя энергия электронов, $\bar{\varepsilon} = 3.5$ эВ $> \varepsilon_0$. Этот факт находится в соответствии с качественной формулой Томсона-Леба (2.1). Хаотическая скорость в области, где силен возврат, по-видимому, определяется характерной энергией электронов, эмитированных с катода. (Если спектр электронов равномерный, то роль этой энергии играет средняя энергия спектра.) Дрейфовая же скорость электронов устанавливается после нескольких первых столкновений и она, даже в области вблизи катода, откуда электроны возвращаются, характеризуется E/N . Поэтому и получается, что при фиксированном E/N для одного спектра хаотическая скорость \bar{v} оказывается выше, чем для другого при почти неизменной v_{dr} , что согласно формуле (2.1) и приводит к соответствующему изменению в f_{es} . Чтобы электрон смог приобрести хаотическую скорость, соответствующую выбранному E/N , при условии доминирования упругих процессов, он должен совершить порядка $1/\delta^{1/2} \sim 100$ столкновений, где $\delta = 2m/M$, m , M – массы электрона и атомов (молекул) газа ($\delta = 2.72 \times 10^{-5}$ для аргона). В нашем примере бóльшая часть возвратившихся на катод электронов этого сделать не успевает.

Исчерпывающая сводка экспериментальных кривых Пашена $V_T = V_T(pd)$ в аргоне и извлеченных из них [с помощью $\alpha = \alpha(E/N)$] эффективных коэффициентов вторичной эмиссии $\gamma_{eff} = \gamma_{eff}(E/N)$ дана в обзоре [9]. Со времени выхода цитированной работы прошло довольно много времени. Между тем, появились новые измерения кривых пробоя аргона $V_T = V_T(pd)$ в очень коротких промежутках с $d = 0.01 - 0.1$ см при довольно больших $p \sim 10 - 100$ Торр [73]. В качестве катода используется латунь. Экспериментальные кривые Пашена для аргона (а также азота) в узких зазорах действительно следуют закону подобия $V = V_T(pd)$, что проверялось в упомянутой работе путем изменения pd давлением при различных длинах разрядного промежутка d . В опытах [73] обнаружено, что кривая пробоя при $T = 117$ К не совпадает с таковой при комнатной температуре (см. рис. 21, взятый из цитированной работы). Физическая природа этого эффекта в настоящее время неясна. В [73] наблюдаемое различие в порогах пробоя объясняется резким изменением коэффициента вторичной эмиссии γ_{eff} . При этом γ_{eff} оценивается на основе (1.4) с привлечением порогов пробоя $V = V_T(pd)$ и значением M_a , найденным с использованием $\alpha = \alpha(E/N)$.

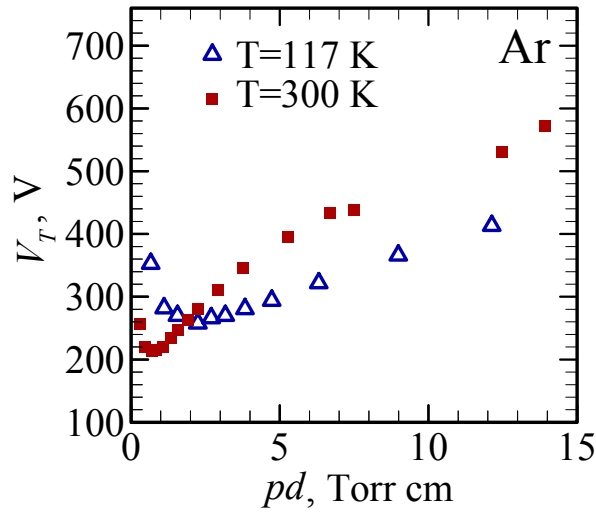


Рис. 21. Кривые Пашена в аргоне при комнатной и пониженной температурах по данным [73]. Произведение pd менялось давлением; межэлектродное расстояние в обоих случаях $d=0.1$ см.

С целью последующих применений при расчетах отрицательного дифференциального сопротивления, уточним найденные в [73] коэффициенты вторичной эмиссии, применяя метод Монте-Карло. В отличие от указанной работы, вместо γ_{eff} будем оперировать величинами γ , рассчитанными на один акт ионизации в промежутке. Числа ионизаций M , по которым находим $\gamma = \gamma_{\text{eff}}/f_{\text{es}}$, вычисляем, считая энергетический спектр электронов, вылетающих с катода, равномерным, в пределах от 0 до $\varepsilon_{\text{max}}=7$ эВ. Такому спектру соответствует «фактор ухода» f_{es} , показанный на рис. 20 непрерывной кривой. Полученные зависимости $\gamma = \gamma(E/N)$ представлены на рис. 22. Значения γ при $T=117$ К, соответствующие $pd > 5$ Торр см, $E/N < 70$ Тд, не показаны на этом рисунке, ввиду не очень надежного вычисления коэффициентов M для столь слабых полей. Как показывает рис. 22, имеется заметное различие между величинами γ для комнатной и пониженной температур. Например, при $E/N \approx 100$ Тд γ отличаются более чем на порядок. Области E/N , где $\gamma = \text{const}$, отсутствуют при обеих температурах.

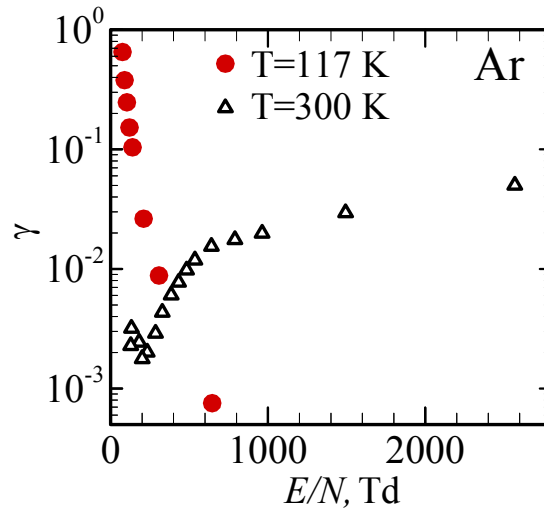


Рис. 22. Зависимость обобщенного коэффициента вторичной эмиссии γ , рассчитанного на один ион, от приведенного поля E/N . Аргон, величины γ найдены из кривых Пашена рис.21 с помощью метода Монте-Карло.

При выборе условий для расчетов ВАХ таунсендовского разряда в аргоне опираемся результаты анализа, выполненного в [9]. Рассматриваем разряды с чистыми катодами, в промежутках с $pd \approx 0.7\text{--}2$ Торр см, $E/N \approx 400\text{--}1000$ Td. При выбранных условиях эмиссия электронов с катода контролируется потенциальным вырыванием положительными ионами (см. рис. 2). Заметим, что для разрядов с грязным катодом такой механизм вторичной эмиссии не преобладает ни при каких значениях E/N , что видно из рис. 3.

Во всех рассматриваемых ниже случаях, при расчетах ВАХ таунсендовского разряда в аргоне используется распределение поля по (2.8). Проведем расчет ВАХ для условий экспериментов [73], которые близки к реализуемым в опытах с прибором-преобразователем излучения [1]. Температуру считаем комнатной. Фиксируем $pd=0.7$ Торр см, чему соответствует порог пробоя $V_T=215.8$ В. Рассчитываем ВАХ для двух d , $d=0.009$ см и 0.05 см. Выбранному pd и $T=300$ К соответствует $Nd=2.25 \times 10^{16}$ см⁻² и $E_T/N=959$ Td. Для такого E_T/N скорость дрейфа ионов Ar^+ составляет $v_{i \text{ др}}=1.43 \times 10^5$ см с⁻¹ [74], а ионизационный коэффициент, рассчитанный методом Монте-Карло, $\alpha_T/N=2.12 \times 10^{-16}$ см². Для выписанных условий пробоя получается: $M=53.5$, $f_{esT}=0.746$, $M_\alpha=71.7$ и $\gamma=1/M \approx 0.0187$. Найденная $\gamma=0.0187$ отождествляется с γ_i , вероятностью потенциального вырывания электронов с катода ионами. При расчетах ВАХ γ_i полагается постоянной, не зависящей от разрядного тока*.

С целью проверки закона подобия для начального наклона ВАХ разряда R_{1D} , $R_{1D} \sim d^2 \sim p^{-2}$, который дает простая теория [18, 24], ВАХ, рассчитанные для двух значений d ,

* Такое приближение имеет определенный порок, поскольку функция $\gamma=\gamma(E/N)$, найденная из данных [73] для $T=300$ К, растет с E/N при $E/N=200\text{--}1000$ Td, см. рис. 22. По поводу рассматриваемого приближения см. также обсуждение результатов в конце этой главы.

представляем на одном графике (см. рис. 23). Этот рисунок, на котором обе «ВАХ» изображены в координатах V, jp^{-2} , демонстрирует хорошее выполнение закона подобия, $R_{ID}p^2=\text{const}$. Подчеркнем, что этот закон строго справедлив только при фиксированном pd . Значение $R_{ID}p^2$, вычисленное из рис. 23, составляет $R_{ID}p^2=2.5 \text{ МОм см}^2 \text{ Торр}^2$, откуда при $d=0.009 \text{ см}$ получаем $R_{ID}\approx 0.4 \text{ кОм см}^2$, а при $d=0.05 \text{ см}$ – $R_{ID}\approx 12.7 \text{ кОм см}^2$.

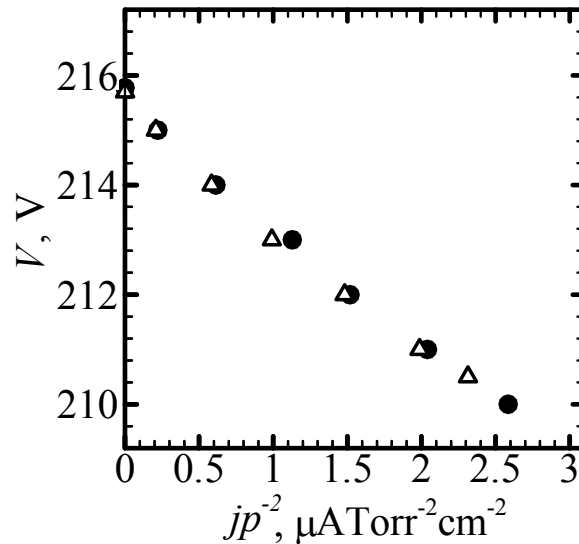


Рис. 23. Приведенные «вольтамперные» характеристики таунсендовского разряда в аргоне, рассчитанные методом Монте-Карло при $pd=0.7 \text{ Торр см}$: (•) – $p = 77.8 \text{ Торр}$, $d=0.009 \text{ см}$; (Δ) – $p = 14 \text{ Торр}$, $d=0.05 \text{ см}$.

Сравним начальный участок ВАХ разряда, полученный методом Монте-Карло, с измерениями [23]. В этих опытах разряд в аргоне зажигался в трубке между дисковыми электродами площадью $S=22.9 \text{ см}^2$, помещенными на расстоянии $d=1.1 \text{ см}$ друг от друга, при давлении газа $p=1.023 \text{ Торр}$. Не указанная в [23] температура, при которой проводились измерения, принята равной комнатной, $T=293 \text{ К}$, чему соответствует плотность газа $N=3.37 \times 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Измеренное пробивающее напряжение составляет $V_T=210 \text{ В}$, поэтому $E_T/N=566 \text{ Тд}$. Такому E_T/N отвечают: скорость дрейфа ионов Ar^+ , $v_{i \text{ др}}=1.087 \times 10^5 \text{ см с}^{-1}$ [74], и ионизационный коэффициент, $\alpha_T/N=1.267 \times 10^{-16} \text{ см}^2$, который получен нами методом Монте-Карло. Коэффициент размножения электронов, рассчитанный для точки пробоя, составляет $M_T = 49.05$, что дает $\gamma=1/M_T \approx 0.0204$. Как и раньше во всех подобных случаях, полагаем, что $\gamma_i=\gamma=0.0204=\text{const}$ вдоль ВАХ слабotoчного таунсендовского разряда.

Считая, что при слабых токах разряд занимает всю площадь электродов, перейдем в ВАХ разряда $V_S(I)$, измеренной на опыте [23], от полного тока $I=jS$ к его плотности j и затем сравним ее с ВАХ, рассчитанной методом Монте-Карло (см. рис. 24). Рисунок

демонстрирует удивительно хорошее согласие рассчитанного начального участка ВАХ разряда с экспериментом. При этом $R_{1D}=5.0 \text{ МОм см}^2$.

Приведем значения f_{es} и M_α для рассматриваемого варианта, полученные в численном счете. При пробое: $V=V_T=210 \text{ В}$, $j=0$, «фактор ухода» электронов $f_{esT}=0.637$, коэффициенты размножения $M_T = 49.05$ и $M_{\alpha T}=77.00$. Для точки, соответствующей $V=206 \text{ В}$ и $j=0.8 \text{ мА см}^{-2}$, когда плотность тока уже приближается к предельной для таунсендовского разряда, $f_{es}=0.67$, $M_\alpha = 73.21$, а M не отличается от своего значения при пробое, $M = M_T = 49.05$.

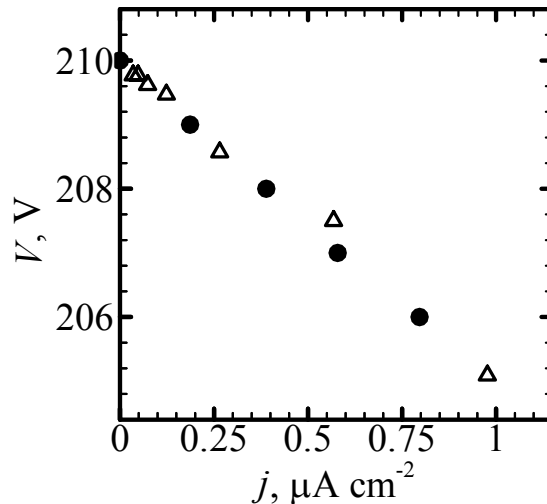


Рис. 24. Вольтамперные характеристики таунсендовского разряда в аргоне. $d=1.1 \text{ см}$, $p = 1.02 \text{ Торр}$, $pd=1.125 \text{ Торр см}$: Δ – эксперимент [23], \bullet – расчет методом Монте-Карло.

В примере, приведенном на рис. 24, $R_{1D}p^2=5.1 \text{ МОм см}^2 \text{ Торр}^2$, что в 2 раза выше $R_{1D}p^2=2.5 \text{ МОм см}^2 \text{ Торр}^2$, полученного при $pd=0.7 \text{ Торр см}$. Поскольку $R_{1D}p^2$ различаются не очень сильно, упоминавшийся выше закон подобия для R_{1D} можно применять для оценок R_{1D} и в том случае, когда соответствующие значения pd не совпадают.

Проанализируем теперь причины, благодаря которым отрицательное дифференциальное сопротивление проявляется в наших расчетах. Их две. Одна из них приводит к росту γ_{eff} с ростом поля на катоде и тока и связана с увеличением «фактора ухода» f_{es} электронов. Вторая причина является следствием «нелокальности» истинного ионизационного коэффициента $\alpha(x)$, связанного с функцией распределения электронов в данной точке x , вблизи катода. Ниже, для одного примера, сравниваются вклады обоих механизмов в увеличение коэффициента воспроизводства электронов g с ростом плотности тока j , а также в R_{1D} , начальный линейный наклон ВАХ при «нулевых» токах.

Начнем с рассмотрения g . Обратимся к рассчитанному выше варианту с $d=0.009 \text{ см}$, $pd=0.7 \text{ Торр см}$, $\gamma_i=0.0187$, которому соответствует ВАХ, показанная на рис.23 темными

кружками. Будем мысленно увеличивать ток, поддерживая напряжение на промежутке постоянным и равным пробивному, $V_T=215.8$ В. Рассчитаем коэффициент воспроизводства g и распределение $\alpha(x)$ при $V_T=215.8$ В, $j=15.64$ мА см⁻² и сравним их теми, которые получаются при пробое. При пробое: $g=g_T=1$, $M_T=53.5$, $f_{esT}=0.746$ и $M_{\alpha T}=71.7$. Распределение ионизационного коэффициента $\alpha(x)$ для этого случая показано на рис. 25 непрерывной кривой. При $V=V_T=215.8$ В, $j=15.64$ мА см⁻² расчет дает $M=59.48$, $f_{es}=0.781$, $M_\alpha=76.16$ и распределение $\alpha(x)$, показанное на рис. 25 пунктиром. В последнем случае, $g = \gamma_i f_{es} M_\alpha = 1.1 > g_T$, что соответствует перепроизводству электронов в промежутке. Для полного их воспроизводства при токе $j=15.64$ мА см⁻² нужно меньшее напряжение, а именно, $V=210$ В.

Прирост $g = \gamma_i f_{es} M_\alpha = 1.1$ по сравнению с $g_T = \gamma_i f_{esT} M_{\alpha T} = 1$ обеспечивается двумя причинами: ростом «фактора ухода» электронов ($f_{es} > f_{esT}$) и коэффициента размножения ($M_\alpha > M_{\alpha T}$). Вклад увеличения M_α в g при этом выше. Действительно, вычислим некоторое условное значение коэффициента воспроизводства \tilde{g} для случая с током, считая фактор ухода электронов неизменным и равным пробойному значению f_{esT} . Получим значение $\tilde{g} = \gamma_i f_{esT} M_\alpha = 1.06$, заключенное между 1 и 1.1. Отсюда видно, что вклады механизмов, связанных с ростом f_{es} и M_α характеризуются величинами $g - \tilde{g} = 0.04$ и $\tilde{g} - 1 = 0.06$, т.е. вклад последнего механизма в g в 1.5 раза выше.

Для выяснения причины возрастания M_α ($M_\alpha > M_{\alpha T}$) обратимся к рис. 25. Он демонстрирует, что вблизи катода, несмотря на присутствие поля, $\alpha(x)$ мало. Заметную величину $\alpha(x)$ приобретает лишь на некотором расстоянии d_0 от катода, где электрон набирает достаточную для ионизации атомов энергию [62, 63, 52]. Для случая $V=V_T$, $j>0$, что соответствует штриховой кривой $\alpha(x)$ на рис.25, поле у катода выше, чем при $V=V_T$, $j=0$. Поэтому «среднему» электрону в случае с ненулевым током нужно пройти меньшее расстояние, чтобы набрать энергию, достаточную для ионизации. Поэтому d_0 для $V=V_T$, $j>0$ немного короче, чем при пробое. В результате этого сокращения, интеграл размножений $\int \alpha(x) dx$ и зависящие от него величины, M_α , g , повышаются с током. Хотя такое увеличение в $\int \alpha(x) dx$ и мало и из рис. 25 не видно, в силу экспоненциальной зависимости M_α от $\int \alpha(x) dx$ вклад прироста интеграла $\int \alpha(x) dx$ с током j в M_α и g существен.

Отметим, что если вычислять M_α по (1.1), т.е. на основе таунсендовской аппроксимации для ионизационного коэффициента $\alpha[E(x)]$, то эффект увеличения M_α с током j будет отсутствовать. В этом приближении, наоборот, для рассматриваемого случая «малых» $pd=0.7$ Торр см величина M_α уменьшается с ростом тока, причем по квадратичному закону. Эффект линейного возрастания M_α с j , который дает вклад в начальный линейный

наклон ВАХ, R_{1D} , можно получить только на основе точного M_α (1.3), рассчитанного с помощью истинного ионизационного коэффициента $\alpha(x)$.

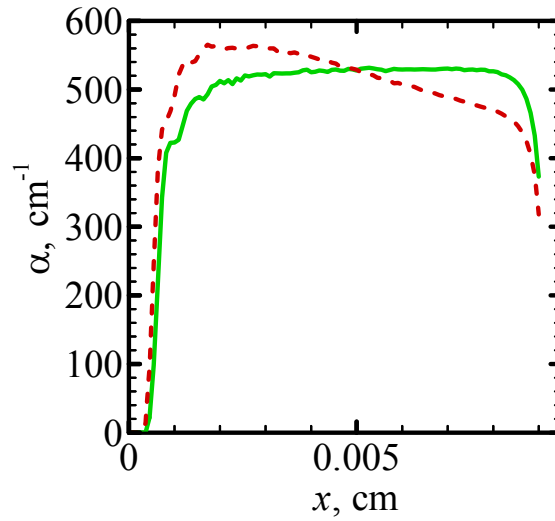


Рис. 25. Распределение электронного ионизационного коэффициента $\alpha(x)$, рассчитанное методом Монте-Карло; $d=0.009$ см, $pd=0.7$ Торр см. Непрерывная кривая – расчет в однородном поле с $V_T=215.8$ В, $j=0$. Пунктирная кривая – в неоднородном поле $E(x)$ (2.8) с $V_T=215.8$ В и $j=15.64$ мА см⁻².

Отметим, что результат расчета $\alpha(x)$ для ненулевого тока, представленный на рис. 25 пунктиром, изменится слабо, если в вычислениях заменить распределение поля по (2.8) на линейное распределение по (2.7). Причина – в малости эффективного коэффициента $\gamma_T = \gamma_i f_{esT} = 0.014$ в рассматриваемом случае.

Перейдем к сравнению вкладов обоих вышеуказанных механизмов в отрицательное дифференциальное сопротивление разряда R_{1D} . Для этого проведем следующий мысленный эксперимент. Вычислим воображаемую ВАХ разряда $V = \tilde{V}_S(j)$, предполагая, что «фактор ухода» электронов f_{es} заморожен, т.е. не меняется с ростом тока. Положим, что он равен своему значению при пробое f_{esT} . Такой выбор f_{esT} означает, что «истинная» $V_S(j)$ и «воображаемая» $\tilde{V}_S(j)$ вольтамперные характеристики выходят из одной и той же точки $V=V_T, j=0$. На обеих кривых, $V_S(j)$ и $\tilde{V}_S(j)$, должно выполняться условие воспроизводства электронов, $g=1$. «Истинная» ВАХ находится из уравнения $g = \gamma_i f_{es} M_\alpha = 1$; «воображаемая» – из уравнения $g \equiv \tilde{g} = \gamma_i f_{esT} M_\alpha = 1$. Последнее равенство переписывается в виде уравнения $M_\alpha(V, j) = \text{const} \equiv M_{\alpha T}$ для V и j , определяющих кривую $\tilde{V}_S(j)$.

Оба начальных участка ВАХ, «истинный» и «воображаемый», показаны на рис. 26 для условий, $d=0.009$ см, $pd=0.7$ Торр см и $V_T=215.8$ В, принятых в предыдущем тексте при

рассмотрении вкладов обоих механизмов в увеличение g . «Истинная» ВАХ соответствует отрицательному сопротивлению $R_{1D} \approx 0.4$ кОм см². «Воображаемое» отрицательное сопротивление, $\tilde{R}_{1D} = 0.23$ кОм см², составляет примерно 60% от «истинного». Такое же соотношение между вкладами обоих факторов было найдено при анализе коэффициентов воспроизводства g . Это не удивительно, т.к. коэффициент воспроизводства g возрастает с током j по закону, близкому к линейному.

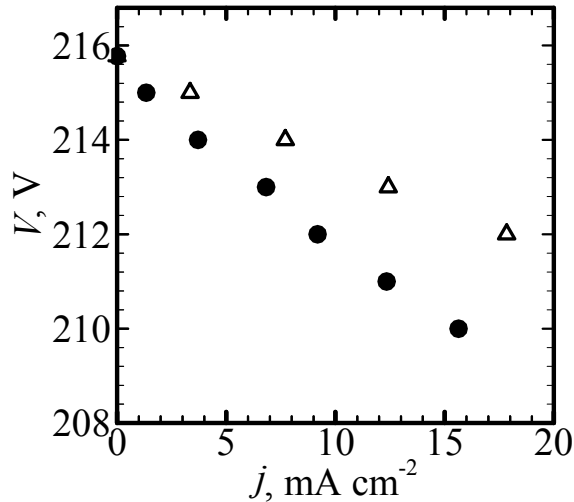


Рис. 26. «Истинная» (•) и «воображаемая» (Δ) вольтамперные характеристики таунсендовского разряда в аргоне, рассчитанные методом Монте-Карло для $d=0.009$ см, $p = 77.8$ Торр, $pd=0.7$ Торр см. (•) – учтены оба эффекта: «нелокальность» ионизационного коэффициента $\alpha(x)$ и рост «фактора ухода» электронов f_{es} ; (Δ) – эффект увеличения f_{es} исключен.

Начальный линейный участок «воображаемой» ВАХ таунсендовского разряда можно приближенно определить аналитически. С этой целью будем характеризовать процесс ионизации поведением некоего «среднего» электрона, вылетающего с катода с определенной энергией. На всем протяжении от катода до точки с координатой x_0 в глубине промежутка, в которой электрон наберет энергию, равную потенциалу ионизации I , полагаем $\alpha(x)=0$. За точкой x_0 считаем, что ионизационный процесс описывается локальным таунсендовским коэффициентом $\alpha[E(x)]$. В однородном пробойном поле длину отрезка $[0, x_0]$ обозначаем d_0 ; в неоднородном поле $E(x)$, формирующимся при протекании тока с плотностью j , эту длину обозначаем d'_0 , $d'_0 < d_0$. Условие $M_\alpha(V, j) = \text{const} \equiv M_{\alpha T}$, определяющее «воображаемую» ВАХ, можно записать схематично в виде:

$$\left. \int_0^d \alpha(x) dx \right|_{j=0} = \left. \int_0^d \alpha(x) dx \right|_{j \neq 0}. \quad (2.10)$$

Воспользуемся теперь введенными предположениями и запишем:

$$\left. \int_0^d \alpha(x) dx \right|_{j=0} = \alpha_0 (d - d_0), \quad (2.11)$$

где $\alpha_0 = \alpha(E_T)$ – таунсендовский ионизационный коэффициент, соответствующий однородному полю $E = E_T$;

$$\left. \int_0^d \alpha(x) dx \right|_{j \neq 0} = \int_{d'_0}^d \alpha[E(x)] dx. \quad (2.12)$$

В слаботочном таунсендовском разряде искажения поля $E(x)$ по сравнению с пробойным E_T невелики. Поэтому ионизационный коэффициент $\alpha[E(x)]$ можно представить в виде разложения в ряд по степеням малой разности $[E(x) - E_T]$. Мы воспользуемся этим приемом нахождения $\alpha[E(x)]$, сохранив в разложении только член первого порядка малости по $[E(x) - E_T]$:

$$\alpha[E(x)] = \alpha_0 + \alpha'(E_T)[E(x) - E_T] \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13), (2.12) и (2.11) в (2.10), получаем равенство:

$$\alpha_0 (d - d'_0) + \alpha'(E_T) \int_{d'_0}^d [E(x) - E_T] dx = \alpha_0 (d - d_0), \quad (2.14)$$

В формулу (2.14) подставляем распределение $E(x)$ по (2.7), берем интеграл и разрешаем полученное выражение относительно напряжения на разряде V :

$$V = V_T - \frac{\alpha_0 \Delta d}{\alpha'(E_T)} + \frac{j d d'_0}{2 \varepsilon_0 (1 + \gamma_T) v_{idr}}, \quad (2.15)$$

в котором учтено, $d'_0 \ll d$, $\Delta d = d_0 - d'_0$.

Связь Δd с плотностью тока j следует из определений d'_0 и d_0 , которые сводятся к равенству:

$$\int_0^{d'_0} E(x) dx = E_T d_0. \quad (2.16)$$

Подставим в (2.16) $E(x)$ по (2.7), возьмем интеграл, учтем, что $(\Delta d / d_0)^2 \ll 1$ и $d_0 \ll d$. В результате получаем соотношение, которое дает оценку для Δd :

$$\Delta d = d_0 \Delta E_C / E_C, \quad (2.17)$$

где E_C – поле на катоде при токе j , $E_C = \frac{V}{d} + \frac{j d}{2(1 + \gamma_T) \varepsilon_0 v_{idr}}$, $\Delta E_C = E_C - E_T$. Полагая в

знаменателе (2.17) $E_C \approx E_T$ и принимая $\Delta E_C \approx \frac{j d}{2(1 + \gamma_T) \varepsilon_0 v_{idr}}$, получим верхнюю оценку для

Δd :

$$\Delta d = \frac{jdd_0}{2(1+\gamma_T)\varepsilon_0\nu_{i\text{dr}}E_T} \quad (2.18)$$

Величину $\alpha'(E_T)$ в (2.15) находим с помощью формулы Таунсенда для $\alpha=\alpha(E)$ (1.2), $\alpha'(E_T)=\alpha_0E_0/E_T^2$. Подставляя (2.18) и значение производной $\alpha'(E_T)$ в (2.15), получаем выражение для начального участка «воображаемой» ВАХ таунсендовского разряда:

$$V = V_T - \left(\frac{E_T}{E_0} - 1 \right) \frac{dd_0}{2(1+\gamma_T)\varepsilon_0\nu_{i\text{dr}}} j; \quad (2.19)$$

Отношение E_T/E_0 в (2.19) определяем из формулы Пашена (1.5) и окончательно имеем:

$$V = V_T - \left(\frac{1}{\ln(pd) + C} - 1 \right) \frac{dd_0}{2(1+\gamma_T)\varepsilon_0\nu_{i\text{dr}}} j$$

$$C = \ln \frac{A}{\ln(1+1/\gamma_T)}, \quad \tilde{R}_{1D} = \left(\frac{1}{\ln(pd) + C} - 1 \right) \frac{dd_0}{2(1+\gamma_T)\varepsilon_0\nu_{i\text{dr}}} \quad (2.20)$$

Из формулы (2.20) следует, что «воображаемое» дифференциальное сопротивление разряда отрицательно (при этом $\tilde{R}_{1D} > 0$), «воображаемая» ВАХ линейно падающая только при $pd < (pd)_{\min} = \bar{e}/A \times \ln(1+1/\gamma_T)$, $\bar{e} = 2.72$, где $(pd)_{\min}$ соответствует минимуму кривой Пашена. При $pd > (pd)_{\min}$ «воображаемое» дифференциальное сопротивление (2.20) положительно ($\tilde{R}_{1D} < 0$), и «воображаемая» ВАХ линейно растущая.

Полученная формула (2.20) и критерий существования «воображаемого» отрицательного сопротивления \tilde{R}_{1D} , $pd < (pd)_{\min}$, носят оценочный характер. Значение \tilde{R}_{1D} , полученное по (2.20), совпадает с \tilde{R}_{1D} , рассчитанным методом Монте-Карло, только по порядку величины. Для обсуждавшегося выше примера $d=0.009$ см, $pd=0.7$ Торр см, $V_T=215.8$ В, $\gamma=0.02$, $E_T/N=960$ Тд в аргоне с параметрами $A=12$ см⁻¹Торр⁻¹ [8], $C=1.12$, $I=15.8$ эВ, $\nu_{i\text{dr}}=1.43 \times 10^5$ см с⁻¹ и $d_0=5 \times 10^{-4}$ см (при оценке d_0 принято, что электрон вылетает с катода с энергией 3.5 эВ) по формуле (2.20) $\tilde{R}_{1D}=54$ Ом см²>0, что в 4.3 раза меньше $\tilde{R}_{1D}=230$ Ом см², рассчитанного методом Монте-Карло.

2.3 Обсуждение полученных результатов

Расчеты, проведенные в настоящей работе, демонстрируют возникновение отрицательного дифференциального сопротивления таунсендовского разряда при «нулевых» токах в разрядных промежутках с $pd \approx 2-3$ Торр см в водороде и $pd \approx 0.7-2$ Торр см в аргоне. На одном примере для аргона показано, что отрицательное дифференциальное сопротивление вызывается двумя механизмами. Один механизм, приводящий к росту γ_{eff} с

током, связан с увеличением «фактора ухода» электронов с катода. Вторым механизмом является следствием «нелокальности» ионизационного коэффициента $\alpha(x)$ вблизи катода, что обуславливает увеличение интеграла разложений $\int_0^d \alpha(x) dx$ с ростом тока. Полученные в результате начальные линейные наклоны ВАХ таунсендовского разряда находятся в хорошем соответствии с имеющимися экспериментами. Последний аргумент, конечно, говорит в пользу теории, но не является доказательством ее справедливости.

Все приведенные результаты расчетов отрицательного дифференциального сопротивления таунсендовского разряда проделаны для чистых катодных поверхностей в предположении преобладания потенциального вырывания электронов с катода ионами.

Для водорода в рассматриваемой области $pd \approx 2-3$ Торр см, $E/N = 400-500$ Td высказанное предположение о механизме вырывания электронов с катода справедливо с натяжкой. Это прямо следует из результатов [75], где было экспериментально показано, что для водорода при рассматриваемых $E/N=400-500$ Td вклад фотонов во вторичную эмиссию сравним с вкладом ионов. К сожалению, отказ от предположения $\gamma=\gamma(E/N)=\gamma_i=\text{const}$ делает проведение анализа отрицательного дифференциального сопротивления очень громоздким в виду необходимости как-то учитывать меняющийся с ростом тока вклад фотонов в изменение γ_{eff} . Из общих соображений сказать, какого знака будет этот вклад, и дать ему какую-нибудь оценку в настоящее время трудно.

Для аргона область $pd \approx 0.7-2$ Торр см, $E/N = 400-1000$ Td, выбиралась на основе анализа, проведенного в [9]. Для загрязненных катодов принятое предположение о механизме вторичной эмиссии не справедливо.

В работе [73], данные из которой использовались нами для отыскания γ_i , очистка катода от посторонних примесей не проводилась. Не удивительно поэтому, что извлеченные из кривых пробоя [73] обобщенные коэффициенты вторичной эмиссии $\gamma=\gamma(E/N)$ для латунного катода не являются постоянными ни при каких E/N (см. рис. 22). Полученные $\gamma=\gamma(E/N)$ скорее напоминают рассчитанные в [9] для загрязненных катодов (см. рис. 3). Мы же пользуемся значениями $\gamma=\gamma(E/N)$ для нахождения γ_i — вероятности потенциального вырывания электронов ионами на чистом катоде. Это не совсем корректно. Заметим, однако, что такая некорректность не носит принципиального характера, поскольку все результаты слабо чувствительны к величинам γ_i .

Опыты [23], напротив, хорошо подходят для определения γ_i , т.к. в них до проведения основных измерений была проведена «тренировка» катода, а также предприняты меры для уменьшения загрязнения медного катода примесями. Найденная нами из условий пробоя [23] $\gamma_i=0.02$ лежит в диапазоне $\gamma_i=0.009-0.04$, указанном в работе [9] для чистого медного катода.

Подчеркнем, что значения «фактора ухода» электронов $f_{es}=f_{es}(E/N)$, а также величины производной $df_{es}/d(E/N)$, от которой зависит отрицательное дифференциальное сопротивление при «нулевых» токах, чувствительны к спектру вылетающих с катода электронов и к закону отражения возвращающихся на катод электронов обратно в промежутки. Практически во всех расчетах спектр вылетающих с катода электронов задается равномерным, со средней энергией 3.5 эВ. Отражение возвращающихся на катод электронов обратно в промежутки не учитывается. Иными словами, производная $df_{es}/d(E/N)$ принимает в наших расчетах максимально возможное значение. Примеры расчетов «фактора ухода» $f_{es}=f_{es}(E/N)$ с учетом отражения от катода возвращающихся электронов имеются в [13, 14, 16, 17]. Надежных данных о коэффициентах отражения электронов от катода нет.

Глава 3. Автоколебания тока в таунсендовском разряде

3.1 Уравнение для электрической цепи

Рассмотрим нестационарный процесс в плоском промежутке, катодом для которого служит полупроводниковая пластина. Система полупроводник – разряд подключена к источнику постоянного напряжения V_0 (см. рис. 27). Описываем разрядный процесс напряжением на промежутке V и плотностью тока j . Полупроводник, который характеризуется проводимостью σ_s , диэлектрической проницаемостью ε_s , толщиной d_s , считаем однородным. Поле в полупроводнике E_1 , $E_1=(V_0-V)/d_s$. Уравнение для напряжения V составим путем использования закона независимости полного тока – проводимости плюс смещения – от координаты x , в условиях одномерной плоской геометрии. Применение этого закона к границе разряда с полупроводником дает:

$$\sigma_s E_1 + \varepsilon_0 \varepsilon_s \frac{dE_1}{dt} = j_C + \varepsilon_0 \frac{dE_C}{dt} = j_t = \frac{I}{S}, \quad E_1=(V_0-V)/d_s, \quad (3.1)$$

где $j_C=(1+\gamma)en_i v_{\text{др}}$ – плотность тока проводимости на катоде, γ – эффективный коэффициент вторичной эмиссии электронов с катода ионами^{*}; n_i – плотность ионов, $v_{\text{др}} = \mu_i E$ – скорость дрейфа ионов с подвижностью μ_i ; j_t – плотность полного тока; I – ток во внешней цепи; S – площадь электродов. При записи выражения для j_C учтено, что ток проводимости равен сумме электронного j_e и ионного j_i токов, $j=j_e+j_i$, которые на катоде связаны соотношением: $j_e = \gamma j_i$.

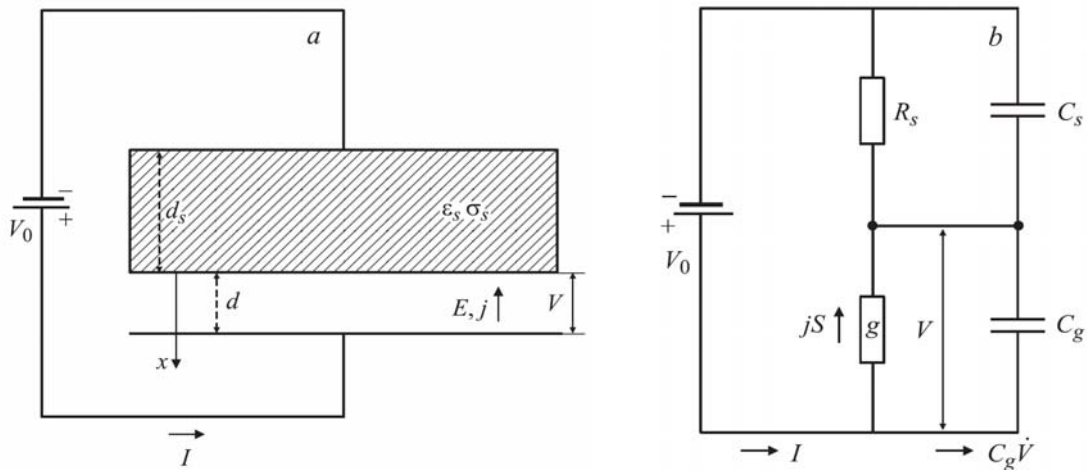


Рис. 27. (а) Схема разрядного устройства с полупроводниковым катодом и (б) эквивалентная схема.

Равенство (3.1) является точным, но в него входит плотность тока проводимости на катоде j_C , а не истинно средняя по всему промежутку, j . Кроме того, (3.1) содержит неизвестное поле на катоде, E_C .

^{*} Для сокращения записи значок «eff» при γ везде в этой главе опускаем.

В упрощенной теории приходится поступиться различием плотности тока на катоде и во всем промежутке, т.е. заменить в (3.1) j_C на j . Для раскрытия производной dE_C/dt в (3.1) используем E_C , вытекающее из распределения поля (2.7):

$$E_C = \frac{V}{d} + \frac{j d}{2(1+\gamma)\varepsilon_0 v_{idr}}. \quad (3.2)$$

С учетом $j_C \approx j$ и (3.2) имеем:

$$j_C + \varepsilon_0 \frac{dE_C}{dt} \approx j + \frac{\varepsilon_0}{d} \frac{dV}{dt} + \frac{\tau_i}{2(1+\gamma)} \frac{dj}{dt} \quad (3.3)$$

где введен $\tau_i = d/v_{idr}$, масштаб времени пролета ионов через промежуток. Член в правой части (3.3), содержащий производную dj/dt , имеет порядок $j\tau_i/T_1$, где T_1 – характерное время изменения тока. Мы этим слагаемым пренебрегаем. Если ток меняется в течение периода осцилляций более или менее плавно, то T_1 порядка периода колебаний T . В таком случае это пренебрежение законно, поскольку, как правило, $\tau_i \ll T$. Если же ток представляет собою последовательность коротких пиков малой длительности, то пренебрежение слагаемым с dj/dt справедливо с натяжкой. К сожалению, отказ от этого допущения, а также от предположения $j_C \approx j$ лишает теорию простоты и наглядности по сравнению с интегрированием неупрощенных уравнений в частных производных [28, 29, 25]. Таким образом, полная плотность тока в разряде записывается в виде:

$$j_t = j + \frac{\varepsilon_0}{d} \frac{dV}{dt} \quad (3.4)$$

Приравняем (3.4) выражению для плотности полного тока в полупроводнике, которой соответствует самая левая часть нескольких равенств (3.1). В результате получим уравнение внешней цепи:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_0 - V - jR_1}{\Theta}, \quad (3.5)$$

$$R_1 = d_s \sigma_s, \quad \Theta = R_1 C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_s}{\sigma_s} \left(1 + \frac{d_s}{\varepsilon_s d} \right)$$

Здесь R_1 – сопротивление полупроводника (на рис. 27b оно обозначено R_s), C_1 – сумма емкостей полупроводника C_s и разрядного промежутка C_g ; все из расчета на единицу площади; Θ – постоянная времени внешней цепи. Уравнение (3.5) с несущественными вариациями фигурирует в [18, 24]. В этих работах в роли $C_1 S$ выступает большая емкость, включенная параллельно промежутку. Она нужна, чтобы увеличить время релаксации Θ . Отметим, что при малых значениях Θ колебания на всем переходе от таунсендовского разряда к тлеющему не возбуждаются [18, 27]. В нашем случае, величина Θ достаточно

велика по причине большой емкости (а также сопротивления) полупроводниковой пластины.

3.2 Уравнение для разрядного тока

Оно приближенно отражает динамику лавинного размножения зарядов в промежутке. Ионизацию описываем таунсендовским коэффициентом $\alpha=\alpha(E)$. Ионизационный коэффициент α , как и эффективный коэффициент вторичной эмиссии γ , зависят от временных характеристик разряда $\alpha=\alpha[E(x,t)]$, $\gamma=\gamma(t)$. От электрона, вышедшего с катода в момент времени t , практически мгновенно рождаются ионы; при этом большая их часть рождается вблизи анода. Через характерное время τ_i ионы вытянутся полем на катод, где каждый из них выбьет $\gamma(t+\tau_i)$ новых электронов. Ток на катоде складывается из тока приходящих на катод ионов и тока эмитированных ими электронов. Кроме того, при рассмотрении нестационарного колебательного процесса включим в ток на катоде также некий слабый постоянный ток j_{ep} , не связанный с действием ионов. Ток j_{ep} может быть вызван ударами о катод метастабильных молекул. Последние, как и ионы, рождаются в основном у анода, но потом частично диффундируют к катоду. Предположение о постоянстве j_{ep} основано на большой длительности диффузии по сравнению с периодом осцилляций тока. Этот ток, будучи исключительно слабым, оказывает существенное влияние на автоколебания. Он увеличивает начальный затравочный ток, от которого начинается размножение зарядов в каждом периоде. Таким образом, электронный ток с катода равен:

$$j_e(t + \tau_i) = \gamma(t + \tau_i) \times \left\{ \exp \left[\int_0^d \alpha[E(x,t)] dx \right] - 1 \right\} j_e(t) + j_{ep} \quad (3.6)$$

Отметим, что на важность учета тока j_{ep} наше внимание обратили авторы работы [76]. В [76] рассматриваются слабозатухающие колебания тока в барьерном разряде, которые возникают в каждом полупериоде низкочастотного приложенного напряжения. Для их описания в уравнения включен слабый постоянный ток с катода, предположительно связанный с эмиссией электронов под действием медленно диффундирующих метастабильных молекул. Заметим, что подобная постоянная эмиссия, существенно влияющая на характеристики автоколебаний в рассматриваемом здесь разряде, не учитывалась ни в одной из предыдущих работ на эту (или близкую) тему [18, 24, 32, 25, 28, 29].

В каждый момент времени на катоде: $j_e = \gamma j_i + j_{ep}$, $j = j_e + j_i$. Из этих двух равенств получаем:

$$j_e = \frac{\gamma}{1+\gamma} j + \frac{j_{ep}}{1+\gamma}, \quad (3.7)$$

где j – плотность тока проводимости, усредненная по всему промежутку, которая (как уже было оговорено выше) считается совпадающей с плотностью тока на катоде.

Подставим (3.7) в (3.6) и разложим функции от $t+\tau_i$ около точки t , пренебрегая членами порядка $(\tau_i/T_1)^2$, а также членами порядка τ_i/T_1 , если они пропорциональны исключительно малой величине j_{ep} . Получим уравнение для тока:

$$\frac{dj}{dt} = \left(\frac{g-1}{\tau_i} + \frac{d\gamma/dt}{1+\gamma} \right) j + \frac{j_p}{\tau_i}; \quad j_p = \frac{1+\gamma}{\gamma} j_{ep}, \quad (3.8)$$

$$g = \gamma \left[\exp \left(\int_0^d \alpha[E(x,t)] dx \right) - 1 \right], \quad (3.9)$$

где $g=g(t)$ – коэффициент воспроизводства электронов. В уравнении (3.8) в членах пропорциональных $d\gamma/dt$ и j_{ep} положено $g=1$. Учет в этих членах отклонения g от 1 привел бы к появлению малых дополнительных членов, несущественных для дальнейшего рассмотрения. Уравнение (3.8) уточняет таковое, выведенное в предыдущих работах [18, 24] по динамике таунсендовского пробоя наличием слагаемого, пропорционального $d\gamma/dt$, а также j_{ep} . При малых γ слагаемое, содержащее производную $d\gamma/dt$, составляет долю порядка $\gamma \ll 1$ от левой части уравнения (3.8) и несущественно.

Причина, по которой мы остановились на выводе общего уравнения (3.8), заключается в следующем. В работе [24] этот член с производной $d\gamma/dt$ выводится и нем фиксируется внимание, поскольку рассматриваются случаи не очень малых $\gamma \approx 0.2$. Однако уравнение работы [24], содержащее $d\gamma/dt$, не совпадает с полученным нами (3.8). Причина в том, что в выводе [24] есть некорректность. В исходное равенство (3.6) подставлено не $\gamma(t+\tau_i)$ как у нас, а $\gamma(t)$, что не соответствует существу дела. От этого в [24] у слагаемого с производной $d\gamma/dt$ появился дополнительный множитель $1/\gamma$ и поменялся знак. В таком случае при любых γ член с $d\gamma/dt$ и левая часть уравнения типа (3.8) – величины одного порядка малости и пренебрегать слагаемым с $d\gamma/dt$ нельзя; в этом смысле авторы [24] правы. В правильном уравнении (3.8) слагаемое с $d\gamma/dt$, как уже было сказано, мало; мы его в дальнейшем опустим.

В результате, уравнение для тока имеет вид:

$$\frac{dj}{dt} = \frac{1}{\tau_i} [(g-1)j + j_p] \quad (3.10)$$

Обратимся к фактору $g-1$. В строго стационарном разряде постоянного тока, $g=1$ и никакой, даже очень слабой, эмиссии с катода, не связанной с разрядным током, нет. Количество рожденных метастабильных молекул пропорционально разрядному току j , а вызванная ими эмиссия может быть приближенно учтена уточнением коэффициента γ . При этом из условия $g=1$ получается ВАХ разряда постоянного тока $V_s(j)$. Свяжем величину $g-1$ с напряжением

на разрядном промежутке V и плотностью тока через разряд j . Для этого воспользуемся следующим нестрогим рассуждением. Поскольку мы предполагаем, что характерное время изменения тока достаточно велико $T_1 \gg \tau_i$, то из (3.10) следует, что $g-1 \sim \tau_i/T_1 \ll 1$. Но величина $g-1$ чувствительна к напряжению на промежутке V , т.к. она экспоненциально зависит от таунсендовского коэффициента $\alpha=\alpha(E)$ (1.3):

$$\alpha \approx A p \exp(-E_0 d / V) \quad (3.11)$$

Так как отклонения g от 1 малы, то отклонения напряжения при колебаниях V от стационарного значения $V_s(j)$ тоже невелики, и в первом приближении можно положить:

$$g - 1 = \left(\frac{\partial g}{\partial V} \right)_{V_s(j)} [V - V_s(j)] \quad (3.12)$$

При вычислении $(\partial g / \partial V)_{V_s(j)}$ в (3.12) воспользуемся (3.9), но при этом будем дифференцировать только экспоненту, которая зависит от V сильнее, чем от γ . Производную $\alpha' = d\alpha/dE$ отнесем к среднему по x полю $E_s = V_s/d$. Это дает приближенно:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial V} \right)_{V_s(j)} \approx \frac{(1+\gamma)}{d} \int_0^d \alpha' dx = (1+\gamma) \ln(1+1/\gamma) \frac{E_0}{E_s} \frac{1}{V_s}, \quad (3.13)$$

где учтено, что интеграл, стоящий в экспоненте выражения (3.9), на ВАХ $V=V_s(j)$ равен $\ln(1+1/\gamma)$.

Характерное время дрейфа ионов, $\tau_i = d/v_{idr}$, входящее в (3.10) можно немного уточнить, вычислив среднее время дрейфа ионов τ от места рождения до катода при $E(x) = \text{const} = E_s$ и стационарном распределении источников [8]:

$$\tau = \frac{d}{\mu_i E_s} (1 - L_\gamma^{-1}) = \tau_i (1 - L_\gamma^{-1}), \quad L_\gamma = \ln(1+1/\gamma) \quad (3.14)$$

Подставив (3.12) и (3.13) в (3.10), и заменив τ_i в (3.10) на τ по (3.14), получим уравнение для тока:

$$\frac{dj}{dt} = \frac{k}{\tau_0} \frac{V - V_s(j)}{V_s(j)} j + \frac{j_p}{\tau}, \quad \tau_0 = \frac{d}{\mu_i E_0}, \quad k = \frac{(1+\gamma)L_\gamma}{1 - L_\gamma^{-1}} \quad (3.15)$$

Поскольку при токах, характерных для таунсендовского разряда напряжение на ВАХ разряда близко к пробивающему V_T в знаменателе формулы (3.15) можно заменить $V_s(j)$ на V_T – на результатах это практически не сказывается. Окончательно получаем:

$$\frac{dj}{dt} = \frac{k}{\tau_0} \frac{V - V_s(j)}{V_T} j + \frac{j_p}{\tau}, \quad \tau_0 = \frac{d}{\mu_i E_0}, \quad k = \frac{(1+\gamma)L_\gamma}{1 - L_\gamma^{-1}} \quad (3.16)$$

При известной ВАХ разряда $V_s(j)$ уравнения (3.5) и (3.16) решают задачу описания динамики таунсендовского разряда в терминах V и j .

3.3 Система уравнений для численного интегрирования и значения параметров

Нестационарный процесс в цепи с таунсендовским разрядом описывается системой двух уравнений (3.5) и (3.16). Эту систему мы интегрируем в безразмерных переменных:

$$v = \frac{V - V_T}{V_T}, \quad w = \frac{jR_1}{V_T}; \quad (3.17)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta - v - w}{\Theta}, \quad \Delta = \frac{V_0 - V_T}{V_T}; \quad (3.18)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{[v - v_s(w)]w + w_{\text{eff}}}{\mathcal{G}}, \quad v_s = \frac{V_s(j) - V_T}{V_T} \quad (3.19)$$

$$w_{\text{eff}} = w_p \frac{E_T}{(1 + \gamma)L_\gamma E_0}, \quad \mathcal{G} = \frac{\tau_0}{k}, \quad w_p = \frac{j_p R}{V_T} = \frac{(1 + \gamma) j_{\text{ep}} R}{\gamma V_T}, \quad (3.20)$$

Расчеты проведены для условий экспериментов [3]. Разряд зажигается в азоте при $d=0.05$ см, давлении $p=9.2$ и 60 Торр, $d_s=0.15$ см, $\varepsilon_s=12$, $\sigma_s=1 \times 10^{-7}$ Ом $^{-1}$ см $^{-1}$, что соответствует $R_1=1.5$ МОм см 2 и времени $\Theta=1.33 \times 10^{-5}$ сек. Эффективный коэффициент вторичной эмиссии γ может быть оценен из экспериментального значения пробивающего напряжения V_T и формулы для кривой Пашена (1.5). Такая оценка, однако, затруднена тем, что в опытах [3] наблюдается сильное отклонение измеренной кривой пробоя $V_T(pd)$ от закона подобия. Кроме того, невозможно описать зависимость $V_T(pd)$ постоянными значениями параметров A , B , γ в широком диапазоне pd . Имея в виду качественный характер излагаемой теории, принимаем повсюду табличные $A=12$ см $^{-1}$ Торр $^{-1}$ и $B=342$ В см $^{-1}$ Торр $^{-1}$ [8], а γ выбираем равной $\gamma=0.08$. Это соответствует параметрам минимума кривой Пашена $(pd)_{\text{min}}=0.59$ Торр см и $V_{\text{min}}=202$ В, что приближенно отвечает измеренным в [3]. Принимая $\mu_p=1140$ см 2 Торр В $^{-1}$ с $^{-1}$ [8], найдем характерное «ионное время» $\tau_0=1.28 \times 10^{-7}$ с. Согласно (3.15) при $\gamma=0.08$ $k=4.56$, отсюда время \mathcal{G} (3.19), характеризующее реакцию тока на отклонение напряжения от ВАХ, $\mathcal{G}=2.81 \times 10^{-8}$ с.

О характерных значениях Δ [эта величина определена в (3.18)] можно судить по данным [3]. Например, при $pd=1$ Торр см $V_T=202$ В на пороге возбуждения колебаний $\Delta_t=0.357$, $j_t=51$ мА см $^{-2}$. Пороговый ток j_t служит характерным масштабом стационарного тока $j_s=(V_0 - V_s)/R_1$. Для величины стационарного тока в безразмерных переменных w_s имеем $w_s \approx \Delta_t$, где учтено $V_s \approx V_T$.

Что касается j_{ep} , то об этой величине трудно сказать что-либо достоверное. В [76] j_{ep} подбирался таким, чтобы получить согласие с экспериментом. Это удавалось для $j_{\text{ep}} \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ мА см $^{-2}$ при плотностях разрядного тока $j \sim 10^{-2} - 1$ мА см $^{-2}$, т.е. $j_{\text{ep}}/j \sim 10^{-5} - 10^{-2}$. Если ориентироваться на эти значения, то при $w_s \sim 0.1$, безразмерный

электронный ток 10^{-6} – 10^{-3} , а для w_p при $\gamma \sim 0.1$ получается $w_p \sim 10^{-5}$ – 10^{-2} . Величина w_{eff} (3.19) есть произведение w_p и некоторой комбинации величин, зависящих от параметров точки пробоя. Для численных примеров, рассмотренных ниже, эта комбинация равна примерно 0.1 и 0.5. Поэтому ориентировочно $w_{\text{eff}} \sim 10^{-6}$ – 10^{-2} . Как и в [76], мы будем варьировать w_{eff} .

3.4 ВАХ и автоколебательные решения при малых pd .

ВАХ таунсендовского разряда при малых pd может быть определена аналитически с помощью выражения (3.9) для коэффициента воспроизводства g . Пусть эффективный коэффициент γ растет с ростом поля у катода E_C : $\gamma(E_C) = \gamma_T + \gamma' \Delta E_C$, где $\gamma_T = \gamma(E_T)$, $E_T = V_T/d$, $\Delta E_C = E_C - E_T$; $\gamma' > 0$, отклонение ΔE_C считаем малым. Представим $\alpha(x)$ в виде разложения по степеням отклонения поля $E(x)$ от пробойного E_T , считая это отклонение малым и оборвем разложение на втором члене: $\alpha(x) = \alpha_T + \alpha' [E(x) - E_T] + 1/2 \alpha'' [E(x) - E_T]^2$, где $\alpha_T = \alpha(E_T)$; первая и вторая производные от α берутся в поле E_T . Поле $E(x)$ свяжем с напряжением V и плотностью тока в промежутке j по формуле (2.7). Подставляя выписанные разложения γ и $\alpha(x)$ в (3.9), интегрируя, и приравнявая (3.9) единице, получим ВАХ разряда:

$$V_S = V_T - R_{ID} j + A_1 j^2, \quad R_{ID} = \frac{\hat{\gamma} \tau_0 d}{2 \varepsilon_0 (1 + \gamma) L_\gamma}, \quad \hat{\gamma} \equiv d \ln \gamma / d \ln E_C, \quad A_1 = -\frac{\alpha''}{24 \alpha'} \frac{d^3}{\varepsilon_0^2 \mu_i^2 E_T^2}, \quad (3.21)$$

В безразмерных переменных:

$$v_s = -\rho w + \eta w^2; \quad \rho = \frac{R_{ID}}{R_1} = \frac{\hat{\gamma} \tau_0 d \sigma_s}{2 \varepsilon_0 (1 + \gamma) L_\gamma d_s}, \quad \eta = \frac{A_1 V_T}{R_1^2} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{E_0}{2 E_T} \right) \left(\frac{E_0}{E_T} \right)^2 \left(\frac{\tau_0 d \sigma_s}{\varepsilon_0 d_s} \right)^2 \quad (3.22)$$

В формуле (3.21) R_{ID} – абсолютная величина отрицательного (для $\hat{\gamma} > 0$) дифференциального сопротивления разряда при $j \rightarrow 0$ из расчета на единицу площади; производные α' , α'' в точке пробоя в (3.22) вычислены путем дифференцирования (1.2). Отметим, что при $\gamma = \text{const}$ ($R_{ID} = 0$) ВАХ и выражение для A_1 не отличаются от полученных еще в [19].

Отметим, что с точностью до несущественного численного коэффициента уравнение (3.16) с ВАХ (3.21) и $j_p = 0$ было впервые выведено в работе [18].

Подставляя в (3.22) значения параметров, приведенные в предыдущем параграфе, получаем $\rho = 0.86 \times 10^{-2} \hat{\gamma}$. О величинах $\hat{\gamma}$ можно судить на основании данных по отрицательным сопротивлениям. В отсутствии прямых измерений величину R_{ID} можно найти косвенным путем – например, из известного порога для возбуждения колебаний [см. ниже

формулу (3.29)]. Сопоставление R_{ID} , найденного по (3.21), с измеренным в [18] для неона дает $\hat{\gamma}=0.5$. Оценка $\hat{\gamma}$, сделанная с помощью измеренного на опыте порога возбуждения автоколебаний, дает $\hat{\gamma}=0.68$ (при оценке принято $j_t=51 \text{ мА см}^{-2}$, $V_T=213 \text{ В}$, причем формула (3.29) для выписанных выше параметров дает $R_{ID}=8.8 \times 10^3 \text{ Ом см}^2$). Таким образом, ориентировочно $\rho=(5-6) \times 10^{-3}$. Коэффициент η зависит от отношения E_0/E_T , т.е. при фиксированном d от p , правда довольно слабо – логарифмически. Для точки минимума кривой Пашена $[(pd)_{\min}=0.59 \text{ Торр см, } V_{\min}=202 \text{ В}]$ $E_0/E_T=1$ и $\eta \approx 10^{-4}$.

На рис. 28 показан пример автоколебательного решения системы (3.18), (3.19) с ВАХ (3.22) для $pd=0.46 \text{ Торр см, } V_T=209 \text{ В, } \rho=5.58 \times 10^{-3}$, $\eta=6.85 \times 10^{-5}$, $\Delta=0.5$ и $w_{\text{eff}}=0$. Здесь, как и везде ниже, на осциллограмме тока представлена полная плотность тока j_t (3.4), проводимости плюс смещения. Только она и представляет интерес, т.к. соответствующий ей полный ток I измеряется на опыте во внешней (по отношению к системе полупроводник – разряд) цепи.

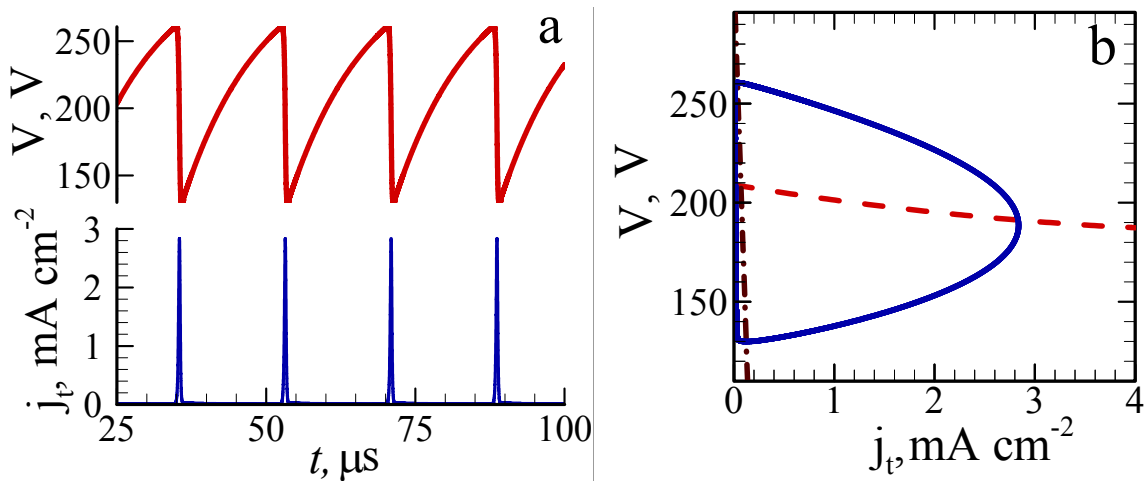


Рис. 28. (а) Рассчитанные «осциллограммы» напряжения на разряде (верхняя кривая) и плотности полного тока (нижняя кривая); (б) предельный цикл на плоскости напряжение на разряде – плотность полного тока, ВАХ (штриховая кривая) и нагрузочная прямая. «Малое» $pd=0.46 \text{ Торр см, } \Delta=0.5, j_{\text{ep}}=0$.

Сформулируем то, как происходят автоколебания в цепи с разрядом. В каждом полупериоде при нарастании тока напряжение на промежутке уменьшается из-за того, что большая часть приложенного напряжения падает на внешнем сопротивлении (см. рис. 27). Заряды, изгоняемые полем из промежутка, не воспроизводятся и ток падает. В отсутствии проводимости напряжение на разряде восстанавливается, поскольку некоторая эквивалентная емкость (состоящая из емкости самого промежутка и элементов внешней цепи) заряжается от источника. Из-за запаздывания образования зарядов в промежутке

напряжение на нем превосходит пробивающее, после чего развивается ионизация, ток нарастает, напряжение на разряде, следовательно, падает и все повторяется. Процесс носит характер релаксационных колебаний.

Подчеркнем, что уравнения, рассматриваемые в этом разделе, при $j_{ep}=0$ допускают колебания только при $\eta>0$, чему соответствуют значения $\alpha''(E_T)<0$ за перегибом кривой (1.2). При этом $E_T>E_0/2$ ($E_T/p>B/2$), $pd<(pd)_{cr}=e(pd)_{min}$, т.е. pd является «малым». Для азота $(pd)_{cr}=1.6$ Торр см.

Без слагаемого, пропорционального j^2 в ВАХ (3.21), в отсутствии постоянного тока с катода, автоколебательных решений при $\Delta=0.5$ нет, хотя это значение и превышает порог раскачки колебаний, который для данных условий составляет $\Delta_c\approx 0.4$. При этом в счете получаются колебания с нарастающей амплитудой.

Включим теперь в уравнение (3.19) постоянный ток с катода и оставим остальные параметры неизменными. Автоколебательное решение для этого случая показано на рис. 29. В варианте, изображенном на рис. 29, автоколебания существуют и в отсутствии квадратичного члена в ВАХ разряда (3.22). Это слагаемое слабо влияет на характеристики представленных автоколебаний.

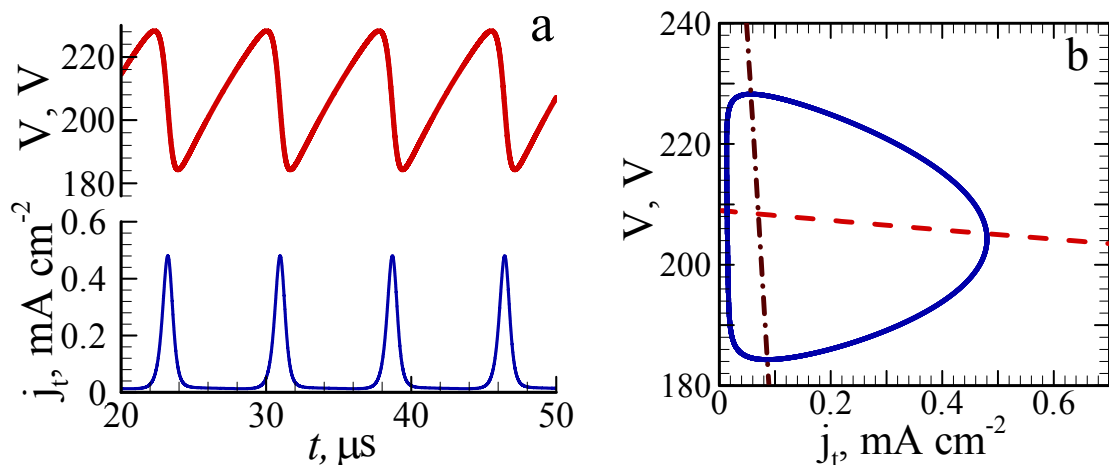


Рис. 29 (а) Рассчитанные «осциллограммы» напряжения на разряде и плотности полного тока; (б) предельный цикл на плоскости напряжение на разряде – плотность полного тока, ВАХ (штриховая кривая) и нагрузочная прямая. «Малое» $pd=0.46$ Торр см, $\Delta=0.5$, $j_{ep}=2.2\times 10^{-7}$ mA см⁻² ($w_{eff}=10^{-5}$).

От величины постоянного тока эмиссии w_{eff} зависит тот затравочный ток, от которого начинается размножение зарядов в каждом периоде. Численный расчет показывает, что чем больше w_{eff} , тем меньше нужно времени для возрастания тока от минимального $w_{min}\sim w_{eff}$ до пикового w_{max} . Сам пиковый ток при действии постоянного тока эмиссии

сильно уменьшается (в 6 раз), как это видно из сравнения рис. 28 с рис. 29. Как результат, токовые пики в присутствии w_{eff} становятся гораздо более размытыми, чем при $w_{\text{eff}}=0$. Нарастание тока и его спад в течение периода в обоих случаях происходят «квазиэкспоненциально», в соответствии с (3.19), в котором $v-v_s$ меняется во времени и порядка $v-v_s \sim \pm 0.1$.

Если в уравнениях (3.18)–(3.20) положено $w_{\text{eff}}=0$, то это вовсе не означает, что нарастание тока в каждом периоде начинается с «нуля». Без затравочных зарядов усиление тока в принципе невозможно. С другой стороны, чисто теоретически в рамках уравнения (3.19) какой-нибудь ненулевой ток в каждом периоде никогда не упадет до нуля. Для этого потребовалось бы «бесконечное» время. Фактически же в ходе численного интегрирования уравнений минимальное значение безразмерного тока w_{min} на рис. 28 много больше «теоретического». «Теоретическое» значение $w_{\text{min}} \sim w_{\text{max}} \exp(-0.1T/\vartheta)$, где $w_{\text{max}} \sim 1$, $T \approx 20$ мсек – период колебаний; $\vartheta = 2.81 \times 10^{-8}$ сек, т.е. $w_{\text{min}} \sim e^{-71} \approx 10^{-31}$. На самом деле, w_{min} определяется точностью расчетной процедуры и составляет в наших расчетах $w_{\text{min}} \sim 10^{-12} - 10^{-10}$.

Погрешность численного счета не равносильна присутствию постоянного тока эмиссии. В самом деле, если бы вариант, представленный на рис. 28, рассчитывался на «идеальном» компьютере, то было бы достигнуто «теоретическое» w_{min} . С другой стороны, при решении уравнений (3.18), (3.19) для случая $w_{\text{eff}}=0$ с плохой точностью, равной 10^{-5} , что совпадает со значением w_{eff} в варианте, показанном на рис. 29, автоколебательное решение рис. 29 воспроизвести не удастся.

При уменьшении w_{eff} от 10^{-5} до 10^{-12} , в рамках ВАХ (3.22) характер колебаний монотонно меняется от изображенного на рис. 29 к представленному на рис. 28. В то же время, включение чрезмерно большого постоянного тока эмиссии ($w_{\text{eff}} > 3 \times 10^{-4}$ для $\Delta=0.5$) делает невозможным автоколебательные решения: при любых начальных условиях колебания затухают.

3.5 Автоколебания при больших pd

Случай «больших» pd [$pd > (pd)_{cr} = \bar{e} (pd)_{min}$] широко представлен в экспериментах [3] для азота в системе полупроводник - разрядный промежуток, а также в опытах для неона в обычных газоразрядных трубках [27]. Рассмотрим вариант разряда в азоте с $d=0.05$ см, $p=60$ Торр, $pd=3$ Торр см $=1.87(pd)_{cr}$, $\gamma=0.08$, $V_T=391$ В. Остальные параметры R_1 , Θ , \mathcal{A} оставляем прежними, см. §3.3. Значительная неопределенность связана с выбором отрицательного сопротивления R_{ID} для рассматриваемых условий. При d , $\gamma=\text{const}$, $R_{ID} \sim \hat{\gamma}$. Подобно [24] мы полагаем, что $\hat{\gamma}$ не зависит от p , т.е. $R_{ID}=\text{const}$ и ориентировочно $R_{ID}=8.5$ кОм см² – то же, что и при «малых» pd^* . Подставим все значения параметров в (3.22) и найдем A_1 . Теперь в отличие от случая «малых» pd , $\alpha''(E_T) > 0$; $A_1 < 0$, $\eta < 0$.

Численное интегрирование системы (3.18)–(3.20) с ВАХ (3.22) и $w_{eff}=0$ для рассматриваемого «большого» $pd=3$ Торр см показывает, что эта система не имеет автоколебательных решений. Для того, чтобы их получить (при $w_{eff}=0$) в ВАХ разряда нужно учитывать члены более высокого порядка по плотности тока j , в частности, кубический член $A_2 j^3$, $A_2 > 0$. Попытка найти коэффициент A_2 аналитически предпринималась в [49]. Однако, получить простое выражение для этого коэффициента не удалось из-за сильной громоздкости вычислений. Поэтому для нахождения ВАХ с необходимой нам точностью не остается ничего другого, как воспользоваться результатами численных расчетов, проведенных в [49], на основе одномерной системы уравнений для электронов, ионов и уравнения Пуассона, в предположении $\gamma=\text{const}$. Безразмерную ВАХ [49] аппроксимируем полиномом. В результате получаем исправленную ВАХ, содержащую члены третьего и четвертого порядков по току:

$$V_s(j) = V_T - R_{ID}j + A_1 j^2 + A_2 j^3 - A_3 j^4, \quad (3.23)$$

$$A_1 = -3.22 \times 10^{13} p^{-4} \text{ В см}^4 \text{ Торр}^4 \text{ А}^{-2}, \quad A_2 = 2.68 \times 10^{19} p^{-6} \text{ В см}^6 \text{ Торр}^6 \text{ А}^{-3},$$

$$A_3 = 5.26 \times 10^{24} p^{-8} \text{ В см}^8 \text{ Торр}^8 \text{ А}^{-4}.$$

Кривая $V_s(j) = V_T + A_1 j^2 + A_2 j^3 - A_3 j^4$, с коэффициентами (3.23) описывает начальный участок рассчитанной численно ВАХ вплоть до $j=8$ мА см⁻². По сравнению с [49] в ВАХ (3.23) содержится член с R_{ID} , который включен из физических соображений. В ВАХ, рассчитанной в предположениях $\gamma=\text{const}$ и $\alpha=\alpha(E)$, члена с R_{ID} нет. Отметим, что значение A_1 по (3.23) близко к A_1 , $A_1 = -3.15 \times 10^{13} p^{-4} \text{ В см}^4 \text{ Торр}^4 \text{ А}^{-2}$, найденному по формуле (3.21).

ВАХ (3.23) в безразмерном виде имеет вид:

* Если для оценки R_{ID} воспользоваться (3.29) и экспериментальными данными [3], то для близких условий получается $R_{ID}=24$ кОм см² – почти в 3 раза выше приведенного в тексте (при оценке принято $V_T=312$ В, $j_i=27.3$ мА см⁻²). Отмеченное расхождение, однако, не существенно из-за качественного характера всей теории.

$$v_s(w) = -\rho w + \eta w^2 + \lambda w^3 + \nu w^4,$$

$$\rho = 5.7 \times 10^{-3}, \quad \eta = -4.32 \times 10^{-4}, \quad \lambda = 2.60 \times 10^{-5}, \quad \nu = 3.7 \times 10^{-7}. \quad (3.24)$$

С ВАХ (3.24) и $w_{\text{eff}}=0$ система (3.18)–(3.20) имеет автоколебательные решения. Порог возбуждения автоколебаний, $\Delta \approx 0.275$. Автоколебания существуют в довольно узкой области приложенных напряжений: при $\Delta \approx 0.5$ они прекращаются. Пример автоколебательного решения при $\Delta = 0.32$ показан на рис. 30.

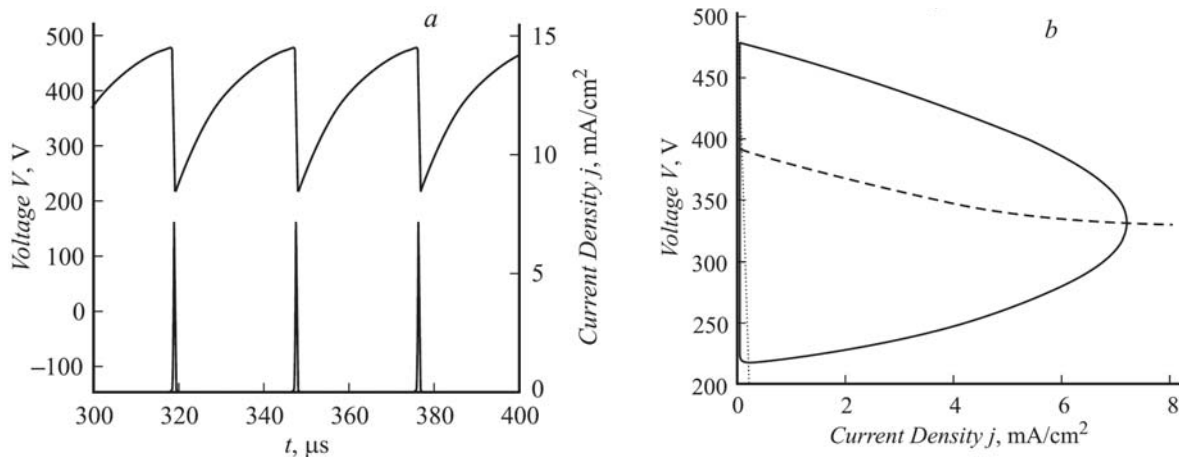


Рис. 30. (а) Рассчитанные «осциллограммы» напряжения на разряде (верхняя кривая, левая шкала) и плотности тока (нижняя кривая, правая шкала); (б) предельный цикл, ВАХ (штриховая кривая) и нагрузочная прямая. «Большое» $pd=3$ Торр см, $\Delta=0.32$, $j_{\text{ep}}=0$.

Включение в уравнение (3.19) с ВАХ (3.24) слабого постоянного тока с катода, как и в случае «малых» pd , приводит к уменьшению амплитуды и периода колебаний; острые токовые пики при этом размазываются. Пример численного решения представлен на рис. 31. Для этого примера присутствие w_{eff} в уравнении (3.19) делает излишним наличие кубического члена в ВАХ – автоколебания существуют и без него. Как и при «малых» pd , автоколебания получаются, если только w_{eff} не превосходит некоторого предела. Для данного примера этот предел равен 10^{-7} ; при бóльших w_{eff} в численном счете получаются только затухающие колебания.

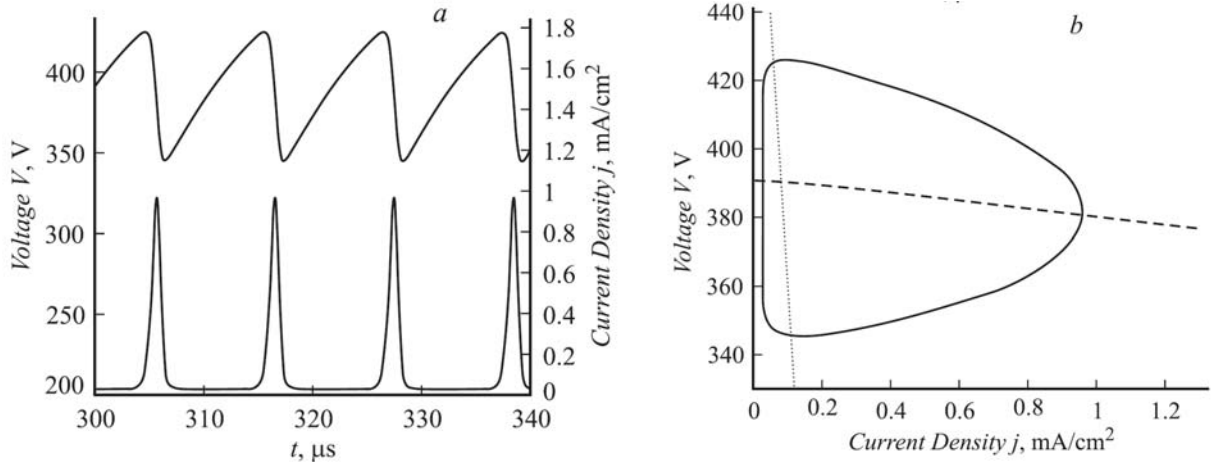


Рис. 31. (a) Рассчитанные «осциллограммы» напряжения на разряде – верхняя кривая, левая шкала и плотности тока – нижняя кривая, правая шкала; (b) предельный цикл, ВАХ (штриховая кривая) и нагрузочная прямая. «Большое» $pd=3$ Торр см, $\Delta=0.32$, $j_{ep}=1.14 \times 10^{-8}$ mA cm^{-2} ($w_{eff}=8 \times 10^{-8}$).

Отметим, что при «больших» pd в численном счете получается «жесткий» режим возбуждения автоколебаний, при котором возможность автоколебаний малой амплитуды исключена. При «малых» pd режим возбуждения «мягкий», т.е. можно получить колебания сколь угодно малой амплитуды (вблизи порога возникновения автоколебаний). Это перекликается с наблюдениями [18, 27]. Заметим, однако, что в опытах [27] «мягкий» режим возбуждения автоколебаний иногда наблюдался и при «больших» pd .

Отметим, что уравнения (3.18), (3.19) с $w_{eff}=0$, для $pd=3$ Торр см с ВАХ (3.24), в которой положено $\rho=0$ ($R_{1D}=0$), также дают автоколебательные решения. Порог возбуждения колебаний теперь $\Delta \approx 1$ – в 3.6 раз выше, чем при $\rho=5.7 \times 10^{-3}$. Колебания существуют в довольно широком диапазоне приложенных напряжений, вплоть до $\Delta \approx 2$.

3.6 Автоколебания при переходе от таунсендовского разряда к тлеющему

С целью иллюстрации возможностей простой теории, остановимся на одном из вариантов [28], где автоколебания рассматривались путем решения неупрощенной системы уравнений в частных производных. Вариант, для которого в [28] получен предельный цикл, фактически отвечает не таунсендовскому, а поднормальному разряду, примыкающему к тлеющему со стороны меньших токов. Выбранное $pd=4.17$ Торр см при $d=0.14$ см является «большим». Для принятого в [28] значения $\gamma=0.08$, $pd=2.6(pd)_{cr}=7(pd)_{min}$, $(pd)_{cr}=\bar{e}(pd)_{min}$.

Положим в уравнении (3.16) постоянный ток с катода j_{ep} равным нулю, поскольку он не учтен в [28] и подставим в (3.16) ВАХ из работы [28]. Будем интегрировать (3.16) совместно с уравнением внешней цепи (3.5) в безразмерных переменных [28]. Рассматриваемому варианту соответствует приложенное напряжение $V_0=513$ В, пробойное напряжение $V_1=482$ В, сопротивление полупроводника $R_1=3.9 \times 10^4$ Ом см², характерное время внешней цепи $\Theta=3.26 \times 10^{-7}$ сек.

При вычислении масштаба времени дрейфа ионов, τ_0 , которое входит в уравнение для тока (3.16), нужно учесть следующее обстоятельство. В таунсендовском разряде ионы рождаются в основном вблизи анода. Следствием этого является появление в (3.16) величины $\tau_0=d/(\mu_i E_0)$, где d – межэлектродное расстояние. В случае поднормального разряда область рождения зарядов сосредоточена вблизи катода, а ширина этой области приближается к толщине катодного слоя нормального тлеющего разряда, $d_{\text{кс}}$. Поэтому сейчас $\tau_0 \approx d_{\text{кс}}/(\mu_i E_0)$, причем $d_{\text{кс}}/d \approx (pd)_{\text{min}}/(pd) = 1/7$. Для учета этого эффекта разделим $\tau_0=d/(\mu_i E_0)$ в (3.16) на постоянную C , которую будем подбирать экспериментально, в ходе численного интегрирования уравнений. Согласно приведенным выше рассуждениям, ориентировочно $C=7$.

На рис. 32 приведен результат численного решения системы (3.5), (3.16) с указанными выше параметрами и $C=9$, который неплохо согласуется с полученным в [28]. Этот пример может служить иллюстрацией возможностей простой качественной теории, используемой в настоящей работе. Полного согласия варианта, представленного на рис. 32, с численным расчетом [28] нет*. Вдобавок уравнения (3.5), (3.16) не в состоянии описать последовательность бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу, найденные в [28]. Однако, преимущество рассматриваемой простой теории является тот факт, что с ее помощью удастся проанализировать факторы, контролирующие автоколебательный процесс. Их труднее выявить при прямом численном моделировании.

* Различие проявляется в следующем. Из уравнений (3.5), (3.16) при $j_{\text{ep}}=0$ следует, что в точке пересечения предельного цикла $V=V(j)$ с ВАХ разряда $V=V_s(j)$, производная dV/dj обращается в бесконечность. В этой точке предельный цикл, изображенный на рис. 32, имеет вертикальную касательную. В численном счете [28] это не так. В упомянутой точке величина dV/dj хоть и велика, но не обращается в бесконечность.

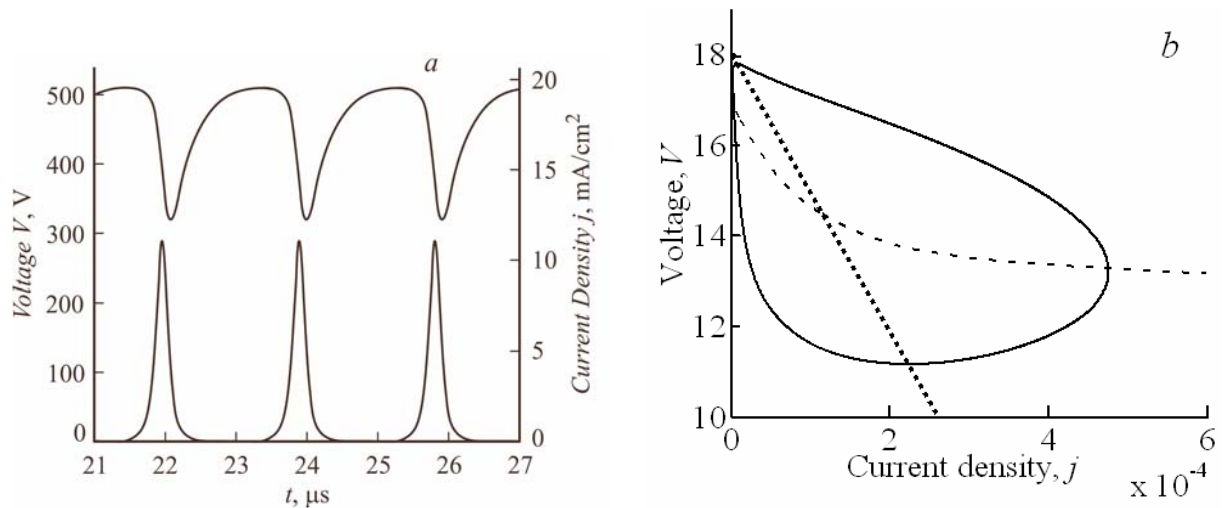


Рис. 32. Пример автоколебательного решения при $pd=4.17$ Торр см, $\Delta=0.065$, в области перехода от таунсендовского разряда к тлеющему. (а) - напряжение на разряде (верхняя кривая, левая шкала) и плотность полного тока (нижняя кривая, правая шкала); (б) - предельный цикл, ВАХ (штриховая кривая) и нагрузочная прямая, показанные в безразмерных переменных [28] для удобства сравнения.

3.7 Механизмы раскачки и стабилизации колебаний

Выясним причины, контролирующие автоколебания в системе (3.18)–(3.20). Анализ проще всего провести для случая «малых» pd . В этом случае ВАХ разряда $v_s(w)$ (3.22) и уравнения колебаний выводятся аналитически и все параметры наполнены физическим содержанием. Трактовка нелинейной системы (3.18)–(3.20) существенным образом зависит от того, присутствует ли в ней член с w_{eff} или нет. Скажем сразу, что интерпретация первого случая вызывает у нас затруднения. Поэтому начнем со второго. Даже если он и не отвечает реальности, он заслуживает внимания хотя бы потому, что без учета постоянного тока с катода были получены автоколебательные решения в предыдущих работах [18, 24, 28, 29] (и нами) и желательно понять, почему уравнения их дали. Вопрос интересен и с математической точки зрения. Хотя на некоторые вопросы можно ответить путем традиционного анализа [77, 78], полное исследование системы (3.18)–(3.20) представляет собой трудную задачу качественной теории дифференциальных уравнений. Стоит отметить, что в виду приближенного характера уравнений последняя процедура имела бы скорее методический, а не физический интерес.

Хотя численно интегрировать систему (3.18)–(3.20) удобно в безразмерных переменных (3.17), анализировать ее целесообразно, рассматривая отклонения напряжения V и тока j от стационарной точки $[j_s, V_{ss}=V_s(j)]$, как это происходит при колебаниях малой

амплитуды. Стационарная точка соответствует пересечению нагрузочной прямой и ВАХ разряда. Опустим в (3.19) w_{eff} и перейдем в системе (3.18), (3.19) к безразмерным отклонениям напряжения u и тока \tilde{w} от стационарной точки:

$$u = \frac{V - V_{\text{SS}}}{V_T} = v - v_S(w_S), \quad \tilde{w} = w - w_S \quad (3.25)$$

Затем исключим \tilde{w} , превратив систему для u и \tilde{w} в одно уравнение второго порядка для u . Для этого продифференцируем уравнение для напряжения u по t и подставим в полученный результат значение $d\tilde{w}/dt$, вытекающее из уравнения для тока. Полученное выражение помимо u и его производных по времени содержит ток \tilde{w} . Этот ток исключаем путем использования уравнения для u . В результате не сложного, но довольно длинного вычисления получим уравнение, члены в котором мы сгруппируем таким образом, чтобы ему можно было дать физическое истолкование:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = -\dot{u} \left[\frac{1}{\Theta} - \frac{\Delta}{g} (\rho - 2\eta\Delta) + \frac{3\eta}{g} u^2 + \frac{\eta}{g} \Theta^2 \dot{u}^2 \right] + \frac{u\dot{u}}{g} (1 - 2\rho + 6\eta\Delta) + \frac{u^2}{\Theta g} (1 - \rho + 3\eta\Delta) - \frac{\dot{u}^2 \Theta}{g} (\rho - 3\eta\Delta), \quad (3.26)$$

$$\omega^2 = \frac{\Delta}{\Theta g} (1 - \rho + 2\eta\Delta + \frac{\eta}{\Delta} u^2 + \frac{3\eta}{\Delta} \Theta^2 \dot{u}^2) \quad (3.27)$$

В (3.26), (3.27) параметр Δ заменяет величину w_S , которую, строго говоря, нужно определять из квадратного уравнения $w_S = \Delta - v_S(w_S)$. Это вносит ошибку порядка 1%, т.к. $v_S \sim 10^{-3}$, а $\Delta \cong 10^{-1}$. Параметр Δ характеризует приложенное напряжение; он регулируется на опыте и при вычислениях.

Полученное сложное уравнение (3.26) с частотой ω (3.27) представляет собою уравнение нелинейных колебаний с модулированной частотой, которое трудно интерпретировать без каких-либо упрощений. Линеаризуем его применительно к колебаниям малой амплитуды ($u \ll 1$). Получим:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = -K\dot{u}, \quad \omega \approx \sqrt{\frac{\Delta}{\Theta g}}, \quad K = \left(\frac{1}{\Theta} - \frac{\Delta\rho}{g} \right) \quad (3.28)$$

В (3.28) учтено $\eta\Delta \sim 10^{-5} \ll \rho \sim 10^{-3} \ll 1$. Уравнение (3.28) представляет собою обычное уравнение гармонических колебаний с линейным трением. В рамках механической аналогии u – отклонение частицы от положения равновесия, \dot{u} – скорость частицы, K – коэффициент трения. Если K положителен, то колебания затухают (при $K \ll \omega$ система успеет сделать

много периодов до полного затухания), если K отрицателен, то разгоняются*. Линейное уравнение (3.28) можно использовать для нахождения порога возбуждения автоколебаний. Порог определяется из условия $K=0$, что дает:

$$\Delta_t = \frac{V_{0t} - V_T}{V_T} = \frac{\mathcal{G}}{\Theta \rho}, \quad j_t = \frac{\mathcal{G}}{\Theta} \frac{V_T}{R_{1D}} \quad (3.29)$$

Формула (3.29) была выведена в работах [18, 24]. Необходимым условием существования автоколебаний является неравенство: $K < 0$ или $\Delta > \mathcal{G}/(\Theta \rho)$. Как видим, существование автоколебаний обусловлено наличием отрицательного дифференциального сопротивления R_{1D} , которому в безразмерных переменных отвечает величина ρ . При $\rho=0$ $K > 0$ и разряд устойчив.

Для случая таунсендовского разряда условие $\Delta > \mathcal{G}/(\Theta \rho)$ можно трактовать следующим образом. Раскроем комбинацию $\mathcal{G}/(\Delta \rho)$, имеющую размерность времени с помощью: $\mathcal{G} = \tau_0/k$ с k , выписанным в (3.16), Δ – (3.18) и ρ по (3.22). Затем вводим в полученное выражение плотность тока $j = (V_0 - V_T)/R_1$. В результате, имеем: $\mathcal{G}/(\Delta \rho) = 2(1 - L_\gamma^{-1})/\hat{\gamma} \cdot \varepsilon_0 E_T/j$. Подставим в последнее равенство величину $j = 2(1 + \gamma)\varepsilon_0 v_{idT}/d \cdot \Delta E$, $\Delta E = E_C - V/d$, т.е. формулу (3.2), записанную иначе. Имеем $\mathcal{G}/(\Delta \rho) = \tau/[(1 + \gamma)\hat{\gamma}] \cdot E_T/\Delta E$, где τ – ионное время (3.14). Принимая для оценки $\Delta E/E_T \sim 0.1$, $\gamma < 1$ и $\hat{\gamma} \sim 1$, получаем $\mathcal{G}/(\Delta \rho) \sim 10\tau$. С учетом последней оценки условие возбуждения колебаний, $\Delta > \mathcal{G}/(\Theta \rho)$, принимает вид: $\Theta > 10\tau$. Оно находится в соответствии с экспериментально наблюдаемым фактом [27], что существует некоторое критическое значение постоянной внешней цепи Θ . Если Θ выбрано ниже критического, то в таунсендовском разряде автоколебания не возбуждаются.

Рассчитанные «осциллограммы» автоколебаний, приведенные на рис. 28, показывают, что колебания имеют сильно нелинейный, релаксационный характер. Величины напряжения V и плотности тока j в течение периода испытывают резкие скачки наряду со сравнительно медленными изменениями. Хотя автоколебания далеки от гармонических, для выяснения факторов, контролирующих процесс, целесообразно провести качественный анализ уравнения (3.26) для случая квазигармонических колебаний.

Рассмотрим систему близкую к гармоническому осциллятору, описывающуюся нелинейным уравнением (3.26) с частотой $\omega \approx \sqrt{\Delta/(\Theta \mathcal{G})}$. Перейдем в (3.26) к новому времени $\tilde{t} = \omega t$, производную по которому обозначим штрихом и получим:

* Так будет для любых начальных условий за исключением $u|_{t=0} = 0, \dot{u}|_{t=0} = 0$.

$$u'' + u = -u' \left[\left\{ \frac{1}{\omega\Theta} - \frac{\Delta\rho}{\omega\vartheta} \right\} + \frac{3\eta}{\omega\vartheta} u^2 + \frac{\eta\Theta}{\vartheta} (\omega\Theta) u'^2 \right] + \frac{uu'}{\omega\vartheta} + \frac{u^2}{(\omega\Theta)(\omega\vartheta)} - \frac{\rho\Theta}{\vartheta} u'^2 \quad (3.30)$$

В (3.30) учтено $\eta\Delta \sim 10^{-5} \ll \rho \sim 10^{-3} \ll 1$. Оценим порядки входящих в (3.30) величин. Учтем, что для варианта, представленного на рис. 28, $\Delta=0.5$, $\Theta=1.33 \times 10^{-5}$ сек, $\vartheta=2.81 \times 10^{-8}$ сек, $\omega=1.2 \times 10^6$ рад сек $^{-1}$, $\omega\Theta=16$, $\Theta/\vartheta=473$, $\rho=5.58 \times 10^{-3}$, $\eta=6.85 \times 10^{-5}$. Для квазигармонических колебаний $u' \approx u$. Наибольший вклад в правую часть (3.30) дает слагаемое пропорциональное uu' . При $u=(V-V_{SS})/V_T \sim 0.1$, как на рис.28, член $uu'/(\omega\vartheta) \sim 0.1$, что сравнимо с левой частью (3.30). Следовательно, этим членом пренебрегать нельзя, сильны нелинейные эффекты, как это непосредственно видно из рассчитанных «осциллограмм». Нас здесь интересует предельный случай, когда нелинейные эффекты малы, что справедливо в случае малости правой части по сравнению с левой. С этой целью перейдем в (3.30) к переменной x , $x=u/u_0$, $x \sim 1$:

$$x'' + x = -x' \left[\left\{ \frac{1}{\omega\Theta} - \frac{\Delta\rho}{\omega\vartheta} \right\} + \frac{3\eta}{\omega\vartheta} u_0^2 x^2 + \frac{\eta\Theta}{\vartheta} (\omega\Theta) u_0^2 x'^2 \right] + \frac{u_0 x x'}{\omega\vartheta} + \frac{u_0 x^2}{(\omega\Theta)(\omega\vartheta)} - \frac{\rho\Theta}{\vartheta} u_0 x'^2 \quad (3.31)$$

«Надпороговость», заключенная в (3.31) в фигурные скобки, предполагается очень малой по сравнению с единицей. Масштаб u_0 выберем таким, чтобы слагаемое с xx' в (3.31) было на порядок меньше x . Это достигается при $u_0 \approx 3 \times 10^{-3}$.

Для качественного исследования (3.31) применим метод усреднения в форме, описанной в [77]. Запишем уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu \tilde{f}(x, y) \end{cases}, \quad \tilde{f}(x, y) = y(-1 + A_1 - A_2 x^2 - A_3 y^2) + \alpha_1 xy + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 y^2, \quad (3.32)$$

$$A_1 = \frac{\Theta\rho\Delta}{\vartheta}, \quad A_2 = \frac{3\eta\Theta}{\vartheta} u_0^2, \quad A_3 = \frac{(\omega\Theta)^2}{3} A_2, \quad \mu = 1/(\omega\Theta) = 1/16 - \text{малый параметр.}$$

$$\alpha_1 = \frac{\Theta}{\vartheta} u_0, \quad \alpha_2 = \alpha_1 / (\omega\Theta), \quad \alpha_3 = \rho\omega\Theta\alpha_1$$

Перейдем в (3.32) к полярным координатам: $x = K \cos(\tilde{t} + \vartheta)$, $y = -K \sin(\tilde{t} + \vartheta)$, где $K = K(\tilde{t}) \geq 0$, $\vartheta = \vartheta(\tilde{t})$. Имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения для K и ϑ :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\tilde{t}} &= -\mu \tilde{f}[K \cos(\tilde{t} + \vartheta), -K \sin(\tilde{t} + \vartheta)] \sin(\tilde{t} + \vartheta) \\ \frac{d\vartheta}{d\tilde{t}} &= -\frac{\mu}{K} \tilde{f}[K \cos(\tilde{t} + \vartheta), -K \sin(\tilde{t} + \vartheta)] \cos(\tilde{t} + \vartheta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Усредним правые части в (3.33) по явно входящему в них времени \tilde{t} . В результате получим так называемые укороченные уравнения:

$$\frac{dK}{d\tilde{t}} = \mu\Phi(K), \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\tilde{t}} = \mu\Psi(K), \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}[K \cos u, -K \sin u] \sin u du, \\ \Psi(K) &= -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} \tilde{f}[K \cos u, -K \sin u] \cos u du, \quad u = \tilde{t} + \mathcal{G} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Подставляя в (3.35) $\tilde{f}(x, y)$ из (3.32) с учетом $x=K\cos u, y=-K\sin u$ и беря интеграл, имеем:

$$\Phi(K) = \frac{K}{2} \left[A_1 - 1 - \frac{K^2}{4} (A_2 + 3A_3) \right], \quad \Psi(K) = 0.$$

Таким образом, уравнения (3.34) принимают вид:

$$\frac{dK}{d\tilde{t}} = \mu \frac{K}{2} \left[A_1 - 1 - \frac{K^2}{4} (A_2 + 3A_3) \right], \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\tilde{t}} = 0 \quad (3.36)$$

Для интегрирования первого уравнения из пары (3.36) сделаем подстановку $K^2=h, 2KdK=dh$ и, кроме того, для сокращения записи обозначим в этом уравнении $a=A_1-1, b=(A_2+3A_3)/4$. Имеем:

$$\frac{2dK}{K \left[A_1 - 1 - \frac{K^2}{4} (A_2 + 3A_3) \right]} \equiv \frac{dh}{h[a-bh]} = \mu d\tilde{t} \quad (3.37)$$

Интегрируя (3.37) получаем:

$$\ln \frac{h}{a-bh} = a\mu\tilde{t} + C_1, \quad C_1 = \text{const} \quad (3.38)$$

Разрешая (3.38) относительно h , находим:

$$h = \frac{Ca \exp(a\mu\tilde{t})}{1 + Cb \exp(a\mu\tilde{t})}, \quad C = \text{const} \quad (3.39)$$

Переход от h, a, b к исходным переменным $K, A_1-1, (A_2+3A_3)/4$ вместо (3.39) дает:

$$K = \sqrt{\frac{C(A_1-1) \exp[(A_1-1)\mu\tilde{t}]}{1 + C \frac{(A_2+3A_3)}{4} \exp[(A_1-1)\mu\tilde{t}]}} \quad (3.40)$$

Интегрированием второго уравнения пары (3.36) получаем $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$. В результате имеем решение уравнения (3.31):

$$x = \sqrt{\frac{C(A_1-1) \exp[(A_1-1)\mu\tilde{t}]}{1 + C \frac{(A_2+3A_3)}{4} \exp[(A_1-1)\mu\tilde{t}]}} \cos(\tilde{t} + \mathcal{G}_0) \quad (3.41)$$

При $\tilde{t} \rightarrow \infty$ (3.41) принимает вид:

$$x = \sqrt{\frac{4(A_1 - 1)}{(A_2 + 3A_3)}} \cos(\tilde{t} + \vartheta_0) \quad (3.42)$$

Решение (3.42) при $A_1 > 1$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$ соответствует предельному циклу. Частота колебаний в единицах безразмерного времени \tilde{t} равна 1; в единицах обычного времени $t = \tilde{t} / \omega = \omega$. Подставляя в (3.42) значения A_1 , A_2 и A_3 , выписанные в (3.32), и переходя от переменной x к безразмерному отклонению напряжения от стационарной точки u , получим выражение для амплитуды колебаний:

$$u_a = \Delta V_a / V_s = \sqrt{\frac{4\rho(\Delta - \Delta_t)}{3\eta[1 + (\omega\Theta)^2]}}, \quad (3.43)$$

где $\Delta_t = \vartheta / (\rho\Theta)$ – порог возбуждения автоколебаний. Из (3.43) видно, что амплитуда колебаний растет от порога возбуждения как квадратный корень из «надпороговости». Перепишем (3.43) несколько иначе, воспользовавшись еще раз определением Δ_t и тем, что $\omega\Theta = 16 \gg 1$. Имеем:

$$u_a = \frac{1}{\omega\Theta} \sqrt{\frac{4(\Delta - \Delta_t)}{3\Delta_t} \frac{\vartheta}{\eta\Theta}} \quad (3.44)$$

Теперь подставим в (3.44) амплитуду $u_a = 3 \times 10^{-3}$, при которой нелинейные эффекты малы, и найдем соответствующее такой амплитуде относительное значение «надпороговости» $(\Delta - \Delta_t) / \Delta_t$. Со значениями $\omega\Theta$, ϑ , η , Θ , перечисленными выше, $\Delta_t = 0.38$, $(\Delta - \Delta_t) / \Delta_t \approx 0.02$, $0 < \Delta - \Delta_t < 1$. Если выбрать значение «приложенного» напряжения Δ близкое к порогу возбуждения колебаний, то в численном счете получаются почти синусоидальные колебания с малой амплитудой. Отметим, что один вариант, соответствующий такому случаю, был рассчитан численно в [18]. В примере, показанном на рис. 28, $(\Delta - \Delta_t) / \Delta_t \approx 0.31$. В численном счете с ростом Δ колебания постепенно переходят от квазигармонических к релаксационным, что соответствует эксперименту. Закон (3.43) увеличения амплитуды колебаний с ростом Δ отвечает «мягкому» режиму возникновения автоколебаний.

Для значений параметров, принятых при расчете рис. 28, амплитуда колебаний, оцененная по (3.43), имеет порядок $u_a \sim 0.1$, что неплохо согласуется с результатом численного моделирования. Это согласие, однако, имеет характер случайного совпадения, поскольку формула (3.43), полученная методом усреднения, относится только к синусоидальным квазигармоническим колебаниям.

Из всех нелинейных членов, входящих в $\tilde{f}(x, y)$ (3.32) в квазигармоническом приближении оказались существенны только те, которые пропорциональны A_2 , A_3 . В

уравнении (3.26) им соответствуют слагаемые в квадратных скобках. Оба этих члена пропорциональны величине η и положительны. В рамках механической аналогии в формуле (3.26) выражение, заключенное в квадратные скобки, представляет собою нелинейный коэффициент трения. Автоколебания раскачиваются при $\Delta > \Delta_t = g/(\Theta\rho)$. Стабилизация автоколебаний происходит благодаря уменьшению раскачивающегося действия с ростом амплитуды u и скорости \dot{u} колебательного движения. В случае разряда раскачку обеспечивает отрицательное дифференциальное сопротивление (при «нулевых» токах), а нарастание тока ограничивается уменьшением отрицательного дифференциального сопротивления с ростом тока. Последнее обеспечивается положительностью коэффициента η в (3.22) для рассматриваемого сейчас случая «малых» pd .

Отметим следующее обстоятельство. Перепишем систему (3.32) в виде одного уравнения, преобразуем его и зачеркнем несущественные в квазигармоническом приближении члены:

$$x'' + x = \varepsilon x' [1 - B_1 x'^2 - B_2 x^2], \quad (3.45)$$

$\varepsilon = (\Delta - \Delta_t)/\Delta_t$ – малый параметр

$$B_1 = \frac{(\omega\Theta)^2}{3} B_2, \quad B_2 = \frac{3\eta\Theta}{g} \frac{\Delta_t}{\Delta - \Delta_t} u_0^2$$

Это уравнение имеет явное сходство с классическими уравнениями автоколебаний [77]: уравнением Ван-дер-Поля:

$$y'' + y = \varepsilon y' (1 - y^2), \quad (3.46)$$

где ε – малый положительный параметр и его близким аналогом:

$$y'' + y = \varepsilon y' (1 - y'^2) \quad (3.47)$$

По существу, амплитуда (3.43) является комбинацией решений уравнений (3.46) и (3.47), для которых, как известно, амплитуды установившихся автоколебаний равны 2 и $\sqrt{4/3}$, соответственно.

Таким образом, для реализации автоколебаний в системе с разрядом (без учета постоянного тока с катода) нужно, чтобы ВАХ разряда имела падающий характер, благодаря чему колебания раскачиваются, и ее наклон уменьшался с увеличением тока, благодаря чему колебания стабилизируются. Эти требования, в общем, должны выполняться также при больших pd и для случая перехода от таунсендовского разряда к тлеющему. Судя по всему, они выполнялись и в численных расчетах [28, 29].

Теперь рассмотрим систему (3.18)–(3.20) с ненулевым w_{eff} . В этом случае, при достаточно высоких w_{eff} , как в примере на рис. 29, результаты мало зависят от того, учитывается ли квадратичное слагаемое в ВАХ (3.22) или нет. Для простоты, мы его

опускаем и оперируем $v_s = -\rho w$ – линейной ВАХ. Но в данном случае точка равновесия, вокруг которой образуется предельный цикл, лежит на другой кривой, играющей роль ВАХ стационарного несамостоятельного разряда, которая вытекает из уравнения (3.19) при приравнивании его левой части нулю:

$$v_s(w) = -\rho w - w_{\text{eff}} / w \quad (3.48)$$

Точка равновесия $v_{\text{sp}}, w_{\text{sp}}$ соответствует пересечению «ВАХ» (3.48) и нагрузочной прямой $v_{\text{sp}} = \Delta - w_{\text{sp}}$:

$$v_{\text{sp}} = \frac{\Delta(1-2\rho) - \Delta\sqrt{1+4w_{\text{eff}}(1-\rho)/\Delta^2}}{2(1-\rho)} \approx -\frac{\rho\Delta}{1-\rho} - \frac{w_{\text{eff}}}{\Delta} \quad (3.49)$$

Вводим относительное отклонение напряжения на разряде от точки равновесия $z = (V - V_{\text{sp}})/V_T = v - v_{\text{sp}}$, повторяем операцию исключения безразмерного тока w из системы (3.18), (3.19) и получаем уравнение аналогичное (3.26):

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -K\dot{z} + \frac{z\dot{z}(1-2\rho)}{\mathcal{G}} + \frac{z^2(1-\rho)}{\Theta\mathcal{G}} - \frac{\dot{z}^2\Theta\rho}{\mathcal{G}}, \quad (3.50)$$

$$\omega^2 = \frac{\Delta}{\Theta\mathcal{G}} \left[1 + \frac{2w_{\text{eff}}(1-\rho)}{\Delta^2} \right], \quad (3.51)$$

$$K = \frac{1}{\Theta} + \frac{w_{\text{eff}}(1-2\rho)}{\Delta\mathcal{G}} - \frac{\rho\Delta}{\mathcal{G}} \quad (3.52)$$

Частота (3.51) близка к полученной в (3.28), т.к. $\rho, w_{\text{eff}} \ll 1$. Коэффициент трения K (3.52) содержит дополнительное слагаемое по сравнению с (3.28), пропорциональное w_{eff} , которое, несмотря на малость w_{eff} , существенно, в виду наличия в знаменателе величины \mathcal{G} , играющей роль малого параметра.

Фактически, если не считать ничтожного изменения в частоте, глядя на (3.50)–(3.52), можно сказать, что роль постоянной эмиссии сводится к увеличению коэффициента трения K . Из (3.52) ясно, почему существует верхний предел по затравочному току $w_{\text{eff max}}$, выше которого (при фиксированных остальных параметрах) пропадают автоколебательные решения. При $K > 0$ колебания затухают. Для рассчитанного на рис. 29 варианта с $\Delta = 0.5$, выражение (3.52) дает $w_{\text{eff max}} = 3.5 \times 10^{-4}$, что хорошо согласуется с результатами численного интегрирования уравнений. Подняв напряжение Δ при неизменном w_{eff} , вновь получаем необходимое для раскачки колебаний условие $K < 0$ и вновь приходим к автоколебаниям.

Нелинейное уравнение (3.50) отличается от (3.26) главным – отсутствием стабилизирующих членов, пропорциональных z^2 и \dot{z}^2 в коэффициенте трения K [z в (3.50) играет роль u в (3.26)]. Уравнение (3.50) не имеет ничего общего с уравнениями (3.46), (3.47),

аналогия с которыми позволила качественно интерпретировать причину стабилизации колебаний в отсутствие постоянной эмиссии. Вопрос о физической трактовке стабилизации колебаний в таком случае остается открытым.

Отметим, что частоты колебаний по (3.28) имеют порядок нескольких сотен кГц, что качественно согласуется с измерениями [3]. Оценка (3.28) для условий, соответствующих рис. 28, 29, дает $f=184$ кГц. Из рассчитанных «осциллограмм» видно, что $f=55$ и 133 кГц для рис. 28 и 29, соответственно. Отметим, что выражение для частоты колебаний, аналогичное (3.28), было найдено ранее в работах [18, 24].

3.8 Обсуждение результатов

Как показали численные расчеты, в таунсендовском разряде существует два возможных механизма стабилизации автоколебаний. Первый связан с уменьшением отрицательного дифференциального сопротивления с ростом тока, второй – с действием слабого постоянного тока с катода j_{ep} . Раскачку колебаний обеспечивает отрицательное дифференциальное сопротивление. Какому из механизмов стабилизации отдать предпочтение, в настоящее время сказать трудно. Этот вопрос должна решить более детальная теория, вычисляющая реальные значения j_{ep} . Можно лишь отметить, что «осциллограммы», рассчитанные с учетом j_{ep} , ближе к эксперименту.

Изложенная выше простая теория автоколебаний призвана дать ответ на вопросы качественного характера, от нее нельзя требовать полного согласия с экспериментом, которого не дает сегодня и численное моделирование, лишенное упрощений. Справедливость теории более или менее обоснована для промежутков с «малыми» pd , лежащими в области минимума кривой Пашена и не превышающими $(pd)_{cr} = \bar{e} (pd)_{min}$. При очень малых pd , значительно меньших $(pd)_{min}$, а также при «больших» $pd > (pd)_{cr}$, остается вопрос о применимости приближенного выражения для коэффициента воспроизводства электронов (3.12). Это ключевой момент, т.к. на (3.12) базируется основное уравнение для тока (3.16).

Заметим, что в [28] принципиальная важность отрицательного дифференциального сопротивления для раскачки колебаний подвергается сомнению. Основанием для него служит нестрогий характер двух уравнений, лежащих в основе приближенной теории. Последнее слово в этом вопросе, по-видимому, остается за экспериментом.

Глава 4. Численное моделирование тлеющего разряда в плоской двумерной и трехмерной геометриях.

Данная глава посвящена разработке численной модели стационарного столба тлеющего разряда, горящего в разрядном промежутке с идеально проводящими электродами. Разряд описывается общепринятой системой уравнений непрерывности для электронов, ионов в гидродинамическом приближении¹ и уравнением Пуассона. Для решения системы используется метод установления. Подробно изложен алгоритм численного счета. Приведены результаты расчетов столба разряда в плоском двумерном случае (при давлении $p=5$ Торр), а также в общем случае трехмерных декартовых координат (при $p=5$ и 100 Торр).

4.1 Постановка задачи.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из газоразрядного промежутка с плоскими электродами с межэлектродным расстоянием d , подключенного к источнику постоянного напряжения V_0 через сопротивление R . Начало декартовой системы координат поместим на катоде, оси x, y, z направим так, как показано на рис. 33.

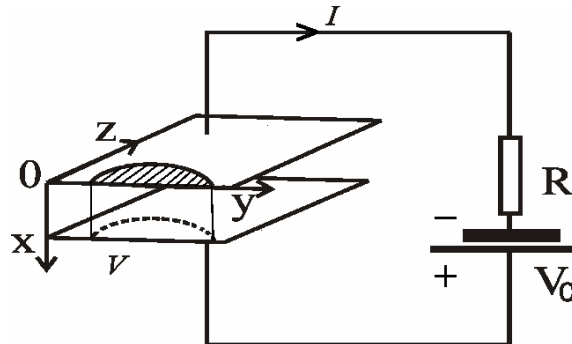


Рис. 33. Схема разрядной области.

Разряд будем описывать общепринятой системой уравнений непрерывности для электронной и ионной жидкости, и уравнением Пуассона для электрического потенциала φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(\Gamma_e) &= \alpha(E)|\Gamma_e| - \beta n_e n_{\text{ion}}, & \Gamma_e &= -n_e \mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \\ \frac{\partial n_{\text{ion}}}{\partial t} + \text{div}(\Gamma_{\text{ion}}) &= \alpha(E)|\Gamma_e| - \beta n_e n_{\text{ion}}, & \Gamma_{\text{ion}} &= n_{\text{ion}} \mu_{\text{ion}} \mathbf{E} - D_{\text{ion}} \nabla n_{\text{ion}}, & E &= |\mathbf{E}| \\ \Delta \varphi &= -4\pi e(n_{\text{ion}} - n_e) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где n , μ , D , Γ — плотность, подвижность, коэффициент диффузии, плотность потока (индексы опускаем); e — заряд электрона; \mathbf{E} — электрическое поле, $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$; $\alpha(E)$ —

¹ В модели игнорируются нелокальные эффекты. Поэтому в структуре разряда отсутствуют области отрицательного свечения и фарадеева темного пространства.

таунсендовский ионизационный коэффициент; β – коэффициент электрон-ионной рекомбинации.

Граничные условия к (4.1) таковы. На катоде, $x=0$, $\Gamma_{ex} = \gamma\Gamma_{ionx}$, $\partial n_{ion} / \partial x = 0$, $\varphi=0$; на аноде, $x=d$, $\Gamma_{ex}^- = 0$, $n_{ion}=0$, $\varphi=V$, где Γ_{ex} , Γ_{ionx} – компоненты потоков электронов и ионов вдоль оси x , γ – эффективный коэффициент эмиссии электронов с катода ионами^{*}; Γ_{ex}^- – односторонний поток электронов в отрицательном направлении оси x , V – напряжение на электродах. На боковых стенках разрядной камеры ставим условия симметрии:

$$\begin{aligned} \partial n_{e,ion} / \partial z \Big|_{z=0} = \partial n_{e,ion} / \partial z \Big|_{z=z_{max}} = \partial n_{e,ion} / \partial y \Big|_{y=0} = \partial n_{e,ion} / \partial y \Big|_{y=y_{max}} = 0 \\ \partial \varphi / \partial z \Big|_{z=0} = \partial \varphi / \partial z \Big|_{z=z_{max}} = \partial \varphi / \partial y \Big|_{y=0} = \partial \varphi / \partial y \Big|_{y=y_{max}} = 0 \end{aligned}$$

Пусть v_e – скорость электронов, ϑ – угол между направлением скорости и осью x , f – функция распределения электронов, $d\mathbf{v} = 2\pi v_e^2 dv_e \sin \vartheta d\vartheta$. Для нахождения Γ_{ex}^- интегрируем $\Gamma_{ex} = \int v_e \cos \vartheta f d\mathbf{v}$ с f в приближении слабой анизотропии [8], по соответствующей полусфере и получаем [43]:

$$\Gamma_{ex}^- = \frac{n_e \bar{v}_e}{4} - \frac{1}{2} \Gamma_{ex}, \quad \Gamma_{ex} = -n_e \mu_e E_x - D_e \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad E_x < 0$$

\bar{v}_e – средняя (по спектру) скорость электронов. Заметим, что подобным способом получается выражение для одностороннего потока электронов в положительном направлении оси x , $\Gamma_{ex}^+ = \frac{n_e \bar{v}_e}{4} + \frac{1}{2} \Gamma_{ex}$, а полный поток электронов $\Gamma_{ex} = \Gamma_{ex}^+ - \Gamma_{ex}^-$, как и должно быть. Заметим также, что поставленное нами условие для электронов на аноде $\Gamma_{ex}^- = 0$ подразумевает тот физический факт, что анод электроны не отражает. Последнее допущение не обязательно – можно ввести коэффициент отражения $r < 1$ и написать граничное условие в виде: $\Gamma_{ex}^- = r \Gamma_{ex}^+$.

При пренебрежении продольной диффузией частиц уравнение непрерывности становится уравнением первого порядка по пространственной переменной. В этом случае достаточно задать граничное условие только на одном из электродов. Ниже в большинстве случаев мы будем пренебрегать ионной диффузией; в этом случае граничное условие для ионов на катоде ставить не нужно.

Систему (4.1) дополняем нестационарным уравнением внешней цепи:

$$\frac{dQ_a}{dt} = \frac{V_0 - V}{R} - I, \quad Q_a = \int \sigma_{sur} dS \quad (4.2)$$

где Q_a , σ_{sur} – полный и локальный поверхностный заряды на аноде, S – площадь электродов, I – ток проводимости, втекающий из разряда в какой-нибудь из электродов.

^{*} Индекс «eff» при γ опускаем.

Стационарное решение системы уравнений (4.1), (4.2) находится методом установления. Численное интегрирование проводится в безразмерных переменных. В качестве единиц измерения выбираются следующие масштабы: масштабом длины служит $x_0=d$, потенциала – V_0 , поля – $E_0=V_0/x_0$, скорости – $v_0=\mu_e E_0$, времени – $t_0=x_0/v_0$; масштаб плотности частиц обозначаем n_0 .

При переходе к безразмерным переменным все уравнения системы (4.1) сохраняют прежний вид. При этом физические величины α и β следует заменить безразмерными $\tilde{\alpha}=\alpha x_0$, $\tilde{\beta}=\beta n_0 t_0$; в уравнении Пуассона 4пе перейдет в $\kappa_1 \equiv 1.81 \cdot 10^{-6} \cdot n_0 x_0 / E_0$. Безразмерные потоки электронов и ионов: $\tilde{\Gamma}_e = -\tilde{n}_e \tilde{\mu}_e \tilde{E} - \tilde{D}_e \nabla \tilde{n}_e$, $\tilde{n}_e = n_e / n_0$, $\tilde{\mu}_e = 1$, $\tilde{E} = E / E_0$, $\tilde{D}_e = D_e / (\mu_e V_0)$; $\tilde{\Gamma}_{ion} = \tilde{n}_{ion} \tilde{\mu}_{ion} \tilde{E} - \tilde{D}_{ion} \nabla \tilde{n}_{ion}$, $\tilde{n}_{ion} = n_{ion} / n_0$, $\tilde{\mu}_{ion} = \mu_{ion} / \mu_e$, $\tilde{D}_{ion} = D_{ion} / (\mu_e V_0)$. Уравнение (4.2) в безразмерных переменных сохраняет прежний вид:

$$\frac{d\tilde{Q}_a}{d\tilde{t}} = \frac{\tilde{V}_0 - \tilde{V}}{\tilde{R}} - \tilde{I}, \quad \tilde{Q}_a = \int \tilde{\sigma}_{sur} d\tilde{S}, \quad (4.3)$$

где $\tilde{I} = I / I_0$, $I_0 = e n_0 v_0 x_0^2$, $\tilde{Q}_a = Q_a / Q_0$, $Q_0 = I_0 t_0$, $\tilde{\sigma}_{sur} = \sigma_{sur} / \sigma_0$, $\sigma_0 = Q_0 / x_0^2$, $\tilde{V}_0 = 1$, $\tilde{V} = V / V_0$, $\tilde{R} = R / R_0$, $R_0 = V_0 / I_0$. В последующем изложении, для сокращения записи, волны у безразмерных величин опускаем.

4.2 Конечно-разностные аппроксимации уравнений.

В области $\{0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq y_{max}, 0 \leq z \leq z_{max}\}$ вводим ортогональную сетку, $\{x_i, y_j \text{ и } z_k, i=1, NI; j=1, NJ; k=1, NK\}$. Вдоль оси x узлы сетки распределены неравномерно, со сгущением вблизи электродов, которое проводилось с помощью функции $tg(x)$. Вдоль координат y и z разностная сетка задана равномерной. Помимо целых узлов сетки, в которых вычисляются плотности частиц и потенциал, введем «половинные» точки: $\{x_{i+1/2}=0.5(x_i+x_{i+1}), i=1, NI-1; y_{j+1/2}, z_{k+1/2}$ вычисляются по аналогии с $x_{i+1/2}\}$. «Половинные» точки нужны для нахождения потоков частиц и поля.

Рассмотрим первые два уравнения системы (4.1). Для составления их разностной аппроксимации воспользуемся так называемым интегро-интерполяционным методом (см. [47] и ссылки). Помножим рассматриваемые уравнения на $dt dx dy dz$ и проинтегрируем в пределах от 0 до τ ; $x_{i-1/2}, x_{i+1/2}; y_{j-1/2}, y_{j+1/2}; z_{k-1/2}, z_{k+1/2}$, где τ – шаг по времени. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{n_{i,j,k}^{p+1} - n_{i,j,k}^p}{\tau} + \frac{\Gamma_{i+1/2,j,k}^{p+1} - \Gamma_{i-1/2,j,k}^{p+1}}{\Delta x_0} + \frac{\Gamma_{i,j+1/2,k}^{p+1} - \Gamma_{i,j-1/2,k}^{p+1}}{\Delta y_0} + \frac{\Gamma_{i,j,k+1/2}^{p+1} - \Gamma_{i,j,k-1/2}^{p+1}}{\Delta z_0} = \\ & = \alpha(E_{i,j,k}^p) \left| \Gamma_{e,i,j,k}^p \right| - \beta n_{e,i,j,k}^p n_{ion,i,j,k}^p, \quad i=2, NI-1; j=2, NJ-1; k=2, NK-1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

При выводе (4.4), интеграл от члена с $\alpha(E)$, экспоненциально зависящего от поля E , написан приближенно в виде: $\int \alpha(E) |\Gamma_e| dx dy dz dt \approx \alpha(E_{ij,k}^p) |\Gamma_e|_{ij,k}^p \tau \Delta x_{0i} \Delta y_0 \Delta z_0$, где

$$\Delta x_{0i} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \Delta y_0 = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}, \Delta z_0 = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad E_{ij,k}^p = \sqrt{(E_{xi,j,k}^p)^2 + (E_{yi,j,k}^p)^2 + (E_{zi,j,k}^p)^2},$$

$$E_{xi,j,k}^p = \frac{1}{2} (E_{xi+1/2,j,k}^p + E_{xi-1/2,j,k}^p) \quad \text{и т.д.} \quad \text{Значения } |\Gamma_e^p|_{ij,k} \text{ находятся по}$$

$\Gamma_{ei\pm 1/2,j,k}^p, \Gamma_{ei,j\pm 1/2,k}^p, \Gamma_{ei,j,k\pm 1/2}^p$ аналогично тому, как это сделано для поля.

Выпишем потоки частиц, входящие в (4.4), в явном виде для электронов и ионов. Начнем с ионов, диффузию которых в трехмерных расчетах не учитываем. Пишем потоки в соответствии с требованиями устойчивости конечно-разностной схемы для уравнения (4.4) [47, 83]. Например, для $\Gamma_{ion i+1/2,j,k}^{p+1}$ имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ion i+1/2,j,k}^{p+1} &= b_{i+1/2,j,k}^+ n_{ion i,j,k}^{p+1} + b_{i+1/2,j,k}^- n_{ion i+1,j,k}^{p+1}, \\ b_{i+1/2,j,k}^+ &= \frac{1}{2} (b_{i+1/2,j,k} + |b_{i+1/2,j,k}|), \quad b_{i+1/2,j,k}^- = \frac{1}{2} (b_{i+1/2,j,k} - |b_{i+1/2,j,k}|), \\ b_{i+1/2,j,k} &= \mu_{ion} E_{i+1/2,j,k}^{p+1}, \quad i = 1, NI - 1; j = 1, NJ; k = 1, NK \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выражения для потоков $\Gamma_{ion i-1/2,j,k}^{p+1}, \Gamma_{ion i,j\pm 1/2,k}^{p+1}$ и $\Gamma_{ion i,j,k\pm 1/2}^{p+1}$ строятся аналогично (4.5).

Переходим к электронам. В основу аппроксимации потоков электронов положим разностную схему [84]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ei+1/2,j,k}^{p+1} &= -\frac{D_e}{x_{i+1} - x_i} (f_1(u_{i+1/2,j,k}) n_{ei+1,j,k}^{p+1} - f_2(u_{i+1/2,j,k}) n_{ei,j,k}^{p+1}), \\ u_{i+1/2,j,k} &= -\frac{\mu_e}{D_e} E_{i+1/2,j,k}^{p+1} (x_{i+1} - x_i), \quad i = 1, NI - 1; j = 1, NJ; k = 1, NK; \\ f_1(u) &= \begin{cases} \frac{u}{e^u - 1}, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}, \quad f_2(u) = \begin{cases} \frac{ue^u}{e^u - 1}, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражения для $\Gamma_{ei-1/2,j,k}^{p+1}, \Gamma_{ei,j\pm 1/2,k}^{p+1}, \Gamma_{ei,j,k\pm 1/2}^{p+1}$ легко находятся из (4.6).

Подставим в обобщенное уравнение (4.4) вместо потоков частиц ионные потоки типа (4.5) и, затем, электронные типа (4.6). В обоих случаях имеем семиточечное уравнение вида:

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} n_{i-1,j,k}^{p+1} + B_{i,j,k} n_{i,j,k}^{p+1} + C_{i,j,k} n_{i+1,j,k}^{p+1} + D_{i,j,k} n_{i,j-1,k}^{p+1} + E_{i,j,k} n_{i,j+1,k}^{p+1} + \\ G_{i,j,k} n_{i,j,k-1}^{p+1} + H_{i,j,k} n_{i,j,k+1}^{p+1} = Q_{i,j,k}, \quad i = 2, NI - 1; j = 2, NJ - 1; k = 2, NK - 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если в (4.7) под плотностью зарядов понимать плотность ионов, то коэффициенты (4.7) равны:

$$\begin{aligned}
A_{i,j,k} &= -\frac{1}{\Delta x_{0i}} b_{i-1/2,j,k}^+ \tau; & C_{i,j,k} &= \frac{1}{\Delta x_{0i}} b_{i+1/2,j,k}^- \tau; & D_{i,j,k} &= -\frac{1}{\Delta y_0} a_{i,j-1/2,k}^+ \tau \\
E_{i,j,k} &= \frac{1}{\Delta y_0} a_{i,j+1/2,k}^- \tau; & G_{i,j,k} &= -\frac{1}{\Delta z_0} c_{i,j,k-1/2}^+ \tau; & H_{i,j,k} &= \frac{1}{\Delta z_0} c_{i,j,k}^- \tau \\
B_{i,j,k} &= 1 + \frac{1}{\Delta x_{0i}} (b_{i+1/2,j,k}^+ - b_{i-1/2,j,k}^-) \tau + \frac{1}{\Delta y_0} (a_{i,j+1/2,k}^+ - a_{i,j-1/2,k}^-) \tau + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta z_0} (c_{i,j,k+1/2}^+ - c_{i,j,k-1/2}^-) \tau \\
Q_{i,j,k} &= n_{\text{ion},i,j,k}^p + S_{i,j,k}^p \tau, \quad S_{i,j,k}^p = \alpha(E_{i,j,k}^p) \left| \Gamma_{e,i,j,k}^p \right| - \beta n_{e,i,j,k}^p n_{\text{ion},i,j,k}^p,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\Delta x_{0i} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, величины $b_{i\pm 1/2,j,k}^\pm$ определены в (4.5); значения $a_{i,j\pm 1/2,k}^\pm$, $c_{i,j,k\pm 1/2}^\pm$ вычисляются по $a_{i,j\pm 1/2,k} = \mu_{\text{ion}} E_{i,j\pm 1/2,k}^{p+1}$, $c_{i,j,k\pm 1/2} = \mu_{\text{ion}} E_{i,j,k\pm 1/2}^{p+1}$ по аналогии с $b_{i\pm 1/2,j,k}^\pm$, см. (4.5). В электронном уравнении вида (4.7) для коэффициентов получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
A_{i,j,k} &= -\frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{x_i - x_{i-1}} f_2(u_{i-1/2,j,k}) \tau; & C_{i,j,k} &= -\frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{x_{i+1} - x_i} f_1(u_{i+1/2,j,k}) \tau \\
D_{i,j,k} &= -\frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} f_2(u_{i,j-1/2,k}) \tau; & E_{i,j,k} &= -\frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} f_1(u_{i,j+1/2,k}) \tau; \\
G_{i,j,k} &= -\frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} f_2(u_{i,j,k-1/2}) \tau; & H_{i,j,k} &= -\frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} f_1(u_{i,j,k+1/2}) \tau; \\
B_{i,j,k} &= 1 + \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{x_{i+1} - x_i} f_2(u_{i+1/2,j,k}) \tau + \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{x_i - x_{i-1}} f_1(u_{i-1/2,j,k}) \tau + \frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} f_2(u_{i,j+1/2,k}) \tau + \\
&\quad + \frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} f_1(u_{i,j-1/2,k}) \tau + \frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} f_2(u_{i,j,k+1/2}) \tau + \frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} f_1(u_{i,j,k-1/2}) \tau; \\
Q_{i,j,k}^p &= n_{e,i,j,k}^p + S_{i,j,k}^p \tau, \quad S_{i,j,k}^p = \alpha(E_{i,j,k}^p) \left| \Gamma_{e,i,j,k}^p \right| - \beta n_{e,i,j,k}^p n_{\text{ion},i,j,k}^p,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где $u_{i+1/2,j,k}$ определено в (4.6); выражения для $u_{i-1/2,j,k}$, $u_{i,j\pm 1/2,k}$, $u_{i,j,k\pm 1/2}$ с точностью до замены индексов повторяют (4.6). Заметим, что коэффициенты $A_{i,j,k}$, $B_{i,j,k}$, $C_{i,j,k}$, $D_{i,j,k}$, $E_{i,j,k}$, $G_{i,j,k}$, $H_{i,j,k}$ (4.8), (4.9), входящие в (4.7), вычисляются в поле E^{p+1} . Другими словами, при решении уравнений движения электронов и ионов на $p+1$ -слое используется уже найденное распределение потенциала φ^{p+1} . Именно с нахождения φ^{p+1} начинается поиск решения системы (4.1) на каждом шаге по времени.

Найдем разностную аппроксимацию уравнения для потенциала. В соответствии с идеей, на которой базируется построение полунявной схемы [79, 80, 81, 82], потенциал электрического поля отыскивается не путем решения уравнения Пуассона, а из закона

сохранения полного тока. Этот закон, записанный в дифференциальной форме, в безразмерных переменных имеет вид:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + \text{div}(\kappa_1 (\Gamma_{\text{ion}} - \Gamma_e)) = 0 \quad (4.10)$$

Воспользовавшись интегро-интерполяционным методом, из (4.10) получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j,k} \varphi^{p+1} = & \kappa_1 (n_{ei,j,k}^p - n_{ion,i,j,k}^p) + \\ & \kappa_1 \tau \frac{(\Gamma_{ion,i+1/2,j,k}^{p+1} - \Gamma_{ion,i-1/2,j,k}^{p+1}) - (\Gamma_{ei+1/2,j,k}^{p+1} - \Gamma_{ei-1/2,j,k}^{p+1})}{\Delta x_{0i}} + \\ & \kappa_1 \tau \frac{(\Gamma_{ion,i,j+1/2,k}^{p+1} - \Gamma_{ion,i,j-1/2,k}^{p+1}) - (\Gamma_{ei,j+1/2,k}^{p+1} - \Gamma_{ei,j-1/2,k}^{p+1})}{\Delta y_0} + \\ & \kappa_1 \tau \frac{(\Gamma_{ion,i,j,k+1/2}^{p+1} - \Gamma_{ion,i,j,k-1/2}^{p+1}) - (\Gamma_{ei,j,k+1/2}^{p+1} - \Gamma_{ei,j,k-1/2}^{p+1})}{\Delta z_0}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$i = 2, NI - 1; j = 2, NJ - 1; k = 2, NK - 1,$$

где $\Delta_{i,j,k} \varphi$ разностный оператор Лапласа. В (4.11) учтено $\Delta \varphi^p = \kappa_1 (n_e^p - n_{\text{ion}}^p)$. Для потоков электронов и ионов, стоящих в правой стороне равенства (4.11), используем разностные выражения вида (4.6) и (4.5). Будем считать, что эти потоки являются функциями плотностей частиц на предыдущем временном слое n^p и искомого электрического поля E^{p+1} [79, 80, 82]. Перенесем все члены с E^{p+1} в левую сторону (4.11). Для ионов, потоки которых линейны по полю, все сводится к простой перегруппировке членов. Для электронов, потоки которых зависят от E^{p+1} экспоненциально, предварительно линеаризуем Γ^{p+1} по E^{p+1} . В результате, получаем семиточечное разностное уравнение для потенциала:

$$\begin{aligned} & A_{i,j,k} \varphi_{i-1,j,k}^{p+1} + B_{i,j,k} \varphi_{i,j,k}^{p+1} + C_{i,j,k} \varphi_{i+1,j,k}^{p+1} + D_{i,j,k} \varphi_{i,j-1,k}^{p+1} + E_{i,j,k} \varphi_{i,j+1,k}^{p+1} + \\ & + G_{i,j,k} \varphi_{i,j,k-1}^{p+1} + H_{i,j,k} \varphi_{i,j,k+1}^{p+1} = Q_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ниже приведены выражения для коэффициентов (4.12):

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} = & \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i-1/2,j,k}); \quad C_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i+1/2,j,k}); \\ D_{i,j,k} = & \frac{1}{(\Delta y_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j-1/2,k}); \quad E_{i,j,k} = \frac{1}{(\Delta y_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j+1/2,k}); \\ G_{i,j,k} = & \frac{1}{(\Delta z_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j,k-1/2}); \quad H_{i,j,k} = \frac{1}{(\Delta z_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j,k+1/2}); \\ B_{i,j,k} = & -\frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{1}{x_{i+1} - x_i} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i+1/2,j,k}) - \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i-1/2,j,k}) - \frac{1}{(\Delta y_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j+1/2,k}) - \\ & - \frac{1}{(\Delta y_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j-1/2,k}) - \frac{1}{(\Delta z_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j,k+1/2}) - \frac{1}{(\Delta z_0)^2} (1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i,j,k-1/2}) \end{aligned} \quad ,$$

$i = 2, NI - 1; j = 2, NJ - 1; k = 2, NK - 1$, где $\sigma_{i\pm 1/2,j,k} = \sigma_{\text{ion}i\pm 1/2,j,k} - \sigma_{\text{ei}\pm 1/2,j,k}$;

$$\sigma_{\text{ion}i+1/2,j,k} = \begin{cases} \mu_{\text{ion}} n_{\text{ion}i,j,k}^p, & E_{i+1/2,j,k}^p > 0 \\ \mu_{\text{ion}} n_{\text{ion}i+1,j,k}^p, & E_{i+1/2,j,k}^p < 0 \end{cases};$$

$$\sigma_{\text{ei}i+1/2,j,k} = -\mu_e [n_{\text{ei}i,j,k}^p g_2(u_{i+1/2,j,k}) - n_{\text{ei}i+1,j,k}^p g_1(u_{i+1/2,j,k})]; g_1(u) = \begin{cases} \partial f_1 / \partial u = \frac{(1-u)e^u - 1}{(e^u - 1)^2}, & u \neq 0 \\ -0.5, & u = 0 \end{cases};$$

$$g_2(u) = \begin{cases} \partial f_2 / \partial u = e^u \frac{e^u - 1 - u}{(e^u - 1)^2}, & u \neq 0 \\ 0.5, & u = 0 \end{cases},$$

$$u_{i+1/2,j,k} = -\frac{\mu_e}{D_e} E_{i+1/2,j,k}^p (x_{i+1} - x_i)$$

(выражения для $\sigma_{i,j\pm 1/2,k}$, $\sigma_{i,j,k\pm 1/2}$, получаются из $\sigma_{i\pm 1/2,j,k}$ путем замены соответствующих индексов).

$$\begin{aligned} Q_{i,j,k} = & \kappa_1 (n_{\text{ei}i,j,k}^p - n_{\text{ion}i,j,k}^p) + \kappa_1 \tau \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{(x_{i+1} - x_i)} h_e(u_{i+1/2,j,k}) (n_{\text{ei}i+1,j,k}^p - n_{\text{ei}i,j,k}^p) - \\ & - \kappa_1 \tau \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{D_e}{(x_i - x_{i-1})} h_e(u_{i-1/2,j,k}) (n_{\text{ei}i,j,k}^p - n_{\text{ei}i-1,j,k}^p) + \\ & + \kappa_1 \tau \frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} [h_e(u_{i,j+1/2,k}) (n_{\text{ei},j+1,k}^p - n_{\text{ei},j,k}^p) - h_e(u_{i,j-1/2,k}) (n_{\text{ei},j,k}^p - n_{\text{ei},j-1,k}^p)] + \\ & + \kappa_1 \tau \frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} [h_e(u_{i,j,k+1/2}) (n_{\text{ei},j,k+1}^p - n_{\text{ei},j,k}^p) - h_e(u_{i,j,k-1/2}) (n_{\text{ei},j,k}^p - n_{\text{ei},j,k-1}^p)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$i = 2, NI - 1; j = 2, NJ - 1; k = 2, NK - 1, \text{ где } h_e(u) = \begin{cases} \frac{u^2 e^u}{(e^u - 1)^2}, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}.$$

Заметим, что коэффициенты (4.13), (4.14) вычисляются с помощью известных, взятых с p -того временного слоя, величин.

4.3 Аппроксимация граничных условий.

Разностные выражения для граничных условий, будем писать в форме удобной при составлении программы. При этом для потоков электронов и ионов Γ_{ex} и $\Gamma_{\text{ion}x}$ в ячейках, примыкающих к катоду, пользуемся формулами (4.6) и (4.5).

Для электронов на катодe имеем:

$$n_{\text{el},j,k} = \varphi_{a,j,k} n_{\text{e}2,j,k} + d_{a,j,k}, \text{ где}$$

$$\varphi_{a,j,k} = f_1(u_{3/2,j,k}) / f_2(u_{3/2,j,k}), \quad d_{a,j,k} = -\frac{\gamma \Gamma_{\text{ion}3/2,j,k}^p (x_2 - x_1)}{D_{\text{el}} f_2(u_{3/2,j,k})}$$

$$u_{3/2,j,k} = -\frac{\mu_e}{D_e} E_{3/2,j,k}^{p+1} (x_2 - x_1), \quad j = 1, NJ; \quad k = 1, NK$$

Условие для электронов на аноде, $\Gamma_e^- = 0$, сводится к $\Gamma_e = n_e \bar{v}_e / 2$, откуда сразу находим n_e , пользуясь потоком, известным с предыдущего слоя:

$$n_{eNI,j,k} = \varphi_g n_{eNI-1,j,k} + d_{g,j,k}, \quad \text{где}$$

$$\varphi_g = 0, \quad d_{g,j,k} = \frac{2\Gamma_{eNI-1/2,j,k}^p}{\bar{v}_e}, \quad j = 1, NJ; \quad k = 1, NK$$

Плотность ионов на аноде положена равной нулю, поэтому пишем:

$$n_{ionNI,j,k} = \varphi_g n_{ionNI-1,j,k} + d_g, \quad \text{где}$$

$$\varphi_g = d_g = 0, \quad j = 1, NJ; \quad k = 1, NK$$

При пренебрежении продольной ионной диффузией ($D_{ion\parallel}=0$) граничное условие для ионов на катоде ставить не нужно.

Численный алгоритм решения разностного уравнения формулируется в особенно простой форме, если задано значение искомой функции на границе области, либо есть связь между ее значениями на границе и в соседней, внутренней точке области. При $D_{ion\parallel}=0$ на плотность ионов у катода не накладывается никаких условий. Для удобства вычислений найдем соотношение между плотностью ионов на катоде и вблизи него прямо из решаемых уравнений [44, 47]. Положим n_e в уравнении движения электронов квазистационарной, $\partial n_e / \partial t = 0$. Затем вычтем из него ионное уравнение. В полученном результате зачеркнем члены с производными по y, z и учтем, что на катоде $\Gamma_{ex} = \gamma \Gamma_{ionx}$. В итоге получаем:

$$\frac{\partial n_{ion}}{\partial t} + (1 + \gamma) \frac{\partial \Gamma_{ionx}}{\partial x} = 0, \quad (4.15)$$

После преобразования (4.15) к конечным разностям имеем:

$$n_{ion1,j,k} = \varphi_{aj,k} n_{ion2,j,k} + d_{aj,k}, \quad \text{где} \quad (4.16)$$

$$\varphi_{aj,k} = \frac{M_{j,k}}{(1 + M_{j,k})}, \quad d_{aj,k} = \frac{n_{ion1,j,k}^p}{(1 + M_{j,k})},$$

$$M_{j,k} = (1 + \gamma) \mu_{ion} \tau \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} (\varphi_{2,j,k}^{p+1} - \varphi_{1,j,k}^{p+1}), \quad j = 1, NJ, \quad k = 1, NK$$

Формулы (4.16) используются в численном счете при решении уравнения для ионов. Подчеркнем, что (4.16) – прямое следствие решаемых уравнений, а не граничное условие. В основе последнего всегда лежат те или иные физические соображения.

Условия для потенциала на обоих электродах переписываются в виде:

$$\varphi_{1,j,k} = \varphi_a \varphi_{2,j,k} + d_a, \quad \varphi_{NI,j,k} = \varphi_g \varphi_{NI-1,j,k} + d_g, \quad \text{где}$$

$$\varphi_a = d_a = \varphi_g = 0, \quad d_g = V, \quad j = 1, NJ, \quad k = 1, NK$$

Условия симметрии на боковых стенках разрядной камеры записываются в виде:

$$U_{i,j,1} = U_{i,j,2}, \quad U_{i,j,NK} = U_{i,j,NK-1}, \quad i = 1, NI, \quad j = 1, NJ;$$

$$U_{i,1,k} = U_{i,2,k}, \quad U_{i,NJ,k} = U_{i,NJ-1,k}, \quad i = 1, NI, \quad k = 1, NK,$$

где $U \equiv n_e, n_{ion}, \varphi$.

4.4 Метод решения конечно-разностных уравнений.

На каждом шаге по времени последовательно решаются уравнения для потенциала (4.12), (4.13), (4.14), электронов (4.7), (4.9) и ионов (4.7), (4.8). Точнее, для потенциала решается два уравнения типа (4.12), это связано с особенностями определения напряжения на электродах V , служащего граничным условием на аноде для уравнения (4.12). Вопрос об определении V будет подробно рассмотрен в следующем параграфе. Сейчас нас интересует только то, что все решаемые разностные уравнения имеют одинаковый вид (4.7), (4.12). Как мы видели в предыдущем параграфе, граничные условия к ним также записываются в одинаковой форме. Естественно поэтому решать все уравнения одним и тем же способом. Используется метод последовательной релаксации с прогонками по линиям вдоль оси x . Разработанный подход является обобщением на трехмерный случай двумерной методики [47]. Опишем основные этапы используемого алгоритма.

В области $\{0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq y_{\max}, 0 \leq z \leq z_{\max}\}$ необходимо определить функцию $w_{i,j,k}$, $i = 1, NI$; $j = 1, NJ$; $k = 1, NK$, удовлетворяющую уравнению:

$$A_{i,j,k} w_{i-1,j,k} + B_{i,j,k} w_{i,j,k} + C_{i,j,k} w_{i+1,j,k} + D_{i,j,k} w_{i,j-1,k} + E_{i,j,k} w_{i,j+1,k} + \\ + G_{i,j,k} w_{i,j,k-1} + H_{i,j,k} w_{i,j,k+1} = Q_{i,j,k}, \quad i = 2, NI-1; \quad j = 2, NJ-1; \quad k = 2, NK-1 \quad (4.17)$$

и граничным условиям:

$$w_{1,j,k} = \varphi_{a,j,k} w_{2,j,k} + d_{a,j,k}, \quad w_{NI,j,k} = \varphi_{g,j,k} w_{NI-1,j,k} + d_{g,j,k}, \quad j = 1, NJ; \quad k = 1, NK \quad (4.18)$$

$$w_{i,1,k} = w_{i,2,k}, \quad w_{i,NJ,k} = w_{i,NJ-1,k}, \quad i = 1, NI; \quad k = 1, NK \quad (4.19)$$

$$w_{i,j,1} = w_{i,j,2}, \quad w_{i,j,NK} = w_{i,j,NK-1}, \quad i = 1, NI; \quad j = 1, NJ \quad (4.20)$$

Решение (4.17), (4.18)–(4.20) проводится итерационным методом. На каждой итерации происходит уточнение $w_{i,j,k}$ по сравнению с заданным начальным приближением. Процесс решения заканчивается при выполнении критерия: $\max_{\substack{i=1,NI \\ j=1,NJ \\ k=1,NK}} |w_{i,j,k}^{S+1} - w_{i,j,k}^S| / |w_{i,j,k}^{S+1}| < 10^{-6}$, где s –

итерационный индекс.

Опишем кратко один итерационный шаг, который сводится к нахождению решения на $s+1$ итерации по известному решению на s -той итерации. При любых j, k сводим сложное семиточечное уравнение (4.17) к трехточечному:

$$A_{i,j,k} w_{i-1,j,k}^{S+1/2} + \tilde{B}_{i,j,k} w_{i,j,k}^{S+1/2} + C_{i,j,k} w_{i+1,j,k}^{S+1/2} = \tilde{Q}_{i,j,k}, \quad (4.21)$$

$$i=2, NI-1, j=2, NJ-1, k=2, NK-1$$

которое, с учетом граничных условий (4.18), решается методом прогонки. В уравнении (4.21) фигурирует вспомогательный индекс $s+1/2$ для того, чтобы отличать решение (4.21) от искомого $w_{i,j,k}^{S+1}$. Последнее находится с помощью $w_{i,j,k}^{S+1/2}$ по формуле:

$$w_{i,j,k}^{S+1} = \omega w_{i,j,k}^{S+1/2} + (1-\omega) w_{i,j,k}^S, \quad (4.22)$$

где $0 < \omega < 2$ – параметр.

Счет $w_{i,j,k}^{S+1}$ по (4.21), (4.22) ведется по линиям, $i=1, NI$, j и k фиксированы, в направлении возрастания индексов j и k . При этом индекс k меняется медленнее, чем j , т.е. сначала отыскивается решение на линиях для неизменного k при всех j . Затем индекс k увеличивается на единицу, и все повторяется. Выражения для коэффициентов \tilde{B} и \tilde{Q} уравнения (4.21) получаются из (4.17) с привлечением граничных условий на боковых стенках и/или с учетом уже найденных функций w^{S+1} . Ниже, в (4.23), для справок приведены формулы для коэффициентов \tilde{B} и \tilde{Q} в (4.21), использованные в расчетах, для всех возможных комбинациях индексов j и k . В каждой строке (4.23) выписаны значения и/или диапазон изменения j и k и соответствующие этим j и k выражения для \tilde{B} и \tilde{Q} . Индексы j и k , как и индекс i , при \tilde{B} , \tilde{Q} для сокращения записи опущены. Индексы при B, Q, D, E, H, G в точности совпадают с таковыми при \tilde{B}, \tilde{Q} .

$$\begin{aligned} j=3, NJ-2; k=2, \quad & \tilde{B} = B + G, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{ij-1,2}^{S+1} - Ew_{ij+1,2}^S - Hw_{ij,3}^S \\ j=NJ-1; k=2, \quad & \tilde{B} = B + E + G, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{i,NJ-2,2}^{S+1} - Hw_{i,NJ-1,3}^S \\ j=2; k=3, NK-2, \quad & \tilde{B} = B + D, \quad \tilde{Q} = Q - Ew_{i,3,k}^S - Gw_{i,2,k-1}^{S+1} - Hw_{i,2,k+1}^S \\ j=3, NJ-2; k=3, NK-2, \quad & \tilde{B} = B, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{ij-1,k}^{S+1} - Ew_{ij+1,k}^S - Gw_{ij,k-1}^{S+1} - Hw_{ij,k+1}^S \quad (4.23) \\ j=NJ-1; k=3, NK-2, \quad & \tilde{B} = B + E, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{i,NJ-2,k}^{S+1} - Gw_{i,NJ-1,k-1}^{S+1} - Hw_{i,NJ-1,k+1}^S \\ j=2; k=NK-1, \quad & \tilde{B} = B + H + D, \quad \tilde{Q} = Q - Ew_{i,3,NK-1}^S - Gw_{i,2,NK-2}^{S+1} \\ j=3, NJ-2; k=NK-1, \quad & \tilde{B} = B + H, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{ij-1,NK-1}^{S+1} - Ew_{ij+1,NK-1}^S - Gw_{ij,NK-2}^{S+1} \\ j=NJ-1; k=NK-1, \quad & \tilde{B} = B + H + E, \quad \tilde{Q} = Q - Dw_{i,NJ-2,NK-1}^{S+1} - Gw_{i,NJ-1,NK-2}^{S+1} \end{aligned}$$

При решении уравнений движения для электронов (4.7), (4.9) и ионов (4.7), (4.8) параметр ω задается равным $\omega=1$; при решении (4.12) – $\omega=1.5$.

Отметим, что поиск решения уравнений для потенциала требует проведения $s \sim 100$ итераций. Для электронного и ионного уравнений s на порядок, часто на два порядка, меньше. Заметим, что скорость сходимости метода релаксации чувствительна к значению параметра ω . В работе [85] (см. также [47]) указан способ отыскания оптимального значения этого параметра.

4.5 Метод определения напряжения на электродах и распределения потенциала в разрядной области.

Он основан на совместном решении уравнений цепи (4.3) и уравнения для потенциала (4.10), поэтому его можно применять также при разработке нестационарной модели разряда.

Неизвестное на $p+1$ -ом слое напряжение на электродах разряда V^{p+1} невозможно найти путем использования только одного уравнения внешней цепи (4.3). Чтобы это увидеть, преобразуем (4.3) к конечным разностям:

$$\frac{Q_a^{p+1} - Q_a^p}{\tau} = \frac{V_0 - V^p}{R} - I^p, \quad Q_a^{p+1} = \sum_{j,k} \sigma_{sur j,k}^{p+1} \Delta y_0 \Delta z_0, \quad (4.24)$$

где, как и повсюду, величины на p -том временном слое считаются известными, а на $p+1$ -ом – нет. Во втором выражении (4.24) локальный поверхностный заряд на проводящем аноде $\sigma_{sur j,k}^{p+1}$ пропорционален полю на аноде, которое имеет только продольную току, x -вую составляющую, $(V^{p+1} - \phi_{NI-1,j,k}^{p+1})/\Delta x$, $\Delta x = x_{NI} - x_{NI-1}$. Такому же полю пропорционален и полный заряд на аноде Q_a^{p+1} . Поэтому ясно, что нахождения V^{p+1} нужно, помимо прочего, знать распределение $\phi_{NI-1,j,k}^{p+1}$, $j=1, NJ$; $k=1, NK$, которое еще не вычислено. Распределение $\phi_{NI-1,j,k}^{p+1}$, в свою очередь, находится из уравнения для потенциала, в которое V^{p+1} входит в качестве граничного условия.

Отметим, что в [44, 47] совместное решение уравнения цепи (4.3) и уравнения для потенциала проводится итерационным методом. Для той же цели в настоящей работе применяется простой безытерационный способ, разработанный в [86]. Опишем основные моменты этого алгоритма.

Прежде всего, аккуратно вычислим связь локального поверхностного заряда на аноде $\sigma_{sur j,k}^{p+1}$ с полем у анода. Выберем произвольную точку на аноде x_{NI} , y_j , z_k и окружим ее прямоугольным параллелепипедом со сторонами $\Delta x = x_{NI+1/2} - x_{NI-1/2} \equiv x_{NI} - x_{NI-1}$, $\Delta y_0 = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$,

$\Delta z_0 = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$. На рис. 34 пунктиром показаны линии, по которым четыре боковые грани рассматриваемого параллелепипеда пересекаются с плоскостью (x,y) . Применим теорему Гаусса к объему $V = \Delta x \Delta y_0 \Delta z_0$. Учтем, что поле внутри проводящего анода отсутствует и составляющие E_y и E_z на анодной поверхности равны нулю. Получим:

$$E_{NI-1/2,j,k}^{p+1} = \kappa_1 \sigma_{sur,j,k}^{p+1} + \kappa_1 \Delta x / 2 \cdot (n_{eNI,j,k}^{p+1} - n_{ionNI,j,k}^{p+1}), \quad j=1,NJ; k=1,NK, \quad (4.25)$$

Выражение для разности концентраций электронов и ионов в (4.25) получаем с помощью электронного и ионного уравнений. В полученном результате учтем $n_{ionNI,j,k}=0$, что диктуется граничным условием для ионов на аноде. Имеем:

$$n_{eNI,j,k}^{p+1} - n_{ionNI,j,k}^{p+1} = n_{eNI,j,k}^p - \tau \text{div}(\Gamma_e - \Gamma_{ion}) \quad (4.26)$$

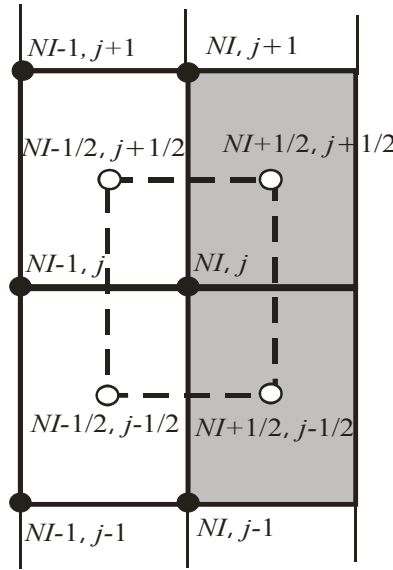


Рис. 34. Участок расчетной области вблизи анода в плоскости (x,y) . Проводящий анод затенен. Темные кружки – узлы разностной сетки.

Раскрываем дивергенцию, входящую в (4.26):

$$\begin{aligned} \text{div}(\Gamma_e - \Gamma_{ion}) = & \frac{\Gamma_{eNI+1/2,j,k} - \Gamma_{eNI-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{\Gamma_{eNI,j+1/2,k} - \Gamma_{eNI,j-1/2,k}}{\Delta y_0} + \\ & + \frac{\Gamma_{eNI,j,k+1/2} - \Gamma_{eNI,j,k-1/2}}{\Delta y_0} - \frac{\Gamma_{ionNI+1/2,j,k} - \Gamma_{ionNI-1/2,j,k}}{\Delta x} - \\ & - \frac{\Gamma_{ionNI,j+1/2,k} - \Gamma_{ionNI,j-1/2,k}}{\Delta y_0} - \frac{\Gamma_{ionNI,j,k+1/2} - \Gamma_{ionNI,j,k-1/2}}{\Delta z_0} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Упростим (4.27). Учтем, что в проводнике $\Gamma_{e,ionNI+1/2,j,k}=0$. Кроме того, замечаем, что поскольку касательные компоненты поля E_y, E_z на проводящей поверхности анода равны нулю, то электронный поток вдоль y и z на аноде является исключительно диффузионным. Для ионов, при $n_{ionNI,j,k}=0$, $\Gamma_{ionNI-1/2,j,k} = \Gamma_{ionNI,j\pm 1/2,k} = \Gamma_{ionNI,j,k\pm 1/2} = 0$. Вместо (4.27) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Gamma_e - \Gamma_{\text{ion}}) = & \frac{-\Gamma_{eNI-1/2,j,k}}{\Delta x} - \\ & - \frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} (n_{eNI,j+1,k}^p - 2n_{eNI,j,k}^p + n_{eNI,j-1,k}^p) - \frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} (n_{eNI,j,k+1}^p - 2n_{eNI,j,k}^p + n_{eNI,j,k-1}^p) \end{aligned} \quad (4.28)$$

От неизвестного поля $E_{NI-1/2,j,k}^{p+1}$ в (4.28) зависит только поток $\Gamma_{eNI-1/2,j,k}$, причем, при принятой разностной аппроксимации $\Gamma_{eNI-1/2,j,k}$, – экспоненциально. Для удобства вычислений линеаризуем $\Gamma_{eNI-1/2,j,k}$ по $E_{NI-1/2,j,k}^{p+1}$. Это дает:

$$\Gamma_{eNI-1/2,j,k} = \sigma_{eNI-1/2,j,k} E_{NI-1/2,j,k}^{p+1} - D_e h_e(u_{NI-1/2,j,k}) \frac{(n_{eNI,j,k}^p - n_{eNI-1,j,k}^p)}{(x_{NI} - x_{NI-1})} \quad (4.29)$$

где $\sigma_{eNI-1/2,j,k} = -\mu_e [n_{eNI-1,j,k}^p g_2(u_{NI-1/2,j,k}) - n_{eNI,j,k}^p g_1(u_{NI-1/2,j,k})]$,

$u_{NI-1/2,j,k} = -\frac{\mu_e}{D_e} E_{NI-1/2,j,k}^p (x_{NI} - x_{NI-1})$, функции $g=g_1(u)$, $g=g_2(u)$ определены после формулы (4.13), $h_e=h_e(u)$ определено после (4.14).

Подставим теперь (4.29) в (4.28). Полученное в результате выражение для дивергенции подставим в (4.26), а (4.26) – в (4.25). После несложных вычислений из (4.25) находим нужную связь $\sigma_{sur j,k}^{p+1}$ с полем на аноде. Приведем окончательное выражение для $\sigma_{sur j,k}^{p+1}$, в котором учтено, что $E_{NI-1/2,j,k}^{p+1} = -(V^{p+1} - \phi_{NI-1,j,k}^{p+1})/\Delta x$:

$$\sigma_{sur j,k}^{p+1} = -\frac{(1 - 0.5\kappa_1 \tau \sigma_{eNI-1/2,j,k})}{\kappa_1} \cdot \frac{(V^{p+1} - \phi_{NI-1,j,k}^{p+1})}{\Delta x} - \tilde{\rho}_{NI,j,k}^p \frac{\Delta x}{2}, \quad j=1,NJ, k=1,NK, \quad (4.30)$$

где:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{NI,j,k}^p = & \kappa_1 n_{eNI,j,k}^p - \kappa_1 \tau \frac{D_e}{(\Delta x)^2} h_e(u_{NI-1/2,j,k}) (n_{eNI,j,k}^p - n_{eNI-1,j,k}^p) + \\ & + \kappa_1 \tau \frac{D_e}{(\Delta y_0)^2} (n_{eNI,j+1,k}^p - 2n_{eNI,j,k}^p + n_{eNI,j-1,k}^p) + \kappa_1 \tau \frac{D_e}{(\Delta z_0)^2} (n_{eNI,j,k+1}^p - 2n_{eNI,j,k}^p + n_{eNI,j,k-1}^p) \end{aligned}$$

Связь (4.30) локального поверхностного заряда $\sigma_{sur j,k}^{p+1}$ с полем у анода получилась довольно громоздкой. Причина этого коренится в том, что мы, следуя [86], при применении теоремы Гаусса, в (4.25) сохранили член пропорциональный $(n_{eNI,j,k}^{p+1} - n_{ionNI,j,k}^{p+1})$. Он зависит от искомого поля $E_{NI-1/2,j,k}^{p+1}$.

Отметим, что если членом с $(n_{eNI,j,k}^{p+1} - n_{ionNI,j,k}^{p+1})$ в (4.25) пренебречь, то вместо (4.30) получится: $\sigma_{sur j,k}^{p+1} = -(V^{p+1} - \phi_{NI-1,j,k}^{p+1})/(\kappa_1 \Delta x)$. При этом выражение (4.36) для потенциала на

электродах V значительно упростится. Было бы интересно применить такое упрощенное выражение для расчета V .

Далее перепишем разностное уравнение для потенциала (4.12)–(4.14) в компактной форме:

$$\Lambda\varphi \equiv (\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z)\varphi = f, \quad (4.31)$$

где $f \equiv Q_{ij,k}$, $Q_{ij,k}$ определено в (4.14), Λ_x , Λ_y , Λ_z – разностные операторы вдоль осей x , y , z .

Для примера выпишем результат применения Λ_x к φ :

$$\Lambda_x \varphi = -\frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{(1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i-1/2,j,k})}{x_i - x_{i-1}} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) + \frac{1}{\Delta x_{0i}} \frac{(1 + \kappa_1 \tau \sigma_{i+1/2,j,k})}{x_{i+1} - x_i} (\varphi_{i+1} - \varphi_i). \quad \text{Выражения для}$$

$\Lambda_y \varphi$, $\Lambda_z \varphi$ повторяют $\Lambda_x \varphi$ с точностью до замены x на y и z и индексов. Граничные условия к (4.31): при $x=0$ (на катоде) $\varphi=0$, при $x=d$ (на аноде) $\varphi=V$ плюс условия симметрии на боковых стенках. Представим решение уравнения (4.31) в виде суммы двух решений ϕ_p и ϕ_L [86]:

$$\varphi = \phi_p + V \phi_L \quad (4.32)$$

Функция ϕ_p удовлетворяет уравнению:

$$\Lambda \phi_p = f \quad (4.33)$$

с граничными условиями: $\phi_p(x=0)=0$, $\phi_p(x=d)=0$, и условиями симметрии на боковых стенках.

Для ϕ_L имеем:

$$\Lambda \phi_L = 0, \quad (4.34)$$

с граничными условиями: $\phi_L(x=0)=0$, $\phi_L(x=d)=1$, и условиями симметрии на боковых стенках. Решение уравнений (4.33) и (4.34) можно найти непосредственно. Поэтому считаем, что функции $\phi_{p,i,j,k}^{p+1}$, $\phi_{L,i,j,k}^{p+1}$, $i=1,NI$; $j=1,NJ$; $k=1,NK$ известны. Замечаем, что из (4.32) следует:

$$\phi_{NI-1,j,k}^{p+1} = \phi_{p,NI-1,j,k}^{p+1} + V^{p+1} \phi_{L,NI-1,j,k}^{p+1}, \quad j=1,NJ, \quad k=1,NK, \quad (4.35)$$

Далее с помощью (4.35) исключаем неизвестную величину $\phi_{NI-1,j,k}^{p+1}$ из (4.30). Полученное в результате выражение для $\sigma_{\text{sur},j,k}^{p+1}$ подставляем в (4.24) и разрешаем первое из соотношений (4.24) относительно V^{p+1} . В результате выполнения простых, но длинных вычислений имеем выражение для V^{p+1} :

$$V^{p+1} = \frac{\left(\kappa_1 \frac{\Delta x}{2} I_1 - \frac{1}{\Delta x} \sum_{j,k} \chi_{NI-1/2,j,k} \phi_{p,NI-1,j,k} \Delta y_0 \Delta z_0 + \kappa_1 Q_a^p + \kappa_1 \frac{\tau V_0}{R} - \kappa_1 \tau I^p \right)}{\left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j,k} \chi_{NI-1/2,j,k} \phi_{L,NI-1,j,k} \Delta y_0 \Delta z_0 - \frac{1}{\Delta x} I_2 + \kappa_1 \frac{\tau}{R} \right)} \quad (4.36)$$

$$\text{где } I_1 = \sum_{j,k} \tilde{\rho}_{NI,j,k}^p \Delta y_0 \Delta z_0, \quad \chi_{NI-1/2,j,k} = 1 - 0.5 \kappa_1 \tau \sigma_{eNI-1/2,j,k}, \quad I_2 = \sum_{j,k} \chi_{NI-1/2,j,k} \Delta y_0 \Delta z_0.$$

Распределение потенциала во всей расчетной области находим с помощью $\phi_{Pi,j,k}^{p+1}$, $\phi_{Li,j,k}^{p+1}$ и V^{p+1} :

$$\phi_{i,j,k}^{p+1} = \phi_{Pi,j,k}^{p+1} + \phi_{Li,j,k}^{p+1} V^{p+1}, \quad i=1,NI, \quad j=1,NJ, \quad k=1,NK \quad (4.37)$$

Итак, сформулируем, как происходит расчет распределения потенциала. Сначала находим решение уравнений (4.33) $\phi_{Pi,j,k}^{p+1}$ и (4.34) $\phi_{Li,j,k}^{p+1}$. Затем по формуле (4.36) определяем V^{p+1} . После этого по (4.37) получаем распределение $\phi_{i,j,k}^{p+1}$ во всей расчетной области.

4.6 К алгоритму численного решения.

Решение задачи начинается с того, что в расчетной области задается начальное приближение n_e^0 , n_{ion}^0 , φ^0 , которое строится аналитически [44, 47] с привлечением опытных параметров нормального тлеющего разряда [8]. Иногда в качестве начального приближения используются решения, найденные ранее, что позволяет значительно, в 2-3 раза, сократить время расчетов. Помимо распределений n_e^0 , n_{ion}^0 , φ^0 нужно задать начальное значение заряда на аноде Q_a^0 . Его можно определить интегрированием (4.30), в котором положено $p=0$, $p+1=0$.

Затем следует цикл, состоящий в последовательном вычислении распределений потенциала, ионов и электронов на $p+1$ слое. При этом используются известные решения на p -том временном слое. Первым находится распределение потенциала φ^{p+1} методом, описанным в § 4.5. Вслед за ним, с учетом найденного распределения поля E^{p+1} ищем решения уравнений движения ионов $n_{ion,i,j,k}^{p+1}$ (4.7), (4.8) и электронов $n_{e,i,j,k}^{p+1}$ (4.7), (4.9). После этого вычисляем относительные приращения:

$$\varepsilon_1 = \max_{\substack{i=1,NI \\ j=1,NJ \\ k=1,NK}} \frac{|(n_{ei,j,k}^{p+1} - n_{ei,j,k}^p)|}{n_{ei,j,k}^{p+1}}, \quad \varepsilon_2 = \max_{\substack{i=1,NI \\ j=1,NJ \\ k=1,NK}} \frac{|(n_{ion,i,j,k}^{p+1} - n_{ion,i,j,k}^p)|}{n_{ion,i,j,k}^{p+1}}, \quad \varepsilon_3 = \max_{\substack{i=1,NI \\ j=1,NJ \\ k=1,NK}} \frac{|(\varphi_{i,j,k}^{p+1} - \varphi_{i,j,k}^p)|}{\varphi_{i,j,k}^{p+1}},$$

величину $\varepsilon_p = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и проверяем условие $\varepsilon_p \leq 10^{-4}$. Если последнее выполнено, то $n_{ei,j,k}^{p+1}$,

$n_{ion,i,j,k}^{p+1}$, $\varphi_{i,j,k}^{p+1}$ дают искомое решение. В противном случае, приравниваем $n_{ei,j,k}^p = n_{ei,j,k}^{p+1}$,

$n_{ion,i,j,k}^p = n_{ion,i,j,k}^{p+1}$, $\varphi_{i,j,k}^p = \varphi_{i,j,k}^{p+1}$, $i=1,NI, j=1,NJ, k=1,NK$, $Q_a^p = Q_a^{p+1}$ и повторяем цикл отыскания решений на следующем временном слое.

Расчеты проводились с постоянным шагом по времени, равным $\tau = \tau_0 - 2\tau_0$, где $\tau_0 = d/(\mu_e E_0)$, $E_0 = V_0/d$ – масштаб электрического поля. Существенно увеличить τ не удастся. Уже при $\tau = 3\tau_0$ возникают периодические колебания параметров разряда, имеющие счетную природу. При больших τ численное интегрирование становится невозможным.

4.7 Диффузионные свойства используемых разностных схем.

Рассмотрим две аппроксимации потока заряженных частиц $\Gamma = -n\mu E - D\partial n / \partial x$, в котором учтены дрейф частиц и их диффузия:

$$\Gamma_{i+1/2} = -n_i \mu E_{i+1/2} - D(n_{i+1} - n_i)/h, \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad E_{i+1/2} < 0 \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{i+1/2} = -\frac{D}{h}(f_1(u_{i+1/2})n_{i+1} - f_2(u_{i+1/2})n_i),$$

$$u_{i+1/2} = -\frac{\mu}{D}E_{i+1/2}h, \quad i = 1, NI - 1; \quad (4.39)$$

$$f_1(u) = \begin{cases} \frac{u}{e^u - 1}, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}, \quad f_2(u) = \begin{cases} \frac{ue^u}{e^u - 1}, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}$$

Здесь для определенности принято, что заряд частиц отрицательный и измеряется в единицах заряда электрона. Аппроксимируем по (4.38) и (4.39) одномерное стационарное уравнение непрерывности:

$$\frac{d\Gamma}{dx} = 0. \quad \Gamma = -n\mu E - D\partial n / \partial x \quad (4.40)$$

при условии $E = \text{const} < 0$ на сетке с постоянным шагом $h = \text{const}$. Используя (4.38), получим:

$$\frac{1}{h} \left[\mu E(-n_i + n_{i-1}) + \frac{2Dn_i}{h} - \frac{Dn_{i+1}}{h} - \frac{Dn_{i-1}}{h} \right] = 0 \quad (4.41)$$

Представим n_{i-1} , n_{i+1} в виде рядов:

$$n_{i-1} = n_i - \frac{dn}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2n}{dx^2}h^2 + \dots; \quad n_{i+1} = n_i + \frac{dn}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2n}{dx^2}h^2 + \dots \quad (4.42)$$

и подставим (4.42) в (4.41). С точностью до членов первого порядка по h имеем:

$$-\mu E \frac{dn}{dx} - D \frac{d^2n}{dx^2} - \frac{\mu|E|}{2} \frac{d^2n}{dx^2} h = 0 \quad (4.43)$$

В (4.43) помимо исходного уравнения содержится добавочное слагаемое диффузионного типа. Коэффициент «счетной диффузии» [40, 44, 47, 83]:

$$D_c = \frac{\mu|E|}{2}h = \frac{D}{2}u, \quad u = -\frac{\mu}{D}Eh = \frac{\mu}{D}|E|h, \quad u > 0 \quad (4.44)$$

Теперь для получения разностной формы (4.40) воспользуемся схемой (4.39). Имеем:

$$\frac{D}{h^2} \left[(n_i^p - n_{i-1}^p) f_2 + (n_i^p - n_{i+1}^p) f_1 \right] = 0 \quad (4.45)$$

Подставим (4.42) в (4.45) и в полученном результате пренебрежем малыми членами, пропорциональными степеням h выше первой. Это дает:

$$-\mu E \frac{dn}{dx} - D \frac{d^2 n}{dx^2} + D \frac{d^2 n}{dx^2} \left(1 - \frac{f_1 + f_2}{2} \right) = 0 \quad (4.46)$$

Из (4.46) получаем коэффициент «счетной диффузии» для схемы (4.39):

$$D_{c1} = -D \left(1 - \frac{f_1 + f_2}{2} \right) = D \left(\frac{u(e^u + 1)}{2(e^u - 1)} - 1 \right), \quad u = -\frac{\mu}{D} E h = \frac{\mu}{D} |E| h, \quad u > 0 \quad (4.47)$$

Продemonстрируем различие в коэффициентах D_{c1} (4.47) и D_c (4.44) для схем (4.39) и (4.38), соответственно. Составим отношение:

$$\frac{D_{c1}}{D_c} = q(u) = \frac{e^u + 1}{e^u - 1} - \frac{2}{u}, \quad u > 0 \quad (4.48)$$

График функции $q(u)$ приведен на рис. 35. Эта функция монотонная, не превышает 1 на интервале $0 < u < \infty$, и асимптотически стремится к 1 при $u \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что эффект «счетной диффузии» в схеме (4.39) меньше, чем в схеме (4.38). Для иллюстрации этого обстоятельства удобно также составить отношения счетных коэффициентов D_{c1} и D_c к физическому D :

$$D_{c1} / D = q_1(u) = \frac{u(e^u + 1)}{2(e^u - 1)} - 1, \quad D_c / D = u/2, \quad u > 0. \quad (4.49)$$

Зависимости D_c/D и D_{c1}/D представлены на рис. 36. Видно, что D_{c1} сравнивается с D при $u \approx 4$, а $D_c = D$ при $u=2$, причем при $u=2$ $D_{c1} = 0.3D$. Опять мы видим, что разностная схема (4.39), характеризующаяся коэффициентом D_{c1} (4.47), обладает меньшей «счетной диффузией», чем схема (4.38) с D_c по (4.44).

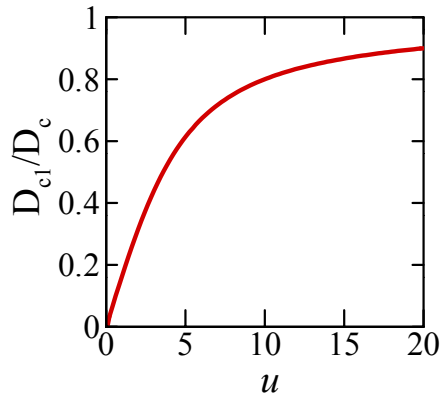


Рис. 35. Зависимость отношения коэффициентов «счетной диффузии» для двух схем, аппроксимирующих (4.40), от $u = \mu / D \cdot |E| h$; D_c соответствует схеме (4.38); D_{c1} – схеме (4.39).

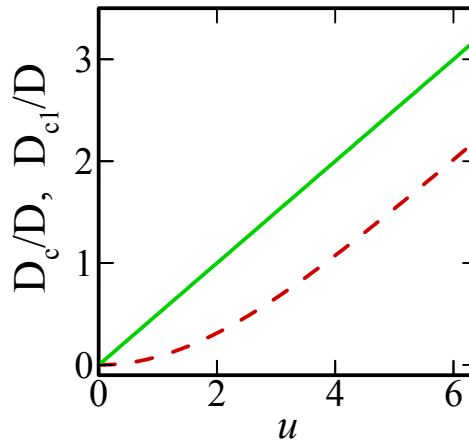


Рис. 36. Зависимость отношений коэффициентов «счетной диффузии» к физической для двух разностных схем от $u = \mu / D \cdot |E| h$. Непрерывная кривая соответствует схеме (4.38), штриховая – схеме (4.39).

4.8 Результаты расчетов.

4.8.1. Плоская двумерная геометрия.

Схема разрядной области для этого случая повторяет изображенную на рис. 33 с той лишь разницей, что сейчас игнорируются изменения функций вдоль направления оси z . Длина разряда в этом направлении нужна только для расчета полного тока. Для определенности принято $z_{\max}=1$ см. Все разностные аппроксимации, выписанные выше, очевидно распространяются на этот случай путем исключения из них членов, содержащих производные по z .

Тестовый расчет проведен для одного из примеров, представленных в [47]. Этот вариант соответствует тлеющему разряду в азоте при $d=2$ см и давлении $p=5$ Торр. Материальные характеристики возьмем теми же, как в [47]:

$$\alpha(E) = A p \exp(-B p / E), A=12 \text{ см}^{-1} \text{ Торр}^{-1}, B=342 \text{ В см}^{-1} \text{ Торр}^{-1}, \quad (4.50)$$

$\mu_e=8.4 \cdot 10^4 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ сек}^{-1}$, $\mu_{\text{ion}}=456 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ сек}^{-1}$; $\gamma=0.1$, $\beta=2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$. Электронная температура, нужная для задания коэффициента диффузии $D_e=\mu_e T_e$, $T_e=1$ эВ; $\bar{v}_e=6.7 \times 10^7 \text{ см сек}^{-1}$, ионная диффузия не учитывается. Рассчитанная нами структура тлеющего разряда при ЭДС источника $V_0=2000$ В, внешнем сопротивлении $R=300$ кОм показана на рис. 37. В этом расчете использовалась разностная сетка, содержащая $Nl=41$ узлов по оси x и $NJ=71$ по y .

Отметим, что распределения, показанные на рис. 37, заметно расходятся с полученными в [47]. Притом, что по обеим моделям V и I практически совпадают, ширина токовой области* на катоде, найденная в настоящей работе, примерно вдвое меньше, чем в [47]. Поэтому $j_{\text{cath max}}$ у нас получилась почти в 2 раза больше. Вдобавок, в нашей модели на

* Эта величина определяется шириной распределения тока на полувысоте.

20–50% процентов завышены максимальные плотности ионов в катодном слое и плазмы в положительном столбе, а также j_{anmax} . Значения продольных полей в катодном слое и положительном столбе на оси симметрии разряда, у нас, напротив, занижены – на 10–20%. Основной причиной расхождения, по-видимому, является различный способ аппроксимации слагаемого с $\alpha=\alpha(E)$ в правой части уравнений непрерывности. Тестовые расчеты (на соответствующих сетках) говорят в пользу использованной нами аппроксимации [см. (4.4)]. Судя по всему, в [47] разностная запись члена с $\alpha=\alpha(E)$ выбиралась не для того, чтобы достичь большой точности, а из каких-то других соображений.

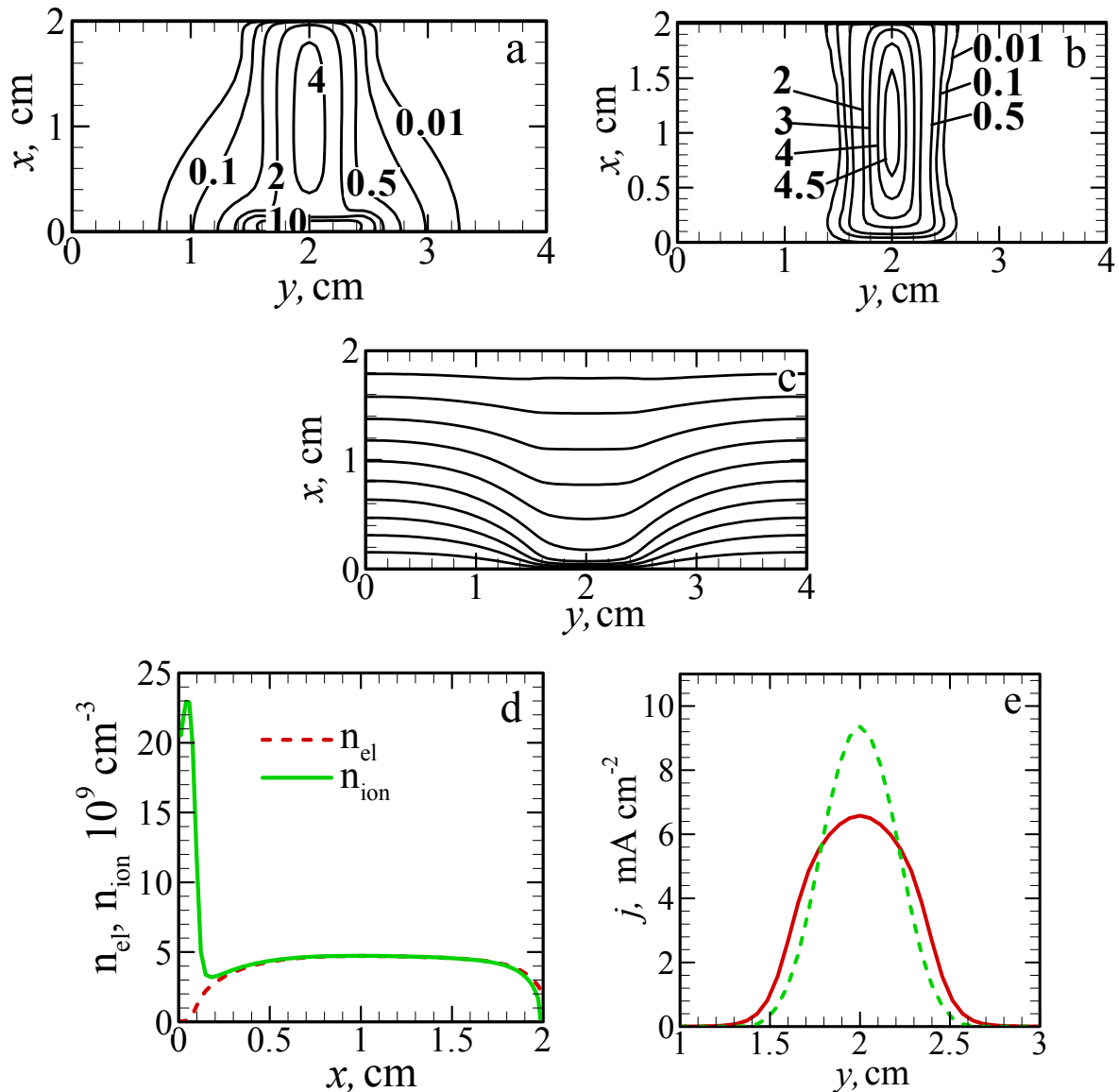


Рис. 37. Рассчитанная двумерная структура тлеющего разряда в плоском канале при $p=5$ Торр. Линии равных плотностей ионов n_{ion} (a) и электронов n_{el} (b), плотности измерены в 10^9 см^{-3} ; (c) Эквипотенциали с шагом $\Delta\phi=50.5$ В от 0 на катоде до $V=556$ В на аноде; (d) Распределения n_{el} и n_{ion} на оси симметрии разряда; (e) Распределение плотности тока на катоде (непрерывная кривая) и аноде (пунктирная кривая). Полный разрядный ток $I=4.81$ мА.

Численный пример, показанный на рис. 37, соответствует разряду, близкому к поднормальному тлеющему. Максимальная рассчитанная плотность тока на катоде $j_{\text{cath max}}=6.58 \text{ мА см}^{-2}$ по порядку величины равна нормальной, будучи несколько меньше ее (для рассматриваемых условий $j_n \sim 10 \text{ мА см}^{-2}$ [8]). Чтобы получить нормальный разряд, будем увеличивать полный ток I путем увеличения V_0 или уменьшения R . Все остальные входные параметры оставим без изменений. Рассчитанные распределения плотностей тока на катоде и аноде при различных токах I показаны на рис. 38. Из рисунка видно, что при $I < 24.8 \text{ мА}$ с ростом I происходит увеличение максимальных плотностей тока на катоде $j_{\text{cath max}}$ и аноде $j_{\text{an max}}$, которое сопровождается расширением токовой области. При дальнейшем увеличении тока токовая область продолжает расширяться, а $j_{\text{cath max}}$ и $j_{\text{an max}}$ остаются практически неизменными. Это соответствует нормальному режиму горения разряда. Структура нормального тлеющего разряда при $I=58.2 \text{ мА}$ показана на рис. 39.

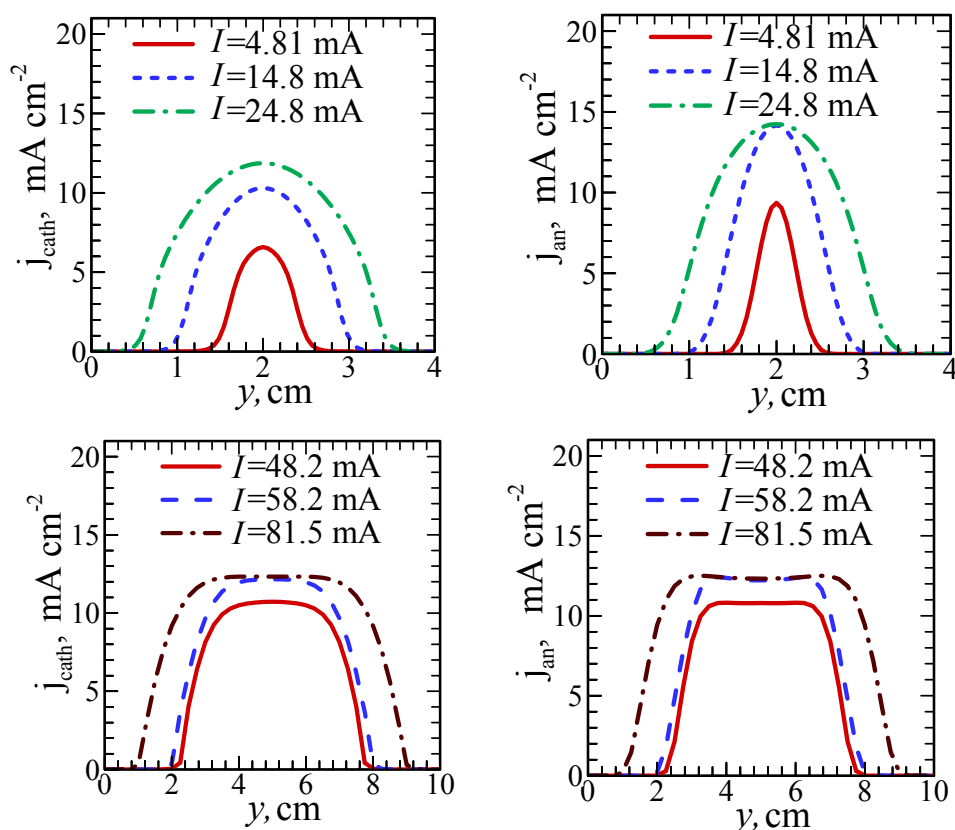


Рис. 38. Распределение плотностей токов на катоде j_{cath} (слева) и аноде j_{an} (справа) при разных значениях полного тока I . Ниже приведены значения напряжений на разряде V для всех представленных вариантов: при $I=4.81 \text{ мА}$ — $V=556 \text{ В}$; $I=14.8 \text{ мА}$ — $V=551 \text{ В}$; $I=24.8 \text{ мА}$ — $V=551 \text{ В}$; $I=48.2 \text{ мА}$ — $V=542 \text{ В}$; $I=58.2 \text{ мА}$ — $V=545 \text{ В}$; $I=81.5 \text{ мА}$ — $V=545 \text{ В}$.

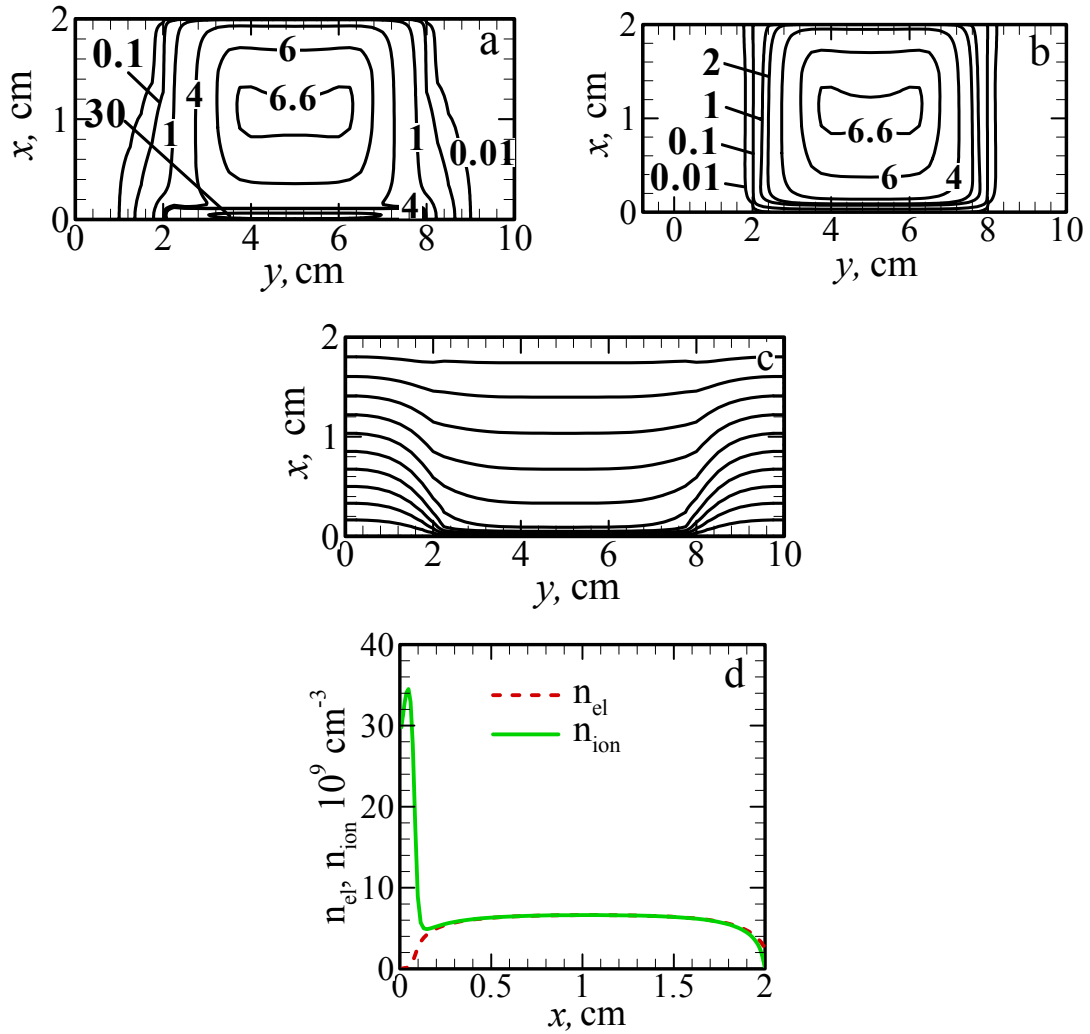


Рис. 39. Рассчитанная двумерная структура тлеющего разряда в плоском канале при $p=5$ Торр. Линии равных плотностей ионов (a) и электронов (b), числа у кривых – концентрация в 10^9 см^{-3} ; (c) Эквипотенциали с шагом $\Delta\phi=49.5$ В от 0 на катоде до $V=545$ В на аноде; (d) Распределение плотностей электронов и ионов вдоль оси симметрии разряда.

Заметим, что распределения плотностей токов, приведенные на рис. 38, при $I \geq 48.2$ мА получены при расчетах на сетке $NI=61$, $NJ=41$. Для вариантов с меньшими I использовалась сетка $NI=41 \times NJ=71$. Результаты слабо, не более чем на 5%, различаются при переходе от одной сетки к другой, поэтому отмеченное изменение сетки несущественно. Структура нормального разряда, показанная на рис. 39, рассчитана при $NI=61$, $NJ=41$.

Включим теперь в уравнения ионную диффузию. При этом разностные выражения для потоков ионов пишем по схеме [84]. Они подобны потокам (4.6) для электронов. Будем варьировать коэффициент $D_{\text{ion}} = \mu_{\text{ion}} T_{\text{ion}}$, придавая различные значения ионной температуре T_{ion} , которую считаем постоянной в пространстве. Влияние значения T_{ion} на решение изучим для варианта, представленного на рис. 37, при расчете которого было положено $T_{\text{ion}}=0$.

Пусть $T_{\text{ion}}=0.026$ эВ. Результаты с $T_{\text{ion}}=0.026$ эВ практически тождественны полученными при $T_{\text{ion}}=0$. Увеличиваем T_{ion} в 10 раз, $T_{\text{ion}}=0.26$ эВ. Отличие в параметрах разряда, наблюдаемое при такой замене T_{ion} столь мало, что его трудно изобразить в масштабе рис. 37. Только при $T_{\text{ion}}=2.6$ эВ, завышенной в 100 раз по сравнению с комнатной, видны заметные изменения параметров разряда (см. рис. 40).

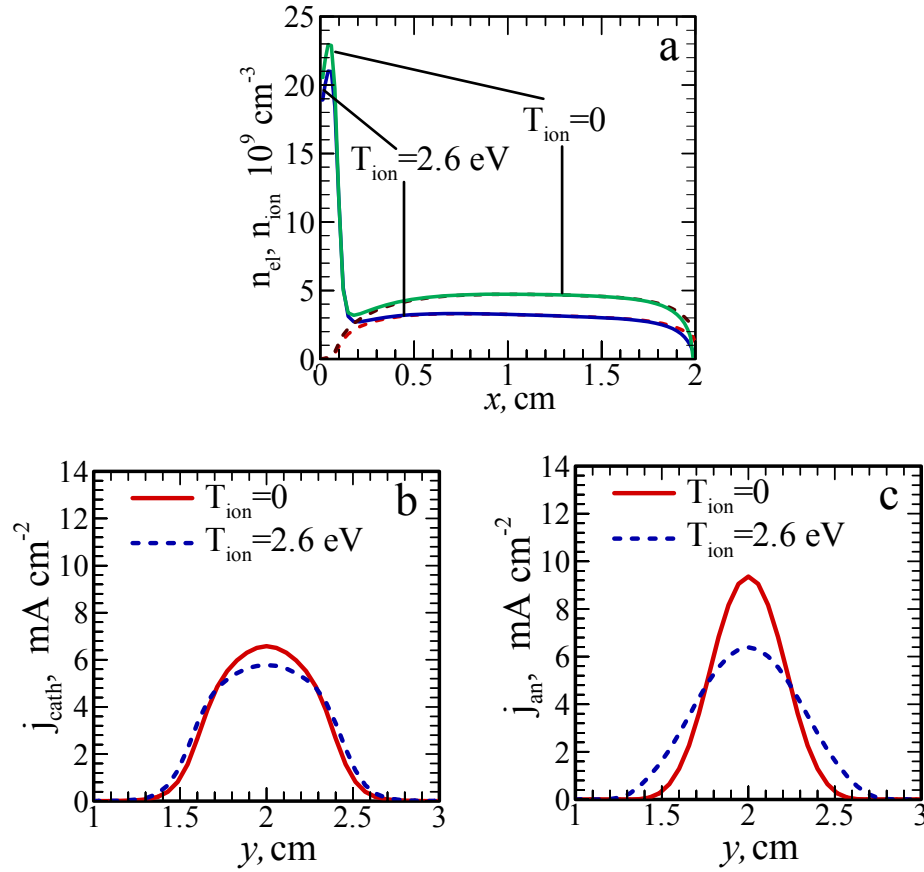


Рис. 40. Распределения (а) плотностей электронов (штриховые кривые) и ионов (непрерывные кривые) вдоль оси симметрии разряда; плотности тока на катоде (b) и аноде (c) при $T_{\text{ion}}=0$ и $T_{\text{ion}}=2.6$ эВ. При $T_{\text{ion}}=0$: $I=4.81$ мА, $V=556$ В; при $T_{\text{ion}}=2.6$ эВ: $I=4.8$ мА, $V=559$ В.

4.8.2 Трехмерная геометрия.

Для проверки расчетной программы опираемся на результаты [46], в которой столб разряда рассчитан в цилиндрических координатах в гидродинамическом приближении при невысоком давлении, $p=1-20$ Торр. В [46], в основном, рассматривается разряд с учетом нагрева нейтрального газа, но также есть примеры с «выключенным» нагревом. Последние и являются для нас ориентиром.

Рассмотрим разряд в азоте при $d=2$ см, $p=5$ Торр. Материальные характеристики возьмем следующими: $\alpha=\alpha(E)$ по (4.50), $\mu_e=8.8 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ сек}^{-1}$, $\mu_{\text{ion}}=290 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ сек}^{-1}$, $\gamma=0.1$,

$\beta=2\cdot 10^{-7}$ см³ сек⁻¹; $T_e=1$ эВ, $\bar{v}_e=6.7\times 10^7$ см сек⁻¹, $T_{ion}=0$. Использовалась разностная сетка с $NI=40$, $NJ=31$ и $NK=16$ узлами по x , y и z , соответственно. Результаты расчетов при ЭДС источника $V_0=3000$ В, $R=300$ кОм приведены на рис. 41.

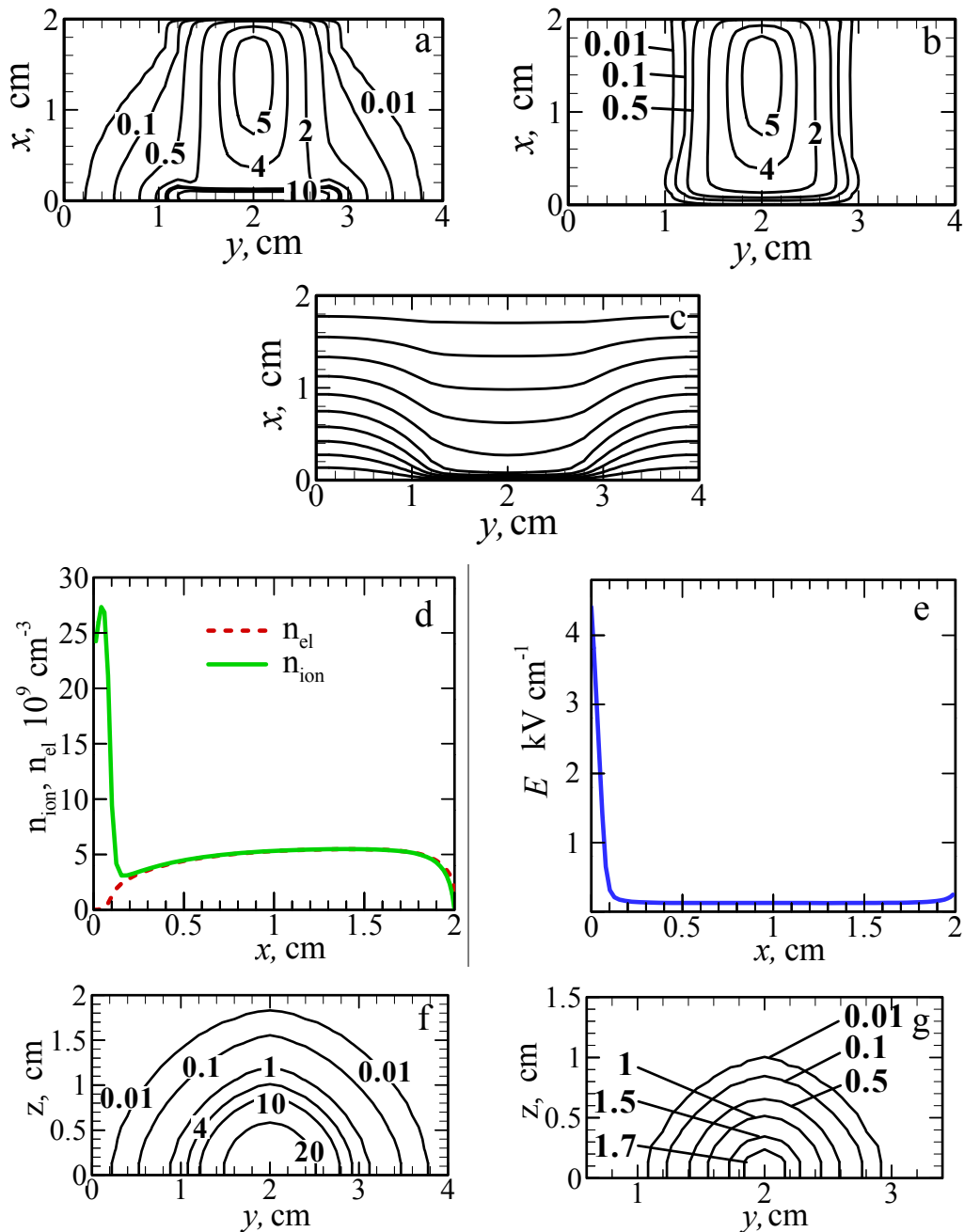


Рис. 41. Трехмерная структура стационарного тлеющего разряда при $p=5$ Торр. Линии равных плотностей (плотности измерены в 10^9 см⁻³) ионов n_{ion} (a) и электронов n_e (b) в плоскости $z=0$, содержащей ось симметрии разряда, см. рис. 33; эквипотенциали (c) в плоскости $z=0$ с шагом $\Delta\varphi=45.5$ В от $V=0$ на катоде до $V=502$ В на аноде; плотности электронов, ионов (d) и поле (e) вдоль оси симметрии разряда; линии равных n_{ion} на катоде (f) и n_e на аноде (g). Разрядный ток $I=8.33$ мА.

На рис. 42 приведены рассчитанные распределения плотностей тока на катоде j_{cath} и аноде j_{an} при различных разрядных токах. Ток регулируется с помощью ЭДС источника. Разностная сетка и входные данные в этих расчетах те же, что при расчетах рис. 41. Видно, что с увеличением V_0 токовое пятно расширяется, при этом величина $j_{\text{cath max}}$, соответствующая центру пятна, возрастает. Зависимость $j_{\text{an max}}$ от V_0 (т.е. тока) имеет более сложный характер. Все варианты, представленные на рис.42, соответствуют поднормальному режиму горения разряда. При этом $j_{\text{an max}}$ превосходит $j_{\text{cath max}}$, и поперечные размеры анодного пятна несколько меньше, чем катодного.

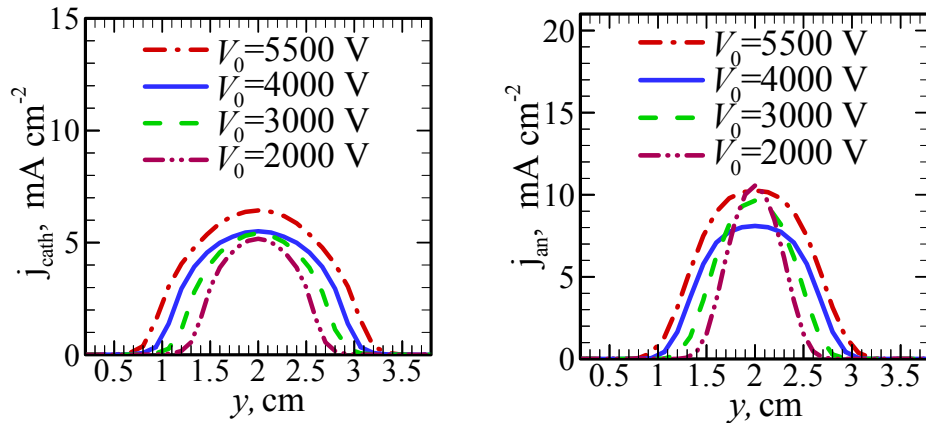


Рис. 42. Распределения плотностей тока на катоде j_{cath} (слева) и аноде j_{an} (справа) при разных токах через разряд, чему соответствуют различные ЭДС источника V_0 . При $V_0=2000$ В напряжение на разряде $V=505$ В, ток $I=4.98$ мА; при $V_0=3000$ В – $V=502$ В, $I=8.33$ мА; при $V_0=4000$ В – $V=499$ В, $I=11.67$ мА; при $V_0=5500$ В – $V=498$ В, $I=16.67$ мА.

Приведенные на рис. 41, 42 распределения дают весьма грубое качественное представление об искомом решении. Это связано, во-первых, с грубостью расчетной сетки. Кроме того, использованная нами разностная запись слагаемого $\alpha(E)|\Gamma_e|$ в уравнениях непрерывности для электронов и ионов [см. (4.4)], является приближенной. Она базируется на вычислении среднего поля и потока электронов в ячейке. Поэтому небезынтересно еще раз рассчитать вариант, соответствующий рис. 41, в котором оба перечисленных дефекта играли бы меньшую роль. Для этого возьмем разностную сетку с $NI=61$, $NJ=71$ и $NK=36$ узлами по осям x , y , z , соответственно. При записи слагаемого $\alpha(E)|\Gamma_e|$ учтем изменения абсолютных величин поля E и электронного потока $|\Gamma_e|$ внутри рассматриваемой ячейки. А

именно,

пишем

интеграл

$$\iiint_V \alpha(E) |\Gamma_e| dx dy dz$$

в

виде:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \alpha(E) |\Gamma_e| dx dy dz / (\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0) \approx 1/8 \times \\ & \times [(\alpha |\Gamma_e|)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i+1/2, j-1/2, k+1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i+1/2, j-1/2, k-1/2} + \\ & + (\alpha |\Gamma_e|)_{i-1/2, j+1/2, k+1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i-1/2, j+1/2, k-1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i-1/2, j-1/2, k+1/2} + (\alpha |\Gamma_e|)_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}] \end{aligned} \quad (4.51)$$

где $(\alpha |\Gamma_e|)_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k\pm 1/2} = \alpha(E_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k\pm 1/2}) |\Gamma_e|_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k\pm 1/2}$, $\Delta x_0 = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, $\Delta y_0 = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$,

$\Delta z_0 = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$. Выражения для полей $E_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k\pm 1/2}$ и потоков $|\Gamma_e|_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k\pm 1/2}$ в (4.51)

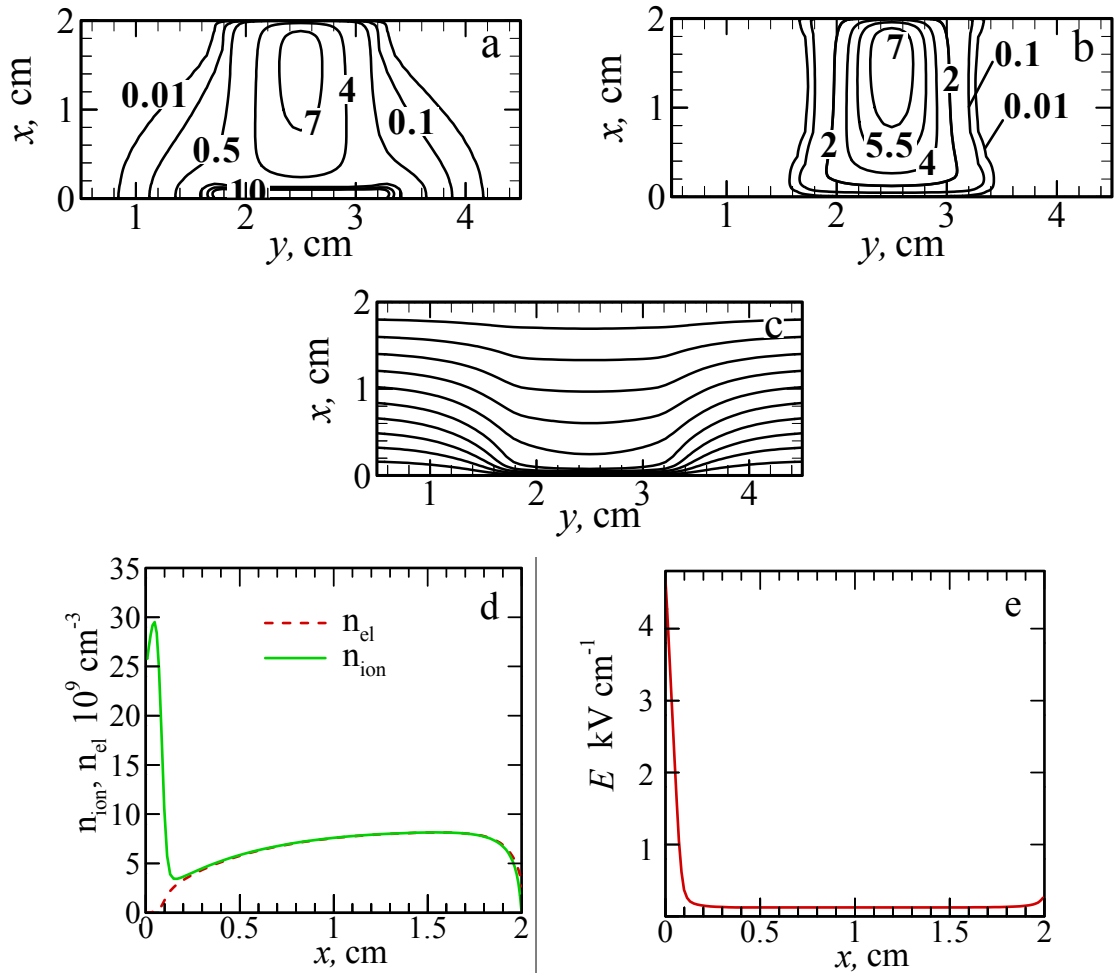
составляем по формулам типа:

$$E_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} = \sqrt{E_{x, i+1/2, j, k}^2 + E_{y, i, j+1/2, k}^2 + E_{z, i, j, k+1/2}^2} \quad (4.52)$$

С уточненной, по (4.51), разностной записью для $\alpha(E) |\Gamma_e|$ в разностном уравнении (4.4)

вместо $\alpha(E_{i,j,k}^p) |\Gamma_{e, i,j,k}^p|$ присутствует правая часть (4.51), взятая на p -том временном слое.

Результат численного интегрирования, проведенного с учетом всего сказанного выше, показан на рис. 43. Этот расчет был исключительно трудоемким и занимал около 120 часов на компьютере PC 2.8 GHz, 512 MB RAM под Release конфигурацией компилятора языка Фортран.



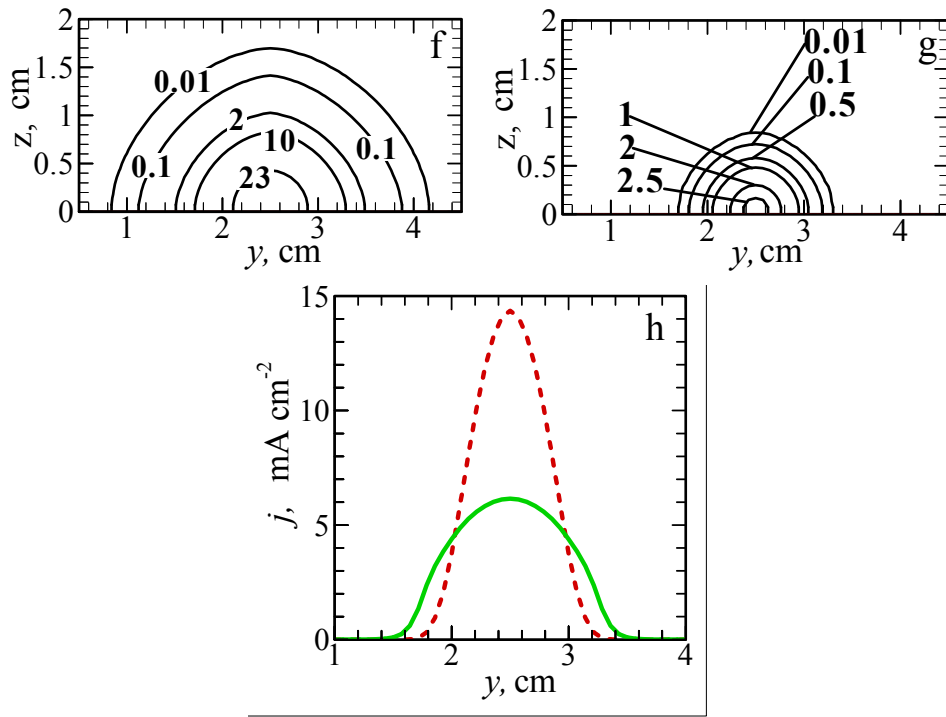


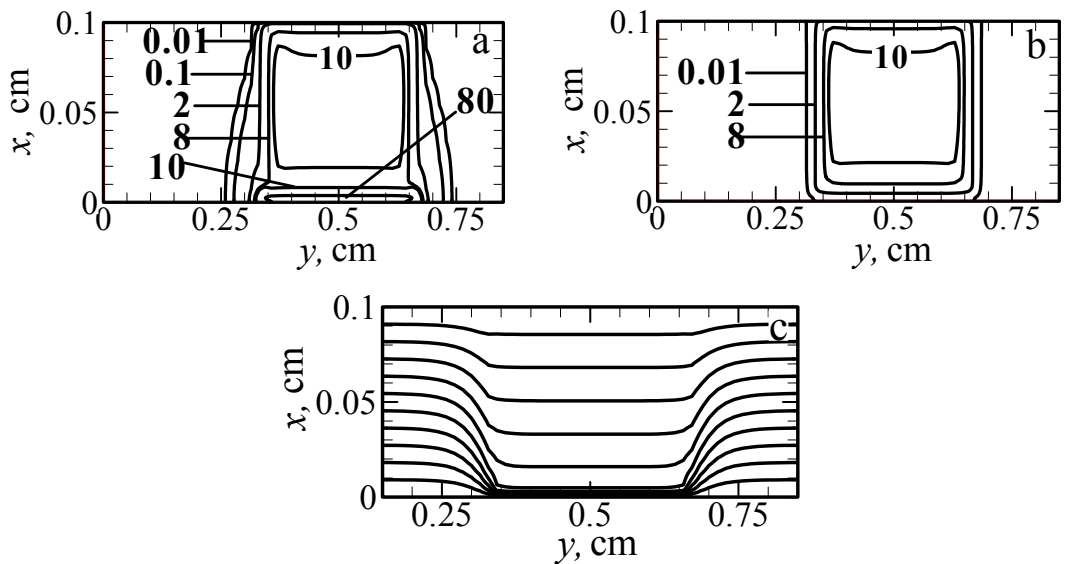
Рис. 43. Рассчитанная трехмерная структура стационарного столба тлеющего разряда при $p=5$ Торр. (a)-(g) – то же, что на рис. 41; (h) Распределение плотностей тока на электродах: сплошная кривая – на катоде; пунктир – на аноде. Напряжение на разряде $V=499$ В, ток $I=8.34$ мА.

Сравнение рис.41 и рис.43 показывает, что основное различие результатов лежит в концентрациях электронов в анодном слое $n_{e\text{ а}}$, плотностях плазмы $n_{\text{ПС}}$ в положительном столбе и распределениях плотности тока на аноде. В более аккуратном расчете, представленном на рис.43, $n_{e\text{ а max}}$ и $n_{\text{ПС max}}$ на 50% выше, чем на рис. 41. Изменение продольных полей на оси пятна и плотностей ионов в катодном слое $n_{\text{ion KC}}$ сравнительно небольшое: например, при переходе от рис. 41 к рис. 43 $n_{\text{ion KC max}}$ возрастает на 8%. Заметим, что в обоих случаях разрядный ток практически одинаковый. С точностью до 13% совпадают значения $j_{\text{cath max}}$ (на рис. 43 $j_{\text{cath max}}$ выше), поперечные размеры катодных пятен примерно одинаковы. Зато $j_{\text{an max}}$ на рис. 43 значительно выше (на 50%), а анодное пятно, соответственно, более узкое. Заметим, что результаты рис. 43 неплохо согласуются с представленными в [46].

Отметим также следующий момент. При расчете примера, показанного на рис. 43, мы были вынуждены увеличить поперечные размеры области и положить $y_{\text{max}}=5$ см, $z_{\text{max}}=2.5$ см, вместо $y_{\text{max}}=4$ см, $z_{\text{max}}=2$ см, принятых на рис. 41. Если оставить y_{max} и z_{max} неизменными, то в процессе счета возникнет численная неустойчивость, и получить стационарное решение задачи будет невозможно.

В качестве следующего примера приведем результаты расчета тлеющего разряда при очень высоком давлении, $p=100$ Торр. При этом межэлектродное расстояние d выберем достаточно малым $d=0.1$ см, что соответствует умеренному $pd=10$ Торр см, лежащему на правой ветви кривой Пашена для азота. Боковые стенки разрядной камеры поставим при $y_{\max}=1$ см и $z_{\max}=0.5$ см. Материальные характеристики задаем следующими: $\mu_e=4400$ см² В⁻¹ сек⁻¹, $\mu_{\text{ion}}=14.5$ см² В⁻¹ сек⁻¹, $T_e=1$ эВ, $\bar{v}_e=6.7 \times 10^7$ см сек⁻¹, $T_{\text{ion}}=0$, $\alpha=\alpha(E)$ по (4.50), $\beta=2 \cdot 10^{-7}$ см³ сек⁻¹, $\gamma=0.1$. Используем разностную сетку с $NI=61$, $NJ=71$, $NK=36$ узлами и разностную запись члена $\alpha(E)|\Gamma_e|$ как в (4.4). Результат численного расчета при $V_0=1000$ В и $R=3000$ Ом представлен на рис. 44. Заметим, что выбранные в этом расчете условия характерны для микроразрядов, изучению которых в настоящее время уделяется много внимания (см., например, [73] и указанную там литературу).

Сравним качественно результат расчета при $p=100$ Торр с тем, который найден при $p=5$ Торр и показан на рис. 43. Толщину катодного слоя на оси катодного пятна d_{KC} будем, подобно [43], характеризовать величиной $\int_0^{d_{\text{KC}}} \alpha[E(x)]dx = 0.99I$, где $I = \int_0^d \alpha[E(x)]dx$. При $p=5$ Торр $d_{\text{KC}}=7.08 \times 10^{-2}$ см – 16.5 раз больше, чем при 100 Торр. Катодное падение напряжения $V_{\text{KC}} = \int_0^{d_{\text{KC}}} E(x)dx$ в обоих случаях – 220 вольт. Поле в катодном слое вдоль оси пятна при $p=5$ Торр $E_{\text{KC}} \approx 2$ кВ см⁻¹, а при $p=100$ Торр оно колоссальное, $E_x \approx 40$ кВ см⁻¹. Максимальные плотности тока в центрах катодных пятен $j_{\text{cath max}}$ в обоих случаях различаются в $17^2=290$ раз. Величины d_{KC} , E_{KC} и j ведут себя примерно так, как это требуют от них законы подобия для нормальных величин в одномерной теории катодного слоя [8]. При строгом выполнении этих законов d_{KC} должно уменьшаться в 20 раз, E_{KC} возрасти в 20 раз, а $j_{\text{cath max}}$ увеличиться в 400 раз.



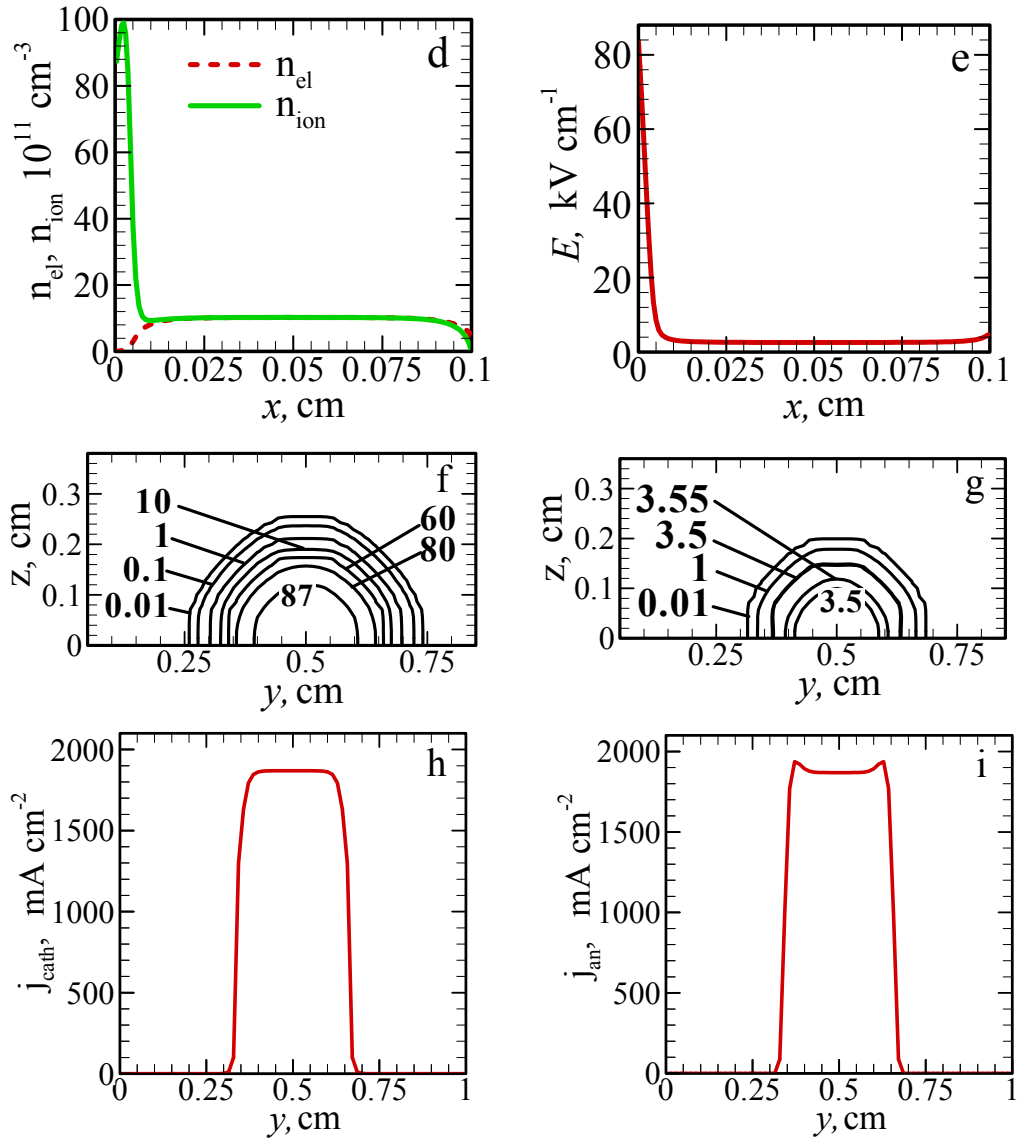


Рис. 44. Трехмерная структура стационарного столба тлеющего разряда при $p=100$ Торр. Линии равных плотностей (в 10^{11} см^{-3}) ионов (а) и электронов (б) в плоскости $z=0$. Эквипотенциали (с) с шагом $\Delta\phi=45.4$ В от катода до $V=499$ В на аноде; Плотности электронов и ионов (д), и поля (е) вдоль оси симметрии разряда; Линии равных n_{ion} на катоде (ф) и n_e на аноде (г) в единицах 10^{11} см^{-3} ; Плотности тока на катоде (h) и на аноде (i). Разрядный ток $I=167$ мА.

Отметим, что рассчитанный при $p=100$ Торр диффузионный режим горения разряда (рис. 44) может и не реализоваться на опыте. Практика показывает [8], что при высоких плотностях тока, достигаемых при больших давлениях, разряд испытывает контракцию, т.е. стягивается в тонкий шнур. Обсуждение контракции выходит за рамки настоящей работы, т.к. требует рассмотрения эффекта нагрева нейтрального газа.

4.9. Замечания об эффективности разработанной модели.

Как было продемонстрировано в [40], основной помехой при расчетах тлеющего разряда является действие «счетной» диффузии. Этот эффект сильно выражен в тех областях, где поле сравнительно велико, т.е. в катодном слое.

Напишем условие не превышения «счетной» диффузии физическую для электронного и ионного уравнений. Для коэффициентов «счетной» диффузии воспользуемся формулами (4.44), (4.47). При этом для оценок несущественно то, что эти формулы выведены для однородного поля и разностной сетки с постоянным шагом. Нужно только иметь в виду зависимость h от координатного направления. Для электронного уравнения условие не превышения «счетной» диффузии физическую вытекает из (4.47) и приближенно сводится к $u < 4$, где $u = \mu_e E h / D_e > 0$. Иначе говоря, $\Delta\varphi < 4T_e$, где $\Delta\varphi > 0$ – разности потенциалов на одном счетном шаге h в данной точке и в данном направлении. Для ионного уравнения рассматриваемое условие получается из (4.44): $u < 2$, $u = \mu_{\text{ion}} E h / D > 0$, с $D \equiv D_a = \mu_{\text{ion}} T_e$, где D_a – коэффициент амбиполярной диффузии. Другими словами, $\Delta\varphi < 2T_e$. Заметим, что диффузия ионов амбиполярна не только в квазинейтральном положительном столбе, но и в катодном слое, где она возникает вдоль катода по своеобразному механизму [42]. Из написанных неравенств следует, что если $\Delta\varphi \ll 2T_e$, то эффект «счетной» диффузии пренебрежимо мал. При $\Delta\varphi \gg 4T_e$ он, наоборот, играет преобладающую роль, так что учитывать даже электронную диффузию в расчетах не имеет смысла.

Укажем, каковы значения $\Delta\varphi$ в наших расчетах в примере, представленном на рис. 44, который соответствует $p=100$ Торр. Рассмотрим ось симметрии столба разряда. В катодном слое падение напряжения на одной ячейке в направлении оси x составляет $\Delta\varphi_x \approx 35$ В. В положительном столбе оно меньше, $\Delta\varphi_x \approx 10$ В, и при приближении к аноду спадает до $\Delta\varphi_x \approx 3$ В. Максимальные значения поперечных полей достигаются в переходной зоне между токовой и бестоковой областью. Эта зона соответствует, в частности, краям катодного и анодного пятен, где по расчету $E_{\perp} = 4.6$ кВ см⁻¹ и $E_{\perp} = 100$ В см⁻¹, соответственно. При принятом шаге $h = \Delta y = \Delta z = 0.014$ см такие поля дают следующие значения падений потенциала на одной ячейке: $\Delta\varphi_{\perp}^{\text{max}} = 66$ В и $\Delta\varphi_{\perp}^{\text{max}} = 1.4$ В. Приведенные цифры показывают, что условие $\Delta\varphi \ll 2T_e$ с принятой при расчетах $T_e = 1$ эВ не выполнено, поэтому влияние «счетной диффузии» на результат существенно. В то же время, есть области, где $\Delta\varphi < 4T_e$, поэтому учитывать электронную диффузию имеет смысл, о чем говорят и ранние исследования [40].

Существенное влияние «счетной» диффузии, происходящее от применения схем первого порядка точности по пространственным переменным, приводит к выводу, что

рассчитанная на рис. 44 картина имеет, вообще говоря, качественный, а не количественный, характер. То же самое относится и к варианту, показанному на рис. 43, а также, по-видимому, ко всем результатам, представленным в настоящей работе. Одним из способов исключить «счетную» диффузию является использование разностных схем более высокого порядка точности, чем первого. Этот вопрос анализировался в [40], где попытки применить разностные схемы со вторым порядком точности к успеху не привели, породив нефизические колебания решения. При подавлении (известными методами) этих колебаний все возвращалось к исходному состоянию с заметной счетной диффузией. Пример успешного исключения счетной диффузии приведен в [43] для одномерных расчетов разряда типа тлеющего по схеме четвертого порядка точности. При применении же схем первого порядка аппроксимации для уменьшения влияния счетной диффузии приходится просто уменьшать шаги сетки. Такая возможность, по крайней мере, в рамках используемого нами алгоритма, в трехмерных расчетах в настоящее время весьма ограничена. Отметим, впрочем, что в трехмерных расчетах [45] счет велся с пространственным шагом в 2, 3 раза меньшим, чем в настоящей работе. Это достигалось за счет большего числа узлов разностной сетки.

Обсудим теперь другую сторону расчетного алгоритма – выбор шага по времени τ . При использовании метода установления, как правило, стремятся увеличить τ , с целью сократить время расчетов. За счет использования полунеявной схемы из [79, 80, 81, 82] в настоящей работе расчет проводился с довольно большим τ , превышающим, в частности, максвелловское время релаксации объемного заряда $\tau_m = 1/(4\pi\sigma)$, где σ – проводимость плазмы. Как известно, τ_m – максимальный шаг в так называемой явной схеме, когда уравнения Пуассона и непрерывности для заряженных частиц решаются друг за другом (без цикла итераций согласования) на каждом шаге по времени. Для трехмерных вариантов, представленных в настоящей работе, ориентировочно $\tau \approx 40\tau_m$. В самом деле, при $p=5$ Торр пренебрегая вкладом ионов в проводимость, с $n_e = 0.8 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $\mu_e = 8.8 \times 10^4 \text{ см}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$, имеем $\tau_m \approx 7.8 \times 10^{-10} \text{ с}$. С другой стороны, $\tau = 2\tau_0$, где $\tau_0 = d/(\mu_e E_0)$, $E_0 = V_0/d$, откуда $\tau = 3 \times 10^{-8} \text{ с}$ ($d=2 \text{ см}$, $V_0=3000 \text{ В}$). Итак, $\tau/\tau_m = 38$. Для варианта с $p=100$ Торр, $\tau/\tau_m = 37$.

Приведем гиперболическое Ku^h и параболическое Ku^p числа Куранта для электронов и ионов, которые количественно характеризуют масштаб выбранного шага τ . По определению (индексы опускаем), $Ku^h = v\tau/h$, где $v = \mu|E|$ – характерная скорость, h – шаг сетки по пространству; $Ku^p = 2D\tau/h^2$, D – коэффициент диффузии. Оценим максимальные значения чисел Куранта, которые достигаются в катодном слое. Для примера с $p=5$ Торр (рис. 43) шаг $\tau = 3 \times 10^{-8} \text{ с}$, $E_{kc} \approx 2 \text{ кВ см}^{-1}$, $v_e = 1.76 \times 10^8 \text{ см с}^{-1}$, $h_x \approx 0.01 \text{ см}$, получаем $Ku_e^h \approx 500$,

$Ku_{\text{ion}}^h \approx 1.5$. При этом $Ku_{\text{e}}^p \approx 50$, где в качестве D положен коэффициент свободной диффузии электронов. Для оценки Ku_{ion}^p вместо D берем коэффициент амбиполярной диффузии $D_a = \mu_{\text{ion}} T_e$ и $h_y = 0.07$ см. Имеем $Ku_{\text{ion}}^p \approx 3.5 \times 10^{-3}$. При $p = 100$ Торр с $\tau = 4.6 \times 10^{-9}$ с, $E_{\text{кс}} \sim 40$ кВ см⁻¹, $h_x \approx 0.0006$ см, $h_y = 0.014$ см подобные оценки дают $Ku_{\text{e}}^h \approx 1000$, $Ku_{\text{ion}}^h \approx 3$, $Ku_{\text{e}}^p \approx 100$, $Ku_{\text{ion}}^p \approx 7 \times 10^{-4}$. Как видим, в обоих случаях Ku_{e}^h , $Ku_{\text{e}}^p \gg 1$, $Ku_{\text{ion}}^h > 1$. Выполнение этих условий всегда является желательным при счете на установление.

Отметим, что общее физическое время, протекшее с самого начала расчета до его окончания, т.е. того момента, когда критерий сходимости, указанный в § 4.6, становится выполненным, составляло около 2×10^{-4} с для трехмерных вариантов при $p = 5$ Торр и 2×10^{-5} с для примера при $p = 100$ Торр. Это требовало проведения около $5 \cdot 10^3 - 10^4$ глобальных временных итераций.

4.10 Выводы.

Проведено двумерное и трехмерное численное моделирование тлеющего разряда в промежутке с идеально проводящими электродами при давлениях $p = 5$ и 100 Торр. На примере двумерных расчетов в плоской геометрии при давлении $p = 5$ Торр показано, что роль ионной диффузии с обычно принимаемой температурой $T_{\text{ion}} = 0.026$ эВ совершенно не существенна. На примере трехмерного разряда при $p = 5$ Торр продемонстрировано влияние степени подробности разностной сетки, а также способа аппроксимации источника в уравнении непрерывности на искомое решение. Влияние обоих факторов существенно отражается на значениях концентраций ионов в положительном столбе, анодном слое и на распределениях плотности тока на аноде. Изменение параметров катодной области при этом оказалось в несколько (4–5) раз меньше.

Как показывает анализ результатов расчетов, проблема исключения счетной диффузии, поставленная еще в первых работах по моделированию тлеющего разряда, остается по-прежнему актуальной. Необходимо увеличить эффективность разработанного численного алгоритма в отношении уменьшения влияния «счетной» диффузии. Эта проблема тесно связана с проблемой снижения затрат машинного времени.

Заключение

Сформулируем основные результаты работы:

1. В рамках простой модели, в основе которой лежит система двух уравнений для разрядного тока и напряжения, исследованы автоколебания в таунсендовском разряде. Получены автоколебательные решения в условиях, не рассмотренных в предыдущих

работах, но представляющих в том числе и практический интерес. Установлено существование глубокой аналогии с автоколебаниями в механических системах. Механизмом раскачки колебаний служит отрицательное дифференциальное сопротивление, которое является эквивалентом вынуждающей силы в механической системе. Стабилизирует колебания уменьшение отрицательного дифференциального сопротивления с ростом тока, что соответствует увеличению коэффициента трения при увеличении размаха и/или скорости колебаний в механической системе. Продemonстрировано, что слабый постоянный ток с катода оказывает существенное влияние на автоколебания: сглаживает пики и уменьшает период. Он также является дополнительным фактором, стабилизирующим колебания, однако причина такой стабилизации требует выяснения.

2. Поскольку причиной, вызывающей неустойчивость таунсендовского разряда, является отрицательное дифференциальное сопротивление в пределе «нулевых токов» R_{1D} , в работе выяснены механизмы его возникновения для промежутков $pd \approx 1$ Торр см. С этой целью методом Монте-Карло найдены вольт-амперные характеристики разряда в водороде и аргоне и рассчитаны значения R_{1D} . Результаты находятся в хорошем согласии с экспериментом. Установлено действие двух механизмов возникновения R_{1D} в рассматриваемых условиях. Один из них (известный ранее) связан с ростом «фактора ухода» электронов при увеличении разрядного тока. Второй, установленный в диссертации впервые, связан с «нелокальностью» истинного ионизационного коэффициента $\alpha = \alpha(x)$.

3. На основе гидродинамического описания электронного и ионного газов разработана трехмерная программа и проведено моделирование стационарного столба тлеющего разряда в азоте при давлениях 5 и 100 Торр. Эта программа служит основой для исследования недавно открытого и еще не изученного явления в механике низкотемпературной плазмы: движения и самоорганизации токовых нитей в разряде с полупроводниковым катодом.

Автор глубоко благодарен Ю.П. Райзеру за замечательное руководство, многочисленные беседы и поддержку при выполнении настоящей работы. Благодарю С.Т. Суржикова за ценные обсуждения, А.С. Петрусева и Т.В. Лосеву – за обсуждение численного алгоритма трехмерного счета. Автор признателен Ю.А. Астрову, Л.М. Порцелю и Л.Д. Цендину за обсуждения и указания на литературу; благодарен А.Н. Гордееву и В.М. Мысовой за постоянную поддержку и помощь при оформлении некоторых частей работы, а также С.Н. Сошенкову, указавшему на простой способ сэкономить время расчетов – работать под Release конфигурацией компилятора языка Фортран.

Список основных публикаций по теме диссертации

1. Ю.П. Райзер, Е.Л. Гуревич, М.С. Мокров, *ЖТФ*, Т 76, вып. 2, С 40 (2006).
2. М.С. Мокров, Ю.П. Райзер, *ЖТФ*, Т 78, вып. 4, С 47 (2008).
3. M.S. Mokrov and Yu.P. Raizer, *Plasma Sources Science&Technology*, **17**, 035031 (2008).
4. М.С. Мокров, Препринт № 877 ИПМех РАН (2008), 46 с.

Список цитированной литературы

1. Yu.A. Astrov, L.M. Portsel, S.P. Teperick, H. Willebrand and H.-G. Purwins *J. Appl. Phys.* **74** 2159 (1993).
2. C. Strümpel, Yu.A. Astrov and H.-G. Purwins *Phys. Rev. E* **62**, 4889 (2000).
3. Е.Л. Гуревич, Ю.П. Райзер, Х.-Г. Пурвинс *Журнал Технической Физики*, том 76, вып. 2, стр. 36 (2006).
4. E.Ammelt, Yu.A. Astrov and H.-G. Purwins *Physical Review E* **55**, 6731 (1997).
5. E. Ammelt, Yu.A. Astrov and H.-G. Purwins *Physical Review E* **58**, 7109 (1998).
6. Ю.А. Астров Диссертация ... доктора физико-математических наук, Физико-Технический Институт им. Иоффе РАН, С-Петербург, 2005.
7. M.C. Cross and P.C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
8. Ю.П. Райзер *Физика газового разряда*, М.: Наука, 1992. 536 с.
9. A.V. Phelps and Z.Lj. Petrović *Plasma Sources Science & Technology* **8**, R21 (1999).
10. V.A. Shveigert *High Temperature* **27**, 195 (1989).
11. V.P. Nagorny and P.J. Drallos *Plasma Sources Science & Technology* **6**, 212 (1997).
12. А.А. Кудрявцев, Л.Д. Цендин *Письма в ЖТФ*, том 28, вып 15, стр. 1 (2002).
13. M.S. Benilov and G.V. Naidis *J. Phys. D: Appl. Phys.* **38**, 3599 (2005).
14. M.S. Benilov, G.V. Naidis, Z.Lj. Petrović, M. Radmilovic-Radjenovici and A. Stojkovic *J. Phys. D: Appl. Phys.* **39**, 2959 (2006).
15. Ph. Belenguer and L.C. Pitchford *Journal of Applied Physics* **86**, 4780 (1999).
16. P.Hartmann, Z.Donko, G.Bano, L.Szalai and K. Rozsa *Plasma Sources Science & Technology* **9**, 183 (2000).
17. M.Radmilovic and Z.Lj. Petrovic *Eur. Phys. J. : Appl. Phys.* **11**, 35 (2000).
18. В.Н. Мелехин, Н.Ю.Наумов, *Журнал Технической Физики*, том 54, вып. 8, стр. 1521 (1984).
19. А.Энгель, М.Штеенбек *Физика и техника электрического разряда в газах*, М.; Л.; ОНТИ, 1936.

20. Z.Lj. Petrovic and A.V. Phelps *Physical Review E* 47, 2806 (1993).
21. B.M. Jelenkovic, K.Rozsa, and A.V. Phelps *Physical Review E* 47, 2816 (1993).
22. I.Stefanovic and Z.Lj. Petrovic, *Japn.J. Appl. Phys.* 36, 4728 (1997).
23. D.Marić, G.Malović and Z.Lj. Petrović *Journal of Physics: Conference Series* **86**, 012009 (2007).
24. A.V. Phelps, Z.Lj. Petrović and B.M. Jelencović *Physical Review E* **47**, 2825 (1993).
25. R.R. Arslanbekov and V.I. Kolobov *J. Phys D: Appl. Phys.* 36, 1 (2003).
26. Дж Мик, Крэгс Дж *Электрический пробой в газах*, Пер. с англ.; Под ред. В.С. Комелькова.—М: ИЛ, 1960.
27. В.Н. Мелехин, Н.Ю. Наумов, Н.П. Ткаченко *Журнал Технической Физики*, том 57, вып. 3, стр. 454 (1987).
28. D.D. Šijačić, Ebert Ute and I. Rafatov *Physical Review E* 70, 056220 (2004).
29. D.D. Šijačić, Ebert Ute and I. Rafatov *Physical Review E* 71 066402 (2005).
30. В.А. Швейгерт *Письма в ЖТФ*, том 19, вып. 20, стр. 56 (1993).
31. И.Д. Каганович, М.А. Федотов, Л.Д. Цендин, *ЖТФ*, том 64, вып. 3, с. 34 (1994).
32. V.I. Kolobov and A.Fiala *Physical Review E* 50, 3018 (1994).
33. А.А. Кудрявцев, Л.Д. Цендин *Письма в ЖТФ* том 28, вып. 24, стр. 36 (2002).
34. I.Rafatov, D.D. Šijačić and Ebert Ute *Physical Review E* 76, 036206 (2007).
35. I.Müller, C.Punset, E.Ammelt, H.-G. Purwins, and J.P. Boeuf *IEEE Transactions on Plasma Science* 27, № 1, P. 20 (1999).
36. I. Brauer, C. Punset, H.-G. Purwins and J.P. Boeuf *J. Appl. Phys.* 85, 7569 (1999).
37. L.Stollenwerk, Sh.Amiranashvili, J.-P. Boeuf, and H.-G Purwins *Phys. Rev. Lett.* 96, 255001 (2006).
38. M.S. Benilov *Physical Review E* 77 036408 (2008).
39. Ю.П. Райзер, С.Т. Суржиков, *Письма в ЖТФ* том 13, вып. 8, стр. 452 (1987).
40. Ю.П. Райзер, С.Т. Суржиков, *ТВТ* том 26, стр. 428 (1988).
41. Ю.П. Райзер, М.Н. Шнейдер, *ТВТ* том 29, стр. 1041 (1991).
42. Ю.П. Райзер, С.Т. Суржиков, *ТВТ* том 31, стр. 22 (1993).
43. Ю.П. Райзер, С.Т. Суржиков, *ТВТ* том 28, стр. 439 (1990).
44. Ю.П. Райзер, С.Т. Суржиков, Препринт ИПМ АН СССР № 344, Москва 1988, 32 с.
45. А.С. Петрусев, С.Т. Суржиков, *Физика плазмы*, том 34, стр. 269 (2008).
46. С.Т. Суржиков, *ТВТ*, том 43, стр. 828 (2005).
47. С.Т. Суржиков, *Физическая механика газовых разрядов*, М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана 2006, 639 с.
48. J.P. Boeuf and E. Marode *J Phys. D: Appl. Phys.* 15 2169 (1982).

49. D.D. Šijačić and Ebert Ute *Phys. Rev. E* 66, 066410 (2002).
50. A.V. Phelps ftp://jila.colorado.edu/collision_data.
51. M. Hayashi *Nagoya Institute of Technology Report No IPPJ-AM-19* (1981);
ftp://jila.colorado.edu/collision_data.
52. G.Malović, A. Strinić, S. Živanov, D.Marić and Z.Lj. Petrović *Plasma Sources Science & Technology* 12, S1 (2003).
53. J.Furst, M.Mahgerefteh and D.E. Golden *Physical Review A* 30, 2256 (1984).
54. M.A. Khakoo and S.Trajmar *Physical Review A* 34, 138 (1986).
55. H.A. Blevin, J.Fletcher and S.R. Hunter *Aust. J. Phys.* 31, 299 (1978).
56. A.Fiala, L.C. Pitchford and J.P. Boeuf *Physical Review E* 49, 5607 (1994).
57. C.B. Opal, W.K. Peterson, and E.C. Beaty *J. Chem. Phys.* 55, 4100 (1971).
58. S.Yoshida, A.V. Phelps, and L.C. Pitchford *Physical Review A* 27, 2858 (1983).
59. J.Wrkich, D.Mathews, I.Kanik, S.Trajmar, and M.A. Khakoo *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 35, 4695 (2002).
60. M.Surendra, D.B. Graves and G.M. Jellum *Physical Review A* 41, 1112 (1990).
61. И.М. Бронштейн, Б.С. Фрайман *Вторичная электронная эмиссия*. М.: Наука, 1969, 407 с.
62. M.A. Folkard and S.C. Haydon *Aust. J. Phys.* 24, 519 (1971).
63. M.A. Folkard and S.C. Haydon *Aust. J. Phys.* 24, 527 (1971).
64. Z.Stokic, M.M.F.R. Fraga, J.Bozin, V.Stojanović, Z.Lj. Petrović, and B.M. Jelenković *Physical Review A* 45, 7463 (1992).
65. J. Dutton *J. Phys. Chem. Ref. Data* 4, 577 (1975).
66. S.J. Buckman and A.V. Phelps *J. Chem. Phys.* 82, 4999 (1985).
67. A.V. Phelps *J. Phys. Chem. Ref. Data* 19, 653 (1990).
68. Z.Lj. Petrovic, B.M. Jelenkovic, and A.V. Phelps *Phys. Rev. Lett.* 68, 325 (1992).
69. H.D. Hagstrum *Physical Review* 104, 317 (1956).
70. M.M. Nikolic, A.R. Dordevic, I.Stefanovic, S.Vrhovac and Z.Lj. Petrovic *IEEE Transactions on Plasma Science* 31, №4, P. 717 (2003).
71. A.V. Phelps and L.C. Pitchford *Physical Review A* 31, 2932 (1985).
72. I. Stefanović, J. Berndt, D.Marić, V.Šamara, M.Radmilović-Radjenović, Z.Lj. Petrović, E. Kovačević and J.Winter *Physical Review E* 74 026406 (2006).
73. А.Н. Лодыгин, Л.М. Порцель, Ю.А. Астров *Письма в ЖТФ* том 34, вып 14, стр. 61 (2008).
74. A.L. Ward *J. Appl. Phys.* 33, 2789 (1962).
75. Grey Morgan C *Physical Review* 104, 566 (1956).
76. Д.С. Никандров, Л.Д. Цендин *Журнал Технич. Физики* том 75, вып. 10, стр. 29 (2005).
77. А.А. Андронов, А.А.Витт, С.Э. Хайкин, *Теория колебаний*, М.:Физматлит, 1959. 915 с.

78. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, М.: Наука. 1990. 488 с.
79. Г.В. Гадияк, В.А. Швейгерт, О.У. Ууэмаа *Изв. СО АН СССР, Сер. Техн. Наук* том 21, вып. 6, стр. 41 (1988).
80. P.L.G. Ventzek, T.J.Sommerer, R.J.Hoekstra and M.J.Kushner *Appl. Phys. Lett.* 63, 605 (1993).
81. В.А. Швейгерт *Журнал Технической Физики* том 63, вып. 5, стр. 29 (1993).
82. C.Punset, S.Cany and J.P. Voeuf *Journal of Applied Physics* 86, 124 (1999).
83. Р.П. Федоренко *Введение в вычислительную физику*, М.: МФТИ, 1994, 516 с.
84. D.L. Sharfetter and H.K. Gummel, *IEEE Trans. Electron. Devices* ED-16, 64 (1969).
85. В.П. Ильин *Численные методы решения задач электрофизики*, М.: Наука. 1985, 334 с.
86. V.Vahedi and G. Dipeso, *Journal of Computational Physics*, 131, 149, (1997).