

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

МОКРЯКОВ ВЯЧЕСЛАВ ВИКТОРОВИЧ

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГО-
СТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Р.В. Гольдштейн

Москва 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ | 5 |
| ВВЕДЕНИЕ | 7 |
| ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ ОТВЕРСТИЯХ..... | 14 |
| 1.1. Постановка задачи | 14 |
| 1.2. Построение основных уравнений | 15 |
| 1.3. Численное решение | 17 |
| 1.4. Расчет смещений на контуре отверстия и полей напряжений в среде. Физический смысл компонентов разложения..... | 22 |
| 1.5. Расчет наиболее вероятных точек зарождения трещин..... | 25 |
| 1.6. Модельная задача..... | 26 |
| 1.7. Пример расчета | 29 |
| 1.8. Экспериментальная проверка..... | 38 |
| 1.9. Заключение к главе 1 | 42 |
| ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОТВЕРСТИЙ..... | 43 |
| 2.1. Постановка задачи | 43 |
| 2.2. Построение основных уравнений | 44 |
| 2.3. Численное решение | 46 |
| 2.4. Пример расчета полей напряжений | 50 |
| 2.5. Исследование поведения коэффициента концентрации напряжений в квадратной решетке при одноосном растяжении | 59 |
| 2.6. Заключение к главе 2 | 63 |

| | |
|---|-----|
| ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАДИУСА..... | 64 |
| 3.1. Постановка задачи | 64 |
| 3.2. Основные уравнения | 65 |
| 3.3. Численное решение | 68 |
| 3.4. Примеры расчетов НДС | 73 |
| 3.4.1°. Кольцо одинаковых отверстий при всестороннем растяжении. 73 | |
| 3.4.2°. Ряд одинаковых отверстий..... | 76 |
| 3.4.3°. Малые отверстия в поле большого..... | 81 |
| 3.4.4°. Малые отверстия в поле двух больших отверстий..... | 86 |
| 3.5. Точность решения..... | 90 |
| 3.6. Заключение к главе 3 | 95 |
| ГЛАВА 4. ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ АНСАМБЛЯ ОТВЕРСТИЙ. ОБЪЕДИНЕНИЕ МУЛЬТИПОЛЕЙ | 97 |
| 4.1. Внешнее поле ансамбля отверстий | 97 |
| 4.2. Объединение мультиполей | 99 |
| 4.3. Примеры внешних полей | 102 |
| 4.3.1° Внешнее поле двух одинаковых отверстий..... | 102 |
| 4.3.2° Внешнее поле кольца одинаковых отверстий..... | 103 |
| 4.4. Заключение к главе 4 | 113 |
| ГЛАВА 5. РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНОВАТОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦА МАКРОТРЕЩИНЫ | 114 |
| 5.1 Концевая область трещиноватости макротрещины в сплошной упругой среде..... | 114 |
| 5.2 Концевая область трещиноватости макротрещины в слабопористой упругой среде..... | 116 |

| | |
|---|-----|
| 5.3 Концевая область трещиноватости макротрещины в высокопористой упругой среде..... | 117 |
| 5.4 Заключение к главе 5 | 121 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 122 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ, ОБРАЗУЕМЫЕ ОТДЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ..... | 123 |
| ЛИТЕРАТУРА..... | 132 |

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

| | |
|--------------------------------|---|
| i | мнимая единица |
| j, k, m, n | индексы |
| O | центр координат |
| x, y | декартовы координаты |
| ρ, φ | полярные координаты |
| $z = x+iy = \rho e^{i\varphi}$ | комплексное число, соответствующее точке на плоскости |
| z_j^0 | центр j -го отверстия |
| L_j | контур, соответствующий j -му отверстию |
| l | расстояние между центрами пары отверстий |
| α | угол, определяющий положение отверстий |
| p, q | нагрузки на бесконечности |
| $\Phi(z), \Psi(z)$ | комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили |
| t_j | точка на j -м контуре |
| T_j | точка на j -м контуре в локальной системе координат |
| t, t' | точки на контуре интегрирования |
| $g_j(t)$ | функция смещений j -го отверстия |
| $K(t, t'), L(t, t')$ | ядра интегрирования |
| $A(t')$ | свободный член интегрального уравнения |
| g_n | коэффициенты мультипольного разложения |
| $K_n(t'), L_n(t')$ | ядра суммирования в точке t' |
| s | дуга контура |
| F | интеграл квадрата модуля невязки |
| $G(g_n, t')$ | невязка приближенного решения $\{g_n\}$ в точке t' |
| G_k | коэффициенты разложения $G(g_n, t')$ |
| δ_{km} | символ Кронекера |

| | |
|---|---|
| $u(t), v(t)$ | смещения в точке t |
| $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy},$ $\sigma_p, \sigma_\varphi, \tau_{p\varphi}$ | компоненты тензора напряжений |
| σ | среднее напряжение |
| σ_s | диагональный член девиатора напряжений |
| N_1, N_2 | минимальный и максимальный порядки мультиполей |
| σ_{cr}, τ_{cr} | критические значения нормального и сдвигового напряжений |
| σ_1 | первое (наибольшее) главное напряжение |
| τ_{\max} | максимальное сдвиговое напряжения |
| R_j | радиус j -го отверстия |
| d | ширина промежутка между двумя отверстиями |
| ККН | коэффициент концентрации напряжений |
| θ | угол ориентации площадки |
| ω_I, ω_{II} | периоды решетки отверстий |
| $\sum'_{l,m}$ | суммирование по всем (l, m) , кроме $l = m = 0$. |
| $\sum''_{l,m}$ | суммирование по всем (l, m) : $(l > 0, m)$ и $(l = 0, m > 0)$ |
| ξ_j, η_j | переменные интегрирования по j -му контуру |
| r_{jm}, ζ_{jm} | геометрические параметры группы отверстий |
| ξ, η | переменные интегрирования по контуру |
| K_{nk}^{jm}, L_{nk}^{jm} | матрицы суммирования |
| A_k^m | свободные члены |
| G_k^m | коэффициенты разложения невязки m -го контура |
| a_n^j, b_n^j | коэффициенты разложения j -ых потенциалов |
| $R^*, z^*, a_n^*, b_n^*, g_n^*$ | параметры ансамбля |

ВВЕДЕНИЕ

Один из важнейших предметов исследования теории разрушения - поведение полей напряжений в окрестности концентраторов: дефектов и неоднородностей среды, полостей и включений. Широкое практическое приложение имеют задачи о концентрации напряжений возле отверстий и пор в конструкциях и материалах, нередко их можно свести к плоским задачам об упругой плоскости с отверстиями. К таким задачам можно отнести, например, задачи о туннелях, скважинах, перфорированных пластинах. Для их решения обычно используется метод сингулярных граничных интегральных уравнений (СГИУ), разработанный Н.И. Мусхелишвили в его основополагающих трудах [1, 2]. Метод в дальнейшем был значительно развит и расширен многими учеными (см., например, работы [3-7]), продолжает развиваться и сегодня (см., например, статьи [8, 9], посвященные исследованию свойств сингулярных интегралов). Приложение методов СГИУ в пространственных задачах о трещинах изучается в труде [10].

Для численного решения систем СГИУ обычно используется метод граничных элементов (МГЭ), бурно развивающийся в последние годы. О последних достижениях в этой области было доложено на Симпозиуме Международной Ассоциации МГЭ (IABEM) в июле 2006, по материалам Симпозиума издан сборник *"Boundary Element Analysis"* [11].

Поле напряжений вокруг одиночной поры в плоскости при произвольном нагружении хорошо изучено, получено точное аналитическое решение (см., например, [2, 4, 12]) для произвольной нагрузки на поверхности поры и на бесконечности). Это решение можно применять при достаточно редко расположенных в материале порах. Однако, если характерное расстояние между порами не превышает нескольких их диаметров, влияние пор друг на друга вносит значительные искажения в поля напряжений в их окрестностях.

В последнее время все больший интерес вызывают материалы, содержащие мезоструктуры пор ("сверхрешетки"), как природные (цеолиты), так и возникающие при различных процессах обработки, таких как радиационное облучение, травление, и др. [13-15]. В электронике в последние годы все более популярными, прежде всего из-за их уникальных свойств, становятся фотонные кристаллы и пористый кремний. Под воздействием механических нагрузок, градиентов температур в них могут возникать дефекты, трещины, что негативно сказывается на характеристиках материала.

Большое внимание уделялось изучению упругой плоскости с периодически и двояко-периодически расположенными отверстиями или включениями (группами отверстий или включений), например, в [16]. Аналитическое решение здесь не получено, но задача сведена к бесконечной системе линейных уравнений, которая решается численными методами. В [17] рассмотрены аналогичные задачи для волокнистых композитов, где роль концентраторов напряжений играют волокна. Приведены распределения напряжений на границе включения и матрицы для некоторых частных видов нагружений (продольный и поперечный сдвиг, поперечное растяжение для сплошных и полых волокон), но при этом использовалось приближение однородного взаимодействия между волокнами. Однако, для изучения процессов разрушения важно знать напряженно-деформированное состояние непосредственно в зоне возможного зарождения трещин (т.е. окрестности концентраторов напряжений и в области между ними) с учетом их взаимовлияния.

Даже для двух отверстий аналитическое решение задачи представляет собой серьезную проблему. Некоторые частные случаи (два отверстия в плоскости при всестороннем нагружении, одноосных нагружениях вдоль и поперек оси, соединяющей центры отверстий) исследованы в [18]. Здесь с помощью биполярной системы координат для них получено аналитическое решение в виде гиперболическо-тригонометрических рядов. К сожалению, в общем случае нагружения применение данного метода представляется затруднительным. Развитие этот метод

получил [19], где особый упор сделан на случай малого расстояния между отверстиями, для которого известные методы были неэффективны.

Из-за сложности аналитического решения подобных задач приходится применять численные методы. Суть их обычно сводится к замене искомой функции (например, упругих потенциалов) на линейную комбинацию системы известных функций, дающих приближение искомого решения с приемлемой точностью. В результате вместо СГИУ получим систему линейных уравнений, методы решения которых давно и хорошо разработаны. Так, в работах [20, 21] исследованы распределения напряжений вокруг двух и трех отверстий, а также бесконечного ряда отверстий. Напряжения рассчитывались для случая, когда прямая, соединяющая центры отверстий, параллельна приложенной на бесконечности нагрузке, или перпендикулярна ей.

В последние годы в связи с бурным развитием вычислительной техники появилось большое количество работ, посвященных совершенствованию численных методов расчета напряженно-деформированного состояния пластин с отверстиями. Например, в [22] авторы применили модифицированный метод квадратур для вычисления концентрации напряжения у границы отверстия произвольной формы. В статье [23] описан метод циклического уточнения НДС вокруг системы круговых отверстий. В [24] предлагается расширение метода конечных элементов, которое позволяет моделировать наличие отверстий в пластине одним специальным элементом.

Для упрощения задачи влияние удалённых от дефекта внешних границ тела обычно (по принципу Сен-Венана) полагается незначительным. Другими словами, рассматривается задача об отверстии либо в бесконечной плоскости (если отверстие удалено от всех границ тела), либо в бесконечной полуплоскости (если отверстие расположено вблизи какой-либо точки границы). Однако если размер отверстия сравним с характерным размером тела, то влиянием границ уже нельзя пренебречь. Решение таких задач (за исключением простейших случаев, таких как

толстостенная труба) возможно только численно, и поэтому, ранее было весьма затруднено. Сейчас интерес к таким задачам всё больше растёт. Так, в [20] тщательно рассматривается поведение и устойчивость прямоугольной пластины с большим круговым отверстием под различными видами нагрузок.

В последние годы активно развивается быстрый мультипольный метод, БММ (fast multipole method, FMM), который (см., например, [11], а также [26-28]) позволяет существенно снизить порядок сложности задачи (с $O(N^3)$ до $O(N)$) при расчете НДС упругой пластины с большим количеством дефектов (десятки тысяч и более).

В статье [29] предложен метод решения задачи об антиплоской деформации среды с упругими волокнистыми включениями кругового сечения. Аналогичную задачу, но для изгиба плоскости решена в [30]. В [31] рассмотрен метод решения задачи о двух отверстиях произвольной формы в упругой плоскости.

За последние годы получено большое количество результатов, касающихся неограниченных систем неоднородностей. Так, перфорированная плоскость с отверстиями сложного профиля (нецилиндрическими) рассмотрена [32]. Упругой пластине с двояко-периодической системой включений посвящена работа [33]. В [34, 35] изучается разрушение перфорированного алюминиевого листа при растяжении, в статье рассматривается влияние распределения отверстий на разрушение, проведено сравнение численных расчётов с экспериментальными данными. Анизотропный материал с массивом произвольно ориентированных эллиптических отверстий рассматривается в статье [36]. Возможности применения генетических алгоритмов для расчёта перфорированных пластин исследуются в [37].

Всё больший интерес привлекают к себе и динамические задачи: так, в [38] предложен метод расчёта концентрации напряжений вокруг отверстия в полуплоскости, вызываемой движущейся по границе полуплоскости нагрузкой. Решение этой задачи весьма важно, например, для дорожного строительства, когда требуется рассчитать прочность труб и стенок шахт, проходящих под полотном дороги.

Расчет концентрации напряжений вокруг дефектов играет важную роль при моделировании процессов разрушения, в т.ч. разрушения горных пород под действием собственного веса и при землетрясении, изучению этих процессов посвящен ряд работ [39 - 47].

Таким образом, тема упругой среды с отверстиями и включениями сегодня актуальна и востребована, и является перспективной областью исследований.

В данной работе представлен метод численного решения задач об упругой плоскости с круговыми отверстиями. Предлагаемый метод мультипольных разложений позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние среды как на удалении от отверстий, так и непосредственно в их окрестности.

В главе 1 основные положения метода мультипольного разложения выводятся при решении задачи о двух взаимодействующих отверстиях в напряженной плоскости. С помощью метода решена модельная задача, результаты полностью совпали с опубликованными данными. Также исследована концентрация напряжений на отверстиях при их различном расположении, определены вероятные сценарии разрушения. Кроме того, приведены результаты ряда экспериментов по разрушению тел с отверстиями и проведено сравнение с расчетами, проведенными по методу мультипольных разложений.

В главе 2 метод применен для решения задачи о двояко-периодической решетке отверстий в упругой плоскости. Исследовано поведение концентрации напряжений в решетке в зависимости от периодов решетки и ее ориентации относительно приложенных нагрузок.

В главе 3 метод мультипольного разложения расширен на более широкий тип задач: упругая плоскость с отверстиями произвольного радиуса и расположения. Рассчитано поле напряжений вокруг кольца отверстий, цепочки отверстий, а также группы малых отверстий в области влияния одного или двух больших.

В главе 4 показано, что ряд мультиполей может быть использован для описания не только поля одного отверстия, но и внешнего поля группы взаимодейст-

вующих отверстий. Даны определения ансамбля отверстий, разделенных ансамблей, внешнего поля ансамбля, доказана теорема о мультипольной разложимости внешнего поля.

В главе 5 продемонстрировано применение метода мультипольных разложений для изучения механизма разрушения пористых сред – произведен расчет области микротрещиноватости в окрестности конца макротрещины. Рассмотрены несколько моделей пористости.

В приложении приведены поля отдельных мультиполей.

Результаты диссертации опубликованы в работах [48 - 50]:

- *Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем при взаимодействии двух близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 774. Москва. 2005. 30с.

- *Мокряков В.В.* Задача о напряженном состоянии, возникающем в упругой плоскости, ослабленной бесконечной периодической системой близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 806. Москва. 2006. 34с.

- *Мокряков В.В.* Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // Изв. РАН. МТТ. 2007. №5.

- *Мокряков В.В.* Применение метода мультиполей для решения задачи о нескольких отверстиях произвольного радиуса – Препринт ИПМех РАН № 849. Москва. 2007. 34с.

А также доложены на:

- Международная Молодежная Научная Конференция «XXX Гагаринские чтения». 2004. (*Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем при взаимодействии двух близко расположенных отверстий.)

- Международная Молодежная Научная Конференция «XXXII Гагаринские чтения». 2006. (*Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем в периодической системе близко расположенных отверстий.)

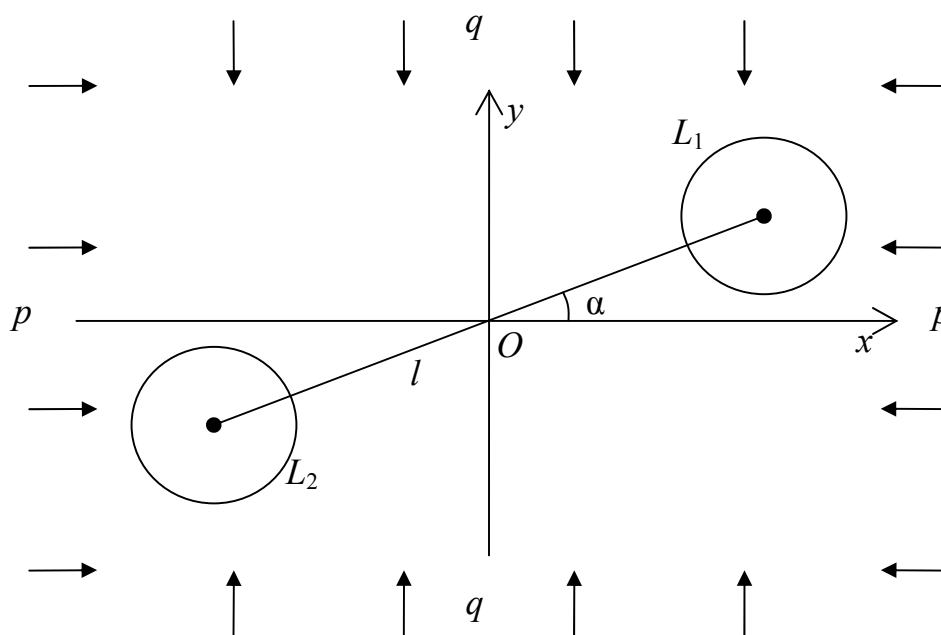
- на семинарах Института проблем механики РАН, в том числе на совместном заседании Семинара по динамике сплошной среды под руководством академика А.Г. Куликовского, профессора В.Н. Кукуджанова и профессора И.В. Симонova и Семинара по механике прочности и разрушения под руководством профессора Р.В. Гольдштейна, состоявшегося в ИПМех РАН 31 октября 2007 г..

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Роберту Вениаминовичу Гольдштейну за полезные советы и помощь в работе, а также кандидату физико-математических наук Кулиничу Юрию Владимировичу и кандидату технических наук Николаю Михайловичу Осипенко за предоставленные результаты экспериментов и их обсуждение.

ГЛАВА 1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ ОТВЕРСТИЯХ

1.1. Постановка задачи

В бесконечной упругой плоскости имеется два одинаковых круговых отверстия. Плоскость подвергается двухосному нагружению. Нагрузка на краях отверстий отсутствует. Требуется найти смещения на краях отверстий, распределение полей напряжений и деформаций в среде. Также требуется найти наиболее вероятные точки зарождения трещин и ориентацию отверстий (по отношению к нагрузке), при которой возникновение трещин наиболее вероятно.



Фиг. 1.1

1.2. Построение основных уравнений

Выберем систему координат так, чтобы оси совпали с направлениями главных напряжений на бесконечности. Нагрузку вдоль Ox обозначим p , вдоль Oy – q . Начало координат расположим так, чтобы отверстия располагались симметрично относительно него, это упростит вид уравнений. В качестве единицы масштаба выберем радиус отверстий, т.е. будем считать все линейные размеры отнесенными к радиусу. Сами окружности, таким образом, будут единичными. Обозначим через α и l угол между прямой, соединяющей центры отверстий, и осью Ox и расстояние между центрами. Тогда координаты центров окружностей записываются в виде

$$z_1^0 = (l/2)e^{i\alpha} = z_0; \quad z_2^0 = -(l/2)e^{i\alpha} = -z_0 \quad (1.1)$$

Для решения использованы комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили. Для данной задачи они имеют следующий вид [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \frac{g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}{T_k - z} \\ \Psi(z) &= \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{L_k} \left[\frac{\bar{g}'_k(t_k) e^{-i\alpha_k} d\bar{t}_k}{T_k - z} - \frac{\bar{T}_k g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k}{(T_k - z)^2} \right] + \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi(z - z_k^0)^2} \int_{L_k} [\bar{T}_k g'_k(t_k) e^{i\alpha_k} dt_k - T_k \bar{g}'_k(t_k) e^{-i\alpha_k} d\bar{t}_k] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $g_k(t_k)$ – функции смещений на k -м контуре, $T_k = z_k^0 + t_k e^{i\alpha_k}$, t_k – локальные координаты, связанные с k -м отверстием. Выберем локальные системы координат так, чтобы их точки отсчета располагались в центрах отверстий, и при этом сориентируем их симметрично относительно O .

Тогда $T_1 = z_0 + t$; $T_2 = -z_0 - t$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$; $g_2(t_2) = g_1(t_1) = g(t)$, и интегрирование по двум контурам L_1 и L_2 можно заменить интегрированием по одному контуру L , совпадающему с L_1 . Отметим, что поскольку L_k являются контурами отверстий, то интегрирование ведется по часовой стрелке.

При этом потенциалы примут вид

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z} \right] g'(t) dt \\
 \Psi(z) &= \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z} \right] \overline{g'(t)} dt - \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{1}{(t+z_0-z)^2} + \frac{1}{(t+z_0+z)^2} \right] \overline{(t+z_0)} g'(t) dt + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(z_0-z)^2} + \frac{1}{(z_0+z)^2} \right) \int_L \left[\overline{(t+z_0)} g'(t) dt + (t+z_0) \overline{g'(t)} dt \right]
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

На контуре L ($z \rightarrow t'+z_0$, $t'=e^{i\theta}$) потенциалы в виду отсутствия нагрузок должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi(z) + \overline{\Phi}(z) + \frac{d\bar{z}}{dz} [z \overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z)] = 0 \tag{1.4}$$

или

$$\Phi(t'+z_0) + \overline{\Phi}(t'+z_0) - \bar{t}'^2 [(t'+z_0) \overline{\Phi}'(t'+z_0) + \overline{\Psi}(t'+z_0)] = 0 \tag{1.5}$$

После подстановки значений потенциалов получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int K(t, t') g'(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int L(t, t') \overline{g'(t)} d\bar{t} = A(t') \tag{1.6}$$

где ядра

$$K(t, t') = \frac{2}{t-t'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t+t'+2z_0} - \frac{\bar{t}'^2}{\bar{t} + \bar{t}' + 2\bar{z}_0} + \frac{1}{t} \frac{\bar{t}'^2}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^2} \tag{1.7a}$$

$$L(t, t') = \frac{1}{\bar{t} + \bar{t}' + 2\bar{z}_0} + \bar{t}'^2 \frac{t+t'+2z_0}{(\bar{t} + \bar{t}' + 2\bar{z}_0)^2} - t \frac{\bar{t}'^2}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^2} \tag{1.7б}$$

и свободный член

$$A(t') = -\frac{p+q}{2} + \frac{q-p}{2} \bar{t}'^2 \tag{1.7в}$$

Добавим к (1.6) условие скачка смещений при обходе по контуру отверстия

$$\int g'(t)dt = B \quad (1.8)$$

В нашем случае $B = 0$, т.к. смещения непрерывны.

1.3. Численное решение

Будем искать численное решение в виде ряда Лорана (далее будет показано, что члены этого разложения соответствуют мультипольным концентраторам напряжений соответствующего порядка)

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n, \text{ где } t = e^{i\theta} - \text{точка на контуре } L. \quad (1.9)$$

Тогда уравнения примут следующий вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') = A(t'), \quad (1.10)$$

где

$$K_n(t') = \frac{1}{2\pi} \int K(t, t') t^n dt; \quad L_n(t') = \frac{1}{2\pi} \int L(t, t') \bar{t}^n d\bar{t} \quad (1.11)$$

В качестве критерия точности решения примем функцию

$$F(g_n) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') - A(t') \right|^2 ds, \quad ds = d\theta = \frac{dt'}{ie^{i\theta}} = -i \frac{dt'}{t'} \quad (1.12)$$

где s – расстояние вдоль контура L .

Согласно теореме единственности данная задача теории упругости при заданных граничных условиях имеет одно и только одно решение. Значит, если g_n – точное решение, то $F = 0$, в противном случае $F > 0$. Более того, $F(g_n)$ является положительно определенной квадратичной формой от g_n , поэтому чем больше каждое g_n отклоняется от решения, тем больше значение $F(g_n)$.

Замечание. Отметим, что для решения поставленной задачи нельзя использовать метод интерполяций (см. напр. [4 – 9]). При этом методе выбирается ряд

точек на контуре и ищется решение в виде суммы ортогональных функций [52 – 54], при котором в этих точках удовлетворяется граничное условие. Далее искомая функция интерполируется между точками коллокации, при этом предполагается, что в промежуточных точках контура погрешность не будет превышать допустимого значения.

Однако для кругового отверстия такой подход непригоден из-за так называемого "парадокса симметрии" [6]. Любой интерполяционный многочлен на единичной окружности представляет собой линейную комбинацию тригонометрических функций (ряд Лорана превращается в ряд Фурье). Значит, если мы возьмем на контуре две противоположные точки, то значение в них каждого члена разложения будет либо одинаковым (четные степени), либо противоположным (нечетные степени). В этих условиях, если точки коллокации расположены по контуру равномерно, полученная система линейных уравнений будет плохо обусловленной. Подобный же эффект возникает, если точек слишком много, т.е. имеются ограничения по точности вычислений. Но если точки расположить неравномерно, то в наибольших промежутках погрешности будут накапливаться. В результате нередко получаются решения, когда в каждой из точек коллокации граничное условие удовлетворяется, а в целом точность совершенно неприемлема. Поэтому более верным представляется использовать интегральный критерий точности, например, упомянутую функцию $F(g_n)$. Тогда его минимальное значение будет соответствовать искомому численному решению задачи.

Для того, чтобы вычислить $F(g_n)$, разложим функцию

$$G(g_n, t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{g}_n L_n(t') - A(t') \quad (1.13)$$

в ряд Лорана по t'

$$G(g_n, t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k$$

В силу взаимной ортогональности функций t^k ($k \in \mathbb{Z}$) на единичной окружности функция $F(g_n)$, которую можно рассматривать как норму функции $G(g_n, t')$ на контуре L , выражается через сумму квадратов модулей коэффициентов G_k .

$$\begin{aligned}
 F(g_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k \right|^2 \bar{t}' dt' = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k \right) \overline{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m t'^m \right)} \bar{t}' dt' = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m t'^k \bar{t}'^m \bar{t}' dt' = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m \int_L t'^{k-m} \bar{t}' dt' = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,m=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_m (2\pi i \delta_{km}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \bar{G}_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |G_k|^2
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

здесь δ_{km} – символ Кронекера.

Очевидно, что уравнение $F(g_n) = 0$ равносильно системе $G_k = 0$.

Найдем G_k . Для этого найдем $K_n(t')$ и $L_n(t')$.

$$K_n(t') = \begin{cases} -i \left(t'^n + \frac{(-1)^n \bar{t}'^n}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^{n+2}} \right), & n > 0 \\ -2i \left(1 + \frac{\bar{t}'^2}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^2} \right), & n = 0 \\ -i \left(\frac{1}{t' + 2z_0} - \frac{\bar{t}'^2}{\bar{t}' + 2\bar{z}_0} \right), & n = -1 \\ i(t'^n + (-1)^n (t' + 2z_0)^n), & n < -1 \end{cases} \tag{1.15a}$$

$$L_n(t') = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -i(-1)^n (\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^n \left(1 - n\bar{t}'^2 \frac{t' + 2z_0}{\bar{t}' + 2\bar{z}_0} + \frac{(n-1)\bar{t}'^2}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^2} \right), & n \leq -1 \end{cases} \tag{1.15b}$$

Для разложения $K_n(t')$ и $L_n(t')$ в ряд Лорана, используем известную формулу суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 \tag{1.16}$$

Поскольку в данном случае $\left| \frac{t'}{2z_0} \right| = \left| \frac{e^{i\theta}}{le^{i\alpha}} \right| = \frac{1}{l} |e^{i(\theta-\alpha)}| = \frac{1}{l} < \frac{1}{2} < 1$, то получаем

следующее разложение

$$\frac{1}{t' + 2z_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2z_0)^{k+1}} t'^k \quad (1.17a)$$

Продифференцировав n раз, получим

$$\frac{1}{(t' + 2z_0)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2z_0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} t'^k \quad (1.17б)$$

Соответственно, справедливы и сопряженные формулы

$$\frac{1}{\bar{t}' + 2\bar{z}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k+1}} \frac{1}{t'^k}; \quad \frac{1}{(\bar{t}' + 2\bar{z}_0)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \frac{1}{t'^k} \quad (1.17в,г)$$

Подставив эти результаты в выражения для K_n и L_n , получим

$$K_n(t') = \begin{cases} -i \left(t'^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{(k-2)!(n+1)!} \frac{1}{t'^k} \right), & n > 0 \\ -2i \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^k} \frac{k-1}{t'^k} \right), & n = 0 \\ -i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2z_0)^{k+1}} t'^k - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k-1}} \frac{1}{t'^k} \right), & n = -1 \\ i \left(\frac{1}{t'^{-n}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{(2z_0)^{k-n}} \frac{(k-n-1)!}{k!(-n-1)!} t'^k \right), & n < -1 \end{cases} \quad (1.18a)$$

$$L_n(t') = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -i(-1)^n \left(\frac{1}{(2\bar{z}_0)^{-n}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \left[\frac{(k-n-2)!}{(k-2)!(-n-1)!} 4|\bar{z}_0|^2 - \frac{(k-n)!}{k!(-n)!} (k-1) \right] \frac{1}{t'^k} \right), & n \leq -1 \end{cases} \quad (1.18б)$$

Подставив эти выражения в $G(g_n, t')$ и сгруппировав члены по степеням t' , получим следующие выражения для G_k

$$\begin{aligned}
 G_0 &= -i \left\{ 2g_0 + \frac{g_{-1}}{2z_0} - \sum_{n=2}^{\infty} g_{-n} \frac{(-1)^n}{(2z_0)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^n} \right\} + \frac{p+q}{2}; \\
 G_{-1} &= 0; \\
 G_{-2} &= -i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^{n+2}} + \frac{2g_0}{(2\bar{z}_0)^2} - \frac{g_{-1}}{2\bar{z}_0} - g_{-2} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(2\bar{z}_0)^{n+2}} \left[n \cdot 4|z_0|^2 - \frac{(n+2)(n+1)}{2} \right] \right\} - \frac{q-p}{2}; \\
 G_k &= -i \left\{ g_k + g_{-1} \frac{(-1)^k}{(2z_0)^{k+1}} - \sum_{n=2}^{\infty} g_{-n} \frac{(-1)^{k+n}}{(2z_0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} \right\}, k > 0 \quad (1.19) \\
 G_{-k} &= -i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{(-1)^{k+n}}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{(k-2)!(n+1)!} + 2g_0(k-1) \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^k} - g_{-1} \frac{(-1)^k}{(2\bar{z}_0)^{k+1}} - g_{-k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^{k+n}}{(2\bar{z}_0)^{k+n}} \left[\frac{(k+n-2)!}{(k-2)!(n-1)!} \cdot 4|z_0|^2 - \frac{(k+n)!}{k!n!} (k-1) \right] \right\}, k > 2
 \end{aligned}$$

Таким образом, получена бесконечная система линейных уравнений относительно g_n , однако для $k = -1$ имеется тривиальное уравнение: $0 = 0$. Но есть еще уравнение совместности, которое равносильно $g_{-1} = B/2\pi i$. Это уравнение и заменит недостающее в системе $G_k = 0$.

Ограничившись степенями $-N_1 \leq k, n \leq N_2$, где $N_1, N_2 \gg 1$, получим конечную линейную систему уравнений. Количество уравнений и переменных в ней равно $N_1 + N_2 + 1$. Решение этой системы будет приближенным решением системы. Причем, чем большие порядки учтены при решении, тем большая точность может быть достигнута.

Отметим, что подобный метод сведения задачи к бесконечной системе уравнений путем разложения искомых функций в ряд Лорана применялся в [21], только там в ряды раскладывались упругие потенциалы. Здесь же оба потенциала вы-

ражаются через одну функцию $g(t)$, что позволяет вдвое сократить количество неизвестных и уравнений в конечной системе при той же точности. Кроме того, вместо функций комплексного переменного мы здесь имеем функцию, заданную на контуре, что позволяет не рассматривать ограничения, характерные для первых (аналитичность и т.п.), поскольку окончательное решение будет удовлетворять им автоматически.

1.4. Расчет смещений на контуре отверстия и полей напряжений в среде. Физический смысл компонентов разложения

Согласно [4], смещения на контуре выражаются следующим образом

$$u(t) + iv(t) = \frac{i(1 + \kappa)}{2G} g(t) \quad (1.20)$$

Здесь κ , G – упругие константы материала.

Итак, получаем

$$\begin{aligned} u(t) + iv(t) &= \frac{i(1 + \kappa)}{2G} \int \sum_{n=-N_1}^{N_2} g_n t^n dt = \frac{i(1 + \kappa)}{2G} \int \left[\sum_{n=0}^{N_2} g_n t^n + \sum_{n=2}^{N_1} g_{-n} \frac{1}{t^n} + \frac{g_{-1}}{t} \right] = \\ &= \frac{i(1 + \kappa)}{2G} \left[\sum_{n=0}^{N_2} \frac{g_n}{n+1} t^{n+1} - \sum_{n=2}^{N_1} \frac{g_{-n}}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} + g_{-1} \ln t + const \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Константа интегрирования соответствует смещению всего отверстия как единого целого, т.е. вклада в деформацию не вносит. Таким образом, можем приравнять ее нулю.

Отметим, что разложение функции, заданной на единичной окружности, в ряд Лорана относительно центра окружности фактически является разложением на мультиполи, т.е. члены разложения, соответствующие каждому g_n , имеют вполне определенный физический смысл. Так, $\text{Re } g_0$ соответствует вращению контура, как единого целого, причем другие члены вклад во вращение не дают. Аналогично, $\text{Im } g_0$ (и только она) описывает всестороннее расширение (сжатие) кон-

тура. Члену при g_{-2} соответствует деформация чистого сдвига. Вместе эти члены дают решение для одиночного отверстия в плоскости

$$g'(t) = i \left(\frac{p+q}{4} + \frac{q-p}{2} \frac{1}{t^2} \right)$$

Члену при g_{-4} соответствует квадрупольная деформация, и вообще, каждому g_{-n} соответствует мультипольная деформация n -го порядка. Отметим, что каждому g_{-n} ($n > 2$) соответствует сопряженный ему член g_{n-2} , который позволяет выделить из n -го члена отдельно действительную и мнимую компоненты. Например, комбинируя 0-й и -2-й члены можно получить одноосную деформацию вдоль любой из координатных осей.

Особое внимание стоит обратить на коэффициент g_{-1} , который соответствует дислокационно-подобной деформации. Отметим, что это единственный член, который дает разрыв смещений. Таким образом, при любых граничных условиях мы можем вычислить g_{-1} , исходя только из условия совместности (но только его).

В целом, можно сказать, что разложение функции, заданной на единичной окружности, в ряд Лорана относительно центра окружности фактически и является разложением по мультиполям.

Для вычисления напряжений представим их через потенциалы

$$\sigma = \Phi + \bar{\Phi}; \quad \sigma_s + i\tau_{xy} = \bar{z}\Phi' + \Psi \quad (1.22)$$

Здесь $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ – среднее напряжение, $\sigma_s = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ и τ_{xy} – компоненты девиатора напряжений.

Компоненты напряжений выразятся через них так

$$\sigma_x = \sigma - \sigma_s; \quad \sigma_y = \sigma + \sigma_s$$

Подставив разложение

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n$$

в выражения для потенциалов, получим

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} g_n \int_L \left[\frac{t^n}{t+z_0-z} + \frac{t^n}{t+z_0+z} \right] dt = \\ &= \frac{p+q}{4} - i \sum_{n=-N_1}^{-1} g_n \left[(z-z_0)^n + (-z-z_0)^n \right];\end{aligned}\quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \bar{g}_n \int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z} \right] \frac{-dt}{t^{n+2}} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} g_n \int_L \left[\frac{1}{(t+z_0-z)^2} + \frac{1}{(t+z_0+z)^2} \right] (\bar{t} + \bar{z}_0) t^n dt + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right) \sum_{n=-N_1}^{N_2} \int_L [g_n (\bar{t} + \bar{z}_0) t^n dt + \bar{g}_n (t+z_0) t^{-n-2} dt] = \\ &= \frac{q-p}{2} - i \left\{ \sum_{n=-N_1}^0 g_n (n-1) \left[(z-z_0)^{n-2} + (-z-z_0)^{n-2} \right] + \right. \\ &\quad + \sum_{n=-N_1}^{-1} \bar{z}_0 g_n n \left[(z-z_0)^{n-1} + (-z-z_0)^{n-1} \right] + \sum_{n=-1}^{N_2} \bar{g}_n (z-z_0)^{-n-2} + \sum_{n=-1}^{N_2} \bar{g}_n (-z-z_0)^{-n-2} + \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right) [g_0 + \bar{g}_0 + g_{-1} \bar{z}_0 + \bar{g}_{-1} z_0] \right\} = \\ &= \frac{q-p}{2} - i \left\{ - \sum_{n=2}^{N_1} g_{-n} \left[\left(\frac{n+1}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{n+1}{(-z-z_0)^{n+2}} \right) + \left(\frac{n \bar{z}_0}{(z-z_0)^{n+1}} + \frac{n \bar{z}_0}{(-z-z_0)^{n+1}} \right) \right] + \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N_2} \bar{g}_n \left[\frac{1}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{1}{(-z-z_0)^{n+2}} \right] + 2 \bar{g}_0 \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(-z-z_0)^2} \right] + \\ &\quad \left. + \bar{g}_{-1} \left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{-z-z_0} \right] + z_0 \bar{g}_{-1} \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(-z-z_0)^2} \right] - 2 g_{-1} \left[\frac{1}{(z-z_0)^3} + \frac{1}{(-z-z_0)^3} \right] \right\}\end{aligned}\quad (1.23b)$$

Соответственно

$$\sigma = \frac{p+q}{2} - i \sum_{n=1}^{N_1} \left\{ \bar{g}_{-n} \left[\frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2} + \frac{1}{(\bar{z}+\bar{z}_0)^2} \right] - g_{-n} \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] \right\} \quad (1.24a)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s + i\tau_{xy} = & \frac{q-p}{2} - i \left\{ \sum_{n=2}^{N_1} g_{-n} \left[\frac{n|z-z_0|^2 - (n+1)}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{n|z+z_0|^2 - (n+1)}{(-z-z_0)^{n+2}} \right] + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{N_2} \bar{g}_n \left[\frac{1}{(z-z_0)^{n+2}} + \frac{1}{(-z-z_0)^{n+2}} \right] + 2g_0 \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] + \\
& \left. + (g_{-1}\bar{z} + \bar{g}_{-1}z) \left[\frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{1}{(z+z_0)^2} \right] - 2g_{-1} \left[\frac{1}{(z-z_0)^3} - \frac{1}{(z+z_0)^3} \right] \right\}
\end{aligned} \quad (1.246)$$

1.5. Расчет наиболее вероятных точек зарождения трещин

Рассмотрим следующие критерии возникновения трещин:

1°. Значение какого-либо нормального напряжения превышает критическое значение σ_{cr} – возникновение трещины разрыва.

2°. Значение какого-либо сдвигового напряжения превышает критическое значение τ_{cr} – возникновение трещины сдвига.

В полярной системе координат ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$) компоненты тензора напряжений имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} = \sigma_\rho = & \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi = \sigma - \sigma_s \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\
\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi = & \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi = \sigma + \sigma_s \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\
\sigma_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\varphi} = & (\sigma_y - \sigma_x) \cos \varphi \sin \varphi + 2\tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \sigma_s \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi
\end{aligned} \quad (1.25)$$

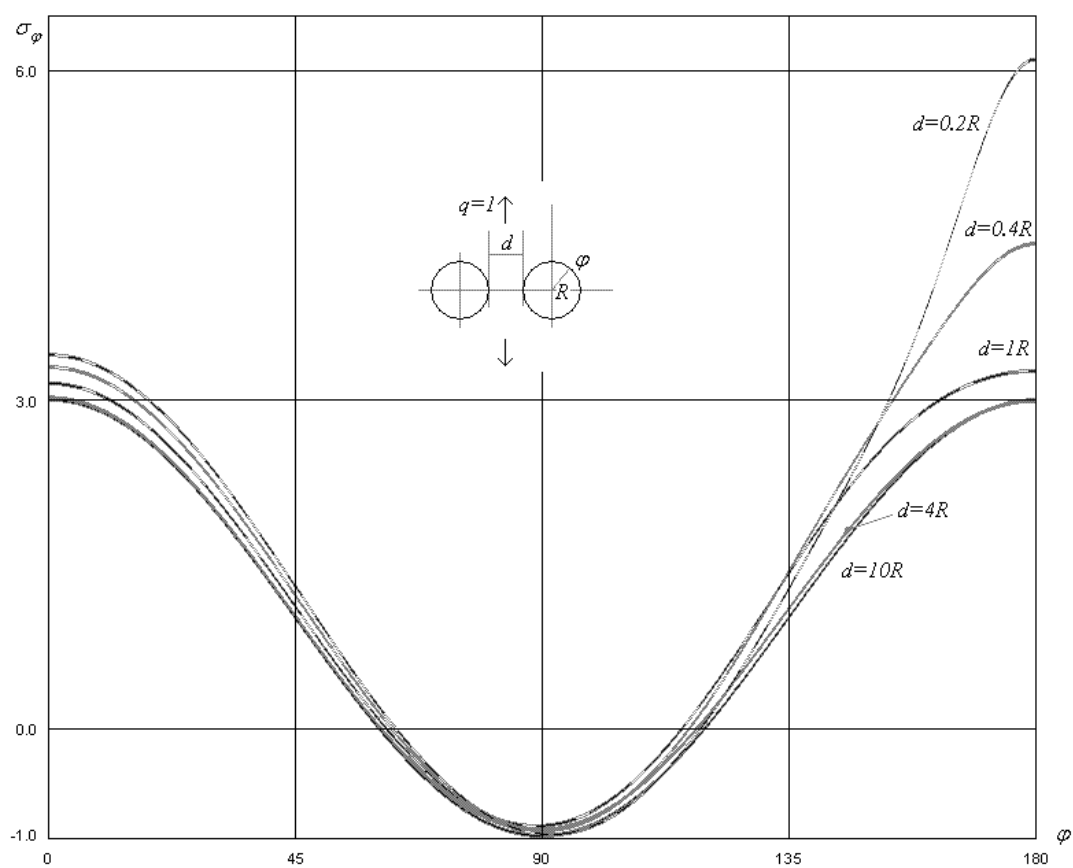
Поскольку σ_ρ и $\tau_{\rho\varphi}$ на контуре, согласно граничным условиям, равны нулю, максимальное растяжение может быть достигнуто только на площадке, перпендикулярной контуру, чему соответствует σ_φ . Таким образом, трещина разрыва в нашей задаче может начать расти только перпендикулярно краю отверстия.

Аналогично, максимальный сдвиг может быть достигнут только на площадке, располагающихся под углом 45° к контуру. Этим направлениям соответствует напряжение $\tau_{\max} = -\sigma_s \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$, $\tau_{\max}^2 = \sigma_s^2 + \tau_{xy}^2$. Таким образом, трещины сдвига могут зародиться только под углом 45° к краю отверстия.

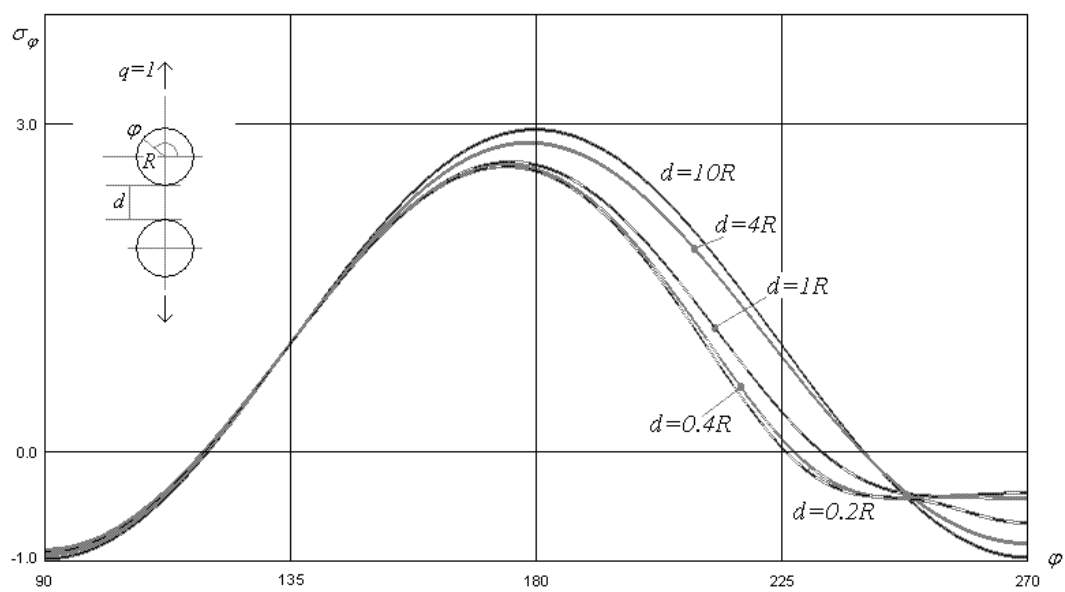
1.6. Модельная задача

Для проверки работоспособности модели была выбрана задача о вертикальном растяжении плоскости с парой одинаковых отверстий, контуры которых свободны от нагрузки. Эта задача хорошо исследована в большом количестве работ. В частности, в [23] тщательно изучено поведение тангенциального напряжения на контурах отверстий.

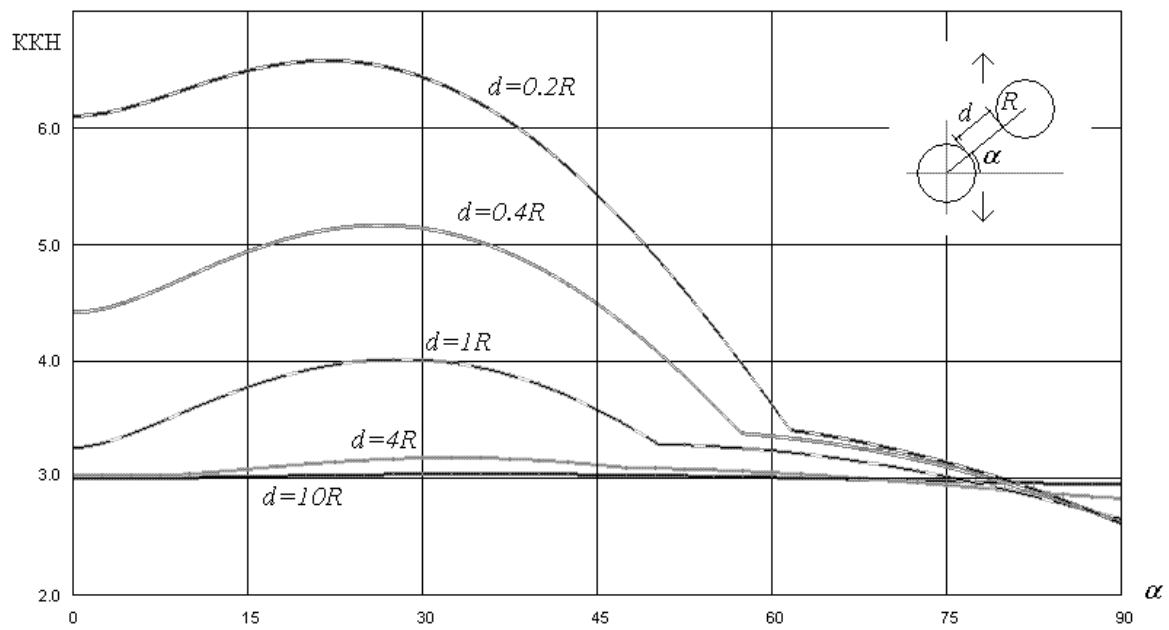
Была построена программа, которая рассчитывала напряженно-деформированное состояние в плоскости используя метод мультипольного разложения. Для различных расстояний между отверстиями были получены: распределение σ_φ вдоль контура, для горизонтального расположения отверстий (фиг. 1.2); распределение σ_φ вдоль контура, для вертикального расположения отверстий (фиг. 1.3); зависимость коэффициента концентрации напряжений на отверстиях (ККН) от α (фиг. 1.4). Результаты расчетов полностью совпали с результатами [23].



Фиг 1.2



Фиг 1.3.



Фиг. 1.4

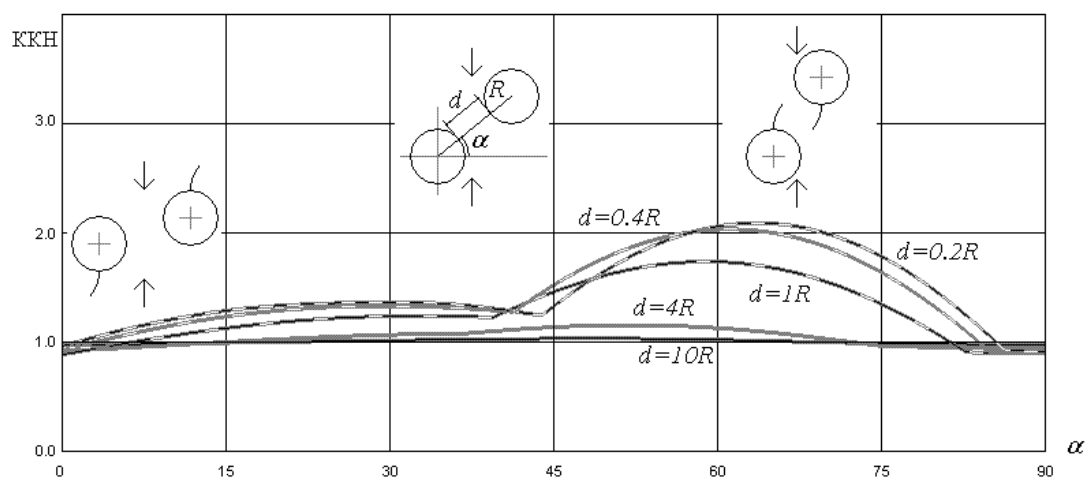
1.7. Пример расчета

Рассматривается одноосное нагружение $p = 0$, $q = -1$ – вертикальное сжатие. Ширина промежутка между отверстиями $d = l - 2R$ лежит в диапазоне от $0.2R$ до $10R$. Исследуются поля напряжений для различных α . В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

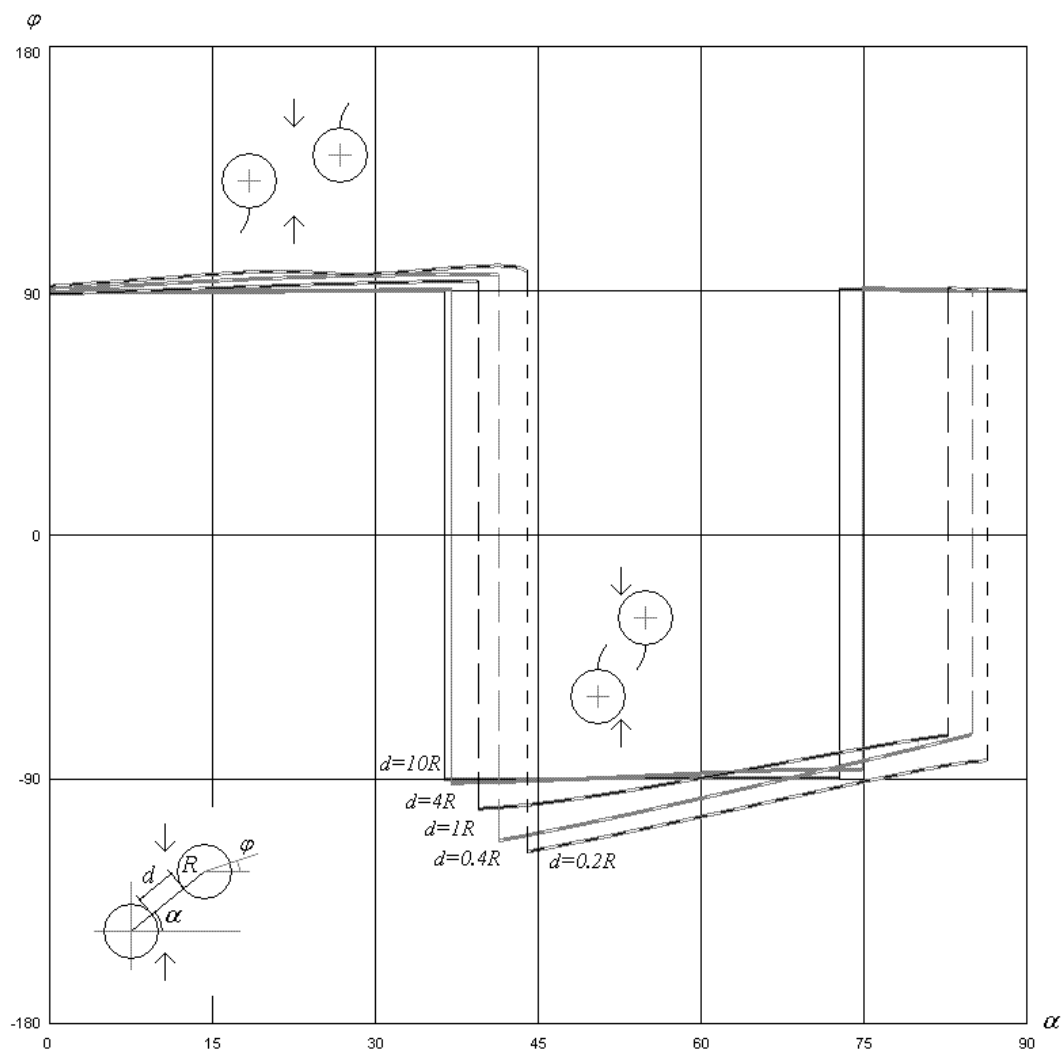
На фиг. 1.5 представлена зависимость максимально достигаемого на контуре значения σ_ϕ от угла α . На фиг. 1.6 показана координата ϕ (в полярных координатах, связанных с контуром) вероятного места зарождения трещины разрыва. Аналогично, на фиг. 1.7 и 1.8 представлены те же зависимости для трещины сдвига.

Так, из фиг. 1.5 видно, что минимальная концентрация σ_ϕ достигается при $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда отверстия располагаются горизонтально или вертикально. Это значит, что такие расположения отверстий наиболее безопасные: для достижения критического значения σ_ϕ здесь придется приложить большую нагрузку, чем, например, при $\alpha = 58^\circ - 59^\circ$ для $d = R$, когда на контуре достигается почти вдвое большее напряжение. Заметим также, что для $d = R$ при $39^\circ < \alpha < 83^\circ$ трещина начнет расти между отверстиями, а при $0^\circ < \alpha < 39^\circ$ и при $83^\circ < \alpha < 90^\circ$ – вне отверстий. Такое же явление наблюдается при других взаиморасположениях отверстий. Причина в том, что на контуре образуются две зоны концентрации напряжений и в зависимости от α критическое напряжение может достигаться в одной из зон раньше, чем в другой.

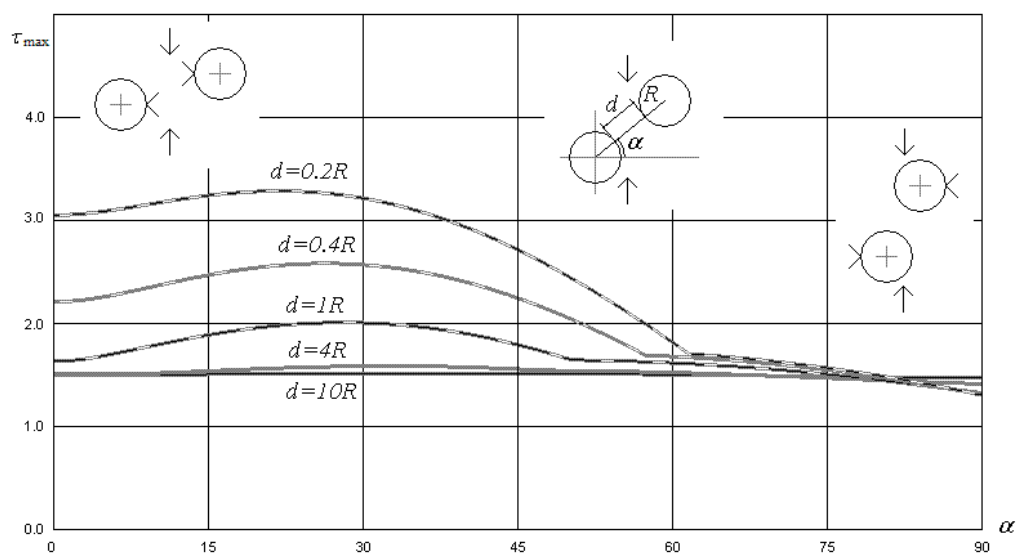
Аналогичное поведение наблюдается и для сдвиговых трещин. Для $d = R$ при $0^\circ < \alpha < 50^\circ$ трещина зарождается в левой части контура L (между отверстиями). При $50^\circ < \alpha < 90^\circ$ точка зарождения перемещается в правую часть контура – трещины будут расти в направлении от отверстий.



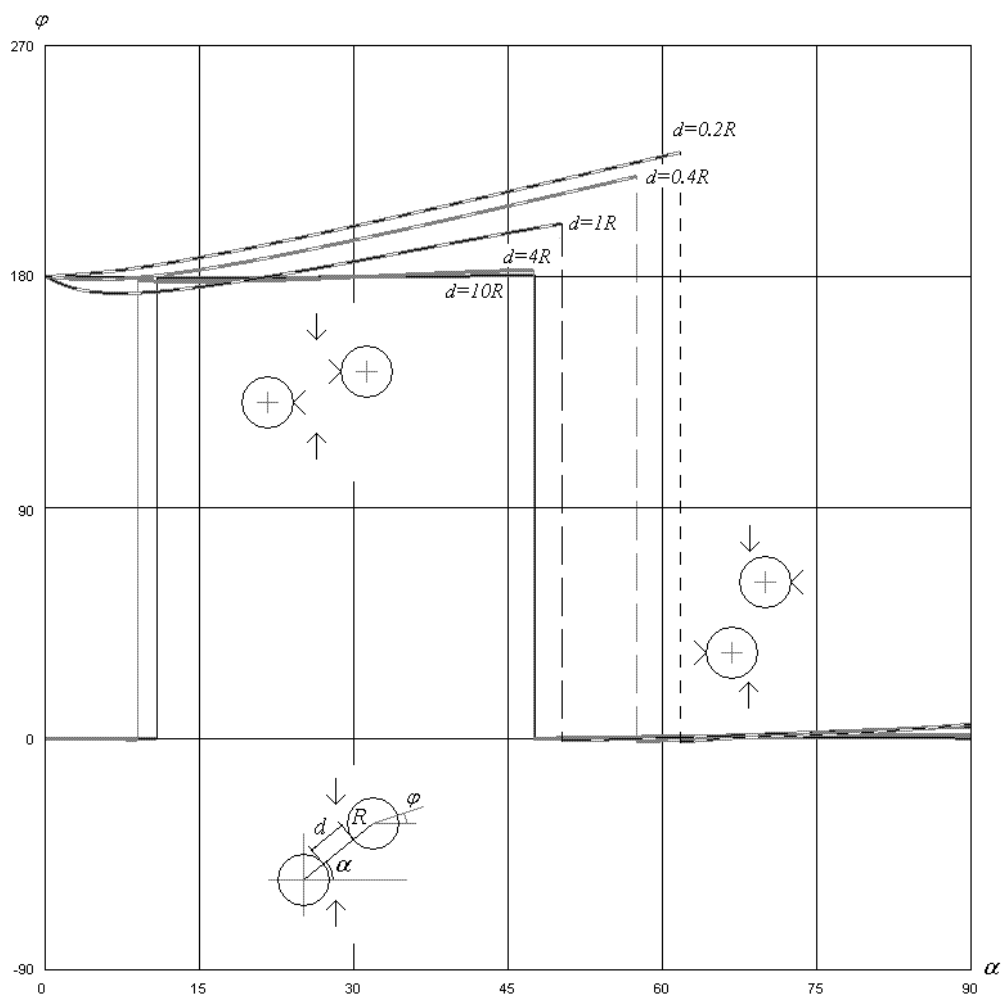
Фиг. 1.5



Фиг. 1.6



Фиг. 1.7



Фиг. 1.8

Интерес представляет расчет достигаемого максимума напряжений (как касательных, так и нормальных) не только на контурах отверстий, но и в окружающем их материале. В системе координат Os_1s_2 , повернутой относительно Oxy на угол θ , тензор напряжений выразится через σ , σ_s , τ_{xy} следующим образом

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma - \sigma_s \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma + \sigma_s \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_{12} &= \sigma_s \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\tag{1.26}$$

Угол θ_{\max} , при котором σ_{12} достигает максимального значения τ_{\max} , найдем из уравнения

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} = 0$$

решение которого имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Таким образом, имеются две линии максимального сдвига

$$\theta_{\max 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}} \text{ и } \theta_{\max 2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_s}{\tau_{xy}} + \frac{\pi}{2}\tag{1.27}$$

Подставив (1.27) в (1.26), получим

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma\tag{1.28a}$$

$$\sigma_{12} = \tau_{\max} = \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2}\tag{1.28б}$$

Поскольку нас интересует только абсолютная величина τ_{\max} , берем положительное значение корня. Вообще же, знак здесь зависит от выбора ориентации системы координат.

Аналогичным образом находим, что при $\theta = \theta_{\max 1} + \pi/4$ напряжения достигают главных значений

$$\sigma_{11} = \sigma_1 = \sigma + \tau_{\max} = \sigma + \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.29a)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2 = \sigma - \tau_{\max} = \sigma - \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.29б)$$

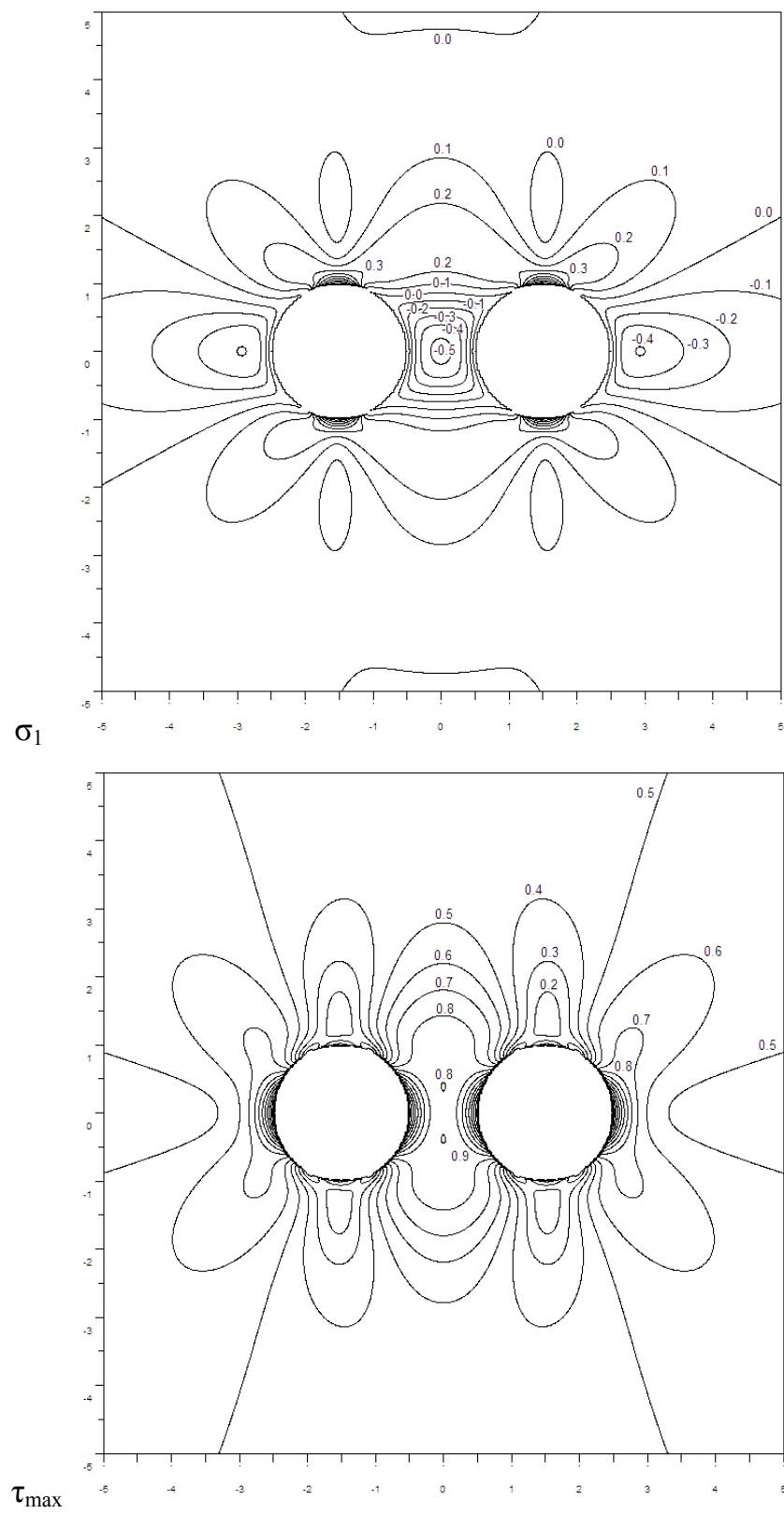
$$\sigma_{12} = 0 \quad (1.29в)$$

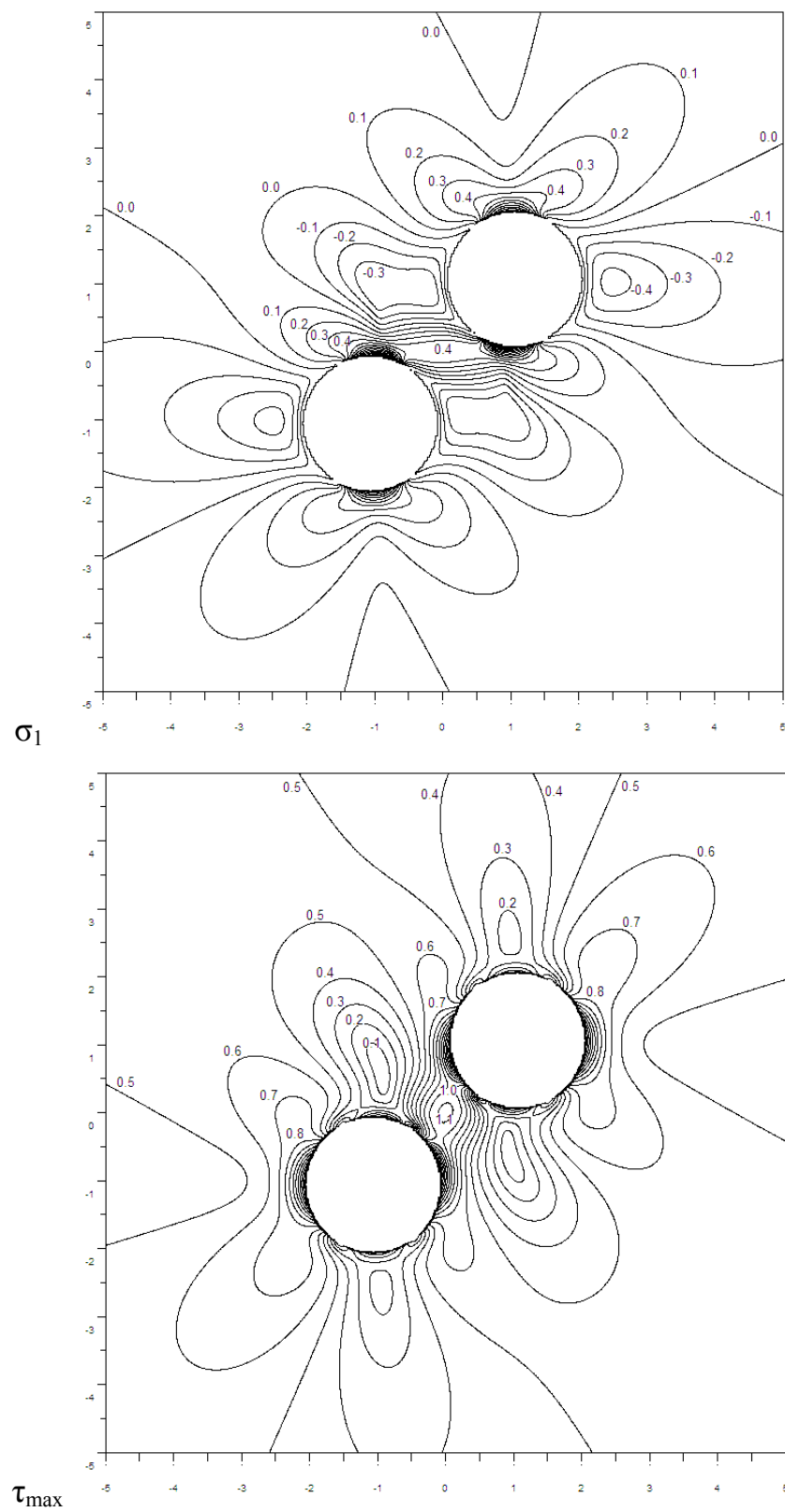
При этом σ_1 – максимальное в данной точке нормальное напряжение.

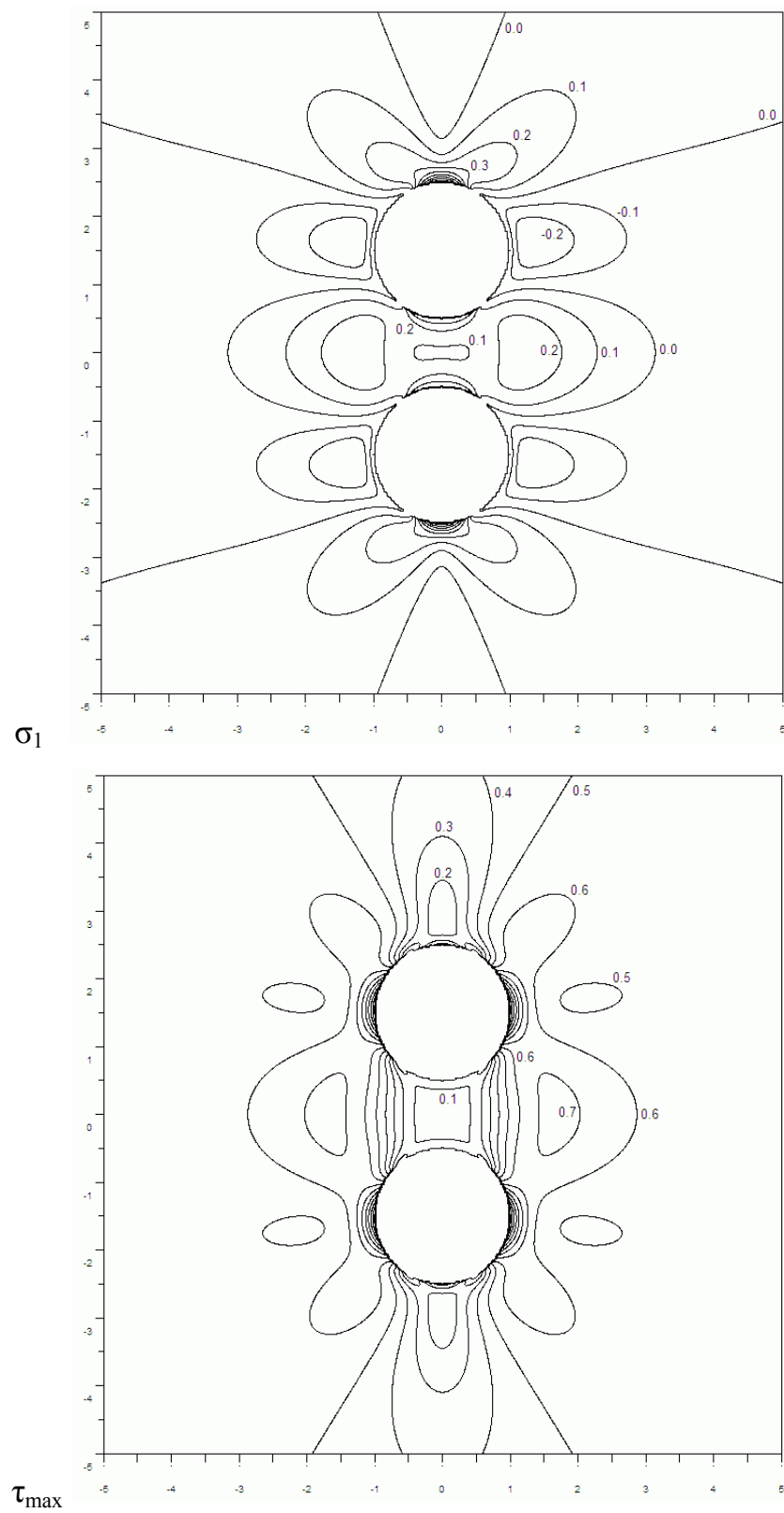
На фиг. 1.9 – 1.11 изображены поля напряжений σ_1 и τ_{\max} для $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ и 90° . На фигурах хорошо видна структура полей, области концентрации напряжений. Можно видеть, что при взаиморасположении отверстий, близком к вертикальному, между ними возникает область «разгрузки» - концентрация напряжений в этой области резко падает. В этом случае точки зарождения трещин разрыва перемещаются на внешние части контуров.

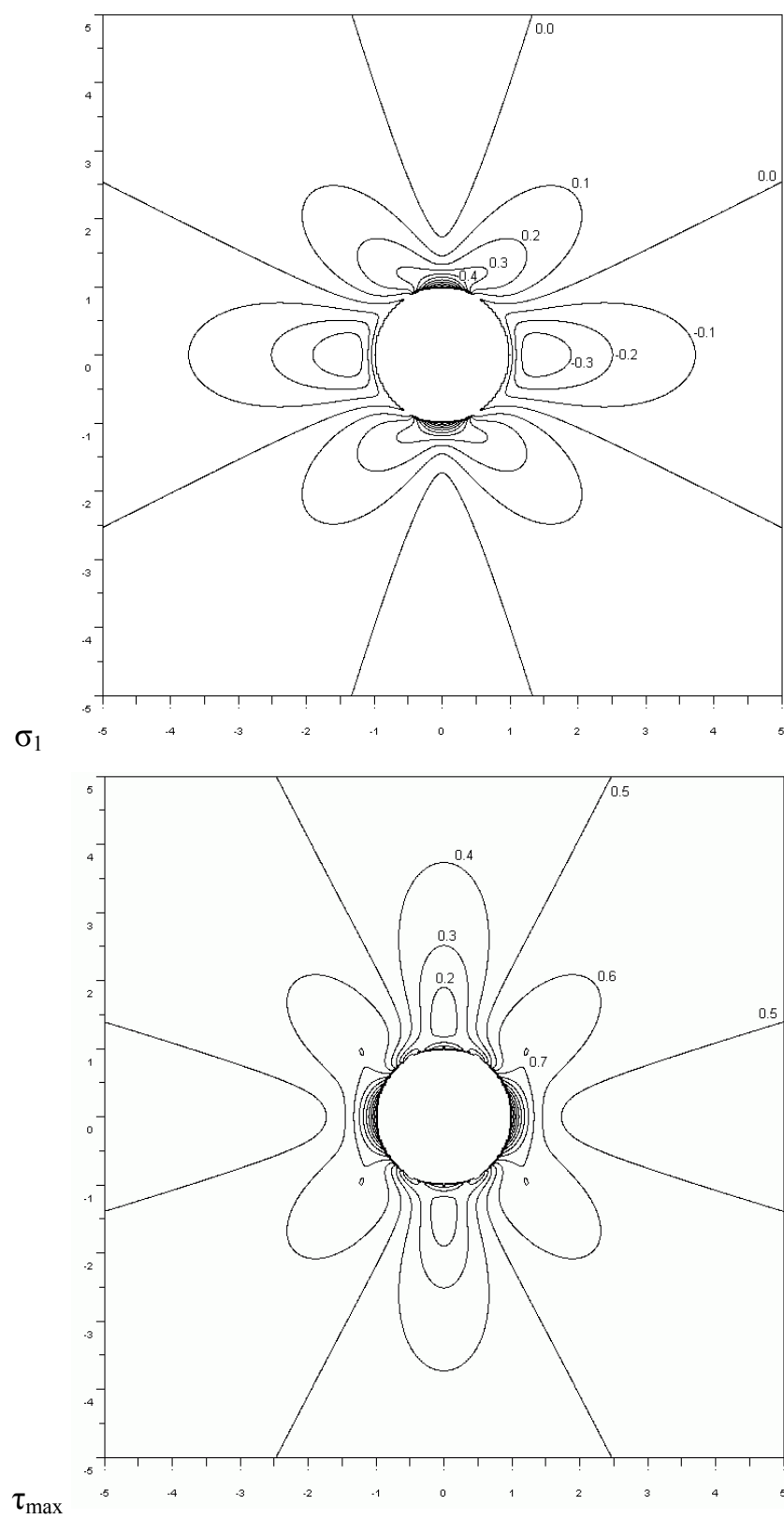
Отметим также, что вокруг каждого отверстия на расстоянии от $0.3R$ до $0.7R$ расположено несколько (8-9) локальных максимумов и минимумов. Однако значения σ_1 и τ_{\max} в этих точках никогда не достигают даже половины значений, достигаемых на контуре. Значит, в данной задаче трещины всегда будут зарождаться на контуре.

Также для сравнения на фиг. 1.12 приведены распределения σ_1 и τ_{\max} для одиночного отверстия. Отметим, что распределение τ_{\max} полностью соответствует экспериментально полученной картине интерференционных полос для отверстия в плоскости, приведенной в [21] на стр. 851.

Фиг. 1.9. $\alpha = 0^\circ$

Фиг. 1.10. $\alpha = 45^\circ$

Фиг. 1.11. $\alpha = 90^\circ$

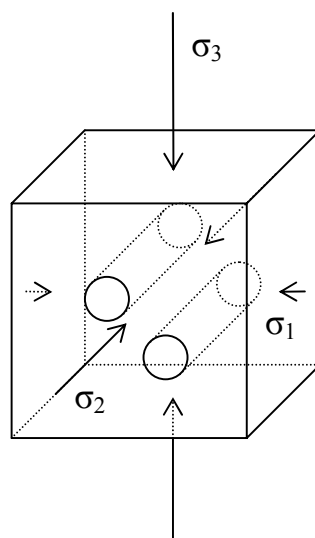


Фиг. 1.12. Одиночное отверстие

1.8. Экспериментальная проверка

Для подтверждения точности расчетов, выполненных разработанным методом, было проведено сравнение результатов расчетов полей напряжений в окрестности двух отверстий с результатами экспериментов, проведенных в ИПМех РАН в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П-09 "Исследование вещества в экстремальных условиях", Подпрограмма "Физика и механика сильно сжатого вещества и проблемы внутреннего строения Земли и планет" (проект "Механика структурированных сред и горных пород в условиях высокого давления", руководитель проекта зав. лаб. ИПМех РАН, проф. д.ф.-м.н. Р.В. Гольдштейн). Эксперименты проведены с.н.с., к.ф.-м.н. Ю.В. Кулиничем и с.н.с., к.т.н. Н.М. Осипенко.

Испытания проводились на ИС ТНН – испытательной системе трехосного наравнокомпонентного нагружения, разработанной в ИПМех РАН (описание системы см. [56]). Отметим отличительную особенность системы – возможность независимого нагружения образцов по трем перпендикулярным осям и реализации сложных траекторий нагружений.



Фиг. 1.13.

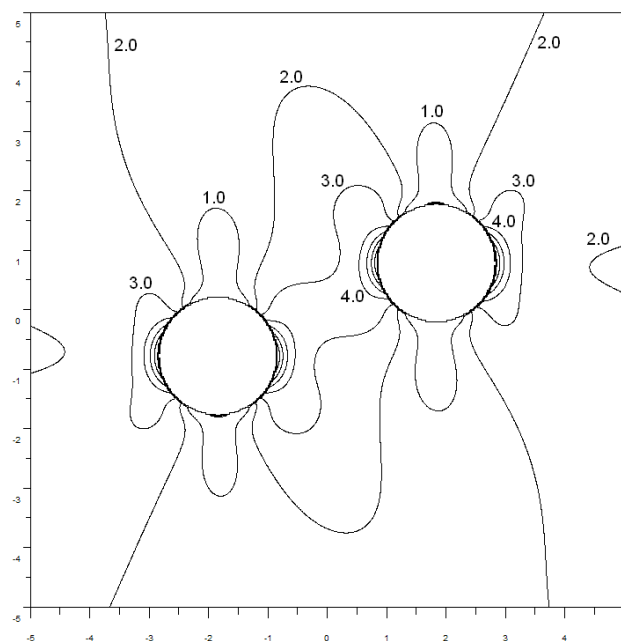
Образцы представляют собой кубы из песчаника со стороной 5 см. В каждом образце было просверлено два отверстия диаметром 8 мм, расстояние между центрами отверстий составляет 16 мм. Образцы подвергались постепенно возрастающему сжатию (соотношение по осям выдерживалось $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0.2 : 0.5 : 1$, при этом оси отверстий были ориентированы параллельно оси Ox_2 (фиг. 1.13), таким образом создавалось плоское напряженно-деформированное состояние), пока не начиналось разрушение. После этого изъятые образцы были залиты эпоксидной смолой, чтобы избежать разрушения при шлифовке, распиливались, сечение зашлифовывалось и изучалось.

По результатам испытаний возникшие разрушения можно разделить на два вида: треугольные отколы (break-out) на краях отверстий и трещины, обычно берущие начало вблизи вершин отколов. Оба вида относятся к разрушениям сдвигового типа, поэтому для проведенных экспериментов было численно промоделировано распределение максимальных сдвиговых напряжений.

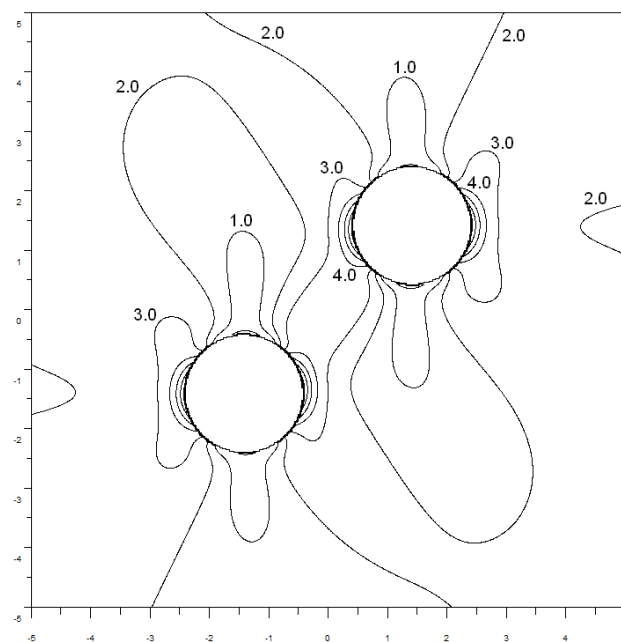
Результаты испытаний представлены на фиг. 1.14а – 1.17а, результаты моделирования на фиг. 1.14б – 1.17б (величины напряжений указаны в отношении к горизонтальной внешней нагрузке). Из их сравнения можно заключить, что отколы в точности соответствуют расчетным точкам концентрации τ_{\max} . О трещинах сдвига можно сказать, что они распространяются в направлении наименьшего убывания τ_{\max} .

Также отметим, что в областях отколов и устьях трещин наблюдается разрыхление материала. Этот тип разрушений связан с сложной внутренней структурой песчаника и, поскольку рассматривается модель сплошной среды, не рассматривается здесь. Для того, чтобы учесть области разрыхления, надо включить в модель пористость и неоднородность песчаника, что выходит за рамки диссертации.

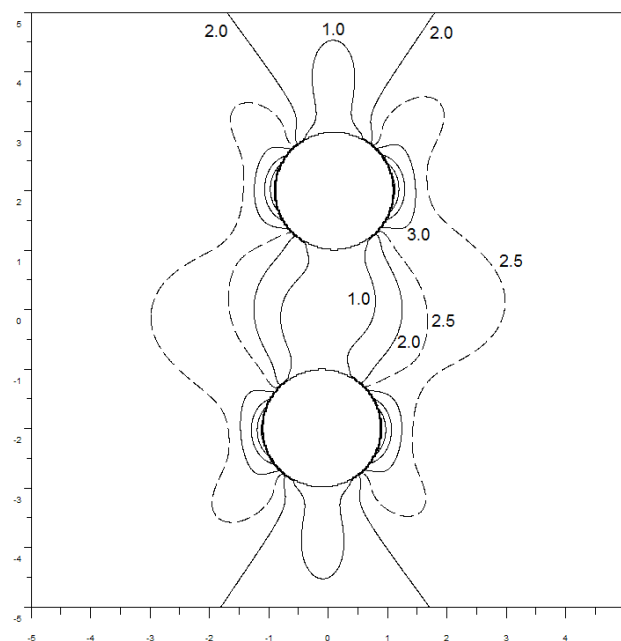
Таким образом видим, что результаты экспериментов согласуются с расчетами по методу мультипольных разложений в рамках рассматриваемой модели.



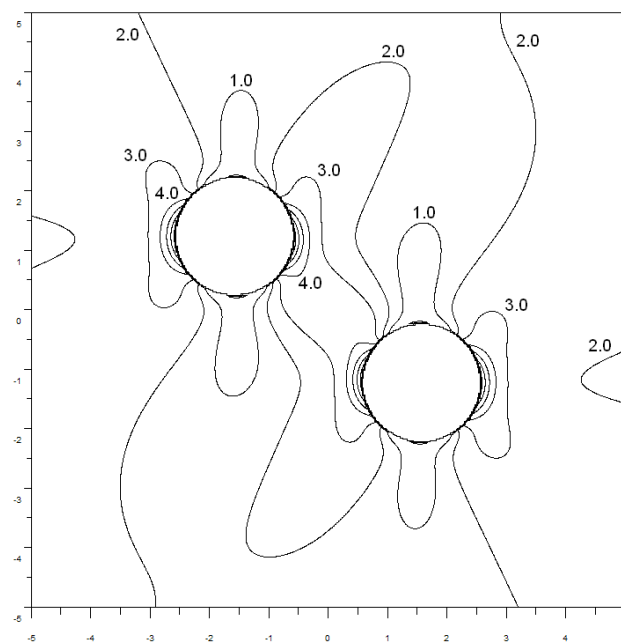
Фиг. 1.14 а, б



Фиг. 1.15 а, б



Фиг. 1.16 а, б



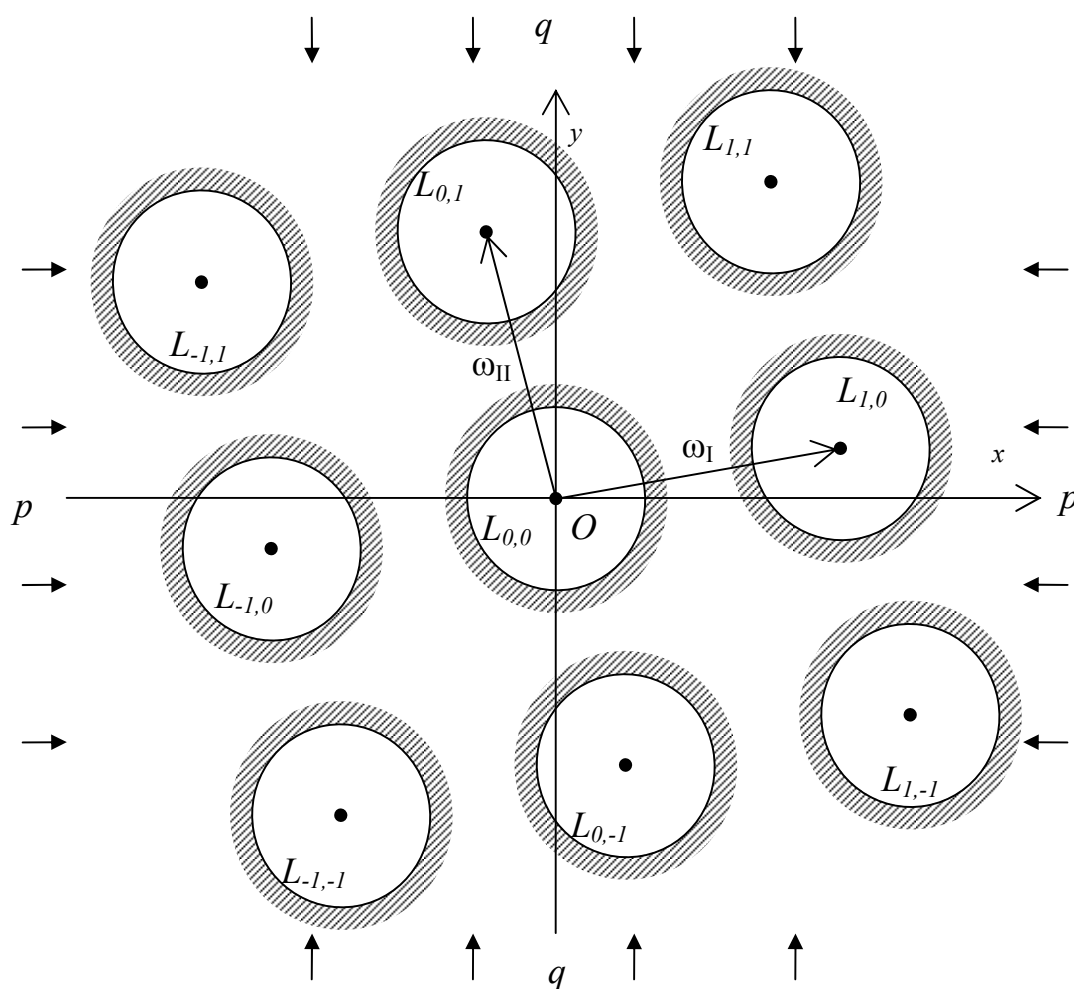
Фиг. 1.17 а, б

1.9. Заключение к главе 1

Итак, метод разложения поля напряжений в ряд мультиполей является эффективным способом как расчета, так и анализа напряженно-деформированного состояния плоскости с двумя круговыми отверстиями. Метод позволяет описать поле набором параметров, каждый из которых описывает определенный тип деформации: изотропное расширение/сжатие, поворот, чистый сдвиг в том или ином направлении, мультипольную деформацию некоторого порядка. Изучив мультипольный спектр напряженного поля, можно выделить наиболее характерные виды деформаций отверстия, и, например, принять соответствующие меры, если нагрузки превышают предел прочности. Мультипольное представление позволяет быстро рассчитать картину НДС, выделить точки концентрации напряжений (т.е. наиболее опасные с точки зрения разрушения), а также определить вероятный сценарий разрушения.

С помощью данного метода рассчитано поле напряжений, создаваемое парой отверстий в упругой плоскости при различных условиях нагружения и различных взаиморасположений отверстий. Показано, что при малых расстояниях между отверстиями (сравнимых с их радиусом) влияние их на поля друг друга может быть существенным. Также показано, что концентрация напряжений на отверстиях может значительно изменяться (причем, как в большую, так и в меньшую сторону) в зависимости от ориентации отверстий относительно приложенной к плоскости нагрузки. Из этого следует, что и сценарий разрушения (возникновение и распространение трещин) может быть различным, даже различным качественно: трещина может возникнуть между отверстиями (и остаться ограниченной ими) или на их внешних краях; меняется также и механизм разрушения: сдвиговой или разрывной.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОТВЕРСТИЙ



Фиг. 2.1

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость, в которой имеется бесконечная система одинаковых круговых отверстий $L_{l,m}$ (фиг. 2.1). Центры отверстий об-

разуют двояко-периодическую решетку с произвольными периодами. Плоскость подвергается двухосному нагружению. Нагрузка на контурах отверстий отсутствует. Требуется найти смещения краев отверстий, распределение полей напряжений и деформаций в среде. Также требуется найти наиболее вероятные точки зарождения трещин и ориентацию системы отверстий (относительно нагрузки), при которой возникновение трещин наиболее вероятно.

2.2. Построение основных уравнений

Поскольку рассуждения во многом аналогичны приведённым в первой главе, сконцентрируемся только на отличиях.

Начало координат расположим в центре одного из отверстий – это упростит вид уравнений. Координаты центров окружностей

$$z_{lm}^0 = \omega_I l + \omega_{II} m \quad (2.1)$$

здесь $\omega_I, \omega_{II} \in \mathbb{C}$ – периоды системы, причем $|\omega_I|, |\omega_{II}| > 2$, поскольку отверстия не должны соприкасаться друг с другом.

Потенциалы Колосова-Мусхелишвили здесь принимают следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_{L_{lm}} \frac{g'_{lm}(t_{lm}) e^{i\alpha_{lm}} dt_{lm}}{T_{lm} - z} \\ \Psi(z) &= \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_{L_{lm}} \left[\frac{\bar{g}'_{lm}(t_{lm}) e^{-i\alpha_{lm}} d\bar{t}_{lm}}{T_{lm} - z} - \frac{\bar{T}_{lm} g'_{lm}(t_{lm}) e^{i\alpha_{lm}} dt_{lm}}{(T_{lm} - z)^2} \right] + \\ &\quad + \sum_{l,m} \frac{1}{2\pi(z - z_{lm}^0)^2} \int_{L_{lm}} [\bar{T}_{lm} g'_{lm}(t_{lm}) e^{i\alpha_{lm}} dt_{lm} - T_{lm} \bar{g}'_{lm}(t_{lm}) e^{-i\alpha_{lm}} d\bar{t}_{lm}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $g_{lm}(t_{lm})$ – функции скачка смещений на контуре L_{lm} , глобальные координаты $T_{lm} = z_{lm}^0 + t_{lm} e^{i\alpha_{lm}}$, t_{lm} – локальные координаты, связанные с соответствующим отверстием. Выберем локальные системы координат так, чтобы их точки отсчета располагались в центрах отверстий.

Тогда, в силу трансляционной симметрии решетки,

$$t_{lm} \equiv t, \quad T_{lm} = z_{lm}^0 + t, \quad \alpha_{lm} = 0, \quad g_{lm}(t_{lm}) \equiv g(t),$$

и интегрирование по системе контуров L_{lm} можно заменить интегрированием по одному контуру L , совпадающему с L_{00} .

При этом потенциалы примут вид

$$\Phi(z) = \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_L \frac{g'(t)dt}{z_{lm}^0 - z + t} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \int_L \left[\frac{\bar{g}'(t)d\bar{t}}{z_{lm}^0 - z + t} - \frac{(\bar{z}_{lm}^0 + \bar{t})g'(t)dt}{(z_{lm}^0 - z + t)^2} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{l,m} \frac{1}{(z_{lm}^0 - z)^2} \int_L \left[(\bar{z}_{lm}^0 + \bar{t})g'(t)dt - (z_{lm}^0 + t)\bar{g}'(t)d\bar{t} \right] \end{aligned}$$

На контуре L ($z \rightarrow t' + z_0$, $t' = e^{i\theta}$) потенциалы в виду отсутствия нагрузок должны удовлетворять граничным условиям

$$\Phi(t') + \bar{\Phi}(t') - \bar{t}'^2 [t' \bar{\Phi}'(t') + \bar{\Psi}(t')] = 0 \quad (2.4)$$

После подстановки значений потенциалов получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\int_L K(t, t') g'(t) dt + \int_L L(t, t') \bar{g}'(t) d\bar{t} = A(t') \quad (2.5)$$

где ядра

$$K(t, t') = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{2}{t-t'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \sum_{l,m}' \left(\frac{1}{t-t'+z_{lm}^0} - \frac{\bar{t}'^2}{\bar{t}-\bar{t}'+\bar{z}_{lm}^0} + \bar{t}'^2 \frac{\bar{z}_{lm}^0 + \bar{t}}{(\bar{z}_{lm}^0 - \bar{t}')^2} \right) \right] \quad (2.6a)$$

$$L(t, t') = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{l,m}' \left(\frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'+\bar{z}_{lm}^0} + \bar{t}'^2 \frac{t-t'+z_{lm}^0}{(\bar{t}-\bar{t}'+\bar{z}_{lm}^0)^2} - \bar{t}'^2 \frac{z_{lm}^0 + t}{(\bar{z}_{lm}^0 - \bar{t}')^2} \right) \quad (2.6b)$$

и свободный член

$$A(t') = i \left(\frac{p+q}{2} - \frac{q-p}{2} \bar{t}'^2 \right) \quad (2.6b)$$

Здесь $\sum'_{l,m}$ означает, что суммирование ведется по всем значениям l и m , кроме $l=m=0$.

К этому уравнению следует добавить условие непрерывности смещений при обходе по контуру

$$\int_L g'(t) dt = 0 \quad (2.7)$$

2.3. Численное решение

Как и в первой главе, искать численное решение будем в виде ряда Лорана

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n.$$

Ядра $K_n(t')$ и $L_n(t')$ здесь примут следующий вид

$$K_n(t') = \begin{cases} -t'^n - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{(k-2)!(n+1)!} \frac{1}{t'^k}, & n \geq 1 \\ -2 \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{1}{(\bar{z}_{lm}^0)^k} \frac{k-1}{t'^k} \right), & n = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{t'^k}{(z_{lm}^0)^{k+1}} - \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{k-2}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k-1}} \frac{1}{t'^k}, & n = -1 \\ t'^n - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{(-1)^n}{(z_{lm}^0)^{k-n}} \frac{(k-n-1)!}{k!(-n-1)!} t'^k, & n \leq -2 \end{cases} \quad (2.8a,6)$$

$$L_n(t') = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{k^2-1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k+1}} \frac{1}{t'^k}, & n = -1 \\ - \sum_{l,m} ' (-1)^n (\bar{z}_{lm}^0)^n - \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k-n}} \left[|z_{lm}^0|^2 \frac{(k-n-2)!}{(k-1)!(-n-1)!} - \frac{(k-n)!}{k!(-n)!} \right] \frac{k-1}{t'^k}, & n \leq -2 \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие выражения для G_k :

$$G_0 = -2g_0 + \sum_{l,m} ' \frac{g_{-1}}{z_{lm}^0} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' g_{-n} \frac{(-1)^n}{(z_{lm}^0)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} ' \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^n} + \frac{p+q}{2i};$$

$$G_{-1} = 0; \quad (2.9)$$

$$G_{-2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} ' g_n \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{n+2}} - 2 \sum_{l,m} ' \frac{g_0}{(\bar{z}_{lm}^0)^2} + g_{-2} - \sum_{l,m} ' \frac{3}{(\bar{z}_{lm}^0)^3} \bar{g}_{-1} -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{n+2}} \left[n \cdot |z_{lm}^0|^2 - \frac{(n+2)(n+1)}{2} \right] - \frac{q-p}{2i};$$

$k \geq 1$:

$$G_k = -g_k + g_{-1} \sum_{l,m} ' \frac{1}{(z_{lm}^0)^{k+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' g_{-n} \frac{(-1)^n}{(z_{lm}^0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!};$$

$k \geq 3$:

$$G_{-k} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m} ' g_n \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k+n}} \frac{(k+n-1)!}{(k-2)!(n+1)!} - 2 \sum_{l,m} ' g_0 \frac{k-1}{(\bar{z}_{lm}^0)^k} - \sum_{l,m} ' g_{-1} \frac{k-2}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k-1}} + g_{-k} -$$

$$- \sum_{l,m} ' \frac{k^2-1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k+1}} \bar{g}_{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m} ' \bar{g}_{-n} \frac{(-1)^n}{(\bar{z}_{lm}^0)^{k+n}} \left[\frac{(k+n-2)!}{(k-2)!(n-1)!} \cdot |z_{lm}^0|^2 - \frac{(k+n)!}{k!n!} (k-1) \right]$$

Мы снова для $k = -1$ имеем тривиальное уравнение: $0 = 0$. Аналогично тому, как мы действовали в первой части, добавим вместо него уравнение совместности $g_{-1} = 0$.

Покажем, что G_k для нечетных значений k обращается в нуль. В самом деле, в силу симметрии задачи имеем $z_{l,m}^0 = -z_{-l,-m}^0$. Введем обозначение $\sum_{l,m}''$, которое будет означать суммирование по всем парам индексов ($l = 0, m = 1 \dots +\infty$) и ($l = 1 \dots +\infty, m = -\infty \dots +\infty$). Таким образом, мы учтем ровно половину слагаемых $\sum_{l,m}'$, причем среди них не будет противоположных пар.

Далее

$$\begin{aligned} \sum_{l,m}' \frac{1}{(z_{lm}^0)^k} &= \sum_{l,m}'' \left[\frac{1}{(z_{lm}^0)^k} + \frac{1}{(-z_{lm}^0)^k} \right] = \\ &= \sum_{l,m}'' \left[\frac{1}{(z_{lm}^0)^k} + \frac{(-1)^k}{(z_{lm}^0)^k} \right] = (1 + (-1)^k) \sum_{l,m}'' \frac{1}{(z_{lm}^0)^k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что для нечетных $k = 2k'-1$ эта сумма равна нулю.

Для четных же:

$$\sum_{l,m}' \frac{1}{(z_{lm}^0)^{2k}} = 2 \sum_{l,m}'' \frac{1}{(z_{lm}^0)^{2k}} \quad (2.11)$$

С учетом этого, имеем

$$\begin{aligned} G_0 &= -2g_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{g_{-2n}}{(z_{lm}^0)^{2n}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{\bar{g}_{-2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2n}} - i \frac{p+q}{2}; \\ G_{-1} &= 0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} G_{-2} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{g_{2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(n+1)}} - 4 \sum_{l,m}'' \frac{g_0}{(\bar{z}_{lm}^0)^2} + g_{-2} - \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{\bar{g}_{-2n}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(n+1)}} \left[2n \cdot |z_{lm}^0|^2 - (n+1)(2n+1) \right] + i \frac{q-p}{2}; \end{aligned}$$

$k \geq 1$:

$$\begin{aligned} G_{2k} &= -g_{2k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{g_{-2n}}{(z_{lm}^0)^{2(k+n)}} \frac{(2(k+n)-1)!}{(2k)!(2n-1)!}, \\ G_{2k-1} &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{g_{-(2n-1)}}{(z_{lm}^0)^{2(k+n-1)}} \frac{(2(k+n)-3)!}{(2k-1)!(2n-2)!}, \end{aligned}$$

$k \geq 2$:

$$\begin{aligned} G_{-2k} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' g_{2n} \frac{1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n)}} \frac{(2(k+n)-1)!}{(2k-2)!(2n+1)!} - 4 \sum_{l,m}'' g_0 \frac{2k-1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2k}} + g_{-2k} - \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \bar{g}_{-2n} \frac{1}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n)}} \left[\frac{(2(k+n)-2)!}{(2k-2)!(2n-1)!} \cdot |z_{lm}^0|^2 - \frac{(2k+2n)!}{(2k)!(2n)!} (2k-1) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{-(2k-1)} = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{g_{2n-1}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n-1)}} \frac{(2k+2n-3)!}{(2k-3)!(2n)!} - \\
& - 2 \sum_{l,m}'' g_{-1} \frac{2k-3}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2k-2}} + g_{-(2k-1)} - 2 \sum_{l,m}'' \frac{4k(k-1)}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2k}} \bar{g}_{-1} + \\
& + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l,m}'' \frac{\bar{g}_{-(2n-1)}}{(\bar{z}_{lm}^0)^{2(k+n-1)}} \left[\frac{(2(k+n-2))!}{(2k-3)!(2n-2)!} \cdot |z_{lm}^0|^2 - \frac{(2(k+n-1))!}{(2k-1)!(2n-1)!} (2k-2) \right]
\end{aligned}$$

Отметим, что смещения на контуре выражаются следующим образом

$$u(t) + iv(t) = \frac{i(1+\kappa)}{2G} g(t), \quad (2.13)$$

а поскольку $u(t) + iv(t) = -u(-t) - iv(-t)$ в силу симметрии задачи, то

$$g(t) = -g(-t)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n+1} t^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{-n}}{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n+1} (-t)^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{-n}}{n-1} \frac{1}{(-t)^{n-1}} \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{2n}}{2n+1} t^{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{-2n}}{2n-1} \frac{1}{t^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n-1}}{2n} t^{2n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{-(2n-1)}}{2n-2} \frac{1}{t^{2n-2}} = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{2n}}{2n+1} t^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{-2n}}{2n-1} \frac{1}{t^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n-1}}{2n} t^{2n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{-(2n-1)}}{2n-2} \frac{1}{t^{2n-2}} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{2n-1}}{2n} t^{2n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{-(2n-1)}}{2n-2} \frac{1}{t^{2n-2}} = 0 \quad (2.14)
\end{aligned}$$

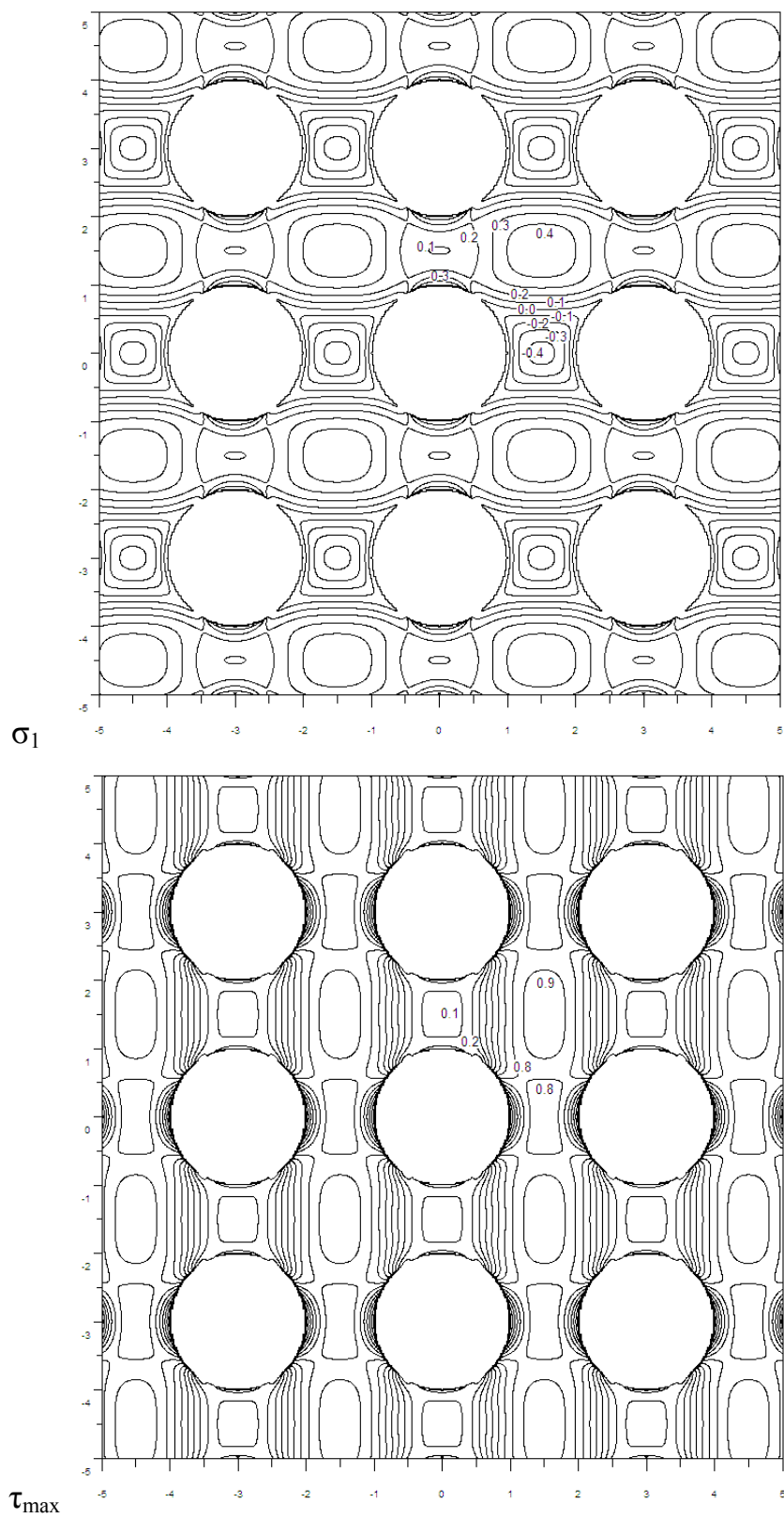
что должно быть верно при любых t , а значит $g_{2n-1} = 0$ при любых n . Подставив этот результат в (2.12), получим $G_{2n-1} = 0$, для любых n .

Далее, как и в первой главе, используем полученные значения G_n для составления системы линейных уравнений, решив которую, получим коэффициенты разложения g_n , которые однозначно определяют по известным формулам поля напряжений и смещений.

2.4. Пример расчета полей напряжений

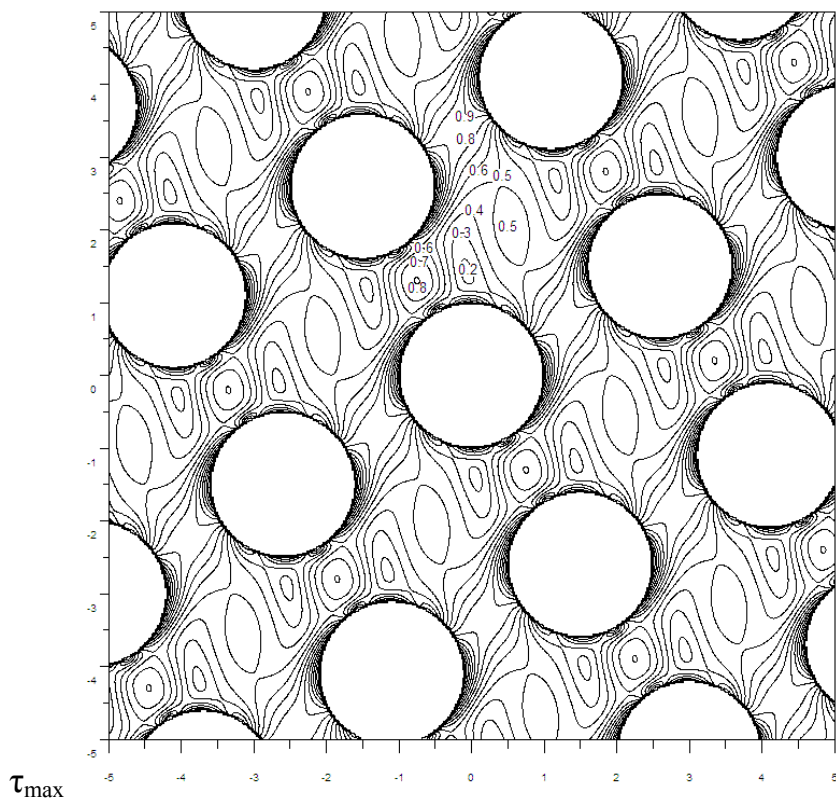
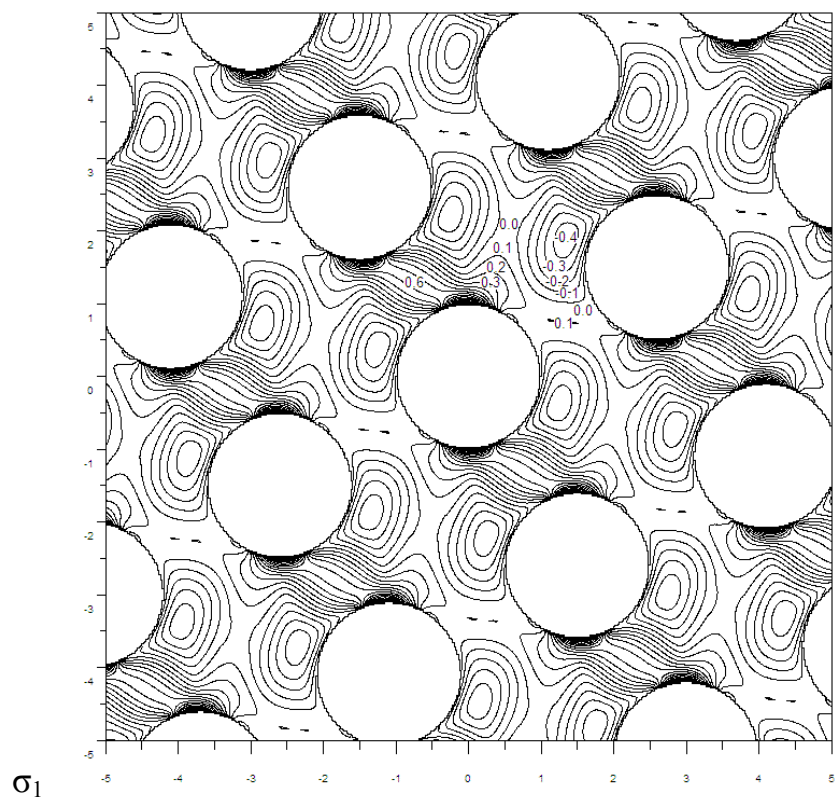
Рассматривается одноосное нагружение $p = 0$, $q = -1$ (вертикальное сжатие) и чистый сдвиг $p = 1$, $q = -1$ квадратной решетки отверстий. Расстояние между центрами отверстий $|\omega_I| = |\omega_{II}| = 3$ (т.е. ширина промежутка между отверстиями равна радиусу отверстия). Исследуются поля напряжений для различных углов α между ω_I и Ox . В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть $0 \leq \alpha \leq \pi/4$.

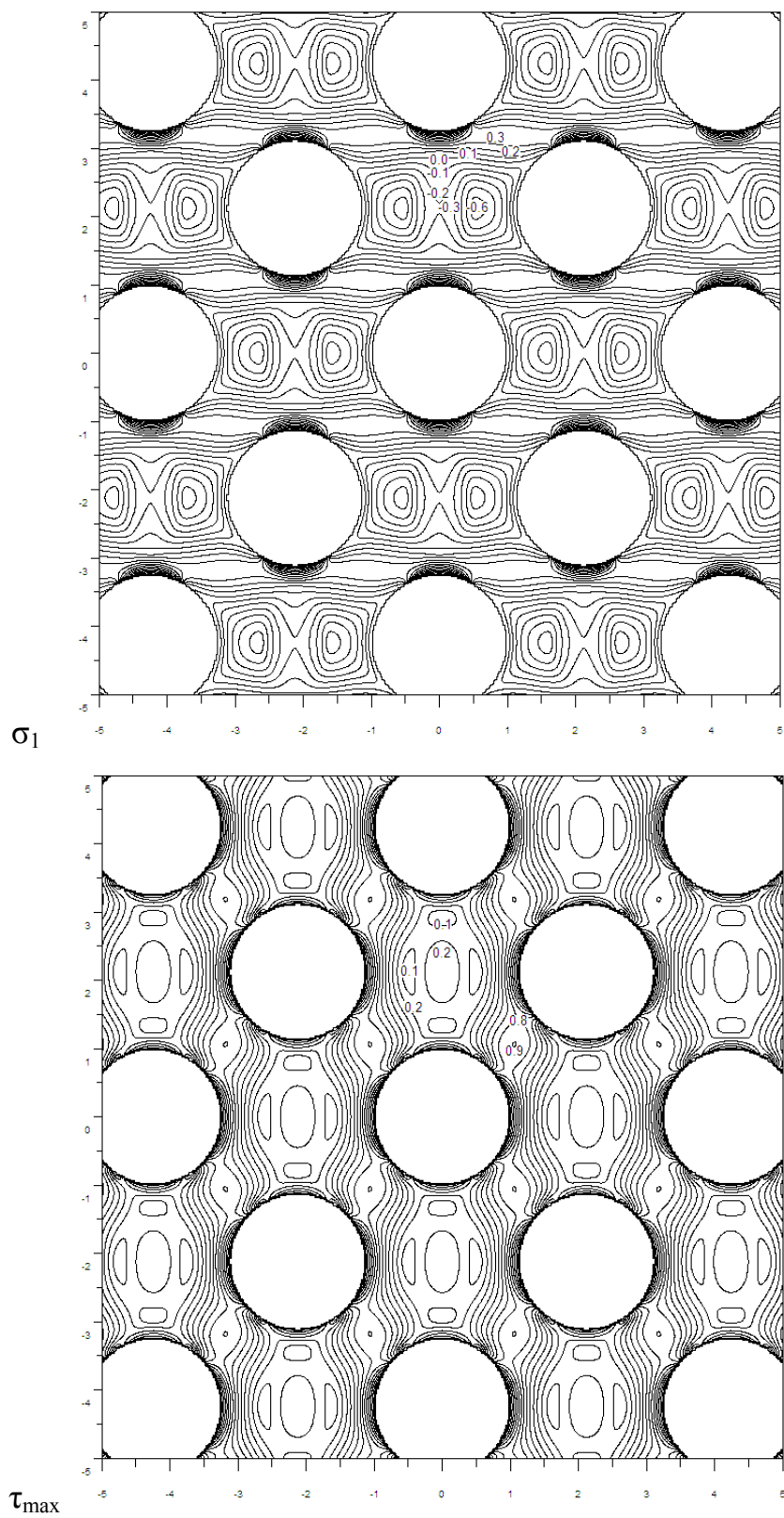
На фиг. 2.2 – 2.9 изображены поля напряжений σ_1 и τ_{\max} для $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ и 45° . На фигурах хорошо видна структура полей, области концентрации напряжений, т.е. точки наиболее вероятного зарождения трещин. Особый интерес вызывает поведение коэффициента концентрации напряжений при изменении направления приложения сил или в зависимости от параметров решетки.

Фиг 2.2. Сжатие, $\alpha=0^\circ$



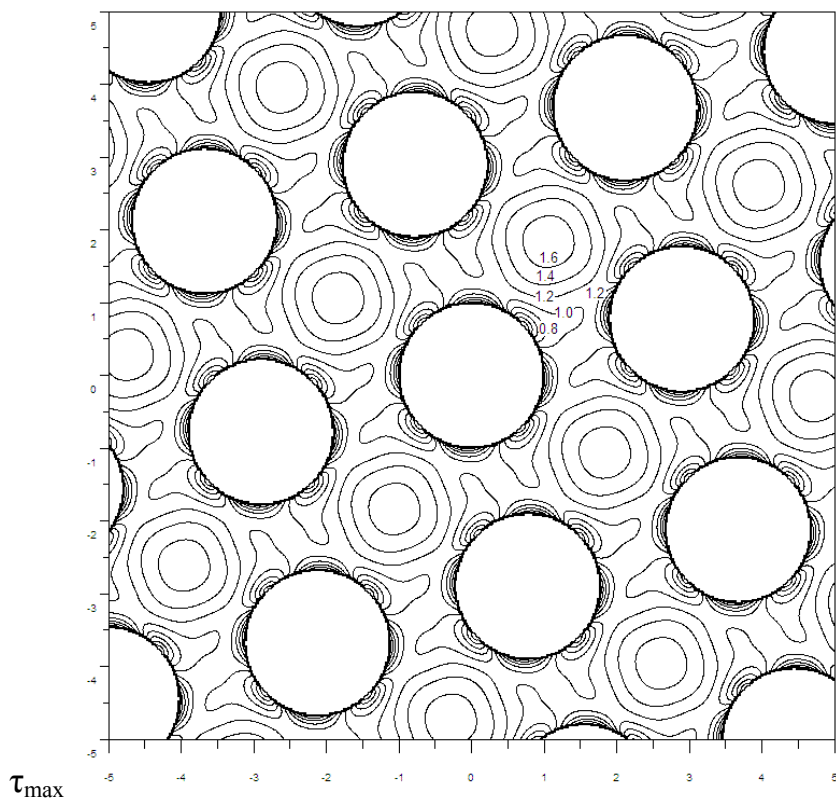
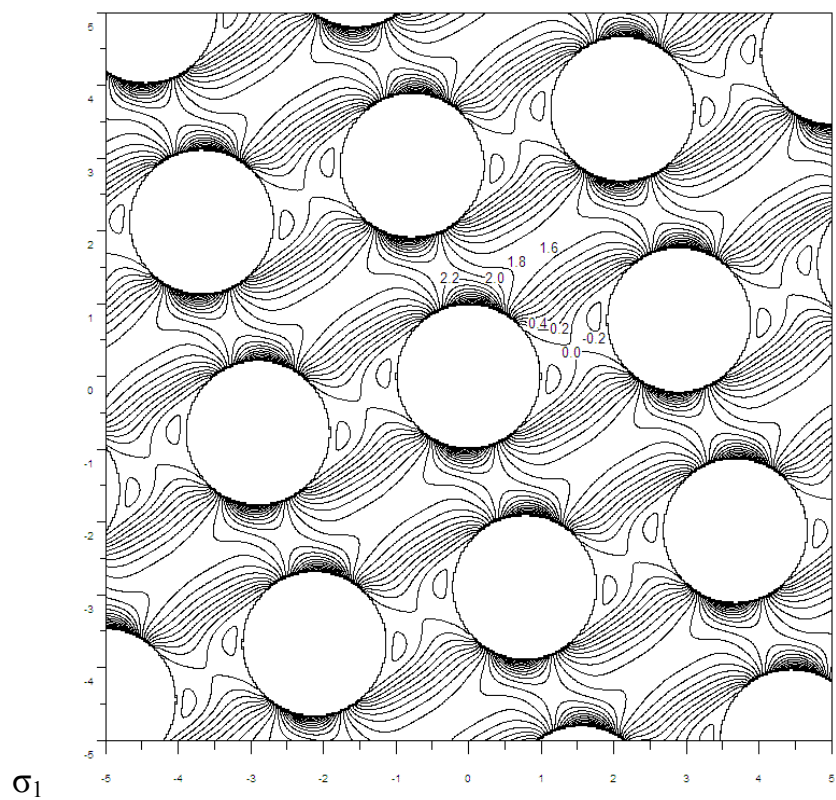
Фиг 2.3. Сжатие, $\alpha=15^\circ$

Фиг 2.4. Сжатие, $\alpha=30^\circ$

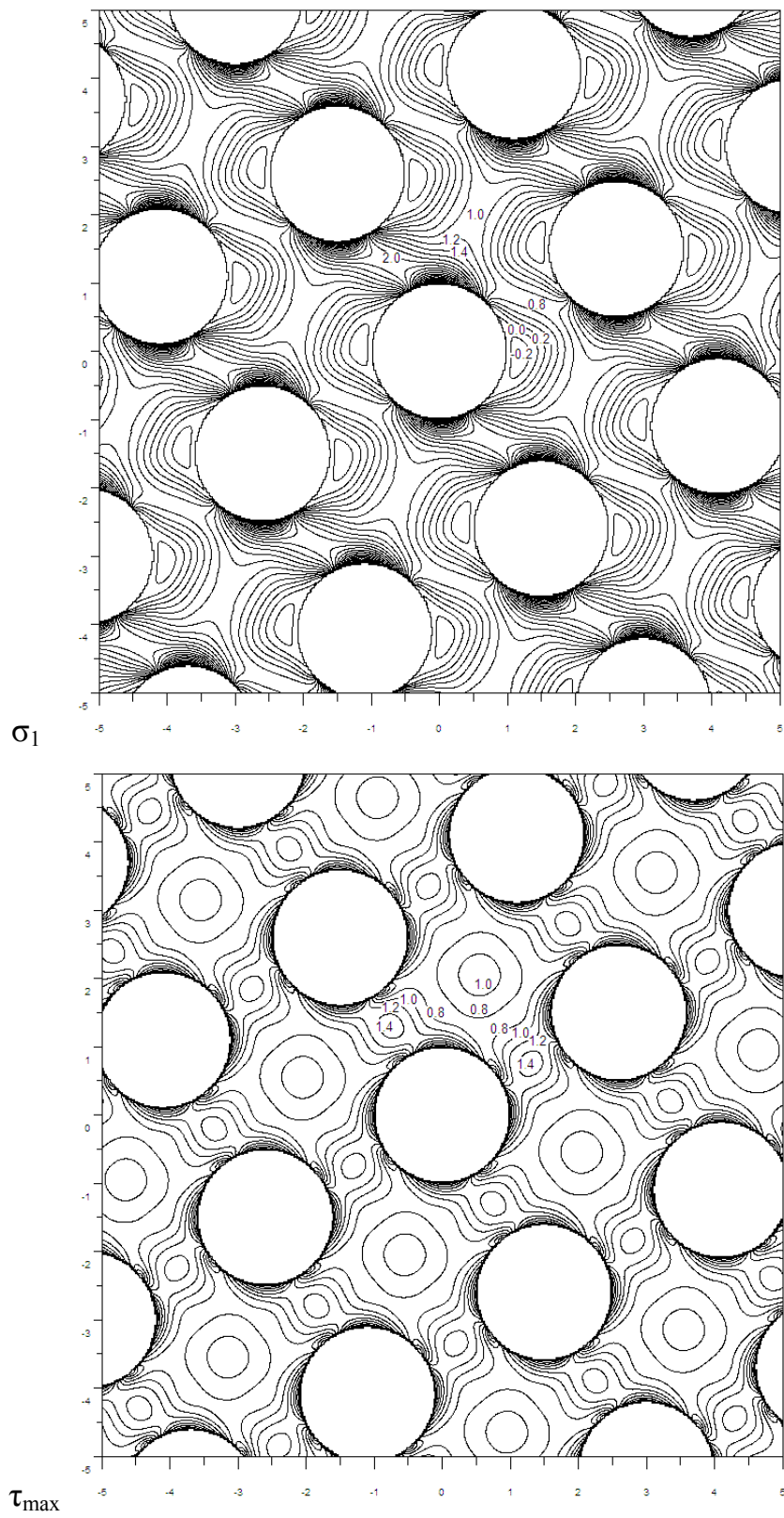
Фиг 2.5. Сжатие, $\alpha=45^\circ$



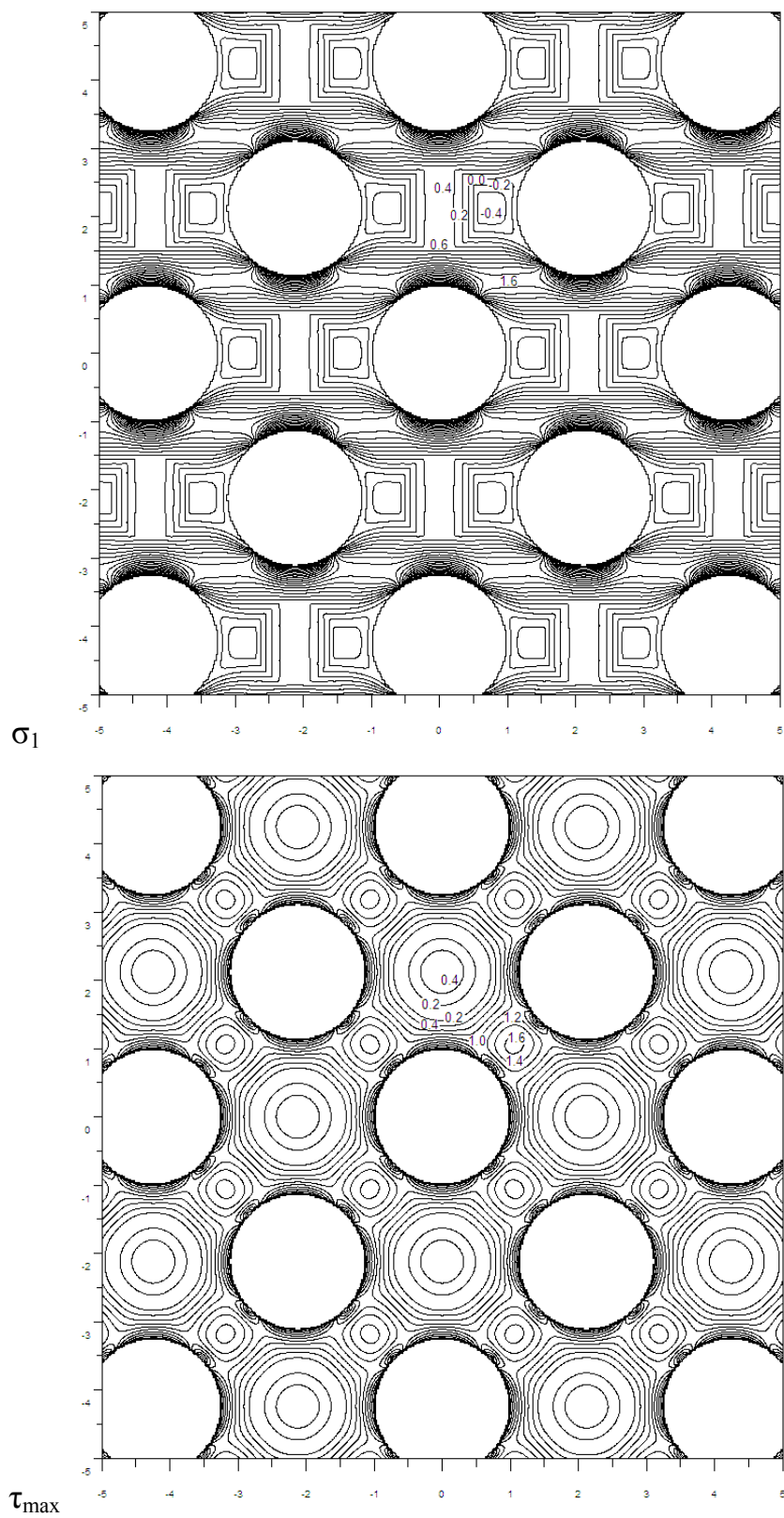
Фиг 2.6. Чистый сдвиг, $\alpha=0^\circ$



Фиг 2.7. Чистый сдвиг, $\alpha=15^\circ$



Фиг 2.8. Чистый сдвиг, $\alpha=30^\circ$

Фиг 2.9. Чистый сдвиг, $\alpha=45^\circ$

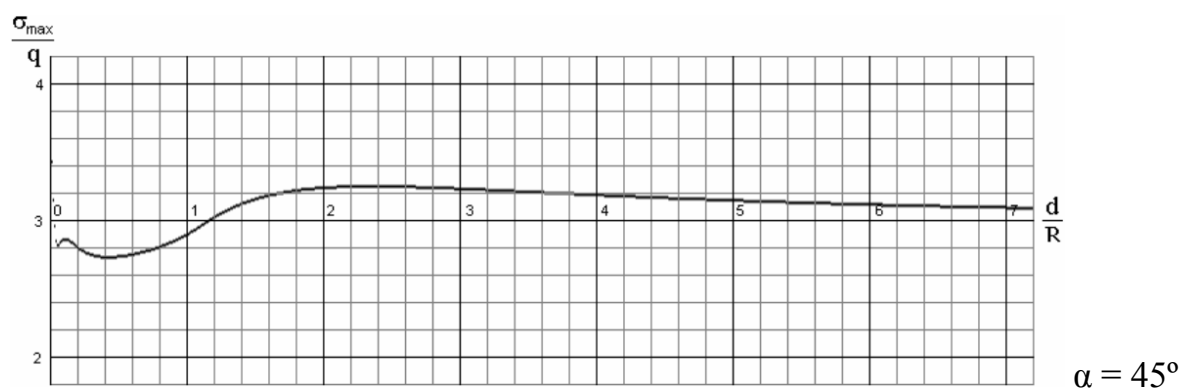
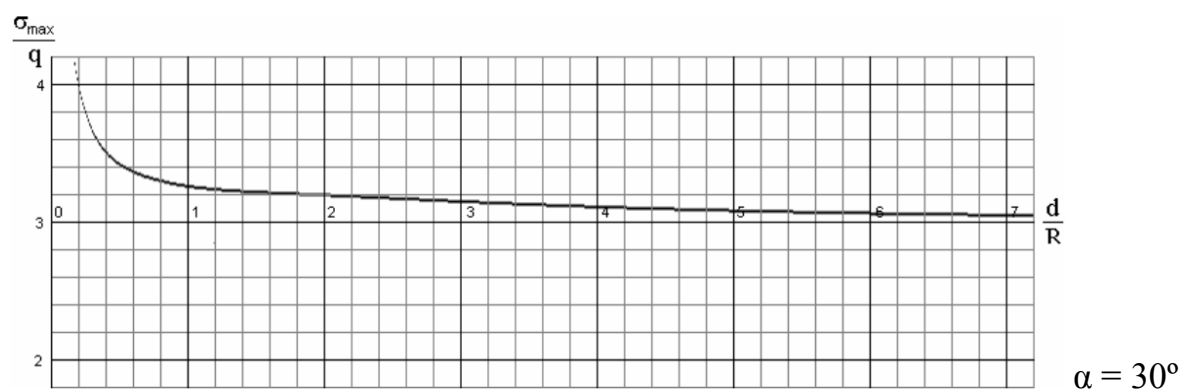
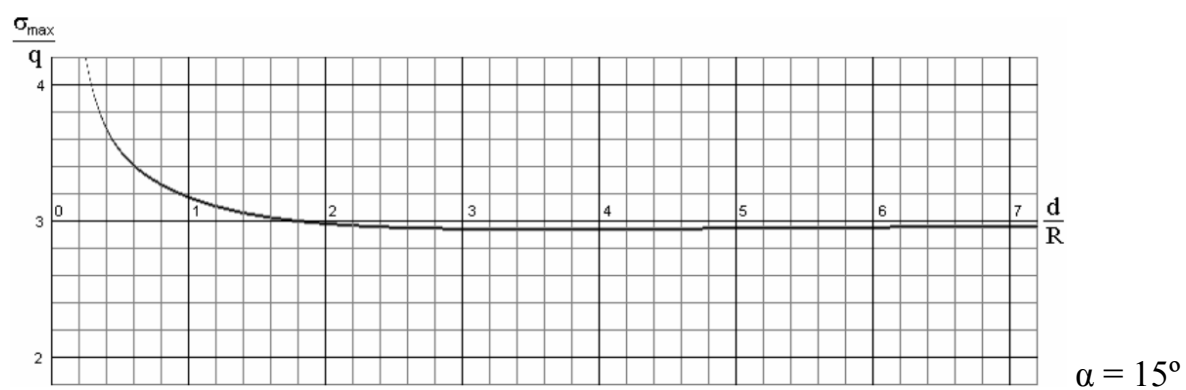
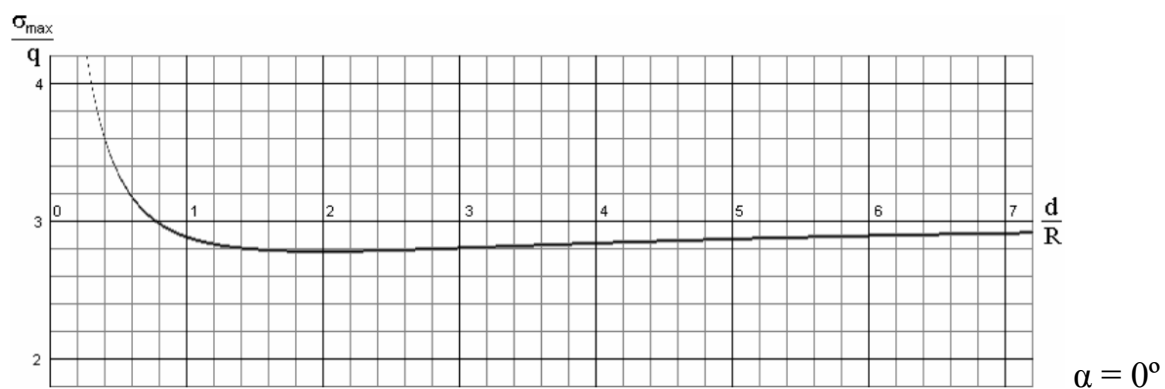
2.5. Исследование поведения коэффициента концентрации напряжений в квадратной решетке при одноосном растяжении

Задача об одноосном растяжении упругой плоскости с круговым отверстием хорошо изучена [2, 4, 12]. В частности, из ее решения следует, что на контуре отверстия напряжения на разрыв достигают втрое большего значения, чем приложенная извне нагрузка, т.е. коэффициент концентрации равен трем. Возникает вопрос, насколько опаснее (или безопаснее) с этой точки зрения решетка отверстий, чем одиночное отверстие.

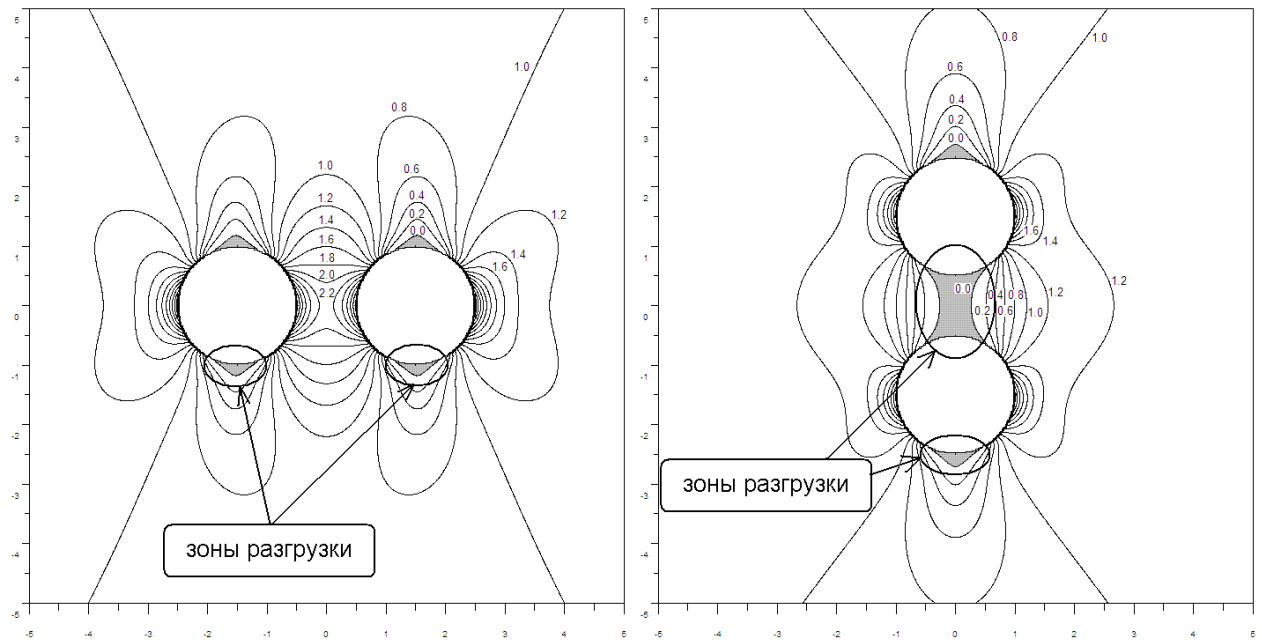
Интуитивно кажется, что чем больше отверстий, тем больше концентрация напряжений. Однако расчеты показывают, что это не всегда так. На примере квадратной решетки ($\omega_I = d+2R$, $\omega_{II} = (d+2R)i$, где $R=1$ – радиус отверстия, d – промежуток между отверстиями) можно видеть (фиг. 2.10), что при одноосном растяжении силой q коэффициент концентрации $k = \sigma_{\max}/q$ сильно зависит как от ориентации решетки относительно приложенной силы, так и от расстояния между отверстиями. На всех графиках видно, что с ростом d коэффициент k стремится к 3, т.е., что вполне логично, с расстоянием влияние отверстий друг на друга ослабевает.

Однако на ближних расстояниях коэффициент может быть как существенно больше, чем на одиночном отверстии, так и меньше, причем это сильно зависит от ориентации решетки. Так, если решетка растягивается вдоль одного из периодов ($\alpha = 0^\circ$), то при $d > 0.8R$ $k < 3$, а при малых $d < 0.8R$ $k > 3$. Если же сила направлена вдоль диагонали, то имеем обратную картину: при $d > 1.2R$ $k > 3$, при $d < 1.2R$ $k < 3$.

Т.е., во многих случаях решетка отверстий может быть более прочна, чем одиночное отверстие.



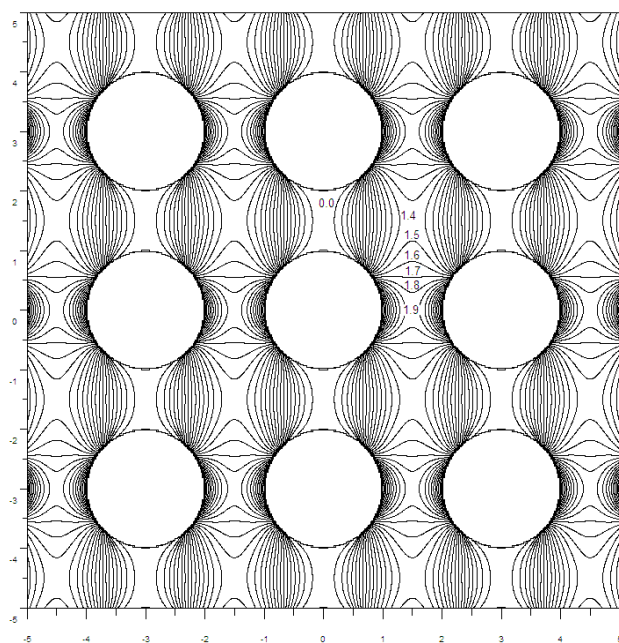
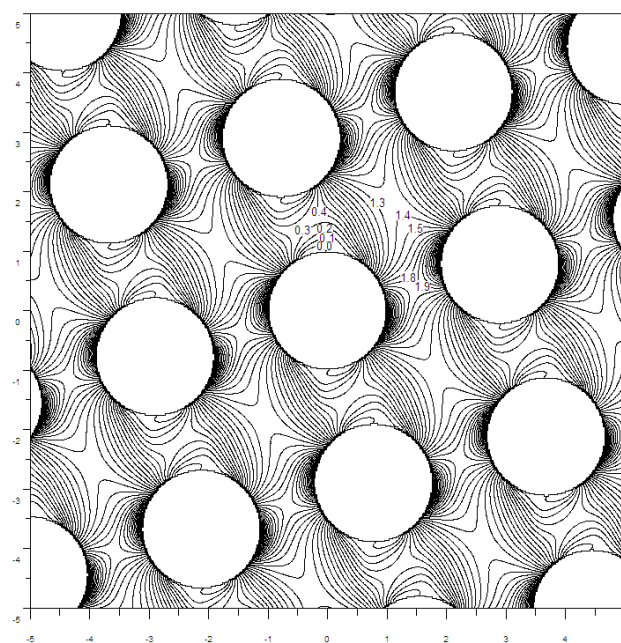
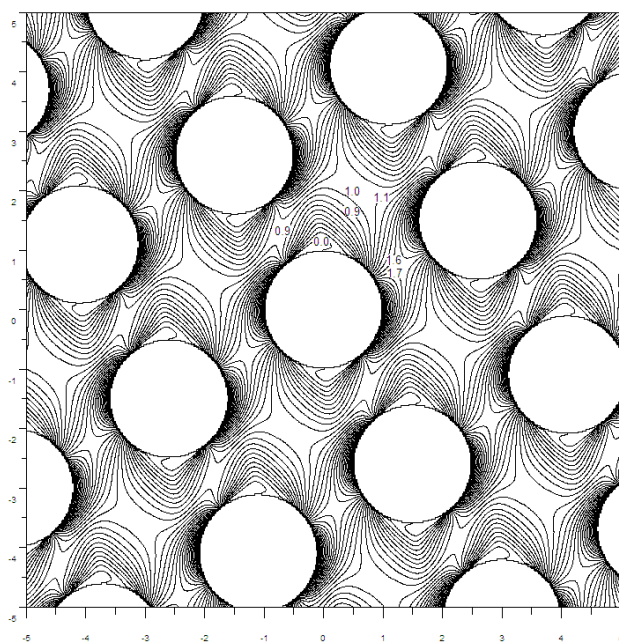
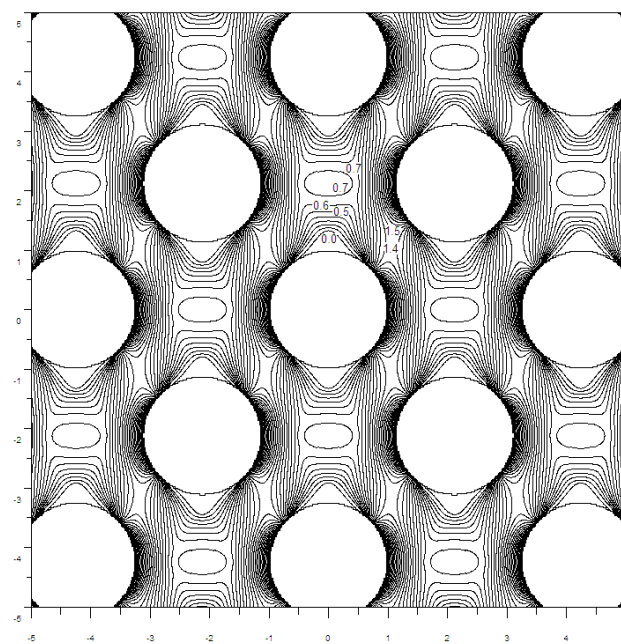
Фиг. 2.10. Зависимость концентрации напряжений от шага и ориентации решетки при одноосном растяжении.



Фиг. 3.11

Причина этого явления, возможно, кроется в зонах разгрузки, возникающих между близко расположенными отверстиями. На фиг. 3.11 можно видеть распределение σ_{\max}/q для упругой плоскости с двумя отверстиями под воздействием вертикального растяжения q . В верхней и нижней частях контуров возникают клинообразные области, где σ_{\max} не превышает нуля. Т.е., в этих областях материал работает на всестороннее сжатие, он как бы освобождается от приложенного растяжения. При вертикальном расположении отверстий области разгрузки, оказавшиеся между отверстиями, сливаются вместе. Получается, что два отверстия как бы превращаются в одно большое гантелеобразное с перемычкой-распоркой посередине, и концентрация напряжений падает. Отметим, что подобный эффект экранирования/усиления для трещин приведен, например в [55].

В периодических решетках такие перемычки – зоны разгрузки – могут образовывать полосы во всю длину решетки. Т.е. материал разделяется на полосы растяжения, соединенные перемычками, работающими на сжатие (фиг. 3.12). Возможно, поэтому и наблюдается возникающее падение концентрации напряжений.


 $\alpha = 0^\circ$

 $\alpha = 15^\circ$

 $\alpha = 30^\circ$

 $\alpha = 45^\circ$

Фиг. 3.12. σ_{\max}/q при одноосном растяжении

2.6. Заключение к главе 2

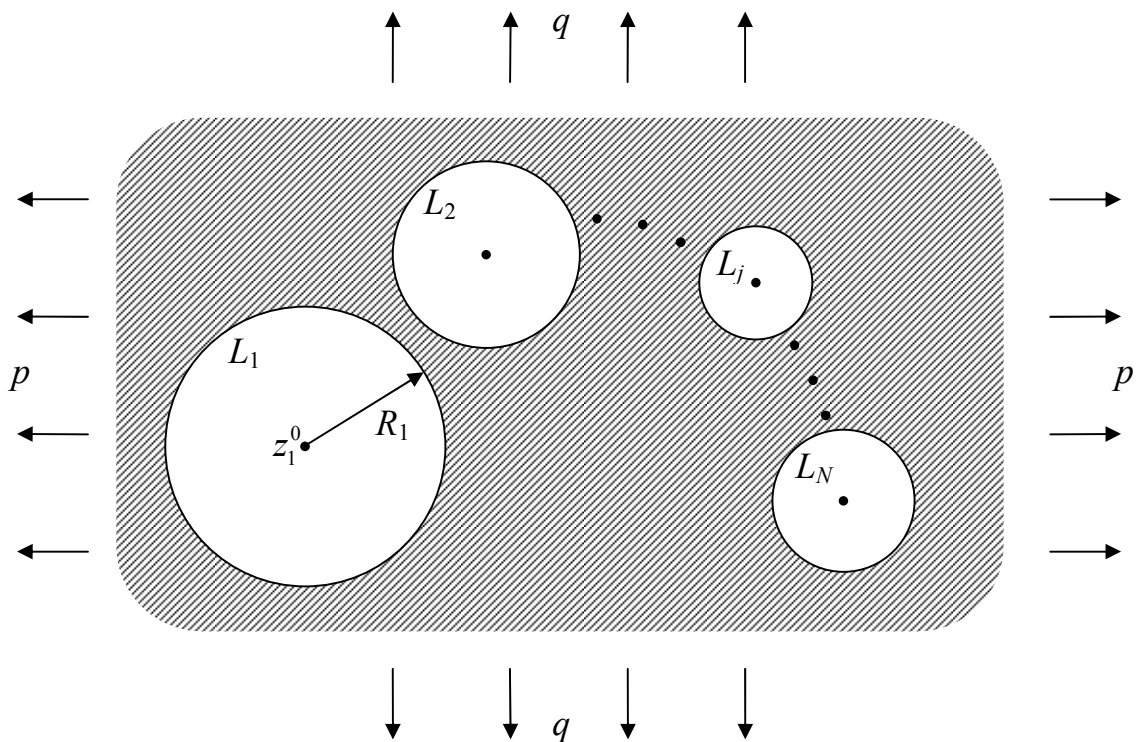
В главе метод мультипольного разложения применен к задаче о двояко-периодической системе отверстий (решетке отверстий) в упругой плоскости. Показано, что метод прекрасно подходит и к этому случаю, более того, для решетки отверстий он гораздо эффективнее, чем для пары, поскольку благодаря симметрии задачи половина членов разложения обнуляется. Соответственно, для достижения той же точности результата можно взять вдвое меньше членов разложения.

Результаты расчетов показали, что концентрация напряжений на отверстиях решетки сильно зависит от ориентации периодов решетки относительно приложенных нагрузок. Что более интересно, при определенных условиях (например в квадратной решетке, диагонально расположенной относительно растягивающей силы) концентрация напряжений может заметно снижаться при более тесном расположении отверстий. Т.е. в данном частном случае частая решетка оказывается более прочной, чем редкая.

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАДИУСА

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим более общую задачу. Пусть в упругой плоскости расположено несколько круговых отверстий L_j произвольных радиусов R_j (фиг. 3.1). Центры отверстий находятся в точках z_j^0 . Плоскость на бесконечности подвергается нагрузкам p и q .



Фиг. 3.1.

3.2. Основные уравнения

Запишем потенциалы как сумму потенциала, определяющего нагрузки на бесконечности и потенциалов, создаваемых каждым из отверстий:

$$\Phi(z) = \Phi_{\infty} + \sum_j \Phi_j \quad (3.1a)$$

$$\Psi(z) = \Psi_{\infty} + \sum_j \Psi_j \quad (3.1б)$$

Здесь $\Phi_{\infty} = \frac{p+q}{4}$ и $\Psi_{\infty} = \frac{q-p}{2}$ - уже известные нам составляющие.

Потенциалы j -го отверстия описываются как

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j(t_j) e^{i\alpha_j} dt_j}{T_j - z} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{\bar{g}'_j(t_j) e^{-i\alpha_j} d\bar{t}_j}{T_j - z} - \frac{\bar{T}_j g'_j(t_j) e^{i\alpha_j} dt_j}{(T_j - z)^2} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi(z - z_j^0)^2} \int_{L_j} [\bar{T}_j g'_j(t_j) e^{i\alpha_j} dt_j - T_j \bar{g}'_j(t_j) e^{-i\alpha_j} d\bar{t}_j] \end{aligned} \quad (3.2б)$$

Поскольку симметрия в данном случае отсутствует, проще всего положить $\alpha_k = 0$. Глобальные координаты точки на j -м контуре выразятся через локальные как $T_j = z_j^0 + R_j \xi_j$, где $\xi_j = e^{i\theta_j}$ - точка на единичной окружности.

Тогда потенциалы примут вид:

$$\Phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j R_j d\xi_j}{z_j^0 + R_j \xi_j - z} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{\bar{g}'_j R_j d\bar{\xi}_j}{z_j^0 + R_j \xi_j - z} - \frac{(\bar{z}_j^0 + R_j \bar{\xi}_j) g'_j R_j d\xi_j}{(z_j^0 + R_j \xi_j - z)^2} \right] + \\ + \frac{R_j}{2\pi(z - z_j^0)^2} \int_{L_j} [(\bar{z}_j^0 + R_j \bar{\xi}_j) g'_j d\xi_j - (z_j^0 + R_j \xi_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi}_j] \end{aligned} \quad (3.2б)$$

Если точка $z = T_m = z_m^0 + R_m \eta_m$, т.е. расположена на m -м контуре, то получим (индексы у ξ_j и η_m для краткости опущены)

$$\Phi_j(T_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j d\xi}{\xi - \frac{R_m}{R_j} \eta + \frac{z_j^0 - z_m^0}{R_j}} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(T_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} & \left[\frac{\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{\xi - \frac{R_m}{R_j} \eta + \frac{z_j^0 - z_m^0}{R_j}} - \frac{(\bar{\xi} + \bar{z}_j^0 / R_j) g'_j d\xi}{\left(\xi - \frac{R_m}{R_j} \eta + \frac{z_j^0 - z_m^0}{R_j} \right)^2} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{R_m}{R_j} \eta - \frac{z_j^0 - z_m^0}{R_j} \right)^2} \int_{L_j} [(\bar{\xi} + \bar{z}_j^0 / R_j) g'_j d\xi - (\xi + z_j^0 / R_j) \bar{g}'_j d\bar{\xi}] \end{aligned} \quad (3.3b)$$

Введём следующие обозначения:

$$r_{jm} = \frac{R_m}{R_j}; \quad \zeta_{jm} = \frac{z_m^0 - z_j^0}{R_j} \quad (3.4)$$

Эти величины являются ничем иным, как соответственно размером и расположением центра m -го отверстия в системе координат отверстия j , т.е. если бы оно находилось в начале координат и было единичным.

Очевидны их следующие свойства (их мы будем использовать в дальнейших преобразованиях):

$$\begin{aligned} r_{mj} &= 1/r_{jm}; & r_{jj} &= 1; & r_{jm} &= -\zeta_{jm}/\zeta_{mj} = -\bar{\zeta}_{jm}/\bar{\zeta}_{mj}; \\ \zeta_{mj} &= -\zeta_{jm} r_{mj}; & \zeta_{jj} &= 0; & \zeta_{jm} \bar{\zeta}_{mj} &= \bar{\zeta}_{jm} \zeta_{mj} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Также отметим, что $|\zeta_{jm}| \geq 1 + r_{jm}$, причём равенство наступает только если отверстия j и m касаются друг друга, т.е. в данной задаче неравенство всегда строгое.

С учётом этого перепишем (3.3) следующим образом

$$\Phi_j(T_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j d\xi}{\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm}} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_j(T_m) = & \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm}} - \frac{(\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j)g'_j d\xi}{(\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm})^2} \right] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(r_{jm}\eta + \zeta_{jm})^2} \int_{L_j} \left[(\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j)g'_j d\xi - (\xi + z_j^0/R_j)\bar{g}'_j d\bar{\xi} \right] \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Подставив эти выражения в граничные условия, получим

$$\begin{aligned} \sum_j \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{g'_j d\xi}{\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm}} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \int_{L_j} \frac{(r_{jm}\eta + z_m^0/R_j)\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{(\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \int_{L_j} \left[\frac{g'_j d\xi}{\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} - \frac{(\xi + z_j^0/R_j)\bar{g}'_j d\bar{\xi}}{(\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\bar{\eta}^2}{2\pi} \frac{1}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2} \int_{L_j} \left[(\xi + z_j^0/R_j)\bar{g}'_j d\bar{\xi} - (\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/\bar{R}_j)g'_j d\xi \right] \right\} = \\ = \sigma(T_m) - \frac{p+q}{2} + \bar{\eta}^2 \frac{q-p}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Как и прежде, здесь будет удобно ввести ядра K и L , но теперь они будут свои для каждой пары отверстий (j, m) :

$$\sum_j \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) g'_j d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{g}'_j d\bar{\xi} \right\} = A^m(\eta) \quad (3.8)$$

$$K^{jm}(\xi, \eta) = \frac{1}{\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm}} - \frac{\bar{\eta}^2}{\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} + \bar{\eta}^2 \frac{\bar{\xi} + \bar{z}_j^0/R_j}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2} \quad (3.9a)$$

$$L^{jm}(\xi, \eta) = \frac{1}{\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm}} + \bar{\eta}^2 \frac{\xi - r_{jm}\eta - \zeta_{jm}}{(\bar{\xi} - r_{jm}\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{jm})^2} - \bar{\eta}^2 \frac{\xi + z_j^0/R_j}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2} \quad (3.9b)$$

$$A^m(\eta) = \sigma(T_m) - \frac{p+q}{2} + \bar{\eta}^2 \frac{q-p}{2} \quad (3.9b)$$

3.3. Численное решение

Разложим $g'_j(\xi)$ в ряд Лорана:

$$g'_j(\xi) = \sum_n g_n^j \xi^n \quad (3.10)$$

Подставив разложение в (3.8), получаем

$$\sum_{j,n} \left\{ g_n^j \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) \xi^n d\xi + \bar{g}_n^j \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{\xi}^n d\bar{\xi} \right\} = A^m(\eta) \quad (3.11)$$

Обозначим

$$K_n^{jm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} K^{jm}(\xi, \eta) \xi^n d\xi \quad (3.12a)$$

$$L_n^{jm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \bar{\xi}^n d\bar{\xi} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_j} L^{jm}(\xi, \eta) \xi^{-n-2} d\xi \quad (3.12b)$$

Проинтегрировав, получим (если $j \neq m$)

$$K_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} -i \frac{\bar{\eta}^2}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^{n+2}}, & n \geq 1 \\ -2i \frac{\bar{\eta}^2}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2}, & n = 0 \\ \frac{i}{r_{jm} \eta + \zeta_{jm}} - i \bar{\eta}^2 \frac{r_{jm} \bar{\eta} + \bar{z}_m^0 / R_j}{(r_{jm} \bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2}, & n = -1 \\ \frac{i}{(r_{jm} \eta + \zeta_{jm})^{-n}}, & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.13a)$$

$$L_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ \frac{-i}{r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm}} + 2i \frac{\bar{\eta}^2}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^3} - i\bar{\eta}^2 \frac{r_{jm}\eta + z_m^0/R_j}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^2}, & n = -1 \\ \frac{-i}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^{-n}} + i \frac{\bar{\eta}^2(-n+1)}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^{-n+2}} + in\bar{\eta}^2 \frac{r_{jm}\eta + \zeta_{jm}}{(r_{jm}\bar{\eta} + \bar{\zeta}_{jm})^{-n+1}}, & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.136)$$

Или

$$K_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} -ir_{mj}^{n+2} \frac{\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{n+2}}, & n \geq 1 \\ -2ir_{mj}^2 \frac{\bar{\eta}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2}, & n = 0 \\ ir_{mj} \left[\frac{1}{\eta - \zeta_{mj}} - \bar{\eta}^2 \frac{\bar{\eta} + \bar{z}_m^0/R_m}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2} \right], & n = -1 \\ ir_{mj}^{-n} \frac{1}{(\eta - \zeta_{mj})^{-n}}, & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.14a)$$

$$L_n^{jm}(\eta) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ ir_{mj} \left[-\frac{1}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj}} + 2 \frac{\bar{\eta}^2 r_{mj}^2}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^3} - \bar{\eta}^2 \frac{\eta + z_m^0/R_m}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^2} \right], & n = -1 \\ ir_{mj}^{-n} \left[-\frac{1}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n}} + \frac{\bar{\eta}^2 r_{mj}^2 (-n+1)}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n+2}} + n\bar{\eta}^2 \frac{\eta - \zeta_{mj}}{(\bar{\eta} - \bar{\zeta}_{mj})^{-n+1}} \right], & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.146)$$

В частном случае, когда $j=m$, имеем

$$K_n^{jj}(\eta) = \begin{cases} -i\eta^n, & n \geq 1 \\ -2i, & n = 0 \\ -i\bar{z}_m^0/R_m, & n = -1 \\ i\frac{1}{\eta^{-n}}, & n \leq -2 \end{cases} \quad (3.14в)$$

$$L_n^{jj}(\eta) = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ -i z_m^0/R_m, & n = -1 \end{cases} \quad (3.14б)$$

Как и в предыдущих частях, введём функцию невязки

$$G(\eta) = \sum_m G^m(\eta) = \sum_m \left\{ \sum_{j,n} [g_n^j K_n^{jm}(\eta) + \bar{g}_n^j L_n^{jm}(\eta)] - A^m(\eta) \right\} \quad (3.15)$$

Как было показано ранее, норма функции невязки равна сумме квадратов модулей её коэффициентов разложения по степенным функциям (см. 1.14)

$$G^m(\eta) = \sum_k G_k^m \eta^k, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} G_k^m &= \frac{1}{2\pi i} \oint G^m(\eta) \eta^{-k-1} d\eta = \\ &= \sum_{n,j} \left[g_n^j \frac{1}{2\pi i} \oint K_n^{jm} \eta^{-k-1} d\eta + \bar{g}_n^j \frac{1}{2\pi i} \oint L_n^{jm} \eta^{-k-1} d\eta \right] - \frac{1}{2\pi i} \oint A^m \eta^{-k-1} d\eta = \\ &= \sum_{n,j} [g_n^j K_{nk}^{jm} + \bar{g}_n^j L_{nk}^{jm}] - A_k^m \end{aligned} \quad (3.17)$$

Значения суммирующих ядер приведены в таблицах 3.1а-д .

| | |
|---------------------------|---|
| $K_{nk}^{jm} (j \neq m):$ | |
| $n \geq 1:$ | $k \geq -1: K_{nk}^{jm} = 0$ $k \leq -2: K_{nk}^{jm} = i \frac{(n-k-1)!}{(n+1)!(-k-2)!} r_{mj}^2 \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}^n} \frac{1}{\bar{\zeta}_{mj}^{-k}}$ |
| $n = 0:$ | $k \geq -1: K_{nk}^{jm} = 0$ $k \leq -2: K_{nk}^{jm} = 2i(-k-1)r_{mj}^2 \frac{1}{\bar{\zeta}_{mj}^{-k}}$ |
| $n = -1:$ | $k \geq 0: K_{nk}^{jm} = -i \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}} \frac{1}{\bar{\zeta}_{mj}^k}$ $k = -1: K_{nk}^{jm} = 0$ $k \leq -2: K_{nk}^{jm} = i \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}} \frac{1}{\bar{\zeta}_{mj}^{-k-1}} \left[\bar{\zeta}_{mj} + (-k-1) \frac{\bar{z}_j^0}{R_m} \right]$ |
| $n \leq -2:$ | $k \geq 0: K_{nk}^{jm} = i \frac{(k-n-1)!}{(-n-1)!k!} \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}^{-n}} \frac{1}{\bar{\zeta}_{mj}^k}$ $k \leq -1: K_{nk}^{jm} = 0$ |

Табл. 3.1а

Далее, как и при решении предыдущих задач, ограничимся порядками $-N_2 \leq k, n \leq N_1$, и решаем получившуюся систему линейных уравнений $G_k = 0$. Решением ее будет набор значений g_n^j , полностью описывающий искомое напряженно-деформированное состояние.

| | |
|---------------------------|---|
| $L_{nk}^{jm} (j \neq m):$ | |
| $n \geq 0:$ | $L_{nk}^{jm} = 0$ |
| $n = -1:$ | $k \geq 1: L_{nk}^{jm} = 0$ $k = 0: L_{nk}^{jm} = i \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}}$ $k = -1: L_{nk}^{jm} = 0$ $k \leq -2: L_{nk}^{jm} = i \frac{-k-1}{\bar{\zeta}_{jm} \bar{\zeta}_{mj}^k} \left[\frac{z_m^0}{R_m} \bar{\zeta}_{mj} - 1 + k r_{mj}^2 \right]$ |
| $n \leq -2:$ | $k \geq 1: L_{nk}^{jm} = 0$ $k = 0: L_{nk}^{jm} = i \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}^{-n}}$ $k = -1: L_{nk}^{jm} = 0$ $k \leq -2: L_{nk}^{jm} = i \frac{1}{\bar{\zeta}_{jm}^{-n} \bar{\zeta}_{mj}^{-k}} \frac{(-n-k-2)!}{(-n)!(-k-2)!} \left[-(-n-k-1) \left(\frac{n}{k} + r_{mj}^2 \right) + n \zeta_{mj} ^2 \right]$ |

Табл. 3.1б

| | |
|------------------|-------------------------------------|
| $K_{nk}^{jj} :$ | |
| $n = k \geq 1:$ | $K_{nk}^{jj} = i$ |
| $n = k = 0:$ | $K_{nk}^{jj} = 2i$ |
| $n = -1; k = 0:$ | $K_{nk}^{jj} = i \bar{z}_j^0 / R_j$ |
| $n = k \leq -2:$ | $K_{nk}^{jj} = -i$ |
| в других случаях | $K_{nk}^{jj} = 0$ |

Табл. 3.1в

| | |
|------------------|-------------------------------|
| $L_{nk}^{jj} :$ | |
| $n = -1; k = 0:$ | $L_{nk}^{jj} = i z_j^0 / R_j$ |
| в других случаях | $L_{nk}^{jj} = 0$ |

Табл. 3.1г

| | |
|------------------|----------------------|
| $A_k^m :$ | |
| $k = 0:$ | $A_0^m = -(p+q)/2$ |
| $k = -2:$ | $A_{-2}^m = (q-p)/2$ |
| в других случаях | $A_k^m = 0$ |

Табл. 3.1д

3.4. Примеры расчетов НДС

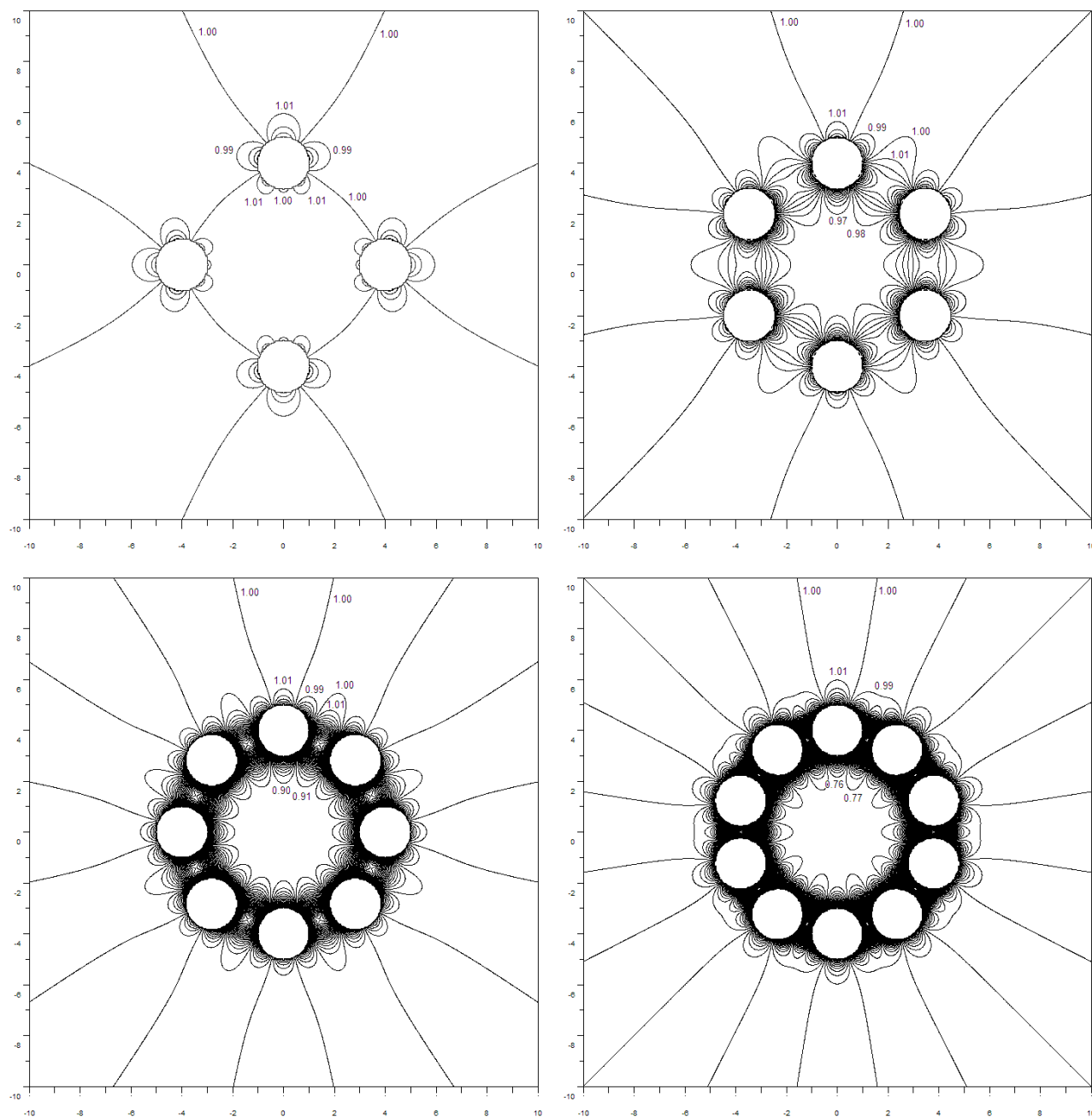
3.4.1°. Кольцо одинаковых отверстий при всестороннем растяжении.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в упругой плоскости расположены кольцом несколько одинаковых отверстий. Плоскость подвергается всестороннему растяжению. Как ведет себя поле напряжений внутри кольца и в окрестности отверстий?

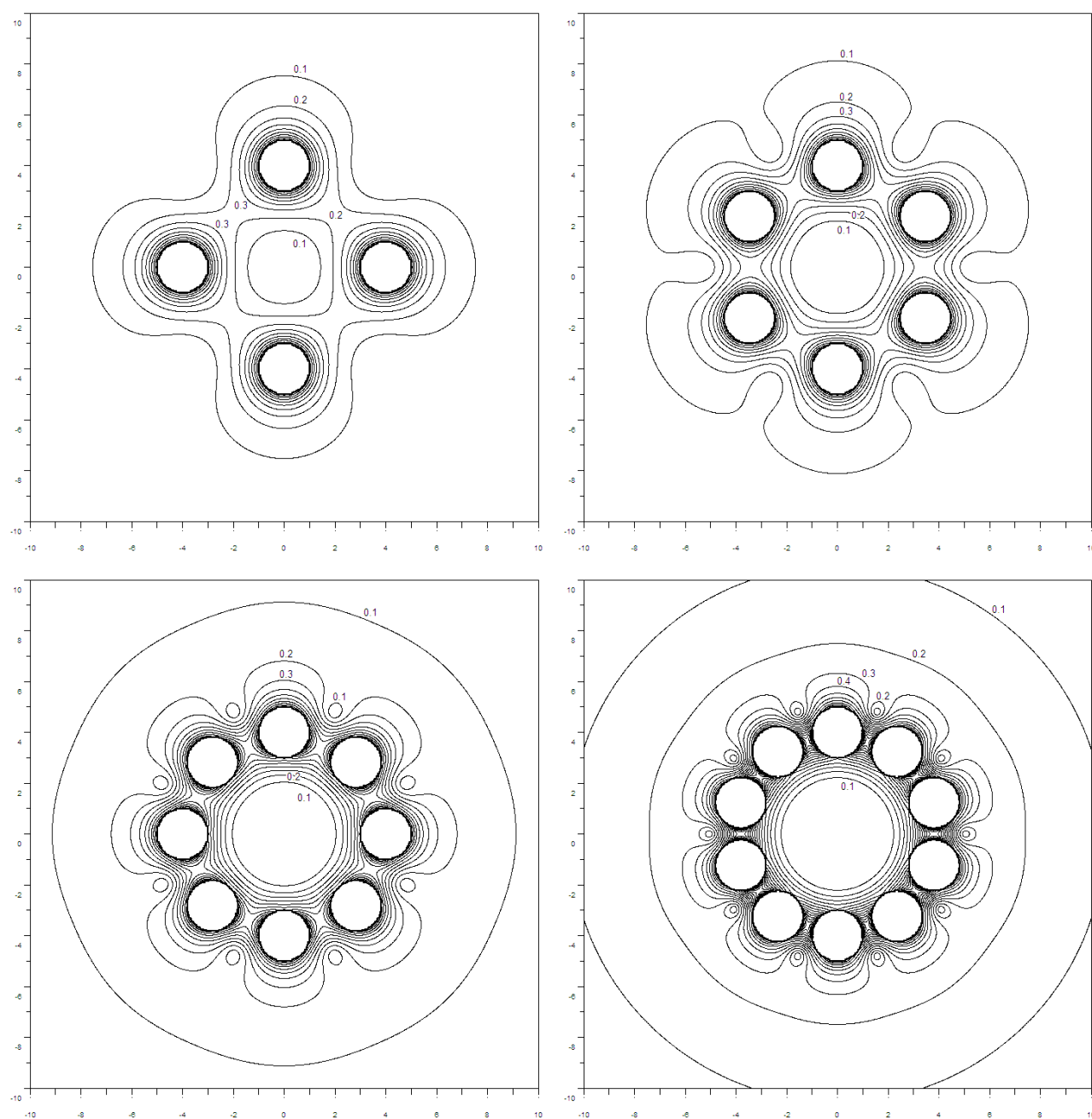
Пусть радиус кольца равен четырем радиусам отверстия. На фиг. 3.2 показано распределение среднего напряжения (одна изолиния показывает изменение на 0.1 приложенной на бесконечности нагрузки). На фигурах видно, что чем больше отверстий и чем теснее они расположены, тем больше напряжения концентрируются в области кольца – в промежутках между отверстиями. Этот процесс сопровождается снижением напряжений внутри кольца (см. табл. 3.2) – если в при 4-х отверстиях оно слегка больше приложенного на бесконечности, то с увеличением количества отверстий напряжение заметно снижается: внутренность кольца как бы экранируется все более тесно расположенными отверстиями.

| Количество отверстий | Среднее напряжение в центре кольца |
|----------------------|------------------------------------|
| 4 | 1,0052994 |
| 6 | 0,9764383 |
| 8 | 0,9048256 |
| 10 | 0,7688997 |

Табл. 3.2.



Фиг. 3.2 Среднее напряжение при всестороннем растяжении.



Фиг. 3.3 Максимальный сдвиг при всестороннем растяжении

Также представляет интерес распределение максимального сдвига, испытываемого средой (4.3). Карта изолиний показывает, что в окрестностях отверстий материал подвергается касательному напряжению (в полярной системе координат, связанной с отверстием). В промежутках между отверстиями материал растягивается в радиальном направлении (в полярной системе координат, связанной с кольцом). Также заметно, что в отличие от среднего напряжения сдвиговое не только концентрируется возле отверстий, но и в целом растёт в плоскости. Величина концентрации и ее расположение указаны в табл. 3.3 (в отношении к приложенной нагрузке).

| Количество отверстий | Максимальный сдвиг | Максимальное растяжение | Расположение точки концентрации |
|----------------------|--------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 4 | 1.043885 | 2.087769 | дальняя точка от центра кольца |
| 6 | 1.145056 | 2.290086 | промежуток между отверстиями |
| 8 | 1.374915 | 2.749969 | |
| 10 | 1.869485 | 3.703888 | |

Табл. 3.3

3.4.2°. Ряд одинаковых отверстий.

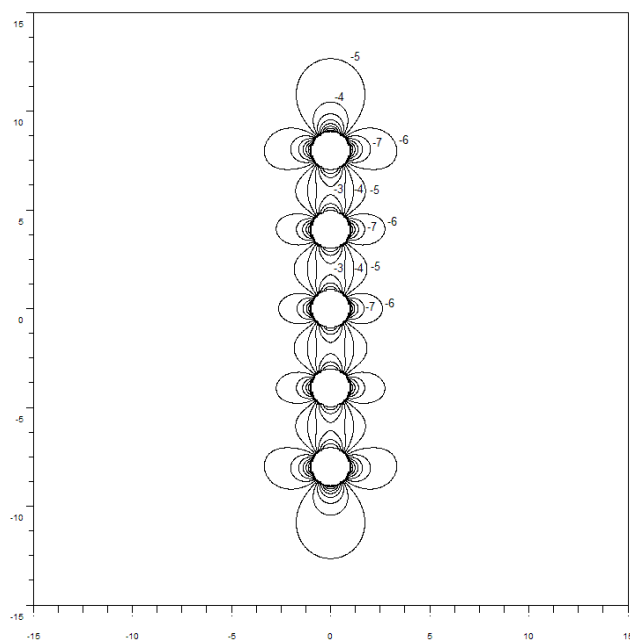
Рассмотрим поведение упругой плоскости с рядом отверстий в условиях вертикального стесненного сжатия (подобное нагружение испытывают горные породы). Пусть в плоскости вертикально расположены пять одинаковых отверстий. К плоскости приложено сжимающее напряжение по оси Ox , и в 10 раз большее сжимающее напряжение по оси Oy . Результаты расчетов (среднее напряжение, максимальный сдвиг и максимальное растяжение) представлены на фиг. 3.4. На фиг. 3.5 и 3.6 представлены те же поля в окрестностях центрального и верхнего отверстий соответственно.

Значения концентрации напряжений приведены в табл. 3.4 (в отношении к горизонтальной нагрузке).

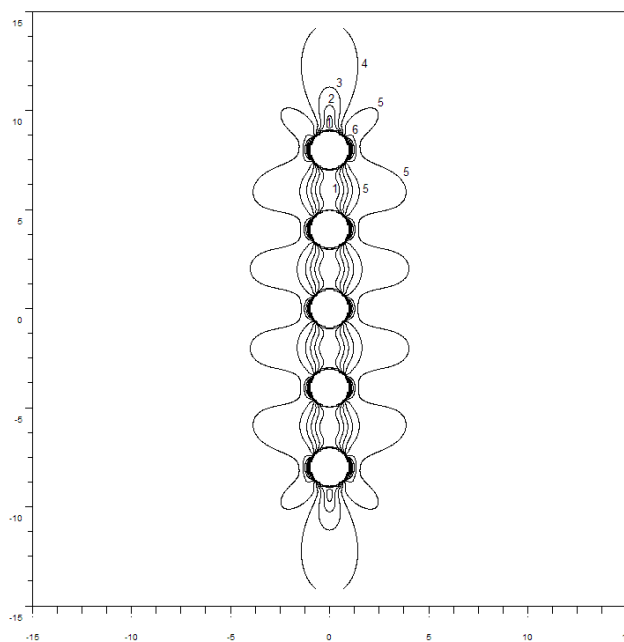
| Отверстие | Максимальный сдвиг | Максимальное растяжение |
|-------------|-----------------------|----------------------------|
| Центральное | 11.195387 | 1.5793228 |
| Верхнее | 12.680735 | 5.5201974 |

Табл. 3.4

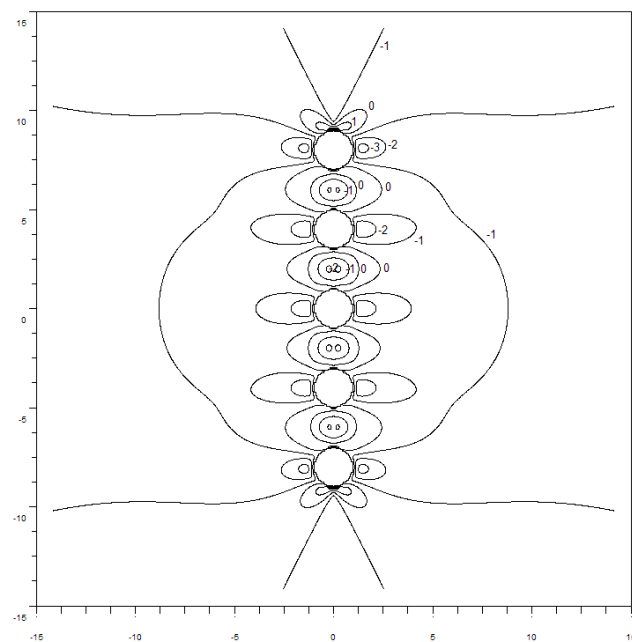
Видно, что концентрация напряжений больше у "крайних" отверстий цепочки, чем у "внутренних". Это означает, при разрушении трещина возникнет только у крайних отверстий. При этом концентрация растяжения больше у "крайнего" отверстия почти вчетверо, а концентрация сдвиговых напряжений изменяется слабо.



Среднее напряжение

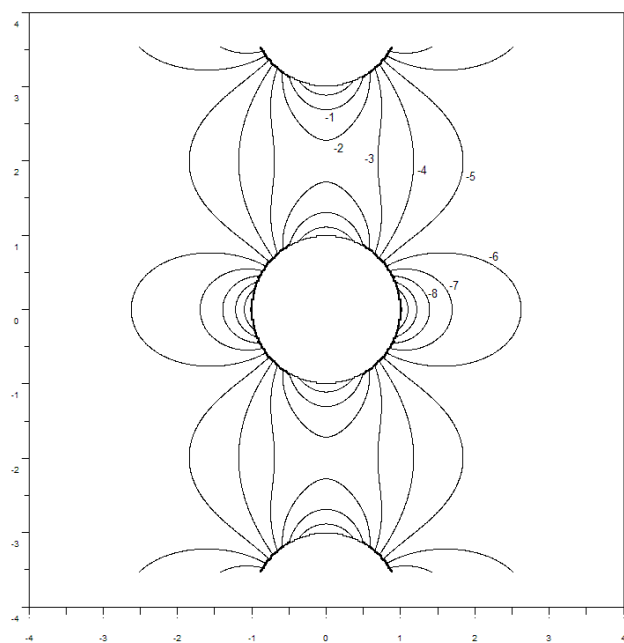


Максимальный сдвиг

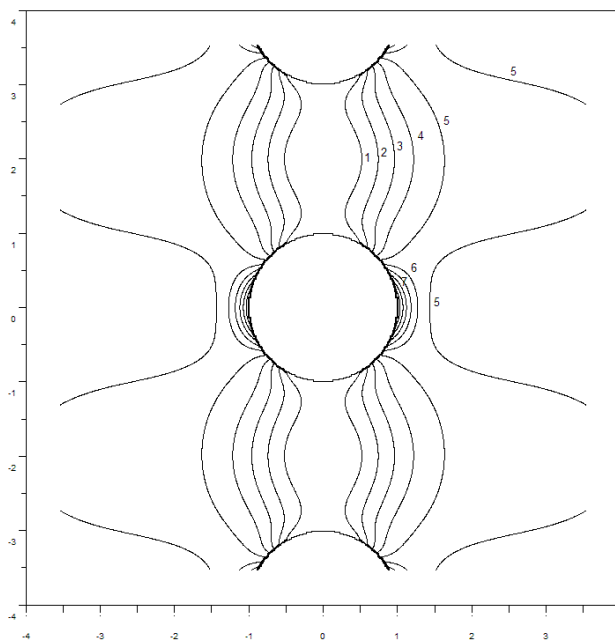


Максимальное растяжение

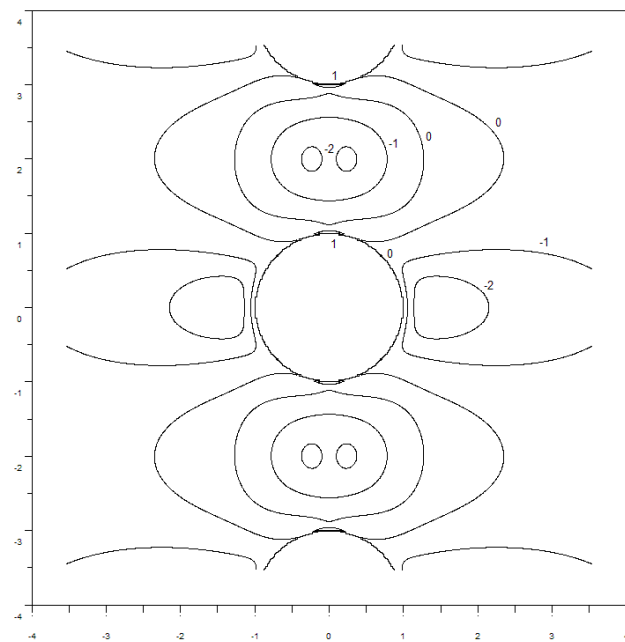
Фиг. 3.4 Цепочка отверстий



Среднее напряжение

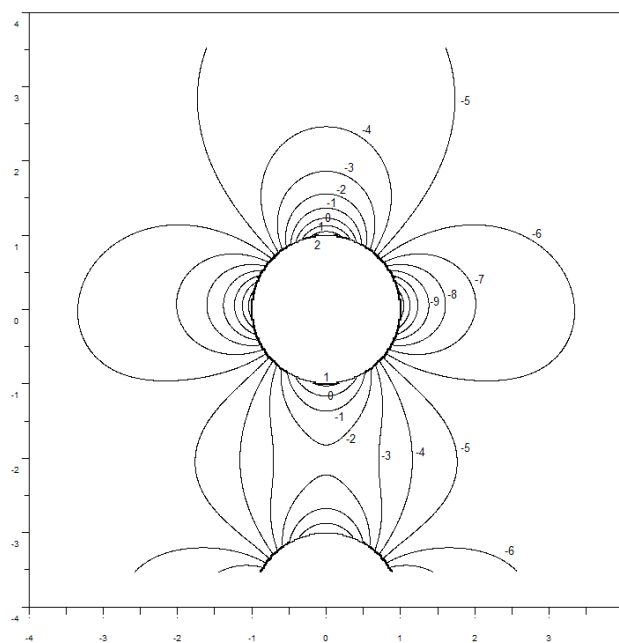


Максимальный сдвиг

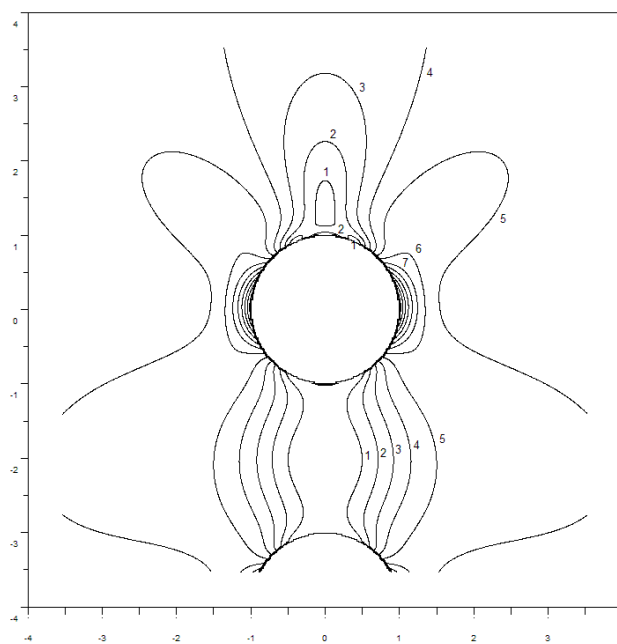


Максимальное растяжение

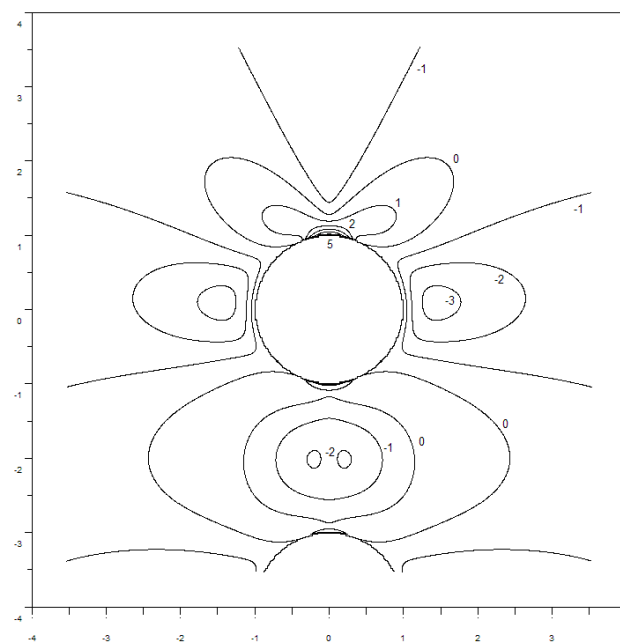
Фиг. 3.5 Центральное отверстие цепочки



Среднее напряжение



Максимальный сдвиг



Максимальное растяжение

Фиг. 3.6 Верхнее отверстие цепочки

3.4.3°. Малые отверстия в поле большого.

В различных материалах (например, в металлах при разрушении) возникают поры различных размеров, иногда различающихся на порядки. Поэтому представляет интерес влияние друг на друга отверстий с разными радиусами.

Рассмотрим задачу об упругом поле малых отверстий в поле большого в десять раз отверстия. Параметры отверстий приведены в табл. 3.5.

| № отверстия | Радиус | X центра | Y центра |
|-------------|--------|----------|----------|
| 1 | 2 | -4 | 0 |
| 2 | 0.2 | -1 | 1 |
| 3 | 0.2 | 1 | 1 |
| 4 | 0.2 | -1 | -1 |
| 5 | 0.2 | 1 | -1 |

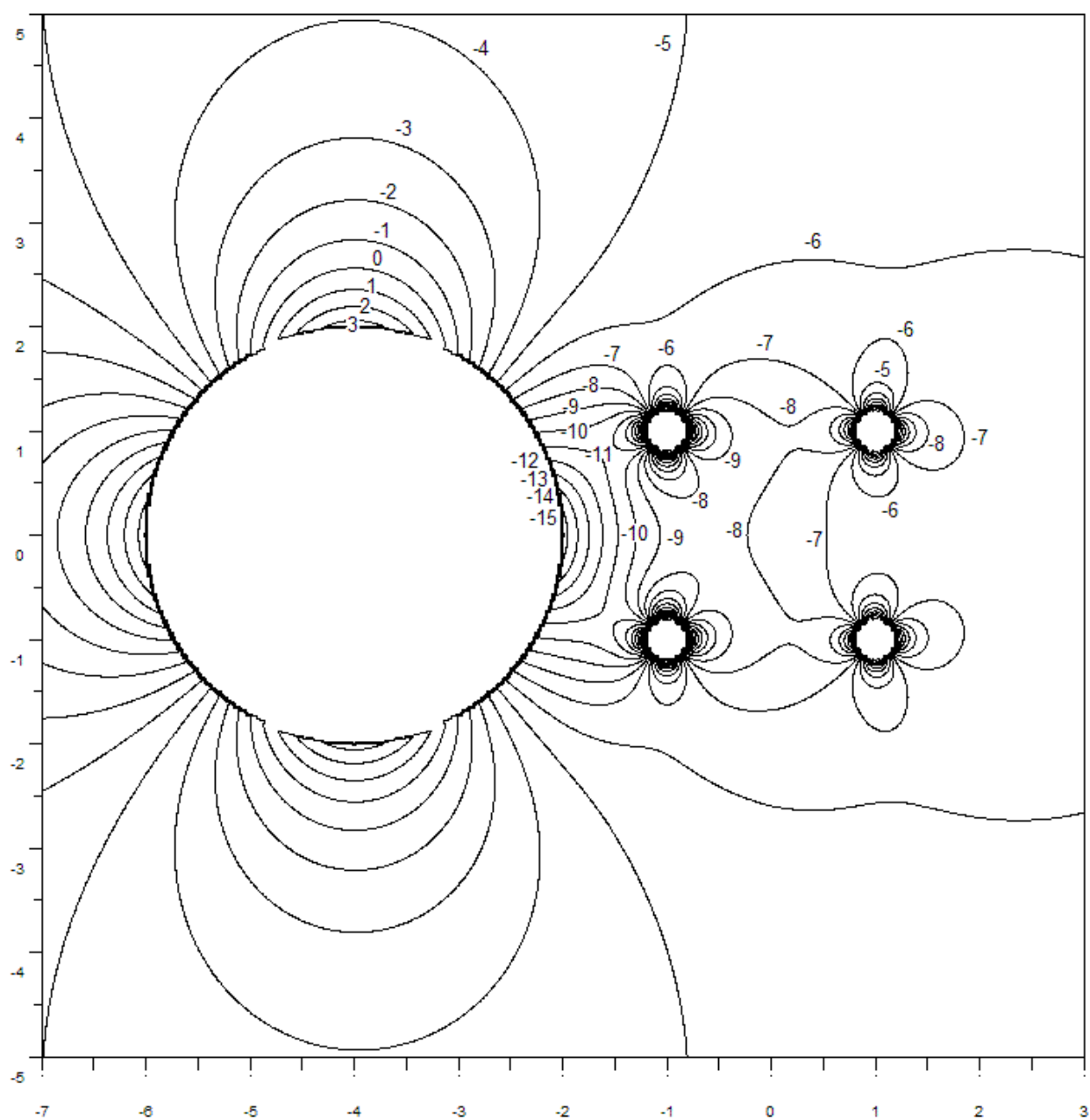
Табл. 3.5

На фиг. 3.7а-в представлены распределения среднего напряжения, максимального сдвига и максимального растяжения. Значения концентрации напряжений указаны в табл. 3.6 (отверстия 4 и 5 являются зеркальными отражениями 2 и 3, поэтому в таблице не указаны). Для сравнения укажем, что максимальный сдвиг на одиночном отверстии достигает при таких нагрузках 14.5, максимальное растяжение – 7.

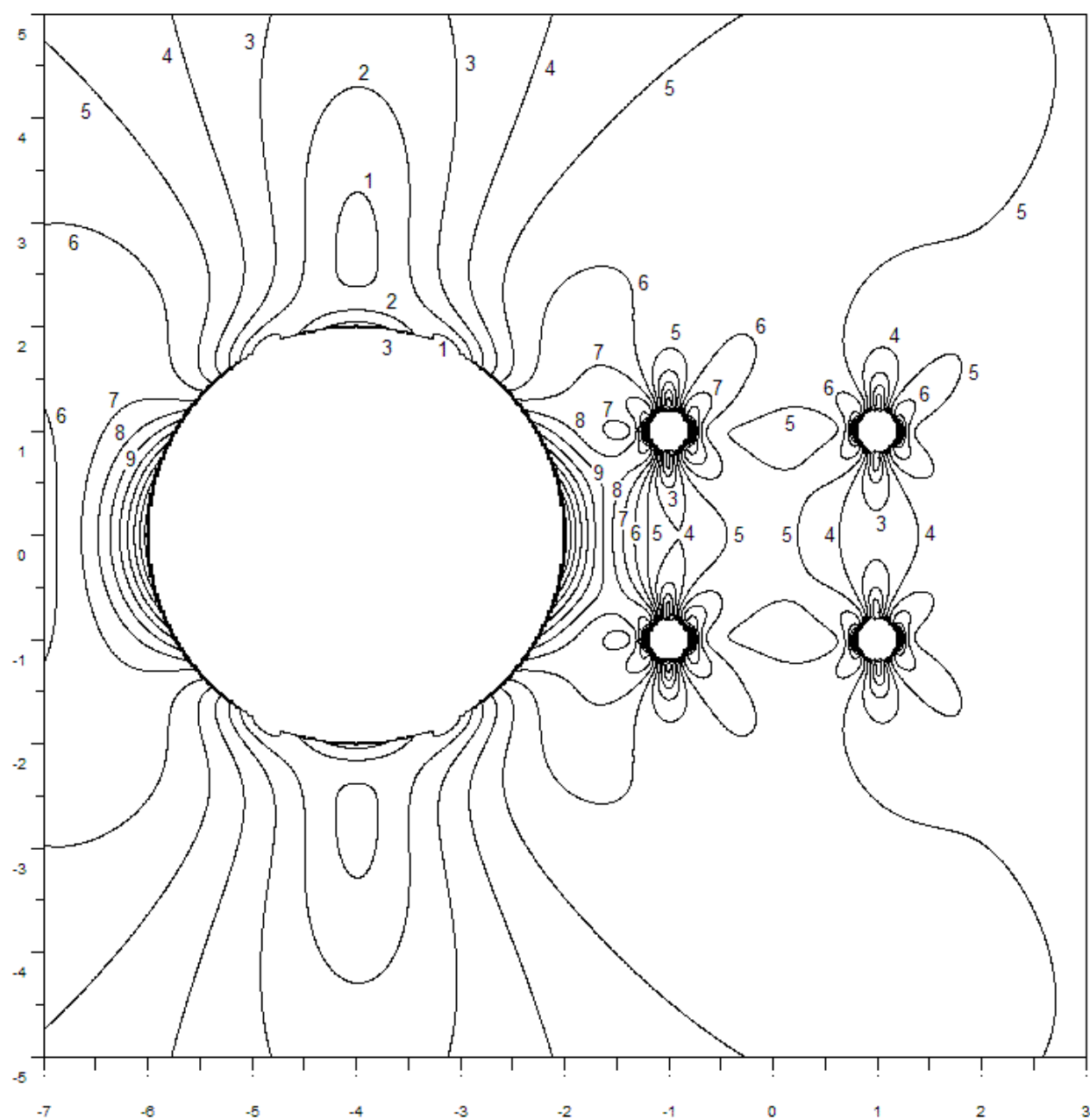
Из таблицы видно, что максимальный сдвиг увеличивается на всех отверстиях, причем на малых – гораздо сильнее, чем на большом. Максимальное растяжение – напротив, снижается на малых и незначительно увеличивается на большом. Таким образом, данная система отверстий гораздо более подвержена сдвиговому разрушению, чем одиночное отверстие, причем разрушение начнется от малых отверстий. Трещина разрыва если и возникнет, то на большом отверстии.

| № отверстия | Максимальный сдвиг | | Максимальное растяжение | |
|-------------|--------------------|--------------|-------------------------|-------------------|
| | значение | расположение | значение | расположение |
| 1 | 14.591152 | слева | 7.010619 | вверху и внизу |
| | 15.608937 | справа | | |
| 2 | 20.657601 | слева | 6.862595 | вверху |
| | 19.374606 | справа | 5.816832 | внизу |
| 3 | 15.790011 | слева | 4.532073 | вверху |
| | 15.617954 | справа | 3.586653 | внизу |

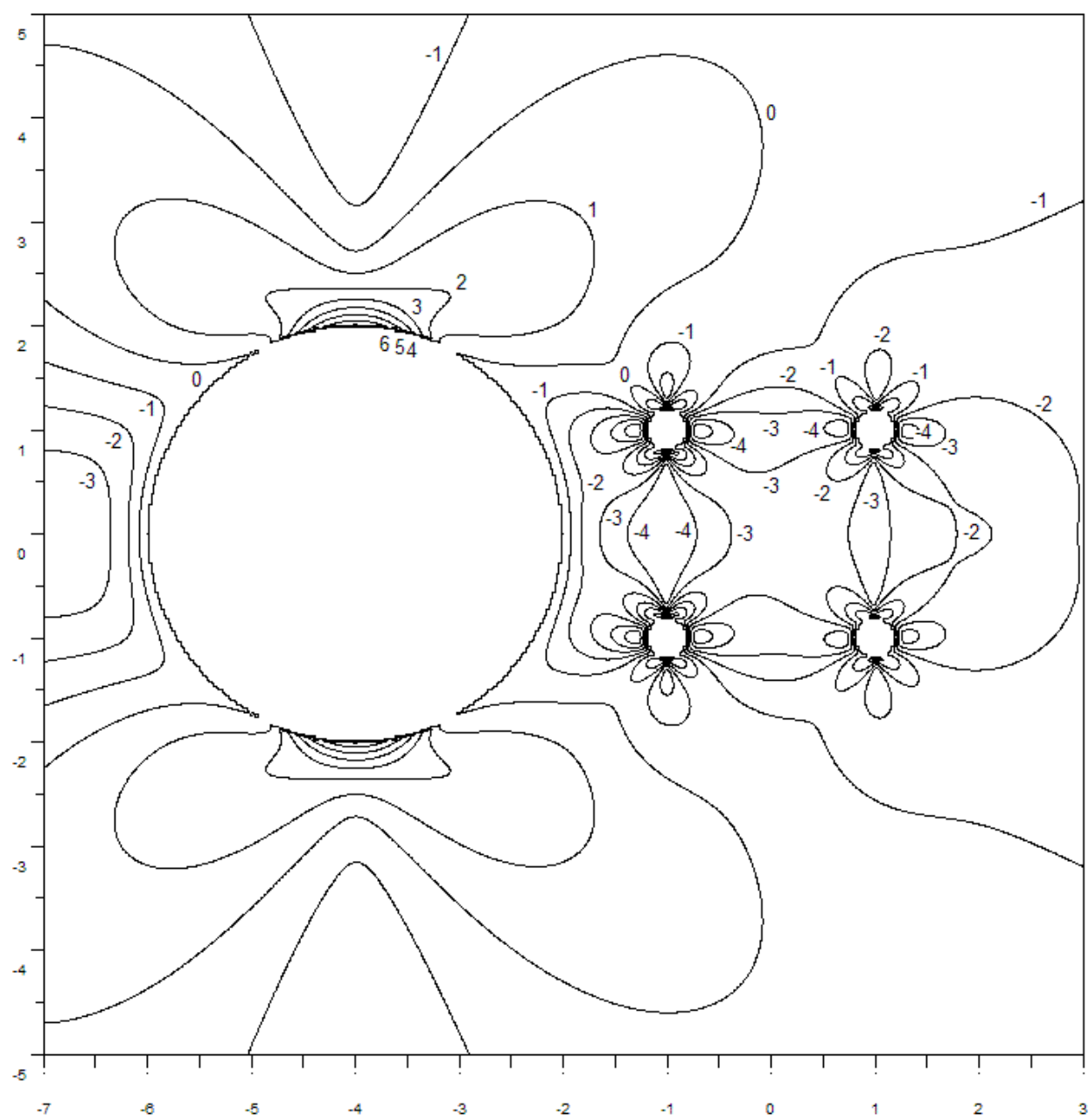
Табл.3.6



Фиг. 3.7а Среднее напряжение



Фиг. 3.76 Максимальный сдвиг



Фиг. 3.7в Максимальное растяжение

3.4.4°. Малые отверстия в поле двух больших отверстий.

Рассмотрим аналогичную задачу о малых отверстиях между двумя крупными отверстиями. Теперь зададим отверстия следующим образом (табл. 3.7).

| № отверстия | Радиус | Х центра | У центра |
|-------------|--------|----------|----------|
| 1 | 2 | -4 | 0 |
| 2 | 0.2 | -1 | 1 |
| 3 | 0.2 | 1 | 1 |
| 4 | 0.2 | -1 | -1 |
| 5 | 0.2 | 1 | -1 |
| 6 | 2 | 4 | 0 |

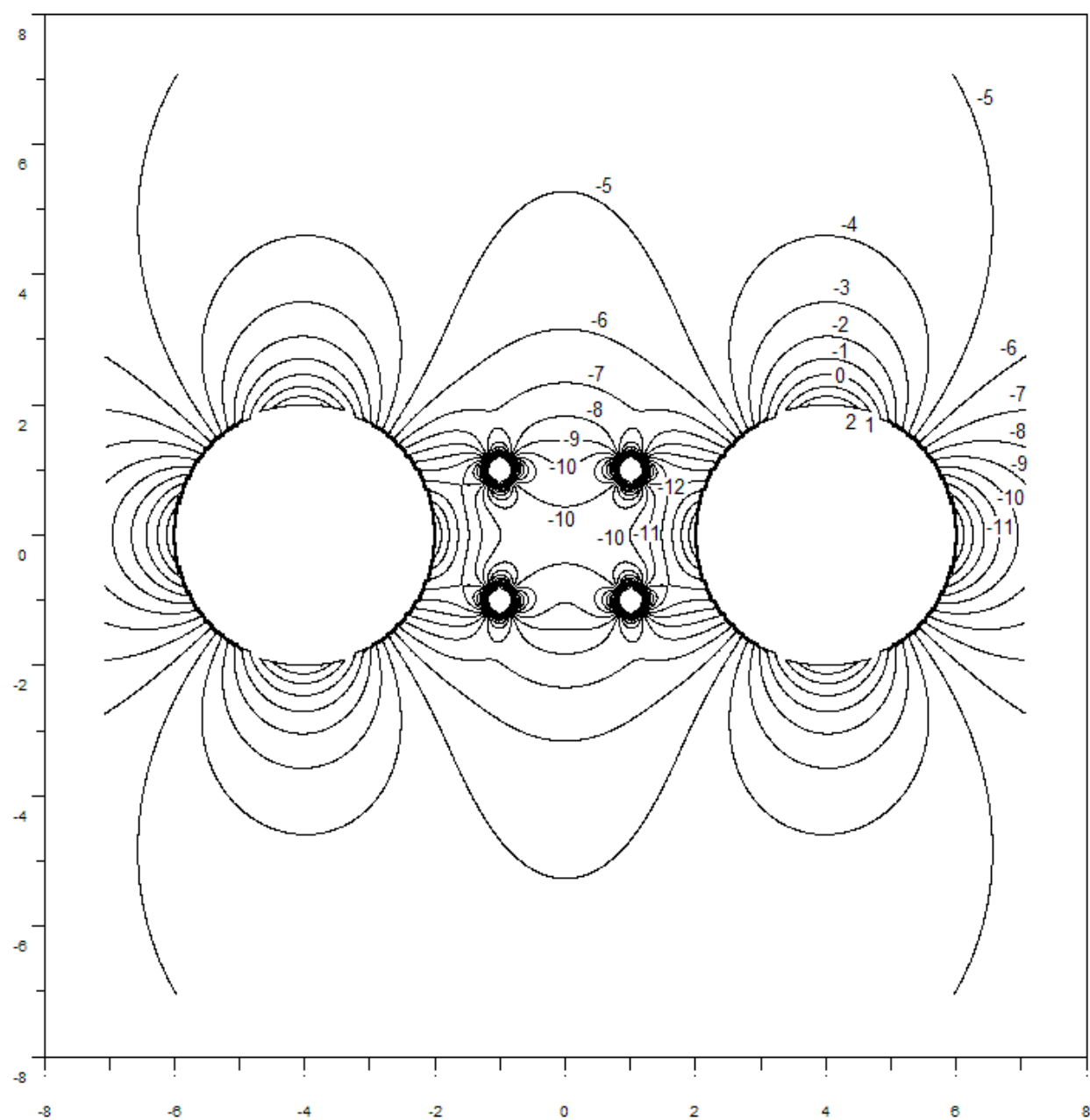
Табл. 3.7.

Распределения полей напряжений представлены на фиг. 3.8а-в, максимальные значения напряжений в – табл. 3.8.

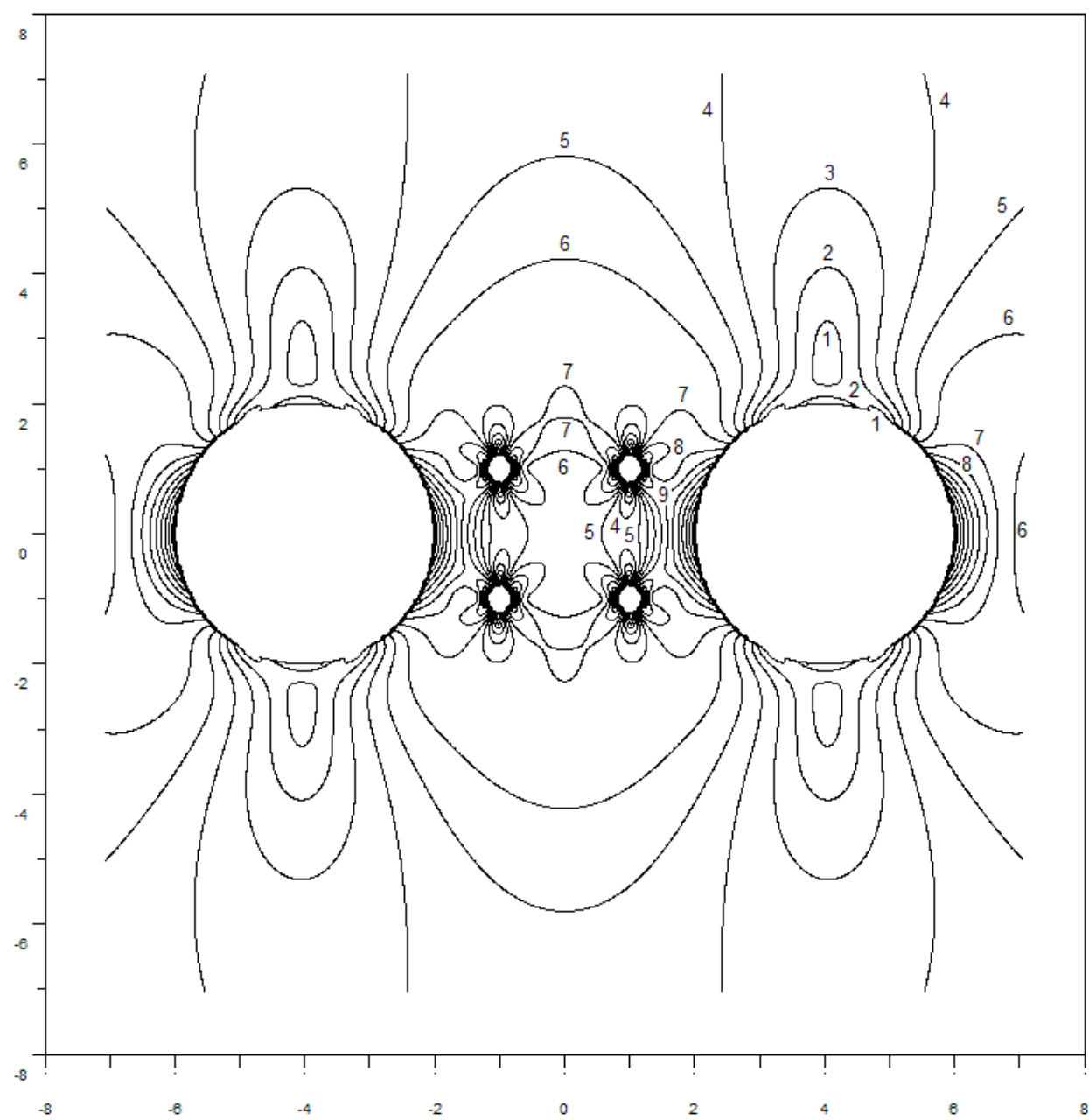
| № отверстия | Максимальный сдвиг | | Максимальное растяжение | |
|-------------|--------------------|--------------|-------------------------|-------------------|
| | значение | расположение | значение | расположение |
| 1 | 14.994626 | слева | 6.1323239 | вверху и внизу |
| | 16.001022 | справа | | |
| 2 | 22.553333 | слева | 6.0260562 | вверху |
| | 21.344591 | справа | 4.6516958 | внизу |

Табл. 3.8.

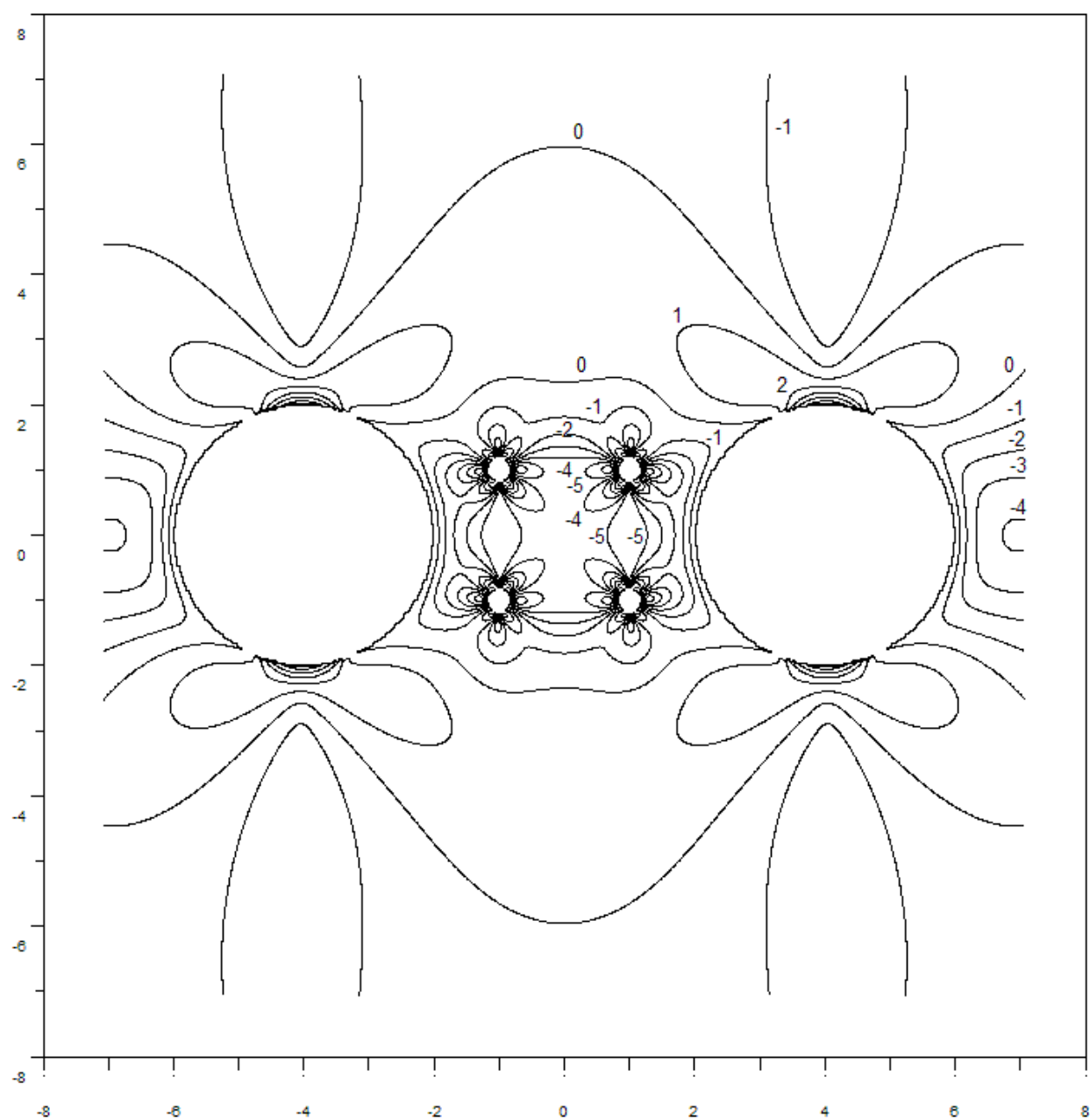
Из таблицы заключаем, что сдвиговые напряжения при такой конфигурации еще больше возрастают, чем в случае одного большого отверстия, зато концентрация максимального растяжения значительно снижается. И, как и в предыдущей задаче, сдвиговому разрушению больше подвержены окрестности малых отверстий, разрывному – окрестность большого.



Фиг. 3.8а Среднее напряжение



Фиг. 3.86 Максимальный сдвиг



Фиг. 3.7в Максимальное растяжение

3.5. Точность решения

Как уже упоминалось выше, критерием точности решения выбран функционал $F = \frac{1}{2\pi i} \sum_j \int_{L_j} |G(\eta)|^2 d\eta$ – квадрат модуля функции невязки $G(\eta)$ (3.15). Величина функционала F отражает среднеквадратичное отклонение найденного решения от истинного: чем меньше F , тем точнее решение, $F = 0$ соответствует истинному решению.

Разумеется, в общем случае нельзя получить точное решение, используя конечное число членов разложения. Но для практических целей достаточно ограничиться таким количеством членов, чтобы функционал F не превышал некоей приемлемой величины (например, машинной точности).

Вопрос определения достаточного количества членов разложения непрост и требует отдельного исследования. Однако нужно отметить, что способ нахождения решения через минимизацию функционала позволяет постепенно увеличивать число мультиполей, уточняя тем самым найденное решение, пока не будет достигнута приемлемая точность.

Продemonстрируем это на следующем примере. Рассмотрим два одинаковых отверстия единичного радиуса, расположенных вертикально. Расстояние между центрами отверстий равно трем. К плоскости приложена вертикальная растягивающая единичная нагрузка.

Сначала положим равными 0 все g_n^j , кроме g_0^j и g_{-2}^j для каждого отверстия. При таких условиях найдем минимум функционала F . Далее на каждом шаге будем добавлять по паре ненулевых членов: сначала g_1^j и g_{-3}^j , затем g_2^j и g_{-4}^j , и т.д., минимизируя F после каждого добавления. Результаты расчетов для каждого шага представлены в таблицах 3.9а,б.

| | | | | | | | | | |
|-----|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -10 | | | | | | | | | 0.000000E+00 |
| -9 | | | | | | | | -1.335880E-04 | -1.336026E-04 |
| -8 | | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.856797E-17 |
| -7 | | | | | | 2.406280E-03 | 2.400897E-03 | 2.400227E-03 | 2.400248E-03 |
| -6 | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.801351E-18 |
| -5 | | | | -1.844023E-02 | -1.822518E-02 | -1.818102E-02 | -1.817388E-02 | -1.817312E-02 | -1.817314E-02 |
| -4 | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 3.985530E-17 | 5.588385E-18 |
| -3 | | 8.192805E-02 | 7.751475E-02 | 7.648856E-02 | 7.629469E-02 | 7.626451E-02 | 7.626077E-02 | 7.626046E-02 | 7.626046E-02 |
| -2 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | -2.000000E-15 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -1 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 0 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.431159E-17 | 4.640736E-17 | 3.948538E-17 |
| 1 | | -2.753461E-02 | -2.638758E-02 | -2.616978E-02 | -2.613495E-02 | -2.613025E-02 | -2.612974E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 |
| 2 | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 3 | | | | 5.118456E-03 | 5.083235E-03 | 5.076609E-03 | 5.075620E-03 | 5.075524E-03 | 5.075528E-03 |
| 4 | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.397085E-16 | 0.000000E+00 | 2.511880E-18 |
| 5 | | | | | | -6.917783E-04 | -6.911247E-04 | -6.910499E-04 | -6.910533E-04 |
| 6 | | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 7 | | | | | | | | 7.334313E-05 | 7.334500E-05 |
| 8 | | | | | | | | | 0.000000E+00 |

Табл. 3.9а. Действительная часть g_n верхнего отверстия

| | | | | | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -19 | | | | | | | | | -1.158554E-07 |
| -18 | | | | | | | | 1.153632E-21 | 4.187400E-22 |
| -17 | | | | | | | 6.489260E-07 | 6.489260E-07 | 6.489260E-07 |
| -16 | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -15 | | | | | -3.247017E-06 | -3.246989E-06 | -3.246981E-06 | -3.246980E-06 | -3.246980E-06 |
| -14 | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.210601E-20 | 1.034851E-20 | 9.817402E-21 | 9.908967E-21 |
| -13 | | | 1.327683E-05 | 1.327623E-05 | 1.327605E-05 | 1.327600E-05 | 1.327599E-05 | 1.327598E-05 | 1.327598E-05 |
| -12 | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.566560E-20 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -11 | -3.089763E-05 | -3.088843E-05 | -3.088503E-05 | -3.088396E-05 | -3.088366E-05 | -3.088358E-05 | -3.088356E-05 | -3.088356E-05 | -3.088356E-05 |
| -10 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 4.264336E-19 | 9.564415E-20 | 1.149198E-19 | 9.936684E-20 | 9.838887E-20 | 9.838887E-20 | 9.841557E-20 |
| -9 | -1.336370E-04 | -1.336526E-04 | -1.336579E-04 | -1.336594E-04 | -1.336598E-04 | -1.336599E-04 | -1.336599E-04 | -1.336599E-04 | -1.336599E-04 |
| -8 | 0.000000E+00 | 8.604032E-19 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 2.170500E-20 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -7 | 2.400296E-03 | 2.400315E-03 | 2.400321E-03 | 2.400322E-03 | 2.400323E-03 | 2.400323E-03 | 2.400323E-03 | 2.400323E-03 | 2.400323E-03 |
| -6 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -5 | -1.817318E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 | -1.817320E-02 |
| -4 | 7.961473E-18 | 1.853921E-17 | 9.059767E-18 | 9.323597E-18 | 9.340912E-18 | 9.403282E-18 | 9.358934E-18 | 9.358306E-18 | 9.358259E-18 |
| -3 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 | 7.626047E-02 |
| -2 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -1 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 0 | 3.412868E-18 | 1.085692E-18 | 0.000000E+00 | 2.249712E-19 | 3.450624E-20 | 1.324406E-21 | 0.000000E+00 | 4.164154E-22 | 0.000000E+00 |
| 1 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 | -2.612971E-02 |
| 2 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 3.005251E-18 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 3 | 5.075533E-03 | 5.075535E-03 | 5.075535E-03 | 5.075536E-03 | 5.075536E-03 | 5.075536E-03 | 5.075536E-03 | 5.075536E-03 | 5.075536E-03 |
| 4 | 2.511880E-18 | 2.452351E-17 | 0.000000E+00 | 3.915798E-19 | 3.573207E-19 | 3.653785E-19 | 3.665403E-19 | 3.659571E-19 | 3.654971E-19 |
| 5 | -6.910585E-04 | -6.910606E-04 | -6.910611E-04 | -6.910613E-04 | -6.910613E-04 | -6.910613E-04 | -6.910613E-04 | -6.910613E-04 | -6.910613E-04 |
| 6 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 7 | 7.334834E-05 | 7.334978E-05 | 7.335024E-05 | 7.335037E-05 | 7.335041E-05 | 7.335041E-05 | 7.335041E-05 | 7.335041E-05 | 7.335041E-05 |
| 8 | 2.535668E-18 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 4.379225E-19 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 9 | -5.107874E-06 | -5.108635E-06 | -5.108904E-06 | -5.108985E-06 | -5.109008E-06 | -5.109013E-06 | -5.109015E-06 | -5.109015E-06 | -5.109015E-06 |
| 10 | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 2.013567E-21 | 6.759091E-22 | 1.844180E-21 | 2.187418E-21 |
| 11 | | | -1.678862E-07 | -1.678448E-07 | -1.678325E-07 | -1.678291E-07 | -1.678283E-07 | -1.678281E-07 | -1.678280E-07 |
| 12 | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 13 | | | | | 1.591023E-07 | 1.591007E-07 | 1.591002E-07 | 1.591001E-07 | 1.591001E-07 |
| 14 | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 3.279162E-22 |
| 15 | | | | | | | -4.186041E-08 | -4.186040E-08 | -4.186040E-08 |
| 16 | | | | | | | | 4.321355E-22 | 0.000000E+00 |
| 17 | | | | | | | | | 8.576502E-09 |

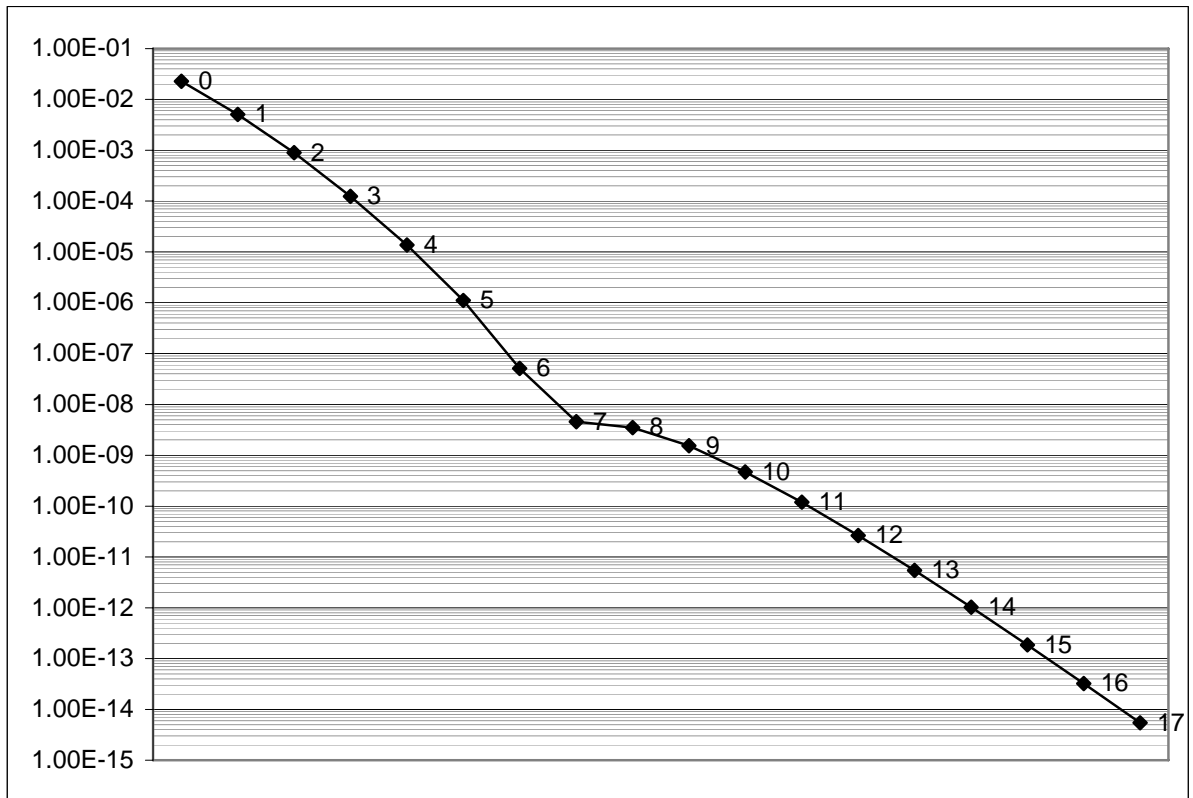
Табл. 3.9а
(продолжение)

| | | | | | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -10 | | | | | | | | | -1.027626E-05 |
| -9 | | | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -8 | | | | | | | -6.857542E-04 | -6.852300E-04 | -6.852487E-04 |
| -7 | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.255838E-17 |
| -6 | | | | | 7.097348E-03 | 7.059806E-03 | 7.053157E-03 | 7.052388E-03 | 7.052410E-03 |
| -5 | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 4.969594E-17 | 0.000000E+00 |
| -4 | | | -4.222299E-02 | -4.116999E-02 | -4.093482E-02 | -4.089190E-02 | -4.088569E-02 | -4.088509E-02 | -4.088510E-02 |
| -3 | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.775555E-16 | 0.000000E+00 | 3.114959E-17 |
| -2 | -3.819908E-01 | -3.977055E-01 | -4.012385E-01 | -4.018541E-01 | -4.019395E-01 | -4.019488E-01 | -4.019494E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 |
| -1 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 0 | -2.042201E-01 | -2.082175E-01 | -2.087193E-01 | -2.087563E-01 | -2.087550E-01 | -2.087540E-01 | -2.087539E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 |
| 1 | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.246098E-17 | 0.000000E+00 |
| 2 | | | -1.254970E-02 | -1.234127E-02 | -1.229994E-02 | -1.229310E-02 | -1.229219E-02 | -1.229211E-02 | -1.229212E-02 |
| 3 | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 4 | | | | | 1.938910E-03 | 1.933656E-03 | 1.932794E-03 | 1.932703E-03 | 1.932707E-03 |
| 5 | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 6 | | | | | | | -2.329092E-04 | -2.328541E-04 | -2.328567E-04 |
| 7 | | | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 8 | | | | | | | | | 2.103781E-05 |

Табл. 3.9б. Мнимая часть g_n верхнего отверстия

| | | | | | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| -19 | | | | | | | | | 0.000000E+00 |
| -18 | | | | | | | | -2.772416E-07 | -2.772416E-07 |
| -17 | | | | | | | 8.418016E-22 | 9.270396E-22 | 1.111279E-21 |
| -16 | | | | | | 1.477515E-06 | 1.477518E-06 | 1.477517E-06 | 1.477517E-06 |
| -15 | | | | | 0.000000E+00 | 1.073267E-20 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -14 | | | | -6.801441E-06 | -6.801310E-06 | -6.801271E-06 | -6.801261E-06 | -6.801258E-06 | -6.801258E-06 |
| -13 | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 3.374748E-20 | 2.209708E-20 | 2.064427E-20 | 1.985954E-20 | 1.990067E-20 |
| -12 | | 2.302702E-05 | 2.302453E-05 | 2.302372E-05 | 2.302347E-05 | 2.302341E-05 | 2.302339E-05 | 2.302339E-05 | 2.302339E-05 |
| -11 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 7.406687E-20 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -10 | -1.025040E-05 | -1.023799E-05 | -1.023361E-05 | -1.023230E-05 | -1.023194E-05 | -1.023185E-05 | -1.023183E-05 | -1.023182E-05 | -1.023182E-05 |
| -9 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.086476E-19 | 1.086476E-19 | 1.085625E-19 | 1.086822E-19 | 1.086822E-19 |
| -8 | -6.852910E-04 | -6.853093E-04 | -6.853152E-04 | -6.853167E-04 | -6.853171E-04 | -6.853172E-04 | -6.853172E-04 | -6.853173E-04 | -6.853173E-04 |
| -7 | 8.802916E-18 | 0.000000E+00 | 1.819359E-18 | 7.182687E-19 | 4.296302E-19 | 4.516636E-19 | 4.435166E-19 | 4.479715E-19 | 4.483614E-19 |
| -6 | 7.052457E-03 | 7.052475E-03 | 7.052480E-03 | 7.052482E-03 | 7.052482E-03 | 7.052482E-03 | 7.052482E-03 | 7.052482E-03 | 7.052482E-03 |
| -5 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| -4 | -4.088512E-02 | -4.088513E-02 | -4.088513E-02 | -4.088514E-02 | -4.088514E-02 | -4.088514E-02 | -4.088514E-02 | -4.088514E-02 | -4.088514E-02 |
| -3 | 4.642175E-18 | 2.585642E-17 | 1.430648E-17 | 1.448096E-17 | 1.454513E-17 | 1.476199E-17 | 1.471893E-17 | 1.471821E-17 | 1.471907E-17 |
| -2 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 | -4.019495E-01 |
| -1 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 0 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 | -2.087538E-01 |
| 1 | 4.581988E-18 | 6.295460E-18 | 2.965199E-18 | 2.213213E-18 | 2.696253E-18 | 2.761725E-18 | 2.723478E-18 | 2.723440E-18 | 2.722863E-18 |
| 2 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 | -1.229212E-02 |
| 3 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 4 | 1.932713E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 | 1.932715E-03 |
| 5 | 2.885498E-19 | 2.885498E-19 | 2.885498E-19 | 3.574975E-20 | 1.261536E-19 | 1.391444E-19 | 1.275989E-19 | 1.313005E-19 | 1.313921E-19 |
| 6 | -2.328611E-04 | -2.328629E-04 | -2.328634E-04 | -2.328636E-04 | -2.328636E-04 | -2.328636E-04 | -2.328636E-04 | -2.328636E-04 | -2.328636E-04 |
| 7 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 8 | 2.104019E-05 | 2.104127E-05 | 2.104163E-05 | 2.104174E-05 | 2.104176E-05 | 2.104177E-05 | 2.104177E-05 | 2.104177E-05 | 2.104177E-05 |
| 9 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 10 | | -7.709103E-07 | -7.710986E-07 | -7.711580E-07 | -7.711750E-07 | -7.711794E-07 | -7.711805E-07 | -7.711808E-07 | -7.711808E-07 |
| 11 | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 1.376629E-21 | 1.331004E-21 |
| 12 | | | | -2.414495E-07 | -2.414410E-07 | -2.414386E-07 | -2.414379E-07 | -2.414378E-07 | -2.414377E-07 |
| 13 | | | | | 0.000000E+00 | 3.613533E-21 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 |
| 14 | | | | | | 8.564805E-08 | 8.564803E-08 | 8.564803E-08 | 8.564803E-08 |
| 15 | | | | | | | 0.000000E+00 | 0.000000E+00 | 2.170114E-22 |
| 16 | | | | | | | | -1.931582E-08 | -1.931582E-08 |
| 17 | | | | | | | | | 0.000000E+00 |

Табл. 3.9б
(продолжение)



Фиг. 3.8. Зависимость минимума функционала F от максимального порядка используемого мультиполя.

Из таблиц 3.9 а, б видно, что с добавлением мультиполей, т.е. с увеличением порядка приближения, величина новых коэффициентов разложения падает экспоненциально. Также и достигаемый минимум модуля невязки падает экспоненциально с ростом порядка приближения.

3.6. Заключение к главе 3

В главе продемонстрировано, что область применения метода мультипольного разложения может быть расширена и на случай несимметричных задач – отверстия могут быть различных радиусов и располагаться произвольно. Отметим, что для данного метода не имеют значения соотношения радиусов отверстий: и

большие, и малые отверстия рассчитываются с одинаковым порядком точности, т.к. и размер, и взаиморасположение отверстий не влияют на алгоритм.

В главе метод был применен для решения нескольких задач: расчета поля напряжений кольца отверстий, цепочки отверстий, группы малых отверстий в поле одного или двух больших. Во всех случаях были построены поля напряжений, выявлены точки концентрации напряжений (как растягивающих, так и сдвиговых), также как и величины концентрации. Указаны наиболее вероятные сценарии начала разрушения.

ГЛАВА 4. ВНЕШНЕЕ ПОЛЕ АНСАМБЛЯ ОТВЕРСТИЙ. ОБЪЕДИНЕНИЕ МУЛЬТИПОЛЕЙ

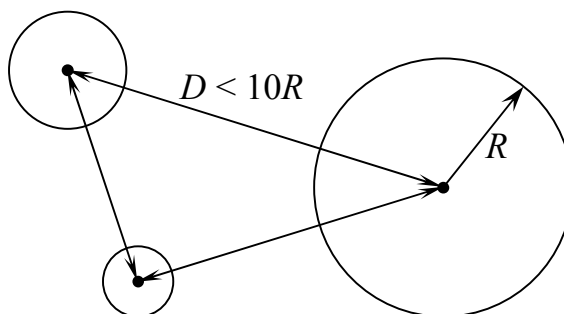
4.1. Внешнее поле ансамбля отверстий

Как было показано в предыдущих главах, взаимовлияние отверстий друг на друга быстро спадает с увеличением расстояния между ними. Если при дистанции между отверстиями порядка их радиуса это влияние значительно и сравнимо с внешней нагрузкой, то уже при дистанции в 5-6 радиусов его величина падает на порядок, при дистанции в 10 радиусов – на два порядка.

Определение 1:

Ансамблем отверстий называется группа отверстий, влияние которых друг на друга существенно.

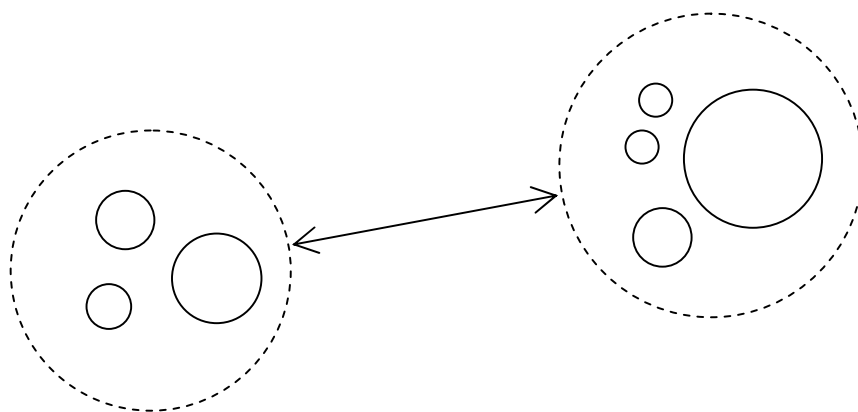
Строгого определения «существенности» влияния давать не станем, будем определять ее соответственно требованиям задачи. Здесь мы будем считать два отверстия существенно взаимовлияющими, если расстояние между их центрами не превышает десяти радиусов большего из них (см. фиг. 4.1).



Фиг.4.1

Определение 2:

Ансамбли отверстий называются разделенными, если каждый из них можно заключить в круговой контур, причем эти контуры не пересекаются друг с другом и не заключены один в другом (см. фиг.4.2).



Фиг. 4.2

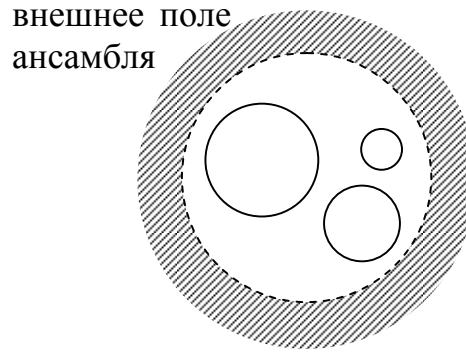
Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется рассчитать напряженно-деформированное состояние в упругой плоскости с несколькими разделенными ансамблями отверстий.

Учитывать влияние каждого отверстия на каждое – не самый эффективный для данного случая способ решения. Гораздо лучше было бы для отверстий одного ансамбля рассматривать влияние любого другого ансамбля как единого целого.

Определение 3:

Внешнее поле ансамбля – поле за пределами кругового контура, охватывающего ансамбль (см. фиг. 4.3).

Рассматривая влияние на выбранный ансамбль других ансамблей, достаточно принимать во внимание только внешние поля этих ансамблей.



Фиг. 4.3

4.2. Объединение мультиполей

Теорема:

Внешнее поле ансамбля можно описать одним мультиполем, расположенным в центре охватывающего контура.

Докажем теорему, выведя формулу для объединенного мультиполя.

Упругие потенциалы ансамбля записываются как сумма потенциалов составляющих его отверстий.

$$\Phi = \sum_j \Phi_j; \quad \Psi = \sum_j \Psi_j \quad (4.1)$$

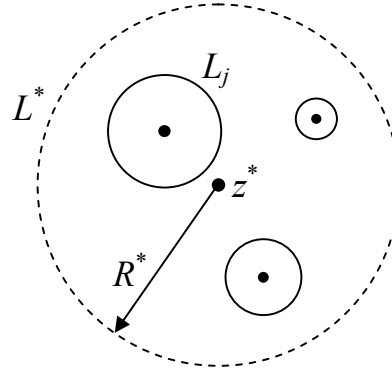
$$\Phi_j = \sum_{n \geq 2} \frac{a_n^j}{(z - z_j^0)^n}; \quad \Psi_j = \sum_{n \geq 2} \frac{b_n^j}{(z - z_j^0)^n}$$

$$a_n^j = i g_{-n}^j R_j^n \quad (4.2)$$

$$b_2^j = -2i \bar{g}_0^j R_j^2$$

$$b_3^j = i(2g_{-2}^j \bar{z}_j^0 / R_j - \bar{g}_1^j) R_j^3$$

$$b_n^j = i[(g_{-n+2}^j + g_{-n+1}^j \bar{z}_j^0 / R_j)(n-1) - \bar{g}_{n-2}^j] R_j^n, n \geq 4$$



Фиг. 4.4

Окружим ансамбль контуром L^* с центром в точке z^* и радиусом R^* (см. фиг. 4.4). Отметим, что для каждого отверстия верно соотношение

$$|z_j^0 - z^*| + R_j \leq R^* \quad (4.3)$$

Введем обозначения:

$$\zeta = (z - z^*)/R^*; \quad \zeta_j^0 = (z_j^0 - z^*)/R^* \quad (4.4)$$

Запишем первый потенциал через ζ :

$$\Phi_j = \sum_{n \geq 2} \frac{a_n^j}{(z - z_j^0)^n} = \sum_{n \geq 2} \frac{a_n^j / R^{*n}}{(\zeta - \zeta_j^0)^n} \quad (4.5)$$

Теперь разложим сумму в ряд Лорана относительно ζ .

$$\Phi_j = \sum_k \frac{a_k^{j*}}{(z - z^*)^k} = \sum_k \frac{a_k^{j*} / R^{*k}}{\zeta^k} \quad (4.6)$$

Коэффициенты разложения находятся из известной формулы

$$a_k^{j*} = \frac{R^{*k}}{2\pi i} \oint_{L_j} \Phi_j \zeta^{-k-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 2} \frac{a_n^j}{R^{*n-k}} \oint_{L_j} \frac{\zeta^{-k-1}}{(\zeta - \zeta_j^0)^n} d\zeta \quad (4.7)$$

Учитывая, что $|\zeta_j^0| < 1$, а $|\zeta| = 1$ на контуре, и то, что внешнему полю ансамбля соответствует внешность единичного круга в системе координат ζ , получим:

$$a_k^{j*} = \sum_{n=2}^k \frac{a_n^j}{R^{*n-k}} \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \zeta_j^{0^{k-n}}, \quad k \geq 2 \quad \text{и} \quad a_k^{j*} = 0, \quad k < 2$$

$$a_k^{j*} = \sum_{n=2}^k a_n^j \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} (z_j^0 - z^*)^{k-n}, \quad k \geq 2 \quad (4.8)$$

Итак, получаем окончательное выражение для первого потенциала

$$\Phi = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^*}{(z - z^*)^k}, \quad a_k^* = \sum_j \sum_{n=2}^k a_n^j \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} (z_j^0 - z^*)^{k-n} \quad (4.9a)$$

Аналогичным образом получаем и выражение для Ψ .

$$\Psi = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k^*}{(z - z^*)^k}, \quad b_k^* = \sum_j \sum_{n=2}^k b_n^j \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} (z_j^0 - z^*)^{k-n} \quad (4.9б)$$

Таким образом, внешнее поле ансамбля может быть выражено одним мультиполем, расположенным в центре выбранного охватывающего контура, что и требовалось доказать.

Выведем коэффициенты разложения g_k^* для объединенного мультиполя.

Запишем (4.2) для объединенного мультиполя

$$\begin{aligned} a_k^* &= i g_{-k}^* R^{*k} \\ b_2^* &= -2i \bar{g}_0^* R^{*2} \\ b_3^* &= i(2g_{-2}^* \bar{z}^* / R^* - \bar{g}_1^*) R^{*3} \\ b_k^* &= i[(g_{-k+2}^* + g_{-k+1}^* \bar{z}^* / R^*)(k-1) - \bar{g}_{k-2}^*] R^{*k}, \quad k \geq 4 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} g_{-k}^* &= -i \frac{a_k^*}{R^{*k}}, \quad k \geq 2 \\ g_0^* &= -\frac{i}{2} \frac{\bar{b}_2^*}{R^{*2}} \\ g_1^* &= -i \frac{1}{R^{*3}} (\bar{b}_3^* - 2\bar{a}_2^* z^*) \\ g_k^* &= -\frac{i}{R^{*k+2}} [\bar{b}_{k+2}^* - (k+1)(\bar{a}_k^* R^{*2} + \bar{a}_{k+1}^* z^*)], \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя (4.9а, б) и подставляя в них (4.2), получаем окончательное выражение для g_k^* через g_k^j :

$$\begin{aligned}
g_{-k}^* &= \sum_j \sum_{n=2}^k g_{-n}^j \frac{R_j^n}{R^{*k}} \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} (z_j^0 - z^*)^{k-n}, \quad k \geq 2 \\
g_0^* &= \sum_j g_0^j \frac{R_j^2}{R^{*2}} \\
g_1^* &= \sum_j \frac{R_j^2}{R^{*2}} \left[g_1^j \frac{R_j}{R^*} + 2(g_0^j - \bar{g}_0^j) \frac{\bar{z}_j^0 - \bar{z}^*}{R^*} - 2\bar{g}_{-2}^j \frac{z_j^0 - z^*}{R^*} \right] \\
g_k^* &= (k+1) \sum_j \left\{ \frac{(\bar{z}_j^0 - \bar{z}^*)^{k-1} R_j^3}{R^{*k+2}} \left[(g_0^j - \bar{g}_0^j) \frac{\bar{z}_j^0 - \bar{z}^*}{R_j} + k g_1^j - \bar{g}_{-2}^j \frac{z_j^0 - z^*}{R_j} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=2}^k \frac{(\bar{z}_j^0 - \bar{z}^*)^{k-n} R_j^{n+2}}{R^{*k+2}} \frac{k!}{n!(k-n)!} \left[\frac{g_n^j}{n+1} + \bar{g}_{-n}^j \left(\frac{n R^{*2}}{k R_j^2} - 1 \right) - \bar{g}_{-n-1}^j \frac{z_j^0 - z^*}{R_j} \right] \right\}, \quad k \geq 2
\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.3. Примеры внешних полей

Далее приведены примеры расчета коэффициентов g_k^* внешнего поля для нескольких ансамблей. Во всех случаях расчет проводился для стесненного сжатия ($p = -1$, $q = -10$). Радиусы отверстий $R_j = 1$, центр охватывающего контура помещен в центр ансамбля (среднее арифметическое центров отверстий), радиус R^* выбран минимально возможным. Для сравнения на фиг. 4.5 приведены коэффициенты разложения для одиночного отверстия в тех же условиях нагружения.

4.3.1° Внешнее поле двух одинаковых отверстий.

Вычислены коэффициенты g_k^* внешнего поля пары отверстий при различных их взаиморасположениях. Расстояние между центрами отверстий $D = 2.2, 2.4, 3.0, 6.0, 12.0$ (см. фиг 4.6). Мнимая часть g_k^* для каждого из отверстий представлена на фиг. 4.7а-в (действительная часть здесь равна нулю).

Из сравнения спектров можно сделать следующие выводы

1. С увеличением расстояния между отверстиями спектр каждого из отверстий стремится к спектру одиночного отверстия. Это подтверждает тот факт, что с расстоянием взаимовлияние отверстий быстро падает.

2. Коэффициенты уменьшаются с увеличением порядка.

3. С увеличением расстояния между отверстиями спектр внешнего поля "размывается", становится ниже и шире, включая в себя всё более старшие порядки, при этом младшие коэффициенты уменьшаются. Это означает, что неэффективно объединять в ансамбль удаленные друг от друга отверстия (больше чем на несколько радиусов), т.к. в этом случае количество и порядок значимых коэффициентов разложения может оказаться больше, чем у всех отдельных отверстий, вместе взятых.

4.3.2° Внешнее поле кольца одинаковых отверстий.

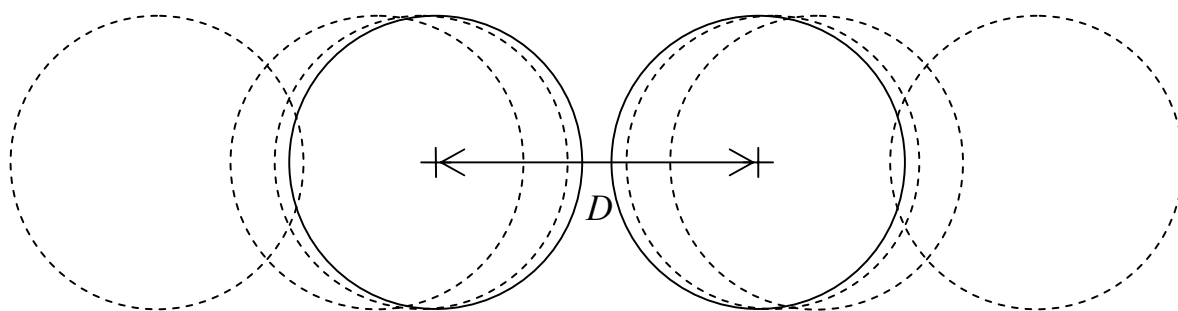
Вычислены коэффициенты g_k^* внешнего поля кольца из 3, 4 и 5 отверстий. Расстояние от центра кольца до центров отверстий – 3.0 (см. фиг. 4.8). Результаты представлены на фиг. 4.9 для трех отверстий, фиг. 4.10 для четырех отверстий и фиг. 4.11 для пяти отверстий.

Из графиков видно, что в спектре проявляется симметрия ансамбля. Так коэффициенты внешнего поля трех отверстий обладают своего рода периодичностью в 6 порядков: действительные части 5-го, 11-го, 17-го, а также -5-го, -11-го, -17-го порядков больше, чем соседние нечетные (все четные равны нулю). Аналогично, мнимые части 2-го, 8-го, 14-го, 20-го (а также -2-го, -8-го, -14-го, -20-го) порядков больше, чем соседние четные (все нечетные равны нулю). Подобной же структурой обладает и внешнее поле пяти отверстий, но с периодом 10.

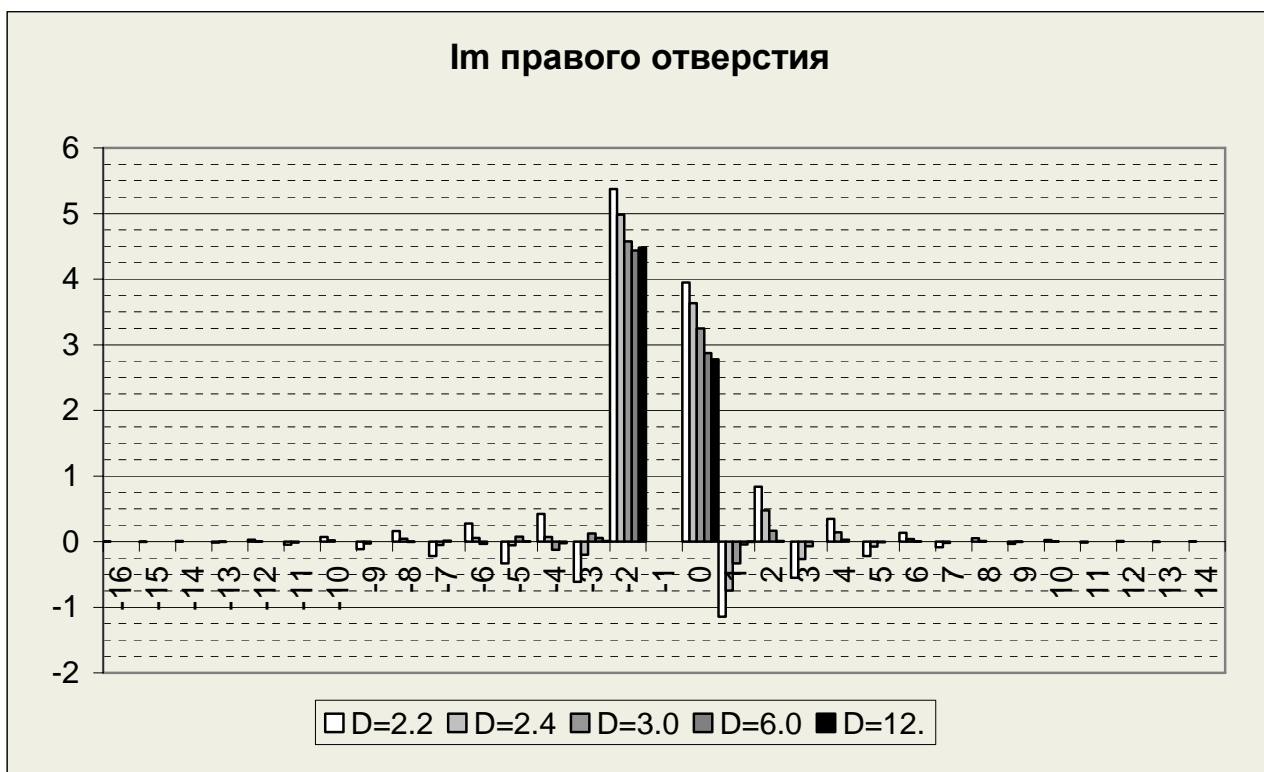
Внешнее поле четырех отверстий обладает структурой с периодом 4: 2-й, 6-й, 10-й и т.д. коэффициенты значительно больше, чем 0-й, 4-й, 8-й, 12-й, и т.д..



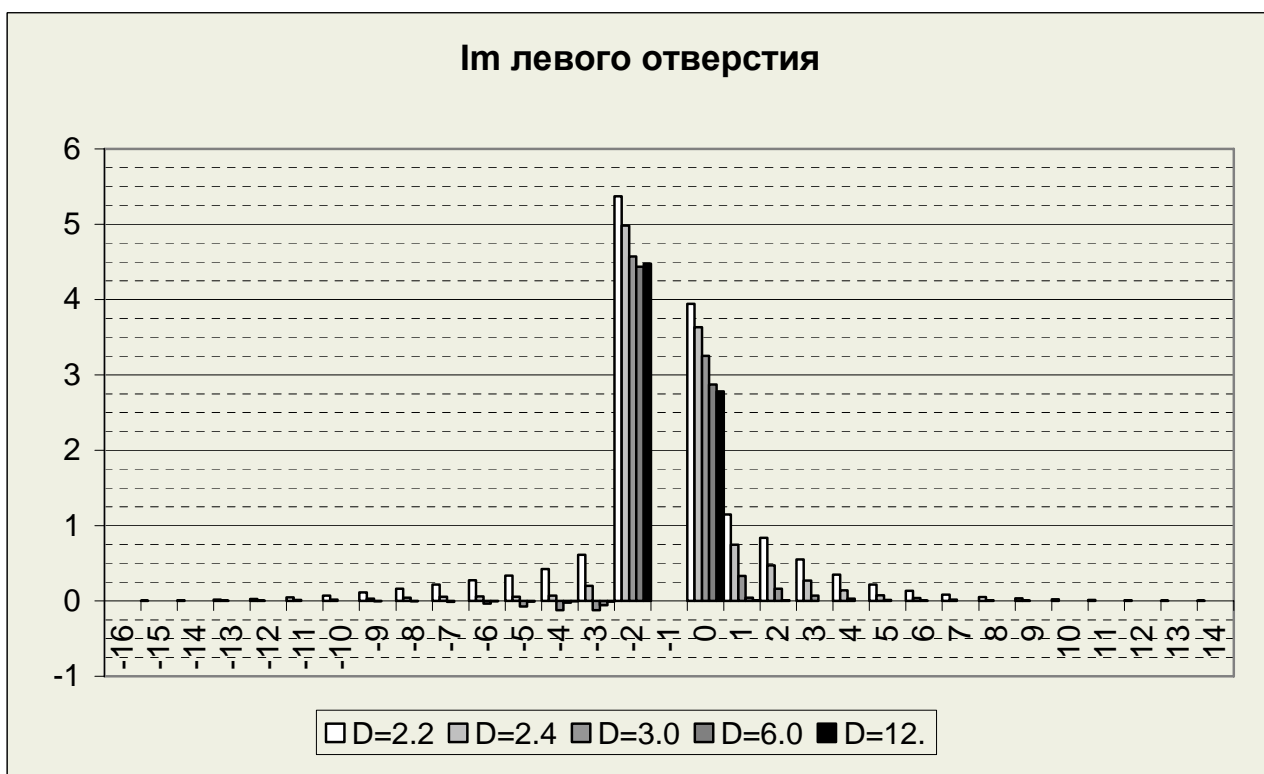
Фиг. 4.5 Спектр одиночного отверстия



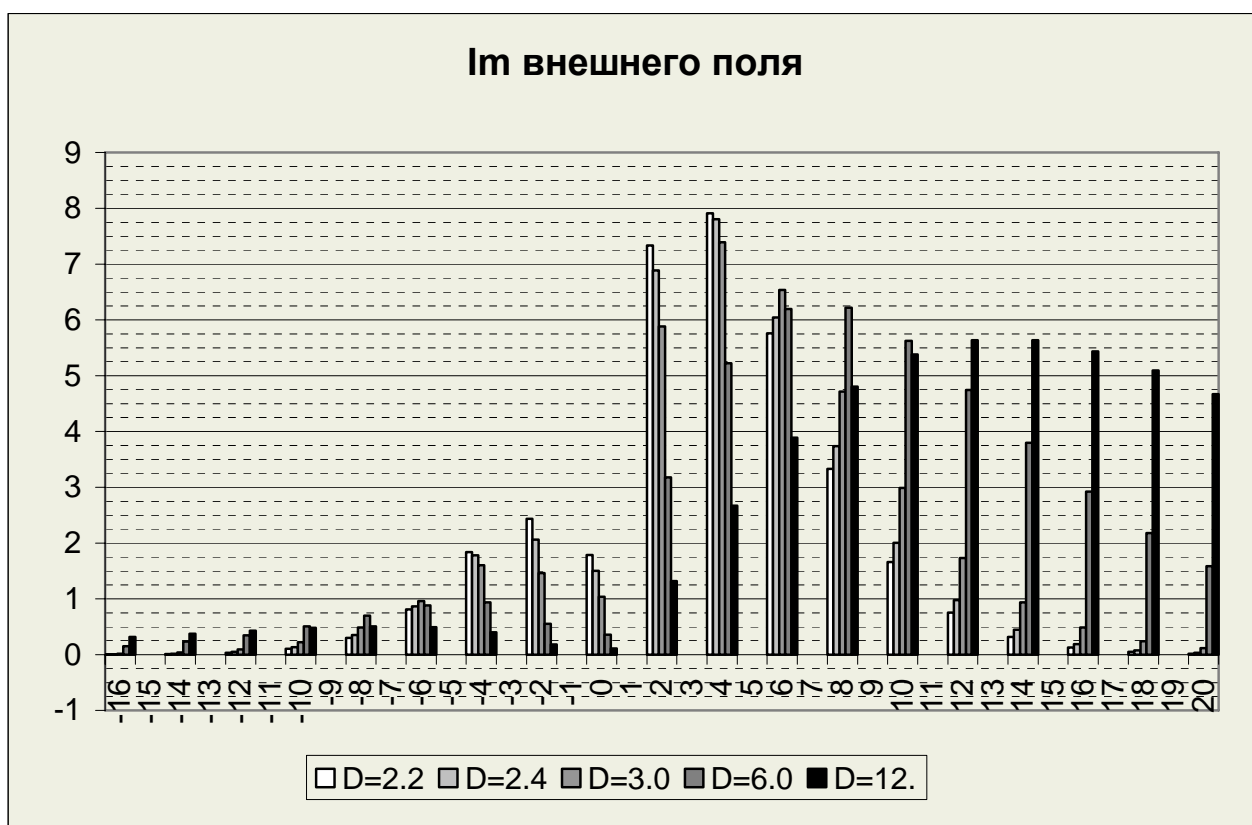
Фиг. 4.6



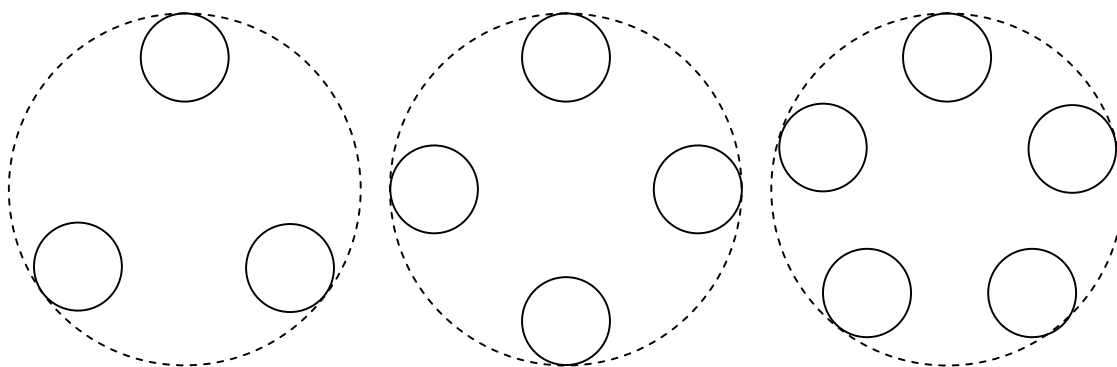
Фиг. 4.7а Спектр правого отверстия (Im)



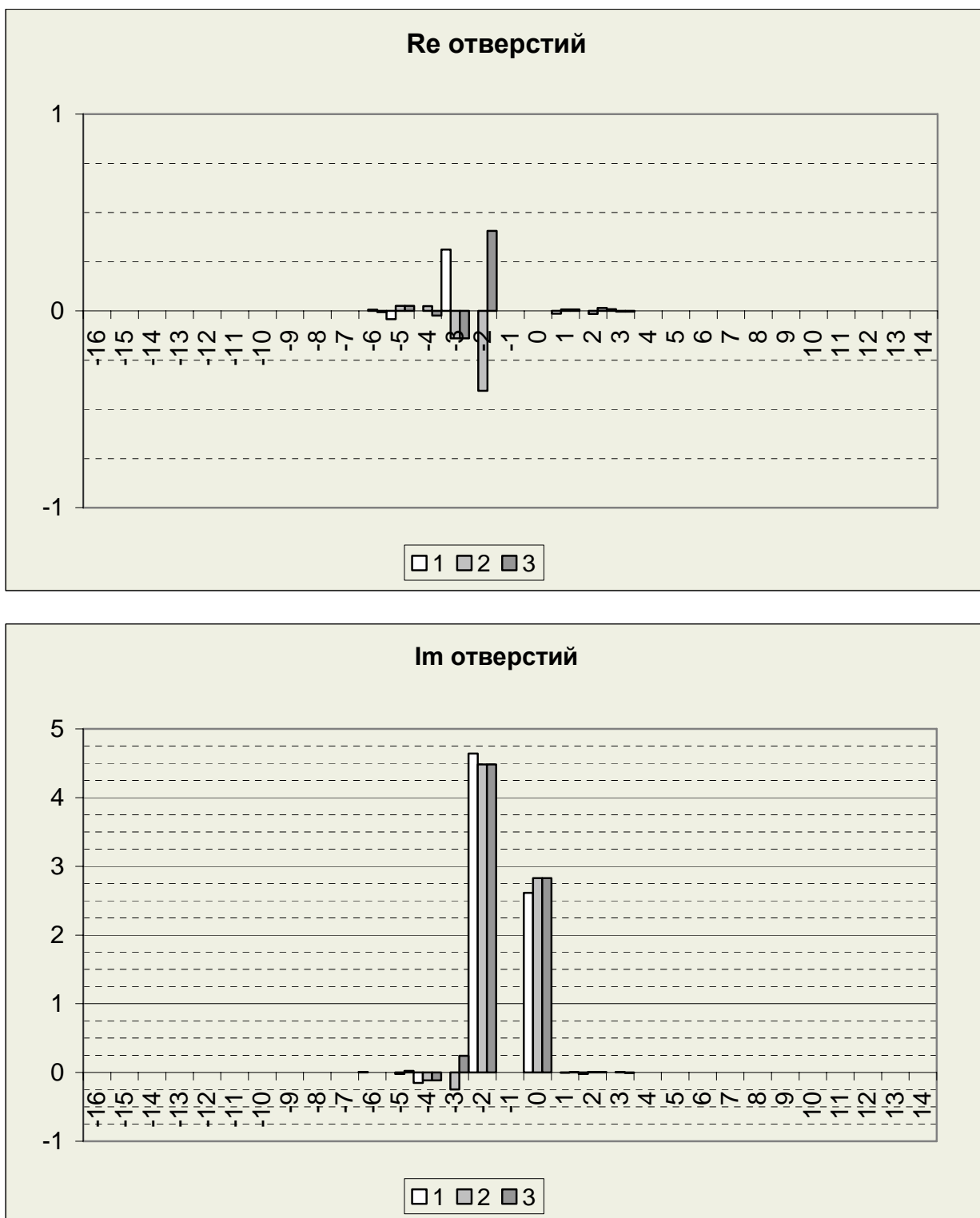
Фиг. 4.7б Спектр левого отверстия (Im)



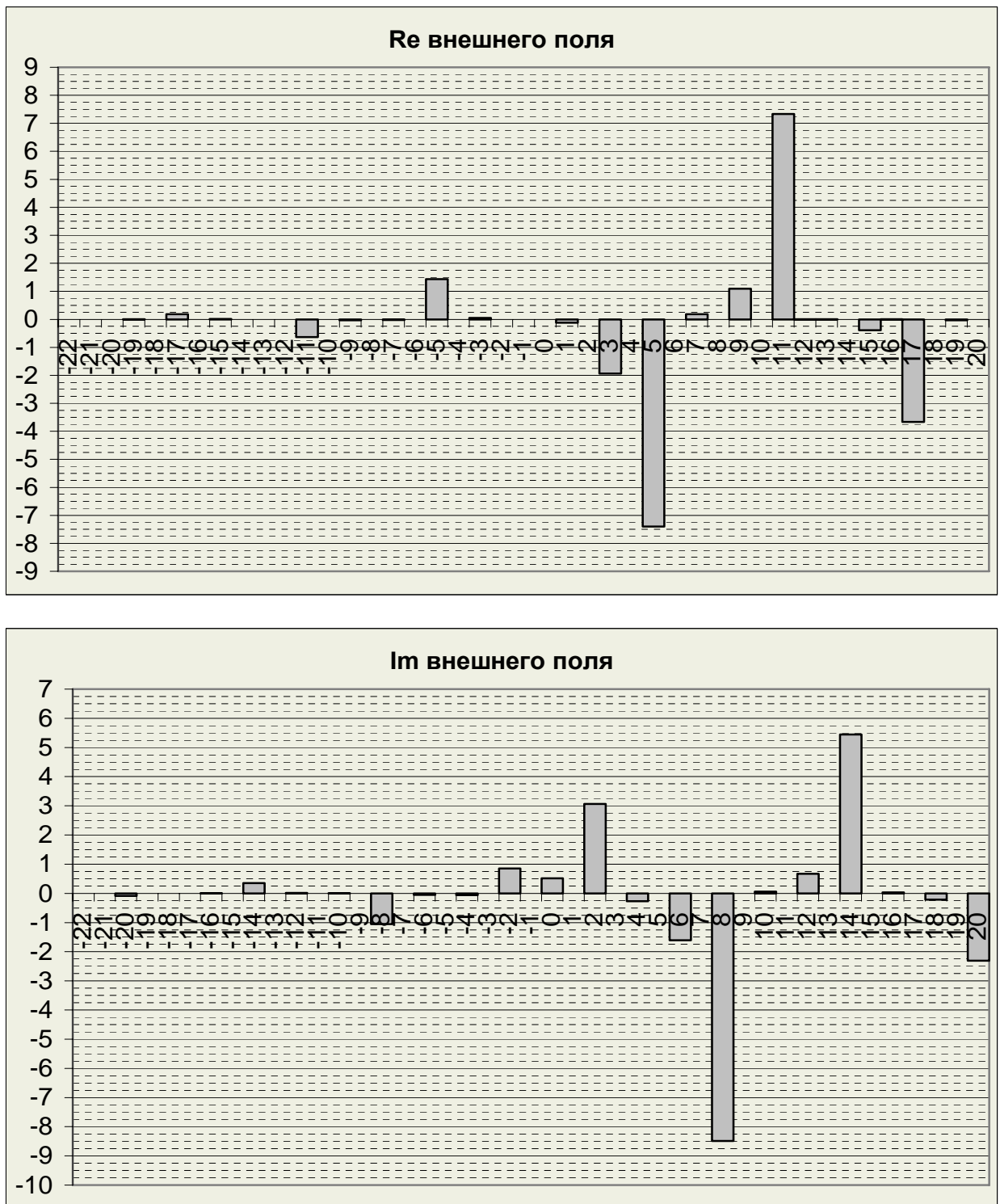
Фиг. 4.7в Спектр внешнего поля (Im)



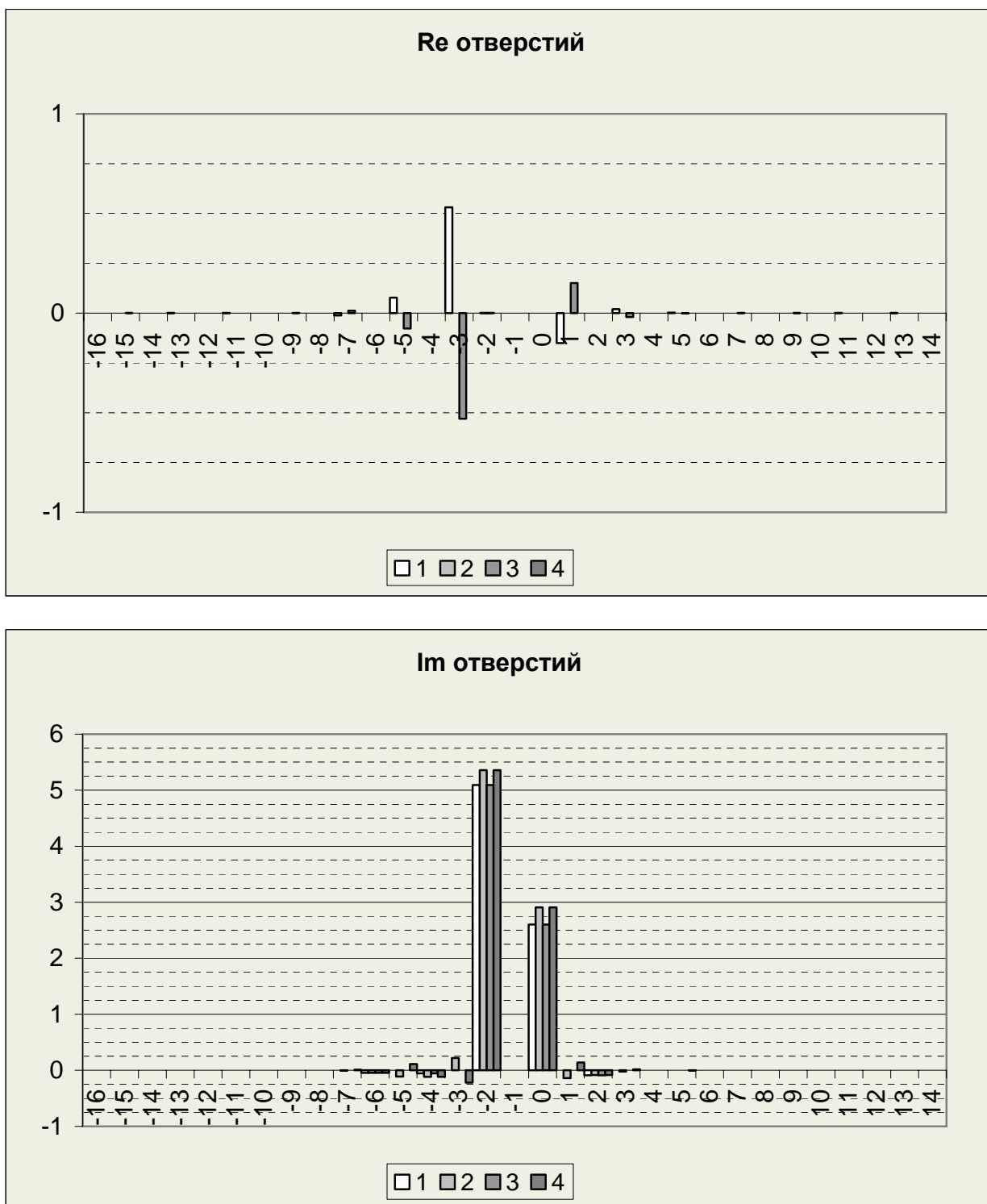
Фиг. 4.8. Кольца отверстий из трех/четырех/пяти отверстий и охватывающие контуры.



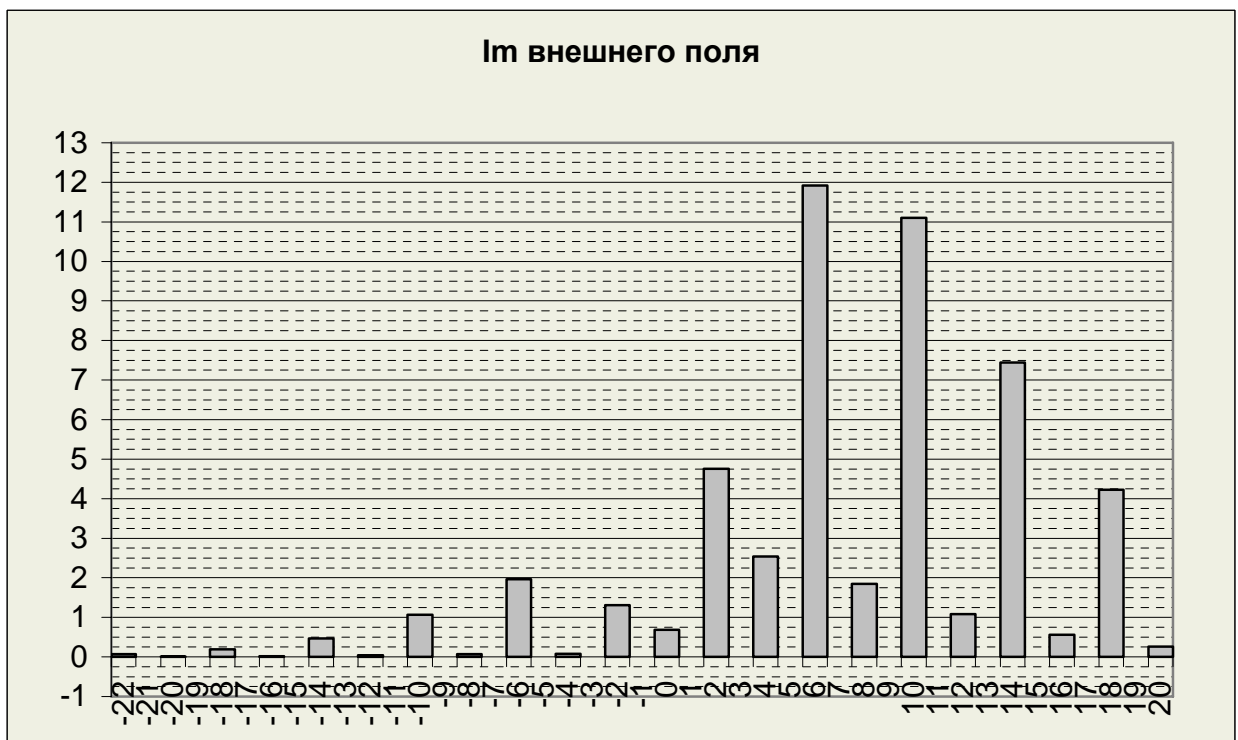
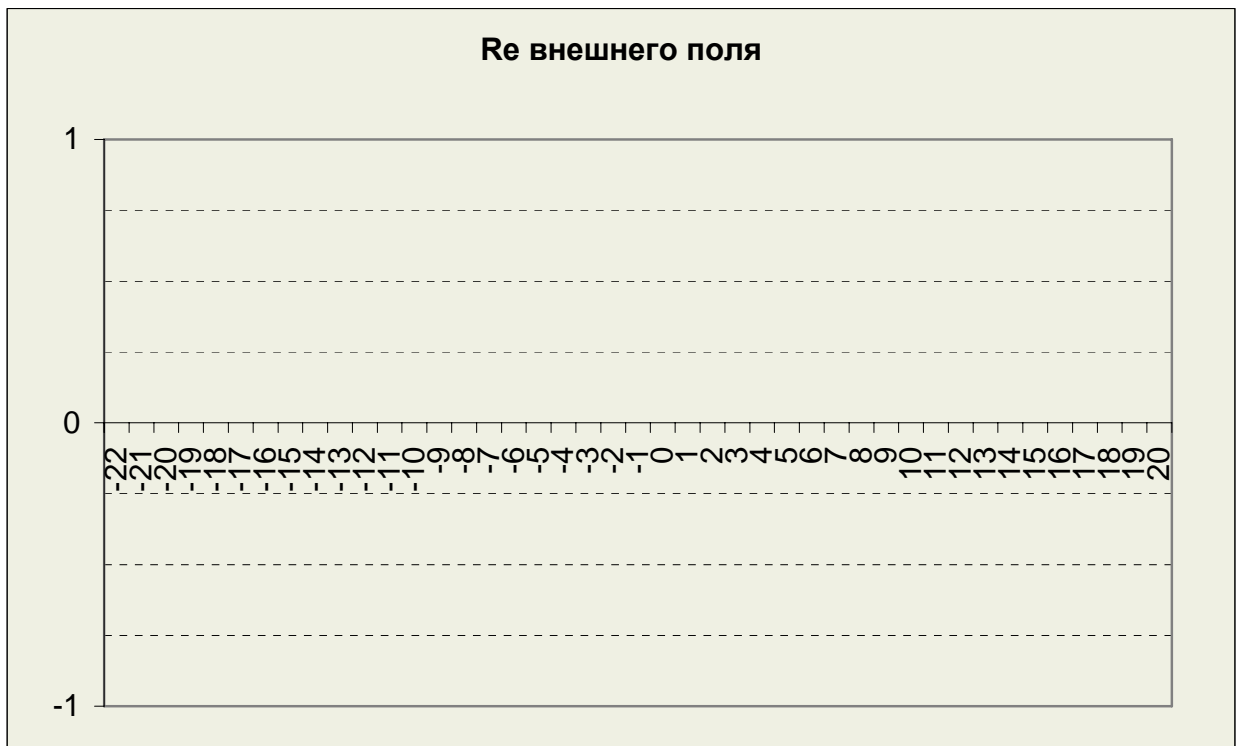
Фиг. 4.9а. Спектры каждого из трех отверстий



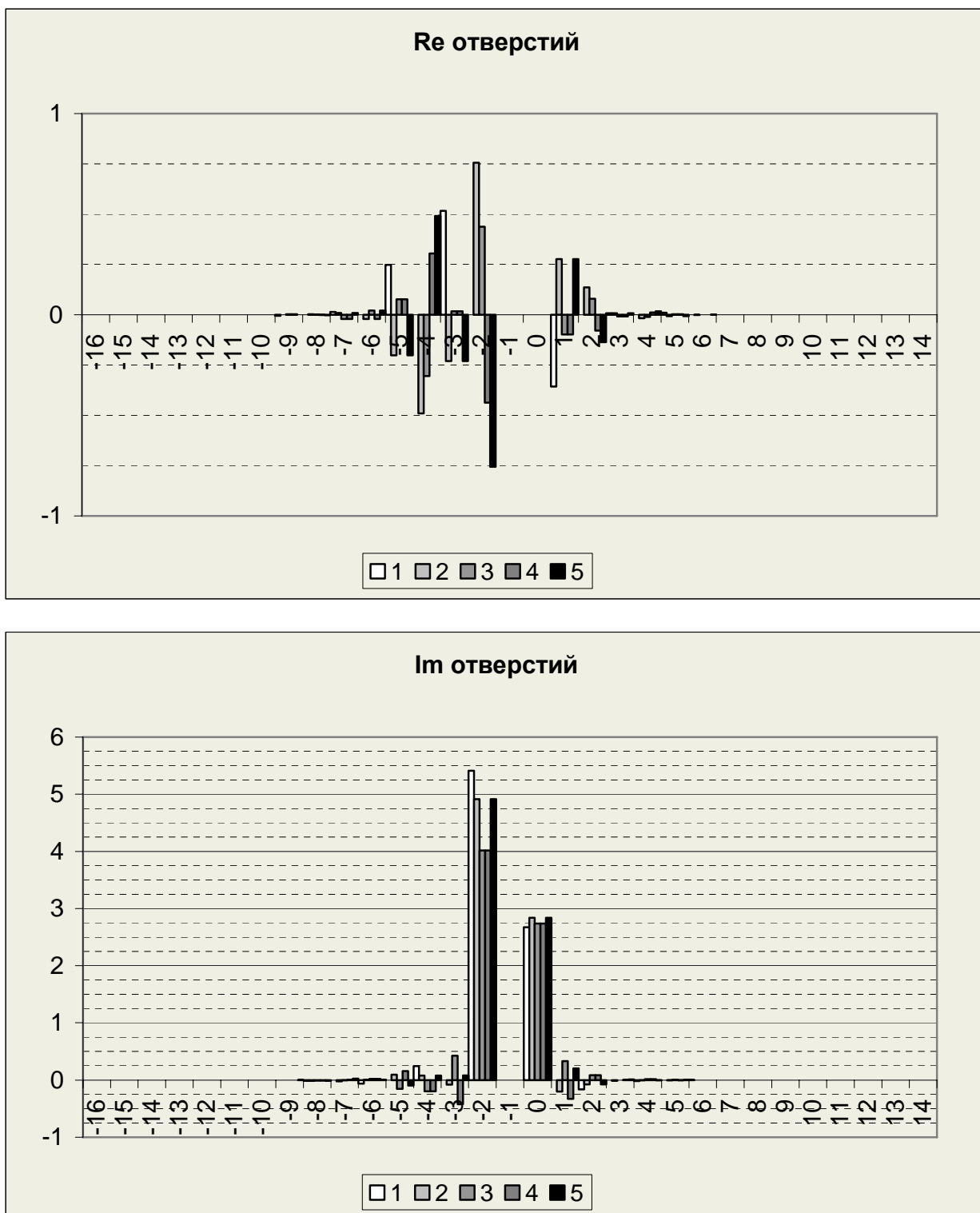
Фиг. 4.96. Спектр внешнего поля трех отверстий



Фиг. 4.10а. Спектры каждого из четырех отверстий



Фиг. 4.10б. Спектр внешнего поля четырех отверстий



Фиг. 4.11а. Спектры каждого из пяти отверстий



Фиг. 4.116. Спектр внешнего поля пяти отверстий

4.4. Заключение к главе 4

В главе показано, что мультипольное представление может описывать как поля отдельных отверстий, так и внешние поля ансамблей. Это позволяет описывать взаимодействия ансамблей как отверстий, что может значительно ускорить расчет НДС таких конфигураций, поскольку нет необходимости вычислять воздействие каждого отверстия.

Таким образом, при большом количестве отверстий объединение их в ансамбли может существенно сэкономить вычислительные ресурсы. Однако разработка алгоритма такой группировки отверстий выходит за рамки данной работы.

ГЛАВА 5. РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНОВАТОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЦА МАКРОТРЕЩИНЫ

5.1 Концевая область трещиноватости макротрещины в сплошной упругой среде

Во многих средах при росте макротрещины на пути ее роста возникают микротрещины – образуется так называемая область трещиноватости, закономерности формирования которой существенно зависят от типа структуры среды. Эта область играет важную роль в понимании механизма роста макротрещины: в этом случае ее рост происходит за счет прорыва от одной микротрещины к другой. Поэтому представляет большой интерес определение размера и формы области возможного возникновения трещиноватости. Подчеркнем, что речь идет именно о возможном возникновении, т.к. каждая микротрещина при своем рождении будет изменять напряженно-деформированное состояние среды в своей окрестности, таким образом, расчет реального развития трещиноватости и роста макротрещины вряд ли возможен. Однако вполне возможно определить область, где в среде реализуются условия, необходимые для образования микротрещины.

Сначала рассмотрим полубесконечную трещину (отрицательная полуось Ox) в сплошной упругой среде. Поле напряжений вокруг ее конца хорошо известно и выражается следующим образом.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]\end{aligned}\tag{5.1}$$

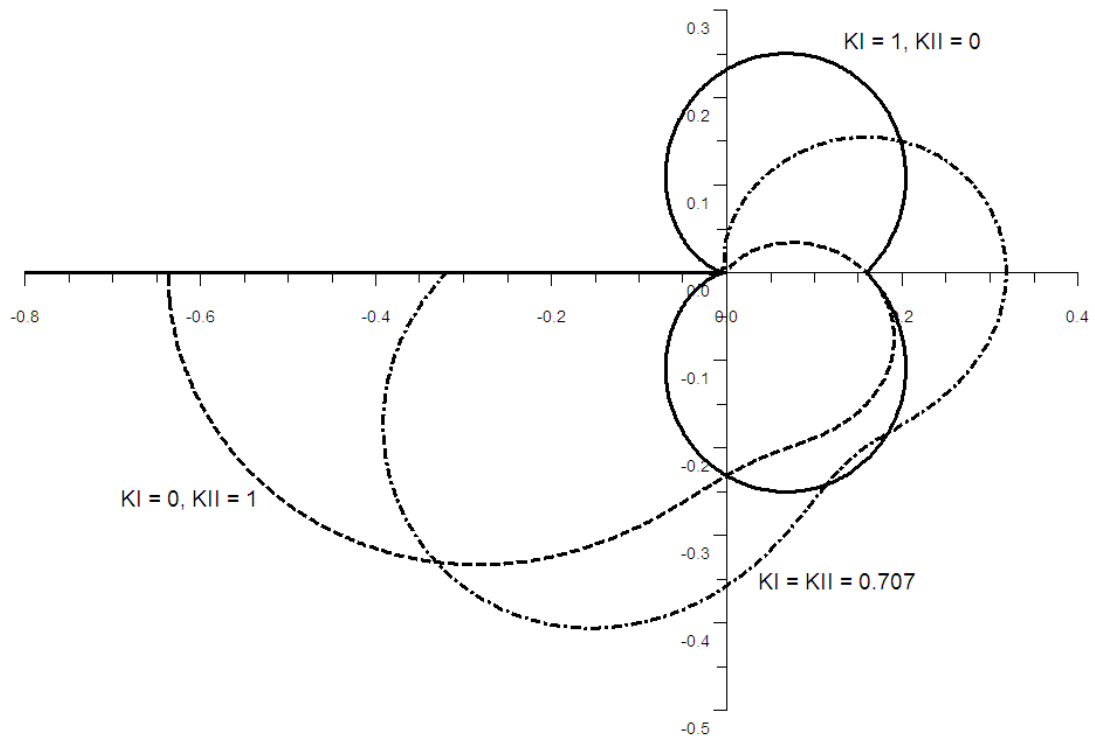
Здесь r и θ – полярные координаты, K_I и K_{II} – коэффициенты интенсивности напряжений на конце трещины для I-й и II-й мод, соответственно.

Предположим, что в некоторой точке может возникнуть микротрещина, если в этой точке первое главное напряжение σ_1 превышает некоторую величину σ_{cr} . Т.е. область трещиноватости будет лежать внутри изолинии $\sigma_1 = \sigma_{cr}$.

Первое главное напряжение выражается следующим образом (1.29):

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{\sigma_s^2 + \tau_{xy}^2} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 + \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \tau_{xy}^2}$$

Изолинии $\sigma_1 = 1$ изображены на фиг. 5.1 для ситуаций $K_I=1, K_{II}=0$ (сплошная линия); $K_I=0, K_{II}=1$ (пунктирная); $K_I=K_{II}=1/\sqrt{2}$ (штрихпунктирная).



Фиг 5.1.

Эти результаты были получены, в частности, в [55].

Тем не менее, как правило, реальные среды не являются сплошными, а содержат разнообразные концентраторы напряжений – неоднородности, поры. Они должны будут влиять на возникновение микротрещин, и тем самым изменять размер и форму области трещиноватости.

5.2 Концевая область трещиноватости макротрещины в слабопористой упругой среде

Пусть в упругой среде рассеяны микропоры. Предположим, что они достаточно малы и расположены достаточно редко, так что их влияние на макротрещину и друг друга пренебрежимо мало. Тогда можно считать, что для каждой поры реализуется задача Кирша и можно рассчитать концентрацию напряжений на поверхности поры.

Как уже говорилось в главе 1, решение задачи Кирша при свободной от нагрузок поверхности поры выражается только двумя мультиполями:

$$g'(t) = g_0 + \frac{g_{-2}}{t^2}$$

Причем

$$g_0 = -i\sigma^*/2 = -i(\sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^*)/4$$

$$g_{-2} = -\tau_{xy}^* + i\sigma_s^* = -\tau_{xy}^* + i(\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*)/2$$

где σ_{xx}^* , σ_{yy}^* , τ_{xy}^* – напряжения, приложенные к среде извне.

Поле напряжений вокруг отверстия в полярных координатах (ρ , φ) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* - \frac{2}{\rho^2}(\sigma_s^* \cos 2\varphi + \tau_{xy}^* \sin 2\varphi) \\ -\sigma_s + i\tau_{xy} &= -\sigma_s^* + i\tau_{xy}^* + \frac{\sigma^*}{\rho^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) - \\ &\quad - \frac{3-2\rho^2}{\rho^4}(\sigma_s^* + i\tau_{xy}^*)(\cos 4\varphi - i\sin 4\varphi) \end{aligned}$$

На контуре отверстия получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* - 2(\sigma_s^* \cos 2\varphi + \tau_{xy}^* \sin 2\varphi) \\ -\sigma_s + i\tau_{xy} &= -\sigma_s^* + i\tau_{xy}^* + \sigma^*(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) - (\sigma_s^* + i\tau_{xy}^*)(\cos 4\varphi - i\sin 4\varphi) \end{aligned}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\tau_{\max}^* = \sqrt{\sigma_s^{*2} + \tau_{xy}^{*2}}$$

можно записать

$$\sigma_s^* + i\tau_{xy}^* = \tau_{\max}^* e^{2i\psi}$$

Тогда

$$\sigma_s^* \cos 2\varphi + \tau_{xy}^* \sin 2\varphi = \tau_{\max}^* (\cos 2\psi \cos 2\varphi + \sin 2\psi \sin 2\varphi) = \tau_{\max}^* \cos 2(\varphi - \psi)$$

$$\sigma = \sigma^* - 2(\sigma_s^* \cos 2\varphi + \tau_{xy}^* \sin 2\varphi) = \sigma^* - 2\tau_{\max}^* \cos 2(\varphi - \psi)$$

Из (1.25) следует, что если на границе $\sigma_p = 0$, то $\sigma = \sigma_s \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$.

Тогда для точки на границе имеем два случая: либо $\sigma_1 = \sigma_p = 0$, и разрыва материала не происходит, либо $\sigma_1 = \sigma_\varphi = 2\sigma$, и тогда разрушение происходит в точке максимума σ_φ , если в этой точке значение σ_φ превышает критическое:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi = 2\sigma = 2\sigma^* - 4\tau_{\max}^* \cos 2(\varphi - \psi)$$

Поскольку $\tau_{\max}^* \geq 0$, то максимум будет достигаться в тех точках, где $\cos 2(\varphi - \psi) = -1$, т.е. в точках $\varphi = \psi \pm \pi/2$. Напряжение здесь достигает величины

$$\sigma_1^{\max} = 2\sigma^* + 4\tau_{\max}^*$$

Также должно удовлетворяться условие

$$\sigma_1^{\max} > 0 \Rightarrow 2\sigma^* + 4\tau_{\max}^* > 0 \Rightarrow \sigma^* > -2\tau_{\max}^*$$

В противном случае первое главное напряжение будет везде на контуре равна нулю, и условий для разрушения возникать не будет.

5.3 Концевая область трещиноватости макротрещины в высокопористой упругой среде

Под высокопористой средой будем понимать пористую среду, поры которой располагаются достаточно близко друг к другу, чтобы оказывать заметное

взаимное влияние. Для определённости возьмём минимальное расстояние d между порами равным диаметру поры ($d=2R$).

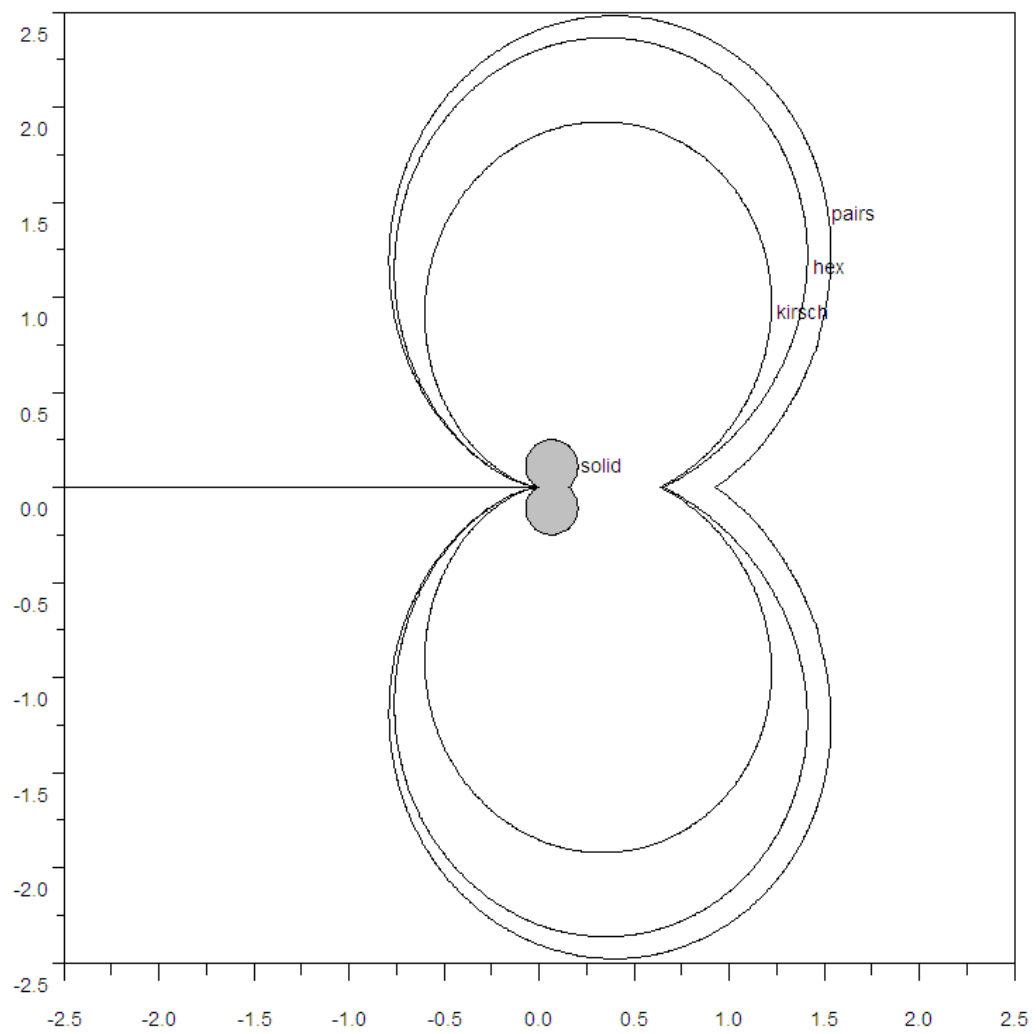
Рассмотрим два типа высокопористых сред. В первом случае поры расположены хаотически, и расстояние между порой и её ближайшими соседями может быть произвольным (но не меньше, чем d). При этом будем считать, что лишь одна из соседних пор расположена на расстоянии d и вносит основной вклад в воздействие, а остальными можем пренебречь.

Во втором случае поры расположены максимально плотно, расстояние между порой и каждым из её соседей равно d . Моделью такой среды может быть гексагональная решетка пор, так как это самое плотное возможное расположение.

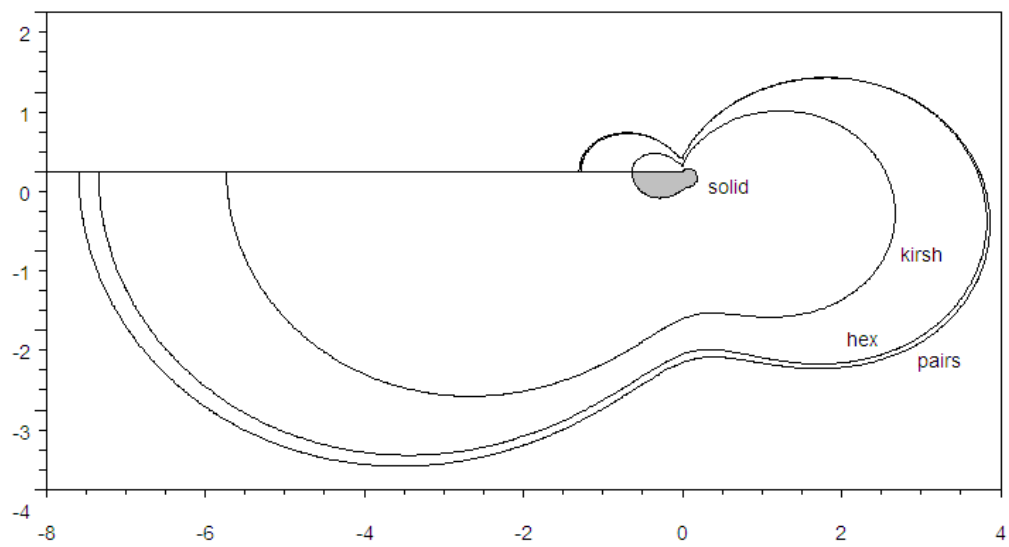
Чтобы получить область трещиноватости, необходимо для каждой точки рассчитать напряжения, создаваемые макротрещиной (5.1), затем принять их в качестве действующих на бесконечности для задачи, соответственно, о двух порах или о гексагональной решетке пор. Рассчитав концентрацию напряжений на поре, получим максимальную нагрузку, которой подвергается материал. Если она превышает критическое значение, то эта точка входит в область трещиноватости.

Поскольку для каждой поры неизвестно, как расположены ее соседи, нужно рассчитать концентрацию напряжений для всех возможных взаиморасположений поры и ее соседей, и выбрать максимальную.

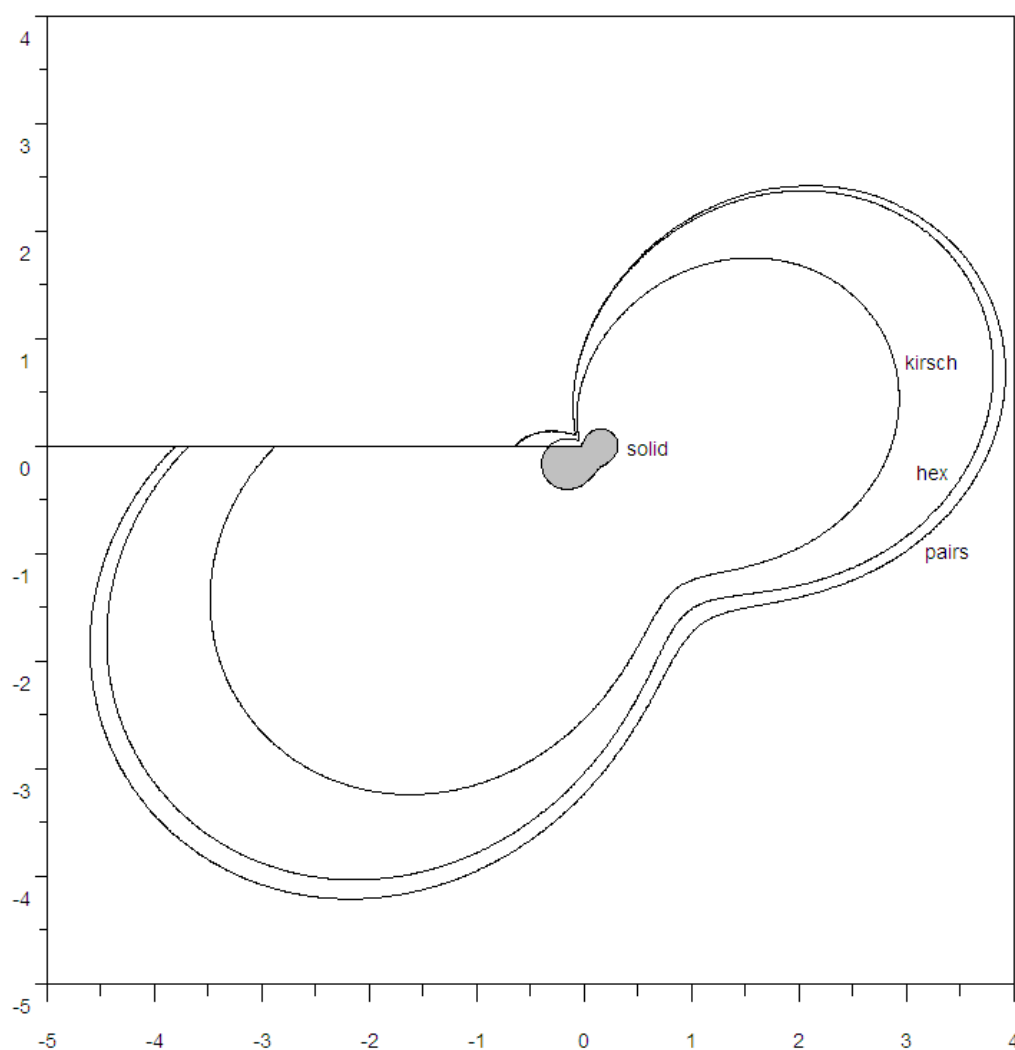
На фиг. 5.2 – 5.4 приведены формы областей трещиноватости для слабопористой среды (kirsch), и для высокопористых сред (pairs – для случая одного близкого соседа, и hex – для плотной, гексагональной, упаковки пор) в сравнении с аналогичными областями для сплошной среды. На фиг. 5.2 изображен случай $K_I=1$, $K_{II}=0$; на фиг. 5.3 – $K_I=0$, $K_{II}=1$; и на фиг. 5.4 – $K_I=K_{II}=1/\sqrt{2}$. Серым цветом заштрихована область трещиноватости для сплошного материала.



Фиг. 5.2



Фиг. 5.3



Фиг. 5.4

Расчёты показывают, что область трещиноватости меняется количественно и качественно. Прежде всего, она существенно увеличивается в размерах – в 5-10 раз в различных направлениях. Кроме того, изменяется и форма области – в частности, при $K_{II} \neq 0$ на верхнем (сжимаемом) берегу макротрещины образуется небольшая область разрушения, отсутствующая в сплошной среде. Здесь поры, как концентраторы, провоцируют зарождение трещин, параллельных макротрещине.

Известно, что область трещиноватости оказывает сильное влияние на развитие макротрещины, от ее формы и размеров зависит направление и скорость распространения макротрещины. Из того, насколько меняются параметры области

трещиноватости при наличии пористости, можно заключить, что для оценки трещиностойкости пористых сред нельзя использовать модель сплошной среды (как бы ни низка была пористость), необходимо разрабатывать модели, непосредственно учитывающие структуру материала.

5.4 Заключение к главе 5

В главе показано, что учет пористости среды может существенно изменить представления о структуре концевой области: ее размер и форма могут весьма отличаться от предсказанных сплошной моделью. Таким образом, если речь идет о механизмах разрушения среды, роста трещин, то пористость материала нельзя учитывать лишь как замену прочностных характеристик (таких как K_{IC}) на некие эффективные значения, необходимо строить другие модели.

Поскольку целью главы ставилась демонстрация применения метода мультипольных разложений для исследования механизма разрушения, был выбран частный случай задачи: нагрузки на бесконечности полагались равными нулю, поверхность пор считалась свободной от нагрузок, кроме того, мы рассматривали возникновение лишь микротрещин отрыва, хотя многие материалы менее устойчивы к сдвиговым разрушениям. Кроме того, предполагалось, что поры распределены изотропно, а их размеры одинаковы.

Таким образом, здесь имеется широкое поле для будущих исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации представлен метод решения задач об упругой плоскости с круговыми отверстиями. Метод мультипольных разложений позволяет представить поля напряжений, создаваемые отверстиями и группами отверстий, как комбинацию элементарных полей – мультиполей.

Метод выгодно отличается от методов типа МКЭ и МГЭ тем, что не требует разбиения пространства (или его границы, в случае МГЭ) на базовые элементы. Соответственно, исследователь избавлен от проблемы выбора формы конечного элемента и базовой функции, построения сетки. Также результат работы алгоритма не зависит от параметров разбиения в виду его отсутствия.

Метод позволяет контролировать точность решения простым и эффективным способом: используя функцию интегральной невязки. В отличие от точек коллокации, эта функция позволяет отслеживать точность решения на всем контуре, а не только в отдельных точках. Также этот метод позволяет избежать появления ложных решений, случаи возникновения которых описаны в [6].

Задачи, решенные в данной работе, показали, что в большинстве случаев метод мультипольных разложений позволяет описывать поля напряжений с точностью до седьмого знака, используя всего лишь несколько членов разложения – не более десяти. В случае если этого недостаточно, алгоритм позволяет увеличить точность всего лишь добавлением членов более высокого порядка. При этом не требуется пересчитывать решение заново, достаточно использовать уже имеющееся как начальное, и уточнить его.

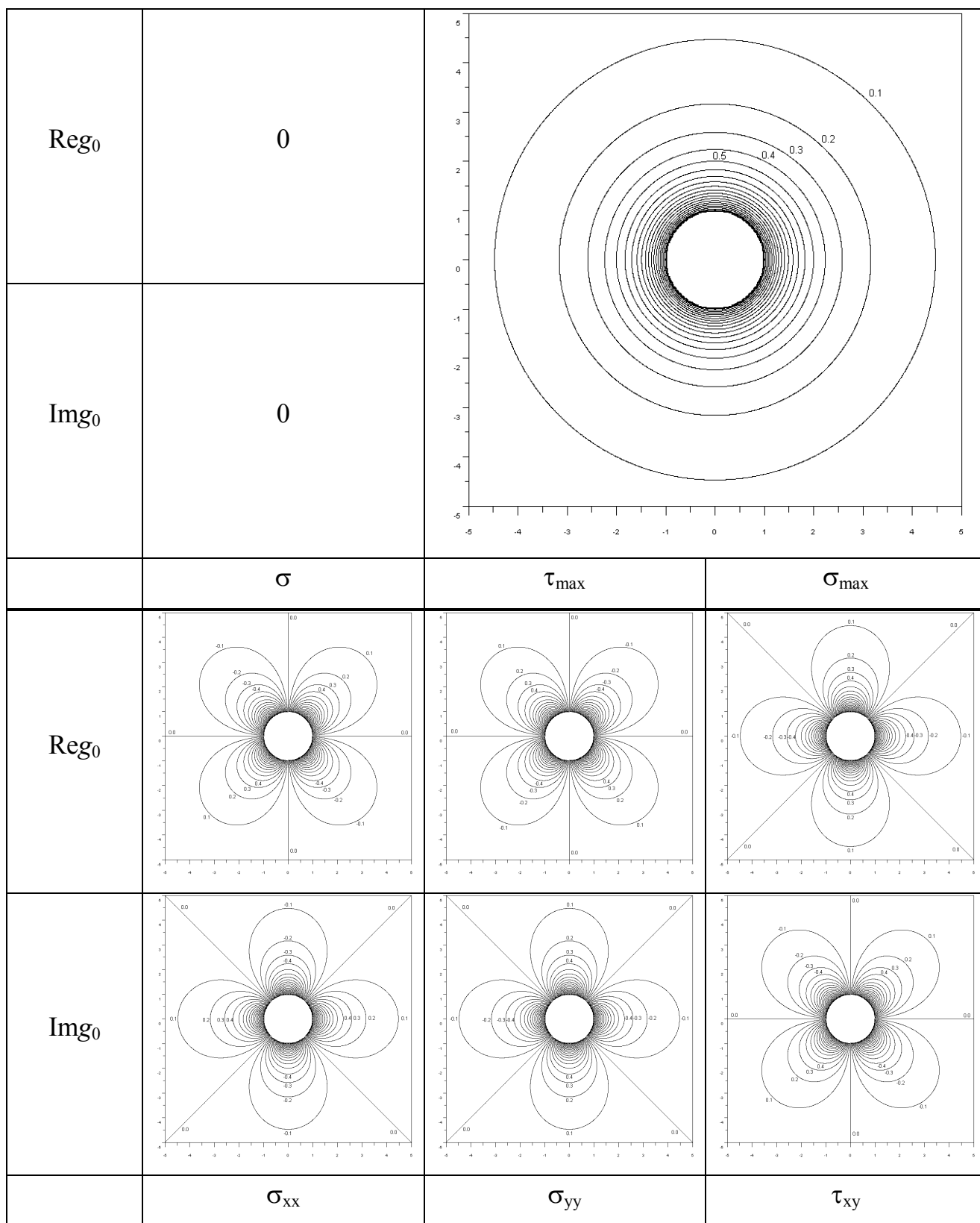
Также весьма перспективным качеством данного метода представляется возможность свести к одному мультиполю поле целого ансамбля отверстий. Это позволит значительно сократить время на расчёт полей напряжений и взаимное влияние отдельных групп отверстий.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ, ОБРАЗУЕМЫЕ ОТДЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ МУЛЬТИПОЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

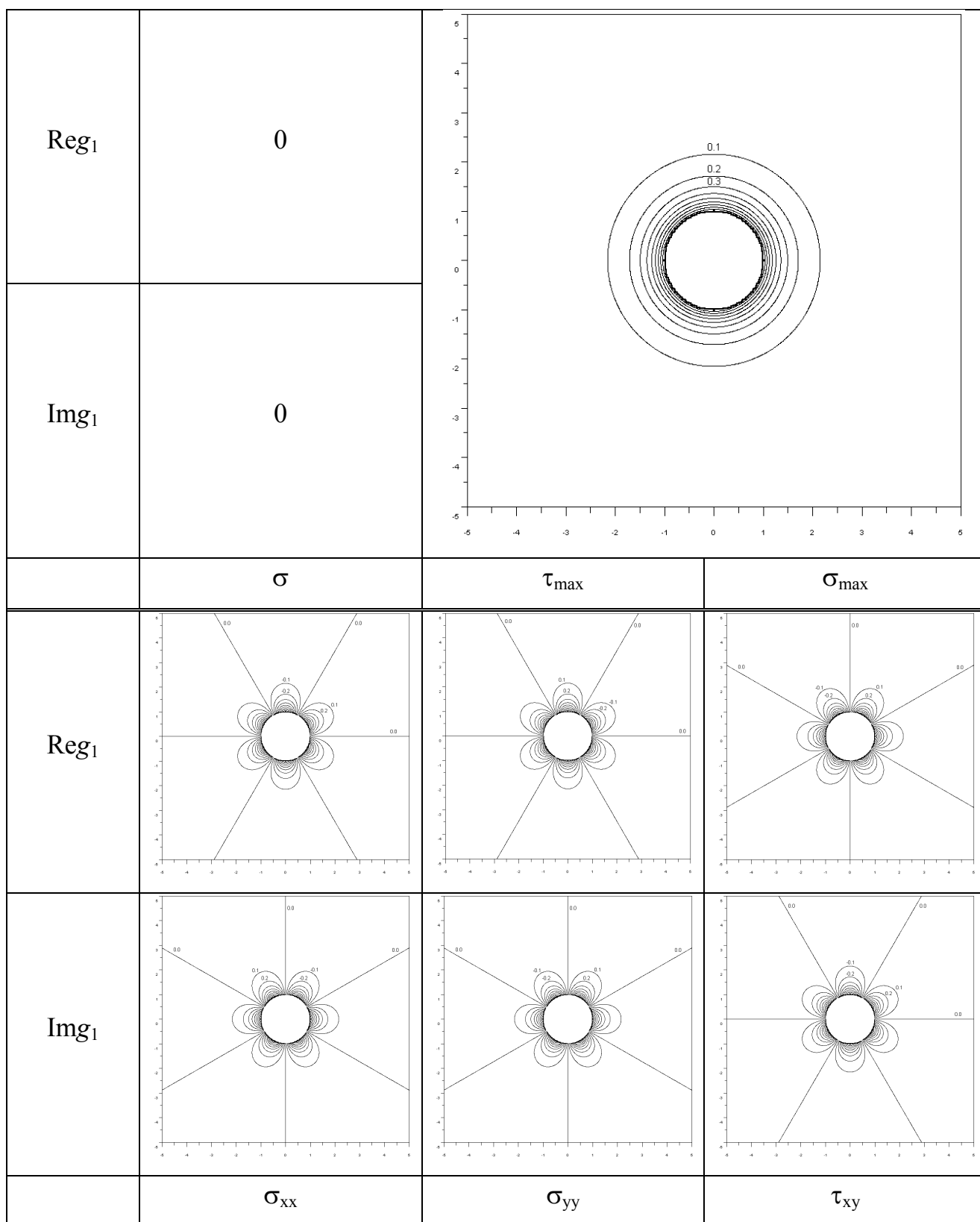
Суть большинства численных методов сводится к представлению искомой функции в виде комбинации известных (т.н. *базисных*) функций с различными весовыми коэффициентами. Тем самым задача сводится к поиску значений коэффициентов, при которых решение удовлетворяет условиям задачи с достаточной точностью.

Каковы базисные функции в предлагаемом методе? Из (1.9) видно, что это степенные функции комплексного переменного t , заданного на единичной окружности. В главе 1 было показано, что эти функции имеют физический смысл: они соответствуют базовым типам деформаций контура отверстия – всестороннему сжатию/растяжению, вращению, сдвиговой деформации и т.д.

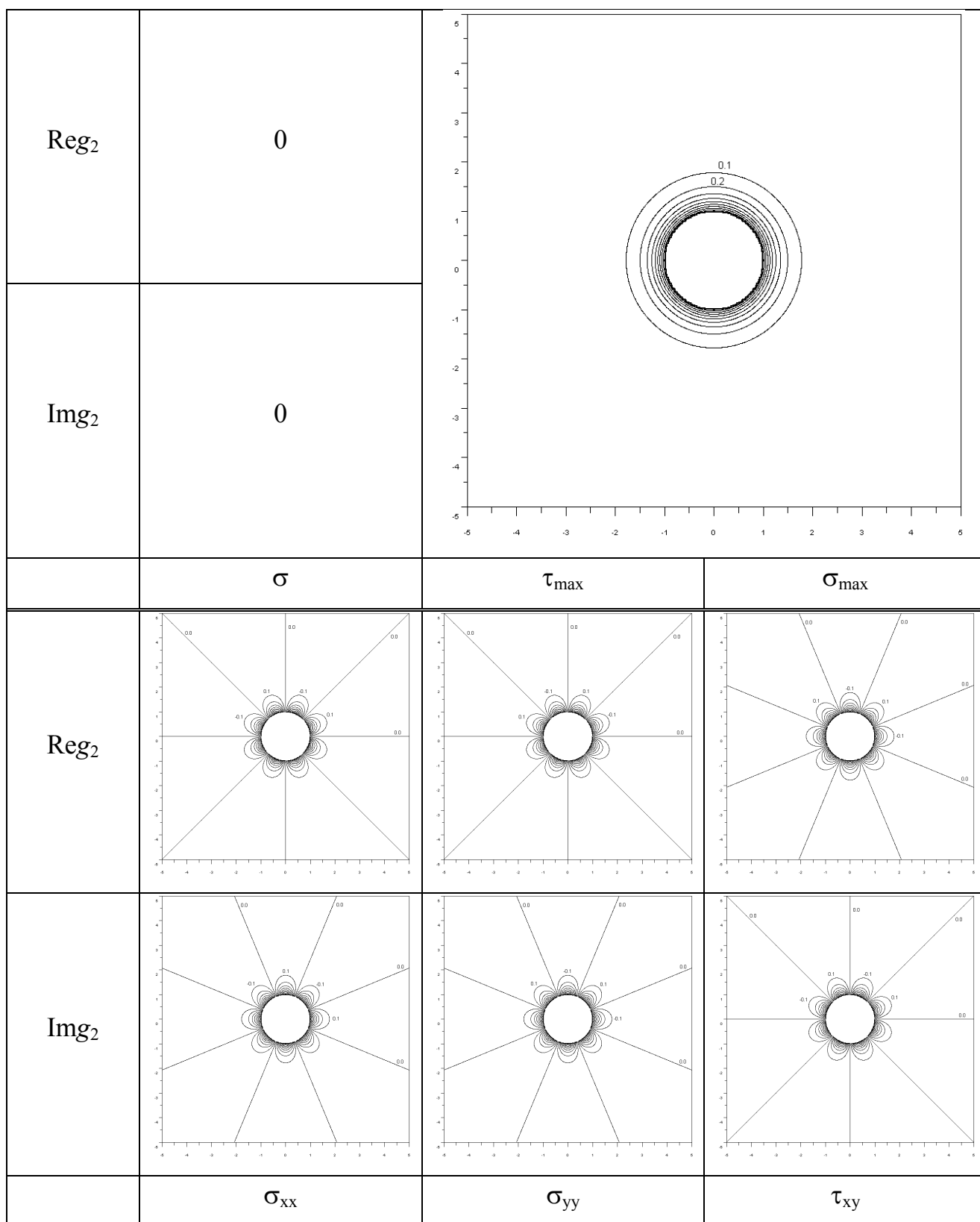
В приложении приведены поля напряжений, соответствующие каждому из членов разложения g_n .



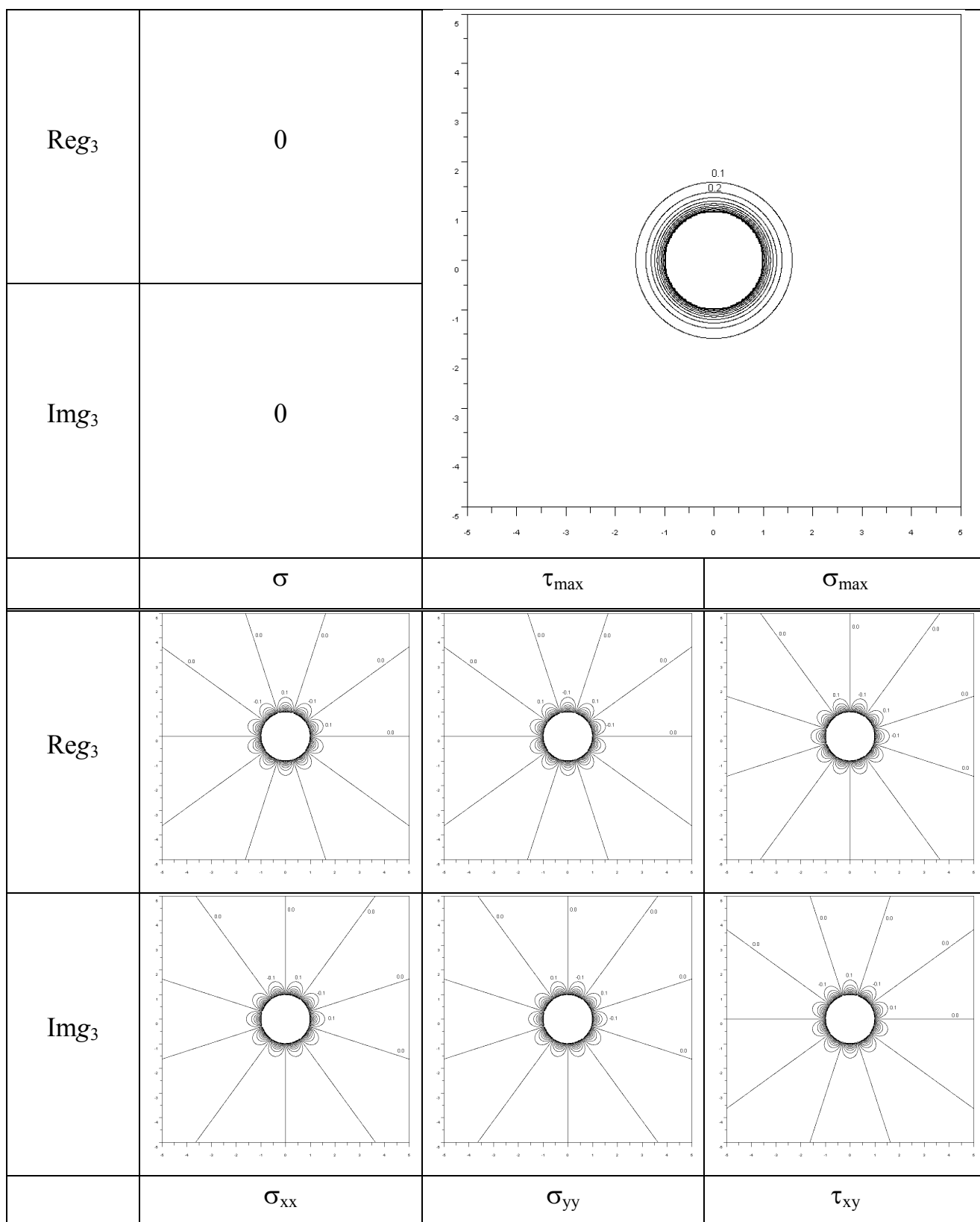
Фиг. П.1.



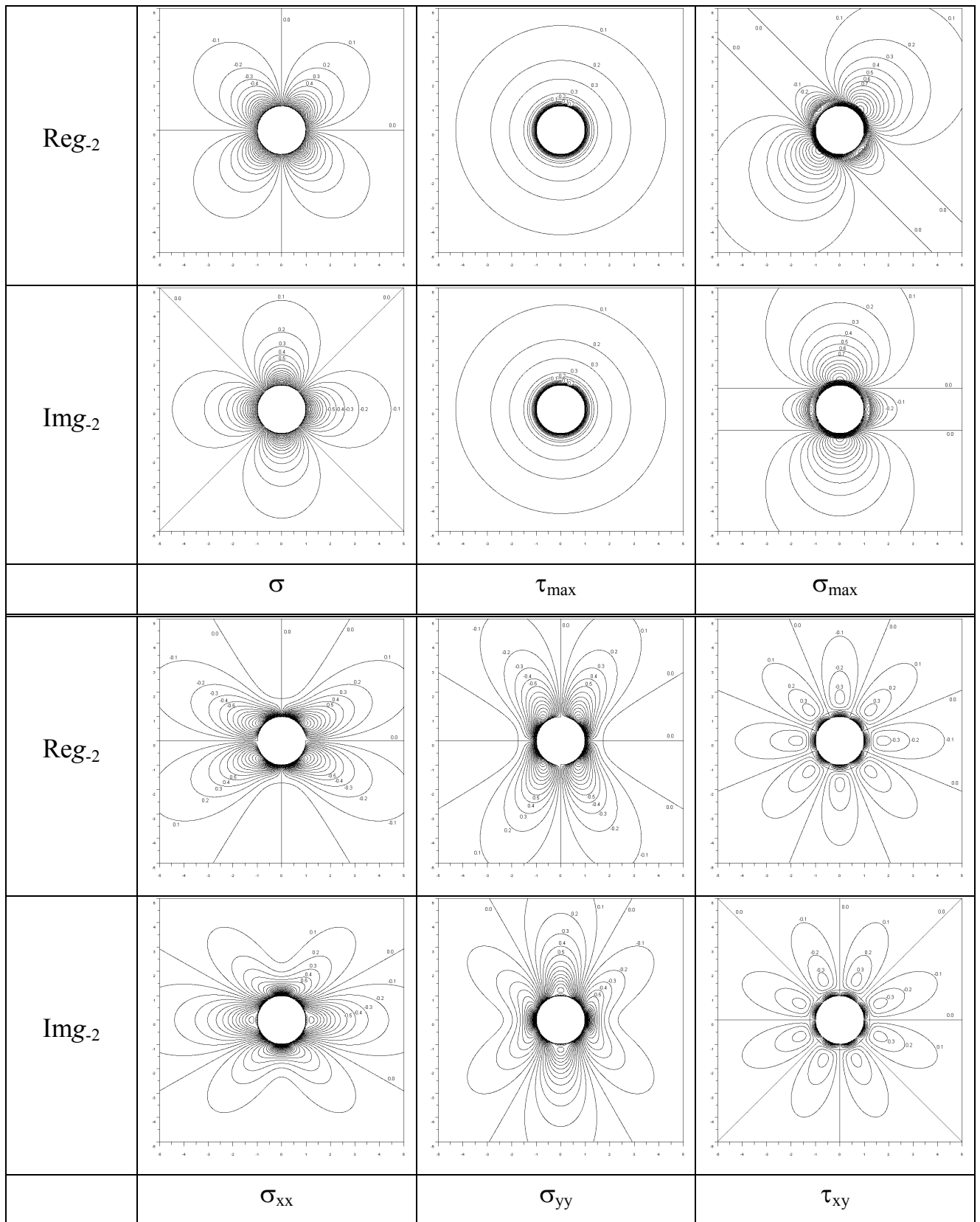
Фиг. П.2.



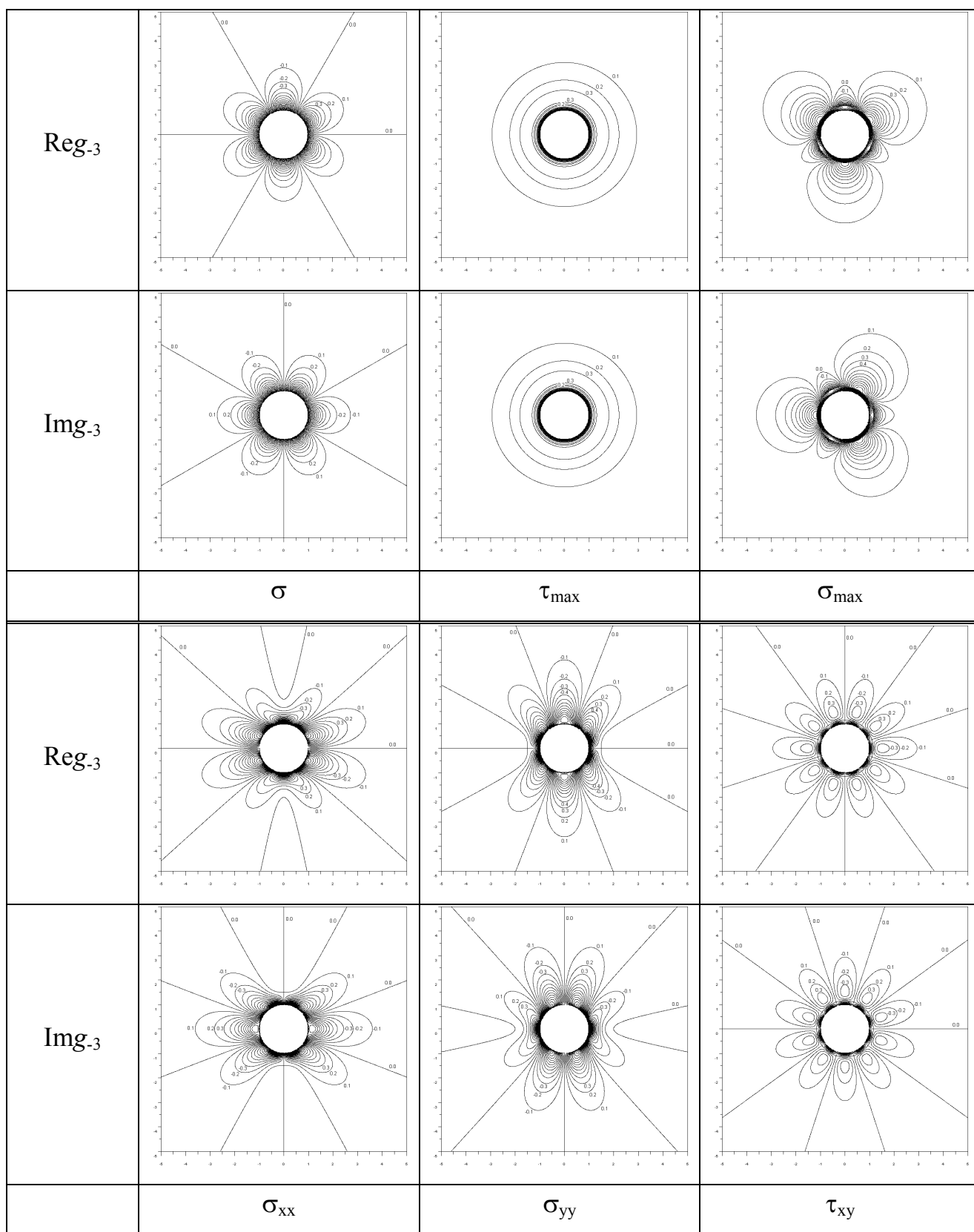
Фиг. П.3.



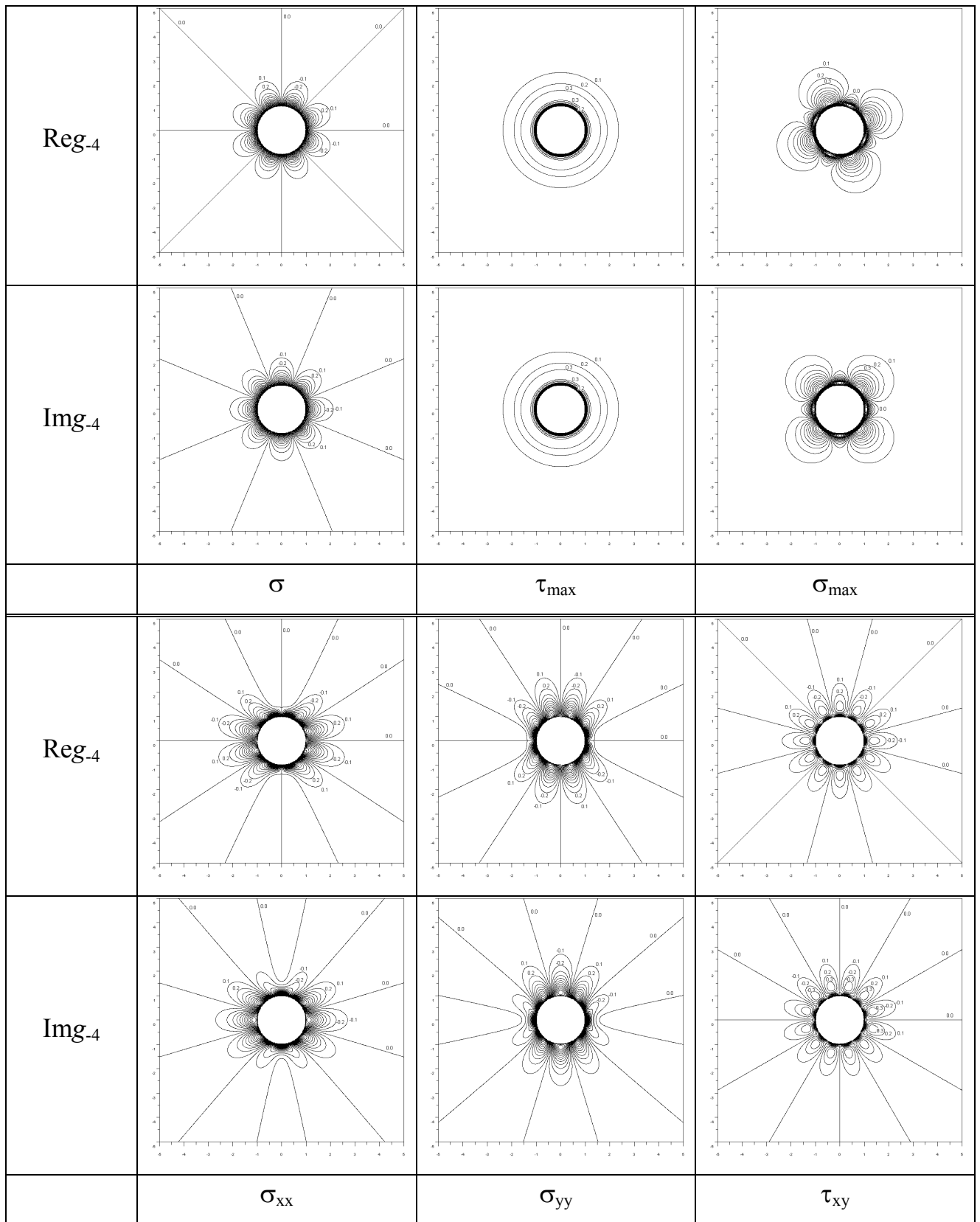
Фиг. П.4.



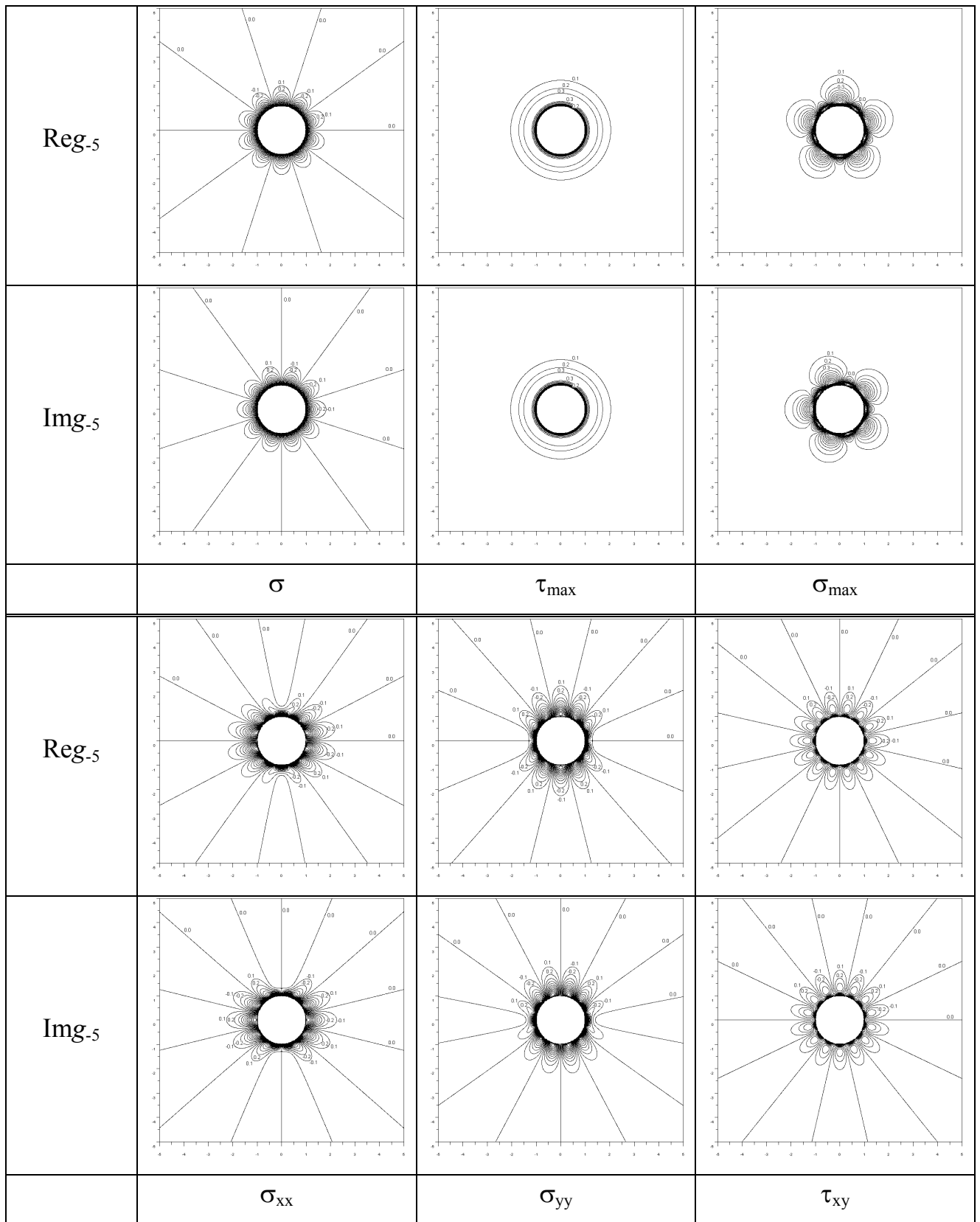
Фиг. П.5.



ФИГ. П.6.



Фиг. П.7.



Фиг. П.8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Физматлит, 1958. 545 с.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
5. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "ЯНУС", 1995. 520 с.
6. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб.: Наука, 1999. 382 с.
7. *Греков М. А.* Сингулярная плоская задача теории упругости. Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2001, 192 с.
8. *Андреев А. В.* Расчет предельного равновесия краевых криволинейных трещин в упругой полуплоскости с учетом асимптотики напряжений // Изв. РАН. МТТ. 2003. №6. С. 82–96.
9. *Андреев А. В.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. МТТ. 2005. №1. С. 126–146.
10. *Шифрин Е. И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002. 368 с.
11. *Shanz M., Steinbach O. (Eds.)* Boundary Elements Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 352 p.
12. *Tamuzs V., Romalis N., Petrova V.* Fracture of Solids with Microdefects. N. Y.: Nova Science Publ., 2000. 238 p.

13. *Емельянов В.И., Еремин К.И., Старков В.В., Гаврилин Е.Ю.* Квазиодномерное распределение макропор при анодном травлении одноосно напряженной пластины кремния. – Письма в ЖТФ, 2003, т. 29, вып. 6., с. 19-25.
14. *Нечитайлов А.А., Астрова Е.В., Кукушкина Ю.А., Каменева С.Ю.* Окислительно-гравиметрическая порометрия макропористого кремния. – Физика и техника полупроводников, 2006, т. 40, вып. 10, с. 1254-1258.
15. *Мынбаева М.Г., Константинов О.В., Мынбаев К.Д., Романов А.Е., Ситникова А.А.* Механизм релаксации напряжений несоответствия при эпитаксиальном росте GaN на пористом SiC. – Письма в ЖТФ, 2006, т. 32, вып. 23., с. 25-31.
16. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
17. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
18. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 232с.
19. *Устинов Ю.А.* Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №1. С. 145–148.
20. *Савин Г.Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. 496 с.
21. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
22. *Helsing J., Jonsson A.* Complex variable boundary integral equations for perforated infinite planes // Eng. Anal. Bound. Elem. 2001. V. 25. № 3. P. 191–202.
23. *Ting K., Chen K. T., Yang W. S.* Applied alternating method to analyze the stress concentration around interacting multiple circular holes in an infinite domain // Intern. J. Solids Struct. 1999. V. 36. № 4. P. 533-556.

24. *Soh A.K., Long Z.F.* A high precision element with a central circular hole // Intern. J. Solids Struct. 1999. V. 36. № 35. P. 5485–5497.
25. *El-Sawy Khaled M., Martini Mohammad Ikbal.* Elastic stability of bi-axially loaded rectangular plates with a single circular hole. // Thin-Walled Struct. 2007. V. 45. №1. P. 122–133.
26. *Akaiwa N., Thornton K., Voorhees P.W.* Large-scale simulations of microstructural evolution in elastically stressed solids // J. Comp. Phys. 2001. № 173. P. 61–86.
27. *Wang Zh., Ghoniem N., LeSar R.* Multipole representation of the elastic field of dislocation ensembles // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. № 17. 174102–174107.
28. *Liu Y.* A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems // Intern. J. Numer. Meth. Engng. 2006. V. 65. P. 863–881.
29. *Jeng-Tzong Chen, An-Chien Wu.* Null-Field Approach for the Multi-inclusion Problem Under Antiplane Shears // J. App. Mech. 2007. V. 74. P. 469–487.
30. *Bert C.W., Zeng H.* Generalized Bending of a Large, Shear Deformable Isotropic Plate Containing a Circular Hole or Rigid Inclusion // J. App. Mech. 2001. V. 68. P. 230–233.
31. *Lu-qing Zhang, Ai-zhong Lu.* An Analytic Algorithm of Stresses for Any Double Hole Problem in Plane Elastostatics // J. App. Mech. 2001. V. 68. P. 350–353.
32. *Fuh-Kuo Chen, Yi-Che Lee.* Plastic Deformation of a Perforated Sheet With Non-uniform Circular Holes Along the Thickness Direction // J. Engng. Mat. Tech. 2002. V. 124. P. 434–439.
33. *Dong C.Y.* Effective elastic properties of doubly periodic array of inclusions of various shapes by the boundary element method // Intern. J. Solids Struct. 2006. V. 43. №25-26 P. 7919–7938.
34. *Jia S., Raiser G.F., Povirk G.L.* Modeling the effects of hole distribution in perforated aluminum sheets I: representative unit cells // Intern. J. Solids Struct. 2002. V. 39. № 9. P. 2517–2532.

35. *Jia S., Povirk G.L.* Modeling the effects of hole distribution in perforated aluminum sheets II: minimum strength failure paths // Intern. J. Solids Struct. 2002. V. 39. № 9. P. 2533–2545.
36. *Tsukrov I., Kachanov M.* Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37. № 41. P. 5919–5941.
37. *Vigdergauz S.* The effective properties of a perforated elastic plate. Numerical optimization by genetic algorithm // Intern. J. Solids Struct. 2001. V. 38. № 48-49. P. 8593–8616.
38. *Afferrante L., Ciavarella M., Demelio G.* On the stress concentration around a hole in a half-plane subject to moving contact loads // Intern. J. Solids Struct. 2006. V. 43. № 13. P. 3895–3904.
39. *Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М.* Структуры в процессах разрушения // Изв. РАН. МТТ. 1999. №5. С. 49–71.
40. *Гольдштейн Р. В.* Разрушение при сжатии // Успехи механики. 2003. Т. 2. № 2. С. 3–20.
41. *Каминский А. А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наук. думка, 1982. 158 с.
42. *Костров Б. В., Фридман В. Н.* Механика хрупкого разрушения при сжимающих нагрузках // Физика очага землетрясения. М.: Наука, 1975. С. 30–44.
43. *Никитин Л.В., Одинцев В. Н.* Распространение трещин отрыва в сжатых горных породах // Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988. С. 157–165.
44. *Dyskin A. V., Germanovich L. N., Ustinov K. B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a pore in compression // Intern. J. Fract. 1993. V. 62. № 4. P. 307–324.
45. *Ustinov K. B.* Asymptotic solution for long cracks emanated from a hole in bi-axial loading // Intern. J. Fract. 1994. V. 68. № 3. P. R73–R77.

46. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
47. *Черепанов Г.П.* О развитии трещин в сжатых телах // Изв. РАН. ПММ. 1966. Т. 30. №1. С. 82–93.
48. *Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем при взаимодействии двух близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 774. Москва. 2005. 30с.
49. *Мокряков В.В.* Задача о напряженном состоянии, возникающем в упругой плоскости, ослабленной бесконечной периодической системой близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 806. Москва. 2006. 34с.
50. *Мокряков В.В.* Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // Изв. РАН. МТТ. 2007. №5.
51. *Мокряков В.В.* Применение метода мультиполей для решения задачи о нескольких отверстиях произвольного радиуса – Препринт ИПМех РАН № 849. Москва. 2007. 34с.
52. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
53. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
54. *Никифоров А.Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344с.
55. *Kachanov M.* Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems. – Advances in Applied Mechanics, V. 30, p. 259-445.
56. *Гольдштейн Р.В., Кулинич Ю.В., Осипенко Н.М.* Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии. – Препринт ИПМех РАН №778. Москва. 2005. 36с.