

**Институт проблем механики Российской академии наук
МАТИ – Российский государственный технологический университет
им. К.Э.Циолковского**

На правах рукописи

Никитин Илья Степанович

Теория неупругих слоистых и блочных сред.

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – механика
деформируемого твердого тела.**

Москва 2008 г.

Аннотация

В диссертации представлено одно из возможных решений важной научно-технической проблемы создания математической модели слоистых и блочных сред с учетом проскальзывания и отслоения на контактных границах и разработки эффективных численных методов для решения систем уравнений, описывающих поведение таких сред. На основе разработанных моделей и численных методов решен ряд нестационарных и квазистатических задач деформирования слоистых и блочных массивов с проскальзыванием и отслоением структурных элементов. Также предложен и реализован метод интегрирования классических нелинейных соотношений теории скольжения для случая сложного трехмерного напряженного состояния.

В диссертации впервые удалось проинтегрировать нелинейные соотношения теории скольжения Батдорфа-Будянского в ее классическом (упругопластическом) и дополнительном (упруговязкопластическом) вариантах для трехмерного напряженного состояния.

В частности, в изотропной неупругой среде, для условия скольжения с учетом вязкости и локального критерия текучести, проинтегрированы соотношения теории скольжения в случае сложного трехмерного напряженного состояния. Для случая малой вязкости аналитически получены замкнутые соотношения упруговязкопластической модели с условием пластичности Треска и нелинейной функцией релаксации, содержащей

степенные показатели нелинейности. Установлена зависимость этих показателей от структуры напряженного состояния.

Для условия скольжения с учетом локального критерия текучести и локального критерия нагружения, проинтегрированы соотношения теории скольжения в случае сложного трехмерного напряженного состояния. Для случая малого превышения предела текучести максимальным главным касательным напряжением получены замкнутые соотношения упругопластической теории течения с условием текучести Треска и с коэффициентами, зависящими от структуры напряженного состояния. В зависимости от параметров нагружения определены состояния активного, частичного нагружения и разгрузки. Построена функция текучести, для которой полученные соотношения при активном нагружении являются следствием ассоциированного закона течения.

На основе представлений теории скольжения в ее дискретном варианте построена континуальная модель слоистой среды, включающая в качестве новых зависимых переменных распределенные скорости скольжений и отслоений. Локальные условия проскальзывания выбраны в виде условий сухого трения с малой добавкой вязкого трения, что позволило сохранить упругий дифференциальный оператор определяющих соотношений.

Для тех же локальных условий скольжения построена континуальная модель блочной среды с проскальзыванием и отслоением. Для описания различных типов контактных взаимодействий введены понятия плоскости скольжения-отслоения и плоскости отслоения. Как вариант модели получены определяющие континуальные соотношения для структурно-периодических сред типа «кирпичной кладки» и «паркета». Учтена возможность начальной прочности на сдвиг и отрыв на контактных границах.

Для решения полученных систем уравнений предложен явно- неявный численный метод, основанный на методе конечных объемов и неявной аппроксимации полулинейных определяющих уравнений модели, содержащих малый параметр вязкости в знаменателе свободного члена. Метод обобщен на случай произвольной упруговязкопластической системы классического типа с неявной аппроксимацией полулинейных уравнений.

Решен ряд динамических задач о взаимодействии волн с полостями и сооружениями в слоистой и блочной среде и развитии зон проскальзывания и отслоения в их окрестности. Также решен ряд квазистатических задач о развитии зон повреждений в слоистой среде и массивах кирпичной кладки при различных граничных нагрузках и смещениях, моделирующих сейсмические и техногенные воздействия на элементы зданий и сооружений.

Оглавление

Введение.....	9
Глава 1. Обзор методов построения моделей и численного решения задач механики неупругих сред с периодической структурой.....	14
1.1. Обзор континуальных моделей слоистых и блочных сред.....	15
1.2. Обзор классических вариантов теории скольжения для упруго пластических сред.....	20
1.3. Численные методы решения гиперболических систем для упруговязкопластических моделей механики сплошных сред	23
Глава 2. Построение модели упруговязкопластической среды на основе теории скольжения для трехмерного напряженного состояния.....	29
2.1. Условие скольжения с учетом локального критерия текучести и нелинейной вязкости.....	30
2.2. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию текучести.....	33
2.3. Интегрирование определяющих соотношений теории скольжения в случае малой вязкости для трехмерного напряженного состояния	40
2.4. Обсуждение результатов.....	70
2.5. Тензор скоростей деформации вязкой жидкости, тензор деформации упругого тела и теория скольжения.....	72

Глава 3. Построение модели упругопластической среды на основе теории скольжения для трехмерного напряженного состояния.....	77
---	----

3.1. Условие скольжения с учетом локального критерия текучести и критерия нагружения.	78
3.2. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию текучести.....	83
3.3. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию нагружения	84
3.4. Интегрирование определяющих соотношений теории скольжения в случае малого превышения локального предела текучести максимальным касательным напряжением для трехмерного напряженного состояния	94
3.5. Определение состояний активного, частичного нагружения и разгрузки.....	102
3.6. Результаты интегрирования и определяющие соотношения полученной теории течения.....	107
3.7. Интегрирование вырожденных случаев.....	117
3.8. Сопоставление с классической теорией течения.....	120

Глава 4. Определяющие соотношения для слоистых и блочных сред с учетом проскальзывания и отслоения. Алгоритм расчета полученных систем уравнений.....	125
---	-----

4.1. Нелинейные условия взаимодействия контактных границ структурных элементов.....	127
---	-----

4.2. Построение континуальной модели слоистой среды на основе дискретного варианта теории скольжения.....	129
4.3. Построение континуальной модели блочной среды на основе дискретного варианта теории скольжения. Понятие плоскости скольжения-отслоения и плоскости отслоения.....	133
4.4. Построение континуальной модели среды типа «кирпичной кладки» на основе дискретного варианта теории скольжения.....	137
4.5. Построение континуальной модели среды типа «паркета» на основе дискретного варианта теории скольжения.....	139
4.6. Численный метод решения полученных гиперболических систем. Аппроксимация по пространству и времени. Неявная аппроксимация полулинейных определяющих соотношений	141
4.7. Примеры расчетов. <i>Квазистатические задачи о проседании массива «кирпичной кладки». Сравнение с экспериментом</i>	147
4.8. Примеры расчетов. <i>Динамическая задача о прохождении упругой продольной волны через полость в слоистой и блочной среде</i>	152
4.9. Примеры расчетов. <i>Задача о горизонтальных и вертикальных колебаниях основания «стены с окном»</i>	158
 Глава 5. Явно-неявный метод расчета системы уравнений упруго вязкопластической среды.....	 163
 5.1. Неявная аппроксимация первого порядка полулинейных уравнений системы для упруговязкопластической модели	 164

5.2. Неявная аппроксимация второго порядка полулинейных уравнений системы для упруговязкопластической модели	168
5.3. Примеры расчетов. <i>Высокоскоростное наклонное соударение пластин и трубчатых образцов (сварка взрывом). Алгоритм расчета контактного взаимодействия. Критерий сварки</i>	175
5.4. Примеры расчетов. <i>Прохождение продольной волны через полость в упруговязкопластической среде. Малые и большие деформации</i>	188
Заключение.....	197
Литература.....	199

Введение

В диссертации получено решение важной научно-технической проблемы - создания континуальных моделей слоистых и блочных сред с учетом проскальзывания и отслоения на контактных границах на основе теории скольжения и разработки эффективных численных методов для решения систем уравнений, описывающих поведение таких сред.

В первой главе дан обзор работ по теории скольжения, применяемой для построения изотропных упругопластических моделей. Также проведен анализ работ, посвященных континуальным моделям слоистых и блочных сред с учетом возможного проскальзывания на контактных границах. Дано описание основных численных методов, применяемых для решения нестационарных систем уравнений, описывающих поведение классических упругопластических и упруговязкопластических сред.

Во второй главе, для условия скольжения с учетом вязкости и локального критерия текучести, проинтегрированы соотношения теории скольжения в случае сложного трехмерного напряженного состояния. Для случая малой вязкости аналитически получены замкнутые соотношения упруговязкопластической модели.

В третьей главе, для условия скольжения с учетом локального критерия текучести и локального критерия нагружения, проинтегрированы соотношения теории скольжения в случае сложного трехмерного напряженного состояния. Для случая малого превышения предела текучести максимальным главным касательным напряжением получены замкнутые соотношения упругопластической теории течения.

В четвертой главе на основе представлений теории скольжения в ее дискретном варианте построены континуальные модели слоистой и блочной сред, включающие в качестве новых зависимых переменных распределенные скорости скольжений и отслоений. Для решения полученных систем уравнений предложен явно- неявный численный метод, основанный на методе конечных объемов и неявной аппроксимации полулинейных определяющих уравнений модели, содержащих малый параметр вязкости в знаменателе свободного члена. Приведены примеры решения ряда динамических и квазистатических задач.

В пятой главе явно-неявный численный метод обобщен на случай классической системы уравнений для упруговязкопластической среды. Приведены примеры численных решений динамических задач.

Выводы и перечень основных результатов диссертации, выносимых на защиту, приведен в Заключение.

По содержанию диссертации сделано более двадцати публикаций, из которых половину составляют доклады на конференциях, другую половину составляют статьи по отдельным вопросам работы. Часть результатов отражена в отчетах по различным проектам.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях:

1. Никитин И.С. Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью.// Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №3. С.93-99.
2. Никитин И.С. Задача о нагрузке, приложенной к неупругому полупространству с цилиндрической полостью.// Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №5. С.184-187.
3. Глушко А.И., Никитин И.С. Об одном методе расчета волны хрупкого разрушения.// Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №3. С. 129-134.
4. Никитин И.С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С.80-86.
5. Никитин И.С. Осредненные уравнения блочной среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.//Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №2. С.70-76.
6. Никитин И.С. Динамика слоистых и блочных сред с проскальзыванием и трением. Препринт №366 М.: Изд-е ИПМех АН СССР, 1989.42с.
7. Никитин И.С. О распространении волн в слоистых и блочных средах с трением на контактных границах.// Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. №7. С.3-11.
8. Korobov S.A., Gulbin V.N., Nikitin I.S. Stressed-strained state analysis of material under high-speed deformation conditions. Journal de Physique IV. Colloque C3. 1991. Vol.1. pp.235-240.
9. Гульбин В.Н., Никитин И.С. Методика расчета параметров режима сварки взрывом разнородных металлов.// Сварочное производство. 1995. №1. С.18-25.

10. Кобелев А.Г., Гульбин В.Н., Никитин И.С., Колесников Ф.В. Исследование напряженно-деформированного состояния при сварке взрывом слоистых биметаллов.// Сварка взрывом и свойства сварных соединений: Межвузовский сборник научных трудов/ ВолгГТУ. Волгоград. 2000. с.30-43.
11. Никитин И.С. Упруговязкопластическая модель и теория скольжения. Препринт № 784. М.: Изд-е ИПМех РАН. 2005. 32с.
12. Никитин И.С. Теория деформирования слоистых и блочных горных массивов с учетом трения. Материалы XIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС-2005). М.: Вузовская книга. 2005. С.348.
13. Никитин И.С. Численный метод решения «жестких» полулинейных гиперболических систем. Тезисы докладов III Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». Екатеринбург: УрО РАН. 2006. С.87-88.
14. Никитин И.С. Упруговязкопластическая модель и теория скольжения. Труды IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород. 22-28 августа 2006. С. 159.
15. Никитин И.С. Интегрируемые варианты трехмерной теории скольжения для упруговязкопластических и упругопластических материалов. Материалы XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС-2007). М.: Вузовская книга. 2007. С.395-396.
16. Nikitin I. The Integrable variants of the 3D slip theory for elastoviscoplastic and elastoplastic models. EMMC-10 Conference “Multi-

phases and multi-components materials under dynamic loading” 11-14.06.2007.Kazimierz Dolny, Poland.

17. Никитин И.С. Определяющие соотношения упруговязкопластической модели и теория скольжения. // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С.110-122.

18. Никитин И.С. Построение упруговязкопластической и упругопластической моделей на основе теории скольжения. «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» Саратов. 2007.

19. Nikitin I. Elastoviscoplastic model and concept of slip.// Multidiscipline Modeling in Mat. And Struct. 2007. Vol. 3. №1. pp.91-106.

20. Никитин И.С. Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением. //Изв. РАН. МТТ. 2008. №4. С.154-165.

21. Nikitin I. The Integrable Variant of the Theory of Slip.// Multidiscipline Modeling in Mat. And Struct. 2008 .Vol. 4. №2. pp. 163-178.

Глава 1.

Обзор методов построения моделей и численного решения задач механики неупругих сред с периодической структурой

В диссертации исследуются несколько взаимосвязанных проблем.

Во-первых, строятся неупругие модели механического поведения структурно-периодических слоистых и блочных сред с проскальзыванием и отслоением. Исходя из этого, в первой части главы дается обзор современных методов построения неклассических моделей сплошных сред и структурно-периодических сред, учитывающих рост и развитие микродефектов.

Для получения искомых моделей слоистых и блочных сред в данной работе используется теория скольжения. Кроме того, важное место в диссертации занимает интегрирование соотношений этой теории в случае трехмерного напряженного состояния для разных типов условий скольжения. Поэтому во второй части главы дается обзор основных работ по теории скольжения.

Поскольку полученные модели слоистых и блочных сред описываются такими же гиперболическими системами уравнений, как и модели упруговязкопластических сред, то и методы их решения являются сходными. Поэтому в третьей части этой главы дается обзор работ по численным методам решения задач динамики упругопластических и упруговязкопластических сред.

1.1. Обзор континуальных моделей слоистых и блочных сред.

Современные подходы к построению моделей сплошных сред основаны на применении принципов термодинамики (Malvern (1969) [164]; Perzyna (1971) [177]; Lehmann (1972) [153]; Седов (1976) [107]; Ильюшин (1990) [34]; Коларов, Балтов, Бончева (1979) [41]; Кукуджанов (1985) [55]; Поздеев, Трусов, Няшин (1986) [91]; Кондауров, Фортов (2002) [49]; Бураго, Глушко, Ковшов (2000) [10]). Введение дополнительных внутренних переменных в структуру удельной свободной энергии и диссипативной функции, описывающих поведение материала, позволило с единой общей точки зрения рассмотреть и исследовать целые классы неупругих моделей с учетом процессов роста и развития микродефектов среды, фазовых переходов и, как следствие, ослабления прочностных характеристик материала вплоть до его частичного или полного разрушения (Бураго, Кукуджанов (2004) [13]; Глушко, Нещеретов (1999) [18]; Кондауров, Никитин (1989) [47]; Кукуджанов (1999) [57]). В качестве меры разрушения вводится понятие повреждаемости, которое характеризует плотность микродефектов среды типа микропор или микротрещин и является скаляром или тензором второго ранга (Качанов (1974) [33]; Работнов (1979) [93]; Глушко (1988) [17]; Carol, Bazant (1997) [136]; Carol, Bazant, Prat (1991) [137]; Кондауров (2001) [48]; Бураго, Ковшов (2001) [11]).

Для континуального описания поведения периодических структурно-неоднородных материалов разработаны различные методы механики композитов (Кристенсен (1972) [51]; Победря (1984) [90]). В частности, для

слоистых упругих композитов получены эффективные модули соответствующей анизотропной среды (Sun, Achenbach (1968) [180]) , изучено распространение волн в различных направлениях (Christensen (1975) [140]; Hegemeier, Nayfeh (1973) [145]; Ben-Amoz (1975) [146]). Широкий класс волновых задач для слоисто-неоднородных сред связан с геофизическими приложениями и рассмотрен в классических работах Бреховских (1973) [7]. Однако, в отличие от механики композитов, где, как правило, слоистые структуры рассматриваются с точки зрения неоднородности упругих или иных свойств составляющих слоев, которые прочно сцеплены по технологическим причинам, в задачах геофизики рассматриваются структуры, допускающие проскальзывание на межслойных границах. Действительно, горные породы часто изрезаны сетками параллельных протяженных трещин-разрезов. Причем, это может быть не одна система разрезов, а несколько систем, которые разбивают массив горной породы на блочные структуры, также допускающие взаимные смещения блоков. Другим примером блочной структуры является обычная кирпичная кладка, применяемая при строительстве зданий и сооружений. При более слабом связующем растворе под воздействием поверхностных или объемных нагрузок могут происходить взаимные подвижки структурных элементов – кирпичей. Очевидно, что построение модели деформирования подобного рода структур необходимо в прикладных целях.

Для получения континуальных моделей периодических структур наиболее математически обоснованным средством является теория осреднения систем уравнений с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, развитая в работах отечественных и зарубежных исследователей (Бахвалов (1975) [4]; Бахвалов, Панасенко (1984) [6];

Санчес-Паленсия (1982) [106]). С ее помощью было решено много задач по определению эффективных упругих, пластических, теплопроводных характеристик композитов разнообразной структуры, в том числе слоистых, волокнистых, с периодическими включениями различной формы и свойств (Бахвалов, Панасенко (1984) [6]; Победря (1984) [90]).

Созданию континуальных моделей слоистых сред, допускающих проскальзывание слоев в условиях сжатия, посвящены работы (Зволинский, Шхинек (1984) [32]; Молотков, Хило (1986) [67]; Molotkov, Bakulin (1997) [168]; Bakulin (2003) [125,126]). В них рассмотрен случай линейных контактных условий, связывающих скачки касательных смещений и напряжений. В других работах (Zienkiewicz, Pande (1977) [185]; Lourenco (1996) [154]; Giambanco, Fileccia Scimemi (2006) [144]; Cho, Plesha, Haimson (1991) [139]) рассматриваются слоистые среды со связующими прослойками, что приводит к анизотропным (трансверсально изотропным) упругим моделям вплоть до нарушения сцеплений на контактах и к упругопластическим моделям с неассоциированным законом течения для учета пластических сдвигов на контактных границах. В работе Plesha (1987) [178] принимается во внимание эффект дилатансии для учета связи касательных и нормальных скачков смещений на границе слоев. В работе Kawamoto, Ichikawa, Kyoya (1988) [148] для усредненного описания возможных микроскольжений в эффективной анизотропной среде вводится параметр повреждаемости, имеющий тензорный характер. В работах (Зволинский, Шхинек (1984) [32]; Adhikary, Dyskin (1998) [121]) континуальные модели слоистых сред носят характер моментных теорий, с несимметричным тензором напряжений для учета возможного изгиба слоев при проскальзывании. Заметим, что с точки зрения теории осреднения в этих

моделях учитываются следующие, второго порядка малости члены разложения вектора смещений по малому параметру толщины слоя, зависящие от «медленных» и «быстрых» пространственных переменных (Бахвалов, Панасенко (1984) [6]). Модель многослойной упругой структуры, слои которой работают на изгиб, построена и исследована в работах Салганика (1987, 2004, 2005) [103,104,105].

Одну из первых моделей блочной среды предложил Morland (1974) [169]. В этой работе в массиве с несколькими системами параллельных разрезов учитывается вклад микроскольжений в тензор деформации и принимается условие кулоновского трения как предельное условие для касательного напряжения на плоскостях разрезов. В работах (Singh (1973) [179]; Briccoli, Ranocchiai (1999) [131]; Lourenco, Rots (1997) [156]; Anthoine (1997) [123]) по моделированию процессов деформирования и разрушения кирпичных кладок принимается эффективная анизотропная (ортотропная) модель ненарушенного массива. Анизотропные модули упругости определяются по одной из схем осреднения через изотропные модули блоков и связующего застывшего раствора. Рассматриваются несколько зон в плоскости «касательное напряжение – нормальное напряжение», в которых определяются предельные условия, по достижении которых начинаются неупругие деформации. Для их определения вводится пластический потенциал, отличный от функции текучести (неассоциированный закон течения) (Lourenco, Zucchini (2007) [157]). Также используется тензорная повреждаемость в качестве меры нарушений сплошности массива кирпичной кладки (Gambarotta, Lagomarsino (1997) [142,143]; Papa (1996) [174]; Berto, Saetta, Scotta (2002) [133]). Численно, в основном методом конечных элементов, решены задачи деформирования кирпичных структур (Kawamoto

T., Aydan (1999) [149]; Lau, Noruziaan, Razaqpur (1998) [152]; Kamil Tanrikulu, Meng, McNiven (1992) [147]; Magenes, Calvi (1997) [160]). В работе (Acary, Jean (1998) [120]) применяется прямое численное моделирование для расчета контактных взаимодействий большого числа блоков – кирпичей с учетом проскальзывания и отслоения.

В работах Никитина (1987,1988) [73,74] с использованием теории осреднения периодических структур [6], получены безмоментные континуальные модели слоистой и блочной сред с нелинейными контактными условиями скольжения, учитывающими сухое и вязкое трение. Определяющие соотношения этих моделей похожи на определяющие соотношения для анизотропных упруговязкопластических сред. Добавочные к упругому оператору члены полученных систем уравнений можно интерпретировать как компоненты тензора скоростей вязкопластических деформаций, связанных со скольжениями по имеющимся в среде контактными границам – разрезам. При внимательном рассмотрении оказалось, что эти формально полученные методом осреднения периодических структур “вязкопластические деформации” выглядят так, как будто они получены с помощью основного соотношения теории скольжения Батдорфа-Будянского [3], описывающей пластические деформации поликристаллических материалов.

Поэтому представляется естественным с самого начала применить концепцию скольжения в ее дискретном варианте для построения моделей рассматриваемых структурно-периодических сред с обобщенными локальными условиями на контактных границах, учитывающими возможность не только скольжения, но и отслоения.

Дадим ниже обзор направления в теории пластичности, основанного на концепции скольжения. Представления теории скольжения будут использоваться в диссертации в качестве рабочего инструмента не только для построения искомых анизотропных моделей слоистых и блочных сред, но и для построения новых макроскопических определяющих соотношений теории пластичности путем интегрирования классических соотношений теории скольжения для случая сложного трехмерного напряженного состояния.

1.2. Обзор классических вариантов теории скольжения для упруго пластических сред.

Одна из первых теорий пластичности, рассматривающих микроскольжения как механизм образования пластических деформаций, была предложена Батдорфом и Будянским (1962) [3]. Они впервые использовали концепцию скольжения для установления зависимости между напряжениями и деформациями поликристаллического тела при одноосном нагружении. Развитие этих представлений было проделано в работах Линя (1976) [62]. В Советском Союзе теория пластичности, основанная на концепции скольжения и называемая теорией локальных деформаций, была предложена Малмейстером (1965) [66] и другими авторами (Клюшников (1958) [37]; Леонов, Швайко (1964) [61]; Кнетс (39) [1971]; Русинко, Калатинец, Древаль (1974) [96]; Швайко (1976,1997) [116,117]). Предполагалось, что в каждой точке сплошной среды пластическая деформация определяется сдвигами по всевозможным

плоскостям скольжения, причем деформация сдвига в каждой плоскости зависит только от касательного напряжения, действующего в этой плоскости при нарушении им некоторого локального предельного условия. Различные авторы принимали разные зависимости в качестве локальных условий скольжения (пластического сдвига) с целью получить макроскопические соотношения между приращениями напряжений и пластических деформаций. Рассматривались поликристаллические агрегаты в предположении, что по всем сечениям кристаллы имеют случайную ориентацию. Budiansky, Wu (1962) [135] численно рассчитали кривые упрочнения для гранецентрированных кубических поликристаллов в случае чистого сдвига и простого растяжения. Позднее Hutchinson (1970) [146] рассмотрел поликристаллы, где каждый кристалл упрочняется изотропно, и рассчитал зависимости напряжения – деформация для чистого сдвига и простого растяжения. В случае процессов нагружения, соответствующих плоскому напряженному состоянию, интегрирование пластических сдвигов для определения тензора пластической деформации, аналитически проведено Швайко (1976) [116].

Существенный вклад в развитие теории пластичности, основанной на концепции скольжения, сделан в цикле работ (Мохель, Салганик (1976) [68]; Мохель, Салганик, Христианович (1983) [69]). В них сформулированы основные допущения принятого варианта теории скольжения, названного полумикроскопической теорией пластичности.

Скольжение на любой ориентированной площадке каждой материальной частицы происходит при выполнении критического условия, наложенного на модуль касательного напряжения: скольжение имеет место при превышении

модулем касательного напряжения начального предела текучести, общего для всех плоскостей скольжения.

Для скольжения необходимо также выполнение условия локального нагружения: условия положительности производной модуля касательного напряжения по параметру нагружения.

Направление приращения сдвига совпадает с направлением касательного напряжения на плоскости скольжения.

Приращения сдвигов на разных площадках связаны друг с другом через функцию влияния.

Из-за сильной нелинейности условий скольжения и сложности определения углов ориентации плоскостей скольжения, приращения компонент тензора пластической деформации для сложного напряженного состояния определялись численным интегрированием. Сравнение с результатами экспериментов со сложными программами нагружения (Жуков (1955,1956) [27,28]), приводящими к трехмерным напряженным состояниям, показало хорошее совпадение с результатами расчетов по полумикроскопической теории [69].

Отметим, что в настоящей диссертации впервые удалось аналитически проинтегрировать соотношения теории скольжения для общего трехмерного напряженного состояния в допущениях, в основном совпадающих с принятыми в работе [69], за исключением допущения о функции влияния. Также отметим, что в работах зарубежных исследователей концепция скольжения как представление о микромеханизме пластического деформирования переносится под именем «microplane theory» («of plasticity», «of damage») на случай иных механизмов развития микродефектов, или, в более общем плане, на процессы роста повреждаемости материала (Bazant,

Oh (1985) [128]; Bazant, Prat (1988) [129]; Carol, Bazant (1997) [136]; Carol, Bazant, Prat (1991) [137]; Carol, Jirasek, Bazant (2000) [138]).

1.3. Численные методы решения гиперболических систем для упруговязкопластических моделей механики сплошных сред.

Системы уравнений, описывающие динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием и отслоением, при выбранных условиях скольжения, принадлежат к классу анизотропных упруговязкопластических систем. Классические упруговязкопластические модели восходят к одномерным моделям Соколовского - Малверна (Malvern (1951) [162,163]; Соколовский (1948,1949) [108,109]). Эти модели построены на основе экспериментальных работ (см. обзор Васин, Ленский, Ленский (1973) [14]) и устанавливают факт зависимости пластического поведения материалов от временных эффектов. В них показано, что предел текучести многих материалов и, в частности, большинства металлов при динамических нагрузках значительно выше, чем при квазистатических (Кукуджанов (1967) [53]; Пэжина (1968) [92]; Новацкий (1978) [86]). Обобщение одномерных моделей на пространственный, трехмерный случай для малых деформаций было осуществлено Perzyna (1963) [175]. Для больших деформаций соответствующие результаты получены Perzyna, Wojno (1968) [176]; Lehmann (1972) [153]). Объяснение вязкопластических эффектов с точки

зрения динамической теории дислокаций выполнено Perzyna (1971) [177]. Уравнения упруговязкопластической модели (равно как и упругопластической теории течения) из общей термодинамической теории построения моделей механики сплошных сред были выведены Lehmann (1972) [153]; Perzyna (1971) [177]), конкретный вид функции свободной энергии и диссипативной функции для рассматриваемой модели сформулировали Бураго, Кукуджанов (1988) [9]; Бураго, Глушко, Ковшов (2000) [10]. Альтернативный подход к построению неупругих моделей, учитывающих временные эффекты, был предложен Годуновым (1978) [20]. Он обобщил вязкоупругую модель на случай больших деформаций и ввел зависимость времени релаксации от второго инварианта девиатора тензора напряжений.

Нестационарная система уравнений, описывающая поведение упруговязкопластической среды, является гиперболической [19,95]. В геометрически линейном случае - полулинейной гиперболической с нелинейным свободным членом, в знаменателе которого находится параметр времени релаксации девиатора напряжений на круг текучести (при статическом условии текучести Мизеса). Эта система имеет дивергентный вид (Кондауров (1982) [43]), что существенно для построения методов ее численного решения [54,95]. Для многих материалов время релаксации является весьма малым. В зависимости от скорости протекания процесса вязкие свойства могут проявлять себя слабо, среда ведет себя как упругопластическая и описывается теорией течения типа Прандтля-Рейса [41]. Для быстропротекающих процессов, характерное время которых сравнимо со временем релаксации, необходимо использовать упруговязкопластическую модель.

Говоря о системе уравнений упруговязкопластической (или упругопластической) модели мы, по существу, имеем в виду целый класс систем, отличающихся типом статического условия текучести, функции релаксации, кинематического или изотропного упрочнения, учета температурных эффектов (Коларов, Балтов, Бончева (1979) [41]), дополнительного параметра повреждаемости (Кукуджанов (1999) [57]; Бураго, Кукуджанов (2004) [13]; Глушко (1988) [17]) , от которого могут зависеть иные прочностные характеристики среды.

Для решения нестационарных пространственных задач динамики упругопластического или упруговязкопластического тела с соответствующими начальными и граничными условиями необходимо использовать численные методы. Остановимся на рассмотрении сеточных, конечноразностных методов (Рихтмайер Р.Д., Мортон (1972) [94]; Рождественский Б.Л., Яненко (1978) [95]; Пейре, Тейлор (1986) [87]; Куликовский, Погорелов, Семенов (2001) [60]), так как именно некоторые из них использованы при численном решении задач в данной диссертации. Для динамических задач целесообразно использовать явные схемы аппроксимации по времени, так как они позволяют получить достаточно подробное представление о деталях быстропротекающего процесса [54]. Для явных схем шаг по времени ограничен условием Куранта [94,95]. Неявные схемы не имеют ограничений на шаг по времени из соображений устойчивости [94,95], и могут служить для численного расчета квазистатических или достаточно плавно протекающих процессов. Обширные обзоры конечноразностных явных методов для динамических задач механики деформируемого твердого тела даны в работах (Кукуджанов, Кондауров (1973) [54]; Кукуджанов (1986) [55]). Кратко перечислим

основные из них: схема Куранта-Фридрихса-Леви, более известная по названию «крест» и схема Лакса-Вендрофа (описаны, например, в монографии Рождественский Б.Л., Яненко (1978) [95]), схема Годунова (изложена в монографии Годунов, Забродин, Иванов и др. (1976) [21]), созданная для расчета разрывных газодинамических течений, схема МакКормака (MacCormack (1969) [158]), также первоначально разработанная для аэродинамических расчетов. Широкий класс сеточно-характеристических методов, использующих конечно-разностные аналоги характеристических или бихарактеристических дифференциальных соотношений решаемых гиперболических систем, рассматривался в работах Клифтона (1968) [36]; Магомедова, Холодова (1969,1988) [63,64]. Иногда конечно-разностные характеристические соотношения используются только для расчета граничных точек Clifton (1967) [141].

Что касается пространственной конечноразностной аппроксимации рассматриваемых систем, то пионерской работой, заложившей основы так называемого метода конечных объемов, послужила статья Уилкинса (Wilkins (1964) [183]), посвященная расчету двумерных упругопластических течений. В основе метода лежит конечноразностный аналог формулы Гаусса-Остроградского (в плоском случае – формулы Грина), примененной к дивергентной форме нестационарной системы уравнений. Объемной ячейкой служит многогранник – октаэдр для точек сетки, лежащих в узлах кубической решетки (в пространственном случае), и ромб, окружающий узловую точку прямоугольной сетки (в плоском случае). Подробное изложение метода для численного решения задач, в том числе пространственных трехмерных, и многочисленные примеры из разных

областей механики деформируемого твердого тела, жидкости и газа приведены в монографии Wilkins (1999) [184].

Обсудим алгоритмы динамического расчета собственно в пластической зоне течения материала. Основным, широко используемым алгоритмом вычисления динамических напряжений является метод приведения девиатора напряжений на круг текучести (Уилкинс (1967) [112]), так называемая корректировка по Уилкинсу. Модификации метода Уилкинса, использованные для решения многочисленных динамических задач, предложены авторами работ (Гулидов, Фомин (1980) [22]; Киселев (1984) [35]; Баженов, Кибец, Садырин (1986) [2]; Угодчиков, Баженов, Рузанов (1985) [111]). Целые классы корректировок разного порядка точности получены на основе метода расщепления в работе Кукуджанова (2004) [59]. Параметрическая корректировочная формула, частным случаем которой является формула Уилкинса, получена в работе (Садовский (1992) [97]) на основе формулировки упругопластической модели в форме вариационного неравенства (Садовский (1997) [98]). Соответствующие корректировочные формулы для упруговязкопластической модели первого и второго порядка точности по времени получены Никитиным (1989) [75] и в данной диссертации на основе явно-неявной аппроксимации уравнений упруговязкопластической модели. Неявная аппроксимация определяющих соотношений для девиатора напряжений, содержащих малый параметр («жесткая» система уравнений, см. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков (2002) [5], Кукуджанов (1990) [56]) в знаменателе свободного члена, является актуальной. В случае применения явной аппроксимации численное решение системы уравнений будет неустойчивым при временах релаксации, сравнимых или меньших курантовского шага по времени (Бураго,

Кукуджанов (1973) [8]). Отметим, что процедура корректировки напряжений (вплоть до нуля) может быть не связана напрямую с решаемой системой уравнений, а применяться из физических соображений для моделирования процесса разрушения материала. Такой алгоритм использовался в одной из первых работ в этой области Майнчена, Сака (1967) [65].

Важную роль при разработке численных методов решения динамических задач с учетом взаимодействия различных деформируемых тел играет построение контактных алгоритмов. Ограничимся упоминанием широкого современного обзора методов расчета контактных взаимодействий Бураго, Кукуджанова (2005) [12]. Отметим, что в данной диссертации разработан и применен к решению ряда задач контактный алгоритм, основанный на геометрических рассмотрениях граничных пар типа «граничный узел – граничный отрезок» (Бураго, Кукуджанов (1988) [9]), и идеи о неявной аппроксимации уравнений для неизвестных контактных нормальных и касательных усилий.

Глава 2.

Построение модели упруговязкопластической среды на основе теории скольжения.

В этой главе рассматривается вариант теории скольжения Батдорфа-Будянского, применяемой при построении упругопластических или упруговязкопластических моделей деформируемого твердого тела. Основная идея теории скольжения заключается в следующем. Если выбраны условия скольжения на единичной площадке в фиксированной точке деформируемого тела, то путем интегрирования относительных сдвигов по всем площадкам, содержащим данную точку, для которых условия сцепления нарушены, можно получить в общем виде выражение для тензора пластической деформации. Первая теория такого типа была предложена Батдорфом, Будянским (1962) [3]. Подробный обзор работ этого направления в математической теории пластичности в свое время был дан в работе Кнетса (1971) [39]. Более поздние теории развивались в [37,66,61,96,116]. Кинематическая взаимосвязь пластических сдвигов на различных плоскостях скольжения учитывалась в [69]. В этих работах интегральные представления для тензора пластической деформации исследовались для конкретных процессов нагружения, либо для случаев одноосного или плоского напряженного состояний, либо численно. Произвести интегрирование по всевозможным площадкам скольжения в случае произвольного трехмерного напряженного состояния, по-видимому, никому пока не удавалось. Это

связано как со сложной нелинейной зависимостью области интегрирования от структуры напряженного состояния (при учете вклада всевозможных площадок, где нарушено условие сцепления), так и со сложным нелинейным характером условий скольжения (пластического сдвига). В данной диссертации, на основе представлений, описанных в [77,81], развивается вариант теории скольжения, учитывающий зависимость контактных условий на площадке скольжения от скорости проскальзывания.

При определенных предположениях удастся аналитически пройти весь путь интегрирования пластических сдвигов по всевозможным площадкам скольжения и получить замкнутый вариант модели сплошной среды, которая, с учетом зависимости от скоростей проскальзывания, получается близкой к упруговязкопластической модели сплошной среды классического типа [41]. Из локальных условий скольжения аналитически получаются оценки для показателей нелинейности, входящих в нелинейные функции релаксации макроскопических соотношений, описывающие зависимость от скорости деформации [92].

2.1. Условие скольжения с учетом локального критерия текучести и нелинейной вязкости.

Примем гипотезу о том, что в каждой точке рассматриваемой среды скольжение (пластический сдвиг) может происходить вдоль любой плоскости с нормалью \mathbf{n} , проходящей через эту точку. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 напряженное состояние в этой точке задается

тензором напряжений σ . Вектор скольжения γ равен относительной скорости проскальзывания $[V]$ вдоль выбранной плоскости.

Вектор касательного напряжения τ на этой плоскости равен $\tau = \sigma \cdot n - (n \cdot \sigma \cdot n)n$. Направление скольжения совпадает с вектором τ и начинается при выполнении критического условия $|\tau| \geq \tau_0$, или при нормировании напряжений на τ_0 условия $|\tau| \geq 1$.

Рассмотрим условие скольжения на единичной площадке следующего вида:

$$\gamma = H(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1)\tau / \eta_0 \quad (2.1)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, η_0 - коэффициент «микроскопической» вязкости на единичной площадке скольжения. В дальнейшем будем использовать обозначение $\langle F \rangle = H(F) \cdot F$.

Зависимость $|\tau|$ от $|\gamma|$ при различных значениях коэффициента вязкости $\eta_0 = 0.1$, $\eta_0 = 0.01$ показана на Рис.2.1.1, откуда видно, что при малых коэффициентах вязкости рассматриваемое условие близко к условию типа сухого трения с добавленной малой зависимостью от скорости проскальзывания.

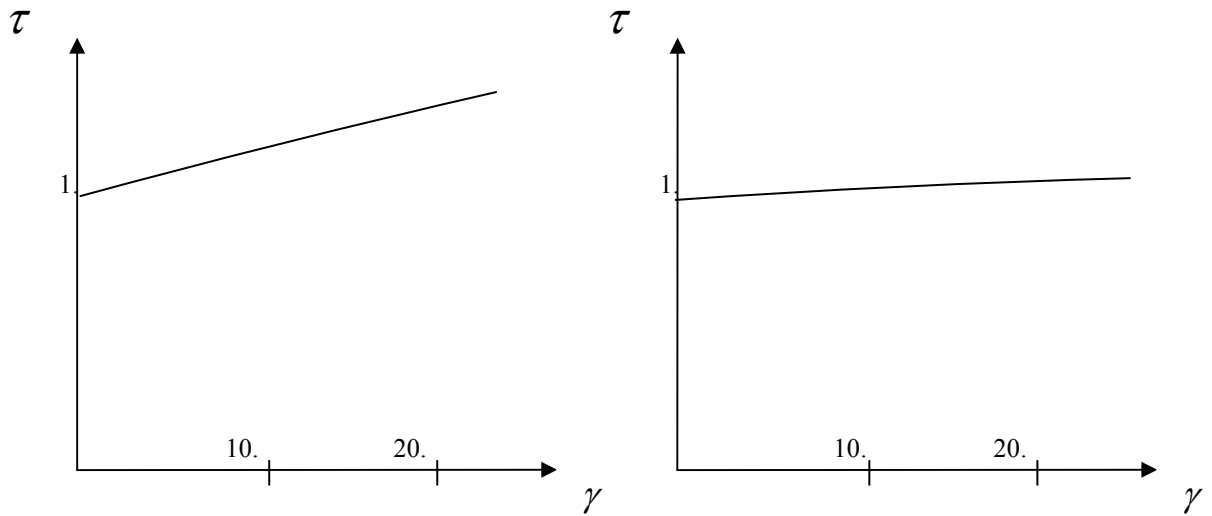


Рис. 2.1.1.

Вклад скольжений по плоскостям, у которых нормаль лежит внутри телесного угла $d\Omega$, определяется вектором $d\gamma$:

$$d\gamma = H(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 1)\tau d\Omega / \eta$$

где η - коэффициент эффективной «макроскопической» вязкости. Связь коэффициентов η_0 и η оценивается с помощью параметров дискретной микроструктуры рассматриваемой среды: $\eta \sim \eta_0 l \Omega / N$, где l - характерный размер структурного элемента (зерна), N - среднее количество плоскостей скольжения в телесном угле $\Omega = 2\pi$.

В соответствии с представлениями теории скольжения вклад скольжений $d\gamma$ вдоль площадок с нормалью \mathbf{n} внутри телесного угла $d\Omega$ в тензор скоростей пластической деформации $d\mathbf{e}$ равен

$$d\mathbf{e} = (\mathbf{n} \otimes d\gamma + d\gamma \otimes \mathbf{n}) / 2 \quad (2.2)$$

Для того, чтобы вычислить полный тензор скоростей пластической деформации, необходимо проинтегрировать вклады по всем возможным площадкам скольжения.

2.2. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию текучести.

Перейдем в систему координат, связанную с главными осями тензора напряжений такую, что главные значения тензора напряжений $\sigma_{1,2,3}$ удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 > \sigma_{2,3}$, а ее базисные векторы образуют правую тройку. Также введем связанную с ней сферическую систему

координат R, ϑ, φ (Рис.2.2.1) так, что компоненты единичной нормали будут равны $n_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$, $n_2 = \sin \vartheta \sin \varphi$, $n_3 = \cos \vartheta$.

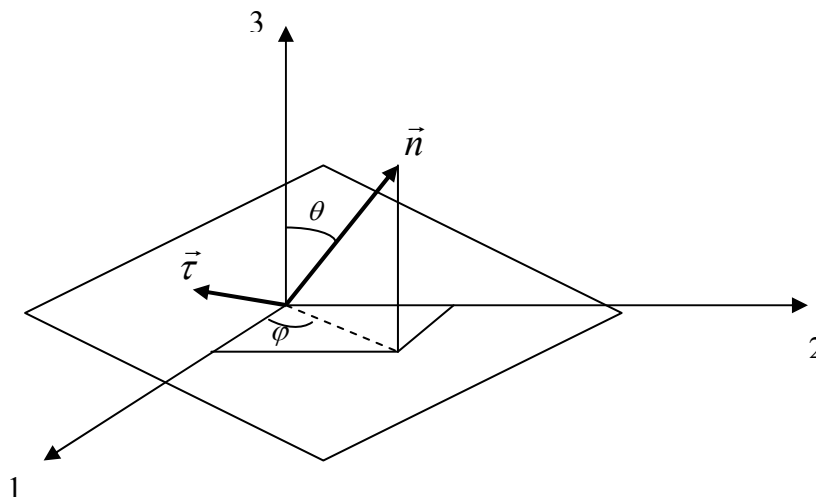


Рис. 2.2.1.

Компоненты тензора скоростей пластической деформации (2.2) будут иметь вид:

$$de_{ij} = \langle \tau^2 - 1 \rangle \left[(\sigma_i + \sigma_j) / 2 - \sigma_k n_k^2 \right] n_i n_j \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \quad (2.3)$$

Полные (интегральные) компоненты этого тензора получаются интегрированием по всем площадкам скольжения:

$$e_{ij} = \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle \left[(\sigma_i + \sigma_j) / 2 - \sigma_k n_k^2 \right] n_i n_j \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \quad (2.4)$$

Например, для e_{11}, e_{22}, e_{33} имеем

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \\
 e_{22} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \\
 e_{33} &= \iint_{\vartheta, \varphi} \langle \tau^2 - 1 \rangle (\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\sigma_0 = \sigma_1 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \vartheta$$

Условие для определения пределов интегрирования по ϑ и φ имеет вид:

$$\tau^2 - 1 = S_{12}^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 2\varphi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (S_3 + S_{12} \cos 2\varphi)^2 - 1 \geq 0 \tag{2.6}$$

$$S_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 > 0, \quad S_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 > 0,$$

$$S_3 = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 + (\sigma_2 - \sigma_3) / 2$$

Имеет место связь $S_3 = 2S_{13} - S_{12}$, из которой следует ограничение

$$S_3 > -S_{12}.$$

Введем обозначения

$$A = S_3 + S_{12} \cos 2\varphi, \quad B = S_{12} \sin 2\varphi \quad (2.7)$$

Тогда условие (2.6) примет форму неравенства для биквадратного трехчлена относительно $\cos \mathcal{G}$:

$$A^2 \cos^4 \mathcal{G} - (A^2 - B^2) \cos^2 \mathcal{G} + (1 - B^2) \leq 0 \quad (2.8)$$

Корни соответствующего биквадратного уравнения равны:

$$Y_{\pm}^2 = \cos^2 \mathcal{G}_{\pm} = \frac{A^2 - B^2 \pm \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2} \quad (2.9)$$

Решением неравенства (2.8) будет диапазон:

$$\max[0, Y_-^2] \leq \cos^2 \mathcal{G} \leq \min[Y_+^2, 1] \quad (2.10)$$

При этом должно выполняться условие $\text{Discr} = (A^2 + B^2)^2 - 4A^2 \geq 0$.

Это условие записывается в виде $(|A| - 1)^2 + B^2 \geq 1$.

В плоскости переменных A, B это есть внешность двух окружностей единичного радиуса с центрами в точках $|A| = 1, B = 0$. Условие $Y_-^2 \leq 1$ выполняется при любых A, B , тогда как условие $Y_-^2 \geq 0$ - при

$B^2 \leq 1, B^2 \leq A^2$. Условие $Y_+^2 \leq 1$ выполняется при любых A, B , тогда как условие $Y_+^2 \geq 0$ - при $B^2 \leq A^2$ и при $B^2 \geq 1, A^2 \leq B^2$.

Таким образом, область допустимых значений для \mathcal{G} в плоскости A, B имеет вид, показанный на Рис.2.2.2. и представляет собой внешность заштрихованной фигуры, причем при $B^2 > 1$ предел интегрирования Y_-^2 отрицателен и должен быть заменен на 0.

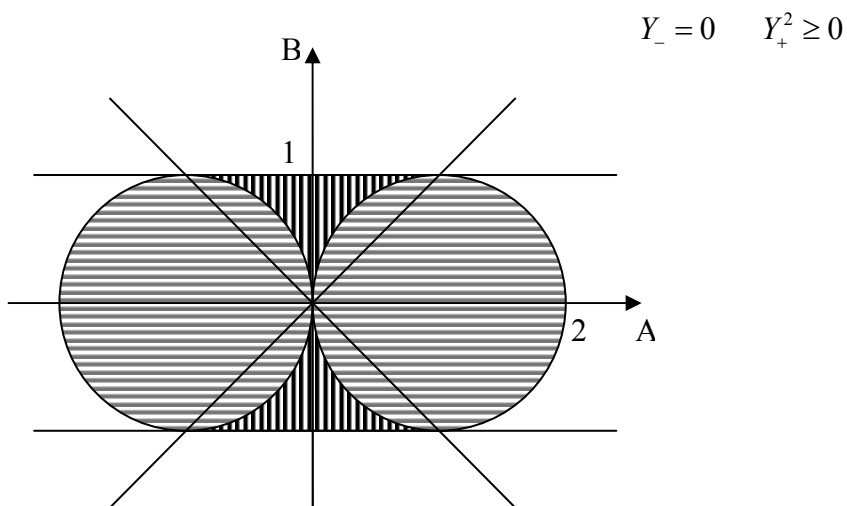


Рис. 2.2.2.

Окончательно неравенство (2.10) примет вид

$$\max[0, Y_-^2] \leq \cos^2 \vartheta \leq Y_+^2, \quad \text{где } Y_{\pm}^2 \text{ вычисляются по (2.9) в}$$

незаштрихованной области параметров A, B (Рис. 2.2.2).

Контур Γ интегрирования по φ с учетом (2.7) представляет собой часть окружности $(A - S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2$, расположенную в разрешенной (незаштрихованной) области в плоскости A, B (Рис. 2.2.3).

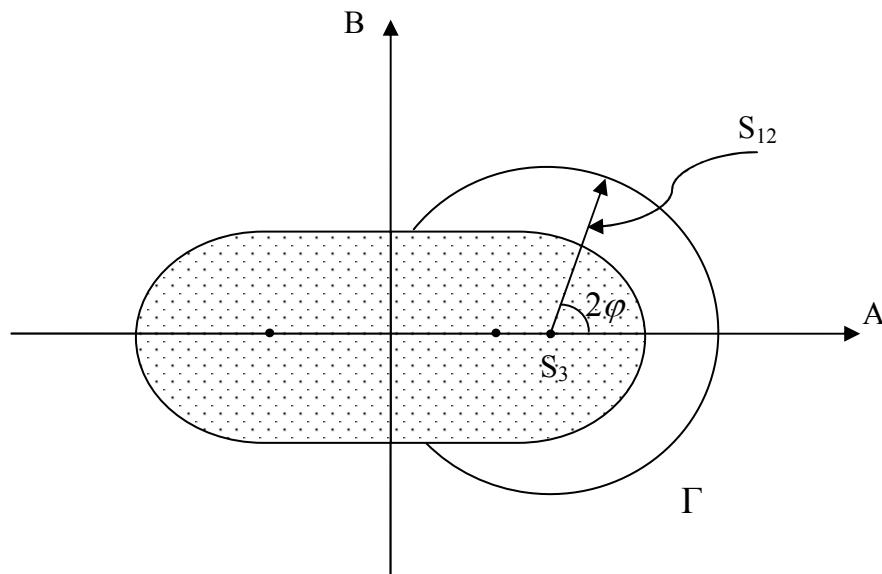


Рис. 2.2.3.

Интегралы (2.5) для компонент тензора скоростей пластической деформации несложно проинтегрировать по \mathcal{G} и они принимают вид

$$e_{kk} = 2 \int_{\Gamma} E_{kk}(A, B, \cos \mathcal{G}) \Big|_{Y_-}^{Y_+} d\varphi / \eta \quad (2.11)$$

Подынтегральное выражение довольно громоздко, и выписывать его не будем. Пределы интегрирования Y_{\pm} неотрицательны, а коэффициент 2 появляется для учета отрицательных значений (после извлечения корней из Y_{\pm}^2). Проинтегрировать по Γ интеграл (2.11) аналитически с учетом сложной нелинейной зависимости A, B и Y_{\pm} от φ не представляется возможным. Однако при малых значениях коэффициента вязкости η можно предположить по аналогии со стандартной теорией упруговязкопластической среды, что напряжения будут находиться в окрестности «поверхности текучести», релаксируя на нее с малым характерным временем порядка η . В данном случае это означает, что контур интегрирования Γ при малой вязкости будет мало «выступать» за пределы заштрихованной области на Рис.2.2.3. С учетом возникающего малого параметра можно проинтегрировать (2.11) по Γ .

2.3. Интегрирование определяющих соотношений теории скольжения в случае малой вязкости для трехмерного напряженного состояния.

Проведем анализ возможных вариантов расположения контура Γ и вычисление интеграла (2.11) с учетом возникающего малого параметра для трех характерных случаев. Различным положениям контура Γ при этом будут соответствовать разные соотношения между главными значениями тензора напряжений.

Для дальнейших оценок выпишем подробно подынтегральные выражения в формулах (2.5).

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi = \\
 &(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - 2 \cos^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \cos^2 \varphi \\
 &(\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi = \\
 &(\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \sin^2 \varphi - (\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi)(1 - \cos^2 \vartheta) \sin^2 \varphi \\
 &(\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2 \vartheta = (\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \sin^2 \varphi - (\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta)
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Также предварительно вычислим многократно используемый интеграл

$$I_k = \int_{Y_-}^{Y_+} (\tau^2 - 1) \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \quad k = 0, 1, 2$$

С учетом формул (2.6) и (2.7) имеем

$$I_k = \int_{\vartheta} (A^2 \cos^4 \vartheta - (A^2 - B^2) \cos^2 \vartheta + (1 - B^2)) \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

Несложные преобразования дают результат

$$I_k = \left[A^2 \frac{Y^{2k+5}}{2k+5} - (A^2 - B^2) \frac{Y^{2k+3}}{2k+3} + (1 - B^2) \frac{Y^{2k+1}}{2k+1} \right]_{Y_-}^{Y_+} \quad (2.13)$$

Рассмотрим два используемых в дальнейшем варианта интегрирования:

а) $Y_- = 0$

В этом случае общая формула (2.13) очевидно принимает вид:

$$I_k = A^2 \frac{Y_+^{2k+5}}{2k+5} - (A^2 - B^2) \frac{Y_+^{2k+3}}{2k+3} + (1 - B^2) \frac{Y_+^{2k+1}}{2k+1} \quad (2.14)$$

в) $Y_{\pm}^2 = a \pm b\varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1$

Для преобразования общей формулы (2.13) применим соотношения:

$$Y_{\pm} = \sqrt{a \pm b\varepsilon} = \sqrt{a} (1 \pm b/a \cdot \varepsilon)^{1/2}$$

Подробный анализ показал, что при вычислении выражений, входящих в (2.13) следует учитывать следующий член разложения по малому параметру ε вплоть до ε^3 .

Используем для этого формулы разложения:

$$(1 + \varepsilon)^n - (1 - \varepsilon)^n \sim 2n\varepsilon + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \varepsilon^3$$

С их помощью получим:

$$\begin{aligned} (Y_+^{2k+5} - Y_-^{2k+5}) / (2k+5) &\sim a^{k+5/2} \left[(b/a)\varepsilon + (2k+3)(2k+1)(b^3/a^3)\varepsilon^3 / 24 \right] \\ (Y_+^{2k+3} - Y_-^{2k+3}) / (2k+3) &\sim a^{k+3/2} \left[(b/a)\varepsilon + (2k+1)(2k-1)(b^3/a^3)\varepsilon^3 / 24 \right] \\ (Y_+^{2k+1} - Y_-^{2k+1}) / (2k+1) &\sim a^{k+1/2} \left[(b/a)\varepsilon + (2k-1)(2k-3)(b^3/a^3)\varepsilon^3 / 24 \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя их в общую формулу (2.13), получаем значение искомого интеграла для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} I_k &= I_k' + I_k'' \\ I_k' &= a^{k+1/2} \frac{b}{a} \varepsilon \left[A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + (1 - B^2) \right] \\ I_k'' &= a^{k+1/2} \frac{b^3}{24a^3} \varepsilon^3 \left[A^2 a^2 (2k+3)(2k+1) - (A^2 - B^2)a(2k+1)(2k-1) + (1 - B^2)(2k-1)(2k-3) \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

В дальнейшем нам понадобятся комбинации интегралов $I_1 - I_2$ и $I_0 - 2I_1 + I_2$.

Приведем выражения для их составных частей, вытекающие из (2.16):

$$I_1' - I_2' = a^{3/2}(1-a) \frac{b}{a} \varepsilon \left[A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + (1 - B^2) \right] \quad (2.17)$$

$$I_1'' - I_2'' = a^{3/2} \frac{b^3}{24a^3} \varepsilon^3 \left[A^2 a^2 (15 - 35a) - (A^2 - B^2)a(3 - 15a) + (1 - B^2)(-1 - 3a) \right]$$

а также

$$I_0' - 2I_1' + I_2' = a^{1/2}(1-a)^2 \frac{b}{a} \varepsilon \left[A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + (1 - B^2) \right] \quad (2.18)$$

$$I_0'' - 2I_1'' + I_2'' = a^{1/2} \frac{b^3}{24a^3} \varepsilon^3 \left[A^2 a^2 (3 - 30a + 35a^2) - (A^2 - B^2)a(-1 - 6a + 15a^2) + (1 - B^2)(3 + 2a + 3a^2) \right]$$

1) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на Рис.2.3.1.

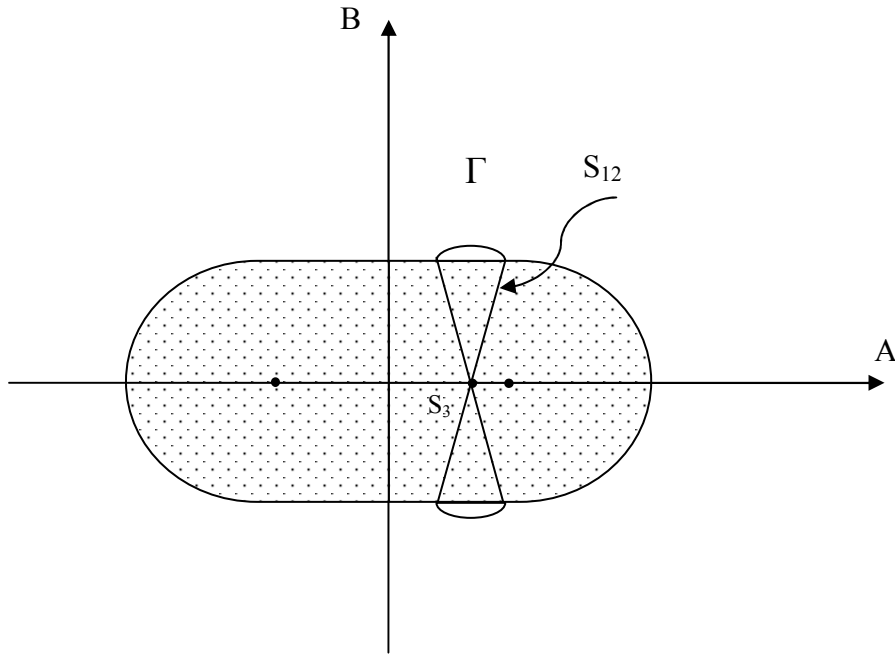


Рис.2.3.1.

Соотношение между главными значениями тензора напряжений таково, что при этом $-1 < S_3 < 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. Ограничение $S_3 > -1$ носит общий характер и следует из ранее указанного ограничения $S_3 > -S_{12}$.

Контур Γ представляет собой две «шапочки», выступающие за линии $B = \pm 1$ в плоскости переменных A, B . Из неравенства $S_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2 < 1$ с учетом $S_{12} > 1$ следует $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$.

Максимальное значение имеет главное касательное напряжение $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$.

Введем малый параметр $\delta = S_{12} - 1$. Подынтегральное выражение в (2.11) можно упростить по переменным A, B , учитывая, что в рассматриваемом случае $\beta = B - 1 < \delta \ll 1$ и $A < 1$.

Вначале упростим выражения для пределов интегрирования с учетом того факта, что $B^2 = (1 + \beta)^2 \sim 1 + 2\beta$. Пределы интегрирования по ϑ преобразуются с учетом малого параметра к следующему виду:

$$Y_+^2 \sim \left(A^2 - 1 - 2\beta + \sqrt{(A^2 + 1 + 2\beta)^2 - 4A^2} \right) / (2A^2) \sim \beta \left(\frac{1 + A^2}{1 - A^2} - 1 \right) / A^2$$

Окончательно с точностью до малых следующего порядка пределы интегрирования по ϑ равны:

$$Y_+^2 = 2 \frac{B - 1}{1 - A^2}, \quad Y_- = 0$$

Здесь и далее будем употреблять знак равенства для соотношений, справедливых с точностью до величин следующего порядка малости.

Оценки с точностью до $O(\delta)$ для компонент тензора скоростей пластической деформации (2.5) и с учетом формул (2.12) при $\cos^2 \vartheta \ll 1$ дают:

$$e_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\tau^2 - 1)(\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta \quad (2.19)$$

$$e_{22} = -e_{11} \quad , \quad e_{33} = 0 \quad .$$

Используем формулы (2.14) для интегрирования по ϑ выражения для e_{11} .

Значение интеграла I_0 в этом случае с точностью до малых следующего порядка равно:

$$I_0 = Y_+ (A^2 Y_+^4 / 5 - (A^2 - B^2) Y_+^2 + 1 - B^2)$$

при $Y_+^2 \sim 2\beta / (1 - A^2)$ и $\beta = B - 1$.

Отсюда следует:

$$I_0 \sim -\frac{4}{3} \sqrt{2} \beta Y_+ \sim -\frac{4}{3} \sqrt{2} \beta^{3/2} / \sqrt{1 - A^2}$$

И окончательно:

$$I_0 \sim -\frac{4}{3} \sqrt{2} (B - 1)^{3/2} / \sqrt{1 - A^2}$$

Вычисление компоненты скорости пластической деформации e_{11} сведется к однократному интегралу по φ , вытекающему из (2.19):

$$e_{11} = 4 \int_{\varphi} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \frac{(B-1)^{3/2}}{\sqrt{1-A^2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi / \eta$$

Коэффициент 4 перед интегралом здесь, и в аналогичных ситуациях далее, появляется для учета влияния парных диапазонов интегрирования по φ и ϑ , соответствующих одинаковым значениям $\sin 2\varphi$ и $\cos^2 \vartheta$. Этот же интеграл с учетом выражений для A и B записывается в виде:

$$e_{11} = 4 \int_{\varphi} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \frac{(S_{12} \sin 2\varphi - 1)^{3/2}}{\sqrt{1 - (S_3 + S_{12} \cos 2\varphi)^2}} \sin^2 2\varphi d\varphi / \eta$$

Пределы интегрирования φ_{\pm} при этом находятся из геометрического условия (Рис. 2.3.1) $S_{12} \sin 2\varphi_{\pm} = 1$.

Сделав замену $2\varphi_{\pm} = \pi/2 \pm \gamma_0$, получим соответственно

$$\sin 2\varphi_{\pm} = \cos \gamma_0 \sim 1 - \gamma_0^2 / 2 \quad \text{и} \quad \gamma_0 = \sqrt{2(S_{12} - 1) / S_{12}}.$$

Отсюда следует, что диапазон интегрирования по φ имеет порядок $\sqrt{\delta}$, что позволяет сделать замены

$$2\varphi = \pi / 2 + \gamma, \quad \sin 2\varphi = \cos \gamma \sim 1 - \gamma^2 / 2, \quad \cos 2\varphi = -\sin \gamma \sim -\gamma.$$

В новых переменных

$$e_{11} = 4 \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(S_{12} \cos \gamma - 1)^{3/2}}{\sqrt{1 - (S_3 - S_{12} \sin \gamma)^2}} \cos^2 \gamma d\gamma / \eta$$

или с точностью до малых следующего порядка

$$e_{11} \sim 4 \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(S_{12} - S_{12} \gamma^2 / 2 - 1)^{3/2}}{\sqrt{1 - S_3^2}} d\gamma / \eta$$

Сделаем еще одну замену

$$\gamma = \gamma_0 t \quad \text{или} \quad \gamma^2 = 2 \frac{S_{12} - 1}{S_{12}} t^2.$$

Получим выражение, содержащее безразмерный интеграл

$$e_{11} \sim 4 \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{(S_{12} - 1)^{3/2}}{\sqrt{1 - S_3^2}} \sqrt{2} \frac{\sqrt{S_{12} - 1}}{\sqrt{S_{12}}} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{3/2} dt / \eta$$

Легко вычислить, что

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^{3/2} dt =_{t=\cos \psi} \int_0^\pi \sin^4 \psi d\psi = 3\pi / 8.$$

Следовательно:

$$e_{11} \sim \pi \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{(S_{12} - 1)^2}{\sqrt{1 - S_3^2}} / \eta$$

Вспоминая, что $S_3 = 2S_{13} - S_{12}$, или с точностью до малых $S_3 \sim 2S_{13} - 1$, окончательно получим:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{S_{13}(1 - S_{13})}} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta \quad (2.20)$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0$$

Рассмотренный случай соответствует скольжению (зонам пластичности) в окрестности углов $\vartheta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/4$. Отметим, что коэффициент перед нелинейной функцией в (2.20) зависит от промежуточного касательного напряжения S_{13} .

Полученные формулы не работают при $S_3 \sim 1$ или, что то же самое, при $S_{13} \sim 1$. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

1а) Рассмотрим случай, когда параметр напряженного состояния S_3 таков, что $S_3 \lesssim 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. Введем малый параметр $\delta = S_{12} - 1$ и для определенности рассмотрим значение $S_3 = 1 - \sqrt{\delta}$.

Учтем, что в рассматриваемом случае $\beta = B - 1 < \delta \ll 1$ и

$$\alpha = 1 - A < 2\sqrt{\delta} \ll 1.$$

Вначале упростим выражения для пределов интегрирования с учетом

того факта, что $A^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2$, $B^2 = (1 + \beta)^2 \sim 1 + 2\beta$,

$$(A^2 + B^2)^2 - 4A^2 = (A^2 + B^2 - 2A)(A^2 + B^2 + 2A) \sim 4(\alpha^2 + 2\beta).$$

Пределы интегрирования по ϑ преобразуются с учетом малого параметра к следующему виду:

$$Y_+^2 \sim \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} - \alpha = (A - 1) + \sqrt{(A - 1)^2 + 2(B - 1)}, \quad Y_- = 0.$$

Оценки с точностью до $O(\delta)$ для компонент тензора скоростей пластической деформации, как и раньше, задаются формулами (2.19).

$$e_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\tau^2 - 1)(\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0.$$

Значение интеграла I_0 в этом случае с точностью до малых следующего порядка равно:

$$I_0 = Y_+(A^2 Y_+^4 / 5 - (A^2 - B^2) Y_+^2 + 1 - B^2) \sim -4Y_+ / 15 \left(\alpha^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + 2\beta} + 2\beta \right)$$

Вычисление компоненты скорости пластической деформации e_{11} сведется к однократному интегралу по φ , вытекающему из (2.19):

$$e_{11} = 4 \int_{\varphi} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(-4/15 \sqrt{A-1 + \sqrt{(A-1)^2 + 2(B-1)}} \right) \left[(A-1)^2 + (A-1) \sqrt{(A-1)^2 + 2(B-1)} + 6(B-1) \right] \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi / \eta$$

Как и в предыдущем случае, пределы интегрирования φ_{\pm} при этом находятся из геометрического условия (Рис.2.3.1) $S_{12} \sin 2\varphi_{\pm} = 1$.

Сделав замену $2\varphi_{\pm} = \pi/2 \pm \gamma_0$, получим соответственно

$$\sin 2\varphi_{\pm} = \cos \gamma_0 \sim 1 - \gamma_0^2 / 2 \quad \text{и} \quad \gamma_0 = \sqrt{2(S_{12} - 1) / S_{12}}.$$

Сделаем замену переменной интегрирования

$$2\varphi = \pi/2 + \gamma, \quad \sin 2\varphi = \cos \gamma \sim 1 - \gamma^2 / 2, \quad \cos 2\varphi = -\sin \gamma \sim -\gamma,$$

учтем, что

$$A - 1 = S_3 - 1 + S_{12} \cos 2\varphi \sim S_3 - 1 - S_{12} \gamma,$$

$$B - 1 = S_{12} \sin 2\varphi \sim S_{12} - 1 - S_{12} \gamma^2 / 2.$$

Получим выражение

$$e_{11} \sim \frac{4(\sigma_1 - \sigma_2)}{15} \frac{1}{2} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \sqrt{-\sqrt{\delta} - \gamma + \sqrt{3\delta + 2\sqrt{\delta}\gamma}} \left[7\delta + 2\sqrt{\delta}\gamma - 2\gamma^2 - (\sqrt{\delta} + \gamma)\sqrt{3\delta + 2\sqrt{\delta}\gamma} \right] d\gamma / \eta$$

Сделаем еще одну замену

$$\gamma = \gamma_0 t \quad \text{или} \quad \gamma = \sqrt{\frac{2\delta}{S_{12}}} t.$$

Переходя к безразмерной переменной t , можно получить следующее выражение для компоненты скорости пластической деформации:

$$e_{11} \sim \frac{4(\sigma_1 - \sigma_2)}{15} \frac{1}{2} \sqrt{2\delta} \sqrt{\delta} \int_{-1}^1 \sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}t} - (1+\sqrt{2}t)} \left[7+2\sqrt{2}t - 4t^2 - (1+\sqrt{2}t)\sqrt{3+2\sqrt{2}t} \right] dt / \eta$$

Принимая во внимание, что $\delta = S_{12} - 1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1$, получим

окончательный результат:

$$e_{11} = \frac{4\sqrt{2}c_0}{15} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta \quad (2.21)$$

$$e_{22} = -e_{11}, \quad e_{33} = 0$$

$$c_0 = \int_{-1}^1 \sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}t} - (1+\sqrt{2}t)} \left[7+2\sqrt{2}t - 4t^2 - (1+\sqrt{2}t)\sqrt{3+2\sqrt{2}t} \right] dt$$

Приближенное вычисление этого интеграла дает значение $c_0 = 5.884$.

Отметим, что изменился показатель степени нелинейной функции, входящей в формулу (2.21), он стал равным $7/4$.

1в) Аналогично рассматривается случай точного равенства $S_3 = 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. Интегрирование по ϑ выполняется так же, как и в предыдущем случае, в результате получается выражение для компоненты скорости пластической деформации:

$$e_{11} = 4 \int_{\varphi} (\sigma_1 - \sigma_2) \left(-4/15 \sqrt{A-1+\sqrt{(A-1)^2+2(B-1)}} \right) \left[(A-1)^2 + (A-1)\sqrt{(A-1)^2+2(B-1)} + 6(B-1) \right] \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi / \eta$$

Однако для вычисления этого интеграла, с учетом предположения $S_3 = 1$, используем другие приближенные формулы:

$$A-1 = S_3 - 1 + S_{12} \cos 2\varphi \sim -S_{12}\gamma$$

$$B-1 = S_{12} \sin 2\varphi \sim S_{12} - 1 - S_{12}\gamma^2 / 2$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$e_{11} \sim \frac{4}{15} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \sqrt{\sqrt{2\delta} - \gamma} \left[6\delta - \sqrt{2\delta}\gamma - 2\gamma^2 \right] d\gamma / \eta$$

Переходя к безразмерной переменной t , получим следующее выражение для компоненты скорости пластической деформации:

$$e_{11} \sim \frac{4}{15} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} 2\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}} \delta^{7/4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t} [3-t-2t^2] dt / \eta$$

Значение интеграла по t легко вычисляется:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t} [3-t-2t^2] dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t} (1-t)(2t+3) dt = \int_{1-t=u}^0 \sqrt{u} u (5-2u) du = 24\sqrt{2}/7$$

В итоге получаются формулы, близкие к (2.21):

$$e_{11} = \frac{128}{35} \sqrt[4]{2} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta$$

2) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на Рис.2.3.2.

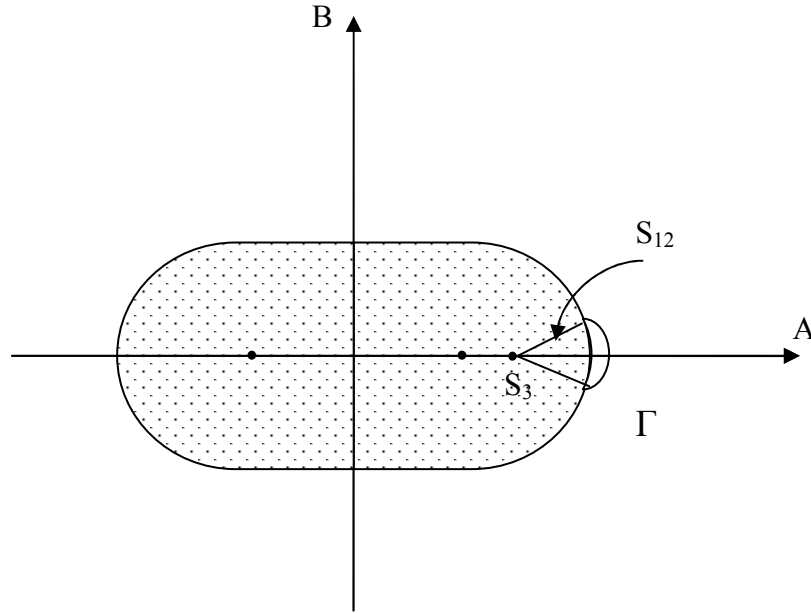


Рис.2.3.2.

Соотношение между главными значениями тензора напряжений таково, что

$S_3 > 1$, $0 \leq S_{13} - 1 \ll 1$. Второе неравенство следует из геометрически наглядного соотношения $S_3 + S_{12} - 2 \ll 1$ при условии $S_3 + S_{12} = 2S_{13}$.

В этом случае $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Максимальное значение имеет главное касательное напряжение $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$.

Введем малый параметр $\delta = S_{13} - 1$. Подынтегральное выражение в (2.11) можно упростить, учитывая, что $\alpha = A - 2 < 2\delta \ll 1$ и $\beta = B < 2\sqrt{\delta} \ll 1$.

С точностью до величин следующего порядка малости вычисляются пределы интегрирования по \mathcal{G} :

$$Y_{\pm}^2 \sim \frac{4+4\alpha-\beta^2 \pm \sqrt{(4+4\alpha+\beta^2)^2 - 4(4+4\alpha)}}{2(4+4\alpha)} \sim \frac{4 \pm \sqrt{16(1+2\alpha+\beta^2/2-1-\alpha)}}{8}$$

Окончательное выражение имеет вид:

$$Y_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha + \beta^2/2}$$

Оценки с точностью до $O(\delta)$ для компонент тензора скоростей пластической деформации (2.5) с учетом формул (2.12) при $\sin^2 \varphi \ll 1$ дают:

$$e_{11} = \iint_{\mathcal{G}, \varphi} (\tau^2 - 1)(\sigma_1 - \sigma_3)(\cos^2 \mathcal{G} - \cos^4 \mathcal{G}) \sin \mathcal{G} d\mathcal{G} d\varphi$$

$$e_{22} = 0, \quad e_{33} = -e_{11}$$

Используя формулы (2.16), можно проинтегрировать по \mathcal{G} .

В этом случае необходимо вычислить разность интегралов $I_1 - I_2$.

Учитывая, что в (2.17-2.18) следует положить $a=1/2$, $b=1/2$,

$\varepsilon = \sqrt{\alpha + \beta^2 / 2}$, вычислим выражение, стоящее в квадратных скобках в (2.17):

$$A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + 1 - B^2 = (4 - A^2 - 2B^2) / 4 \sim -(\alpha + \beta^2 / 2)$$

Так как его порядок получился $\sim \varepsilon^2$, то порядок интеграла $I_1' - I_2'$ будет ε^3 . Отсюда, собственно, и следует необходимость учета следующей составляющей интеграла $I_1'' - I_2''$, которая также имеет порядок ε^3 .

Интегралы, соответствующие первому слагаемому в квадратных скобках $\sim \varepsilon$ будут равны:

$$I_1' - I_2' \sim -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon^3 \sim -\frac{1}{4\sqrt{2}} \varepsilon^3$$

Интегралы, соответствующие второму слагаемому в квадратных скобках $\sim \varepsilon^3$ будут равны:

$$I_1'' - I_2'' \sim \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot 24} \varepsilon^3 [15 - 35/2 - 6 + 15 - 1 - 3/2] \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} \varepsilon^3$$

Суммирование этих составляющих дает результат:

$$I_1 - I_2 \sim -\frac{2}{3} \frac{1}{4\sqrt{2}} \varepsilon^3 = -\frac{2}{3} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{(2\alpha + \beta^2)^{3/2}}{(\sqrt{2})^3} = -\frac{1}{24} (2\alpha + \beta^2)^{3/2}$$

Для нахождения предела φ_0 интегрирования по φ используем условие

пересечения двух окружностей (Рис.2.3.2): $(A-1)^2 + B^2 = 1$ и

$$(A-S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2.$$

Из него следует:

$$2A = 1 + S_3 + \frac{1 - S_{12}^2}{S_3 - 1} = 2S_3 + 2S_{12} \cos 2\varphi$$

Сделав замену $2\varphi = \gamma$, $\cos 2\varphi \sim 1 - \gamma^2 / 2$, получим для пределов интегрирования формулы:

$$2\varphi_0 = \gamma_0 \sim 2\sqrt{\frac{(S_{13}-1)}{S_{12}(1-S_{12})}}$$

Однократный интеграл для компоненты скорости пластической деформации имеет вид:

$$e_{11} \sim 4 \int_{\varphi} (\sigma_1 - \sigma_3) \left(-\frac{1}{24}\right) \left[2(A-2) + B^2\right]^{3/2} d\varphi / \eta$$

В новой переменной интегрирования с учетом оценок

$$A - 2 \sim S_3 - 2 + S_{12}(1 - \gamma^2 / 2) = S_3 + S_{12} - 2 - S_{12}\gamma^2 / 2 \quad \text{и} \quad B^2 \sim S_{12}^2 \gamma^2, \quad \text{а}$$

также связи $S_3 + S_{12} - 2 = 2(S_{13} - 1)$ получим :

$$e_{11} \sim \frac{1}{6} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \int_0^{\gamma_0} [4(S_{13} - 1) - S_{12}\gamma^2 + S_{12}^2\gamma^2]^{3/2} d\gamma / \eta$$

Этот интеграл легко переписать в виде:

$$e_{11} \sim \frac{1}{6} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} [S_{12}(1 - S_{12})]^{3/2} \int_0^{\gamma_0} [\gamma_0^2 - \gamma^2]^{3/2} d\gamma / \eta$$

Сделаем еще одну замену:

$$\gamma = \gamma_0 \sin t, \quad d\gamma = \gamma_0 \cos t dt.$$

Получим:

$$e_{11} \sim \frac{1}{6} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} [S_{12}(1 - S_{12})]^{3/2} \gamma_0^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt / \eta$$

Легко вычислить элементарный интеграл :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = 3\pi / 16$$

Подставляя значение $\gamma_0 = 2\sqrt{\frac{(S_{13}-1)}{S_{12}(1-S_{12})}}$, получим:

$$e_{11} \sim \frac{1}{6} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} [S_{12}(1-S_{12})]^{3/2} \cdot 16 \frac{(S_{13}-1)^2}{[S_{12}(1-S_{12})]^2} 3\pi/16/\eta$$

Окончательный результат имеет вид:

$$e_{11} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

$$e_{22} = 0, \quad e_{33} = -e_{11} \quad (2.22)$$

Рассмотренный случай соответствует скольжению (зонам пластичности) в окрестности углов $\vartheta = \pi/4$ и $\varphi = 0$. Отметим, что и в этом случае коэффициент перед нелинейной функцией в (2.22) зависит от среднего касательного напряжения S_{12} .

Формулы (2.22) повторяют формулы (2.20) с точностью до перестановки главных касательных напряжений $S_{12} \Leftrightarrow S_{13}$. Так и должно было получиться в связи с тем, что физически ситуации напряженного состояния идентичны, меняется лишь выбор максимального главного касательного

напряжения. Однако математически интегрирование пришлось вести по разным контурам с существенно отличающимися подынтегральными выражениями, учитывать разное количество членов разложения по малому параметру. Это дает дополнительную уверенность в безошибочности результата, фактически полученного и подтвержденного двумя различными способами.

Полученные формулы (2.22) не работают при $S_{12} - 1 \ll 1$ и $S_{12} \sim 1$.

Эти случаи рассматриваются отдельно.

2а) Рассмотрим предельный случай $S_3 = 2$ и введем малый параметр

$S_{12} = \delta \ll 1$. При этом справедливо неравенство $S_{13} - 1 = \delta/2 \ll 1$

Главные значения тензора напряжений подчиняются соотношению

$\sigma_1 \gtrsim \sigma_2 > \sigma_3$. В этом случае угол φ изменяется в широком диапазоне

от $-\pi/4$ до $\pi/4$, а все компоненты тензора скоростей пластической деформации имеют один порядок и вычисляются по формулам (2.11).

Используем представления $A = 2 + \delta \cos 2\varphi$, $B = \delta \sin 2\varphi$ в формуле (2.9).

Пределы интегрирования по ϑ равны:

$$Y_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta \cos 2\varphi}$$

Необходимая оценка выражения, входящего в (2.17) :

$$A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + 1 - B^2 \sim -\delta \cos 2\varphi$$

Составляющие интегралов $I_1 - I_2$ из (2.17) в этом случае равны:

$$I_1' - I_2' \sim -\frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

$$I_1'' - I_2'' \sim \frac{1}{3} \frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

Отсюда следует:

$$I_1 - I_2 \sim -\frac{1}{6\sqrt{2}} (\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

Аналогично, составляющие интегралов $I_0 - 2I_1 + I_2$ из (2.18) имеют вид:

$$I_0' - 2I_1' + I_2' \sim -\frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

$$I_0'' - 2I_1'' + I_2'' \sim \frac{1}{3} \frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

Суммирование составляющих дает:

$$I_0 - 2I_1 + I_2 \sim -\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos 2\varphi)^{3/2} \delta^{3/2}$$

Общие формулы для компонент тензора скоростей пластической деформации:

$$e_{11} \sim 4 \int_0^{\pi/2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)(I_0 - 2I_1 + I_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (\sigma_1 - \sigma_3)(I_1 - I_2) \cos^2 \varphi \right] \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$e_{33} \sim 4 \int_0^{\pi/2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)(I_1 - I_2) \sin^2 \varphi - (\sigma_1 - \sigma_3)(I_1 - I_2) \right] \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$e_{22} = -(e_{11} + e_{33})$$

Положив переменную интегрирования $\psi = 2\varphi$, получим окончательные результаты:

$$e_{11} = c_{12} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta + c_{13} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

$$e_{33} = c_{32} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta - c_{33} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

Коэффициенты определяются интегралами по параметру:

$$c_{12} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \psi)^{3/2} (1 - \cos^2 \psi) / 2 d\psi$$

$$c_{13} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \psi)^{3/2} (1 + \cos \psi) d\psi$$

$$c_{32} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \psi)^{3/2} (1 - \cos \psi) d\psi$$

$$c_{33} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos \psi)^{3/2} d\psi$$

Приближенное вычисление этих интегралов дает значения $c_{12} \approx 0.087$,

$c_{13} \approx 1.058$, $c_{32} \approx 0.105$, $c_{33} \approx 0.583$.

3) Рассмотрим вариант расположения контура Γ , показанный на Рис.2.3.3.

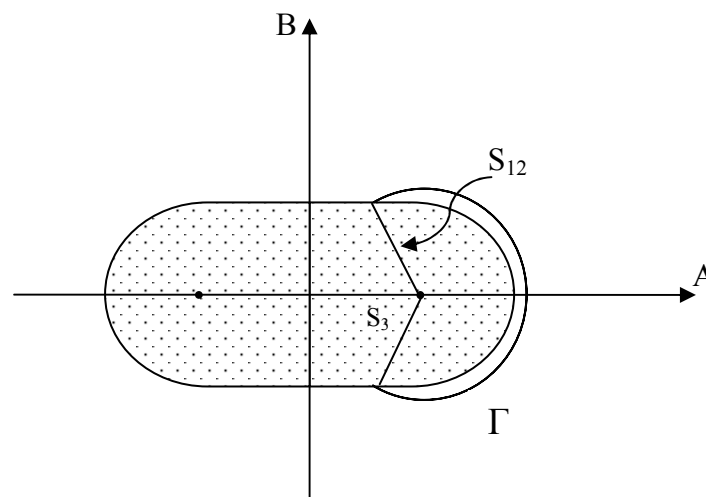


Рис.2.3.3.

При этом $S_3 = 1$, $0 \leq S_{12} - 1 \ll 1$. В этом случае $\sigma_2 = \sigma_3$. Угол φ изменяется в широком диапазоне от $-\pi/4$ до $\pi/4$, что соответствует кардинальной перестройке зон скольжения (пластических зон) от режима 1) к режиму 2).

Интеграл (2.11) по «шапочкам» - частям контура Γ , выступающим за линии $B = \pm 1$ вычислен в 1в). Вычислим этот интеграл по оставшейся части контура Γ , лежащей между линиями $B = \pm 1$. Малым параметром δ здесь является расстояние между двумя концентрическими окружностями (Рис.2.3.3): $\delta = S_{12} - 1$.

Выражения для переменных A, B в данном случае равны:

$$A = 1 + (1 + \delta) \cos 2\varphi \quad B = (1 + \delta) \sin 2\varphi$$

Выражения для пределов интегрирования по ϑ имеют вид:

$$Y_{\pm}^2 = \frac{\cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \pm \frac{\sqrt{2(1 + \cos 2\varphi)}}{(1 + \cos 2\varphi)^2} \sqrt{\delta}$$

В данном случае все компоненты e_{11}, e_{22}, e_{33} также имеют один порядок и для их вычисления необходимо использовать полные формулы (2.11).

Пределы интегрирования по φ находятся из условия пересечения прямых $B^2 = 1$ и окружности $(A-1)^2 + B^2 = S_{12}^2$,

$$\text{т.е. } \cos^2 2\varphi_{\pm} = 2\delta.$$

После интегрирования по ϑ с использованием формул (2.16), при интегрировании по φ возникает двойственная ситуация.

Разобьем интервал интегрирования на две части: окрестность пределов интегрирования, где $\cos^2 \varphi \sim O(\delta)$, и внешность этой окрестности. Оценим искомый интеграл по каждой из этих частей.

При $\cos^2 2\varphi \sim O(\delta^{1-\chi}), 0 < \chi \leq 1$ (т.е. вдали от пределов интегрирования φ_{\pm}) можно использовать формулы (2.16) и получить оценки

$$e_{11,22,33} \sim O(\delta^{3/2}) \quad (2.23)$$

Если же переменная интегрирования φ близка к пределам интегрирования φ_{\pm} , т.е. $\cos^2 \varphi \sim O(\delta)$, то можно получить

оценки: $Y_{\pm}^2 \sim \sqrt{\delta}$, $I_k \sim \delta^{k/2+5/4}$, из которых следует, что

$e_{11,22,33} \sim I_k|_{k=0} \sqrt{\delta} \sim \delta^{7/4} = o(\delta^{3/2})$. Следовательно, главной частью интеграла будет та, которая соответствует оценкам (2.23) и его значение мало изменится, если пределы интегрирования по φ формально положить такими, что $\cos^2 2\varphi_{\pm} = 0$.

Необходимая оценка выражения, входящего в (2.17):

$$A^2 a^2 - (A^2 - B^2)a + 1 - B^2 \sim -\frac{2\delta}{(1 + \cos 2\varphi)}$$

Несмотря на громоздкие выкладки, составляющие интегралов $I_1 - I_2$ из (2.17) в этом случае приводятся к компактным выражениям:

$$I_1' - I_2' \sim -2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

$$I_1'' - I_2'' \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

Отсюда следует:

$$I_1 - I_2 \sim -\frac{4}{3} \sqrt{2} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

Аналогично, несмотря на еще более громоздкие выкладки, составляющие интегралов $I_0 - 2I_1 + I_2$ из (2.18) имеют вид:

$$I_0' - 2I_1' + I_2' \sim -2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

$$I_0'' - 2I_1'' + I_2'' \sim \frac{1}{3} 2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

Суммирование составляющих дает:

$$I_0 - 2I_1 + I_2 \sim -\frac{4}{3} \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}(1 + \cos 2\varphi)^4} \delta^{3/2}$$

Общие формулы для компонент тензора скоростей пластической деформации:

$$e_{11} \sim 4 \int_0^{\pi/2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)(I_0 - 2I_1 + I_2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + (\sigma_1 - \sigma_3)(I_1 - I_2) \cos^2 \varphi \right] \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$e_{33} \sim 4 \int_0^{\pi/2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)(I_1 - I_2) \sin^2 \varphi - (\sigma_1 - \sigma_3)(I_1 - I_2) \right] \frac{d(2\varphi)}{2}$$

$$e_{22} = -(e_{11} + e_{33})$$

Но с учетом равенства $\sigma_2 = \sigma_3$ их можно существенно упростить:

$$e_{33} \sim -4 \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \int_0^{\pi/2} (I_1 - I_2) \cos^2 \varphi d(2\varphi)$$

$$e_{11} = -2e_{33} \quad e_{22} = e_{33}$$

Подставляя полученные выражения для интегралов $I_1 - I_2$ получим окончательные формулы для компонент тензора скоростей пластической деформации:

$$e_{11} = C_{13} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta \quad (2.24)$$

$$e_{33} = -C_{31} \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta$$

Коэффициенты определяются интегралами по параметру:

$$C_{13} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos \psi}}{(1 + \cos \psi)^3} d\psi$$

$$C_{31} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos \psi}}{(1 + \cos \psi)^3} d\psi$$

Приближенное вычисление интегралов дает значение $C_{13} \approx 2.10$,
 $C_{31} \approx 1.050$.

Из (2.24) видно, что и в этом случае показатель нелинейности изменился с изменением соотношений между главными напряжениями (в зависимости от этих соотношений он равнялся 2, 7/4, 2, 3/2).

2.4. Обсуждение результатов.

Таким образом, в предположении малой вязкости удалось получить явные соотношения, связывающие компоненты тензора скоростей пластической деформации и тензора напряжений. Эти выражения сходны с соотношениями упруговязкопластической модели, однако поверхностью текучести является поверхность типа Треска, а не Мизеса (как в классической теории). Также отметим факт неоднородности по напряженному состоянию показателя нелинейности функции релаксации, который принимает различные значения: 2, 7/4, 3/2. В классической теории он считается постоянным.

Выпишем полученные уравнения в сжатом виде для компоненты e_{11} :

$$e_{11} = C_1 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \quad -1 < S_3 < 1$$

$$e_{11} = C_2 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{7}{4}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, \quad S_3 \lesssim 1$$

$$e_{11} = C_3 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3, \quad S_3 = 1$$

$$e_{11} = C_4 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad S_3 > 1$$

$$e_{11} = C_5 \left\langle \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - 1 \right\rangle^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta, \quad \sigma_1 \gtrsim \sigma_2 > \sigma_3, \quad S_3 = 2$$

Коэффициенты $C_{1,2,3,4,5}$ зависят от промежуточных главных касательных напряжений.

Для сравнения выпишем классические уравнения упруговязкопластической модели в главных напряжениях для компоненты тензора скорости пластической деформации e_{11} :

$$e_{11} = \frac{2}{3} \left\langle \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2)} - 1 \right\rangle^{\kappa} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) / \eta ,$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

Как и в классическом случае, полученные выражения для тензора скоростей пластической деформации можно использовать для формулировки замкнутой системы уравнений, включающей уравнения движения сплошной среды, уравнения для тензора скоростей упругой деформации и уравнения связи между тензорами скоростей полной, упругой и пластической деформации.

2.5. Тензор скоростей деформации вязкой жидкости, тензор деформации упругого тела и теория скольжения.

Представляет интерес с помощью концепции скольжения получить выражения для тензора скоростей деформации в вязкой жидкости и тензора деформации в упругом теле.

Вязкая жидкость. Условие скольжения на выделенной плоскости с нормалью \mathbf{n} в принятых обозначениях имеет вид: $d\gamma = \tau d\Omega / \eta$. Из (2.2) в этом случае следуют выражения для главных значений тензора скорости деформации типа (2.5) :

$$e_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

$$e_{22} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

$$e_{33} = \iint_{\vartheta, \varphi} (\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi / \eta$$

В результате элементарного интегрирования получим:

$$e_{kk} = \frac{2\pi}{5} \frac{\sigma_k - p}{\eta} \quad (k = 1, 2, 3)$$

В тензорной форме это соотношение принимает стандартный вид $\mathbf{s} = \tilde{\eta} \cdot \mathbf{e}$, где \mathbf{s} - девиатор тензора напряжений, \mathbf{e} - тензор скорости деформации, $\tilde{\eta} = 5\eta / 2\pi$ - «макроскопическая» вязкость .

Упругое тело. В этом случае условия скольжения включают соотношения для векторов $d\chi$ и $d\omega$, связанных с относительными

касательными смещениями $[\mathbf{u}_\tau]$ и нормальными смещениями $[\mathbf{u}_n]$, а не скоростями, как в предыдущих случаях. Эти соотношения примем в виде

$$d\chi = \tau d\Omega / k_\tau, \quad d\omega = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} d\Omega / k_n$$

где k_τ и k_n - коэффициенты жесткости сдвиговых и нормальных связей «пружинного» типа на плоскости скольжения. Вклад этих сдвиговых и нормальных смещений в тензор деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}$ равен

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{n} \otimes (d\chi + d\omega) + (d\chi + d\omega) \otimes \mathbf{n}) / 2$$

Выражения для главных значений тензора деформаций примут вид

$$\varepsilon_{11} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_1 - \sigma_0) / k_\tau + \sigma_0 / k_n) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\varepsilon_{22} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_2 - \sigma_0) / k_\tau + \sigma_0 / k_n) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\varepsilon_{33} = \iint_{\vartheta, \varphi} ((\sigma_3 - \sigma_0) / k_\tau + \sigma_0 / k_n) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

В результате интегрирования получим:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{2\pi}{5} \left[\left(\frac{2}{3k_n} + \frac{1}{k_\tau} \right) \sigma_k - \left(\frac{1}{k_\tau} - \frac{1}{k_n} \right) p \right]$$

В классической теории упругости соответствующие уравнения имеют вид:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2\mu} \sigma_k - \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p$$

Здесь λ и μ - «макроскопические» модули упругости Ламе. Отсюда вытекают формулы связи локальных коэффициентов жесткости с модулями упругости:

$$k_n = \frac{2\pi}{3} (3\lambda + 2\mu), \quad k_\tau = \frac{2\pi}{3} \frac{2\mu}{2\mu + 5\lambda} (3\lambda + 2\mu)$$

Сделаем краткие выводы из результатов, полученных в данной главе. Для конкретного нелинейного локального условия скольжения в случае произвольного трехмерного напряженного состояния получены макроскопические уравнения сплошной среды упруговязкопластического типа. Предложенный метод интегрирования можно использовать для установления связи между локальными условиями и макроскопическими уравнениями при некоторых других условиях скольжения. Получены оценки для показателей нелинейности, входящих в нелинейные функции релаксации, описывающие зависимость от скорости деформации. Из методических соображений на основе концепции скольжения получены классические

модели вязкой жидкости и упругого тела. Это приводит к мысли, что микромеханизмы, заложенные в представления теории скольжения, носят достаточно универсальный характер и могут использоваться для построения моделей различных неупругих сред на основе знаний или гипотез об их микроструктуре.

Глава 3.

Построение модели упругопластической среды на основе теории скольжения для трехмерного напряженного состояния

В предыдущей главе концепция скольжения применена для получения уравнений, описывающих поведение упруговязкопластической среды. В этом случае в формулировке локального условия скольжения участвует единственный критерий – превышение касательным напряжением на площадке некоторого предельного уровня («локального предела текучести»). При построении упругопластической модели на основе классической концепции скольжения Батдорфа – Будянского, необходимо учитывать и «локальный критерий нагружения» - условие положительности производной от модуля касательного напряжения на площадке по параметру нагружения. Это вносит дополнительные усложнения в процедуру аналитического интегрирования пластических сдвигов по всевозможным площадкам скольжения.

В работах авторов [37,66,61,96,116], применявших концепцию скольжения для построения упругопластических моделей, интегрирование выражений для приращений тензора пластической деформации проводилось для конкретных процессов нагружения, для случаев одноосного или плоского напряженного состояний, либо численно. Произвести интегрирование по всевозможным площадкам скольжения в случае произвольного трехмерного

напряженного состояния, по-видимому, пока не удавалось. Это связано как со сложной нелинейной зависимостью области интегрирования от структуры напряженного состояния, так и с нелинейным характером условий скольжения.

В данной главе используются представления работ (Мохель, Салганик (1976) [68]; Мохель, Салганик, Христианович (1983) [69]) и рассматривается классический вариант условия скольжения с учетом «локального критерия нагружения». При определенных предположениях удается выполнить интегрирование для произвольного трехмерного напряженного состояния и получить замкнутый вариант упругопластической модели, который оказывается вариантом теории пластического течения. Показано, что при этом выполняется ассоциированный закон течения, выписана функция течения полученной модели. Предложенный метод интегрирования можно использовать для установления связи между локальными условиями и макроскопическими уравнениями и для некоторых других условий скольжения.

3.1. Условие скольжения с учетом локального критерия текучести и критерия нагружения.

Примем гипотезу о том, что в каждой точке рассматриваемой среды скольжение (пластический сдвиг) может происходить вдоль любой плоскости с нормалью \mathbf{n} , проходящей через эту точку. В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 напряженное состояние в этой точке задается

тензором напряжений σ . Вектор скольжения (пластического сдвига) γ равен относительному смещению $[u]$ вдоль выбранной плоскости. Вектор касательного напряжения τ на этой плоскости равен

$$\tau = \sigma \cdot n - (n \cdot \sigma \cdot n)n$$

Процесс нагружения будем характеризовать параметром нагружения ξ , и производную по параметру нагружения будем обозначать верхней точкой, так что, например, $d\gamma = \dot{\gamma} d\xi$. Основные допущения о характере скольжения на единичной площадке совпадают с принятыми в работах [68,69] и заключаются в следующем.

Скольжение (пластический сдвиг) происходит при выполнении критического условия $|\tau| \geq \tau_0$, или, при нормировании напряжений на τ_0 :

$|\tau| \geq 1$, а также при выполнении условия «локального нагружения»

$|\dot{\tau}| > 0$. В противном случае пластический сдвиг прекращается.

Направление приращения сдвига $\dot{\gamma}$ совпадает с направлением вектора τ , модуль приращения сдвига пропорционален приращению модуля

касательного напряжения. В дальнейшем вместо модуля касательного напряжения будем использовать значение квадрата модуля.

Рассмотрим условие скольжения на единичной площадке, удовлетворяющее принятым гипотезам, следующего вида:

$$\dot{\gamma} = c_0 \dot{\tau}^2 \tau H(\tau^2 - 1) H(\dot{\tau}^2) \quad (3.1)$$

где $H(x)$ – функция Хэвисайда, c_0 – некоторый коэффициент, являющийся параметром модели. В дальнейшем будем также использовать обозначение: $\langle F \rangle = H(F)F$. В соответствии с представлениями

теории скольжения вклад приращения сдвига $\dot{\gamma} d\xi$ вдоль площадки с нормалью \mathbf{n} в приращение тензора пластической деформации $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\xi$ равен

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{n} \otimes \dot{\gamma} + \dot{\gamma} \otimes \mathbf{n})/2 \quad (3.2)$$

Производная тензора деформации по параметру нагружения на плоскости скольжения с учетом (3.1) равна

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{c_0}{2} (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{n}) \dot{\tau}^2 H(\tau^2 - 1) H(\dot{\tau}^2) \quad (3.3)$$

Перейдем в систему координат, связанную с главными осями тензора напряжений такую, что главные значения тензора напряжений $\sigma_{1,2,3}$ удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, а ее базисные векторы образуют правую тройку. Также введем связанную с ней сферическую систему координат R, ϑ, φ (Рис. 2.2.1.) так, что компоненты единичной нормали будут равны

$$n_1 = \sin \vartheta \cos \varphi \quad n_2 = \sin \vartheta \sin \varphi \quad n_3 = \cos \vartheta$$

Интегральные компоненты тензора $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, полученные интегрированием по всевозможным площадкам скольжения с нормальными, лежащими внутри телесного угла $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, имеют вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = c_0 \iint_{\vartheta, \varphi} H(\tau^2 - 1) H(\dot{\tau}^2) \dot{\tau}^2 (\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} = c_0 \iint_{\vartheta, \varphi} H(\tau^2 - 1) H(\dot{\tau}^2) \dot{\tau}^2 (\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\dot{\varepsilon}_{33} = c_0 \iint_{\vartheta, \varphi} H(\tau^2 - 1) H(\dot{\tau}^2) \dot{\tau}^2 (\sigma_3 - \sigma_0) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (3.4)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_1 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \vartheta$.

Касательное напряжение в плоскости скольжения можно представить в виде:

$$\tau^2 = (A^2 \cos^2 \vartheta + B^2) \sin^2 \vartheta \quad (3.5)$$

Здесь, как и раньше

$$A = S_3 + S_{12} \cos 2\varphi, \quad B = S_{12} \sin 2\varphi.$$

Сохранены обозначения для главных касательных напряжений:

$$S_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2, \quad S_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2, \quad S_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2,$$

а также обозначение $S_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 + (\sigma_2 - \sigma_3)/2$ для суммы двух из

них. При этом выполняется соотношение $S_3 + S_{12} = 2S_{13} > 0$. Условия для

определения пределов интегрирования по ϑ и φ в (3.4) имеют вид:

$$\tau^2 - 1 > 0, \quad \dot{\tau}^2 > 0$$

Рассмотрим определение пределов интегрирования при этих условиях по отдельности.

3.2. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию текучести $\tau^2 - 1 > 0$.

Это условие подробно исследовано в предыдущей главе. В результате получено, что пределы интегрирования по ϑ имеют вид:

$$\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_+^2, \quad (3.6)$$

Здесь
$$Y_{\pm}^2 = \cos^2 \vartheta_{\pm} = \frac{A^2 - B^2 \pm \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2}.$$

Область допустимых значений для ϑ в плоскости A, B имеет вид, показанный на Рис.2.2.2 и представляет собой внешность заштрихованной области, которую обозначим как область Z , причем при $B^2 > 1$ предел интегрирования $Y_-^2 < 0$ и должен быть заменен на 0.

Контур Γ интегрирования по φ представляет собой часть окружности $(A - S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2$, расположенную в разрешенной (незаштрихованной) области в плоскости A, B (Рис.2.2.3).

Из соображений симметрии при определении пределов и контуров интегрирования в дальнейшем будем рассматривать только первую четверть плоскости переменных A, B ($A > 0, B > 0$).

3.3. Графо-аналитическое исследование определяющего интеграла теории скольжения по локальному критерию нагружения $\dot{\tau}^2 > 0$.

Это условие накладывает дополнительные ограничения на допустимые значения углов ϑ, φ . Для определения диапазонов интегрирования по углам ϑ, φ , преобразуем выражение для производной по параметру нагружения от квадрата касательного напряжения

$$\dot{\tau}^2 = 2(\dot{A} \cos^2 \vartheta + \dot{B}) \sin^2 \vartheta \quad \text{с помощью формул:}$$

$$\dot{A} = \dot{S}_3 + \dot{S}_{12} \cos 2\varphi = \dot{S}_3 + \dot{S}_{12} \frac{A - S_3}{S_{12}} = \frac{\dot{S}_{12}}{S_{12}} (A - A_0)$$

$$\dot{B} = \dot{S}_{12} \sin 2\varphi = \frac{\dot{S}_{12}}{S_{12}} B$$

Условие $\dot{\tau}^2 > 0$ может быть записано при $S_{12} \neq 0$ и $\dot{S}_{12} \neq 0$ в следующем виде:

$$\dot{\tau}^2 = 2 \frac{\dot{S}_{12}}{S_{12}} \left[A(A - A_0) \cos^2 \vartheta + B^2 \right] \sin^2 \vartheta > 0 \quad (3.7)$$

где $A_0 = 2(S_{13} \dot{S}_{12} - S_{12} \dot{S}_{13}) / \dot{S}_{12}$ - дополнительный комбинированный параметр, характеризующий процесс нагружения материальной частицы наряду с независимыми производными \dot{S}_{12} и \dot{S}_{13} .

Рассмотрим невырожденный случай $S_{12} \neq 0$, $\dot{S}_{12} \neq 0$. Введем обозначение:

$$Y_0^2 = \frac{B^2}{A(A_0 - A)}, \quad 0 < A < A_0. \text{ Для определения допустимых значений } \vartheta,$$

удовлетворяющих условию (3.7), необходимо рассмотреть последовательность следующих вариантов.

1. При $\dot{S}_{12} > 0$ условие (3.7) выглядит следующим образом:

$$A(A - A_0) \cos^2 \mathcal{G} + B^2 > 0 .$$

1-а. Если $A \geq A_0$, то диапазон интегрирования (3.6) не изменяется :

$$\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \mathcal{G} < Y_+^2 .$$

1-б. Если $0 < A < A_0$, то $A(A_0 - A) \cos^2 \mathcal{G} < B^2$ или $\cos^2 \mathcal{G} < Y_0^2$.

При $Y_0^2 < Y_-^2$ решения нет.

При $Y_0^2 \geq Y_-^2$ диапазон интегрирования имеет вид:

$$\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \mathcal{G} < \min[Y_0^2, Y_+^2] \quad (3.8)$$

2. При $\dot{S}_{12} < 0$ условие (3.7) выглядит следующим образом:

$$A(A - A_0) \cos^2 \mathcal{G} + B^2 < 0 .$$

2-а. Если $A \geq A_0$, то допустимых значений \mathcal{G} не существует.

2-б. Если $0 < A < A_0$, то $A(A_0 - A) \cos^2 \mathcal{G} > B^2$ или $\cos^2 \mathcal{G} > Y_0^2$.

При $Y_0^2 > Y_+^2$ решения нет.

При $Y_0^2 \leq Y_+^2$ диапазон интегрирования имеет вид:

$$\max[Y_0^2, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_+^2 \quad (3.9)$$

Интегрирование по φ должно производиться по контуру Γ в «разрешенной» части плоскости A, B (см. Рис. 2.2.3), но при этом необходимо учитывать, что на различных участках этого контура в зависимости от соотношения величин $Y_0(\varphi)$ и $Y_{\pm}(\varphi)$ пределы интегрирования по ϑ из (3.8) и (3.9) будут различны.

Определим в плоскости A, B области, в которых выполнены условия $Y_0 > Y_+$, $Y_- < Y_0 < Y_+$, $Y_0 < Y_-$. Обозначим эти области D_+ , D_0 и D_- соответственно. Для определения этих областей необходимо решить неравенства

$$\frac{B^2}{A(A_0 - A)} > \frac{A^2 - B^2 \pm \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2} \quad \text{при } A < A_0.$$

1. Сначала рассмотрим неравенство $Y_0^2 < Y_+^2$:

$$\frac{B^2}{A(A_0 - A)} < \frac{A^2 - B^2 + \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2}.$$

Его можно привести к виду

$$B^2(A_0 + A) - A^2(A_0 - A) < (A_0 - A)\sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2} \quad (3.10)$$

Необходимо рассмотреть два варианта.

$$\text{Если } B^2(A_0 + A) - A^2(A_0 - A) \leq 0 \quad \text{или} \quad B^2 \leq A^2 \frac{(A_0 - A)}{(A_0 + A)}, \quad \text{то}$$

(3.10) выполняется автоматически.

$$\text{Если } B^2(A_0 + A) - A^2(A_0 - A) > 0 \quad \text{или} \quad B^2 > A^2 \frac{(A_0 - A)}{(A_0 + A)}, \quad \text{то}$$

возведением (3.10) в квадрат можно получить биквадратное неравенство

$$A_0 B^4 - A A_0 (A_0 - A) B^2 + A (A_0 - A)^2 < 0.$$

Корни соответствующего уравнения равны:

$$B_{1,2}^2 = \left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A)$$

$$\text{Для существования решения должно быть } Discr = \frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0} > 0 \quad \text{или}$$

$$4/A_0 < A < A_0, \quad A_0 > 2.$$

Окончательно этот случай сводится к системе неравенств:

$$\left[\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A) < B^2 < \left[\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A)$$

$$B^2 > A^2 \frac{(A_0 - A)}{(A_0 + A)}, \quad 4 / A_0 < A < A_0, \quad A_0 > 2 .$$

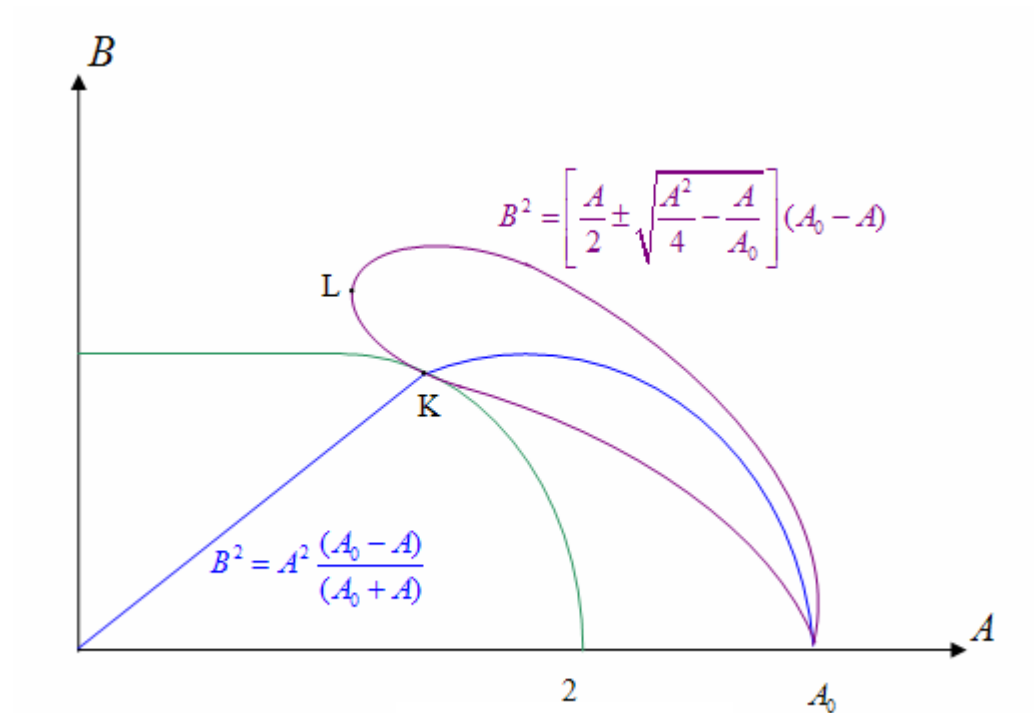


Рис. 3.3.1.

Все характерные кривые, задающие границы областей, описываемых этими неравенствами, приведены на рис.3.3.1.

Отметим удивительный факт: точка **K** $(\frac{A_0}{(A_0-1)}, \sqrt{\frac{A_0(A_0-2)}{(A_0-1)^2}})$ на плоскости A, B оказалась одновременно и точкой пересечения окружности

$B^2 = A(2-A)$ с кривой $B^2 = A^2 \frac{(A_0-A)}{(A_0+A)}$, и точкой касания этой

окружности с кривой $B^2 = \left[\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0-A)$. Самая «левая» точка

L кривых $B^2 = \left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0-A)$ имеет координаты $(\frac{4}{A_0}, \sqrt{\frac{A_0(A_0-2)}{(A_0-1)^2}})$.

2. Теперь рассмотрим неравенство $Y_0^2 > Y_-^2$.

$$\frac{B^2}{A(A_0-A)} > \frac{A^2 - B^2 - \sqrt{(A^2 + B^2)^2 - 4A^2}}{2A^2}$$

Его можно привести к виду

$$A^2(A_0-A) - B^2(A_0+A) < (A_0-A)\sqrt{(A^2+B^2)^2 - 4A^2} \quad (3.11)$$

Необходимо рассмотреть два варианта.

Если $A^2(A_0-A) - B^2(A_0+A) < 0$ или $B^2 > A^2 \frac{(A_0-A)}{(A_0+A)}$, то

(3.11) выполняется автоматически.

Если $A^2(A_0 - A) - B^2(A_0 + A) \geq 0$ или $B^2 \leq A^2 \frac{(A_0 - A)}{(A_0 + A)}$, то

возведением (3.11) в квадрат можно получить уже знакомое биквадратное неравенство с теми же самыми корнями соответствующего уравнения:

$$A_0 B^4 - A A_0 (A_0 - A) B^2 + A (A_0 - A)^2 < 0.$$

$$B_{1,2}^2 = \left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A)$$

Для существования решения должно быть $Discr = \frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0} > 0$ или

$$4/A_0 < A < A_0, \quad A_0 > 2.$$

Окончательно этот случай сводится к системе неравенств:

$$\left[\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A) < B^2 < \left[\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A)$$

$$B^2 \leq A^2 \frac{(A_0 - A)}{(A_0 + A)}, \quad 4/A_0 < A < A_0, \quad A_0 > 2.$$

Подводя итог, можно сделать следующие выводы.

При $A_0 \leq 2$ в «разрешенной» (незаштрихованной) части плоскости

A, B (Рис.3.3.1) всегда выполнено условие $Y_- < Y_+ < Y_0$. При $A_0 > 2$

расположение областей D_+ , D_0 и D_- показано на Рис.3.3.2. Область D_0

описывается следующим образом

$$\left(A/2 - \sqrt{A^2/4 - A/A_0} \right) (A_0 - A) < B^2 < \left(A/2 + \sqrt{A^2/4 - A/A_0} \right) (A_0 - A),$$

$$4/A_0 < A < A_0.$$

Она касается «запрещенной» (заштрихованной) области Z в плоскости

A, B в единственной точке $A = A_0/(A_0 - 1)$, $B^2 = A_0(A_0 - 2)/(A_0 - 1)^2$.

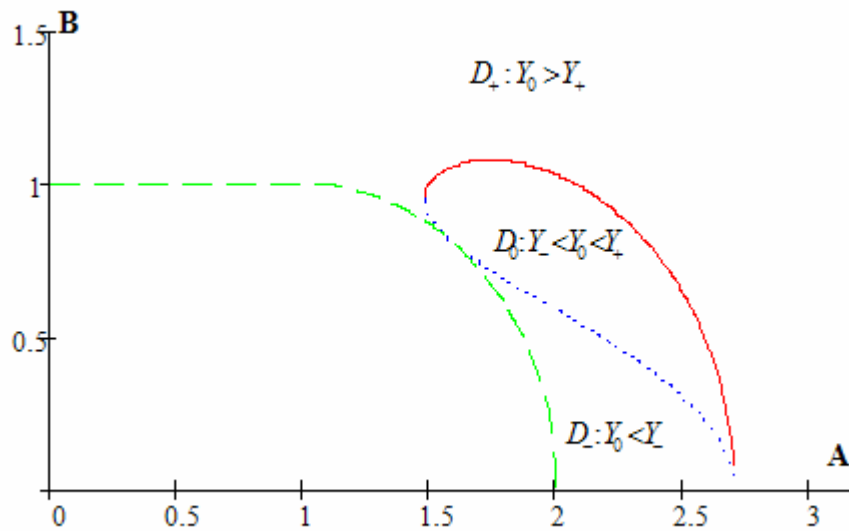


Рис.3.3.2

Обозначим часть контура Γ , принадлежащую области D_+ через Γ_+ ,
 $\Gamma_+ : \Gamma \cap D_+$; Γ_0 - часть контура Γ , принадлежащую области D_0 ; Γ_- -
 часть контура Γ , принадлежащую области D_- (Рис.3.3.3)

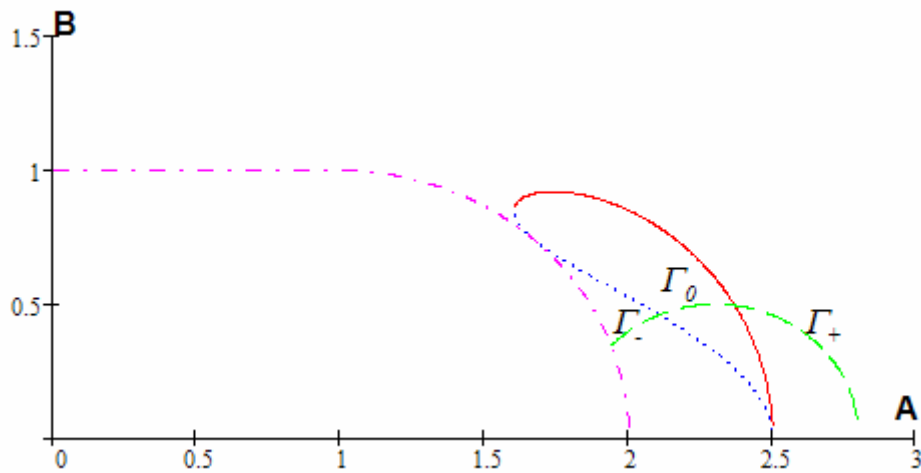


Рис.3.3.3

На различных участках Γ_0 , Γ_+ , Γ_- контура Γ в зависимости от соотношения величин $Y_0(\varphi)$, $Y_{\pm}(\varphi)$ пределы интегрирования по ϑ будут таковы:

1. При $\dot{S}_{12} > 0$ и $A_0 > 2$ на Γ_- : допустимых значений ϑ нет,

на Γ_0 : $\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_0^2$, на Γ_+ : $\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_+^2$;

2. При $\dot{S}_{12} > 0$ и $A_0 \leq 2$ на Γ : $\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_+^2$;
3. При $\dot{S}_{12} < 0$ и $A_0 > 2$ на Γ_- : $\max[0, Y_-^2] < \cos^2 \vartheta < Y_+^2$, на Γ_0 :
 $Y_0^2 < \cos^2 \vartheta < Y_+^2$, на Γ_+ : допустимых значений ϑ нет.
4. При $\dot{S}_{12} < 0$ и $A_0 \leq 2$ на Γ : допустимых значений ϑ нет.

Итак, в общем случае определены интервалы интегрирования по ϑ и φ в формулах для приращений компонент тензора пластической деформации (3.4). Интегрирование по ϑ в этих формулах производится элементарно, однако проинтегрировать по φ для произвольного расположения контура Γ , по-видимому, невозможно.

3.4. Интегрирование определяющих соотношений теории скольжения в случае малого превышения локального предела текучести максимальным касательным напряжением для трехмерного напряженного состояния $S_{13} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$.

Рассмотрим случай, когда максимальное касательное напряжение S_{13} ненамного превосходит предельное значение τ_0 (равное 1 в безразмерном варианте), $S_{13} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр, а остальные главные касательные напряжения меньше единицы, $0 < S_{12} < 1$, $0 < S_{23} < 1$. Пусть $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, тогда $1 < S_3 < 2$, $0 < S_{12} < 1$. Введем параметры k и β :

$$k = S_{12} / (1 - S_{12}) , \quad \beta = (A_0 - 2) / (2\varepsilon) \quad \text{или} \quad A_0 = 2(1 + \beta\varepsilon) .$$

Значениям параметра $k > 1$ соответствуют значения главного касательного напряжения $S_{12} > 1/2$. Значению параметра $\beta = k$ соответствует прямая

$$\dot{S}_{13} = \frac{S_{13} - 1}{S_{12}} (1 - k) \dot{S}_{12} , \quad \text{а значению } \beta = 1 \quad - \quad \text{прямая } \dot{S}_{13} = 0 \quad \text{на}$$

плоскости переменных \dot{S}_{12} и \dot{S}_{13} . В этом случае можно определить

значения углов φ_{\pm} , соответствующие точкам пересечения контура Γ с границей области D_0 - граничным точкам контура Γ_0 . Если этих точек

пересечения не существует, это значит, что весь контур Γ лежит либо в области D_+ , либо в области D_- , либо в области D_0 .

В дальнейшем покажем, что в рассматриваемом приближении $\varepsilon \ll 1$ длина контура Γ_0 мала по сравнению с длинами Γ_- и Γ_+ , и интегралом по нему в определенных условиях можно пренебречь, а область D_0 заменить ее срединной линией C_0 , задаваемой уравнением $B^2 = (A_0 - A)A/2$. Поэтому для дальнейшего анализа важно определить возможные ситуации взаимного расположения контуров C_0 и Γ .

Напомним, что контур Γ задан уравнением $B^2 = S_{12}^2 - (A - S_3^2)$.

Схематично, расположение этих контуров показано на рис. 3.4.1.

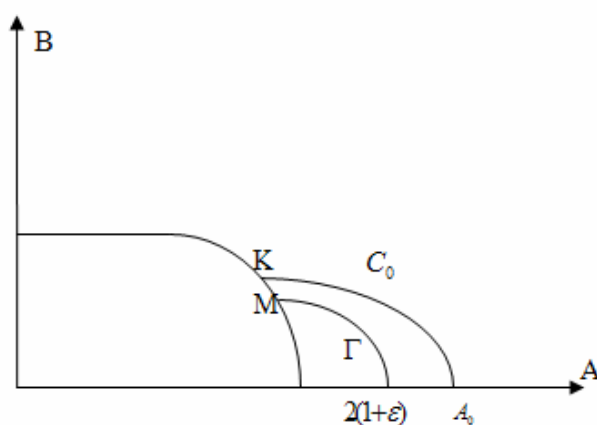


Рис.3.4.1

Найдем значения A_*, B_* - координаты точки **М** пересечения контура интегрирования Γ с границей «запрещенной» области, в рассматриваемом приближении из системы:

$$(A - S_3)^2 + B^2 = S_{12}^2$$

$$(A - 1)^2 + B^2 = 1$$

Ее решение с точностью до $o(\varepsilon)$ имеет вид:

$$A_* = 2 - 2k\varepsilon, \quad B_*^2 = 4k\varepsilon.$$

Точка $A_1 = 4 / A_0$, $B_1^2 = 2(A_0^2 - 4) / A_0^2$ - верхний конец контура C_0 определена ранее.

Варианты расположения контуров C_0 и Γ определяются возможными

комбинациями неравенств: $A_1 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} A_*$, $B_1^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} B_*^2$. Подставляя значения этих

величин, можно получить, что возможны два варианта неравенств:

$$\text{I. } A_1 < A_*, \quad B_1^2 > B_*^2 \quad \text{при} \quad A_0 > 2(1 + k\varepsilon)$$

$$\text{II. } A_1 > A_*, \quad B_1^2 < B_*^2 \quad \text{при} \quad 2 < A_0 < 2(1 + k\varepsilon).$$

Далее, взаимное расположение контуров зависит от значения параметра $k > 1$ или $k < 1$. Рассмотрим их отдельно.

Случай $k > 1$.

I-1. $A_0 > 2(1 + k\varepsilon)$. Контур Γ целиком лежит под контуром C_0 .

II-1.1. $2(1 + \varepsilon) < A_0 < 2(1 + k\varepsilon)$. Контур Γ пересекает контур C_0 .

II-1.2. $2 < A_0 < 2(1 + \varepsilon)$. Контур Γ целиком лежит над контуром C_0 .

Случай $k < 1$.

I-2.1. $A_0 > 2(1 + \varepsilon)$. Контур Γ целиком лежит под контуром C_0 .

I-2.2. $2(1 + k\varepsilon) < A_0 < 2(1 + \varepsilon)$. Контур Γ пересекает контур C_0 .

II-2. $2 < A_0 < 2(1 + k\varepsilon)$. Контур Γ целиком лежит над контуром C_0 .

Определим точки пересечения контуров для случаев II-1.1 и I-2.2.

Вначале выпишем их приближенные уравнения с учетом малого параметра.

Для контура Γ : $B^2 = S_{12}^2 - (A - S_3)^2 = (S_{12} + S_3 - A)(S_{12} - S_3 + A)$.

С учетом соотношений

$$S_{12} + S_3 = 2 + 2\varepsilon \quad \text{и} \quad S_{12} - S_3 + A \sim -2/(k+1) + 2 \sim 2k/(k+1)$$

уравнение контура в плоскости переменных A, B имеет вид:

$$B^2 = 2k / (k + 1)(2 + 2\varepsilon - A) .$$

Для контура C_0 : $B^2 = (A_0 - A)A / 2$ и приближенное уравнение имеет вид:

$$B^2 = (A_0 - A) .$$

Условие пересечения $2k / (k + 1)(2 + 2\varepsilon - A) = (A_0 - A)$ дает решение:

$$B_+^2 = 4k\varepsilon(\beta - 1) / (k - 1) .$$

Переходя к углу φ с помощью соотношения $tg 2\varphi_0 = B_+ / (A_+ - S_3)$,

получим приближенные формулы:

$$\varphi_0 \sim \frac{\sqrt{k(\beta - 1)}}{S_{12}\sqrt{k - 1}} \sqrt{\varepsilon} \quad \text{для случая II-1.1,}$$

$$\varphi_0 \sim \frac{\sqrt{k(1 - \beta)}}{S_{12}\sqrt{1 - k}} \sqrt{\varepsilon} \quad \text{для случая I-2.2.}$$

Нетрудно видеть, что, по существу, это одна и та же формула.

Также найдем угол φ_* , соответствующий точке A_*, B_* - точке пересечения контура интегрирования Γ с границей «запрещенной» области из соотношения $tg 2\varphi_* = B_* / (A_* - S_3)$. Приближенная формула будет иметь вид:

$$\varphi_* \sim \frac{\sqrt{k}}{S_{12}} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}.$$

Отметим соотношение $\varphi_0 = \frac{\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{k-1}} \varphi_*.$

Мы показали, что точки пересечения существуют при $k > 1$,
 $2(1+\varepsilon) \leq A_0 \leq 2(1+k\varepsilon), \quad (1 < \beta < k) \quad \text{и} \quad \text{при} \quad k < 1,$
 $2(1+k\varepsilon) \leq A_0 < 2(1+\varepsilon), \quad (k < \beta < 1).$

Если же мы будем искать точки пересечения контура Γ не со срединной линией C_0 , а с границами области D_0 , которые описываются

уравнениями $B^2 = \left[\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{A}{A_0}} \right] (A_0 - A),$ то в рассматриваемом

приближении они равны с точностью до величин $O(\varepsilon^{3/2})$:

$$\varphi_{\pm} = \varphi_0 \pm \Delta\varphi$$

где $\varphi_0 \sim \frac{\sqrt{k(1-\beta)}}{S_{12}\sqrt{1-k}} \sqrt{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi = \frac{\sqrt{2}\sqrt{k}(k+1)\sqrt{\beta-1}\sqrt{k-\beta}}{2S_{12}(k-1)^2} \varepsilon.$

Точка пересечения контура Γ с границей «запрещенной» области Z определяется значением $\varphi_* = \frac{\sqrt{k}}{S_{12}} \sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, интеграл по φ вдоль Γ_+ имеет пределы $[0, \varphi_-]$, вдоль Γ_0 - $[\varphi_-, \varphi_+]$, вдоль Γ_- - $[\varphi_+, \varphi_*]$. «Ширина» зоны интегрирования вдоль Γ_0 равна $2\Delta\varphi$ и имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $k \neq 1$. «Ширина» зоны интегрирования вдоль Γ_- и Γ_+ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$. Поэтому вкладом интеграла по Γ_0 с точностью до малых более высокого порядка по сравнению с интегралами по Γ_- и Γ_+ можно пренебречь при $k \neq 1$, а пределы интегрирования вдоль Γ_+ положить равными $[0, \varphi_0]$, а вдоль Γ_- - $[\varphi_0, \varphi_*]$. Фактически, это подтверждает сделанное ранее предположение, что при $k \neq 1$ мы можем заменить область D_0 ее средней линией, а контур Γ_0 при этом стянется в точку $\varphi = \varphi_0$. Однако вблизи значений параметра $k = 1$ (ширина этой полосы $|k - 1| \sim \sqrt{\varepsilon}$) пренебрегать вкладом интеграла вдоль Γ_0 нельзя. Например, при $k = 1$ весь контур Γ лежит внутри D_0 . Этот случай следует рассмотреть особо.

Рассматривая диапазон значений параметра $k > 1$ или $k < 1$, будем подразумевать, что значения параметра k находятся вне полосы $|k - 1| \sim \sqrt{\varepsilon}$.

3.5. Определение состояний активного, частичного нагружения и разгрузки.

Примем следующие определения напряженно-деформированных состояний материальной точки, сходные с теми, что были приняты в (Христианович (1974) [114]; Мохель, Салганик, Христианович (1983) [69]) :

если на всех площадках, где превышен предел текучести ($\tau^2 - 1 > 0$),

идет процесс нагружения ($\dot{\tau}^2 > 0$), то это состояние «активного

нагружения»; если на всех площадках при $\tau^2 - 1 > 0$ выполнено

условие $\dot{\tau}^2 \leq 0$, то это состояние «разгрузки»; если же на части площадок

с превышенным пределом текучести $\tau^2 - 1 > 0$ идет нагружение с

условием $\dot{\tau}^2 > 0$, а на части площадок идет разгрузка $\dot{\tau}^2 \leq 0$, то это состояние «частичной нагрузки».

Приведем окончательные результаты вычислений пределов интегрирования по \mathcal{G} и φ в зависимости от значений параметров k , \dot{S}_{12} и A_0 в соответствии с общей системой условий на переменные интегрирования \mathcal{G} и φ , описанной в пп. 1-4 в разделе 3.3.

Пределы интегрирования по \mathcal{G} там, где существуют допустимые значения φ , равны $Y_-^2 < \cos^2 \mathcal{G} < Y_+^2$. Пределы интегрирования по φ имеют следующие значения при различных значениях параметров k и A_0 .

Случай $k > 1$. Если $A_0 \geq 2(1 + k\varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ допустимых значений нет (разгрузка), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение). Если $2(1 + \varepsilon) \leq A_0 < 2(1 + k\varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $\varphi_0 < \varphi < \varphi_*$ (частичное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_0$

(частичное нагружение). Если $A_0 < 2(1 + \varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ допустимых значений нет (разгрузка).

Случай $k < 1$. Если $A_0 \geq 2(1 + \varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ допустимых значений нет (разгрузка), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение). Если $2(1 + k\varepsilon) \leq A_0 < 2(1 + \varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_0$ (частичное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $\varphi_0 < \varphi < \varphi_*$ (частичное нагружение). Если $A_0 < 2(1 + k\varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ допустимых значений нет (разгрузка).

Случай $k = 1$. Если $A_0 > 2(1 + \varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ допустимых значений нет (разгрузка), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение).

Если $A_0 = 2(1 + \varepsilon)$, то в этом единственном случае изменяются пределы интегрирования по \mathcal{G} . А именно, при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$,

$Y_-^2 < \cos^2 \mathcal{G} < Y_0^2$ (частичное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$, $Y_0^2 < \cos^2 \mathcal{G} < Y_+^2$ (частичное нагружение).

Если $A_0 < 2(1 + \varepsilon)$, то при $\dot{S}_{12} > 0$ имеем $0 < \varphi < \varphi_*$ (активное нагружение), при $\dot{S}_{12} < 0$ допустимых значений нет (разгрузка).

Граничным значениям параметра $A_0 = 2(1 + \varepsilon)$ и $A_0 = 2(1 + k\varepsilon)$ соответствуют следующие соотношения переменных \dot{S}_{12} и \dot{S}_{13} : $\dot{S}_{13} = 0$ и $\dot{S}_{13} = \frac{S_{13} - 1}{S_{12}}(1 - k)\dot{S}_{12}$.

Картину распределения зон «активного нагружения», «частичного нагружения» и «разгрузки» в плоскости переменных \dot{S}_{12} и \dot{S}_{13} можно изобразить графически.

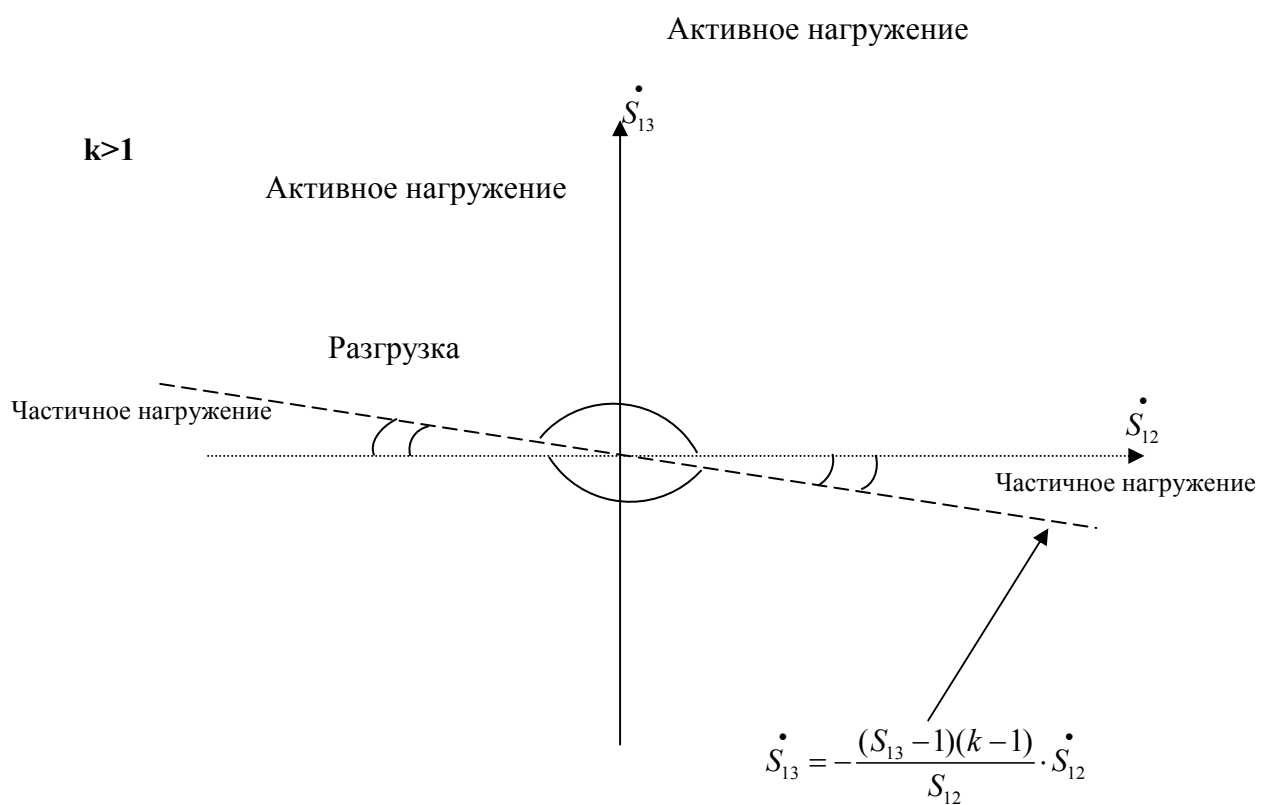


Рис.3.5.1.

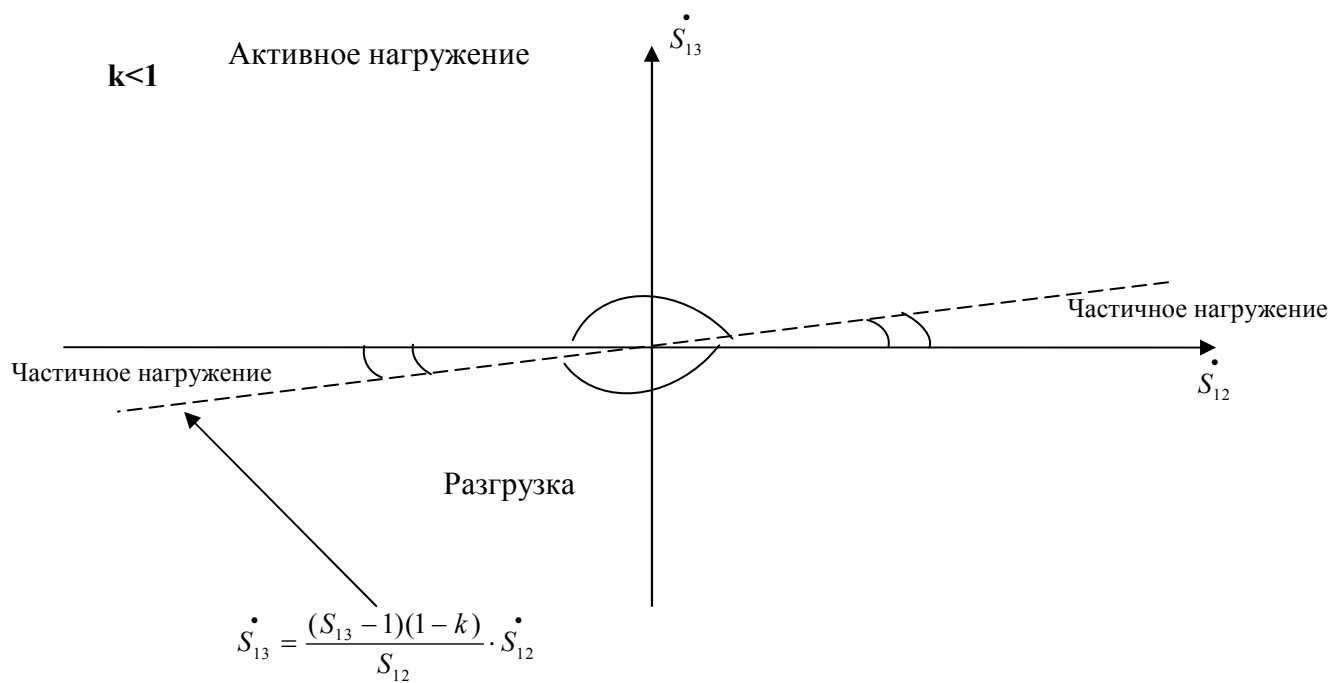


Рис.3.5.2.

При $k > 1$ она изображена на Рис. 3.5.1, при $k < 1$ - на Рис.3.5.2.

При $k = 1$ эти картины смыкаются, зона «частичного нагружения»

вырождается в линию $\dot{S}_{13} = 0$.

3.6. Результаты интегрирования и определяющие соотношения полученной теории течения.

В первой главе показано, что в рассматриваемом приближении $S_{13} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ на контуре Γ значения пределов интегрирования по \mathcal{G} можно представить в виде:

$$Y_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{(A-2) + B^2/2}) = \frac{1}{2}(1 \pm O\sqrt{\varepsilon}) .$$

Для Y_0 можно получить приближенную формулу:

$$Y_0^2 = 1/A = \frac{1}{2}(1 + O(\varepsilon)) .$$

Определив таким образом пределы интегрирования по \mathcal{G} и φ для всех рассматриваемых значений параметров, характеризующих напряженное состояние и процесс нагружения материальной частицы, можно проинтегрировать по \mathcal{G} , так как подынтегральное выражение в (3.4)

представляет собой многочлен по четным степеням $\cos \vartheta$. В полученном интеграле по φ подынтегральное выражение можно упростить, заменив тригонометрические функции первыми членами их разложений $\sin \varphi \sim \varphi$ и $\cos \varphi \sim 1 - \varphi^2 / 2$, поскольку φ меняется в узком диапазоне $0 < \varphi < \varphi_*$, $\varphi_* \sim \sqrt{\varepsilon}$.

Перепишем формулы (3.4) с учетом того факта, что подынтегральные выражения, при малых φ с точностью до второго члена разложения равны:

$$(\sigma_1 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sim 2 \left[S_{13} (\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) (1 - \varphi^2) + S_{12} (1 - 2 \cos^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta) \varphi^2 \right]$$

$$(\sigma_2 - \sigma_0) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \sim 2 \left[S_{13} (\cos^2 \vartheta - \cos^4 \vartheta) \varphi^2 - S_{12} (1 - \cos^2 \vartheta) \varphi^2 \right]$$

Также упростим выражение для $\dot{\tau}^2 = 2(A \dot{A} \cos^2 \vartheta + B \dot{B}) \sin^2 \vartheta$ в том же приближении:

$$\dot{\tau}^2 = 2 \sin^2 \vartheta \left[(S_3 + S_{12} \cos 2\varphi) (\dot{S}_3 + \dot{S}_{12} \cos 2\varphi) \cos^2 \vartheta + S_{12} \dot{S}_{12} \sin^2 2\varphi \right]$$

При $\sin 2\varphi \sim 2\varphi$, $\cos 2\varphi \sim 1 - 2\varphi^2$ и $S_3 + S_{12} = 2S_{13}$ получим:

$$\dot{\tau}^2 \sim 8 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (S_{13} - S_{12} \varphi^2) \dot{S}_{13} + 8 \sin^2 \vartheta (S_{12} - S_{13} \cos^2 \vartheta) \varphi^2 \dot{S}_{12}$$

Выражения (3.4) для приращений компонент тензора пластической деформации приобретут вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} \sim 16c_0 \iint_{\vartheta, \varphi} \left[\cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta S_{13}^2 \dot{S}_{13} + (\cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta S_{12} S_{13} - \cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta S_{13}^2) \varphi^2 \dot{S}_{12} \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (3.12)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} \sim 16c_0 \iint_{\vartheta, \varphi} \left[\cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta S_{13}^2 - \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta S_{12} S_{13} \right] \varphi^2 \dot{S}_{13} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

Теперь необходимо вычислить интегралы

$$J_1 = \int_{\vartheta} \cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

$$J_2 = \int_{\vartheta} \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

Вычисляем по формулам (2.15), учитывая только первый член разложения

по малому параметру при $Y_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 \pm \frac{\sqrt{\alpha + \delta^2/2}}{2} \right),$

где $\alpha = A - 2, \delta = B:$

$$J_1 = 2 \int_{Y_-}^{Y_+} (\cos^4 \vartheta - 2 \cos^6 \vartheta + \cos^8 \vartheta) d(\cos \vartheta) = 2 \left(\frac{y^5}{5} - 2 \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} \right)_{Y_-}^{Y_+}$$

$$J_1 \sim 2 \frac{1}{2^{9/2}} \sqrt{\alpha + \delta^2 / 2} = \frac{\sqrt{2\alpha + \delta^2}}{16} = \frac{\sqrt{2(A-2) + B^2}}{16}$$

Аналогично:

$$J_2 = 2 \int_{Y_-}^{Y_+} (\cos^2 \vartheta - 2 \cos^4 \vartheta + \cos^6 \vartheta) d(\cos \vartheta) = 2 \left(\frac{y^3}{3} - 2 \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} \right)_{Y_-}^{Y_+}$$

$$J_2 \sim 2 \frac{1}{2^{7/2}} \sqrt{\alpha + \delta^2 / 2} = \frac{\sqrt{2\alpha + \delta^2}}{8} = \frac{\sqrt{2(A-2) + B^2}}{8}$$

Отсюда получаем выражения для компонент приращений тензора пластических деформаций, проинтегрированные по ϑ :

$$\dot{\varepsilon}_{11} \sim c_0 \int_{\varphi} \left[S_{13}^2 \dot{S}_{13} + (2S_{12}S_{13} - S_{13}^2) \varphi^2 \dot{S}_{12} \right] \sqrt{2(A-2) + B^2} d\varphi \quad (3.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} \sim c_0 \int_{\varphi} \left[S_{13}^2 - 2S_{12}S_{13} \right] \varphi^2 \dot{S}_{13} \sqrt{2(A-2) + B^2} d\varphi$$

Выражение $\sqrt{2(A-2) + B^2}$ в рассматриваемом приближении с использованием переменной $\gamma = 2\varphi$ равно:

$$2(A-2) + B^2 = 2(S_{13} + S_{12} \cos \gamma - 2 + S_{12}^2 \sin^2 \gamma) \sim 4\varepsilon - S_{12}(1 - S_{12})\gamma^2 = S_{12}(1 - S_{12})(\gamma_*^2 - \gamma^2)$$

где $\gamma_*^2 = \frac{4\varepsilon}{S_{12}(1-S_{12})}$. Отсюда следует связь ранее найденных пределов

интегрирования по φ с введенной переменной:

$$\gamma_* = 2\varphi_*, \quad \gamma_0 = 2\varphi_0 = \frac{\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{k-1}} \gamma_*.$$

Теперь можно вычислить интегралы по φ , входящие в (3.13):

$$\Phi_1 \sim \int_{\varphi} \sqrt{2(A-2)+B^2} d\varphi = \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} \int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} d\gamma$$

$$\Phi_2 \sim \int_{\varphi} \sqrt{2(A-2)+B^2} \varphi^2 d\varphi = \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{8} \int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \gamma^2 d\gamma$$

Элементарные интегралы берутся с помощью тригонометрической замены

переменных $\gamma = \gamma_* \sin t$, $d\gamma = \gamma_* \cos t dt$.

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} d\gamma = \gamma_*^2 \int \cos^2 t dt = \frac{\gamma_*^2}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{\gamma_*^2}{2} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2}$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \gamma^2 d\gamma = \frac{\gamma_*^4}{8} (t - \sin t \cos t (1 - 2 \sin^2 t)) = \frac{\gamma_*^4}{8} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} - \frac{\gamma}{8} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma^2)$$

В качестве пределов интегрирования в этих интегралах будут выступать

пары значений $[0, \gamma_*]$ для режима активного нагружения, $[0, \gamma_0]$ или

$[\gamma_0, \gamma_*]$ для режима частичного нагружения, например, для активного нагружения:

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^2}{2} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \right) \Big|_0^{\gamma_*} = \frac{\pi}{2} \gamma_*^2 = \frac{\pi}{2} \frac{4(S_{13} - 1)}{S_{12}(1 - S_{12})}$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \gamma^2 d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^4}{8} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} - \frac{\gamma}{8} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma^2) \right) \Big|_0^{\gamma_*} = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma_*^4}{4} = \frac{\pi}{2} \frac{4(S_{13} - 1)^2}{S_{12}^2 (1 - S_{12})^2}$$

И, следовательно:

$$\Phi_1 \sim \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1 - S_{12})}}{2} \frac{4(S_{13} - 1)}{S_{12}(1 - S_{12})}$$

$$\Phi_2 \sim \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1 - S_{12})}}{2} \frac{(S_{13} - 1)^2}{S_{12}^2 (1 - S_{12})^2}$$

В результате выражения для производных от компонент тензора пластической деформации по параметру нагружения для активного нагружения примут вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} \sim c_0 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} \left(\frac{4(S_{13}-1)}{S_{12}(1-S_{12})} \dot{S}_{13} + (2S_{12}-1) \frac{(S_{13}-1)^2}{S_{12}^2(1-S_{12})^2} \dot{S}_{12} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{22} \sim -c_0 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} (2S_{12}-1) \frac{(S_{13}-1)^2}{S_{12}^2(1-S_{12})^2} \dot{S}_{13}$$

$$\dot{\varepsilon}_{33} = -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22})$$

Для режима частичного нагружения:

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^2}{2} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \right) \Big|_0^{\gamma_0} = \gamma_*^2 \arcsin \frac{\gamma_0}{\gamma_*} + \gamma_0 \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma_0^2}$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \gamma^2 d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^4}{8} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} - \frac{\gamma}{8} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma^2) \right) \Big|_0^{\gamma_0} = \frac{\gamma_*^4}{4} \arcsin \frac{\gamma_0}{\gamma_*} - \frac{\gamma_0}{4} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma_0^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma_0^2)$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^2}{2} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \right) \Big|_{\gamma_0}^{\gamma_*} = \gamma_*^2 \arccos \frac{\gamma_0}{\gamma_*} - \gamma_0 \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma_0^2}$$

$$\int_{\gamma} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} \gamma^2 d\gamma = 2 \left(\frac{\gamma_*^4}{8} \arcsin \frac{\gamma}{\gamma_*} - \frac{\gamma}{8} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma^2) \right) \Big|_{\gamma_0}^{\gamma_*} = \frac{\gamma_*^4}{4} \arccos \frac{\gamma_0}{\gamma_*} + \frac{\gamma_0}{4} \sqrt{\gamma_*^2 - \gamma_0^2} (\gamma_*^2 - 2\gamma_0^2)$$

Окончательно, в компактной записи получим:

В зоне «активного нагружения»

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{11} &= c_0 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} \left(E_{13} \dot{S}_{13} + E_{12} \dot{S}_{12} \right) \\
 \dot{\varepsilon}_{22} &= c_0 \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} D_{13} \dot{S}_{13} \\
 \dot{\varepsilon}_{33} &= -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22})
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

В зоне «частичного нагружения»

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_{11} &= c_0 \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} \left(d_{13} E_{13} \dot{S}_{13} + d_{12} E_{12} \dot{S}_{12} \right) \\
 \dot{\varepsilon}_{22} &= c_0 \frac{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}}{2} d_{13} D_{13} \dot{S}_{13} \\
 \dot{\varepsilon}_{33} &= -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22})
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь коэффициенты E_{13}, E_{12}, D_{13} равны:

$$E_{13} = 4 \frac{(S_{13} - 1)}{S_{12}(1 - S_{12})} ,$$

$$E_{12} = \frac{(2S_{12} - 1)(S_{13} - 1)^2}{S_{12}^2(1 - S_{12})^2}, \quad D_{13} = -E_{12}$$

а коэффициенты d_{13}, d_{12} зависят от значений \dot{S}_{12}, k, β :

при $\dot{S}_{12} > 0, k > 1, 1 < \beta < k$:

$$d_{13} = \arccos \sqrt{\frac{\beta - 1}{k - 1}} - \frac{\sqrt{(\beta - 1)(k - \beta)}}{k - 1},$$

$$d_{12} = \arccos \sqrt{\frac{\beta - 1}{k - 1}} + \frac{\sqrt{(\beta - 1)(k - \beta)}}{k - 1} \frac{(k + 1 - 2\beta)}{k - 1}$$

при $\dot{S}_{12} > 0, k < 1, k < \beta < 1$:

$$d_{13} = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 - k}} + \frac{\sqrt{(1 - \beta)(\beta - k)}}{1 - k},$$

$$d_{12} = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 - k}} - \frac{\sqrt{(1 - \beta)(\beta - k)}}{1 - k} \frac{(2\beta - k - 1)}{1 - k}.$$

при $\dot{S}_{12} < 0, k > 1, 1 < \beta < k$:

$$d_{13} = \arccos \sqrt{\frac{\beta - 1}{k - 1}} + \frac{\sqrt{(\beta - 1)(k - \beta)}}{k - 1},$$

$$d_{12} = \arcsin \sqrt{\frac{\beta - 1}{k - 1}} - \frac{\sqrt{(\beta - 1)(k - \beta)}}{k - 1} \frac{(k + 1 - 2\beta)}{k - 1}.$$

при $\dot{S}_{12} < 0$, $k < 1$, $k < \beta < 1$:

$$d_{13} = \arccos \sqrt{\frac{1-\beta}{1-k}} - \frac{\sqrt{(1-\beta)(\beta-k)}}{1-k},$$

$$d_{12} = \arccos \sqrt{\frac{1-\beta}{1-k}} + \frac{\sqrt{(1-\beta)(\beta-k)}}{1-k} \frac{(2\beta-k-1)}{1-k}.$$

при $k = 1$: $d_{13} = d_{12} = \pi/4$.

Таким образом, формулы (3.14) описывают основные определяющие макроскопические соотношения полученной упругопластической модели.

Формулы (3.15) описывают пластическое деформирование в переходной зоне от «активного нагружения» к «разгрузке», заключенной между прямыми

$$\dot{S}_{13} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{S}_{13} = \frac{S_{13}-1}{S_{12}}(1-k)\dot{S}_{12} \quad \text{в плоскости переменных } \dot{S}_{12} \quad \text{и}$$

\dot{S}_{13} - зоне «частичного нагружения».

3.7. Интегрирование вырожденных случаев $\dot{S}_{12} = 0$ и $S_{12} = 0$.

Рассмотрим случай $S_{12} \neq 0$, $\dot{S}_{12} = 0$. В этом случае условие $\dot{\tau}^2 > 0$ эквивалентно условию нагружения $\dot{S}_{13} > 0$. В рассматриваемом приближении вычисление производных от компонент тензора пластической деформации приводит к результату, совпадающему с формулами (3.14), соответствующими состоянию «активного нагружения», в которых достаточно положить $\dot{S}_{12} = 0$. При $\dot{S}_{13} \leq 0$ происходит «разгрузка».

Рассмотрим случай $S_{12} = 0$, $\dot{S}_{12} \geq 0$. Пределы интегрирования по ϑ и φ вычисляются значительно проще, чем в случае сложного напряженного состояния ($S_{12} \neq 0$). Условие

$$\tau^2 - 1 = S_{13}^2 \sin^2 2\vartheta - 1 > 0$$

выполняется для значений ϑ , для которых выполнено условие

$\sin^2 2\vartheta > 1/S_{13}^2$. Условие $\dot{\tau}^2 > 0$ можно переписать в виде

$$\dot{\tau}^2 = 2S_{13}(\dot{S}_{13} - \dot{S}_{12} \sin^2 \varphi) \sin^2 2\vartheta > 0.$$

Из него следует, что при $\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12} > 1$ оно выполнено при любых φ для всех допустимых значений \mathcal{G} (состояние «активного нагружения»).

При $0 < \dot{S}_{13}/\dot{S}_{12} \leq 1$ условие $\dot{\tau}^2 > 0$ выполняется при значениях φ таких, что $\sin^2 \varphi < \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}}$ (состояние «частичного нагружения»).

При $\dot{S}_{13} \leq 0$ происходит разгрузка.

Вычисление интегралов (3.4) с учетом определенных пределов интегрирования в приближении $S_{13} = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ дает следующий результат. В зоне «активного нагружения» $\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12} > 1$:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11} &= c_0 \frac{\pi}{2} E_{11} \left(\dot{S}_{13} - \frac{1}{4} \dot{S}_{12} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= c_0 \frac{\pi}{2} E_{33} \left(\dot{S}_{13} - \frac{1}{2} \dot{S}_{12} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{33})\end{aligned}\tag{3.16}$$

Здесь приняты обозначения для коэффициентов:

$$E_{11} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{S_{13}-1}}{\sqrt{S_{13}}\sqrt{S_{13}+1}} \quad , \quad E_{33} = -2E_{11} \quad .$$

В зоне «частичного нагружения» $0 < \dot{S}_{13}/\dot{S}_{12} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= c_0 E_{11} \left(f_{13} \dot{S}_{13} - \frac{1}{4} f_{12} \dot{S}_{12} \right) \quad , \\ \dot{\varepsilon}_{33} &= c_0 E_{33} \left(g_{13} \dot{S}_{13} - \frac{1}{2} g_{12} \dot{S}_{12} \right) \quad , \\ \dot{\varepsilon}_{22} &= -(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{33}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Коэффициенты $f_{13,12}$ и $g_{13,12}$ равны:

$$\begin{aligned} f_{13} &= \arcsin \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} + \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \sqrt{1 - \dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \quad , \\ f_{12} &= \arcsin \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} - \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \sqrt{1 - \dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} (1 - 2\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}) \quad , \\ g_{13} &= \arcsin \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \quad , \\ g_{12} &= \arcsin \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} - \sqrt{\dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \sqrt{1 - \dot{S}_{13}/\dot{S}_{12}} \end{aligned}$$

Важный случай одноосного растяжения - сжатия вдоль оси x_3 описывается

формулами (3.16-3.17), в которых формально следует положить $\dot{S}_{12} = 0$.

3.8. Сопоставление с классической теорией течения.

Полученные макроскопические соотношения (3.14) представляют собой вариант теории течения для упругопластического тела. Условие текучести $F(\sigma_{ij}) = 0$ в рассматриваемом случае совпало с условием текучести Треска ($S_{13} - 1 = 0$). Эти соотношения не являются уравнениями теории течения идеально-пластического тела, так как допускают выход напряжений за предел текучести $F(\sigma_{ij}) > 0$. Однако они не являются и уравнениями теории упругопластического течения с упрочнением, так как в них явно не описан механизм изменения функции текучести в зависимости от параметра упрочнения χ : $F(\sigma_{ij}, \chi) = 0$. Это объясняется тем, что и в исходное условие скольжения (3.1) механизм изменения («упрочнения») локального предела текучести τ_0 не заложен. Однако, если ввести функцию текучести

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{S_{13} - 1}{\sqrt[4]{S_{12}(1 - S_{12})}}$$

и ее же принять за пластический потенциал, а также функцию

$h^p = c_0 \pi(S_{13} - 1)$, то нетрудно проверить, что уравнения пластического течения (3.14) получаются формальным применением ассоциированного закона пластического течения с упрочнением [41]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = h^p \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} > 0, \quad F > 0.$$

Действительно, с главными значениями в качестве аргументов эта формула

будет выглядеть следующим образом: $\dot{\varepsilon}_i = h^p \frac{\partial F}{\partial \sigma_i} \frac{\partial F}{\partial \sigma_k} \dot{\sigma}_k$.

Предполагая $F = F(S_{12}, S_{13})$, перейдем к главным касательным напряжениям в качестве аргументов функции текучести:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial S_{12}} + \frac{\partial F}{\partial S_{13}} \right), \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial S_{12}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial S_{13}}$$

Ассоциированный закон течения в этих переменных примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} h^p \left(\frac{\partial F}{\partial S_{12}} + \frac{\partial F}{\partial S_{13}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial S_{13}} \dot{S}_{13} + \frac{\partial F}{\partial S_{12}} \dot{S}_{12} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2} h^p \frac{\partial F}{\partial S_{12}} \left(\frac{\partial F}{\partial S_{13}} \dot{S}_{13} + \frac{\partial F}{\partial S_{12}} \dot{S}_{12} \right)$$

Для выбранной функции течения:

$$\frac{\partial F}{\partial S_{13}} = \frac{1}{\sqrt[4]{S_{12}(1-S_{12})}} \sim O(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_{12}} = \frac{1}{4} \frac{(S_{13}-1)(2S_{12}-1)}{\sqrt[4]{S_{12}(1-S_{12})} S_{12}(1-S_{12})} \sim O(\varepsilon).$$

Поэтому с точностью до величин $O(\varepsilon^2)$ имеем:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} h^p \left(\left(\frac{\partial F}{\partial S_{13}} \right)^2 \dot{S}_{13} + \left(\frac{\partial F}{\partial S_{12}} \frac{\partial F}{\partial S_{13}} \right) \dot{S}_{12} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2} h^p \frac{\partial F}{\partial S_{12}} \frac{\partial F}{\partial S_{13}} \dot{S}_{13}$$

Подставляя значения производных, получим:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} h^p \left(\frac{1}{\sqrt{S_{12}(1-S_{12})}} \dot{S}_{13} + \frac{(S_{13}-1)(2S_{12}-1)}{4\sqrt{S_{12}(1-S_{12})} S_{12}(1-S_{12})} \dot{S}_{12} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{2} h^p \frac{(S_{13} - 1)(2S_{12} - 1)}{4\sqrt{S_{12}(1 - S_{12})} S_{12}(1 - S_{12})} \dot{S}_{13}.$$

При $h^p = c_0 \pi (S_{13} - 1)$ эти выражения совпадают с формулами (3.14) для активного нагружения.

Отметим, что некоторый механизм явного учета эффекта упрочнения при повторном нагружении, близкий к описанному в работе (Мохель, Салганик, Христианович (1983) [69]), можно предложить в следующем виде. После окончания процесса пластического нагружения, описываемого формулами (3.14)-(3.15) и перехода к разгрузке, достигнутое значение максимального касательного напряжения S_{13} принимается за новый локальный предел текучести τ_0 , и повторное пластическое нагружение будет начинаться по достижении максимальным касательным напряжением именно этого уровня.

Формулы (3.16)-(3.17), относящиеся к случаю $S_{12} = 0$, описывают течение материала вблизи угловой точки поверхности текучести Треска, где неприменимы формулы (3.14)-(3.15). Можно отметить, что производные компонентов тензора пластической деформации имеют более низкий порядок

по малому параметру $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{S_{13} - 1}$ (коэффициенты E_{11} , E_{33}), чем в

регулярном случае (3.14)-(3.15), где коэффициент E_{13} при \dot{S}_{13} имеет порядок $\varepsilon = S_{13} - 1$, а коэффициент E_{12} при \dot{S}_{12} имеет порядок $\varepsilon^2 = (S_{13} - 1)^2$. Это обстоятельство указывает на существенную зависимость приращений пластической деформации от структуры напряженного состояния при переходе с одной грани пирамиды Треска на другую через угловую точку.

В заключение отметим, что в рамках теории скольжения Батдорфа-Будянского для конкретного условия скольжения (3.1) в явной форме определены значения углов, задающих ориентацию нормалей к площадкам, где реализуются пластические сдвиги. В предположении, что максимальное касательное напряжение мало превышает предел текучести, проинтегрированы классические соотношения теории скольжения для приращений тензора пластической деформации в случае трехмерного неравнокомпонентного напряженного состояния материальной частицы. Получены макроскопические уравнения теории пластического течения, соответствующие выбранному локальному условию скольжения. Предложенный метод получения макроскопических моделей может быть применен и для других условий скольжения.

Глава 4.

Определяющие соотношения для слоистых и блочных сред с учетом проскальзывания и отслоения. Алгоритм расчета полученных систем уравнений.

В данной главе построены континуальные динамические модели деформирования слоистой и блочной сред с учетом проскальзывания, трения и отслоения на контактных границах слоев или блоков. Эти модели основаны на представлениях теории скольжения Батдорфа-Будянского, хотя формальное их обоснование возможно с помощью теории осреднения периодических структур [6,90,106]. Определяющие соотношения для слоистых сред с линейными контактными условиями на межслойных границах предложены и обоснованы в [73,75].

Предполагается, что в слоистой среде упругие слои в прижатом состоянии могут проскальзывать относительно друг друга с трением, а растягивающих напряжений контактные границы не выдерживают – происходит отслоение.

Под блочной средой понимается регулярная структура, состоящая из равномерно уложенных упругих «кубиков» («параллелепипедов»), подверженных воздействию поверхностных или объемных нагрузок. На контактных границах также возможно проскальзывание с трением или отслоение. Таким образом, блочная среда трактуется как среда, обладающая

три взаимно перпендикулярными плоскостями возможного скольжения-отслоения с заданными локальными контактными условиями на каждой из них.

Также рассматривается структура типа «кирпичной кладки». Ее отличие от рассматриваемой блочной среды в том, что одна из плоскостей скольжения-отслоения является плоскостью только возможного отслоения (скольжение на ней невозможно из-за структурного нахлеста «кубиков» - «кирпичей»).

Основное условие, которое позволяет построить континуальные модели рассматриваемых дискретных структур, состоит в том, что размер слоя или блока ε должен быть много меньше пространственного размера L рассматриваемой слоистой или блочной структуры (или массива), $\varepsilon \ll L$.

Полученные реологические уравнения похожи на уравнения анизотропной теории упруговязкопластичности. Линейный дифференциальный оператор этих уравнений совпадает с оператором теории упругости, а нелинейные эффекты трения (сухого или вязкого) учтены в недифференциальных членах с малым параметром в знаменателе, аналогичных членам вязкопластической деформации.

Предложен явно- неявный численный метод для расчета полученной системы уравнений, который использует неявную аппроксимацию упомянутых выше недифференциальных членов с малым параметром в знаменателе, описывающих трение на контактных границах. Из этой аппроксимации аналитически обосновывается пошаговая процедура коррекции напряжений с учетом выбранного локального условия трения, которая аналогична известному методу корректировки напряжений Уилкинса в теории пластичности [112].

4.1. Нелинейные условия взаимодействия контактных границ структурных элементов.

В декартовой прямоугольной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) рассмотрим безграничную упругую среду с ориентированной системой периодически повторяющихся параллельных плоскостей скольжения. Ориентацию этой системы зададим единичной нормалью \mathbf{n} . Расстояние между плоскостями скольжения постоянно и равно ε . Плотность материала ρ , а также модули упругости Ламе λ и μ считаются заданными константами. Напряженное состояние описывается тензором напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. Вектор касательного напряжения на плоскости скольжения равен $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, нормальное напряжение равно $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Введем векторы скоростей сдвига $\boldsymbol{\gamma}$ и отрыва $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$, определяемые скачками касательной $[V_\tau]$ и нормальной $[V_n]$ скоростей на контактных границах:

$$\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{V}_\tau] / \varepsilon, \quad \omega = [V_n] / \varepsilon$$

С точки зрения теории осреднения полные скорости частиц среды \mathbf{V} связаны со средними или «макроскопическими» скоростями \mathbf{v} соотношением: $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \varepsilon(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\omega}) + o(\varepsilon)$.

Условия контактного взаимодействия имеют следующий вид. Скольжение с трением имеет место при $\sigma_n < 0$:

$$\tau = q|\sigma_n|(\gamma/|\gamma| + \eta\gamma) \quad \text{при} \quad |\tau| \geq q|\sigma_n|, \quad \omega = 0$$

$$\gamma = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| < q|\sigma_n|, \quad \omega = 0$$

Отслоение происходит при $\Omega \geq 0$:

$$\tau = \sigma_n = 0$$

Здесь $\Omega = [u_n]/\varepsilon$ - нормированный скачок нормальных смещений на контактной границе, определяемый уравнением $\dot{\Omega} = \omega$, где q - коэффициент сухого трения, η - коэффициент вязкого трения. В дальнейшем будем использовать функцию Хевисайда $H(x)$ ($H(x) = 0$ при $x < 0$, $H(x) = 1$ при $x \geq 0$), а также обозначение $\langle F \rangle = F(x)H(F(x))$, принятое в теории упруговязкопластичности.

Контактную плоскость с указанными условиями взаимодействия будем называть плоскостью скольжения-отслоения.

Рассматриваемые условия скольжения представляют собой нелинейные условия сухого трения с добавкой вязкого трения, которая предполагается малой и играет, в основном, роль регуляризатора.

В этом случае условие скольжения можно явно разрешить относительно скорости сдвига γ :

$$\gamma = \langle |\tau|/(q|\sigma_n|) - 1 \rangle \tau / (\eta|\tau|)$$

4.2. Построение континуальной модели слоистой среды на основе дискретного варианта теории скольжения.

В среде, состоящей из упругих слоев, имеется единственная система плоскостей скольжения-отслоения с нормалью \mathbf{n} , ее структура схематически в двумерном варианте показана на Рис.4.2.1. На границах слоев выполняются выбранные контактные условия.



Рис.4.2.1.

Для того чтобы перейти к континуальной модели слоистой среды, будем рассматривать γ и ω как непрерывные функции координат и времени, имеющие смысл распределенных скоростей скольжений и отслоений, и воспользуемся соотношениями теории скольжения, которая применялась многими авторами для построения моделей неупругих сред с непрерывным распределением плоскостей скольжения [37,39,61,66,69,96,116]. Эти

соотношения позволяют учитывать вклад скоростей скольжений $\boldsymbol{\gamma}$ и отслоений $\boldsymbol{\omega}$ в тензоры скоростей неупругой деформации \mathbf{e}^γ и \mathbf{e}^ω соответственно:

$$\mathbf{e}^\gamma = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n}) / 2$$

$$\mathbf{e}^\omega = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{n}) / 2 = \omega \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

Полный тензор скоростей деформации \mathbf{e} получается сложением всех упругих и неупругих составляющих и равен:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^\gamma + \mathbf{e}^\omega$$

$$\mathbf{e} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) / 2$$

Здесь \mathbf{V} - «макроскопическая» скорость частиц среды, \mathbf{e}^e - тензор скоростей упругой деформации, который связан с тензором напряжений законом Гука:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\mathbf{e}^e : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}^e$$

Сквозные условия для $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\omega}$, соответствующие локальным контактным условиям, имеют вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \langle |\boldsymbol{\tau}| / (q |\sigma_n|) - 1 \rangle \boldsymbol{\tau} / (\eta |\boldsymbol{\tau}|), \quad \omega = 0 \quad \text{при } \sigma_n < 0$$

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma_n = 0 \quad \text{при } \Omega \geq 0$$

Система замыкается уравнениями движения:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Полученную систему уравнений необходимо дополнить условиями на границе Γ области, занимаемой средой: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = \mathbf{f}_{\Gamma}$ или $\mathbf{v}|_{\Gamma} = \mathbf{v}_{\Gamma}$, а также начальными условиями для искомых функций при $t = 0$: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} = 0$. Напишем эту систему в покомпонентном виде:

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j} \quad (4.1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \delta_{ij} (v_{k,k} - \omega) + \mu [v_{i,j} + v_{j,i} - 2\omega n_i n_j - (n_i \gamma_j + n_j \gamma_i)]$$

На плоскости скольжения-отслоения:

$$\gamma_i = \langle |\boldsymbol{\tau}| / (q |\sigma_n|) - 1 \rangle \tau_i / (\eta |\boldsymbol{\tau}|), \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_n < 0$$

$$\sigma_n = \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \Omega \geq 0 \quad (4.2)$$

Здесь $\sigma_n = \sigma_{kl} n_k n_l$, $\tau_i = \sigma_{ik} n_k - \sigma_{kl} n_k n_l n_i$, v_i и σ_{ij} - компоненты вектора скорости и тензора напряжений.

Если направление нормали к плоскости скольжения-отслоения совпадает с направлением оси x_2 принятой системы координат, то для нормали будет справедливо соотношение $n_j = \delta_j^2$, где δ_j^i - символ Кронекера.

Используя ступенчатые функции $\tilde{H}(x) = 1 - H(-x)$ в случае $n_j = \delta_j^2$, систему уравнений (4.1)-(4.2) можно записать в более наглядном виде, явно выделяя уравнения для каждой искомой функции:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} v_i &= \sigma_{ij,j} \\
 \dot{\sigma}_{ii} &= \lambda v_{k,k} + 2\mu v_{i,i} - \lambda \omega \\
 \dot{\sigma}_{22} &= (\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{2,2}) \tilde{H}(-\sigma_{22}) \\
 \dot{\sigma}_{ij} &= \mu(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad i \neq j \\
 \dot{\sigma}_{2j} &= \left[\mu(v_{2,j} + v_{j,2}) - \mu \gamma_j \right] \tilde{H}(-\sigma_{22}) \\
 \gamma_j &= \left\langle |\tau| / (q|\sigma_{22}|) - 1 \right\rangle \sigma_{2j} / (\eta|\tau|) \tilde{H}(-\sigma_{22}) + (v_{2,j} + v_{j,2}) H(\sigma_{22}) H(\Omega) \\
 \omega &= (\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{2,2}) / (\lambda + 2\mu) H(\sigma_{22}) H(\Omega) \\
 \dot{\Omega} &= \omega, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad |\tau| = \sqrt{\sum_{k \neq 2} \sigma_{2k} \sigma_{2k}}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Подчеркнем, что в этих уравнениях наряду с функцией Хевисайда $H(x)$ использована ступенчатая функция $\tilde{H}(x)$: $\tilde{H}(x) = 0$ при $x \leq 0$ и $\tilde{H}(x) = 1$ при $x > 0$.

В режиме скольжения при $\sigma_{22} < 0$ эта система является полулинейной гиперболической системой уравнений с малым параметром в знаменателе свободного члена, которая описывает анизотропную упруговязкопластическую среду. Эта система, как и классические упруговязкопластические модели, имеет характеристические упругие скорости распространения волн $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $b = \sqrt{\mu/\rho}$ [14,15].

В общем случае расположение слоев (и, соответственно, направление нормали к слоям) может быть переменным по пространству. Поэтому надо подчеркнуть еще раз, что система уравнений (4.3) записана в локальной декартовой системе координат, ось x_2 которой направлена по нормали к слоям, образующим рассматриваемую слоистую среду.

4.3. Построение континуальной модели блочной среды на основе дискретного варианта теории скольжения. Понятие плоскости скольжения-отслоения и плоскости отслоения.

Блочная среда образована равномерно уложенными упругими кубиками (параллелепипедами) с тремя возможными плоскостями скольжения-отслоения, ориентированными взаимно-перпендикулярными единичными нормальными $\mathbf{n}^{(s)}$, $s = 1, 2, 3$. Схематически ее двумерный вариант показан на Рис.4.3.1.

Рис.4.3.1.

Вектор скорости скольжения и отслоения на плоскости с нормалью $\mathbf{n}^{(s)}$ обозначим $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}$ и $\boldsymbol{\omega}^{(s)}$. Также обозначим компоненту $\boldsymbol{\gamma}^{(s)}$ в направлении $\mathbf{n}^{(i)}$, $s \neq i$ через $\gamma_i^{(s)}$. Будем также называть плоскость скольжения-отслоения с нормалью $\mathbf{n}^{(s)}$ S -плоскостью. Картина возможных скольжений на контактных поверхностях описывается следующим образом.

Если происходит скольжение на S -плоскости и при этом $\gamma_i^{(s)} \neq 0$, $\gamma_j^{(s)} \neq 0$, $i \neq j$, то регулярность блочной структуры нарушается, из-за нахлестов i - и j -плоскости перестают быть плоскостями возможного скольжения, а становятся только плоскостями отслоения с контактными условиями следующего вида:

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(s)} = 0, \quad \omega^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_n^{(s)} < 0 \\ \sigma_n^{(s)} = 0, \quad \gamma_i^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \Omega^{(s)} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Единственной плоскостью скольжения отслоения становится S - плоскость. Если динамический процесс развивается таким образом, что на S -плоскости происходит скольжение с $\gamma_i^{(s)} \neq 0$, $\gamma_j^{(s)} = 0$, то сохраняется возможность скольжения на S - и j -плоскостях. Если добавляется скольжения $\gamma_i^{(j)} \neq 0$, $\gamma_s^{(j)} = 0$, то по-прежнему сохраняется возможность скольжения на S - и j -плоскостях. Если при $\gamma_i^{(s)} \neq 0$ и $\gamma_j^{(s)} = 0$ добавляется $\gamma_s^{(j)} \neq 0$, то единственной плоскостью скольжения-отслоения становится j - плоскость. Таким образом, предполагается, что из трех возможных плоскостей скольжения-отслоения в зависимости от типа напряженного состояния реализуется только одна. Остальные две становятся плоскостями отслоения. Соответствующие этим условиям континуальные уравнения блочной среды получаются суммированием скольжений $\gamma^{(s)}$ и отслоений $\omega^{(s)}$ по трем S -плоскостям, $s = 1, 2, 3$, и имеют вид:

$$\dot{\rho} v_i = \sigma_{ij,j}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sum_s \lambda \delta_{ij} (v_{k,k} - \omega^{(s)}) + \mu \left[v_{i,j} + v_{j,i} - 2\omega^{(s)} n_i^{(s)} n_j^{(s)} - (n_i^{(s)} \gamma_j^{(s)} + n_j^{(s)} \gamma_i^{(s)}) \right]$$

На плоскости скольжения-отслоения:

$$\gamma_i^{(s)} = \left\langle \left| \mathbf{\tau}^{(s)} \right| / \left(q \left| \sigma_n^{(s)} \right| \right) - 1 \right\rangle \tau_i^{(s)} / \left(\eta \left| \mathbf{\tau}^{(s)} \right| \right), \quad \omega^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_n^{(s)} < 0$$

$$\sigma_n^{(s)} = \tau^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \Omega^{(s)} \geq 0$$

На плоскостях отслоения:

$$\gamma_i^{(s)} = 0, \quad \omega^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_n^{(s)} < 0$$

$$\sigma_n^{(s)} = 0, \quad \gamma_i^{(s)} = 0 \quad \text{при} \quad \Omega^{(s)} \geq 0$$

Здесь $\sigma_n^{(s)} = \sigma_{ij} n_i^{(s)} n_j^{(s)}$, $\tau_i^{(s)} = \sigma_{ik} n_k^{(s)} - \sigma_{kl} n_k^{(s)} n_l^{(s)} n_i^{(s)}$, v_i, σ_{ij} -

компоненты вектора скорости и тензора напряжений соответственно.

Если сориентировать три нормали к возможным плоскостям скольжения-отслоения по координатным осям принятой системы координат, то для нормалей будет справедливо соотношение: $n_i^{(s)} = \delta_i^s$, где δ_i^s - символ Кронекера.

Как и в случае слоистой среды, запишем систему уравнений для блочной среды в удобном для применения виде, разрешенном относительно производных по времени от искомых функций. Для этого предположим, что номер плоскости скольжения-отслоения равен $j = j_s$. Тогда получим

$$\rho \dot{v}_i = \sigma_{ij,j}$$

$$\dot{\sigma}_{jj} = \left(\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{j,j} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)} \right) \tilde{H}(-\sigma_{jj})$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) , \quad i, j \neq j_s , i \neq j \quad (4.5)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[\mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu(\gamma_i^{(j)} + \gamma_j^{(i)}) \right] \tilde{H}(-\sigma_{jj}) , \quad j = j_s , i \neq j$$

$$\gamma_i^{(j)} = \left\langle \left| \boldsymbol{\tau}^{(j)} \right| / (q \left| \sigma_{jj} \right|) - 1 \right\rangle \sigma_{ij} / (\eta \left| \boldsymbol{\tau}^{(j)} \right|) \tilde{H}(-\sigma_{jj}) + (v_{i,j} + v_{j,i}) H(\sigma_{jj}) H(\Omega^{(j)}) ,$$

$$j = j_s , i \neq j$$

$$\gamma_i^{(j)} = 0 , \quad j \neq j_s , i \neq j$$

$$\omega^{(j)} = (\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{j,j} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)}) / (\lambda + 2\mu) H(\sigma_{jj}) H(\Omega^{(j)})$$

$$\dot{\Omega}^{(j)} = \omega^{(j)} , \quad \left| \boldsymbol{\tau}^{(j)} \right| = \sqrt{\sum_{k \neq j} \sigma_{kj} \sigma_{kj}}$$

4.4. Построение континуальной модели среды типа «кирпичной кладки» на основе дискретного варианта теории скольжения.

В этом случае предполагается, что изначально имеет место относительный сдвиг «кубиков»-«кирпичей» для определенности в 2-плоскости в направлении $\mathbf{n}^{(1)}$, так что 1-плоскость перестает быть плоскостью скольжения-отслоения и остается только плоскостью отслоения:

$\gamma^{(1)} \equiv 0$. В двумерном случае структура такой среды показана на Рис.4.4.1.

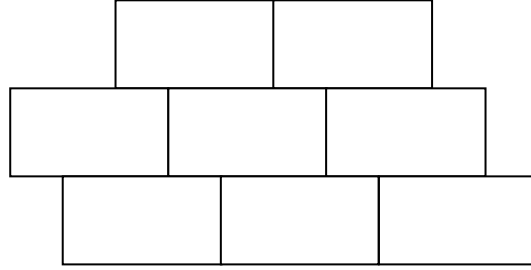


Рис.4.4.1.

Ответ на вопрос о том, какая из 2- или 3-плоскостей реализуется в качестве плоскости скольжения-отслоения зависит от конкретного процесса нагружения, но в отличие от правильной блочной структуры из раздела 4.3 , это заведомо не может быть 1-плоскость. С учетом этих обстоятельств система уравнений для рассматриваемой структуры аналогична системе для блочной среды (4.5), но с изначальным запретом на скольжение в 1-плоскости, $j_s \neq 1$, $\gamma_i^{(1)} = 0$, $i \neq 1$.

$$\dot{\rho} v_i = \sigma_{ij,j}$$

$$\dot{\sigma}_{jj} = \left(\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{j,j} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)} \right) \tilde{H}(-\sigma_{jj})$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad i, j \neq j_s, i \neq j, j_s \neq 1 \quad (4.6)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[\mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu(\gamma_i^{(j)} + \gamma_j^{(i)}) \right] \tilde{H}(-\sigma_{jj}), \quad j = j_s, i \neq j, j_s \neq 1$$

$$\gamma_i^{(j)} = \left\langle \left| \mathbf{r}^{(j)} \right| / (q \left| \sigma_{jj} \right|) - 1 \right\rangle \sigma_{ij} / (\eta \left| \mathbf{r}^{(j)} \right|) \tilde{H}(-\sigma_{jj}) + (v_{i,j} + v_{j,i}) H(\sigma_{jj}) H(\Omega^{(j)}),$$

$$j = j_s, i \neq j, j_s \neq 1$$

$$\gamma_i^{(j)} = 0, \quad j \neq j_s, i \neq j, j_s \neq 1$$

$$\omega^{(j)} = (\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{2,2} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)}) / (\lambda + 2\mu) H(\sigma_{jj}) H(\Omega^{(j)})$$

$$\dot{\Omega}^{(j)} = \omega^{(j)}, \quad \left| \mathbf{r}^{(j)} \right| = \sqrt{\sum_{k \neq j} \sigma_{kj} \sigma_{kj}}$$

4.5. Построение континуальной модели среды типа «паркета» на основе дискретного варианта теории скольжения.

На основании введенного понятия о плоскости отслоения можно также сформулировать определяющие соотношения для периодической структуры из упругих элементов, которую, в соответствии с ее плоским аналогом, можно назвать «паркетной укладкой» или, для краткости, просто «паркетом» (Рис.4.5.1).

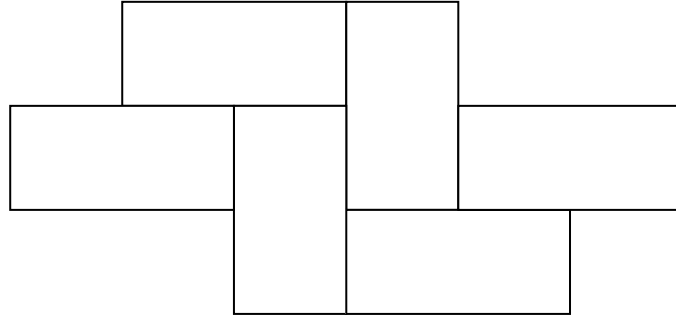


Рис.4.5.1.

В этом случае изначальные относительные смещения структурных элементов относительно трех взаимно-перпендикулярных плоскостей не оставляют возможности скольжения ни на одной из них, $j_s \neq 1, 2, 3$. Все три плоскости исходно будут являться плоскостями отслоения, поведение среды будет описываться уравнениями (4.5) с условиями на дополнительные функции $\gamma_i^{(s)} = 0$ при $i \neq s$, $s = 1, 2, 3$.

$$\dot{\rho} v_i = \sigma_{ij,j}$$

$$\dot{\sigma}_{jj} = \left(\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{j,j} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)} \right) \tilde{H}(-\sigma_{jj})$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4.7)$$

$$\omega^{(j)} = (\lambda v_{k,k} + 2\mu v_{2,2} - \lambda \sum_{l \neq j} \omega^{(l)}) / (\lambda + 2\mu) H(\sigma_{jj}) H(\Omega^{(j)})$$

$$\dot{\Omega}^{(j)} = \omega^{(j)}, \quad |\tau^{(j)}| = \sqrt{\sum_{k \neq j} \sigma_{kj} \sigma_{kj}}$$

Также отметим, что все сформулированные модели относятся к случаю, когда отсутствуют начальные сцепления на отрыв и сдвиг на контактных границах. Для более реалистичного описания поведения слоистых и блочных сред следует ввести пределы прочности на отрыв σ_{cr} и сдвиг τ_{cr} . В этом случае предполагается, что в исходном состоянии контактные границы «склеены» и не проявляют себя до тех пор, пока не нарушаются условия $|\sigma_n^{(s)}| \leq \sigma_{cr}$ или $|\tau^{(s)}| \leq \tau_{cr}$. После этого межслойные или межблочные связи на S -ой контактной плоскости считаются разорванными, прочность на отрыв и сдвиг становится равной нулю и среда начинает описываться одной из сформулированных выше моделей.

4.6. Численный метод решения полученных гиперболических систем. Аппроксимация по пространству и времени.

Введение вязкости в условия контактного взаимодействия позволяет избежать математических трудностей, связанных с рассмотрением

нелинейных систем с сухим трением. Полученная система относится к классу полулинейных гиперболических, ее численное решение можно построить с помощью различных явных схем. Однако в режиме скольжения включается нелинейный свободный член с малым параметром вязкости в знаменателе. Система становится жесткой, и обычные явные схемы будут неустойчивыми (Бураго, Кукуджанов (1973) [8]).

Для того, чтобы обойти эти затруднения, предлагается явно- неявный метод (Никитин (1989) [75,76]). Неявная аппроксимация применяется только для тех уравнений, которые содержат малый параметр в знаменателе свободного члена, остальные уравнения аппроксимируются явно. Решение неявного разностного уравнения получается аналитически и используется как корректор явного «упругого» шага.

Опишем этот метод на примере уравнения для $\dot{\sigma}_{ij}$ в режиме скольжения при $\sigma_{jj} < 0$ для слоистой или блочной среды в системе координат, связанной с нормалью $\mathbf{n}^{(j)}$ к плоскости скольжения-отслоения:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu \left[\frac{|\boldsymbol{\tau}^{(j)}|}{(q|\sigma_{jj}|) - 1} \right] \sigma_{ij} / (\eta |\boldsymbol{\tau}^{(j)}|)$$

$$|\boldsymbol{\tau}^{(j)}| = \sqrt{\sum_{k \neq j} \sigma_{kj} \sigma_{kj}}$$

Неявная аппроксимация первого порядка точности по времени имеет вид:

$$(\sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n) / \Delta t = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu \left[|\boldsymbol{\tau}^{n+1}| / (q |\sigma_{jj}^{n+1}|) - 1 \right] \sigma_{ij}^{n+1} / (\eta |\boldsymbol{\tau}^{n+1}|)$$

$$|\boldsymbol{\tau}^{n+1}| = \sqrt{\sum_{k \neq j} \sigma_{kj}^{n+1} \sigma_{kj}^{n+1}}$$

Здесь индексами $n+1$ и n помечены значения искомых величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени, Δt - шаг по времени.

Предполагается, что значения v_i^{n+1} и σ_{jj}^{n+1} уже определены из явной аппроксимации уравнений движения и уравнений для нормальных компонент тензора напряжений, не содержащих малых параметров вязкости в знаменателе свободных членов.

Эту разностную систему можно привести к виду:

$$\sigma_{kj}^{n+1} = S_{kj} - \left[|\boldsymbol{\tau}^{n+1}| / (q |\sigma_{jj}^{n+1}|) - 1 \right] \sigma_{kj}^{n+1} / (\delta |\boldsymbol{\tau}^{n+1}|)$$

$$\sigma_{lj}^{n+1} = S_{lj} - \left[|\boldsymbol{\tau}^{n+1}| / (q |\sigma_{jj}^{n+1}|) - 1 \right] \sigma_{lj}^{n+1} / (\delta |\boldsymbol{\tau}^{n+1}|)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij}^n + \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1})\Delta t, \quad \delta = \eta / (\mu\Delta t)$$

где $k \neq l \neq j$, S_{ij} - «упругие» напряжения, полученные в результате разностного шага, соответствующего «упругому» дифференциальному оператору.

Для того чтобы разрешить эту систему, вначале определим:

$$|\boldsymbol{\tau}^{n+1}| = q |\sigma_{jj}^{n+1}| \left((1 + \delta |S|) / (1 + \delta q |\sigma_{jj}^{n+1}|) \right)$$

$$|S| = \sqrt{\sum_{k \neq j} S_{kj} S_{kj}}$$

Для компонент касательных напряжений на \dot{J} - плоскости имеем:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = q \left| \sigma_{jj}^{n+1} \right| \left(S_{ij} / |S| \right) \left(1 + \delta |S| \right) / \left(1 + \delta q \left| \sigma_{jj}^{n+1} \right| \right)$$

При малых $\delta \ll 1$ эта формула принимает вид:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = q \left| \sigma_{jj}^{n+1} \right| S_{ij} / |S| + O(\delta) \quad (4.8)$$

Полученные формулы имеют наглядный смысл корректировки «упругих» напряжений на «конус трения». Аналогичным методом можно получить целый класс корректирующих формул для расчета классических соотношений упругопластичности при различных условиях текучести, в частности формулу Уилкинса для расчета идеальноупругопластических течений [112]. Эти же формулы пригодны для расчета касательных напряжений на плоскостях скольжения в блочных средах, описанных в разделах 4.3-4.4, поскольку в принятых моделях, в зависимости от напряженного состояния, реализуется только одна из трех (раздел 4.3) или двух (раздел 4.4) возможных плоскостей скольжения. Отметим, что численный метод решения упругопластических уравнений для широкого класса условий текучести, сводящийся к пошаговым корректировкам упругих решений и основанный на идее расщепления, разработан Кукуджановым (2004) [59].

Уравнения моделей, не содержащие малых параметров в знаменателе можно решать численно одним из известных методов конечных элементов

или конечных объемов. В данной работе используется метод конечных объемов в двумерном (плоском) варианте на четырехугольных (непрямоугольных) сетках для аппроксимации пространственных производных Wilkins (1964,1999) [183,184]. Дифференциальная по пространственным переменным часть системы уравнений имеет дивергентный вид [19,95]. Для конечно-разностной аппроксимации в трехмерном случае следует использовать формулу Гаусса-Остроградского, в двумерном случае достаточно формулы Грина:

$$\iint A_{l,l} dx_1 dx_2 = \oint A_1 dx_2 - A_2 dx_1$$

Ее разностный вариант с учетом обозначений, представленных на Рис.4.6.1, выглядит следующим образом:

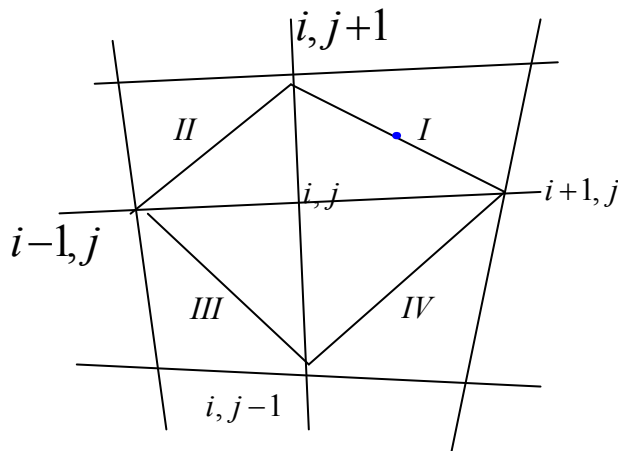


Рис.4.6.1.

$$A_{l,l}^{i,j} \Delta S = \sum_{k=I}^{IV} A_1^{(k)} \Delta x_2^{(k)} - A_2^{(k)} \Delta x_1^{(k)} \quad (4.9)$$

Здесь $A_l^{(I)} = (A_l^{i,j+1} + A_l^{i+1,j})/2$, $\Delta x_l^{(I)} = x_l^{i,j+1} - x_l^{i+1,j}$.

Для численного интегрирования по времени используется двухшаговая аппроксимация предиктор-корректор [95], которая на примере уравнений движения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \Delta S (\tilde{v}_1^{n+1} - v_1^n) / \Delta t &= \sum_{k=I}^{IV} \sigma_{11}^{(k)} \Delta x_2^{(k)} - \sigma_{12}^{(k)} \Delta x_1^{(k)} & - \text{ предиктор} \\ \rho \Delta S (\tilde{v}_2^{n+1} - v_2^n) / \Delta t &= \sum_{k=I}^{IV} \sigma_{12}^{(k)} \Delta x_2^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} \Delta x_1^{(k)} & (4.10) \end{aligned}$$

$$\rho \Delta S (v_1^{n+1} - 0.5(v_1^n + \tilde{v}_1^{n+1})) / (0.5 \Delta t) = \sum_{k=I}^{IV} \tilde{\sigma}_{11}^{(k)} \Delta x_2^{(k)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(k)} \Delta x_1^{(k)} \quad - \text{ корректор}$$

$$\rho \Delta S (v_2^{n+1} - 0.5(v_2^n + \tilde{v}_2^{n+1})) / (0.5 \Delta t) = \sum_{k=I}^{IV} \tilde{\sigma}_{12}^{(k)} \Delta x_2^{(k)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(k)} \Delta x_1^{(k)}$$

В этих формулах \tilde{v}_l^{n+1} и $\tilde{\sigma}_{lm}^{n+1}$ - значения компонент скорости и тензора напряжений на промежуточном шаге расчета по времени. Одновременно по этой же схеме аппроксимируются определяющие соотношения для напряжений с упругим дифференциальным оператором. После нахождения упругого решения происходит пересчет компонент тензора напряжений в систему координат, ориентированную по нормальям к межслойным или межблочным границам. Далее, происходит идентификация самих плоскостей как плоскостей скольжения-отслоения или только отслоения. При $\sigma_n^{(s)} < 0$ на соответствующей плоскости, корректируются касательные напряжения по формуле (4.8) и определяются скольжения $\gamma_i^{(s)}$ в первом случае или

заносятся скольжения $\gamma_i^{(s)}$ во втором. При $\sigma_n^{(s)} > 0$ заносятся нормальные $\sigma_n^{(s)}$ и касательные напряжения $\tau_i^{(s)}$ в первом случае или нормальные напряжения и скольжения $\gamma_i^{(s)}$ во втором. После этого из уравнений (4.5) вычисляются функции $\omega^{(s)}$ и $\Omega^{(s)}$, а также новые компоненты тензора напряжений в исходной системе координат.

4.7. Примеры расчетов. Квазистатические задачи о проседании массива «кирпичной кладки». Сравнение с экспериментом.

В качестве примеров численного моделирования процессов деформирования слоистых или блочных массивов приведем решения трех различных задач в двумерной, геометрически линейной постановке для случаев плоского деформированного состояния ($u_3 = 0$) или плоского напряженного состояния ($\sigma_{33} = 0$).

Первая задача моделирует эксперимент с массивом кирпичной кладки, описанный в работе Bicanic, Stirling (2002) [134]. Параллелепипед толщиной в один кирпич (это позволяет принять при расчетах гипотезу плоского напряженного состояния) уложен на платформу, основание которой допускает регулируемые вертикальные смещения. Боковая поверхность –

прямоугольник $|x_1| \leq a, |x_2| \leq b$ со сторонами, параллельными осям координат x_1 и x_2 . Центральная часть платформы шириной $2l$, $l = 0.6a$ вертикально смещается вниз, и под действием силы тяжести происходит деформация массива с относительными подвижками блоков-кирпичей и образованием узких пустот за счет вертикальных отслоений. Эти зоны имеют направленность от границ подвижной части основания к центру массива (Рис.4.7.1).

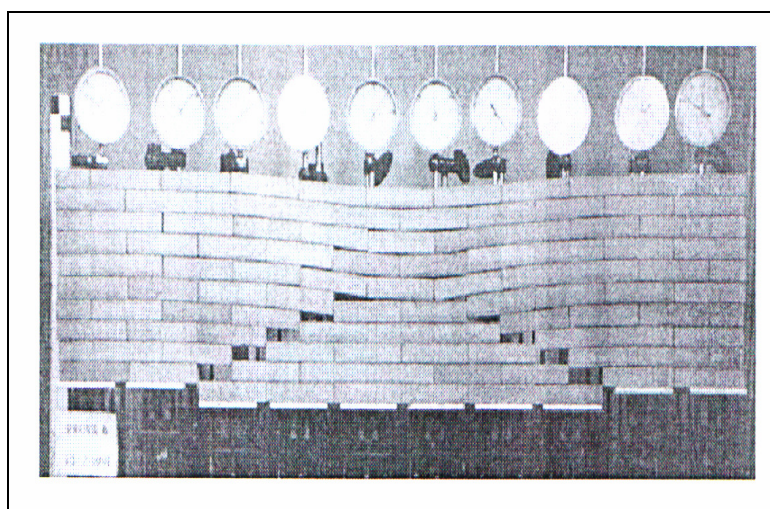


Рис.4.7.1.

Численное решение этой задачи строилось на основе системы уравнений (4.5) для случая массива, уложенного «кирпичной кладкой», методом установления квазистационарного режима.

Граничные условия для прямоугольной области (в двумерной постановке для случая плоского напряженного состояния) заключаются в

отсутствии нормальных и касательных напряжений на всех сторонах, за исключением нижней горизонтальной, где задаются условия на значения скоростей. Задача решалась в два этапа. На первом при нулевых начальных условиях и нулевых скоростях на нижней границе «включалось» действие силы тяжести \mathbf{g} вплоть до установления квазистатического напряженного состояния. На втором в момент времени t_1 менялось граничное условие при $x_2 = -b$ на вертикальную скорость: $v_2 = 0$ при $|x_1| > l$, $v_2 = v_2(t)$ при $|x_1| \leq l$. Форма функции $v_2(t)$ выбиралась в виде треугольника со временем нарастания t_0 , общей длиной $2t_0$ и амплитудой $-v_0$; $v_2(t) \equiv 0$ при $t > 2t_0$. Вертикальное смещение подвижной части платформы при этом достигало значения $v_0 t_0$. Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $a = 1$, $b = 0.25$, $v_0 = 10^{-3}$, $t_1 = 8$, $t_0 = 4$, $\lambda = 0.11$, $\mu = 0.445$, $q = 0.5$, $g = 3 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_{cr} = 6 \cdot 10^{-5}$. Им соответствуют реальные значения $\mu = 700 \cdot 10^7 \text{ Па}$, $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Здесь и далее напряжения нормированы на величину $\lambda + 2\mu$, линейные величины на вертикальный размер прямоугольника, скорости на $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. На Рис.4.7.2 показаны зоны вертикальных отслоений Ω_2 для установившегося состояния при $t = t_2 \gg t_1$.

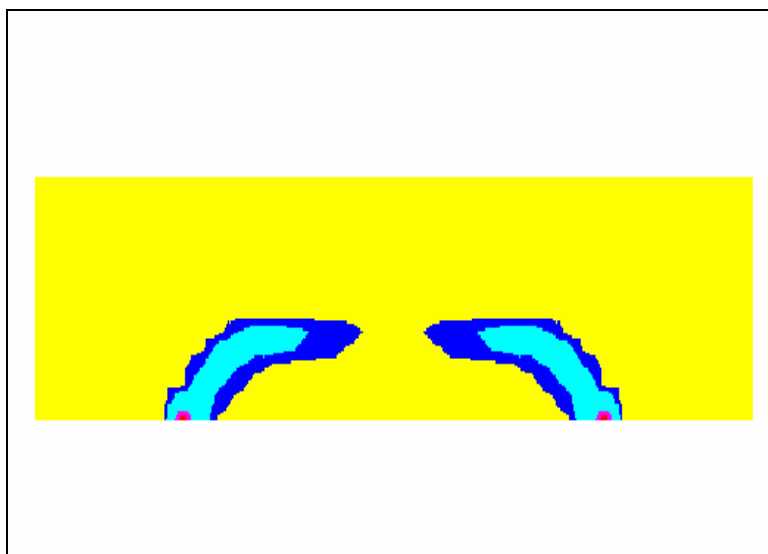


Рис. 4.7.2.

Величина и направленность этих зон имеет вид, сходный с наблюдаемым в эксперименте (Рис.4.7.1). Можно сделать вывод о пригодности предложенных континуальных моделей для качественного и количественного предсказания возникновения зон разрушений (скольжений и отслоений) в блочных массивах.

Вторая задача основана на моделировании расчетного варианта деформируемого блочного массива, приведенного в работе [120]. В этом случае параллелепипед $|x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq c$ кирпичной кладки деформировался под воздействием вертикального смещения левой половины основания и силы тяжести. И в этом случае в массиве наблюдалось развитие узкой зоны относительных вертикальных смещений, идущей от границы подвижной части основания. В работе Асару, Жан (1998) [120] этот процесс моделировался численно путем прямого расчета контактного взаимодействия

большого числа блоков-кирпичей по закону сухого трения Кулона. Результаты этого решения представлены на Рис.4.7.3.

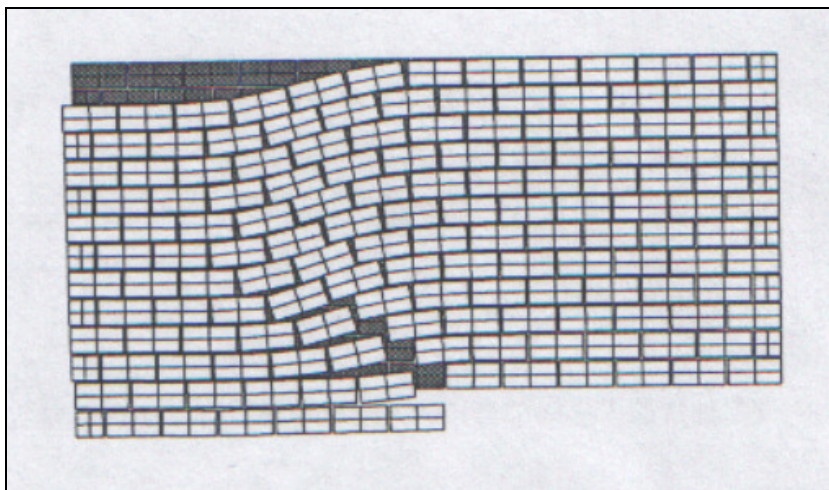


Рис.4.7.3.

В рассматриваемом случае эта задача для континуальной модели решалась в двумерной постановке (плоское деформированное состояние) также в два этапа: воздействие силы тяжести и более позднее включение на фоне установившегося напряженно-деформированного состояния граничного условия $v_2 = v_2(t)$ при $-a \leq x_1 \leq 0$, $t \geq t_1$. Безразмерные параметры расчета равны $a = 1$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.33$, $\mu = 0.33$, $\nu_0 = 10^{-3}$, $t_1 = 8$, $t_0 = 4$, $\sigma_{cr} = 4 \cdot 10^{-5}$. Результаты расчетов показаны на Рис.4.7.4, где изображены зоны ненулевых вертикальных отслоений Ω_2 для установившегося состояния при $t = t_2 \gg t_1$. Сравнение Рис.4.7.3 и Рис.4.7.4

показывает сходство зон разрушения блочного массива в рассматриваемом случае.

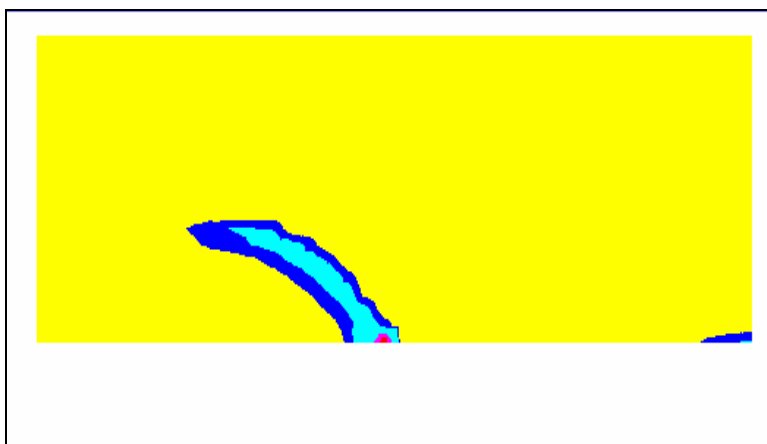


Рис.4.7.4.

4.8. Примеры расчетов. *Динамическая задача о прохождении упругой продольной волны через полость слоистой и блочной среде.*

Также рассматривается классическая задача прохождения плоской продольной упругой волны через свободную цилиндрическую полость. Амплитуда нормального напряжения в волне равна $\sigma_{22} = p_0$, полость расположена в блочной среде, уложенной по принципу кирпичной кладки при угле ориентации блоков $\alpha = 0$. До подхода к полости при заданном угле

ориентации волна не вызывает скольжений и отслоений в окружающей среде. При прохождении полости происходит развитие зон скольжения и отслоения в ее окрестности. Результаты численного моделирования этого процесса показаны на Рис. 4.8.1-4.8.4 при значениях безразмерных параметров $p_0 = 0.001$, $\lambda = 0.33$, $\mu = 0.33$, $q = 0.5$. На Рис. 4.8.1a-c показаны изолинии нормальных напряжений σ_{22} , горизонтальных скольжений γ_1 , вертикальных отслоений Ω_2 в момент $t = 2.3$, соответствующий началу прохождения волны через полость и началу процесса развития зон скольжений и отслоений – во фронтальной окрестности полости. На Рис. 4.8.2-4.8.4 показаны картины роста зон скольжения и отслоения во фронтальной части полости и их зарождение и развития в теневой части в моменты времени $t = 3.3$, 4.3 , 5.3 , соответствующие моментам прохождения фронтом волны самой полости, его удаления на расстояние ее диаметра и завершения процесса формирования зон разрушения. Отметим, что при заданной ориентации слоев характер относительных скольжений и отслоений в рассматриваемой среде таков же, как и в слоистой с горизонтальной ориентацией слоев.

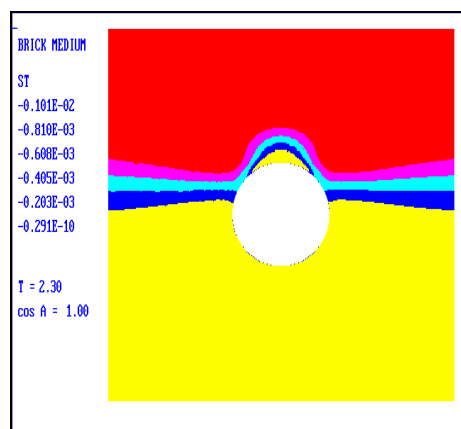


Рис.4.8.1-а

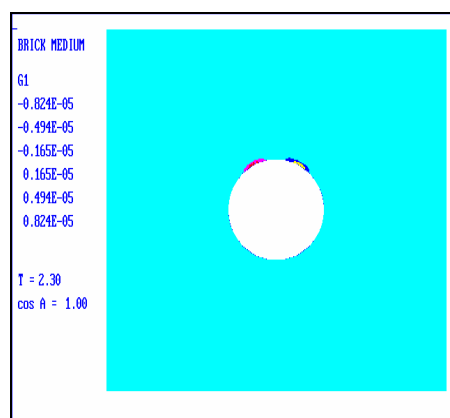


Рис.4.8.1-б

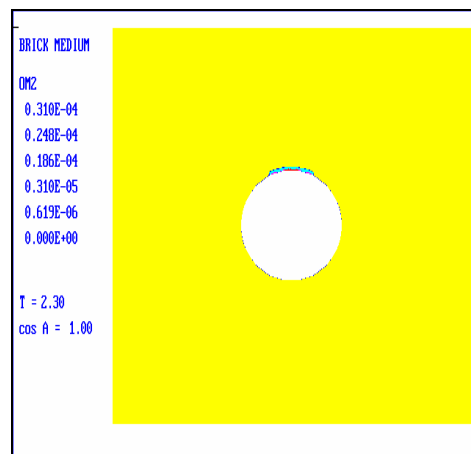


Рис. 4.8.1-с

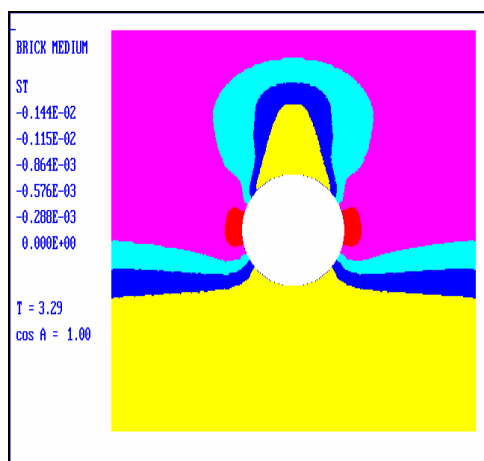


Рис. 4.8.2-а

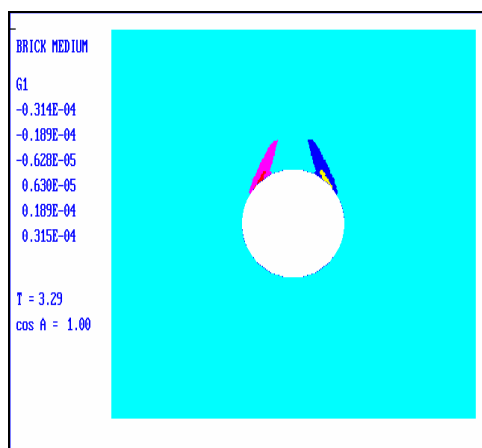


Рис. 4.8.2-б

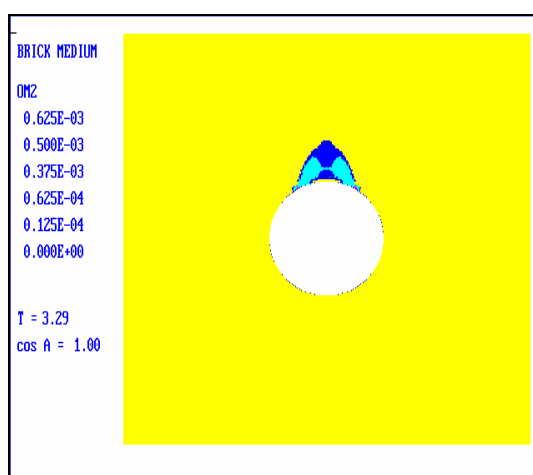


Рис. 4.8.2-с

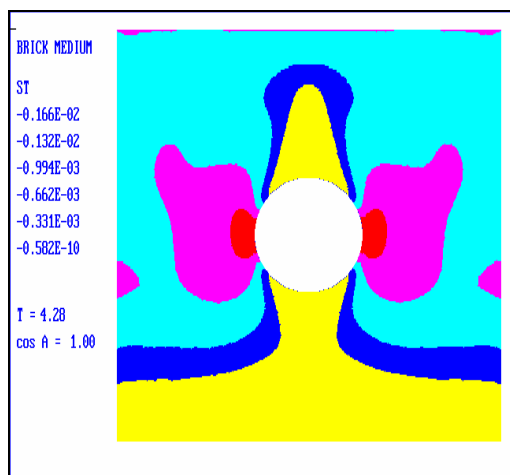


Рис. 4.8.3-а

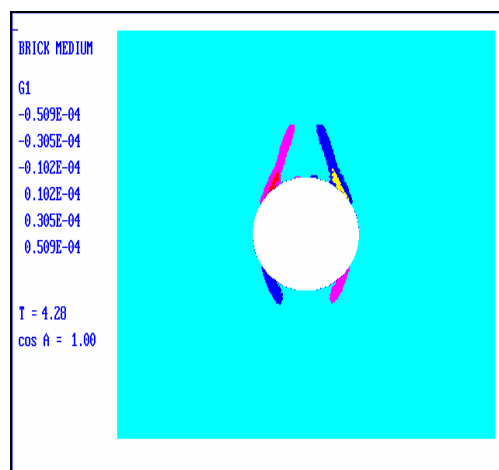


Рис. 4.8.3-б

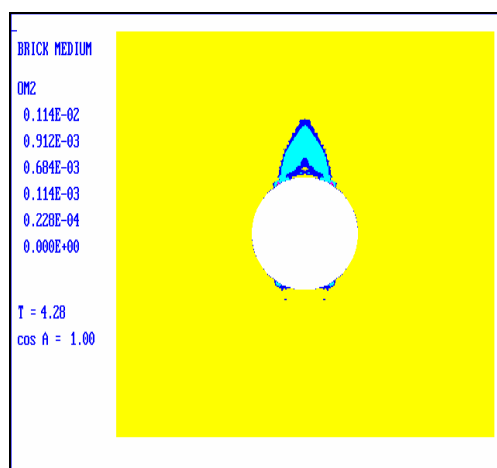


Рис. 4.8.3-с

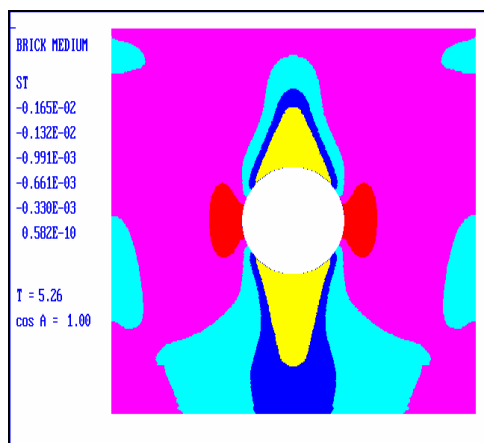


Рис. 4.8.4-а

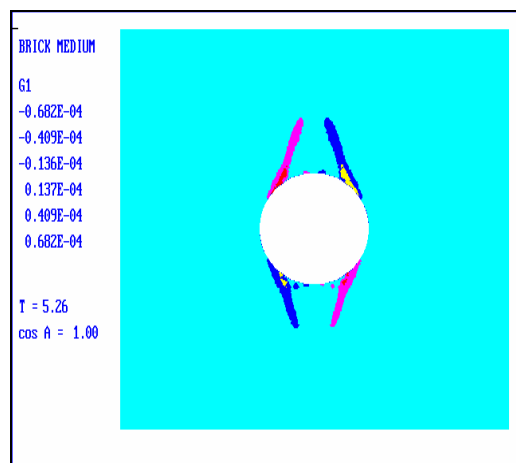


Рис. 4.8.4-б

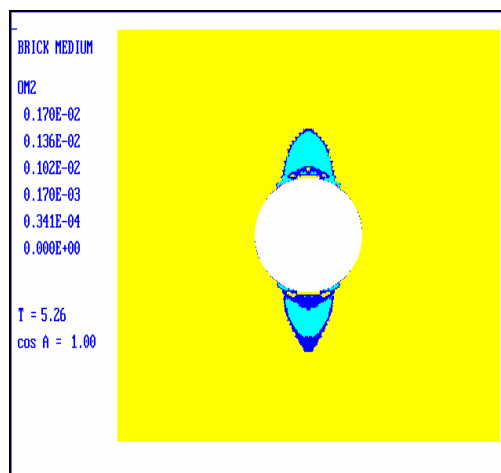


Рис. 4.8.4-с

4.9. Примеры расчетов. Задача о горизонтальных и вертикальных колебаниях основания «стены с окном».

В качестве еще одного примера рассматривается двумерная (плоское напряженное состояние) задача о горизонтальных или вертикальных колебаниях основания «стены с окном» - прямоугольной области с центральным квадратным вырезом. В качестве модели среды выбрана модель кирпичной кладки. Константы критических значений прочности на отрыв и сдвиг на верхней границе центрального квадратного выреза («окна») задаются настолько большими, чтобы соответствующая полоса ячеек не допускала возможности проскальзываний или отрывов («перекрытие окна»). Боковые и верхняя границы прямоугольника границы центрального выреза свободны от напряжений, на нижнем основании задаются граничные условия в скоростях (смещениях). Как и первых примерах, при неподвижном основании сначала «включалась» сила тяжести и после установления квазистатического напряженного состояния, задавались граничные значения горизонтальных или вертикальных скоростей основания. Полный период синусоидального колебания скорости с временем нарастания t_1 приводил к нулевым итоговым горизонтальным или вертикальным смещениям основания. Безразмерные параметры расчета задачи: $\lambda = 0.33$, $\mu = 0.33$, $q = 0.5$, $\sigma_{cr} = 6 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{cr} = 2 \cdot 10^{-4}$. В расчете с горизонтальными колебаниями основания при амплитуде $V_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ приведены результаты с временем нарастания $t_1 = 5$ (Рис. 4.9.1) и временем нарастания $t_1 = 30$

(Рис.4.9.2), на которых приведены горизонтальных проскальзываний Ω_1 , которые в обоих случаях сосредоточены в нижних угловых зона прямоугольной «стены». Вертикальных отрывов на этих режимах не возникло.

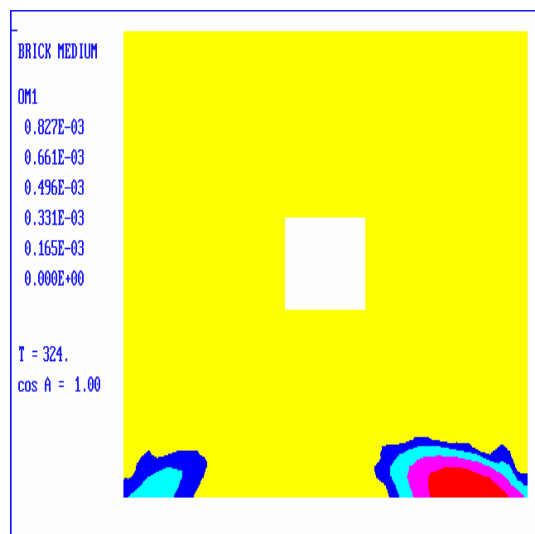


Рис.4.9.1.

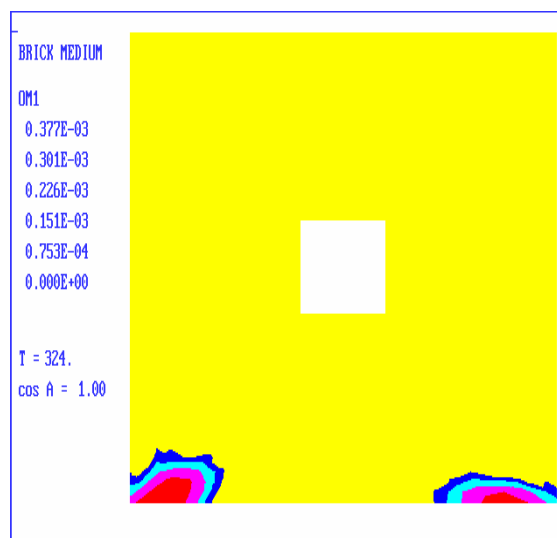


Рис.4.9.2.

На Рис.4.9.3 и Рис. 4.9.4 приведены результаты расчетов задачи с вертикальными колебаниями основания с амплитудой $V_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ и временем нарастания $t_1 = 5$. В этом случае в массиве реализуются разрушения как в виде горизонтальных скользящих (Рис.4.9.3), так и в виде вертикальных отрывов (Рис. 4.9.4).

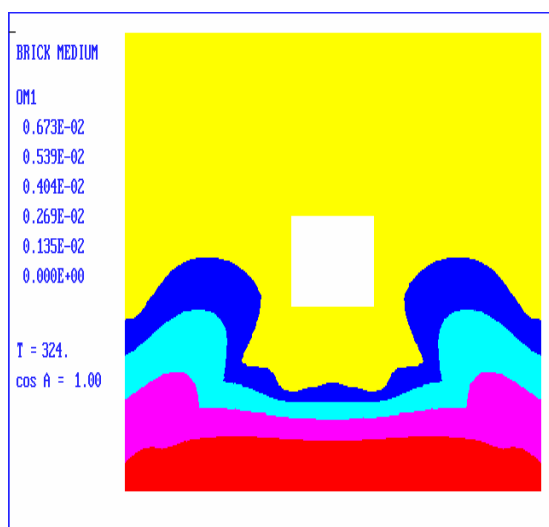


Рис. 4.9.3.

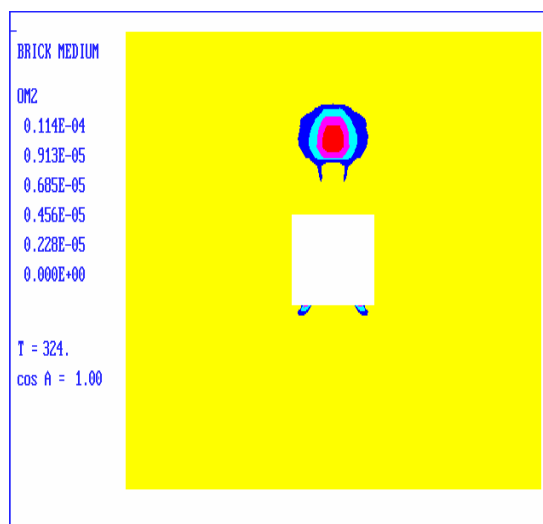


Рис. 4.9.4.

Данные примеры иллюстрируют возможность континуального моделирования динамических и квазистатических процессов в периодических структурах из упругих элементов - слоев или блоков, различным образом уложенных и ориентированных, с учетом внутренних скольжений и отслоений, вплоть до потери нормальных и касательных связей этих элементов друг с другом.

Кратко сформулируем результаты, полученные в этой главе. На основе дискретного варианта теории скольжения Батдорфа-Будянского предложена континуальная модель четырех типов сред с периодической структурой – слоистой, блочной, структурой типа «кирпичной кладки» и «паркета». На контактных границах упругих слоев или блоков выполняются нелинейные условия, учитывающие возможность проскальзывания с трением в сжатом состоянии или отслоение в противном случае. Получены определяющие соотношения для вектора скорости и тензора напряжений, а также для дополнительных зависимых переменных, имеющих смысл распределенных скоростей скольжения и отслоения. Введение вязкости в нелинейный закон трения позволило в режиме скольжения сохранить дифференциальный оператор динамической теории упругости в определяющих соотношениях моделей, которые можно классифицировать как анизотропные упруговязкопластические.

Для численного решения полученных систем уравнений предложен явно- неявный метод пошагового интегрирования по времени. В сочетании с методом конечных объемов он позволяет на каждом шаге по времени получить численное решение исходной нелинейной задачи путем решения упругой задачи с последующей корректировкой напряжений по алгебраическим формулам.

Приведены примеры решения двумерных задач о развитии зон отслоений в блочных массивах под воздействием силы тяжести и граничных смещений. Решена задача о напряженном состоянии и развитии зон разрушений в окрестности цилиндрической выработки в горном массиве, имеющем слоистую или блочную структуру, при прохождении через нее продольной волны.

Глава 5.

Явно- неявный метод расчета системы уравнений упруго вязкопластической среды.

Реализация явных схем интегрирования уравнений динамики упруговязкопластической среды сопряжена с известными вычислительными трудностями из-за наличия малого параметра времени релаксации (или параметра динамической вязкости) в знаменателе вязких членов. Малость времени релаксации по сравнению с обычным курантовским шагом по времени делает уравнения жесткими и приводит к неприемлемым дополнительным ограничениям расчетного шага по времени. Это затруднение преодолевается обычно применением схем интегрирования определяющих соотношений по времени типа предиктор-корректор (Бураго, Кукуджанов (1973) [8]) или с помощью неявных схем аппроксимации вязких членов в определяющих уравнениях (Ширко, Якушев (1973,1975) [117,118], см. также [87,95]). Здесь описана новая, более точная, по сравнению с уже используемыми, неявная схема аппроксимации вязких членов.

5.1. Неявная аппроксимация первого порядка полулинейных уравнений системы для упруговязкопластической модели.

Неявная схема аппроксимации уравнений с малым параметром в знаменателе свободных членов полулинейных систем, использованная при численном решении систем уравнений (4.3) и (4.5) для слоистых и блочных сред, адаптирована здесь для уравнений упруговязкопластической модели сплошной среды с целью обеспечения устойчивого численного решения при обычном курантовском ограничении шага по времени.

Уравнения динамики упруговязкопластической среды имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i &= \sigma_{ij,j} \\ \dot{\sigma}_m &= (\lambda + 2\mu/3)v_{k,k} \\ \dot{s}_{ij} &= \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \mu \left\langle \frac{\sqrt{J_2}}{\tau} - 1 \right\rangle^{\kappa} \frac{s_{ij}}{\eta} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь v_i - компоненты вектора скорости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\sigma_m = \sigma_{k,k} / 3$ - среднее напряжение, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ - компоненты девиатора напряжений, $J_2 = \frac{1}{2} s_{kl} s_{kl}$ - второй инвариант

девиатора напряжений, τ - статический предел текучести, η - вязкость при динамическом нагружении, K - показатель степени в выражении для функции релаксации напряжений, если выражение в угловых скобках ($\langle \dots \rangle$) меньше нуля, то оно полагается равным нулю.

Как уже было сказано, при численном решении системы уравнений (5.1) по явной разностной схеме с шагом Δt при соблюдении условия Куранта параметр $\delta = \eta / (\mu \Delta t)$ все равно остается малым ($\delta \ll 1$) из-за малости динамической вязкости η . Этот малый параметр находится в знаменателе вязкого члена, поэтому интегрирование определяющих уравнений по явной разностной схеме с курантовским шагом по времени приводит к неустойчивости.

Положим, что значения компонент вектора скорости на $n+1$ -м временном слое уже найдены из уравнений движения (первая строчка в записи системы уравнений (5.1)). Неявная схема первого порядка для определяющих соотношений имеет вид:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2}}{\tau} - 1 \right)^K \frac{s_{ij}^{n+1}}{\eta}$$

или

$$\delta s_{ij}^{n+1} + \left(\frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / 2}}{\tau} - 1 \right)^K s_{ij}^{n+1} = \delta s_{ij}^e$$

Здесь для группы членов введено обозначение

$$s_{ij}^e = s_{ij}^n + \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1})\Delta t$$

которое можно истолковать как вспомогательный “упругий” шаг расчета.

Свернем уравнение для девиатора напряжений дважды: вначале с s_{ij}^{n+1} ,

затем с s_{ij}^e , тогда получим систему двух уравнений относительно вспомогательных величин X и Y :

$$\delta X + (\sqrt{X} - 1)^\kappa X = \delta Y$$

$$\delta Y + (\sqrt{X} - 1)^\kappa Y = \delta A$$

где

$$X = \frac{1}{2} s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / \tau^2, \quad Y = \frac{1}{2} s_{kl}^{n+1} s_{kl}^e / \tau^2, \quad A = \frac{1}{2} s_{kl}^e s_{kl}^e / \tau^2.$$

Исключая Y , получим трансцендентное уравнение относительно X :

$$\sqrt{X} [\delta + (\sqrt{X} - 1)^\kappa] = \delta \sqrt{A} \quad (5.2)$$

По найденному X , искомое значение девиатора напряжений на слое $n+1$ по определяется так:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{\delta s_{ij}^e}{\delta + (\sqrt{X} - 1)^\kappa} = \frac{s_{ij}^e}{\sqrt{A}} \sqrt{X} \quad (5.3)$$

При $\kappa = 1$ уравнение (5.2) является квадратным и легко решается

$$\sqrt{X} = \frac{(1-\delta)}{2} + \sqrt{\frac{(1-\delta)^2}{4} + \delta\sqrt{A}}$$

Выражение (5.3) для девиатора напряжений на новом временном слое принимает вид

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e}{\sqrt{A}} \left[\frac{(1-\delta)}{2} + \sqrt{\frac{(1-\delta)^2}{4} + \delta\sqrt{A}} \right] \quad (5.4)$$

Для произвольного значения κ уравнение (5.2) можно решить приближенно для малых значений $\delta \ll 1$, используя разложение искомого значения \sqrt{X} по малому параметру:

$$\sqrt{X} = 1 + X_1 \delta^{1/\kappa} + O(\delta^{2/\kappa})$$

Подставляя это выражение в (5.2), получаем $X_1 = (\sqrt{A} - 1)^\kappa$ и $\sqrt{X} \approx 1 + (\sqrt{A} - 1)^\kappa \delta^{1/\kappa}$. Значение девиатора напряжений на новом временном слое равно:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e}{\sqrt{A}} \left[1 + (\sqrt{A} - 1)^\kappa \delta^{1/\kappa} \right]$$

В полученных формулах можно явно перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$, что соответствует переходу от упруговязкопластической к упругопластической модели, и получить известную корректировочную формулу Уилкинса

«посадки на круг текучести [112], применявшуюся для расчета динамических упругопластических задач многими авторами (Гулидов, Фомин (1980) [22]; Киселев (1984) [35]; Баженов, Кибец, Садырин (1986) [2]; Угодчиков, Баженов, Рузанов (1985) [111]):

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e}{\sqrt{s_{kl}^e s_{kl}^e / 2}} \tau$$

Интересно узнать, какова будет «посадка на круг текучести», если для численного решения определяющих соотношений (5.1) применить неявную аппроксимацию второго порядка точности по времени. Это делается в следующем разделе.

5.2. Неявная аппроксимация второго порядка полулинейных уравнений системы для упруговязкопластической модели.

Неявная схема второго порядка по времени получается при использовании средних значений девиатора напряжений $(s_{ij}^{n+1} + s_{ij}^n)/2$ в правой части уравнений (5.1):

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = \mu(v_{i,j}^{n+1} + v_{j,i}^{n+1}) - \mu \left(\frac{\sqrt{(s_{kl}^{n+1} + s_{kl}^n)(s_{kl}^{n+1} + s_{kl}^n)/8}}{\tau} - 1 \right)^{\kappa} \frac{(s_{ij}^{n+1} + s_{ij}^n)/2}{\eta}$$

Это разностное уравнение можно переписать в виде:

$$\delta s_{ij}^{n+1} + \left(\frac{\sqrt{(s_{kl}^n s_{kl}^n + 2s_{kl}^n s_{kl}^{n+1} + s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1})/8}}{\tau} - 1 \right)^\kappa (s_{ij}^{n+1} + s_{ij}^n)/2 = \delta s_{ij}^e \quad (5.5)$$

По аналогии со схемой первого порядка введем обозначения для свертки.

Пусть $X = \frac{1}{2} s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1} / \tau^2$, $Y = \frac{1}{2} s_{kl}^n s_{kl}^{n+1} / \tau^2$, $Z = \frac{1}{2} s_{kl}^e s_{kl}^{n+1} / \tau^2$ -

неизвестные величины, подлежащие определению, а $A = \frac{1}{2} s_{kl}^e s_{kl}^e / \tau^2$,

$Q = \frac{1}{2} s_{kl}^e s_{kl}^n / \tau^2$, $S = \frac{1}{2} s_{kl}^n s_{kl}^n / \tau^2$ - величины, известные с

предыдущего временного слоя или из “упругого” шага расчета.

Последовательно свернем уравнения (5.5) с величинами $\frac{1}{2} s_{kl}^{n+1} / \tau^2$,

$\frac{1}{2} s_{kl}^n / \tau^2$, $\frac{1}{2} s_{kl}^e / \tau^2$. В итоге получим нелинейную систему

алгебраических уравнений относительно неизвестных X , Y и Z :

$$\delta X + \left(\sqrt{(S + 2Y + X)} / 2 - 1 \right)^\kappa (X + Y) / 2 = \delta Z$$

$$\delta Y + \left(\sqrt{(S + 2Y + X)} / 2 - 1 \right)^\kappa (S + Y) / 2 = \delta Q \quad (5.6)$$

$$\delta Z + \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa (Q + Z) / 2 = \delta A$$

Второе уравнение системы (5.6) можно записать в виде:

$$\delta(S + Y) = \frac{\delta^2(Q + S)}{\left[\delta + \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa / 2 \right]}$$

Складывая это уравнение с первыми двумя уравнениями системы (5.5), получим:

$$\begin{aligned} & \delta(S + 2Y + X) + \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa (S + 2Y + X) / 2 = \\ & = \frac{\delta^2(Q + S)}{\left[\delta + \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa / 2 \right]} + \delta(Z + Q) \end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (5.6) можно найти величину:

$$\delta(Z + Q) = \frac{\delta^2(A + Q)}{\left[\delta + \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa / 2 \right]}$$

Подставляя это выражение в предыдущее уравнение, получим трансцендентное уравнений относительно неизвестной величины

$$t = \left(\sqrt{(S + 2Y + X) / 2 - 1} \right)^\kappa :$$

$$(1 + t)(\delta + t^\kappa / 2) = \delta R \quad (5.7)$$

Здесь через R обозначена следующая величина:

$$R = \sqrt{(A + 2Q + S) / 2} = \frac{\sqrt{0.5 \cdot (s_{kl}^n + s_{kl}^e) / 2 \cdot (s_{kl}^n + s_{kl}^e) / 2}}{\tau}.$$

Это есть второй инвариант от девиатора напряжений, вычисленного как среднее арифметическое между девиатором на старом временном слое и «упругим» девиатором на новом временном слое. Для дальнейших рассуждений назовем его средним девиатором.

Из (5.5) следует, что искомые компоненты девиатора равны:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{\delta s_{ij}^e - s_{ij}^n t^\kappa / 2}{\delta + t^\kappa / 2}$$

С учетом соотношения $t^\kappa / 2 = \delta [R / (1 + t) - 1]$, получим формулу:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e - [R / (1 + t) - 1] s_{ij}^n}{R / (1 + t)} \quad (5.8)$$

Как и для аппроксимации 1 порядка уравнение (5.7) можно решить точно при $\kappa = 1$:

$$t^2 + (1 + 2\delta)t - 2\delta(R - 1) = 0$$

$$t = \frac{(1+2\delta)}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{8\delta(R-1)}{(1+2\delta)^2}} - 1 \right]$$

Таким образом, значение компонент девиатора на верхнем слое по времени в этом случае определяется точно для любых значений вязкости (параметра δ).

Для остальных значений κ можно получить решение при $\delta \ll 1$, используя для решения уравнения (5.6) метод разложения по малому параметру, изложенный, например, в монографии Найфэ (1984) [70]. Полагая $t = t_1 \delta^{1/\kappa} + O(\delta^{2/\kappa})$ и подставляя в (5.7), для неизвестного коэффициента получим $t^\kappa = 2(R-1)$ и приближенное решение уравнения :

$$t = [2(R-1)\delta]^{1/\kappa}.$$

Окончательная формула для компонент девиатора напряжений на новом временном слое принимает вид:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e - \left[R / (1 + (2(R-1)\delta)^{1/\kappa}) - 1 \right] s_{ij}^n}{R / (1 + (2(R-1)\delta)^{1/\kappa})}$$

В этой формуле также можно положить $\delta = 0$ и получить корректировку, соответствующую упругопластическому решению («посадке на круг текучести»):

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{s_{ij}^e - (R-1)s_{ij}^n}{R}$$

Эту же формулу можно записать в несколько измененном виде, который показывает геометрический смысл полученной корректировочной процедуры:

$$s_{ij}^{n+1} = 2 \frac{(s_{ij}^e + s_{ij}^n) / 2}{R} - s_{ij}^n$$

Или, еще более наглядно:

$$s_{ij}^{n+1} = \frac{(s_{ij}^e + s_{ij}^n) / 2}{\sqrt{0.5(s_{kl}^n + s_{kl}^{n+1}) / 2 \cdot (s_{kl}^n + s_{kl}^{n+1}) / 2}} \tau + \left[\frac{(s_{ij}^e + s_{ij}^n) / 2}{\sqrt{0.5(s_{kl}^n + s_{kl}^{n+1}) / 2 \cdot (s_{kl}^n + s_{kl}^{n+1}) / 2}} \tau - s_{ij}^n \right] \quad (5.9)$$

Таким образом, при использовании неявной схемы второго порядка точности сначала на круг текучести “сажается” средний девиатор, а затем “точка посадки” смещается на величину разницы между средним девиатором и значением девиатора на старом временном слое, как показано на Рис.5.2.1а-б.

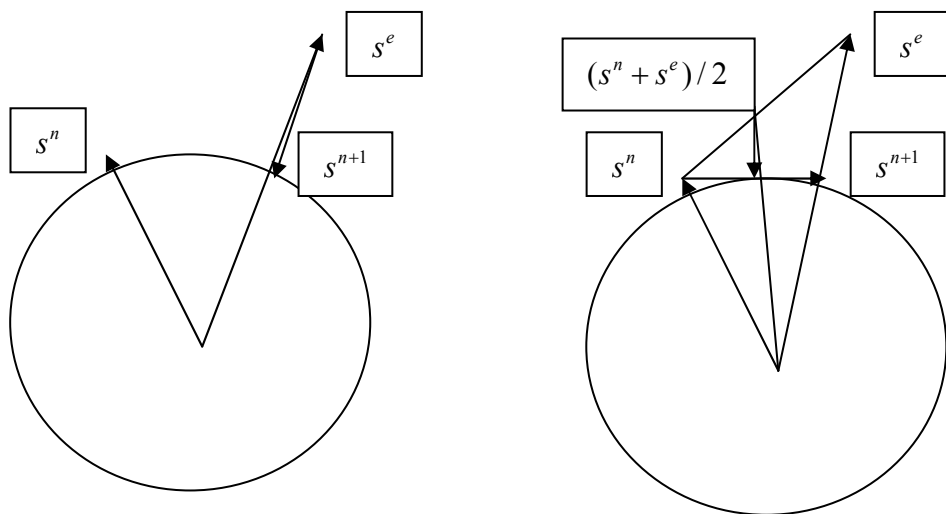


Рис.5.2.1. «Посадка на круг текучести»:

а) по схеме 1-го порядка;

б) по схеме 2-го порядка.

Обе описанные новые неявные схемы были реализованы и использованы в расчетах ряда прикладных задач, в частности, в задачах о сварке взрывом. Подчеркнем, что эти схемы в отличие от предлагавшихся ранее другими авторами являются более точными и полностью неявными (ранее функция вязкости аппроксимировалась по значениям напряжений со старого временного слоя или по значениям “упругого” предиктора).

5.3. Примеры расчетов. *Высокоскоростное наклонное соударение пластин и трубчатых образцов (сварка взрывом). Алгоритм расчета контактного взаимодействия. Критерий сварки*

Здесь предлагается новый вариант метода конечных объемов для расчета высокоскоростных взаимодействий упругопластических тел и даются примеры применения метода к расчету прикладных задач о сварке взрывом и о действии ударных волн на подземные сооружения..

Задачи решаются в пространственно двумерной постановке (плоская деформация или осевая симметрия). Математическая постановка задачи в рамках модифицированной с учетом возможных больших деформаций упруговязкопластической модели материала (5.1) включает систему уравнений движения, неразрывности, сдвигового деформирования и объемного деформирования. Выпишем ее в общей тензорной форме [41]:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{s}^R = \mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) - \mu \left\langle \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}/2}{\tau_0} - 1 \right\rangle^\kappa \frac{\mathbf{s}}{\eta} \quad (5.9)$$

$$\sigma_m = \sigma_m(\rho)$$

Здесь $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}$ - девиатор тензора напряжений, $\sigma_m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} / 3$

- среднее напряжение, $\dot{\mathbf{s}}^R = \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{s}$ - временная производная Ривлина, τ_0 - статический предел текучести, η - вязкость при динамическом нагружении, K - степенной показатель нелинейности функции релаксации напряжений, ρ - плотность.

Граничные условия вне зоны контакта заданы в напряжениях.

На внешней поверхности наружной оболочки (пластины):

$$\sigma_{nn} = \sigma_0(z - u_0 t), \quad \sigma_{n\tau} = 0$$

Остальные участки поверхности вне зоны контакта свободны от нагрузок:

$$\sigma_{nn} = 0, \quad \sigma_{n\tau} = 0.$$

Здесь индексы nn и $n\tau$ обозначают нормальное и касательное напряжения к деформированной границе соударяющихся тел,

$\sigma_0(z)$ - форма импульса нагружения в детонационной волне,

u_0 - ее скорость.

На контактной границе непрерывны нормальные составляющие скоростей и нормальные напряжения, а касательные подчиняются условию трения:

$$[v_n] = [\sigma_{nn}] = [\sigma_{n\tau}] = 0 \quad (5.10)$$

$[v_\tau] = 0$ при $\sigma_{n\tau} < \tau_{cr} + q|\sigma_{nn}|$ - условие сцепления,

$\sigma_{n\tau} = (\tau_{cr} + q|\sigma_{nn}|)[v_\tau]/|[v_\tau]|$ - условие проскальзывания.

Здесь τ_{cr} - коэффициент сцепления контактных поверхностей, квадратными скобками выделены скачки искомых функций на контактной границе.

Основное предположение рассматриваемой модели контактного взаимодействия (Гульбин, Никитин (1995) [24]) состоит в том, что сцепление наступает при достаточно высоком уровне пластических деформаций в зоне контакта, тогда коэффициент сцепления будет сильно зависеть от величины интенсивности пластических деформаций γ :

$$\gamma = \int \sqrt{\mathbf{e}^p : \mathbf{e}^p} dt \quad \mathbf{e}^p = \left\langle \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s} / 2}}{\tau_0} - 1 \right\rangle^\kappa \frac{\mathbf{s}}{\eta}$$

Это предположение математически формулируется следующим образом:

$$\tau_{cr} \rightarrow 0 \text{ при } \gamma < \gamma_{cr}, \quad \tau_{cr} \rightarrow \infty \text{ при } \gamma \geq \gamma_{cr}.$$

Для численного решения системы уравнений (5.9) использовалась уже рассмотренная ранее новая явно-неявная двухшаговая конечно-объемная схема (4.9) второго порядка точности по времени (4.10) с процедурой

корректировки (“посадки на поверхность текучести”) компонент девиатора (5.4) или (5.8). Задача решалась на лагранжевой сетке.

Здесь подробно опишем новый контактный алгоритм расчета взаимодействия соударяющихся тел, основанный на геометрическом подходе, предложенном в работе Бураго Н.Г., Кукуджанова (1988) [9].

Расчет шага по времени по схеме (4.9)-(4.10) проводится в два этапа. На первом этапе рассчитываются предварительные значения искомых функций на новом временном слое и предварительное новое положение лагранжевой сетки без учета контактных усилий. Контактные усилия учитываются на втором этапе. Для этого определяется зона контакта путем перебора всевозможных граничных пар «чужой граничный узел – свой граничный отрезок» для взаимодействующих тел и проверки геометрического условия непроникания. Если это условие для некоторой граничной пары нарушено, то она принадлежит зоне контакта и для нее надо определить и учесть контактные усилия, которые обеспечат взаимное непроникание тел и выполнение контактных условий (5.10).

Рассмотрим контактный алгоритм подробнее. Геометрическая картина взаимодействия «граничный узел - граничный отрезок», представлена на Рис.5.3.1.

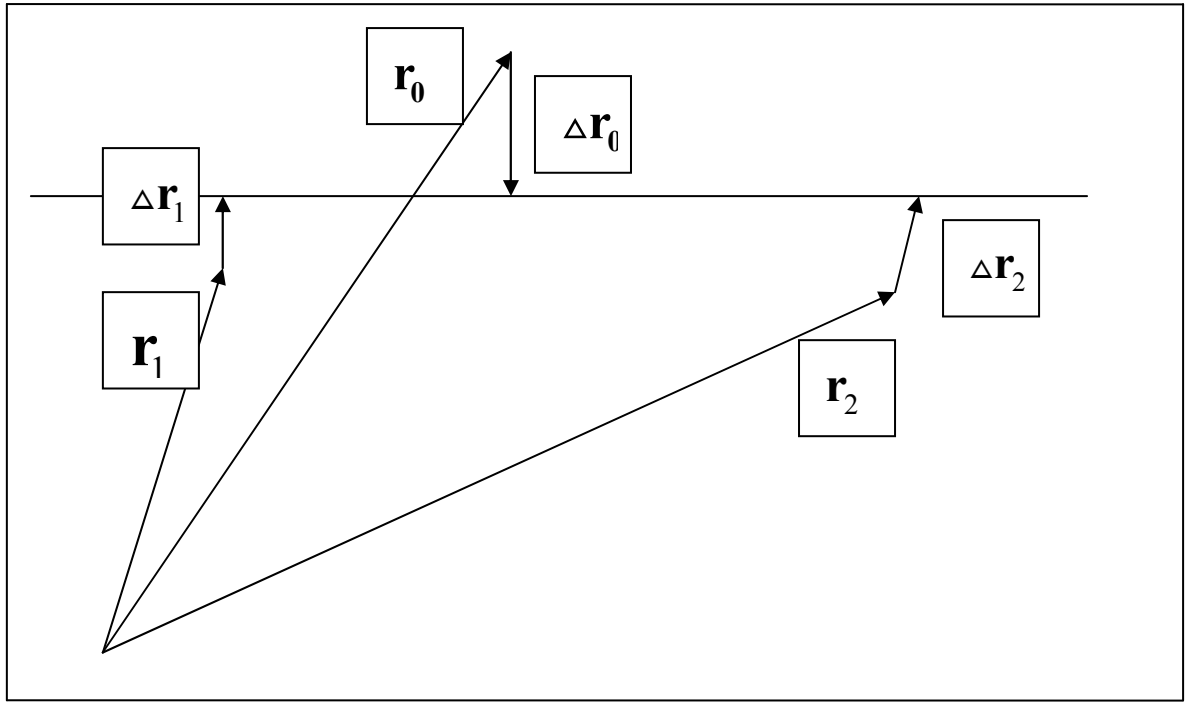


Рис.5.3.1.

Примем обозначения:

\mathbf{r}_0 - начальный радиус-вектор «граничного узла» перед шагом расчета,

$\mathbf{r}_{1,2}$ - начальные радиус-векторы концов «граничного отрезка»,

$\Delta \mathbf{r}_{0,1,2}$ - смещения точек в результате всех воздействий,

$$\Delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 \Delta t + \Delta \mathbf{v}_0 \Delta t \quad \Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1 \Delta t + \Delta \mathbf{v}_1 \Delta t \quad \Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{v}_2 \Delta t + \Delta \mathbf{v}_2 \Delta t .$$

Первые слагаемые в этих формулах соответствуют смещениям без учета контактного взаимодействия, что приводит к нарушению условия

непроникания, вторые слагаемые соответствуют смещениям под действием неизвестного контактного усилия P_n , обеспечивающего выполнение этого условия:

$$\Delta \mathbf{v}_0 = P_n \mathbf{n} C_0 \quad \Delta \mathbf{v}_1 = -P_n \mathbf{n} C_1 (1 - \Omega) \quad \Delta \mathbf{v}_2 = -P_n \mathbf{n} C_2 \Omega ,$$

где $C_{0,1,2} = \Delta t / \rho / \Delta v_{0,1,2}$, $\Delta v_{0,1,2}$ - объемы соответствующих ячеек.

Условие непроникания для пары «граничный узел - граничный отрезок» имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{r}}_1 + \Omega(\tilde{\mathbf{r}}_2 - \tilde{\mathbf{r}}_1)$$

Здесь Ω - коэффициент, задающий положение граничного узла по достижении им граничного отрезка $0 \leq \Omega \leq 1$.

Введем дополнительные обозначения:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 \Delta t \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 \Delta t \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 \Delta t ,$$

$$\Delta \mathbf{R} = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) .$$

Условие непроникания примет вид:

$$\mathbf{R}_0 + P_n \mathbf{n} C_0 \Delta t = [\mathbf{R}_1 - P_n \mathbf{n} C_1 (1 - \Omega) \Delta t] (1 - \Omega) + [\mathbf{R}_2 - P_n \mathbf{n} C_2 \Omega \Delta t] \Omega$$

Умножим это векторное соотношение скалярно на вектор $\Delta \mathbf{R}$ и на нормаль \mathbf{n} , имея в виду соотношение $\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{R} = 0$.

В первом случае получим уравнение:

$$\mathbf{R}_0 \cdot \Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cdot \Delta \mathbf{R} + \Delta \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R} \Omega$$

Из него находим Ω :

$$\Omega = \frac{(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_1) \cdot \Delta \mathbf{R}}{\Delta \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}}$$

Во втором случае получим уравнение:

$$P_n [C_0 + C_1(1-\Omega)^2 + C_2\Omega^2] \Delta t = [\mathbf{R}_1(1-\Omega) + \mathbf{R}_2\Omega - \mathbf{R}_0] \cdot \mathbf{n}$$

Из него находим контактное усилие P_n :

$$P_n = \frac{[\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0 + \Delta \mathbf{R} \Omega] \cdot \mathbf{n}}{[C_0 + C_1(1-\Omega)^2 + C_2\Omega^2] \Delta t}$$

Полученное выражение дает отрицательный знак контактного усилия (сжатие) при нарушении условия непроникания контактной пары «граничный узел - граничный отрезок» на первой стадии расчета и значение параметра Ω (Рис.5.3.2), означающего, что проекция “чужого узла” на “свой граничный отрезок” принадлежит отрезку ($0 \leq \Omega \leq 1$).

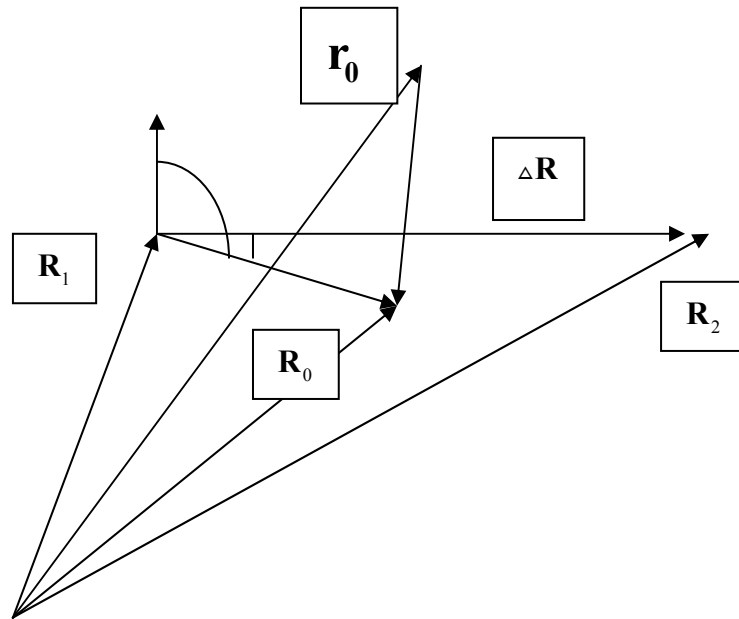


Рис.5.3.2.

Аналогичный подход применен и для определения касательных контактных усилий P_τ . В принятых обозначениях условие проскальзывания имеет вид:

$$u_{\tau 0} + P_\tau C_0 \Delta t = [u_{\tau 1} - P_\tau C_1 (1 - \Omega) \Delta t] (1 - \Omega) + [u_{\tau 2} - P_\tau C_2 \Omega \Delta t] \Omega$$

$$u_{\tau 0,1,2} = \mathbf{v}_{0,1,2} \cdot \Delta \mathbf{R} / \sqrt{\Delta \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}}$$

Из него находим касательное контактное усилие:

$$P_{\tau} = \frac{[\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\Omega] \cdot \Delta \mathbf{R}}{[C_0 + C_1(1 - \Omega)^2 + C_2\Omega^2] \Delta t \sqrt{\Delta \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{R}}}$$

Если при найденном значении не нарушено условие сцепления $|P_{\tau}| < \tau_{cr} + q|P_n|$, то расчет контактного взаимодействия заканчивается. Если это условие нарушено, то касательное усилие считаем равным предельному значению $|P_{\tau}| = \tau_{cr} + q|P_n|$, и касательные скорости узла и концов отрезка определяем с учетом этого условия.

Задача о сварке взрывом.

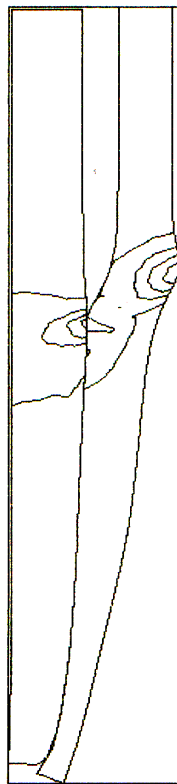
Аналитическое решение упругой задачи о соударении бесконечных пластин под малым углом проделано Ефремовым (1975) [26]; Сажиным, Симоновым (1987) [101]; Сажиным (1988) [102]. Численное решение упругопластической задачи о соударении конечных прямоугольников в геометрически линейной постановке построено в работе (Сажин В.В., Симонов (1987) [100]). В (Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский (2000) [1]) численно решена задача сварки взрывом с учетом больших пластических деформаций с целью исследования процесса волнообразования на границе. В данной работе рассмотрим задачу соударения для упруговязкопластических материалов с учетом критерия по уровню интенсивности пластических деформаций для полного сцепления (сварки).

Рассмотрим задачу высокоскоростного соударения двух разнородных металлических трубных (осесимметричная задача) или листовых (плоская задача) заготовок под действием детонационной волны.

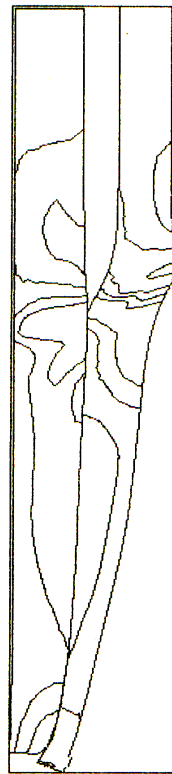
Волна распространяется по заряду взрывчатого вещества (ВВ) по внешней поверхности труб. При сварке взрывом скорость бегущей детонационной волны зависит от выбранного ВВ, толщины его слоя, и равна 2-4 км/с, что сравнимо со скоростью упругих волн, например, в титане и стали, которые применяются для изготовления биметаллических заготовок: $a_{Ti} \approx 6.0 \text{ км/с}$, $b_{Ti} \approx 3.5 \text{ км/с}$, $a_{Fe} \approx 5.5 \text{ км/с}$, $b_{Fe} \approx 3.2 \text{ км/с}$. Этим определяется дозвуковой, благоприятный для сварки режим соударения (Дерибас (1972) [25]). Давление в детонационной волне также зависит от ряда характеристик ВВ и достигает $0.3 \div 1.0 \cdot 10^4$ МПа (Крупин (1975) [53]). Эти значения значительно превышают статический предел текучести указанных металлов, что позволяет для приближенных решений использовать гидродинамический подход (Дерибас (1972) [25]). Однако следует отметить, что динамический предел текучести за счет скоростного упрочнения может в несколько раз превышать статический, и пренебрежение прочностными эффектами приводит к искажению напряженно деформированного состояния. Ширина зоны химической реакции при детонации ВВ, которая определяет скорость нагружения и разгрузки, составляет 2-5 мм (Крупин (1975) [53]), а общая протяженность импульса составляет 7-10 мм. Следовательно, длительность импульса давления $\sim 7 \cdot 10^{-3} / 2 \cdot 10^6 = 3.5 \cdot 10^{-9}$ с. Таким образом, уровень и длительность нагрузок определяют выбор

упруговязкопластической модели поведения металлов с пределом текучести, зависящим от скорости деформации. При моделировании контактного взаимодействия необходимо задать условия скольжения – сцепления соударяющихся поверхностей. Выбраны условия кулонова трения, в которые введен критерий сварки, зависящий от уровня пластических деформаций. Такой критерий не противоречит известному струйному критерию сварки, поскольку образование кумулятивной струи возможно только в случае развитых пластических течений в окрестности фронта соударения.

На Рис. 5.3.3-5.3.4 представлены результаты расчета высокоскоростного соударения титанового (внешнего) и стального (внутреннего) трубчатых образцов. Для наглядной иллюстрации процесса выбран режим с большим пиковым давлением в детонационной волне, что привело к сильным пластическим деформациям заготовок, особенно внешней титановой, в концевой зоне.



SR
 -0.458E-1
 -0.365E-1
 -0.271E-1
 -0.178E-1
 -0.85E-2
 0.828E-3



SRZ
 -0.632E-3
 -0.325E-3
 -0.18E-4
 0.289E-3
 0.596E-3
 0.902E-3

Рис. 5.3.3-а. Изолинии σ_{rr} .

Рис. 5.3.3-б. Изолинии σ_{rz} .

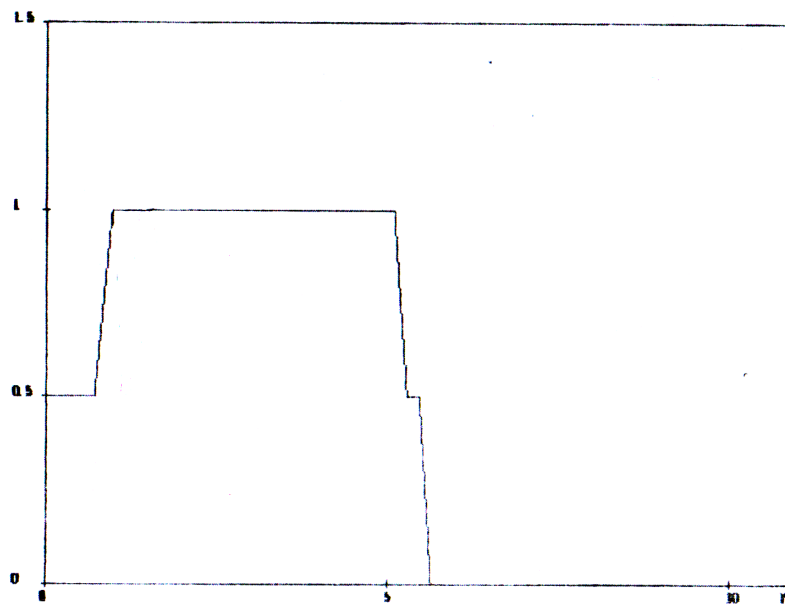


Рис.5.3.4. Характеристическая функция S_v .

Принимались следующие исходные данные. Максимальная нагрузка в детонационной волне $\sigma_0 = 6.0 \cdot 10^{-2}$, скорость детонационной волны $c_d = 0.45$, длительность импульса нагружения $d_{im} = 0.075$, статические пределы текучести $\tau_{Fe} = 0.0013$ $\tau_{Ti} = 0.0009$, относительные толщины $d_{Fe} / R = 0.1$ $d_{Ti} / R = 0.075$, зазор между заготовками $d_0 / R = 0.05$, критическая величина интенсивности пластических деформаций $\gamma_{cr} = 0.2$.

На Рис.5.3.3а-б представлены изолинии компонент напряжений σ_{rr} и σ_{rz} . О качестве сварки можно судить по функции S_v (см. Рис. 5.3.4), которая определена на контактной границе двух тел и принимает значения $S_v = 1$ в зоне контакта со сваркой, $S_v = 0.5$ в зоне контакта без сварки, $S_v = 0$ вне зоны контакта. Функция S_v показывает, что качество сварки рассмотренных образцов является хорошим всюду за исключением небольшой концевой зоны, что часто наблюдается в эксперименте («оплывание» торца, который обычно обрезают).

5.4. Примеры расчетов. Прохождение продольной волны через полость в упруговязкопластической среде. Малые и большие деформации.

Рассмотрим двумерную задачу (плоская деформация) о прохождении продольной волны через цилиндрическую полость в упруговязкопластической среде (Никитин (1985) [72]). Эта задача представляет интерес в связи с воздействием ударных волн на подземные сооружения. Продольная волна формируется от нормальной динамической нагрузки амплитудой P_0 , временем нарастания t_0 , действующей на полупространство с полостью радиуса R , расположенной на глубине H . Граница полости свободна от напряжений. Поведение среды описывается системой уравнений (5.1).

Задача решается в двух вариантах: на неподвижной сетке, и на лагранжевой сетке, узлы которой движутся вместе с частицами среды. Параметры расчетов в безразмерных величинах для Рис.5.3.1-а,б,в: $P_0=0.01$, $t_0=0.2$, $H=7$. На Рис.5.3.1-а – результаты расчета упругой динамической задачи, на Рис.5.3.1-б – упругопластической при $\tau_0=0.007$, $\delta=0$, на Рис.5.3.1-в – при $\tau_0=0.005$, $\delta=0$. Представлены изолинии компонент напряжений σ_{22} . Ось 2 направлена по нормали к границе полупространства. Концентрация напряжений характеризуется значениями σ_{22} в боковых частях полости и сильно убывает с

понижением предела текучести с $\sigma_{22}=2.4$ для упругого расчета до $\sigma_{22}=1.5$ для упругопластического при $\tau_0=0.005$. Отметим также известный факт смещения точки максимальной концентрации напряжений с границы полости во внутреннюю боковую зону.

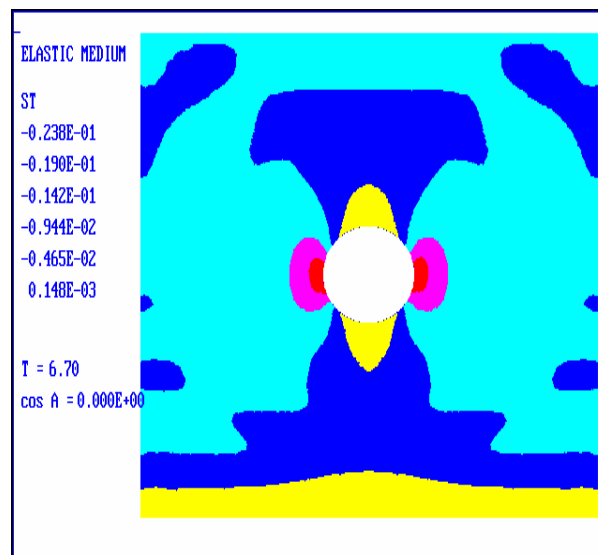


Рис.5.3.1-а. Упругий расчет.

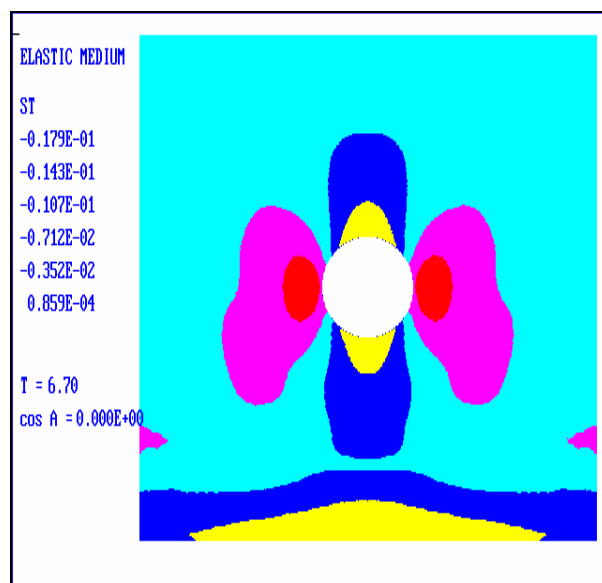


Рис.5.3.1-б. Упругопластический расчет при $\tau_0 = 0.007$

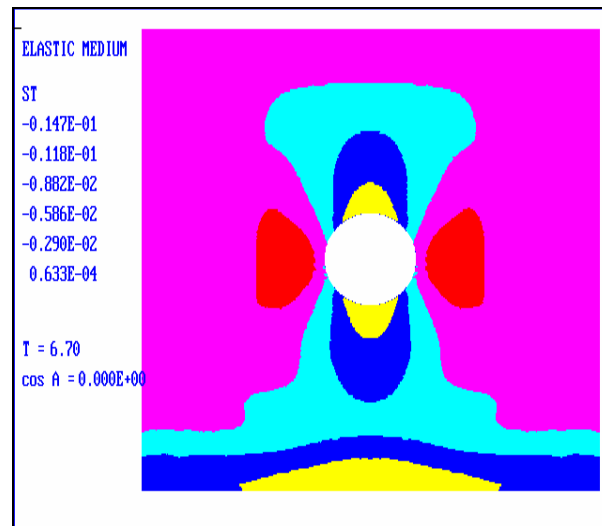


Рис.5.3.1-в. Упругопластический расчет при $\tau_0 = 0.005$

На Рис.5.3.2 представлены результаты упругопластического расчета ($\delta = 0.$) взаимодействия волны с полостью для случая, когда нагрузка значительно, в 10 раз превышает статический предел текучести $\tau_0 = 0.001$.

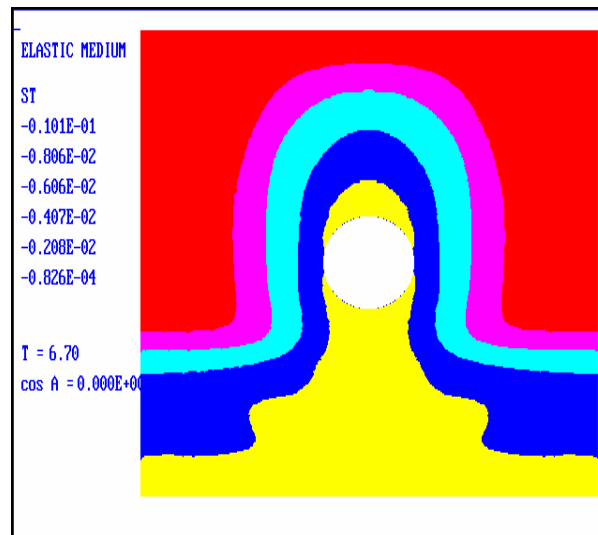


Рис.5.3.2. Упругопластический расчет $\tau_0 = 0.001$

В этом случае картина напоминает скорее обтекание гидродинамическое препятствия (сильно развитое пластическое течение).

Влияние нелинейной вязкости (параметра $\delta = 0., 1., 2.$), т.е. собственно упруговязкопластичности, на динамический процесс показано на Рис.5.3.3-а,б,в для случая развитой пластичности $\tau_0 = 0.001$. Оно описывается коэффициентом динамичности $k = \max(J_2) / \tau_0$, характеризующем превышение достигнутого значения второго инварианта девиатора над статическим пределом текучести. Корректировка напряжений проводилась по универсальной формуле

(5.4). В данном случае этот коэффициент имеет значения $k=1.21$ при $\delta=1.$, и $k=1.37$ при $\delta=2$. Таким образом, динамический предел текучести оказался больше статического почти на 40 % .

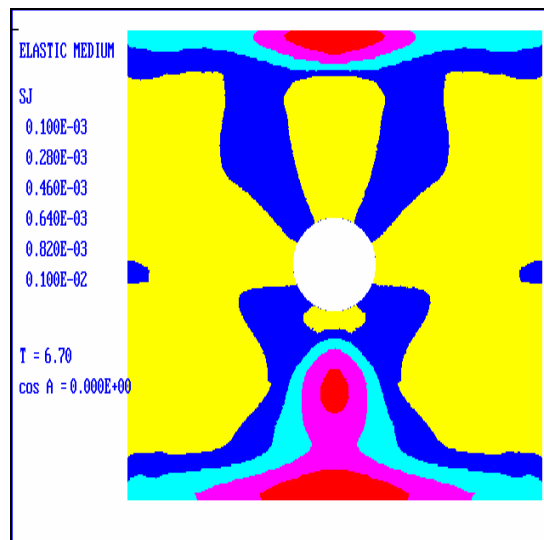


Рис.5.3.3-а. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.001$ $\delta=0$. $k=1$

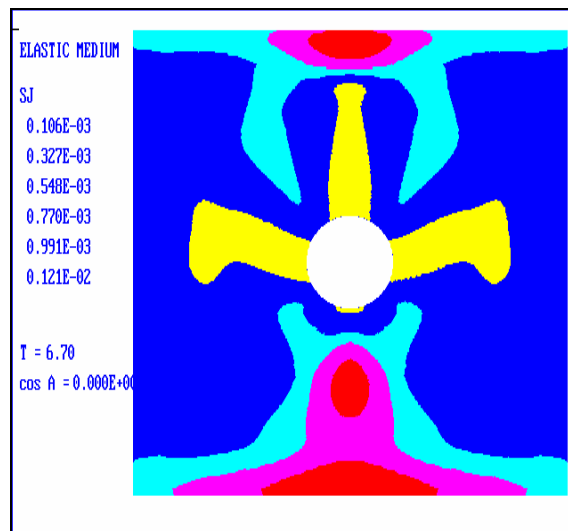


Рис.5.3.3-б. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.001$ $\delta=1$. $k=1.21$

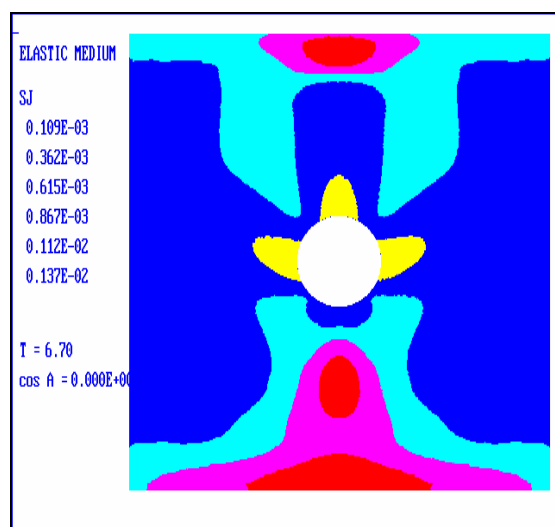


Рис.5.3.3-в. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.001$ $\delta=2$. $k=1.37$

В случае более высоких значений статического предела текучести коэффициент динамичности значительно уменьшается, как показано на Рис.5.3.4-а,б,в для $\tau_0=0.005$ до значения $k=1.06$ при $\delta=2$.

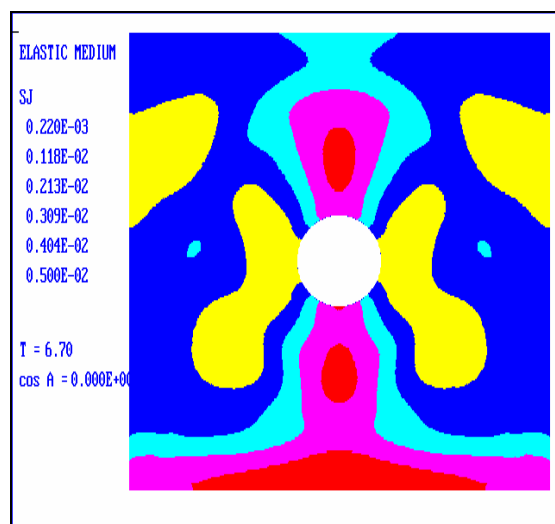


Рис.5.3.4-а. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.005$ $\delta=0$. $k=1$

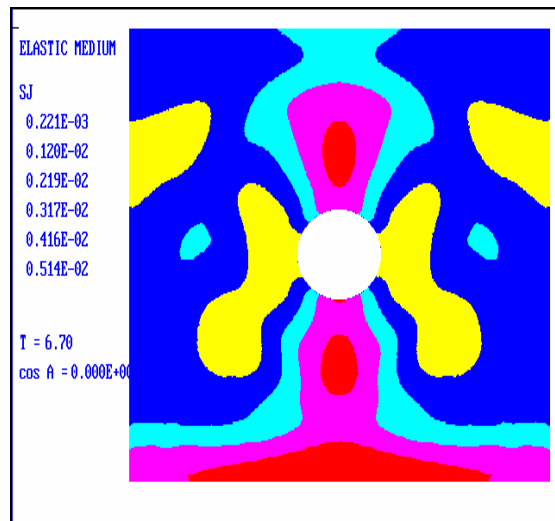


Рис.5.3.4-б. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.005$ $\delta=1$. $k=1.03$

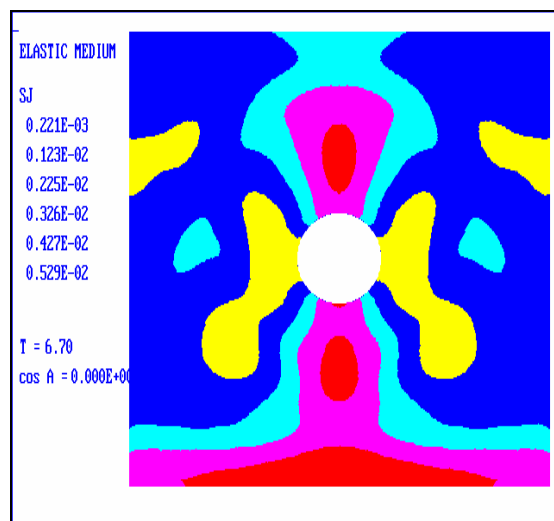


Рис.5.3.4-в. Второй инвариант девиатора при $\tau_0=0.005$ $\delta=2$. $k=1.06$

Влияние лагранжевых смещений узлов сетки при данном уровне нагрузок оказывается несущественным. Чтобы оно стало заметным,

уровень нагрузок необходимо увеличить в несколько раз. На Рис.5.3.5-а,б и на Рис.5.3.6-а,б представлены результаты упругопластического расчета при четырехкратном увеличении нагрузки и статического предела текучести $P_0=0.04$, $\tau_0=0.004$, $\delta=0$. для случая неподвижной, «замороженной» сетки (Рис. 5.3.5-а, 5.3.6-а) и лагранжевой сетки (Рис. 5.3.5-б, 5.3.6-б). На Рис.5.3.5-а,б представлены изолинии компоненты тензора напряжений σ_{22} , которые отличаются достаточно мало. На Рис.5.3.6-а,б представлена картина изменения расчетной сетки, из которой видно существенное изменение диаметра полости, произошло ее «затекание».

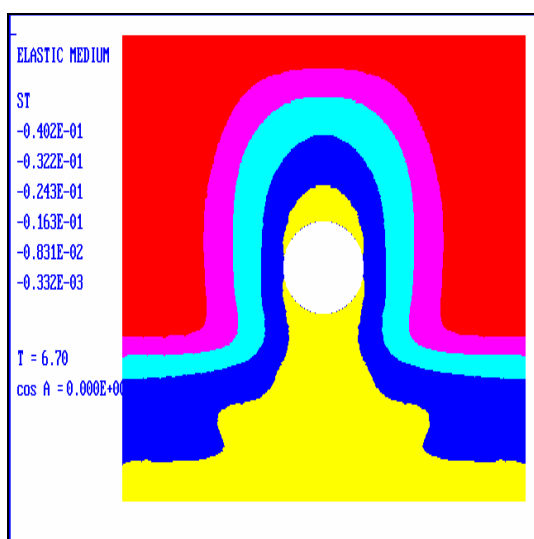


Рис.5.3.5-а

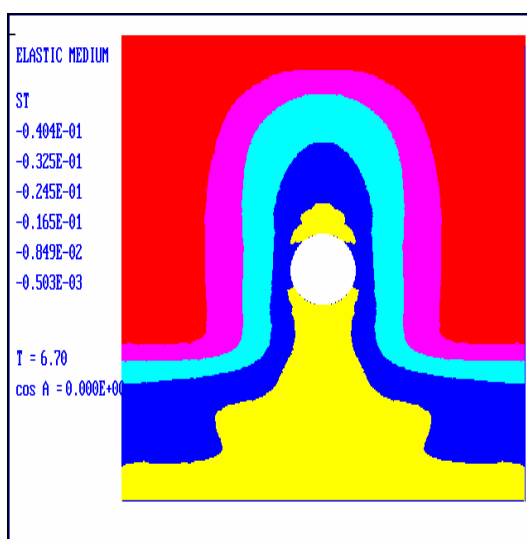


Рис.5.3.5-б

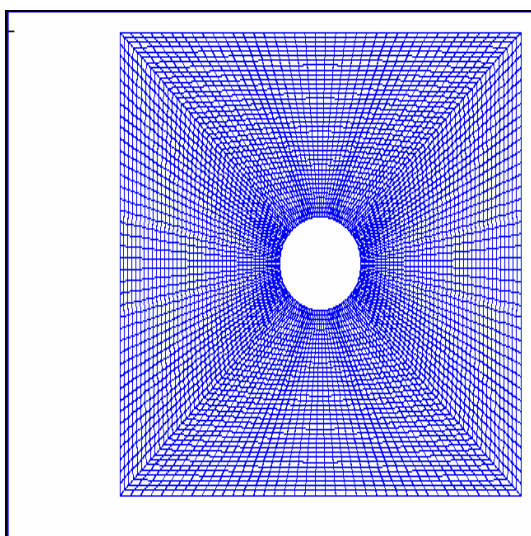


Рис.5.3.6-а

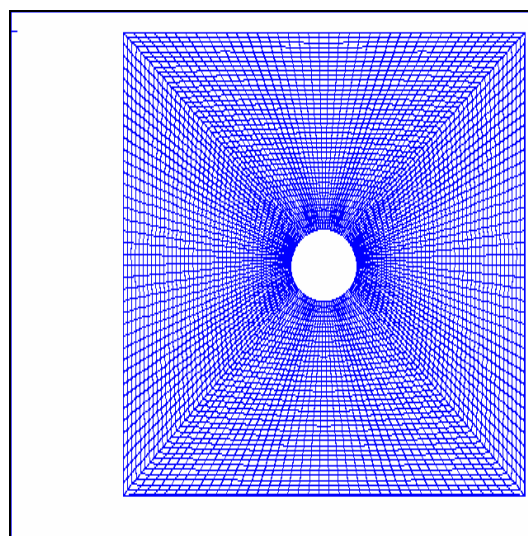


Рис.5.3.6-б

Приведенные примеры расчетов показывают, что полученные универсальные формулы корректировки девиаторов напряжений при различных значениях времени релаксации, сравнимых или меньших шага по времени, могут быть успешно использованы для моделирования быстропротекающих процессов в упруговязкопластической среде. Применение обычных явных схем при данных значениях безразмерного параметра вязкости δ для численного решения полулинейных упруговязкопластических систем уравнений привело бы к неустойчивости решения.

Заключение.

В диссертации получен вариант решения важной научно-технической проблемы развития теории и методов расчета неупругих слоистых и блочных сред с проскальзыванием и отслоением на контактных границах.

Ниже приводится перечень основных положений, выносимых на защиту.

1. Предложен новый метод аналитического интегрирования локальных соотношений теории скольжения для общего случая трехмерного напряженного состояния.

2. В общем случае трехмерного напряженного состояния аналитически проинтегрированы локальные условия теории скольжения и получены новые определяющие соотношения:

А) упруговязкопластической модели (для малой вязкости);

Б) упругопластической модели (для малого превышения предела текучести);

В) модели слоистой среды со скольжением и отлипанием слоев.

Г) ряда моделей блочных сред различной структуры.

Важным для практического применения является тот факт, что задачи для построенных моделей сред можно решать с помощью обычных алгоритмов динамической теории пластичности.

3. Для реализации предложенных моделей неупругих слоистых и блочных сред предложен новый уточненный явно-неявный численный метод, основанный на конечно-разностном методе конечных объемов и на точных решениях неявно аппроксимированных определяющих уравнений.

4. Метод реализован в виде пакета прикладных программ для персональных ЭВМ и использован для решения ряда новых

квазистатических и динамических задач о деформировании неупругих слоистых и блочных сред с полостями и о развитии в них разрушений в виде зон проскальзывания и отслоения. Решения моделируют сейсмические и техногенные воздействия на элементы зданий и сооружений. Проведено сравнение численных решений с известными экспериментальными данными. Сравнение показало хорошее качественное согласование теории и эксперимента.

Автор выражает глубокую признательность научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Н.Г.Бураго за многолетнюю неоценимую поддержку, многочисленные беседы и обсуждения вопросов, рассмотренных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Аннин Б.Д., Садовская О.В., Садовский В.М. Численное моделирование косого соударения пластин в упругопластической постановке.// Физ. мезомеханика. 2000. Т.3. №4. С. 23-28.
2. Баженов В.Г., Кибец А.Г., Садырин А.И. О модификации схемы Уилкинса численного решения трехмерных динамических задач.// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и программное обеспечение задач прочности. Горький. Изд-е Горьк. Ун-та. 1986. Вып.34. С.14-19.
3. Батдорф С.Б., Будянский Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения.// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. N1. С. 135-155.
4. Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами.// ДАН СССР. 1975. 221. №3. С. 516-519.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.СПб.: Физматлит. 2002. 630с.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука. 1984. 352с.
7. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука. 1973. 502с.
8. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Распространение упруговязкопластических волн в средах с запаздыванием текучести. // В

кн. "Распространение упругих и упругопластических волн". Труды 5-го Всесоюзного симпозиума. Алма-Ата: Наука. 1973. С. 101-107.

9. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Препринт №326. М.: Изд-е ИПМ АН СССР. 1988. 63с.

10. Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред.// Изв. РАН. МТТ. 2000. №6. С. 4-15.

11. Бураго Н.Г., Ковшов А.Н. Модель дилатирующей разрушающейся среды.// Изв. РАН. МТТ. 2001. №5, С. 112-117.

12. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов.// Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 44-85.

13. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Численное решение задач континуального разрушения. Препринт №746. М.: Изд-е ИПМ РАН . 2004. 40с.

14. Васин Р.А., Ленский В.С., Ленский Э.В. Динамические зависимости между напряжениями и деформациями.// Проблемы динамики упругопластических сред. Новое в зарубежной науке: Механика. М: Мир. 1973. №5. С. 7-38.

15. Глушко А.И., Никитин И.С. Об одном методе расчета волны хрупкого разрушения.// Изв. АН СССР. МТТ. 1986. №3. С. 129-134.

16. Глушко А.И., Нещеретов И.И. О кинетическом подходе к разрушению горных пород. //Изв. АН СССР. МТТ. 1986. N6. С. 140-146.

17. Глушко А.И. Об одном подходе к разрушению горных пород. //Изв. АН СССР. МТТ. 1988. N3. С. 130-135.

18. Глушко А.И., Нещеретов И.И. О континуальных моделях разрушения твердых тел. Ч.1.//Изв. РАН. МТТ. 1999. N1. С. 124-138. Ч.2.//Изв. РАН. МТТ. 1999. N2. С. 125-138.
19. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 439с.
20. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука. 1978. 303с.
21. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука. 1976. 400с.
22. Гулидов А.И., Фомин В.М. Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел.// Препринт ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск. 1980.
23. Гулидов А.И., Фомин В.М. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды.// ЖПМТФ. 1980. №3. С. 126-132.
24. Гульбин В.Н., Никитин И.С. Методика расчета параметров режима сварки взрывом разнородных металлов.// Сварочное производство. 1995. №1. С. 18-25.
25. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск. 1972. 188с.
26. Ефремов В.В. О косых соударениях металлических пластин в упругой постановке.// Ж. прикл. мех. и тех. физики. 1975. №5. С. 167-172.
27. Жуков А.М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных металлов.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. №8. С. 81-92.

28. Жуков А.М. О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении. // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. №12. С. 72-87.
29. Жуков А.М., Работнов Ю.Н. Исследование пластических деформаций стали при сложном нагружении.// Инж. сб. 1954. Т.18. С. 105-112.
30. Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н. Математическое моделирование задач импульсного взаимодействия и разрушения упругопластических тел. Препринт №280. М.: Изд-е ИПМ АН СССР. 1986. 67с.
31. Захаренко И.Д. Сварка металлов взрывом. Новосибирск: Наука и техника. 1990. 205с.
32. Зволинский Н.В., Шхинек К.Н. Континуальная модель слоистой среды. // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. N1. С.5-14.
33. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311с.
34. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ. 1990. 310с.
35. Киселев А.Б. Развитие метода Уилкинса для решения трехмерных задач соударения деформируемых тел.// Взаимодействие волн в деформируемых средах. М.: МГУ. 1984. С.87-100.
36. Клифтон Р.Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости. В сб. «Механика». 1968. №1. С. 103-122.
37. Ключников В.Д. О законах пластичности материала с упрочнением.// ПММ. 1958. Т.22. Вып.1. С. 97-118.
38. Ключников В.Д. Теория пластичности: современное состояние и перспективы.// Изв. РАН. МТТ. 1993. №2. С. 102-116.
39. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности, Рига: Зинатне. 1971. 147с.

40. Кобелев А.Г., Гульбин В.Н., Никитин И.С., Колесников Ф.В. Исследование напряженно-деформированного состояния при сварке взрывом слоистых биметаллов.// Сварка взрывом и свойства сварных соединений: Межвузовский сборник научных трудов. ВолгГТУ. 2000. 128с.
41. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир. 1979. 302с.
42. Койтер В.Т. Соотношения между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упругопластических материалов с сингулярной поверхностью текучести// В сб.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1960. №2. С. 117-129.
43. Кондауров В.И. О законах сохранения упруговязко-пластической среды с конечными деформациями.// Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №6. С. 100-111.
44. Кондауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями.// Ж. прикл. мех. и тех. физики.. 1982. №4. С. 133-139.
45. Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду.// Ж. прикл. мех. и тех. физики. 1984. №4. С. 760-764.
46. Кондауров В.И., Мухамедиев Ш.А., Никитин Л.В., Рыжак Е.И. Механика разрушения горных пород. М.: Наука. 1987. 218с.
47. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Модель континуального разрушения вязкоупругих тел.// Изв. АН СССР. МТТ. 1989. №3. С. 131-139.

48. Кондауров В.И. Тензорная модель континуального разрушения и длительной прочности упругих тел.// Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С.134-151.
49. Кондауров В.И., Фортов В.Е. Основы термодинамики конденсированной среды. М.: МФТИ. 2002. 336с.
50. Кондауров В.И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ. 2007. 310 с.
51. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир. 1972. 334с.
52. Крупин А.В. Деформация металлов взрывом. М.: Metallurgia. 1975. 416с.
53. Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР. 1967. 48с.
54. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неоднородных задач динамики твердого деформируемого тела.// Проблемы динамики упругопластических сред. Новое в зарубежной науке: Механика. М: Мир. 1973. №5. С. 39-84.
55. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред.// Успехи механики. 1985. Т.8. Вып.4. С. 21-65.
56. Кукуджанов В.Н. Численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела. М.: МФТИ. 1990. 95с.
57. Кукуджанов В.Н. Микроскопическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций. // Изв. РАН. МТТ. 1999. №5. С. 72-87.

58. Кукуджанов В.Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида.// Изв. РАН. МТТ. 2001. №5. С. 96-111.
59. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений. // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 98-108.
60. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. 2001. 600с.
61. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. Сложная плоская деформация.// ДАН СССР. 1964. Т. 159. №5. С. 1007-1010.
62. Линь Т.Г. Физическая теория пластичности.// Проблемы теории пластичности. Новое в зарубежной науке: Механика. М: Мир. 1976. №7. С. 7-68.
63. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений.// Ж. выч. матем. и матем. физики. 1969. Т.9. №2. С.373-386.
64. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические методы. М.: Наука. 1988. 290с.
65. Майнчен Дж., Сак С. Метод расчета «Тензор». В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». М.: Мир. 1967. С. 185-211.
66. Малмейстер А.К. Основы теории локальности деформаций.// Механика полимеров. 1965. №4. с. 12-27.
67. Молотков Л.А., Хило А.Е. Эффективные модели слоистых сред с линейными контактами общего вида.// Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1986. Т.156. С. 148-157.

68. Мохель А.Н., Салганик Р.Л. К теории пластического деформирования упрочняющихся материалов.// Изв. АН СССР. МТТ. 1976. N5. С. 98-111.
69. Мохель А.Н., Салганик Р.Л., Христианович С.А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчеты по ним.//Изв. АН СССР. МТТ. 1983. N4. С. 119-141.
70. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535с.
71. Никитин И.С. Задача о подвижной нагрузке на границе упругого полупространства с цилиндрической полостью.// Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №3. С. 93-99.
72. Никитин И.С. Задача о нагрузке, приложенной к неупругому полупространству с цилиндрической полостью.// Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №5. С.184-187.
73. Никитин И.С. Осредненные уравнения слоистой среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С. 80-86.
74. Никитин И.С. Осредненные уравнения блочной среды с нелинейными условиями взаимодействия на контактных границах.// Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №2. С. 70-76.
75. Никитин И.С. Динамика слоистых и блочных сред с проскальзыванием и трением. Препринт №366 М.: Изд-е ИПМ АН СССР, 1989. 42с.
76. Никитин И.С. О распространении волн в слоистых и блочных средах с трением на контактных границах.// Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. №7. С.3-11.

77. Никитин И.С. Упруговязкопластическая модель и теория скольжения. Препринт № 784 М.: Изд-е ИПМех РАН. 2005. 32с.

78. Никитин И.С. Теория деформирования слоистых и блочных горных массивов с учетом трения. Материалы XIV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС-2005). М.: Вузовская книга. 2005. С.348.

79. Никитин И.С. Численный метод решения «жестких» полулинейных гиперболических систем. Тезисы докладов III Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». Екатеринбург: УрО РАН. 2006. С. 87-88.

80. Никитин И.С. Интегрируемые варианты трехмерной теории скольжения для упруговязкопластических и упругопластических материалов. Материалы XV Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС-2007). М.: Вузовская книга. 2007. С. 395-396.

81. Никитин И.С. Определяющие соотношения упруговязкопластической модели и теория скольжения. // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 110-122.

82. Никитин И.С. Построение упруговязкопластической и упругопластической моделей на основе теории скольжения. Сб. докладов Международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» Саратов. 27.08-01.09. 2007г.

83. Никитин И.С. Упруговязкопластическая модель и теория скольжения. Труды IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород. 22-28 августа 2006. С. 159.

84. Никитин И.С. Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением. //Изв. РАН. МТТ. 2008. №4.
85. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск. Наука. 1979. 272с.
86. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир. 1978. 310с.
87. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат. 1986. 351с.
88. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом.// Ж. выч. матем. и матем. физики. 1984. Т.24. С. 722-739.
89. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ. 1981. 344с.
90. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ. 1984. 336с.
91. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука. 1986. 232с.
92. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир. 1968. 176с.
93. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. 744с.
94. Рихтмайер Р.Д., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир. 1972. 418с.
95. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука. 1978. 688с.

96. Русинко К.Н., Калатинец А.Е., Древаль С.С. Вопросы концепции скольжения в теории пластичности.// Прикл. механ. 1974. Т.10. Вып.1. С. 3-19.
97. Садовский В.М. Алгоритмы «корректировки» решения в задачах динамического деформирования упругопластических тел.// Моделирование в механике сплошных сред. Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та. 1992. С. 29-39.
98. Садовский В.М. Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Физматлит. 1997. 208с.
99. Сажин В.В. Численное решение задачи о наклонном соударении упругопластических прямоугольников под малым углом. Препринт №289. М.: Изд-е ИПМ АН СССР. 1986. 86с.
100. Сажин В.В., Симонов И.В. Соударение упругих и упругопластических прямоугольников под малым углом. Препринт №300. М.: Изд-е ИПМ АН СССР. 1987. 57с.
101. Сажин В.В., Симонов И.В. Наклонное соударение упругой и акустической полос в дозвуковом режиме.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №5. С.109-114.
102. Сажин В.В. Наклонное соударение двух разнородных упругих полос в дозвуковом режиме.// Изв. АН СССР. МТТ. 1988. №5. С. 85-90.
103. Салганик Р.Л. Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива.// Изв. АН СССР. МТТ. 1987. №3. С.48-56.
104. Салганик Р.Л. Смешанные статические граничные задачи для многослойных упругих структур, образованных работающими на изгиб

слоями (континуальное приближение).// Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С.88-97.

105. Салганик Р.Л. Термо- и пороупругое деформирование многослойной структуры, слои которой работают на изгиб (континуальное приближение).// Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С.60-65.

106. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир. 1982. 472с.

107. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука. Физматлит. 1976. 576с.

108. Соколовский В.В. Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях.// ПММ. 1948. 12. С. 3-11.

109. Соколовский В.В. Одномерные нестационарные движения вязко-пластической среды.// ПММ. 1949. 13. С. 623-632.

110. Степанов Г.В. Влияние скорости деформации на характеристики упругопластического деформирования металлических материалов.// Ж. прикл. мех. и тех. физики. 1982. №1. С. 150-156.

111. Угодчиков А.Г., Баженов В.Г., Рузанов А.И. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности.// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. ИТПМ СО АН СССР. 1985. Т.16. №4. С. 129-149.

112. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». М.: Мир. 1967. С. 21-263.

113. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск. Изд-во СО РАН. 1999. 600с.

114. Христианович С.А. Деформация упрочняющегося пластического материала.// Изв. АН СССР. МТТ. 1974. N2. С. 148-174.

115. Швайко Н.Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения.// Прикл. механика. 1976. Т.12. № 11. С. 12-24.

116. Швайко Н.Ю. К теории пластичности с гладкой поверхностью нагружения.// Физ.-хим. мех. матер. 1997. Т. 33. №6. С. 63-70.

117. Широ И.В., Якушев В.Л. Осесимметричная деформация гибких оболочек вращения из материала со сложной реологией. IX Всесоюзная Конференция по теории оболочек и пластин. 24-28 дек. 1973г. Ленинград// Тр. IX Всес. Конф. по теории обол. и пласт. 1973. Л.: Судостроение. 1975.

118. Широ И.В., Якушев В.Л. Физически и геометрически нелинейные деформации оболочек вращения.// Изв. АН СССР. 1975. N6. С.103-109.

119. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука. 2004. 276 с.

120. Acary V., Jean M. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method.// Monument-98. Workshop on Seismic Performance of Monuments. Lisboa. Portugal. 1998. p.69-78.

121. Adhikary D.P., Dyskin A.V. A continuum model of layered rock masses with non-associative joint plasticity.// Int. J. for Numer. and Analyt. Methods in Geomechanics. 1998. Vol. 22. 4. pp. 245-261. 122. Andreus U. Failure criteria for masonry panels under in-plane loading.// J. Struct. Engrg. 1996. Vol. 122. pp. 37-46.

123. Anthoine A. Homogenisation of periodic masonry: plane strain, generalized plane strain or three-dimensional modeling.// Commun. Numer. Methods Engng. 1997. Vol. 13. pp.319-326.
124. Asteris P.G., Tzamtzis A.D. On the use of a regular yield surface for the analysis of unreinforced masonry walls.// Electronic Journal of Structural Engineering. 2003. Vol. 3. pp. 23-42.
125. Bakulin A. Intrinsic and layer-induced vertical transverse isotropy.// Geophysics. 2003. Vol. 68. pp. 1708-1713.
126. Bakulin A. and Grechka V. Effective anisotropy of layered media.// Geophysics. 2003. Vol. 68. pp. 1817-1821.
127. Bazant Z.P., Gambarova P.G. Crack shear in concrete: crack band microplane model.// J. Struct. Engng. ASCE. 1984. Vol. 110. pp. 2015-2036.
128. Bazant Z.P., Oh B.H. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock.// J. Engng. Mech. 1985. Vol. 111. pp. 559-582.
129. Bazant Z.P., Prat P. Microplane model for brittle plastic material. Part I – Theory, Part II – Verification.// J. Engng. Mech. 1988. Vol. 114. pp. 1672-1702.
130. Brasile S., Casciaro R., Formica G. Multilevel approach for brick masonry walls – Part II: On the use of equivalent continua. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007. Vol. 196. 49-52. pp. 4801-4810 .
131. Briccoli S., Ranocchiai G ., Rovero L. A micromechanical model for linear homogenization of brick masonry.// Materials and Structures. 1999. Vol.32. 1. pp.22-30.

132. Bekaert A., Maghous S. Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium.// Mechanics of Cohesive-frictional Materials. 1996. Vol. 1.1. pp. 1-24
133. Berto L., Saetta A., Scotta R., Vitaliani R. An orthotropic damage model for masonry structures.// Int. J. Numer. Methods Engng. 2002. Vol. 55. pp 127-157.
134. Bicanic N., Stirling C., Pearce C.J. Discontinuous modelling of structural masonry//WCCM V. 5th World Congr. Comput. Mech. Vienna, Austria, 2002. p.217-226. //Eds.: H.A.Mang etc.
135. Budiansky B., Wu T.Y. Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals.// Proc. 4th U.S.Nat.Congr. Appl. Mech. 1962. p.1175.
136. Carol I., Bazant Z.P. Damage and plasticity in microplane theory.// Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34. pp.3807-3835.
137. Carol I., Bazant Z.P., Prat P. Geometric damage tensor based on microplane model.// J. Engng. Mech. 1991. Vol. 117. pp. 2429-2448.
138. Carol I., Jirasek M., Bazant Z.P. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: Free energy and consistent microplane stresses.// Int. J. Solids Struct. 2000. Vol. 38. pp. 2921-2931.
139. Cho T. F., Plesha M.E., Haimson B.C. Continuum modelling of jointed porous rock.// Int. J. for Numer.l and Analyt. Methods in Geomechanics. 1991. Vol. 15. 5. pp. 333-353.
140. Christensen R.M. Wave propagation in layered elastic media.// J. Appl. Mech. 1975. Vol .42. p.153.
141. Clifton R.J. A difference methods for plane problems in dynamic elasticity.// Quart. Appl. 1967. Vol. 25,№1.

142. Gambarotta L., Lagomarsino S. Damage model for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: The mortar joint model and its applications.// *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1997. Vol. 26. 4. pp. 423 – 439.
143. Gambarotta L., Lagomarsino S. Damage model for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: The continuum model and its applications. // *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1997. Vol. 26. 4. pp. 441 – 462.
144. Giambanco G., Fileccia Scimemi G. Mixed mode failure analysis of bonded joints with rate-dependent interface models.// *Int. J. Numer. Methods Engng*. 2006. Vol. 67. 8. pp. 1160-1192.
145. Hegemeier G., Nayfeh A.N. A continuum theory for wave propagation in laminated composites. Case I: Propagation normal to the laminates.// *J. Appl. Mech*. 1973. Vol. 40. p.503.
146. Hutchinson J.W. Elastic-plastic behavior of polycrystalline metals and composites.// *Proc. Roy. Soc*. 1970. A319. pp.247-272.
147. Kamil Tanrikulu A., Meng Y., McNiven H.D. The non-linear response of unreinforced masonry buildings to earthquake excitations.// *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1992. Vol. 21. 11. pp. 965-985.
148. Kawamoto T., Ichikawa Y., Kyoya T. Deformation and fracturing behavior of discontinuous rock mass and damage mechanics theory.// *Int. J. for Numer. and Analyt. Methods in Geomechanics*. 1988. Vol. 12. 1. pp. 1-30.
149. Kawamoto T., Aydan O. A review of numerical analysis of tunnels in discontinuous rock masses.// *Int. J. for Numer. and Analyt. Methods in Geomechanics*. 1999. Vol. 23. 13. pp. 1377-1391.

150. Korobov S.A., Gulbin V.N., Nikitin I.S. Stressed-strained state analysis of material under high-speed deformation conditions.// Journal de Physique IV. Colloque C3. 1991. Vol.1. pp. 235-240.

151. Kuhl E., Steinmann P., Carol I. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modeling.// Int. J. Solids Struct. 2001. Vol. 38. pp. 2933-2951.

152. Lau D.T., Noruziaan B., Razaqpur A.G. Modelling of contraction joint and shear sliding effects on earthquake response of arch dams.// Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1998. Vol. 27. 10. pp. 1013-1029.

153. Lehmann Th. Some thermodynamic considerations of phenomenological theory of non-isothermal elastic-plastic deformations.// Arch. Mech. 1972. Vol. 24. pp. 975-989.

154. Lourenco P. A matrix formulation for the elastoplastic homogenization of layered materials.// Mechanics of Cohesive-frictional Materials. 1996. Vol. 1. 3. pp. 273-294.

155. Lourenco P., de Borst R., Rots J. A plane stress softening plasticity model for masonry structures.// Int. J. Numer. Methods Engng. 1997. Vol. 40. p. 4033-4057.

156. Lourenco P., Rots J. Multisurface interface model for analysis of masonry structures.// J. Engng. Mech. 1997. Vol. 123. №7.

157. Lourenco P., Zucchini A. Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach.// Computers and Structures. 2007. Vol. 85. 3-4. pp. 193-204.

158. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. // AIAA Paper. 1969. pp. 63-354.

159. Maenchen J., Sack S. Method "Tensor". // Comput. Methods in Hydrodynamics. Older B., Fernbach S., Rotenberg M. Editors. 1964.
160. Magenes G., Calvi G.M. In-plane seismic response of brick masonry walls. // Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1997. Vol. 26. 11. pp. 1091-1112.
161. Maghous S., de Buhan P., Bekaert A. Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach. // Mechanics of Cohesive-frictional Materials. 1998. Vol. 3. 3. pp. 207-228.
162. Malvern L.E. The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect.// J. Appl. Mech. 1951. Vol. 18. pp.203-208.
163. Malvern L.E. Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect.// Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 8. pp.405-411.
164. Malvern L.E. Introduction to the mechanics of a continuum medium. Prentice Hall. Englewood Cliffs. N.J. 1969.
165. Massart T.J., Peerlings R.H.J., Geers M.H.D., Gottscheiner S. Mesoscopic modeling of failure in brick masonry accounting for three-dimensional effects.// Engineering fracture mechanics. 2005. Vol. 72. 1238-1253.
166. Massart T.J., Peerlings R.H.J., Geers M.H.D. Mesoscopic modeling of failure and damage-induced anisotropy in brick masonry.// Eur. J. Mech. And Solids. 2004. Vol. 23. 719-735.
167. Massart T.J., Peerlings R.H.J., Geers M.H.D. An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations with localization of damage.// Int. J. Numer Methods Engng. 2007. Vol. 69. 5. pp. 1022-1059.

168. Molotkov L.A., Bakulin A.V. An effective model of a fractured medium with fractures modeled by the surfaces of discontinuity of displacements.// Journal of Mathematical Sciences. 1997. Vol . 86. N. 3. pp. 2735-2746.
169. Morland L.W. Continuum model of regularly jointed medium.// J. Geoph. Research. 1974. Vol.79. №3. pp.357-362.
170. Nikitin I. Elastoviscoplastic model and concept of slip.// Multidiscipline Modeling in Materials And Struct. 2007. Vol.3. № 1. pp.91-106.
171. Nikitin I. The Integrable variants of the 3D slip theory for elastoviscoplastic and elastoplastic models. EMMC-10 Conference “Multi-phases and multi-components materials under dynamic loading” 11-14.06.2007. Kazimierz Dolny, Poland.
172. Nikitin I. The Integrable Variant of the Theory of Slip.// Multidiscipline Modeling in and Struct. 2008 .Vol. 4. № 2. pp. 163-178.
173. Ozbolt J., Bazant Z.P. Microplane model for cyclic triaxial behavior concrete.// J. Engng. Mech. Vol. 118. pp. 1365-1386.
174. Papa E. A unilateral damage model for masonry based on a homogenisation procedure.// Mechanics of Cohesive-frictional Materials. 1996. Vol. 1. 4. pp. 349-366.
175. Perzyna P. The constitutive equations for the rate sensitive plastic materials.// Quart. Appl. Math. 1963. Vol. 20. №4.
176. Perzyna P., Wojno W. On the constitutive equations for the rate sensitive plastic materials of finite strain.// Arch. Mech. Stoc. 1968. Vol. 20. №5.
177. Perzyna P. Thermodynamic theory of viscoplasticity.// Advances in Applied Mechanics. 1971. Vol.11. pp.313-354.

178. Plesha M.E. Constitutive models for rock discontinuities with dilatancy and surface degradation.// International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics. 1987. Vol. 11. 4. pp. 345-362
179. Singh B. Continuum characterization of jointed rock masses : Part I—The constitutive equations. // Int. J. of Rock Mechanics and Mining Science & Geomechanics . 1973. Vol. 10. 4. pp. 311-335.
180. Sun C.T., Achenbach J.D., Hermann G. Continuum theory for a laminated medium. // J. Appl. Mech. 1968. Vol. 35. p.467.
181. Tomashevich M., Klemenc I. Seismic behavior of confined masonry walls.// Earthquake Engineering & Structural Dynamics. 1997. Vol. 26. 10. pp.1059-1071.
182. Tsai S.W., Wu E.M. A general failure criterion for anisotropic materials.// Journal of Composite Materials. 1971. Vol. 5. pp. 58-80.
183. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. // Comput. Methods in Hydrodynamics. Older B., Fernbach S., Rotenberg M. Editors. 1964.
184. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New-York. 1999. p.264.
185. Zienkiewicz O.C., Pande G.N. Time-dependent multilaminate model of rocks - a numerical study of deformation and failure of rock masses.// Int. J. Numer. and Analyt. Methods in Geomechanics. 1977. Vol. 1. 3. pp. 219-247.
186. Zhuge, Y., Thambiratnam D. P., and Corderoy J. Nonlinear Dynamic Analysis of Unreinforced Masonry. // Journal of Structural Engineering. 1998. Vol. 124. No.3. pp.270-277.

187. Zucchini A., Lourenco P.B. A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry.// Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39. pp. 3233-3255.

188. Zucchini A., Lourenco P.B. A coupled homogenisation-damage model for masonry cracking.// Int. J. Solids Struct. 2002. Vol. 39. pp. 3233-3255.