

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Институт проблем механики

*На правах рукописи*

ПАРШИН ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ НАРАЩИВАЕМЫХ ТЕЛ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАССОВЫХ СИЛ

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
А.В. Манжиров

Москва – 2006

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
0.1 Базовые определения . . . . .	7
0.2 Обзор литературы . . . . .	8
0.3 Описание работы . . . . .	14
0.4 Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости однородно стареющих изотропных тел . . . . .	20
1. Общие уравнения . . . . .	20
2. Одноосное растяжение . . . . .	21
3. Случай единого ядра ползучести . . . . .	23
4. Вязкоупругие характеристики стареющего материала и их возможные аппроксимации . . . . .	23
0.5 Задача о деформировании наращиваемого тела . . . . .	26
1. Особенности деформирования наращиваемых тел . . . . .	26
2. Основные соотношения квазистатики кусочно-непрерывно наращиваемых тел при малых деформациях . . . . .	26
3. Преобразование общей квазистатической задачи для кусочно-непрерывно наращиваемого линейно вязкоупругого однородно стареющего тела . . . . .	31
 <b>Глава 1 Наращивание шара</b>	
<b>в центральном силовом поле</b>	<b>37</b>
Введение . . . . .	38
1.1 Постановка задачи . . . . .	39
1.2 Напряженно-деформированное состояние шара до начала наращивания . . . . .	41
1.3 Деформирование шара в процессе его непрерывного роста . . . . .	46
1.4 Деформирование шара после остановки роста . . . . .	49
1.5 Напряженно-деформированное состояние кусочно-непрерывно наращиваемого шара . . . . .	50
1.6 Скачок тензора напряжений на границе раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела . . . . .	54

1.7	Особенности напряженного состояния наращиваемого шара . . . . .	63
1.	Поведение напряжений в окрестности первоначальной базовой поверхности роста . . . . .	64
2.	Поведение напряжений вблизи последующих базовых поверхностей . . . . .	64
3.	Поведение девиатора напряжений внутри наращиваемого шара . . . . .	67
1.8	Упругий случай . . . . .	69
1.9	Наращивание гравитирующего шара . . . . .	72
1.	Вязкоупругий случай . . . . .	72
2.	Наращивание гравитирующего упругого шара . . . . .	79
1.10	Основные результаты и выводы . . . . .	80

## Глава 2 Формирование цилиндрического слоя на вращающейся оправке 83

	Введение . . . . .	84
2.1	Постановка задачи . . . . .	84
2.2	Краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого слоя . . . . .	87
2.3	Решение краевой задачи . . . . .	92
2.4	Упругий случай . . . . .	93
2.5	Остаточные напряжения в изготовленном слое . . . . .	95
1.	Остаточные напряжения после остановки вращения . . . . .	95
2.	Остаточные напряжения в слое после остановки его вращения и отсоединения от оправки . . . . .	99
2.6	Модельные задачи . . . . .	102
1.	Задача о силовой намотке . . . . .	103
2.	Задача о внутреннем напылении . . . . .	108
3.	Примеры наращивания за несколько этапов . . . . .	110
2.7	Основные результаты и выводы . . . . .	113

## Глава 3 Возведение тяжелой полукруглой арки на горизонтальном основании 115

	Введение . . . . .	116
3.1	Постановка задачи . . . . .	117
3.2	Краевая задача для исходного тела . . . . .	120
3.3	Деформирование кусочно-непрерывно наращиваемой арки . . . . .	121
3.4	Построение решений краевых задач . . . . .	125
3.5	Решение задачи на этапе до начала наращивания . . . . .	134
3.6	Решение задачи на этапе кусочно-непрерывного роста . . . . .	137
3.7	Упругий случай . . . . .	140

3.8	Деформирование возводимой арки под действием сил тяжести	141
1.	Конкретизация общих соотношений	141
2.	Характеристики материала и некоторые предварительные соглашения	143
3.	Изготовление тонкостенной арки	146
4.	Усиление изначально толстостенной арки	156
5.	Особенности напряженного состояния общего характера	162
6.	Деформирование произвольного вязкоупругого тела, наращиваемого в поле сил тяжести	164
7.	Состояние рассматриваемой конструкции при различных режимах ее возведения	167
3.9	Наращивание арки предварительно напряженными конструктивными элементами	184
3.10	Локальная силовая поддержка арки в процессе возведения	193
3.11	Основные результаты и выводы	212
	<b>Заключение</b>	<b>216</b>
	<b>Приложение А Ограничения на параметры аппроксимации характеристик используемого материала</b>	<b>218</b>
	<b>Приложение Б Организация вычислительного процесса и методы проверки результатов</b>	<b>220</b>
Б.1	Организация вычислений	220
Б.2	Проверка результатов	222
1.	Эволюции скачков напряжений	222
2.	Интегральные условия равновесия	222
	<b>Список литературы</b>	<b>228</b>

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию закономерностей эволюции напряженно-деформированного состояния упругих и стареющих вязкоупругих изотропных тел в процессе их кусочно-непрерывного наращивания в полях массовых сил различной природы. Изучаются квазистатические процессы деформирования, сопровождающиеся малыми деформациями.

## Введение

Множество природных явлений и технологических процессов сопровождается увеличением размеров и изменением формы твердых тел за счет присоединения к ним дополнительного материала. При исследовании такого рода процессов важно учитывать особенности постепенного притока нового вещества к поверхности тела при одновременном действии нагрузок. Этого нельзя осуществить в рамках классической механики деформируемого твердого тела, даже если рассматривать традиционные уравнения и граничные условия в переменной во времени области.

В качестве механической нагрузки в указанных процессах часто выступают массовые силы. Это силы, возникающие в результате действия на тело физических полей (силы тяжести, кулоновские силы), силы инерции, вызванные движением тела в пространстве как жесткого целого (прежде всего, центробежные силы), силы взаимного притяжения (например, гравитационного) частиц материала.

С постоянным действием сил тяжести приходится считаться при расчете постепенно возводимых строительных сооружений (зданий, плотин, насыпей) и последовательно монтируемых конструкций значительных размеров, при исследовании процессов формирования массивных природных объектов (намерзание ледников и ледяного покрова, зарождение осадочных и вулканических горных пород), процессов роста монокристаллов. Силы кулоновского взаимодействия играют ключевую роль в технологических процессах электролитического формования или нанесения покрытий электростатическим способом, а следовательно, не могут быть исключены из рассмотрения и при анализе напряженно-деформированного состояния изготавливаемых подобным образом изделий. Цен-

тробежные силы необходимо принимать во внимание в случае наращивания вращающихся тел, в частности, при моделировании ряда технологических процессов изготовления или усиления элементов конструкций и деталей машин и нанесения на них покрытий. К таким процессам можно отнести намотку или напыление материала на вращающуюся оправку или заготовку. Без учета сил гравитационного взаимопритяжения частиц, а при некоторых условиях еще и центробежных сил инерции, не обойтись при изучении процессов формирования массивных космических объектов в результате аккреции.

Элементы материала, присоединяемые к телу в процессе его наращивания, нередко подвергаются предварительному деформированию, вызывающему возникновение в них начальных напряжений. В таком случае в растущем теле будут формироваться поля напряжений и деформации даже при отсутствии внешней нагрузки. Примерами здесь могут служить силовая намотка или строительство с использованием предварительно напряженных конструктивных элементов.

Следует заметить, что деформирование растущего тела, также как и классического тела постоянного состава, может быть обусловлено не только различного рода силовыми воздействиями, но и определенными физическими факторами, не выражающимися в виде таких воздействий, например, температурным полем. Влияние этих факторов на напряженно-деформированное состояние рассматриваемых объектов во многих процессах (таких, к примеру, как кристаллизация металлических расплавов или отверждение полимерных растворов) может оказаться определяющим. Однако данный аспект проблемы наращивания деформируемых тел ниже рассматриваться не будет.

Многие реальные искусственные и природные материалы (бетон, полимеры, лед, горные породы, грунты, древесина) проявляют ярко выраженные свойства ползучести и старения, то есть способны деформироваться при фиксированных нагрузках, а их механические характеристики изменяются с возрастом под действием тех или иных физико-химических механизмов. Ясно, что в силу существенной зависимости от времени протекающих в них деформационных процессов, процессы наращивания тел с использованием таких материалов обладают целым рядом специфических особенностей и при этом достаточно сложны для моделирования. Однако исследование именно этих процессов весьма актуально с точки зрения разнообразных инженерных и физических приложений.

## 0.1 Базовые определения

Введем некоторые первоначальные определения, которые будут активно использоваться в дальнейшем и частично потребуются уже в следующем вводном параграфе.

Следуя уже установившейся терминологии, под *наращиваемым (или растущим) телом* будем понимать такое деформируемое твердое тело, которое в процессе деформирования пополняется новыми материальными элементами, присоединяемыми к его поверхности. Часть границы растущего тела, к которой в данный момент времени присоединяется дополнительный материал, назовем (*текущей, или мгновенной*) *поверхностью роста*. Считается, что присоединение дополнительного материала происходит в условиях полного сцепления частиц на этой поверхности. Понятно, что в общем случае она может оказаться несвязной, а в частном случае — покрывать всю границу рассматриваемого тела.

Если за каждый бесконечно малый промежуток времени к поверхности тела присоединяется лишь бесконечно тонкий слой материала, то речь идет о процессе *непрерывного наращивания (или роста)* — в противоположность *дискретному* процессу, когда к телу мгновенно присоединяются элементы не бесконечно малых размеров. Если этапы непрерывного роста чередуются с интервалами времени, в течение которых отсутствует приток к телу дополнительного материала, то следует говорить о *кусочно-непрерывном*<sup>1</sup> *наращивании* [49].

В общем случае предполагается, что процесс наращивания начинается с присоединения материала к поверхности некоторого уже существующего твердого тела, которое в результате определенных механических или иных воздействий начинает деформироваться за некоторое время до этого момента. После начала наращивания оно становится частью рассматриваемого растущего тела, которую будем называть его *исходной частью (или исходным телом)*. Однако в частном случае процесс непрерывного роста может начаться и без участия исходного тела. В этом случае возникает приток материала, например, к некоторому точечному центру или какой-либо жесткой поверхности (данные варианты также рассматриваются в настоящей работе).

При любом варианте наращивания ту часть созданного в результате него твердого тела, которая образована из всего поступавшего во вре-

---

<sup>1</sup>Следует заметить, что данный термин не связан здесь с тем смыслом, который обычно приписывается ему в математическом анализе. Что же касается изменения во времени объема кусочно-непрерывно наращиваемого тела, то оно, очевидно, происходит *непрерывным* образом.

мя его роста дополнительного материала, будем называть *дополнительной частью* (*дополнительным телом*). Части, сформированные в кусочно-непрерывном процессе на различных этапах непрерывного роста, следуя [49], назовем *субтелами*. Заметим, что эти части в общем случае могут являться несвязными и иметь довольно сложную структуру с точки зрения геометрии распределения в них моментов включения различных частиц в состав рассматриваемого тела.

Те поверхности внутри наращиваемого тела (вообще говоря, несвязные), с которых в процессе роста начиналось формирование отдельных субтел, назовем *базовыми поверхностями (роста)*. *Первоначальная базовая поверхность* представляет собой, очевидно, ту часть граничной поверхности исходного тела, к которой начинается приток дополнительного материала в первый момент процесса наращивания. Ясно, что любая из базовых поверхностей в общем случае может не совпадать со всем подмножеством точек границы сформированного на ней субтела, отделяющим это субтело от уже существовавшей к моменту начала его формирования части наращиваемого тела.

## 0.2 Обзор литературы

Задачи о механическом поведении наращиваемых тел обладают в общем случае целым рядом специфических черт и образуют особый класс задач механики деформируемого твердого тела (см. § 0.5). Это было понято сравнительно недавно (в начале 50-х гг. прошлого столетия), после чего начались систематические исследования в данной области, которые и сегодня еще не могут претендовать на завершенность.

Поскольку в настоящей работе будет идти речь только о процессах кусочно-непрерывного (и, как частный случай, непрерывного) роста, то в этом параграфе мы проследим ключевые моменты в истории изучения лишь такого рода процессов и обсудим основные результаты, достигнутые в соответствующем направлении механики.

А. По всей видимости, первая постановка задачи, которую в соответствии с приведенной выше классификацией следует отнести к задачам о непрерывном наращивании, была описана в монографии [79]<sup>2</sup> (как указано в данном руководстве, подобные задачи уже в 1930 г. предлагались на выпускных экзаменах студентам Кембриджского университета). Речь

---

<sup>2</sup>В оригинале: *Southwell R. V. An introduction to the theory of elasticity for engineers and physicists. Oxford: University Press, 1941. VII + 509 p.*

шла о намотке на деформируемую круговую трубу многослойного проводящего бандажа с произвольным, в общем случае, переменным натягом. Моделирование проводилось для плоского случая в рамках линейной изотропной теории упругости без учета динамических эффектов. Реальный процесс укладки витков проволоки в рассматриваемой модели заменялся процессом непрерывного увеличения наружного радиуса трубы за счет последовательного присоединения к ней элементарных кольцевых слоев материала, подвергнутых предварительному растяжению. Решение строилось по существу предельным переходом от соответствующего дискретного процесса, в котором необходимо суммировать приращения напряжений, вызываемые присоединением каждого очередного слоя. Результирующее напряженное состояние тела находилось в итоге с помощью процедуры интегрирования.

Описанный пример очень наглядно демонстрировал эффект возникновения и развития полей напряжений в теле в результате постепенного добавления к нему новых изначально напряженных элементов.

Б. Тот же подход, что и в [79], был использован Э.И. Рашбой в оригинальной работе [78] для определения в плоском приближении квазистатических упругих напряжений в бесконечно протяженном (в горизонтальном и вертикальном направлениях) склоне, непрерывно наращиваемом предварительно не напряженными горизонтальными тяжелыми слоями по закону подобия формы. Эта работа стала первым исследованием, в котором решалась механическая задача о наращивании некоторого твердого тела в поле массовых сил. Кроме того, в ней впервые было явно указано на:

- а) невозможность использования условий совместности деформаций при расчете напряженного состояния наращиваемого тела и*
- б) принципиальное отличие этого состояния от состояния тела той же конфигурации, но загруженного после формирования.*

Эти же выводы (возможно, независимо от Рашбы) были высказаны в работах [92, 93] спустя десять лет после опубликования статьи [78]. В данных работах тем же методом строились решения той же самой задачи, что и в [78], а также задачи о непрерывном росте упругого шарового слоя в его собственном гравитационном поле за счет притока извне нового ненапряженного материала.

Осознание двух отмеченных выше фундаментальных фактов, кажущихся вполне очевидными сейчас, но встречавших порой непонимание в

то время<sup>3</sup>, можно считать первым шагом на пути к построению общей теории деформирования наращиваемых тел.

В. Построение такой теории было начато, однако, значительно позже в работах [87] и [6], посвященных вопросам постановки квазистатической задачи наращивания для произвольного тела при малых деформациях. Была еще раз подчеркнута невозможность использования в такой постановке самих, стандартных для механики деформируемого твердого тела, условий Сен-Венана совместности компонент тензора деформации и формул Коши, выражающих эти величины через перемещения, и при этом было указано на целесообразность перехода к их аналогам для скоростей деформации и скоростей перемещений, справедливых, в том числе, и для растущего тела.

В [87], а потом в [88] также велась речь о возможности сведения рассматриваемой проблемы в случае вязкоупругого материала (более сложном и содержательном с точки зрения изучаемых вопросов по сравнению с чисто упругим случаем) к решению некоторой классической краевой задачи теории упругости, поставленной для скоростей движения частиц, скоростей деформации и скоростей изменения величин, полученных в результате действия на напряжения оператором вязкоупругости, в параметрически изменяющейся со временем области, то есть об обобщении известного подхода Вольтерра на случай растущего тела.

Данная идея была математически обоснована и доведена до логической завершенности лишь в гораздо более поздних исследованиях [19, 49]. Она оказалась весьма продуктивной при решении задач о наращивании вязкоупругого тела в достаточно общей постановке (см. пп. 3, И).

Г. Примечательно, что долгое время оставалось незамеченным одно весьма важное, хотя и вполне очевидное обстоятельство. А именно, что

*в) корректное краевое условие, которое следует выставлять на поверхности непрерывного роста, должно принципиальным образом отличаться от обычных условий, выставляемых на остальных участках границы наращиваемого тела.*

На это обстоятельство, по-видимому, впервые было обращено внимание в [83]. В работах [9, 84] были сформулированы произвольные начальные

---

<sup>3</sup>Так, например, в реферативном журнале «Механика» №9 за 1954 г. был опубликован реферат статьи [78] буквально следующего содержания (реф. 4972, с. 59):

«На одном частном примере автор стремится показать влияние порядка возведения сооружения на напряженное состояние последнего. При этом используются ошибочные рассуждения.»

условия для тензоров напряжений и деформации во всех точках дополнительной части тела на основании представления о том, что для замкнутости рассматриваемой математической задачи наращивания должно быть заранее известно полное напряженно-деформированное состояние всех дополнительных материальных элементов, в котором эти элементы присоединяются к растущему телу. При этом было замечено, что такого рода начальные условия эквивалентны заданию граничных значений *всех компонент* названных тензоров на текущей поверхности непрерывного роста, и показано, что из них вытекают определенные условия на скорости изменения компонент тензора напряжений, аналогичные по виду классическим граничным условиям в напряжениях и зависящие как от начальных напряжений в материале и закона движения поверхности роста, так и от действующих на тело объемных сил. В [9, 85] было указано также на необходимость наличия информации в общем случае о всей *истории* изменения напряженно-деформированного состояния присоединяемых к телу элементов вплоть до момента их присоединения.

Заметим, что однородные начальные условия для тензоров напряжений и деформации в непрерывно присоединяемом материале в явном виде содержались уже в работе [87], где считалось, что история изменения напряженно-деформированного состояния всех материальных элементов начинается лишь с момента их включения в состав растущего тела, причем в этот момент каждый элемент находится в своем естественном состоянии. Такие же условия негласно принимались и в более ранних работах [78, 92, 93].

Д. Интересно отметить, что с самого начала в работах по механике непрерывного наращивания фигурировала такая привычная в механике твердого тела величина как тензор деформации. Однако нетрудно понять, что традиционное введение меры деформации в растущем теле невозможно ввиду отсутствия у него единой недеформированной конфигурации (см. § 0.5). Поэтому использование понятия деформации и какой-либо ее величины в рассматриваемых задачах нуждается в дополнительных пояснениях. Конструктивный способ определения тензора малой деформации в непрерывно наращиваемом твердом теле был предложен лишь в работе [60]. Данный способ базируется на достаточно естественных представлениях, основная идея которых была озвучена еще в [37] при рассмотрении одного частного примера.

Е. Сначала одни только идеи Раппа [78], а затем и другие общие теоретические предположения, выдвинутые в последующих цитированных

работах, вызвали большой интерес исследователей к зарождающейся новой отрасли механики деформируемого твердого тела — механике наращиваемых тел — и инициировали множество работ в этом направлении. Развиваемые подходы стали активно применяться, в том числе, и при решении конкретных прикладных вопросов, в частности, в инженерных расчетах постепенно возводимых массивных гидротехнических сооружений (см., к примеру, монографии [38, 89]).

В итоге был рассмотрен ряд задач о наращивании твердых тел и выявлены некоторые характерные для таких задач механические эффекты. Не приводя здесь подробной библиографии, касающейся данных исследований, укажем только, что соответствующие ссылки, а также описания многих из рассмотренных задач можно найти, например, в книгах [8, 18, 25, 28, 38, 86, 89] и в обзоре [22].

Ж. Параллельно с этими исследованиями стали развиваться и направления, связанные с изучением больших деформаций в растущих телах [10, 11, 13, 14, 18, 58, 59, 86] и протекающих в таких телах динамических процессов [20, 21, 23, 24, 26, 27], а также с применением вариационных методов к постановке и решению задач наращивания [12, 16, 18, 36, 61, 64, 95]. Были предложены некоторые общие подходы и рассмотрены отдельные модельные задачи.

3. Отметим, что решение геометрически линейных квазистатических задач о непрерывном наращивании упругих тел (даже в физически нелинейной постановке) теоретически не вызывает принципиальных трудностей, поскольку скорость изменения напряженно-деформированного состояния любого такого тела определяется только мгновенными характеристиками процессов его роста и нагружения. Иначе обстоит дело в той ситуации, когда рассматриваемый материал проявляет свойства деформационной наследственности и на процесс изменения напряженно-деформированного состояния растущего тела в любой момент времени влияет вся предшествующая история деформирования каждого его материального элемента (в том числе и находящихся в составе исходного тела). Здесь построение решения задачи в общем случае является уже серьезной математической проблемой.

Общий и эффективный подход к разрешению этой проблемы отсутствовал вплоть до появления работ [19, 49]. Во всех предшествующих исследованиях по теории вязкоупругости наращиваемых тел изучались лишь относительно простые частные задачи, получение решений которых возможно с помощью тех или иных частных приемов. Важно под-

черкнуть, что исследовать таким образом кусочно-непрерывные процессы роста было бы крайне затруднительно. Поэтому они не рассматривались вовсе, что, естественно, не позволяло перейти к моделированию многих реальных природных и технологических процессов.

Общая безынерционная задача о кусочно-непрерывном наращивании линейно вязкоупругого однородно стареющего тела при малых деформациях, в которой учитывается возможность загрузки исходного тела за некоторое время до начала его наращивания и возможно наличие произвольных пауз между этапами непрерывного роста, была впервые рассмотрена в работе [19]. Предполагалось отсутствие массовых сил в теле, а также нагрузки на его текущей поверхности роста и на том участке границы временно не растущего тела, к которой в дальнейшем предполагается приток материала.

Манжировым А.В. был разработан эффективный математический метод построения решения поставленной смешанной (с точки зрения классических краевых условий) неклассической задачи механики деформируемого твердого тела, который был изложен в [19] (описание этого метода можно найти также в монографиях [25, 28]). Важно отметить, что в соответствии с данным методом решение поставленной задачи ищется сразу во всей переменной во времени области, занимаемой растущим телом. Иными словами, не требуется дополнительная процедура сопряжения решений, построенных отдельно в различных частях рассматриваемого тела, осуществлявшаяся, например, в [57]. Такая процедура, очевидно, может гарантированно привести к успеху лишь в ряде геометрически простейших случаев. В других же ситуациях, например, как в задаче о растущей четвертьплоскости, рассмотренной в [17], она должна натолкнуться на принципиальные математические трудности. В этом смысле обсуждаемый метод является достаточно гибким и позволяет с единых позиций изучать самые разнообразные проблемы из соответствующего класса, в том числе и в существенно неоднородной постановке.

В докторской диссертации профессора А.В. Манжирова и его работе [49] данный метод был распространен на общий случай, когда рассматриваемое тело может подвергаться воздействию произвольного поля массовых сил, а все его будущие и фактические поверхности роста могут загружаться произвольной нагрузкой (см. также § 0.5).

*И.* Указанные в предыдущем пункте результаты позволили в рамках рассматриваемой модели построить общую математическую теорию наращиваемых тел и на ее основе решить ряд сложных существенно неод-

номерных задач наращивания, в том числе задач кручения, плоских, осесимметричных и контактных задач [19, 25, 28, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 66].

В то же время, не был исследован несомненно важный для приложений класс задач, в которых учитывается влияние массовых сил. Решение задач из этого класса и является основной целью настоящей диссертации. На основании анализа их решений требуется более полно и точно описать механические процессы, протекающие в твердых деформируемых телах при их наращивании в условиях действия различных полей массовых сил, всесторонне исследовать эти процессы, выявить и проанализировать различные общие и частные особенности, которые органически присущи им, но не могут быть обнаружены в рамках традиционных подходов, сформулировать качественные выводы и рекомендации практического характера.

### 0.3 Описание работы

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Последний включает 98 наименований. Основные результаты диссертации отражены в публикациях [39, 54, 55, 67–71, 94]. Общее количество иллюстраций в работе — 47.

В **главе 1** исследуется влияние *сил взаимного или центрального притяжения частиц материала* на напряженно-деформированное состояние формируемых под их воздействием однородных твердых тел на примере задачи о наращивании шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле. Деформирование растущего шара происходит только за счет действующих на него массовых сил, а присоединяемый материал считается изначально свободным от напряжений. Процесс роста начинается с возникновения притока дополнительного материала к некоторому уже существующему шаровому телу (ядру), находящемуся в рассматриваемом силовом поле, или, в частном случае, к точечному центру. Когда шар наращивается в условиях собственной гравитации, интенсивность массовых сил, как известно, пропорциональна удалению от центра и не зависит от радиуса шара [45]. Этот вариант рассматривается как конкретный пример для числовой иллюстрации полученных в главе результатов.

Напомним (см. § 0.2), что задача об аккреции гравитирующего упругого шарового слоя при малых деформациях решалась в работе [92]. Геометрически нелинейная задача о непрерывном росте несжимаемого вяз-

коупругого полого шара в собственном гравитационном поле рассматривалась в [11] (она приведена также в монографии [18]).

В первой главе проводятся также исследования общего характера, касающиеся поведения напряжений в окрестностях базовых поверхностей роста внутри кусочно-непрерывно наращиваемого тела.

**Глава 2** посвящена изучению воздействия *центробежных сил* на состояние твердых тел, изготавливаемых в процессе вращения. Решается задача о постепенном формировании слоя материала произвольной толщины на внутренней или внешней поверхности круговой цилиндрической оправки, вращающейся вокруг своей оси с достаточно медленно изменяющейся скоростью. Оправка считается существенно более жесткой по сравнению с формируемым на ней слоем, и поэтому ее собственная деформация в расчет не берется. С точки зрения постановки задачи это означает отсутствие исходного тела (см. § 0.1). Учет деформации оправки не представляет каких-либо принципиальных трудностей. Отказ от него делается умышленно — с целью иллюстрации в работе также и тех процессов, в которых на деформирование возникшей в результате наращивания части механической системы не влияет деформирование ее исходно существующей части.

После завершения процесса изготовления и остановки вращения допускается отсоединение полученного в итоге слоя от оправки. На основании предлагаемых в этой главе общих подходов находятся остаточные напряжения в готовом изделии.

В данной задаче присоединение элементарных слоев материала может осуществляться с произвольным предварительным натягом, что позволяет управлять напряженно-деформированным состоянием получаемого в итоге тела. Возможна постановка соответствующих задач оптимизации процесса изготовления<sup>4</sup>. Хотя такие задачи и не ставятся в настоящей работе, для этого подготовлены в ней все необходимые предпосылки.

В других постановках задачи о непрерывном наращивании вращающихся тел с учетом действующих на них при этом центробежных сил — упругопластического сплошного тонкого диска в случае малых деформаций при произвольном предварительном равномерном растяжении в окружном направлении приращиваемых элементарных слоев материала и сплошного несжимаемого вязкоупругого цилиндра без натяга при ко-

---

<sup>4</sup>Один из вариантов задачи об оптимальном усилении вязкоупругого цилиндрического сосуда высокого давления путем послойной силовой намотки на его наружную поверхность упругого материала рассматривался в [7] (см. также [8]) в рамках приближенного подхода, основанного на предположении о малости суммарной толщины обмотки, и без учета центробежных сил.

нечных деформациях — рассматривались в [15, 18]. В монографии [86] рассмотрена линейная осесимметричная задача о непрерывном наращивании термоупругого ортотропного полого цилиндра в произвольных нестационарных силовом и температурном полях при любом начальном напряженном состоянии материала, присоединяемого к его внутренней или внешней поверхности, с условием упругой реакции на ненаращиваемой границе. Построено решение этой задачи для воздействий, вызывающих только радиальные смещения частиц. В качестве одного из конкретных примеров рассмотрен процесс нанесения ненапряженного материала, уравнения состояния которого предполагают несвязанные деформации вдоль главных направлений (отсутствие эффекта Пуассона), на внутреннюю поверхность вращающейся с постоянной угловой скоростью жесткой оправки.

Различные математически одномерные (плоские осесимметричные) механические модели процессов силовой намотки цилиндрических тел на жесткой или податливой круговой оправке, не учитывающие инерционные силовые воздействия и относящиеся, большей частью, к анизотропным материалам, предлагались, например, в [7, 30, 31, 44, 62, 65, 72, 79, 82, 86, 88, 90]. Все они относятся к классу так называемых «кольцевых» моделей, в которых реальные витки слоев материала заменяются замкнутыми растянутыми кольцами. С таких же позиций проводится моделирование силовой намотки и в настоящей работе — в качестве одного из числовых примеров к решенной во второй главе абстрактной задаче. Еще одним примером в работе служит моделирование процесса внутреннего напыления, геометрически сходного с рассмотренным в [86].

В **главе 3** анализируется влияние *сил тяжести* на состояние постепенно формируемых в их присутствии объектов. Решается инженерная задача о последовательном сооружении на гладком жестком основании тяжелой полукруглой арочной конструкции методом послойного утолщения по внутренней поверхности некоторой первоначально установленной на это основание заготовки, выполненной заранее без остаточных напряжений. При моделировании учитываются такие возможные технологические особенности процесса как использование в нем первоначально напряженных конструктивных элементов и закрепление конструкции на время ее возведения на подвесе с контролируемой силой натяжения. Программа создания преднапряжений в присоединяемых слоях материала считается произвольной. В частности, можно рассмотреть различные способы изготовления этих слоев из дополнительных конструктивных

элементов, находя при этом распределения возникающих в них напряжений из решений соответствующих задач механики. Однако подобные вопросы не затрагиваются в настоящей работе, и при конкретных числовых расчетах принимается равномерное растяжение дополнительных элементарных слоев напряжением, зависящим от их радиуса.

Отметим, что в работе [48] была решена задача о непрерывном утолщении изначально ненапряженными слоями заглубленной в сыпучий грунт невесомой арки, аналогичной по геометрии и свойствам рассматриваемой в данной главе.

Описанные задачи решаются в квазистатическом приближении при малых деформациях для случая однородного изотропного линейного материала. Рассматривается два варианта определяющих соотношений, соответствующие вязкоупругому стареющему и чисто упругому (не подверженному старению) материалу. Последний вариант является частным случаем первого, однако ввиду его особой значимости он всякий раз анализируется отдельно. Как показано в данной работе, именно в этом частном случае все неклассические особенности поведения наращиваемых тел проявляются наиболее ярко.

Представленные в диссертации исследования опираются, в первую очередь, на фундаментальные идеи механики растущих тел и математическую теорию наращиваемых тел, развитые в работах академика АН Армении Н.Х. Арутюняна и профессора А.В. Манжирова и их учеников. При этом используются результаты и методы математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, теории обобщенных функций.

Все изучаемые в работе проблемы сводятся к *неклассическим* задачам механики деформируемого твердого тела. Их решения строятся для произвольного числа этапов непрерывного роста с произвольными по длительности паузами между ними с помощью метода, разработанного в [49] и приводящего в итоге к решению последовательности краевых задач математической теории упругости, содержащих время как вещественный параметр и поставленных для определенных величин на различных этапах процесса в области, занимаемой в текущий момент растущим телом, с последующим восстановлением эволюции поля напряжений по специальным формулам (см. § 0.5). Последняя процедура эквивалентна решению для каждой точки тела интегральных уравнений типа Вольтерра, правые части которых получаются интегрированием по параметру величин, найденных в результате решения указанных краевых задач.

В контексте рассматриваемой в настоящей диссертации проблемы деформирования наращиваемых тел под действием массовых сил следует отметить одно важное с математической точки зрения обстоятельство. А именно, при наличии у материала свойства ползучести в роли интенсивности объемной нагрузки в упомянутых выше краевых задачах даже при самой простой структуре истинного силового поля будут выступать, вообще говоря, разрывные в рассматриваемой пространственной области функции, изменяющиеся в ней сложным образом и зависящие от реологических свойств материала и всей истории формирования тела.

Исследование поведения и финального состояния изучаемых объектов проводится на основании построенных в каждой главе аналитических решений соответствующих задач (сводящихся во всех задачах к квадратурам, а в задаче об арке — содержащих также бесконечные ряды) и конкретных числовых расчетов, проведенных для различных вариантов и параметров моделируемых процессов, а также с помощью некоторых общих аналитических подходов, предлагаемых в настоящей работе.

В расчетах для аппроксимации зависимостей от временных параметров определяющих характеристик вязкоупругого стареющего материала выбираются выражения, широко используемые в литературе. Задание конкретных числовых значений входящих в них постоянных учитывает известные экспериментальные данные. Тем не менее, в **приложении А** выводятся общие ограничения, которые нужно наложить на эти постоянные, чтобы указанные характеристики удовлетворяли основным математическим требованиям, предъявляемым к рассматриваемой модели материала для обеспечения ее адекватности реальным процессам.

Достоверность полученных результатов в рамках рассматриваемых механических моделей обеспечивается применением строгого математического аппарата при построении решений поставленных задач и их анализе. Она основывается также на практических оценках погрешностей выполняемых приближенных вычислений, контроле точности нахождения напряженного состояния тела посредством проверки выполнения интегральных условий равновесия его различных конечных частей, тестировании вычислительных программ на задачах с построенным в конечной форме решением, сопоставлении получаемых в частных случаях результатов с заранее прогнозируемыми или известными.

В **приложении Б** кратко описаны вычислительные методы, применяемые для построения числовых решений исследуемых задач. Указаны и обоснованы основные приемы, которые используются в работе для проверки правильности и контроля точности получаемых результатов.

Полученные в диссертации результаты в определенной степени подтверждают и адекватность самих механических представлений, положенных в основу проведенных в ней исследований.

Все рассмотренные в диссертации задачи в приведенных постановках решены и детально исследованы впервые. В результате обнаружено и проанализировано множество новых механических эффектов, установлены факты, необычные с точки зрения механики тел постоянного состава. Также впервые изучены некоторые общие характерные особенности деформирования наращиваемых тел.

Результаты диссертационной работы представляют теоретический и практический интерес как для механики, так и для некоторых других областей естествознания, и могут быть использованы в инженерной практике при моделировании целого ряда технологических процессов.

Все исследования выполнены в рамках плановой тематики Института проблем механики Российской академии наук «Моделирование процессов формирования, взаимодействия, деформирования и разрушения упруговязкопластических тел под действием нагрузок и физических полей» (Гос. рег. № 0120.0503826) и проектов, финансируемых грантом Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1 и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00693 и № 06-01-00521).

В следующих двух вводных параграфах дается описание определяющих соотношений вязкоупругого стареющего материала, принимаемых далее во всех рассматриваемых задачах, а также кратко излагаются основные положения механики растущих тел при малых деформациях и применяемый в работе общий метод решения соответствующих задач. Это делается с целью избавления читателя от необходимости обращаться к соответствующей оригинальной литературе по мере чтения основных глав диссертации и для придания работе определенной степени логической замкнутости.

## 0.4 Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости однородно стареющих изотропных тел

**1. Общие уравнения.** В данной работе мы будем иметь дело с линейным вязкоупругим однородно стареющим изотропным материалом и исходить из определяющих соотношений вида [8, 18, 25, 28]

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\operatorname{tr} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{3k(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\operatorname{tr} \mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{3k(\tau)} K_v(t, \tau) d\tau, \\ \operatorname{dev} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\operatorname{dev} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{2G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\operatorname{dev} \mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{2G(\tau)} K_s(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь  $\tau_0(\mathbf{r})$  — момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — тензоры напряжений и малой деформации как функции точки и времени,  $\mathbf{1}$  — единичный тензор 2-го ранга;  $k(t)$  — объемный модуль упругости,  $G(t)$  — модуль упругого сдвига. Отсчет времени  $t$  ведется от момента изготовления материала. Ядра ползучести для объемной и сдвиговой деформации определяются как<sup>5</sup> [2, 3, 4, 5, 56]

$$\begin{aligned} K_v(t, \tau) &= k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{k(\tau)} + D(t, \tau) \right], \\ K_s(t, \tau) &= G(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right], \end{aligned}$$

где  $D(t, \tau)$ ,  $\omega(t, \tau)$  ( $t \geq \tau \geq 0$ ) — соответствующие меры ползучести, для которых по определению выполняются тождества

$$D(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geq 0. \quad (0.2)$$

Функции  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  считаются непрерывными справа по времени.

Участвующие в выражениях для ядер  $K_v(t, \tau)$  и  $K_s(t, \tau)$  функции

$$\Delta_v(t, \tau) = k(\tau)^{-1} + D(t, \tau), \quad \Delta_s(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau)$$

называют функциями удельной деформации материала при всестороннем сжатии и чистом сдвиге: они описывают изменение во времени  $t$  относительного уменьшения объема и увеличения угла сдвига образца при

---

<sup>5</sup>Отметим, что задание ядер в таком виде соответствует теории ползучести, часто называемой в литературе наследственной теорией старения Маслова–Арутюняна.

создании в нем в момент времени  $\tau$  и дальнейшем поддержании неизменными указанных элементарных напряженных состояний единичной интенсивности. В силу (0.2) для данных функций справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Delta_v(t, \tau) &= \frac{1}{k(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_v(t, \varsigma)}{k(\varsigma)} d\varsigma, \\ \Delta_s(t, \tau) &= \frac{1}{G(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_s(t, \varsigma)}{G(\varsigma)} d\varsigma.\end{aligned}\quad (0.3)$$

Соотношения (0.1) представляют собой уравнения Вольтерра второго рода относительно соответствующих характеристик напряженного состояния. Решения этих уравнений могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned}\frac{\text{tr } \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{3k(t)} &= \text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \text{tr } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) R_v(t, \tau) d\tau, \\ \frac{\text{dev } \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{2G(t)} &= \text{dev } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \text{dev } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) R_s(t, \tau) d\tau,\end{aligned}\quad (0.4)$$

где  $R_v(t, \tau)$  и  $R_s(t, \tau)$  — резольвенты соответствующих ядер ползучести, называемые также ядрами релаксации. Соотношения (0.4) есть эквивалентная форма записи принятых уравнений состояния (0.1).

Отметим, что приведенные выше соотношения очень хорошо описывают, в частности, механическое поведение бетона при не слишком высоких напряжениях и скоростях их изменения [4, 28].

**2. Одноосное растяжение.** Пусть теперь в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  тела, подчиненного соотношениям (0.1), в течение определенного промежутка времени  $t \in [t_0, t_0 + \Delta t)$  после момента  $t_0 = \tau_0(\mathbf{r}_0)$  возникновения в этой точке напряжений реализуется неизменно ориентированное одноосное напряженное состояние, характеризуемое тензором напряжений  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \sigma(t)$ , где  $\mathbf{e}_1$  — постоянный единичный вектор,  $\sigma(t)$  — известная функция. Тогда, дополняя  $\mathbf{e}_1$  произвольным образом до ортонормированной тройки  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , можем из уравнений (0.1) найти в данной точке на указанном временном промежутке эволюцию тензора деформации. Получим  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \varepsilon(t) + (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \varepsilon_{\perp}(t)$ , где

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K_t(t, \tau) d\tau, \\ \varepsilon_{\perp}(t) &= -\frac{\nu(t) \sigma(t)}{E(t)} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\nu(\tau)}{E(\tau)} + \tilde{\nu}(t, \tau) C(t, \tau) \right] d\tau.\end{aligned}\quad (0.5)$$

Здесь введена функция

$$K_t(t, \tau) = E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right],$$

представляющая собой ядро ползучести при одноосном растяжении. Также введены обозначения

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{9 k(t) G(t)}{3 k(t) + G(t)}, & C(t, \tau) &= \frac{D(t, \tau) + 3 \omega(t, \tau)}{9}, \\ \nu(t) &= \frac{3 k(t) - 2G(t)}{6 k(t) + 2G(t)}, & \tilde{\nu}(t, \tau) &= \frac{3 \omega(t, \tau) - 2D(t, \tau)}{6 \omega(t, \tau) + 2D(t, \tau)}. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Величины  $E(t)$  и  $C(t, \tau)$  в соответствии с их смыслом называют модулем упругости и мерой ползучести при одноосном растяжении, а величины  $\nu(t)$  и  $\tilde{\nu}(t, \tau)$  — коэффициентами Пуассона для мгновенной упругой деформации и деформации ползучести. Для меры  $C(t, \tau)$ , очевидно, выполняется тождество, аналогичное (0.2). Вследствие него функцию

$$\Delta_t(t, \tau) = E(\tau)^{-1} + C(t, \tau),$$

называемую функцией удельной деформации при одноосном растяжении и участвующую в записи ядра  $K_t(t, \tau)$ , можно представить в виде

$$\Delta_t(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} - \int_{\tau}^t \frac{K_t(t, \varsigma)}{E(\varsigma)} d\varsigma.$$

Интегральное уравнение Вольтерра (0.5) относительно растягивающего напряжения  $\sigma(t)$  разрешается следующим образом:

$$\frac{\sigma(t)}{E(t)} = \varepsilon(t) + \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) R_t(t, \tau) d\tau.$$

Здесь  $R_t(t, \tau)$  есть резольвента ядра ползучести  $K_t(t, \tau)$ , или ядро релаксации при одноосном растяжении.

Прежде, чем перейти к дальнейшим рассуждениям, перепишем соотношения (0.6), связывающие различные вязкоупругие характеристики рассматриваемого стареющего материала, в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2[1 + \nu(t)]G(t)}{3[1 - 2\nu(t)]}, & D(t, \tau) &= \frac{3[1 - 2\tilde{\nu}(t, \tau)]\omega(t, \tau)}{2[1 + \tilde{\nu}(t, \tau)]}, \\ E(t) &= 2[1 + \nu(t)]G(t), & C(t, \tau) &= \frac{\omega(t, \tau)}{2[1 + \tilde{\nu}(t, \tau)]}. \end{aligned} \quad (0.7)$$

Далее опишем один из важнейших частых случаев определяющих соотношений (0.1), в рамках которого и будут рассматриваться все вопросы, затрагиваемые в настоящей диссертации.

**3. Случай единого ядра ползучести.** Ползучесть некоторых пространственных конструкционных материалов, в том числе бетона, хорошо описывается уравнениями состояния (0.1) при условии постоянства и равенства между собой коэффициентов Пуассона для мгновенной упругой деформации и деформации ползучести [1, 4, 41, 97], то есть при

$$\nu(t) \equiv \tilde{\nu}(t, \tau) \equiv \nu = \text{const.}$$

В этом случае из соотношений (0.7) вытекает тождественное совпадение всех трех введенных выше ядер ползучести

$$K_v(t, \tau) \equiv K_s(t, \tau) \equiv K_t(t, \tau) = K(t, \tau),$$

а следовательно, и их резольвент — ядер релаксации

$$R_v(t, \tau) \equiv R_s(t, \tau) \equiv R_t(t, \tau) = R(t, \tau).$$

В результате определяющие соотношения (0.4) сводятся к одной функциональной связи между тензорами напряжений и деформации

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \text{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (0.8)$$

Здесь введен линейный оператор вязкоупругости

$$\mathcal{I} + \mathcal{N}_s = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)^{-1}, \quad (0.9)$$

имеющий один вещественный параметр  $s$  и задаваемый равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{I} f(t) &= f(t), \\ \mathcal{N}_s f(t) &= \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (0.10)$$

Также используется константа материала  $\varkappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ .

**4. Вязкоупругие характеристики стареющего материала и их возможные аппроксимации.** Ниже мы перечислим основные свойства модуля упругости и меры ползучести рассматриваемого вязкоупругого стареющего материала применительно к функциям  $G(t)$  и  $\omega(t, \tau)$ ,

характеризующим его поведение при сдвиге. Все указанные свойства переносятся без изменений на аналогичные функции, отвечающие за всестороннее сжатие и одноосное растяжение, и приводятся здесь на основании монографий [8, 18, 28]. В них же можно найти подробное описание и анализ этих свойств.

Экспериментальные исследования (см., например, [1, 33, 74, 98]) свидетельствуют о том, что модуль упругости стареющих материалов как функция времени  $t$  является непрерывным при  $t \geq 0$  и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad & G(t) > 0, & 3) \quad & G'(t) \geq 0, \\ 2) \quad & \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = G_\infty, & 4) \quad & \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} G'(t) = 0, \end{aligned} \quad (0.11)$$

где  $G_\infty > 0$  — значение модуля упругости достаточно старого материала.

Изучение опытных кривых ползучести стареющих материалов в области линейной ползучести (см., например, [1, 5, 32, 42, 76, 96]) показывает, что в условиях естественного старения их мера ползучести как функция времени  $t$  и момента приложения нагрузки  $\tau$  при  $t > \tau \geq 0$  ограничена и непрерывна по  $t$  и удовлетворяет свойствам

$$\begin{aligned} 1) \quad & \omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \omega(t, \tau) > 0, \\ 2) \quad & \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t, \tau) = A(\tau), \\ 3) \quad & \exists \varphi(s) : \quad \omega(t, \tau) = O[\varphi(t - \tau)], \quad \tau \rightarrow +\infty, \\ 4) \quad & \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} \geq 0, \\ 5) \quad & \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} = 0, \\ 6) \quad & \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} \text{ строго возрастает по } \tau, \\ 7) \quad & \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial \tau} < 0. \end{aligned} \quad (0.12)$$

Здесь функция  $A(\tau)$ , называемая обычно функцией старения, является непрерывной и ограниченной, и при этом у нее существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} A(\tau) = A_\infty > 0, \quad (0.13)$$

задающий предельное значение меры ползучести материала, загруженного в значительном возрасте. В соответствии с указанными выше свой-

ствами меры ползучести величину  $A(\tau)$  можно назвать также *удельным ресурсом ползучести*<sup>6</sup> материала в возрасте  $\tau$ .

Укажем теперь те варианты аппроксимирующих выражений для модуля упругости и меры ползучести, которые будут использоваться в настоящей работе при численном анализе всех исследуемых процессов.

Зависимость от времени модуля упругости будем описывать экспоненциальной функцией вида [1, 4, 8, 18, 28, 74, 91, 98]

$$G(t) = G_{\infty}(1 - \delta G e^{-\alpha t}), \quad (0.14)$$

где  $\alpha > 0$  — коэффициент, задающий темп изменения упругих свойств материала вследствие его старения, а  $\delta G = (G_{\infty} - G_0)/G_{\infty}$  есть полное относительное увеличение модуля упругости материала за счет старения,  $G_0 = G(0)$  — значение этого модуля в момент зарождения материала.

Меру ползучести представим в виде произведения

$$\omega(t, \tau) = A(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (0.15)$$

где  $\gamma > 0$  — коэффициент, определяющий скорость ползучести. Данное представление предложено Н.Х. Арутюняном в работах [3, 4] и отражает факт независимости процесса старения материала от его деформирования. Одним из преимуществ меры ползучести в форме (0.15) является существование замкнутого аналитического выражения для резольвенты  $R_s(t, \tau)$  ядра ползучести, порождаемого этой мерой [5].

Функцию старения аппроксимируем также экспоненциальной зависимостью, полагая [8, 18, 28, 74, 75]

$$A(\tau) = A_{\infty} + \Delta A e^{-\beta \tau}, \quad (0.16)$$

где  $\beta > 0$  — коэффициент, задающий темп изменения с возрастом наследственных свойств материала, а  $\Delta A = A_0 - A_{\infty}$  представляет собой полное уменьшение удельного ресурса ползучести материала вследствие старения, где  $A_0 = A(0)$  — удельный ресурс ползучести в момент зарождения материала<sup>7</sup>.

Ясно, что параметры выбранных аппроксимаций (0.14)–(0.16) не могут быть произвольными. Чтобы удовлетворялись все вышеперечисленные свойства вязкоупругих характеристик рассматриваемого материала, на данные параметры необходимо наложить некоторые дополнительные ограничения. Эти ограничения получены в приложении А.

<sup>6</sup>Такое название однако не является традиционным.

<sup>7</sup>Отметим, что приведенная здесь трактовка механического смысла параметров аппроксимирующих выражений (0.14)–(0.16) является оригинальной.

## 0.5 Задача о деформировании наращиваемого тела

**1. Особенности деформирования наращиваемых тел.** Итак, в соответствии с данным в § 0.1 определением, элементы дополнительного материала присоединяются к *растущему телу* уже по ходу его деформационного движения в пространстве. Ясно, что у формируемого подобным образом тела в целом не может в общем случае существовать исходной недеформированной конфигурации. Нетрудно также понять, что именно это характерное обстоятельство является определяющим в процессе деформирования любого наращиваемого тела и должно принципиальным образом отличать механическое поведение таких тел от поведения тел постоянного состава (классических в континуальной механике), равно как и тел с переменной вследствие *снятия материала* границей.

Первым, тривиальным, следствием из отмеченной основной особенности деформирования наращиваемого тела является невозможность определения какой-либо меры его деформации обычным для механики сплошной среды способом<sup>8</sup>. Вторым, уже более содержательным, будет заключение о необходимости знания, вообще говоря, всей истории изменения состояния новых материальных элементов вплоть до момента их включения в состав растущего твердого тела. В частном случае может оказаться достаточно информации лишь об их напряженно-деформированном состоянии непосредственно в момент присоединения к телу, например, если это состояние возникает только в данный момент времени или используемый материал является упругим.

Наряду со всем сказанным выше можно обратить внимание и на тот факт, что частицы дополнительного материала после его сцепления с поверхностью роста продолжают далее свое движение уже в составе *сплошного*, пусть даже все еще растущего, тела. Это значит, что в области пространства, занимаемой в данный момент времени *всем* наращиваемым телом, однозначно определено достаточно гладкое поле скоростей движения его частиц. Поэтому следует ожидать, что задача о деформировании такого тела может быть корректно поставлена в скоростной форме.

**2. Основные соотношения квазистатики кусочно-непрерывно наращиваемых тел при малых деформациях.** Все последую-

---

<sup>8</sup>В случае малых деформаций это, очевидно, означает несправедливость формул Коши для компонент тензора полной деформации, а следовательно, и условий Сен-Венана их совместности. На факт несовместности деформаций в непрерывно наращиваемом теле впервые было обращено внимание в работе [78], а затем, возможно, независимо в [92, 93]. В данных работах рассматривался непрерывный процесс роста линейно упругого тела в полях сил тяжести и собственной гравитации, и речь велась об уравнениях совместности в форме Бельтрами-Мичелла.

щие рассмотрения будут проводиться для случая малых деформаций. Принимая это допущение, можно при определении напряженно-деформированного состояния наращиваемого тела пренебречь деформационными изменениями его конфигурации по сравнению с ее изменениями за счет пополнения тела новым материалом. Кроме того, будем считать, что область  $\Omega(t)$ , занимаемая в пространстве растущим телом в момент времени  $t$ , определяется *задаваемой* программой наращивания, то есть является априори известной<sup>9</sup>.

Если в конкретном изучаемом процессе существует и деформируется некоторое *исходное тело*, занимающее в пространстве область  $\Omega_0$ , к поверхности которого затем в момент времени  $t = t_1$  начинается присоединение дополнительного материала, то эволюция напряженно-деформированного состояния этого тела вплоть до момента  $t_1$ , называемого *моментом начала наращивания (или роста)*, должна определяться из решения классической задачи механики для деформируемого твердого тела с фиксированной границей. Как отмечено в § 0.1, процесс непрерывного наращивания может начаться и без участия исходного тела. В этом случае в момент  $t_1$  должен возникнуть приток материала, например, к некоторому точечному центру или какой-либо жесткой поверхности.

*Дополнительное тело*, образованное всем поступавшим в процессе роста дополнительным материалом, будем обозначать через  $\Omega_A$ .

Далее ограничимся рассмотрением только квазистатических процессов деформирования. Тогда в области, занимаемой в каждый момент времени наращиваемым телом, после начала его наращивания должно выполняться классическое уравнение равновесия в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(t), \quad t \geq t_1, \quad (0.17)$$

где  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  — тензор напряжений,  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  — вектор интенсивности действующих объемных сил,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки тела.

В соответствии со сказанным в п. 1 мы не можем выразить тензор деформации во всем наращиваемом теле через перемещения обычным для механики сплошной среды образом. Однако для намеченной скоростной постановки задачи наращивания подобного представления, очевидно, не требуется. В ней (как в краевых задачах механики жидкости) в роли характеристики процесса деформирования должен выступать тензор скорости деформации  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ , определяемый по векторному полю скоростей

<sup>9</sup>Мы не будем рассматривать здесь таких процессов (как, к примеру, фронтальное затвердевание некоторой среды), в которых движение и форма поверхности роста, а возможно, еще и состояние нового материала на ней заранее не известны и должны определяться совместно с решением механической задачи.

$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  известным соотношением

$$\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2,$$

аналогичным классическому представлению Коши тензора малой деформации<sup>10</sup>. Но тогда и уравнения состояния материала должны быть сформулированы для этого тензора. Если исходить из определяющего соотношения (0.8) для изотропного линейно вязкоупругого однородно стареющего материала, то в качестве уравнения состояния в задаче наращивания следует принять зависимость [49]

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}. \quad (0.18)$$

Участвующий здесь тензор  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  по определению выражается через тензор напряжений  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  формулой

$$\mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t. \quad (0.19)$$

В данной формуле используется обозначение

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t), \quad (0.20)$$

где  $g(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция точки тела и времени,  $\mathcal{H}_s$  — линейный оператор с вещественным параметром  $s$ , действующий по правилу

$$\mathcal{H}_s f(t) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)[f(t)/G(t)].$$

Заметим, что принятое уравнение состояния (0.18) предполагает изготовление всех элементов материала, из которого далее будет формироваться рассматриваемое тело (и исходная, и дополнительная его части), в один и тот же момент времени  $t = 0$  (см. § 0.4).

Будем для простоты считать, что дополнительный материал загружается непосредственно в момент его сцепления с наращиваемым телом. Тогда функция  $\tau_0(\mathbf{r})$ , участвующая в определении (0.20) и задающая распределение моментов возникновения напряжений в точках тела, может быть представлена следующим образом:

$$\tau_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_0, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_A, \end{cases} \quad (0.21)$$

---

<sup>10</sup> Данное определение возможно ввиду отмеченной выше сплошности наращиваемого тела и влечет за собой, очевидно, выполнение для компонент вводимого им тензора  $\mathbf{D}$  условий совместности, аналогичных условиям Сен-Венана для деформаций. На необходимость использования именно этих условий вместо классических условий Сен-Венана впервые в явном виде было указано в работе [87].

где  $t_0 \leq t_1$  — момент загрузки исходного тела,  $\tau_*(\mathbf{r})$  — момент включения частицы с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в состав растущего тела, определяемый заданной для последнего программой наращивания; понятно, что для всех точек дополнительного тела  $\tau_*(\mathbf{r}) \geq t_1$ .

Рассмотрим теперь процесс *непрерывного роста* тела, начинающийся в момент времени  $t_1$  и заканчивающийся в момент  $t = t_2 > t_1$ . Обозначим через  $S_*(t)$  текущую поверхность роста, движение которой в нашем случае полностью определяется заданной программой наращивания.

Коль скоро мы считаем, что загрузка нового материала происходит только в момент его присоединения к растущему телу, то в соответствии с рассуждениями, проведенными в п. 1, для корректной постановки задачи наращивания при принятом определяющем соотношении материала (0.8) достаточно знать, например, лишь *полное* напряженное состояние присоединяемого материала в этот момент времени. Данное состояние вызывается мгновенным упругим деформированием дополнительных элементов непосредственно перед их включением в состав рассматриваемого тела, причем, как мы считаем, под воздействием факторов, не связанных с происходящими в этом теле процессами. Поэтому в рамках изучаемой задачи наращивания оно должно предполагаться известным. Таким образом, во всех точках мгновенной поверхности роста на протяжении всего процесса непрерывного наращивания следует задавать некоторый полный тензор напряжений  $\mathbf{T}_*$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_*(t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad (0.22)$$

Легко заметить, что поверхность  $S_*(t)$  описывается уравнением  $\tau_*(\mathbf{r}) = t$ . Поэтому граничное условие (0.22) эквивалентно следующему начальному условию в области, занимаемой дополнительным телом<sup>11</sup>:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_A. \quad (0.23)$$

На части границы  $\partial\Omega(t)$  растущего тела, не входящей в поверхность роста  $S_*(t)$  (если, конечно,  $S_*(t)$  не покрывает всю граничную поверхность тела), должны быть заданы какие-либо классические для механики деформируемого твердого тела граничные условия. Будем считать, что данная часть границы  $\partial\Omega(t) \setminus S_*(t)$  в общем случае состоит из четырех непересекающихся участков  $S_1(t), \dots, S_4(t)$ , на которых имеют

<sup>11</sup>Граничное условие на поверхности непрерывного роста в виде (0.22) и эквивалентное ему начальное условие (0.23) были впервые сформулированы в работах [9, 84].

место следующие условия [19]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} \in S_1(t); \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{r} \in S_2(t); \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{r} \in S_3(t); \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{r} \in S_4(t); \end{aligned} \quad (0.24)$$

здесь  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности тела, а  $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{t}_i(\mathbf{r}, t)$  — заданные векторные поля на соответствующих участках данной поверхности. Зависимость этих участков от времени обусловлена лишь возможностью их расширения за счет увеличения поверхности тела в результате притока дополнительного материала. На участке  $S_1(t)$  считаются заданными перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , отсчитываемые для пограничных частиц исходного тела от соответствующих точек его недеформированной конфигурации, а для присоединившихся частиц — например, от тех положений в пространстве, в которых эти частицы вошли в состав растущего тела. На участке  $S_2(t)$  задается поверхностная нагрузка, а на участках  $S_3(t)$  и  $S_4(t)$  — соответственно перемещения вдоль нормали вместе с касательными напряжениями и нормальные напряжения вместе с перемещениями в касательной плоскости.

После (временной или окончательной) остановки процесса непрерывного наращивания, то есть при  $t \geq t_2$ , граничные условия (0.24), естественно, сохраняют свою силу. Но и на всей последней поверхности роста  $S_*(t_2 - 0)$  теперь должно быть также выставлено одно или несколько (на различных ее участках) из классических условий (0.24) — вместо прежнего, нетрадиционного в механике, условия (0.22). Формально это означает, что начиная с момента  $t_2$  и до начала следующего этапа непрерывного роста (если таковой состоится) поверхность  $S_*(t_2 - 0)$  следует считать частью объединения поверхностей  $\bigcup_{j=1}^4 S_j$ . Причем на данном интервале времени поверхности  $S_j$  уже, понятно, не зависят от  $t$ .

В некоторый момент времени  $t_3 \geq t_2$  наращивание тела может возобновиться и продолжаться до момента  $t = t_4 > t_3$ . При этом на текущей поверхности роста  $S_*(t)$  для  $t \in [t_3, t_4)$  снова должно иметь место неклассическое условие, аналогичное (0.22).

В общем случае процесс *кусочно-непрерывного наращивания* будет состоять из  $N \geq 1$  этапов непрерывного роста, протекающих на интервалах времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Заметим, что иногда бывает удобно разбить на отдельные этапы и процесс непрерывного наращивания, считая продолжительности пауз между этапами равными нулю.

Описанная в данном пункте общая безынерционная задача о кусочно-непрерывном наращивании линейно вязкоупругого однородно старе-

ющего тела при малых деформациях, в которой наряду с возможностью загрузки исходного тела за некоторое время до начала наращивания предполагается также наличие произвольных пауз между этапами непрерывного роста, в данной постановке впервые рассмотрена в работе [49]. Разработанный в этой работе метод решения такой задачи положен в основу всех исследований, проводимых в настоящей диссертации. Поэтому его суть излагается в следующем пункте текущего вводного параграфа.

**3. Преобразование общей квазистатической задачи для кусочно-непрерывно наращиваемого линейно вязкоупругого однородно стареющего тела.** Итак, процесс деформирования рассматриваемого твердого тела на временном интервале, соответствующем первому этапу его непрерывного роста, описывается следующей совокупностью соотношений (см. п. 2):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(t), \quad t \in (t_1, t_2); \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) / 2; \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_*, \quad \mathbf{r} \in S_*(t) \iff t = \tau_*(\mathbf{r}); \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} \in S_1(t); \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}_0, \quad \mathbf{r} \in S_2(t); \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{r} \in S_3(t); \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{r} \in S_4(t). \end{aligned}$$

К ней нужно добавить известную эволюцию напряженно-деформированного состояния исходного тела на отрезке времени вплоть до начала его наращивания, найденную из решения классической задачи механики, в частности, эволюцию тензора напряжений

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (0.25)$$

Здесь важно заметить, что, хотя в момент времени  $t_1$  рассматриваемое тело еще и является по всем признакам классическим, на участке его поверхности  $S_*(t_1)$  уже должна учитываться нагрузка, вызванная возникновением притока к нему дополнительного материала и согласованная с тензором напряжений  $\mathbf{T}$ , найденным из условия (0.22) при  $t = t_1$ .

Следуя [49], преобразуем записанные соотношения к удобной для решения краевой задаче, содержащей явно только величины  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{S}$ .

Прежде всего, на основе классического уравнения равновесия (0.17) получим уравнение для введенного в п. 2 тензора  $\mathbf{S}$ . Обозначим через  $\Omega_1$  ту область, которую занимает в пространстве сформированное на первом этапе роста *субтело*. Будем считать, что функция  $\tau_*(\mathbf{r})$  непрерывно

дифференцируема в замкнутой области  $\bar{\Omega}_1$ , причем  $\nabla \tau_*(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$ , то есть поверхности роста  $S_*(t) \subset \bar{\Omega}_1$  не имеют особых точек. Продолжим гладким образом функцию  $\tau_*(\mathbf{r})$  из  $\Omega_1$  в  $\Omega_0$  так, чтобы выполнялось строгое неравенство  $\tau_*(\mathbf{r}) < t_1$  при  $\mathbf{r} \in \Omega_0$ . Введем характеристическую функцию  $\theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1)$ , равную нулю в исходном и единице в дополнительном теле. Здесь  $\theta(s)$  — стандартная функция Хевисайда,

$$\theta(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0. \end{cases}$$

Определим также функцию

$$\tau_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_1, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_A. \end{cases} \quad (0.26)$$

После этого, вспоминая определения (0.20) и (0.10), а также представление (0.21), вычислим в  $\Omega(t)$  на первом этапе роста дивергенцию

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) &\equiv \nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 - \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \right] \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau \right\} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \\ &\quad - \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \nabla \tau_1(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_1(\mathbf{r}))}{G(\tau_1(\mathbf{r}))} K(t, \tau_1(\mathbf{r})) - \\ &\quad - \left[ 1 - \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \right] \int_{t_0}^{t_1} \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \\ &\quad + \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau \equiv \\ &\equiv (\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ(\mathbf{r}, t) + \nabla \tau_1(\mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_1(\mathbf{r}))}{G(\tau_1(\mathbf{r}))} K(t, \tau_1(\mathbf{r})) + \\ &\quad + \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $\delta(s) = \theta'(s)$  — обобщенная функция Дирака. Представив

$$\tau_1(\mathbf{r}) \equiv t_1 + [\tau_*(\mathbf{r}) - t_1] \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1),$$

найдем на объединении исходного тела и первого субтела градиент

$$\nabla \tau_1(\mathbf{r}) = \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \nabla \tau_*(\mathbf{r}) + [\tau_*(\mathbf{r}) - t_1] \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \nabla \tau_*(\mathbf{r}) =$$

$$= \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) \nabla \tau_*(\mathbf{r}).$$

Заметим далее, что

$$\nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) / s_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_1, \quad (0.27)$$

где величина

$$s_n(\mathbf{r}) = |\nabla \tau_*(\mathbf{r})|^{-1}$$

есть нормальная скорость движения поверхности  $S_*(t)$  в пространстве за счет роста тела, а  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \in \Omega_1$ , — внешняя единичная нормаль к поверхности растущего тела в точке  $\mathbf{r}$  в момент прохождения  $S_*(t)$  через эту точку. Тогда с учетом справедливого в  $\Omega_1$  тождества  $\tau_1(\mathbf{r}) \equiv \tau_*(\mathbf{r})$ , начального условия (0.23) для точек  $\Omega_1$  и определения ядра ползучести  $K(t, \tau)$  (см. § 0.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) &= (\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \pi_*(\mathbf{r}, t) \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) + \tilde{\pi}(\mathbf{r}, t) \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1), \end{aligned} \quad (0.28)$$

где введены обозначения

$$\pi_*(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{t}_*(\mathbf{r})}{s_n(\mathbf{r})} \frac{\partial \Delta_s(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_*(\mathbf{r})}, \quad \tilde{\pi}(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \tau)}{s_n(\mathbf{r})} \frac{\partial \Delta_s(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau;$$

$$\mathbf{t}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_1;$$

$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S_*(t_1), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Вектор  $\mathbf{t}_*(\mathbf{r})$  представляет собой интенсивность в точке  $\mathbf{r}$  поверхностной нагрузки, действующей на растущее тело в момент прохождения поверхности роста  $S_*(t)$  через данную точку. Эта нагрузка обусловлена наличием (заранее известных) предварительных напряжений в присоединяемом материале. Векторное поле  $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, t)$  описывает поверхностную нагрузку на будущей поверхности роста  $S_*(t_1)$  исходного тела вплоть до момента начала его наращивания и определяется по соответствующей эволюции тензора напряжений (0.25), то есть также является известным.

Таким образом, действуя на дифференциальное уравнение (0.17) линейным оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и привлекая соотношение (0.28), приходим к следующему дифференциальному уравнению для тензора  $\mathbf{T}^\circ$  в  $\Omega(t)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t) - \\ - \pi_*(\mathbf{r}, t) \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) - \tilde{\pi}(\mathbf{r}, t) \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (0.29)$$

где все свободные члены являются известными.

Продифференцировав (0.29) по времени  $t$ , получим искомое дифференциальное уравнение для тензора  $\mathbf{S}$  в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) - \lambda_*(\mathbf{r}, t) \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) - \tilde{\lambda}(\mathbf{r}, t) \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) = \mathbf{0},$$

где обозначено

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \lambda_*(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \pi_*(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \tilde{\lambda}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \tilde{\pi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Чтобы получить теперь граничное условие для тензора  $\mathbf{S}$  на поверхности роста  $S_*(t)$ , заметим сначала, что в силу определений (0.20), (0.10) и представления (0.21) для любой функции  $g(\mathbf{r}, t)$  имеет место тождество

$$g^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) \equiv g(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) / G(\tau_*(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega_A. \quad (0.30)$$

После этого на основании (0.23) можем записать следующее начальное условие для тензора  $\mathbf{T}^\circ$  в дополнительном теле

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) / G(\tau_*(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega_A. \quad (0.31)$$

Действуя на левую и правую части этого условия оператором дивергенции, с учетом уравнения (0.29), тождества (0.30) и равенства (0.27) получим при  $\mathbf{r} \in \Omega_1$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) &= [\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)] \Big|_{t=\tau_*(\mathbf{r})} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) = \\ &= \pi_*(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) \theta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) + \tilde{\pi}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) \delta(\tau_*(\mathbf{r}) - t_1) - \\ &\quad - \mathbf{f}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) / G(\tau_*(\mathbf{r})) + \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) / s_n(\mathbf{r}), \\ \nabla \cdot \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\mathbf{r}))} &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\mathbf{r}))} - \frac{\nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) G'(\tau_*(\mathbf{r}))}{G^2(\tau_*(\mathbf{r}))} = \\ &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\mathbf{r}))} - \frac{\mathbf{t}_*(\mathbf{r}) G'(\tau_*(\mathbf{r}))}{s_n(\mathbf{r}) G^2(\tau_*(\mathbf{r}))}. \end{aligned}$$

Приравнивая эти выражения друг другу, раскрывая определения вектор-функций  $\pi_*(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{\pi}(\mathbf{r}, t)$  и рассматривая полученное в итоге равенство на текущей поверхности роста  $\tau_*(\mathbf{r}) = t$ , где  $t \in (t_1, t_2)$ , придем к такому граничному условию на тензор  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{q}_*, \quad \mathbf{r} \in S_*(t), \\ \mathbf{q}_*(\mathbf{r}, t) &= [\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)] s_n(\mathbf{r}) / G(t) - \\ &\quad - \mathbf{t}_*(\mathbf{r}) \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=t} - \delta(t - t_1) \int_{t_0}^{t_1} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \tau) \frac{\partial \Delta_s(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (0.32)$$

Правая часть  $\mathbf{q}_*(\mathbf{r}, t)$  данного условия является известной функцией и определяется свойствами рассматриваемого вязкоупругого материала, законом изменения напряжений на будущей поверхности роста исходного тела в течение всего процесса его деформирования до начала наращивания, программой наращивания, действующими вблизи поверхности роста объемными силами и начальными напряжениями в присоединяемом материале. Заметим еще, что в силу (0.2) справедливо тождество

$$\partial\omega(t, \tau)/\partial\tau|_{\tau=t} = -\partial\omega(t, \tau)/\partial t|_{\tau=t}.$$

Следует отметить, что прием, использованный в работе [49] для вывода соотношения (0.32) и воспроизведенный выше, в основном аналогичен способу получения условия на текущей поверхности роста для скоростей напряжений, предложенному в работах [9, 84].

Что касается классических граничных условий (0.24) на ненаращиваемых участках поверхности растущего тела, то для приведения их к виду, требуемому для намеченной в начале этого пункта постановки краевой задачи наращивания, достаточно продифференцировать эти условия по времени  $t$ , предварительно подействовав линейным оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  на те из них, которые сформулированы для тензора напряжений  $\mathbf{T}$ .

В результате всех проделанных преобразований будем иметь следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{h} - \lambda_* \theta(\tau_* - t_1) - \tilde{\lambda} \delta(\tau_* - t_1) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{r} \in \Omega(t), \quad t \in (t_1, t_2); \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{q}_*, \quad \mathbf{r} \in S_*(t); \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{r} \in S_1(t); \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{r} \in S_2(t); \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{r} \in S_3(t); \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{nn} &= \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r} \in S_4(t), \end{aligned}$$

где введены вектор-функции

$$\mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t) / \partial t, \quad \mathbf{q}_i(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{t}_i^\circ(\mathbf{r}, t) / \partial t.$$

В данной задаче, как видим, время  $t$  не является существенной переменной, оно выступает лишь в роли вещественного параметра. При этом сама задача в математическом смысле представляет из себя краевую задачу классической линейной теории упругости, в которой на месте век-

тора перемещения стоит вектор скорости  $\mathbf{v}$ , на месте тензора деформации — тензор скорости деформации  $\mathbf{D}$ , а на месте тензора напряжений, отнесенного к модулю сдвига, — тензор  $\mathbf{S}$ .

Проведенное выше преобразование уравнения равновесия остается, очевидно, справедливым и после окончания первого этапа непрерывного роста. Поэтому деформирование тела на этом интервале времени в соответствии со сказанным в конце п. 2 должно описываться точно такой же краевой задачей, как и на первом этапе, с тем лишь отличием, что область  $\Omega$  и поверхности  $S_j$  не будут уже зависеть от параметра  $t$ , а поверхность  $S_*$  с точки зрения выставления на ней граничных условий станет частью объединения  $\bigcup_{j=1}^4 S_j$ .

Для всех последующих этапов роста можно провести преобразования, аналогичные проделанным выше для первого этапа, например, в том случае, когда базовая поверхность роста на каждом очередном этапе совпадает с последней поверхностью роста на предыдущем этапе. Именно такой случай рассматривается во всех главах настоящей работы.

Если в каждой точке  $\mathbf{r}$  рассматриваемого наращиваемого тела при  $t > \tau_1(\mathbf{r})$  найдена эволюция тензора  $\mathbf{S}$  (из решения соответствующих краевых задач), то эволюция тензорного поля напряжений  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  в теле согласно (0.19), (0.20) и (0.9) восстанавливается по формуле

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(\mathbf{r})) + \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \right], \quad t \geq \tau_1(\mathbf{r}).$$

Величина  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(\mathbf{r}))$ , фигурирующая здесь в качестве начального значения тензора  $\mathbf{T}^\circ$ , в силу определения (0.26) функции  $\tau_1(\mathbf{r})$  выражается в дополнительной части тела  $\Omega_A$  равенством (0.31), а в исходной части может быть вычислена по известной зависимости (0.25) как

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) = \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t_1)}{G(t_1)} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t_1, \tau) d\tau, \quad \mathbf{r} \in \Omega_0.$$

# Глава 1

## Наращивание шара в центральном силовом поле

Исследуются процессы формирования твердых шаровых тел в произвольном центрально-симметричном силовом поле за счет притока дополнительного вещества к их поверхности. Предложена механическая модель кусочно-непрерывного роста таких тел для случаев вязкоупругого стареющего и упругого материалов. Построены замкнутые решения соответствующих неклассических задач. Обнаружен и детально исследован целый ряд принципиально новых механических эффектов, возникающих только в рассматриваемых телах при их постепенном формировании. Выполнены числовые расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в процессе аккреции. Изучено влияние скорости и характера роста на напряженно-деформированное состояние таких объектов. Проведен сравнительный анализ моделей, учитывающих и не учитывающих механические особенности процесса наращивания.

В этой главе доказана также общая теорема о скачке тензора напряжений на границе раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела. Используемый при ее доказательстве подход применен в частном случае растущего шарового тела к анализу разрывов и изломов эпюр напряжений на общих участках границ его частей, сформированных на различных этапах непрерывного роста.

Основные результаты главы отражены в работах [54, 67, 69, 70, 94].

## Введение

Предположим, что в рассматриваемом объеме пространства имеется некоторое распределенное вещество, подверженное действию стационарного поля сил притяжения к фиксированному центру. Под воздействием этого поля частицы вещества устремляются к центру и формируют вокруг него твердое шаровое тело, увеличивающееся со временем в размере. Естественным, что действие силового поля на частицы не прекращается и после их включения в состав твердого тела. В результате в этом теле возникают некоторые напряжения и деформация, которые развиваются с его ростом. Можно ожидать, что данное напряженно-деформированное состояние будет отличаться от того, которое возникло бы в аналогичном по свойствам шаре, сформированном целиком вне всяких силовых воздействий и только затем помещенном в рассматриваемое поле. Если при этом реакция рассматриваемого материала на приложенные к нему механические нагрузки зависит явно от времени, то на итоговое состояние тела, постепенно сформированного в силовом поле, определяющее влияние будут оказывать характер и скорость протекания процесса роста.

Сходная ситуация возникает и тогда, когда однородное шаровое тело растет под воздействием сил притяжения друг к другу отдельных частиц формирующего его вещества. Ввиду центральной симметрии этого процесса равнодействующая всех сил, действующих на каждую конкретную частицу шара со стороны всех остальных его частиц при любом законе их взаимного притяжения должна быть направлена к центру, а величина этой силы — зависеть только от расстояния данной частицы до центра и, в общем случае, от текущего радиуса шара. При определенном законе притяжения радиус шара не будет влиять на величину равнодействующей силы, и тогда суммарный эффект от взаимодействия всех составляющих растущий шар частиц эквивалентен действию на этот шар стационарного индуцированного силового поля.

Более общим вариантом описанных выше процессов является тот случай, когда приток частиц вещества возникает не к точечному центру, а к некоторому уже имеющемуся шаровому ядру, которое по тем или иным причинам не испытывало напряжений во время формирования.

## 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим однородный шар радиуса  $a_0$ , находящийся под действием центрально-симметричного силового поля векторной интенсивности

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r f(r), \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор с началом в центре шара,  $f(r)$  — некоторая непрерывная при  $r > 0$  функция. Пусть этот шар изготовлен из изотропного линейно вязкоупругого стареющего материала с нулевым моментом времени зарождения и помещен в силовое поле в момент времени  $t = t_0$ , а затем начиная с некоторого момента  $t_1 \geq t_0$  претерпевает  $N$  последовательных этапов непрерывного роста вследствие равномерного притока точно такого же материала к его поверхности. Эти этапы чередуются с некоторыми интервалами времени, в течение которых приток материала отсутствует, а поверхность сформированного шара не загружается. До начала и после окончательного прекращения роста рассматриваемый шар также не подвергается нагружению по граничной поверхности.

Пренебрегая инерционными эффектами и предполагая малость деформаций, исследуем эволюцию напряженно-деформированного состояния шара на этапах его непрерывного наращивания, в паузах между ними, а также после окончательной остановки роста. Исследование проведем для кажущегося в данной задаче оправданным случаем присоединения материала в первоначально ненапряженном состоянии.

Чтобы не решать дополнительно вопрос о физической возможности организации притока вещества к поверхности шара в условиях отталкивающего силового поля, примем, что в законе (1.1)  $f(r) > 0$  при  $r > 0$ .

Возьмем определяющее соотношение материала в виде (см. § 0.4)

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1.2)$$

Здесь линейный оператор вязкоупругости

$$(\mathcal{I} + \mathcal{N}_s) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)^{-1} \quad (1.3)$$

задается с помощью тождественного оператора  $\mathcal{I}$  и интегральных операторов Вольтерра с параметром  $s$ , действующих по правилам

$$\mathcal{L}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \quad (1.4)$$

$$K(t, \tau) = G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau), \quad (1.5)$$

где  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  — ядра ползучести и релаксации,  $G(\tau)$  — упругий модуль сдвига,  $\omega(t, \tau)$  — мера ползучести при чистом сдвиге,  $\Delta(t, \tau)$  — функция удельной деформации сдвига. Названные функции определены при  $t \geq \tau \geq 0$ , при этом

$$\omega(\tau, \tau) \equiv 0. \quad (1.6)$$

Функция удельной деформации может быть также представлена в виде:

$$\Delta(t, \tau) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_\tau) G(t)^{-1}. \quad (1.7)$$

В определяющем соотношении (1.2) через  $\tau_0(\mathbf{r})$  обозначен момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Величины  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  суть тензоры напряжений и малой деформации в указанной точке тела в текущий момент времени;  $\mathbf{1}$  — единичный тензор 2-го ранга. Константа материала  $\kappa$  выражается через постоянный, общий для упругой деформации и деформации ползучести, коэффициент Пуассона  $\nu$  по формуле  $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ .

Ввиду малости деформаций можно считать, что в течение  $k$ -го этапа непрерывного наращивания радиус шара возрастает по известному закону  $a_{(k)}(t)$ , где  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Обозначим продолжительность  $k$ -го этапа наращивания и длительность выдержанной перед ним паузы соответственно через

$$\Delta t_{2k} = t_{2k} - t_{2k-1} > 0, \quad \Delta t_{2k-1} = t_{2k-1} - t_{2k-2} \geq 0.$$

Значения радиуса шара в начале и в конце  $k$ -го этапа пусть будут

$$a_{(k)}(t_{2k-1} + 0) = a_{k-1}, \quad a_{(k)}(t_{2k} - 0) = a_k.$$

В силу равномерности притока присоединяемого материала к поверхности роста и отсутствия в нем предварительных напряжений имеем для момента  $\tau_0(\mathbf{r})$  начала загрузки элементов шара зависимость

$$\tau_0(\mathbf{r}) \equiv \tau_0(r) = \begin{cases} t_0, & 0 < r < a_0, \\ \tau_*(r), & a_0 < r < a_N, \end{cases} \quad (1.8)$$

где  $\tau_*(r)$  — момент присоединения к шару слоя радиуса  $r$ . Заметим, что сферическая поверхность  $r = a_{(k)}(t)$ , являющаяся границей шара в момент времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$ , то есть текущей поверхностью роста на  $k$ -м этапе наращивания, описывается также уравнением  $\tau_*(r) = t$ . Это обстоятельство, очевидно, равносильно выполнению тождеств

$$\tau_*(a_{(k)}(t)) \equiv t, \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}); \quad (1.9)$$

$$a_{(k)}(\tau_*(r)) \equiv r, \quad r \in (a_{k-1}, a_k). \quad (1.10)$$

Введем здесь еще одно необходимое в дальнейшем обозначение. Для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  точки тела и времени положим [49]

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_{\tau_0(\mathbf{r})})[g(\mathbf{r}, t)/G(t)]. \quad (1.11)$$

## 1.2 Напряженно-деформированное состояние шара до начала наращивания

Вплоть до момента начала наращивания напряженно-деформированное состояние рассматриваемого шара описывается классической краевой задачей линейной теории вязкоупругости

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{e}_r f(r), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \\ \mathbf{T} &= G(\mathcal{I} + \mathcal{N}_{t_0})[2\mathbf{E} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}], \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2; \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad r = a_0; \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r u(r, t)$  — вектор перемещения. В силу обозначения (1.11) и представления (1.7) эта задача эквивалентна следующей, зависящей от времени  $t$  только как от вещественного параметра, краевой задаче [49]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ &= \mathbf{e}_r f(r)\Delta(t, t_0), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \\ \mathbf{T}^\circ &= 2\mathbf{E} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2; \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}^\circ &= \mathbf{0}, \quad r = a_0; \quad \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Фактически она представляет собой задачу математической теории упругости, в которой на месте отнесенного к модулю сдвига тензора напряжений выступает тензор  $\mathbf{T}^\circ$ . Ее компонентная запись имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^\circ}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r^\circ - \sigma_\vartheta^\circ}{r} &= f(r)\Delta(t, t_0), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \\ \sigma_r^\circ &= (\varkappa + 1)\varepsilon_r + 2(\varkappa - 1)\varepsilon_\vartheta, & \left| \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r}; \end{array} \right. & (1.13) \\ \sigma_\vartheta^\circ &= (\varkappa - 1)\varepsilon_r + 2\varkappa\varepsilon_\vartheta, \\ \sigma_r^\circ &= 0, \quad r = a_0; \quad u \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_r(r, t)$  и  $\sigma_\vartheta(r, t)$  — радиальное и окружное напряжение,  $\varepsilon_r(r, t)$  и  $\varepsilon_\vartheta(r, t)$  — радиальная и окружная деформация.

Подстановка выражений величин  $\sigma_r^\circ$ ,  $\sigma_\vartheta^\circ$  через перемещение  $u$  в дифференциальное уравнение задачи (1.13) приводит к следующему аналогу уравнения Ляме из линейной теории упругости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = \frac{f(r) \Delta(t, t_0)}{\varkappa + 1}. \quad (1.14)$$

Заметим, что функция  $f(r)$  в общем случае может не иметь конечного предела в нуле. Поэтому для возможности построения решения краевой задачи (1.13) на эту функцию необходимо наложить некоторые дополнительные ограничения помимо потребованной выше (см. § 1.1) непрерывности при  $r > 0$ . В связи с этим докажем следующее

**Утверждение 1.1.** Пусть функция  $F(r)$  определена и кусочно-непрерывна на некотором полуинтервале  $(0, a]$ , и при этом выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- 1) функция  $\Phi(r) = \frac{1}{3} \int_r^a F(\xi) d\xi$  ограничена при  $r \rightarrow +0$  или
- 2)  $r^2 F(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$ .

Тогда любое непрерывно дифференцируемое на  $(0, a]$  решение  $w(r)$  дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r} \right) = F(r), \quad (1.15)$$

удовлетворяющее условию  $w \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow +0$ , имеет вид

$$w = r [C - \Psi(r) - \Phi(r)], \quad (1.16)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, а функция  $\Psi(r) = \frac{1}{3} \int_0^r F(\xi) (\xi/r)^3 d\xi$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Нетрудно заметить, что левая часть уравнения (1.15) может быть переписана следующим образом:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r} \right) \equiv \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 w)}{dr} \right].$$

Поэтому вследствие теоремы об обобщенной первообразной [40] общее решение этого уравнения в классе непрерывно дифференцируемых на  $(0, a]$  функций имеет вид

$$w(r) = \frac{\psi(r) + B}{r^2} + C r, \quad \psi(r) = \int_r^a \eta^2 d\eta \int_\eta^a F(\xi) d\xi, \quad (1.17)$$

где  $B$  и  $C$  — произвольные постоянные. Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле  $\psi(r)$ , будем иметь

$$\psi(r) = \frac{\int_r^a F(\xi)(\xi^3/r^3 - 1)d\xi}{3r^{-3}}. \quad (1.18)$$

Интеграл, стоящий в числителе записанной дроби, ввиду кусочной непрерывности на  $(0, a]$  функции  $F(r)$  является дифференцируемой функцией аргумента  $r$  в некоторой проколотой правой полуокрестности нуля. Знаменатель же есть дифференцируемая функция, бесконечно большая при  $r \rightarrow +0$ . Поэтому согласно правилу Бернулли-Лопиталя [40]

$$\begin{aligned} 3 \lim_{r \rightarrow +0} \psi(r) &= \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\frac{d}{dr} \int_r^a F(\xi)(\xi^3/r^3 - 1)d\xi}{-3r^{-4}} = \\ &= \lim_{r \rightarrow +0} \int_r^a \xi^3 F(\xi) d\xi = \int_0^a \xi^3 F(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.19)$$

при условии, что последний интеграл существует. В рамках доказываемого утверждения это действительно так: при выполнении условия (2) данный интеграл является собственным, так как подынтегральная функция в нем стремится к нулю при  $r \rightarrow +0$ ; в противном случае он может оказаться несобственным на нижнем пределе, но если выполнено условие (1), то он сходится по признаку Дирихле [40].

В силу (1.17) условие  $w \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow +0$ , эквивалентно существованию нулевого предела

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{\psi(r) + B}{r^2} = 0. \quad (1.20)$$

В условиях доказываемого утверждения необходимым и достаточным для этого является равенство

$$B = -\frac{1}{3} \int_0^a \xi^3 F(\xi) d\xi. \quad (1.21)$$

Действительно, из (1.20) следует, что

$$\psi(r) \equiv \left[ \frac{\psi(r) + B}{r^2} \right] r^2 - B \xrightarrow{r \rightarrow +0} -B,$$

а это в силу (1.19) и означает справедливость равенства (1.21). Обратно, если принять (1.21), то по (1.19) функция  $\psi(r) + B$  будет бесконечно малой при  $r \rightarrow +0$ , и тогда, действуя по правилу Бернулли-Лопиталя и вычисляя производную

$$\psi'(r) = -3r^2 \Phi(r), \quad (1.22)$$

можем записать

$$-\frac{2}{3} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\psi(r) + B}{r^2} = -\frac{1}{3} \lim_{r \rightarrow +0} \frac{\psi'(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow +0} r \Phi(r).$$

При выполнении условия (1) утверждения последний предел существует и равен нулю. А в случае выполнения условия (2), воспользовавшись еще раз правилом Бернулли-Лопиталя, будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{\Phi(r)}{r^{-1}} = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{-\Phi'(r)}{r^{-2}} = \frac{1}{3} \lim_{r \rightarrow +0} r^2 F(r) = 0.$$

То есть в любом случае имеет место равенство (1.20).

Внося теперь в общее решение (1.17) на место произвольной постоянной  $B$  интеграл (1.21), приходим на основании (1.18) к заявленному представлению (1.16).  $\square$

**Замечание 1.** Для неотрицательной функции  $F(r)$  условие (1) доказанного утверждения эквивалентно, как известно [40], существованию интеграла  $\int_0^a F(r)dr$ .  $\#$

**Замечание 2.** Вычитая из первого равенства (1.17) представление (1.16), получим тождество  $[\psi(r) + B]/r^2 \equiv -r[\Psi(r) + \Phi(r)]$ . Внося его в продифференцированное по  $r$  первое равенство (1.17) и используя также формулу (1.22), находим

$$w'(r) = 2\Psi(r) - \Phi(r) + C. \quad \# \quad (1.23)$$

Вернемся теперь к решению задачи (1.13). Функция удельной деформации  $\Delta(t, \tau)$  положительна всюду в своей области определения в силу положительности меры ползучести и модуля упругости (см. § 0.4). Поэтому если непрерывная и положительная при  $r > 0$  функция  $f(r)$ , задающая интенсивность рассматриваемого силового поля, обладает хотя бы одним из свойств

$$\int_0^1 f(r) dr < +\infty \quad \text{или} \quad r^2 f(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \quad (1.24)$$

то для правой части уравнения (1.14) при любом значении параметра  $t \geq t_0$  будут выполнены все условия утверждения 1.1. В этом случае решение данного уравнения, удовлетворяющее (кинематическому) граничному условию задачи (1.13) при  $r \rightarrow 0$ , может быть записано в виде

$$u(r, t) = r C_0(t) - r[\Psi_0(r) + \Phi_0(r)]\Delta(t, t_0), \quad (1.25)$$

где  $C_0(t)$  — произвольная функция,

$$\begin{aligned}\Phi_0(r) &= \frac{1}{3(\varkappa + 1)} \int_r^{a_0} f(\xi) d\xi, \\ \Psi_0(r) &= \frac{1}{3(\varkappa + 1)} \int_0^r f(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^3 d\xi.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Согласно формуле (1.23) производная по  $r$  функции (1.25) равна

$$\partial u(r, t) / \partial r = [2\Psi_0(r) - \Phi_0(r)] \Delta(t, t_0) + C_0(t).$$

В результате из соотношений (1.13) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{r,\vartheta}^\circ(r, t) &= [m_{r,\vartheta}\Psi_0(r) - (3\varkappa - 1)\Phi_0(r)] \Delta(t, t_0) + (3\varkappa - 1)C_0(t), \\ m_r &= 4, \quad m_\vartheta = -2.\end{aligned}$$

Удовлетворяя далее (силовому) граничному условию задачи (1.13) при  $r = a_0$ , находим

$$C_0(t) = -\frac{4\Psi_0(a_0)\Delta(t, t_0)}{3\varkappa - 1}.$$

В итоге решение задачи (1.13) будет иметь вид

$$u = -r \left[ \Psi_0(r) + \Phi_0(r) + \frac{4\Psi_0(a_0)}{3\varkappa - 1} \right] \Delta(t, t_0),\tag{1.27}$$

$$\sigma_{r,\vartheta}^\circ = [m_{r,\vartheta}\Psi_0(r) - (3\varkappa - 1)\Phi_0(r) - 4\Psi_0(a_0)] \Delta(t, t_0).\tag{1.28}$$

В соответствии с определением (1.11) выражения для истинных напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\vartheta$  получаются отсюда применением формулы (1.7):

$$\sigma_{r,\vartheta} = m_{r,\vartheta}\Psi_0(r) - (3\varkappa - 1)\Phi_0(r) - 4\Psi_0(a_0).\tag{1.29}$$

Как видим, найденные напряжения не зависят от времени и совпадают с напряжениями в аналогично нагруженном упругом шаре (об упругом решении см. также [46, 63]), что является следствием одного из принципов соответствия в линейной теории вязкоупругости [28].

Вычислим теперь девиатор тензора напряжений  $\mathbf{T}$  с компонентами (1.29). В любом ортонормированном базисе  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , первым по порядку следования элементом которого является вектор  $\mathbf{e}_r$ , тензору  $\mathbf{T}$  соответствует диагональная матрица

$$\mathbf{T} \sim \text{diag}\{\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_\vartheta\},$$

а его девиатору, следовательно, — диагональная матрица

$$\text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{\mathbf{1} \text{ tr } \mathbf{T}}{3} \sim (\sigma_r - \sigma_\vartheta) \text{diag}\{2/3, -1/3, -1/3\}.$$

Согласно (1.29) и (1.26) имеем  $\sigma_r - \sigma_\vartheta = 6\Psi_0(r) > 0$ . В итоге можем записать, что

$$\operatorname{dev} \mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Upsilon}(\mathbf{r}) \Psi_0(r), \quad 0 < r < a_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{\Upsilon}(\mathbf{r})$  — тензорное поле, ставящее в соответствие каждой точке пространства с выходящим из центра шара радиус-вектором  $\mathbf{r}$  и произвольному ортонормированному базису вида  $\{\mathbf{r}/|\mathbf{r}|, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  в этой точке постоянную диагональную матрицу  $\operatorname{diag}\{m_r, m_\vartheta, m_\vartheta\}$ .

### 1.3 Деформирование шара в процессе его непрерывного роста

Рассмотрим  $k$ -й этап непрерывного наращивания шара. Частицы притекающего в течение него материала сцепляются с поверхностью роста и после присоединения продолжают свое движение уже в составе сплошного растущего тела. Это означает, что поле скоростей движения частиц  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в области, занимаемой всем существующим на данный момент времени телом, является достаточно гладким и задачу о деформировании последнего в процессе (а также после) его формирования возможно корректно поставить в скоростной форме (см. § 0.5). Следуя этому подходу, запишем аналог уравнения состояния (1.2) рассматриваемого вязкоупругого стареющего материала для тензора скорости деформации

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = [\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \nabla \mathbf{v}^T(\mathbf{r}, t)]/2.$$

Названный аналог будет иметь вид [49]

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t),$$

где тензор  $\mathbf{S}$  получен из тензора напряжений  $\mathbf{T}$  посредством линейного преобразования (1.11) и последующего дифференцирования по времени:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \partial \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)/\partial t.$$

При постановке решаемой задачи было принято, что до начала наращивания и после завершения каждого этапа непрерывного притока материала поверхность шара не подвергается нагружению (см. § 1.1). Именно в этом специальном случае при условии еще, что данная поверхность не загружается также и во время самих этапов роста, как следует из § 0.5,

локальная формулировка уравнения равновесия во всем рассматриваемом шаровом теле, наращиваемом в центрально-симметричном силовом поле  $f(r)$ , как на  $k$ -м этапе наращивания, так и после его прекращения будет допускать следующую простую запись:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r f^\circ(r, t), \quad (1.31)$$

где в соответствии с определением (1.11) и представлением (1.7)

$$f^\circ(r, t) = f(r) \Delta(t, \tau_0(r)). \quad (1.32)$$

Во всех других случаях придется иметь дело с уравнением более сложного вида (см. § 0.5). Последнее обстоятельство объясняется тем, что в силу зависимости параметра интегрального оператора в (1.11) от точки наращиваемого тела записанное здесь уравнение (1.31) не является тривиальным следствием стандартного дифференциального уравнения равновесия, как это было на этапе до начала наращивания (см. § 1.2).

Стоит еще обратить внимание на тот факт, что из-за разрывов функции  $\tau_0(r)$  на границах частей шара, сформированных на различных этапах непрерывного роста, тензор напряжений в общем случае также не может быть непрерывным во всей области, занимаемой в данный момент наращиваемым телом. Это следует из (1.11), оставаясь, понятно, справедливым и после остановки роста.

Дифференцируя уравнение (1.31) по времени  $t$ , получаем с учетом (1.32) и (1.5) следующее дифференциальное уравнение для тензора  $\mathbf{S}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{S}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r f(r) \partial \omega(t, \tau_0(r)) / \partial t. \quad (1.33)$$

Обратимся теперь к краевому условию на поверхности непрерывно растущего шара. Условие, отражающее факт отсутствия начальных напряжений в притекающем материале, имеет в текущий момент времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  следующий вид (см. § 0.5):

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad r = a_{(k)}(t). \quad (1.34)$$

Заметим, что данное условие согласовано с требованием равенства нулю вектора напряжения на текущей поверхности роста, упомянутым выше в связи с возможностью использования уравнения (1.31). Отметим также, что подобное (1.34) условие, задающее сразу все компоненты тензора напряжений на некоторой части граничной поверхности, не является традиционным в механике деформируемого твердого тела. Но при этом именно такого рода условие выставляют обычно на подвижной границе

наращиваемого тела при рассмотрении вопроса о его деформировании (см. § 0.5, а также [8, 9, 18, 25, 28, 49, 85]).

Совокупность условий (1.34) для всех моментов  $k$ -го этапа наращивания может быть записана как

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \quad a_{k-1} < r < a_k,$$

что согласно (1.11), (1.8) и (1.4) эквивалентно равенству

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \quad a_{k-1} < r < a_k. \quad (1.35)$$

Сворачивая его с оператором Гамильтона, получаем

$$\left[ \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) \right] \Big|_{t=\tau_*(r)} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \quad a_{k-1} < r < a_k.$$

Первое слагаемое в силу уравнения (1.31), равенства (1.32), представления (1.8), определения (1.5) и тождества (1.6) равно  $\mathbf{e}_r f(r)/G(\tau_*(r))$ . Во втором слагаемом первый сомножитель может быть вычислен после дифференцирования по  $r$  тождества (1.10):

$$\nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r \tau'_*(r) = \mathbf{e}_r a'_{(k)}(\tau_*(r))^{-1}.$$

В результате получим следующее соотношение:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = -\mathbf{e}_r f(r) a'_{(k)}(\tau_*(r)) / G(\tau_*(r)), \quad a_{k-1} < r < a_k.$$

Рассматривая его на поверхности  $r = a_{(k)}(t)$ , приходим в силу (1.9) к простому граничному условию для тензора  $\mathbf{S}$  на поверхности роста, соответствующей текущему моменту времени  $t$  (см. § 0.5)

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_r q_{(k)}(t), \quad r = a_{(k)}(t),$$

где обозначено

$$q_{(k)}(t) = f(a_{(k)}(t)) a'_{(k)}(t) / G(t).$$

Теперь остается только сформулировать граничное условие в центре шара. Как и на этапе до начала наращивания, это должно быть требование неподвижности центральной точки. В осуществляемом на рассматриваемом этапе варианте постановки задачи (для скоростей всех характеристик напряженно-деформированного состояния) оно, очевидно, может быть записано в форме  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 0$  для всех  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$ .

Итак, собирая вместе полученные выше соотношения, можем сформулировать на  $k$ -м этапе непрерывного наращивания следующую краевую

задачу, зависящую от времени  $t$  как от вещественного параметра:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad \begin{cases} 0 < r < a_{(k)}(t), \\ t_{2k-1} < t < t_{2k}; \end{cases} \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2; \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{e}_r q_{(k)}(t), \quad r = a_{(k)}(t); \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

## 1.4 Деформирование шара после остановки роста

Рассмотрим теперь период деформирования шара от момента прекращения  $k$ -го этапа его наращивания, и если  $k < N$ , до момента начала следующего этапа — то есть на интервале времени  $t \in (t_{2k}, t_{2k+1})$ , где формально считается  $t_{2N+1} = +\infty$ . На этом временном интервале, как уже отмечалось в § 1.3, локальное условие равновесия всего сформированного к его началу тела можно, как и на предыдущем этапе деформирования, сформулировать в виде дифференциального уравнения (1.33).

Однако на поверхности шара вместо неклассического условия (1.34), задающего полный начальный тензор напряжений, теперь необходимо поставить традиционное условие отсутствия напряжения, что соответствует принятому выше требованию незагружения поверхности шара на протяжении всего процесса его деформирования. Это требование обеспечивает возможность использования после начала роста в качестве аналога уравнения равновесия упрощенного дифференциального уравнения (1.31) (см. § 1.3). Названное краевое условие имеет вид

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad r = a_k.$$

Точно такое же условие, понятно, может быть записано на граничной поверхности шара и для тензора  $\mathbf{S}$ .

Формы записи уравнение состояния и граничного условия в центре шара, использованные на предыдущем этапе, на данном этапе деформирования, естественно, сохраняют свой прежний вид.

Таким образом, в паузе между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м этапами наращивания или, если  $k = N$ , после окончательной остановки роста имеем следующую

щую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad \begin{cases} 0 < r < a_k, \\ t_{2k} < t < t_{2k+1}; \end{cases} \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2; \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{0}, \quad r = a_k; \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

которая также содержит вещественный параметр  $t$ .

## 1.5 Напряженно-деформированное состояние кусочно-непрерывно наращиваемого шара

Сравнивая краевые задачи (1.36) и (1.37), описывающие деформирование шара соответственно на произвольном  $k$ -м этапе наращивания и после его окончания, нетрудно заметить следующую особенность. Если ввести функцию

$$a(t) = \begin{cases} a_{(k)}(t), & t_{2k-1} < t < t_{2k}, \\ a_k, & t_{2k} < t < t_{2k+1} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, N),$$

и положить затем

$$q(t) = f(a(t)) a'(t) / G(t), \quad (1.38)$$

то можно объединить различные краевые задачи для всех характерных временных интервалов процесса кусочно-непрерывного наращивания рассматриваемого шара в одну общую краевую задачу, в которой параметр  $t$  пробегает значения времени от начала самого первого этапа роста до плюс бесконечности:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \mathbf{e}_r f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, \quad 0 < r < a(t), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2; \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{e}_r q(t), \quad r = a(t); \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}, \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Задача (1.39) с точностью до замены в ней вектора  $\mathbf{v}$  на вектор перемещения, а тензоров  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{S}$  — соответственно на тензор деформации и отнесенный к модулю сдвига тензор напряжений является классической граничной задачей линейной теории упругости для переменных во времени шаровой области и некоторой заданной на ней объемной и

поверхностной нагрузки. В этой задаче в силу центральной симметрии  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_r v(r, t)$ . Поэтому в компонентной форме она имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial r} + 2 \frac{S_r - S_\vartheta}{r} &= f(r) \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}, & \begin{cases} 0 < r < a(t), \\ t > t_1; \end{cases} \\ S_r &= (\kappa + 1)D_r + 2(\kappa - 1)D_\vartheta, & \left| \begin{array}{l} D_r = \frac{\partial v}{\partial r}, \quad D_\vartheta = \frac{v}{r}; \end{array} \right. \\ S_\vartheta &= (\kappa - 1)D_r + 2\kappa D_\vartheta, & \\ S_r &= -q(t), \quad r = a(t); \quad v \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где  $S_{r,\vartheta}(r, t)$  и  $D_{r,\vartheta}(r, t)$  — диагональные компоненты тензоров  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{D}$ , соответствующие радиальному и окружному направлениям.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что в записанной здесь задаче краевое условие на поверхности  $r = a(t)$ , несмотря на единую математическую форму его записи, имеет принципиально различное происхождение на этапах непрерывного роста (§ 1.3) и на тех этапах процесса, на которых приток материала отсутствует (§ 1.4).

Построим решение краевой задачи (1.40). После подстановки в дифференциальные уравнения этой задачи величин  $S_r$ ,  $S_\vartheta$ , выраженных через функцию  $v(r, t)$ , получим следующее уравнение, подобное уравнению Ляме в линейной теории упругости:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = \frac{f(r)}{\kappa + 1} \frac{\partial \omega(t, \tau_0(r))}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Пусть, как и прежде, непрерывная и положительная при  $r > 0$  функция  $f(r)$ , задающее действующее силовое поле, обладает хотя бы одним из свойств (1.24). Потребуем, чтобы для меры ползучести используемого материала  $\omega(t, \tau)$  выполнялось следующее свойство:

$$\forall t > t_1 : \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} \text{ кусочно-непрерывна по } \tau \text{ на } [t_0, t]. \quad (1.42)$$

Тогда правая часть уравнения (1.41) при  $t > t_1$  будет кусочно-непрерывной функцией переменной  $r$  на полуинтервале  $(0, a(t)]$ .

Если до начала процесса наращивания существовало некоторое исходное шаровое тело радиуса  $a_0 > 0$ , мгновенно изготовленное в момент времени  $t_0 \geq 0$  (что соответствует самой общей постановке рассматриваемой задачи), то при  $0 < r < a_0 < a(t)$  в силу (1.8) будет  $\omega(t, \tau_0(r)) \equiv \omega(t, t_0)$ . В этом случае поведение в окрестности нуля правой части дифференциального уравнения (1.41) как функции от  $r$  определяется только свойствами силового поля  $f(r)$  и, следовательно, для этой функции выполнены все условия утверждения 1.1.

В том особом случае, когда приток материала начинается сразу к некоторому точечному центру при отсутствии какого-либо исходно существующего тела, то есть при  $a_0 = 0$  (в этом случае в рассматриваемой задаче отсутствует разобранный в § 1.2 этап деформирования исходного тела до начала его наращивания), условия (1) или (2) утверждения 1.1 также будут выполнены ввиду следующих обстоятельств. При фиксированном  $t > t_1 \geq 0$  функция  $\partial\omega(t, \tau_0(r))/\partial t$  аргумента  $r \in (0, a(t))$  является неотрицательной, монотонной и ограниченной функцией в силу неотрицательности и строгой монотонности по  $\tau$  производной  $\partial\omega(t, \tau)/\partial t$  меры ползучести (см. свойства меры ползучести в § 0.4), строгой монотонности функции  $\tau_0(r)$ , а также требования (1.42), в котором в данном случае можно считать  $t_0 = t_1$ . Поэтому при выполнении первого ограничения (1.24) аналогичное ограничение согласно признаку Абеля [40] будет выполняться и для функции  $f(r) \partial\omega(t, \tau_0(r))/\partial t$ . Если же имеет место второе из условий (1.24), то эта функция будет, очевидно, также удовлетворять подобному условию.

Таким образом, в соответствии с утверждением 1.1 всякое решение уравнения (1.41), удовлетворяющая (кинематическому) условию задачи (1.40) при  $r \rightarrow 0$ , должно иметь вид

$$v(r, t) = r[C(t) - \Psi(r, t) - \Phi(r, t)],$$

где  $C(t)$  — произвольная функция,

$$\begin{aligned}\Phi(r, t) &= \frac{1}{3(\varkappa + 1)} \int_r^{a(t)} f(\xi) \frac{\partial\omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} d\xi, \\ \Psi(r, t) &= \frac{1}{3(\varkappa + 1)} \int_0^r f(\xi) \frac{\partial\omega(t, \tau_0(\xi))}{\partial t} \left(\frac{\xi}{r}\right)^3 d\xi.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Неизвестная функция  $C(t)$  должна быть определена из (силового) условия задачи (1.40) при  $r = a(t)$ . Для этого, используя формулу (1.23) и соотношения задачи (1.40), вычислим

$$\begin{aligned}\partial v(r, t)/\partial r &= 2\Psi(r, t) - \Phi(r, t) + C(t); \\ S_{r, \vartheta}(r, t) &= m_{r, \vartheta}\Psi(r, t) - (3\varkappa - 1)\Phi(r, t) + (3\varkappa - 1)C(t), \\ m_r &= 4, \quad m_{\vartheta} = -2.\end{aligned}$$

Удовлетворяя теперь указанному условию, находим

$$C(t) = -\frac{4\Psi(a(t), t) + q(t)}{3\varkappa - 1}.$$

После этого решение задачи (1.40) будет иметь вид

$$v = -r \left[ \Psi(r, t) + \Phi(r, t) + \frac{4\Psi(a(t), t) + q(t)}{3\kappa - 1} \right], \quad (1.44)$$

$$S_{r,\vartheta} = m_{r,\vartheta} \Psi(r, t) - (3\kappa - 1) \Phi(r, t) - 4\Psi(a(t), t) - q(t). \quad (1.45)$$

В любом ортонормированном базисе, первым элементом которого является вектор  $\mathbf{e}_r$ , тензор  $\mathbf{S}$  с компонентами (1.45) представляется диагональной матрицей

$$\mathbf{S} \sim \text{diag}\{S_r, S_\vartheta, S_\vartheta\},$$

а его девиатор, очевидно, — диагональной матрицей

$$\text{dev } \mathbf{S} = \mathbf{S} - \frac{\mathbf{1} \text{tr } \mathbf{S}}{3} \sim (S_r - S_\vartheta) \text{diag}\{2/3, -1/3, -1/3\},$$

где  $S_r - S_\vartheta = 6\Psi(r, t) \geq 0$  на основании (1.45), (1.43) и свойства неотрицательности производной  $\partial\omega(t, \tau)/\partial t$  меры ползучести (см. § 0.4). Поэтому имеет место представление девиатора

$$\text{dev } \mathbf{S}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi(r, t), \quad 0 < r < a_N, \quad t > \tau_1(r). \quad (1.46)$$

Здесь введена новая функция

$$\tau_1(r) = \begin{cases} t_1, & 0 < r < a_0, \\ \tau_*(r), & a_0 < r < a_N, \end{cases}$$

а тензорное поле  $\mathbf{T}(\mathbf{r})$  определено в конце § 1.2.

Итак, после решения задачи (1.39) в любой точке шара с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  при  $t > \tau_1(r)$  известна эволюция вектора скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  и тензора  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ . Зная компоненты последнего, можем в соответствии с его определением найти также компоненты тензора

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(r)) + \int_{\tau_1(r)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tau_1(r). \quad (1.47)$$

В точках исходной части шара компоненты тензора  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(r))$ , выполняющего в данной формуле роль начального значения, берутся из решения задачи (1.12), описывающей деформирование исходно существующего тела до начала его наращивания, то есть находятся по формулам (1.28) при  $t = t_1$ . В дополнительной части, сформированной в результате кусочно-непрерывного наращивания, данный тензор тождественно

равен нулю ввиду условия (1.35), обусловленного отсутствием напряжений в присоединяемом материале.

После того, как в каждой точке построена полная временная эволюция тензора  $\mathbf{T}^\circ$ , эволюция тензорного поля напряжений в наращиваемом теле согласно определениям (1.11) и (1.4) находится из решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t). \quad (1.48)$$

В силу (1.3) и (1.4) решение уравнения (1.48) может быть записано в следующей (резольвентной) форме:

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Напомним, что в рассматриваемой задаче наращивания нижний предел  $\tau_0(\mathbf{r})$  интегралов в (1.48) и (1.49) определяется формулой (1.8).

## 1.6 Скачок тензора напряжений на границе раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела

Отвлечемся на время от рассматриваемой задачи и проведем здесь качественный и количественный анализ одного важного свойства решения (1.49) уравнения (1.48), с помощью которого осуществляется восстановление эволюции тензора истинных напряжений по известной эволюции тензора  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$  в любом наращиваемом вязкоупругом теле (см. § 0.5).

Рассмотрим произвольное наращиваемое тело, подчиненное уравнению состояния (1.2), предполагая для простоты, что ядро релаксации  $R(t, \tau)$  удовлетворяет следующему ограничению:

$$\forall t > t_*: R(t, \tau) \text{ кусочно-непрерывна по } \tau \text{ на } [t_*, t], \quad (1.50)$$

где  $t_* \geq 0$  — некоторый момент времени, зависящий только от свойств рассматриваемого материала.

Будем считать, что в процессе наращивания дополнительный материал присоединяется к поверхности растущего тела в некотором, вообще говоря, ненулевом начальном напряженном состоянии, возникающем непосредственно в момент присоединения. Это значит, во-первых, что

напряжения в произвольной точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  появляются в момент времени

$$\tau_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_0, & \mathbf{r} \in \Omega_0, \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_A, \end{cases} \quad (1.51)$$

где  $\Omega_0$  — исходно существующая часть тела (*исходное тело*),  $t_0 \geq t_*$  — момент ее первоначального загрузжения,  $\tau_*(\mathbf{r})$  — момент присоединения к растущему телу частицы с указанным радиус-вектором,  $\Omega_A$  — возникшая в результате наращивания часть окончательно сформированного тела, которую для краткости будем называть его *дополнительной частью*, или *дополнительным телом* (см. также § 0.1). Во-вторых, в каждой точке дополнительной части имеет место такое специфическое начальное условие (см. § 0.5, а также [9, 8, 18, 25, 28, 49]):

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_A,$$

где  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$  — некоторая известная тензор-функция, задающая тензор начальных напряжений в точках  $\Omega_A$ . На основании (1.11), (1.51) и (1.4) это условие может быть записано в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\mathbf{r})) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r})/G(\tau_*(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega_A.$$

Таким образом, вспоминая определение тензора  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  (см. § 0.5), можем записать

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \geq t_1; \quad (1.52)$$

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\mathbf{r}))} + \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{r} \in \Omega_A, \quad t \geq \tau_*(\mathbf{r}). \quad (1.53)$$

Здесь  $t_1 \geq t_0$  — момент начала процесса наращивания. Тензор  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1)$  известен из решения классической задачи о деформировании исходно существующего тела  $\Omega_0$  на отрезке времени  $t \in [t_0, t_1]$  (см. § 0.5, а также, к примеру, § 1.2). Ясно, что  $\tau_*(\mathbf{r}) \geq t_1$  для любого  $\mathbf{r} \in \Omega_A$ .

Согласно (1.49) и (1.51) в исходном теле при  $t \geq t_1$  будем иметь

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau + \int_{t_1}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau.$$

Внося сюда представление (1.52), получим

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^t \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) + \int_{t_1}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma \right] R(t, \tau) d\tau = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau + \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \\
& + \int_{t_1}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \int_{t_1}^\tau \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma, \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \geq t_1. \quad (1.54)
\end{aligned}$$

В дополнительном теле формулы (1.49) и (1.53) при учете (1.51) дают

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} &= \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\mathbf{r}))} \left[ 1 + \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \\
& + \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^t R(t, \tau) d\tau \int_{\tau_*(\mathbf{r})}^\tau \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma, \\
& \mathbf{r} \in \Omega_A, \quad t \geq \tau_*(\mathbf{r}). \quad (1.55)
\end{aligned}$$

Введем некоторые обозначения. Пусть  $\Sigma = \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_A$  — общая часть границы частей тела  $\Omega_0$  и  $\Omega_A$ . Для произвольной функции  $h(\mathbf{r})$  точки наращиваемого тела положим

$$\lceil h(\mathbf{r}) = \lim_{\Omega_A \ni \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} h(\mathbf{r}') - \lim_{\Omega_0 \ni \mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}} h(\mathbf{r}''), \quad \mathbf{r} \in \Sigma.$$

Эта величина есть скачок данной функции на границе раздела исходной и дополнительной частей тела при условии, естественно, что участвующие в написанном определении пределы существуют и конечны. Будем обозначать их кратко через  $h(\mathbf{r}|_A)$  и  $h(\mathbf{r}|_0)$  соответственно.

Проанализируем теперь поведение тензора напряжений в окрестности первоначальной базовой поверхности (роста) в произвольном наращиваемом теле — то есть того участка граничной поверхности его исходной части, к которой в момент времени  $t = t_1$  начался приток дополнительного материала (см. § 0.1).

**Теорема 1.1.** Пусть для некоторой точки  $\mathbf{r}_* \in \Sigma$  существует такая ее окрестность  $U \ni \mathbf{r}_*$  в наращиваемом теле, что:

1) на замыкании  $\bar{U}$  непрерывна скалярная функция

$$\tau_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} t_1, & \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_0, \\ \tau_*(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Omega_A; \end{cases}$$

2) тензорная функция  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$  непрерывна по совокупности аргументов во всех областях  $U_0 \times (t_{(i-1)}, t_{(i)})$  ( $i = 1, \dots, n$ ), где  $U_0 = U \cap \Omega_0$ ,

а  $t_0 = t_{(0)} < \dots < t_{(n)} = t_1$  — некоторый конечный набор моментов времени,  $n \geq 1$ , и может быть непрерывно продолжена на замыкание каждой из этих областей; существует конечный предел  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}_*|_0, t_1)$ ;

3) у тензор-функции  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$ , задающей начальные напряжения в дополнительном теле, существует конечный предел  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r}_*|_A)$ ;

4) тензор-функция  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  непрерывна в областях

$$H_0 = \{(\mathbf{r}, t) \mid \mathbf{r} \in U, \tau_1(\mathbf{r}) < t < t^{(0)}\},$$

$$H_i = U \times (t^{(i-1)}, t^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, m)$$

и непрерывно продолжаема из каждой из этих областей на ее замыкание; здесь  $t^{(0)} < \dots < t^{(m)}$  — некоторый конечный набор моментов времени,  $m \geq 0$ , причем  $t^{(0)} > \tau_1(\mathbf{r})$  для любого  $\mathbf{r} \in \bar{U}$ .

Тогда в каждый момент времени  $t \in (t_1, t^{(m)})$  отнесенный к модулю сдвига скачок тензора напряжений в точке  $\mathbf{r}_*$  при переходе через поверхность  $\Sigma$  равен

$$\frac{\mathcal{I} \mathbf{T}(\mathbf{r}_*, t)}{G(t)} = - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}_*|_0, \tau) R(t, \tau) d\tau -$$

$$- \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}_*|_0, t_1) - \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r}_*|_A)}{G(t_1)} \right] \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \right]. \quad (1.56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение область

$$H = \{(\mathbf{r}, t) \mid \mathbf{r} \in U, \tau_1(\mathbf{r}) < t < t^{(m)}\}$$

и определим на ее замыкании  $\bar{H} = \bigcup_{i=0}^m \bar{H}_i$  тензорную функцию

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau) = \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma. \quad (1.57)$$

Обозначим через  $\mathbf{R}_0(\mathbf{r}, \tau)$  сужение функции  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$  на замкнутую область  $\bar{H}_0$ . Заменяя в (1.57) при каждом  $\mathbf{r}$  переменную интегрирования на новую переменную  $s$  по правилу  $\varsigma = \tau_1(\mathbf{r}) + [\tau - \tau_1(\mathbf{r})]s$ , будем иметь

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{r}, \tau) = \int_0^1 \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_1(\mathbf{r}) + [\tau - \tau_1(\mathbf{r})]s) [\tau - \tau_1(\mathbf{r})] ds. \quad (1.58)$$

Данная запись корректна, поскольку при любом  $\tau > \tau_1(\mathbf{r})$  производная  $d\varsigma/ds > 0$ , а при  $\tau = \tau_1(\mathbf{r})$  интеграл (1.58) обращается в нуль, что согласуется с определением (1.57). Множество  $\bar{H}_0$  компактно в  $\mathbb{R}^4$ , а подынтегральная функция в (1.58) непрерывна как функция аргументов  $\mathbf{r}$ ,  $\tau$  и  $s$

на декартовом произведении  $\bar{H}_0 \times [0, 1]$  ибо получена посредством алгебраических операций и операции композиции над непрерывными функциями. Поэтому [40] функция  $\mathbf{R}_0(\mathbf{r}, \tau)$  непрерывна на  $\bar{H}_0$ .

Рассмотрим функцию (1.57) при  $(\mathbf{r}, \tau) \in \bar{H}_i$  для произвольного  $i > 0$  (если, конечно, вообще  $m > 0$ ). Имеем

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau) = \mathbf{R}_0(\mathbf{r}, t^{(0)}) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t^{(j-1)}}^{t^{(j)}} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \int_{t^{(i-1)}}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma. \quad (1.59)$$

Здесь первое слагаемое в правой части по доказанному выше непрерывно как функция аргумента  $\mathbf{r} \in \bar{U}$ . Функция  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma)$  непрерывна на любом множестве  $\bar{H}_j = \bar{U} \times [t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ , поэтому [40] сумма интегралов, выделенная во второе слагаемое в разложении (1.59), также есть непрерывная функция  $\mathbf{r}$  на компакте  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^3$ . Последнее же слагаемое можно, очевидно, записать как (см. выше)

$$\int_{t^{(i-1)}}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma = \int_0^1 \mathbf{S}(\mathbf{r}, t^{(i-1)} + [\tau - t^{(i-1)}]s') [\tau - t^{(i-1)}] ds'.$$

Подынтегральная функция справа, рассматриваемая как функция аргументов  $\mathbf{r}$ ,  $\tau$  и  $s'$ , непрерывна на множестве  $\bar{H}_i \times [0, 1]$ , где  $\bar{H}_i$  — компакт в  $\mathbb{R}^4$ . Поэтому [40] последнее слагаемое в (1.59) непрерывно на  $\bar{H}_i$  как функция от  $\mathbf{r}$  и  $\tau$ .

Таким образом, функция  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$ , определенная равенством (1.57), непрерывна на всех замкнутых областях  $\bar{H}_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ), а следовательно, и на их объединении  $\bar{H} = \bigcup_{i=0}^m \bar{H}_i$ .

С использованием введенных функций  $\tau_1(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$  соотношения (1.54) и (1.55) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau + \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) \left[ 1 + \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \\ &+ \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau, \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \geq \tau_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} &= \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_1(\mathbf{r}))} \left[ 1 + \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t R(t, \tau) d\tau \right] + \\ &+ \mathbf{R}(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau, \quad \mathbf{r} \in \Omega_A, \quad t \geq \tau_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Зафиксируем произвольный момент времени  $t \in (t_1, t^{(m)})$ . Так как функция  $\tau_1(\mathbf{r})$  непрерывна в точке  $\mathbf{r}_* \in \partial\Omega_0$  и равна  $t_1$  в этой точке, то

$$\tau_1(\mathbf{r}) \rightarrow t_1, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_*. \quad (1.62)$$

Значит для выбранного  $t > t_1$  найдется такая окрестность  $U_t \subseteq U$  точки  $\mathbf{r}_*$ , что  $\tau_1(\mathbf{r}) < t$  для любого  $\mathbf{r} \in \bar{U}_t$ . Если  $t \geq t^{(0)}$ , то, очевидно, можно считать  $U_t = U$ .

Доказательство непрерывности интеграла  $\int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t \mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau$  по  $\mathbf{r}$  на компакте  $\bar{U}_t$  аналогично проведенному выше доказательству непрерывности функции  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \tau)$  и основано как раз на этом факте и принятом свойстве ядра релаксации (1.50).

Интеграл  $\int_{\tau_1(\mathbf{r})}^t R(t, \tau) d\tau$  непрерывен по  $\mathbf{r}$  на  $\bar{U}_t$  как композиция двух непрерывных функций — соответствующего интеграла с переменным нижним пределом и функции  $\tau_1(\mathbf{r})$ .

Для выбранного момента времени  $t$  интеграл  $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau$  как функция  $\mathbf{r}$  непрерывен на компакте  $\bar{U}_0$  в силу условия (2) теоремы и свойства (1.50) ядра релаксации. В этом легко убедиться, разбивая данный интеграл в сумму интегралов по отрезкам, соответствующим совместной непрерывности тензор-функции  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau)$  по совокупности ее аргументов и функции  $R(t, \tau)$  по  $\tau$ , и привлекая затем сведения из [40].

Для функции  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})/G(\tau_1(\mathbf{r}))$  ввиду условия (3), а также непрерывности модуля сдвига по времени (см. § 0.4) и формулы (1.62) существует предел при  $\Omega_A \ni \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_*$ , равный  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r}_*|_A)/G(t_1)$ .

Таким образом, вычисляя предел выражения (1.60) при  $\Omega_0 \ni \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_*$  и выражения (1.61) при  $\Omega_A \ni \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_*$  с учетом второй части условия (2) теоремы и равенства  $\tau_1(\mathbf{r}_*) = t_1$ , приходим к формуле (1.56).  $\square$

**Замечание 1.** Понятно, что в самом общем случае не все точки множества  $\Sigma$  принадлежат той части границы исходного тела, к которой в момент  $t_1$  начинается приток дополнительного материала. Условие (1) теоремы по существу означает, что точка  $\mathbf{r}_*$  лежит именно на этой части границы, то есть на первоначальной базовой поверхности роста.  $\#$

**Замечание 2.** Важно понимать, что распределение тензора  $\mathbf{T}^\circ$  в исходном теле в момент времени  $t_1$  хотя и определяется еще из решения классической задачи для этого тела, но должно уже учитывать нагрузку, возникающую на первоначальной базовой поверхности роста в начальный момент процесса наращивания вследствие притока к ней нового материала и согласованную с тензором начальных напряжений  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$  на этой поверхности (см. также § 0.5).  $\#$

**Замечание 3.** Отметим, что в множество моментов времени  $\{t^{(i)}\}$ , разделяющих области непрерывности тензор-функции  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ , как правило, входят временные границы различных этапов непрерывного роста рассматриваемого тела.  $\#$

**Замечание 4.** Определяющее соотношение (1.2) в качестве вырожденного частного случая содержит уравнение состояния линейно упругого однородного изотропного материала. Для такого материала нужно положить  $G(t) \equiv \text{const}$ ,  $R(t, \tau) \equiv 0$ . В этом случае  $g^\circ(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G$  и формула (1.56) дает не изменяющийся со временем скачок тензора напряжений  $\sqcap \mathbf{T}(\mathbf{r}_*, t) \equiv \mathbf{T}_*(\mathbf{r}_*|_A) - \mathbf{T}(\mathbf{r}_*|_0, t_1)$ . #

**Следствие 1.1.** В условиях теоремы 1.1 эволюция во времени скачка тензора напряжений в точке первоначальной базовой поверхности роста после начала процесса наращивания определяется только свойствами материала, моментами первоначального нагружения исходного тела и начала притока к нему дополнительного вещества, историей деформирования окрестности рассматриваемой точки на всем отрезке времени между указанными моментами, а также тензором начальных напряжений, задаваемым около данной точки непосредственно после начала роста, и не зависит от конкретных параметров всего последующего процесса наращивания и нагружения тела.

**Следствие 1.2.** Пусть на всем отрезке времени  $t \in [t_0, t_1]$  вплоть до начала наращивания исходное тело деформируется только под воздействием постоянной во времени объемной и поверхностной нагрузки при однородных кинематических ограничениях, а затем в некоторой точке  $\mathbf{r}_* \in \Sigma$  одна из физических компонент  $T_{ij}^*(\mathbf{r}_*|_A)$  тензора начальных напряжений (в некоторой ортогональной системе координат в окрестности этой точки) равна нулю. Тогда при выполнении для точки  $\mathbf{r}_*$  всех условий теоремы 1.1 эволюция скачка соответствующей физической компоненты  $T_{ij}$  тензора напряжений в этой точке при переходе через поверхность  $\Sigma$  дается зависимостью

$$\sqcap T_{ij}(\mathbf{r}_*, t) = -T_{ij}^e(\mathbf{r}_*|_0) D(t, t_1, t_0), \quad t \in (t_1, t^{(m)}], \quad (1.63)$$

где  $T_{ij}^e$  — соответствующая физическая компонента тензора напряжений, найденного из решения чисто упругой классической задачи для исходного тела при тех же кинематических ограничениях и нагрузке, что и в рассматриваемой вязкоупругой задаче, а функция

$$D(t, s, \tau) = 1 + G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_s) [\omega(s, \tau) - \omega(t, \tau)], \quad t \geq s \geq \tau \geq 0, \quad (1.64)$$

однозначно определяется свойствами рассматриваемого вязкоупругого стареющего материала и при больших значениях  $s - \tau$  мало отличается от единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если на отрезке  $t \in [t_0, t_1]$  исходное тело деформируется в указанных условиях, то согласно известному принципу соответствия в линейной теории вязкоупругости [28] тензор напряжений в каждой точке этого тела не изменяется на данном отрезке времени и совпадает с тензором напряжений  $\mathbf{T}^e$  в аналогичной чисто упругой задаче:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{T}^e(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

В соответствии с (1.11), (1.7) и (1.51) данное тождество эквивалентно следующему соотношению:

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}^e(\mathbf{r}) \Delta(t, t_0), \quad \mathbf{r} \in \Omega_0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1.65)$$

Пусть  $\{\mathbf{e}_p(\mathbf{r})\}_{p=1}^3$  — ортонормированный репер, соответствующий введенной в окрестности точки  $\mathbf{r}_*$  криволинейной системе координат. Тогда физические компоненты [80] произвольного тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  в данной системе координат равны  $A_{pq} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_q$ . Внося (1.65) в формулу для скачка (1.56), сворачивая результат слева с вектором  $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_*)$  и справа с вектором  $\mathbf{e}_j(\mathbf{r}_*)$ , используя при этом непрерывность векторных полей  $\mathbf{e}_p(\mathbf{r})$  в точке  $\mathbf{r}_*$  и учитывая условие  $T_{ij}^*(\mathbf{r}_*|_A) = 0$ , получаем

$$\lceil T_{ij}(\mathbf{r}_*, t) = -T_{ij}^e(\mathbf{r}_*|_0) D(t, t_1, t_0).$$

Здесь введено обозначение

$$D(t, t_1, t_0) = G(t) \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Delta(\tau, t_0) R(t, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \Delta(t_1, t_0) \left[ 1 + \int_{t_1}^t R(t, \tau) d\tau \right] \right\}.$$

Преобразуем выражение, определяющее функцию  $D$ . Добавим к слагаемым в фигурных скобках величину  $\Delta(t, t_0) + \int_{t_1}^t \Delta(\tau, t_0) R(t, \tau) d\tau$  и обратную ей по знаку. В результате, группируя надлежащим образом слагаемые и вспоминая определение (1.4) интегрального оператора  $\mathcal{N}_s$ , получим, что

$$D(t, t_1, t_0) = G(t) \left\{ (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{t_0}) \Delta(t, t_0) + \right. \\ \left. + (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{t_1}) [\Delta(t_1, t_0) - \Delta(t, t_0)] \right\}.$$

Замечая, что здесь на основании соотношений (1.7) и (1.3) первое слагаемое в фигурных скобках равно  $G(t)^{-1}$ , а разность, записанная в квадратных скобках во втором слагаемом, согласно (1.5) есть  $\omega(t_1, t_0) - \omega(t, t_0)$ ,

приходим к представлению

$$D(t, t_1, t_0) = 1 + G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{t_1}) [\omega(t_1, t_0) - \omega(t, t_0)].$$

Покажем справедливость заявленного свойства функции  $D(t, s, \tau)$ . В силу одного из свойств меры ползучести (см. § 0.4) существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} \omega(\tau + \Delta t, \tau) = A(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

где  $A(\tau)$  — так называемая функция старения. Это значит, что

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists M > 0 : \quad \Delta t > M \implies |\omega(\tau + \Delta t, \tau) - A(\tau)| < \varepsilon_0 \quad \forall \tau \geq 0.$$

Оценим величину

$$\begin{aligned} |D(t, s, \tau) - 1| &= \left| G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_s) [\omega(s, \tau) - \omega(t, \tau)] \right| = \\ &= G(t) \left| [\omega(s, \tau) - \omega(t, \tau)] + \int_s^t [\omega(s, \tau) - \omega(\varsigma, \tau)] R(t, \varsigma) d\varsigma \right| \leq \\ &\leq G(t) \left[ |\omega(s, \tau) - \omega(t, \tau)| + \int_s^t |\omega(s, \tau) - \omega(\varsigma, \tau)| |R(t, \varsigma)| d\varsigma \right]. \end{aligned}$$

Пусть  $s - \tau > M$ . Тогда также  $\varsigma - \tau > M$  для любого  $\varsigma \in [s, t]$ . В итоге

$$|\omega(s, \tau) - \omega(\varsigma, \tau)| \leq |\omega(s, \tau) - A(\tau)| + |A(\tau) - \omega(\varsigma, \tau)| < 2\varepsilon_0.$$

Известно (см. § 0.4 и [5, 8]), что функции  $G(t)$  и  $\int_0^t |R(t, \varsigma)| d\varsigma$  являются ограниченными при  $t \in [0, +\infty)$ , то есть

$$\exists P > 0, Q > 0 : \quad G(t) < P, \quad \int_0^t |R(t, \varsigma)| d\varsigma < Q \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому

$$|D(t, s, \tau) - 1| \leq 2\varepsilon_0 G(t) \left[ 1 + \int_s^t |R(t, \varsigma)| d\varsigma \right] < 2\varepsilon_0 P(1 + Q).$$

Беря произвольное  $\varepsilon > 0$  и полагая  $\varepsilon_0 = \varepsilon / [2P(1 + Q)]$ , получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \quad s - \tau > M \implies |D(t, s, \tau) - 1| < \varepsilon \quad \forall t \geq s.$$

Это и означает выполнение указанного свойства функции  $D$ .  $\square$

**Замечание.** Механический смысл отмеченного в следствии свойства функции  $D$  состоит в том, что при достаточно длительном деформировании тела до начала наращивания исчезает зависимость скачка напряжения  $T_{ij}$  от времени, а также от моментов загрузки исходного тела и начала его наращивания. При этом величина скачка с обратным знаком становится равной соответствующему упругому напряжению в рассматриваемой точке базовой поверхности перед началом процесса роста. #

В заключение этого параграфа отметим, что для использования формулы (1.56), составляющей содержание доказанной здесь теоремы 1.1, нет необходимости в нахождении решения неклассической задачи о деформировании рассматриваемого вязкоупругого стареющего тела после начала его наращивания. В соответствии со следствием 1.1 достаточно знать лишь напряженное состояние исходного тела до и непосредственно в момент начала его роста, а также начальное напряженное состояние материала, присоединяемого к этому телу сразу после этого момента. Причем и то, и другое — только вблизи интересующей нас точки на границе раздела исходной и дополнительной частей формируемого тела. Это обстоятельство делает возможным использование формулы (1.56) или — при соответствующих условиях — вытекающей из нее зависимости (1.63) в качестве одного из критериев точности построения численного решения полной задачи наращивания рассматриваемого тела.

## 1.7 Особенности напряженного состояния наращиваемого шара

В этом параграфе мы докажем и обсудим несколько интересных фактов, наблюдаемых в задаче о наращивании вязкоупругого стареющего шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле.

Заключения, сделанные в п. 1 данного параграфа, вытекают из общих утверждений, доказанных в § 1.6. Пункт 2 является продолжением исследований, начатых в § 1.6 для произвольного наращиваемого тела, но уже применительно к рассматриваемой в данной главе конкретной задаче. Выводы, аналогичные полученным в этом пункте, могут быть сформулированы и для общего случая наращивания с остановками произвольного линейно вязкоупругого тела. Однако такого рода обобщение требует обсуждения ряда вопросов, связанных с чисто геометрическими особенностями возможных процессов поверхностного роста произвольного тела и не вписывающихся в рамки настоящей диссертации.

Результаты, приведенные в п. 3, и вытекающее из них следствие 1.4 (см. § 1.8), отличают поведение именно изучаемого в текущей главе растущего шарового тела и обусловлены, главным образом, центральной симметрией поставленной для него задачи наращивания.

Все общие свойства, отмеченные в настоящем параграфе, будут проиллюстрированы затем графически на примере числового решения частной задачи о наращивании гравитирующего шара (см. § 1.9).

**1. Поведение напряжений в окрестности первоначальной базовой поверхности роста.** Как следует из результатов § 1.6, одной из характерных особенностей напряженного состояния, присущей в общем случае любому наращиваемому телу, является разрыв тензора напряжений на первоначальной базовой поверхности роста. В рассматриваемой задаче о наращивании шара таковой служит вся граница исходного тела, описываемая уравнением  $r = a_0$ . Эволюция скачков радиального и окружного напряжений при переходе через эту поверхность после начала процесса наращивания может быть определена на основании следствия 1.2 — по формуле (1.63) с использованием зависимостей (1.29):

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a_0-0}^{a_0+0} \equiv 0, \quad \sigma_\vartheta(r, t)|_{r=a_0-0}^{a_0+0} = 6\Psi_0(a_0)D(t, t_1, t_0), \quad t > t_1. \quad (1.66)$$

Как и должно быть, радиальное напряжение непрерывно на поверхности раздела исходной и дополнительной частей шара, что обеспечивает механический контакт данных частей. Однако непрерывный график зависимости радиального напряжения от радиальной координаты имеет излом в точке  $r = a_0$ . Величину соответствующего разрыва производной легко определить по скачку окружного напряжения, воспользовавшись дифференциальным уравнением равновесия шара  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{e}_r f(r)$ . В координатной форме в силу центральной симметрии задачи это уравнение, очевидно, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = f(r), \quad 0 < r < a(t). \quad (1.67)$$

Поэтому ввиду непрерывности радиального напряжения и рассматриваемого силового поля  $f(r)$  искомая величина разрыва производной равна

$$\frac{\partial \sigma_r(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=a_0-0}^{a_0+0} = \frac{2\sigma_\vartheta(r, t)|_{r=a_0-0}^{a_0+0}}{a_0}, \quad t > t_1.$$

**2. Поведение напряжений вблизи последующих базовых поверхностей.** Нетрудно понять, что тензор напряжений будет терпеть разрывы не только на первоначальной, но и на всех последующих *базовых поверхностях (роста)*, то есть на тех поверхностях, к которым начинается приток материала на очередном этапе непрерывного наращивания (см. § 0.1). Величины этих разрывов в решаемой задаче можно определить, исходя из формулы (1.55), в которой следует положить  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$  и  $\tau_*(\mathbf{r}) \equiv \tau_*(r)$ , а затем перейти к пределам при  $r \rightarrow a_k \pm 0$  ( $k = 1, \dots, N - 1$ ).

Введем непрерывную функцию

$$\tau_{k+1}(r) = \begin{cases} t_{2k+1}, & a_{k-1} < r \leq a_k, \\ \tau_*(r), & a_k < r < a_{k+1} \quad (k = 1, \dots, N-1), \end{cases}$$

на двух смежных частях окончательно сформированного шара. Тогда для той из этих частей, которая получена на  $k$ -м этапе непрерывного роста, будем из соотношения (1.55) иметь представление

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = & \int_{\tau_{k+1}(r)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \int_{\tau_{k+1}(r)}^t R(t, \tau) d\tau \int_{\tau_{k+1}(r)}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \\ & + \left[ 1 + \int_{t_{2k+1}}^t R(t, \tau) d\tau \right] \int_{\tau_*(r)}^{t_{2k+1}} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \\ & + \int_{\tau_*(r)}^{t_{2k+1}} R(t, \tau) d\tau \int_{\tau_*(r)}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma, \quad a_{k-1} < r < a_k, \quad t \geq \tau_{k+1}(r), \end{aligned}$$

а для части, полученной на  $(k+1)$ -м этапе, —

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} = & \int_{\tau_{k+1}(r)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma + \int_{\tau_{k+1}(r)}^t R(t, \tau) d\tau \int_{\tau_{k+1}(r)}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma) d\varsigma, \\ & a_k < r < a_{k+1}, \quad t \geq \tau_{k+1}(r), \end{aligned}$$

Вычисляя теперь указанные пределы, получим ( $k = 1, \dots, N-1$ )

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{r=a_k-0}^{a_k+0}}{G(t)} = & - \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} R(t, \tau) d\tau \int_{t_{2k}}^{\tau} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \varsigma)|_{r=a_k-0} d\varsigma - \\ & - \left[ 1 + \int_{t_{2k+1}}^t R(t, \tau) d\tau \right] \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau)|_{r=a_k-0} d\tau, \quad t > t_{2k+1}. \quad (1.68) \end{aligned}$$

Сворачивая полученную формулу с единичным вектором  $\mathbf{e}_r$  и используя (силовое) граничное условие задачи (1.37) при  $r = a_k$ , убеждаемся в выполнении условия механического контакта частей шара, разделяемых поверхностью  $r = a_k$ , в виде  $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{r=a_k-0}^{a_k+0} \equiv \mathbf{0}$ ,  $t > t_{2k-1}$ . В нашем случае это эквивалентно отсутствию разрыва радиального напряжения на данной поверхности, то есть  $\sigma_r(r, t)|_{r=a_k-0}^{a_k+0} \equiv 0$ . При этом однако имеется разрыв производной  $\sigma_r$  по радиальной координате в точках  $r = a_k$ . Величину разрыва можно определить по формуле

$$\frac{\partial \sigma_r(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=a_k-0}^{a_k+0} = \frac{2\sigma_\vartheta(r, t)|_{r=a_k-0}^{a_k+0}}{a_k}, \quad t > t_{2k+1} \quad (k = 1, \dots, N-1),$$

аналогично тому, как это делается в п. 1 настоящего параграфа для поверхности раздела исходного и дополнительного тел. Участвующая здесь величина разрыва окружного напряжения вычисляется на основании полученной зависимости (1.68), которую следует для этого умножить слева и справа на произвольный единичный вектор, ортогональный вектору  $\mathbf{e}_r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\vartheta}(r, t)|_{r=a_k-0}^{a_k+0}}{G(t)} = & - \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} R(t, \tau) d\tau \int_{t_{2k}}^{\tau} S_{\vartheta}(a_k - 0, \varsigma) d\varsigma - \\ & - \left[ 1 + \int_{t_{2k+1}}^t R(t, \tau) d\tau \right] \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} S_{\vartheta}(a_k - 0, \tau) d\tau, \quad t > t_{2k+1}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Здесь функция  $S_{\vartheta}(a_k - 0, t)$  на интервале времени  $t \in (t_{2k}, t_{2k+1})$  находится из решения задачи (1.40) в паузе между  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м этапами непрерывного роста по формуле (1.45).

Анализируя зависимость (1.68) и краевую задачу (1.37), можем сформулировать следующее

**Утверждение 1.2.** *В линейно вязкоупругом стареющем шаре, наращиваемом рассматриваемым образом в центрально-симметричном силовом поле (см. § 1.1), эволюция скачка тензора напряжений на границе раздела его частей, сформированных на  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м этапах непрерывного роста ( $k = 1, \dots, N - 1$ ), после начала  $(k + 1)$ -го этапа определяется только свойствами материала, силовым полем в той части тела, которая существовала на момент окончания  $k$ -го этапа роста, моментом времени загрузки и размером части тела, существующей до начала наращивания, историей формирования шара на всех этапах его наращивания начиная с 1-го и заканчивая  $k$ -м, а также продолжительностью паузы, выдержанной между  $k$ -м и  $(k + 1)$ -м этапами роста, и не зависит от программы всего последующего процесса наращивания и интенсивности силового поля, воздействующего на присоединяемый при этом материал. Эта эволюция дается зависимостью (1.68).*

**Замечание.** Утверждение 1.2 существенно опирается на тот факт, что во все моменты времени, попадающие в интервал скачка функции  $\tau_*(\mathbf{r})$ , которая описывает распределение моментов времени включения в состав растущего тела отдельных его частиц (см. § 1.6), при переходе через рассматриваемую базовую поверхность роста, в нашем случае отсутствует приток к телу дополнительного материала. #

**3. Поведение девиатора напряжений внутри наращиваемого шара.** Отметим еще несколько свойств напряженного состояния наращиваемого шара, вызванных структурой самого тензора напряжений и связанных с поведением его девиатора внутри тела.

Продолжая рассуждения § 1.5 и вспоминая определение тензора  $\mathbf{S}$ , можем утверждать, что скорость изменения девиатора  $\text{dev } \mathbf{T}^\circ$  после начала процесса наращивания описывается зависимостью (см. (1.46))

$$\partial \text{dev } \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) / \partial t = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi(r, t), \quad 0 < r < a_N, \quad t > \tau_1(r).$$

Внутри исходного тела согласно определениям (1.43) и (1.26) функций  $\Psi(r, t)$  и  $\Psi_0(r)$ , а также представлению (1.8) функции  $\tau_0(r)$  справедливо

$$\Psi(r, t) = \Psi_0(r) \partial \omega(t, t_0) / \partial t, \quad 0 < r < a_0, \quad t > t_1.$$

Начальным условием для  $\text{dev } \mathbf{T}^\circ$  при  $t = \tau_1(r)$  в точках дополнительной части шара является нулевой тензор (как следствие присоединения к шару ненапряженного материала), а в исходной части — в соответствии с результатами § 1.2 — тензор

$$\text{dev } \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t_1) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi_0(r) \Delta(t_1, t_0), \quad 0 < r < a_0.$$

Таким образом, в исходном теле ( $0 < r < a_0$ ) при  $t \geq t_1$  имеем

$$\text{dev } \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi_0(r) \left[ \Delta(t_1, t_0) + \omega(\tau, t_0) \Big|_{\tau=t_1}^t \right] = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi_0(r) \Delta(t, t_0).$$

Здесь в последнем преобразовании использовано определение (1.5) функции  $\Delta(t, \tau)$ . Привлекая теперь другое представление этой же функции — (1.7), на основании полученной зависимости находим для  $t \geq t_1$

$$\text{dev } \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Psi_0(r), \quad 0 < r < a_0. \quad (1.70)$$

В дополнительном теле ( $a_0 < r < a_N$ ), выписывая в явном виде определяющее функцию  $\Psi(r, t)$  выражение (1.43), при  $t \geq \tau_*(r)$  имеем

$$\text{dev } \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r})}{3(\varkappa + 1)} \int_0^r f(\xi) \left( \frac{\xi}{r} \right)^3 \omega(\varsigma, \tau_0(\xi)) \Big|_{\varsigma=\tau_*(r)}^t d\xi.$$

Действуя на это соотношение оператором  $\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_*(r)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \text{dev } \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{T}(\mathbf{r}) \Xi(r, t), \quad a_0 < r < a_N, \quad t \geq \tau_*(r), \\ \Xi(r, t) &= \frac{1}{3(\varkappa + 1)} \int_0^r f(\xi) \left( \frac{\xi}{r} \right)^3 \left[ 1 - D(t, \tau_*(r), \tau_0(\xi)) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Сравнивая теперь соотношения (1.70) и (1.30) и анализируя зависимость (1.71), можем сформулировать

**Утверждение 1.3.** *В точках изначально существующей части рассматриваемого наращиваемого шара девиатор напряжений не изменяется со временем на протяжении всего процесса наращивания и после его завершения, сохраняя свои упруго-мгновенные значения, возникшие в момент первоначального нагружения исходного тела. Соответствующее тензорное поле имеет вид (1.70). Эволюция девиатора напряжений в каждой точке дополнительной части определяется только свойствами материала, моментом нагружения и размером исходного тела, а также историей формирования шара вплоть до момента включения рассматриваемой точки в состав тела и силовым полем в пределах существующей на этот момент части шара и не зависит от программы всего последующего процесса наращивания и интенсивности силового поля, воздействующего на присоединяемый при этом материал. Эта эволюция дается зависимостью (1.71).*

**Замечание 1.** Обратим внимание на то, что функция  $\Psi_0(r)$  не зависит от размера  $a_0$  того тела, которое существовало до начала наращивания (см. определение (1.26) этой функции). Значит девиатор напряжений в исходной части любого наращиваемого оговоренным в § 1.1 образом шара изменяется вдоль радиуса точно так же, как если бы эта часть входила в состав ненаращиваемого (классического) шара, находящегося в рассматриваемом силовом поле. #

**Замечание 2.** Из симметрии задачи вытекает, что в центре шара реализуется шаровое напряженное состояние (то есть с нулевым девиатором). Это можно установить и непосредственно, опираясь на свойство (1.24) действующего силового поля  $f(r)$ , — из соотношения (1.70) в случае существования исходного тела конечного размера  $a_0 > 0$  или из соотношения (1.71) и определения (1.64) функции  $D$ , если исходное тело отсутствует ( $a_0 = 0$ ). #

**Следствие 1.3.** *При достаточно большой продолжительности паузы перед  $k$ -м этапом ( $k = 1, \dots, N$ ) непрерывного роста рассматриваемого шара девиатор напряжений  $\text{dev } \mathbf{T}|_{r=a_{k-1}+0}$  в слое материала, который будет присоединен к телу непосредственно после начала данного этапа, на протяжении всего последующего процесса деформирования этого слоя будет сколь угодно мало отличаться от нуля.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Переходя к пределу при  $r \rightarrow a_{k-1} + 0$  в соотношении (1.71), будем для  $t > t_{2k-1}$  иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{dev} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \Big|_{r=a_{k-1}+0} &= \\ &= \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r})}{3(\varkappa+1)} \int_0^{a_{k-1}} f(\xi) \left( \frac{\xi}{a_{k-1}} \right)^3 \left[ 1 - D(t, t_{2k-1}, \tau_0(\xi)) \right] d\xi. \end{aligned}$$

При любом  $\xi \in (0, a_{k-1})$  справедливо неравенство  $\tau_0(\xi) \leq t_{2k-2}$ . Поэтому если пауза  $\Delta t_{2k-1}$  перед  $k$ -м этапом велика, то велика и разность

$$t_{2k-1} - \tau_0(\xi) \equiv \Delta t_{2k-1} + [t_{2k-2} - \tau_0(\xi)] \geq \Delta t_{2k-1}$$

между вторым и третьим аргументами функции  $D$  под знаком интеграла. Остается только воспользоваться доказанным в следствии 1.2 свойством этой функции.  $\square$

**Замечание 3.** Такие важные с точки зрения прочности инвариантные характеристики напряженного состояния тела как интенсивность касательных напряжений  $T$  и максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  являются, как известно, инвариантами именно девиатора напряжений: первая из них определяется формулой  $T = \sqrt{1/2 \operatorname{dev} \mathbf{T} \cdot \operatorname{dev} \mathbf{T}}$ , а вторая есть наибольшая среди неотрицательных полуразностей различных пар собственных значений названного тензора [43]. Поэтому высказывания утверждения 1.3 и следствия 1.3 справедливы, в частности, и для каждой из этих характеристик. В рассматриваемой задаче, как легко установить на основании (1.70), (1.71) и определения тензорного поля  $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ , данные характеристики во всем теле отличаются друг от друга только постоянным числовым множителем и при  $t \geq \tau_0(r)$  находятся из соотношений

$$\frac{T}{2\sqrt{3}} \equiv \frac{\tau_{\max}}{3} = \begin{cases} \Psi_0(r), & 0 < r < a_0, \\ \Xi(r, t), & a_0 < r < a_N. \end{cases} \quad \# \quad (1.72)$$

## 1.8 Упругий случай

Все проведенные выше рассуждения остаются, разумеется, в силе и в частном случае чисто упругого поведения материала. В этом случае нужно всюду считать  $\omega(t, \tau) \equiv 0$ ,  $G(t) \equiv \text{const}$ . Это в соответствии с (1.4) и (1.5) означает, что для произвольной функции точки тела и времени определение (1.11) вырождается в равенство

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G. \quad (1.73)$$

Как отмечалось в § 1.2, в рассматриваемой задаче (вследствие известного принципа соответствия) учет ползучести и старения материала не влияет на напряженное состояние исходного тела до начала его наращивания. Поэтому в чисто упругом случае напряжения на данном этапе деформирования по-прежнему определяются формулами (1.29). Перемещение же в силу общей формулы (1.27) и справедливого для упругого материала тождества  $\Delta(t, \tau) \equiv G^{-1}$  (см. определение (1.5) функции удельной деформации  $\Delta$ ) дается зависимостью

$$u = -\frac{r}{G} \left[ \Psi_0(r) + \Phi_0(r) + \frac{4\Psi_0(a_0)}{3\kappa - 1} \right]. \quad (1.74)$$

После начала процесса наращивания согласно (1.43) в силу отсутствия ползучести имеем  $\Phi(r, t) \equiv 0$ ,  $\Psi(r, t) \equiv 0$ . Поэтому формулы (1.44), (1.45) и (1.38) дают для скорости движения частиц шара вдоль его радиуса и компонент тензора **S** следующие выражения:

$$v = -\frac{r a'(t) f(a(t))}{(3\kappa - 1)G}, \quad S_{r,\vartheta} = -\frac{a'(t) f(a(t))}{G}. \quad (1.75)$$

Используя теперь (1.47), условие (1.35), тождество (1.73) и классическое решение на этапе до начала роста (1.29), находим, что в исходной части шара ( $0 < r < a_0$ ) при  $t \geq t_1$  компоненты напряженного состояния есть

$$\begin{aligned} \sigma_{r,\vartheta}(r, t) &= \sigma_{r,\vartheta}(r, t_1) - \int_{t_1}^t a'(\tau) f(a(\tau)) d\tau = \\ &= m_{r,\vartheta} \Psi_0(r) - (3\kappa - 1) \Phi_0(r) - 4\Psi_0(a_0) - \int_{a_0}^{a(t)} f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.76)$$

а в дополнительной части ( $a_0 < r < a_N$ ) при  $t \geq \tau_*(r)$  они равны

$$\sigma_{r,\vartheta}(r, t) = - \int_{\tau_*(r)}^t a'(\tau) f(a(\tau)) d\tau = - \int_r^{a(t)} f(\xi) d\xi. \quad (1.77)$$

Как видим, напряженное состояние упругого шара, наращиваемого в заданном центрально-симметричном силовом поле, не зависит *явно* ни от времени, ни от конкретной реализуемой программы наращивания (то есть от количества этапов наращивания, вида соответствующих им законов увеличения радиуса и длительности пауз перед этапами). Оно определяется лишь текущим размером шара и размером его исходно существующей части, а также коэффициентом Пуассона используемого материала; после прекращения роста напряженное состояние сформированного

шара не меняется, а скорости движения всех его частиц равны нулю. Этого, конечно, и следовало ожидать. Однако, как четко показывают приведенные в настоящем параграфе выражения, такое положение вещей ни в коем случае не означает, что напряженно-деформированное состояние упругого шара, наращиваемого в центральном силовом поле, может быть найдено из решения классической задачи теории упругости для тела с параметрически изменяющейся границей.

Напряженному состоянию наращиваемого упругого шара присущи все отмеченные в § 1.7 характерные свойства, за исключением, естественно, разрывов окружного напряжения и производной радиального напряжения по радиальной координате на поверхностях  $r = a_k$  ( $k = 1, \dots, N-1$ ), разделяющих части шара, полученные на различных этапах его непрерывного роста (то, что указанные разрывы должны отсутствовать, напрямую вытекает из выводов, сформулированных в начале предыдущего абзаца; однако в этом можно убедиться и непосредственно: на основании верного в упругости тождества  $R(t, \tau) \equiv 0$  и выражения (1.75) для компоненты  $S_\vartheta$  из зависимости (1.69) имеем

$$\sigma_\vartheta|_{r=a_k-0}^{a_k+0} \equiv \int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}} a'(\tau) f(a(\tau)) d\tau, \quad t > t_{2k+1},$$

но на временном интервале интегрирования радиус шара не изменяется ввиду отсутствия роста, то есть  $a'(\tau) \equiv 0$  при  $t_{2k} < \tau < t_{2k+1}$ ).

Скачок окружного напряжения на поверхности  $r = a_0$  раздела исходной и дополнительной частей упругого шара согласно (1.66) и имеющему место в упругом случае тождеству

$$D(t, s, \tau) \equiv 1 \tag{1.78}$$

(см. определение (1.64) функции  $D$ ) не изменяется со временем и составляет величину  $\sigma_\vartheta|_{r=a_0-0}^{a_0+0} \equiv 6\Psi_0(a_0)$ ,  $t > t_1$ .

Что касается девиатора напряжений, то в исходной части шара, как и в общем вязкоупругом случае, на протяжении всего процесса деформирования этой части данный тензор не зависит от времени и определяется соотношением (1.70) (см. утверждение 1.3). В дополнительной части в силу зависимости (1.71) и тождества (1.78) для него оказывается справедливым более сильное, чем при наличии ползучести, утверждение:

**Следствие 1.4.** *В каждой точке возникшей в результате наращивания части упругого шара, формируемого рассматриваемым образом в произвольном центрально-симметричном силовом поле (см. § 1.1), девиатор напряжений тождественно равен нулю во все моменты времени после включения этой точки в состав растущего тела.*

Это означает, что присоединяемый к шару дополнительный материал всегда загружен *как идеальная жидкость* (то есть тензор напряжений является шаровым независимо от поля скоростей движения частиц [80]).

Таким образом, характерные неклассические особенности деформирования упругого шара, наращиваемого в рассматриваемом поле массовых сил, как видим, выражены во многом даже более ярко, чем в общем случае вязкоупругого материала. Из дальнейшего изложения станет ясно, что этот вывод касается не только изучаемой в данной главе задачи о шаре, а отражает саму сущность такого рода задач механики, где ставится вопрос о наращивании вязкоупругого и, как частный случай, упругого тела в присутствии воздействующих на них массовых сил.

## 1.9 Нарращивание гравитирующего шара

**1. Вязкоупругий случай.** Предположим, что наращивание вязкоупругого стареющего шара происходит в его собственном гравитационном поле. Тогда [45]

$$f(r) = cr, \quad c = 4/3 \pi \gamma_0 d^2, \quad (1.79)$$

где  $\gamma_0$  — гравитационная постоянная,  $d$  — плотность массы.

В этом случае введенные в § 1.2 функции  $\Phi_0$  и  $\Psi_0$  принимают вид

$$\Phi_0(r) = \frac{c(a_0^2 - r^2)}{6(\varkappa + 1)}, \quad \Psi_0(r) = \frac{cr^2}{15(\varkappa + 1)}. \quad (1.80)$$

В результате на этапе до начала наращивания выражения для перемещения (1.27) и напряжений (1.29) дают следующие зависимости:

$$u = -\frac{cr}{10(\varkappa + 1)} \left[ \frac{(5\varkappa + 1)a_0^2}{3\varkappa - 1} - r^2 \right] \Delta(t, t_0),$$

$$\sigma_r = -\frac{c(5\varkappa + 1)(a_0^2 - r^2)}{10(\varkappa + 1)}, \quad \sigma_\vartheta = -\frac{c[(5\varkappa + 1)a_0^2 - (5\varkappa - 3)r^2]}{10(\varkappa + 1)}.$$

В выражения (1.43), определяющие функции  $\Phi(r, t)$  и  $\Psi(r, t)$ , а следовательно, и в решение (1.44), (1.45) краевой задачи (1.40) для наращиваемого шара, равно как и в зависимость (1.71), выражающую поведение девиатора напряжений в дополнительном теле, конкретный вид силового поля  $f(r)$  не вносит принципиальных упрощений.

Исследуем количественно поведение компонент и основных характеристик напряженного состояния гравитирующего вязкоупругого шара при

различных режимах его наращивания. Для этого зададим меру ползучести в форме [4]:

$$\omega(t, \tau) = A(\tau) [1 + e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где  $A(\tau)$  — функция старения,  $\gamma > 0$  — коэффициент масштаба времени.

Аппроксимируем модуль сдвига  $G(t)$  и функцию старения  $A(\tau)$  зависимостями (см. § 0.4)

$$G(t) = G_\infty (1 - \delta G e^{-\alpha t}), \quad A(\tau) = A_\infty + \Delta A e^{-\beta \tau}.$$

Для числовых расчетов примем [28]

$$\alpha/\gamma = 2, \quad \delta G = 0.5; \quad \beta/\gamma = 31/60, \quad A_\infty G_\infty = 0.5522, \quad \Delta A G_\infty = 4.$$

Отметим, что такие значения параметров аппроксимации характеристик вязкоупругого материала соответствуют экспериментальным данным по ползучести некоторых видов бетона и горных пород [76].

Введем следующую систему базовых безразмерных величин. Величины, имеющие размерность времени, умножим на  $\gamma$ , а имеющие размерность длины и напряжения — отнесем соответственно к исходному радиусу шара  $a_0$  и модулю сдвига  $G_\infty$  материала в его весьма большом возрасте. Все размерные физические величины, приведенные с помощью этой системы к безразмерному виду, будем помечать чертой сверху; так  $\bar{t} = \gamma t$ ,  $\bar{r} = r/a_0$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma/G_\infty$ ,  $\bar{c} = c a_0^2/G_\infty$ .

В качестве примеров рассмотрим нижеперечисленные режимы наращивания, полагая в каждом из них  $\bar{t}_0 = 0.1$ ,  $\Delta \bar{t}_1 = 0.5$ ,  $\bar{a}_k - \bar{a}_{k-1} = 0.5$  ( $k = 1, \dots, N$ ) и принимая для простоты линейный закон увеличения радиуса шара на этапах его непрерывного роста:

I. Один этап непрерывного наращивания ( $N = 1$ ):

- 1) с «большой» скоростью ( $\Delta \bar{t}_2 = 0.6$ ) — фиг. 1.1,  $a$ – $c$ ; фиг. 1.3, кривая 1 в группе I;
- 2) с «малой» скоростью ( $\Delta \bar{t}_2 = 2.4$ ) — фиг. 1.1,  $d$ – $f$ ; фиг. 1.3, кривая 2 в группе I.

II. Два этапа непрерывного наращивания ( $N = 2$ ). Первый этап всегда с промежуточной скоростью ( $\Delta \bar{t}_2 = 1.2$ ), второй этап:

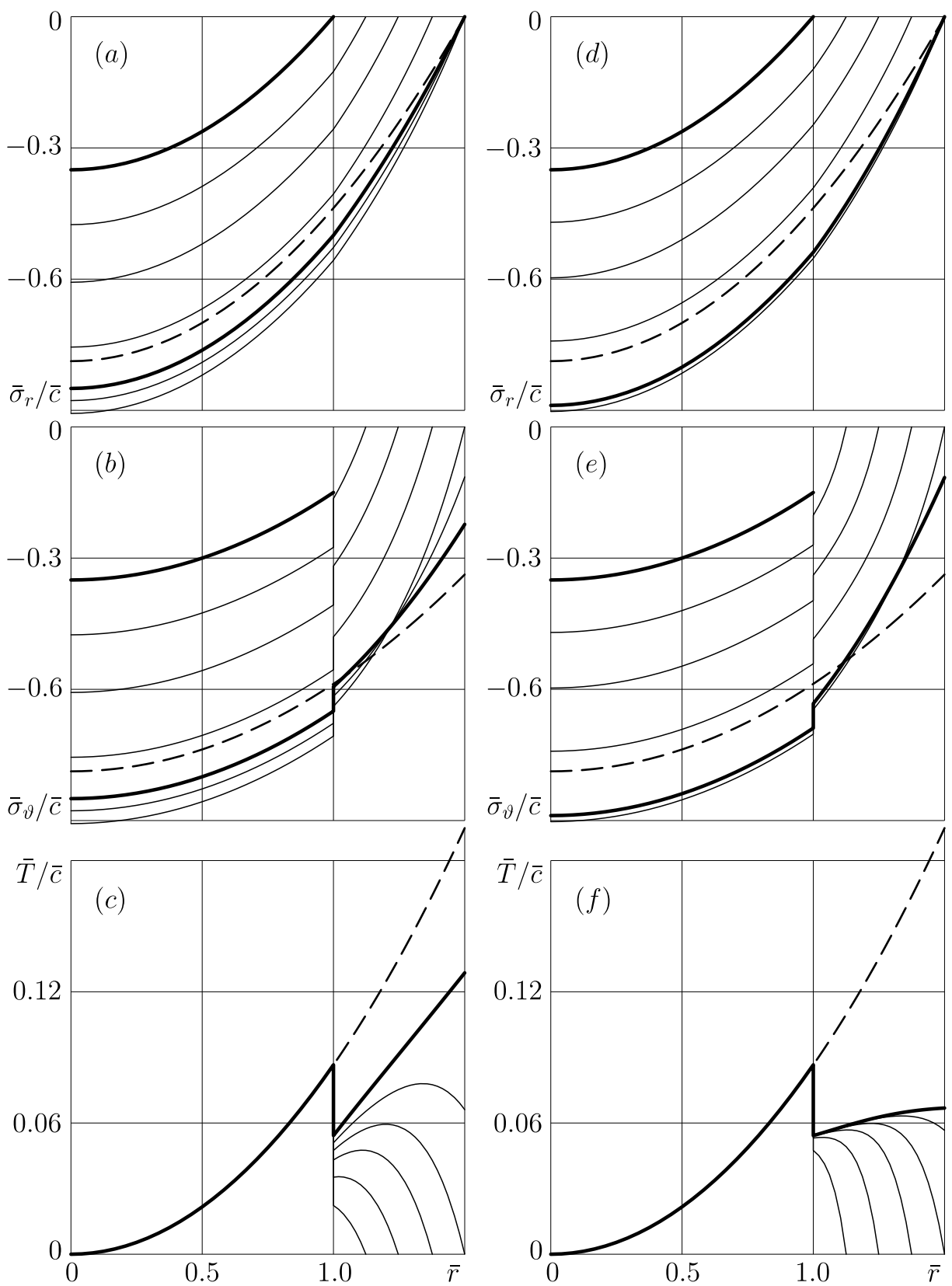
- 1) с промежуточной скоростью ( $\Delta \bar{t}_4 = 1.2$ ) без паузы между этапами ( $\Delta \bar{t}_3 = 0$ ) — фиг. 1.2, кривая 1;
- 2) с «большой» скоростью ( $\Delta \bar{t}_4 = 0.6$ ) без паузы между этапами ( $\Delta \bar{t}_3 = 0$ ) — фиг. 1.2, кривая 2; фиг. 1.3, кривая 2 в группе II;

- 3) с «малой» скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 2.4$ ) без паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 0$ ) — фиг. 1.2, кривая 3; фиг. 1.3, кривая 3 в группе II;
- 4) с промежуточной скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 1.2$ ) после «небольшой» паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 1.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 4;
- 5) с «большой» скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 0.6$ ) после «небольшой» паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 1.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 5;
- 6) с «малой» скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 2.4$ ) после «небольшой» паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 1.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 6;
- 7) с промежуточной скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 1.2$ ) после достаточно продолжительной паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 10.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 7;
- 8) с «большой» скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 0.6$ ) после достаточно продолжительной паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 10.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 8; фиг. 1.3, кривая 8 в группе II;
- 9) с «малой» скоростью ( $\Delta\bar{t}_4 = 2.4$ ) после достаточно продолжительной паузы между этапами ( $\Delta\bar{t}_3 = 10.0$ ) — фиг. 1.2, кривая 9; фиг. 1.3, кривая 9 в группе II.

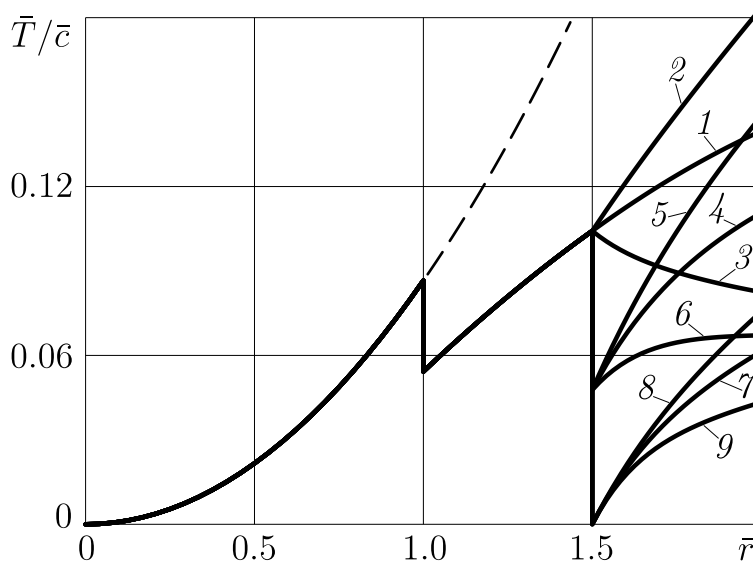
Методика построения численного решения задачи наращивания для всех моделируемых режимов протекания исследуемого процесса, а также приемы, используемые при проверке результатов и оценке их точности, изложены в приложении Б.

Проанализируем полученные результаты. Укажем для начала, что *штриховыми линиями* на всех фигурах представлены кривые, соответствующие характеристикам напряженного состояния *мгновенно изготовленного* гравитирующего шара — окончательного радиуса  $a_N$  в случае фиг. 1.1 и 1.2 и текущего радиуса  $a(t)$  в случае фиг. 1.3. Эти характеристики найдены из решения классической задачи линейной теории вязкоупругости, то есть по формулам (1.27), (1.29) и (1.26), в которых следует заменить величину  $a_0$  на соответствующее значение радиуса. *Толстыми сплошными линиями* на фиг. 1.1 и 1.2 построены *финальные распределения* напряжений и интенсивности касательных напряжений в шаре, сформированном при различных режимах наращивания, а также распределения этих величин в исходно существующей части шара *до начала процесса роста*. *Сплошные тонкие линии* на фиг. 1.1 и *сплошные линии* на фиг. 1.3 показывают *эволюцию* различных характеристик напряженного состояния наращиваемого шара.

На фиг. 1.1,  $a$ – $c$  и  $d$ – $f$  представлены зависимости безразмерных ра-



**Фиг. 1.1.** Распределение радиальных и окружных напряжений и интенсивности касательных напряжений в нарастаемом шаре: (a)–(c) — «быстрое» нарастание; (d)–(f) — «медленное» нарастание.



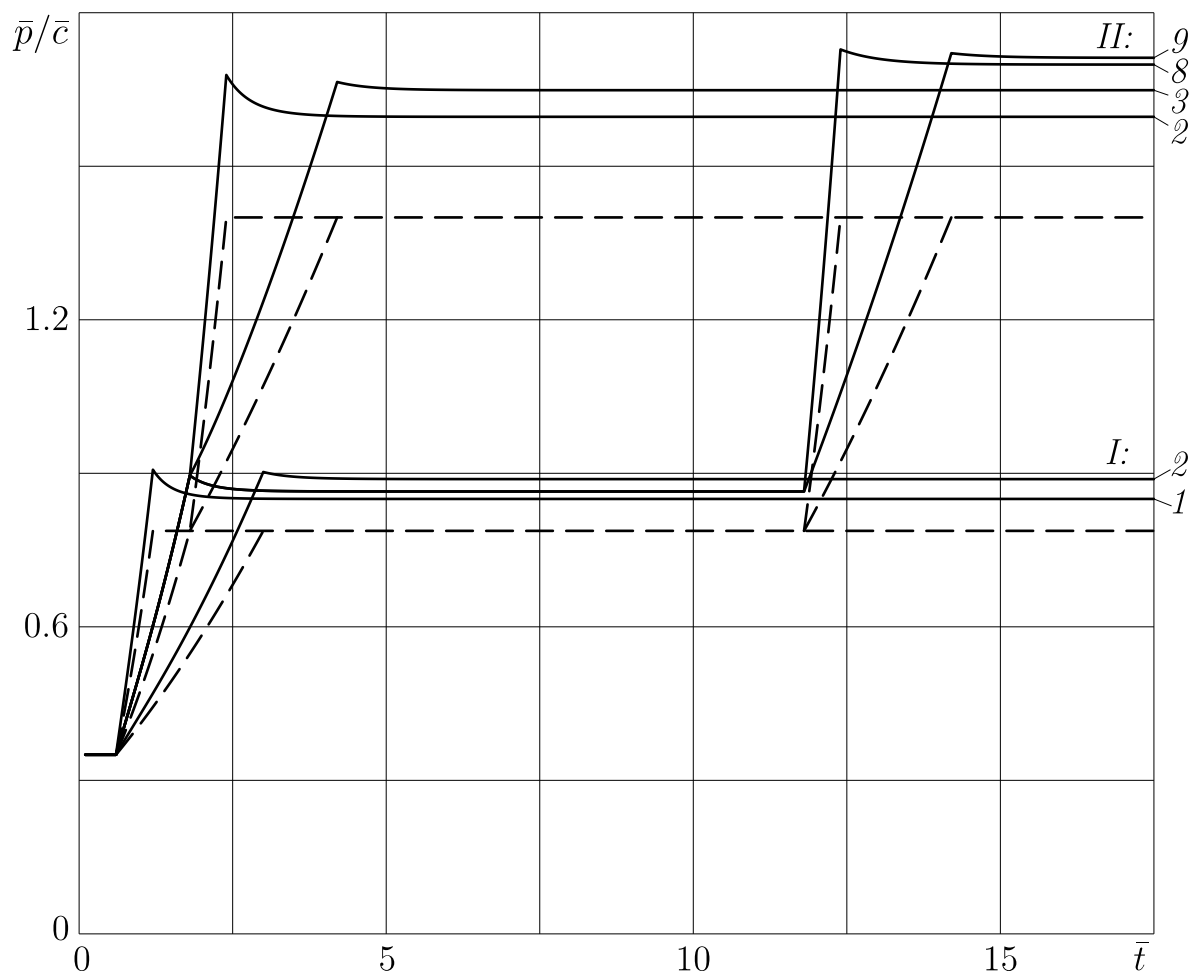
**Фиг. 1.2.** Финальное распределение интенсивности касательных напряжений в шаре, сформированном при различных режимах наращивания за два этапа: число рядом с кривой соответствует номеру режима (см. в тексте).

диального  $\bar{\sigma}_r$  и окружного  $\bar{\sigma}_\vartheta$  напряжений и интенсивности касательных напряжений  $\bar{T}$ , отнесенных к величине  $\bar{c}$ , от безразмерной радиальной координаты  $\bar{r}$  в различные моменты соответственно «быстрого» и «медленного» процессов наращивания.

Четко видны разрывы всех эпюр окружного напряжения на границе раздела исходной и дополнительной частей шара; замечен характерный излом соответствующих эпюр радиального напряжения на этой границе (см. п. 1 в § 1.7). Оба напряжения возрастают по модулю во всех точках тела вплоть до момента остановки роста, после чего абсолютное значение радиального напряжения уменьшается в каждой точке до соответствующего установившегося значения, а окружные напряжения перераспределяются с исходного материала на присоединившийся, выходя также на некоторое финальное распределение. Финальные распределения радиального и окружного напряжений зависят от скорости притока материала в процессе наращивания: чем быстрее происходит процесс роста, тем в большей степени успевают снизиться радиальные и перераспределиться окружные напряжения и тем соответственно более приближенным оказывается итоговое напряженное состояние постепенно сформированного тела к состоянию точно такого же тела, но сформированного мгновенно. Окружное напряжение на поверхности окончательно сформировавшегося шара может в пределе оказаться по модулю как больше (при достаточно быстром наращивании), так и меньше (при достаточно медленном процессе роста) своего первоначального значения на поверхности

исходно существующего тела. При этом абсолютная величина окружного напряжения на границе наращиваемого шара после остановки его роста всегда меньше, чем на границе аналогичного ненаращиваемого (в процессе роста эта величина, очевидно, равна нулю).

Интенсивность касательных напряжений также разрывна на границе двух составных частей шара. Она не изменяется со временем внутри исходной части (см. утверждение 1.3) и развивается в дополнительной до некоторой предельной зависимости. Вид последней существенно зависит от скорости роста, а максимум может оказаться как больше (при достаточно быстрых процессах роста), так и меньше (при относительно медленном наращивании) максимального значения интенсивности в исходной части тела, однако он всегда меньше максимума данной характеристики в мгновенно изготовленном шаре окончательного размера.



**Фиг. 1.3.** Эволюция во времени давления в центре шара, наращиваемого при различных режимах (сплошные линии) и давление в центре нерастущего шара соответствующего размера (штриховые линии):

группа кривых *I* — наращивание за один этап, *II* — за два этапа;  
число рядом с кривой в группе соответствует номеру режима (см. в тексте).

Эпюра интенсивности в исходной части наращиваемого шара совпадает во все моменты времени с распределением интенсивности в пересечении этой части с ненаращиваемым шаром произвольного радиуса (см. замечание 1 на стр. 68) и согласно (1.72) и (1.80) возрастает при удалении от центра пропорционально квадрату расстояния до него.

На фиг. 1.2 приведены финальные распределения отнесенной к  $\bar{c}$  безразмерной интенсивности касательных напряжений для различных вариантов наращивания шара за два этапа. При этом во всех случаях первый этап протекает одинаково. Распределение 1 фактически отвечает случаю присоединения всего дополнительного материала за один этап наращивания с гладким законом увеличения радиуса и потому само является гладким во всей дополнительной части тела. Распределения 2 и 3 также непрерывны в этой части, но имеют излом на границе первого и второго дополнительных субтел (то есть составных частей тела, сформированных в результате непрерывного роста), что является следствием скачкообразного увеличения в первом случае и уменьшения во втором в два раза скорости роста в момент перехода от первого этапа ко второму (пауза между этапами в данных режимах отсутствует). Распределения 4–9 имеют разрывы на границах раздела уже всех составных частей тела, поскольку перед каждым этапом наращивания здесь выдержана некоторая пауза. В случаях, соответствующих распределениям 7–9, пауза перед вторым этапом оказывается достаточно продолжительной для того, чтобы интенсивность касательных напряжений во втором дополнительном субтеле вблизи его границы с первым оставалась с высокой точностью равной нулю во все моменты времени после начала второго этапа роста (см. следствие 1.3). Положение и значение максимума интенсивности в наращиваемом за два этапа шаре существенным образом зависит от реализуемого режима наращивания, но в любом случае это значение не превышает максимального значения интенсивности в аналогичном мгновенно сформированном гравитирующем шаре.

На фиг. 1.3 изображена временная эволюция величины давления в центре шара (где имеет место всестороннее сжатие — см. п. 3 в § 1.7)

$$p(t) = -[\sigma_r(0, t) + 2\sigma_\vartheta(0, t)]/3 \equiv -\sigma_r(0, t) \equiv -\sigma_\vartheta(0, t)$$

при различных режимах наращивания шара за один и за два этапа. Там же показаны (штриховыми линиями) значения данной характеристики для нерастущего шара соответствующего каждому моменту времени размера. Как видим, давление в центре шара, постепенно формируемого в поле сил собственной гравитации, в каждый момент времени выше, чем

у аналогичного мгновенно сформированного шара.

**2. Нарращивание гравитирующего упругого шара.** Для данного частного случая решенной выше общей задачи на основании рассуждений, проведенных в § 1.8 для силового поля общего вида, и зависимостей (1.79) и (1.80), справедливых в случае поля собственной гравитации шара, можем выписать следующие результаты.

До начала роста перемещение и напряжения в исходно существующем шаровом теле радиуса  $a_0$  описываются зависимостями (см. (1.74) и (1.29))

$$u(r) = -\frac{cr}{10(\kappa+1)G} \left[ \frac{(5\kappa+1)a_0^2}{3\kappa-1} - r^2 \right],$$

$$\sigma_r(r) = -\frac{c(5\kappa+1)(a_0^2 - r^2)}{10(\kappa+1)}, \quad \sigma_\vartheta(r) = -\frac{c[(5\kappa+1)a_0^2 - (5\kappa-3)r^2]}{10(\kappa+1)}.$$

После начала процесса наращивания поле скоростей движения частиц во всем сформированном к текущему моменту времени  $t$  шаре радиуса  $a(t)$  имеет вид (см. (1.75))

$$v(r, t) = -\frac{cra'(t)a(t)}{(3\kappa-1)G}. \quad (1.81)$$

При этом в исходном ядре  $0 < r < a_0$  данного шара напряжения вычисляются по формулам (см. (1.76))

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{c}{2} \left[ a^2(t) - \frac{4a_0^2 + (5\kappa+1)r^2}{5(\kappa+1)} \right],$$

$$\sigma_\vartheta(r, t) = -\frac{c}{2} \left[ a^2(t) - \frac{4a_0^2 + (5\kappa-3)r^2}{5(\kappa+1)} \right],$$

а в шаровом слое  $a_0 < r < a(t)$ , образованном дополнительным материалом, они совпадают между собой и равны (см. (1.77))

$$\sigma_r(r, t) \equiv \sigma_\vartheta(r, t) = -\frac{c}{2} [a^2(t) - r^2]. \quad (1.82)$$

Законы распределения интенсивности касательных напряжений  $T$  и наибольшего касательного напряжения  $\tau_{\max}$  в исходной части шара во все моменты времени имеют вид (см. (1.72) и (1.80))

$$T(r) = \frac{2cr^2}{5\sqrt{3}(\kappa+1)}, \quad \tau_{\max}(r) = \frac{cr^2}{5(\kappa+1)}, \quad 0 < r < a_0,$$

а в присоединившемся к исходному телу дополнительном материале эти величины всюду тождественно равны нулю (см. утверждение 1.4). Таким

образом, максимальные значения указанных характеристик в наращиваемом в условиях собственной гравитации упругом шаре не зависят от времени и достигаются в исходно существовавшей части тела на ее границе  $r = a_0$  с дополнительным материалом.

Необходимо отметить, что в работе [92] решалась задача об определении напряженно-деформированного состояния упругого гравитирующего полого шара, сформированного в результате непрерывного роста по внешней поверхности при отсутствии исходного тела. Процесс рассматривался как предельный случай дискретного наращивания слоями конечной толщины. Полученные в итоге распределения скоростей движения частиц и напряжений при нулевом значении внутреннего радиуса (и после перехода к параметрам и обозначениям, используемым в настоящей работе) в точности совпадают с зависимостями (1.81) и (1.82).

## 1.10 Основные результаты и выводы

Подведем итоги проведенных в этой главе исследований.

1. Построена математическая модель кусочно-непрерывного роста вязкоупругого стареющего или упругого шарового тела за счет поверхностного притока к нему дополнительного материала в условиях действия произвольного центрально-симметричного силового поля. Получены замкнутые решения соответствующих краевых задач механики наращиваемых деформируемых тел.
2. Доказана общая теорема об эволюции во времени скачка тензора напряжений на поверхности раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела. Показано, что данная эволюция не зависит от параметров процесса роста и нагружения тела после начала притока к нему дополнительного материала. Получено явное выражение для соответствующей зависимости. Одним из ее практических применений может быть использование для оценки точности построения численных решений конкретных задач наращивания.
3. На примере рассматриваемой задачи о шаре показан способ аналитического получения зависимостей величин разрывов и изломов распределений напряжений от времени при переходе через любую базовую поверхность внутри наращиваемого тела в тех случаях, когда эта поверхность совпадает с последней поверхностью роста на предыдущем этапе непрерывного наращивания.

4. Обнаружен ряд замечательных особенностей поведения девиатора напряжений в наращиваемом шаре, не зависящих от вида действующего на него силового поля:
  - а) в исходно существующем ядре шара поле девиатора напряжений стационарно, а в каждой точке дополнительной части его эволюция определяется историей формирования тела только до момента включения в него данной точки;
  - б) при достаточно большой продолжительности паузы перед очередным этапом непрерывного роста девиатор напряжений в материальном слое, присоединенном к телу в самом начале этого этапа, будет на протяжении всего дальнейшего процесса деформирования сколь угодно мало отличаться от нуля;
  - в) вся сформированная в результате наращивания часть чисто упругого твердого шара оказывается загруженной как жидкость.
5. Проведены числовые расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в процессе аккреции. Изучено влияние характера и скорости роста на эволюцию и установившиеся распределения основных характеристик напряженно-деформированного состояния таких тел. В расчетах выявлено, в частности, что:
  - а) положения и значения максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего касательного напряжения в теле существенным образом зависят от реализуемого режима наращивания, но в любом случае данные значения не превышают соответствующих максимумов в аналогичном ненаращиваемом гравитирующем шаре, где указанные характеристики пропорциональны квадрату удаления от центра;
  - б) давление в центре шара, постепенно формируемого в поле сил собственной гравитации, всегда выше, чем у мгновенно сформированного шара соответствующего размера.

На основании выполненных в этой главе исследований можно, к примеру, заключить, что в процессе аккреции должны формироваться тела с необычными с точки зрения классической механики деформируемого твердого тела свойствами, в определенном смысле лучшими, чем предсказывают известные теории. При этом основные закономерности деформирования, свойственные таким телам, не зависят от конкретного вида

закона гравитации, а определяются лишь геометрическими особенностями рассматриваемой задачи наращивания.

Отметим еще, что результаты данной главы могут быть также использованы при моделировании процессов электролитического формования тел сферической формы и нанесения на такие тела покрытий электростатическим способом.

## Глава 2

# Формирование цилиндрического слоя на вращающейся оправке

В этой главе на основе подходов механики наращиваемых тел изучаются процессы изготовления упругих и стареющих вязкоупругих цилиндрических тел и покрытий посредством послойного нанесения материала с произвольным натягом на наружную или внутреннюю поверхность вращающейся оправки или заготовки. Моделирование проводится с учетом влияния центробежных сил. Даны постановки соответствующих краевых задач наращивания. Построены их замкнутые решения. Предложен эффективный метод определения остаточных напряжений в готовом теле. Приведены результаты расчетов для двух модельных задач (о силовой намотке и о внутреннем напылении). Показана принципиальная необходимость совместного рассмотрения факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на это тело центробежных сил. Оценено влияние на итоговое состояние изделий из вязкоупругого стареющего материала пауз в процессе их изготовления.

Основные результаты главы отражены в работах [39, 55, 70, 94].

## Введение

Одним из способов изготовления или усиления определенного рода элементов конструкций и деталей машин, а также одним из вариантов технологии нанесения на них покрытий может быть организация направленного потока или послойная намотка материала на поверхность оправки или заготовки, приведенной во вращательное движение вокруг своей оси. Если скорость вращения и поперечный размер изделия достаточно велики, то под воздействием центробежных сил формируемый слой может испытывать заметные напряжения и деформацию. Помимо этого, деформирование слоя может быть вызвано и созданием в присоединяемом материале некоторых предварительных напряжений. Понятно, что указанные факторы нельзя не учитывать при оценке прочности изделия во время его изготовления.

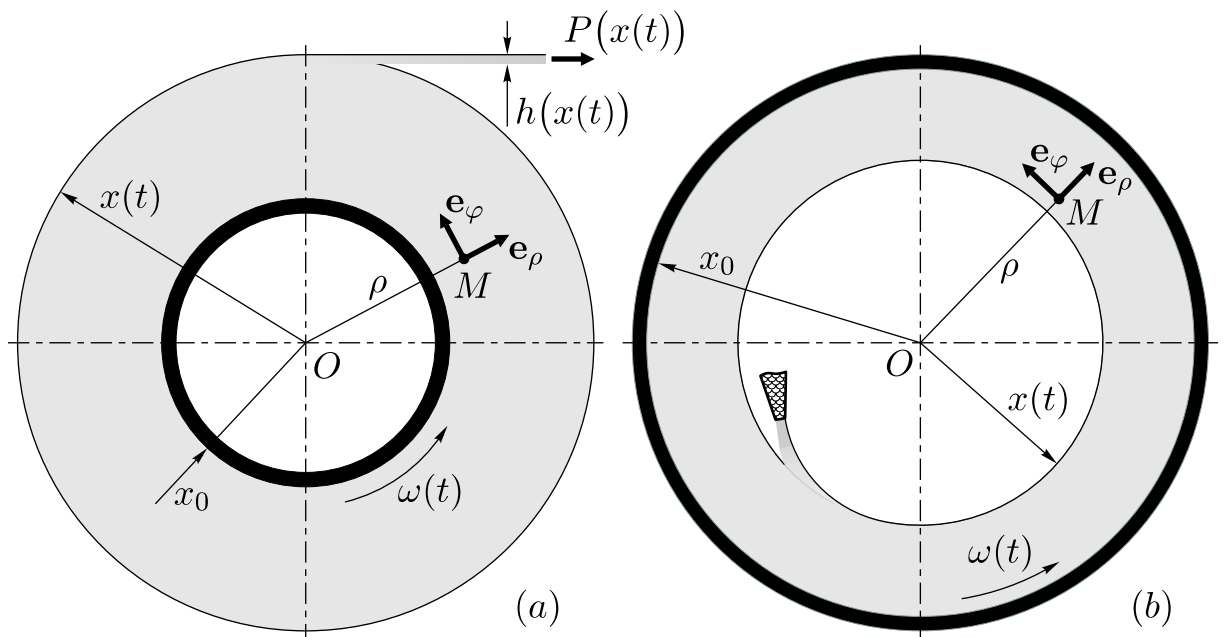
Поскольку отдельные монослои (элементарные слои) материала присоединяются к телу последовательно и включаются в процесс совместного деформирования одновременно, причем, вообще говоря, в произвольном начальном напряженно-деформированном состоянии, то во всем сформированном в результате описанного процесса теле неизбежным образом должны оставаться некоторые напряжения. Их распределение будет определяющим образом зависеть от различных параметров рассматриваемого технологического процесса. Зачастую остаточные напряжения негативно отражаются на качестве готового изделия и его эксплуатационных характеристиках, представляя тем самым нежелательный фактор. Однако во многих ситуациях их создание является одной из основных целей проводимых технологических манипуляций. Таким примером может служить усиление или изготовление сосудов высокого давления и стволов артиллерийских орудий намоткой на наружную поверхность тонкостенной заготовки нескольких слоев предварительно растянутой высокопрочной проволоки или ленты. Ясно, что в любом случае обеспечение допустимых или создание требуемых полей технологических остаточных напряжений в получаемых в итоге изделиях должно быть одной из задач их оптимального проектирования.

### 2.1 Постановка задачи

Будем далее полагать, что рабочая поверхность оправки или заготовки представляет собой поверхность вращения, а толщина присоединя-

емых в процессе наращивания монослоев настолько мала, что скорость притока материала в окружном направлении несравнимо выше скорости его притока в направлении радиальном. Кроме того, пусть утолщение слоя происходит равномерно по его окружности, так что на протяжении всего процесса наращивания слой сохраняет осесимметричную форму. Предполагая также, что жесткость наносимого материала существенно ниже жесткости тела, на которое он наносится, будем считать последнее абсолютно жестким.

Тогда в качестве возможной модели для описания упомянутых выше технологических процессов можно рассмотреть задачу о кусочно-непрерывном нанесении на жесткую оправку, вращающуюся вокруг своей оси с переменной угловой скоростью  $\omega(t)$ , замкнутых осесимметричных элементарных слоев материала с некоторым заданным начальным напряженным состоянием. Исследуем здесь случай цилиндрического слоя, наращиваемого в условиях плоской деформации (возможные варианты соответствующих технологических процессов схематически изображены на фиг. 2.1). Задачу рассмотрим в квазистатической постановке, отказавшись от учета динамических эффектов, то есть пренебрегая силами инерции деформирования материала по сравнению с силами инерции его вращательного движения вместе с оправкой. При этом будем предполагать достаточно медленное изменение во времени скорости вращения оправки, считая  $|\omega'(t)| \ll \omega^2(t)$ , так что тангенциальными силами инер-



**Фиг. 2.1.** Возможные технологические процессы формирования цилиндрического слоя на вращающейся оправке.

ции можно пренебречь по сравнению с центробежными силами.

Анализ проведем для случая малых деформаций. При этом допущении закон изменения одного из радиусов наращиваемого слоя можно считать заданной непрерывной функцией времени  $x(t)$ , строго монотонной на  $N$  интервалах  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) непрерывного нанесения материала и постоянной вне этих интервалов. Другой радиус слоя обозначим через  $x_0$  и положим  $x_k = x(t_{2k})$  — значения изменяющегося радиуса слоя после окончания  $k$ -го этапа непрерывного роста.

Особо отметим то обстоятельство, что приводимые ниже формулы и рассуждения являются универсальными и справедливы независимо от того, изменение какого из радиусов растущего цилиндра задает функция  $x(t)$  — внешнего или внутреннего.

Используемый материал будем считать вязкоупругим стареющим, однородным и изотропным; отсчет времени  $t$  будем вести от момента его изготовления. Уравнение состояния материала запишем в виде (см. § 0.4)

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [2\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau_0(\mathbf{r})$  — момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — тензоры напряжений и малой деформации,  $\mathbf{1}$  — единичный тензор 2-го ранга;  $G(t)$  — модуль сдвига,  $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Оператор вязкоупругости определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{I} + \mathcal{N}_s &= (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)^{-1}, \\ \mathcal{L}_s f(t) &= \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \\ K(t, \tau) &= G(\tau) \Delta'_\tau(t, \tau), \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{L}_s$ ,  $\mathcal{N}_s$  и  $\mathcal{I}$  — интегральные операторы Вольтерра с параметром  $s$  и тождественный оператор,  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  — ядра ползучести и релаксации,  $\Delta(t, \tau)$  и  $\omega(t, \tau)$  ( $t \geq \tau \geq 0$ ) — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге. Для последней по определению выполняется тождество

$$\omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geq 0. \quad (2.3)$$

С учетом тождества (2.3) функция удельной деформации может быть также представлена в виде

$$\Delta(t, \tau) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_\tau) G(t)^{-1}. \quad (2.4)$$

Пусть  $\mathcal{H}_s$  — оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{H}_s f(t) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)[f(t)/G(t)].$$

Введем обозначение

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

где  $g(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция точки тела и времени. С использованием (2.5) определяющее соотношение (2.1) можно переписать в следующей эквивалентной форме [49]:

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = 2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Предположим, что нагружение материала осуществляется непосредственно перед его присоединением к формируемому слою. Это значит, что напряжения в точках слоя, удаленных от оси его вращения на расстояние  $\rho$ , возникают в момент времени

$$\tau_0(\mathbf{r}) \equiv \tau_*(\rho), \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad (2.7)$$

где  $\tau_*(\rho)$  — момент присоединения материального слоя радиуса  $\rho$ . Здесь и далее при указании промежутков изменения полярного радиуса  $\rho$  будем считать, что если первая граница промежутка располагается на числовой оси правее второй, то границы следует переставить в записи местами.

Ясно, что на каждом интервале  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) имеет место тождество

$$\tau_*(x(t)) \equiv t, \quad (2.8)$$

а уравнение  $\tau_*(\rho) = t$  описывает мгновенную поверхность роста — ту часть граничной поверхности растущего слоя, к которой в данный момент времени поступает дополнительный материал.

Заканчивая постановку задачи, отметим, что при моделировании, например, процессов изготовления намоточных композитов необходимо учитывать анизотропию материала. Краевую задачу для анизотропного тела можно получить аналогично проделанному ниже в изотропном случае. Решение такой задачи и ее анализ выходят за рамки настоящей работы и могут стать предметом отдельных исследований.

## 2.2 Краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого слоя

Как следует из рассуждений, приведенных в § 0.5, задача кусочно-непрерывного наращивания может быть корректно поставлена в скоростной форме. Запишем поэтому аналог принятого выше определяющего

соотношения (2.6) для скоростных характеристик процесса деформирования. Такой аналог имеет следующий вид [49]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 2 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) / 2,$$

где  $\mathbf{S}$  — тензор, определяемый по тензору напряжений,  $\mathbf{D}$  — тензор скорости деформации,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — векторное поле скоростей частиц тела.

Свяжем с вращающейся жесткой оправкой круговую цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  с правым ортонормированным репером  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}\}$ , направив вектор  $\mathbf{k}$  вдоль оси вращения и отсчитывая от этой оси полярный радиус  $\rho$  (фиг. 2.1). В этой подвижной неинерциальной системе для рассматриваемого наращиваемого слоя справедливо стандартное уравнение равновесия, в котором в качестве объемных сил выступают центробежные силы инерции:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \rho c(t), \quad c(t) = \omega^2(t) d, \quad (2.9)$$

где  $d$  — плотность массы используемого материала.

Уравнение для тензора  $\mathbf{S}$  можно получить, подействовав на уравнение равновесия (2.9) линейным оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и продифференцировав результат по времени  $t$ . Здесь важным является то обстоятельство, что в общем случае интегральный оператор  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и оператор дивергенции не являются перестановочными, поскольку нижний предел интеграла в (2.5) зависит от точки тела. Однако можно показать (см. § 0.5), что для рассматриваемых процессов (см. § 2.1) достаточным условием коммутации указанных операторов по отношению к тензору напряжений является незагружение будущей поверхности роста до начала наращивания и в паузах между его этапами, а также отсутствие напряжения на фактической поверхности роста во время самих этапов. В этом случае при  $t > t_1$  в области, занятой в данный момент времени наращиваемым телом, выполняется тождество  $(\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ = \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ$  и, следовательно, справедливы аналоги уравнения равновесия в форме

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ + \mathbf{f}^\circ = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{S} + \partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

В рассматриваемой конкретной задаче

$$\mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \rho c^\circ(\rho, t),$$

$$\partial \mathbf{f}^\circ(\mathbf{r}, t) / \partial t = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \chi(\rho, t), \quad \chi(\rho, t) = \rho [c^\circ(\rho, t)]'_t.$$

На основании определения (2.5) и равенства (2.7), применяя интегрирование по частям и используя тождество (2.3), находим

$$\begin{aligned} c^\circ(\rho, t) &= \frac{c(t)}{G(t)} - \int_{\tau_*(\rho)}^t c(\tau) \Delta'_\tau(t, \tau) d\tau = \\ &= c(\tau_*(\rho)) \Delta(t, \tau_*(\rho)) + \int_{\tau_*(\rho)}^t c'(\tau) \Delta(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\chi(\rho, t) = \rho \left[ c(\tau_*(\rho)) \omega'_t(t, \tau_*(\rho)) + \frac{c'(t)}{G(t)} + \int_{\tau_*(\rho)}^t c'(\tau) \omega'_t(t, \tau) d\tau \right]. \quad (2.12)$$

В случае вращения с постоянной угловой скоростью  $\omega(t) \equiv \omega_0$  имеем

$$c^\circ(\rho, t) = c_0 \Delta(t, \tau_*(\rho)), \quad \chi(\rho, t) = c_0 \rho \omega'_t(t, \tau_*(\rho)), \quad c_0 = \omega_0^2 d.$$

Начальное напряженное состояние присоединяемого материала должно определяться некоторым априори известным полным тензором напряжений  $\mathbf{T}_*$ , задаваемым во всех точках текущей поверхности роста на каждом временном интервале непрерывного наращивания (см. § 0.5, а также [9, 8, 18, 25, 28, 49, 85]):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho = x(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (2.13)$$

Считая, что дополнительные элементарные слои материала перед присоединением подвергаются только натяжению в окружном направлении, постоянному в пределах одного оборота, будем иметь

$$\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \sigma_\varphi^*(\rho), \quad (2.14)$$

причем  $\sigma_\varphi^*(\rho)$  — известная функция, которая может быть выбрана, например, равной отношению  $P(\rho)/h(\rho)$ , где  $P(\rho)$  — сила натяжения реальных приращиваемых монослоев на единицу их длины в осевом направлении в зависимости от радиуса, а  $h(\rho)$  — их конечная (достаточно малая) переменная толщина (фиг. 2.1, а). Для заданной таким образом тензорной функции  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$  выполняется, очевидно, условие

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_* = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

означающее отсутствие нагрузки на текущей поверхности роста и требуемое для выполнения уравнений (2.10).

Условие (2.13) может быть преобразовано к простому условию на компоненты тензора  $\mathbf{S}$  (см. § 0.5). Для этого достаточно заметить, что для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  справедливо

$$g^\circ(\mathbf{r}, \tau_0(\mathbf{r})) = g(\mathbf{r}, \tau_0(\mathbf{r}))/G(\tau_0(\mathbf{r})), \quad (2.16)$$

после этого записать совокупность условий (2.13) для всех моментов конкретного этапа непрерывного роста в виде

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k),$$

что с учетом (2.16) и (2.7) эквивалентно равенству

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r})/G(\tau_*(\rho)), \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k), \quad (2.17)$$

и свернуть обе части последнего равенства с оператором Гамильтона:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) &= [\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)] \Big|_{t=\tau_*(\rho)} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)), \\ \nabla \cdot \left[ \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\rho))} \right] &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\rho))} - \frac{G'(\tau_*(\rho)) \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G^2(\tau_*(\rho))}. \end{aligned}$$

Используя теперь первое уравнение (2.10) вместе с (2.16) и (2.7), вычисляя градиент  $\nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \tau'_*(\rho)$  и привлекая условие (2.15), получим

$$\mathbf{e}_\rho(\varphi) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho))}{\tau'_*(\rho) G(\tau_*(\rho))}, \quad \rho \in (x_{k-1}, x_k).$$

Остается выделить из этой совокупности условий (с параметром  $\rho$ ) одно, соответствующее рассматриваемому моменту времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$ , то есть положить  $\rho = x(t)$ . В результате, ссылаясь на тождество (2.8), придем к условию на текущей поверхности роста в виде

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \frac{[\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)] x'(t)}{G(t)}, \quad \rho = x(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}), \quad (2.18)$$

поскольку в силу (2.8) справедливо также тождество  $\tau'_*(x(t)) \equiv x'(t)^{-1}$ .

Для выбранного тензора начальных напряжений (2.14) имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{T}_* = -\mathbf{e}_\rho(\varphi) \sigma_\varphi^*(\rho)/\rho.$$

В таком конкретном случае на мгновенной поверхности роста согласно (2.18) должно выполняться условие  $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t)$ , где

$$q(t) = [c(t)x(t) - \sigma_\varphi^*(x(t))]/x(t) x'(t)/G(t). \quad (2.19)$$

Поскольку вне интервалов наращивания не контактирующая с оправкой поверхность слоя не подвергается нагружению, то после каждой остановки роста на ней выставляется обычное условие отсутствия напряжения, имеющее очевидный аналог для тензора  $\mathbf{S}$  —

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \rho = x_k, \quad t \in (t_{2k}, t_{2k+1})$$

(здесь формально считается  $t_{2N+1} = +\infty$ ) — и являющееся одним из условий выполнения уравнений (2.10).

Как видим, в силу определения функции  $x(t)$  (см. § 2.1) условие на не сцепленной с оправкой поверхности слоя в форме (2.18) формально остается справедливым и вне интервалов непрерывного наращивания и может использоваться для любого  $t > t_1$ . Однако следует подчеркнуть, что на интервалах роста и на этапах после временного или окончательного его прекращения природа этого условия принципиально различна.

Что касается условия на неподвижной в выбранных осях поверхности наращиваемого слоя — поверхности его сопряжения с жесткой оправкой, то здесь на протяжении всего процесса деформирования остается справедливым классическое условие отсутствия перемещения, очевидным образом модифицируемое для скоростной постановки задачи:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \rho = x_0.$$

Итак, деформирование слоя после начала процесса его кусочно-непрерывного наращивания описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{e}_\rho \chi(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2; \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

В ней время  $t$  не является, очевидно, существенной переменной, а лишь выполняет роль вещественного параметра. Причем для каждого значения этого параметра формально имеем классическую задачу линейной теории упругости для цилиндрического слоя фиксированной толщины. Слой находится под действием объемных сил, величина которых зависит от радиальной координаты, жестко закреплен по одной из своих боковых поверхностей и нагружен по другой некоторыми распределенными силами. В этой задаче на месте вектора перемещения, тензора деформации и отнесенного к модулю сдвига тензора напряжений выступают соответственно вектор скорости  $\mathbf{v}$ , тензор скорости деформации  $\mathbf{D}$  и введенный выше тензор  $\mathbf{S}$ .

После решения задачи (2.20) необходимо в каждой точке  $\mathbf{r}$  наращиваемого слоя восстановить временную эволюцию тензора  $\mathbf{T}^\circ$  по найденной скорости его изменения  $\mathbf{S}$ , используя в качестве начального условия соотношение (2.17):

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{T}_*(\mathbf{r})}{G(\tau_*(\rho))} + \int_{\tau_*(\rho)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tau_*(\rho). \quad (2.21)$$

После этого на основании определения тензора  $\mathbf{T}^\circ$  сможем найти полную эволюцию тензора напряжений по формуле

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) &= G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \\ &= G(t) \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_*(\rho)}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau \right], \quad t \geq \tau_*(\rho). \quad (2.22)\end{aligned}$$

Записанное равенство (2.22) есть по существу резольвентное представление решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$$

с параметром  $\mathbf{r}$  относительно неизвестной функции времени  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)/G(t)$ . Если аналитическое выражение для резольвенты  $R(t, \tau)$  неизвестно или является слишком громоздким, данное уравнение может быть решено численно, например, методом квадратур на базе формулы трапеций [73].

## 2.3 Решение краевой задачи

В рассматриваемом случае плоской деформации из характера присущей поставленной задаче (2.20) симметрии вытекает, что поле скоростей в занимаемой растущим слоем области должно иметь следующий вид:  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\rho v(\rho, t)$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho D_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi D_\varphi, \\ D_\rho(\rho, t) &= v'_\rho(\rho, t), \quad D_\varphi(\rho, t) = v(\rho, t)/\rho, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho S_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi S_\varphi + \mathbf{k} \mathbf{k} S_z, \quad S_z = \nu(S_\rho + S_\varphi), \\ S_{\rho, \varphi}(\rho, t) &= (\varkappa + 1)D_{\rho, \varphi}(\rho, t) + (\varkappa - 1)D_{\varphi, \rho}(\rho, t).\end{aligned}$$

В результате компонентная запись задачи (2.20) будет иметь вид

$$\begin{aligned}(S_\rho)'_\rho + (S_\rho - S_\varphi)/\rho + \chi(\rho, t) &= 0, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ S_{\rho, \varphi} &= (\varkappa + 1)D_{\rho, \varphi} + (\varkappa - 1)D_{\varphi, \rho}, \quad D_\rho = v'_\rho, \quad D_\varphi = v/\rho; \\ v &= 0, \quad \rho = x_0; \quad S_\rho = q(t), \quad \rho = x(t).\end{aligned} \quad (2.23)$$

Внося выражения компонент  $S_{\rho, \varphi}$  через  $v$  в дифференциальное уравнение из (2.23), приходим к следующему аналогу уравнения Ляме:

$$[(\rho v)'_\rho / \rho]'_\rho = -\chi(\rho, t)/(\varkappa + 1).$$

Его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} v(\rho, t) &= \frac{\rho}{2} [C_1(t)/\varkappa + C_2(t)/\rho^2 - \Phi(\rho, t)], \\ \Phi(\rho, t) &= \frac{1}{\varkappa + 1} \int_{\rho}^{x(t)} \chi(\xi, t) \left( \frac{\xi^2}{\rho^2} - 1 \right) d\xi, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $C_{1,2}(t)$  — произвольные функции времени. Соответствующие выражения для компонент  $S_{\rho, \varphi}$  запишем в виде

$$S_{\rho, \varphi}(\rho, t) = C_1(t) \mp C_2(t)/\rho^2 + \Xi^{\pm}(\rho, t), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Xi^{\pm}(\rho, t) &= -\varkappa \Phi(\rho, t) - 1/2 (\varkappa \pm 1) \rho \Phi'_{\rho}(\rho, t) = \\ &= \frac{1}{\varkappa + 1} \int_{\rho}^{x(t)} \chi(\xi, t) \left( \varkappa \pm \frac{\xi^2}{\rho^2} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Удовлетворяя краевым условиям из (2.23), находим

$$C_1(t) = F(t) + \varkappa Q(t), \quad C_2(t) = x^2(t)F(t) - x_0^2 Q(t),$$

$$F(t) = \frac{\varkappa x_0^2 \Phi(x_0, t)}{x_0^2 + \varkappa x^2(t)}, \quad Q(t) = \frac{x^2(t) q(t)}{x_0^2 + \varkappa x^2(t)}.$$

Таким образом, решение задачи (2.23) имеет вид

$$\begin{aligned} v(\rho, t) &= \frac{\rho}{2} \left\{ [\varkappa^{-1} + x^2(t)/\rho^2] F(t) + (1 - x_0^2/\rho^2) Q(t) - \Phi(\rho, t) \right\}, \\ S_{\rho, \varphi}(\rho, t) &= [1 \mp x^2(t)/\rho^2] F(t) + (\varkappa \pm x_0^2/\rho^2) Q(t) + \Xi^{\pm}(\rho, t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.4 Упругий случай

Все проделанные выкладки остаются, очевидно, в силе и для случая чисто упругого поведения материала. В этом случае нужно всюду принять  $\omega(t, \tau) \equiv 0$ ,  $G(t) \equiv \text{const}$ . При этом для произвольной функции точки и времени в соответствии с (2.2) и (2.5) справедливо

$$g^{\circ}(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G. \quad (2.28)$$

По формуле (2.12) найдем тогда, что  $\chi(\rho, t) = \rho c'(t)/G$ . В итоге можем вычислить

$$\Phi(\rho, t) = \frac{\rho^2 c'(t)}{4G(\varkappa + 1)} \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} - 1 \right]^2, \quad F(t) = \frac{\varkappa c'(t) [x^2(t) - x_0^2]^2}{4G(\varkappa + 1) [x_0^2 + \varkappa x^2(t)]},$$

$$\Xi^{\pm}(\rho, t) = \frac{\rho^2 c'(t)}{4G(\varkappa + 1)} \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} - 1 \right] \left\{ 2\varkappa \pm \left[ \frac{x^2(t)}{\rho^2} + 1 \right] \right\}.$$

Эти функции нужно подставить в выражения (2.27) для скоростей перемещения и компонент тензора  $\mathbf{T}^{\circ}$ . Ясно, что после этого проинтегрировать данные выражения можно будет только для конкретных программ наращивания слоя  $x(t)$ , натяжения  $\sigma_{\varphi}^*(\rho)$  приращиваемых монослоев и вращения  $\omega(t)$  оправки.

В простейшем частном случае, когда скорость вращения постоянна и равна  $\omega_0$ , будем иметь  $c(t) \equiv c_0 = \omega_0^2 d$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, t) &\equiv 0, \quad \Xi^{\pm}(\rho, t) \equiv 0, \quad F(t) \equiv 0, \\ Q(t) &= \frac{[c_0 x^3(t) - x(t) \sigma_{\varphi}^*(x(t))] x'(t)}{G[x_0^2 + \varkappa x^2(t)]}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Произвольная первообразная функции  $Q(t)$ , определяемой зависимостью (2.29), есть  $\int Q(t) dt = W(x(t))/G$ , где

$$\begin{aligned} W(\xi) &= \int \frac{c_0 \xi^3 - \xi \sigma_{\varphi}^*(\xi)}{x_0^2 + \varkappa \xi^2} d\xi = \\ &= \frac{c_0}{2\varkappa} \left[ \xi^2 - \frac{x_0^2}{\varkappa} \ln \left( \xi^2 + \frac{x_0^2}{\varkappa} \right) \right] - \int \frac{\xi \sigma_{\varphi}^*(\xi) d\xi}{x_0^2 + \varkappa \xi^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Если натяг монослоев не зависит от их радиуса и равен  $\sigma_{\varphi}^*(\rho) \equiv \sigma$ , то

$$W(\xi) = \frac{1}{2\varkappa} \left[ c_0 \xi^2 - \left( \frac{c_0 x_0^2}{\varkappa} + \sigma \right) \ln \left( \xi^2 + \frac{x_0^2}{\varkappa} \right) \right].$$

Итак, для случая вращения растущего упругого слоя с постоянной угловой скоростью из (2.27) с учетом (2.21), (2.14), (2.28), а также обратного к (2.8) тождества  $x(\tau_*(\rho)) \equiv \rho$ , где  $\rho \in (x_{k-1}, x_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ), находим поля скоростей и напряжений в слое

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{e}_{\rho} v, \quad v(\rho, t) = \frac{\rho}{2} \left( 1 - x_0^2/\rho^2 \right) Q(t); \\ \mathbf{T} &= \mathbf{e}_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} \sigma_{\rho} + \mathbf{e}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \sigma_{\varphi} + \mathbf{k} \mathbf{k} \sigma_z, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_{\rho} + \sigma_{\varphi}), \\ \sigma_{\rho}(\rho, t) &= \left( \varkappa + x_0^2/\rho^2 \right) W(\xi) \Big|_{\xi=\rho}^{x(t)}, \\ \sigma_{\varphi}(\rho, t) &= \sigma_{\varphi}^*(\rho) + \left( \varkappa - x_0^2/\rho^2 \right) W(\xi) \Big|_{\xi=\rho}^{x(t)}. \end{aligned}$$

Здесь функции  $Q(t)$  и  $W(\xi)$  определены выражениями (2.29) и (2.30).

Видно, что напряженное состояние упругого слоя, наращиваемого на вращающейся с постоянной угловой скоростью жесткой оправке, как и следовало ожидать, не зависит *явно* от времени  $t$  и определяется только текущим значением радиуса  $x(t)$  поверхности роста слоя и распределением в последнем начальных напряжений  $\sigma_\varphi^*(\rho)$ .

## 2.5 Остаточные напряжения в изготовленном слое

В §§ 2.2, 2.3 построено решение задачи о деформировании вязкоупругого стареющего слоя, формируемого методом наращивания на вращающейся жесткой оправке при некоторых заданных программах изменения радиуса свободной поверхности  $x(t)$ , натяжения элементарных слоев присоединяемого материала  $\sigma_\varphi^*(\rho)$  и вращения оправки  $\omega(t)$ , на временном луче  $t \in (t_1, +\infty)$ . Пусть это решение дается известными функциями

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \quad \rho \in (x_0, x(t)). \quad (2.31)$$

**1. Остаточные напряжения после остановки вращения.** Предположим, что начиная с некоторого момента времени  $t = t^s > t_{2N}$ , когда формирование слоя уже полностью завершено, задается программа вращения  $\tilde{\omega}(t)$ , отличная от той, для которой построено решение (2.31). Положим тогда  $\tilde{\omega}(t) \equiv \omega(t)$  при  $t_1 < t < t^s$  и будем считать, что процесс деформирования наращиваемого слоя при заданной таким образом новой полной программе вращения  $\tilde{\omega}(t)$  и прежних программах наращивания  $x(t)$  и натяжения  $\sigma_\varphi^*(\rho)$  описывается функциями

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t), \quad \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t), \quad \rho \in (x_0, x(t)). \quad (2.32)$$

Первые три из них представляют собой тогда решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{e}_\rho \tilde{\chi}(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \tilde{\mathbf{S}} &= 2\tilde{\mathbf{D}} + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}})/2; \\ \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t), \end{aligned} \quad (2.33)$$

полученной из задачи (2.20) добавлением тильды над нужными величинами. Функция  $\tilde{\chi}(\rho, t)$  здесь определяется как

$$\tilde{\chi}(\rho, t) = \rho [\tilde{c}^\circ(\rho, t)]'_t, \quad \tilde{c}(t) = \tilde{\omega}^2(t)d,$$

а функция  $q(t)$  в граничном условии на поверхности роста остается прежней и задается формулой (2.19), поскольку до момента  $t^s$  имеет место тождество

$$\tilde{c}(t) \equiv c(t), \quad t_1 < t < t^s, \quad (2.34)$$

а при  $t \geq t^s$  независимо от программы вращения  $x'(t) \equiv 0$  ввиду отсутствия роста.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} c_-(t) &= \tilde{c}(t) - c(t), & \chi_-(\rho, t) &= \tilde{\chi}(\rho, t) - \chi(\rho, t), \\ \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{S}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{T}_-(\mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{T}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольный момент времени  $\tilde{t} \in (t_{2N}, t^s)$ . Заметим, что для всех точек окончательно изготовленного слоя  $\tau_*(\rho) \leq t_{2N} < \tilde{t}$ .

Тогда из тождества (2.34) и определения (2.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} c_-^\circ(\rho, t) &\equiv 0, \quad t < t^s, \\ c_-^\circ(\rho, t) &\equiv \frac{c_-(t)}{G(t)} - \int_{\tilde{t}}^t \frac{c_-(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_{\tilde{t}}) \frac{c_-(t)}{G(t)}, \quad t \geq \tilde{t}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Следовательно, для функции

$$\chi_-(\rho, t) = \rho [c_-^\circ(\rho, t)]'_t \quad (2.36)$$

вплоть до момента  $\tilde{t}$  выполняется тождество

$$\chi_-(\rho, t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t}. \quad (2.37)$$

Итак, вычитая из соотношений задачи (2.33) соответствующие соотношения задачи (2.20), получаем следующую краевую задачу для неизвестных величин  $\mathbf{v}_-$ ,  $\mathbf{D}_-$  и  $\mathbf{S}_-$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_- + \mathbf{e}_\rho \chi_-(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S}_- &= 2\mathbf{D}_- + (\kappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}_-, \quad \mathbf{D}_- = (\nabla \mathbf{v}_-^T + \nabla \mathbf{v}_-)/2; \\ \mathbf{v}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x(t). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ввиду (2.37) краевая задача (2.38) при  $t \leq \tilde{t}$  имеет тривиальное решение

$$\mathbf{v}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad \tau_*(\rho) < t \leq \tilde{t}. \quad (2.39)$$

Вычитая соотношение (2.21) из аналогичного ему соотношения для тензора  $\tilde{\mathbf{T}}^\circ(\mathbf{r}, t)$  и пользуясь последним тождеством из (2.39), находим

$$\mathbf{T}_-^\circ(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \tau_*(\rho) < t \leq \tilde{t}, \\ \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, & t \geq \tilde{t}. \end{cases}$$

Отсюда на основании формулы (2.22) и ее аналога для тензора  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t)$  для всех  $t \geq \tilde{t}$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{T}_-(\mathbf{r}, t)}{G(t)} &= \mathbf{T}_-(\mathbf{r}, t) + \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{T}_-(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau = \\ &= (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tilde{t}}) \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{S}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Определим на занимаемой окончательно сформированным слоем области следующие функции:

$$\mathbf{u}_-(\mathbf{r}, t) = \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{v}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \int_{\tilde{t}}^t \mathbf{D}_-(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tilde{t}.$$

Тогда, интегрируя по параметру от  $\tilde{t}$  до  $t \geq \tilde{t}$  все соотношения задачи (2.38) и действуя затем на результат интегрирования тех соотношений, которые изначально содержали тензор  $\mathbf{S}_-$ , оператором  $\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tilde{t}}$ , получим для названной области с учетом (2.40), (2.36), (2.35) и первого соотношения из (2.2) следующую краевую задачу ( $x(t) \equiv x_N$  при  $t \geq \tilde{t}$ ):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- + \mathbf{e}_\rho \rho c_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad t \geq \tilde{t}; \\ \frac{\mathbf{T}_-}{G(t)} &= (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tilde{t}}) [2 \mathbf{E}_- + (\kappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = \frac{\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-}{2}; \\ \mathbf{u}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Задача (2.41) представляет собой, как видим, классическую краевую задачу линейной теории вязкоупругости для слоя окончательных размеров (по отношению к слою в рассматриваемой задаче наращивания), жестко закрепленного по одной из своих боковых поверхностей и начиная с момента  $t = \tilde{t}$  подверженного действию переменного во времени распределения объемных сил. В этой задаче на месте вектора перемещения, тензора деформации и тензора напряжений фигурируют соответственно величины  $\mathbf{u}_-$ ,  $\mathbf{E}_-$  и  $\mathbf{T}_-$ . Согласно одному из принципов соответствия в линейной теории вязкоупругости стареющих тел [28] тензор  $\mathbf{T}_-$ , представляющий решение задачи (2.41), в каждый момент времени  $t \geq \tilde{t}$  может быть найден из решения соответствующей упруго-мгновенной задачи. Таким образом, вспоминая смысл этого тензора и определение функции  $c_-(t)$ , можем сделать следующий вывод (в его формулировке тензоры  $\mathbf{T}_+$  и  $\mathbf{T}_-$  есть не что иное как пределы при  $t \rightarrow +\infty$  изначально введенных в этом параграфе тензорных функций  $\tilde{\mathbf{T}}$  и  $\mathbf{T}_-$  соответственно).

**Утверждение 2.1.** Пусть  $\tilde{\omega}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть новый закон изменения угловой скорости после завершения формирования слоя приводит к остановке вращения оправки. Тогда, если для прежнего закона вращения  $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = \omega_\infty$ , то финальные остаточные напряжения в изготовленном слое независимо от программы остановки  $\tilde{\omega}(t)$  и момента времени  $t^s$  перехода на эту программу определяются тензором остаточных напряжений

$$\mathbf{T}_r(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{T}_-(\mathbf{r}), \quad (2.42)$$

где первое слагаемое в правой части есть финальный тензор напряжений, отвечающий решению (2.31) исходной задачи наращивания вязкоупругого стареющего слоя для закона  $\omega(t)$ , не предполагающего остановки вращения, а тензор дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  есть взятый с обратным знаком тензор напряжений в соответствующем ненаращиваемом упругом полом цилиндра, вращающемся с угловой скоростью  $\omega_\infty$ , одна из боковых поверхностей которого сцеплена с жесткой втулкой, а другая свободна. Тензор  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  находится из классической задачи теории упругости

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- - \mathbf{e}_\rho c_\infty \rho &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N); \\ \mathbf{T}_- &= G_\infty [2\mathbf{E}_- + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2; \\ \mathbf{u}_- &= \mathbf{0}, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N, \end{aligned} \quad (2.43)$$

в которой  $c_\infty = \omega_\infty^2 d$ , а  $G_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$  — модуль сдвига рассматриваемого вязкоупругого материала в его весьма большом возрасте.

Нетрудно заметить, что задача (2.20), описывающая процесс деформирования слоя после начала его кусочно-непрерывного наращивания, в точности переходит в краевую задачу (2.43) при замене (знаком  $\mapsto$  всюду ниже будем обозначать словосочетание «заменить на»)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &\mapsto \mathbf{u}_-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \mapsto \mathbf{E}_-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \mapsto \mathbf{T}_-(\mathbf{r})/G_\infty, \\ \chi(\rho, t) &\mapsto -c_\infty \rho, \quad q(t) \mapsto 0, \quad x(t) \mapsto x_N. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Поэтому в соответствии с результатами § 2.3 тензор дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$ , представляющий решение задачи (2.43), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_- &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho^- + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi^- + \mathbf{k} \mathbf{k} \sigma_z^-, \quad \sigma_z^- = \nu(\sigma_\rho^- + \sigma_\varphi^-), \\ \sigma_{\rho, \varphi}^-(\rho) &= -B_1^{(1)} \pm \frac{B_2^{(1)}}{\rho^2} + (2\varkappa \pm 1)C_\infty \rho^2, \quad C_\infty = \frac{c_\infty}{4(\varkappa + 1)}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$B_1^{(1)} = \frac{\varkappa[x_0^4 + (2\varkappa + 1)x_N^4]C_\infty}{x_0^2 + \varkappa x_N^2}, \quad B_2^{(1)} = \frac{x_0^2 x_N^2 [\varkappa x_0^2 - (2\varkappa + 1)x_N^2]C_\infty}{x_0^2 + \varkappa x_N^2},$$

поскольку при указанных выше заменах нужно

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, t) &\mapsto -\frac{C_\infty}{G_\infty} \left( \frac{x_N^4}{\rho^2} - 2x_N^2 + \rho^2 \right), \\ F(t) &\mapsto -\frac{C_\infty}{G_\infty} \frac{\varkappa(x_N^2 - x_0^2)^2}{(x_0^2 + \varkappa x_N^2)}, \quad Q(t) \mapsto 0, \\ \Xi^\pm(\rho, t) &\mapsto -\frac{C_\infty}{G_\infty} \left[ \pm \frac{x_N^4}{\rho^2} + 2\varkappa x_N^2 - (2\varkappa \pm 1)\rho^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Заметим, что содержащий две произвольные постоянные общий вид распределений перемещений, а также радиальных и окружных напряжений во вращающемся упругом цилиндре для рассматриваемого здесь случая плоской деформации можно сразу получить, например, из приведенных в [77] выражений, соответствующих общему решению задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии вращающегося тонкого диска, путем замены в последних коэффициента Пуассона  $\nu$  на отношение  $\nu/(1 - \nu) = (\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)$  [35]. После этого для получения  $\sigma_{\rho, \varphi}^-(\rho)$  останется только удовлетворить необходимым граничным условиям.

**2. Остаточные напряжения в слое после остановки его вращения и отсоединения от оправки.** Предположим теперь, что в момент времени  $t = t^s$  помимо программы вращения (см. п. 1 настоящего параграфа) изменяется также и граничное условие на поверхности слоя, сцепленной в процессе наращивания с жесткой оправкой.

Поскольку решение (2.31) исходно поставленной задачи наращивания известно для любого сколь угодно отдаленного момента времени  $t$ , то известна и соответствующая этому решению зависимость от времени контактного давления на поверхности оправки  $\rho = x_0$ , то есть функция

$$p(t) = -\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)|_{\rho=x_0} \cdot \mathbf{e}_\rho.$$

Очевидно, что первые три функции из (2.31) удовлетворяют также эквивалентной (2.20) краевой задаче

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{e}_\rho \chi(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2\mathbf{D} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v})/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{e}_\rho \lambda(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t); \end{aligned} \quad (2.47)$$

введенная здесь функция  $\lambda(t)$  определяется по известной функции  $p(t)$  соотношениями

$$\lambda(t) = [p^\circ(t)]'_t, \quad p^\circ(t) = \frac{p(t)}{G(t)} - \int_{t_1}^t \frac{p(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau. \quad (2.48)$$

Будем считать, что начиная с момента  $t = t^s$  принудительно задается некоторый другой по отношению к  $p(t)$  закон изменения давления на боковой поверхности слоя  $\rho = x_0$  — функция  $\tilde{p}(t)$ , которую продолжим на весь рассматриваемый в задаче временной луч, положив

$$\tilde{p}(t) \equiv p(t), \quad t_1 < t < t^s. \quad (2.49)$$

В итоге для трех первых функций из (2.32) должна быть вместо (2.33) сформулирована следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{e}_\rho \tilde{\chi}(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \tilde{\mathbf{S}} &= 2\tilde{\mathbf{D}} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = (\nabla \tilde{\mathbf{v}}^T + \nabla \tilde{\mathbf{v}})/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \tilde{\mathbf{S}} &= -\mathbf{e}_\rho \tilde{\lambda}(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{e}_\rho q(t), \quad \rho = x(t). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Здесь функция  $\tilde{\lambda}(t)$  вычисляется по формулам (2.48), в которых нужно везде поставить тильду над величинами  $\lambda$  и  $p$ .

Вводя функции  $p_-(t) = \tilde{p}(t) - p(t)$  и  $\lambda_-(t) = \tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)$ , получим, что в силу тождественного равенства (2.49) имеют место равенства

$$\begin{aligned} p_-^\circ(t) &\equiv 0, \quad t < t^s, \\ p_-^\circ(t) &= \frac{p_-(t)}{G(t)} - \int_{\tilde{t}}^t \frac{p_-(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_i) \frac{p_-(t)}{G(t)}, \quad t \geq \tilde{t} \end{aligned}$$

(момент  $\tilde{t}$  тот же, что и в п. 1) из которых, в частности, вытекает, что

$$\lambda_-(t) \equiv 0, \quad t \leq \tilde{t}. \quad (2.51)$$

Вычитая из соотношений (2.50) соответствующие соотношения (2.47), будем теперь для  $\mathbf{v}_-$ ,  $\mathbf{D}_-$  и  $\mathbf{S}_-$  иметь вместо (2.38) краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_- + \mathbf{e}_\rho \chi_-(\rho, t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x(t)), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S}_- &= 2\mathbf{D}_- + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}_-, \quad \mathbf{D}_- = (\nabla \mathbf{v}_-^T + \nabla \mathbf{v}_-)/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_- &= -\mathbf{e}_\rho \lambda_-(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x(t), \end{aligned}$$

с параметром  $t$ . В силу (2.37) и (2.51) эта задача при  $t \leq \tilde{t}$  имеет тривиальное решение, то есть по-прежнему справедливы тождества (2.39), а

значит и представление (2.40). Дальнейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям, проведенным в п. 1 данного параграфа. Их результатом является классическая вязкоупругая краевая задача

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- + \mathbf{e}_\rho \rho c_-(t) &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N), \quad t \geq \tilde{t}; \\ \frac{\mathbf{T}_-}{G(t)} &= (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tilde{t}})[2\mathbf{E}_- + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = \frac{\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-}{2}; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- &= -\mathbf{e}_\rho p_-(t), \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ссылаясь снова на принцип соответствия в линейной теории вязкоупругости [28], можем в каждый момент  $t \geq \tilde{t}$  искать тензор  $\mathbf{T}_-$  из решения упруго-мгновенной задачи, соответствующей в данный момент времени задаче (2.52). В итоге придем к следующему заключению.

**Утверждение 2.2.** Пусть  $\tilde{\omega}(t) \rightarrow 0$  и  $\tilde{p}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть после завершения процесса наращивания производится остановка вращения и отсоединение сформированного слоя от оправки. Тогда, если для исходной программы вращения  $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = \omega_\infty$ , то финальные остаточные напряжения в изготовленном вязкоупругом стареющем слое независимо от программы остановки  $\tilde{\omega}(t)$  и способа отсоединения, а также момента  $t^s$  начала данных манипуляций определяются тензором остаточных напряжений, вычисляемым по формуле (2.42). В ней смысл первого слагаемого в правой части остается прежним, а тензор дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  определяется как взятый с обратным знаком тензор напряжений в соответствующем ненаращиваемом упругом полом цилиндра, вращающемся с угловой скоростью  $\omega_\infty$ , одна из боковых поверхностей которого свободна, а на другой задано равномерное давление  $p_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$ , равное установившемуся значению давления слоя на оправку в исходной задаче наращивания с законом  $\omega(t)$ , решение которой дается функциями (2.31). Тензор  $\mathbf{T}_-(\mathbf{r})$  находится из решения классической краевой задачи теории упругости

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}_- - \mathbf{e}_\rho c_\infty \rho &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (x_0, x_N); \\ \mathbf{T}_- &= G_\infty [2\mathbf{E}_- + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}_-], \quad \mathbf{E}_- = (\nabla \mathbf{u}_-^T + \nabla \mathbf{u}_-)/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- &= \mathbf{e}_\rho p_\infty, \quad \rho = x_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_- = \mathbf{0}, \quad \rho = x_N, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где величины  $c_\infty$  и  $G_\infty$  определены при формулировке утверждения 2.1.

Легко увидеть, что все соотношения задачи (2.53), кроме граничного условия на поверхности  $\rho = x_0$ , могут быть формально получены из соответствующих соотношений задачи (2.20) посредством замены (2.44).

Согласно (2.25) и (2.46) это означает, что решение краевой задачи (2.53) дает тензор дополнительных напряжений  $\mathbf{T}_- = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho^- + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi^- + \mathbf{k} \mathbf{k} \sigma_z^-$  с компонентами (см. также (2.45))

$$\sigma_{\rho,\varphi}^-(\rho) = -B_1^{(2)} \pm \frac{B_2^{(2)}}{\rho^2} + (2\kappa \pm 1)C_\infty \rho^2, \quad \sigma_z^- = \nu(\sigma_\rho^- + \sigma_\varphi^-),$$

где константы  $B_1^{(2)}$  и  $B_2^{(2)}$  определяются из граничных условий задачи (2.53). Компонентная запись этих условий имеет, очевидно (см. § 2.3), вид  $\sigma_\rho^-(x_0) = p_\infty$ ,  $\sigma_\rho^-(x_N) = 0$ . Отсюда находим

$$B_1^{(2)} = (2\kappa + 1)(x_0^2 + x_N^2)C_\infty + \frac{x_0^2 p_\infty}{x_N^2 - x_0^2},$$

$$B_2^{(2)} = x_0^2 x_N^2 \left[ (2\kappa + 1)C_\infty + \frac{p_\infty}{x_N^2 - x_0^2} \right].$$

Завершая данный параграф, отметим два принципиальных момента. Во-первых, стоит указать на то обстоятельство, что утверждения 2.1 и 2.2 являются прямым следствием физической и геометрической линейности поставленной задачи наращивания. Во-вторых, анализируя ход рассуждений, приводящих к формулировке данных утверждений, нетрудно заметить, что эти рассуждения имеют достаточно общий характер и могут быть положены в основу доказательств общих теорем о структуре остаточного напряженного состояния произвольных тел, подчиненных линейным соотношениям и наращиваемых в различных условиях закрепления и нагружения. Однако такого рода всестороннее обобщение не укладывается в рамки настоящей работы.

## 2.6 Модельные задачи

В рамках построенной общей модели процессов изготовления цилиндрических тел на вращающейся оправке рассмотрим две частные задачи, имеющие, несомненно, важное прикладное значение.

Для аппроксимации меры ползучести вязкоупругого материала воспользуемся зависимостью [4]

$$\omega(t, \tau) = A(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где  $A(\tau)$  — так называемая функция старения,  $\gamma > 0$  — множитель, задающий масштаб времени. Аппроксимирующие выражения для модуля

сдвига и функции старения возьмем в виде (см. § 0.4)

$$G(t) = G_{\infty}(1 - \delta G e^{-\alpha t}), \quad A(\tau) = A_{\infty} + \Delta A e^{-\beta \tau}.$$

В расчетах будем принимать

$$\begin{aligned} \nu &= 0.35; & \alpha &= {}^3/5 \gamma, & \delta G &= 0.3, \\ \beta &= {}^4/105 \gamma, & A_{\infty} G_{\infty} &= 0.1808, & \Delta A G_{\infty} &= 0.4875. \end{aligned}$$

Отметим, что данные константы получены для поливинилхлорида на основании экспериментальных кривых, представленных в работе [97].

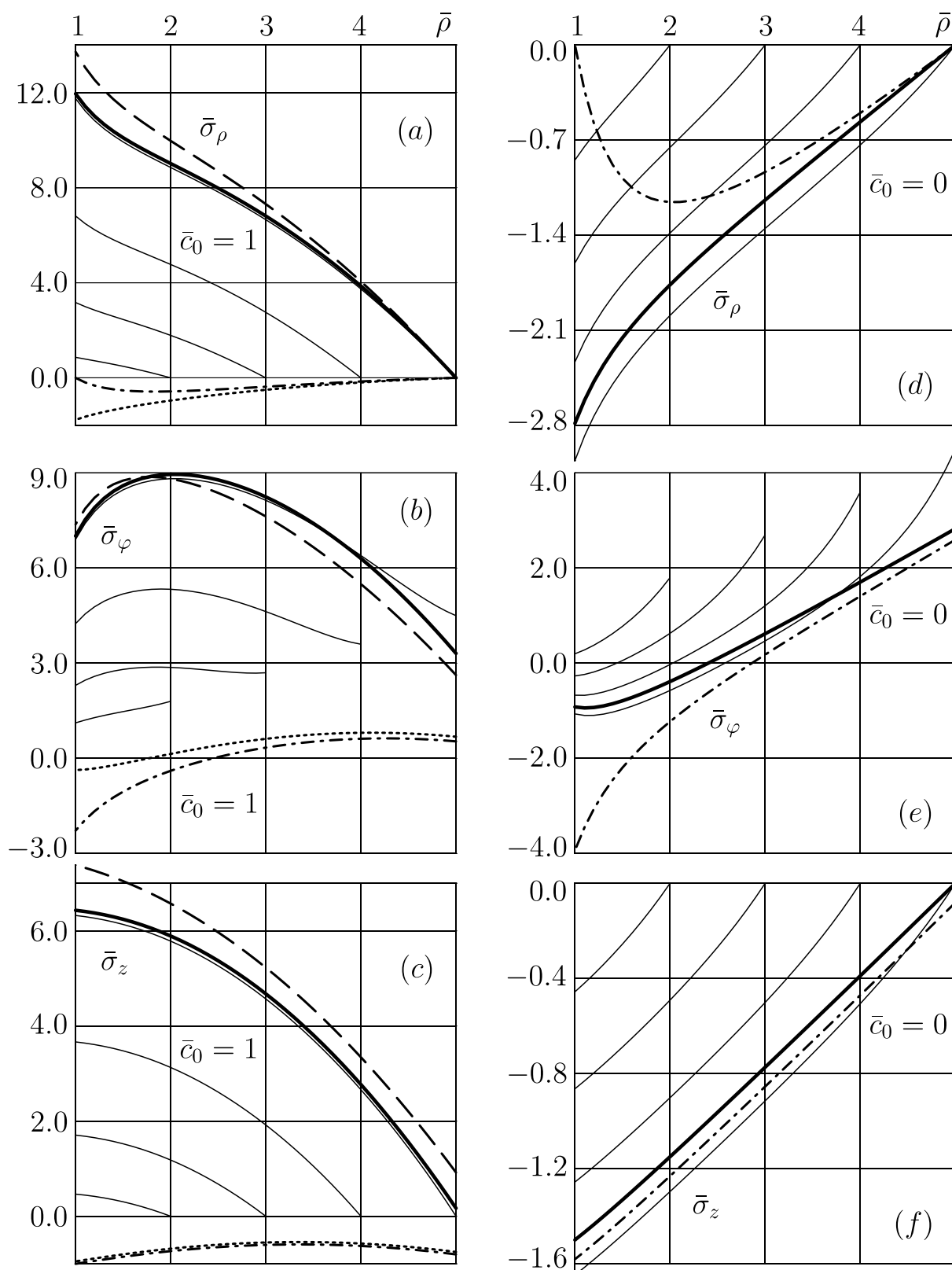
Выберем следующую систему базовых безразмерных величин. Величины, имеющие размерность времени, для приведения к безразмерному виду умножим на  $\gamma$ . Величины, имеющие размерность длины, отнесем к неизменному радиусу наращиваемого слоя  $x_0$  (радиусу оправки), а имеющие размерность напряжения — к модулю сдвига  $G_{\infty}$  материала в весьма большом возрасте. Все размерные физические величины, приведенные в этой системе к безразмерному виду, будем помечать чертой сверху.

Организация вычислительного процесса при решении рассматриваемых задач, а также применяемые методики контроля точности вычислений и проверки получаемых результатов описаны в приложении Б.

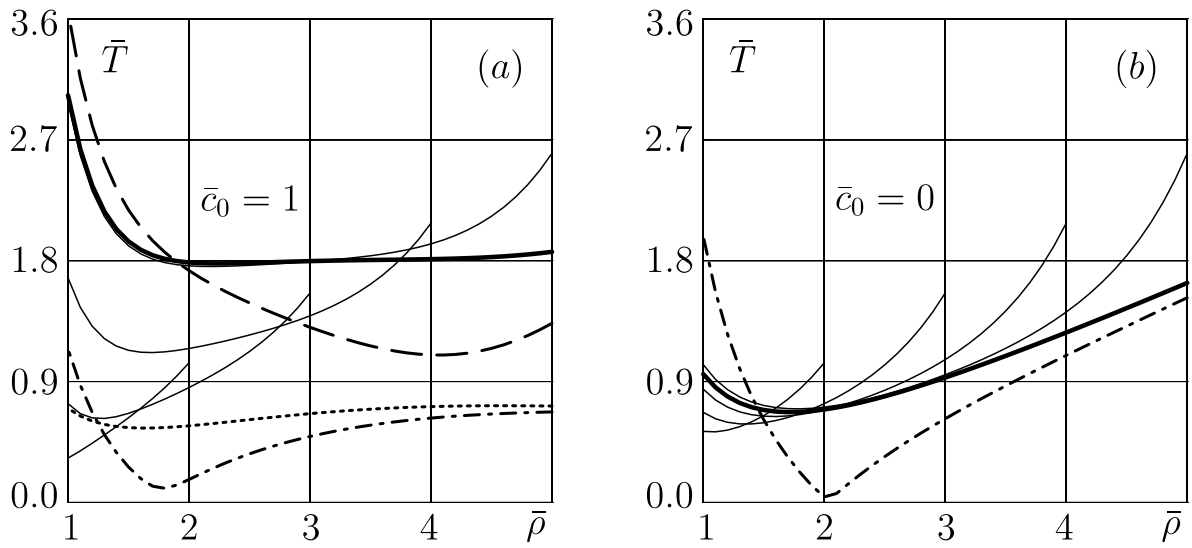
**1. Задача о силовой намотке.** Изучим процесс послойной силовой намотки вязкоупругого стареющего материала на жесткую цилиндрическую оправку, вращающуюся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (см. фиг. 2.1, *a*).

Рассмотрим сначала случай непрерывной намотки (то есть процесс наращивания с одним этапом непрерывного роста,  $N = 1$ ). Для простоты ограничимся линейным законом  $x(t)$  изменения во времени внешнего радиуса слоя. Положим  $\bar{x}_1 = 5$ ,  $\bar{t}_1 = 0.3$ ,  $\bar{t}_2 = 4.3$ . Зависимость напряжения натяга монослоев от их радиуса зададим функцией  $\bar{\sigma}_{\varphi}^*(\bar{\rho}) = 0.9\bar{\rho}$ .

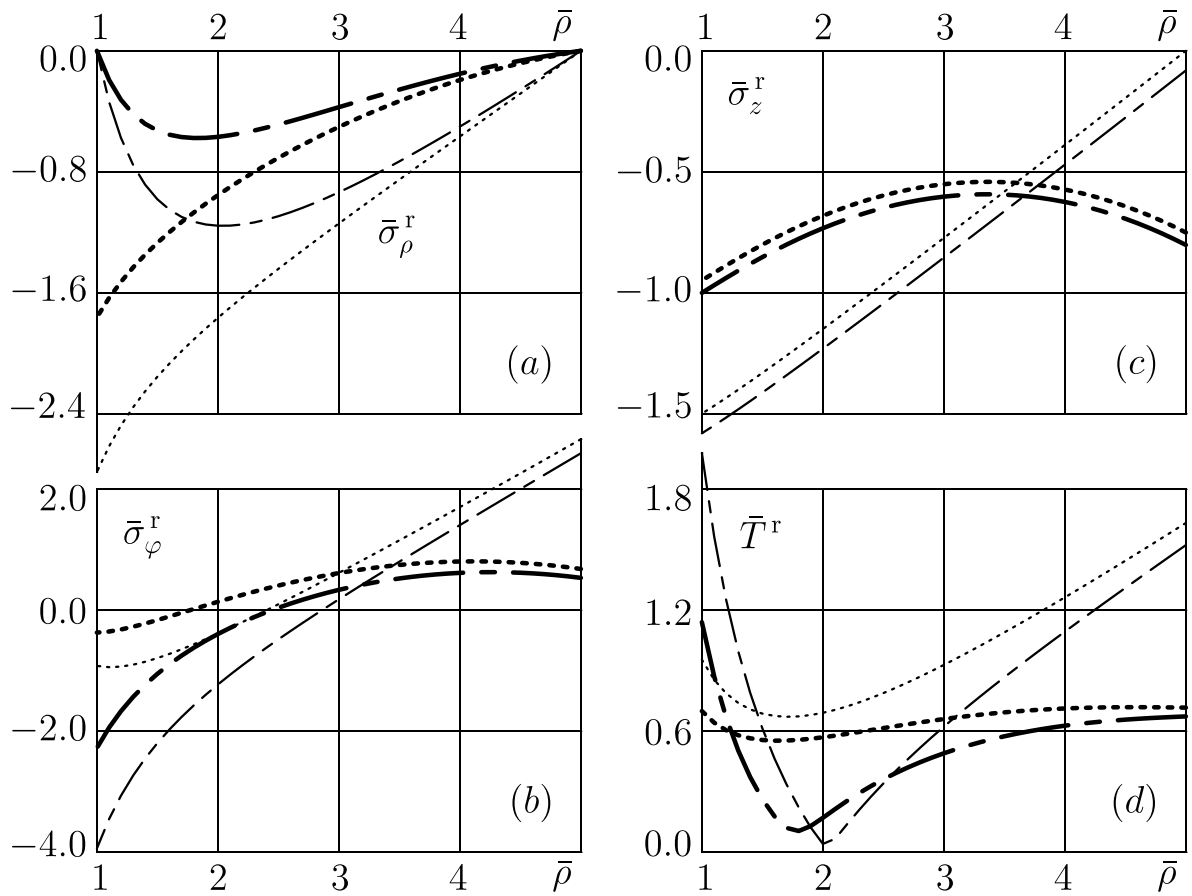
На фиг. 2.2 и 2.3 представлены зависимости характеристик напряженного состояния наматываемого слоя (безразмерных компонент тензора напряжений  $\bar{\sigma}_{\rho}$ ,  $\bar{\sigma}_{\varphi}$ ,  $\bar{\sigma}_z$  в цилиндрической системе координат и интенсивности касательных напряжений  $\bar{T}$ ) от безразмерной радиальной координаты  $\bar{\rho}$ . *Тонкими сплошными линиями* показана эволюция распределений этих характеристик в процессе непрерывного роста слоя. *Сплошная толстая линия* изображает распределение каждой характеристики, устанавливающееся после прекращения наращивания в продолжающем вращаться слое. *Штриховая линия* соответствует распределениям исследуемых характеристик во вращающемся вязкоупругом слое окончательной толщины, найденным из классической задачи линейной теории



**Фиг. 2.2.** Напряжения и остаточные напряжения  
в наматываемом слое при законе натяжения монослоев  $\bar{\sigma}_\varphi^*(\bar{\rho}) = 0.9\bar{\rho}$ :  
(a)–(c) — с учетом и (d)–(f) — без учета действия центробежных сил.



**Фиг. 2.3.** Интенсивность касательных напряжений и остаточных напряжений в наматываемом слое при законе натяжения монослоев  $\bar{\sigma}_\varphi^*(\bar{\rho}) = 0.9\bar{\rho}$ : (a) — с учетом и (b) — без учета действия центробежных сил.



**Фиг. 2.4.** Остаточное напряженное состояние намотанного слоя, найденное с учетом (толстые линии) и без учета (тонкие линии) действия центробежных сил: кривые взяты с фиг. 2.2 и 2.3.

вязкоупругости без учета механических особенностей процесса изготовления этого слоя. *Пунктирной линией* изображены эпюры финальных остаточных напряжений и отвечающей им интенсивности касательных напряжений в готовом слое после остановки вращения оправки. *Штрих-пунктирной линией* показаны эпюры финальных остаточных напряжений и соответствующей интенсивности касательных напряжений после остановки вращения и последующего отсоединения от оправки цилиндрического тела, изготовленного в процессе намотки.

Для режима намотки, представленного графиками, расположенными на фигурах слева (поля (a)–(c) на фиг. 2.2 и (a) на фиг. 2.3), скорость вращения определяется величиной  $\bar{c}_0 = \bar{\omega}_0^2 \bar{d}$ , равной единице. Графики, расположенные справа (соответственно на полях (d)–(f) и (b)), построены для случая отсутствия вращения рассматриваемого тела в процессе его намотки ( $\bar{c}_0 = 0$ ) и приведены для сравнения с первым режимом. Отвечающие обоим режимам остаточные напряжения (двух указанных выше видов) показаны также для удобства их сопоставления отдельно в одном масштабе на фиг. 2.4. *Толстые линии* на этой фигуре соответствуют первому режиму (с вращением), а *тонкие* — второму (без вращения). При этом тонкие пунктирные кривые совпадают с кривыми, изображенными на фиг. 2.2 и 2.3 сплошными толстыми линиями.

Комментируя представленные результаты, отметим следующие два обстоятельства, имеющие принципиальное значение.

Во-первых, после анализа приведенных кривых становится очевидной необходимость учета фактора постепенного формирования тела при расчете его напряженно-деформированного состояния как в процессе, так и по окончании изготовления (независимо от наличия фактора вращения). Например, только таким образом можно найти распределения технологических остаточных напряжений в окончательно изготовленном теле.

Во-вторых, при моделировании рассматриваемых в данной главе процессов важно принимать во внимание и оценивать степень влияния присутствующих в этих процессах центробежных сил. Пренебрежение этими силами при определенных соотношениях между скоростью вращения оправки и силой натяжения присоединяемых монослоев материала может привести не только к количественно, но даже к качественно неверным выводам, относящимся как к поведению тела в процессе его формирования, так и к финальному (остаточному) состоянию получаемого в итоге изделия. Все это может внести большие ошибки в прорабатываемую схему соответствующего технологического процесса.

Говоря о поведении тела в процессе формирования, в нашем случае,

прежде всего, стоит обратить внимание на знак всех представленных на фиг. 2.2 нормальных напряжений (которые в силу геометрической специфики напряженного состояния рассматриваемого тела являются в нем главными), а также на положения и значения максимумов окружного напряжения  $\sigma_\varphi$  при двух рассмотренных вариантах намотки. При этом, в частности, нужно иметь в виду, что величина радиального напряжения  $\sigma_\rho$  на внутренней поверхности слоя  $\rho = x_0$  является весьма важной характеристикой процесса, представляя собой давление  $p(t)$  наращиваемого слоя на оправку, взятое с обратным знаком. В одном случае на протяжении всего процесса изготовления это давление оказывается положительным, а в другом — отрицательным, причем весьма значительным. Особо следует отметить тот факт, что при отсутствии вращения наматываемого слоя максимум интенсивности  $T$  касательных напряжений в нем в процессе намотки сосредоточен у внешней поверхности  $\rho = x(t)$  (поверхности роста), а наличие вращения приводит к тому, что на завершающей стадии процесса намотки максимум указанной характеристики выходит на внутреннюю (контактирующую с оправкой) поверхность слоя (см. фиг. 2.3). В момент прекращения роста его величина уже примерно на 15% выше значения интенсивности у наружной поверхности. Величина  $T$  может являться определенным показателем степени критичности напряженного состояния тела, обладающего пластическими свойствами. Напомним [43], что для наибольшего *касательного* напряжения  $\tau_{\max}$  в точке справедливы оценки  $\sqrt{3}/2 T \leq \tau_{\max} \leq T$ . С точки зрения прочности определенный интерес может представлять и величина наибольшего *растягивающего* напряжения в точке, равная значению максимального из главных нормальных напряжений, если оно неотрицательно. В рассматриваемой задаче, как следует из графиков, представленных на фиг. 2.2, в случае намотки без вращения в последний момент этого процесса данная величина максимальна у внешней поверхности слоя, где наибольшее растягивающее напряжение действует в продольном диаметрально́м сечении и равно в безразмерных единицах 4.5, а при наличии вращения ее максимум достигается у внутренней поверхности и соответствует растяжению в радиальном направлении (стремящемуся оторвать слой от оправки), составляя уже приблизительно 11.7 безразмерных единиц.

Что касается оценки состояния тела после завершения его формирования (и, возможно, отсоединения от оправки), то здесь, в первую очередь, необходимо отметить следующий факт. Пренебрежение учетом центробежных сил при моделировании процесса намотки материала на вращающуюся оправку в рассмотренном примере приводит к существенному за-

вышению предсказываемых остаточных напряжений (см. фиг. 2.4). Как отмечено во введении к данной главе, эти напряжения в готовом теле часто играют позитивную роль. Их оптимальное распределение может быть обеспечено надлежащей программой натяжения наматываемых монослоев. Ясно, что построение такой программы на основании завышенных оценок остаточных напряжений лишено всякого смысла.

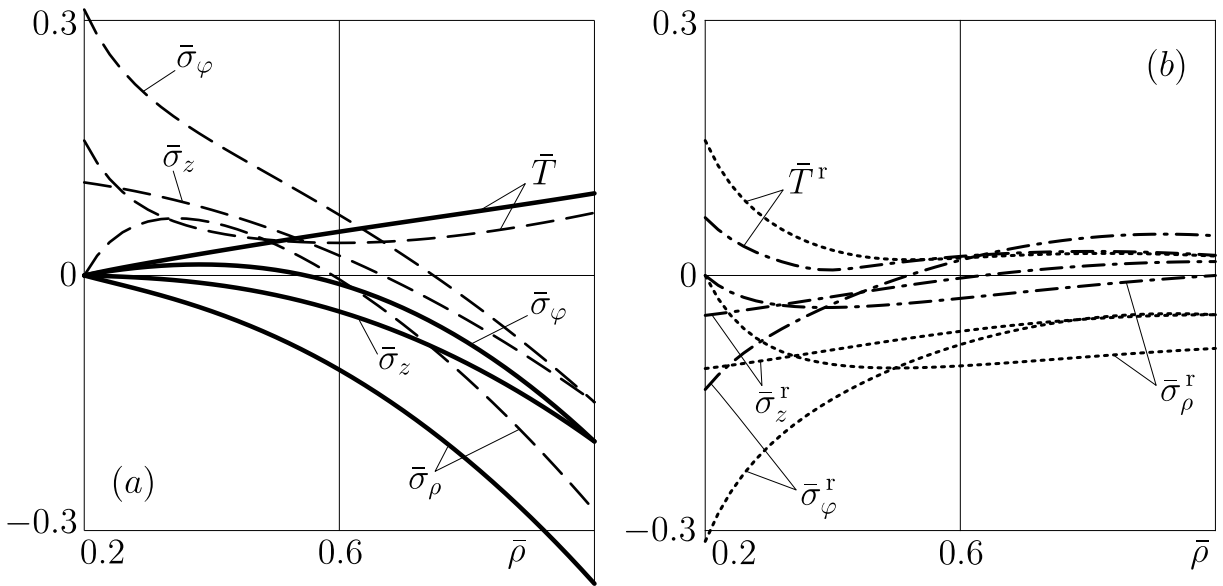
**2. Задача о внутреннем напылении.** Рассмотрим также задачу о нанесении ненапряженного материала (когда  $\sigma_\varphi^*(\rho) \equiv 0$ ) на внутреннюю поверхность жесткой цилиндрической оправки, вращающейся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  (см. фиг. 2.1, *b*). Здесь для разнообразия приведем результаты расчетов для чисто упругого материала. В этом случае, как уже отмечалось в § 2.4, закон изменения во времени радиуса  $x(t)$  поверхности роста наносимого слоя (то есть его внутреннего радиуса) не играет никакой роли. Напряжения в растущем слое определяются только мгновенным значением данного радиуса и не изменяются после остановки процесса наращивания.

Для приведения к безразмерному виду здесь, как и ранее, все линейные величины будем относить к неизменяемому радиусу слоя  $x_0$ , в данном случае внешнему. Величины, совпадающие по размерности с напряжением, отнесем к постоянному модулю сдвига  $G$ .

Коэффициент Пуассона примем в расчетах равным  $\nu = 0.35$ , как и выше для вязкоупругого материала. Скорость вращения определяется значением коэффициента  $\bar{c}_0 = 1$ .

На фиг. 2.5, *a* показаны распределения безразмерных напряжений (радиального  $\bar{\sigma}_\rho$ , окружного  $\bar{\sigma}_\varphi$  и осевого  $\bar{\sigma}_z$ ) и интенсивности касательных напряжений  $\bar{T}$  в растущем упругом слое для значения его внутреннего радиуса  $\bar{x} = 0.2$  (*сплошные линии*), а также в аналогичном слое, вращающемся с той же угловой скоростью, что и данный, но изготовленном без остаточных напряжений до начала вращения (*штриховые линии*). Налицо принципиальные качественные и количественные различия этих распределений. Они отличаются характером монотонности, положениями и величинами экстремальных значений, имеют разные интервалы знакопостоянства.

Фиг. 2.5, *b* иллюстрирует зависимости от безразмерной радиальной координаты  $\bar{\rho}$  характеристик остаточного напряженного состояния упругого слоя, изготовленного на вращающейся с постоянной скоростью оправке, которое возникает в нем после остановки вращения (*пунктирная линия*) и после остановки вращения с последующим отсоединением от



**Фиг. 2.5.** Напыление упругого слоя ( $\bar{c}_0 = 1$ ):  
(a) — напряжения, (b) — остаточные напряжения.

оправки (*штрихпунктирная линия*). Важно отметить, что эти характеристики соизмеримы по своей величине со значениями напряжений и интенсивности касательных напряжений в процессе роста, а также в классической задаче для вращающегося слоя (см. фиг. 2.5, a).

Наличие остаточных напряжений в слое, изготовленном посредством моделируемого в этом пункте технологического процесса, при эксплуатации должно являться, скорее всего, негативным фактором. Однако их появление в данном случае неизбежно и обусловлено самой спецификой рассматриваемого процесса. При этом все же можно было бы ожидать, что напряжения, возникающие под действием центробежных сил в слое во время его напыления, вместе с остановкой вращения и исчезновением этих сил должны принципиально снизить свои значения. Но, как показывают проведенные расчеты, этого не происходит. Максимальные значения сжимающих окружных напряжений и интенсивности касательных напряжений после прекращения вращательного движения даже, наоборот, возрастают — соответственно приблизительно на 60 и 64%. Снижение уровня всех остаточных напряжений наблюдается лишь после отсоединения готового слоя от оправки. Но этими напряжениями по-прежнему нельзя пренебречь по сравнению с теми, которые действуют в процессе роста.

Заметим, что все качественные особенности и относительные количественные оценки напряженного состояния напыляемого упругого слоя не зависят от скорости его вращения в процессе напыления. Поскольку

единственным фактором, вызывающим деформирование рассматриваемого тела, в данном случае является действие на него центробежных сил, величина которых в каждой точке пропорциональна  $c_0$ , а решаемая задача линейна, то для получения распределений напряжений в слое при произвольном значении коэффициента  $c_0$  нужно всего лишь увеличить масштаб оси ординат на фиг. 2.5 в  $\bar{c}_0$  раз.

**3. Примеры наращивания за несколько этапов.** Вернемся снова к задаче из п. 1 настоящего параграфа, но теперь предположим, что намотка слоя осуществляется не за один, а за  $N = 3$  этапа, между которыми выдерживаются определенные паузы. Скорость  $X = dx/dt$  изменения радиуса поверхности роста на всех этапах наращивания будем считать постоянной и равной принятому в п. 1 значению, то есть положим  $\bar{X}(t) \equiv 1$  при  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Момент  $t_1$  начала намотки, финальное значение  $x_N$  внешнего радиуса намотанного слоя и зависимость  $\sigma_\varphi^*(\rho)$  натяга присоединяемых элементарных слоев от их радиуса также оставим прежними. С учетом сказанного зададим, например, следующие числовые величины для характерных значений изменяемого радиуса слоя и моментов времени, определяющих программу намотки:

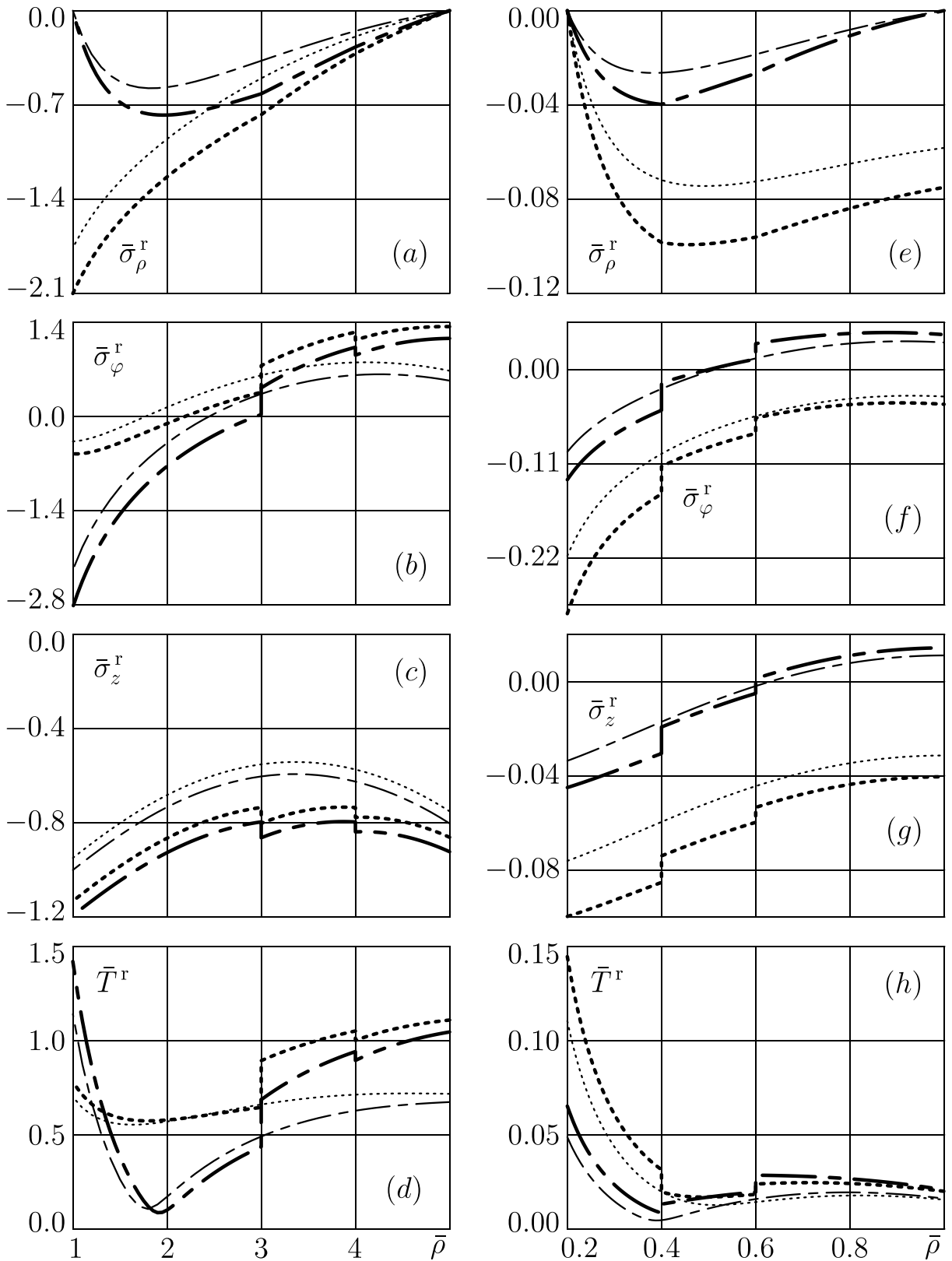
$$\begin{aligned} \text{1-й этап: } & \bar{x}_1 = 3, \quad \bar{t}_1 = 0.3, \quad \bar{t}_2 = 2.3; \\ \text{2-й этап: } & \bar{x}_2 = 4, \quad \bar{t}_3 = 122.3, \quad \bar{t}_4 = 123.3; \\ \text{3-й этап: } & \bar{x}_3 = 5, \quad \bar{t}_5 = 131.3, \quad \bar{t}_6 = 132.3. \end{aligned}$$

Заметим, что продолжительность паузы между первым и вторым этапами наращивания здесь выбрана настолько большой, что за это время процесс ползучести в сформированной на первом этапе части слоя успевает уже полностью завершиться, а используемый материал — состариться.

Рассмотрим также еще раз описанную в п. 2 задачу о внутреннем напылении, но только уже вязкоупругого стареющего слоя за  $N = 3$  последовательных этапа, на которых скорости изменения внутреннего радиуса  $x(t)$  постоянны и одинаковы. Примем  $\bar{X}(t) \equiv -2$  при  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и зададим характерные значения параметров программы напыления следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{1-й этап: } & \bar{x}_1 = 0.6, \quad \bar{t}_1 = 0.3, \quad \bar{t}_2 = 0.5; \\ \text{2-й этап: } & \bar{x}_2 = 0.4, \quad \bar{t}_3 = 2.0, \quad \bar{t}_4 = 2.1; \\ \text{3-й этап: } & \bar{x}_3 = 0.2, \quad \bar{t}_5 = 5.1, \quad \bar{t}_6 = 5.2. \end{aligned}$$

Величину постоянной угловой скорости вращения оправки в обоих задачах, как и прежде, зададим единичным значением коэффициента  $\bar{c}_0$ .



**Фиг. 2.6.** Остаточное напряженное состояние вязкоупругих слоев, изготовленных при  $\bar{c}_0 = 1$  и постоянной скорости изменения радиуса с остановками (толстые линии) и без остановок (тонкие линии): (a)–(d) — силовая намотка ( $\bar{\sigma}_\varphi^*(\bar{\rho}) = 0.9\bar{\rho}$ ); (e)–(h) — внутреннее напыление.

На фиг. 2.6 *толстые линии* изображают финальное остаточное напряженное состояние рассматриваемых тел, которые изготовлены в описанных режимах за три этапа непрерывной силовой намотки (фиг. *a–d*) и внутреннего напыления (фиг. *e–h*). *Пунктиром и штрихпунктиром* построены распределения напряжений и интенсивности касательных напряжений, устанавливающиеся в готовом слое соответственно после остановки вращения и после остановки вращения и последующего отсоединения слоя от оправки. *Тонкими линиями* для сравнения показаны аналогичные графики, получаемые в процессах наращивания, протекавших при тех же условиях, с теми же скоростями и до тех же значений изменяемого радиуса  $x$ , что и рассматриваемые в данном пункте, но только без временных остановок на протяжении роста (поэтому тонкие кривые на полях (*a*)–(*d*) совпадают с соответствующими графиками, построенными на фиг. 2.4 толстыми линиями).

Как видим, наличие пауз в процессах изготовления вязкоупругих слоев (то есть интервалов времени, в течение которых наращивания не происходит, а сформированный к этому времени слой продолжает вращаться на оправке) приводит к весьма существенному количественному изменению картины напряженного состояния, остающегося после завершения изготовления, по сравнению с теми вариантами наращивания, когда паузы отсутствуют. При этом в нашем случае наблюдается повышение уровней как растягивающих, так и сжимающих остаточных напряжений. Происходит также и качественное изменение. В рассмотренных задачах оно выражается, главным образом, в появлении разрывов окружных и осевых напряжений (а значит, и интенсивности касательных напряжений) и изломов на эпюрах радиальных напряжений. И те, и другие возникают в случае наращивания с остановками на границах частей тела, сформированных на различных этапах непрерывного роста и могут быть исследованы с помощью того же приема, что был использован в п. 2 § 1.7.

## 2.7 Основные результаты и выводы

В заключение данной главы перечислим основные результаты проведенных в ней исследований.

1. Предложена математическая модель процессов изготовления упругих и стареющих вязкоупругих цилиндрических тел и покрытий на вращающейся жесткой оправке или заготовке, учитывающая как особенности послойного нанесения материала с произвольным натягом, так и влияние действующих при этом центробежных сил. Даны постановки соответствующих краевых задач механики растущих тел. Построены их замкнутые аналитические решения.
2. Доказаны утверждения о структуре распределений остаточных напряжений в рассматриваемых телах после их изготовления. Полученные соотношения дают эффективный способ нахождения указанных распределений. Подход, использованный при выводе этих соотношений, имеет общий в рамках линейной теории характер и может быть положен в основу доказательств теорем об остаточных напряжениях, возникающих в произвольных наращиваемых телах после завершения их формирования и последующего освобождения от механической нагрузки или кинематических связей.
3. Проведены расчеты для модельных задач о силовой намотке и о внутреннем напылении. Выявлена принципиальная необходимость совместного учета факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на тело центробежных сил при расчете его напряженно-деформированного состояния в процессе и после изготовления. Найдены распределения остаточных напряжений в окончательно изготовленных телах после прекращения их вращения, а также после прекращения вращения и отсоединения от оправки. При этом, в частности, показано следующее.
  - а) Пренебрежение учетом центробежных сил при моделировании процесса намотки в некоторых случаях может дать радикально неверные представления о законе изменения давления на поверхность оправки и привести к сильному завышению оценки прочности изделия на этапе его изготовления, а также значений предсказываемых остаточных напряжений. Все это может внести большие ошибки в прорабатываемую схему технологического процесса.

- б) Остаточные напряжения в изделиях, получаемых в результате напыления материала на вращающуюся поверхность, могут оказаться соизмеримыми с напряжениями, действующими в процессе изготовления, или даже значительно превышать их. Это особенно актуально, если наличие остаточных напряжений в данных изделиях является негативным фактором.
- в) Напряженное состояние рассматриваемых вязкоупругих тел, остающееся после их изготовления, определяющим образом зависит от характера протекания данного процесса. Так, наличие пауз в процессе намотки или напыления приводит к качественному и весьма существенному количественному изменению картины остаточного напряженного состояния по сравнению с получаемой в непрерывном процессе.

## Глава 3

# Возведение тяжелой полукруглой арки на горизонтальном основании

Изучается влияние сил тяжести на постепенно формируемые в их присутствии объекты. Выделяются и анализируются основные тенденции, определяющие процесс эволюции напряженно-деформированного состояния таких объектов. Рассмотрены случаи вязкоупругого стареющего и чисто упругого материалов. В рамках линейной механики наращиваемых тел решена инженерная задача о возведении кругового цилиндрического свода на гладком жестком основании методом послойного утолщения первоначально установленной заготовки со стороны ее внутренней поверхности. Моделирование проводится с учетом возможности использования при утолщении предварительно напряженных конструктивных элементов, а также организации локальной поддержки свода во время возведения подвесом с контролируемой силой натяжения. Показана исключительная важность принятия во внимание сил тяжести, действующих на протяжении всего процесса возведения, при оценке прочности и несущей способности получаемой в итоге конструкции. Продемонстрирована возможность весьма эффективного управления текущим и результирующим состоянием изготавливаемого посредством наращивания тяжелого тела путем варьирования в процессе его изготовления скорости присоединения дополнительного материала, создания в этом материале ненулевых начальных напряжений, а также с помощью временного локального загрузки поверхности этого тела.

Основные результаты главы описаны в работах [68, 70, 71, 94].

## Введение

Известно, что в подавляющем большинстве случаев эксплуатационные напряжения и деформации в конструкции, несущей заданную рабочую нагрузку, значительно превосходят по величине свои составляющие, обусловленные действием на эту конструкцию сил ее собственной тяжести. Поэтому в расчетах на прочность учетом последних обычно пренебрегают. Однако при постепенном сооружении значительных по размерам объектов силы тяжести играют исключительно важную роль. Вес присоединяемых к конструкции новых элементов всякий раз неизбежно вызывает ее дополнительную деформацию. В итоге реальное напряженно-деформированное состояние окончательно сформированного и введенного в эксплуатацию объекта может кардинально отличаться от того состояния, которое получено из расчетов без учета сил тяжести. А при определенных режимах наращивания возникшие в результате технологические напряжения в некоторой части конструкции могут оказаться соизмеримыми с напряжениями от предполагаемой рабочей нагрузки или даже значительно превысить их.

Существует также множество сооружений, для которых силы тяжести являются основной воспринимаемой ими нагрузкой. И в этой ситуации анализ их состояния с учетом особенностей процесса формирования может дать результаты, принципиально отличные от получаемых без такого учета по классической схеме.

Часто на начальном этапе возведения конструкция имеет значительные размеры, но является достаточно тонкостенной и поэтому под действием собственного веса может испытывать значительные напряжения. Последующее усиление (а значит, и утяжеление) такой конструкции дополнительными весовыми элементами может не только не погасить, но даже увеличить первоначально возникшие в ней напряжения и обеспечить тем самым наличие в готовой конструкции областей с высоким уровнем напряжений, не свойственным ей по результатам расчета по конечной конфигурации. В этом случае необходимо принимать специальные меры по управлению напряженно-деформированным состоянием возводимого объекта. В качестве таких мер могут быть предложены, например, создание предварительных напряжений в присоединяемых конструктивных элементах или организация временной локальной поддержки конструкции в процессе ее возведения. Может оказаться даже, что в результате подобного управления конструкция будет приведена в более выгодное состояние по сравнению с тем, которое реализуется при таком

ее (возможно, гипотетическом) варианте изготовления, когда поле сил тяжести начинает существенно воздействовать на конструктивные элементы лишь по достижении рассматриваемой конструкцией своей окончательной конфигурации.

### 3.1 Постановка задачи

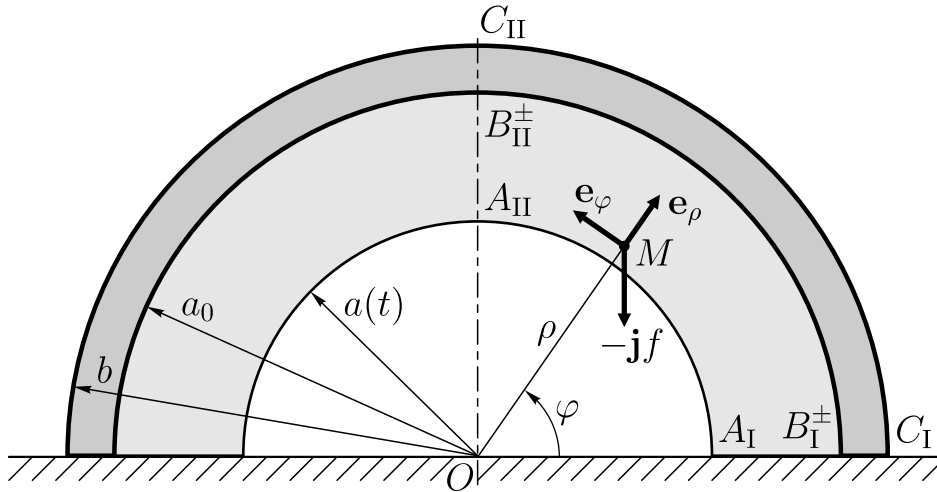
В данной главе рассмотрим задачу о деформировании круговой арочной конструкции, возводимой на горизонтальном основании.

Пусть в момент времени  $t = t_0$  на гладкое жесткое горизонтальное основание установлена полукруглая цилиндрическая арка и закреплена на нем посредством скользящей заделки, запрещающей отрыв подошв арки от основания, но не препятствующей их свободному по нему скольжению. Данная «заготовка» выполнена без остаточных напряжений из однородного изотропного вязкоупругого стареющего материала, который будем считать изготовленным в нулевой момент времени. Далее, начиная с момента  $t_1 \geq t_0$ , происходит постепенное утолщение установленной арки за  $N$  этапов непрерывного присоединения к ее внутренней цилиндрической поверхности равномерных по толщине элементарных слоев дополнительного материала. В перерывах между этапами, а также до начала и после окончания процесса утолщения внутренняя поверхность сформированной конструкции не загружается. Действие скользящей заделки распространяется на всю текущую площадь подошв наращиваемой арки.

Зададимся целью исследовать процесс формирования напряженно-деформированного состояния указанной конструкции, возникающего в результате действия на нее сил тяжести во время и по завершении описанной процедуры возведения. Рассмотрим и проанализируем также некоторые возможные варианты активного управления этим процессом.

Для упрощения задачи присоединяемый материал будем считать изготовленным одновременно с исходным и имеющим с ним одинаковые механические свойства. Рассмотрение будем вести в малых деформациях для случая плоского деформированного состояния, пренебрегая при этом динамическими эффектами.

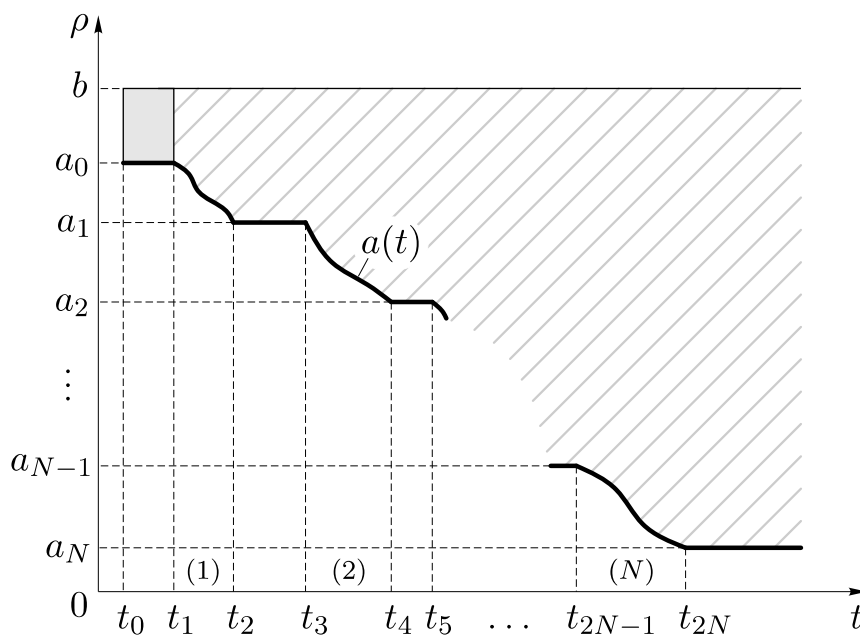
Обозначим через  $b$  внешний радиус арки,  $a_0$  — ее внутренний радиус до начала утолщения,  $a(t)$  — внутренний радиус в момент времени  $t \geq t_0$  (фиг. 3.1). Считаем, что  $a(t)$  — заданная непрерывная функция времени, строго монотонно убывающая на интервалах  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ), соответствующих этапам непрерывного роста арки, и



Фиг. 3.1. Возводимая арочная конструкция.

постоянная вне этих интервалов. Радиус арки непосредственно после окончания  $k$ -го этапа наращивания обозначим через  $a_k$ . Графическое представление общего вида закона изменения во времени внутреннего радиуса арки дано на фиг. 3.2. Числами в круглых скобках обозначены интервалы времени непрерывного наращивания.

Учтем также возможность создания в присоединяемых к арке конструктивных элементах некоторого предварительного напряженного состояния. Однако при этом ограничимся рассмотрением только таких процессов, в которых слои дополнительного материала могут загружаться лишь в момент их присоединения к наращиваемому телу. При таком



Фиг. 3.2. Возможная программа наращивания арки.

упрощающем предположении напряжения в точках арки, удаленных от ее оси на расстояние  $\rho$ , будут возникать в момент времени

$$\tau_0(\rho) = \begin{cases} t_0, & \rho \in (a_0, b), \\ \tau_*(\rho), & \rho \in (a_N, a_0), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\tau_*(\rho)$  — момент присоединения к арке материального слоя радиуса  $\rho$ .

Ясно, что на каждом интервале времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ) имеет место тождество

$$\tau_*(a(t)) \equiv t, \quad (3.2)$$

а уравнение  $\tau_*(\rho) = t$  описывает внутреннюю поверхность непрерывно растущей арки, то есть мгновенную поверхность ее роста.

На фиг. 3.2 сплошным цветом залита область изменения переменных  $(\rho, t)$  в классической задаче о деформировании арки до начала ее утолщения. Заштрихованная неограниченная по  $t$  область соответствует неклассической с точки зрения механики деформированного твердого тела задаче кусочно-непрерывного наращивания рассматриваемой арки.

Будем исходить из уравнения состояния материала в виде (см. § 0.4)

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) [2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\kappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)], \quad (3.3)$$

где  $\tau_0(\mathbf{r})$  — момент возникновения напряжений в точке тела с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , в нашем случае равный  $\tau_0(\rho)$ ;  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — тензоры напряжений и малой деформации,  $\mathbf{1}$  — единичный тензор 2-го ранга;  $G(t)$  — модуль сдвига,  $\kappa = (1 - 2\nu)^{-1}$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Оператор вязкоупругости здесь определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{I} + \mathcal{N}_s &= (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)^{-1}, \\ \mathcal{L}_s f(t) &= \int_s^t f(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad \mathcal{N}_s f(t) = \int_s^t f(\tau) R(t, \tau) d\tau, \\ K(t, \tau) &= G(\tau) \partial \Delta(t, \tau) / \partial \tau, \quad \Delta(t, \tau) = G(\tau)^{-1} + \omega(t, \tau), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{I}$  — тождественный оператор,  $\mathcal{L}_s$  и  $\mathcal{N}_s$  — интегральные операторы Вольтерра с вещественным параметром  $s$ ;  $K(t, \tau)$  и  $R(t, \tau)$  — ядра ползучести и релаксации;  $\Delta(t, \tau)$  и  $\omega(t, \tau)$  ( $t \geq \tau \geq 0$ ) — функция удельной деформации и мера ползучести при чистом сдвиге. Для последней по определению выполняется тождество

$$\omega(\tau, \tau) \equiv 0, \quad \tau \geq 0. \quad (3.4)$$

С учетом тождества (3.4) функция удельной деформации может быть также представлена в виде

$$\Delta(t, \tau) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_\tau) G(t)^{-1}. \quad (3.5)$$

Если определить линейный интегральный оператор

$$\mathcal{H}_s f(t) = (\mathcal{I} - \mathcal{L}_s)[f(t)/G(t)]$$

с параметром  $s$  и для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  точки  $\mathbf{r}$  наращиваемого тела и времени  $t$  вести обозначение

$$g^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}, t), \quad (3.6)$$

то определяющее соотношение (3.3) можно будет переписать в виде [49]

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = 2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (3.7)$$

### 3.2 Краевая задача для исходного тела

Все элементы исходно изготовленной арки (напомним, что она считается не имеющей остаточных напряжений после изготовления) загружаются одновременно в момент  $t = t_0$  ее установки на основание под воздействием однородного поля сил тяжести векторной интенсивности  $\mathbf{f} = -\mathbf{j}f$ , где  $\mathbf{j}$  — направленная вверх единичная нормаль к основанию,  $f$  — удельный вес материала. Ввиду этого параметр интегрального оператора в определяющем соотношении (3.3) и в определении (3.6) не зависит от точки исходного тела и равен  $t_0$  (см. представление (3.1)).

Свяжем с плоскостью поперечного сечения арки круговую цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, z)$  с правым ортонормированным репером  $\{\mathbf{e}_\rho(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \mathbf{k}\}$ , отсчитывая полярный радиус  $\rho$  от оси арки, а полярный угол  $\varphi$  — вверх от основания.

Предусмотрим также дополнительную возможность загрузки арки начиная с момента ее установки на основание некоторой распределенной по внешней цилиндрической поверхности  $\rho = b$  в общем случае переменной во времени нагрузкой  $\mathbf{t}(\varphi, t)$ ,  $t \geq t_0$ .

Тогда напряженно-деформированное состояние арки от момента ее установки  $t_0$  и до начала утолщения  $t_1$  будет описываться классической краевой задачей линейной теории вязкоупругости

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (a_0, b), \quad \varphi \in (0, \pi), \quad t \in [t_0, t_1]; \\ \mathbf{T} &= G(\mathcal{I} + \mathcal{N}_{t_0})[2\mathbf{E} + (\varkappa - 1)\mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}]; \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0}, \quad \rho = a_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T} = \mathbf{t}(\varphi, t), \quad \rho = b; \\ \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\rho &= 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \varphi = 0, \pi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho u_\rho + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi + \mathbf{k} u_z$  — векторное поле перемещений точек арки. При этом для рассматриваемого случая плоской деформации

$$u_z \equiv 0, \quad \partial u_\rho / \partial z \equiv \partial u_\varphi / \partial z \equiv 0. \quad (3.9)$$

Поддействовав на все соотношения краевой задачи (3.8), содержащие тензор напряжений  $\mathbf{T}$ , линейным оператором  $\mathcal{H}_{t_0}$ , приходим к следующей эквивалентной ее формулировке [49]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ + \mathbf{f}^\circ &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (a_0, b), \quad \varphi \in (0, \pi), \quad t \in [t_0, t_1]; \\ \mathbf{T}^\circ &= 2 \mathbf{E} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{E}; \quad \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u})/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}^\circ &= \mathbf{0}, \quad \rho = a_0; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}^\circ = \mathbf{t}^\circ, \quad \rho = b; \\ \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{T}^\circ \cdot \mathbf{e}_\rho &= 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \varphi = 0, \pi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

содержащей время  $t$  лишь в качестве вещественного параметра.

Воспользовавшись представлением (3.5), находим, что для всех точек изначально изготовленной арки  $\mathbf{f}^\circ = -\mathbf{j} f \Delta(t, t_0)$ , причем в силу неотрицательности меры ползучести  $\omega(t, \tau)$  (см. § 0.4) имеет место неравенство  $\Delta(t, t_0) > 0$  для любого момента времени  $t \geq t_0$ .

Вычислим также, применяя интегрирование по частям и используя тождество (3.4), входящую в условие на границе  $\rho = b$  функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^\circ(\varphi, t) &= \frac{\mathbf{t}(\varphi, t)}{G(t)} - \int_{t_0}^t \mathbf{t}(\varphi, \tau) \frac{\partial \Delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \mathbf{t}(\varphi, t_0) \Delta(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \mathbf{t}(\varphi, \tau)}{\partial \tau} \Delta(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.3 Деформирование кусочно-непрерывно наращиваемой арки

Как следует из рассуждений, проведенных в § 0.5, задача кусочно-непрерывного наращивания может быть корректно поставлена в скоростной форме. Исходя из этого, запишем аналог определяющего соотношения (3.7) для скоростей связываемых им тензорных величин

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = 2 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t),$$

определив тензор  $\mathbf{S} = \partial \mathbf{T}^\circ / \partial t$  [49] и введя в рассмотрение тензор скорости деформации  $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^\top + \nabla \mathbf{v})/2$ , где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\rho v_\rho + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi + \mathbf{k} v_z$  —

мгновенное векторное поле скоростей движения частиц наращиваемого тела. При плоской деформации нужно, очевидно, считать

$$v_z \equiv 0, \quad \partial v_\rho / \partial z \equiv \partial v_\varphi / \partial z \equiv 0. \quad (3.12)$$

Уравнение для введенного тензора  $\mathbf{S}$  в области, занимаемой в данный момент времени наращиваемым телом, можно получить, подействовав на стандартное уравнение равновесия  $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$  линейным оператором  $\mathcal{H}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  и продифференцировав результат по времени  $t$ . При этом на рассматриваемом этапе деформирования тела указанный интегральный оператор уже не будет коммутировать с оператором дивергенции, как это было на этапе до начала наращивания (§ 3.2). Это связано с зависимостью нижнего предела в интеграле  $\mathcal{L}_{\tau_0(\mathbf{r})}$  от точки тела. Однако для рассматриваемых процессов (см. § 3.1) в случае, когда каждая будущая и фактическая поверхности роста не подвергаются нагружению, для тензора напряжений справедлива запись  $(\nabla \cdot \mathbf{T})^\circ = \nabla \cdot \mathbf{T}^\circ$  (см. § 0.5). В этом случае, очевидно, для  $t > t_1$  во всем теле будут выполняться уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ + \mathbf{f}^\circ = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{S} + \partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = \mathbf{0}. \quad (3.13)$$

Поскольку в рассматриваемой задаче считается, что дополнительный материал загружается непосредственно в момент его присоединения к телу, причем в этот момент он может приобретать произвольные предварительные напряжения, то на каждом временном интервале непрерывного роста для корректной постановки задачи необходимо задать значение полного тензора напряжений на текущей поверхности роста (см. § 0.5, а также [9, 8, 18, 25, 28, 49, 85]):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho = a(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}). \quad (3.14)$$

Для известной тензорной функции  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r})$  в соответствии со сказанным выше потребуем выполнения условия

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

означающего отсутствие нагрузки на поверхности роста. Это согласуется с данной в § 3.1 постановкой задачи и необходимо для дальнейшего использования уравнений (3.13).

Существенным является то обстоятельство, что условие (3.14) может быть преобразовано к граничному условию на компоненты тензора  $\mathbf{S}$ , которое по своему виду аналогично классическому силовому условию на поверхности тела (см. § 0.5). Для этого нужно сначала записать совокупность условий (3.14) для всех моментов  $k$ -го этапа непрерывного роста в

виде начального условия на тензор напряжений в точках сформированной на этом этапе части тела

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}), \quad \rho \in (a_k, a_{k-1}). \quad (3.16)$$

Затем, замечая, что в силу (3.1) для произвольной функции  $g(\mathbf{r}, t)$  при  $\rho \in (a_k, a_{k-1})$  справедливо равенство

$$g^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = g(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) / G(\tau_*(\rho)), \quad (3.17)$$

следует переписать (3.16) в эквивалентной форме

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) / G(\tau_*(\rho)), \quad \rho \in (a_k, a_{k-1}), \quad (3.18)$$

и подействовать на последнее соотношение оператором дивергенции:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)] \Big|_{t=\tau_*(\rho)} + \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) = \\ = \nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) / G(\tau_*(\rho)) - \nabla \tau_*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) G'(\tau_*(\rho)) / G^2(\tau_*(\rho)). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом первого уравнения (3.13) и равенства (3.17), вычисляя градиент  $\nabla \tau_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\rho(\varphi) \tau'_*(\rho)$  и привлекая требование (3.15), получим

$$-\mathbf{f} / G(\tau_*(\rho)) + \mathbf{e}_\rho(\varphi) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau_*(\rho)) \tau'_*(\rho) = \nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) / G(\tau_*(\rho)).$$

Остается выделить из записанной совокупности условий одно, соответствующее рассматриваемому моменту времени  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  в течение  $k$ -го этапа, то есть положить в ней  $\rho = a(t)$ . Находя для этой цели дифференцированием по  $t$  тождества (3.2), что  $\tau'_*(a(t)) \equiv a'(t)^{-1}$ , и пользуясь самым тождеством (3.2), приходим тогда к следующему условию на мгновенной поверхности роста, сформулированному уже для тензора  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = [\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) + \mathbf{f}] a'(t) / G(t), \quad \rho = a(t), \quad t \in (t_{2k-1}, t_{2k}). \quad (3.19)$$

Поскольку, как оговорено в § 3.1, вне интервалов наращивания внутренней поверхности арки не загружается (это является одним из условий использования при решении задачи наращивания уравнений (3.13)), то после каждой остановки роста на этой поверхности выставляется обычное условие отсутствия напряжения. Его очевидным аналогом для тензора  $\mathbf{S}$  является граничное условие

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \rho = a_k, \quad t \in (t_{2k}, t_{2k+1}).$$

Как видим, в силу определения функции  $a(t)$  (см. § 3.1) условие на внутренней поверхности арки в форме (3.19) формально остается справедливым и за пределами временных интервалов роста, то есть может

использоваться для любого  $t > t_1$ . Однако важно осознавать, что природа этого условия на этапах непрерывного наращивания арки и после временной или окончательной его остановки принципиально различна.

Что касается условий на остальных поверхностях кусочно-непрерывно наращиваемой арки, то здесь остаются справедливыми прежние соотношения (см. § 3.2), очевидным образом модифицированные для постановки задачи в скоростной форме.

Итак, после начала утолщения арки процесс ее деформирования описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} + \partial \mathbf{f}^\circ / \partial t &= \mathbf{0}, \quad \rho \in (a(t), b), \quad \varphi \in (0, \pi), \quad t > t_1; \\ \mathbf{S} &= 2 \mathbf{D} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{D}; \quad \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) / 2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} &= \frac{(\nabla \cdot \mathbf{T}_* + \mathbf{f}) a'(t)}{G(t)}, \quad \rho = a(t); \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{t}^\circ}{\partial t}, \quad \rho = b; \\ \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_\rho &= 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \pi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В ней время  $t$ , как и в задаче (3.10), является параметром. Однако после решения задачи (3.20) необходимо в каждой точке  $\mathbf{r}$  при  $t \geq \tau_1(\rho)$ , где

$$\tau_1(\rho) = \begin{cases} t_1, & \rho \in (a_0, b), \\ \tau_*(\rho), & \rho \in (a_N, a_0), \end{cases}$$

восстановить эволюцию тензора  $\mathbf{T}^\circ$  по найденной скорости его изменения  $\mathbf{S}$ , используя соответствующее начальное условие:

$$\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau_1(\rho)) + \int_{\tau_1(\rho)}^t \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad t \geq \tau_1(\rho). \quad (3.21)$$

Начальное условие для точек исходно существующего тела находится из решения классической задачи (3.10) при  $t = t_1$ , а для элементов дополнительной части — по их известному напряженному состоянию в момент присоединения к растущему телу из формулы (3.18).

После решения задач (3.10) и (3.20) и вычисления интеграла (3.21) эволюция тензора  $\mathbf{T}^\circ$  известна для каждого элемента тела от момента его загрузки и до сколь угодно отдаленного момента времени. Теперь, исходя из определения этого тензора (см. (3.6)), полную эволюцию тензора напряжений  $\mathbf{T}$  можно найти по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) &= G(t) (\mathcal{I} + \mathcal{N}_{\tau_0(\mathbf{r})}) \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) = \\ &= G(t) \left[ \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t) + \int_{\tau_0(\rho)}^t \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, \tau) R(t, \tau) d\tau \right], \quad t \geq \tau_0(\rho). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Записанное равенство (3.22) есть по существу резольвентное представление решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$\frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)}{G(t)} - \int_{\tau_0(\mathbf{r})}^t \frac{\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$$

относительно неизвестного тензора  $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)/G(t)$ , рассматриваемого в произвольной точке тела  $\mathbf{r}$  как функция времени  $t$ . Если аналитическое выражение для резольвенты  $R(t, \tau)$  ядра  $K(t, \tau)$  неизвестно или является слишком громоздким, данное уравнение может быть решено численно, например, методом квадратур на базе формулы трапеций [73]. Именно такой подход и используется при решении рассматриваемой задачи.

Возвращаясь к постановке краевой задачи (3.20), найдем на основании (3.5) и определения функции  $\Delta(t, \tau)$ , что свободный член в дифференциальном уравнении из (3.20) равен  $\partial \mathbf{f}^\circ / \partial t = -\mathbf{j} f \partial \omega(t, \tau_0(\rho)) / \partial t$ . В соответствии с необходимыми свойствами, которыми должна обладать мера ползучести (см. § 0.4), имеем  $\partial \omega(t, \tau_0(\rho)) / \partial t \geq 0$  при  $t > \tau_0(\rho)$ .

Дифференцируя по  $t$  выражение (3.11) и пользуясь тождеством (3.4), можем вычислить также

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}^\circ(\varphi, t)}{\partial t} &= \mathbf{t}(\varphi, t_0) \frac{\partial \omega(t, t_0)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{t}(\varphi, t)}{\partial t} \frac{1}{G(t)} + \int_{t_0}^t \frac{\partial \mathbf{t}(\varphi, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4 Построение решений краевых задач

Краевые задачи, полученные на этапах деформирования арки до и после начала ее утолщения (см. §§ 3.2, 3.3), сформулированы для разных механических величин, но имеют, как видим, одну и ту же математическую структуру

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= \mathbf{j} h(\rho), \quad \rho \in (a, b), \quad \varphi \in (0, \pi); \\ \mathbf{H} &= 2\mathbf{F} + (\varkappa - 1) \mathbf{1} \operatorname{tr} \mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = (\nabla \mathbf{w}^T + \nabla \mathbf{w})/2; \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{H} &= \mathbf{p}, \quad \rho = a; \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{H} = \mathbf{q}, \quad \rho = b; \\ \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_\rho &= 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \varphi = 0, \pi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{H}$  — неизвестные векторная и тензорные функции точки,  $h(\rho) \geq 0$  — известная неотрицательная скалярная функция полярного радиуса,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  — заданные векторные поля на соответствующих граничных

поверхностях рассматриваемой области, симметричные относительно полуплоскости  $\varphi = \pi/2$ . При этом указание на зависимость всех величин от параметра  $t$  опущено.

Нетрудно заметить, что краевая задача (3.24) с точностью до замены в ней вектора  $\mathbf{w}$  на вектор перемещения, тензора  $\mathbf{F}$  — на тензор малой деформации, а тензора  $\mathbf{H}$  — на отнесенный к модулю сдвига тензор напряжений является классической задачей механики деформируемого твердого тела о равновесии на гладком жестком горизонтальном основании линейно упругой цилиндрической арки переменной по радиусу плотности  $h(\rho)/g$ , где  $g$  — ускорение сил тяжести, под действием собственного веса и заданных поверхностных нагрузок.

Пусть  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_\rho w_\rho + \mathbf{e}_\varphi w_\varphi + \mathbf{k} w_z$ . Тогда, поскольку изначально рассматриваемая наращиваемая арка испытывает (как было принято при постановке задачи) плоскую деформацию, должно быть (см. (3.9) и (3.12))

$$w_z \equiv 0, \quad \partial w_\rho / \partial z \equiv \partial w_\varphi / \partial z \equiv 0.$$

Вследствие этого

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho F_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi F_\varphi + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) F_{\rho\varphi}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho H_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi H_\varphi + \mathbf{k} \mathbf{k} \nu (H_\rho + H_\varphi) + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) H_{\rho\varphi} \end{aligned}$$

и компонентная запись задачи (3.24) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + H_\rho - H_\varphi \right) &= h(\rho) \sin \varphi, \\ \frac{\partial H_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + 2H_{\rho\varphi} \right) &= h(\rho) \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho &\in (a, b), \\ \varphi &\in (0, \pi); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} H_{\rho,\varphi} &= (\kappa + 1)F_{\rho,\varphi} + (\kappa - 1)F_{\varphi,\rho}, \\ H_{\rho\varphi} &= 2F_{\rho\varphi} = \frac{\partial w_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w_\rho}{\partial \varphi} - w_\varphi \right); \end{aligned} \right| \begin{aligned} F_\rho &= \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho}, \\ F_\varphi &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + w_\rho \right); \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} H_\rho &= p_\rho, \quad H_{\rho\varphi} = p_\varphi, \quad \rho = a; \quad H_\rho = q_\rho, \quad H_{\rho\varphi} = q_\varphi, \quad \rho = b; \\ H_{\rho\varphi} &= 0, \quad w_\varphi = 0, \quad \varphi = 0, \pi. \end{aligned}$$

Здесь  $p_{\rho,\varphi}$  и  $q_{\rho,\varphi}$  — проекции векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  на соответствующие орты локального базиса. Необходимым условием реализации плоской картины деформирования является независимость этих величин от осевой координаты  $z$  и равенство нулю проекций указанных векторов на ось арки.

После внесения в дифференциальные уравнения задачи (3.25) выражений компонент тензора **H** через компоненты вектора **w** приходим к следующей системе уравнений типа Ляме:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\kappa + 1) \left( \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_\rho}{\partial \rho} - \frac{w_\rho}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \varphi^2} + \\ \quad + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{\kappa + 2}{\rho^2} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} = h(\rho) \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \rho} - \frac{w_\varphi}{\rho^2} + \frac{\kappa + 1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w_\varphi}{\partial \varphi^2} + \\ \quad + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 w_\rho}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\kappa + 2}{\rho^2} \frac{\partial w_\rho}{\partial \varphi} = h(\rho) \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Для решения этой системы разложим неизвестные функции  $w_\rho(\rho, \varphi)$  и  $w_\varphi(\rho, \varphi)$  в ряды Фурье соответственно по косинусам и синусам углов, кратных  $\varphi \in [0, \pi]$ . При этом, во-первых, учитывается непрерывность искомых функций по угловой координате в точках  $\varphi = 0, \pi$  и, во-вторых, автоматически удовлетворяются вторые (кинематического типа) граничные условия на основании арки из (3.25).

В силу симметрии задачи должны выполняться равенства

$$w_\rho|_\varphi = w_\rho|_{\pi-\varphi}, \quad w_\varphi|_\varphi = -w_\varphi|_{\pi-\varphi}. \quad (3.27)$$

Отсюда следует, что в выбранных разложениях отсутствуют слагаемые с нечетными номерами, то есть

$$w_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\rho) \cos 2n\varphi, \quad w_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\rho) \sin 2n\varphi. \quad (3.28)$$

Отметим, что такие представления для искомых компонент вектора **w** получаются в результате непосредственного применения к задаче (3.25) метода Фурье разделения переменных.

Внося ряды (3.28) в систему уравнений (3.26) и учитывая, что [34]

$$\sin \varphi = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{4n^2 - 1}, \quad \cos \varphi = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2n\varphi}{4n^2 - 1}, \quad (3.29)$$

приходим к следующим уравнениям для коэффициентов  $c_n$  и  $d_n$ :

$$\left[ \frac{(\rho c_0)'}{\rho} \right]' = \frac{2 h(\rho)}{\pi(\kappa + 1)}; \quad (3.30)$$

$$\left. \begin{aligned} & (\varkappa + 1) \left( c_n'' + \frac{c_n'}{\rho} \right) - \frac{(4n^2 + \varkappa + 1) c_n}{\rho^2} + \\ & + \frac{2n\varkappa d_n'}{\rho} - \frac{2n(\varkappa + 2) d_n}{\rho^2} = -\frac{4h(\rho)}{\pi(4n^2 - 1)}, \\ & d_n'' + \frac{d_n'}{\rho} - \frac{[4n^2(\varkappa + 1) + 1] d_n}{\rho^2} - \\ & - \frac{2n\varkappa c_n'}{\rho} - \frac{2n(\varkappa + 2) c_n}{\rho^2} = \frac{8n h(\rho)}{\pi(4n^2 - 1)}, \end{aligned} \right\} n \in \mathbb{N}. \quad (3.31)$$

Общее решение уравнения (3.30), очевидно, имеет вид:

$$c_0(\rho) = \frac{C_{10}}{\rho} + C_{20} \rho - \frac{\rho}{\pi(\varkappa + 1)} \left[ \int_a^\rho h(\xi) \left( \frac{\xi}{\rho} \right)^2 d\xi + \int_\rho^b h(\xi) d\xi \right],$$

где  $C_{10}, C_{20}$  — произвольные постоянные.

Частные решения однородной системы, отвечающей системе (3.31), будем искать в виде степенных функций  $c_n(\rho) = C_n \rho^{m_n}$ ,  $d_n(\rho) = D_n \rho^{m_n}$ . Подставляя эти функции в соответствующие однородные дифференциальные уравнения и сокращая на  $\rho^{m_n-2}$ , получим систему линейных алгебраических уравнений с нулевой правой частью относительно неизвестных коэффициентов  $C_n$  и  $D_n$

$$\left\| \begin{pmatrix} (\varkappa + 1)(m_n^2 - 1) - 4n^2 & 2n\varkappa(m_n - 1) - 4n \\ -2n\varkappa(m_n + 1) - 4n & m_n^2 - 1 - 4n^2(\varkappa + 1) \end{pmatrix} \right\| \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Приравняв нулю ее определитель, будем иметь биквадратное уравнение для нахождения показателя  $m_n$

$$m_n^4 - 2(4n^2 + 1)m_n^2 + (4n^2 - 1)^2 = 0.$$

Корни этого уравнения есть

$$m_n^{(1)} = -2n - 1, \quad m_n^{(2)} = -2n + 1, \quad m_n^{(3)} = 2n - 1, \quad m_n^{(4)} = 2n + 1.$$

При любом натуральном  $n$  это суть целые и различные между собой числа. Соответствующие им множители  $C_n$  и  $D_n$  в искомым частных решениях, найденные из решения системы (3.32), связаны соотношениями

$$\begin{aligned} D_n^{(1)} &= C_n^{(1)}, & K_n^{(2)} D_n^{(2)} &= K_{n-1}^{(4)} C_n^{(2)}, \\ D_n^{(3)} &= -C_n^{(3)}, & K_n^{(4)} D_n^{(4)} &= -K_{n+1}^{(2)} C_n^{(4)}, \end{aligned}$$

в которых используются обозначения  $K_m^{(2)} = m\kappa + 1$ ,  $K_m^{(4)} = m\kappa - 1$ . Полагая далее

$$\begin{aligned} C_n^{(1)} &= (2n+1)^{-1}, & C_n^{(2)} &= K_n^{(2)}/(2n-1), \\ C_n^{(3)} &= (2n-1)^{-1}, & C_n^{(4)} &= K_n^{(4)}/(2n+1), \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} D_n^{(1)} &= (2n+1)^{-1}, & D_n^{(2)} &= K_{n-1}^{(4)}/(2n-1), \\ D_n^{(3)} &= -(2n-1)^{-1}, & D_n^{(4)} &= -K_{n+1}^{(2)}/(2n+1). \end{aligned}$$

Итак, найдено четыре линейно независимых частных решения однородной системы, соответствующей (3.31), и, следовательно, ее общее решение. Частное решение неоднородной системы (3.31) получим методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, то есть в форме

$$\begin{aligned} c_n^*(\rho) &= \frac{C_{1n}^*(\rho)}{(2n+1)\rho^{2n+1}} + \frac{K_n^{(2)}C_{2n}^*(\rho)}{(2n-1)\rho^{2n-1}} + \\ &\quad + \frac{\rho^{2n-1}C_{3n}^*(\rho)}{2n-1} + \frac{K_n^{(4)}\rho^{2n+1}C_{4n}^*(\rho)}{2n+1}, \\ d_n^*(\rho) &= \frac{C_{1n}^*(\rho)}{(2n+1)\rho^{2n+1}} + \frac{K_{n-1}^{(4)}C_{2n}^*(\rho)}{(2n-1)\rho^{2n-1}} - \\ &\quad - \frac{\rho^{2n-1}C_{3n}^*(\rho)}{2n-1} - \frac{K_{n+1}^{(2)}\rho^{2n+1}C_{4n}^*(\rho)}{2n+1}. \end{aligned}$$

Неизвестные функции  $C_{jn}^*(\rho)$  должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений первого порядка [81]

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{1}{(2n+1)\rho^{2n+1}} & \frac{K_n^{(2)}}{(2n-1)\rho^{2n-1}} & \frac{\rho^{2n-1}}{2n-1} & \frac{K_n^{(4)}\rho^{2n+1}}{2n+1} \\ -\frac{1}{\rho^{2n+2}} & -\frac{K_n^{(2)}}{\rho^{2n}} & \rho^{2n-2} & K_n^{(4)}\rho^{2n} \\ \frac{1}{(2n+1)\rho^{2n+1}} & \frac{K_{n-1}^{(4)}}{(2n-1)\rho^{2n-1}} & -\frac{\rho^{2n-1}}{2n-1} & -\frac{K_{n+1}^{(2)}\rho^{2n+1}}{2n+1} \\ -\frac{1}{\rho^{2n+2}} & -\frac{K_{n-1}^{(4)}}{\rho^{2n}} & -\rho^{2n-2} & -K_{n+1}^{(2)}\rho^{2n} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} C_{1n}^{*'} \\ C_{2n}^{*'} \\ C_{3n}^{*'} \\ C_{4n}^{*'} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{4h(\rho)}{\pi(4n^2-1)(\kappa+1)} \\ 0 \\ \frac{8nh(\rho)}{\pi(4n^2-1)} \end{array} \right\|.$$

Одно из частных решений этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
C_{1n}^*(\rho) &= -\frac{2n^2\kappa + 3n\kappa + 2n - 1}{\pi(4n^2 - 1)(\kappa + 1)} \int_a^\rho h(\xi) \xi^{2n+2} d\xi, \\
C_{2n}^*(\rho) &= \frac{1}{\pi(2n - 1)(\kappa + 1)} \int_a^\rho h(\xi) \xi^{2n} d\xi, \\
C_{3n}^*(\rho) &= -\frac{2n^2\kappa - 3n\kappa - 2n - 1}{\pi(4n^2 - 1)(\kappa + 1)} \int_\rho^b \frac{h(\xi)}{\xi^{2n-2}} d\xi, \\
C_{4n}^*(\rho) &= \frac{1}{\pi(2n + 1)(\kappa + 1)} \int_\rho^b \frac{h(\xi)}{\xi^{2n}} d\xi.
\end{aligned}$$

Таким образом, если ввести обозначения

$$\begin{aligned}
\Phi_m(\rho) &= \frac{2}{\pi(2m - 1)(\kappa + 1)} \int_a^\rho h(\xi) \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^{2m} d\xi, \\
\Psi_m(\rho) &= \frac{2}{\pi(2m + 1)(\kappa + 1)} \int_\rho^b h(\xi) \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2m} d\xi,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
K_m^{(1)} &= r_m^{(1)}\kappa + 1, & K_m^{(3)} &= r_m^{(3)}\kappa - 1, \\
r_m^{(1)} &= m(2m + 3)/(2m - 1), & r_m^{(3)} &= m(2m - 3)/(2m + 1),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

то общее решение системы (3.31) запишется в виде

$$\begin{aligned}
c_n(\rho) &= \frac{C_{1n}}{(2n + 1)\rho^{2n+1}} + \frac{C_{2n}K_n^{(2)}}{(2n - 1)\rho^{2n-1}} + \frac{C_{3n}\rho^{2n-1}}{2n - 1} + \frac{C_{4n}K_n^{(4)}\rho^{2n+1}}{2n + 1} - \\
&\quad - \frac{K_n^{(1)}\rho\Phi_{n+1}(\rho)}{2(2n + 1)} + \frac{K_n^{(2)}\rho\Phi_n(\rho)}{2(2n - 1)} - \frac{K_n^{(3)}\rho\Psi_{n-1}(\rho)}{2(2n - 1)} + \frac{K_n^{(4)}\rho\Psi_n(\rho)}{2(2n + 1)}, \\
d_n(\rho) &= \frac{C_{1n}}{(2n + 1)\rho^{2n+1}} + \frac{C_{2n}K_{n-1}^{(4)}}{(2n - 1)\rho^{2n-1}} - \frac{C_{3n}\rho^{2n-1}}{2n - 1} - \frac{C_{4n}K_{n+1}^{(2)}\rho^{2n+1}}{2n + 1} - \\
&\quad - \frac{K_n^{(1)}\rho\Phi_{n+1}(\rho)}{2(2n + 1)} + \frac{K_{n-1}^{(4)}\rho\Phi_n(\rho)}{2(2n - 1)} + \frac{K_n^{(3)}\rho\Psi_{n-1}(\rho)}{2(2n - 1)} - \frac{K_{n+1}^{(2)}\rho\Psi_n(\rho)}{2(2n + 1)},
\end{aligned}$$

где  $C_{jn}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) — произвольные постоянные. Общее решение уравнения (3.30) можно тогда для единообразия переписать как

$$c_0(\rho) = \frac{C_{10}}{\rho} - C_{40}\rho - \frac{\rho[\Phi_1(\rho) + \Psi_0(\rho)]}{2}.$$

Здесь переобозначено  $C_{20} = -C_{40}$  с целью согласования между собой выражений для величин  $c_0$  и  $c_n$  ( $n > 0$ ).

Вычисляя теперь по найденным компонентам вектора  $\mathbf{w}$  компоненты тензора  $\mathbf{H}$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 H_\rho(\rho, \varphi) &= B_{10}(\rho) - B_{40}(\rho) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}(\rho) - (n+1)B_{2n}(\rho) - \\
 &\quad - B_{3n}(\rho) + (n-1)B_{4n}(\rho)] \cos 2n\varphi, \\
 H_\varphi(\rho, \varphi) &= -B_{10}(\rho) - B_{40}(\rho) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [-B_{1n}(\rho) + (n-1)B_{2n}(\rho) + \\
 &\quad + B_{3n}(\rho) - (n+1)B_{4n}(\rho)] \cos 2n\varphi, \\
 H_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}(\rho) - nB_{2n}(\rho) + B_{3n}(\rho) - nB_{4n}(\rho)] \sin 2n\varphi.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Здесь ради компактности записи введены функции

$$\begin{aligned}
 B_{1n}(\rho) &= K_n^{(1)} \Phi_{n+1}(\rho) + \alpha_{1n} (b/\rho)^{2n+2}, \\
 B_{2n}(\rho) &= \varkappa \Phi_n(\rho) + \alpha_{2n} (b/\rho)^{2n}, \\
 B_{3n}(\rho) &= K_n^{(3)} \Psi_{n-1}(\rho) + \alpha_{3n} (\rho/a)^{2n-2}, \\
 B_{4n}(\rho) &= \varkappa \Psi_n(\rho) + \alpha_{4n} (\rho/a)^{2n}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

и для удобства удовлетворения граничным условиям осуществлен переход к новым свободным константам

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1n} &= -2C_{1n}/b^{2n+2}, & \alpha_{2n} &= 2\varkappa C_{2n}/b^{2n}, \\
 \alpha_{3n} &= -2a^{2n-2}C_{3n}, & \alpha_{4n} &= 2\varkappa a^{2n}C_{4n}.
 \end{aligned}$$

В таких обозначениях коэффициенты рядов для компонент вектора  $\mathbf{w}$  принимают вид

$$\begin{aligned}
c_0(\rho) &= -\frac{\rho}{2} \left[ \frac{B_{40}(\rho)}{\varkappa} + B_{10}(\rho) \right]; \\
c_n(\rho) &= \frac{\rho}{2} \left[ \frac{(n + \varkappa^{-1})B_{2n}(\rho) - B_{3n}(\rho)}{2n - 1} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n - \varkappa^{-1})B_{4n}(\rho) - B_{1n}(\rho)}{2n + 1} \right], \\
d_n(\rho) &= \frac{\rho}{2} \left[ \frac{(n - 1 - \varkappa^{-1})B_{2n}(\rho) + B_{3n}(\rho)}{2n - 1} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(n + 1 + \varkappa^{-1})B_{4n}(\rho) + B_{1n}(\rho)}{2n + 1} \right], \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

После построения общих выражений для компонент тензора **H** остается определить значения входящих в них произвольных постоянных  $\alpha_{jn}$  из граничных условий задачи (3.25) на поверхностях  $\rho = a, b$ . На граничных поверхностях  $\varphi = 0, \pi$  все условия (силового и кинематического типа), как видим, удовлетворяются автоматически в силу соответствующего выбора разложений искомых функций (3.28).

Ввиду симметричности векторных полей **p** и **q** относительно полуплоскости  $\varphi = \pi/2$  для их компонент справедливы равенства, аналогичные (3.27). Поэтому можем считать, что

$$\begin{aligned}
p_\rho(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^a \cos 2n\varphi, & p_\varphi(\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^a \sin 2n\varphi, \\
q_\rho(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^b \cos 2n\varphi, & q_\varphi(\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^b \sin 2n\varphi.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Тогда граничные условия (3.25) на поверхностях  $\rho = a, b$  после подстановки в них выражений (3.35) дадут следующие системы алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\alpha_{jn}$ :

$$\begin{cases} \alpha_{10}/\lambda - \alpha_{40} = \varkappa \Psi_0(a) + P_0^a, \\ \alpha_{10} - \alpha_{40} = -\Phi_1(b) + P_0^b; \end{cases}$$

$$L_n \alpha_n = K_n h_n + J_a s_n^a + J_b s_n^b, \quad \alpha_n = \left\| \alpha_{1n} \quad \alpha_{2n} \quad \alpha_{3n} \quad \alpha_{4n} \right\|^T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь введен новый параметр задачи  $\lambda = (a/b)^2 \in (0, 1)$ , характеризую-

щий степень тонкостенности арки, и задействованы известные матрицы

$$L_n = \begin{vmatrix} 1 & -n-1 & -1/\lambda^{n-1} & (n-1)/\lambda^n \\ 1 & -n & 1/\lambda^{n-1} & -n/\lambda^n \\ 1/\lambda^{n+1} & -(n+1)/\lambda^n & -1 & n-1 \\ 1/\lambda^{n+1} & -n/\lambda^n & 1 & -n \end{vmatrix},$$

$$h_n = \begin{vmatrix} K_n^{(1)} \Phi_{n+1}(b) \\ \varkappa \Phi_n(b) \\ K_n^{(3)} \Psi_{n-1}(a) \\ \varkappa \Psi_n(a) \end{vmatrix}, \quad K_n = \begin{vmatrix} -1 & n+1 & 0 & 0 \\ -1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n+1 \\ 0 & 0 & -1 & n \end{vmatrix},$$

$$s_n^a = \begin{vmatrix} P_n^a \\ Q_n^a \end{vmatrix}, \quad s_n^b = \begin{vmatrix} P_n^b \\ Q_n^b \end{vmatrix}, \quad J_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^T, \quad J_b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T.$$

Решение первой системы (для отдельного случая  $n = 0$ ) имеет вид

$$\alpha_{j0} = \frac{\lambda [\varkappa \Psi_0(a) + P_0^a] + \lambda^{\delta_{1j}} [\Phi_1(b) - P_0^b]}{1 - \lambda} \quad (j = 1, 4), \quad (3.39)$$

где  $\delta_{1j}$  — символ Кронекера ( $\delta_{11} = 1$ ,  $\delta_{14} = 0$ ). Решение второй системы для любого натурального  $n$  можно записать в виде

$$\alpha_n = (\Lambda_n h_n + M_n^a s_n^a + M_n^b s_n^b) / \Delta_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.40)$$

$$\Delta_n = \lambda^{2n} \det L_n, \quad \Lambda_n = \lambda^{2n} L_n^\vee K_n, \quad M_n^{a,b} = \lambda^{2n} L_n^\vee J_{a,b},$$

где знак  $^\vee$  обозначает присоединенную матрицу (то есть транспонированную матрицу алгебраических дополнений).

Вычисление величин, входящих в выражение (3.40) для  $\alpha_n$ , дает

$$\Delta_n = \lambda^{2n} + 1/\lambda^{2n} - 4n^2(\lambda + 1/\lambda) + 2(4n^2 - 1);$$

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \Lambda_n^{(1)} & \Lambda_n^{(2)} & \Lambda_n^{(3)} & \Lambda_n^{(4)} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_n^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda^{2n} - 4n^2(1 - \lambda) \\ -2(2n - 1)(1/\lambda - 1) \\ (2n - 1)(1/\lambda^{n+1} - \lambda^{n-1}) \\ 2(1/\lambda^n - \lambda^{n-1}) \end{vmatrix}, \quad \Lambda_n^{(2)} = \begin{vmatrix} 2n^2(2n + 1)(1 - \lambda) \\ 1 - \lambda^{2n} + 4n^2(1/\lambda - 1) \\ -2n^2(1/\lambda^{n+1} - \lambda^n) \\ -(2n + 1)(1/\lambda^n - \lambda^n) \end{vmatrix},$$

$$\Lambda_n^{(3)} = \begin{vmatrix} -(2n + 1)(1/\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1}) \\ -2(1/\lambda^n - \lambda^{n+1}) \\ 1 - \lambda^{2n} + 4n^2(1/\lambda - 1) \\ 2(2n + 1)(1 - \lambda) \end{vmatrix}, \quad \Lambda_n^{(4)} = \begin{vmatrix} 2n^2(1/\lambda^{n-1} - \lambda^n) \\ (2n - 1)(1/\lambda^n - \lambda^n) \\ -2n^2(2n - 1)(1/\lambda - 1) \\ 1 - \lambda^{2n} - 4n^2(1 - \lambda) \end{vmatrix};$$

$$M_n^a = \begin{vmatrix} -2n^2(\lambda^n - \lambda^{n+1}) - n(1/\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1}) & (n+1)(1/\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1}) - 2n^2(\lambda^n - \lambda^{n+1}) \\ -2n(\lambda^n - \lambda^{n+1}) - (1/\lambda^n - \lambda^n) & 1/\lambda^n - \lambda^n - 2(n-1)(\lambda^n - \lambda^{n+1}) \\ n(1 - \lambda^{2n}) + 2n^2(1/\lambda - 1) & (n-1)(1 - \lambda^{2n}) - 2n^2(1/\lambda - 1) \\ 1 - \lambda^{2n} + 2n(1 - \lambda) & 1 - \lambda^{2n} - 2(n+1)(1 - \lambda) \end{vmatrix},$$

$$M_n^b = \begin{vmatrix} n(1 - \lambda^{2n}) + 2n^2(1 - \lambda) & 2n^2(1 - \lambda) - (n+1)(1 - \lambda^{2n}) \\ 1 - \lambda^{2n} + 2n(1/\lambda - 1) & 2(n-1)(1/\lambda - 1) - (1 - \lambda^{2n}) \\ -2n^2(\lambda^{n-1} - \lambda^n) - n(1/\lambda^{n+1} - \lambda^{n-1}) & 2n^2(\lambda^{n-1} - \lambda^n) - (n-1)(1/\lambda^{n+1} - \lambda^{n-1}) \\ -2n(\lambda^{n-1} - \lambda^n) - (1/\lambda^n - \lambda^n) & 2(n+1)(\lambda^{n-1} - \lambda^n) - (1/\lambda^n - \lambda^n) \end{vmatrix}.$$

Получение этих величин завершает построение полного решения абстрактной краевой задачи (3.24): компоненты вектора  $\mathbf{w}$  даются рядами (3.28), коэффициенты которых вычисляются по формулам (3.37); компоненты тензора  $\mathbf{H}$  представляются рядами (3.35). Константы  $\alpha_{jn}$ , входящие в определяемые формулами (3.36) функции  $B_{jn}(\rho)$ , находятся по формулам (3.39) и (3.40). В конечном итоге построенное решение полностью определяется функциями  $\Phi_m(\rho)$ ,  $\Psi_m(\rho)$  и числами  $P_n^{a,b}$ ,  $Q_n^{a,b}$ . Первые отражают конкретный выбор правой части в дифференциальном уравнении из (3.24) и вычисляются после задания функции  $h(\rho)$  по формулам (3.33). Вторые идентифицируют граничные условия на цилиндрических поверхностях  $\rho = a, b$ , являясь коэффициентами разложений в тригонометрические ряды (3.38) компонент заданных на этих поверхностях векторных полей  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

Отметим еще, что если из столбцов  $s_n^{a,b}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) можно выделить общие для всех  $n$  числовые множители  $l_{a,b}$ , такие что  $s_n^{a,b} = l_{a,b} \|p_n^{a,b} \ q_n^{a,b}\|^T$ , где числа  $p_n^{a,b}$  и  $q_n^{a,b}$  зависят только от номера  $n$  и параметра  $\lambda$ , то в этом случае формулу (3.40) целесообразно преобразовать к виду

$$\alpha_n = (\Lambda_n h_n + D_n^a l_a + D_n^b l_b) / \Delta_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$D_n^a = \begin{vmatrix} -2n^2(p_n^a + q_n^a)(\lambda^n - \lambda^{n+1}) - [np_n^a - (n+1)q_n^a](1/\lambda^{n-1} - \lambda^{n+1}) \\ -(p_n^a - q_n^a)(1/\lambda^n - \lambda^n) - 2[np_n^a + (n-1)q_n^a](\lambda^n - \lambda^{n+1}) \\ 2n^2(p_n^a - q_n^a)(1/\lambda - 1) + [np_n^a + (n-1)q_n^a](1 - \lambda^{2n}) \\ (p_n^a + q_n^a)(1 - \lambda^{2n}) + 2[np_n^a - (n+1)q_n^a](1 - \lambda) \end{vmatrix}, \quad (3.41)$$

$$D_n^b = \begin{vmatrix} 2n^2(p_n^b + q_n^b)(1 - \lambda) + [np_n^b - (n+1)q_n^b](1 - \lambda^{2n}) \\ (p_n^b - q_n^b)(1 - \lambda^{2n}) + 2[np_n^b + (n-1)q_n^b](1/\lambda - 1) \\ -2n^2(p_n^b - q_n^b)(\lambda^{n-1} - \lambda^n) - [np_n^b + (n-1)q_n^b](1/\lambda^{n+1} - \lambda^{n-1}) \\ -(p_n^b + q_n^b)(1/\lambda^n - \lambda^n) - 2[np_n^b - (n+1)q_n^b](\lambda^{n-1} - \lambda^n) \end{vmatrix}.$$

### 3.5 Решение задачи на этапе до начала наращивания

Решенная в § 3.4 общая краевая задача (3.24) преобразуется в краевую задачу (3.10), описывающую состояние арки до начала ее утолщения, при

замене (символ  $\mapsto$  всюду ниже означает «заменить на»)

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\mapsto \mathbf{u}, & \mathbf{F} &\mapsto \mathbf{E}, & \mathbf{H} &\mapsto \mathbf{T}^\circ; \\ h(\rho) &\mapsto f\Delta(t, t_0) \equiv \text{const}; & \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{0}, & \mathbf{q} &\mapsto \mathbf{t}^\circ \end{aligned} \quad (3.42)$$

(напомним, что время  $t$  в задаче (3.10) не является существенной переменной, а лишь представляет собой вещественный параметр).

Будем считать, что нагрузка, действующая на наружную цилиндрическую поверхность арки, на данном этапе не изменяется со временем и равна  $\mathbf{t}(\varphi, t) \equiv \mathbf{t}_0(\varphi)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . В этом случае согласно (3.11) на указанном отрезке времени  $\mathbf{t}^\circ(\varphi, t) = \mathbf{t}_0(\varphi)\Delta(t, t_0)$ .

Представим  $\mathbf{t}_0(\varphi) = \mathbf{e}_\rho(\varphi)t_\rho^0(\varphi) + \mathbf{e}_\varphi(\varphi)t_\varphi^0(\varphi)$  и разложим записанные компоненты поверхностной нагрузки в соответствующие (3.38) ряды

$$t_\rho^0(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{b,0} \cos 2n\varphi, \quad t_\varphi^0(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{b,0} \sin 2n\varphi.$$

В итоге для получения решения задачи о деформировании арки на этапе до начала ее наращивания необходимо воспользоваться построенным в § 3.4 решением абстрактной задачи (3.24), заменив в нем

$$\begin{aligned} \Phi_m(\rho) &\mapsto \Phi_m^0(\rho)\Delta(t, t_0), & \Psi_m(\rho) &\mapsto \Psi_m^0(\rho)\Delta(t, t_0); \\ P_n^a &\mapsto 0, & Q_n^a &\mapsto 0; & P_n^b &\mapsto P_n^{b,0}\Delta(t, t_0), & Q_n^b &\mapsto Q_n^{b,0}\Delta(t, t_0). \end{aligned}$$

Здесь введены функции

$$\begin{aligned} \Phi_m^0(\rho) &= \frac{c}{2m-1} \int_{a_0}^{\rho} \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^{2m} d\xi = \frac{c\rho[1 - (a_0/\rho)^{2m+1}]}{4m^2 - 1}, \\ \Psi_m^0(\rho) &= \frac{c}{2m+1} \int_{\rho}^b \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{2m} d\xi = \frac{c\rho[1 - (\rho/b)^{2m-1}]}{4m^2 - 1}. \end{aligned}$$

В их определении участвует константа

$$c = \frac{2f}{\pi(\varkappa + 1)}, \quad (3.43)$$

зависящая от удельного веса материала и его коэффициента Пуассона.

Таким образом, на рассматриваемом этапе деформирования изначально установленной части арки поле перемещений в ней имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_\rho u_\rho + \mathbf{e}_\varphi u_\varphi,$$

$$\begin{aligned}
u_\rho(\rho, \varphi, t) = & \frac{\rho}{2} \left\{ -\frac{B_{40}^0(\rho)}{\varkappa} - B_{10}^0(\rho) + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(n + \varkappa^{-1})B_{2n}^0(\rho) - B_{3n}^0(\rho)}{2n - 1} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{(n - \varkappa^{-1})B_{4n}^0(\rho) - B_{1n}^0(\rho)}{2n + 1} \right] \cos 2n\varphi \right\} \Delta(t, t_0), \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\varphi(\rho, \varphi, t) = & \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(n - 1 - \varkappa^{-1})B_{2n}^0(\rho) + B_{3n}^0(\rho)}{2n - 1} - \right. \\
& \left. - \frac{(n + 1 + \varkappa^{-1})B_{4n}^0(\rho) + B_{1n}^0(\rho)}{2n + 1} \right] \sin 2n\varphi \Delta(t, t_0),
\end{aligned}$$

а тензорное поле  $\mathbf{T}^\circ(\mathbf{r}, t)$  описывается выражениями

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^\circ = & \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho^\circ + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi^\circ + \mathbf{k} \mathbf{k} \nu(\sigma_\rho^\circ + \sigma_\varphi^\circ) + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) \sigma_{\rho\varphi}^\circ, \\
\sigma_{\rho, \varphi, \rho\varphi}^\circ(\rho, \varphi, t) = & \sigma_{\rho, \varphi, \rho\varphi}(\rho, \varphi) \Delta(t, t_0), \quad (3.45)
\end{aligned}$$

где функции  $\sigma_{\rho, \varphi, \rho\varphi}(\rho, \varphi)$  определяются как

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho(\rho, \varphi) = & B_{10}^0(\rho) - B_{40}^0(\rho) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}^0(\rho) - (n + 1)B_{2n}^0(\rho) - \\
& - B_{3n}^0(\rho) + (n - 1)B_{4n}^0(\rho)] \cos 2n\varphi, \\
\sigma_\varphi(\rho, \varphi) = & -B_{10}^0(\rho) - B_{40}^0(\rho) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [-B_{1n}^0(\rho) + (n - 1)B_{2n}^0(\rho) + \\
& + B_{3n}^0(\rho) - (n + 1)B_{4n}^0(\rho)] \cos 2n\varphi, \\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = & \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}^0(\rho) - nB_{2n}^0(\rho) + B_{3n}^0(\rho) - nB_{4n}^0(\rho)] \sin 2n\varphi. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

В представленном выше решении используются функции

$$\begin{aligned}
B_{1n}^0(\rho) &= K_n^{(1)} \Phi_{n+1}^0(\rho) + \alpha_{1n}^0 (b/\rho)^{2n+2}, \\
B_{2n}^0(\rho) &= \varkappa \Phi_n^0(\rho) + \alpha_{2n}^0 (b/\rho)^{2n}, \\
B_{3n}^0(\rho) &= K_n^{(3)} \Psi_{n-1}^0(\rho) + \alpha_{3n}^0 (\rho/a_0)^{2n-2}, \\
B_{4n}^0(\rho) &= \varkappa \Psi_n^0(\rho) + \alpha_{4n}^0 (\rho/a_0)^{2n},
\end{aligned}$$

множители  $\alpha_{jn}^0$  в которых вычисляются по формулам (см. (3.39) и (3.40))

$$\alpha_{j0}^0 = \frac{\lambda_0 \varkappa \Psi_0^0(a_0) + \lambda_0^{\delta_{1j}} [\Phi_1^0(b) - P_0^{b,0}]}{1 - \lambda_0} \quad (j = 1, 4);$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1n}^0 \\ \alpha_{2n}^0 \\ \alpha_{3n}^0 \\ \alpha_{4n}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_n^0} \left( \Lambda_n^0 \begin{pmatrix} K_n^{(1)} \Phi_{n+1}^0(b) \\ \varkappa \Phi_n^0(b) \\ K_n^{(3)} \Psi_{n-1}^0(a_0) \\ \varkappa \Psi_n^0(a_0) \end{pmatrix} + \underbrace{M_n^{b,0} \begin{pmatrix} P_n^{b,0} \\ Q_n^{b,0} \end{pmatrix}}_{\omega_n^0} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (3.47)$$

$$\Phi_m^0(b) = \frac{cb(1 - \lambda_0^m \sqrt{\lambda_0})}{4m^2 - 1}, \quad \Psi_m^0(a_0) = \frac{cb(\sqrt{\lambda_0} - \lambda_0^m)}{4m^2 - 1}.$$

Здесь матрицы  $\Lambda_n^0$ ,  $M_n^{b,0}$  и числа  $\Delta_n^0$  получаются из величин  $\Lambda_n$ ,  $M_n^b$  и  $\Delta_n$ , определенных в § 3.4, путем замены в них  $\lambda$  на  $\lambda_0 = (a_0/b)^2$  и зависят, таким образом, только от номера  $n$  и параметра  $\lambda_0$ . Коэффициенты  $K_n^{(1,3)}$  определены формулами (3.34); они зависят только от  $n$  и  $\varkappa$ .

Из (3.45) в силу определения (3.6) тензора  $\mathbf{T}^\circ$  и представления (3.5) функции удельной деформации вытекает, что величины  $\sigma_{\rho,\varphi,\rho\varphi}$ , введенные формулами (3.46), представляют из себя не что иное, как физические компоненты тензора напряжений в используемой системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}) = & \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho \sigma_\rho(\rho, \varphi) + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \sigma_\varphi(\rho, \varphi) + \\ & + \mathbf{k} \mathbf{k} \nu [\sigma_\rho(\rho, \varphi) + \sigma_\varphi(\rho, \varphi)] + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) \sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, напряжения в исходной арке до начала ее утолщения не зависят ни от времени  $t$ , ни от момента  $t_0$  ее установки на основание. В силу известного принципа соответствия [28] эти напряжения отвечают одновременно и решению аналогичной задачи о деформировании чисто упругой арки на гладком жестком основании.

### 3.6 Решение задачи на этапе кусочно-непрерывного роста

В соответствии с результатами §§ 3.3, 3.4 для получения решения задачи на этапе кусочно-непрерывного роста арки следует в общей краевой

задаче (3.24) заменить

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &\mapsto \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} \mapsto \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \mapsto \mathbf{S}; \quad h(\rho) \mapsto f \omega'_t(t, \tau_0(\rho)); \\ \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{p}(\varphi, t) = \left\{ [\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r})] \Big|_{\rho=a(t)} + \mathbf{f} \right\} \frac{a'(t)}{G(t)}, \\ \mathbf{q} &\mapsto \mathbf{q}(\varphi, t) = \partial \mathbf{t}^\circ(\varphi, t) / \partial t \end{aligned} \quad (3.48)$$

(см. (3.23)), преобразовав ее тем самым к краевой задаче (3.20) с параметром  $t$ . Тогда после разложения (см. (3.38))

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\varphi, t) &= \mathbf{e}_\rho(\varphi) p_\rho(\varphi, t) + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) p_\varphi(\varphi, t), \\ \mathbf{q}(\varphi, t) &= \mathbf{e}_\rho(\varphi) q_\rho(\varphi, t) + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) q_\varphi(\varphi, t), \\ p_\rho(\varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^a(t) \cos 2n\varphi, \quad p_\varphi(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^a(t) \sin 2n\varphi, \\ q_\rho(\varphi, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^b(t) \cos 2n\varphi, \quad q_\varphi(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^b(t) \sin 2n\varphi \end{aligned} \quad (3.49)$$

решение последней будет даваться выражениями из § 3.4 с заменой в них

$$\begin{aligned} \Phi_m(\rho) &\mapsto \Phi_m(\rho, t) = \frac{c}{2m-1} \int_{a(t)}^{\rho} \omega'_t(t, \tau_0(\xi)) \left( \frac{\xi}{\rho} \right)^{2m} d\xi, \\ \Psi_m(\rho) &\mapsto \Psi_m(\rho, t) = \frac{c}{2m+1} \int_{\rho}^b \omega'_t(t, \tau_0(\xi)) \left( \frac{\rho}{\xi} \right)^{2m} d\xi \end{aligned} \quad (3.50)$$

(величина  $c$  определена формулой (3.43));

$$P_n^a \mapsto P_n^a(t), \quad Q_n^a \mapsto Q_n^a(t); \quad P_n^b \mapsto P_n^b(t), \quad Q_n^b \mapsto Q_n^b(t).$$

Таким образом, в процессе кусочно-непрерывного наращивания рассматриваемой арки (в том числе и после окончательной остановки роста) поле скоростей в ней имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_\rho v_\rho + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi,$$

$$v_\rho(\rho, \varphi, t) = \frac{\rho}{2} \left\{ -\frac{B_{40}(\rho, t)}{\varkappa} - B_{10}(\rho, t) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(n + \varkappa^{-1})B_{2n}(\rho, t) - B_{3n}(\rho, t)}{2n - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n - \varkappa^{-1})B_{4n}(\rho, t) - B_{1n}(\rho, t)}{2n + 1} \right] \cos 2n\varphi \right\}, \quad (3.51)$$

$$v_\varphi(\rho, \varphi, t) = \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(n - 1 - \varkappa^{-1})B_{2n}(\rho, t) + B_{3n}(\rho, t)}{2n - 1} - \right. \\ \left. - \frac{(n + 1 + \varkappa^{-1})B_{4n}(\rho, t) + B_{1n}(\rho, t)}{2n + 1} \right] \sin 2n\varphi,$$

а поле тензорной величины **S** описывается соотношениями

$$\mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho S_\rho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi S_\varphi + \mathbf{k} \mathbf{k} \nu(S_\rho + S_\varphi) + (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\rho) S_{\rho\varphi},$$

$$S_\rho(\rho, \varphi, t) = B_{10}(\rho, t) - B_{40}(\rho, t) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}(\rho, t) - (n + 1)B_{2n}(\rho, t) - \\ - B_{3n}(\rho, t) + (n - 1)B_{4n}(\rho, t)] \cos 2n\varphi,$$

$$S_\varphi(\rho, \varphi, t) = -B_{10}(\rho, t) - B_{40}(\rho, t) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [-B_{1n}(\rho, t) + (n - 1)B_{2n}(\rho, t) + \\ + B_{3n}(\rho, t) - (n + 1)B_{4n}(\rho, t)] \cos 2n\varphi, \quad (3.52)$$

$$S_{\rho\varphi}(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n}(\rho, t) - nB_{2n}(\rho, t) + \\ + B_{3n}(\rho, t) - nB_{4n}(\rho, t)] \sin 2n\varphi.$$

В записи приведенного решения используются функции

$$B_{1n}(\rho, t) = K_n^{(1)} \Phi_{n+1}(\rho, t) + \alpha_{1n}(t) (b/\rho)^{2n+2}, \\ B_{2n}(\rho, t) = \varkappa \Phi_n(\rho, t) + \alpha_{2n}(t) (b/\rho)^{2n}, \\ B_{3n}(\rho, t) = K_n^{(3)} \Psi_{n-1}(\rho, t) + \alpha_{3n}(t) [\rho/a(t)]^{2n-2}, \\ B_{4n}(\rho, t) = \varkappa \Psi_n(\rho, t) + \alpha_{4n}(t) [\rho/a(t)]^{2n},$$

где зависящие от времени множители  $\alpha_{jn}(t)$  определяются формулами (см. (3.39) и (3.40))

$$\alpha_{j0}(t) = \frac{\lambda(t) [\varkappa \Psi_0(a(t), t) + P_0^a(t)] + \lambda(t)^{\delta_{1j}} [\Phi_1(b, t) - P_0^b(t)]}{1 - \lambda(t)};$$

$$(j = 1, 4)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{2n}(t) \\ \alpha_{3n}(t) \\ \alpha_{4n}(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta_n(t)} \left( \Lambda_n(t) \begin{pmatrix} K_n^{(1)} \Phi_{n+1}(b, t) \\ \varkappa \Phi_n(b, t) \\ K_n^{(3)} \Psi_{n-1}(a(t), t) \\ \varkappa \Psi_n(a(t), t) \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{M_n^a(t) \left\| \frac{P_n^a(t)}{Q_n^a(t)} \right\| + M_n^b(t) \left\| \frac{P_n^b(t)}{Q_n^b(t)} \right\|}_{\omega_n(t)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Здесь функции  $\Lambda_n(t)$ ,  $M_n^{a,b}(t)$  и  $\Delta_n(t)$  получаются из величин  $\Lambda_n$ ,  $M_n^{a,b}$  и  $\Delta_n$ , определенных в § 3.4, заменой в них  $\lambda$  на  $\lambda(t) = [a(t)/b]^2$ . Числовые коэффициенты  $K_n^{(1,3)}$  вводятся формулами (3.34).

Теперь, используя результаты настоящего параграфа и § 3.5, можно по формулам (3.21) и (3.22) восстановить эволюцию поля напряжений в рассматриваемой арочной конструкции на протяжении всего процесса ее деформирования после начала возведения.

### 3.7 Упругий случай

Чисто упругое поведение материала, используемого для изготовления рассматриваемой арки, содержится, очевидно, как частный случай в исходно принятом определяющем соотношении (3.3). В этом случае в нем нужно считать  $\omega(t, \tau) \equiv 0$ ,  $G(t) \equiv \text{const}$ . Тогда  $\Delta(t, \tau) \equiv G^{-1}$ , и поэтому

$$\mathcal{I} - \mathcal{L}_s = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} + \mathcal{N}_s = \mathcal{I}, \quad g^\circ(\mathbf{r}, t) \equiv g(\mathbf{r}, t)/G.$$

Понятно, что все проведенные выше рассуждения и выкладки при этом остаются в силе.

Таким образом, на этапе до начала наращивания первоначально установленной на основание упругой арки напряжения в ней по-прежнему даются выражениями (3.46), а перемещения вычисляются по формулам (3.44), в которых только нужно заменить  $\Delta(t, t_0)$  на  $G^{-1}$ .

После начала процесса кусочно-непрерывного утолщения этой арки необходимо в соответствующих соотношениях, выписанных в § 3.6 для общего случая вязкоупругости, принять

$$\mathbf{q}(\varphi, t) = G^{-1} \partial \mathbf{t}(\varphi, t) / \partial t; \quad \Phi_m(\rho, t) \equiv 0, \quad \Psi_m(\rho, t) \equiv 0;$$

выражение для вычисления вектор-функции  $\mathbf{p}(\varphi, t)$  в (3.48) останется точно таким же, как и в общем случае, но только величина  $G$  в нем не будет уже зависеть от времени  $t$ . Тогда компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  и тензора  $\mathbf{S}$  будут выражаться зависимостями (3.51) и (3.52), в которых

$$\begin{aligned} B_{1n}(\rho, t) &= \alpha_{1n}(t) (b/\rho)^{2n+2}, & B_{2n}(\rho, t) &= \alpha_{2n}(t) (b/\rho)^{2n}, \\ B_{3n}(\rho, t) &= \alpha_{3n}(t) [\rho/a(t)]^{2n-2}, & B_{4n}(\rho, t) &= \alpha_{4n}(t) [\rho/a(t)]^{2n}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Функции  $\alpha_{jn}(t)$  будут равны

$$\alpha_{j0}(t) = [\lambda(t) P_0^a(t) - \lambda(t)^{\delta_{1j}} P_0^b(t)] / [1 - \lambda(t)] \quad (j = 1, 4);$$

$$\|\alpha_{1n}(t) \quad \alpha_{2n}(t) \quad \alpha_{3n}(t) \quad \alpha_{4n}(t)\|^T = \omega_n(t) / \Delta_n(t), \quad n \in \mathbb{N};$$

вид столбца  $\omega_n(t)$  и числовой функции  $\Delta_n(t)$  указан в § 3.6.

После вычисления тензора  $\mathbf{S}$  тензор напряжений  $\mathbf{T}$  в упругом случае находится простым интегрированием:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_1(\rho)) + \int_{\tau_1(\rho)}^t G \mathbf{S}(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

Заметим, что введенные в § 3.5 функции  $B_{jn}^0(\rho)$  не зависят от модуля сдвига, а функции (3.54) обратно пропорциональны ему (поскольку они линейно зависят от коэффициентов  $P_n^{a,b}(t)$ ,  $Q_n^{a,b}(t)$  разложения в ряды компонент векторных полей  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , пропорциональных в упругом случае величине  $G^{-1}$ ) и не зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$ . В результате до начала наращивания упругой арки перемещения ее частиц, а после — скорости их движения будут обратно пропорциональны модулю  $G$ , в то время как напряжения на протяжении всего процесса деформирования от  $G$  зависеть вообще не будут. При этом скорости изменения напряжений во времени не будут зависеть от коэффициента Пуассона.

### 3.8 Деформирование возводимой арки под действием сил тяжести

**1. Конкретизация общих соотношений.** Итак, в §§ 3.5 и 3.6 выписано полное решение общей задачи о деформировании круговой арки,

возводимой методом кусочно-непрерывного наращивания из вязкоупругого стареющего материала на гладком жестком горизонтальном основании, под действием ее собственного веса и произвольной симметричной нагрузки, распределенной по наружной цилиндрической поверхности, при любом предварительном натяжении присоединяемых в процессе наращивания конструктивных элементов.

В этом параграфе остановимся на подробном исследовании влияния собственно сил тяжести на возводимую при их воздействии рассматриваемую арочную конструкцию. Для этого в краевых задачах (3.8) и (3.20) обнулим поверхностную нагрузку и тензор предварительных напряжений, положив  $\mathbf{t}(\varphi, t) \equiv \mathbf{0}$  и  $\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$ . В построенном выше общем решении указанных краевых задач это отразится только на значениях величин  $\alpha_{jn}^0$  и  $\alpha_{jn}(t)$ , участвующих в определении функций  $B_{jn}^0(\rho)$  и  $B_{jn}(\rho, t)$ . Эти величины выражаются формулами (3.47) и (3.53), в которых в данном случае следует принять  $P_n^{b,0} = 0$ ,  $Q_n^{b,0} = 0$  и  $P_n^b(t) \equiv 0$ ,  $Q_n^b(t) \equiv 0$ , а функции  $P_n^a(t)$  и  $Q_n^a(t)$  вычислить как коэффициенты разложений в тригонометрические ряды (3.49) компонент векторного поля

$$\mathbf{p}(\varphi, t) = \mathbf{f} a'(t)/G(t) = -f [\mathbf{e}_\rho(\varphi) \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \cos \varphi] a'(t)/G(t),$$

задаваемого на внутренней цилиндрической поверхности  $\rho = a(t)$  занимаемой аркой области. С учетом формул (3.29) имеем

$$P_0^a(t) = \frac{l_a(t)}{2}; \quad P_n^a(t) = -\frac{l_a(t)}{4n^2 - 1}, \quad Q_n^a(t) = \frac{2n l_a(t)}{4n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где введена функция

$$l_a(t) = -\frac{4f}{\pi} \frac{a'(t)}{G(t)} \geq 0. \quad (3.55)$$

То есть в данном случае столбец  $\omega_n^0$  в (3.47) равен нулю, а столбец  $\omega_n(t)$  в (3.53) равен (см. (3.41))

$$\omega_n(t) = \left\| \begin{array}{c} \frac{-2n^2 [\lambda^n(t) - \lambda^{n+1}(t)] + r_n^{(1)} [1/\lambda^{n-1}(t) - \lambda^{n+1}(t)]}{2n+1} \\ \frac{1/\lambda^n(t) - \lambda^n(t) - 2r_n^{(3)} [\lambda^n(t) - \lambda^{n+1}(t)]}{2n-1} \\ \frac{-2n^2 [1/\lambda(t) - 1] + r_n^{(3)} [1 - \lambda^{2n}(t)]}{2n-1} \\ \frac{1 - \lambda^{2n}(t) - 2r_n^{(1)} [1 - \lambda(t)]}{2n+1} \end{array} \right\| l_a(t), \quad (3.56)$$

где числовые множители  $r_n^{(1,3)}$  вычисляются по формулам из (3.34) и зависят только от номера  $n$ . Заметим, что функция  $l_a(t)$  определяется исключительно свойствами материала и заданной программой наращивания  $a(t)$  и потому является априори известной. Она неотрицательна ввиду невозрастания внутреннего радиуса арки в процессе ее кусочно-непрерывного роста.

**2. Характеристики материала и некоторые предварительные соглашения.** Для численного анализа поведения наращиваемой вязкоупругой арки аппроксимируем меру ползучести материала при сдвиге зависимостью (см. § 0.4)

$$\omega(t, \tau) = A(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где  $A(\tau)$  — так называемая функция старения,  $\gamma > 0$  — коэффициент, задающий масштаб времени.

Переход к безразмерным величинам осуществим следующим образом. Все величины, имеющие размерность времени, умножим на  $\gamma$ . Величины, совпадающие по размерности с напряжением, отнесем к модулю сдвига весьма старого материала  $G_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$  (см. § 0.4). Линейные величины нормируем на величину радиуса внешней (не изменяющейся за счет наращивания) поверхности арки  $b$ . Остальные размерные физические величины приведем к безразмерному виду отнесением их к соответствующей комбинации параметров  $\gamma$ ,  $G_\infty$ ,  $b$ . Все величины, нормированные указанным образом, будем помечать чертой сверху.

Аппроксимирующие выражения для модуля сдвига и функции старения возьмем в виде (см. § 0.4)

$$G(t) = G_\infty (1 - \delta G e^{-\alpha t}), \quad A(\tau) = A_\infty + \Delta A e^{-\beta \tau},$$

где при расчетах будем принимать [28]

$$\bar{\alpha} = 2, \quad \delta G = 0.5; \quad \bar{\beta} = 31/60, \quad \bar{A}_\infty = 0.5522, \quad \Delta \bar{A} = 4.$$

Коэффициент Пуассона зададим равным  $\nu = 0.1$ . Отметим, что указанные значения параметров материала соответствуют экспериментальным данным по ползучести некоторых сортов бетона [76].

**Замечание.** Единственным фактором, вызывающим деформирование рассматриваемой конструкции, в настоящем параграфе является однородное поле распределенных по ее объему сил тяжести. Поскольку

решаемая задача геометрически и физически линейна, то решение должно быть пропорционально удельному весу  $f$  рассматриваемого материала. В последующих параграфах будут введены еще два деформирующих фактора — это предварительный натяг присоединяемых элементов (задаваемые в дополнительном материале начальные напряжения) и локальная поверхностная нагрузка арки (задаваемые напряжения на наружной поверхности). Однако оба они в конкретных числовых расчетах будут приниматься пропорциональными величине  $f$ , с тем чтобы по-прежнему сохранялась пропорциональность этой величине получаемого решения. Таким образом, распределения величин  $\bar{\sigma}/\bar{f}$  и  $\bar{u}/\bar{f}$ , построенные для некоторого момента времени в координатах  $(\bar{\rho}, \varphi)$ , где  $\sigma$  и  $u$  — напряжения и перемещения, будут в соответствии с принятой системой базовых безразмерных величин характеризовать состояние рассматриваемой конструкции *независимо* от ее реального удельного веса  $f$  и реальных геометрических размеров, определяемых величиной внешнего радиуса  $b$ , а также от значения множителя  $G_\infty$  в принятом законе изменения модуля сдвига  $G(t)$ . Поскольку  $\bar{f} = fb/G_\infty$ , то истинные значения напряжений и перемещений должны вычисляться по формулам

$$\sigma = \underbrace{(\bar{\sigma}/\bar{f})}_{\text{const}(f,b,G_\infty)} fb, \quad u = \underbrace{(\bar{u}/\bar{f})}_{\text{const}(f,b,G_\infty)} fb^2/G_\infty.$$

Из данных представлений видно, что с увеличением линейного размера арки  $b$  (при сохранении пропорции  $a/b$  и неизменных прочих условиях) абсолютные размерные значения напряжений в ней будут возрастать линейно, а перемещений — квадратично. #

Описания вычислительных алгоритмов, используемых при решении рассматриваемых ниже задач, а также методик проверки получаемых результатов и оценки их точности даны в приложении Б.

Графические иллюстрации результатов числовых расчетов, приводимые в этой главе, будут представляться в одном из следующих видов:

- а) зависимости характеристик напряженного состояния рассматриваемой конструкции от радиальной координаты  $\rho$  для фиксированных значений угловой координаты  $\varphi$  и различных моментов времени  $t$ ;
- б) финальные (установившиеся со временем) распределения скалярных характеристик напряженного состояния в прямоугольной области возможных значений полярных координат  $(\rho, \varphi)$ ;

- в) временные эволюции величин, характеризующих текущее состояние конструкции, на протяжении всего процесса ее деформирования.

На всех фигурах вида (а) *пунктирные линии* соответствуют эпюрам напряжений  $\sigma_\varphi$  (окружного),  $\sigma_\rho$  (радиального) и  $\tau_{\rho\varphi}$  (касательного), а также интенсивности касательных напряжений  $T$  в исходно установленной на основание (и выполняющей роль заготовки в рассматриваемом технологическом процессе) арке до начала ее наращивания. Графики, построенные *тонкими сплошными линиями*, отражают эволюцию названных характеристик в процессе последующего утолщения этой арки и после завершения данного процесса (последний тонкий график отвечает состоянию конструкции по прошествии после окончательного прекращения наращивания времени, составляющего примерно  $3/8$  от суммарной продолжительности *непрерывного* роста). *Сплошными толстыми линиями* изображены их финальные (установившиеся при  $t \rightarrow +\infty$ ) распределения в готовой конструкции. *Штриховые линии* демонстрируют напряженное состояние арки окончательных размеров (достигаемых по окончании процесса возведения), но изготовленной без влияния сил тяжести и только затем установленной на горизонтальное основание. Заметим сразу, что во всех разобранных ниже случаях окружные напряжения по абсолютной величине значительно превышают радиальные. В итоге распределения осевых напряжений  $\sigma_z = \nu(\sigma_\rho + \sigma_\varphi)$  оказываются по виду весьма близкими к соответствующим распределениям окружных напряжений, и поэтому на иллюстрациях нигде не приводятся.

Иллюстрации вида (б) представлены картами линий уровня скалярных функций, описывающих финальные распределения интенсивности касательных напряжений  $T$  и наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  в готовом теле. Каждая линия уровня оттенена серым цветом со стороны меньших значений функции. При этом нормальная (к линии) длина тени больше в тех местах, где график функции спускается более полого (то есть где меньше величина градиента функции). Под каждым координатным полем указаны максимальное значение изображенной на нем функции и координаты точки, в которой оно достигается. На всех полях, собранных на одной фигуре, линии уровня построены для общего набора значений, равномерно распределенных на вещественной оси. Величина соответствующего постоянного шага по значениям функции (разница высот соседних уровней) указана в подписи к фигуре. На фигурах, представляющих распределения  $\sigma_1$ , область положительных (растягива-

ющих) напряжений ограничена *жирной линией*. Рассмотрение данной характеристики в области ее отрицательных значений отдельно от двух других главных напряжений лишено, очевидно, практического смысла.

При анализе результатов особый интерес будут представлять точки арки, помеченные на фиг. 3.1 буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$  с соответствующими индексами. Координаты эти точек указаны в следующей таблице:

	$\rho = a(t)$	$\rho = a_0 \pm 0$	$\rho = b$
$\varphi = 0^\circ$	$A_I$	$B_I^\pm$	$C_I$
$\varphi = 90^\circ$	$A_{II}$	$B_{II}^\pm$	$C_{II}$

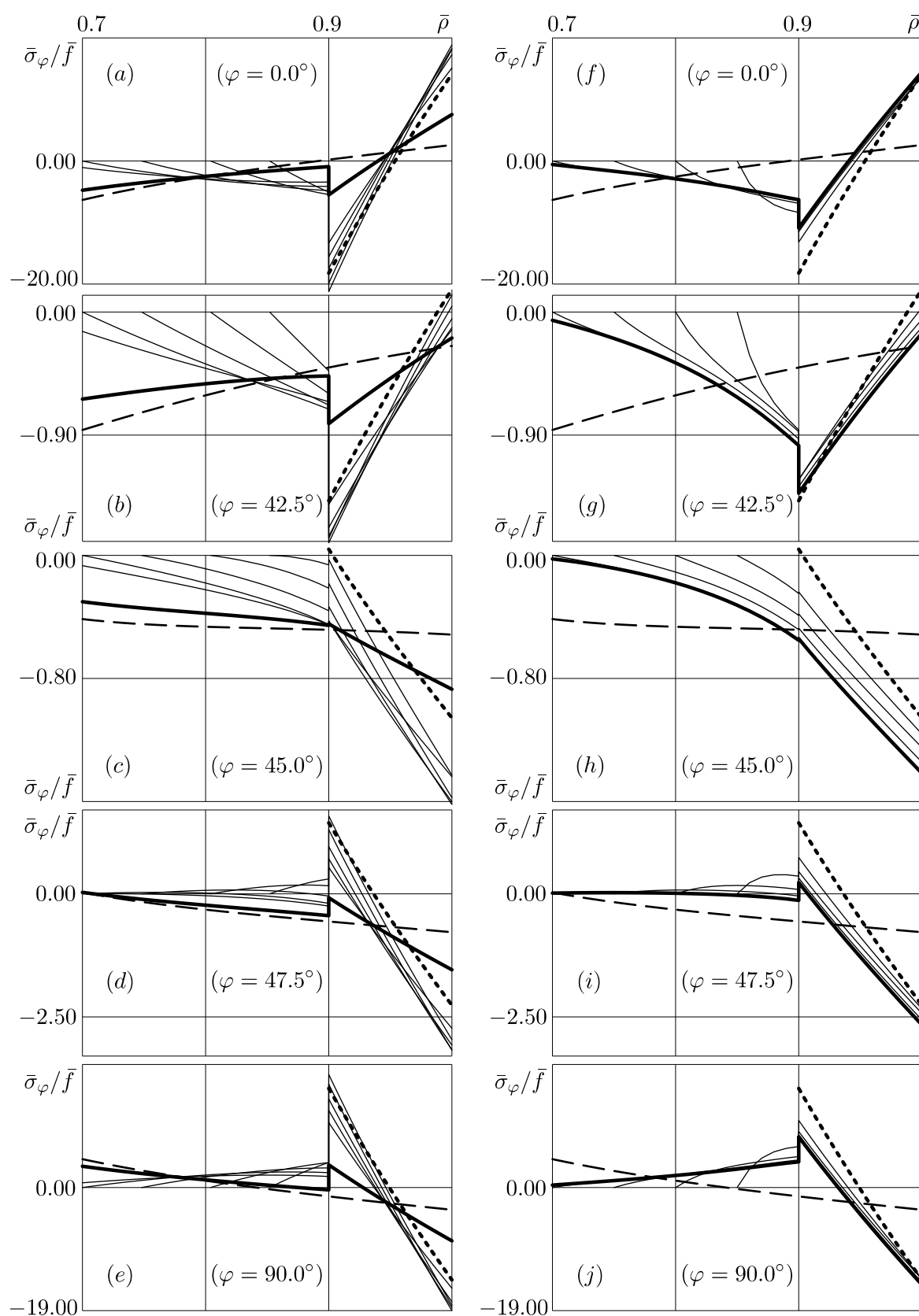
На фигурах, иллюстрирующих на одном координатном поле несколько однотипных зависимостей для указанного набора значений некоторого числового параметра, стрелкой показывается порядок следования кривых при возрастании соответствующих им значений параметра.

Во всех моделируемых процессах, за исключением тех, где особо оговорено другое, считается, что исходная арка установлена на основание в момент  $\bar{t}_0 = 0.1$ , а ее наращивание начинается при  $\bar{t}_1 = 0.3$  (напомним, что за начало отсчета времени  $t = 0$  принят момент изготовления используемого в процессе возведения материала).

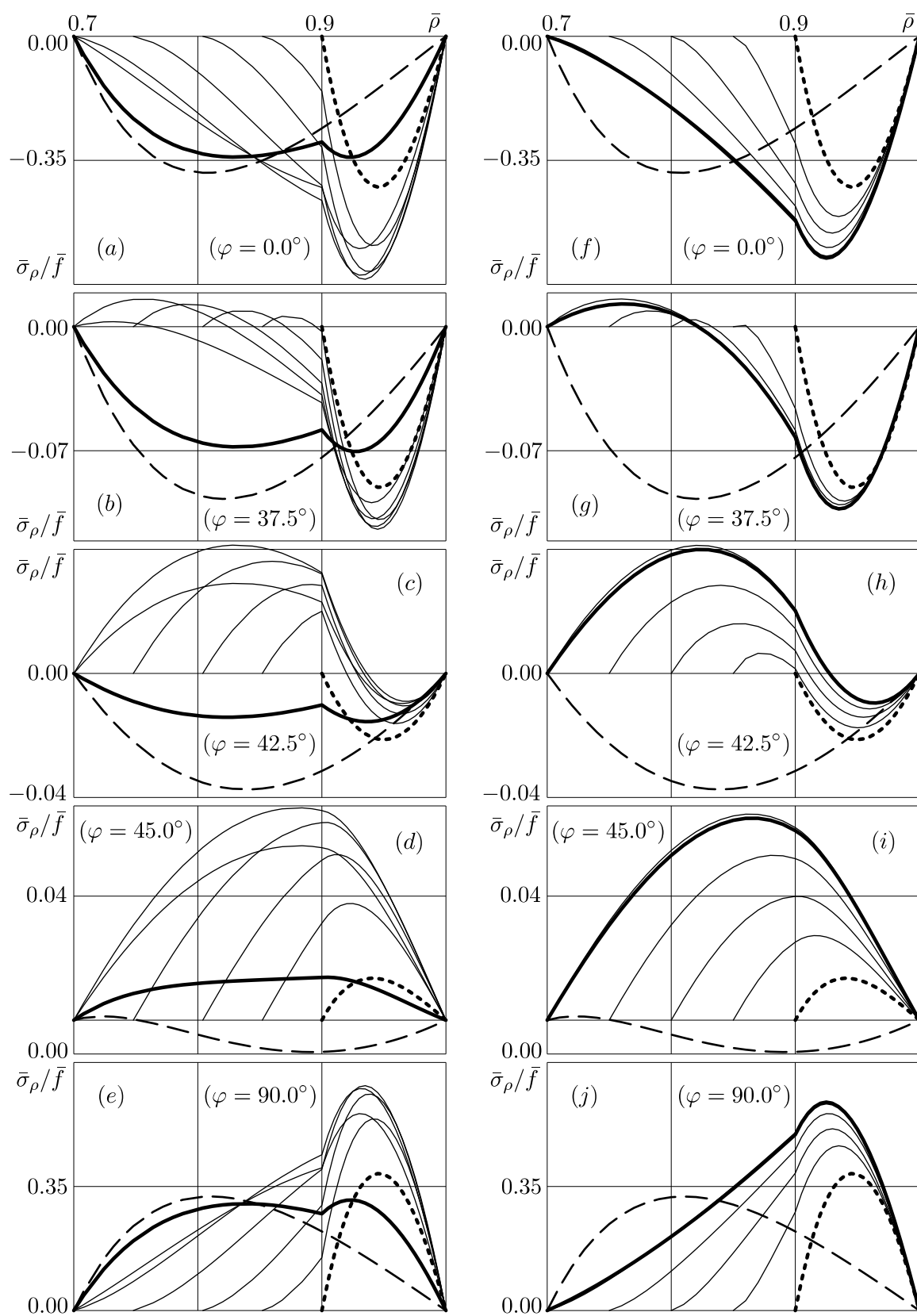
Для упрощения вычислений ограничимся численным моделированием процессов возведения арки лишь с постоянной скоростью изменения ее внутреннего радиуса  $a(t)$  на каждом этапе непрерывного утолщения, то есть будем полагать  $a'(t) \equiv -A_k = \text{const}$ ,  $t \in (t_{2k-1}, t_{2k})$  ( $k = 1, \dots, N$ ). При этом будем рассматривать три скоростных режима: «быстрое» наращивание, когда на некотором  $k$ -м этапе принимается  $\bar{A}_k = 1$ , «медленное» наращивание, при котором  $\bar{A}_k = 1/25$ , и наращивание со «средней» скоростью, равной  $\bar{A}_k = 1/8$ .

**3. Изготовление тонкостенной арки.** Исследуем сначала процесс изготовления тяжелой тонкостенной арки из ненапряженных элементов за один этап непрерывного наращивания. Ниже представлены результаты решения такой задачи для случая  $\bar{a}_0 = 0.9$ ,  $\bar{a}_1 = 0.7$ .

На фиг. 3.3–3.6 координатные поля с графиками размещены в двух колонках. Левая колонка соответствует «быстрому» наращиванию, правая — «медленному». В отдельных рядах расположены графики распределений различных характеристик напряженного состояния в нескольких наиболее характерных для каждой из них сечениях арки полуплоскостями  $\varphi = \text{const}$ . Графики, находящиеся в одном ряду, построены для удобства сравнения в одинаковых масштабах.

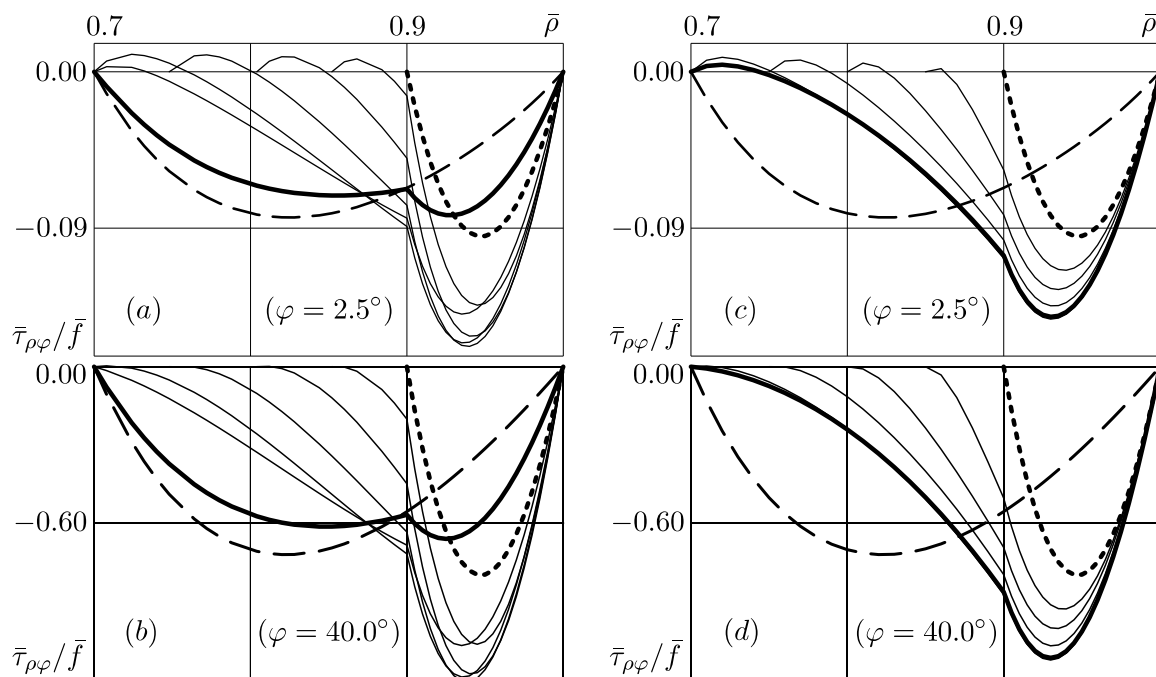


**Фиг. 3.3.** Окружные напряжения в тонкостенной наращиваемой арке:  
 (a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



Фиг. 3.4. Радиальные напряжения в тонкостенной наращиваемой арке:

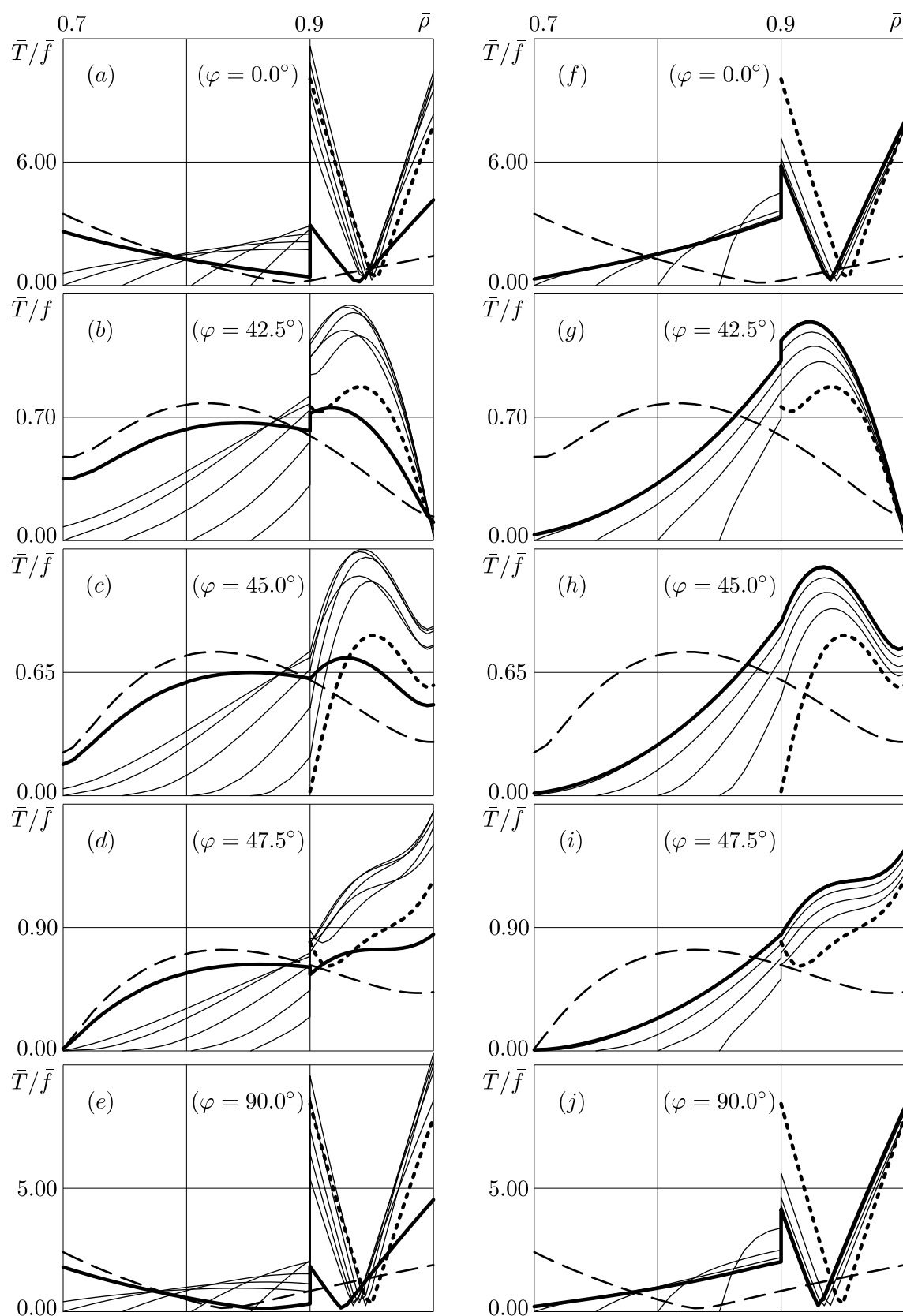
(a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



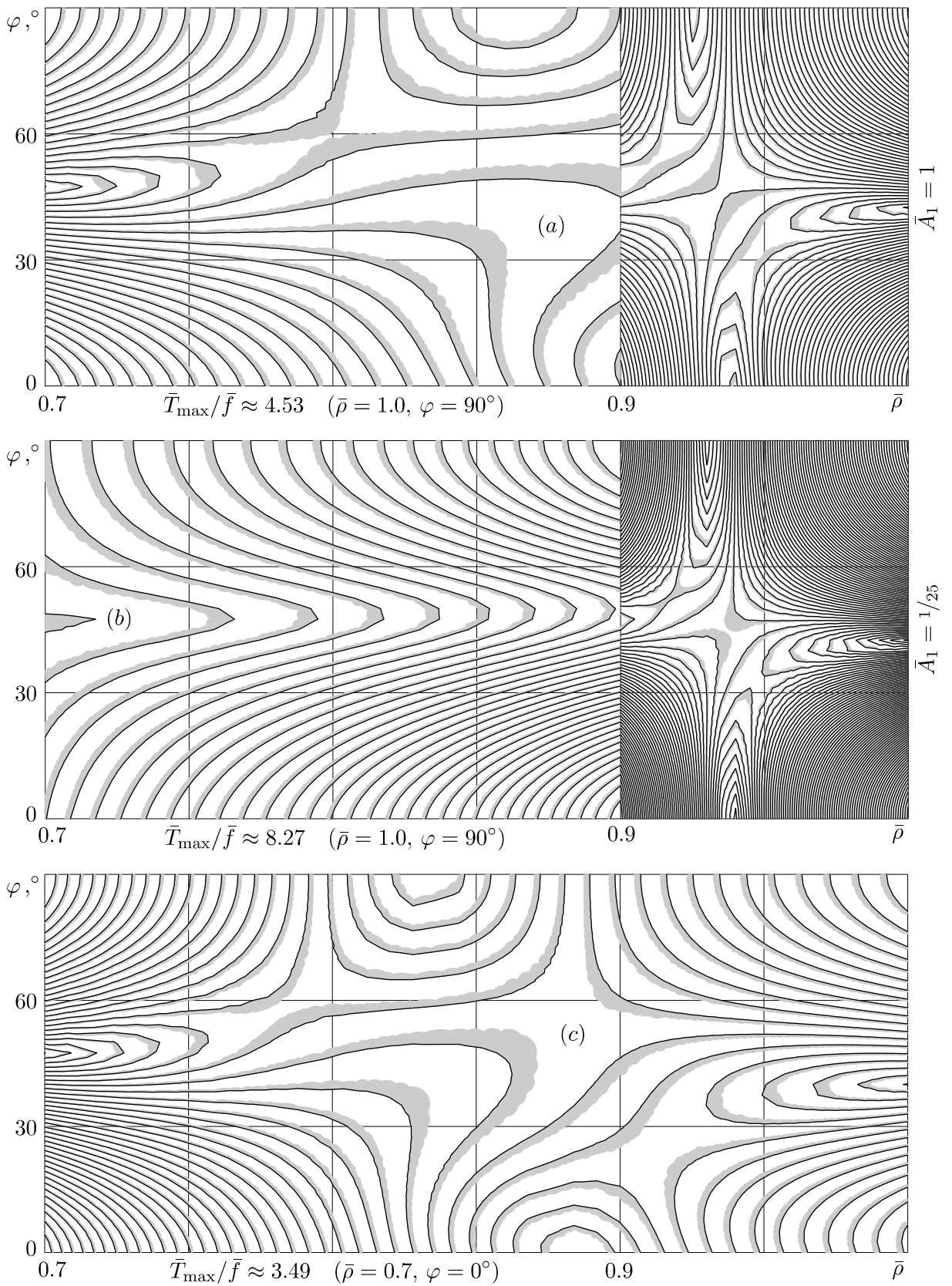
**Фиг. 3.5.** Касательные напряжения в тонкостенной наращиваемой арке: (a) и (b) — «быстрое», (c) и (d) — «медленное» наращивание.

Фиг. 3.7, 3.8 изображают установившиеся распределения интенсивности касательных напряжений и наибольшего главного напряжения в готовом теле, полученном в результате «быстрого» (фиг. a) и «медленного» (фиг. b) процессов возведения, а также в ненаращиваемой тяжелой арке окончательных размеров (фиг. c).

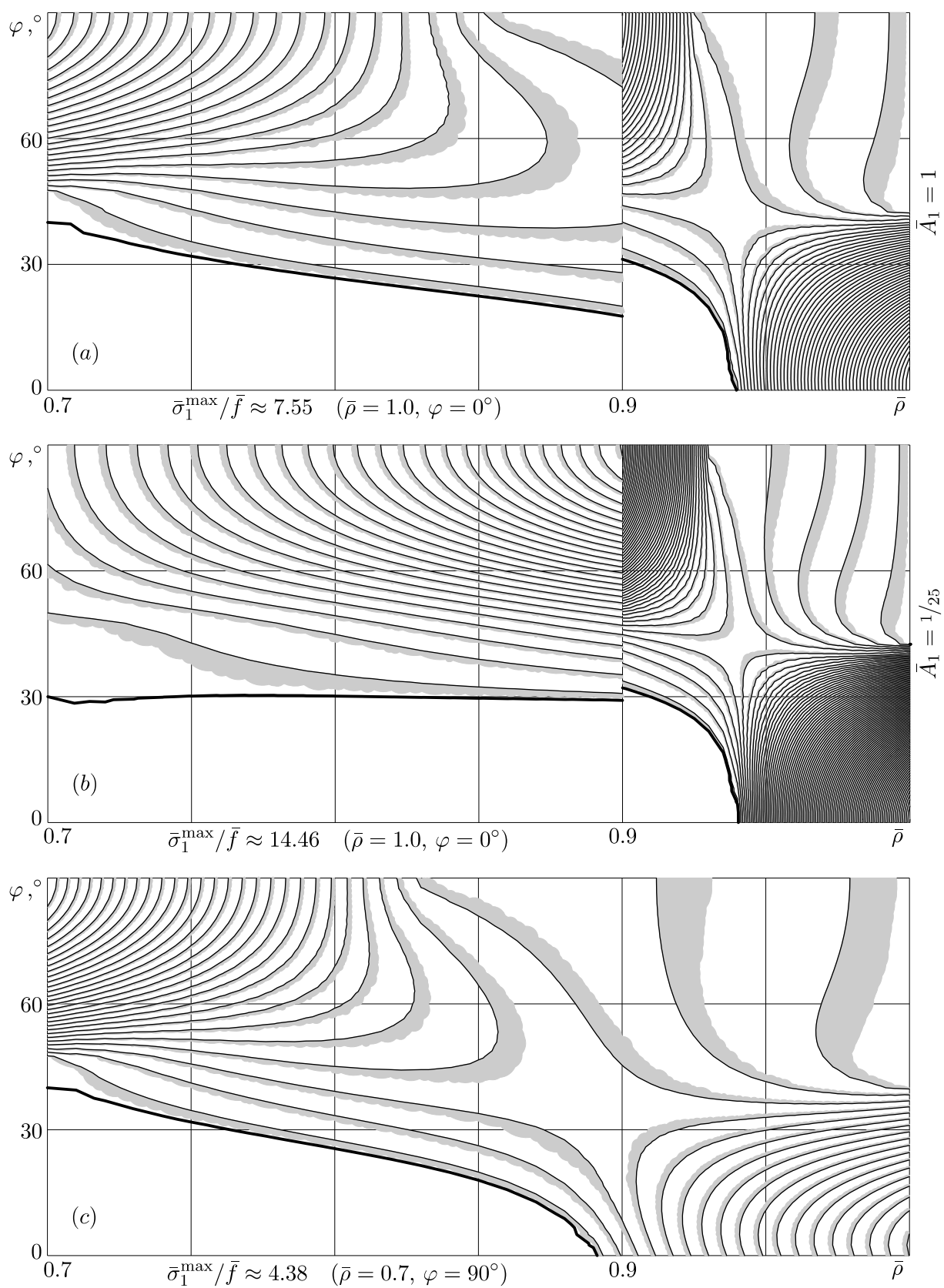
Окружное напряжение у подошвы арки (при  $\varphi = 0.0^\circ$  — см. фиг. 3.3, a, f) представляет собой величину контактного давления на основание, взятую с обратным знаком. Как видим, в рассматриваемом случае на периферии области контакта (вблизи наружной границы арки) имеется зона отрицательного давления. Это значит, что для реализации полученной картины деформирования необходимо постоянное присутствие удерживающих связей на основании. Размер указанной зоны на протяжении всего процесса возведения и после его завершения остается примерно одним и тем же, близким к начальному ее размеру на подошве исходно установленной арки (где зона потенциального отрыва занимает чуть меньше половины), и практически не зависит от скорости наращивания. При этом максимальное отрывающее напряжение действует всегда у внешней границы арки. Его величина во время «быстрого» роста выше, чем в процессе «медленного» наращивания, однако финальное значение в первом случае оказывается меньшим. Наибольшее (положительное) давление при обоих рассмотренных темпах возведения возникает на



**Фиг. 3.6.** Интенсивность касательных напряжений в тонкостенной наращиваемой арке: (a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



**Фиг. 3.7.** Финальные распределения интенсивности касательных напряжений в тонкостенной арке: (a) — при «быстром», (b) — при «медленном» наращивании; (c) — в классическом случае. Шаг по уровням 0.10.



**Фиг. 3.8.** Финальные распределения наибольших растягивающих напряжений в тонкостенной арке: (a) — при «быстром», (b) — при «медленном» наращивании; (c) — в классическом случае. Шаг по уровням 0.15.

границе исходной и дополнительной частей тела, причем со стороны первой. Но характер монотонности финальной эпюры контактного давления под дополнительной частью арки при увеличении скорости роста меняется на противоположный, в результате чего у внутренней границы арки появляется второй локальный максимум давления, который при дальнейшем увеличении скорости приближается по значению к первому (см. также фиг. 3.14, *a*). Заметим, что если бы рассматриваемое тело было установлено на основание уже после изготовления (а в процессе изготовления отсутствовали факторы, вызывающие деформирование тела), то эпюра контактного давления была бы практически линейной (что является, очевидно, следствием тонкостенности арки), имела (положительный) максимум у внутренней поверхности тела и переходила в область отрицательных значений вблизи границы раздела исходной и дополнительной его частей.

Сравнивая графики из различных колонок на фиг. 3.3, интересно также отметить, что в сечении арки плоскостью ее симметрии ( $\varphi = 90.0^\circ$  — фиг. *e, j*) при «медленном» наращивании внутренняя (и большая) часть материала растянута в окружном направлении, а внешняя сжата, в то время как при «быстром» наращивании в толще подвергнутого растяжению материала со временем появляется небольшая зона сжимающих, хотя и очень малых, окружных напряжений — в окрестности поверхности раздела двух конструктивных частей арки (здесь и ниже растяжение–сжатие понимается в смысле знака соответствующего нормального напряжения, а не величины линейного удлинения). При этом классическое решение дает в данном сечении, естественно, близкий к линейному закон распределения окружных напряжений с нулевым значением вблизи середины стенки арки.

Анализируя финальные эпюры радиальных напряжений (фиг. 3.4), можно отметить у них разное число локальных экстремумов при «быстром» и «медленном» процессах наращивания в сечениях  $\varphi = 0.0^\circ, 90.0^\circ$ , где соответственно сжимающие и растягивающие радиальные напряжения максимальны. В каждом из этих сечений наибольшие по модулю напряжения, достигаемые при двух рассмотренных скоростях роста, отличаются почти в два раза. С изменением полярного угла  $\varphi$  от  $0.0^\circ$  до  $90.0^\circ$  финальное состояние радиального сжатия во всех точках соответствующего сечения арки постепенно переходит в состояние растяжения. Этот переход, однако, происходит по-разному в случае «быстрого» и «медленного» наращивания, о чем свидетельствуют финальные графики, построенные для различных промежуточных значений  $\varphi$ .

Вид кривых, отражающих распределения касательных напряжений в продольных сечениях наращиваемой арки, проходящих через ее ось под углом  $\varphi$  к основанию, от угла к углу практически не изменяется. Меняется, в основном, только масштаб построения, то есть уровень максимальных значений напряжений. На подошве арки (при  $\varphi = 0.0^\circ$ ) касательные напряжения равны нулю по условию задачи, а в сечении  $\varphi = 90.0^\circ$  они отсутствуют в силу симметрии конструкции. При больших значениях времени максимум указанных напряжений в теле при обеих скоростях роста находится в сечении, близком к  $\varphi = 40.0^\circ$  (фиг. 3.5, *b*, *d*). Несмотря на общую визуальную схожесть графиков, построенных для различных сечений, у распределений, соответствующих достаточно близким к нулю значениям угла  $\varphi$ , имеется небольшое качественное отличие от распределений в других сечениях. А именно, при приближении к текущей внутренней границе арки касательное напряжение, действующее в некотором проходящем недалеко от основания сечении  $\varphi = \text{const}$ , меняет направление своего действия. Эта особенность имеет место при обоих рассмотренных режимах возведения на протяжении всего процесса наращивания. Однако после его прекращения она сохраняется с течением времени только в арке, возведенной достаточно «медленно», и исчезает в «быстро» изготовленной арке.

У приведенных графиков касательных напряжений, как и в случае напряжений радиальных, наблюдается различие в количестве локальных экстремумов и значительная разница между экстремальными значениями в сечении при разных скоростях протекания процесса роста.

С точки зрения оценки прочности конструкции могут представлять интерес инвариантные характеристики ее напряженного состояния, позволяющие судить о наибольшем сдвиговом и наибольшем растягивающем напряжениях, действующих в каждой ее точке. Согласно круговой диаграмме Мора [43] наибольшее растягивающее напряжение в данной точке совпадает с максимальным из главных напряжений  $\sigma_1$ , если последнее неотрицательно. В противном случае на всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку, действует сжимающее нормальное напряжение, то есть растяжение отсутствует. В качестве величины, характеризующей уровень сдвиговых напряжений, может быть выбрана интенсивность касательных напряжений  $T = \sqrt{1/2 \operatorname{dev} \mathbf{T} \cdot \operatorname{dev} \mathbf{T}}$ , которая может отличаться от наибольшего сдвигового напряжения  $\tau_{\max}$  только в большую сторону, причем не более, чем на 15.5% (известно [43], что  $\tau_{\max} \leq T \leq 2/\sqrt{3} \tau_{\max}$ , причем и нижняя, и верхняя оценка точна).

Эволюцию интенсивности касательных напряжений  $T$  в возводимой

арочной конструкции при двух выбранных режимах ее возведения можно проследить по графикам на фиг. 3.6. Установившиеся в итоге распределения этой величины во всем окончательно изготовленном теле изображены на фиг. 3.7. Видим, что «быстрое» наращивание дает в дополнительной части тела картину, схожую с классической. В пределах же исходной части наблюдается более интенсивное изменение изучаемой характеристики, чем при отсутствии роста. Рисунок, образованный линиями уровня, в этой части заметно отличается от классического, полученного без учета последовательности возведения рассматриваемой конструкции. Однако можно заметить, что он воспроизводит структуру распределения, имеющего место во всей мгновенно изготовленной арке окончательных размеров, что, очевидно, связано с тонкостенностью последней. Важным является то обстоятельство, что принятие во внимание последовательности изготовления в нашем случае приводит к существенному увеличению оценки максимального значения интенсивности касательных напряжений в конструкции. При высокой скорости роста  $\bar{A}_1 = 1$  оно превышает аналогичное значение для ненаращиваемой арки почти на 30% и достигается уже не у основания свода (на внутренней кромке подошвы, то есть в точках  $A_I$ ), как предсказывает классическое решение, а на вершине изготовленной арки (в самых верхних точках  $C_{II}$  ее внешней поверхности). Замедление процесса возведения в 25 раз практически не меняет вида исследуемой функции в исходной части конструкции, только ее изменение от точки к точке становится еще более интенсивным (линии уровня заметно сгущаются). Однако в дополнительной части происходит кардинальная перестройка линий уровня: график функции приобретает вид четко выраженного желоба. Положение максимума остается прежним, но его значение увеличивается еще почти в два раза.

Что касается максимального главного напряжения  $\sigma_1$ , то относительно финального распределения этой характеристики (фиг. 3.8) можно сделать по сути те же выводы, что были высказаны выше для интенсивности касательных напряжений  $T$ . При этом в данном случае пренебрежение механическими особенностями процесса изготовления конструкции приводит к еще большему занижению оценки максимального значения рассматриваемой величины, чем в случае с  $T$ : максимум  $\sigma_1$ , достигаемый при «быстром» наращивании, уже более, чем на 70%, отличается от максимума наибольшего растягивающего напряжения, возникающего в арке, установленной на основание уже в готовом виде (положения этих максимумов также различны). Снижение скорости протекания процесса приводит к увеличению ошибки в оценке максимального значения по

классической расчетной схеме.

**4. Усиление изначально толстостенной арки.** Как было отмечено в предыдущем пункте, при установке на жесткое основание тяжелой тонкостенной арки и закреплении ее посредством скользящей заделки возникает значительная по размерам зона отрицательного контактного давления, расположенная в периферийной части области контакта (подошв арки). Эта зона сохраняется и при последующем утолщении арки, а также после его завершения. В результате даже после введения в эксплуатацию окончательно изготовленной конструкции на ее основании должны оставаться некоторые удерживающие связи<sup>1</sup>. Оказывается, данное обстоятельство имеет место не только для тонкостенных конструкций. Даже весьма толстостенные своды, устанавливаемые (после изготовления) на гладкое жесткое основание, стремятся под действием собственного веса от него отслоиться. Так, для принятого значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.1$  (характерного для некоторых сортов бетона) отслоения подошв не происходит лишь у таких круговых арок, толщина стенки которых составляет не меньше, чем приблизительно 68% от внешнего радиуса. Только применительно к таким (очень толстым) аркам условие скользящей заделки на основании, очевидно, эквивалентно обычному условию гладкого контакта.

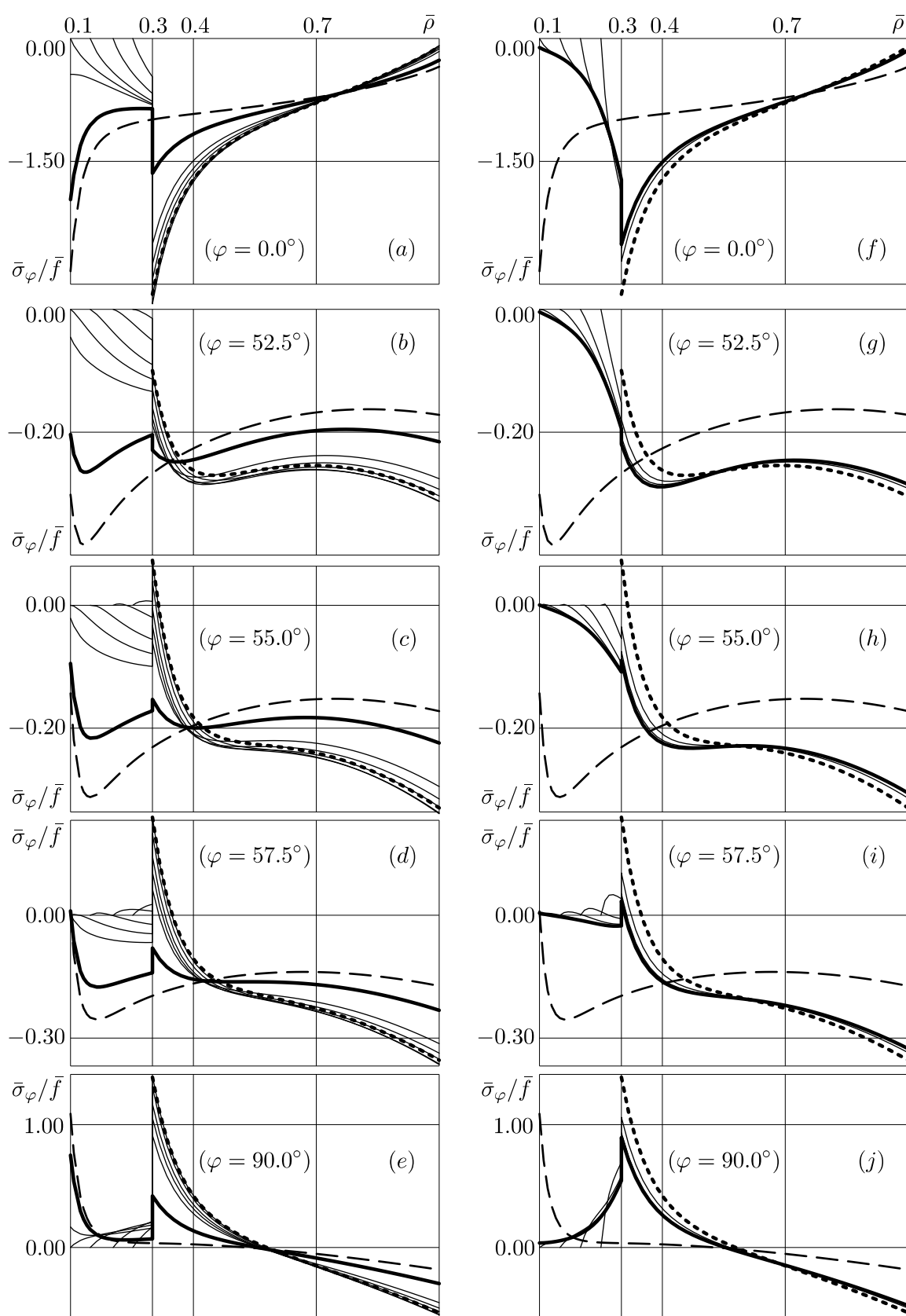
В этом пункте рассмотрим задачу об утолщении за один этап наращивания изначально настолько толстостенной арки, что у ее подошв в момент установки не возникает отрицательных окружных напряжений. Примем  $\bar{a}_0 = 0.3$ ,  $\bar{a}_1 = 0.1$ . На фиг. 3.9–3.13 приведены результаты решения данной задачи. Принцип расположения координатных полей на всех фигурах тот же, что и в предыдущем пункте.

Не проводя на сей раз столь подробного, как в п. 3, разбора представленных графиков, укажем лишь на одно характерное обстоятельство.

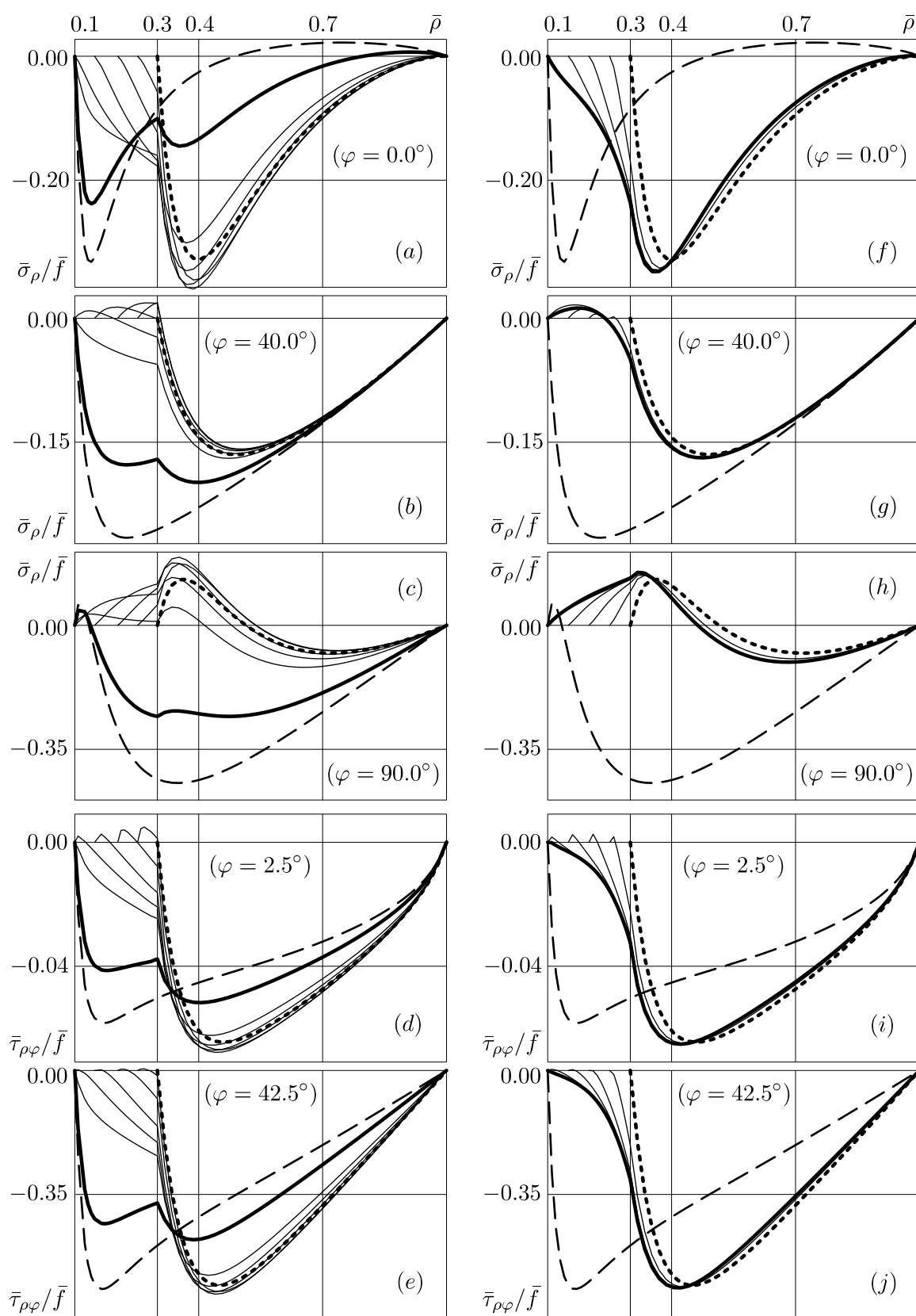
При установке на гладкое основание достаточно толстой заранее изготовленной арки у ее внутренней поверхности на подошве ( $\varphi = 0.0^\circ$ ) и в плоскости симметрии ( $\varphi = 90.0^\circ$ ) возникает конечная концентрация окружных напряжений и, следовательно, интенсивности касательных напряжений. Чем больше толщина стенки установленной арки, тем меньше пиковое значение напряжения, но тем выше интенсивность нарастания напряжений при приближении к критической точке. Избавиться от концентрации напряжений в подобной арке с помощью процедуры дальней-

---

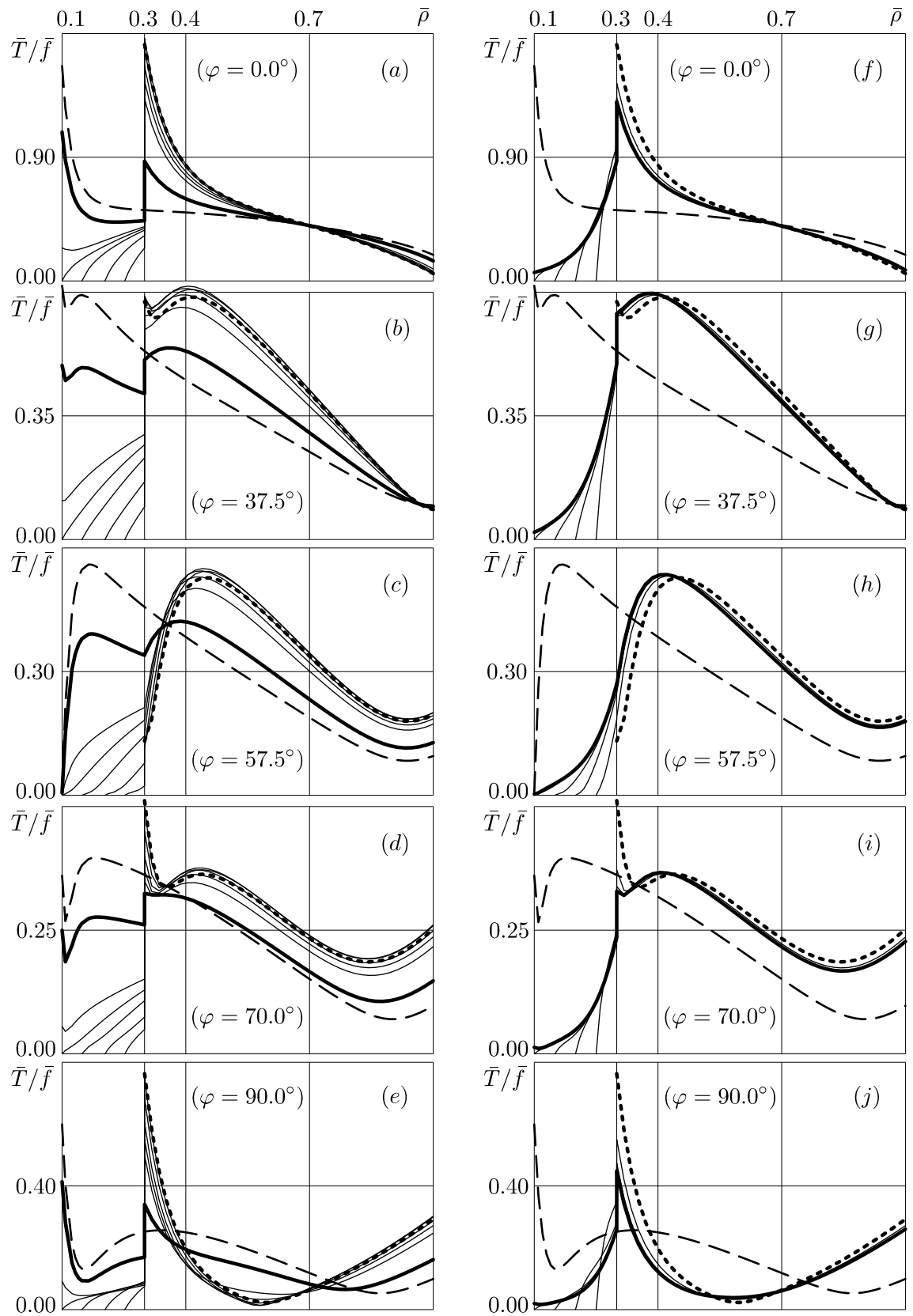
<sup>1</sup>Можно, разумеется, поставить вопрос о возведении арки на гладком основании и без выставления довольно специфического условия скользящей заделки. Но в таком случае придется решать гораздо более сложную контактную задачу наращивания с неизвестной заранее областью контакта.



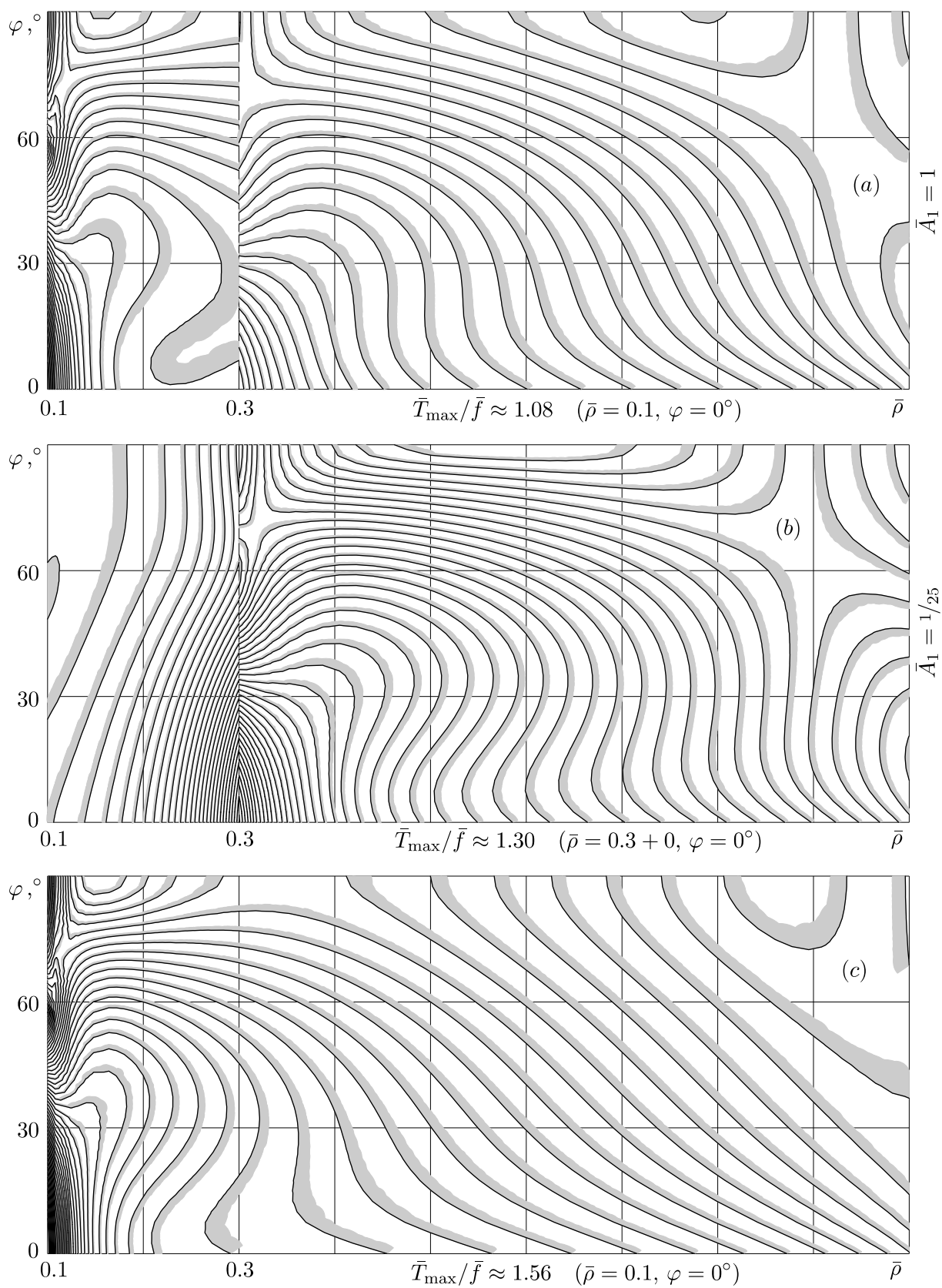
**Фиг. 3.9.** Окружные напряжения в толстостенной наращиваемой арке:  
 (a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



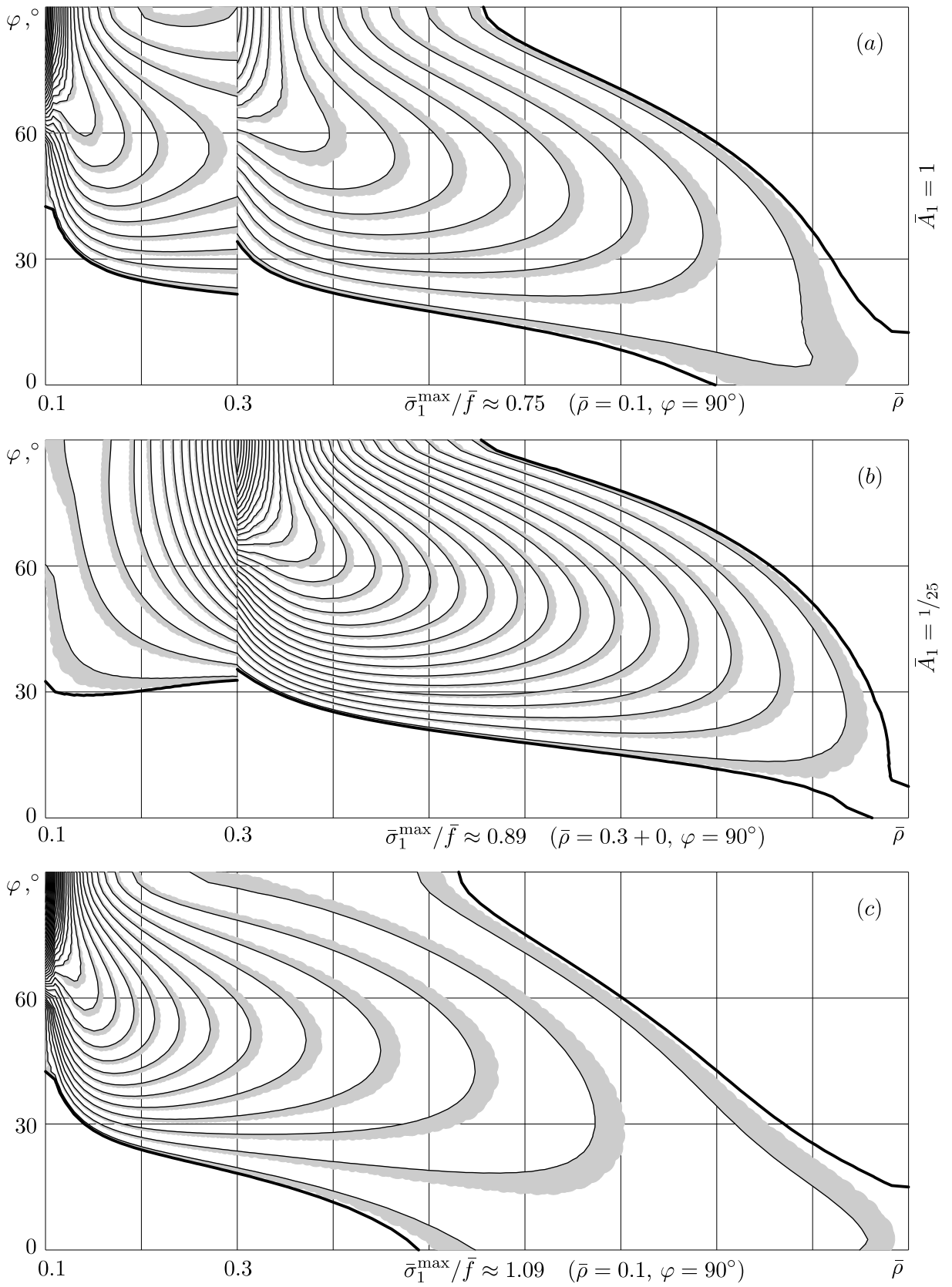
**Фиг. 3.10.** Радиальные и касательные напряжения в толстостенной наращиваемой арке: (a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



**Фиг. 3.11.** Интенсивность касательных напряжений в толстостенной наращиваемой арке: (a)–(e) — «быстрое», (f)–(j) — «медленное» наращивание.



**Фиг. 3.12.** Финальные распределения интенсивности касательных напряжений в толстостенной арке: (a) — при «быстром», (b) — при «медленном» наращивании; (c) — в классическом случае. Шаг по уровням 0.03.



**Фиг. 3.13.** Финальные распределения наибольших растягивающих напряжений в толстостенной арке: (a) — при «быстром», (b) — при «медленном» наращивании; (c) — в классическом случае. Шаг по уровням 0.03.

шего ее утолщения оказывается невозможным. Однако при этом удастся получить такую арочную конструкцию, максимальные значения окружающих напряжений в указанных критических сечениях которой будут даже меньше, чем в стоящей на основании аналогичной тяжелой арке, имеющей с самого момента установки окончательные размеры. При достаточно быстром наращивании в этих сечениях со временем возникает два пика напряжений — у внутренней граничной поверхности готовой конструкции и в ее толще, на стыке исходно существующей и наращенной частей со стороны первой. При медленном утолщении пик напряжений сохраняется на границе исходной части (снижая, однако, свою первоначальную величину) и не возникает на новой поверхности тела. В обоих случаях более выгодным оказывается и финальное состояние всего сформированного в итоге тела, чем если бы это тело было установлено на основание сразу в готовом виде. Так, оба выбранных для иллюстрации скоростных режима роста дают в пределе по времени максимумы интенсивности касательных напряжений  $T$  и наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  во всей конструкции, заметно меньшие соответствующих значений в «мгновенно изготовленной» (классической) арке тех же размеров: при «быстром» утолщении примерно на 31% как для интенсивности, так и для первого главного напряжения; при «медленном» — примерно на 17 и 18% для интенсивности и главного напряжения. При изменении скорости процесса меняется также и местоположение точек максимумов: для  $T$  и  $\sigma_1$  это соответственно точки  $A_I$  и  $A_{II}$  при «быстром» росте и в классическом случае и точки  $B_I^+$  и  $B_{II}^+$  при «медленном» наращивании.

Заметим, что если на подошвах изначально установленной арки отсутствуют зоны отрицательного давления, то они не возникают и при утолщении этой арки.

### 5. Особенности напряженного состояния общего характера.

Обратим теперь внимание на некоторые характерные качественные особенности напряженного состояния рассматриваемых конструкций, проявляющиеся вследствие их постепенного возведения в условиях действия сил тяжести. Эти особенности могут быть выявлены в результате рассмотрения зависимостей, приведенных на фиг. 3.3–3.13.

А. Глядя на представленные графики распределений отдельных компонент тензора напряжений, сразу же можно заметить, что радиальное и касательное напряжения непрерывны в каждый момент времени во всем рассматриваемом теле, а окружное терпит разрыв первого рода на границе  $\rho = a_0$  раздела исходно изготовленной и полученной в результате

наращивания его частей.

Отсутствие разрыва первых двух указанных напряжений на данной поверхности является, очевидно, необходимым условием механического контакта названных частей. Разрыв неконтактных напряжений на первоначальной поверхности роста является, как показано в § 1.6, особенностью напряженного состояния, органически присущей в общем случае любому наращиваемому телу. В том же параграфе проведен достаточно подробный качественный и количественный анализ этой особенности для произвольного тела, поэтому здесь останавливаться на ней более мы не будем. Укажем только, что для величины скачка окружного напряжения на поверхности  $\rho = a_0$  при рассматриваемом в настоящем параграфе варианте изготовления арки справедлива зависимость (1.63), приведенная в следствии 1.2.

*Б.* Еще одной, сразу обращающей на себя внимание, особенностью является существенная зависимость финального напряженного состояния вязкоупругой арки от скорости ее формирования.

При этом в случае достаточно медленного наращивания окружное напряжение и, следовательно, интенсивность касательных напряжений на внутренней границе арки после прекращения ее роста не успевают развиваться до значений, заметно отличающихся от нуля. Это объясняется тем, что к окончанию возведения конструкции ресурс ползучести основной части ее массива практически исчерпан и ощутимое перераспределение напряжений с этой части на вновь присоединенный тонкий слой изначально свободного от напряжений материала уже невозможно. В результате этот последний так и остается почти не загруженным. Радиальное и касательное напряжения на внутренней поверхности арки всегда равны нулю по условиям задачи.

Видим также, что распределение напряжений в исходной части толстостенной арки во все моменты процесса ее «медленного» утолщения и спустя любое количество времени после окончания этого процесса не сильно отличается от первоначального распределения, возникшего перед началом наращивания. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае толщина добавленного в процессе наращивания слоя материала достаточно мала по сравнению с толщиной исходно существовавшей части конструкции, а продолжительность самого процесса достаточно велика.

*В.* Из всего сказанного выше вытекает, что при любой скорости роста распределение напряжений в постепенно возведенной конструкции как в количественном, так и в качественном плане будет принципиальным об-

разом отличаться от классического распределения, найденного без учета влияния на тело сил тяжести в процессе его изготовления (или, что то же самое, без учета механических особенностей наращивания тела при действующей на него нагрузке) — из задачи для деформируемого твердого тела, имеющего с самого начала загрузки фиксированные размеры.

При этом все же необходимо отметить, что финальные напряжения в случае высокой скорости возведения оказываются в целом ближе к классическим, чем при медленном наращивании. Данный факт обусловлен относительно малым по сравнению с продолжительностью стадии интенсивной ползучести материала различием в моментах начала деформирования всех элементов конструкции при ее достаточно быстром изготовлении под нагрузкой. Это предполагает, в том числе, и небольшие по продолжительности паузы между установкой (загрузкой) исходной части и началом ее наращивания, а также между соседними по времени этапами непрерывного роста, если таковых несколько.

Более подробное обсуждение особенностей деформирования наращиваемых тяжелых конструкций, а также анализ причин, вызывающих их проявление, проводятся в следующем пункте настоящего параграфа.

**6. Деформирование произвольного вязкоупругого тела, наращиваемого в поле сил тяжести.** Проанализируем основные факторы, оказывающие влияние на процесс деформирования под действием сил тяжести произвольного вязкоупругого стареющего тела, наращиваемого предварительно не напряженными элементами. К таким факторам относятся: запаздывание деформации (*последствие*), ослабление со временем количественного проявления способности материала деформироваться под прикладываемыми к нему нагрузками (*старение*) и наличие у элементов материала определенного *веса*.

Очевидно, что сколь угодно тонкий слой даже невесомого дополнительного материала, присоединенный сразу или постепенно к находящейся еще в процессе деформирования (из-за запаздывания деформации) поверхности уже существующего вязкоупругого тела, начинает деформироваться вместе с этой поверхностью. Это вызывает со временем перераспределение напряжений во всем наращиваемом теле вследствие изменения его общей жесткости в процессе деформирования. Ввиду свойства затухания ползучести, присущего рассматриваемому вязкоупругому материалу (см. § 0.4), степень перераспределения будет зависеть от скорости утолщения дополнительного слоя: чем быстрее произойдет ощутимое увеличение его толщины, тем сильнее он успеет повлиять на процесс дефор-

мирования того тела, на поверхности которого был сформирован, и тем более заметным окажется в итоге перераспределение напряжений. Наиболее сильным оно будет, естественно, при мгновенном присоединении к телу материального слоя конечной толщины. Потенциально возможная степень перераспределения напряжений в теле за счет его пополнения новым материалом определяется интенсивностью деформирования тела непосредственно до этого пополнения. Понятно, в частности, что если деформирование тела к этому моменту уже полностью закончено, то перераспределение установившихся в нем напряжений на дополнительный материал вообще не возможно. Изменить напряженно-деформированное состояние такого тела может только изменение нагрузки. Так обстоит дело, например, при чисто упругом поведении материала, деформирование которого, в отличие от вязкоупругого, происходит мгновенно (без запаздывания).

В то же время, поскольку любой присоединившийся слой материала обладает некоторым весом, он создает дополнительную нагрузку на наращиваемое тело и побуждает его тем самым к дополнительной деформации, а следовательно, вызывает в нем появление дополнительных напряжений. Здесь, однако, стоит заметить, что если в процессе наращивания происходит укрепление рассматриваемой конструкции за счет изменения ее геометрии, то с течением времени вес непрерывно присоединяемого материала будет изменять состояние конструкции все в меньшей и меньшей степени.

Непрерывное взаимодействие двух отмеченных тенденций (к перераспределению за счет ползучести уже возникших в теле напряжений и появлению дополнительных напряжений в результате его постоянного догружения) и определяет характер механического процесса, протекающего в рассматриваемом наращиваемом теле при тех или иных обстоятельствах. При этом на каждую из них оказывает влияние старение материала, продолжающееся до определенного возраста и протекающее независимо от процесса деформирования. Важным также является принципиальное различие во временном характере проявления данных тенденций. Если процесс перераспределения вследствие ползучести напряжений в формируемом теле растянут во времени и заканчивается лишь спустя некоторое время после завершения формирования, а темп его протекания связан с внутренними свойствами материала, то процесс дополнительного загружения тела весом новых элементов не привязан объективно к какой-либо заданной шкале времени и определяется лишь последовательностью присоединения материала. При быстром пополнении

тела новыми элементами закладывается относительно большой потенциал к дальнейшему перераспределению напряжений (зависящий, конечно, от текущего возраста материала). Но при этом происходит и интенсивное утяжеление тела, которое может вызвать в нем значительный рост напряжений — за то время, пока ползучесть еще не успевает существенно повлиять на этот процесс.

Процессы наращивания с достаточно сильно выраженной тенденцией к перераспределению напряжений за счет ползучести приводят конструкцию в итоге к такому состоянию, которое в целом будет достаточно близко к реализуемому при ее загрузке уже в готовом виде, то есть в классическом для механики варианте, поскольку в таких процессах все элементы тела деформируются в достаточной степени согласованно. Однако эта близость в общем случае не может быть неограниченной, потому что при мгновенном включении в состав вязкоупругого тела весомых элементов не бесконечно малых размеров (одним из таких элементов является исходная часть конструкции) состояние всего этого тела изменится скачкообразно. В результате итоговое распределение напряжений в теле будет иметь разрывы, не свойственные классическому распределению. Эта же особенность возникает и при наличии пауз в процессе непрерывного наращивания.

Когда же тенденция к перераспределению напряжений в теле на протяжении всего процесса его деформирования проявляется достаточно слабо, всякий элемент дополнительного материала, непрерывно присоединяемого в ненапряженном состоянии, деформируется, в основном, только за счет догружения всей конструкции весом элементов, присоединяемых вслед за ним. В такой ситуации рассматриваемый элемент может приобрести существенные по величине напряжения только в том случае, если после него добавится достаточно большое количество нового материала. Если же за весь подобный процесс наращивания будет сформирован относительно тонкий дополнительный слой материала, то весь этот слой окажется в итоге загруженным весьма незначительно, а исходная часть конструкции мало изменит свое первоначальное состояние. Но, так или иначе, результирующее состояние всей готовой конструкции будет в общем случае принципиально отличаться от классического.

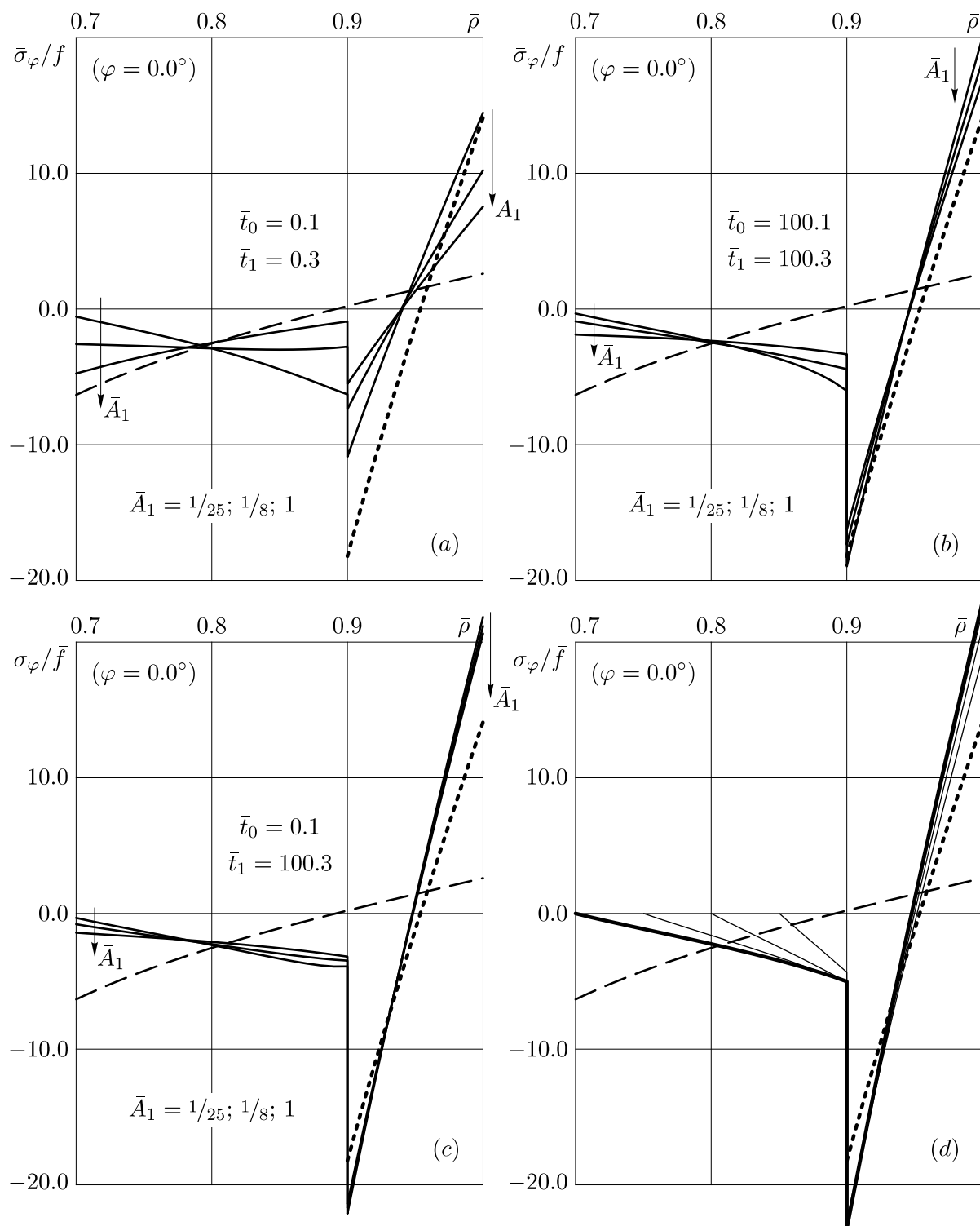
Крайним в этом смысле является вариант изготовления тяжелого тела из чисто упругого материала. В таком процессе осуществляется *только* догружение существующей части весом присоединяемых к ней новых элементов и невозможно перераспределение уже имеющихся напряжений. Поэтому картина напряженно-деформированного состояния, сфор-

мировавшаяся в упругом теле к моменту завершения его изготовления, не изменяется более с течением времени и будет отличаться от классической наиболее радикально.

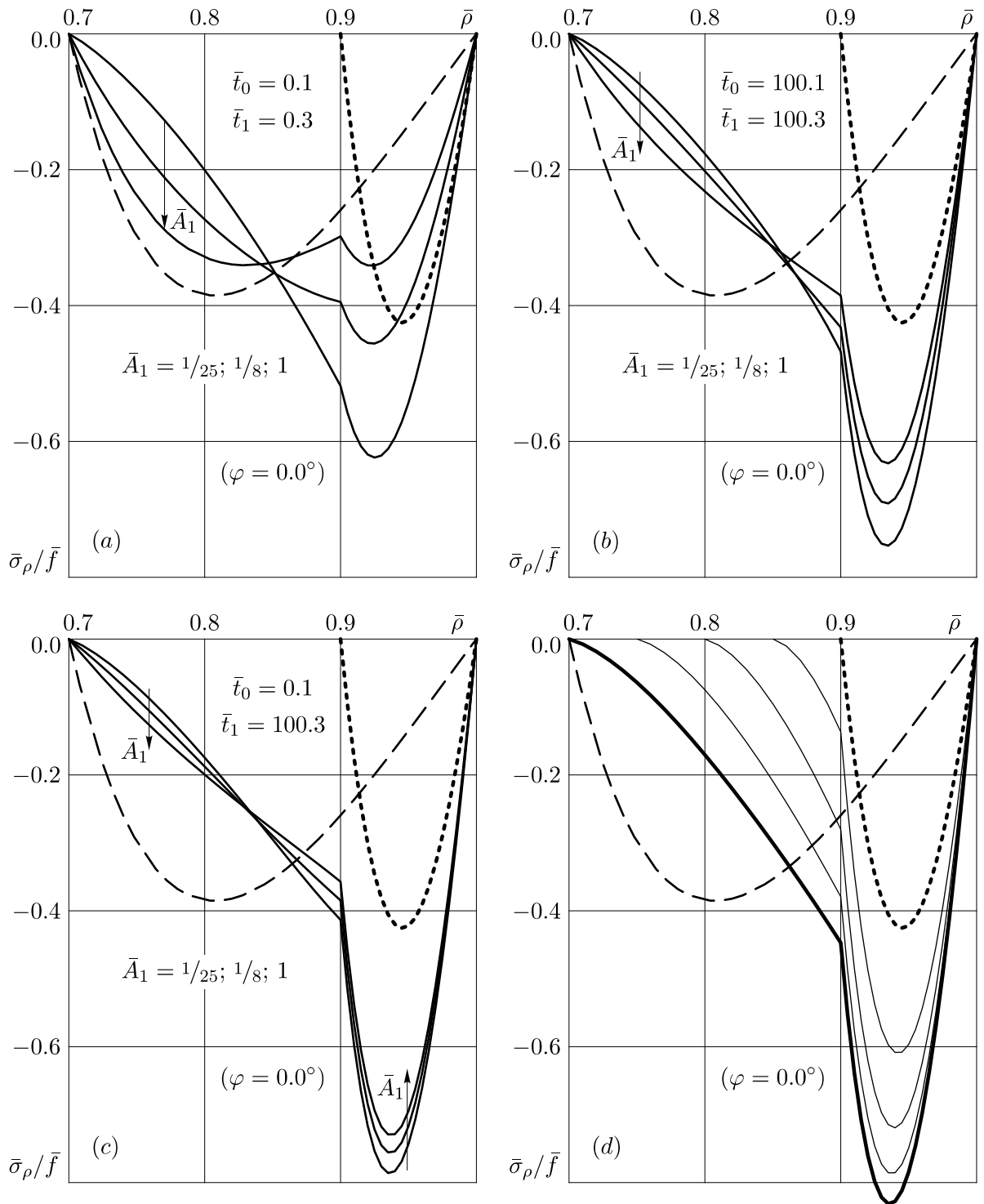
**7. Состояние рассматриваемой конструкции при различных режимах ее возведения.** Проиллюстрируем теперь изложенные выше общие соображения результатами конкретных числовых расчетов. Исследуем влияние различных временных параметров процесса возведения на итоговое напряженное состояние созданной в результате конструкции на примерах изготовления тонкой и толстой арок из одной и той же тонкостенной заготовки, а также утолщения исходно толстостенной арки.

А. Сначала рассмотрим процессы, включающие только один этап непрерывного наращивания с постоянной скоростью изменения радиуса. Фиг. 3.14–3.16 соответствуют характерным значениям относительного внутреннего радиуса  $\bar{a}_0 = 0.9$ ,  $\bar{a}_1 = 0.7$  (изготовление тонкостенной арки), фиг. 3.17–3.19 — случаю  $\bar{a}_0 = 0.9$ ,  $\bar{a}_1 = 0.3$  (изготовление толстостенной арки из тонкой), а фиг. 3.20–3.22 приведены для случая  $\bar{a}_0 = 0.3$ ,  $\bar{a}_1 = 0.1$  (утолщение изначально толстой арки, не имеющей зоны отрицательного давления на основание). Варианты (a)–(c) на всех указанных фигурах отвечают различным значениям моментов  $t_0$  установки исходной арки на основание и  $t_1$  начала ее наращивания. Графики, построенные *сплошными линиями*, представляют собой финальные распределения окружного и радиального напряжений, а также интенсивности касательных напряжений у подошв окончательно сформированной арки ( $\varphi = 0.0^\circ$ ) для трех различных скоростей ее формирования  $\bar{A}_1$ . Фиг. d показывают эволюцию данных характеристик в процессе возведения соответствующей арки из чисто упругого материала (с тем же коэффициентом Пуассона, что и рассматриваемый вязкоупругий материал).

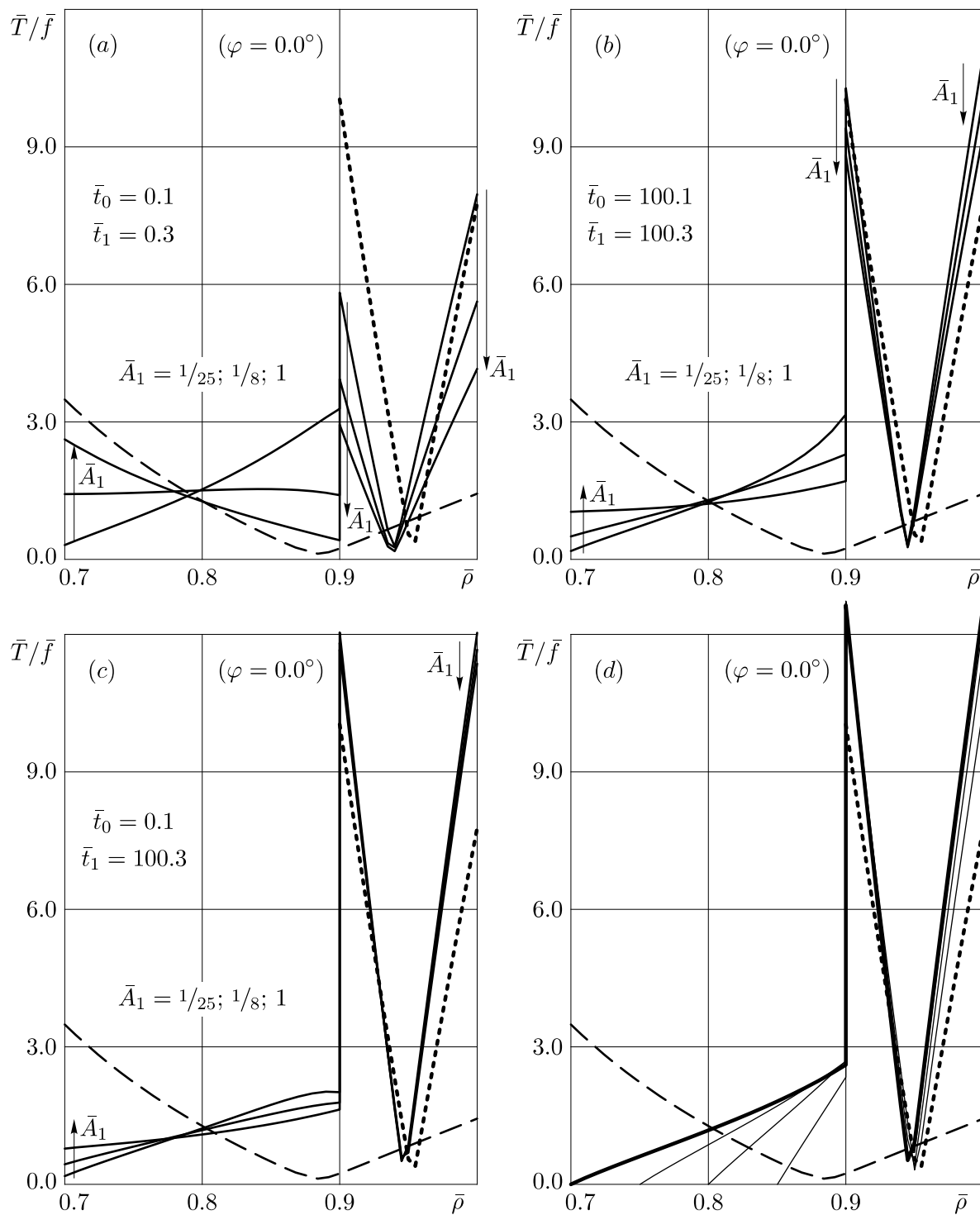
Вариант (a) характеризуется очень ранним возрастом материала в момент установки исходной арки на основание и началом процесса ее утолщения по прошествии после этого достаточного малого промежутка времени, когда исходная часть арки находится еще на стадии интенсивного деформирования. Поэтому добавление к арке нового материала позволяет достаточно сильно приблизить ее финальное состояние к соответствующему окончательной конфигурации классическому состоянию и тем самым разгрузить исходный материал за счет загрузки дополнительного. Причем тем сильнее, чем быстрее происходит процесс наращивания. Здесь наблюдается также существенная зависимость финальных эпюр напряжений от продолжительности (скорости) роста. Это



**Фиг. 3.14.** Нормальные контактные напряжения на подошве тонкостенной арки:  
 (a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.

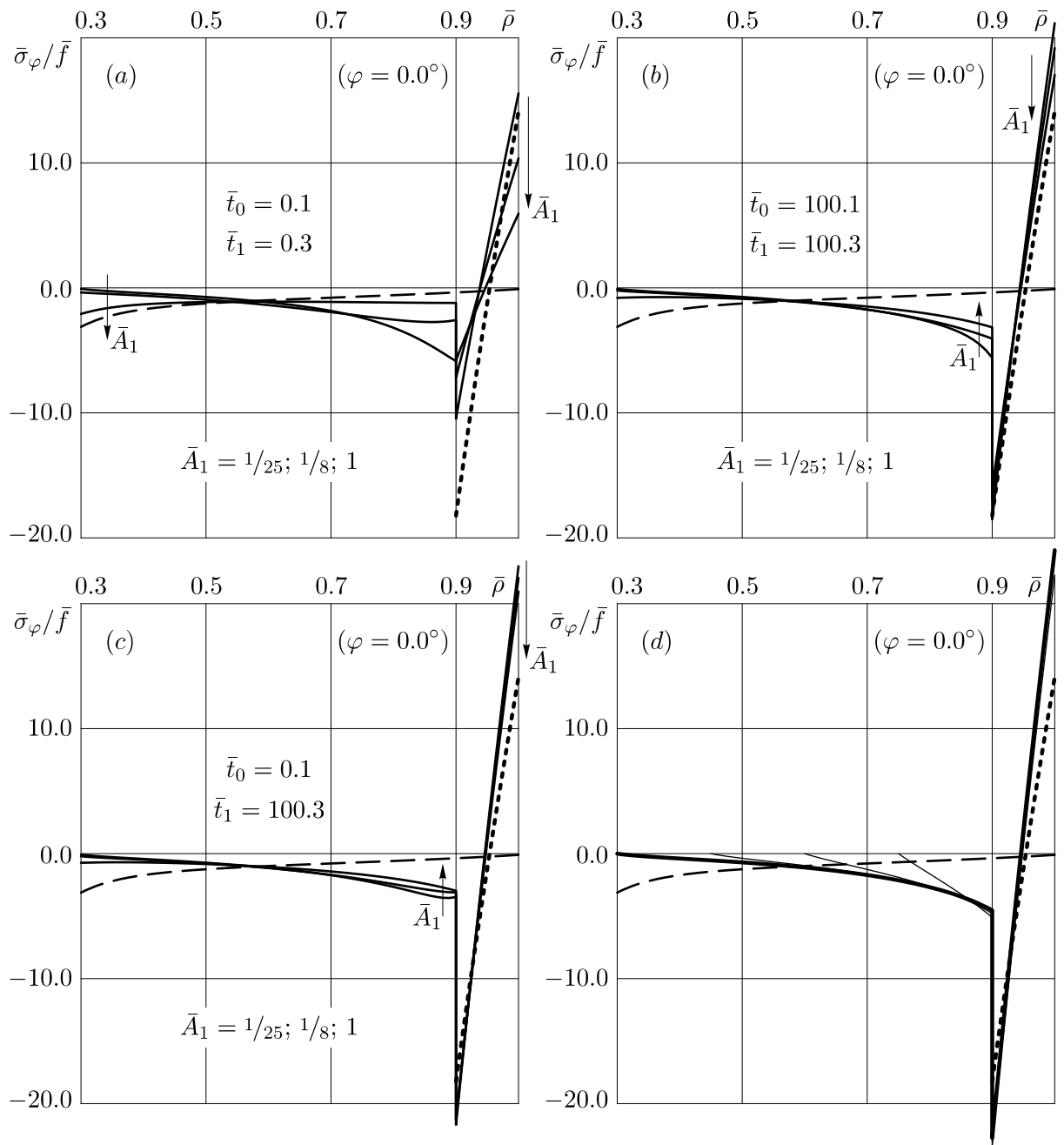


**Фиг. 3.15.** Радиальные напряжения в точках подошвы тонкостенной арки: (a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.

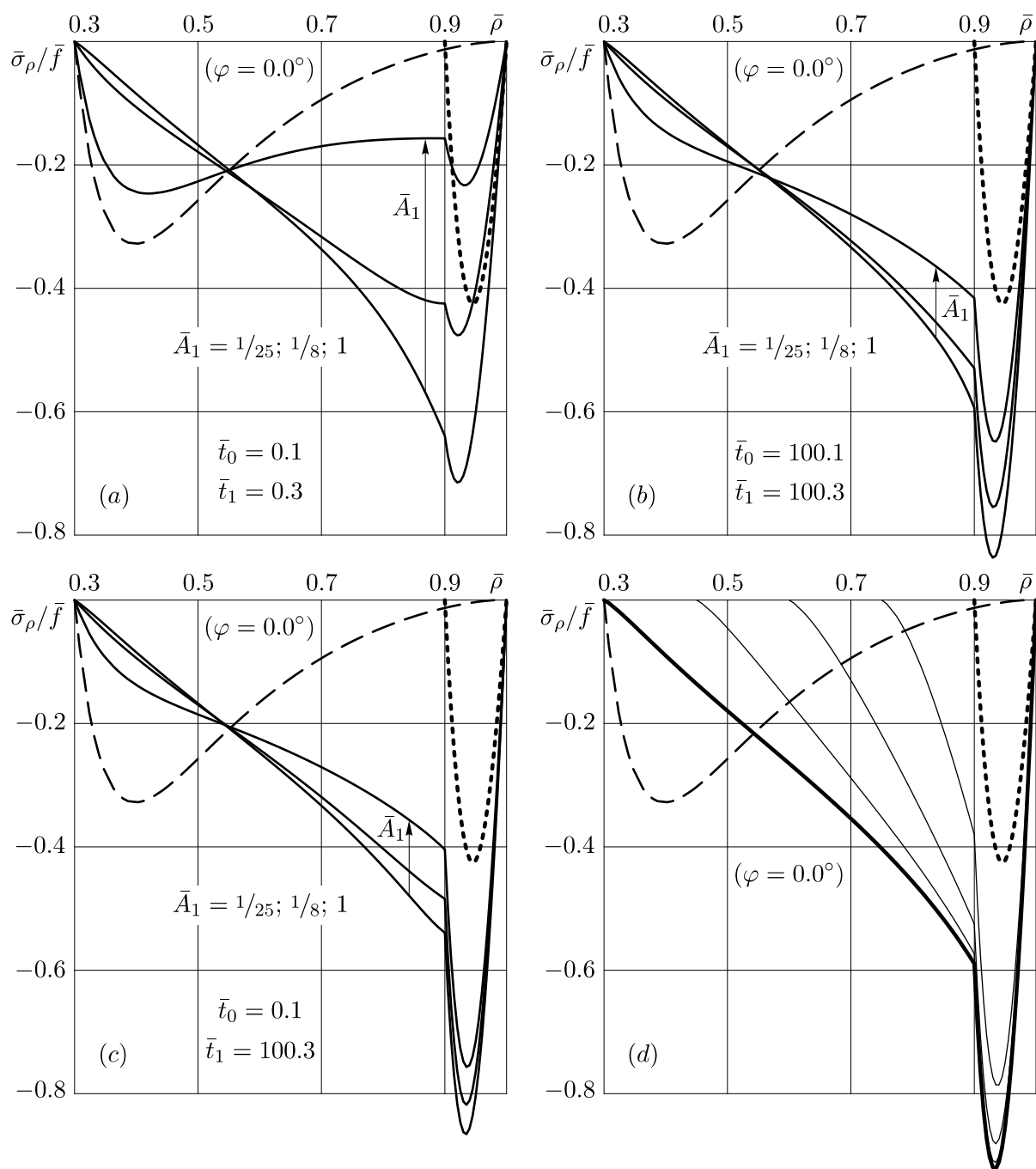


**Фиг. 3.16.** Интенсивность касательных напряжений  
в точках подошвы тонкостенной арки:

(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



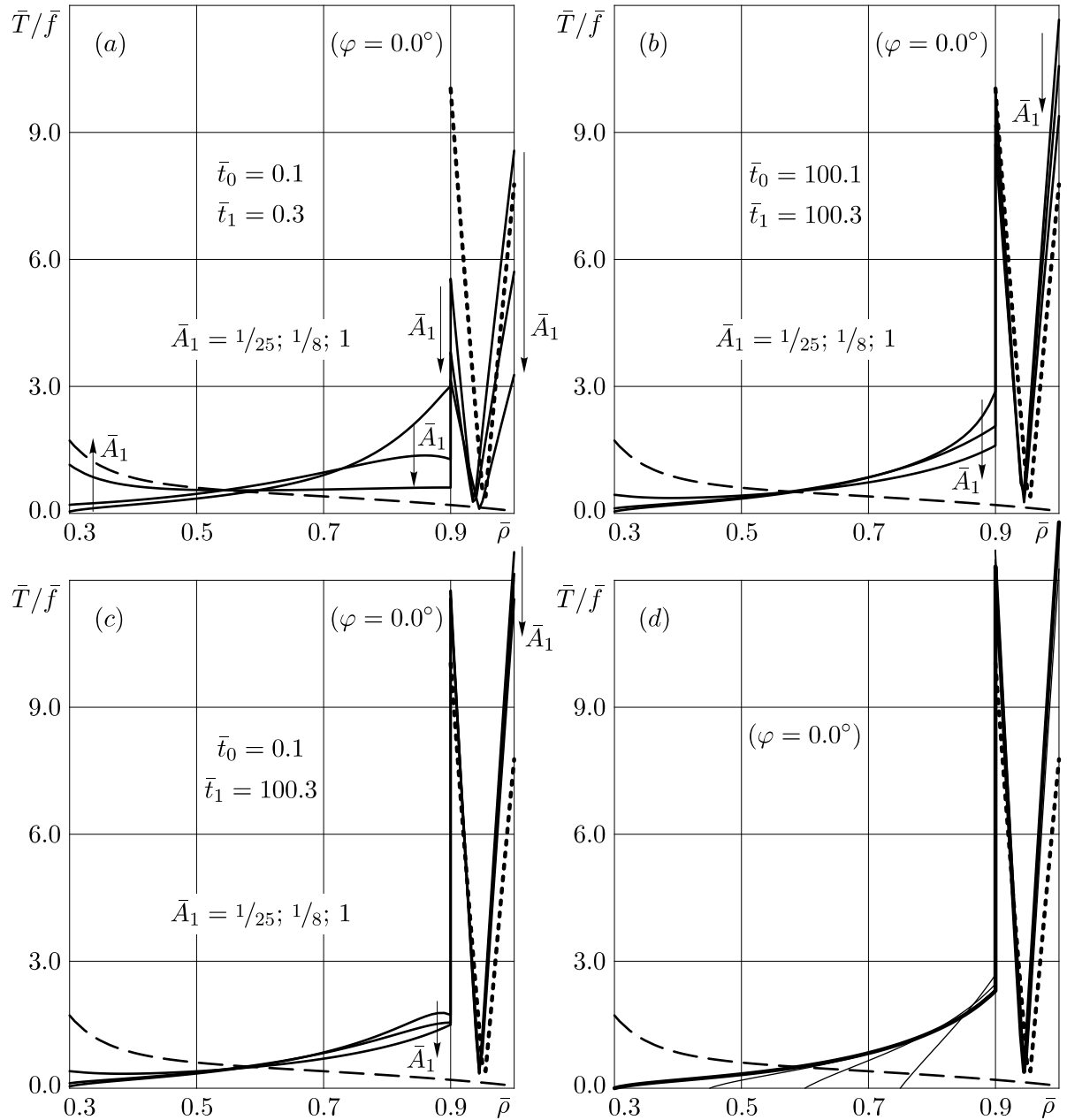
**Фиг. 3.17.** Нормальные контактные напряжения на подошве толстостенной арки, изготовленной из тонкостенной: (a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



**Фиг. 3.18.** Радиальные напряжения

в точках подошвы толстостенной арки, изготовленной из тонкостенной:

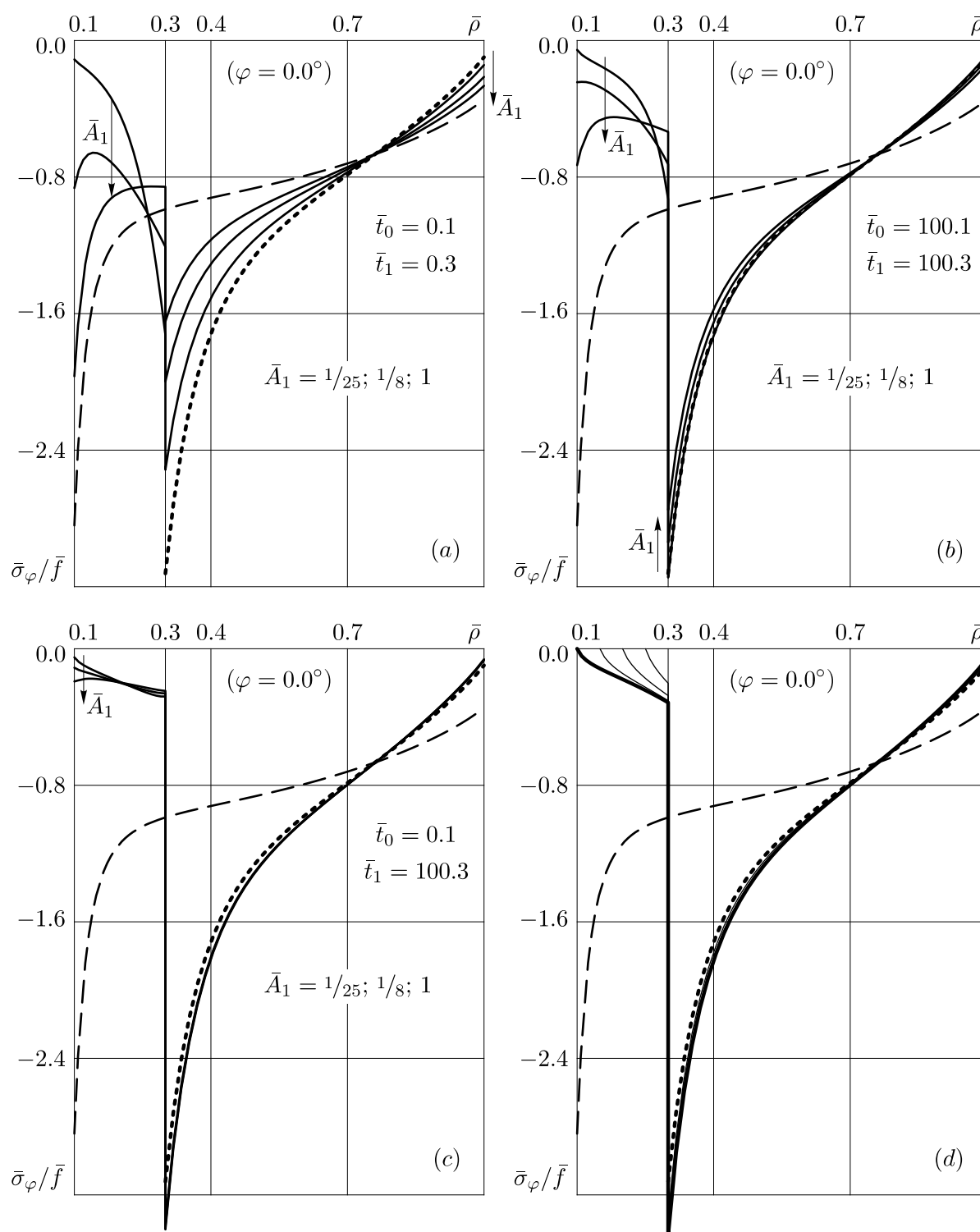
(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



**Фиг. 3.19.** Интенсивность касательных напряжений

в точках подошвы толстостенной арки, изготовленной из тонкостенной:

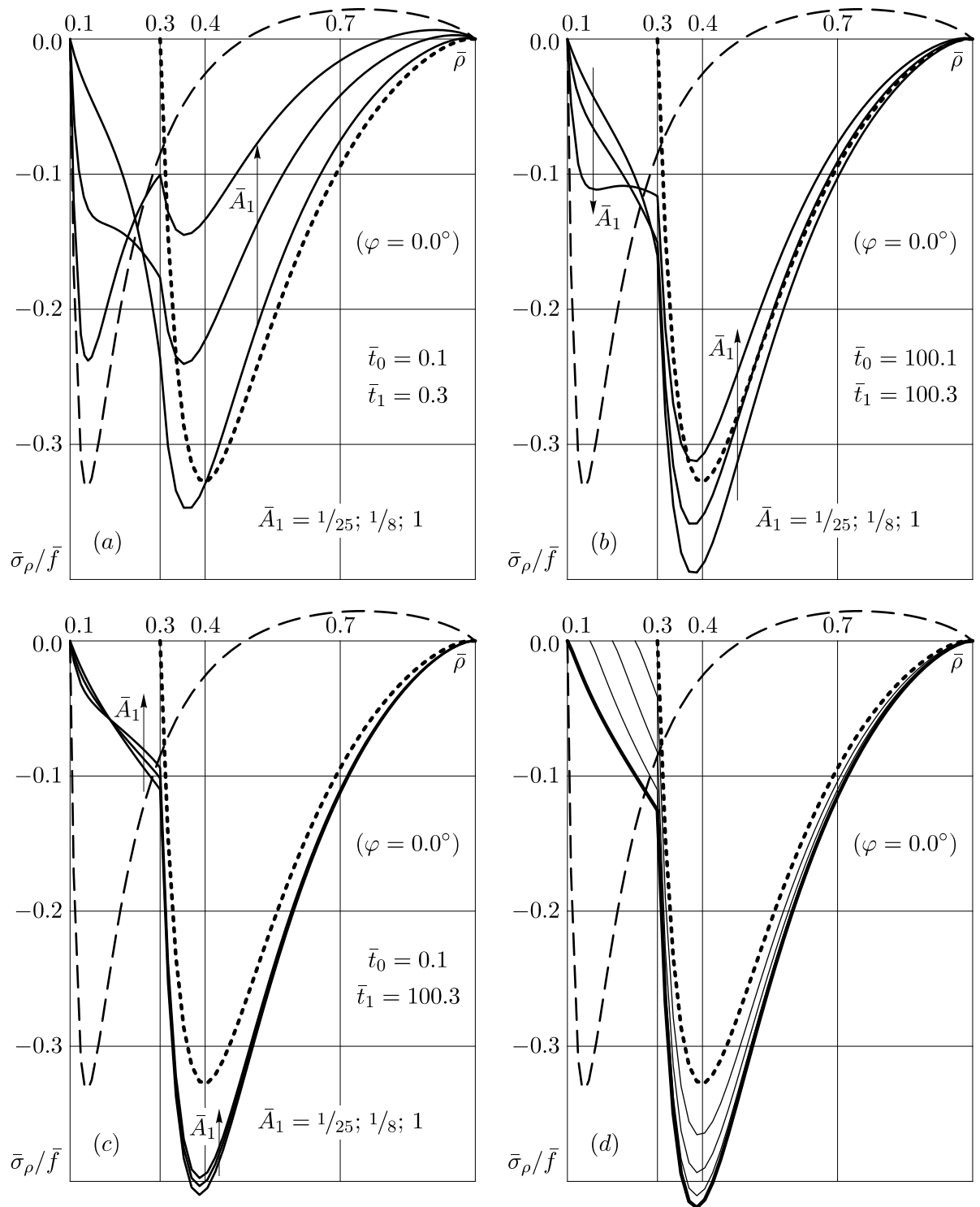
(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $\bar{A}_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



**Фиг. 3.20.** Нормальные контактные напряжения

на подошве усиленной толстостенной арки:

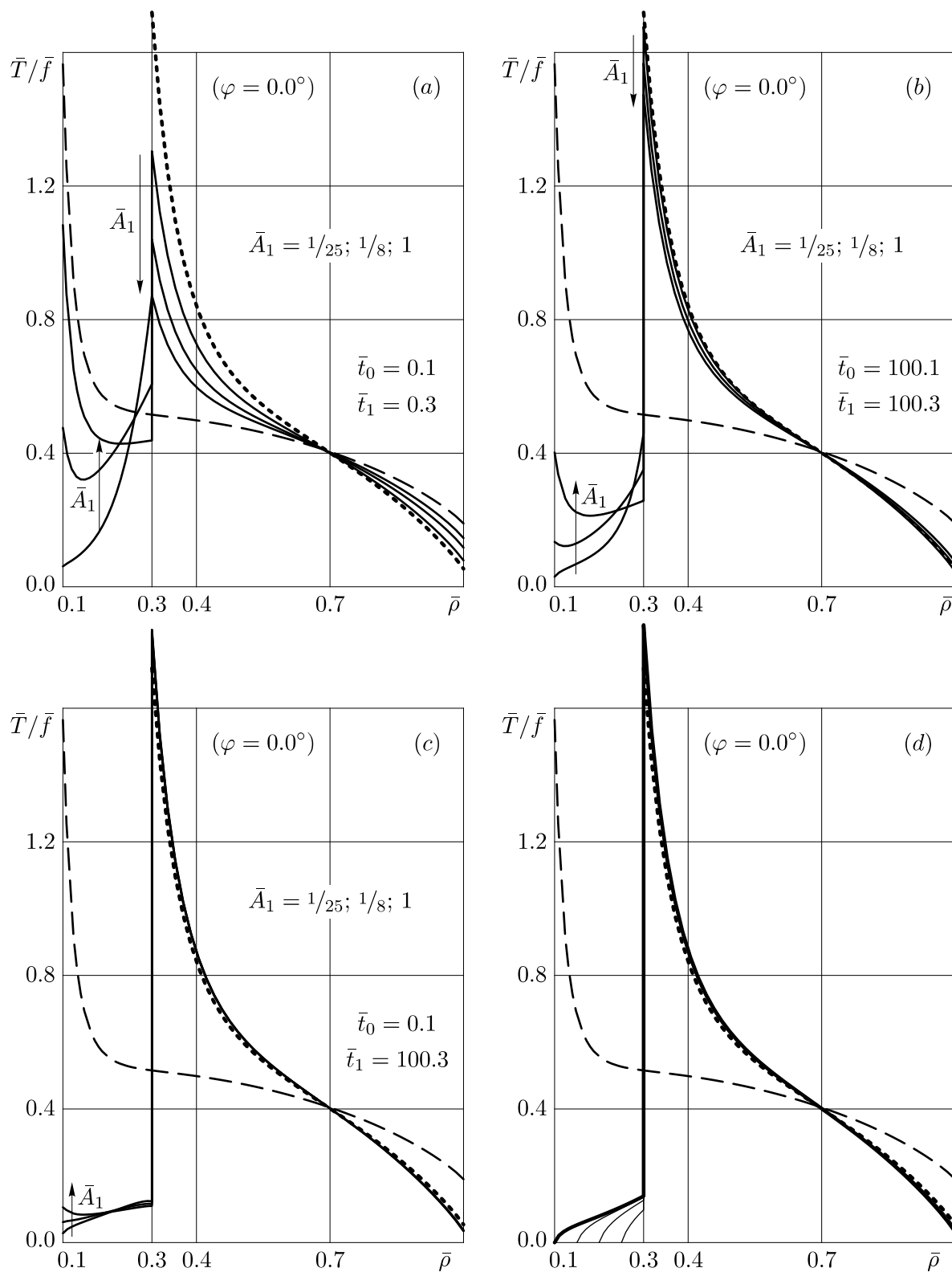
(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $\bar{A}_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



**Фиг. 3.21.** Радиальные напряжения

в точках подошвы усиленной толстостенной арки:

(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $\bar{A}_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.



**Фиг. 3.22.** Интенсивность касательных напряжений в точках подошвы усиленной толстостенной арки:

(a)–(c) — финальные распределения в вязкоупругом случае при различных режимах непрерывного наращивания с постоянной скоростью  $A_1$  уменьшения внутреннего радиуса; (d) — эволюция при наращивании в чисто упругом случае.

объясняется как большим ресурсом ползучести материала на начальной стадии утолщения, который может быть эффективно использован при достаточно быстром наращивании, так и значительным изменением деформативных свойств материала за счет его старения в течение достаточно медленного процесса.

Вариант (b) аналогичен варианту (a) по продолжительности паузы  $\Delta t_1$  перед началом наращивания, но отличается от него принципиально бóльшим возрастом материала в момент  $t_0$  начала возведения. В этом варианте на протяжении всего процесса деформирования арки материал ее можно считать уже старым. А поскольку ресурс ползучести у старого материала заметно меньше, чем у молодого, тенденция к перераспределению напряжений в наращиваемом теле проявляется здесь гораздо более слабо, чем в предыдущем варианте изготовления. Даже при самой высокой из рассмотренных скоростей роста разгрузить исходно существующую часть конструкции за счет присоединения к ней нового материала удастся в весьма незначительной степени или вообще не удастся.

В варианте (c) установка исходной арки происходит в том же, весьма раннем, возрасте материала, что и в варианте (a), но здесь перед началом утолщения выдерживается значительная по продолжительности пауза, во время которой установленная заготовка успевает полностью деформироваться. После этого добавление к ней нового тяжелого материала может вызвать только ее дополнительное нагружение, увеличивающее напряжения и деформацию. Однако присоединяемый материал обладает свойством ползучести, и потому чем быстрее произойдет формирование дополнительной части конструкции, тем большую долю нагрузки от присоединившейся массы успеет взять на себя эта часть. Если заготовка имеет достаточно малую толщину, то в момент установки в ней возникают весьма высокие напряжения. Поэтому при любой скорости ее утолщения в режиме (c) в готовой конструкции будут иметься такие области, в которых уровень напряжений многократно превышает их максимальный уровень, найденный из расчета по конечной конфигурации.

Нетрудно понять, что вариант (c) должен давать финальные распределения напряжений достаточно близкие к тем, которые будут иметь место в чисто упругой конструкции после ее постепенного изготовления в присутствии сил тяжести (вариант (d)), где перераспределение имеющихся в теле напряжений на присоединяемый материал вообще не возможно в силу полного отсутствия свойства ползучести. Временные характеристики процесса возведения в упругом случае не играют, естественно, никакой роли, а состояние, достигнутое к моменту окончания роста оказывается

финальным.

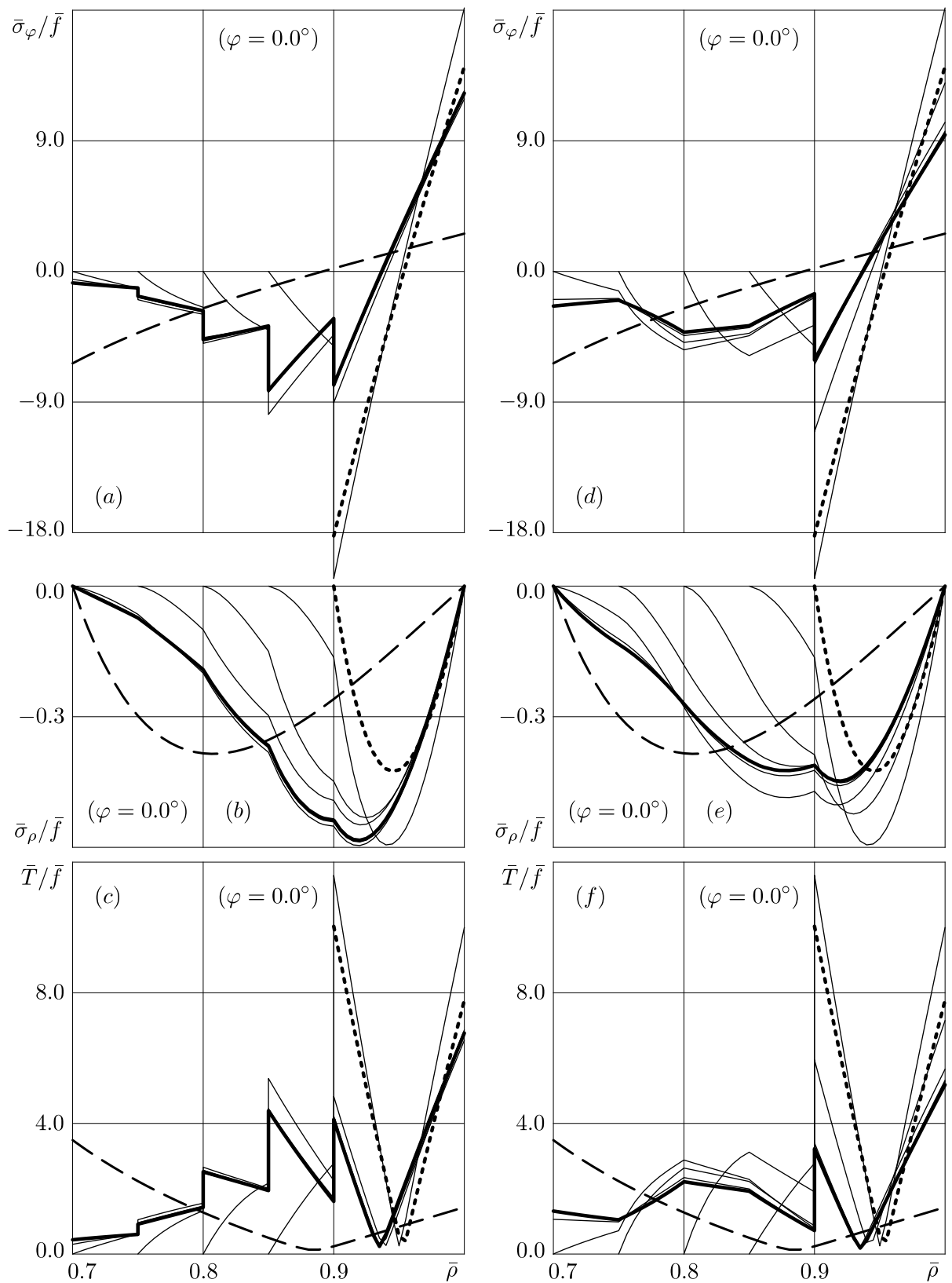
Б. Рассмотрим еще один вариант изготовления тонкостенной арки, при котором утолщение исходно установленной заготовки осуществляется за четыре этапа непрерывного наращивания. На каждом этапе к уже существующей арке добавляется слой нового материала одной и той же толщины, однако формирование этого слоя на разных этапах происходит по-разному: сначала «быстро», затем со «средней» скоростью, потом «медленно» и снова «быстро». На фиг. 3.23 показана эволюция окружных и радиальных напряжений, а также интенсивности касательных напряжений у основания арки ( $\varphi = 0.0^\circ$ ) во время и по окончании такого процесса. Левая колонка графиков соответствует режиму, когда между соседними этапами роста выдерживаются паузы одинаковой продолжительности  $\Delta \bar{t}_{2k+1} = \bar{t}_{2k+1} - \bar{t}_{2k} = 1$  ( $k = 1, 2, 3$ ), а правая — режиму, при котором эти паузы равны нулю, что эквивалентно непрерывному наращиванию арки с кусочно-постоянной скоростью  $a'(t)$  изменения ее внутреннего радиуса.

Понятно, что наличие пауз между этапами увеличивает общую продолжительность процесса возведения. Поэтому в этом случае удастся в меньшей степени приблизиться к классическому распределению напряжений в окончательно изготовленной арке, а значит и менее эффективно использовать дополнительный материал для разгрузки исходного.

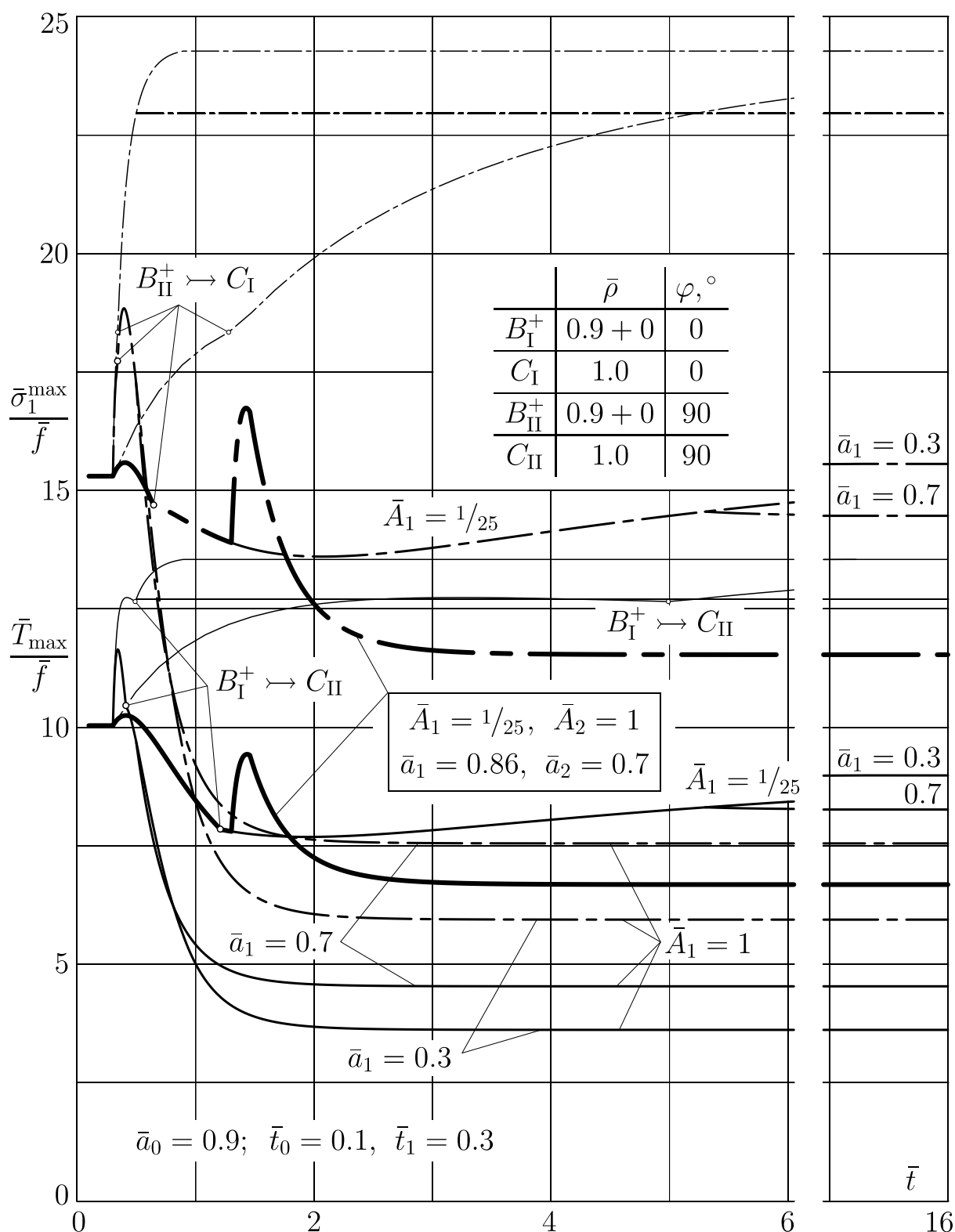
Заметим, что при наращивании с остановками возникают разрывы окружных напряжений (а следовательно, и интенсивности касательных напряжений) на границах частей конструкции, сформированных во время различных этапов ее непрерывного роста, а распределения радиальных напряжений (равно как и касательных — во внутренних продольных сечениях арки) имеют изломы на этих границах. Данную особенность в рассматриваемой в настоящей главе задаче можно исследовать количественно, не прибегая к построению полного решения, точно таким же способом, как это сделано в § 1.7 для растущего шара.

В. Как было отмечено выше, интенсивность касательных напряжений  $T$  и наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  являются важными количественными характеристиками напряженного состояния. Поэтому представляет интерес оценка их максимальных значений в теле и определение тех (критических) точек, в которых эти значения достигаются.

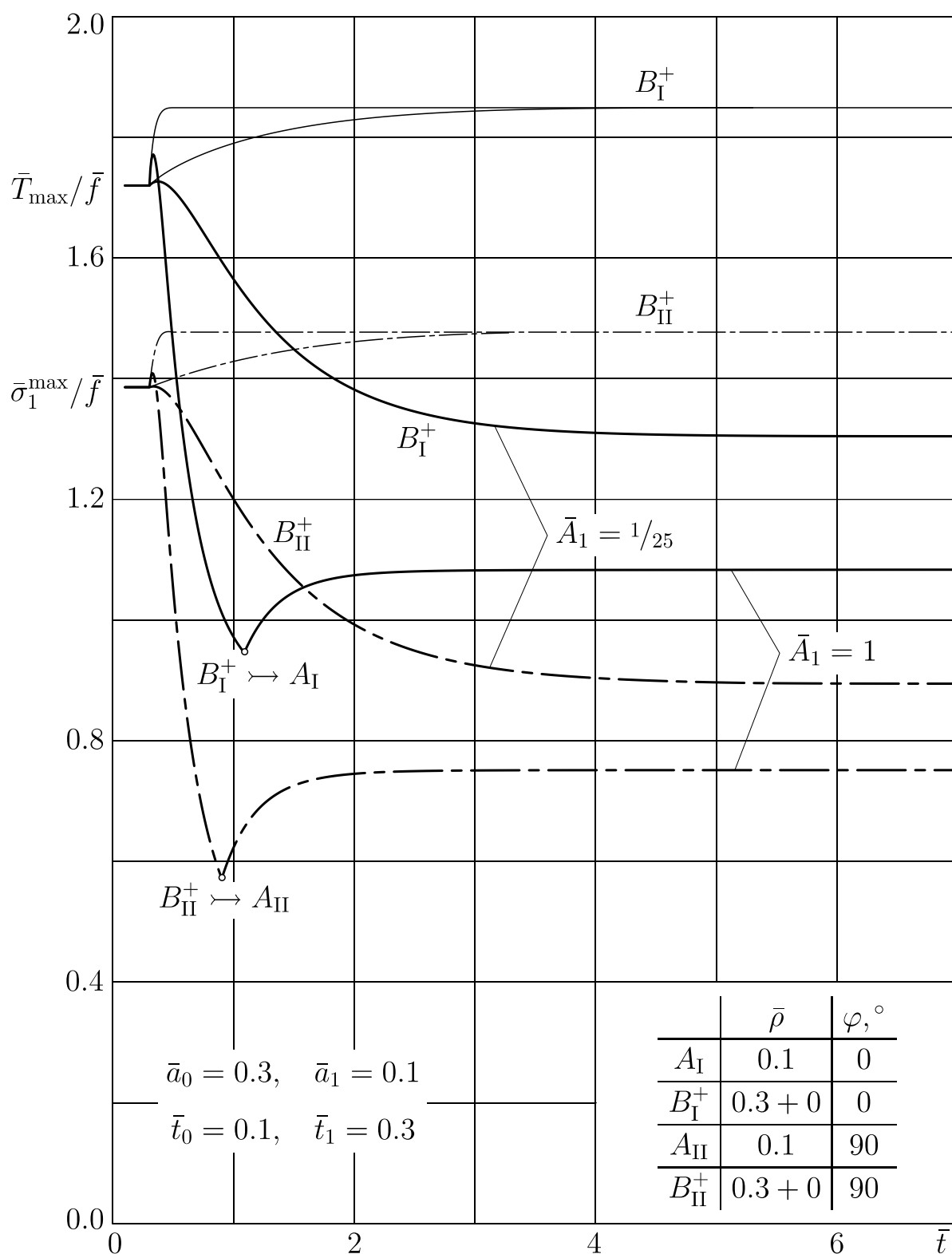
На фиг. 3.24 представлены эволюции во времени максимальных значений интенсивности касательных напряжений (*сплошные линии*) и наибольшего главного напряжения (*штрихпунктирные линии*) в тяжелой



**Фиг. 3.23.** Эволюция напряженного состояния в точках подошвы тонкостенной арки, изготавливаемой за четыре этапа непрерывного наращивания, протекающих с различными скоростями ( $\bar{A}_1 = \bar{A}_4 = 1$ ,  $\bar{A}_2 = 1/8$ ,  $\bar{A}_3 = 1/25$ ): (a)–(c) — с паузами  $\bar{t}_{2k+1} - \bar{t}_{2k} = 1$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и (d)–(f) — без пауз между этапами.



**Фиг. 3.24.** Эволюции максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего растягивающего напряжения в тонкостенной и толстостенной арках, возводимых на базе одной и той же тонкостенной заготовки при «быстром» и «медленном» наращивании (линии средней толщины), при комбинированном скоростном режиме (толстые линии) и в чисто упругом случае (тонкие линии).



**Фиг. 3.25.** Эволюции максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего растягивающего напряжения в толстостенной арке при «быстром» и «медленном» наращивании (*толстые линии*), а также при наращивании в чисто упругом случае (*тонкие линии*).

арке, возводимой на базе тонкостенной заготовки ( $\bar{a}_0 = 0.9$ ) посредством *непрерывного* ее утолщения в одном случае до финального значения относительного внутреннего радиуса  $\bar{a}_N = 0.7$ , а в другом —  $\bar{a}_N = 0.3$ . Соответствующие точки максимумов меняют со временем свое положение в теле дискретным образом. Места перехода от одного положения к другому отмечены на графиках *кружками* (меньшего радиуса для тонких кривых, большего — для более толстых). Отражено три варианта изготовления арки:

- 1) из упругого материала (*тонкие линии*);
- 2) из вязкоупругого материала при постоянной «высокой» ( $\bar{A}_1 = 1$ ) или «низкой» ( $\bar{A}_1 = 1/25$ ) скорости наращивания ( $N = 1$ ; *линии средней толщины*);
- 3) из вязкоупругого материала с кусочно-постоянной скоростью роста — сначала небольшое «медленное» утолщение (до значения  $\bar{a}_1 = 0.86$ ), затем «быстрое» наращивание до финального значения радиуса  $\bar{a}_2 = 0.7$  ( $N = 2$  без пауз; *толстые линии*).

Поскольку процесс возведения упругой конструкции не привязан объективно к какой-либо шкале времени, то графики, соответствующие первому варианту для удобства их сравнения с вязкоупругими аналогами построены в двух различных временных масштабах. Как и следовало ожидать, максимальные значения рассматриваемых характеристик при наращивании в упругом случае возрастают до очень высокого уровня.

Как видно из графиков, представленных для второго варианта изготовления, на начальной стадии утолщения, продолжительность которой во времени мало зависит от скорости роста, тенденция к догрузке вязкоупругой конструкции весом присоединяемого к ней материала оказывается превалирующей над стремлением к разгрузке за счет вовлечения последнего в процесс деформирования. В результате в первые моменты времени наращивания рассматриваемые характеристики возрастают практически по упругим кривым и лишь затем начинают убывать. Поскольку при более медленном наращивании упругие кривые поднимаются более полого (иными словами, за единицу времени, связанного с внутренним темпом протекания процесса ползучести в рассматриваемом вязкоупругом материале, к телу присоединяется меньшее количество дополнительного тяжелого материала), то достигнутые в результате возрастания максимальные значения оказываются меньшими при «медленном» возведении. Но в этом случае менее интенсивно происходит и

последующее убывание характеристик, а со временем оно сменяется их постепенным возрастанием, приводящим к достаточно высоким финальным значениям (при изготовлении толстой арки окончательное значение  $\sigma_1$  практически сравнивается с максимальным значением, достигнутым в начале роста). При быстром же росте убывание кривых, вначале весьма стремительное, продолжается до окончания процесса, в результате чего первоначальные значения  $T$  и  $\sigma_1$  очень сильно снижаются.

Итак, при «быстром» наращивании удастся весьма существенно разгрузить конструкцию. Однако достигаемые при этом в самом начале процесса максимальные значения количественных характеристик напряженного состояния могут оказаться критическими для рассматриваемого материала. При «медленном» же возведении значительного разгрузки в итоге добиться не удастся (если разгрузка вообще происходит), но при этом и максимальные значения в процессе роста оказывается заметно ниже, чем при достаточно быстром возведении. Отметим также, что финальные и наибольшие за весь процесс деформирования значения максимумов изучаемых характеристик напряженного состояния могут достигаться в разных точках конструкции.

Возникает естественное предположение, что, начав наращивание с достаточно малой скоростью и перейдя затем к более интенсивному утолщению, можно добиться вполне удовлетворительного разгрузки конструкции, не превысив при этом в процессе роста допустимый уровень напряжений. Эта идея реализована в третьем варианте изготовления. Здесь величину «всплеска» максимума  $\sigma_1$  над уровнем его первоначального значения удастся снизить примерно в 2.5 раза по отношению к «быстрому» росту, а критическое значение максимума  $T$  остается таким же, как при «медленном» возведении. В то же время финальные значения обеих характеристик снижаются приблизительно на 20% относительно «медленного» наращивания.

На фиг. 3.25 представлены графики для случая утолщения изначально толстостенной арки ( $\bar{a}_0 = 0.3$ ,  $\bar{a}_1 = 0.1$ ), аналогичные по смыслу представленным на фиг. 3.24 и соответствующие вариантам (1) и (2) (см. стр. 182). Здесь можно отметить в общем те же особенности поведения конструкции, что были разобраны выше. Отдельно стоит указать лишь на то обстоятельство, что уровень напряжений в арке, возводимой на базе рассматриваемой толстостенной заготовки, оказывается на порядок меньше, чем при утолщении исходно тонкостенной арки. Относительный «всплеск» напряжений на начальной стадии процесса «быстрого» наращивания в случае толстой заготовки также гораздо ниже.

### 3.9 Нарращивание арки предварительно напряженными конструктивными элементами

Напомним, что в § 3.8 был обнаружен факт возникновения отрывающих нормальных напряжений на периферийных частях подошв тяжелой круговой арки, изготовленной сначала без остаточных напряжений, а затем установленной на гладкое жесткое основание, если только толщина ее стенки не является слишком большой по сравнению с внешним радиусом. При дальнейшем наращивании этой арки по внутренней поверхности (даже после значительного утолщения стенки) зоны отрицательного давления на подошвах не только не исчезают, но даже несколько увеличиваются в размерах. В процессе достаточно интенсивного изготовления всей конструкции (то есть при достаточно малой продолжительности интервала времени, прошедшего от момента установки исходной ее части до момента окончания наращивания) из достаточно молодого материала удастся добиться лишь некоторого снижения величины максимального отрывающего напряжения в этих зонах относительно того значения, которое имело место в начале процесса.

Технологически указанный факт означает, что на протяжении всего (организованного рассматриваемым в данной главе образом) процесса возведения арочной конструкции из не слишком толстостенной заготовки на эту конструкцию со стороны основания должны действовать некоторые удерживающие связи, не допускающие ее отслоения. Однако с эксплуатационной точки зрения более важным является то обстоятельство, что данные связи должны сохраняться и в течение неограниченного интервала времени после окончания возведения. В определенных ситуациях это может оказаться нежелательным (например, если после изготовления конструкция должна быть перенесена на другое место, где организация указанных связей по какой-либо причине невозможна), и поэтому имеет смысл постановка вопроса о поиске такой модификации моделируемого технологического процесса, которая без отказа от условия скользящей заделки подошв в процессе возведения арки позволяла бы избавиться от отрывающих напряжений на них после окончательного завершения этого процесса.

Еще раз подчеркнем, что обсуждаемая особенность имеет место даже в том случае, когда окончательная толщина стенки арки настолько велика, что будь эта арка изготовлена при отсутствии деформирующих факторов и лишь затем установлена на основание, отрыв бы ее подошв под действием сил тяжести не наблюдался.

Для достижения намеченной цели попробуем сначала осуществить возведение рассматриваемой конструкции путем ее наравивания предварительно напругенными элементами. Данный путь решения навеян тем интуитивным соображением, что после присоединения к внутренней поверхности арки изначального *растянутого* слоя материала этот слой будет стремиться сжаться, стягивая подошвы проседающей под действием собственного веса арки и тормозя тем самым их «расползание». Это должно привести к уменьшению конечного давления на внутренние части подошв и увеличению давления на внешние. В результате можно ожидать, что при достаточно сильном предварительном растяжении дополнительных слоев конструктивных элементов удастся подавить исходно возникшие отрывающие нормальные напругения (то есть избавиться от отрицательного давления) на внешних участках подошв арки.

Каждый дополнительный слой присоединяемого материала для упрощения расчетов будем считать *равномерно* растянутым в окружном направлении. Тогда тензор предварительных напругений будет иметь вид

$$\mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi(\varphi)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\sigma_\varphi^*(\rho), \quad (3.57)$$

где задаваемая величина растягивающего напругения («натяга»)  $\sigma_\varphi^*$  зависит только от радиуса  $\rho$  соответствующего материального слоя и не зависит от угловой координаты  $\varphi$ .

Дивергенция тензора (3.57) равна  $\nabla \cdot \mathbf{T}_*(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_\rho(\varphi)\sigma_\varphi^*(\rho)/\rho$ . Поэтому векторное поле  $\mathbf{p}$ , задаваемое в краевой задаче (3.24) на этапе кусочно-непрерывного наравивания арки в качестве граничного условия на ее внутренней поверхности  $\rho = a(t)$ , будет согласно общей формуле из (3.48) в рассматриваемом частном случае выражаться зависимостью

$$\mathbf{p}(\varphi, t) = -f \left\{ \mathbf{e}_\rho(\varphi) \left[ \frac{\sigma_\varphi^*(a(t))}{f a(t)} + \sin \varphi \right] + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \cos \varphi \right\} \frac{a'(t)}{G(t)}. \quad (3.58)$$

Поверхностную нагрузку  $\mathbf{t}$  на внешней поверхности арки  $\rho = b$  (см. § 3.2) здесь, как и прежде, положим тождественно равной нулю. Поэтому как до, так и после начала наравивания в краевой задаче (3.24) в соответствии с (3.42) и (3.48) будем иметь  $\mathbf{q}(\varphi, t) \equiv \mathbf{0}$ .

Таким образом, в записи решения поставленной в настоящем параграфе задачи о возведении арки с использованием предварительно растянутых конструктивных элементов будут участвовать функции  $B_{jn}^0(\rho)$  и  $B_{jn}(\rho, t)$  (см. §§ 3.5, 3.6), в которых множители  $\alpha_{jn}^0$  и  $\alpha_{jn}(t)$  вычисляются соответственно по формулам (3.47) и (3.53) при  $P_n^{b,0} = 0$ ,  $Q_n^{b,0} = 0$ ;

$P_n^b(t) \equiv 0$ ,  $Q_n^b(t) \equiv 0$  и

$$P_0^a(t) = \frac{l_a(t)}{2} \left[ \frac{\pi \sigma_\varphi^*(a(t))}{2f a(t)} + 1 \right]; \quad (3.59)$$

$$P_n^a(t) = -\frac{l_a(t)}{4n^2 - 1}, \quad Q_n^a(t) = \frac{2n l_a(t)}{4n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(см. разложения (3.49), (3.29) и определение (3.55)). В этом случае столбец  $\omega_n^0$  в (3.47) будет равен нулю, а столбец  $\omega_n(t)$  в (3.53) будет иметь вид (3.56). Как видим, учет в задаче о наращивании тяжелой арки возможности задания ненулевого натяга присоединяемых слоев материала отражается только на выражении для коэффициента  $P_0^a(t)$ , в котором появляется дополнительное слагаемое (см. § 3.8).

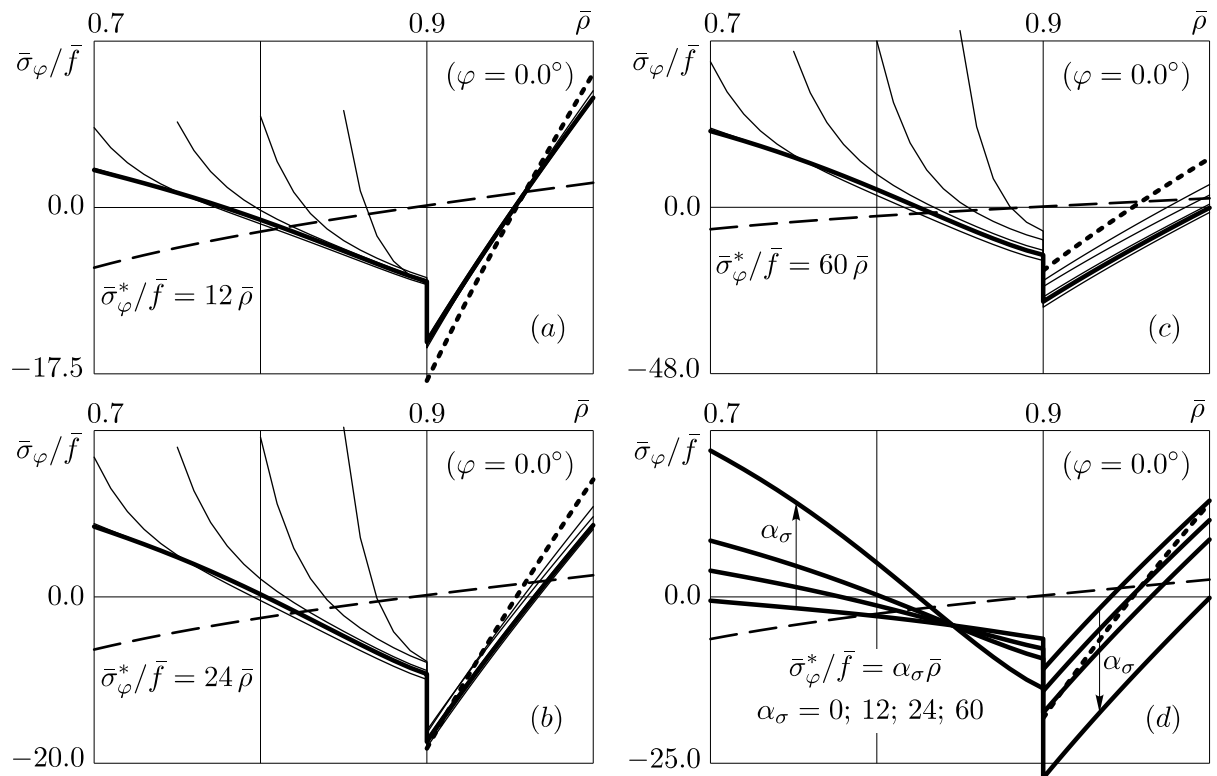
Исследуем теперь эволюцию нормальных напряжений  $\sigma_\varphi|_{\varphi=0}$  (контактного давления с обратным знаком) на подошве тонкостенной арки, возводимой за один этап непрерывного наращивания ( $\bar{a}_0 = 0.9$ ,  $\bar{a}_1 = 0.7$ ), на протяжении всего процесса ее деформирования при различной интенсивности предварительного растяжения присоединяемых элементов. Начальное растягивающее напряжение в новых материальных слоях в зависимости от их радиуса  $\rho$  зададим функцией

$$\sigma_\varphi^*(\rho) = f \alpha_\sigma \rho, \quad (3.60)$$

где коэффициент  $\alpha_\sigma = \text{const}$  характеризует интенсивность растяжения.

На фиг. 3.26 приведены результаты расчетов для  $\alpha_\sigma = 12, 24, 60$  при скорости роста  $\bar{A}_1 = 1/25$ . Графики на фиг. *a–c* построены в разных масштабах и показывают эволюцию контактных напряжений при различных значениях  $\alpha_\sigma$ . Для удобства сравнения финальных распределений все они собраны еще на отдельном координатном поле (*d*), где показано также финальное распределение в арке, возведенной с той же скоростью, но из ненапряженных элементов ( $\alpha_\sigma = 0$ ), заимствованное с фиг. 3.3, *f*.

Как видим, даже при относительно небольшой интенсивности натяга конструктивных элементов  $\alpha_\sigma$  у внутренней поверхности изготовленной арки также появляется зона отрицательного давления, несмотря на то, что задаваемое начальное натяжение присоединяемых слоев уменьшается по мере утолщения конструкции. Размер этой зоны уже значителен, а существенного изменения ситуации у внешней поверхности арки еще не происходит. Таким образом, стремление к отрыву наблюдается теперь на обеих сторонах области контакта — внутренней и внешней. Увеличение



**Фиг. 3.26.** Нормальные контактные напряжения на подошве тонкостенной арки при «медленном» нарастивании:

(a)–(c) — эволюции при различной интенсивности предварительного натяжения присоединяемых слоев материала; (d) — сводка соответствующих финальных распределений и финальное распределение для случая нарастивания без натяга.

интенсивности натяга приводит к постепенному уменьшению финального размера внешней зоны потенциального отрыва и снижению соответствующего максимального напряжения. Но одновременно с этим происходит увеличение внутренней зоны и максимума отрывающих напряжений в ней. При  $\alpha_\sigma \approx 24$  достигаемые в итоге максимумы во внешней и внутренней зонах совпадают между собой по величине и составляют примерно 61% от максимального отрывающего напряжения на подошве исходно установленной арки (в рассматриваемом случае это, очевидно, минимально возможное предельное значение максимального отрывающего напряжения; отметим еще, что при нарастивании с нулевым натягом финальное значение максимума практически совпадает с исходным). Внутренняя зона потенциального отрыва занимает при данном значении  $\alpha_\sigma$  около половины всей возникшей в результате нарастивания части подошвы, размер внутренней зоны примерно в 3 раза превышает размер внешней. При этом максимальное (положительное) давление на основание во все моменты времени остается близким к своему первоначальному значению (при нарастивании без натяга максимальное давление со временем

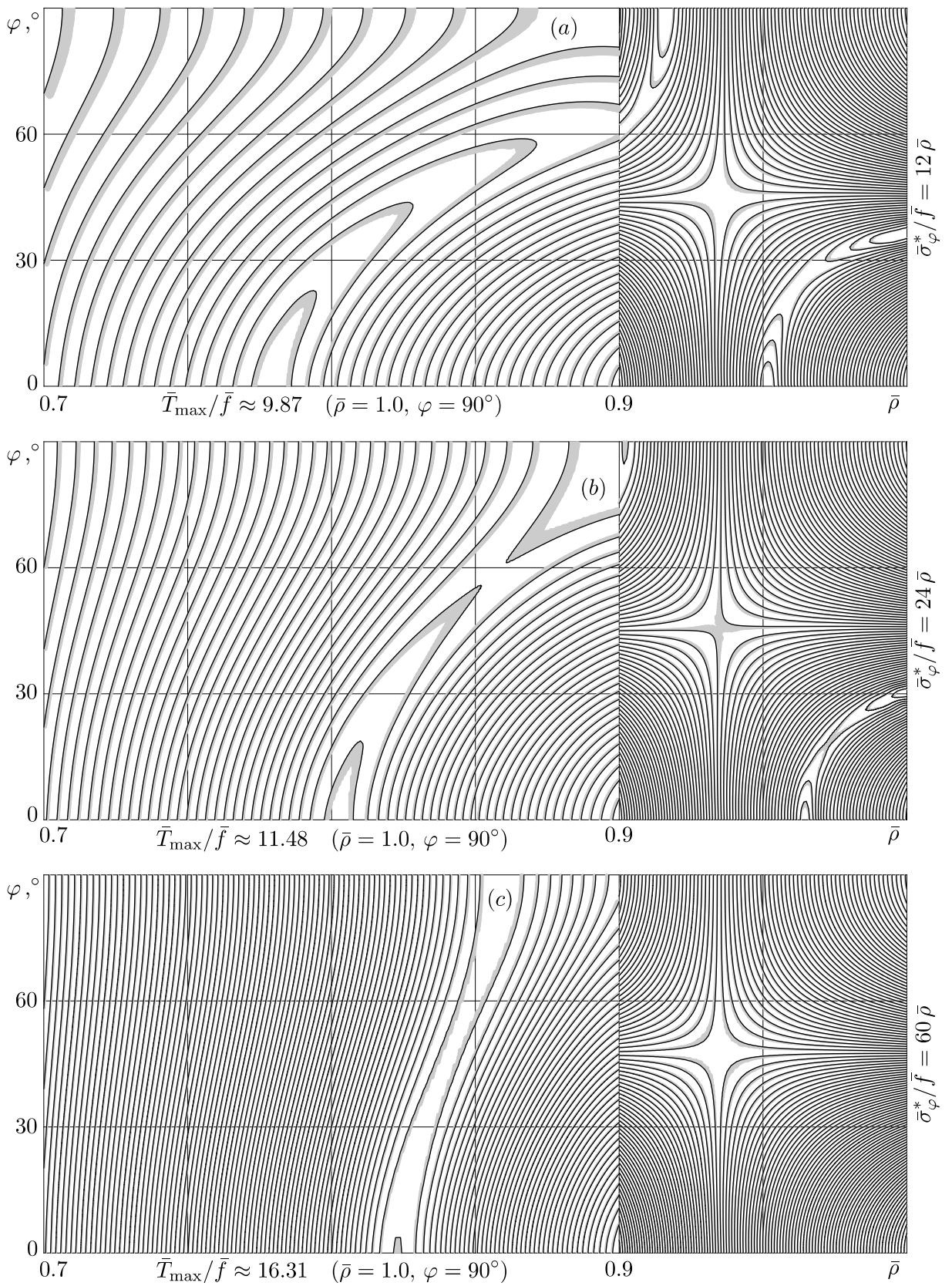
заметно снижается). Наконец, при  $\alpha_\sigma \approx 60$  область отрицательных значений на эпюре установившегося контактного давления во внешней части подошвы полностью пропадает, давление у наружной кромки подошвы становится равным нулю. Однако величина отрицательного давления у внутренней кромки уже более, чем в 1.5 раза превышает максимальное по модулю значение отрицательного давления, действующее на подошве арки, которая наращивается без натяга. Зона потенциального отслоения занимает приблизительно 5/8 всей дополнительной (созданной в ходе наращивания) части опорной поверхности. Максимальное давление на основание за время возведения увеличивается примерно в 1.5 раза.

Посмотрим также на финальные распределения интенсивности касательных напряжений  $T$  (фиг. 3.27) и максимального растягивающего напряжения  $\sigma_1$  (фиг. 3.28) в конструкции, изготовленной по исследуемой в настоящем параграфе технологии.

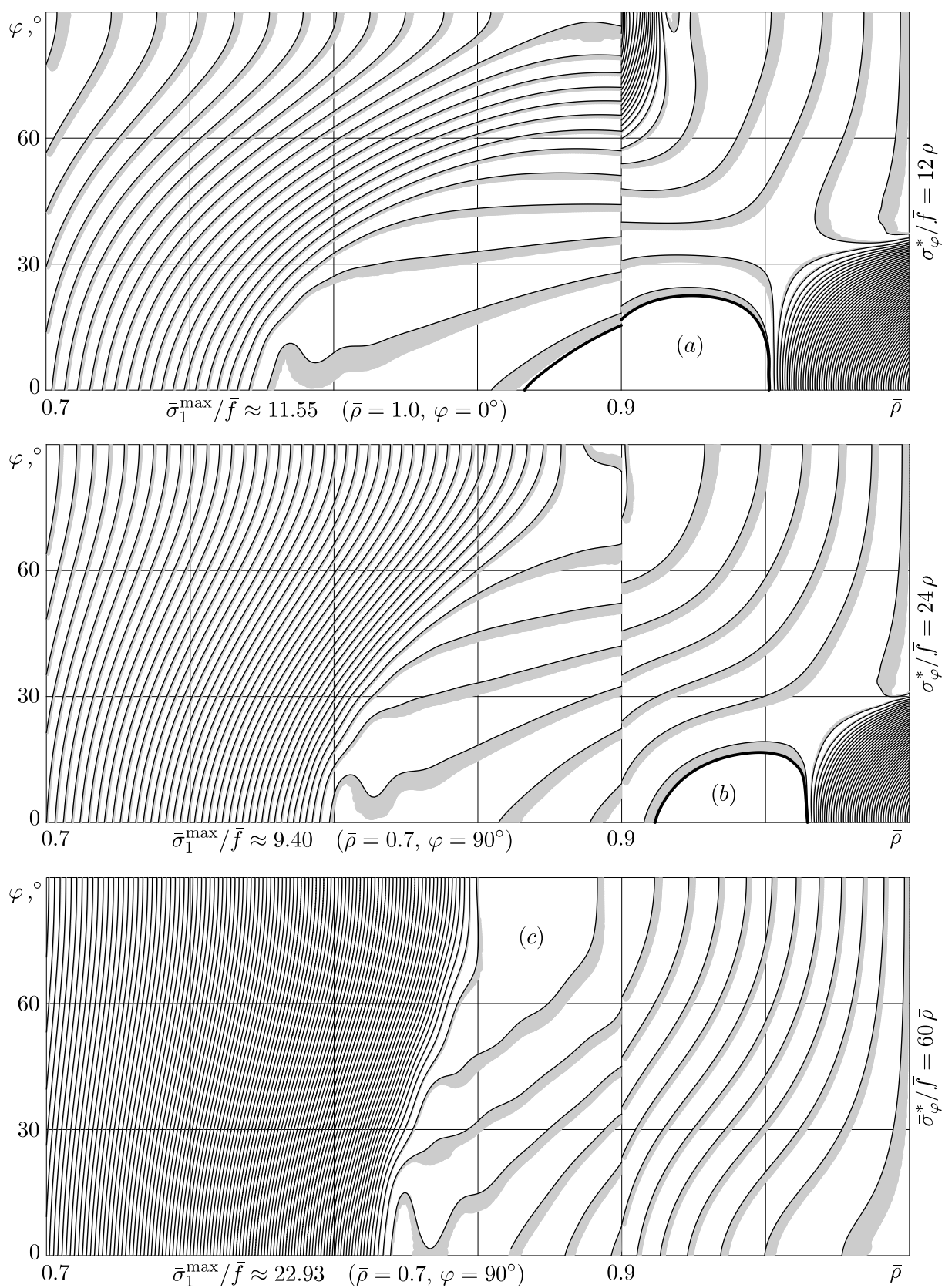
Видим, что максимум  $T$  в готовом теле при всех рассмотренных значениях параметра  $\alpha_\sigma$  (включая нулевое — см. § 3.8) достигается в одних и тех же точках тела ( $C_{II}$ ) и возрастает с увеличением этих значений. График финальной величины интенсивности касательных напряжений в дополнительной части конструкции с возрастанием  $\alpha_\sigma$  сохраняет вид оврага, наблюдавшийся при  $\alpha_\sigma = 0$  (см. фиг. 3.7, *b*), но его склоны становятся все более крутыми, линия дна изменяет свое направление (а в реальной геометрии тела и форму — от практически прямолинейной до близкой к дуге окружности), перепад высот на этой линии заметно снижается. Что касается исходной части тела, то здесь основное изменение в характере рассматриваемой функции, происходящее с ростом  $\alpha_\sigma$ , заключается в постепенном исчезновении двух из трех имевшихся при  $\alpha_\sigma = 0$  седловых точек, в результате чего график функции в этой части принимает форму одного четко выраженного седла.

Интересной особенностью поведения наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  является снижение его максимального значения в теле с увеличением интенсивности натяга  $\alpha_\sigma$  до определенного уровня (случай  $\alpha_\sigma = 0$  см. на фиг. 3.8, *b*). При дальнейшем увеличении интенсивности натяга максимальное значение  $\sigma_1$  начинает расти. С возрастанием  $\alpha_\sigma$  меняются и точки, в которых достигается максимум рассматриваемой характеристики (сначала это  $C_I$ , затем  $A_{II}$ ). При этом также исчезает область в теле, где полностью отсутствуют растягивающие напряжения (область чистого сжатия), — сначала это происходит в дополнительной, а затем и в исходной части конструкции.

В результате проведенного анализа приходим к выводу, что в случае



**Фиг. 3.27.** Финальные распределения интенсивности касательных напряжений в «медленно» изготовленной тонкостенной арке при различной интенсивности натяжения присоединяемых слоев материала. Шаг по уровням 0.15.

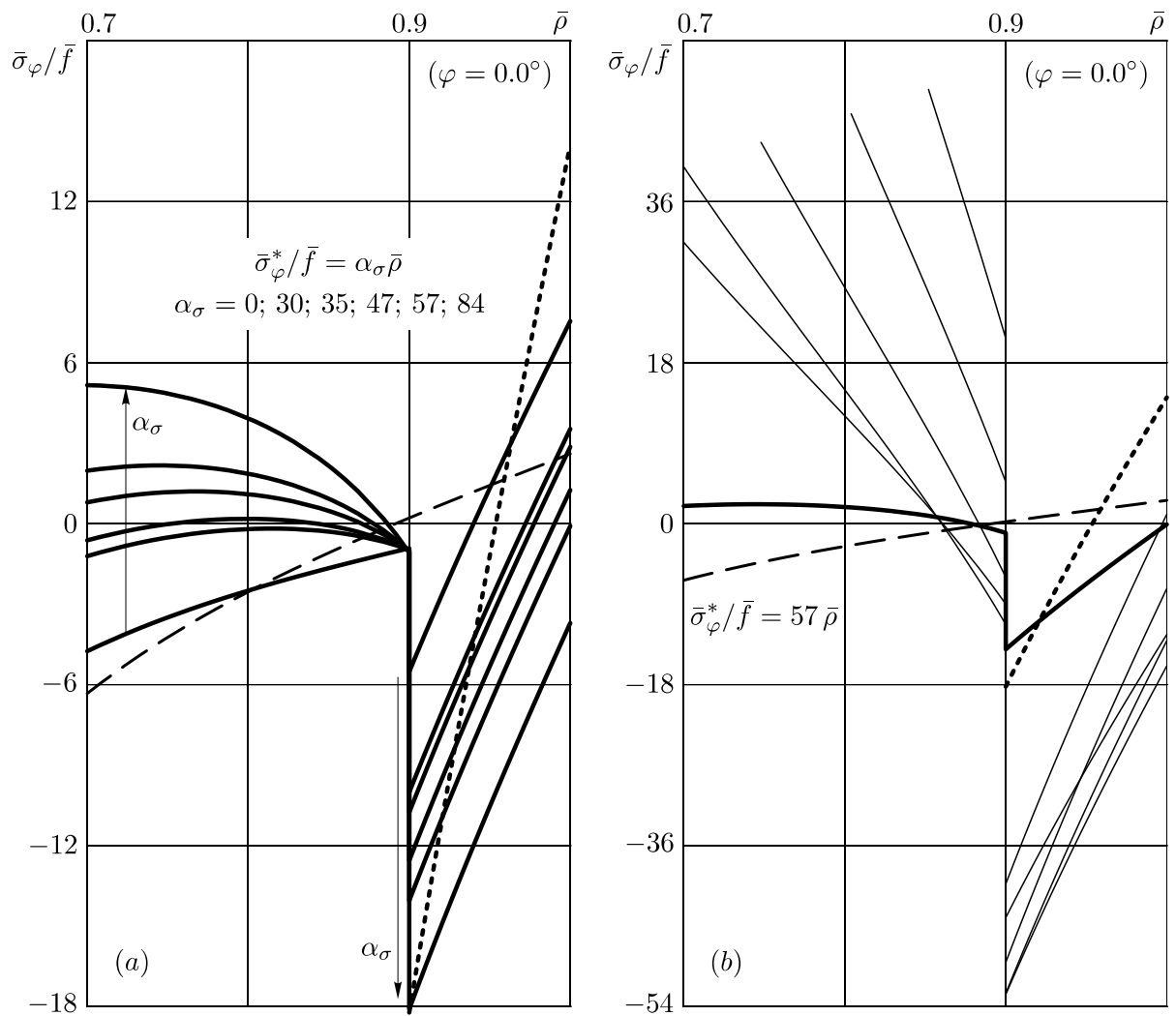


**Фиг. 3.28.** Финальные распределения наибольших растягивающих напряжений в «медленно» изготовленной тонкостенной арке при различной интенсивности натяжения присоединяемых слоев материала. Шаг по уровням 0.20.

«медленного» нарастивания арки не существует такого значения коэффициента  $\alpha_\sigma$  в выбранном законе предварительного натяжения присоединяемых слоев (3.60), при котором финальное контактное давление на основание было бы всюду положительным.

Рассмотрим теперь случай «быстрого» нарастивания. На фиг. 3.29, *a* представлены финальные эпюры контактных напряжений для нескольких значений параметра  $\alpha_\sigma$ . Фиг. 3.29, *b* показывает эволюцию этих напряжений при одном из значений указанного параметра (эволюцию в случае  $\alpha_\sigma = 0$ , то есть при отсутствии натяга, см. на фиг. 3.3, *a*).

Как видим, изменение финальной эпюры контактного давления в зависимости от интенсивности предварительного натяга происходит теперь несколько иначе, чем в разобранный выше варианте достаточно малой



**Фиг. 3.29.** Нормальные контактные напряжения

на подошве тонкостенной арки при «быстром» нарастивании:

(*a*) — финальные распределения для различных значений интенсивности натяга присоединяемых слоев материала, (*b*) — эволюция при одном из значений.

скорости роста. С увеличением  $\alpha_\sigma$  наблюдается снижение уровня финальных отрывающих напряжений у внешней поверхности арки, снижается также и давление в дополнительной части подошвы, оставаясь при  $\alpha_\sigma = 30$  еще везде положительным. Дальнейшее увеличение  $\alpha_\sigma$  приводит к появлению и последующему развитию в окрестности середины дополнительной части подошвы зоны отрицательного давления. При  $\alpha_\sigma = 35$  эта зона занимает уже больше трети всей дополнительной части, однако значения напряжений в ней еще очень малы. Затем она выходит на внутренний край подошвы, и при  $\alpha_\sigma \approx 47$  максимумы отрывающих напряжений в исходной и дополнительной частях подошвы становятся одинаковыми, причем в последней максимум достигается в некоторой внутренней точке. Полное исчезновение зоны потенциального отрыва в исходной части происходит при значении  $\alpha_\sigma \approx 57$ , однако при этом отрицательное давление действует в пределе уже почти во всей дополнительной части. Что касается максимума финального положительного давления, то с ростом  $\alpha_\sigma$  он непрерывно возрастает, однако вплоть до  $\alpha_\sigma \approx 84$  не превосходит своего значения в момент установки исходной арки. Максимум отрывающих напряжений при таком (очень большом) значении  $\alpha_\sigma$  достигается уже у внутренней поверхности готовой арки и меньше максимума в исходно установленной заготовке (достигавшегося у ее наружной поверхности) примерно на 63%. Здесь необходимо, однако, обратить особое внимание на тот факт, что как положительные, так и отрицательные окружные напряжения, действующие на подошве арки *во время* ее «быстрого» наращивания с натягом, в несколько раз превосходят свои максимальные значения, устанавливающиеся по прошествии определенного времени после завершения возведения (см. фиг. 3.29, *b*).

Итак, за счет использования предварительно напряженных конструктивных элементов при наращивании рассматриваемой тяжелой арки нам не удалось избежать отслоения готовой конструкции от основания после освобождения ее от связей, удерживающих подошвы. При сколь угодно длительной выдержке окончательно изготовленной арки с сохранением указанных связей сохраняются и зоны действия отрывающих напряжений на ее подошвах. Варьируя коэффициент интенсивности  $\alpha_\sigma$  в выбранном законе предварительного натяжения слоев (3.60), мы добивались лишь изменения количества, размеров и положения этих зон, а также максимальных значений действующих в них напряжений.

Тем не менее, создание отличных от нуля начальных напряжений в присоединяемых в тяжелому телу слоях материала, как убедительно показывают проведенные выше расчеты, позволяет радикальным образом

изменить характер деформирования этого тела. Данное обстоятельство вселяет надежду на то, что при определенных дополнительных условиях использованный здесь прием все-таки позволит достичь цели, поставленной в начале параграфа. Продолжению изысканий в этом направлении посвящен следующий параграф.

С другой стороны, если наличие отрывающих напряжений на подошвах арки в процессе ее эксплуатации является допустимым, то надлежащим выбором интенсивности преднатяга возможно минимизировать максимальный уровень этих напряжений (см. кривую для значения  $\alpha_\sigma = 24$  на фиг. 3.26 и кривую для  $\alpha_\sigma = 47$  на фиг. 3.29).

Также использованием изначально растянутых конструктивных элементов при сооружении тяжелой конструкции можно добиться в целом гораздо более выгодного распределения в ней результирующих напряжений, чем при наращивании ненапряженными элементами. Действительно, при «медленном» утолщении изучаемой арочной конструкции максимальный уровень наибольших финальных растягивающих напряжений  $\sigma_1$  в ней при  $\alpha_\sigma = 24$  будет уже более, чем в 1.5 раза ниже по сравнению со случаем  $\alpha_\sigma = 0$  (ср. фиг. 3.28, *b* и 3.8, *b*). Отметим, что стремление к снижению общего уровня финальных напряжений в конструкции особенно актуально, если после изготовления она должна, помимо собственного веса, нести еще и значительную поверхностную нагрузку.

Таким образом, рассмотренный в этом параграфе способ управления напряженно-деформированным состоянием возводимой конструкции следует признать весьма эффективным. Заметим только, что применение технологии возведения с предварительным растяжением конструктивных элементов допустимо в том случае, когда кратковременное воздействие на используемый материал прикладываемых растягивающих напряжений в соответствующем его возрасте не является опасным.

### **3.10 Локальная силовая поддержка арки в процессе возведения**

Стремление к отрыву от гладкого основания наружных участков подошв не слишком толстостенной тяжелой арки вызывается, очевидно, тем, что основная часть массы такой конструкции проецируется не на ее опорные площадки (как в случае очень толстой арки), а на часть основания, расположенную между ними, а силы трения, способные компенсировать возникающий при этом изгибающий момент, отсутствуют.

Понятно, что исправить эту ситуацию можно, организовав поддержку арки возле ее вершины, например, с помощью подвеса с контролируемой силой натяжения. В этом случае вес находящегося между опорами материала будет частично воспринят подвесом, и материал, расположенный над подошвами, сможет полностью прижать их к основанию. При достаточно большой поддерживающей силе возникнет ситуация, обратная первоначальной: к отрыву начнут стремиться уже внутренние части подошв. Силу можно, естественно, увеличить и настолько, чтобы при наличии удерживающих связей отрывающие напряжения начали действовать во всей области контакта, а при отсутствии таких связей арка целиком оторвалась бы от основания (повисла на подвесе).

Все сказанное кажется совершенно очевидным по отношению к арке, которая была изготовлена прежде, чем ее установили на основание. Основной вопрос состоит в том, можно ли с помощью локальной силовой поддержки арки, возводимой непосредственно на гладком основании, сформировать в ней такое поле напряжений, что после окончания возведения и отсоединения подвеса готовая конструкция будет без отрыва стоять на основании, на котором более не действуют удерживающие связи. Изучению этого вопроса и будет посвящен настоящий параграф.

Пусть на наружной поверхности  $\rho = b$  изначально установленной на основание арки в окрестности  $\varphi \in (\pi/2 - \Delta\varphi, \pi/2 + \Delta\varphi)$  линии ее вершин, где  $\Delta\varphi$  — некоторый малый угол, с самого момента установки  $t = t_0$  действуют напряжения, распределенные по некоторому известному закону  $\mathbf{t}(\varphi, t)$ . За пределами указанной окрестности положим  $\mathbf{t}(\varphi, t) \equiv \mathbf{0}$ , то есть будем считать, что на данной части поверхности нагрузка отсутствует. Ввиду предполагаемой малости участка наружной границы тела, где действующие напряжения отличны от нуля, конкретный вид их распределения на этом участке согласно принципу Сен-Венана оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние тела лишь в его малой части вблизи данного участка. Для основной же части тела имеют значение лишь интегральные характеристики заданного распределения.

Примем, что заданная нагрузка  $\mathbf{t}(\varphi, t)$  статически эквивалентна действующей вертикально вверх силе, распределенной по линии вершин арки (точки  $C_{II}$ ) в плоскости, проходящей через ее ось (точки  $O$ ). Величину этой силы, отнесенную к единице длины оси, обозначим через  $P(t)$ :

$$b \int_{\pi/2 - \Delta\varphi}^{\pi/2 + \Delta\varphi} \mathbf{t}(\varphi, t) d\varphi = \mathbf{j} P(t), \quad t \geq t_0. \quad (3.61)$$

Чтобы можно было воспользоваться построенным в § 3.4–3.6 решени-

ем общей задачи о наращивании тяжелой арки, необходима симметрия векторного поля  $\mathbf{t}(\varphi, t)$  относительно полуплоскости  $\varphi = \pi/2$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_\rho t_\rho + \mathbf{e}_\varphi t_\varphi, \quad t_\rho|_\varphi = t_\rho|_{\pi-\varphi}, \quad t_\varphi|_\varphi = -t_\varphi|_{\pi-\varphi}. \quad (3.62)$$

Для удобства вычислений будем считать, что на внешней поверхности арки задаются только нормальные напряжения  $\sigma_\rho|_{\rho=b}$ , причем их распределения во все моменты времени подобны друг другу. Тогда

$$t_\varphi(\varphi, t) \equiv 0, \quad t_\rho(\varphi, t) = F(\varphi)q(t), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad t \geq t_0, \quad (3.63)$$

В соответствии с (3.62) должно быть

$$F(\varphi) = F(\pi - \varphi), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3.64)$$

а в силу оговоренной выше локальности поверхностной нагрузки

$$F(\varphi) \equiv 0, \quad \varphi \in [0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi], \quad (3.65)$$

где введено обозначение  $\varphi_0 = \pi/2 - \Delta\varphi$ .

Таким образом, нужно задать функцию формы поверхностной нагрузки  $F(\varphi)$  только на отрезке  $[\varphi_0, \pi/2]$ . Возьмем ее на этом отрезке в виде полинома четвертой степени

$$F(\varphi) = \sum_{i=0}^4 c_i (\varphi - \varphi_0)^i, \quad \varphi \in [\varphi_0, \pi/2],$$

потребовав выполнения следующих условий:

$$F(\varphi_0) = 0, \quad F'(\varphi_0) = F'(\pi/2) = 0, \quad F''(\varphi_0) = 0.$$

Тогда для коэффициентов  $c_i$  будем иметь

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad 3c_3 + 4\Delta\varphi c_4 = 0.$$

Полагая  $c_4 = -3/4$ , получим  $c_3 = \Delta\varphi$ . В итоге

$$F(\varphi) = [\Delta\varphi - 3/4(\varphi - \varphi_0)](\varphi - \varphi_0)^3, \quad \varphi \in [\varphi_0, \pi/2]. \quad (3.66)$$

Выбранная по правилам (3.64)–(3.66) функция  $F(\varphi)$  будет дважды непрерывно дифференцируема на всем отрезке своего определения  $[0, \pi]$ . Разложим ее в ряд Фурье на этом отрезке по косинусам кратных углов. С учетом (3.64) и (3.65) будем иметь

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos 2n\varphi;$$

$$F_0 = \frac{2}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} F(\varphi) d\varphi; \quad F_n = \frac{4}{\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} F(\varphi) \cos 2n\varphi d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя (3.66), находим  $F_0 = 4\Delta\varphi^5/(5\pi)$ . Для вычисления остальных коэффициентов  $F_n$ , применим к соответствующему неопределенному интегралу пять раз подряд правило интегрирования по частям. Учитывая, что в силу (3.66) пятая производная  $F^V(\varphi) \equiv 0$ , получим

$$\begin{aligned} \int F(\varphi) \cos 2n\varphi d\varphi = & \left[ \frac{F'(\varphi)}{2n} - \frac{F'''(\varphi)}{(2n)^3} \right] \frac{\cos 2n\varphi}{2n} + \\ & + \left[ F(\varphi) - \frac{F''(\varphi)}{(2n)^2} + \frac{F^{IV}(\varphi)}{(2n)^4} \right] \frac{\sin 2n\varphi}{2n}. \end{aligned}$$

В результате, используя равенства

$$\cos 2n\varphi_0 = (-1)^n \cos 2n\Delta\varphi, \quad \sin 2n\varphi_0 = (-1)^{n+1} \sin 2n\Delta\varphi,$$

можем найти

$$F_n = \frac{(-1)^n 96}{\pi (2n)^4} \left[ (2 + \cos 2n\Delta\varphi) \Delta\varphi - \frac{3 \sin 2n\Delta\varphi}{2n} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим теперь множитель  $q(t)$  в представлении (3.63) радиальной компоненты векторного поля  $\mathbf{t}$  на поверхности  $\rho = b$  из интегрального силового условия (3.61), умноженного скалярно на вектор  $\mathbf{j}$ :

$$q(t) = \frac{P(t)}{2b} \left[ \int_{\varphi_0}^{\pi/2} F(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^{-1}, \quad t \geq t_0;$$

здесь учтено равенство (3.64). Вычисляя записанный интеграл, получим

$$q(t) = \frac{P(t)}{48b [(2 + \cos \Delta\varphi) \Delta\varphi - 3 \sin \Delta\varphi]}.$$

Менять нагрузку  $\mathbf{t}(\varphi, t)$  на этапе до начала наращивания нет смысла, поэтому будем считать ее на этом этапе постоянной:

$$\mathbf{t}(\varphi, t) \equiv \mathbf{t}_0(\varphi) = \frac{\mathbf{e}_\rho(\varphi) P_0 F(\varphi)}{48b [(2 + \cos \Delta\varphi) \Delta\varphi - 3 \sin \Delta\varphi]}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где  $P_0$  — первоначальная сила натяжения подвеса. Тогда сможем воспользоваться построенным в § 3.5 решением задачи о деформировании

арки, установленной на основание в качестве заготовки в начальный момент процесса возведения, в течение времени перед ее утолщением. Для этого нужно в формулах (3.47) принять

$$P_0^{b,0} = p_0^b l_b^0; \quad P_n^{b,0} = p_n^b l_b^0, \quad Q_n^{b,0} = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

здесь введены следующие обозначения:

$$l_b^0 = \frac{2P_0}{\pi b}; \quad p_0^b = \frac{\Delta\varphi^5}{120[(2 + \cos \Delta\varphi)\Delta\varphi - 3 \sin \Delta\varphi]};$$

$$p_n^b = \frac{(-1)^n[(2 + \cos 2n\Delta\varphi)\Delta\varphi - 3 \sin 2n\Delta\varphi/(2n)]/(2n)^4}{(2 + \cos \Delta\varphi)\Delta\varphi - 3 \sin \Delta\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(множители  $p_n^b$  зависят только от номера  $n$  и от полураствора  $\Delta\varphi$  дуги наружной цилиндрической поверхности арки, на которой задается поддерживающая сила). В итоге столбец  $\omega_n^0$  в (3.47) будет равен (см. (3.41))

$$\omega_n^0 = \begin{vmatrix} 2n^2(1 - \lambda_0) + n(1 - \lambda_0^{2n}) \\ (1 - \lambda_0^{2n}) + 2n(1/\lambda_0 - 1) \\ -2n^2(\lambda_0^{n-1} - \lambda_0^n) - n(1/\lambda_0^{n+1} - \lambda_0^{n-1}) \\ -(1/\lambda_0^n - \lambda_0^n) - 2n(\lambda_0^{n-1} - \lambda_0^n) \end{vmatrix} p_n^b l_b^0.$$

Для возможности управления процессом возведения поддерживающая сила после начала утолщения установленной заготовки должна уже меняться по заданному закону  $P(t)$ . Предусмотрим также возможность создания в используемых для возведения арки конструктивных элементах предварительных напряжений, характеризуемых известным тензором вида (3.57). В результате после начала наращивания в соответствии с (3.48) векторное поле  $\mathbf{p}$  на поверхности  $\rho = a(t)$  в граничном условии задачи (3.24) будет иметь вид (3.58), а векторное поле  $\mathbf{q}$  на поверхности  $\rho = b$  будет задаваться формулой

$$\mathbf{q}(\varphi, t) = \frac{\partial \mathbf{t}^\circ(\varphi, t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{e}_\rho(\varphi) F(\varphi) dP^\circ(t)/dt}{48b[(2 + \cos \Delta\varphi)\Delta\varphi - 3 \sin \Delta\varphi]}, \quad t > t_1,$$

где согласно определению (3.6) и равенству  $\tau_0(\mathbf{r})|_{\rho=b} \equiv t_0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{dP^\circ(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{P(t)}{G(t)} - \int_{t_0}^t \frac{P(\tau)}{G(\tau)} K(t, \tau) d\tau \right] = \\ &= P(t_0) \frac{\partial \omega(t, t_0)}{\partial t} + \frac{P'(t)}{G(t)} + \int_{t_0}^t P'(\tau) \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \end{aligned}$$

Это значит, что построенное для общего случая в § 3.6 решение задачи наращивания будет при рассматриваемом варианте возведения определяться коэффициентами (3.59) и

$$P_0^b(t) = p_0^b l_b(t); \quad P_n^b(t) = p_n^b l_b(t), \quad Q_n^b = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

где введена функция

$$l_b(t) = \frac{2}{\pi b} \frac{dP^o(t)}{dt}.$$

Следовательно (см. (3.41)), в формуле (3.53) будет

$$\begin{aligned} \omega_n(t) = & \left\| \left\| \begin{aligned} & \frac{-2n^2[\lambda^n(t) - \lambda^{n+1}(t)] + r_n^{(1)}[1/\lambda^{n-1}(t) - \lambda^{n+1}(t)]}{2n+1} \\ & \frac{1/\lambda^n(t) - \lambda^n(t) - 2r_n^{(3)}[\lambda^n(t) - \lambda^{n+1}(t)]}{2n-1} \\ & \frac{-2n^2[1/\lambda(t) - 1] + r_n^{(3)}[1 - \lambda^{2n}(t)]}{2n-1} \\ & \frac{1 - \lambda^{2n}(t) - 2r_n^{(1)}[1 - \lambda(t)]}{2n+1} \end{aligned} \right\| \right\| l_a(t) + \\ & + \left\| \left\| \begin{aligned} & 2n^2[1 - \lambda(t)] + n[1 - \lambda^{2n}(t)] \\ & [1 - \lambda^{2n}(t)] + 2n[1/\lambda(t) - 1] \\ & -2n^2[\lambda^{n-1}(t) - \lambda^n(t)] - n[1/\lambda^{n+1}(t) - \lambda^{n-1}(t)] \\ & -[1/\lambda^n(t) - \lambda^n(t)] - 2n[\lambda^{n-1}(t) - \lambda^n(t)] \end{aligned} \right\| \right\| p_n^b l_b(t). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $r_n^{(1,3)}$  задаются формулами (3.34), каждый из них зависит только от своего номера  $n$ . Функция  $l_a(t)$  введена формулой (3.55), она определяется только свойствами материала и реализуемой программой наращивания арки.

Таким образом, построено полное решение задачи о возведении тяжелой арки, поддерживаемой подвесом с контролируемой силой натяжения, при произвольном законе изменения этой силы на протяжении и после окончания процесса наращивания (до начала наращивания сила считается постоянной) и произвольной зависимости задаваемого равномерного натяга присоединяемых слоев материала от величины их радиуса.

Опишем теперь закон изменения силы, который будет использоваться для управления состоянием возводимой арочной конструкции в процессах возведения, моделируемых в настоящей работе.

Пусть до начала наращивания установленной на основание арки, действующая на нее поддерживающая сила  $P_0$  составляет некоторую заданную долю  $\alpha_P = \text{const}$  от первоначального веса конструкции, отнесенного

к единице ее длины вдоль оси,  $W_0 = f\pi(b^2 - a_0^2)/2$ . После начала наращивания (при  $t > t_1$ ) будем увеличивать силу поддержки, сохраняя при этом неизменным ее отношение  $\alpha_P$  к возрастающему погонному весу арки  $W(t) = f\pi[b^2 - a^2(t)]/2$ . После окончательной остановки роста при  $t = t_{2N}$  плавно отпустим арку, постепенно снизив величину поддерживающей ее силы  $P(t)$  от достигнутого в момент прекращения возведения значения  $P_N = P(t_{2N})$  до нуля. Закон снижения силы возьмем в виде

$$P(t) = P_N e^{-\chi(t-t_{2N})}, \quad t > t_{2N}, \quad (3.67)$$

где коэффициент  $\chi$  выберем из условия, что спустя определенный промежуток времени  $\Delta t_r$  после остановки роста величина силы составляет  $\delta_r \cdot 100\%$  от своего максимального значения  $P_N$ . Отсюда  $\chi = -\ln \delta_r / \Delta t_r$ . В результате зависимость (3.67) можно переписать в виде

$$P(t) = P_N \delta_r^{(t-t_{2N})/\Delta t_r}, \quad t > t_{2N}.$$

Таким образом, принимаемый закон изменения силы натяжения подвеса арки с самого начала процесса возведения имеет вид

$$P(t) = \begin{cases} \alpha_P f\pi[b^2 - a^2(t)]/2, & t_0 \leq t \leq t_{2N}, \\ 1/2 \alpha_P f\pi(b^2 - a_N^2) \delta_r^{(t-t_{2N})/\Delta t_r}, & t > t_{2N}, \end{cases} \quad (3.68)$$

где  $\alpha_P > 0$ ,  $0 < \delta_r \ll 1$ ,  $\Delta t_r > 0$  — некоторые задаваемые константы.

В конкретных числовых расчетах ограничимся рассмотрением процессов возведения поддерживаемой у вершины арки за один этап непрерывного наращивания ( $N = 1$ ). Закон изменения ее внутреннего радиуса на этом этапе (как и всегда при численном моделировании процессов роста, проводимом в данной работе) будем считать линейным:

$$a(t) = a_0 - A_1(t - t_1), \quad t \in (t_1, t_2).$$

Стоит отметить, что в таком случае при использовании аппроксимации меры ползучести в заявленной в п. 2 § 3.8 форме

$$\omega(t, \tau) = (A_\infty + \Delta A e^{-\beta\tau})[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$$

функция  $l_b(t)$  алгебраически выражается через элементарные функции. Однако соответствующее выражение является достаточно громоздким и поэтому здесь не приводится.

Перейдем к обсуждению характерных эффектов, возникающих при организации локальной силовой поддержки тяжелой арочной конструкции в процессе ее возведения. Нас будет интересовать случай, когда при

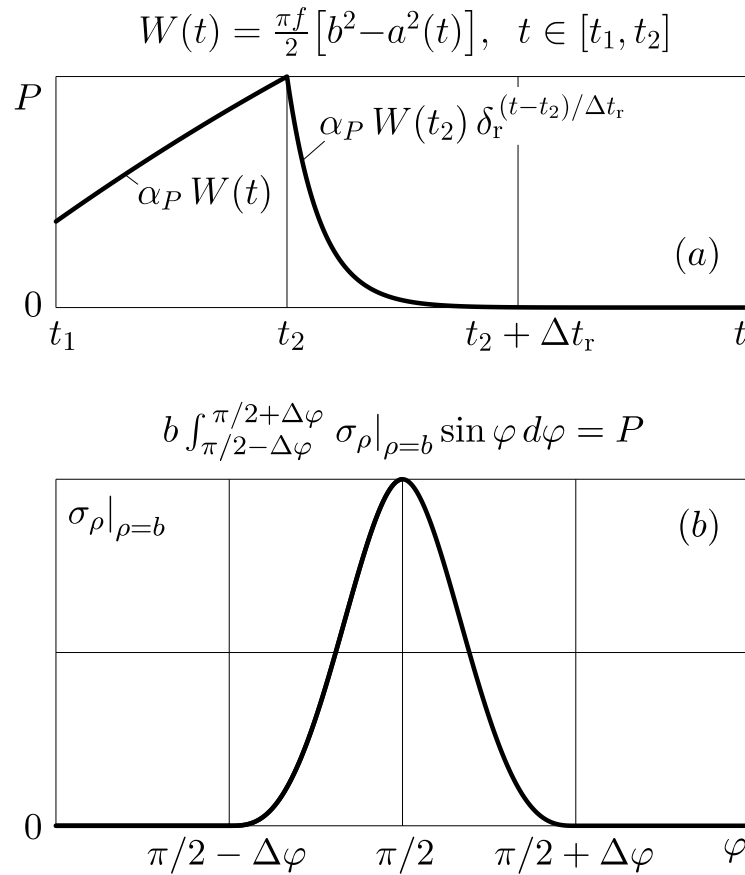
возведении используется достаточно тонкостенная заготовка, на опорных площадках (подошвах) которой в момент их закрепления на основании посредством скользящей заделки возникают зоны отрицательного давления, стремящегося оторвать внешние части опорных площадок от основания. Чем тоньше эта заготовка, тем большую долю ее опорных площадок занимают указанные зоны и тем выше в них уровень отрывающих напряжений. У очень толстой заготовки зон потенциального отрыва от гладкого основания под действием сил тяжести уже не возникает (для значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.1$  критическое отношение внутреннего радиуса к внешнему составляет  $a/b \approx 0.32$ ). В этом случае специфическое условие скользящей заделки на основании может быть заменено обычным условием гладкого контакта.

Мы рассмотрим здесь случай  $\bar{a}_0 = 0.9$ , когда зона отрывающих напряжений в момент начала возведения занимает почти половину всей области контакта, а их максимальное значение (достигаемое у внешней поверхности арки) достаточно высоко. При «медленном» утолщении этой заготовки до относительного значения внутреннего радиуса  $\bar{a}_1 = 0.7$  (см. фиг. 3.3, *f*) величина максимального отрывающего напряжения в пределе остается практически такой же, как и в начальный момент времени. «Быстрое» же утолщение (см. фиг. 3.3, *a*) позволяет значительно снизить уровень отрывающих напряжений, но все же не избавиться от них вовсе. Последнего не удастся добиться и применением в процессе наращивания предварительно напряженных элементов (см. фиг. 3.26 и 3.29).

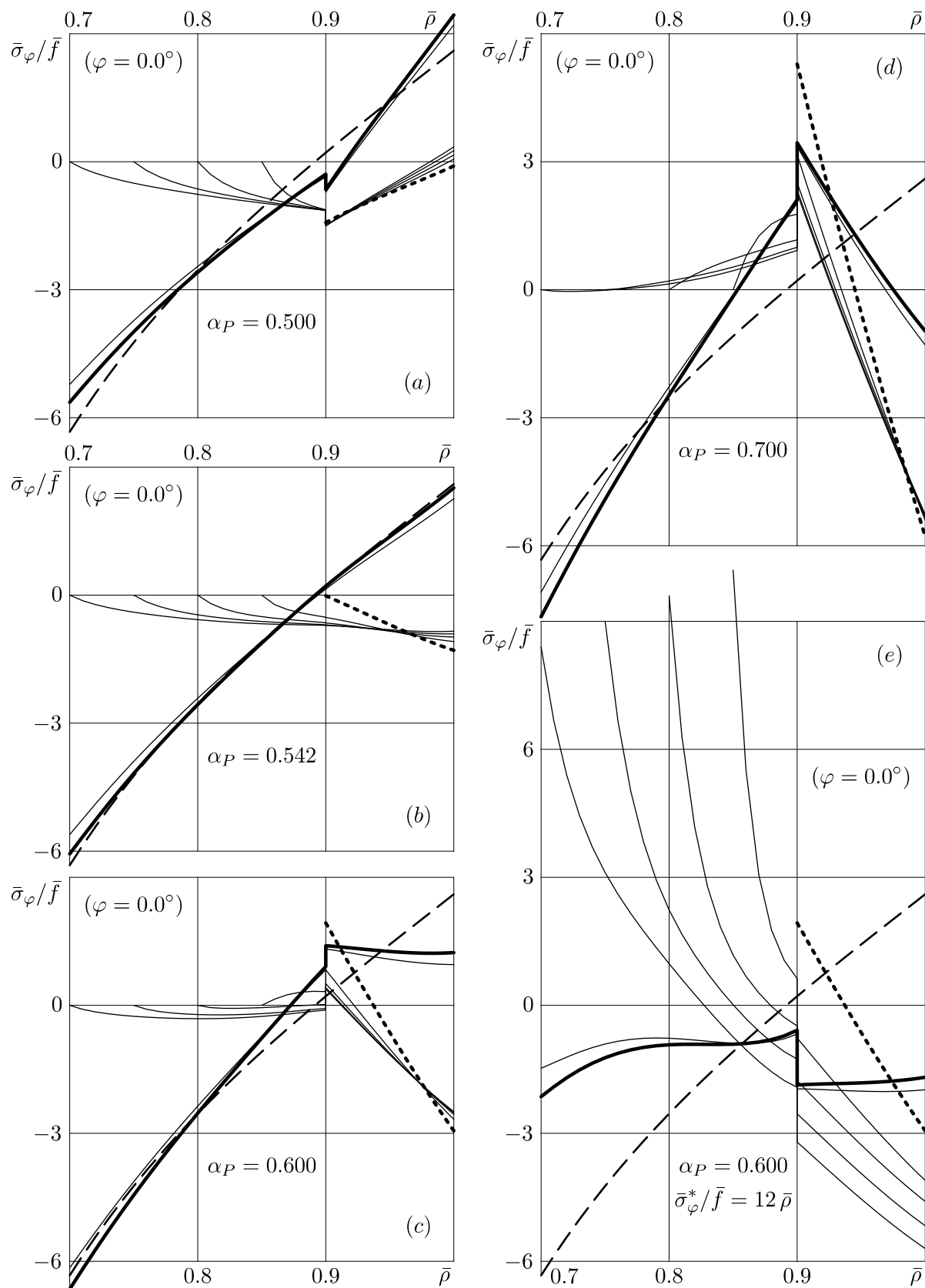
Исследуем теперь процесс «медленного» возведения рассматриваемой конструкции при наличии поддерживающей силы  $P(t)$ , меняющейся со временем по закону вида (3.68). График реализуемой в расчетах зависимости этой силы от времени показан на фиг. 3.30, *a*. Принято  $\Delta \bar{t}_r = 5$ ,  $\delta_r = 10^{-3}$ . Соответствующее локальное распределение нормальных напряжений  $\sigma_\rho$  на внешней круговой цилиндрической поверхности арки  $\rho = b$  изображено на фиг. 3.30, *b*. Угловая мера половины дуги, на которой действуют отличные от нуля напряжения, выбрана равной  $\Delta \varphi = 5^\circ$ .

Будем сначала использовать при наращивании предварительно не напряженные элементы ( $\sigma_\varphi^*(\rho) \equiv 0$ ). Эволюции контактных напряжений и их финальные распределения на подошве ( $\varphi = 0.0^\circ$ ) возводимой арки для нескольких значений  $\alpha_P$  представлены на фиг. 3.31, *a–d*. Как видим, если поддерживающий арку подвес воспринимает в процессе возведения половину ее веса ( $\alpha_P = 0.5$ ), то исходно установленная заготовка уже не будет стремиться оторваться от основания ни в одной точке своей подошвы, а финальное распределение контактного давления будет очень

близким к классическому распределению, возникающему при установке на гладкое основание арки окончательных размеров (фиг. *a*). Небольшое увеличение доли воспринимаемой подвесом массовой нагрузки до  $\alpha_P \approx 0.542$  оставляет эпюру контактного давления на подошве исходно установленной арки еще целиком в области положительных значений, но на внутренней кромке подошвы контактное давление оказывается равным нулю (фиг. *b*). Последнее обстоятельство становится причиной того, что распределение контактных напряжений в любой момент времени после начала наращивания является непрерывным (см. следствие 1.2). При этом финальное распределение (после снятия с готовой арки поверхностной нагрузки) оказывается чрезвычайно близким к классическому. Данный результат сам по себе уже является весьма интересным. Однако он дает не самый лучший исход, к которому можно привести постепенно возводимую конструкцию с помощью одной только ее локальной силовой поддержки в процессе возведения. При еще чуть большем значении



**Фиг. 3.30.** Сила, поддерживающая арку, возводимую за один этап  $t \in [t_1, t_2]$  непрерывного наращивания: (a) — зависимость силы от времени после начала роста ( $\alpha_P = \text{const}$  — коэффициент компенсации веса); (b) — закон распределения напряжений по дуге внешней цилиндрической поверхности.



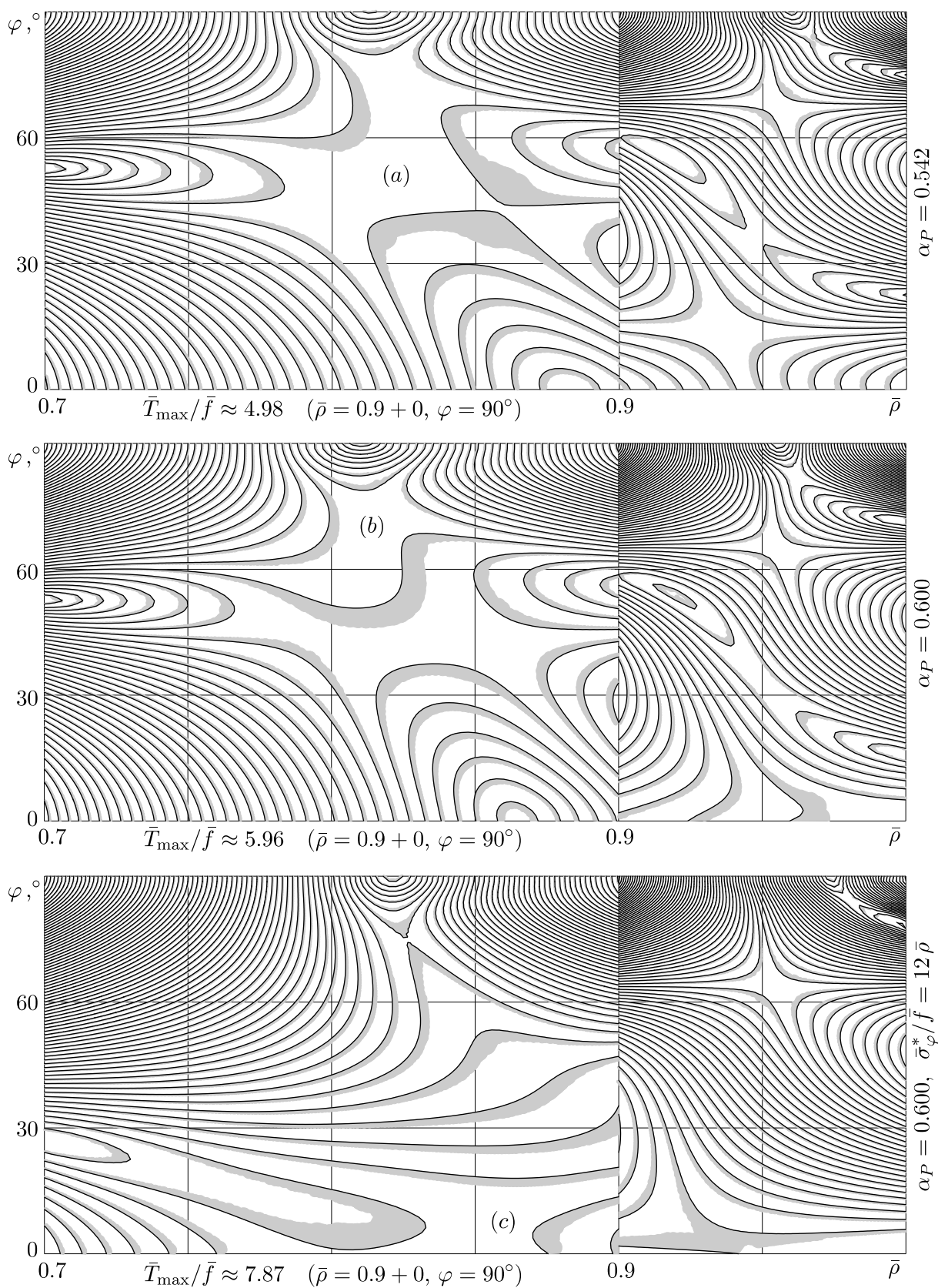
**Фиг. 3.31.** Нормальные контактные напряжения на подошве «медленно» возводимой тонкостенной арки при различной компенсации веса поддерживающей силой в процессе возведения: (a)–(d) — наращивание без натяга, (e) — с равномерным по углу натягом.

параметра нагрузки  $\alpha_P = 0.6$  удастся «срезать» пик отрывающих напряжений у внешней поверхности арки, сделав предельное распределение контактных напряжений в исходно существующей части конструкции практически равномерным (фиг. *c*). Финальное же значение максимального контактного давления (у внутренней поверхности арки) остается все еще очень близким к классическому. Дальнейшее увеличение параметра  $\alpha_P$  приводит уже к ухудшению финального состояния арки за счет роста экстремальных значений нормальных напряжений на ее подошвах как в положительную, так и в отрицательную сторону (фиг. *d*).

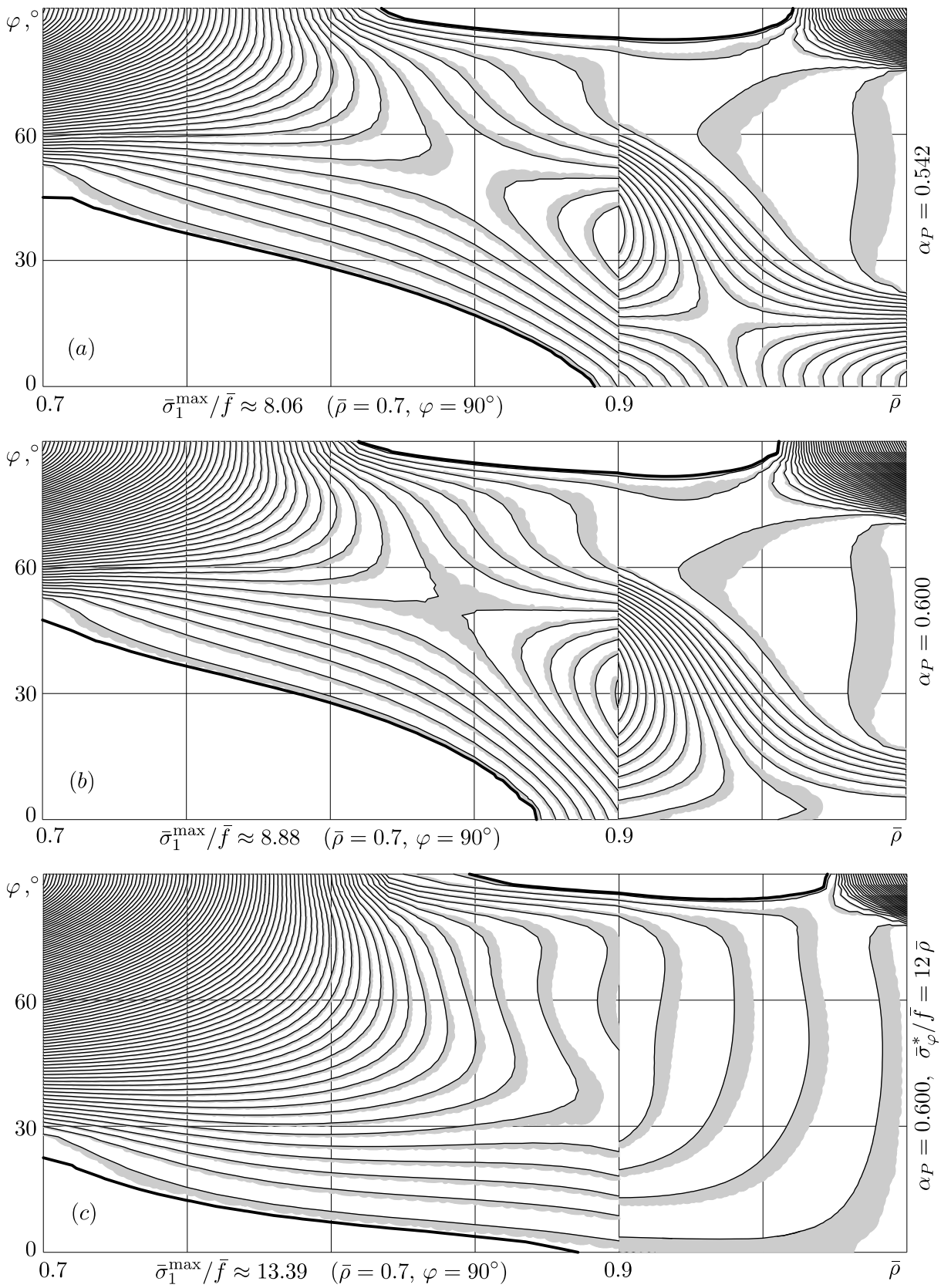
Если теперь к силовой поддержке с близким к оптимальному значением параметра  $\alpha_P = 0.6$  прибавить еще предварительный натяг конструктивных элементов, задаваемый в соответствии с зависимостью (3.60) при относительно малом значении коэффициента интенсивности  $\alpha_\sigma = 12$ , то результирующее распределение контактного давления окажется *всюду положительным* (фиг. 3.31, *e*), к чему мы и стремились. Здесь, однако, следует отметить то обстоятельство, что во время самого такого процесса роста на связи, удерживающие подошвы арки у основания, действуют значительные напряжения (заметим, что все графики на фиг. 3.31 изображены в одном масштабе).

Фиг. 3.32 и 3.33 показывают финальные распределения интенсивности сдвиговых напряжений  $T$  и максимального растягивающего напряжения  $\sigma_1 > 0$  в теле, изготовленном без натяга при поддерживающей силе, компенсирующей долю  $\alpha_P = 0.542$  (фиг. *a*) и  $\alpha_P = 0.6$  (фиг. *b*) его текущего веса, а также с натягом интенсивности  $\alpha_\sigma = 12$  при  $\alpha_P = 0.6$  (фиг. *c*). Интересно отметить, что, хотя последний режим является наиболее выгодным с точки зрения ситуации в области контакта, наименьшие максимальные значения рассматриваемых характеристик  $T$  и  $\sigma_1$  имеют место при первом режиме, который дает самое близкое к классическому финальное распределение контактного давления. Сравнивая максимальные значения при первом режиме и в классическом случае (фиг. 3.7, 3.8, *c*), видим, что первые гораздо выше, однако они значительно ниже, чем при наращивании с той же скоростью, но без натяга и поддержки (фиг. 3.7, 3.8, *b*). Заметим также, что максимальные значения при разных вариантах изготовления тела достигаются в различных его точках.

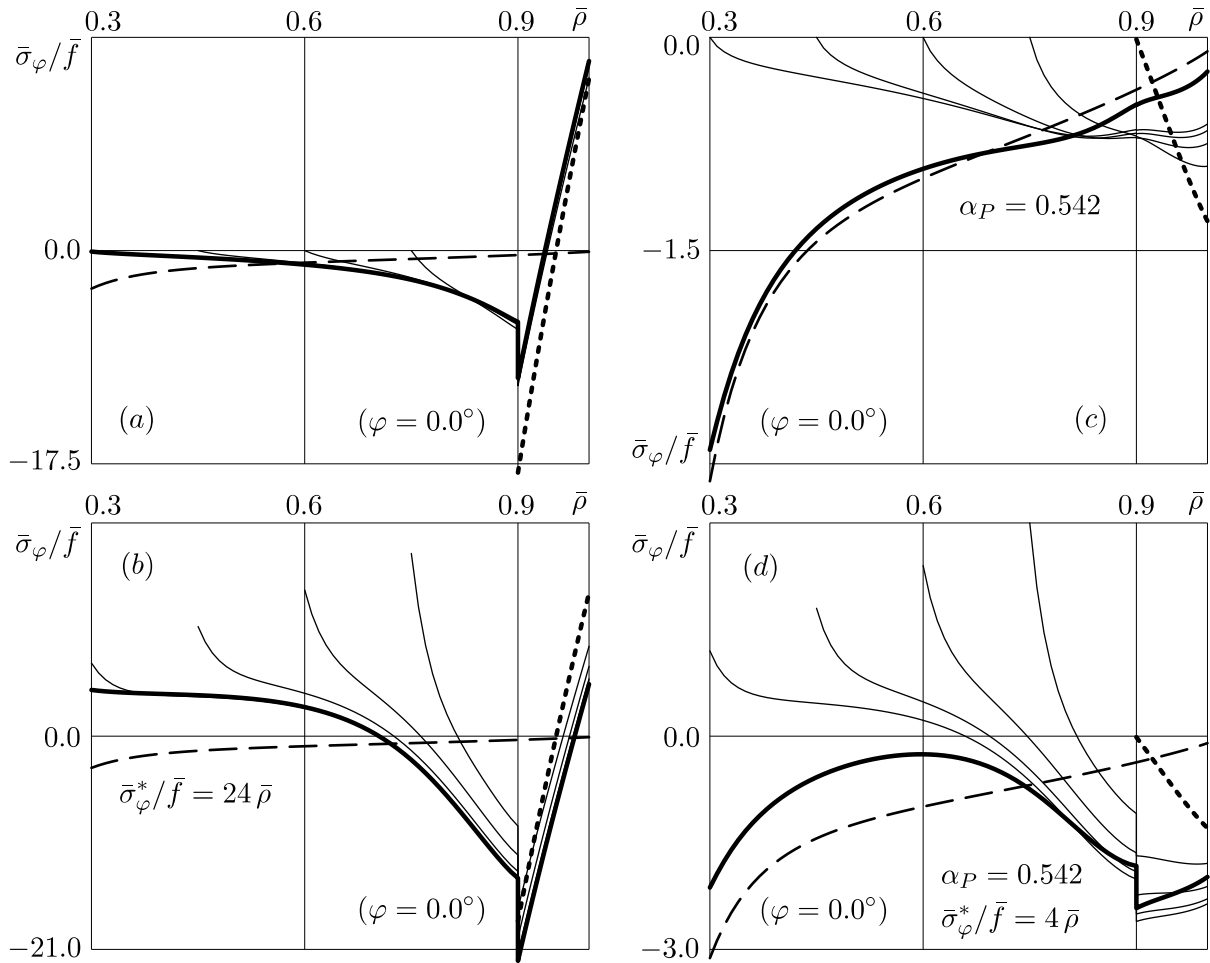
Рассмотрим еще вариант значительного утолщения исходно установленной тонкостенной арки ( $\bar{a}_0 = 0.9$ ) — до значения внутреннего радиуса  $\bar{a}_1 = 0.3$ . Этот случай интересен тем, что если бы полученная в итоге конструкция была установлена на основание уже в готовом виде, то под действием сил тяжести ее опорные площадки полностью прилегали



**Фиг. 3.32.** Финальные распределения интенсивности касательных напряжений в тонкой арке при частичной компенсации веса во время «медленного» наращивания: (a), (b) — без натяга и (c) — с равномерным по углу натягом. Шаг по уровням 0.10.



**Фиг. 3.33.** Финальные распределения наибольших растягивающих напряжений в тонкой арке при частичной компенсации веса во время «медленного» наращивания: (a), (b) — без натяга и (c) — с равномерным по углу натягом. Шаг по уровням 0.15.



**Фиг. 3.34.** Нормальные контактные напряжения на подошве толстостенной арки, «медленно» возводимой на базе тонкостенной заготовки:

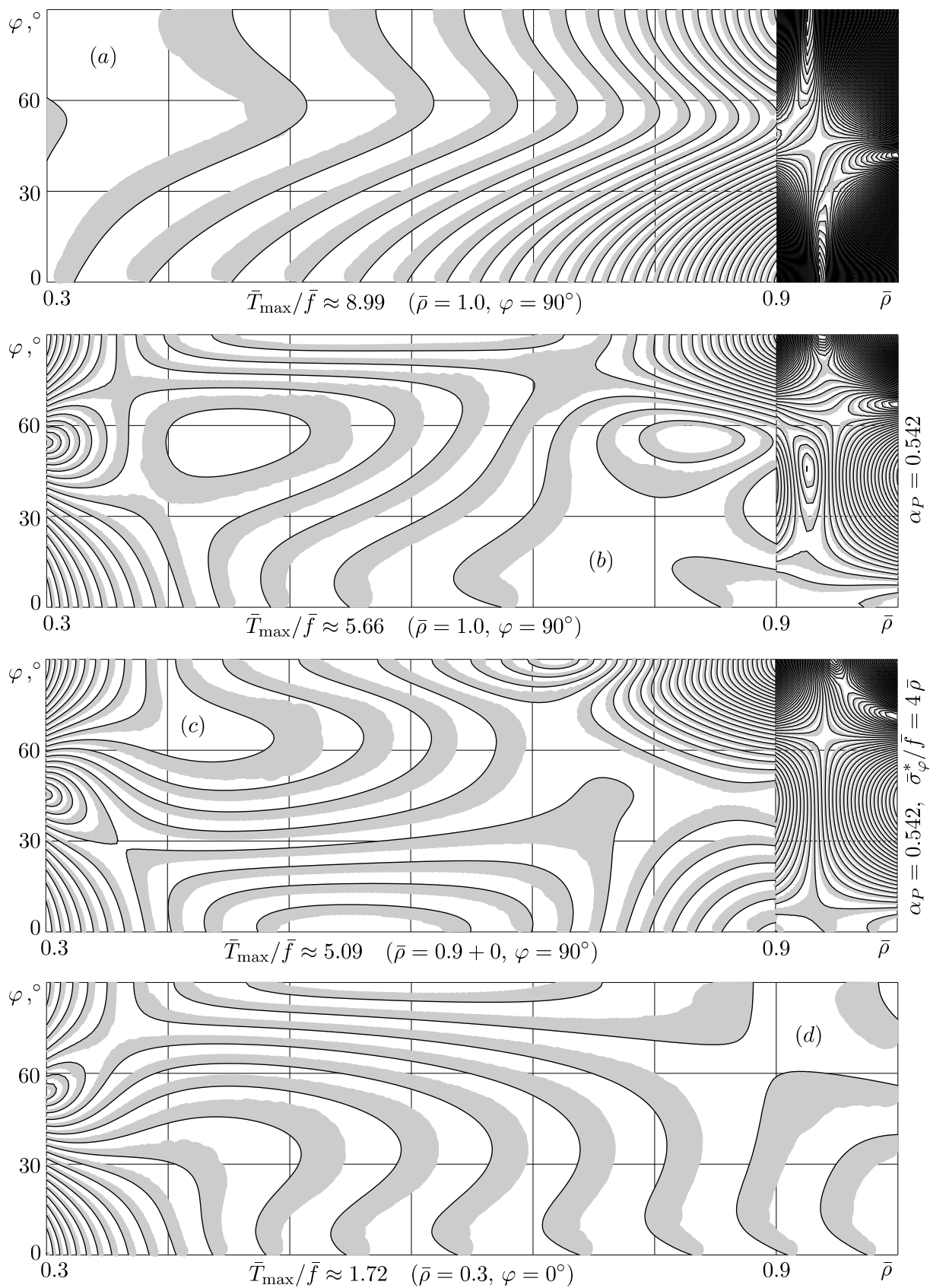
- (a) — без поддержки и натяга, (b) — с равномерным по углу натягом,  
 (c) — с поддержкой, (d) — с поддержкой и натягом.

бы к нему, не стремясь отслоиться. Однако при постепенном возведении такой конструкции в поле сил тяжести изначально возникшие на внешних участках ее подошв зоны потенциального отслоения не исчезают со временем, а действующие в них отрывающие напряжения в случае «медленного» процесса даже несколько возрастают (фиг. 3.34, a). Если осуществить наращивание предварительно растянутыми элементами, то зоны отрывающих напряжений возникнут еще и у внутренней поверхности арки. На фиг. 3.34, b показан случай  $\alpha_\sigma = 24$  для закона натяжения конструктивных элементов (3.60), когда предельные значения (максимальных) отрывающих напряжений у внутренней и внешней кромок подошвы практически совпадают и меньше максимального отрывающего напряжения в случае наращивания без натяга (фиг. a) примерно на 74%; при этом максимальное (положительное) давление на основание возрастает приблизительно на 76% по сравнению с тем же случаем.

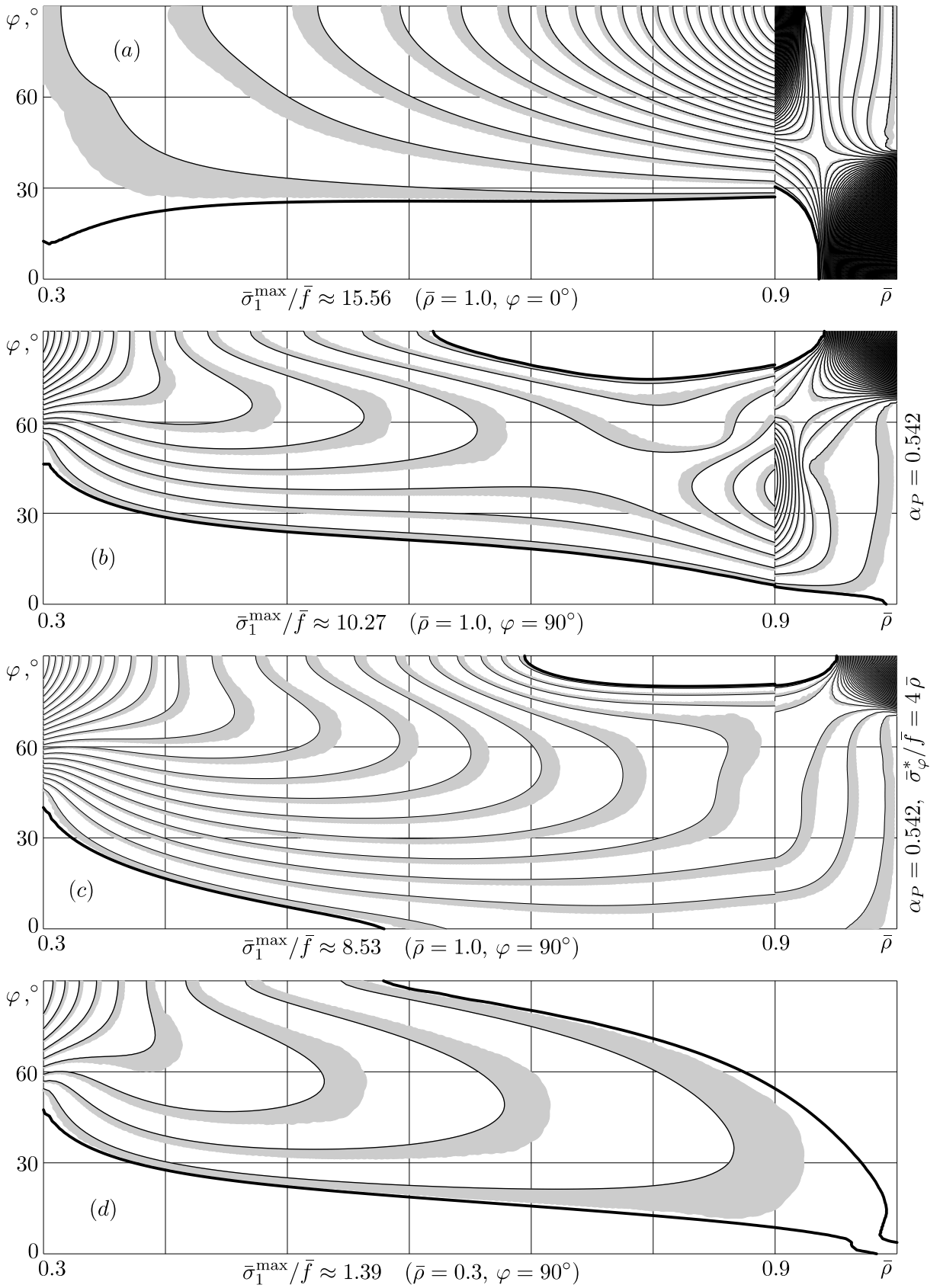
Но достаточно осуществить возведение с применением локальной силовой поддержки арки с коэффициентом компенсации веса  $\alpha_P = 0.542$  (фиг. 3.34, *с*), чтобы финальное распределение контактных напряжений оказалось практически совпадающим с классическим и притом непрерывным (последний факт объясняется нулевым значением окружного напряжения у внутренней поверхности исходно установленной арки вблизи основания при данном значении поддерживающей силы — см. следствие 1.2). В соответствии со сказанным выше это означает, что изготовленная арка, свободная от удерживающих связей, будет стоять на основании без отрыва. Любопытным является также то обстоятельство, что в наличии таких связей здесь нет никакой потребности и на протяжении всего процесса возведения. Полученное в итоге распределение контактного давления оказывается сильно неравномерным: у внутренней кромки подошвы наблюдается (конечная) концентрация давления, в то время как наружная часть области контакта загружена относительно слабо. Эту ситуацию можно изменить, используя при изготовлении арки на силовом подвесе слегка растянутые конструктивные элементы. На фиг. 3.34, *д* показан случай  $\alpha_\sigma = 4$  (при  $\alpha_P = 0.542$ ), где уровень установившегося давления на основание во внутренней и внешней частях подошвы практически одинаков. При этом, однако, нужно отметить, что средняя часть подошвы в итоге почти не несет нагрузку, а в процессе возведения необходимо присутствие на основании удерживающих связей.

Финальные распределения в теле интенсивности касательных напряжений и максимального главного напряжения можно увидеть на фиг. 3.35 и 3.36, где показаны случаи изготовления арки при действии на нее только сил тяжести (фиг. *а*), а также, помимо этих сил, поддерживающей силы со стороны подвеса при  $\alpha_P = 0.542$  (фиг. *б*) и дополнительно начальных напряжений в присоединяемых конструктивных элементах при  $\alpha_\sigma = 4$  (фиг. *с*). Кроме того, показано состояние не наращивавшейся, а сразу установленной на основание арки финальных размеров (фиг. *д*). Перечисленные четыре случая оказываются упорядоченными в порядке убывания максимальных в теле значений указанных характеристик.

В заключение данного параграфа проанализируем временные эволюции максимальных значений интенсивности касательных напряжений  $T$  и наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  в арке, возводимой на базе тонкостенной заготовки ( $\bar{a}_0 = 0.9$ ) и утолщаемой на поддерживающем силовом подвесе за один этап непрерывного «медленного» наращивания предварительно напряженными элементами в одном случае до  $\bar{a}_1 = 0.7$ , а в другом — до  $\bar{a}_1 = 0.3$ . В первом случае принимается  $\alpha_P = 0.6$  и  $\alpha_\sigma = 12$ ,



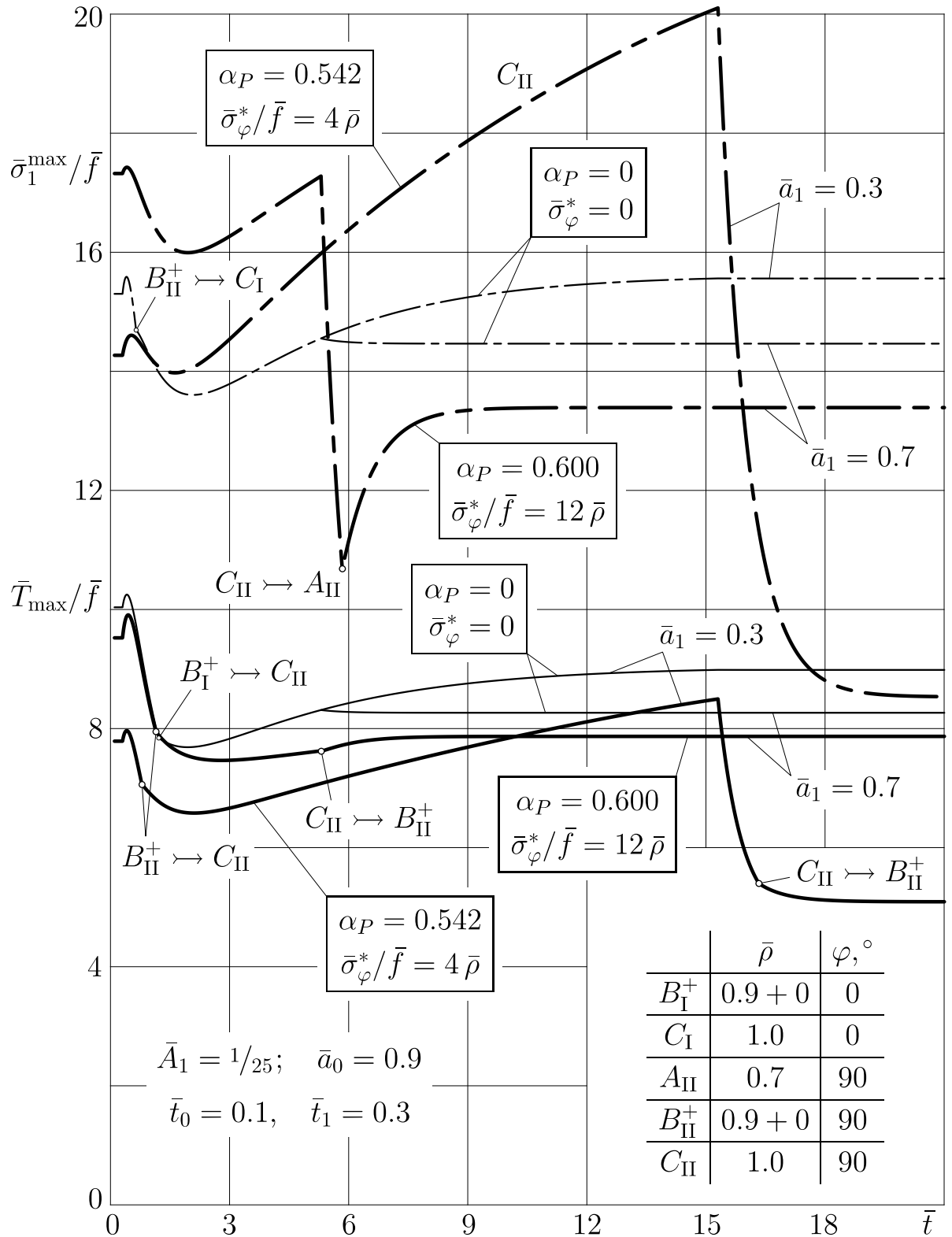
**Фиг. 3.35.** Финальная интенсивность касательных напряжений в толстой арке: (a) — «медленный» рост из тонкой без поддержки и натяга, (b) — с поддержкой, (c) — с поддержкой и натягом; (d) — классический случай. Шаг по уровням 0.09.



**Фиг. 3.36.** Финальные наибольшие растягивающие напряжения в толстой арке: (a) — «медленный» рост из тонкой без поддержки и натяга, (b) — с поддержкой, (c) — с поддержкой и натягом; (d) — классический случай. Шаг по уровням 0.15.

во втором —  $\alpha_P = 0.542$  и  $\alpha_\sigma = 4$  (см. выше). На фиг. 3.37, помимо указанных эволюций, построенных *жирными линиями*, показаны также (для сравнения) *тонкими линиями* аналогичные зависимости, имеющие место при отсутствии силовой поддержки ( $\alpha_P = 0$ ) и нулевом натяге присоединяемых элементов ( $\alpha_\sigma = 0$ ) и заимствованные с фиг. 3.24. Интенсивности  $T$  отвечают *сплошные линии*, главному напряжению  $\sigma_1$  — *штрихпунктирные*. Для каждой кривой на фигуре указаны те точки тела, в которых в разные моменты времени достигается соответствующий максимум (их положения могут дискретно меняться со временем).

Прежде всего, можем заметить, что при большей поддерживающей силе уровень напряжений в исходно установленной заготовке выше. Далее видим, что после начала процесса наращивания при наличии поддержки и натяга, как и при их отсутствии, наблюдается некоторый всплеск максимумов рассматриваемых характеристик и затем их падение. По достижении некоторого минимального значения они снова начинают расти, причем более интенсивно при тех значениях технологических параметров процесса  $\alpha_P$  и  $\alpha_\sigma$ , при которых осуществляется возведение толстостенной арки. Возрастание продолжается до момента прекращения возведения как тонкостенной, так и толстостенной конструкции. При этом в последнем случае достигнутые в этот момент значения максимумов оказываются выше их наибольших значений, достигнутых в самом начале процесса наращивания, причем для  $\sigma_1$  — весьма значительно. Это может оказаться особенно нежелательным, если для используемого материала растягивающие напряжения становятся более опасными с возрастом (к окончанию рассмотренного процесса наращивания толстостенной арки материал можно считать уже полностью состарившимся). Установившиеся в пределе значения максимальной интенсивности сдвиговых напряжений и наибольшего растягивающего напряжения в обеих изготовленных конструкциях — тонкостенной и толстостенной — меньше соответствующих значений, имеющих место после изготовления без специальных технологических приемов (организации контролируемой силовой поддержки и предварительного растяжения конструктивных элементов). В случае изготовления толстой арки за счет применения этих приемов удастся снизить финальные значения максимумов примерно в 1.8 раза. Однако в процессе такого возведения максимальная в теле величина наибольшего растягивающего напряжения  $\sigma_1$  принимает значительно большие значения, чем во время обычного возведения, когда специальные приемы не применяются. Что касается интенсивности сдвиговых напряжений  $T$ , то график зависимости ее максимального значения в теле от времени при



**Фиг. 3.37.** Эволюции во времени максимумов интенсивности касательных напряжений и наибольшего растягивающего напряжения в тонкой и толстой арках, возводимых на базе одной и той же тонкостенной заготовки с поддержкой и натягом (толстые линии) и без поддержки и натяга (тонкие линии).

наращивании с поддержкой и натягом на протяжении всего процесса деформирования толстостенной конструкции и почти на всем процессе деформирования тонкостенной (за исключением очень короткого интервала времени, наступающего вскоре после начала наращивания) лежит ниже соответствующего графика, реализующегося при обычном варианте наращивания.

### 3.11 Основные результаты и выводы

Завершая главу, опишем кратко наиболее важные результаты проведенных в ней исследований.

1. Предложена математическая модель процессов возведения полукруглой арки из вязкоупругого стареющего или упругого материала методом послойного утолщения со стороны внутренней поверхности некоторой заготовки, изготовленной заранее без остаточных напряжений и установленной на гладкое жесткое основание. Предполагается закрепление подошв наращиваемой арки посредством скользящей заделки, запрещающей их отслоение от основания. Данная модель учитывает как последовательность возведения конструкции, так и действие на нее сил тяжести на протяжении всего этого процесса. Даны постановки краевых задач механики наращиваемых тел, описывающих эволюцию напряженно-деформированного состояния рассматриваемой конструкции на этапах ее непрерывного утолщения, в паузах между этими этапами и после окончательного прекращения возведения. Построены аналитические решения данных задач.
2. Качественно исследовано влияние ползучести, старения и веса материала на деформирование произвольного тела, наращиваемого ненапряженными весовыми элементами. Общие рассуждения подкреплены результатами многочисленных числовых расчетов, выполненных для различных режимов возведения тяжелых тонкостенных и толстостенных сводов из тонкостенной заготовки и усиления исходно толстостенных сводов.
  - а) Выделены и проанализированы центральные тенденции, непрерывное взаимодействие которых определяет процесс формирования напряженно-деформированного состояния указанного тела, —

это тенденция к перераспределению за счет ползучести уже возникших в теле напряжений на присоединяемый к нему новый материал и тенденция к постоянному догрузению весом этого материала уже существующей части тела.

- б) При достаточно быстром изготовлении конструкции из молодого материала закладывается большой потенциал к перераспределению возникающих в ней напряжений. Поскольку все элементы деформируются при этом в достаточной степени согласованно, ее финальное состояние в целом оказывается близким к тому, которое имело бы место при загрузении собственным весом уже готовой конструкции (но эта близость не может быть неограниченной из-за возникающих разрывов напряжений, не зависящих, как показано в главе 1, от скорости протекания процесса наращивания). В рассматриваемой задаче это приводит в конечном итоге к очень сильному разгрузению исходно существующей части арки. Однако при быстром пополнении тела новыми элементами происходит и его интенсивное утяжеление, которое может вызывать в нем рост напряжений до тех пор, пока ползучесть не повлияет существенно на этот процесс. Поэтому на начальной стадии утолщения арка испытывает напряжения, превышающие первоначальные. В случае тонкой заготовки это превышение весьма значительно.
- в) Если возведение начинается достаточно поздно (в смысле возраста материала), перед началом наращивания выдерживается достаточно продолжительная пауза или само наращивание протекает слишком медленно, то изменение напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе изготовления обуславливается, в основном, ее догрузением весом новых дополнительных элементов. Состояние тела после такого изготовления оказывается чрезвычайно далеким от классического. Материал, присоединенный на завершающей стадии возведения, остается практически не напряженным. Уровень напряжений в исходной части рассматриваемой арочной конструкции при этом значительно возрастает по сравнению с первоначальным. Если заготовка является достаточно тонкостенной, в начальный момент в ней возникают весьма высокие напряжения. В результате в готовой конструкции будут иметься области с уровнем напряжений, многократно превышающим максимальный уровень при ее расчете по конечной конфигурации.
- г) Изготовление тяжелого тела из чисто упругого материала явля-

ется предельным вариантом процессов, описанных в п. в). В этом случае свойственные таким процессам особенности деформирования проявляются наиболее сильно.

3. Показано, что, варьируя в процессе возведения надлежащим образом скорость наращивания вязкоупругой конструкции, можно добиться в итоге весьма ощутимого снижения в ней напряжений относительно начального состояния заготовки, не превысив при этом их допустимых значений во время изготовления.
4. В ходе исследований обнаружено, что даже весьма толстостенная заготовка после установки на гладкое основание стремится отслоиться от него на периферийных участках своих подошв под действием собственного веса. Избавиться от зон отрывающих контактных напряжений за счет последующего усиления такой заготовки без принятия специальных мер невозможно даже в том случае, когда контактное давление на подошвах ненаращиваемой арки окончательной толщины было бы всюду положительным.
5. При постепенном изготовлении арки из достаточно толстой заготовки удается получить в готовой конструкции заметно более низкие напряжения по сравнению с теми, которые бы она имела, будучи установленной на основание сразу в готовом виде.
6. Исследован вариант наращивания арочной конструкции слоями, равномерно растянутыми в окружном направлении произвольным напряжением, зависящим от радиуса слоя.
  - а) При таком способе возведения также не удастся избежать неограниченного по времени сохранения удерживающих связей на части подошвы готовой арки, препятствующих ее отслоению.
  - б) Однако созданием в присоединяемых слоях надлежащих начальных напряжений возможно добиться гораздо более выгодного результирующего напряженного состояния всей конструкции, чем при ее наращивании ненапряженными элементами, — в смысле минимизации отрицательного давления на основание и общего уровня напряжений в теле.
7. Рассмотрен такой вариант процесса, когда вершина арки закрепляется на подвесе с контролируемой силой натяжения, компенсирующей во время возведения заданную долю текущего веса арки и убывающей до нуля после окончательного завершения ее формирования.

- а) Использование такой технологии позволяет получить во всей готовой конструкции значительно более низкие напряжения, чем при обычном наращивании в том же временном режиме.
  - б) При этом также оказывается возможным получение как непрерывной и практически совпадающей с классической, так и гораздо более оптимальной, чем в классическом случае, финальной эпюры контактных напряжений.
  - в) Если же, помимо организации силовой поддержки, еще и подвергать присоединяемые к конструкции элементы некоторому начальному растяжению, то удастся добиться того, что даже тонкостенная арка будет оказывать в итоге на основание всюду положительное контактное давление (что невозможно в том случае, когда эта арка установлена сразу в готовом виде), причем распределенное по подошве достаточно эффективно.
8. При самых различных вариантах и режимах изготовления рассматриваемой конструкции количественные характеристики ее напряженного состояния могут достигать в процессе изготовления величин, значительно превышающих финальные, причем в других по отношению к последним ее точках.

# Заключение

Сформулируем основные выводы и перечислим наиболее важные научные результаты выполненных в диссертации исследований.

1. Исследованы процессы деформирования твердых шаровых тел, растущих в произвольном центральном силовом поле за счет притока вещества к их поверхности. Показано, что такие тела приобретают необычные с точки зрения классической механики деформируемого твердого тела свойства. В частности, интенсивность касательных напряжений в постепенно выросшем упругом шаре оказывается всюду равной нулю. Проведены числовые расчеты для гравитирующих объектов, формирующихся в результате аккреции. Установлено, что в вязкоупругом случае распределение напряжений в них существенно зависит от скорости и характера протекания процесса роста. Изучены особенности этой зависимости.
2. Исследованы процессы послойного изготовления цилиндрических тел и покрытий посредством нанесения материала с произвольным натягом на наружную или внутреннюю поверхность вращающейся оправки или заготовки. Выявлена принципиальная необходимость совместного учета факторов постепенного притока к телу нового материала и действия на тело центробежных сил при расчете его напряженно-деформированного состояния в процессе и после изготовления. Выполнены расчеты для случаев силовой намотки и внутреннего напыления. Изучено влияние различных режимов изготовления на распределения остаточных напряжений в готовых изделиях.
3. Решена существенно двумерная задача о сооружении тяжелого полуциркулярного свода на гладком основании. Показано, что отказ от учета действия сил тяжести на протяжении всего процесса возведения тяжелых объектов может привести к радикально неверным представлениям об их текущем и результирующем состоянии, в том числе к многократному завышению оценки прочности и эксплуатационной несущей способности. Напряженно-деформированное состояние таких

объектов определяющим образом зависит от технологии и режима возведения. Продемонстрирована возможность весьма эффективного управления этим состоянием посредством варьирования в процессе наращивания скорости присоединения дополнительного материала, создания в нем предварительных напряжений, временного локального загрузения поверхности возводимого объекта.

4. Изучен ряд общих аспектов механического поведения и состояния растущих и сформированных в процессе наращивания упругих и стареющих вязкоупругих тел. В частности, доказана теорема об эволюции скачка тензора напряжений на поверхности раздела исходной и дополнительной частей произвольного наращиваемого тела, указан способ аналитического построения зависимостей от времени величин разрывов и изломов напряжений при переходе через границы субтел, предложен эффективный метод определения остаточных напряжений в наращиваемых телах после их освобождения от нагрузки или кинематических связей.
5. В результате анализа полученных в диссертации решений новых задач механики растущих тел и проведенных многочисленных числовых расчетов обнаружены и детально изучены принципиально новые механические эффекты, возникающие при наращивании деформируемых тел. Сделан ряд практически важных выводов.

# Приложение А

## Ограничения на параметры аппроксимации характеристик используемого материала

Здесь мы выведем те требования, которые нужно предъявить к параметрам аппроксимирующих выражений (0.14)–(0.16), чтобы выполнялись все свойства модуля упругости и меры ползучести рассматриваемого вязкоупругого стареющего материала, перечисленные в § 0.4.

Рассмотрим сначала аппроксимацию модуля упругости (0.14). Вычислим производную

$$G'(t) = \alpha G_\infty \delta G e^{-\alpha t}.$$

Очевидно, что в силу исходного требования  $\alpha > 0$  свойства (2) и (4) из (0.11) выполняются при любых значениях параметров  $G_\infty$  и  $\delta G$ .

Из (0.11) вытекает, что  $0 < G_0 \leq G_\infty$ . Поскольку  $\delta G = 1 - G_0/G_\infty$ , отсюда следует условие

$$0 \leq \delta G < 1. \quad (\text{A.1})$$

Обратно, если справедливы неравенства (A.1), то при  $t \geq 0$  будут выполнены первое и третье свойства (0.11), так как изначально предполагается, что  $\alpha > 0$  и  $G_\infty > 0$ .

*Таким образом, для наличия у функции (0.14) всех свойств (0.11) необходимым и достаточным является выполнение ограничения (A.1).*

Перейдем теперь к рассмотрению аппроксимации (0.15), (0.16) меры ползучести. Первая часть свойства (1) из (0.12) выполняется автоматически. Поскольку изначально считается, что  $\beta > 0$  и  $\gamma > 0$ , то свойство (0.13) и свойства (2), (3) из (0.12), справедливы при любых значениях параметров  $A_\infty > 0$  и  $\Delta A$ , а выполнение второй части первого свойства из (0.12) при  $t > \tau \geq 0$  эквивалентно условию

$$A(\tau) > 0, \quad \tau \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial t} &= \gamma A(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}, & \frac{\partial^2 \omega(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} &= \gamma B(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}, \\ \frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial \tau} &= A'(\tau) - B(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)}, & B(\tau) &= A'(\tau) + \gamma A(\tau).\end{aligned}$$

Сразу видим, что четвертое свойство из (0.12) эквивалентно аналогу требования (А.2) с нестрогим неравенством, а пятое свойство удовлетворяется автоматически. Найдем

$$A'(\tau) = -\beta \Delta A e^{-\beta \tau}, \quad B(\tau) = \gamma [A_\infty + (1 - \beta/\gamma) \Delta A e^{-\beta \tau}].$$

Вид зависимости  $B(\tau)$  убеждает в том, что условие (0.12, 6) с учетом изначального требования  $A_\infty > 0$  равносильно неравенству  $B(0) \geq 0$ , то есть следующему ограничению на параметры аппроксимации:

$$A_\infty + (1 - \beta/\gamma) \Delta A \geq 0. \quad (\text{А.3})$$

Требование (0.12, 7) при выбранных аппроксимациях эквивалентно, очевидно, одновременному выполнению двух неравенств

$$\begin{aligned}0 &\geq \partial \omega(t, \tau) / \partial \tau \big|_{t=\tau} = A'(\tau) - B(\tau) \equiv -\gamma A(\tau), \\ 0 &\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \partial \omega(t, \tau) / \partial \tau = A'(\tau), \quad \tau \geq 0,\end{aligned}$$

одно из которых обязательно должно быть строгим. Первое из этих неравенств есть ослабленный вариант (А.2), а второе дает

$$\Delta A \geq 0. \quad (\text{А.4})$$

Неравенство (А.2), в свою очередь, приводит к условию  $A_\infty + \Delta A > 0$ .

Логически перемножая теперь все полученные условия, приходим к следующему выводу.

*Для наличия всех свойств (0.12), (0.13) у меры ползучести, заданной выражениями (0.15), (0.16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись ограничения (А.3) и (А.4) на параметры ее аппроксимации.*

Напомним еще раз, что всюду выше заведомо предполагается выполнение условий  $G_\infty > 0$ ,  $A_\infty > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ .

# Приложение Б

## Организация вычислительного процесса и методы проверки результатов

Опишем здесь кратко вычислительные процедуры, применяемые в данной работе при численном моделировании рассматриваемых процессов. Также укажем и обоснуем те приемы, которые используются для проверки правильности получаемых результатов.

### Б.1 Организация вычислений

Построенных в работе решениях краевых задач наращивания используют следующие функции, определяемые механическими свойствами рассматриваемого материала и массовыми силами, действующими на соответствующее наращиваемое тело:

Наращиваемое тело	Используемые функции	Определяющие формулы
Шар в центральном поле	$\Phi(r, t), \Psi(r, t)$	(1.43)
Вращающийся полый цилиндр	$\Phi(\rho, t), \Xi^{\pm}(\rho, t)$	(2.24), (2.26)
Тяжелая круговая арка	$\Phi_m(\rho, t), \Psi_m(\rho, t)$	(3.50)

Эти функции представляют собой некоторые интегралы и в конкретных исследуемых примерах вычисляются приближенно с помощью квадратурной формулы Симпсона. Выбор шага интегрирования осуществляется автоматически по ходу вычислений на основании оценки главной части погрешности по правилу Рунге [29] (которое, напомним, заключается в сравнении двух приближенных значений интеграла, полученных с использованием данной квадратурной формулы для величин шага, отличающихся друг от друга в два раза).

Таким же методом вычисляются и компоненты тензора  $\mathbf{T}^\circ$  по найденной скорости  $\mathbf{S}$  его изменения во времени.

Эволюция компонент тензора напряжений  $\mathbf{T}$  определяется далее из численного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода (1.48). Это решение строится методом квадратур с помощью формулы трапеций [73] на равномерной временной сетке (во избежание появления ошибок округления при формировании набора ее узлов шаг по безразмерному времени берется равным некоторой целой отрицательной степени двойки). Построение решения продолжается до того момента времени, пока (безразмерная) скорость изменения всех компонент тензора напряжений, оцененная на последней ячейке сетки, не будет достаточно малой. Точность решения оценивается сравнением финальных значений напряжений, полученных при различных значениях шага по времени<sup>1</sup>.

Напомним (см. § 0.4), что для выбранной аппроксимации меры ползучести  $\omega(t, \tau)$  в форме (0.15) известно замкнутое аналитическое представление резольвенты  $R(t, \tau)$  уравнения (1.48). Данное представление содержит, однако, по меньшей мере один, а в общем случае два интеграла, которые можно вычислить только с помощью приближенных алгоритмов (один, если задать, например, функцию старения и модуль сдвига выражениями (0.16) и (0.14)). Это значит, что обращение интегрального уравнения (1.48), основанное на использовании резольвентного оператора, сводится к повторному численному интегрированию. Такой подход оказывается гораздо более затратным, нежели непосредственное применение к прямому интегральному оператору, например, квадратурной формулы трапеций, порождающее систему линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей для неизвестных узловых значений искомого решения.

В задаче о возведении тяжелой арки решения краевых задач для вектора перемещения  $\mathbf{u}$  и тензора напряжений  $\mathbf{T}$  на этапе до начала наращивания и вектора скорости  $\mathbf{v}$  и тензора  $\mathbf{S}$  после начала роста даются бесконечными рядами (3.44), (3.46), (3.51), (3.52). Приближенное суммирование этих рядов проводится итерационно путем прибавления к результату очередной итерации сразу некоторого, существенно большего единицы и изначально фиксированного, числа последующих членов ряда. Процедура продолжается до тех пор, пока различие результатов на соседних итерациях не станет достаточно малым.

---

<sup>1</sup>После машинной реализации алгоритма обращения уравнения Вольтерра проверку правильности его работы, а также предварительную оценку возможной погрешности в решении можно осуществить с помощью равенства (0.3).

## Б.2 Проверка результатов

**1. Эволюции скачков напряжений.** Как отмечено в § 1.6, для проверки правильности и контроля точности построенного численного решения полной задачи о деформировании кусочно-непрерывного наращиваемого тела может быть использована (составляющая содержание доказанной в главе 1 теоремы 1.1) формула (1.56) (а при условиях, оговоренных в следствие 1.2, — ее частный вариант (1.63)), выражающая зависимость от времени скачка тензора напряжений в произвольной точке первоначальной поверхности роста. Такая возможность объясняется тем, что на указанную зависимость не влияют конкретные параметры процесса наращивания тела и его нагружения после начала этого процесса (см. следствие 1.1). Следовательно, эта зависимость является полностью известной еще до решения задачи на соответствующем кусочно-непрерывному росту интервале времени и может быть сопоставлена с той зависимостью, которая получается в результате такого решения.

Данный прием применяется в настоящей работе в качестве одного из критериев точности получаемых результатов. Еще один прием описывается в следующем пункте.

**2. Интегральные условия равновесия.** Необходимым и достаточным условием механического равновесия произвольного деформируемого тела под действующими на него нагрузками является равновесие всех конечных частей этого тела в каждый рассматриваемый момент времени. Если после решения задачи проверить равновесие хотя бы некоторого набора конечных частей, то можно убедиться в выполнении необходимого условия равновесия всего тела. Когда же речь идет о численном решении, интегральное равенство, отражающее факт равновесия некоторой выделенной части, не может удовлетворяться абсолютно точно. Величина расхождения соответствующих числовых значений слева и справа от требуемого знака равенства (величина невязки интегрального уравнения равновесия) позволяет судить о правильности построенного решения и оценивать его точность.

Во всех полученных ниже проверочных условиях равновесия фигурируют определенные интегралы по радиальной координате ( $r$  в задаче о шаре и  $\rho$  в задачах о полом цилиндре и круговой арке) от найденных из решения задачи напряжений. Поскольку для нахождения напряжений используются численные алгоритмы, то соответствующие подынтегральные функции известны лишь на некотором заранее определенном

конечном наборе значений их аргументов. Поэтому указанные интегралы вычисляются посредством интерполирования этих функций по радиальной координате естественными кубическими сплайнами.

*А. Шар в центральном силовом поле.* В задаче о наращивании шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле интенсивности  $f(r)$  в качестве той части тела, для которой проверяется выполнение интегрального условия равновесия, выбирается половина шара.

В каждый момент времени  $t \geq t_0$  после создания (помещении в силовое поле) исходной части (радиуса  $a_0$ ) рассматриваемого шарового тела на сферическом участке  $r = a(t)$  граничной поверхности выделенного куска (считаем, что до начала наращивания  $a(t) \equiv a_0$ ) напряжения отсутствуют по условиям задачи. На плоском участке его границы (в диаметральной сечении шара) в силу центральной симметрии действуют только нормальные напряжения, то есть поверхностная нагрузка векторной интенсивности  $\mathbf{k} \sigma_\vartheta(r, t)$ , где  $\mathbf{k}$  — вектор внешней единичной нормали на данном участке поверхности. Главный вектор этой нагрузки равен

$$\mathbf{k} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a(t)} \sigma_\vartheta(r, t) r dr = 2\pi \mathbf{k} \int_0^{a(t)} \sigma_\vartheta(r, t) r dr;$$

здесь  $\varphi$  — полярный угол в плоскости диаметрального сечения. В объеме выделенного куска тела распределены силы интенсивности  $-\mathbf{e}_r f(r)$ . Если  $\vartheta$  — угол между векторами  $-\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{k}$ , то главный вектор объемной нагрузки равен

$$\mathbf{k} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{a(t)} f(r) r^2 dr = \pi \mathbf{k} \int_0^{a(t)} f(r) r^2 dr.$$

Таким образом, интегральное уравнение равновесия половины шара в любой момент времени имеет вид

$$2 \int_0^{a(t)} \sigma_\vartheta(r, t) r dr + \int_0^{a(t)} f(r) r^2 dr = 0, \quad t \geq t_0.$$

К этому уравнению можно было прийти также, проинтегрировав по  $r$  в соответствующих пределах дифференциальное уравнение равновесия шара (1.67), записанное в форме

$$\partial(r^2 \sigma_r) / \partial r - 2r \sigma_\vartheta = r^2 f(r), \quad 0 < r < a(t),$$

с учетом граничного условия  $\sigma_r|_{r=a(t)} \equiv 0$ .

В частном случае гравитирующего шара, то есть когда зависимость  $f(r)$  имеет вид (1.79), интегральное условие равновесия принимает вид

$$\int_0^{a(t)} \sigma_{\vartheta}(r, t) r dr = -\frac{c a^4(t)}{8}, \quad t \geq t_0.$$

Именно в таком виде оно и используется для проверки решения.

*Б. Вращающийся полый цилиндр.* В силу осевой симметрии и условия плоской деформации, имеющих место в задаче о наращивании цилиндрического слоя на вращающейся жесткой оправке, компонентная запись дифференциального уравнения равновесия (2.9) имеет вид

$$\partial \sigma_{\rho} / \partial \rho + (\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}) / \rho + \rho c(t) = 0, \quad \rho \in (x_0, x(t)).$$

Перепишем данное уравнение в форме

$$\partial(\rho \sigma_{\rho}) / \partial \rho - \sigma_{\varphi} + \rho^2 c(t) = 0, \quad \rho \in (x_0, x(t)),$$

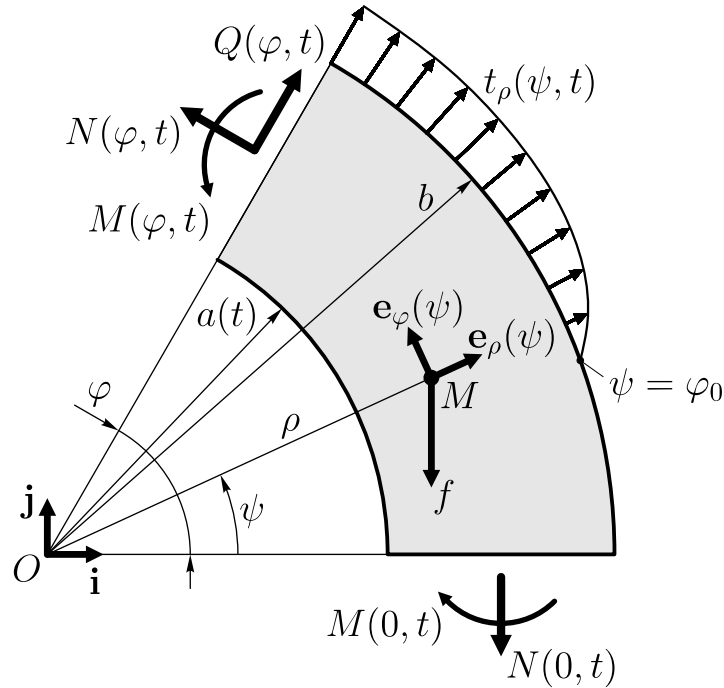
и проинтегрируем по  $\rho$  от  $x_0$  до  $x(t)$ . С учетом принятого в задаче условия  $\sigma_{\rho}|_{\rho=x(t)} \equiv 0$  получим для любого момента времени после начала роста

$$\int_{x_0}^{x(t)} \sigma_{\varphi}(\rho, t) d\rho = \frac{c(t)}{3} [x^3(t) - x_0^3] + x_0 p(t), \quad t > t_1,$$

где  $p(t) = -\sigma_{\rho}|_{\rho=x_0}$  — давление на наращиваемый слой со стороны оправки. Очевидно, что полученное уравнение можно трактовать как интегральное условие равновесия произвольного сектора рассматриваемого полого кругового цилиндра.

*В. Тяжелая круговая арка.* Получим теперь необходимые интегральные условия равновесия полукруглой цилиндрической арки, наращиваемой в поле сил тяжести на гладком жестком горизонтальном основании. При этом учтем возможность поддержки этой арки некоторой силой, распределенной по наружной круговой цилиндрической поверхности в виде нормальной нагрузки  $t_{\rho}(\varphi, t)$ , которая отлична от нуля только в некоторой окрестности  $\varphi \in [\varphi_0, \pi - \varphi_0]$  вершины арки.

Рассмотрим сектор арки, который в произвольный момент времени  $t \geq t_0$  после установки исходной ее части заключен между той стороной основания, от которой отсчитывается полярный угол  $\varphi$ , и полуплоскостью  $\varphi = \text{const} > 0$ . На фиг. Б.1 изображен указанный фрагмент тела и показаны действующие на него нагрузки. Все силы и моменты, вычисляемые ниже, являются погонными, то есть отнесены к единице длины выделенного фрагмента в направлении оси арки.



**Фиг. Б.1.** К выводу интегральных уравнений равновесия наращиваемой арки: нагрузки, действующие на выделенный фрагмент рассматриваемого тела.

По объему этого фрагмента распределены силы тяжести векторной интенсивности  $-\mathbf{j}f$ , где  $\mathbf{j}$  — направленный вверх вектор единичной нормали к плоскости основания. Их главный вектор равен

$$-\mathbf{j}f \int_0^\varphi d\psi \int_{a(t)}^b \rho d\rho = -\frac{\mathbf{j}f\varphi}{2} [b^2 - a^2(t)],$$

а суммарный момент, действующий относительно оси арки (линии, проходящей через точки  $O$ ) в сторону увеличения угла  $\varphi$ , составляет

$$-f \int_0^\varphi \cos \psi d\psi \int_{a(t)}^b \rho^2 d\rho = -\frac{f \sin \varphi}{3} [b^3 - a^3(t)],$$

С учетом разложения  $\mathbf{e}_\rho(\psi) = \mathbf{i} \cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi$ , где по определению полагается  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_\rho(0)$ , главный вектор поверхностной нагрузки с векторной интенсивностью  $\mathbf{e}_\rho t_\rho$ , действующей на поверхности  $\rho = b$ , равен

$$\mathbf{i} X(\varphi, t) + \mathbf{j} Y(\varphi, t),$$

$$X(\varphi, t) = b \int_0^\varphi t_\rho(\psi, t) \cos \psi d\psi, \quad Y(\varphi, t) = b \int_0^\varphi t_\rho(\psi, t) \sin \psi d\psi.$$

Интегралы  $X(\varphi, t)$  и  $Y(\varphi, t)$  могут быть вычислены, коль скоро задана функция  $t_\rho(\psi, t)$ . При этом следует заметить, что в силу требуемых в задаче условий симметричности и локальности поверхностной нагрузки

$$t_\rho(\psi, t) \equiv t_\rho(\pi - \psi, t), \quad \psi \in [0, \pi];$$

$$t_\rho(\psi, t) \equiv 0, \quad \psi \in [0, \varphi_0] \cup [\pi - \varphi_0, \pi]$$

имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} X(\varphi, t) &\equiv Y(\varphi, t) \equiv 0, & \varphi \in [0, \varphi_0], \\ X(\varphi, t) &\equiv 0, \quad Y(\varphi, t) \equiv P(t), & \varphi \in [\pi - \varphi_0, \pi], \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где  $P(t)$  — погонная сила, поддерживающая арку.

На плоском участке границы рассматриваемого фрагмента арки, наклоненном под углом  $\varphi$  к основанию, действуют нормальные  $\sigma_\varphi(\rho, \varphi, t)$  и касательные  $\tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi, t)$  напряжения. Их главные векторы равны соответственно  $\mathbf{e}_\varphi(\varphi) N(\varphi, t)$  и  $\mathbf{e}_\rho(\varphi) Q(\varphi, t)$ , где

$$N(\varphi, t) = \int_{a(t)}^b \sigma_\varphi(\rho, \varphi, t) d\rho, \quad Q(\varphi, t) = \int_{a(t)}^b \tau_{\rho\varphi}(\rho, \varphi, t) d\rho$$

суть погонные растягивающее и перерезывающее усилия в арке. Изгибающий арку погонный момент в сечении  $\varphi = \text{const}$  равен

$$M(\varphi, t) = M_O(\varphi, t) - N(\varphi, t)[a(t) + b]/2,$$

где величина

$$M_O(\varphi, t) = \int_{a(t)}^b \sigma_\varphi(\rho, \varphi, t) \rho d\rho$$

представляет собой момент окружных напряжений в соответствующем сечении арки относительно ее оси.

На подошве арки по условию задачи действуют только нормальные напряжения  $\sigma_\varphi(\rho, 0, t)$ . Их главный вектор есть  $-\mathbf{j} N(0, t)$ , а суммарный момент относительно оси равен  $-M_O(0, t)$ .

Таким образом, можем записать следующие интегральные условия равновесия выделенного фрагмента:

$$\begin{cases} Q(\varphi, t) \cos \varphi - N(\varphi, t) \sin \varphi = -X(\varphi, t), \\ Q(\varphi, t) \sin \varphi + N(\varphi, t) \cos \varphi = \\ \quad = N(0, t) + \frac{f\varphi}{2} [b^2 - a^2(t)] - Y(\varphi, t); \end{cases} \quad (\text{Б.2})$$

$$M_O(\varphi, t) = M_O(0, t) + \frac{f \sin \varphi}{3} [b^3 - a^3(t)]. \quad (\text{Б.3})$$

Если рассмотреть второе из уравнений (Б.2) при  $\varphi = \pi$  и воспользоваться вторым тождеством (Б.1), а также учесть тот факт, что в силу

симметрии тела и действующей на него нагрузки относительно полуплоскости  $\varphi = \pi/2$  имеет место тождество  $N(\pi, t) \equiv N(0, t)$ , то можем найти

$$N(0, t) = \frac{P(t)}{2} - \frac{f\pi}{4} [b^2 - a^2(t)].$$

Тогда система уравнений (Б.2) становится замкнутой и из нее однозначно определяются неизвестные величины

$$\begin{aligned} N(\varphi, t) = & \frac{P(t) \cos \varphi}{2} - \frac{f \cos \varphi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) [b^2 - a^2(t)] + \\ & + X(\varphi, t) \sin \varphi - Y(\varphi, t) \cos \varphi, \\ Q(\varphi, t) = & \frac{P(t) \sin \varphi}{2} - \frac{f \sin \varphi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) [b^2 - a^2(t)] - \\ & - X(\varphi, t) \cos \varphi - Y(\varphi, t) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Момент же  $M_O(\varphi, t)$  может быть найден из (Б.3) лишь с точностью до слагаемого, не зависящего от угла  $\varphi$ . То есть известна только разница моментов для любых двух сечений  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$ . Она равна

$$M_O(\varphi_2, t) - M_O(\varphi_1, t) = 1/3 f (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) [b^3 - a^3(t)]. \quad (\text{Б.5})$$

Выражения (Б.4) и (Б.5) и используются в рассматриваемой задаче для проверки правильности результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александровский С.В., Васильев П.И.* Экспериментальные исследования ползучести бетона // Ползучесть и усадка бетона и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1976. С. 97–152.
2. *Арутюнян Н.Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона // Докл. АН АрмССР. 1947. Т. 7. № 5. С. 203–209.
3. *Арутюнян Н.Х.* Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 6. С. 609–622.
4. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 323 с.
5. *Арутюнян Н.Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона // Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М.: Наука, 1972. С. 155–202.
6. *Арутюнян Н.Х.* Краевая задача теории ползучести для наращиваемого тела // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 783–789.
7. *Арутюнян Н.Х., Зевин А.А.* Задачи оптимизации в теории ползучести для наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 1. С. 100–107.
8. *Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
9. *Арутюнян Н.Х., Метлов В.В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 142–152.
10. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д.* Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 4. С. 821–825.
11. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д.* О растущем гравитирующем вязкоупругом шаре при конечных деформациях // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 124–137.
12. *Арутюнян Н.Х., Михайлов М.Н., Потапов В.Д.* Об устойчивости растущего вязкоупругого армированного стержня, подверженного старению // ПМТФ. 1984. № 5. С. 143–151.

13. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Теория вязкоупругопластичности растущих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 1. С. 23–27.
14. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Механика растущих вязкоупругих тел, подверженных старению, при конечных деформациях // Мех. композитн. материалов. 1985. № 4. С. 591–602.
15. Арутюнян Н.Х., Геогджаев В.О., Наумов В.Э. Задачи механики растущих вязкоупругопластических тел в условиях старения и разгрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 153–163.
16. Арутюнян Н.Х., Михайлов М.Н., Потапов В.Д. Устойчивость растущих вязкоупругих оболочек, подверженных старению // ПМТФ. 1986. № 2. С. 151–160.
17. Арутюнян Н.Х. Фундаментальные решения задач для растущего тела в форме четвертыплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 85–90.
18. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
19. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи механики растущих тел // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 145–158.
20. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание деформируемых тел. Препринт / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1989. № 374. 43 с.
21. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Волны в растущих упругих телах. Препринт / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1989. № 405. 44 с.
22. Арутюнян Н.Х., Манжирова А.В., Наумов В.Э., Шматкова А.А. Механика растущих неоднородных вязкоупругих тел, подверженных старению // Отчет (аннотационный) / Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1990. 21 с.
23. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 6. С. 85–96.

24. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 72–86.
25. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 176 с.
26. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 5. С. 6–24.
27. Арутюнян Н.Х., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 6. С. 99–112.
28. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990; Изд-во НАН РА, 1999. 318 с.
29. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Изд. 4-е. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 636 с.
30. Бейль А.И., Мансуров А.Р., Портнов Г.Г., Тринчер В.К. Модели для силового анализа намотки композитов // Мех. композитн. материалов. 1983. № 2. С. 303–313.
31. Болотин В.В., Воронцов А.Н., Мурзаханов Р.Х. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления // Мех. композитн. материалов. 1980. № 3. С. 500–508.
32. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
33. Гольденблатт И.И., Николаенко Н.А. Теория ползучести строительных материалов и ее приложения. М.: Госстройиздат, 1960. 256 с.
34. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд. 6-е. М.: Наука, 1983. 172 с.
35. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1979. 432 с.

36. *Дмитриева А.М., Наумов В.Э., Радаев Ю.Н.* Наращивание термоупругого сферического слоя: применение вариационного подхода. Препринт / Ин-т проблем механики РАН. М., 1993. № 528. 64 с.
37. *Дятловицкий Л.И., Рабинович Л.Б.* Упругая задача для тел с изменяющейся в процессе загрузки конфигурацией // Инж. ж-л. 1962. Т. 2. Вып. 2. С. 287–297.
38. *Дятловицкий Л.И., Вайнберг А.И.* Формирование напряжений в гравитационных плотинах. Киев: Наукова Думка, 1975. 264 с.
39. *Ефремова Е.А., Паршин Д.А.* Напряженно-деформированное состояние вязкоупругого стареющего слоя, наносимого на вращающуюся цилиндрическую втулку // Ракетно-космическая техника: Фундаментальные и прикладные проблемы механики. Материалы Международной научной конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева. Москва, 4–6 мая 2006 г. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. С. 52.
40. *Зорич В.А.* Математический анализ: В 2 ч. Изд. 4-е, испр. М.: МЦНМО, 2002. Ч. I: XVI + 657 с.; Ч. II: XIV + 787 с.
41. *Каган-Розенцвейг Л.М., Харлаб В.Д.* Об учете старения бетона в задачах линейной теории ползучести // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. тр. Л.: ЛИСИ, 1985. С. 99–106.
42. *Карпетян К.С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжением и деформациями ползучести // Изв. АН. АрмССР. Серия физ.-мат. наук. 1959. Т. 12. № 4. С. 57–88.
43. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1969. 420 с.
44. *Ковальский Б.С.* Теория многослойной навивки каната // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74. № 3. С. 429–432.
45. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Изд. 7-е, испр. М.: Наука, 1988. 509 с.
46. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
47. *Манжиров А.В.* О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.

48. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.
49. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.
50. Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды VI международной конференции. Ростов-на-Дону, 19–23 июня 2000 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 106–109.
51. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении наращиваемого эллиптического бруса // Проблемы механики деформируемых тел. Ереван: Изд-во «Гитутюн» НАН РА, 2003. С. 216–224.
52. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2004. № 4 (34). С. 82–98.
53. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. С. 131–136.
54. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 66–83.
55. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 149–166.
56. Маслов Г.Н. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона // Изв. НИИ гидротехники. 1941. Т. 28. С. 175–188.
57. Метлов В.В., Никитин А.В. О наращивании вязкоупругого цилиндра, подверженного старению // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37, № 5. С. 52–60.
58. Метлов В.В. О наращивании тел при конечных деформациях // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 80. № 2. С. 87–91.

59. *Метлов В.В.* О наращивании неоднородных вязкоупругих тел при конечных деформациях // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 637–647.
60. *Метлов В.В., Турусов Р.А.* О формировании напряженного состояния вязкоупругих тел, растущих в условиях фронтального отверждения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 145–160.
61. *Наумов В.Э., Радаев Ю.Н.* Термомеханическая модель наращиваемого тела: вариационная формулировка. Препринт / Ин-т проблем механики РАН. М., 1993. № 527. 39 с.
62. *Николаев В.П., Инденбаум В.М.* К расчету остаточных напряжений в намоточных изделиях из стеклопластиков // Мех. полимеров. 1970. № 6. С. 1026–1030.
63. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
64. *Образцов И.Ф., Паймушин В.Н., Сидоров И.Н.* О постановках задачи непрерывного наращивания упругих тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, № 4. С. 813–816.
65. *Очан М.Ю.* Исследование оптимального натяжения при намотке ленты на барабан // Машиноведение. 1972. № 2. С. 21–27.
66. *Паршин Д.А.* Наращивание вязкоупругого усеченного конуса под осесимметричной торцевой нагрузкой // XXX Гагаринские чтения. Тезисы докладов Международной молодежной научной конференции. Москва, 6–10 апреля 2004 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2004. Т. 2. С. 45–46.
67. *Паршин Д.А.* Наращивание гравитирующего шара // XXXI Гагаринские чтения. Тезисы докладов Международной молодежной научной конференции. Москва, 5–9 апреля 2005 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2005. Т. 1. С. 100–101.
68. *Паршин Д.А.* О контакте массивной наращиваемой арки с жестким основанием // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Материалы V Российской конференции с международным участием. Саратов, 23–25 августа 2005 г. / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 253–256.
69. *Паршин Д.А.* Наращивание гравитирующего упругого шара // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения акад.

- И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. Т. 1. С. 157–161.
70. *Паршин Д.А.* Нарастивание массивных деформируемых тел // XXXII Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции в 8 томах. Москва, 4–8 апреля 2006 г. М.: «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2006. Т. 1. С. 147–149.
71. *Паршин Д.А.* Кусочно-непрерывное нарастивание тяжелой арки из вязкоупругого стареющего материала // IX Всеросс. съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов. Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2006 г. Т. 3. С. 170.
72. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
73. *Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
74. *Прокопович И.Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М.: Госстройиздат, 1963. 260 с.
75. *Прокопович И.Е., Улицкий И.И.* О теориях ползучести бетона // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1963. № 10. С. 13–34.
76. *Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А.* Прикладная теория ползучести. М.: Стройиздат, 1980. 240 с.
77. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела: Учебн. пособие для вузов. Изд. 2-е, испр. М.: Наука, 1988. 712 с.
78. *Раиба Э.И.* Определение напряжений в массивах от действия собственного веса с учетом порядка их возведения // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. 1953. № 18. С. 23–27
79. *Саусвелл Р.В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. М.: ГИИЛ, 1948. 675 с.
80. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. Изд. 6-е, стер. СПб.: Лань, 2004. 528 с.
81. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. Изд. 9-е, стер. М.: КомКнига, 2006. 468 с.

82. *Тарнопольский Ю.М., Портнов Г.Г.* Изменение усилия натяжения при намотке изделий из стеклопластиков // *Мех. полимеров*. 1966. № 2. С. 278–284.
83. *Тринчер В.К.* Постановка задачи о термонапряжениях в растущем теле при заданных на растущей поверхности полных тензорах напряжений и силовых деформаций // V Всесоюзн. съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов. Алма-Ата, 27 мая – 3 июня 1981 г. Алма-Ата: Изд-во «Наука» Казахской ССР, 1981. С. 338.
84. *Тринчер В.К.* Общая геометрически линейная постановка задачи определения деформированного состояния для тела с переменной границей // *Проблемы современной механики*. Ч. 2 / Под ред. акад. Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ, 1983. 149 с.
85. *Тринчер В.К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1984. № 2. С. 119–124.
86. *Тринчер В.К.* Расчет наращиваемых тел. М.: Изд-во МГУ. 1989. 154 с.
87. *Харлаб В.Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела // *Механика стержневых систем и сплошных сред: Тр. ЛИСИ*. Л.: ЛИСИ, 1966. Вып. 49. С. 93–119.
88. *Харлаб В.Д.* Некоторые общие решения в линейной теории ползучести наращиваемого тела // *Аналитические и численные решения прикладных задач математической физики: Межвуз. темат. сб. тр.* Л.: ЛИСИ, 1986. С. 18–26.
89. *Шульман С.Г.* Расчеты гидротехнических сооружений с учетом последовательности возведения. М.: Энергия, 1975. 168 с.
90. *Яблонский Б.В.* Напряженное состояние многослойной конструкции при навивке ленты на цилиндр // *Прикл. механика*. 1971. Т. 7. Вып. 2. С. 130–133.
91. *Bažant Z.P.* Mathematical models for creep and shrinkage of concrete // *Creep and shrinkage in concrete structures* / Ed. by Z.P. Bažant and F.H. Wittmann. London: John Wiley & Sons Ltd., 1982. P. 163–256.
92. *Brown C.B., Goodman L.E.* Gravitational stresses in accreted bodies // *Proc. Roy. Soc. London, A*. 1963. Vol. 276. No. 1367. P. 571–576.

93. *Goodman L.E., Brown C.B.* Dead load stresses and the instability of slopes // J. Soil Mech. and Foundat. Div., Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1963. Vol. 89. No. 3. P. 103–134.
94. *Manzhurov A.V., Parshin D.A.* Accretion of solids under mass forces // Indo-Russian workshop on Problems in Nonlinear Mechanics of Solids with Large Deformation. Proceedings. IIT Delhi, November 22–24, 2006. New Delhi: IIT Delhi, 2006. P. 71–79.
95. *Naumov V.E., Radayev Yu.N., Schneiderman D.N.* The variational formulations of thermomechanics of accreting solids. Preprint / Inst. Problems in Mech. Russ. Acad. Sci. Moscow, 1995. No. 558. 67 p.
96. *Ross A.D.* Creep of concrete under variable stress // J. Amer. Concr. Inst. 1958. Vol. 29. No. 9. P. 739–758.
97. *Struik L.C.E.* Physical aging in amorphous polymers and other materials. Amsterdam: Elsevier, 1978. 229 p.
98. *Takaku A., Kobayashi T., Terui S., Okui N., Shimizu J.* Changes of tensile modulus and contractive stress of acrylic fibres during thermal stabilisation for carbon fibre production // Fibre Sci. and Technol. 1981. V. 15. No. 2. P. 87–98.