

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Радаев Юрий Николаевич

**Континуальные модели
поврежденности твердых тел**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Самара – 1999

Оглавление

Основные обозначения	6
Замечания об использовании индексов	20
Замечания об алгебраических и дифференциальных опе- раторах	22
Некоторые специальные тензоры и символы	27
Введение	32
Глава I. ТЕНЗОРНЫЕ МЕРЫ СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕН- НОСТИ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ	52
I.1. Введение	54
I.2. Формальное описание анизотропного состояния повре- жденности. Тензор поврежденности второго ранга	57
I.3. Тензоры поврежденности высших рангов. Главные оси и спектр поврежденности	63
I.4. Спектральные характеристики локальной поврежденности	76
I.5. Гармонический анализ тонкой структуры поврежденности	81
I.6. Гармоническое описание состояния поврежденности. Со- ответствие между гармоническим и тензорным предста- влениями	88
Глава II. ТОЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ	97
II.1. Введение	98
II.2. Усреднение второго порядка	100
II.3. Усреднение четвертого порядка. Амплитудный спектр поврежденности	106
II.4. Использование рядов Фурье для вычисления средней по- врежденности	120
II.5. Расчет осесимметричного состояния поврежденности . .	128
II.6. Двумерное распределение поврежденности	136
II.7. Экстремальные свойства ориентационного распределе- ния сплошности	140
Глава III. МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ С ТЕНЗОРОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ВТОРОГО	

	РАНГА	144
III.1.	Модель Качанова-Работнова. Параметр поврежденности. Эффективные напряжения	145
III.2.	Эквивалентная конфигурация континуума с внутренним распределением повреждений	149
III.3.	Определение и координатное представление тензора поврежденности	151
III.4.	Главные поврежденности и главные оси поврежденности. Геометрическая и механическая интерпретация собственных элементов тензора поврежденности	156
III.5.	Экстремальные свойства главных поврежденностей. Вычисление тензора поврежденности по экспериментальным диаграммам	160
III.6.	Возрастание напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений. Тензор эффективных напряжений	162
III.7.	Тензор поврежденности для конфигурации упруго разгруженных поврежденных элементов	166
III.8.	Условия симметрии и симметризация тензора эффективных напряжений	169
Глава IV.	КАНОНИЧЕСКИЕ СКРЫТЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ	174
IV.1.	Введение	175
IV.2.	Каноническое преобразование скрытых переменных состояния анизотропной поврежденности	178
IV.3.	Канонические асимптотики энтропии и внутренней энергии	191
IV.4.	Аппроксимация термодинамических потенциалов состояния на начальной стадии развития повреждений. Глобальные канонические представления	194
IV.5.	Канонический тензор поврежденности	198
IV.6.	Механическая интерпретация канонических норм	200
IV.7.	Каноническая асимптотика свободной энергии тела с повреждениями	204
IV.8.	Вариант канонического описания поврежденности	208

Глава V.	КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И КАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОШЕНИЯ	213
V.1.	Введение	215
V.2.	Уравнение баланса энтропии и энтропийное представление энергетических напряжений	218
V.3.	Условия термодинамической ортогональности	223
V.4.	Термодинамическое определение эффективных напряжений	228
V.5.	Термодинамическая модель связки необратимая деформация – поврежденность	235
V.6.	Баланс поврежденностей в связке неупругая деформация – поврежденность (изотермическое приближение)	239
V.7.	Канонический термодинамический анализ процессов накопления повреждений в твердых телах	247
V.7.1.	Процессы накопления хрупкой поврежденности	247
V.7.2.	Влияние необратимых деформаций на рост хрупкой поврежденности	251
V.7.3.	Влияние микронеоднородности пластического течения на рост поврежденности	252
V.7.4.	Процессы с постоянными энергетическими напряжениями	255
Глава VI.	О ВЛИЯНИИ УДАЛЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ И ПОВРЕЖДЕННОСТИ НА РАСКРЫТИЕ ТРЕЩИНЫ	258
VI.1.	Постановка задачи и основные уравнения	259
VI.2.	Локализация пластических деформаций при повторном нагружении	275
VI.3.	Вычисление раскрытия трещины при двухзонной локализации пластических деформаций	298
VI.4.	Пример численного анализа	307
Глава VII.	КАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ	311

VII.1.	Основные уравнения модели упругопластического тела с условием пластичности Треска	312
VII.2.	Канонические инварианты уравнений пластического рав- новесия	323
VII.3.	Учет анизотропной поврежденности	336
VII.4.	Инварианты плоской и пространственной связанной (плас- тичность-поврежденность) задачи	344
Заключение		348
Литература		352
ПРИЛОЖЕНИЕ		370

Основные обозначения

Общая система обозначений, используемая в настоящей работе и принятая во многих статьях и монографиях по нелинейной механике, в основном подобна [198]. Незначительные отклонения подробно описаны в [78].¹

Светлые курсивные буквы (латинские или греческие, прописные или строчные) обозначают скаляры и скалярные поля.

Жирные прямые строчные буквы (латинские или греческие) применяются для обозначения векторов и векторных полей.

Жирные прямые прописные буквы (латинские или греческие) как правило используются для обозначения тензоров и тензорных полей (обычно второго ранга).

Тензоры четвертого ранга, рассматриваемые как линейные операторы, действующие в пространстве тензоров второго ранга, обозначаются прописными жирными символами шрифта Euler fraktur: \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} ,

В той части, где изложение касается прикладных задач механики деформируемого твердого тела, мы сочли необходимым придерживаться традиционных обозначений, что подразумевает, например, применение символов σ_{ij} и ε_{ij} для обозначения напряжений и малых деформаций.

В последней главе работы, посвященной анализу связанных уравнений теории пластичности и поврежденности, система обозначений в основном совпадает с [77].²

Ниже следует список основных обозначений, которые используются в работе. Символы (сначала латинские, а затем греческие) располагаются в алфавитном порядке.

\mathbf{A} тензор деформаций Альманси

\mathbf{B}^{-1} , \mathbf{C} тензоры деформации Коши

¹Указанная работа Радаев Ю. Н. *Теория конечных деформаций сплошных сред*. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с. может быть найдена на сервере Самарского гос. университета по адресу:

<http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/FiniteStrainsTheory.zip>

²Указанная работа Радаев Ю. Н. *Задачи и теоремы по курсу "Математическая теория пластичности"*. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1996. 80 с. также может быть найдена по адресу:

<http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/PIProblems.zip>

B_t	текущая деформированная конфигурации тела
B_0	отсчетная (и неповрежденная) конфигурации тела
B_t^*	эквивалентная неповрежденная конфигурация тела
\hat{B}_t	конфигурация упруго разгруженных неповрежденных элементов тела
\tilde{B}_t	конфигурация поврежденных упруго разгруженных элементов тела
d_k	производная по направлению координатной линии с номером k
D	скалярный параметр поврежденности
\mathbf{D}	тензор поврежденности
D_c	критическая поврежденность
\mathbf{D}_s	канонический тензор поврежденности (энтропийное представление)
\mathbf{D}_u	канонический тензор поврежденности (энергетическое представление)
$D_{(\alpha)}$	главные поврежденности (собственные значения тензора поврежденности второго ранга)
$\mathbf{d}_{(\alpha)}$	ортонормированные собственные векторы тензора поврежденности второго ранга

dA	геометрическая площадь плоского элемента поврежденной среды в актуальном деформированном состоянии
dA_R	геометрическая площадь плоского элемента в отсчетном недеформированном и неповрежденном состоянии
$dA_{(\gamma)}$	геометрическая площадь плоского элемента поврежденной среды, ориентированного перпендикулярно главной оси тензора поврежденности \mathbf{D} с номером γ
dA^*	эффективная площадь плоского элемента поврежденной среды
$d\hat{A}$	эффективная площадь плоского элемента в конфигурации упруго разгруженных элементов
$d\tilde{A}$	площадь плоского элемента в конфигурации поврежденных упруго разгруженных элементов
$dA^*_{(\gamma)}$	эффективная площадь плоского элемента поврежденной среды, ориентированного перпендикулярно главной оси тензора поврежденности \mathbf{D} с номером γ
$\det \mathbf{A}$	определитель тензора второго ранга \mathbf{A}
$d\lambda$	неопределенный множитель теории идеальной пластичности
$d\tau$	элемент объема в текущей деформированной конфигурации тела

$d\tau_R$	элемент объема в отсчетной конфигурации тела
$d\tau^*$	элемент объема в эквивалентной неповрежденной конфигурации тела
$d\hat{\tau}$	элемент объема упруго разгруженной неповрежденной конфигурации тела
$d\tilde{\tau}$	элемент объема конфигурации поврежденных упруго разгруженных элементов
\mathbf{E}	тензор деформации Грина
E	модуль Юнга
$\mathbf{E}(k)$	полный эллиптический интеграл второго рода
$E(\varphi, k)$	канонический неполный эллиптический интеграл второго рода
\mathbf{e}	r —мерный вектор пространства внутренних переменных состояния с единичными компонентами
e_D	энтальпия (в расчете на единицу массы) тела с повреждениями
\mathbf{F}	градиент деформации
\mathbf{F}^e	упругая мультипликативная составляющая градиента деформации
\mathbf{F}^p	пластическая мультипликативная составляющая градиента деформации

$F(\varphi, k)$	канонический неполный эллиптический интеграл первого рода
\mathbf{G}	градиент фиктивной деформации, преобразующей поврежденный элемент в эквивалентный неповрежденный
G	упругий модуль сдвига
$g_{\alpha\beta}$	метрика конвективной системы координат
$g_{R\alpha\beta}$	метрика отсчетной системы координат
$g_{\alpha\beta}^*$	метрика эквивалентной неповрежденной конфигурации
H	функция Хевисайда
\mathbf{H}	логарифмический тензор деформации
\mathbf{h}	вектор потока тепла (пространственное представление)
\mathbf{h}_R	вектор потока тепла (отсчетное представление)
h_D	свободная энтальпия (в расчете на единицу массы) тела с повреждениями
\mathbf{I}	тензорная единица (единичный тензор второго ранга)
\mathfrak{I}	тензорная единица (единичный тензор четвертого ранга)

I_A	первый главный инвариант тензора второго ранга A
II_A	второй главный инвариант тензора второго ранга A
III_A	третий главный инвариант тензора второго ранга A
I_1, I_2, I_3	канонические инварианты пространственных уравнений теории пластичности
I_1, I_2, I_3	локальный базис отсчетной системы координат
i_1, i_2, i_3	локальный базис конвективной системы координат
i_1^*, i_2^*, i_3^*	локальный (неголономный) базис эквивалентной конфигурации
$\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3$	локальный (неголономный) базис упруго разгруженной неповрежденной конфигурации тела
$\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \tilde{i}_3$	локальный (неголономный) базис упруго разгруженной поврежденной конфигурации тела
J	Якобиан отображения отсчетной конфигурации тела на его текущую деформированную конфигурацию
J_s	вектор потока энтропии (пространственное представление)
J_{sR}	вектор потока энтропии (отсчетное представление)

\mathbf{J}_ξ	обобщенный термодинамический поток (энтропийное представление)
\mathbf{J}_ς	обобщенный термодинамический поток (энергетическое представление)
$\mathfrak{J}^{Y^a Y^a}, \mathfrak{J}^{ZY^a}, \mathfrak{J}^{ZZ}$	материальные тензоры (энергетическое представление)
\mathbf{K}	тензор напряжений Кирхгофа
k	модуль канонических эллиптических интегралов Лежандра; предел текучести при сдвиге
$\mathbf{K}(k)$	полный эллиптический интеграл первого рода
$\mathfrak{K}^{Y^a Y^a}, \mathfrak{K}^{\Xi Y^a}, \mathfrak{K}^{\Xi \Xi}$	материальные тензоры (энтропийное представление)
\mathbf{L}	пространственный градиент скорости
L_1, L_2, L_3	натуральные параметры (переменные длины дуг) вдоль линий главных напряжений
$\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$	ортонормированный базис, ориентированный вдоль главных осей напряжений
l	полудлина трещины
$L_{(\alpha)}^D$	главные удлинения поврежденности (собственные значения тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$)
$L_{(\alpha)}^\Delta$	главные удлинения поврежденности по отношению к конфигурации \tilde{B}_t

$\mathfrak{L}^{Y^a Y^a}, \mathfrak{L}^{\Xi Y^a}, \mathfrak{L}^{\Xi \Xi}$	материальные тензоры (энтропийное представление)
\mathbf{n}	директор (единичный вектор, определяющий ориентацию в пространстве)
\mathbf{O}	ортогональный тензор в r —мерном пространстве переменных состояния
\mathbf{P}	транспонированный вихрь тензора малых деформаций
\mathbf{P}''_{ξ}	обобщенная термодинамическая сила (энтропийное представление)
\mathbf{P}''_{ς}	обобщенная термодинамическая сила (энергетическое представление)
$P_l^{(k)}$	присоединенные функции Лежандра
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	полиномы Якоби
\mathbf{R}	тензор поворота (ортогональный сомножитель в полярном разложении градиента деформации)
R_1, R_2	радиусы кривизны линий максимальных касательных напряжений в состоянии плоской деформации
\mathfrak{R}	ортогональный тензор четвертого ранга
r_D	потенциал рассеяния (в расчете на единицу массы) тела с повреждениями
r, φ, z	цилиндрические координаты в пространстве

r, θ, φ	сферические координаты в пространстве
s_c	критическое значение энтропии (в расчете на единицу массы) тела с рассеянной поврежденностью
s_D	энтропия (в расчете на единицу массы) тела с рассеянной поврежденностью
\mathbf{T}	тензор напряжений Коши
\mathbf{T}^*	тензор эффективных напряжений
\mathbf{T}_D	симметризованный тензор эффективных напряжений
$T_{(\alpha)}$	собственные значения тензора напряжений Коши (главные истинные напряжения)
$T^*_{(\alpha)}$	собственные значения тензора эффективных напряжений (главные эффективные напряжения)
$T_{D(\alpha)}$	собственные значения симметризованного тензора эффективных напряжений
\mathbf{t}	вектор напряжений (внутреннее контактное усилие на единицу площади в деформированном состоянии)
\mathbf{t}^*	вектор эффективных напряжений (внутреннее контактное усилие на единицу эффективной площади)
t	время

t_c	время до разрушения
$\text{tr}\mathbf{A}$	след тензора второго ранга \mathbf{A}
u_c	критическое значение падения внутренней энергии (в расчете на единицу массы) тела с рассеянной поврежденностью
u_D	внутренняя энергия (в расчете на единицу массы) тела с рассеянной поврежденностью
u_k	компоненты вектора малого перемещения
\mathbf{X}	положение (место) в отсчетной конфигурации
\mathbf{x}	положение (место) в пространстве
\mathbf{x}^*	положение (место) в эквивалентной неповрежденной конфигурации
$\hat{\mathbf{x}}$	положение (место) в конфигурации эквивалентных неповрежденных элементов после их упругой разгрузки
$\tilde{\mathbf{x}}$	положение (место) в конфигурации поврежденных элементов после их упругой разгрузки
x_k	декартовы координаты в пространстве
\mathbf{Y}, \mathbf{S}	пара энергетически сопряженных тензоров деформации и напряжения
Y	предел текучести при растяжении
\mathbf{Y}^a	неупругая часть тензора деформации \mathbf{Y}

\mathbf{Y}^e	упругая часть тензора деформации \mathbf{Y}
$Y_l^{(k)}(\Theta, \Phi)$	сферические гармоники Лапласа
$\tilde{Y}_l^{(k)}(\Theta, \Phi)$	нормированные сферические гармоники Лапласа
\mathbf{Z}	тензор сплошности (энергетическое представление)
z	комплексная переменная
$Z'_{i'k'}$	эталонная каноническая сплошность
γ	длина дуги траектории пластических деформаций
$\Gamma_{ij,k}$	символ Кристоффеля первого рода
Γ_{ij}^k	символ Кристоффеля второго рода
Δ	тензор поврежденности по отношению к конфигурации \tilde{B}_t
$\Delta_{(\alpha)}$	главные поврежденности по отношению к конфигурации \tilde{B}_t
$\delta_{(\alpha)}$	ортонормированные собственные векторы тензора поврежденности Δ
δ	раскрытие трещины
ε_{ij}	тензор малых деформаций
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	главные деформации

ε_{ij}^E	тензор упругих деформаций
ε_{ij}^P	тензор пластических деформаций
η_ω	скрытые (внутренние) переменные анизотропного состояния поврежденности
Θ, Φ	сферические углы
ϑ_ξ	абсолютная температура (энтропийное представление)
ϑ_ς	абсолютная температура (энергетическое представление)
κ_{ij}	кривизна линии главного напряжения с номером i в локальной координатной плоскости, нормальной линии главного напряжения с номером j
ν	коэффициент Пуассона
Ξ	тензор сплошности (энтропийное представление)
ξ	векторное представление канонических переменных состояния (энтропийный вариант)
$\ \xi\ $	каноническая норма (энтропийное представление)
ξ_β	канонические переменные состояния (энтропийное представление)
$\Pi(\varphi, \omega^2, k)$	канонический неполный эллиптический интеграл третьего рода

ρ	плотность
ρ_R	плотность в отсчетной конфигурации
ρ_1, ρ_2	радиусы кривизны линий главных напряжений в состоянии плоской деформации
σ_{ij}	тензор напряжений
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	главные напряжения
ς	векторное представление канонических переменных состояния (энергетический вариант)
$\ \varsigma\ $	каноническая норма (энергетическое представление)
$\bar{\varsigma}$	среднестепенное и в частности среднеквадратичное (по единичной сфере) значение ориентационного распределения сплошности
ς_β	канонические переменные состояния (энергетическое представление)
$\varsigma(\mathbf{n})$	ориентационное распределение сплошности
$\Sigma[u_D]$	производство (на единицу массы) внутренней энергии
$\Sigma_e[s_D]$	внешнее производство (на единицу массы) энтропии
$\Sigma_i[s_D]$	внутреннее производство (на единицу массы) энтропии

ϕ_D	свободная энергия Гиббса (расчитанная на единицу массы) тела с повреждениями
ψ_D	свободная энергия Гельмгольца (расчитанная на единицу массы) тела с повреждениями
∇	пространственный оператор Гамильтона
∇_R	отсчетный оператор Гамильтона

Замечания об использовании индексов

Использование различных классов индексов для трех систем координат (пространственной, отсчетной и конвективной) совершенно необходимо для сознательного оперирования такими понятиями, как градиент деформации и тензоры конечной деформации.

Иногда тензор может наиболее просто и естественно представляться в смешанном диадном базисе, когда векторы диады принадлежат различным базисным системам, и в этом случае компоненты тензора имеют индексы различных классов. Так, градиент деформации наиболее просто и естественно представляется (просто частной производной) в диадном базисе, левый множитель которого есть пространственный базисный вектор, а правый – отсчетный. Это естественное представление тензора дисторсии влияет затем на координатную запись полярного разложения и так на все координатное оформление теории конечных деформаций. Термин естественное представление тензора (см. [78]) широко используется в настоящей работе.

1. Латинские индексы применяются при записи компонент тензорных полей относительно пространственного (эйлерова) базиса \mathbf{i}_k .

2. Греческие индексы применяются для записи компонент тензорных полей относительно конвективного базиса \mathbf{i}_α .

3. Греческие индексы с предшествующим символом \mathbf{R} применяются для записи компонент тензорных полей относительно отсчетного базиса $\mathbf{i}_{\mathbf{R}\alpha}$. Сам отсчетный базис для сокращения записи часто обозначается \mathbf{I}_α .

4. Действие символа \mathbf{R} распространяется на все греческие индексы, расположенные за ним. Сам символ \mathbf{R} никогда индексом не является.

5. Индексы, заключенные в треугольные скобки, используются для обозначения физических компонент тензора относительно данной ортогональной криволинейной координатной системы.

6. Индекс, заключенный в круглые скобки, указывает на представление в собственном ортонормированном базисе симметричного тензора второго ранга. В зависимости от смысла тензора этот индекс может быть как греческим, так и латинским.

7. Два и более индексов, заключенных в круглые скобки, обозначают

симметризацию по этим индексам:³

$$A_{(i_1 i_2 \dots i_k)} = \frac{1}{k!} \sum_P A_{i_{P(1)} i_{P(2)} \dots i_{P(k)}}.$$

Здесь символ P обозначает произвольную перестановку множества натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, k$.

Так, например:

$$A_{(\kappa\lambda\mu)} = \frac{1}{6}(A_{\kappa\lambda\mu} + A_{\lambda\mu\kappa} + A_{\mu\kappa\lambda} + A_{\kappa\mu\lambda} + A_{\lambda\kappa\mu} + A_{\mu\lambda\kappa}).$$

8. Фигурные скобки, которые заключают четное число индексов, обозначают девиаторную часть симметричного тензора четного ранга, определенную так, что свертка по любой паре индексов равна нулю:

$$\begin{aligned} A_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} = & \gamma_0^{2r} A_{i_1 i_2 \dots i_{2r}} + \gamma_2^{2r} \delta_{(i_1 i_2} A_{i_3 i_4 \dots i_{2r}) j_1 j_1} + \dots + \\ & + \gamma_{2r}^{2r} \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2r-1} i_{2r})} A_{j_1 j_1 j_2 j_2 \dots j_r j_r}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{2\sigma}^{2r} = \frac{(-1)^\sigma C_{2r}^{2\sigma} C_{2r-1}^\sigma}{C_{4r-1}^{2\sigma}},$$

а круглые скобки обозначают симметризацию индексов.

³Исключением из этого правила являются собственные значения тензоров поврежденности высоких рангов $D_{(i_1 i_2 \dots i_s)}$, когда круглые скобки не следует понимать как оператор симметризации индексов.

Замечания об алгебраических и дифференциальных операторах

1. Скалярное умножение векторов и внутреннее умножение тензоров обозначается точкой (\cdot). При внутреннем умножении тензоров второго ранга (закон композиции) и при умножении тензора второго ранга справа на вектор знак умножения для сокращения записи опускается.

2. Векторное умножение векторов и внешнее умножение тензоров обозначается крестом (\times).

3. Тензорное умножение обозначается крестом, обведенным окружностью (\otimes).

4. След тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом $\text{tr} \mathbf{A}$:

$$\text{tr} \mathbf{A} = A_{\cdot k}^{\cdot k}.$$

5. Симметричная и антисимметричная части тензора второго ранга \mathbf{A} обозначаются соответственно символами sym и asym : $\text{sym} \mathbf{A}$, $\text{asym} \mathbf{A}$.

6. Операция транспонирования тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом T вверху справа: \mathbf{A}^{T} .

7. Операция обращения тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается символом -1 вверху справа: \mathbf{A}^{-1} .

8. Определитель тензора второго ранга \mathbf{A} обозначается через $\det \mathbf{A}$.

9. Пространственный оператор Гамильтона определяется формулой

$$\nabla = i^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Отметим также представление пространственного оператора Гамильтона в конвективном локальном базисе:

$$\nabla = i^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

10. Отсчетный оператор Гамильтона определяется формулой

$$\nabla_{\text{R}} = i^{\text{R}\alpha} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}.$$

11. Пространственные градиенты скалярного, векторного и тензорного поля определяется соответственно формулами:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \nabla f, \\ \operatorname{grad} \mathbf{v} &= (\nabla \otimes \mathbf{v})^T, \\ \operatorname{grad} \mathbf{A} &= (\nabla \otimes \mathbf{A})^T.\end{aligned}$$

12. Пространственная дивергенция векторного и тензорного поля определяется соответственно формулами:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A}^T.\end{aligned}$$

13. Пространственный ротор векторного поля \mathbf{v} определяется формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Аналогичным образом определяется пространственный вихрь тензора второго ранга \mathbf{P}

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = \nabla \times \mathbf{P}.$$

14. Ковариантная (контравариантная) производная векторного поля \mathbf{v} определяется как коэффициент в разложении тензора второго ранга $\operatorname{grad} \mathbf{v}$ по базисным диадам одного из четырех возможных типов:

$$\operatorname{grad} \mathbf{v} = v_{k|l} \mathbf{i}^k \otimes \mathbf{i}^l = v_{\cdot|l}^k \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^l = v^{k|l} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l = v_k^{\cdot|l} \mathbf{i}^k \otimes \mathbf{i}_l,$$

где, в частности,

$$\begin{aligned}v_{\cdot|l}^k &= \frac{\partial v^k(x^s, t)}{\partial x^l} + v^j \Gamma_{jl}^k, \\ v_{k|l} &= \frac{\partial v_k(x^s, t)}{\partial x^l} - v_j \Gamma_{kl}^j.\end{aligned}$$

Аналогично определяется ковариантная производная тензора второго ранга \mathbf{A} . В частности, градиент тензора второго ранга может быть разложен по базисным полиадам в виде

$$\begin{aligned}\text{grad}\mathbf{A} &= A_{ij|k}\mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^k = A_{\cdot\cdot|k}^{ij}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}^k = \\ &= A_{\cdot j|k}^{i\cdot}\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \mathbf{i}^k,\end{aligned}$$

где коэффициенты разложения

$$A_{ij|k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l A_{lj} - \Gamma_{jk}^l A_{il},$$

$$A_{\cdot\cdot|k}^{ij} = \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A^{lj} + \Gamma_{lk}^j A^{il},$$

$$A_{\cdot j|k}^{i\cdot} = \frac{\partial A^{i\cdot}_j}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i A^{l\cdot}_j - \Gamma_{jk}^l A^{i\cdot}_l$$

суть ковариантные производные.

15. При использовании символа

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

аргументы дифференцируемой функции почти всегда указываются, поэтому всегда ясно, какие именно переменные следует считать фиксированными при выполнении дифференцирования. Так, например, в выражении

$$\frac{\partial v^k(x^s, t)}{\partial t}$$

при выполнении дифференцирования следует считать постоянными переменные Эйлера x^s .

Как правило, оператор используется для обозначения локальной производной по времени, т.е. производной при постоянных координатах x^s .

16. Полная (материальная) производная, т.е. производная при постоянных координатах Лагранжа X^α , обозначается точкой над дифференцируемой функцией или полем:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla \otimes \mathbf{A})^T \mathbf{v}.$$

17. Треугольником, обращенным вниз, вверху справа от символа тензора второго ранга обозначается объективное дифференцирование по времени тензоров конечной деформации и напряжений, причем действие этого

оператора на напряжения и деформации – совершенно разное. Так, например, объективное дифференцирование по времени применительно к паре тензор деформации Альманси \mathbf{A} – тензор напряжений Кирхгофа \mathbf{K} означает дифференцирование тензора деформации Альманси согласно Коттеру-Ривлину

$$\mathbf{A}^\nabla = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}$$

и объективное дифференцирование по времени тензора напряжений Кирхгофа согласно Олдройду

$$\mathbf{K}^\nabla = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{L}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{L}^T.$$

Подобное определение объективного дифференцирования по времени тензоров напряжений и деформаций исключительно удобно, поскольку с одной стороны в силу

$$\text{tr}(\mathbf{Y}\dot{\mathbf{S}}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}^\nabla)$$

правильно вписывается в энергетические уравнения, а с другой – позволяет установить взаимное соотношение

$$\text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{Y}}) = \text{tr}(\mathbf{K}\mathbf{A}^\nabla).$$

Различные операторы объективного дифференцирования по времени достаточно подробно обсуждаются в монографии [65].

18. Инвариантное интегрирование в недеформированном и деформированном состояниях осуществляется с помощью элементов объема

$$d\tau_R = \sqrt{|g_{R\alpha\beta}|} dX^1 dX^2 dX^3,$$

$$d\tau = \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} dX^1 dX^2 dX^3.$$

19. Среднее (по единичной сфере) значение функции ориентации определяется формулой

$$\langle f \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi.$$

20. Среднестепенное, и в частности среднеквадратичное, (по единичной сфере) значение ориентационного распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ определяется как следует ниже:

$$\bar{\varsigma} = \sqrt[2s]{\langle \varsigma^{2s} \rangle} = \sqrt[2s]{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \varsigma^{2s}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi} \quad (s = 1, 2, 3, \dots).$$

Некоторые специальные тензоры и символы

1. Символ Кронекера δ_i^j определяется как

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

независимо от рассматриваемой координатной системы.

2. Дискриминантные символы e_{ijk} и e^{ijk} равны и вычисляются как

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = 1, \quad e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1,$$

а остальные e_{ijk} равны нулю, независимо от системы координат.

3. Ковариантный и контравариантный дискриминантные тензоры ε_{ijk} и ε^{ijk} , определяемые в правоориентированной координатной системе следующими равенствами:

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g} e_{ijk},$$

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk},$$

где $g = |g_{ij}|$, – широко используются для записи векторного произведения:

$$c^k = \varepsilon^{ijk} a_i b_j,$$

$$c_k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j.$$

Отметим также следующие формулы:

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{i}_i \cdot (\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k),$$

$$\varepsilon^{ijk} = \mathbf{i}^i \cdot (\mathbf{i}^j \times \mathbf{i}^k),$$

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_s = \varepsilon_{rst} \mathbf{i}^t,$$

$$\mathbf{i}^r \times \mathbf{i}^s = \varepsilon^{rst} \mathbf{i}_t.$$

4. Символы Кристоффеля первого и второго рода определяются как коэффициенты в разложениях частных производных от векторов локального базиса

$$\frac{\partial \mathbf{i}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k} \mathbf{i}^k,$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{i}_k$$

и могут быть вычислены также по формулам

$$2\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k},$$

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kh} \Gamma_{ij,h}.$$

5. Тензор Римана-Кристоффеля определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 \mathbf{i}_j}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 \mathbf{i}_j}{\partial x^l \partial x^k} = R_{\cdot jkl}^{i\cdots} \mathbf{i}_i$$

и вычисляется с помощью дифференцирования уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{i}_j}{\partial x^s} = \Gamma_{js}^r \mathbf{i}_r.$$

Равенство нулю тензора Римана-Кристоффеля есть условие голономности базиса \mathbf{i}_j и возможности ввести декартову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$. Смешанные и ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля могут быть вычислены с помощью определителей [84], [93]:

$$R_{\cdot jkl}^{i\cdots} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{jk}^i & \Gamma_{jl}^i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{sk}^i & \Gamma_{sl}^i \\ \Gamma_{jk}^s & \Gamma_{jl}^s \end{vmatrix},$$

$$R_{ijkl} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^k} & \frac{\partial}{\partial x^l} \\ \Gamma_{jk,i} & \Gamma_{jl,i} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{jk}^s & \Gamma_{jl}^s \\ \Gamma_{ik,s} & \Gamma_{il,s} \end{vmatrix}.$$

Ковариантные компоненты тензора Римана-Кристоффеля могут быть вычислены также по формуле

$$2R_{ijkl} = \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} +$$

$$+ 2g^{rs}(\Gamma_{jk,s}\Gamma_{il,r} - \Gamma_{jl,s}\Gamma_{ik,r}).$$

В трехмерном пространстве имеется всего шесть существенных компонент тензора Римана-Кристоффеля: R_{1212} , R_{1313} , R_{2323} , R_{1213} , R_{2123} , R_{3132} , равенство которых нулю и выражает условие сплошности (совместности) деформаций [29].

Несовместность поля деформаций, обусловленная микроструктурой пластического течения, выражается также через Тензор Римана-Кристоффеля, который уже не будет нулевым. Конкретные представления тензора несовместности имеются, например, в монографии [64].

В случае малых деформаций условие сплошности имеет следующий вид [54]: $\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0}$, где тензор \mathbf{P} есть транспонированный вихрь тензора малых деформаций.

Заметим, что физические компоненты вихря тензора второго ранга \mathbf{P} в ортогональной криволинейной сетке могут быть вычислены по следующим формулам:

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<31>}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<21>}}{\partial \xi^3} \right) + P_{<23>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} -$$

$$- P_{<32>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<32>}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<22>}}{\partial \xi^3} \right) + P_{<31>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}} +$$

$$+ P_{<33>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} + P_{<23>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<33>}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<23>}}{\partial \xi^3} \right) - P_{<32>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} -$$

$$- P_{<21>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} - P_{<22>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<11>}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<31>}}{\partial \xi^1} \right) - P_{<13>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} - \\ - P_{<32>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - P_{<33>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<12>}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<32>}}{\partial \xi^1} \right) + P_{<31>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - \\ - P_{<13>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<13>}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \sqrt{g_{33}} P_{<33>}}{\partial \xi^1} \right) + P_{<12>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}} + \\ + P_{<11>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}} + P_{<31>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<21>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<11>}}{\partial \xi^2} \right) + P_{<23>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}} + \\ + P_{<22>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} + P_{<12>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<22>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<12>}}{\partial \xi^2} \right) - P_{<21>} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}} - \\ - P_{<13>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} - P_{<11>} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}} P_{<23>}}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \sqrt{g_{11}} P_{<13>}}{\partial \xi^2} \right) + P_{<12>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}} - \\ - P_{<21>} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}}.$$

В декартовой системе координат в геометрически линейном приближении уравнения совместности деформаций приобретают форму:

$$e_{kij}e_{lmn}\partial_m\partial_i\varepsilon_{jn}=0.$$

Несовместность пластической деформации выражается уравнением (см., например, [64]):

$$e_{kij}e_{lmn}\partial_m\partial_id\varepsilon_{jn}^P=d\eta_{kl},$$

где тензор несовместности η_{kl} , который также часто называют тензором расхождения Кренера, связан с тензором плотности дислокаций α_{lk} посредством соотношения

$$\eta_{kl}=-\frac{1}{2}(e_{kij}\partial_i\alpha_{lj}+e_{lij}\partial_i\alpha_{kj}).$$

Тензор плотности дислокаций определяется уравнением

$$b_k=\alpha_{lk}dS_l,$$

где b_k – вектор Бюргерса, dS_l – векторный элемент площади, ограниченный контуром Бюргерса, через который проходит достаточно много линий дислокаций.

Отметим уравнение неразрывности дислокаций:

$$\partial_l\alpha_{lk}=0.$$

Если на единицу площади приходится p параллельных линий дислокаций, то тензор плотности дислокаций вычисляется в виде:

$$\alpha_{lk}=pn_lb_k.$$

Введение

Под **поврежденностью** мы, следуя [161], понимаем сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины – в упругости, дислокации – в пластичности, микропоры – при ползучести, поверхностные микротрещины – при усталости).

Поврежденность за редким исключением нельзя непосредственно наблюдать и измерять так, как в физике и механике измеряются, скорость, сила и температура. Деградация механических свойств тела может быть обнаружена в результате анализа реакции тела на различные внешние воздействия. Наличие поля повреждений в твердых телах согласно современной экспериментальной практике может быть косвенно обнаружено и отчасти количественно представлено через уменьшение модуля Юнга, уменьшение скорости прохождения ультразвукового сигнала, уменьшение плотности, изменение твердости, падение электрического потенциала, падение амплитуды напряжений при циклическом испытании, ускорение ползучести в третьей стадии. Методы акустической эмиссии позволяют достаточно определенно выявлять зоны локализации поврежденности.

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л. М. Качанова [40] и Ю. Н. Работнова [70]. Ценность этих первых работ, признанных ныне классическими, заключается в возможности применения единой схемы представления поврежденности для описания поврежденности в упругих и упругопластических телах, а также ее развития в условиях ползучести. Сущность нового подхода заключалась в использовании новой мезо-переменной – параметра поврежденности, – отражающей присутствие в теле поврежденности (или различных видов повреждений) – феномена совершенно другого масштаба – микро-масштаба. Последующее развитие теории происходило, в частности, по пути обобщения основных положений механики поврежденного континуума для случая трехмерного состояния анизотропной поврежденности [129], [135], [150], [169], [95], [108], [142], [135], [170], [171], [150], [144], [188].

В ряду важнейших разделов механики деформируемого твердого тела

механика континуума с внутренним распределением повреждений – по-прежнему, один из наиболее динамично развивающихся. Круг потенциальных приложений континуальной механики поврежденных тел чрезвычайно широк. Проникая в классические разделы механики твердого тела, такие как теория пластичности, ползучести, механика трещин и разрушения, механика поврежденности не только обогащается новыми концепциями и методами, свойственными этим ветвям механики твердого тела, но и заставляет переосмыслить традиционные для классических теорий подходы и постановки задач при расчетах напряженно-деформированных состояний твердых тел.

Наиболее полно и с единой точки зрения механика поврежденности, ее концепции, методы, результаты и перспективы развития изложены в монографии [144], где заинтересованный читатель может найти большой библиографический список работ, посвященных этой тематике. Здесь мы акцентируем внимание на работах советских и российских ученых, посвященных моделированию состояния поврежденности в твердых телах.

Согласно сложившейся традиции основополагающими для континуальной механики поврежденности следует считать известные статьи Л. М. Качанова [40] и Ю. Н. Работнова [70]. Вклад Л. М. Качанова в механику поврежденности выразился в большом количестве работ, посвященных в основном описанию поврежденности и кинетики ее развития в условиях ползучести и подытоженных в монографии [135].

Важное место в научном творчестве Ю. Н. Работнова занимают проблемы моделирования и расчета поврежденности и длительной прочности элементов конструкций в условиях ползучести, при циклическом нагружении и под влиянием агрессивной внешней среды. Соответствующие оригинальные статьи Ю. Н. Работнова (в том числе и основополагающая работа [70]) могут быть найдены в сборнике его избранных трудов [72]. Заметим, что теория ползучести и длительной прочности металлов интенсивно развивалась в СССР, особенно в 50-е годы (см. коллективную монографию [63]). Значительный вклад в конкретизацию определяющих зависимостей теории ползучести и длительной прочности, включающих скалярную меру поврежденности, принадлежит С. А. Шестерикову [90], [91].

Учет поврежденности и микронеоднородности напряженно-деформированного состояния металлов при пластическом течении был выполнен В. В. Новожиловым в цикле оригинальных работ (см. сборник его научных трудов [62]). Исторический аспект проблемы, основные идеи, методы и результаты

феноменологического подхода к описанию поврежденности и разрушения твердых тел подытожены в докладе [60].

Влияние поврежденности на развитие трещин и моделирование предразрушения и задержки разрушения рассматривались А. А. Вакуленко и Н. Ф. Морозовым [20], [21].

В. Н. Кукуджановым в работе [48] предложена микромеханическая модель упруговязкопластической среды с поврежденностью и дано ее приложение к исследованию процессов локализации пластических деформаций. Согласно концепции В. Н. Кукуджанова пластическое течение и разрушение есть единый процесс, вызванный движением дислокаций, а на более поздней стадии – зарождением и развитием микродефектов (микропор различной геометрии). Модель может учитывать форму микропор: эллипсоидальную или сферическую. В случае эллипсоидальных микропор поврежденность тела представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга. В этой же работе предложено условие пластичности пористого материала с кинематическим упрочнением, сформулирован соответствующий ассоциированный закон течения и получена определяющая зависимость для пористости.

Коррозионное растрескивание металлов в водородсодержащей среде под напряжением с позиций континуальной механики поврежденности исследовалось в работах В. И. Астафьева и Л. К. Ширяевой [9], [10]. В недавно изданной монографии [10] имеется довольно подробный обзор работ по указанной проблеме и соответствующая библиография.

Цикл работ [12], [13], [26], [27], [28] посвящен моделированию по схеме Баренблатта-Дагдейла интерфейсной трещины-расслоения с локализованными у вершин трещины зонами пластического течения, разупрочнения и возможных нелинейных связей в концевых областях с целью описания подготовки разрушения в этих областях. Особый интерес здесь представляет анализ влияния нелинейности связей внутри концевых зон на состояние трещины-расслоения. Оригинальная математическая модель термофлуктуационного зарождения и развития дефектов в области ослабленных связей на плоской границе сопряжения двух тел предложена в [28]. На основе этой модели разработан метод оценки времени зарождения дефекта в зоне ослабленных связей на плоской интерфейсной границе полимер-металл.

В конце 70-х годов были предложены первые теоретические модели роста трещин в металлах в условиях ползучести с явным учетом деградации прочностных свойств металла. Моделирование основывалось на предполо-

жении, что рост трещины происходит в том случае, если некоторая мера поврежденности достигает своего критического значения на некотором расстоянии от вершины трещины. В [5], [145] при моделировании роста трещин использовался скалярный параметр поврежденности Качанова-Работнова. В [182] параметр поврежденности связывался с величиной пористости материала и, предполагалось, что процесс накопления повреждений обусловлен совместным действием диффузионного и вязкого механизмов роста пор в условиях высокотемпературной ползучести. В [106] в качестве меры поврежденности материала принималась величина интенсивности накопленных деформаций ползучести. Модель, описывающая рост трещин в условиях ползучести в более общей постановке была предложена в [6]. В рамках этой модели предполагалось, что величина критической поврежденности материала не является постоянной, зависит от уровня напряжений и убывает при возрастании интенсивности напряжений.

Асимптотическое решение для поля напряжений у вершины трещины в упрочняющейся среде, формально пригодное и для случая установившейся ползучести, было исследовано в работах [130], [181]. В работе [184] проанализировано перераспределение напряжений, вызванное влиянием упругих деформаций, для случая неподвижной трещины. В условиях ползучести происходит перераспределение напряжений у вершины подрастающей трещины. Новый тип сингулярности поля напряжений для растущей в условиях ползучести трещины был определен в [128].

Однако, наиболее существенное влияние на перераспределение напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины несомненно оказывает величина накопленной поврежденности. Первые теоретические модели, учитывающие процесс накопления рассеянных повреждений, основывались на несвязанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности. В несвязанной постановке накопленная поврежденность определялась посредством интегрирования кинетического уравнения после определения поля напряжений. Таким образом, величина накопленной поврежденности не влияет на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины. Немногочисленные работы [124], [125] были посвящены конечноэлементному анализу процесса роста трещины в условиях ползучести на основе связанной постановки задачи теории ползучести с поврежденностью, предложенной впервые Ю. Н. Работновым [71].

В связанной постановке задачи теории ползучести и механики поврежденности параметр поврежденности входит в определяющие соотношения

задачи и, следовательно, влияет на напряженно-деформированное состояние.

Проблема моделирования роста трещин в связанной постановке представляет собой одну из важных задач механики деформируемого твердого тела и к настоящему времени предприняты попытки рассмотреть распространение трещины в связанной постановке. Так, в [7] дано решение задачи о росте трещины антиплоского сдвига в среде с поврежденностью в связанной постановке. Исследование показало, что у вершины трещины отсутствует характерное для теории трещин сингулярное поле напряжений: эффективные напряжения ограничены, сами напряжения и сплошность линейно падают до нуля, к свободным от нагрузок берегам трещины вблизи ее вершины примыкает области полностью разрушенного материала, в которых все напряжения и сплошность равны нулю.

Таким образом, связанность постановки задачи проявляется прежде всего в исчезновении традиционной для механики разрушения сингулярности напряжений у вершины трещины и приводит к относительно меньшим значениям скорости срагивания трещины.

В [8] рассмотрена задача о растущей в процессе ползучести трещины нормального отрыва в среде с поврежденностью. Результаты показывают, что к берегам растущей трещины примыкает область полностью поврежденного материала. Такое поле напряжений принципиально отличается от соответствующего сингулярного поля напряжений в несвязанной постановке задачи.

В [202] изучен усталостный рост трещины в среде с поврежденностью. Установлено, что принципиально невозможно удовлетворить граничным условиям на берегах трещины, что в свою очередь приводит к необходимости модификации постановки задачи: введения области, в которой все компоненты тензора напряжений и сплошность равны нулю.

Наряду с построением асимптотик полей напряжений и сплошности в окрестности вершины прорастающей трещины, как это было сделано в работах [7], [8], [202], в [183] введены автомодельные переменные для задачи о росте трещины в среде с поврежденностью. Однако полное решение данной задачи к настоящему времени отсутствует.

Целью настоящей работы является разработка математической модели и средств представления анизотропной поврежденности, которые в рамках единой схемы и на основе принципов механики континуума позволяют описывать сколь угодно сложное (или вообще недетерминированное) распреде-

ление поврежденности по ориентациям, общий термодинамический анализ важнейших процессов роста повреждений в твердых телах и выявление универсальных инвариантов кинетики повреждений.

В работе практически не затрагиваются ни статистические, ни микроскопические аспекты, связанные с анализом поврежденности. Соответствующий круг вопросов обсуждается в уже цитированной выше монографии [144].

Прикладными аспектами работы выступают: исследование по влиянию удаленной зоны локализованной пластической деформации и поврежденности на докритическое состояние трещины; формулировка связанных задач теории пластичности и поврежденности при условии текучести Треска, вывод статических и кинематических соотношений вдоль линий главных напряжений, с целью численной реализации связанных уравнений, и поиск инвариантных отношений вдоль траекторий главных напряжений, устанавливающих баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений.

Несколько слов скажем о структуре работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения, списка литературы и приложения. Перед началом изложения приводятся: список основных обозначений (расположение символов – в алфавитном порядке), соглашения об использовании различных классов индексов, замечания об алгебраических и дифференциальных операторах, применяемых в работе, и определения некоторых тензоров и символов, что совершенно необходимо для ясного понимания работы.

В **первой главе** предлагается алгоритм построения тензорных мер анизотропной поврежденности, исходя из ориентационного распределения поврежденности, в том числе тонкой структуры. В основе алгоритма лежит принцип приближения ориентационного распределения полиномами по компонентам директора, задающего ориентацию в пространстве. Все рассуждения в равной степени справедливы для любой возможной меры состояния поврежденности, которая зависит от ориентации. В качестве ориентационного распределения, например хрупкой поврежденности, как правило выступает число микротрещин заданной ориентации в единице объема, отнесенное к полному их числу.

В любом случае поврежденность должна быть тем, или иным образом детерминирована для площадки заданной ориентации, исходя из физики явления. Так, в работе [188] развиваются представления о хрупкой, микропластической, макропластической и коррозионной поврежденности, и обсу-

ждаются возможные варианты представления этих типов поврежденности на площадке заданной ориентации⁴.

Приводятся точные определения тензорных мер анизотропной поврежденности и дается механическая интерпретация их собственных элементов (главных направлений и локального спектра поврежденности). Понятие о спектре трехмерной анизотропной поврежденности распространено вплоть до бесконечного (счетного) дискретного спектра. Предложенный алгоритм иллюстрируется исследованием типичных трехмерных распределений анизотропной поврежденности, представляемой тензорами поврежденности второго, четвертого, шестого и восьмого рангов.

Затем излагаются вопросы, связанные с вычислением средне-степенных и средних значений ориентационного распределения поврежденности. Усредненные характеристики поврежденности определены, а затем вычислены в терминах собственного спектра поврежденности. Показано, что тензорные меры поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения тонкой структуры поврежденного состояния и получены формулы для непосредственного вычисления компонент тензора поврежденности и его спектра, исходя из ориентационного распределения поврежденности.

Приводится гармонический анализ тонкой структуры поврежденности и обсуждается представление поврежденного состояния с помощью коэффициентов Фурье разложения локального распределения поврежденности в сумму сферических гармоник. Основы этого подхода были заложены в работах [137], [173], [174]. Оригинальный тензорно-инвариантный метод разложения функций, заданных на единичной сфере в ряд по периодическим гармоническим функциям изложен в [17].

Представление поврежденности с помощью бесконечной последовательности коэффициентов ряда Фурье (**гармоническое описание поврежденности**) является важной альтернативой традиционному тензорному описанию, а в случае недетерминированного распределения поврежденности по ориентациям – единственной работоспособной схемой исследования.

Применение гармонического представления поврежденности сталкивается с рядом проблем, важнейшей из которых является поиск инвариантных

⁴Эта работа сопровождается богатым графическим материалом, пользуясь которым читатель может составить себе представление о распределении хрупкой поврежденности в тех или иных плоскостях при изгибе и кручении, когда реализуется режим пропорционального нагружения и когда имеются отклонения от него. Авторы работы утверждают, что предложенная ими модель должна достаточно хорошо представлять хрупкую поврежденность в бетонах, горных породах, стеклопластиках, керамиках и металлах при различных программах нагружения.

при поворотах локального репера комбинаций из коэффициентов ряда Фурье, что в свою очередь подразумевает нахождение закона преобразования сферических гармоник и коэффициентов Фурье при поворотах локального репера. Этот закон, который также приводится в данной главе работы, оказывается значительно сложнее закона преобразования компонент тензора. Существует, однако, еще одна возможность вывода указанных инвариантных комбинаций из коэффициентов ряда Фурье. Для этого необходимо установить соответствие между тензорным и гармоническим представлениями, а затем воспользоваться известной из теории тензоров схемой построения инвариантов, не зависящих от поворота системы координат. Изучение этой проблемы завершает первую главу диссертационной работы, где и устанавливается соответствие между тензорным и гармоническим представлениями ориентационного распределения поврежденности.

Заметим, что методы и результаты, изложенные здесь, могут применены к анализу любой физической величины, непрерывно или кусочно-непрерывно распределенной по ориентациям, включая и недетерминированные распределения.

Изложение данной главы в основном следует работам [79], [81].

Во **второй главе** диссертационной работы рассматриваются усредненные характеристики трехмерного анизотропного состояния поврежденности.

Усреднение тонкой структуры поврежденности⁵, даже представленной с помощью двух низших аппроксимаций, как показано, приводит к необходимости вычисления канонических эллиптических интегралов [1] и довольно сложной зависимости средней поврежденности от спектра поврежденности. Подробно рассматриваются различные интегральные представления средней поврежденности и наиболее оптимальные быстро сходящиеся ряды для ее вычисления. Приводятся результаты численного анализа средней поврежденности в зависимости от состава спектра поврежденности. Вводятся понятия об амплитудном и обратном амплитудном спектрах поврежденности, которые позволяют дать первичную классификацию анизотропии состоя-

⁵Под тонкой структурой поврежденности в строгом смысле следует понимать реальные микроструктуры поврежденности твердых тел, строгое описание которых возможно только в рамках статистического подхода (квантового или квазиклассического) с помощью соответствующей функции распределения. Как известно, любая функция состояния (в том числе и любая мера поврежденности) подобных микроструктур может быть представлена в виде тригонометрического разложения по гармоническим экспонентам волновых векторов микроструктуры, и эти последние в физике твердого тела собственно и выступают как микроструктурные параметры состояния. Используемая в диссертационной работе схема описания поврежденности обеспечивает возможность представления сколь угодно тонкой ее структуры.

ний поврежденности. Получены формулы для вычисления средней поврежденности в случае узкополосных и вырожденных обратных амплитудных спектров поврежденности. Приводится техника расчета осесимметричной и двумерной поврежденности.

Для оценки средней и средне-квадратичной сплошности в случае осевой симметрии можно использовать эффективную схему Гаусса [43], которая для интегрирования распределения на сфере вдоль меридиана требует вычисления корней полиномов Лежандра, поскольку знание сплошности только в этих узловых точках действительно необходимо для вычисления средних значений. Этот подход кажется предпочтительным, не только по причине своей эффективности и надежной численной реализации [47], но и потому, что еще указывает ориентации площадок, где сплошность подлежит экспериментальному определению.

Установлено, что усредненные по всем ориентациям в пространстве значения анизотропного распределения поврежденности обладают одним важным экстремальным свойством: средняя сплошность (отнесенная к максимальной главной сплошности) стремится принять наибольшее значение при выравнивании элементов спектра поврежденности, т.е. при эволюции к изотропному распределению.

Эта часть работы, как и первая глава, может рассматриваться как один из возможных общих подходов к представлению анизотропного состояния поврежденности, а результаты – применены к анализу любой скалярной физической характеристики непрерывно распределенной по ориентациям.

Изложение данной главы в основном следует статье [81].

В **третьей главе** диссертационной работы развивается так называемый геометрический подход механики поврежденности, изложенный впервые в работе [171], где на основе представления об эквивалентной конфигурации континуума как собрания элементов, поврежденность которых некоторым воображаемым образом элиминирована, приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности), которая обладает фундаментальным свойством симметрии.

Геометрический подход [171] естественно возникает при попытке обобщения первых классических представлений о поврежденности, восходящих к Л. М. Качанову и Ю. Н. Работнову, и в то же самое время позволяет в самой простейшей форме учесть анизотропию состояния поврежденности. Одним из главных преимуществ этого подхода является возможность достаточного простого и естественного представления эффекта возрастания

внутренних напряжений в среде с повреждениями с помощью понятия эффективного напряжения, что открывает возможность применения механики поврежденности в классических разделах механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и теории ползучести. В последней главе диссертационной работы геометрический подход [171] выступает в качестве основы для вывода связанных уравнений теории пластичности и поврежденности.

Необходимо отметить, что мы применяем тензор поврежденности второго ранга, определение которого отлично от приведенного в [171] и впервые дано в [175]. Новая тензорная мера анизотропной поврежденности, в силу определения, являясь мерой сокращения, вследствие распределенных микродефектов, реально несущей нагрузку площади поверхностного элемента в зависимости от его ориентации, с самого начала вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Показано также, что эквивалентная конфигурация, введенная в работе [171], может быть корректно определена только как трехмерное риманово многообразие, при этом тензор поврежденности выступает как изометрический инвариант указанного многообразия. Можно даже пойти дальше и трактовать эквивалентную конфигурацию как многообразие с кривизной и кручением, тем более что такого рода пространства (с неевклидовой внутренней геометрией) уже давно применяются механиками для моделирования дефектных структур – дислокаций, дисклинаций и точечных дефектов, – начиная с классических работ 50-х годов К. Кондо и Б. Билби (изложение этого чрезвычайно интересного круга вопросов имеется в книге [64]). Применение методов дифференциальной геометрии для построения параметров состояния тела с полем повреждений и в настоящее время представляется актуальной задачей, несмотря на то, что, по-видимому, уже сформировались основные принципы соответствия между аффинно-метрическими теориями и дефектными структурами. Действительно, не могут считаться преодоленными проблемы, связанные с построением термодинамических потенциалов сред, внутренняя геометрия которых определяется не только тензором кривизны, но и тензором кручения, и с формулировкой граничных условий для неевклидовых характеристик тела. Из всего сказанного можно

заключить, что геометрическая модель с тензором поврежденности второго ранга может и дальше с успехом развиваться в плане учета микроструктуры тела с помощью методов дифференциальной геометрии.

Для того, чтобы отделить влияние упругой деформации на процесс накопления повреждений, вводится тензор поврежденности по отношению к конфигурации элементов, упругая деформация которых элиминирована путем локальных разгрузок из текущей конфигурации. Одним из центральных результатов здесь выступает принцип коориентированности главных осей тензора напряжений и тензора поврежденности вдоль всего процесса нагружения, если влияние упругих деформаций на состояние поврежденности является пренебрежимо малым.

На основе представления о возрастании напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений вводится тензор эффективных напряжений. Обсуждаются условия его симметрии и предлагается процедура его симметризации, основанная, с одной стороны, на новом подходе к моделированию анизотропной поврежденности, а с другой – на классической количественной мере указанного возрастания напряжений.

Заметим, что необходимость симметризации тензора эффективных напряжений была осознана давно и были предложены различные схемы симметризации [189], [169], [108], [95], [158], [200]. Сущность всех предложений сводилась к линейному преобразованию (с помощью того или иного тензора четвертого ранга, который часто называют **тензором влияния**⁶) тензора истинных напряжений. Часто процедуры симметризации приводились вообще без какого-либо механического или термодинамического обоснования. Представление поврежденности при этом ограничивалось исключительно тензором поврежденности второго ранга. Единственное исключение – построение тензора влияния с помощью тензора поврежденности четвертого ранга – дано в работе [101].

Изложение данной главы в основном следует работам [175], [57].

В **четвертой главе** рассматривается общая термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах, развитая на основе концепции канонических скрытых переменных состояния. Модель развивается для геометрически нелинейного случая, поэтому напряженно-деформированное состояние тела представляется парой сопряженных по энергии тензоров напряжений и деформаций (достаточно подробное современное изложение этого круга вопросов имеется, например, в книгах [65],

⁶Имеется ввиду влияние поврежденности.

[56].)

Сложившаяся в механике сплошных сред традиция описания неупругого поведения с помощью скрытых термодинамических переменных состояния восходит к оригинальным работам [107], [151], [118], [138]. Однако современный этап развития механики и термодинамики уже поставил на повестку дня овладение более сложными вариантами метода скрытых переменных, один из которых [160], [163], [164] подразумевает представление состояния не только посредством самих скрытых переменных, но также и посредством их градиентов. Последнее диктуется необходимостью описания выраженных эффектов локализации и диффузии из зон локализации необратимых деформаций и поврежденности, которые в принципе не могут быть учтены в рамках традиционных схем.

Формальное представление модели предложено в двух канонических вариантах – энергетическом и энтропийном. Оба варианта развиваются на основе канонической трансформации переменных состояния, которая позволяет привести к каноническому (и чрезвычайно простому) виду выражения для внутренней энергии и энтропии в стадии соответственно значительной деградации внутренней энергии и существенного роста энтропии вследствие накопления поврежденности.

Каноническая трансформация скрытых переменных состояния с целью упрощения выражений термодинамических потенциалов состояния – единственная альтернатива прямому подходу, когда общие выражения для потенциалов конструируются на основе списка индивидуальных и совместных инвариантов тензорных явных и скрытых переменных состояния, среди которых – тензор деформации, тензор поврежденности и тензоры анизотропии различных физических свойств. Ясно, что более или менее точные выражения через индивидуальные и совместные инварианты тензорных переменных состояния и тензоров анизотропии физических свойств для внутренней энергии и энтропии тела с рассеянной поврежденностью вряд ли удастся определить (особенно это касается тензоров поврежденности ранга выше второго), даже если удалось обосновать выбор физически содержательных внутренних переменных состояния. Тензорные переменные могут входить в выражение для внутренней энергии только в виде определенного количества объективных форм. Соответствующая довольно сложная и весьма далекая от завершения теория развивается в работах [193], [192], [201], [194], [203], где могут быть найдены соответствующие списки инвариантов. Установление полной системы инвариантов системы тензоров различного ранга

с теми или иными условиями симметрии или косой симметрии представляет собой довольно трудную проблему в формальном плане, которая решена лишь для сравнительно простых систем тензоров невысоких рангов (в частности, эта проблема решается для системы двух симметричных тензоров второго ранга над трехмерным пространством). Единственное, что можно утверждать, так это только то, что в случае системы, состоящей из конечного числа тензоров, будет конечной и полная система индивидуальных и совместных инвариантов. Это утверждение составляет предмет известной теоремы Гильберта (см., например, [32]).

Падение внутренней энергии и возрастание энтропии могут быть оценены, как будет показано, через среднее (по ориентациям) значение эффективной площади. С помощью канонических представлений внутренней энергии и энтропии получены канонические выражения для других термодинамических потенциалов состояния. Ясно, что точные оценки возрастания энтропии в связи с ростом повреждений могут быть получены исключительно статистическими методами. Здесь мы укажем только на теорию, предложенную в [52], в связи с анализом роста энтропии при нарушении симметрии и ее падения при возникновении новых свойств симметрии.

Найден один из вариантов канонического описания анизотропного состояния поврежденности, который дает возможность трактовать канонические скрытые переменные состояния как коэффициенты Фурье канонического ориентационного распределения сплошности, и непосредственно использовать все преимущества гармонического представления поврежденности. Указанный вариант канонического описания поврежденности не только позволяет дать формальное определение ориентационной поврежденности, но и установить соответствие между канонической нормой и усредненной по ориентациям поврежденностью.

Установлено одно важное экстремальное свойство свободной энергии, ассоциированной с состоянием поврежденности.

Изложение данной главы в основном следует статье [176].

В **пятой главе** каноническое описание анизотропного состояния поврежденности применяется для формулировки эволюционных уравнений роста поврежденности в твердых телах. Ясно, что наиболее интересным здесь представляется явный учет взаимодействия необратимых деформаций и поврежденности на основе связанных уравнений (в связках пластическая деформация – поврежденность, ползучесть – поврежденность).

Основой для вывода связанных уравнений выступает принцип термо-

динамической ортогональности [204], [205]. Этот принцип может рассматриваться как базовый вообще для всей механики континуума, поскольку с помощью него могут быть получены (см., например, [206]) все основные классы определяющих законов для деформируемых тел. Естественно, что каноническое представление поврежденности позволяет отчасти упростить оперирование с соотношениями термодинамической ортогональности. Концепция термодинамической ортогональности подразумевает задание только двух потенциалов состояния – свободной энергии Гельмгольца и потенциала рассеяния – для полной идентификации модели.

Канонический формализм применяется далее к термодинамическому анализу понятия эффективного напряжения. Для механики поврежденности характерно представление возрастания внутренних напряжений с развитием повреждений в теле в форме сингулярного множителя, который неограниченно возрастает при приближении к финальной стадии накопления повреждений. Ясно, что подобная модель – чрезмерное упрощение, которое часто вообще не соответствует сути происходящего, поскольку достаточно развитая поврежденность существенно ослабляет кристаллическую структуру тела, что неизбежно приводит к падению уровня напряжений. Ясно также, что понятие эффективного напряжения нуждается как в термодинамическом обосновании, так и в анализе пределов его применимости. Решающую роль при решении этих проблем играют канонические асимптотики энергетического тензора напряжений и особенно – энтропийная асимптотика, поскольку с ее помощью традиционная для механики поврежденности сингулярность по параметру сплошности вообще устраняется.

С помощью уравнения баланса энтропии дана оценка возрастания энтропии в изотермическом (исключая также и теплопроводность) процессе накопления повреждений. Оценка величины возрастания энтропии представляет значительный интерес для механики разрушения, и прежде всего в силу того обстоятельства, что сам феномен разрушения может трактоваться как насыщение элемента тела энтропией, предельное значение которой часто может выступать как универсальная физическая характеристика твердого тела (см. по этому поводу [44], [45], [89], особенно в связи с энтропийным критерием разрушения). Ясно, что энтропийный критерий разрушения имеет также и двойственную формулировку в терминах критического падения свободной энергии.

Соотношения термодинамической ортогональности удобны тем, что содержат и определяющий закон, и эволюционные уравнения для скрытых

переменных состояния. Если ограничиться только квадратичными по скоростям скрытых переменных состояния вкладом в выражение для потенциала рассеяния, то получающиеся в результате уравнения эволюции будут квазилинейными, с определенной спецификой, обусловленной каноническим выбором скрытых переменных состояния. Квазилинейная аппроксимация уравнений эволюции позволяет учесть связку необратимая деформация – поврежденность в наиболее приемлемой для аналитического и численного анализа форме.

Квазилинейные уравнения накопления повреждений в их каноническом варианте часто вообще могут быть проинтегрированы до конца. Достигается это с помощью набора точных интегралов⁷ системы уравнений, определяющих эволюцию повреждений. Ясно, что эти интегралы являются аналогами законов сохранения и выражают баланс поврежденностей (точнее некоторых дробно-степенных комбинаций поврежденностей, которые мы называем инвариантными отношениями) в процессе их развития. Понятно, что существование инвариантных отношений значительно облегчает анализ процесса накопления повреждений, развивающегося параллельно с накоплением необратимой деформации в условиях, например атермической пластичности или изотермической ползучести. Одна общая оценка времени до разрушения также может быть получена с помощью инвариантных отношений при весьма общей формулировке закона роста повреждений.

Заканчивается глава исследованием на основе базовых термодинамических уравнений основных процессов развития повреждений в твердых телах. Отдельно рассмотрено развитие хрупкой поврежденности в упругом теле. Выполнен учет влияния пластической деформации на поврежденность преимущественно хрупкого типа. Изучена также интересная проблема, связанная с оценкой поврежденности, вызванной освобождением скрытой свободной энергии микронапряжений в пределах локализованной пластической зоны.

Круг вопросов, связанных с формулировкой кинетических уравнений накопления повреждений, достаточно широко и подробно освещен в статьях, посвященных механике поврежденности. Приоритет в настоящее время отдается связанным уравнениям, учитывающим взаимное влияние напряжений и поврежденности друг на друга. По сравнению с простейшей формой

⁷Интегралы уравнений накопления повреждений имеют форму отношения степеней от линейных комбинаций компонент канонического тензора поврежденности и поэтому мы вправе называть их инвариантными отношениями, в том смысле, что эти отношения сохраняют свои значения в процессе роста повреждений.

кинетического уравнения для параметра сплошности, предложенной Л. М. Качановым [41], современные уравнения кинетики роста повреждений выглядят значительно сложнее и часто (сошлемся здесь, например, на работы [186], [187], [188]) правые части этих уравнений зависят не только от самих переменных, определяющих состояние, но и от их приращений. Последнее означает, что текущая поврежденность на заданной площадке определяется полной предысторией нагружения. Имеется также большое количество работ, в которых уравнения накопления повреждений выводятся на основе принципа термодинамической ортогональности обобщенных потоков и сил [150].

Изложение данной главы в основном следует [177], [179], [180].

В **шестой главе** диссертационной работы исследуется влияние очага локализации пластических деформаций и поврежденности, удаленного от кончика трещины нормального отрыва, на трещину в условиях плоского напряженного состояния. Удаленные локализованные зоны пластического течения, сопровождаемого развитием в этих зонах повреждений, могут зарождаться в процессе циклического нагружения или температурного воздействия.

Нагружение трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в поле остаточных напряжений (связанных с предыдущими циклами нагружения) может приводит к образованию двух очагов пластического течения: непосредственно у кончика трещины и в зоне максимального остаточного растяжения, которое в случае циклического нагружения может достигать одной трети предела текучести. Моделируя по схеме Дагдейла пластические зоны отрезками, для определения трех безразмерных параметров, характеризующих положения пластических зон, получена система нелинейных уравнений, которая анализируется с помощью оригинального численного алгоритма, разработанного специально для этой цели. Получена точная формула для вычисления раскрытия трещины при двухзонно локализованных пластических деформациях.

Асимптотический анализ величины раскрытия трещины для случая, когда линейный размер удаленной пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины, приводит к заключению, что влияние удаленной пластической зоны на трещину проявляется в форме ее дополнительного закрытия.

Циклическое нагружение трещины с локализованной у ее вершины пластической зоной активизирует процесс освобождения скрытой свободной

энергии, связанной с микронеоднородным в пределах пластической зоны полем напряжений. Освобождающаяся энергия является основным источником развития поврежденности в зонах локализации необратимых деформаций. Поврежденность, в свою очередь, искажая поле напряжений и геометрию локализованных зон, влияет на состояние трещины. Одной из характеристик подобного влияния может служить изменение раскрытия трещины, оценка которого приводится в данной главе, обусловленное перераспределением напряжений и изменением зон локализации пластических деформаций вследствие роста поврежденности.

Изложение данной главы в основном следует работам [178], [80].

В **седьмой главе** на основе геометрического подхода [171], [175], [57] получены связанные уравнения теории пластичности и поврежденности при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения. Напряженное состояние может соответствовать как грани, так и ребру поверхности текучести. Распределение повреждений в среде представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга, главные оси которого предполагаются коориентированными главным осям напряжений.

Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности. В качестве уравнений кинематики пластического течения приняты уравнения совместности (сплошности) приращений малых деформаций. Выведены статические и кинематические соотношения связанной задачи вдоль траекторий главных напряжений, которые представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, найдены такие канонические криволинейные координаты, при преобразовании к которым уравнения равновесия, сформулированные для ребра поверхности текучести приводятся к трем уравнениям, допускающим при некоторых ограничениях точные интегралы. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения при продвижении вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями. Выделены классы пространственных задач равновесия упругопластических тел, для которых поля напряжений являются расслоенными. Построены канонические координаты плоской задачи и найдены инвариантные отношения, устанавливающие баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений. В плоской

задаче указанные инварианты имеют форму отношений, не изменяющих значений вдоль траектории главного напряжения.

Получены соотношения для скоростей главных пластических деформаций вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями.

В этой главе работы основные уравнения теории пластичности представляются сначала в традиционной тензорной записи в декартовой системе координат. Затем они переформулируются в инвариантную безындексную запись. В части, касающейся вывода условий совместности приращений малых деформаций в изостатической криволинейной сетке, все соотношения приводятся в физических компонентах по отношению к локальному базису, связанному с линиями главных напряжений. При этом мы сочли необходимым отойти от соглашения, согласно которому индексы у физических компонент тензора должны заключаться в треугольные скобки, чтобы упростить запись довольно сложных тензорных уравнений. Это, пожалуй, единственное место, где мы отошли от принятой системы обозначений.

Представление условий совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке линий главных напряжений представляет собой довольно трудную задачу ввиду большого количества трудно обозримых соотношений. Однако, если пренебречь упругими деформациями, то согласно ассоциированному закону течения тензор приращения полных деформаций оказывается соосным тензору напряжений, что существенно упрощает дело. Тем не менее и в этом случае приходится отказываться от важного преимущества идеально пластического течения – его несжимаемости – с тем, чтобы учесть влияние поля повреждений на него, которое может проявляться прежде всего в возможной сжимаемости пластического течения.

Рассеянное поле микродефектов настолько искажает картину деформирования, что часто требует отхода от классической евклидовой схемы (в частности, появляется дополнительная тензорная мера деформации третьего ранга в форме тензора кручения) и оперирования с несовместным полем деформаций (см., например, [49], [50], [23], [64]). Ясно, что несовместность поля деформаций из-за присутствия рассеянного поля микродефектов проявляется как неоднородность (в форме тензора четвертого ранга) в уравнениях совместности (точнее несовместности) деформаций. Подробное изложение этого круга вопросов заинтересованный читатель может найти в книге [64].

Специальное место в этой главе отводится важной проблеме учета влияния упругой деформации на кинематику пластического течения в среде с

повреждениями.

Общие соотношения теории идеальной пластичности при условии пластичности Треска анализировались в цикле оригинальных работ [33], [34], [35] и достаточно хорошо изучены. Однако, связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, вообще не подвергалась анализу с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к интегрированию более сложных, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности, связанных уравнений.

Заключение содержит основные выводы по диссертационной работе.

Библиография, приведенная в конце диссертации, состоит из 206 наименований.

Приложение посвящено исследованию вопросов адекватности гармонического представления ориентационной поврежденности с помощью гармонических полиномов второго, четвертого и восьмого порядков. Исследование проводится с помощью доступных экспериментальных данных по прямому подсчету микротрещин различной ориентации в образце кварцита при его сжатии [121], измерению микротвердости вдоль различных лучей, выходящих из вершины коррозионной трещины в низколегированной стали 30G2, в пределах концевой зоны, поврежденной воздействием водородсодержащей среды, измерению хрупкой и микропластической усталостной поврежденности при совместном циклическом кручении и изгибе и ее оценке на основе микромеханической модели [188].

С помощью полярных диаграмм распределения поврежденности по ориентациям продемонстрирована возрастающая степень адекватности гармонического описания состояния поврежденности с ростом степени гармонического полинома, приближающего распределение. Аппроксимации восьмого порядка во всех исследованных случаях качественно (и до некоторой степени количественно) практически правильно воспроизводят реальные картины распределения поврежденности по ориентациям.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах [73], [74], [4], [75], [175], [76], [57], [176], [177], [78], [11], [79], [178], [179], [81], [80], [180].

В диссертации принята двойная нумерация формул. Первая цифра указывает номер параграфа внутри главы, вторая – номер формулы внутри параграфа. Нумерация параграфов – независимая внутри каждой главы. При ссылке на формулу из другой главы впереди добавляется римская цифра,

обозначающая номер главы. Нумерация рисунков, таблиц и примечаний – сквозная по всей диссертации. Расположение рисунков примерно соответствует месту об их первом упоминании в тексте. Более мелкий шрифт, по сравнению с основным изложением, используется для представления деталей вывода тех или иных уравнений, которые несущественны с точки зрения общего понимания диссертационной работы.

Представляемая работа⁸ появилась как результат исследований автора в области механики разрушения и поврежденности, проводившихся в течении ряда лет на кафедре механики сплошных сред Самарского государственного университета и лаборатории прочности Нагойского университета.

Автор благодарит Министерство науки и культуры правительства Японии за предоставленный грант No.05452125 и вычислительные ресурсы Нагойского университета.

Исследования по тематике диссертационной работы частично финансировались французским правительством (Bourse du Gouvernement Francais, Ministere des Affaires etrangeres No.253620K).

Работа также частично поддержана грантами Международного научного фонда МНУ000 и МНУ300 и грантами РФФИ 93-01-17652, 96-01-01064, 99-01-01246.

Автор осознает, что без указанной поддержки настоящая работа не была бы завершена.

Автор считает своим долгом отдать дань уважения своим учителям – Н. Х. Арутюняну и Г. И. Быковцеву.

Автор благодарит В. И. Астафьева, А. А. Вакуленко, Р. В. Гольдштейна, П. А. Жилина, Д. Д. Ивлева, В. Н. Кукуджанова, Н. Ф. Морозова и С. А. Шестерикова за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

⁸Текст диссертационной работы, опубликованные по этой теме научные статьи, доклады на главных международных конференциях, а также алгоритмы, коды программ и результаты расчетов, могут быть найдены на сервере Самарского государственного университета по адресу: <http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/index.html>

Глава I. ТЕНЗОРНЫЕ МЕРЫ СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Предлагается алгоритм построения тензорных мер анизотропной поврежденности, исходя из ориентационного распределения поврежденности, в том числе сколь угодно тонкой структуры.

Приводятся точные определения тензорных мер анизотропной поврежденности и дается механическая интерпретация их собственных элементов (главных направлений и локального спектра поврежденности). Понятие о спектре трехмерной анизотропной поврежденности распространено вплоть до бесконечного (счетного) дискретного спектра. Предложенный алгоритм иллюстрируется исследованием типичных трехмерных распределений анизотропной поврежденности, представляемой тензорами поврежденности второго, четвертого, шестого и восьмого рангов.

Изложение затем переходит к анализу средне-степенных и средних значений распределения поврежденности по ориентациям. Усредненные характеристики поврежденности определены, а затем вычислены в терминах собственного спектра поврежденности. Показано, что тензорные меры поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения тонкой структуры поврежденного состояния и получены формулы для непосредственного вычисления компонент тензора поврежденности и его спектра, исходя из ориентационного распределения поврежденности.

Приводится гармонический анализ тонкой структуры поврежденности и обсуждается представление поврежденного состояния с помощью коэффициентов Фурье разложения локального распределения поврежденности в сумму сферических гармоник.

Представление поврежденности с помощью бесконечной последовательности коэффициентов ряда Фурье (**гармоническое описание поврежденности**) является важной альтернативой традиционному тензорному описа-

нию, а в случае случайного распределения поврежденности по ориентациям – единственной работоспособной схемой исследования.

Применение гармонического представления поврежденности сталкивается с рядом проблем, важнейшей из которых является поиск инвариантных при поворотах локального репера комбинаций из коэффициентов ряда Фурье, что в свою очередь подразумевает нахождение закона преобразования сферических гармоник и коэффициентов Фурье при поворотах локального репера. Этот закон, который также приводится в данной главе работы, оказывается значительно сложнее закона преобразования компонент тензора. Существует, однако, еще одна возможность вывода указанных инвариантных комбинаций из коэффициентов ряда Фурье. Для этого необходимо установить соответствие между тензорным и гармоническим представлениями, а затем воспользоваться известной из теории тензоров схемой построения инвариантов, не зависящих от поворота системы координат. Изучение этой проблемы завершает первую главу диссертационной работы, где и устанавливается соответствие между тензорным и гармоническим представлениями ориентационного распределения поврежденности.

Заметим, что методы и результаты изложенные здесь могут применены к анализу любой физической величины, непрерывно или кусочно-непрерывно распределенной по ориентациям, включая и недетерминированные распределения.

К содержанию данной главы тесно примыкает материал, изложенный во второй главе, где детально исследовано точное усреднение анизотропной структуры поврежденности, представленной двумя низшими аппроксимациями, с целью более точного описания ее тонкой структуры.

Результаты точного усреднения второго и четвертого порядков представлены через канонические эллиптические интегралы Лежандра и, также, в альтернативной форме через эллиптические θ -функции, вычисляемые с помощью быстро сходящихся рядов Фурье. Там же приводятся численные результаты параметрического анализа средних значений поврежденности как функции переменных спектра поврежденности. Вводятся понятия об амплитудном и обратном амплитудном спектрах поврежденности, которые позволяют дать первичную классификацию анизотропии состояний поврежденности. Получены формулы для вычисления средней поврежденности в случае узкополосных и вырожденных обратных амплитудных спектров поврежденности.

Рассматривается расчет двумерного и осесимметричного состояния по-

врежденности. Осесимметричное состояние поврежденности, как показано в работе [81], характеризуется вырожденным обратным амплитудным спектром.

Изложение данной главы в основном следует работам [79], [81].

I.1. Введение

Моделирование поврежденности является предметом интенсивных исследований вот уже на протяжении более чем двух последних десятилетий. основополагающими в этой области следует считать работы Л. М. Качанова [40] и Ю. Н. Работнова [71], признанные ныне классическими. Быстрое развитие механики поврежденности выразилось в создании огромного количества различных феноменологических моделей континуума с внутренним распределением повреждений, не только резко контрастирующих, но и подчас противоречащих друг другу (см. обзоры [135], [102], [103], [161], [150], [96], [144]).

Поврежденность может быть определена как сокращение упругой реакции материала вследствие необратимого накопления и роста внутренних микродефектов и измерена посредством уменьшения сопротивляемости, жесткости, твердости, устойчивости и времени до разрушения (все приведенные меры поврежденности широко используются в современной инженерной практике). В рамках математической модели поврежденность как правило представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности.

Континуальная механика поврежденности, чтобы быть приложимой к анализу сколько-нибудь близких к реальным структур поврежденности, неизбежно сталкивается с проблемой изображения и описания сильно разрывного и часто даже недетерминированного распределения микротрещин, возникающих в процессе накопления повреждений в материалах с выраженной хрупкой доминантой, или разрушения преобладающей до определенного момента дислокационной системы в металлах, находящихся в состоянии пластического течения.

Описание поврежденности в условиях ползучести представляет собой самостоятельный важнейший аспект механики поврежденности, которому континуальная механика поврежденности обязана своим рождением, требующий анализа внутренней структуры металла на уровне зерна.

Сложные структуры анизотропного состояния поврежденного матери-

ала мы называем тонкими структурами поврежденности, полагая возможным аппроксимировать их с требуемой точностью в рамках математической модели. Разумеется, одним из важнейших аспектов анализа тонкой структуры поврежденности является индуцированная внутренним распределением поврежденности анизотропия.

Для описания трехмерного анизотропного состояния поврежденности были предложены векторные и тензорные переменные различных рангов. Здесь мы отметим только некоторые из широкого спектра работ, посвященных этой проблеме [19], [110], [151], [112], [141], [173], [191], [104], [143], [144].

Тензорные переменные высоких рангов необходимы для того, чтобы улучшить аппроксимацию тонкой структуры поврежденности. Как было показано в работе [157] даже сравнительно простые плоские структуры поврежденности могут быть в наиболее благоприятных случаях аппроксимированы только с помощью тензора поврежденности, ранг которого не ниже четвертого.

После введения, приводится определение базовой переменной состояния поврежденности и основные уравнения, относящиеся к поврежденности, представленной тензором поврежденности второго ранга (п.2). Некоторые из этих уравнений известны из предшествующих работ. Отметим также, что мы вынуждены были пересмотреть определение тензора поврежденности второго ранга, данное в [171], чтобы трактовать его как некоторую меру деформации, аналогичную тензору деформации Фингера [198].

Затем (п.3) приводится алгоритм построения тензора поврежденности любого сколь угодно высокого ранга, определяются главные оси и локальный спектр поврежденности. Вводится также предельный элемент последовательности тензоров поврежденности возрастающего ранга (тензор поврежденности бесконечного ранга), который способен, как будет показано позже, точно представить любую тонкую структуру поврежденности и соответствует полному Фурье-спектру в гармоническом разложении ориентационного распределения анизотропной поврежденности.

Спектральные характеристики локального состояния поврежденности исследуются в п.4. Их следует рассматривать как интегральные меры поврежденности, и они вполне пригодны для характеристики локального состояния поврежденности в инженерных расчетах.

Тонкая структура поврежденного состояния, представленная как некоторое непрерывное или кусочно-непрерывное скалярное поле, определенное

на поверхности единичной сферы, может быть проанализирована также с помощью чрезвычайно развитого Фурье-формализма. Соответствующий круг вопросов обсуждается в п.5. Одним из важных результатов здесь являются формулы представления тензорных мер поврежденности как результата некоторого усреднения тонкой структуры поврежденности по сфере единичных направлений, которые позволяют непосредственно вычислить тензорные меры анизотропного поврежденного состояния, исходя из экспериментальных диаграмм локального распределения поврежденности по ориентациям.

Представление трехмерного анизотропного состояния поврежденности с помощью Фурье-спектра, а также соответствие между гармоническим и тензорным описаниями поврежденности рассматривается в п.6. Описание поврежденности в главных осях поврежденности, естественно, является наиболее простым, поэтому мы приводим также технику пересчета в гармонический спектр по отношению к главным осям.

В следующей главе работы, которая по существу является продолжением анализа анизотропной поврежденности, данного в этой главе, приводится описание точного усреднения локальной структуры поврежденности. Две низшие аппроксимации, как показано, приводят к необходимости исследовать квадратуры от эллиптических интегралов Лежандра, зависящих, соответственно от двух и пяти параметров спектра поврежденности. Прямой численный анализ, например, в последнем случае, оказывается невозможным даже с применением самых современных компьютеров ввиду чрезмерных затрат времени. Заметим также, что некоторые процедуры усреднения требуют шестикратного интегрирования эллиптических интегралов Лежандра. Естественным, поэтому, является использование аппарата тэта-функций для их ускоренного вычисления. Основным вычислительным средством здесь являются быстро сходящиеся Фурье-разложения эллиптических тэта-функций.

Интенсивное использование эллиптической тригонометрии позволяет получить не только удобные вычислительные формулы, но и ввести классификацию анизотропных состояний поврежденности и их спектров (узкополосный, широкополосный и вырожденный).

Усредненные характеристики поврежденного состояния, и в частности аппроксимации средней поврежденности, определяют термодинамические потенциалы поврежденного состояния и уже в силу этого должны использоваться при формулировке определяющих и эволюционных уравнений кон-

тинуума с внутренним распределением повреждений.

Завершаются логически связанные между собой две первые главы исследованием типичных осесимметричных и двумерных распределений поврежденности. Осесимметричная поврежденность, наблюдаемая, в частности, при продольном сжатии цилиндрических образцов, характеризуется вырожденным обратным амплитудным спектром поврежденности, поэтому предлагаемая классификация анизотропной поврежденности приобретает и практическую значимость. В качестве примера, в работе приводится расчет поврежденного состояния продольно сжатого образца кварцита, основанный на наблюдаемом в эксперименте двумерном анизотропном распределении микротрещин [121].

I.2. Формальное описание анизотропного состояния поврежденности.

Тензор поврежденности второго ранга

Анизотропное состояние поврежденности формально может быть представлено с помощью скалярной функции от векторной переменной единичной длины. Условимся откладывать единичные векторы \mathbf{n} от той точки, тонкую структуру поврежденности в окрестности которой предполагается исследовать. Концы векторов \mathbf{n} образуют тогда единичную сферу (сферу единичных направлений). Вводя сферические координаты Θ, Φ на указанной сфере, можно рассматривать эту функцию как функцию двух переменных.

Значения этой функции суть поврежденности, измеренные для каждого данного направления. Ясно, что вычислить поврежденности можно в результате анализа тонкой структуры поврежденности, задавшись при этом определенной мерой поврежденности. Возможные варианты – разнообразны. Выбор определяется, конечно же, преобладающим механизмом зарождения и развития поврежденности: образование и развитие полей взаимовлияющих микротрещин – характерный механизм деградации упругого тела, пластическое течение сопровождается зарождением и распространением дислокаций, ползучесть металлов – образованием и ростом пор. Можно ввести также общие меры поврежденности, абстрагируясь от конкретного типа микродефектов. Одной из таких мер является сокращение эффективной площади плоского элемента нормального вектору \mathbf{n} .

Для актуального состояния поврежденности, вследствие распределен-

ных микродефектов передающая нагрузку от одной части тела на другую эффективная площадь элемента $dA^*(\mathbf{n})$ оказывается меньше, чем площадь этого элемента без учета его микроструктуры поврежденности $dA(\mathbf{n})$. Таким образом, можно определить функцию ориентации

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})} \quad (2.1)$$

как отношение указанных площадей.

Переменную ς будем называть ориентационным распределением поврежденности (заметим, что правильнее было бы называть ς ориентационной сплошностью).

Подчеркнем, что принятая интерпретация значений распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ – лишь одна из многих возможных. Можно, например, связать значения ς с плотностью распределения микротрещин или задать ориентационным распределением сколь угодно тонкую структуру состояния поврежденности.

Для дальнейшего принципиально важным является только то, что поврежденность локально может быть описана некоторым скалярным полем, определенным на поверхности единичной сферы.

Простейшая мыслимая аппроксимация распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ – квадратичная по компонентам единичного вектора \mathbf{n} . Мы аппроксимируем подобным образом, но не саму величину ς , а её квадрат:

$$\varsigma^2 = C_{ij}n_i n_j, \quad (2.2)$$

где C_{ij} есть симметричный положительно определенный тензор второго ранга.

Ориентационное распределение поврежденности тогда выражается формулой

$$\varsigma = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}. \quad (2.3)$$

Тензор \mathbf{C} может быть интерпретирован как тензор деформации Фингера (см. [198]), градиент \mathbf{G} которой должен удовлетворять следующему уравнению:

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}. \quad (2.4)$$

Следуя концепции, предложенной в [171], можно представить, что поврежденность материального элемента может быть элиминирована посредством его некоторой дополнительной деформации, так что тензор \mathbf{G} преобразует поврежденный материальный элемент в неповрежденный.

В силу уравнения (2.4), можно заключить, что ортогональный множитель в полярном разложении Коши тензора \mathbf{G} не изменяет ориентационного распределения поврежденности, поэтому тензор \mathbf{G} можно считать симметричным.

Интерпретация тензора \mathbf{G} как меры деформации Фингера позволяет также вычислить ориентационное распределение поврежденности по метрике его актуального поврежденного и соответствующего неповрежденного эквивалентного состояния.

С помощью тождества Гамильтона-Кэли [117]

$$\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \mathbf{II}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{I} \quad (2.5)$$

из уравнения (2.4) находим следующее выражение для компонент тензора \mathbf{C} в конвективной системе координат

$$C_{\gamma\lambda} = g_{\gamma\beta}^*g_{\mu\lambda}^*g^{\beta\mu} - g_{\gamma\lambda}^*g_{\alpha\beta}^*g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^*g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^*g_{\mu\nu}^*g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}] g_{\gamma\lambda}, \quad (2.6)$$

где $g_{\gamma\lambda}$ и $g_{\gamma\lambda}^*$ есть метрические коэффициенты актуального поврежденного и соответствующего эквивалентного неповрежденного состояний.

Ориентационное распределение поврежденности можно теперь представить в форме

$$\varsigma^2 = (g_{\alpha\beta}^*g_{\mu\nu}^*g^{\beta\mu} - g_{\gamma\beta}^*g_{\alpha\nu}^*g^{\gamma\beta})n^\alpha n^\nu + \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^*g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^*g_{\mu\nu}^*g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}]. \quad (2.7)$$

Тензор поврежденности второго ранга мы определим посредством следующего соотношения

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{C}}. \quad (2.8)$$

Ориентационное распределение поврежденности тогда можно представить в следующем виде:

$$\varsigma = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]} . \quad (2.9)$$

В силу определения, тензор поврежденности второго ранга является симметричным положительно определенным тензором и, следовательно, может быть представлен с помощью спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^3 D_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (2.10)$$

где $\mathbf{d}_{(1)}$, $\mathbf{d}_{(2)}$, $\mathbf{d}_{(3)}$ – тройка ортонормированных собственных векторов тензора поврежденности, $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, $D_{(3)}$ – собственные значения тензора поврежденности.

В дальнейшем главные оси тензора \mathbf{D} будем называть главными осями поврежденности, а собственные значения тензора \mathbf{D} – главными поврежденностями.

Подробное изложение геометрического подхода к определению тензора поврежденности второго ранга будет дано в третьей главе работы. Здесь мы ограничимся лишь минимумом необходимых сведений из этой области.

Подставляя спектральное разложение (2.10) в формулу (2.9), находим

$$\varsigma = \sqrt{(1 - D_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - D_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - D_{(3)})^2 n_{(3)}^2}, \quad (2.12)$$

где $n_{(i)}$ – компоненты вектора \mathbf{n} по отношению к главным осям поврежденности.

Для плоского материального элемента тела, ориентированного нормально главной оси поврежденности с номером γ , в силу (2.1), (2.11), получаем соотношение

$$dA_{(\gamma)}^* = (1 - D_{(\gamma)}) dA_{(\gamma)} \quad (\text{по } \gamma \text{ не суммировать, } \gamma = 1, 2, 3), \quad (2.12)$$

которое можно также представить в форме

$$D_{(\gamma)} = \frac{dA_{(\gamma)} - dA_{(\gamma)}^*}{dA_{(\gamma)}}. \quad (2.13)$$

Последнее соотношение позволяет интерпретировать главные поврежденности как относительные сокращения эффективной площади плоских

материальных элементов, ориентированных нормально главным осям поврежденности.

Главные поврежденности материала могут изменяться в пределах известных границ $0 \leq D_{(\gamma)} \leq D_{(\gamma)C}$, где нижняя граница соответствует неповрежденному состоянию материала, а верхняя полному исчерпанию его способности выдерживать нагружение. Для большинства металлов $0 \leq D_{(\gamma)C} \leq 0.8$.

Главные оси поврежденности, в свою очередь, указывают ориентации элементов с экстремальными относительными сокращениями эффективной площади. Действительно, занумеровав главные поврежденности в порядке их убывания

$$D_{(3)} \leq D_{(2)} \leq D_{(1)} \quad (2.14)$$

и воспользовавшись равенством

$$n_{(1)}^2 = 1 - n_{(2)}^2 - n_{(3)}^2, \quad (2.15)$$

находим

$$\begin{aligned} \varsigma^2 = (1 - D_{(1)})^2 + [(1 - D_{(2)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(2)}^2 + \\ + [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(3)}^2 \geq (1 - D_{(1)})^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \varsigma^2 = (1 - D_{(3)})^2 - [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(2)})^2] n_{(2)}^2 - \\ - [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(1)}^2 \leq (1 - D_{(3)})^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

или также

$$D_{(3)} \leq 1 - \varsigma \leq D_{(1)}. \quad (2.18)$$

Таким образом, главные оси поврежденности 1 и 3 указывают соответственно направления наибольшего и наименьшего относительного сокращения эффективной площади. Последнее обстоятельство чрезвычайно важно, поскольку позволяет установить, исходя из экспериментальных диаграмм распределения поврежденности по ориентациям, и пригодность тензорного представления второго ранга, и ориентацию главных осей поврежденности в пространстве.

Учитывая уравнения (2.4), (2.8), получаем

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}}. \quad (2.19)$$

Последняя формула позволяет выразить главные поврежденности через главные удлинения поврежденности $L_{(\alpha)}^D$ (собственные значения тензора $\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$)

$$1 - D_{(\gamma)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(\gamma)}^D} \quad (2.20)$$

и обратно

$$\begin{aligned} L_{(1)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(2)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(2)})}{(1 - D_{(3)})}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ниже (в третьей главе работы) мы вернемся к этим соотношениям.

Главные поврежденности и главные удлинения поврежденности – не только замечательные геометрические характеристики локального состояния поврежденности, но и одновременно, как будет показано ниже, наиболее удобные параметры для представления поврежденного состояния в среднем. Главные удлинения поврежденности, как мы увидим в последующих главах, в некоторых симметричных комбинациях могут выступать как скрытые термодинамические переменные состояния. Следует однако помнить об ограниченных возможностях этого вида тензорного представления поврежденности.

I.3. Тензоры поврежденности высших рангов. Главные оси и спектр поврежденности

Выше было показано, что квадратичная по компонентам единичного вектора ориентации аппроксимация квадрата ориентационного распределения поврежденности приводит к тензору поврежденности второго ранга. Ясно, что более высокие полиномиальные по компонентам директора \mathbf{n} аппроксимации степеней переменной ς приводят соответственно к тензорным мерам поврежденности высших рангов.

Тензор поврежденности ранга $2s$ мы определяем посредством следующего уравнения

$$\varsigma = \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{2s} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s} \quad (3.1)$$

и обозначаем по-прежнему через \mathbf{D} .

В силу определения \mathbf{D} есть симметричный положительно определенный тензор.

Таким образом, мы имеем следующую цепочку аппроксимаций четных степеней ориентационной сплошности:

$$\begin{aligned} \varsigma^2 &= C_{ij} n_i n_j = \text{tr} [\mathbf{C} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} \mathbf{n}), \\ \varsigma^4 &= C_{i_1 j_1 i_2 j_2} n_{i_1} n_{j_1} n_{i_2} n_{j_2} = \text{tr} [\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \mathbf{C} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}], \\ \varsigma^{2s} &= C_{i_1 j_1 \dots i_s j_s} n_{i_1} n_{j_1} \dots n_{i_s} n_{j_s} = \text{tr} \left[\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где использовано следующее обозначение

$$\sqrt[2s]{\mathbf{C}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}. \quad (3.3)$$

Необходимо отметить, что симметричный тензор ранга $2s$ мы рассматриваем, и это отражено в обозначениях, как симметричный линейный оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров ранга s , скалярное произведение в котором определено как обычно формулой

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_{i_1 i_2 \dots i_s} B_{i_1 i_2 \dots i_s}. \quad (3.4)$$

След произведения двух тензоров ранга s мы определяем как билинейный функционал на пространстве тензоров ранга s , для которого

$$\begin{aligned} \text{tr}((\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{k}_s) (\mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_s)) &= \\ = k_{s_{i_1}} l_{s_{i_1}} \text{tr}((\mathbf{k}_1 \otimes \mathbf{k}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{k}_{s-1}) (\mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{l}_{s-1})) &= \\ = k_{s_{i_1}} l_{s_{i_1}} k_{s-1_{i_2}} l_{s-1_{i_2}} \dots k_{1_{i_s}} l_{1_{i_s}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB}).$$

Цепочка аппроксимаций (3.2) подразумевает представление ориентационного распределения поврежденности с помощью тензора все более высокого ранга, позволяя тем самым добиться исчерпывающего описания сколь угодно тонкой структуры поврежденности, все точнее характеризующего локальную анизотропию поврежденности.

Под тонкой структурой поврежденности в строгом смысле следует понимать реальные микроструктуры поврежденности твердых тел, строгое описание которых возможно только в рамках статистического подхода с помощью соответствующей функции распределения [52]. Как известно, любая функция состояния (в том числе и любая мера поврежденности) подобных микроструктур может быть представлена в виде тригонометрического разложения по гармоническим экспонентам волновых векторов микроструктуры, и эти последние в физике твердого тела собственно и выступают как микроструктурные параметры. Для кристаллических твердых тел указанные волновые векторы могут трактоваться как векторы \mathbf{k}_s обратной (взаимной) решетки. Ясно, что любая мера поврежденности тонкой структуры, ассоциированная с направлением \mathbf{n} , может быть разложена в тройной ряд Фурье

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \sum_{p_1, p_2, p_3} \varsigma_{p_1 p_2 p_3} e^{i(p_1 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} + p_2 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} + p_3 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{n})},$$

где суммирование происходит по всем целым значениям p_1, p_2, p_3 . Это – пример ориентационного распределения поврежденности тонкой структуры и одновременно обоснование того факта что ориентационное распределение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ в действительности способно представлять микроструктуры поврежденности самого тонкого уровня. Ясно также, что векторы \mathbf{k}_s сами

могут служить звеньями диадных цепей при конструировании тензоров поврежденности.⁹ Заметим, что гармонические экспоненты в последнем соотношении могут быть разложены в кратные степенные ряды по компонентам директора и, таким образом, ориентационное распределение, соответствующее самой тонкой структуре поврежденности, может быть аппроксимировано полиномами вида (3.2).

Предположим далее, что симметричный тензор \mathbf{C} имеет следующую спектральную структуру

$$\mathbf{C} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^3 C_{(i_1 i_2 \dots i_s)} (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}) \otimes (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}), \quad (3.5)$$

т.е. собственный базис этого тензора есть

$$\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)} \quad (i_1, i_2, \dots, i_s = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

и определяется ортонормированной тройкой векторов $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$.

Поясним, что мы используем круглые скобки при индексах, чтобы подчеркнуть, что соответствующий символ относится к главным осям поврежденности.

Позже будет показано, что тензоры \mathbf{C} указанной спектральной структуры могут представлять любую сколь угодно сложную тонкую структуру поврежденности, если $s \rightarrow \infty$ и распределение поврежденности удовлетворяет условию

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \varsigma(-\mathbf{n}). \quad (3.7)$$

Последнее условие не является сколько-нибудь ограничительным. Анизотропные структуры поврежденности, сопровождающей ползучесть металлов или, например, поврежденность сильно упругоанизотропных кристаллов и горных пород, индуцированная их сжатием и сдвигом, в точности удовлетворяют условию (3.7).

Согласно формуле (3.5) ориентационное распределение поврежденности может быть представлено также в виде

⁹Внимание автора на этот факт обратил А. А. Вакуленко.

$$\begin{aligned}\varsigma^{2s} &= \text{tr} \left[\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s \right] = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^3 C_{(i_1 i_2 \dots i_s)} n_{(i_1)}^2 n_{(i_2)}^2 \dots n_{(i_s)}^2.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Множество собственных значений тензора поврежденности

$$D_{(i_1 i_2 \dots i_s)} \quad (i_1, i_2, \dots, i_s = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

будем называть локальным спектром поврежденности.

Диагональные элементы локального спектра поврежденности интерпретируются как меры сокращения эффективной площади плоских материальных элементов нормальных главным осям поврежденности:

$$\varsigma_\sigma = \varsigma(\mathbf{d}_{(\sigma)}) = 1 - D_{(\underbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}_s)} \quad (\text{по } \sigma \text{ не суммировать, } \sigma = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Полиномиальное выражение в (3.8) может быть симметризовано, поэтому всегда можно считать выполненными следующие условия симметрии

$$C_{(i_1 i_2 \dots i_\sigma i_{\sigma+1} \dots i_s)} = C_{(i_1 i_2 \dots i_{\sigma+1} i_\sigma \dots i_s)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s-1), \quad (3.11)$$

а спектральное разложение (3.5) представить в следующем виде

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_s=1}^3 C_{(i_1 i_2 \dots i_s)} \text{sym}((\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}) \otimes \\ &\quad \otimes (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)})),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\text{sym}((\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)}) \otimes (\mathbf{d}_{(i_1)} \otimes \mathbf{d}_{(i_2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(i_s)})) &= \\ &= \frac{1}{s!} \sum_P (\mathbf{d}_{(P(i_1))} \otimes \mathbf{d}_{(P(i_2))} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(P(i_s))}) \otimes \\ &\quad \otimes (\mathbf{d}_{(P(i_1))} \otimes \mathbf{d}_{(P(i_2))} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_{(P(i_s))}))\end{aligned}$$

и символ P обозначает перестановку индексов i_1, i_2, \dots, i_s .

Локальный спектр поврежденности, очевидно, также можно считать состоящим из симметричных компонент $D_{(i_1 i_2 \dots i_s)}$.

Цепочка аппроксимаций (3.2) формально ”заканчивается” следующим выражением

$$\varsigma = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{2s} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s}. \quad (3.12)$$

В этом случае ориентационное распределение поврежденности определяется триэдром поврежденности $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$ и бесконечным дискретным спектром поврежденности

$$D_{(i_1 i_2 \dots i_s \dots)} \quad (i_1, i_2, \dots, i_s, \dots = 1, 2, 3), \quad (3.13)$$

диагональные элементы которого интерпретируются с помощью соотношения

$$\varsigma_\sigma = \varsigma(\mathbf{d}_{(\sigma)}) = 1 - D_{(\underbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}_{\infty})} \quad (\text{по } \sigma \text{ не суммировать, } \sigma = 1, 2, 3). \quad (3.14)$$

Таким образом, тензор поврежденности бесконечного ранга вводится как предельный элемент последовательности тензоров возрастающего ранга. Ниже, в связи с гармоническим анализом тонкой структуры поврежденности, будет уточнен его как формальный, так и содержательный смысл.

Четыре первые низшие аппроксимации распределения поврежденности есть:

$$\varsigma^2 = C_{(1)} n_{(1)}^2 + C_{(2)} n_{(2)}^2 + C_{(3)} n_{(3)}^2, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \varsigma^4 = & C_{(11)} n_{(1)}^4 + C_{(22)} n_{(2)}^4 + C_{(33)} n_{(3)}^4 + 2C_{(12)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^2 + \\ & + 2C_{(13)} n_{(1)}^2 n_{(3)}^2 + 2C_{(23)} n_{(2)}^2 n_{(3)}^2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varsigma^6 = & C_{(111)} n_{(1)}^6 + C_{(222)} n_{(2)}^6 + C_{(333)} n_{(3)}^6 + 3C_{(112)} n_{(1)}^4 n_{(2)}^2 + \\ & + 3C_{(113)} n_{(1)}^4 n_{(3)}^2 + 3C_{(122)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^4 + 3C_{(133)} n_{(1)}^2 n_{(3)}^4 + \\ & + 3C_{(223)} n_{(2)}^4 n_{(3)}^2 + 3C_{(233)} n_{(2)}^2 n_{(3)}^4 + 6C_{(123)} n_{(1)}^2 n_{(2)}^2 n_{(3)}^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
\varsigma^8 = & C_{(1111)}n_{(1)}^8 + C_{(2222)}n_{(2)}^8 + C_{(3333)}n_{(3)}^8 + 4C_{(1222)}n_{(1)}^2n_{(2)}^6 + \\
& + 4C_{(1333)}n_{(1)}^2n_{(3)}^6 + 4C_{(2111)}n_{(2)}^2n_{(1)}^6 + 4C_{(3111)}n_{(3)}^2n_{(1)}^6 + \\
& + 4C_{(2333)}n_{(3)}^2n_{(2)}^6 + 4C_{(3222)}n_{(2)}^2n_{(3)}^6 + 6C_{(1122)}n_{(1)}^4n_{(2)}^4 + \\
& + 6C_{(1133)}n_{(1)}^4n_{(3)}^4 + 6C_{(2233)}n_{(2)}^4n_{(3)}^4 + 12C_{(1233)}n_{(1)}^2n_{(2)}^2n_{(3)}^4 + \\
& + 12C_{(1223)}n_{(1)}^2n_{(2)}^4n_{(3)}^2 + 12C_{(1123)}n_{(1)}^4n_{(2)}^2n_{(3)}^2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Соответствующие структуры поврежденности могут быть исследованы, если ввести сферические координаты на сфере единичных направлений по отношению к главным осям поврежденности:

$$n_{(1)} = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_{(2)} = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_{(3)} = \cos \theta. \tag{3.19}$$

Типичные профили ориентационного распределения поврежденности для четырех низших аппроксимаций тонкой структуры поврежденности изображены на рис. 1-7.

Графические построения приводятся на плоскости переменных

$$X = \varsigma \cos \theta, \quad Y = \varsigma \sin \theta, \tag{3.20}$$

поэтому сплошность ς и угол θ есть соответственно полярный радиус и полярный угол на плоскости (X, Y) .

Как показывает сравнение с типичными графиками распределения плотности трещин $\rho(\mathbf{n})$ (см. [157]) аппроксимации порядка четыре и выше вполне пригодны для моделирования наиболее распространенных полей микротрещин.

При сравнении следует учесть, что $\rho(\mathbf{n})$ есть количество (на единицу объема) микротрещин, расположенных нормально направлению \mathbf{n} . Ориентационная сплошность $\varsigma(\mathbf{n})$ и нормированная плотность распределения трещин $\rho(\mathbf{n})/\rho_C(\mathbf{n})$, где $\rho_C(\mathbf{n})$ есть критическая плотность микротрещин, ориентированных нормально направлению \mathbf{n} , соотносятся в простейшем варианте как

$$\frac{\rho(\mathbf{n})}{\rho_C(\mathbf{n})} = 1 - \varsigma(\mathbf{n}).$$

Отрицательная плотность распределения трещин соответствует отрицательным значениям локального спектра поврежденности.

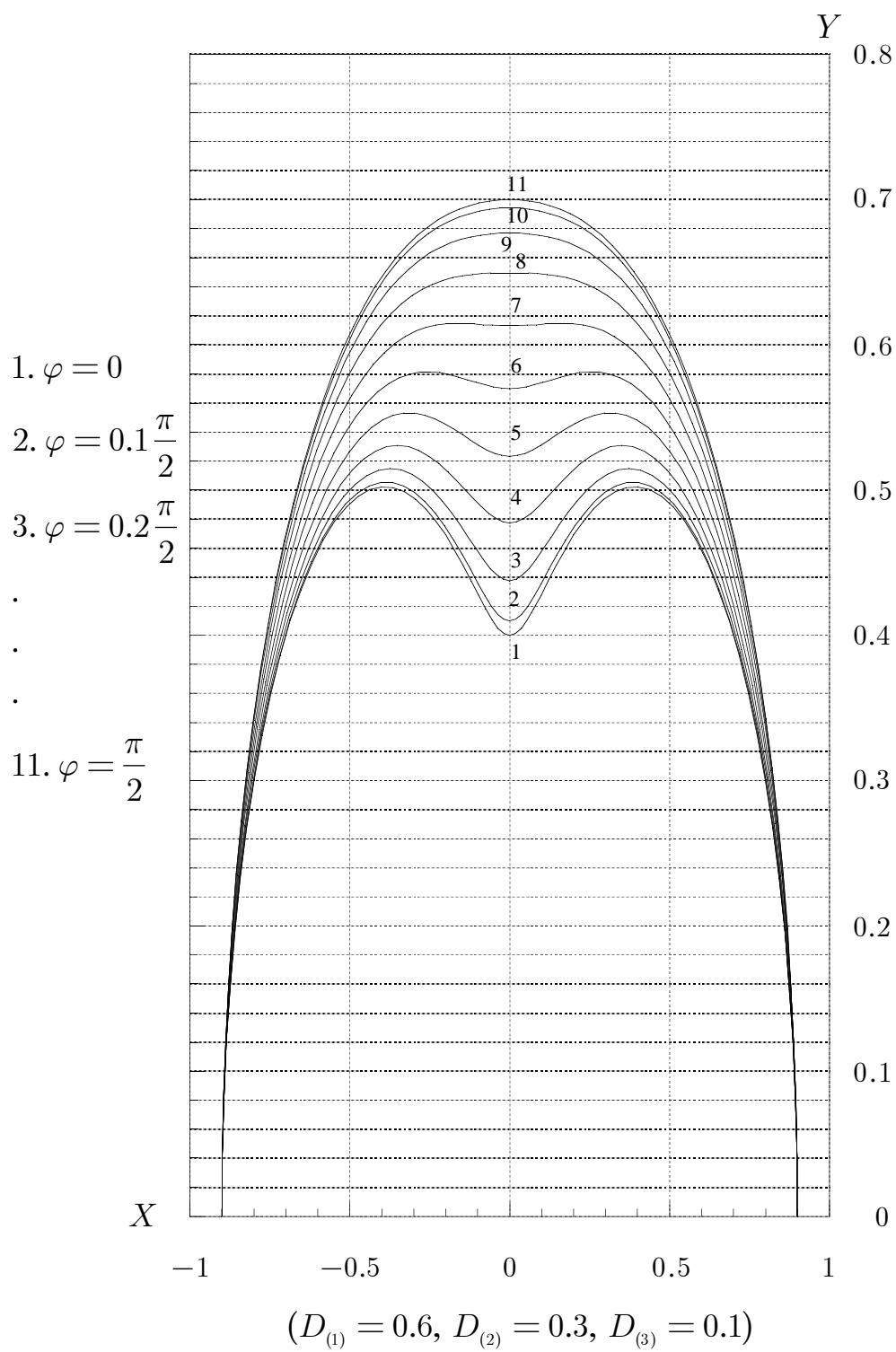


Рис. 1: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление второго ранга)

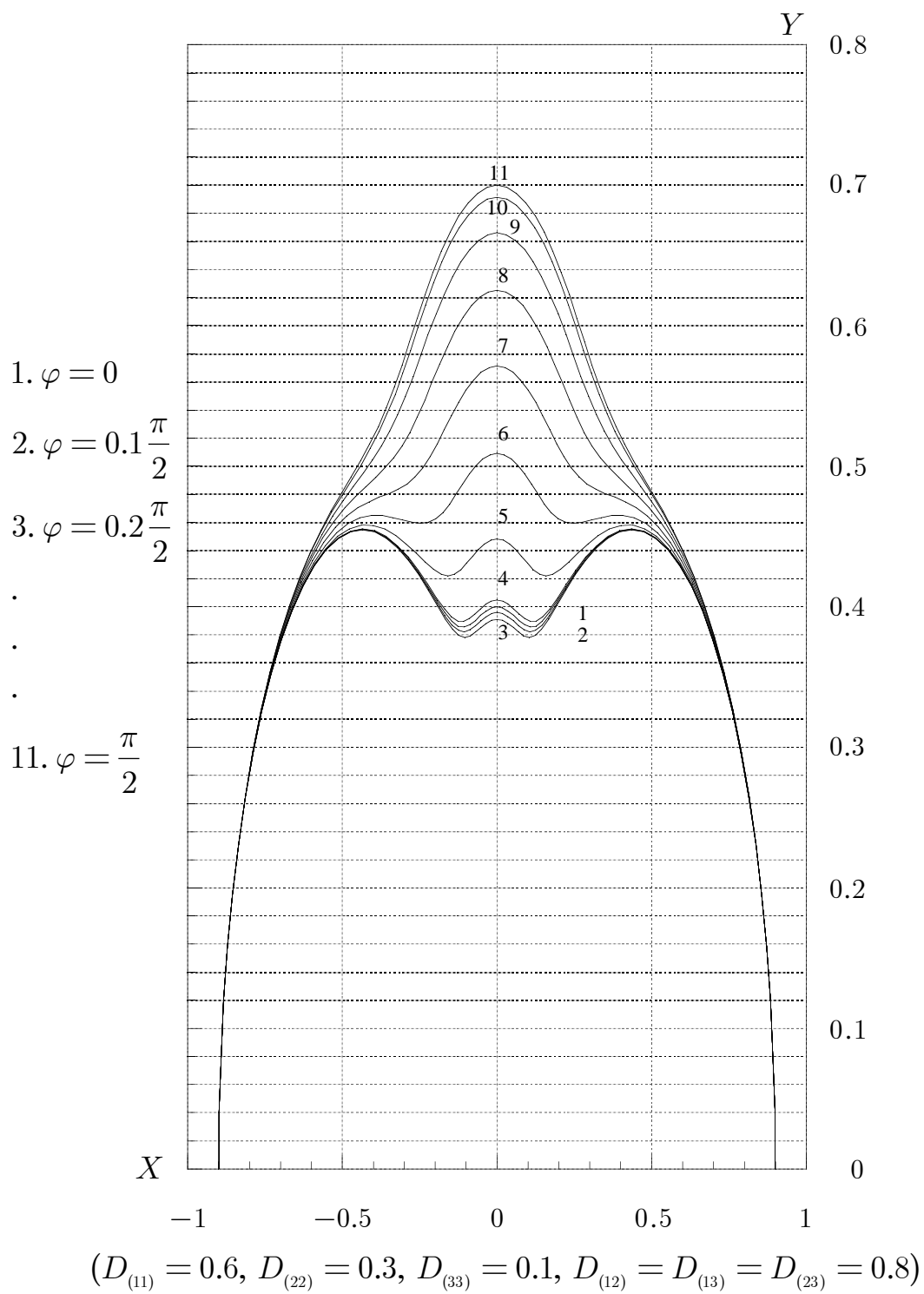


Рис. 2: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление четвертого ранга)

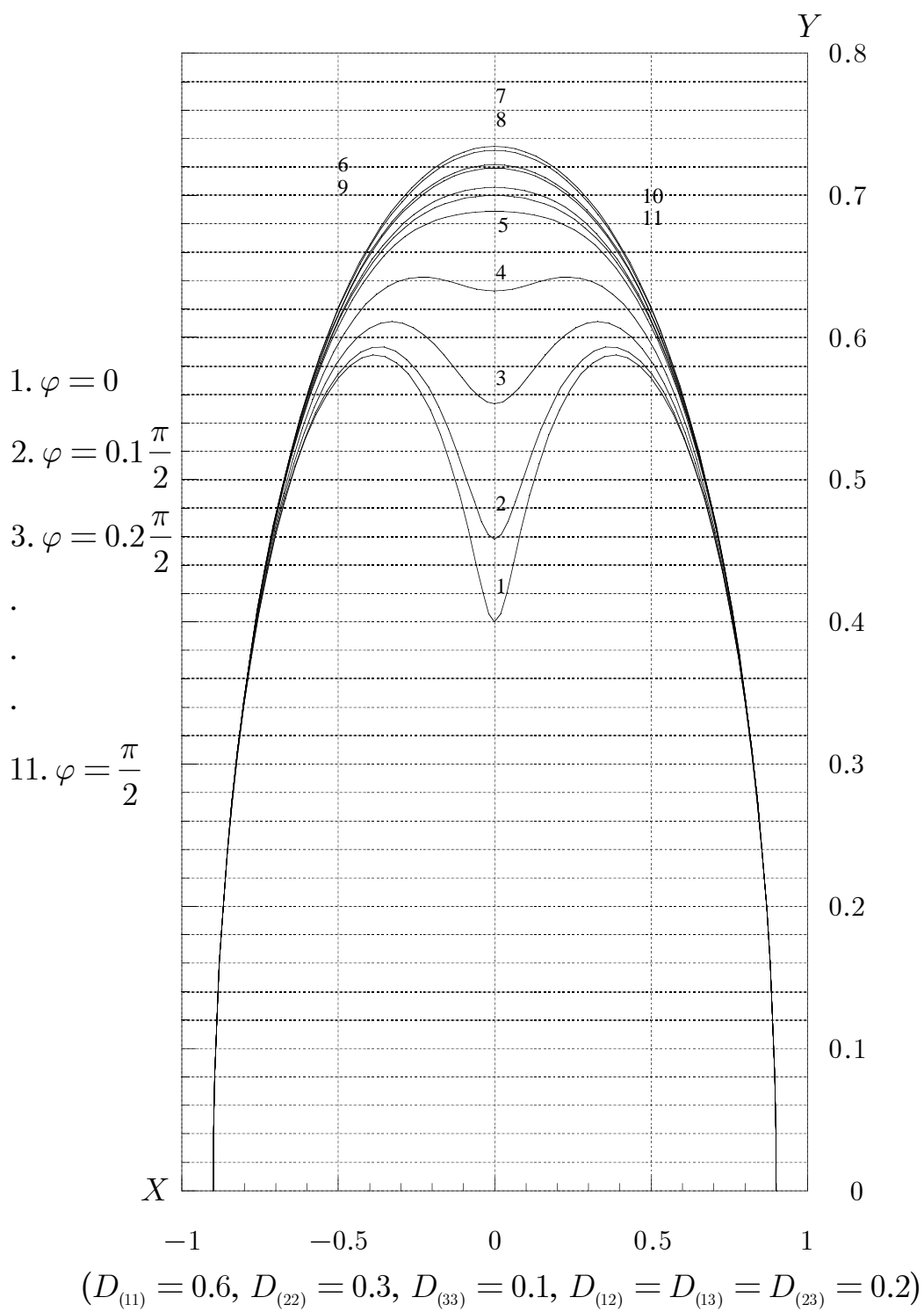


Рис. 3: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление четвертого ранга)

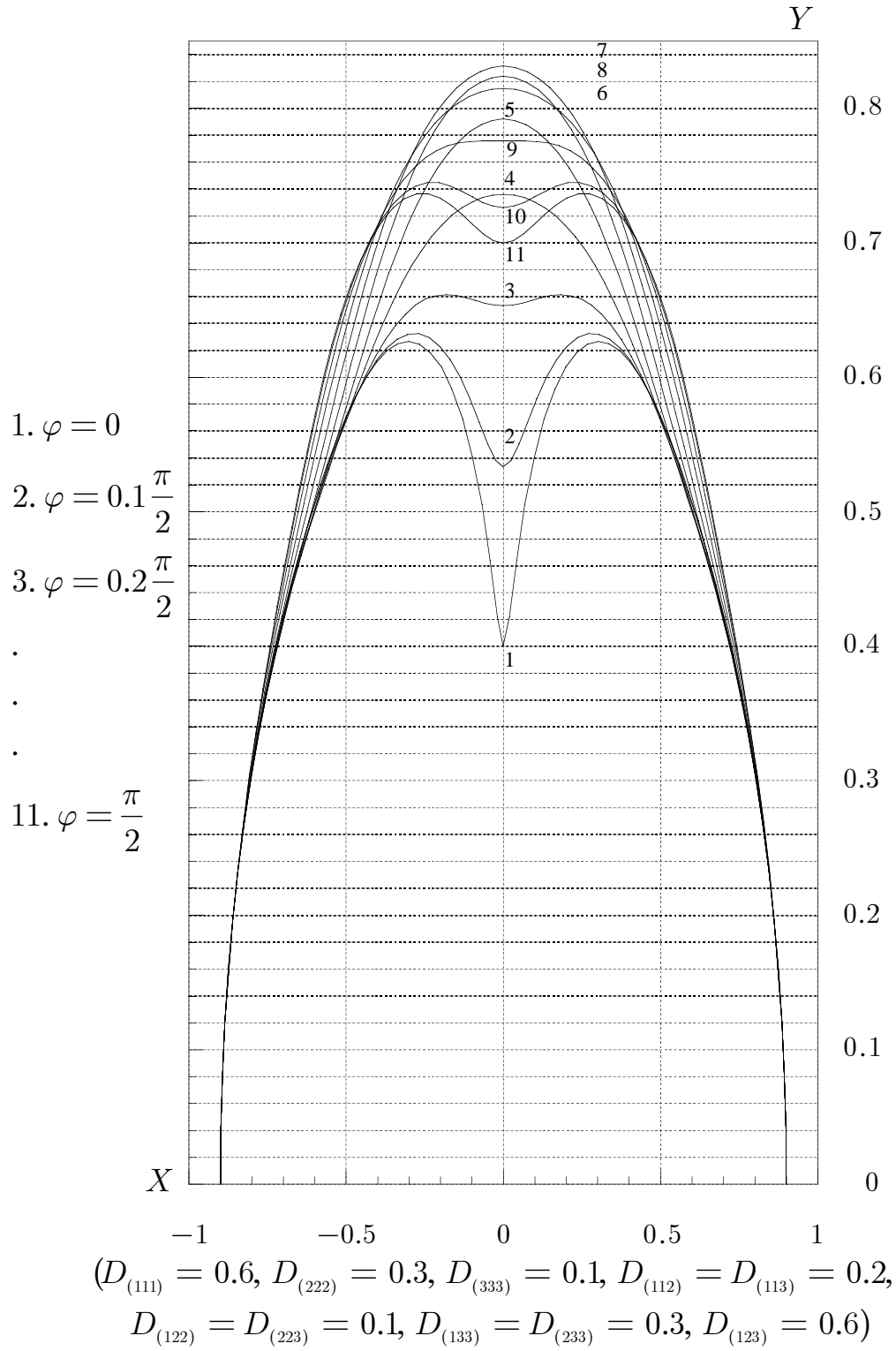


Рис. 4: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление шестого ранга)

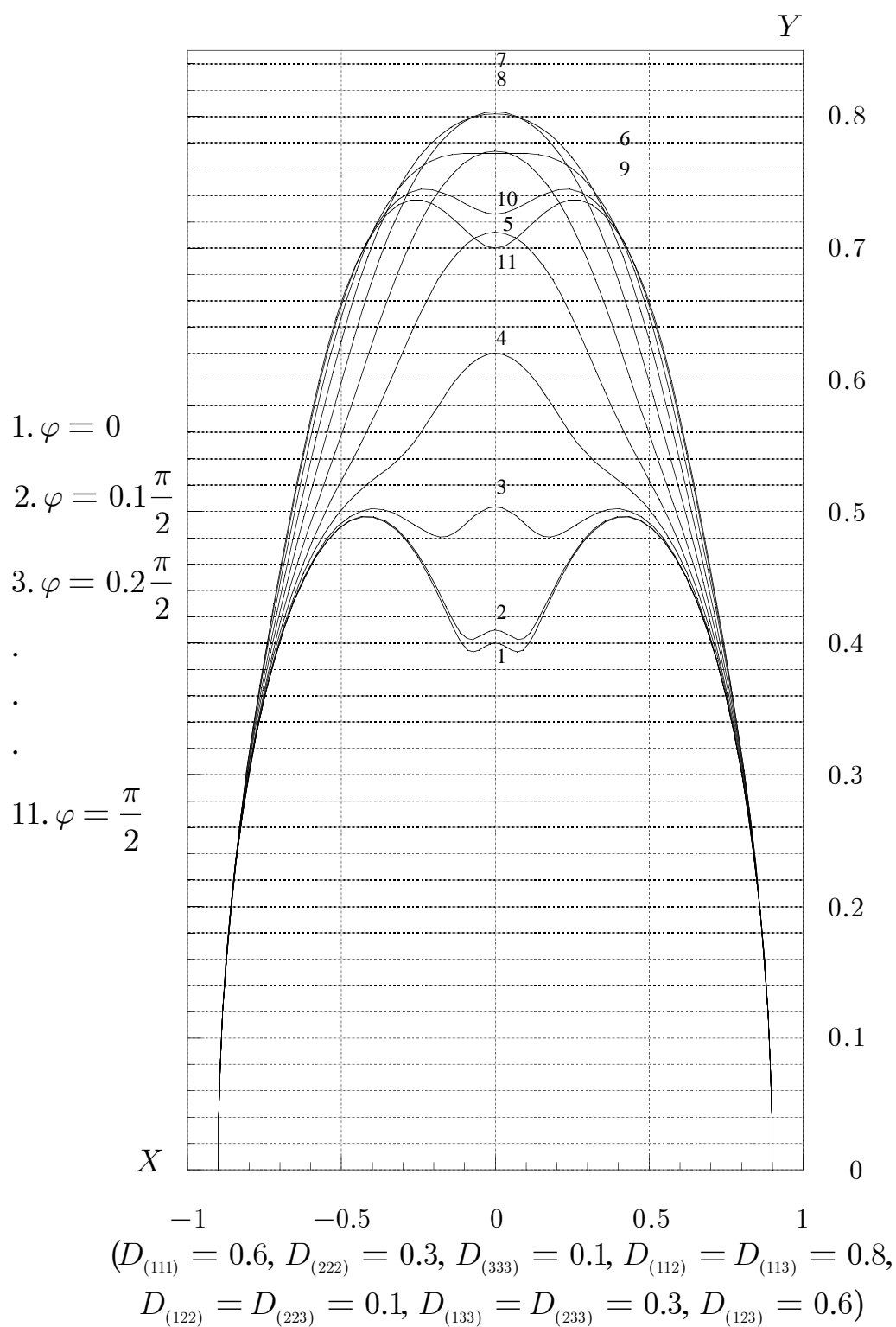


Рис. 5: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление шестого ранга)

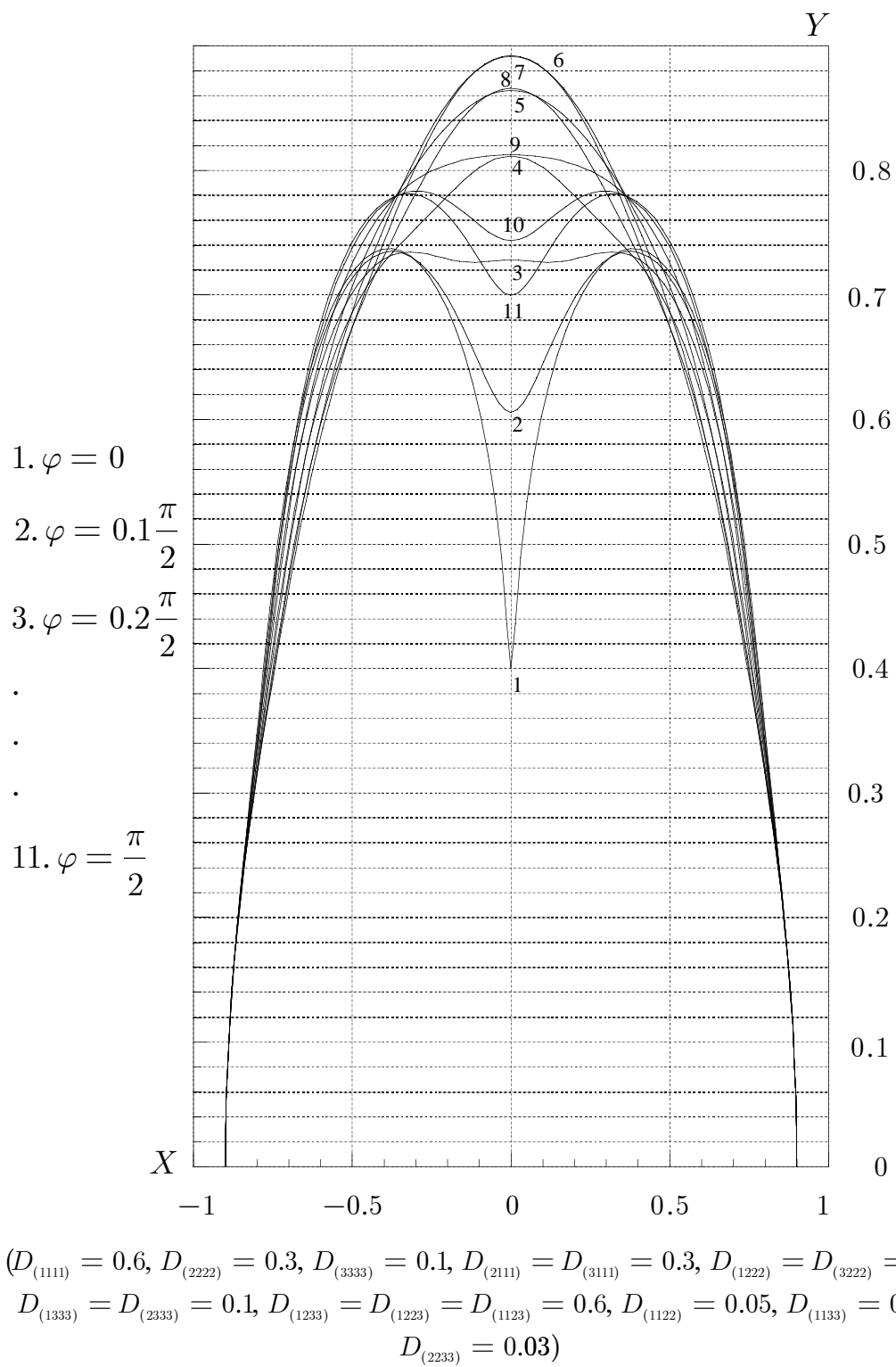


Рис. 6: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление восьмого ранга)

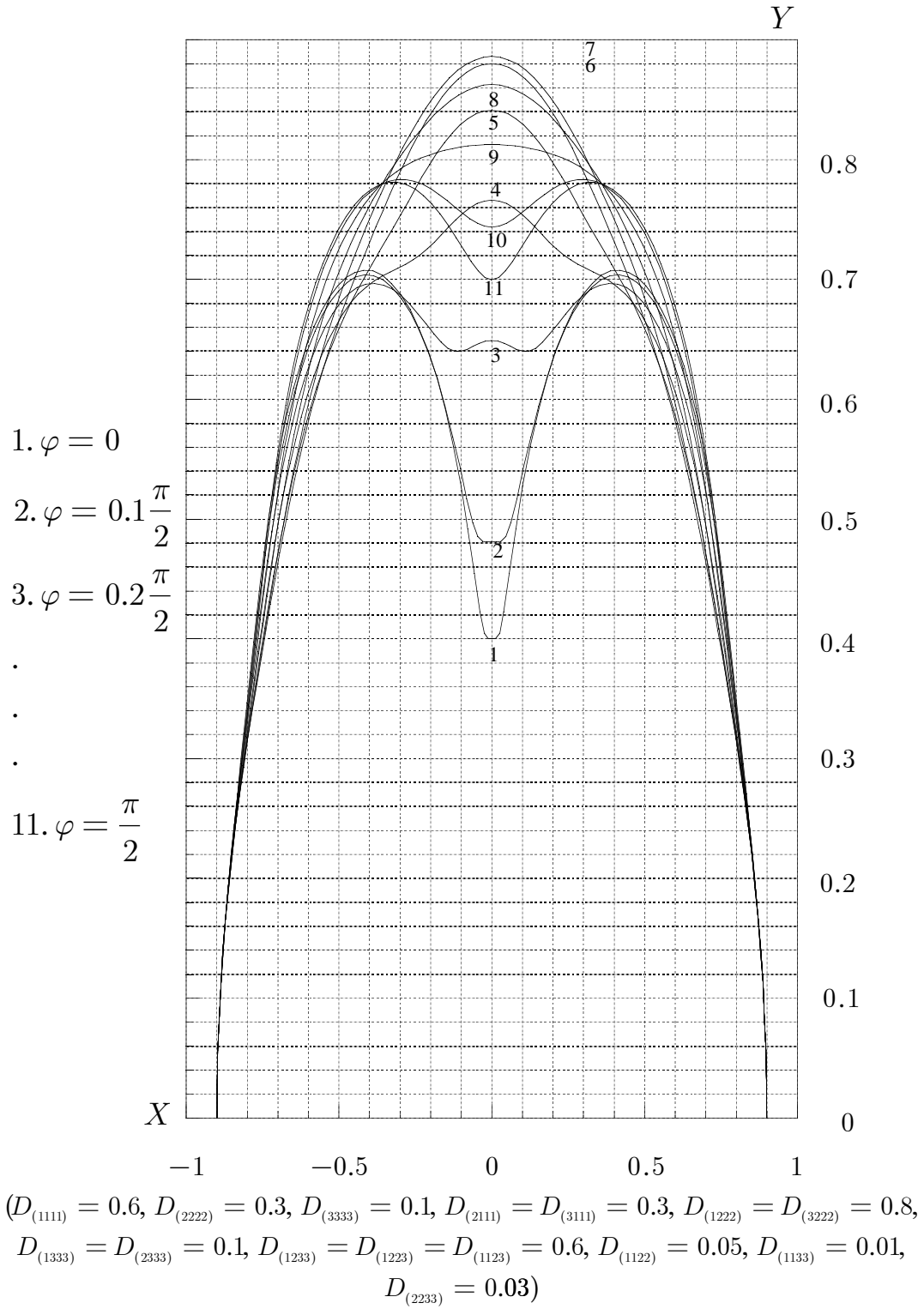


Рис. 7: Распределение поврежденности по ориентациям (тензорное представление восьмого ранга)

Обратная задача – вычисление тензора поврежденности по заданному распределению $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ – значительно сложнее. Её решение будет дано в п.5 в связи с гармоническим анализом тонкой структуры поврежденности.

I.4. Спектральные характеристики локальной поврежденности

Спектр поврежденности и главные направления поврежденности позволяют точно восстановить тонкую структуру поврежденности. В некоторых случаях однако такое детальное представление тонкой структуры поврежденности оказывается излишним, а иногда и просто невозможным. В этих случаях поврежденность может быть описана ”в среднем”.

Описание поврежденности в среднем мы начнем со средне-степенных сплошностей, вычисление которых, в силу структуры типичной аппроксимации локального распределения поврежденности (3.1), достаточно элементарно.

Последовательность средних сплошностей мы определяем следующим образом:

$$\bar{\varsigma} = \sqrt[2s]{\langle \varsigma^{2s} \rangle} = \sqrt[2s]{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^{2s}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi} \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.1)$$

Подынтегральное выражение в (4.1) в силу (3.8) оказывается полиномом от компонент единичной нормали к поверхности сферы, поэтому поверхностный интеграл может быть вычислен точно.

Вводя в формулу (4.1) сферические координаты θ, φ относительно главных осей поврежденности, получим

$$4\pi \bar{\varsigma}^{2s} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s=1}^3 C_{(k_1 k_2 \dots k_s)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \times \\ \times (\sin \theta)^{2(s'+s'')+1} (\cos \theta)^{2s'''} (\sin \varphi)^{2s''} (\cos \varphi)^{2s'}, \quad (4.2)$$

где

$$s' = s'(k_1, k_2, \dots, k_s), \quad s'' = s''(k_1, k_2, \dots, k_s), \quad s''' = s'''(k_1, k_2, \dots, k_s) \quad (4.3)$$

есть соответственно число единиц, двоек и троек в ряду чисел

$$k_1, k_2, \dots, k_s \quad (k_1, k_2, \dots, k_s = 1, 2, 3).$$

Используя следующие формулы

$$I_{2s'', 2s'} = \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^{2s''} (\cos \varphi)^{2s'} d\varphi = \frac{2\pi}{2^{s'+s''} s'!} \times$$

$$\underbrace{(2s'' - 1)(2s'' - 3) \dots 1}_{s''} \times \underbrace{\frac{1}{(s' + s'')(s' + s'' - 1) \dots (s' + 1)}}_{s''} \underbrace{(2s' - 1)(2s' - 3) \dots 1}_{s'}, \quad (4.4)$$

$$J_{2(s'+s'')+1, 2s'''} = \int_0^\pi (\sin \theta)^{2(s'+s'')+1} (\cos \theta)^{2s'''} d\theta =$$

$$= \frac{(s - s''')!}{s + 1/2} \cdot \frac{\Gamma(s''' + 1/2)}{\Gamma(s + 1/2)} =$$

$$= \frac{(s - s''')!(s''' - 1/2)(s''' - 3/2) \dots 1/2}{(s + 1/2)(s - 1/2)(s - 3/2) \dots 1/2}, \quad (4.5)$$

$$I_{0,0} = 2\pi, \quad I_{2s'',0} = I_{0,2s''} = \frac{2\pi}{2^{s''} s''!} \cdot (2s'' - 1)(2s'' - 3) \dots (2 \cdot 1 - 1),$$

$$J_{2(s'+s'')+1,0} = \frac{s!}{(s + 1/2)(s - 1/2)(s - 3/2) \dots 1/2}, \quad (4.6)$$

формулу (4.2) можно представить в виде

$$4\pi \bar{\zeta}^{2s} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s=1}^3 C_{(k_1 k_2 \dots k_s)} \omega_{k_1 k_2 \dots k_s}, \quad (4.7)$$

где коэффициенты $\omega_{k_1 k_2 \dots k_s}$ определены выражениями

$$\begin{aligned}
\omega_{k_1 k_2 \dots k_s} &= I_{2s'', 2s'} J_{2(s'+s'')+1, 2s'''} = \\
&= 2\pi \cdot \frac{(s-s''')!(s'''-1/2)(s'''-3/2) \dots 1/2}{(s+1/2)(s-1/2)(s-3/2) \dots 1/2} \times \\
&\quad \times \frac{(2s''-1)(2s''-3) \dots 1}{2^{s'+s''} s'! (s'+s'')(s'+s''-1) \dots (s'+1)} \times \\
&\quad \times (2s'-1)(2s'-3) \dots 1.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Коэффициенты $\omega_{k_1 k_2 \dots k_s}$, очевидно, симметричны

$$\omega_{i_1 i_2 \dots i_\sigma i_{\sigma+1} \dots i_s} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_{\sigma+1} i_\sigma \dots i_s} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s-1) \tag{4.9}$$

и определяют веса степеней главных сплошностей в смысле их вклада в величину средней сплошности.

Последовательность усредненных характеристик локального поврежденного состояния начинается со среднеквадратичной локальной сплошности

$$\bar{\varsigma} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 C_{(k)} \omega_k}. \tag{4.10}$$

Последнее соотношение, ввиду равенств

$$\omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \omega_{(3)}, \quad \omega_{(1)} = I_{0,2} J_{3,0} = \frac{4\pi}{3} \tag{4.11}$$

позволяет заключить, что

$$\bar{\varsigma} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{(1-D_{(1)})^2 + (1-D_{(2)})^2 + (1-D_{(3)})^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \|\mathbf{I} - \mathbf{D}\|. \tag{4.12}$$

Таким образом, норма тензора сплошности равна (с точностью до множителя) средне-квадратичному значению сплошности.

Следующий элемент последовательности средне-степенных локальных сплошностей есть:

$$\bar{\varsigma}^4 = \frac{1}{4\pi} (C_{(11)} \omega_{11} + C_{(22)} \omega_{22} + C_{(33)} \omega_{33} + 2C_{(12)} \omega_{12} + 2C_{(13)} \omega_{13} + 2C_{(23)} \omega_{23}). \tag{4.13}$$

В силу условий симметрии

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33}, \omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{13} \quad (4.14)$$

и равенств

$$\omega_{11} = I_{0,4}J_{5,0} = \frac{4\pi}{5}, \omega_{12} = I_{2,2}J_{5,0} = \frac{4\pi}{5 \cdot 3}, \quad (4.15)$$

находим, что

$$\bar{\varsigma}^4 = \frac{3}{3 \cdot 5} (C_{(11)} + C_{(22)} + C_{(33)}) + \frac{2}{3 \cdot 5} (C_{(12)} + C_{(13)} + C_{(23)}). \quad (4.16)$$

Для третьего члена последовательности (4.1) имеем выражение

$$\begin{aligned} 4\pi\bar{\varsigma}^6 = & C_{(111)}\omega_{111} + C_{(222)}\omega_{222} + C_{(333)}\omega_{333} + \\ & + 3C_{(112)}\omega_{112} + 3C_{(113)}\omega_{113} + 3C_{(122)}\omega_{122} + \\ & + 3C_{(133)}\omega_{133} + 3C_{(223)}\omega_{223} + 3C_{(233)}\omega_{233} + 6C_{(123)}\omega_{123}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

которое с помощью соотношений симметрии

$$\omega_{111} = \omega_{222} = \omega_{333}, \omega_{112} = \omega_{113} = \omega_{122} = \omega_{133} = \omega_{223} = \omega_{233}$$

и соотношений

$$\begin{aligned} \omega_{111} = I_{0,6}J_{7,0} = \frac{4\pi}{7}, \omega_{112} = I_{2,4}J_{7,0} = \frac{4\pi}{7 \cdot 5}, \\ \omega_{123} = I_{2,2}J_{5,2} = \frac{4\pi}{7 \cdot 5 \cdot 3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \bar{\varsigma}^6 = & \frac{5}{7 \cdot 5} (C_{(111)} + C_{(222)} + C_{(333)}) + \frac{2}{7 \cdot 5} C_{(123)} + \\ & + \frac{3}{7 \cdot 5} (C_{(112)} + C_{(113)} + C_{(122)} + C_{(133)} + C_{(223)} + C_{(233)}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Мы рассмотрим ещё один член последовательности (4.1):

$$\begin{aligned}
4\pi\bar{\varsigma}^8 = & C_{(1111)}\omega_{1111} + C_{(2222)}\omega_{2222} + C_{(3333)}\omega_{3333} + \\
& + 4C_{(1222)}\omega_{1222} + 4C_{(1333)}\omega_{1333} + 4C_{(2111)}\omega_{2111} + \\
& + 4C_{(3111)}\omega_{3111} + 4C_{(3222)}\omega_{3222} + 4C_{(2333)}\omega_{2333} + \\
& + 6C_{(1122)}\omega_{1122} + 6C_{(1133)}\omega_{1133} + 6C_{(2233)}\omega_{2233} + \\
& + 12C_{(1233)}\omega_{1233} + 12C_{(1223)}\omega_{1223} + 12C_{(1123)}\omega_{1123}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Условия симметрии (4.9) имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned}
\omega_{1111} &= \omega_{2222} = \omega_{3333}, \\
\omega_{1222} &= \omega_{1333} = \omega_{2111} = \\
&= \omega_{3111} = \omega_{2333} = \omega_{3222}, \\
\omega_{1122} &= \omega_{1133} = \omega_{2233}, \\
\omega_{1233} &= \omega_{1223} = \omega_{1123}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Учитывая также, что

$$\begin{aligned}
\omega_{1111} &= I_{0,8}J_{9,0} = \frac{4\pi}{9}, \quad \omega_{1222} = I_{6,2}J_{9,0} = \frac{4\pi}{9 \cdot 7}, \\
\omega_{1122} &= I_{4,4}J_{9,0} = \frac{3 \cdot 4\pi}{9 \cdot 7 \cdot 5}, \quad \omega_{1233} = I_{2,2}J_{5,4} = \frac{4\pi}{9 \cdot 7 \cdot 5},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

в силу (4.20), (4.21), (4.22) находим

$$\begin{aligned}
\bar{\varsigma}^8 = & \frac{1}{9} (C_{(1111)} + C_{(2222)} + C_{(3333)}) + \\
& + \frac{4}{9 \cdot 7} (C_{(1222)} + C_{(1333)} + C_{(2111)} + C_{(3111)} + C_{(3222)} + C_{(2333)}) + \\
& + \frac{6 \cdot 3}{9 \cdot 7 \cdot 5} (C_{(1122)} + C_{(1133)} + C_{(2233)}) + \frac{12}{9 \cdot 7 \cdot 5} (C_{(1233)} + C_{(1223)} + C_{(1123)}).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Таким образом, вычисленные выше значения коэффициентов $\omega_{k_1 k_2 \dots k_s}$ есть (по σ, k не суммировать, $\sigma, k = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
4\pi(\underbrace{\omega_{\sigma\sigma\cdots\sigma}_s})^{-1} &= 2s + 1, \\
4\pi(\omega_{kl})^{-1} &= 3 \cdot 5 & (k \neq l), \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma k})^{-1} &= 5 \cdot 7 & (k = 1, 2, 3, k \neq \sigma), \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma\sigma k})^{-1} &= 9 \cdot 7 & (k = 1, 2, 3, k \neq \sigma), \\
12\pi(\omega_{\sigma\sigma k k})^{-1} &= 9 \cdot 7 \cdot 5 & (k = 1, 2, 3, k \neq \sigma), \\
4\pi(\omega_{\sigma\sigma k l})^{-1} &= 9 \cdot 7 \cdot 5 & (k, l = 1, 2, 3, k \neq \sigma, l \neq \sigma, l \neq k), \\
4\pi(\omega_{123})^{-1} &= 3 \cdot 5 \cdot 7.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

”Вес” элемента спектра тем меньше, чем меньше повторяющихся индексов в его идентификации. Диагональный элемент спектра имеет наибольший собственный ”вес”, по сравнению с любым недиагональным.

Так как каждый из коэффициентов $\omega_{k_1 k_2 \dots k_s}$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$, то вклад каждого отдельного элемента спектра поврежденности в среднюю поврежденность также стремится к нулю с ростом плотности спектра. Предельный элемент последовательности (4.1)

$$\bar{\varsigma} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[2s]{\frac{1}{4\pi} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s=1}^3 C_{(k_1 k_2 \dots k_s)} \omega_{k_1 k_2 \dots k_s}} \tag{4.25}$$

есть средняя сплошность, соответствующая счетному спектру поврежденности.

I.5. Гармонический анализ тонкой структуры поврежденности

Выше было показано, что локальное состояние анизотропной поврежденности формально описывается с помощью скалярной функции $\varsigma = \varsigma(\Theta, \Phi)$, определенной на поверхности единичной сферы. Естественным в такой ситуации представляется использование чрезвычайно развитого Фурье-формализма [126], [159]. Разложения Фурье в ряды сферических гармоник, могут быть эффективно использованы для систематического описания тонкой структуры поврежденности [173], [137], [174]. Ниже приводятся основы гармонического формализма для двумерной сферы. Определенные на поверхности единичной сферы $0 \leq \Theta \leq \pi$, $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, $2l + 1$ функции

$$Y_l^{(k)}(\Theta, \Phi) = i^{-k} \sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}} P_l^{(k)}(\cos \Theta) e^{-ik\Phi} \quad (k = -l, \dots, l), \quad (5.1)$$

где

$$P_l^{(-m)}(\cos \Theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^{(m)}(\cos \Theta), \quad (5.2)$$

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} [(z^2 - 1)^l]$$

– полиномы Лежандра,

$$P_l^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dz^k} P_l(z)$$

– присоединенные функции Лежандра, называются сферическими гармониками Лапласа порядка l .

Отметим следующие очевидные равенства

$$Y_l^{(-m)} = (-1)^m Y_l^{(m)*} \quad (l = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots, l), \quad (5.3)$$

где здесь и в дальнейшем звездочкой обозначается комплексное сопряжение.

Сферические гармоники всех возможных порядков есть полная система функций на единичной сфере, ортогональная относительно стандартной поверхностной метрики, нормируя которую получим базис на поверхности единичной сферы:

$$\tilde{Y}_l^{(k)} = i^k \sqrt{2l+1} Y_l^{(k)} \quad (l = 0, 1, \dots; k = -l, \dots, l). \quad (5.4)$$

Любая функция $f(\Theta, \Phi)$ с конечным средне-квадратичным

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\Theta, \Phi)|^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi < \infty \quad (5.5)$$

может быть аппроксимирована в средне-квадратичном ряду Фурье

$$f(\Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_l^{(k)} \tilde{Y}_l^{(k)}(\Theta, \Phi), \quad (5.6)$$

где коэффициенты Фурье функции $f(\Theta, \Phi)$ вычисляются по формулам

$$a_l^{(k)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Theta, \Phi) \tilde{Y}_l^{(k)*}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi. \quad (5.7)$$

Отметим следующие равенства

$$a_l^{(-m)} = (-1)^m a_l^{(m)*} \quad (l = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots, l). \quad (5.8)$$

Средне-квадратичное и среднее значение функции вычисляются соответственно по формулам

$$\bar{f} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\Theta, \Phi)|^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi} = \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n |a_l^{(k)}|^2}, \quad (5.9)$$

$$\langle f \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Theta d\Phi = a_0^{(0)}. \quad (5.10)$$

Сферические гармоники (5.4) могут быть представлены многими различными формулами (см., например, [22]), из которых наиболее подходящей для последующего анализа является следующая

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{2l'}^{(k)} = \frac{(4l')!}{2^{2l'}(2l')!} \sqrt{\frac{4l'+1}{(2l'+k)!(2l'-k)!}} \sum_{p=0}^k (-i)^{k-p} C_k^p \times \\ \times \underbrace{n_1 \dots n_1}_p \underbrace{n_2 \dots n_2}_{k-p} \underbrace{n_3 \dots n_3}_{2l'-k}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$(k = 0, 1, \dots, 2l')$

где фигурные скобки обозначают девиаторную часть симметричного тензора четного ранга, определенную так, что свертка по любой паре индексов равна нулю:

$$\begin{aligned} A_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} = \gamma_0^{2r} A_{i_1 i_2 \dots i_{2r}} + \gamma_2^{2r} \delta_{(i_1 i_2} A_{i_3 i_4 \dots i_{2r}) j_1 j_1} + \dots + \\ + \gamma_{2r}^{2r} \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2r-1} i_{2r})} A_{j_1 j_1 j_2 j_2 \dots j_r j_r}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\gamma_{2\sigma}^{2r} = \frac{(-1)^\sigma C_{2r}^{2\sigma} C_{2r-1}^\sigma}{C_{4r-1}^{2\sigma}},$$

а круглые скобки, как обычно, обозначают симметризацию индексов:

$$A_{(i_1 i_2 \dots i_{2r})} = \frac{1}{(2r)!} \sum_P A_{i_{P(1)} i_{P(2)} \dots i_{P(2r)}}. \quad (5.13)$$

Здесь символ P обозначает произвольную перестановку множества натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, 2r$.

В частности, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} n_{\{ij\}} &= n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \\ n_{\{ijkl\}} &= n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{7} (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \\ &\quad + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k + \delta_{kl} n_i n_j) + \frac{1}{5 \cdot 7} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя формулу (5.11) в (5.7), получаем

$$\begin{aligned} a_{2l'}^{(k)} &= \frac{(4l')!}{2^{2l'} (2l')!} \sqrt{\frac{4l' + 1}{(2l' + k)! (2l' - k)!}} \sum_{p=0}^k i^{k-p} C_k^p \times \\ &\quad \times \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) \underbrace{n_1 \dots n_1}_p \underbrace{n_2 \dots n_2}_{k-p} \underbrace{n_3 \dots n_3}_{2l'-k} dS, \\ &\quad (k = 0, 1, \dots, 2l') \end{aligned} \quad (5.15)$$

где интегрирование производится по поверхности единичной сферы, dS – элемент поверхности единичной сферы.

Особый интерес, в силу выбора типичной аппроксимации ориентационного распределения поврежденности в форме (3.8), представляет гармонический анализ функции вида

$$f(\mathbf{n}) = c_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2s}}. \quad (5.16)$$

С этой целью мы используем подход, развитый в работах [137], [174].

Известно, что если функция $f(\Theta, \Phi)$ является целой рациональной функцией координат точки на поверхности единичной сферы, то она может быть

разложена в сумму конечного числа сферических гармоник [159]. Одно из таких возможных разложений имеет вид (см. [137]):

$$f(\mathbf{n}) = a_0 + a_{ij}n_{\{ij\}} + a_{ijkl}n_{\{ijkl\}} + \dots + a_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} n_{\{i_1 i_2 \dots i_{2s}\}}, \quad (5.17)$$

где тензоры $a_0, a_{ij}, a_{ijkl}, \dots, a_{i_1 i_2 \dots i_{2s}}$ симметричны и равны своим девиаторам (т.е. свертка тензора $a_{i_1 i_2 \dots i_{2r}}$ по любой паре индексов равна нулю). Каждое из слагаемых $a_{i_1 i_2 \dots i_{2r}} n_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}}$ в сумме (5.17) есть сферическая гармоника порядка $2r$ и, поэтому, все члены суммы ортогональны друг другу. Ясно однако, что сферические гармоники одного и того же порядка $n_{\{i'_1 i'_2 \dots i'_{2r}\}}$ и $n_{\{i''_1 i''_2 \dots i''_{2r}\}}$ не ортогональны друг другу, следовательно сумма (5.17) не является Фурье-разложением функции $f(\Theta, \Phi)$ в точном смысле этого термина. Ортогонализация $4r + 1$ независимых сферических гармоник $n_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}}$ возможна и имеет своим результатом систему сферических гармоник Лапласа $\tilde{Y}_{2r}^{(k)}$ ($k = 0, \pm 1, \dots, \pm 2r$).

Сравнивая разложения (5.16) и (5.17), получаем следующее равенство:

$$c_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} = a_{i_1 i_2 \dots i_{2s}} + \delta_{(i_1 i_2} a_{i_3 i_4 \dots i_{2s})} + \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} a_{i_5 i_6 \dots i_{2s})} + \dots + a_0 \delta_{(i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2s-1} i_{2s})}. \quad (5.18)$$

Следуя работе [137], введем тензор (см. формулу (5.15))

$$N_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} = \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} dS. \quad (5.19)$$

Подставляя в последнюю формулу разложение (5.17), находим

$$\begin{aligned} N_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} &= a_{j_1 j_2 \dots j_{2r}} \frac{1}{4\pi} \iint n_{\{j_1 j_2 \dots j_{2r}\}} n_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} dS = \\ &= a_{j_1 j_2 \dots j_{2r}} \langle n_{j_1} n_{j_2} \dots n_{j_{2r}} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2r}} \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Так как усреднение в этой формуле вычисляется явно в виде

$$\langle n_{j_1} n_{j_2} \dots n_{j_{2r}} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{2r}} \rangle = \frac{1}{4r + 1} \delta_{(j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \dots \delta_{j_{2r-1} j_{2r}} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2r-1} i_{2r}}), \quad (5.21)$$

то

$$N_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} = \frac{(2r)! 2^{2r}}{(4r+1)(4r)!} a_{j_1 j_2 \dots j_{2r}} \sum_P \delta_{\sigma_P(j_1 i_1)} \delta_{\sigma_P(j_2 i_2)} \dots \delta_{\sigma_P(j_{2r} i_{2r})}, \quad (5.22)$$

где символ σ_P обозначает перестановку пар индексов

$$\sigma_P : (j_1 i_1, j_2 i_2, \dots, j_{2r} i_{2r}) \rightarrow (j_{P(1)} i_{P(1)}, j_{P(2)} i_{P(2)}, \dots, j_{P(2r)} i_{P(2r)}). \quad (5.23)$$

После подсчета суммы в (5.22), получаем следующий результат

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{2r}} = (4r+1) 2^{-2r} C_{4r}^{2r} N_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}}. \quad (5.24)$$

Из формул (5.19) и (5.24) следует, что коэффициенты разложения (5.17) вычисляются по формулам, аналогичным классическим формулам гармонического анализа:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4\pi} \iint f(\mathbf{n}) dS, \quad a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5}{2} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{ij\}} dS, \\ a_{ijkl} &= \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \iint f(\mathbf{n}) n_{\{ijkl\}} dS, \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

что дает право называть их также Фурье-коэффициентами функции $f(\mathbf{n})$.

Коэффициенты Фурье (5.25) в отличие от (5.7) являются тензорами и, поэтому, легко пересчитываются при повороте осей координат. Отметим здесь также соотношение

$$a_{2l'}^{(k)} = \frac{(2l')!}{\sqrt{(4l'+1)(2l'+k)!(2l'-k)!}} \sum_{p=0}^k i^{k-p} C_k^p a_{\underbrace{1\dots 1}_p \underbrace{2\dots 2}_{k-p} \underbrace{3\dots 3}_{2l'-k}}, \quad (5.26)$$

$(k = 0, 1, \dots, 2l')$

следующее из (5.15) и (5.24).

Приведенный выше анализ позволяет представить тензорные меры поврежденности как результат некоторого усреднения ориентационного распределения поврежденности по сфере единичных направлений.

Рассмотрим сначала аппроксимацию второго порядка. В этом случае разложение (5.17) в сумму сферических гармоник имеет следующий вид:

$$\varsigma^2(\mathbf{n}) = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{C} + \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (5.27)$$

из которого, учитывая (5.14) и (5.25), находим

$$\mathbf{C} = \frac{3}{8\pi} \iint \varsigma^2(\mathbf{n}) [5\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}] dS. \quad (5.28)$$

Таким образом, тензор поврежденности второго ранга может быть вычислен, исходя из известного (в том числе определенного экспериментально) локального распределения поврежденности в зависимости от направления $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$, по формуле

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint \varsigma^2(\mathbf{n}) [5\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}] dS}. \quad (5.29)$$

Последняя формула в главных осях поврежденности приобретает следующий вид

$$D_{(\alpha)} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint \varsigma^2(\mathbf{n}) [5n_{(\alpha)}^2 - 1] dS} \quad (5.30)$$

и может быть использована для прямого подсчета главных поврежденностей, если ориентация главных осей поврежденности известна.

Ниже приводятся соответствующие результаты для аппроксимации четвертого порядка. Тензор поврежденности вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{D} = & \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 5}{2^2} \cdot \frac{1}{4\pi}} \times \\ & \times \sqrt[4]{\iint \varsigma^4(\mathbf{n}) \left[\frac{3 \cdot 7}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - 7 \text{sym}(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) + \frac{1}{2} \text{sym}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right] dS}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$\delta_{(ij}n_k n_l) = \frac{1}{6}(\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{ik}n_j n_l + \delta_{il}n_j n_k + \delta_{kl}n_i n_j + \delta_{jl}n_i n_k + \delta_{jk}n_i n_l),$$

$$\delta_{(ij}\delta_{kl)} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

В главных осях поврежденности формула (5.31) приобретает вид (по i, k не суммировать; $i, k = 1, 2, 3$)

$$D_{(ik)} = 1 - \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5}{2^2} \iota_{ik} \iint \varsigma^4(\mathbf{n}) \left[\frac{3 \cdot 7}{2} n_{(i)}^2 n_{(k)}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{7}{6} (\delta_{ii} n_{(k)}^2 + 4\delta_{ik} n_{(i)} n_{(k)} + \delta_{kk} n_{(i)}^2) + \frac{1}{6} (\delta_{ii}\delta_{kk} + 2\delta_{ik}\delta_{ik}) \right] dS \right\}^{1/4}, \quad (5.32)$$

где

$$\iota_{ik} = \delta_{ii}\delta_{kk} + 2\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl}$$

и ε_{ikl} есть кососимметричные ε -символы.

Поясним, что множитель ι_{ik} появляется ввиду следующего соотношения (по i, k не суммировать; $i, k = 1, 2, 3$)

$$C_{(ik)} = C_{(ikik)} + C_{(kii k)} + C_{(ikk i)}, \quad (5.33)$$

связывающего собственные значения и компоненты тензора \mathbf{C} в главных осях поврежденности. Ниже (см. вторую главу настоящей работы) мы рассмотрим расчет спектра поврежденности по формулам (5.32) для осесимметричной поврежденности.

I.6. Гармоническое описание состояния поврежденности. Соответствие между гармоническим и тензорным представлениями

Приведенные в п.5 результаты позволяют развить иной подход к представлению тонкой структуры анизотропного состояния поврежденности — гармоническое представление поврежденности.

Существо этого подхода состоит в описании актуального состояния поврежденности посредством Фурье-коэффициентов степеней ориентационного распределения поврежденности, разложенных в ряд по сферическим гармоникам Лапласа.

Аппроксимация порядка $2s$ распределения ς^{2s} разлагается в конечную сумму сферических гармоник Лапласа

$$\varsigma^{2s}(\Theta, \Phi) = c_0^{(0)} + \sum_{l=1}^s \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \quad (6.1)$$

определенных относительно выбранного репера $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ или в сумму вида

$$\varsigma^{2s}(\theta, \varphi) = c_{(0)}^{((0))} + \sum_{l=1}^s \sum_{k=-l}^l c_{(2l)}^{((2k))} \tilde{Y}_{(2l)}^{((2k))}(\theta, \varphi) \quad (6.2)$$

по сферическим гармоникам относительно главного триэдра поврежденности $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$.

Состояние поврежденности, поэтому, может быть представлено с помощью множества коэффициентов гармонического разложения (гармонический спектр поврежденности):

$$c_{2l}^{(k)} \quad (l = 1, 2, \dots, s; k = 0, \pm 1, \dots, \pm 2l). \quad (6.3)$$

Чтобы связать гармоническое и тензорное представления поврежденности заметим, что в силу формул (5.19) и (5.16) имеем

$$N_{\{i_1 i_2 \dots i_{2r}\}} = \Lambda_{i_1 i_2 \dots i_{2r} j_1 j_2 \dots j_{2s}} c_{j_1 j_2 \dots j_{2s}}, \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{i_1 i_2 \dots i_{2r} j_1 j_2 \dots j_{2s}} &= \frac{1}{2(r+s)+1} \delta_{(j_1 j_2 \dots j_{2s-1} j_{2s}} \delta_{i_1 i_2 \dots i_{2r-1} i_{2r})} + \\ &+ \frac{\gamma_2^{2r}}{(2r)!(2(r+s-1)+1)} \times \\ &\times \sum_P \delta_{i_{P(1)} i_{P(2)}} \delta_{(j_1 j_2 \dots j_{2s-1} j_{2s}} \delta_{i_{P(3)} i_{P(4)}} \dots \delta_{i_{P(2r-1)} i_{P(2r)}} + \dots + \\ &+ \frac{\gamma_{2r}^{2r}}{2s+1} \delta_{(i_1 i_2 \dots i_{2r-1} i_{2r})} \delta_{(j_1 j_2 \dots j_{2s-1} j_{2s})}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Подставляя соотношение (6.4) в (5.15) приходим к уравнению

$$a_{2l'}^{(k)} = \frac{(4l')!}{2^{2l'}(2l')!} \sqrt{\frac{4l' + 1}{(2l' + k)!(2l' - k)!}} \sum_{p=0}^k i^{k-p} C_k^p \times$$

$$\times \Lambda_{\underbrace{11\dots 1}_p \underbrace{22\dots 2}_{k-p} \underbrace{33\dots 3}_{2l'-k} j_1 j_2 \dots j_{2s}} c_{j_1 j_2 \dots j_{2s}}, \quad (6.6)$$

которое позволяет конвертировать одно представление поврежденности в другое.

Для аппроксимации второго порядка

$$\varsigma^2 = C_{ij} n_i n_j \quad (6.7)$$

разложение (6.1) имеет вид

$$\varsigma^2(\Theta, \Phi) = c_0^{(0)} + c_2^{(-2)} \tilde{Y}_2^{(-2)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(-1)} \tilde{Y}_2^{(-1)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(0)} \tilde{Y}_2^{(0)}(\Theta, \Phi) +$$

$$+ c_2^{(1)} \tilde{Y}_2^{(1)}(\Theta, \Phi) + c_2^{(2)} \tilde{Y}_2^{(2)}(\Theta, \Phi), \quad (6.8)$$

где

$$c_2^{(-1)} = -c_2^{(1)*}, \quad c_2^{(-2)} = c_2^{(2)*}. \quad (6.9)$$

Разрешая систему линейных уравнений (6.6) для $s = 1$, находим

$$C_{11} = -\frac{\sqrt{5}}{2} c_2^{(0)} + \frac{\sqrt{30}}{4} (c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) + c_0^{(0)},$$

$$C_{22} = -\frac{\sqrt{5}}{2} c_2^{(0)} - \frac{\sqrt{30}}{4} (c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) + c_0^{(0)},$$

$$C_{33} = \sqrt{5} c_2^{(0)} + c_0^{(0)},$$

$$C_{12} = \frac{\sqrt{30}}{4i} (c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}),$$

$$C_{13} = \frac{15}{2\sqrt{30}} (c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}),$$

$$C_{23} = \frac{15}{2i\sqrt{30}} (c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}). \quad (6.10)$$

В главных осях поврежденности соответственно имеем:

$$\varsigma^2(\theta, \varphi) = c_{(0)}^{((0))} + c_{(2)}^{((0))} \tilde{Y}_{(2)}^{((0))}(\theta, \varphi) + c_{(2)}^{((2))} \left(\tilde{Y}_{(2)}^{((2))}(\theta, \varphi) + \tilde{Y}_{(2)}^{((-2))}(\theta, \varphi) \right), \quad (6.11)$$

$$c_{(2)}^{((1))} = c_{(2)}^{((-1))} = 0, \quad c_{(2)}^{((2))} = c_{(2)}^{((-2))}, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} C_{(1)} &= -\frac{\sqrt{5}}{2} c_{(2)}^{((0))} + \frac{\sqrt{30}}{2} c_{(2)}^{((2))} + c_{(0)}^{((0))}, \\ C_{(2)} &= -\frac{\sqrt{5}}{2} c_{(2)}^{((0))} - \frac{\sqrt{30}}{2} c_{(2)}^{((2))} + c_{(0)}^{((0))}, \\ C_{(3)} &= \sqrt{5} c_{(2)}^{((0))} + c_{(0)}^{((0))}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Соответствующие формулы для аппроксимации четвертого порядка приводятся ниже: в произвольно ориентированных осях

$$\varsigma^4 = C_{ijkl} n_i n_j n_k n_l, \quad (6.14)$$

$$\varsigma^4(\Theta, \Phi) = c_0^{(0)} + \sum_{l=1,2} \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} C_{1111} &= -\frac{3\sqrt{10}}{8} (c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{3\sqrt{70}}{16} (c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) + \frac{\sqrt{30}}{4} (c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{5}}{2} c_2^{(0)} + c_0^{(0)} + \frac{9}{8} c_4^{(0)}, \\ C_{2222} &= \frac{3\sqrt{10}}{8} (c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{3\sqrt{70}}{16} (c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) - \frac{\sqrt{30}}{4} (c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{5}}{2} c_2^{(0)} + c_0^{(0)} + \frac{9}{8} c_4^{(0)}, \\ C_{3333} &= 3c_4^{(0)} + \sqrt{5} c_2^{(0)} + c_0^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1112} &= \frac{3\sqrt{70}}{16i} (c_4^{(4)} - c_4^{(-4)}) - \frac{3\sqrt{10}}{16i} (c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{8i} (c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}), \\ C_{1113} &= \frac{3\sqrt{35}}{16} (c_4^{(3)} - c_4^{(-3)}) - \frac{9\sqrt{5}}{16} (c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4\sqrt{30}} (c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}), \\ C_{1222} &= -\frac{3\sqrt{70}}{16i} (c_4^{(4)} - c_4^{(-4)}) - \frac{3\sqrt{10}}{16i} (c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{8i} (c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2223} &= -\frac{3\sqrt{35}}{16i}(c_4^{(3)} + c_4^{(-3)}) - \frac{9\sqrt{5}}{16i}(c_4^{(1)} + c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}), \\
C_{2333} &= \frac{3\sqrt{5}}{4i}(c_4^{(1)} + c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}), \\
C_{1333} &= \frac{3\sqrt{5}}{4}(c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{4\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}), \\
C_{1122} &= -\frac{3\sqrt{70}}{16}(c_4^{(4)} + c_4^{(-4)}) + \frac{3}{8}c_4^{(0)} - \frac{\sqrt{5}}{6}c_2^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)}, \\
C_{1133} &= \frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{24}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \frac{3}{2}c_4^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_2^{(0)}, \\
C_{2233} &= -\frac{3\sqrt{10}}{8}(c_4^{(2)} + c_4^{(-2)}) - \frac{\sqrt{30}}{24}(c_2^{(2)} + c_2^{(-2)}) - \frac{3}{2}c_4^{(0)} + \frac{1}{3}c_0^{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_2^{(0)}, \\
C_{1123} &= \frac{3\sqrt{35}}{16i}(c_4^{(3)} + c_4^{(-3)}) - \frac{3\sqrt{5}}{16i}(c_4^{(1)} + c_4^{(-1)}) + \frac{15}{12i\sqrt{30}}(c_2^{(1)} + c_2^{(-1)}), \\
C_{1223} &= -\frac{3\sqrt{35}}{16}(c_4^{(3)} - c_4^{(-3)}) - \frac{3\sqrt{5}}{16}(c_4^{(1)} - c_4^{(-1)}) + \frac{15}{12\sqrt{30}}(c_2^{(1)} - c_2^{(-1)}), \\
C_{1233} &= \frac{3\sqrt{10}}{8i}(c_4^{(2)} - c_4^{(-2)}) + \frac{\sqrt{30}}{24i}(c_2^{(2)} - c_2^{(-2)}),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

в главных осях поврежденности

$$\begin{aligned}
\varsigma^4(\theta, \varphi) &= c_{(0)}^{((0))} + c_{(2)}^{((0))}\tilde{Y}_{(2)}^{((0))}(\theta, \varphi) + c_{(4)}^{((0))}\tilde{Y}_{(4)}^{((0))}(\theta, \varphi) + \\
&+ c_{(2)}^{((2))}\left(\tilde{Y}_{(2)}^{((2))}(\theta, \varphi) + \tilde{Y}_{(2)}^{((-2))}(\theta, \varphi)\right) + c_{(4)}^{((2))}\left(\tilde{Y}_{(4)}^{((2))}(\theta, \varphi) + \tilde{Y}_{(4)}^{((-2))}(\theta, \varphi)\right) + \\
&+ c_{(4)}^{((4))}\left(\tilde{Y}_{(4)}^{((4))}(\theta, \varphi) + \tilde{Y}_{(4)}^{((-4))}(\theta, \varphi)\right),
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
c_{(2)}^{((2))} &= c_{(2)}^{((-2))}, \\
c_{(2)}^{((1))} &= c_{(2)}^{((-1))} = 0, \\
c_{(4)}^{((4))} &= c_{(4)}^{((-4))}, \\
c_{(4)}^{((2))} &= c_{(4)}^{((-2))}, \\
c_{(4)}^{((3))} &= c_{(4)}^{((-3))} = c_{(4)}^{((1))} = c_{(4)}^{((-1))} = 0,
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
C_{(11)} &= -\frac{3\sqrt{10}}{4}c_{(4)}^{((2))} + \frac{3\sqrt{70}}{8}c_{(4)}^{((4))} + \frac{\sqrt{30}}{2}c_{(2)}^{((2))} - \frac{\sqrt{5}}{2}c_{(2)}^{((0))} + c_{(0)}^{((0))} + \frac{9}{8}c_{(4)}^{((0))}, \\
C_{(22)} &= \frac{3\sqrt{10}}{4}c_{(4)}^{((2))} + \frac{3\sqrt{70}}{8}c_{(4)}^{((4))} - \frac{\sqrt{30}}{2}c_{(2)}^{((2))} - \frac{\sqrt{5}}{2}c_{(2)}^{((0))} + c_{(0)}^{((0))} + \frac{9}{8}c_{(4)}^{((0))}, \\
C_{(33)} &= 3c_{(4)}^{((0))} + \sqrt{5}c_{(2)}^{((0))} + c_{(0)}^{((0))},
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}C_{(12)} &= -\frac{3\sqrt{70}}{8}c_{(4)}^{((4))} + \frac{3}{8}c_{(4)}^{((0))} - \frac{\sqrt{5}}{6}c_{(2)}^{((0))} + \frac{1}{3}c_{(0)}^{((0))}, \\
\frac{1}{3}C_{(13)} &= \frac{3\sqrt{10}}{4}c_{(4)}^{((2))} + \frac{\sqrt{30}}{12}c_{(2)}^{((2))} - \frac{3}{2}c_{(4)}^{((0))} + \frac{1}{3}c_{(0)}^{((0))} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_{(2)}^{((0))}, \\
\frac{1}{3}C_{(23)} &= -\frac{3\sqrt{10}}{4}c_{(4)}^{((2))} - \frac{\sqrt{30}}{12}c_{(2)}^{((2))} - \frac{3}{2}c_{(4)}^{((0))} + \frac{1}{3}c_{(0)}^{((0))} + \frac{\sqrt{5}}{12}c_{(2)}^{((0))}.
\end{aligned}$$

Вопрос об адекватности гармонического представления реальных ориентационных распределений поврежденности исследован в приложении к диссертационной работе.

Точное представление ориентационного распределения поврежденности

$$\begin{aligned}
\varsigma(\Theta, \Phi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[2s]{\underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{2s} \underbrace{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \dots \otimes \mathbf{n}}_s} = \\
&= \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt[2s]{\sum_{l=0}^s \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi)}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

соответствует полному счетному гармоническому спектру поврежденности и тензору поврежденности бесконечного ранга.

В заключении рассмотрим процедуру преобразования гармонического разложения распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ в результате поворота репера $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ в главные оси поврежденности.

Указанная проблема решается с помощью соответствующей формулы преобразования для сферических гармоник Лапласа [115]:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_n^{(k)}(\Theta, \Phi) = \sum_{m=-n}^n \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{n+m}} \sqrt{\frac{(n-k)!(n+k)!}{(n-m)!(n+m)!}} \times \\ \times S_{2n}^{n+k, n+m}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \tilde{Y}_{(n)}^{(m)}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (6.21)$$

где

$$\begin{aligned} S_n^{k,l}(h) = (-1)^k (\eta_4 + i\eta_1)^{n-k-l} (\eta_3 + i\eta_2)^{k-l} P_l^{(n-k-l, k-l)}(\eta_3^2 + \eta_2^2 - \eta_4^2 - \eta_1^2), \\ (n \geq k+l) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} S_n^{k,l}(h) = (-1)^{n-l} (\eta_4 - i\eta_1)^{k+l-n} (\eta_3 - i\eta_2)^{l-k} P_{n-l}^{(l+k-n, l-k)}(\eta_3^2 + \eta_2^2 - \eta_4^2 - \eta_1^2), \\ (n < k+l) \end{aligned}$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = 2^{-n} \sum_{m=0}^n C_{n+\alpha}^m C_{n+\beta}^{n-m} (z-1)^{n-m} (z+1)^m \quad (6.23)$$

есть полиномы Якоби, а четырехмерный вектор η имеет компоненты

$$\eta = (\cos a_1 \sin(\psi/2), \cos a_2 \sin(\psi/2), \cos a_3 \sin(\psi/2), \cos(\psi/2)) \quad (6.24)$$

и определяет преобразование вращения \mathbf{O} базиса $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$ в $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ посредством следующих соотношений

$$\mathbf{O} = \mathbf{I} - 2\eta_4 \mathbf{A} + 2\mathbf{A}^2, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 0 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.26)$$

Мы использовали обозначение a_j для угла между осью вращения и вектором \mathbf{i}_j , а также обозначение ψ для угла вращения. Обращение формулы (6.21) имеет, очевидно, вид

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{(n)}^{((k))}(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n \frac{C_{2n}^{m+k}}{C_{2n}^{n+m}} \sqrt{\frac{(n-k)! (n+k)!}{(n-m)!(n+m)!}} \times \\ \times S_{2n}^{n+k, n+m}(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \eta_4) \tilde{Y}_n^{(m)}(\Theta, \Phi). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Сравнивая гармонические разложения

$$\begin{aligned} \varsigma^{2s}(\Theta, \Phi) &= \sum_{l=0}^s \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \\ \varsigma^{2s}(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^s \sum_{p=-l}^l c_{(2l)}^{((2p))} \tilde{Y}_{(2l)}^{((2p))}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.28)$$

с помощью формул (6.21) и (6.27) получаем следующие соотношения, связывающие гармонические спектры поврежденности

$$c_{2l}^{(m)} = \sum_{p=-l}^l c_{(2l)}^{((2p))} \frac{C_{4l}^{2(l+p)}}{C_{4l}^{2l+m}} \sqrt{\frac{2(l-p)! 2(l+p)!}{(2l-m)!(2l+m)!}} S_{4l}^{2(l+p), 2l+m}(-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3, \eta_4), \quad (6.29)$$

$$c_{(2l)}^{((2p))} = \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \frac{C_{4l}^{2l+k}}{C_{4l}^{2(l+p)}} \sqrt{\frac{(2l-k)! (2l+k)!}{2(l-p)! 2(l+p)!}} S_{4l}^{2l+k, 2(l+p)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4). \quad (6.30)$$

Как можно заметить из приведенных формул, закон преобразования гармонического спектра поврежденности при повороте осей координат гораздо сложнее тензорного. Тем не менее коэффициенты Фурье (число которых, очевидно, зависит от желаемой точности представления тонкой структуры поврежденности) с успехом могут быть использованы не только для математического представления поврежденности, но также и для кинетического и реологического моделирования роста поврежденности в твердом теле. Тензоры поврежденности невысоких рангов (второго, четвертого) конечно же не могут правильно представлять сложные, хаотические и разрывные

структуры материальной поврежденности. Представление разрывных распределений поврежденности на сфере единичных направлений может потребовать аппроксимации чрезвычайно большим числом сферических гармоник. Поэтому, гармоническое представление поврежденности достаточно длинным отрезком ряда Фурье в этих случаях придется вводить в определяющие и кинетические уравнения поврежденности, которые при этом теряют свои тензорные свойства.

Глава II. ТОЧНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

В этой главе работы приводится анализ анизотропного состояния поврежденности в среднем.

Рассматриваются усредненные характеристики трехмерного анизотропного состояния поврежденности, определенные на основе аппроксимаций различных порядков ориентационного распределения поврежденности. Усреднение по всем ориентациям в пространстве тонкой структуры поврежденности, как показано, приводит к необходимости вычисления эллиптических интегралов и довольно сложной зависимости средней поврежденности от спектра поврежденности. Подробно рассматриваются различные интегральные представления средней поврежденности и наиболее оптимальные быстро сходящиеся ряды для ее вычисления. Приводятся результаты численного анализа средней поврежденности в зависимости от состава спектра поврежденности. Вводятся понятия об амплитудном и обратном амплитудном спектрах поврежденности, которые позволяют дать первичную классификацию анизотропии состояний поврежденности. Получены формулы для вычисления средней поврежденности в случае узкополосных и вырожденных обратных амплитудных спектров поврежденности. Приводится техника расчета осесимметричной и двумерной поврежденности. Показано, что осесимметричная поврежденность обладает вырожденным обратным амплитудным спектром.

Установлено, что усредненные по всем ориентациям в пространстве значения анизотропного распределения поврежденности обладают одним важным экстремальным свойством: средняя сплошность (отнесенная к максимальной главной сплошности) стремится принять наибольшее значение при выравнивании элементов спектра поврежденности, т.е. при эволюции к изотропному распределению.

Эта часть работы, как и первая глава, может рассматриваться как один из возможных общих подходов к представлению анизотропного состояния поврежденности, а результаты – применены к анализу любой скалярной

физической характеристики непрерывно распределенной по ориентациям. Изложение данной главы в основном следует статье [81].

II.1. Введение

Аккуратное аналитическое описание общего анизотропного состояния поврежденности (тонкой структуры поврежденности) – довольно сложная проблема, представляющая значительные трудности как в формальном, так и в вычислительном плане. Так, анализ поврежденного состояния в среднем сталкивается с необходимостью исследования довольно сложных интегральных представлений, зависящих от большого количества параметров, что естественно затрудняет их использование при расчетах напряженно-деформированного состояния тел с распределенными внутренними дефектами.

Однако быстрое совершенствование компьютерных систем и технологий открывает возможность отхода от классических схем (которые в настоящее время представляются слишком упрощенными) описания поврежденного состояния.

Низшие аппроксимации (второго и четвертого порядков) тонкой структуры поврежденности, несмотря на их вероятную недостаточность для анализа тонкой структуры поврежденности, часто всё же могут представлять наблюдаемые в экспериментах поля трещин или, например, довольно сложные межзеренные структуры металлов в условиях ползучести.

В этой главе работы приводится анализ анизотропного состояния поврежденности в среднем.

Усреднение поврежденности, представленной тензором поврежденности второго ранга, сравнительно элементарно и исчерпывающим образом дано в п.2. Конечные выражения здесь довольно просты и симметричны, хотя и содержат элементы формализма эллиптических функций.

Ситуация значительно усложняется при переходе к тензорному представлению четвертого ранга. Расчетные формулы (п.3) содержат полную эллиптическую тригонометрию. Сложные интегральные формы последовательно приводятся к каноническому виду, сводясь в конце концов к трем каноническим эллиптическим интегралам Лежандра. В процессе приведения к каноническим эллиптическим интегралам появляется возможность классифицировать спектры поврежденности, ввести понятия амплитудного спектра, узкополосного и широкополосного спектров, вырожденного спек-

тра и получить приближенные формулы для быстрого и точного расчета поврежденного состояния в среднем.

Значительное место в работе уделено вычислительному аспекту (п.4), чем объясняется интенсивное использование различных интегральных формул и Фурье-разложений [119], [99], [115]. Ряды Фурье (практически не имеющие альтернативы при численной реализации, так как расчет некоторых средних значений требует около месяца непрерывных вычислений на самых современных компьютерах) предлагаются для вычисления средней поврежденности и сходятся, как показано в работе, чрезвычайно быстро, позволяя эффективно рассчитывать средние значения поврежденности.

Подробный расчет осесимметричного состояния анизотропной поврежденности приводится в п.5. Осесимметричная поврежденность индуцируется, например, при продольном сжатии цилиндрических образцов. Вычисление тензора поврежденности четвертого ранга для такого рода состояний поврежденности (особенно когда поврежденность распределена по ориентациям кусочно-разрывно), поэтому, представляет значительный интерес. Как будет показано, осесимметричная поврежденность обладает вырожденным обратным амплитудным спектром.

Двумерное распределение поврежденности труднее получить экспериментально, но конечно же проще описать формально. Тензорное представление четвертого ранга двумерной поврежденности обсуждается в п.6. В качестве примера мы приводим расчет двумерной поврежденности, индуцированной сжатием образца кварцита [121]. Результаты расчета могут быть сравнены с [157].

В п.7. рассматриваются экстремальные свойства анизотропного распределения поврежденности. Анализ проводится с помощью полученных в пп.2 и 4 картин разброса значений усредненной по ориентациям в пространстве поврежденности, обусловленного как вкладом недиагональных элементов спектра поврежденности, так и различием элементов диагонального спектра. Изотропное распределение поврежденности характеризуется максимальной сплошностью, при сравнении с анизотропными распределениями, нормированными на максимальную сплошность. Полученный результат, не смотря на свою простоту, приводит к важным следствиям при исследовании термодинамики состояния поврежденности и будет использован в последующих главах для исследования экстремальных (по энергии) состояний поврежденности и формулировке универсального критерия эволюции поврежденности.

II.2. Усреднение второго порядка

Общий подход к представлению тонкой структуры поврежденности с помощью симметричных тензорных мер уже обсуждался в первой главе настоящей работы.

Последовательность аппроксимаций (I.3.2) локального распределения поврежденности может быть использована для представления состояния поврежденности в среднем. Средние значения распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ (ориентационное распределение сплошности) по поверхности единичной сферы являются также и начальным шагом Фурье-анализа поврежденного состояния.

Вычислим сначала среднее значение сплошности для низшей аппроксимации поврежденного состояния. Указанное среднее значение представим сначала как повторный интеграл

$$\langle \varsigma \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{C_{(1)} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + C_{(2)} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + C_{(3)} \cos^2 \theta} d\theta d\varphi. \quad (2.1)$$

Интегрируя по переменной φ , находим (см. [119], формула 2.597.2)

$$\langle \varsigma \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mathbf{E}(k) \sqrt{(C_{(3)} - C_{(2)})\tau^2 + C_{(2)}} d\tau, \quad (2.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{(1 - \tau^2)(C_{(2)} - C_{(1)})}{(C_{(3)} - C_{(2)})\tau^2 + C_{(2)}}},$$

$\mathbf{E}(k)$ есть полный эллиптический интеграл второго рода, k – модуль эллиптического интеграла.

Численный анализ интеграла (2.2) эффективно выполняется с помощью степенного разложения полного эллиптического интеграла второго рода в ряд ($0 \leq k^2 \leq 1$)

$$\mathbf{E}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}. \quad (2.3)$$

Заметим, что интеграл в правой части формулы (2.2) зависит от трех параметров. Ясно, однако, исходя из общих соображений симметрии, что можно упростить анализ, уменьшив число параметров до двух, если ввести отношения величин $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$.

После простых преобразований формула (2.2) может быть приведена к виду

$$\frac{\pi \langle \varsigma \rangle}{2\sqrt{C}} = I(p_1, p_2), \quad (2.4)$$

где введены следующие обозначения:

$$I(p_1, p_2) = \int_0^1 \sqrt{(1-p_2)\tau^2 + p_2} \mathbf{E}(\sqrt{p_2(1-\tau^2)(1-p_1)((1-p_2)\tau^2 + p_2)^{-1}}) d\tau, \quad (2.5)$$

$$p_1 = \frac{C_{(1)}}{C_{(2)}}, \quad p_2 = \frac{C_{(2)}}{C_{(3)}}, \quad C = C_{(3)}. \quad (2.6)$$

В силу неравенств (I.2.14) переменные p_1 , p_2 изменяются в пределах отрезка $[0,1]$.

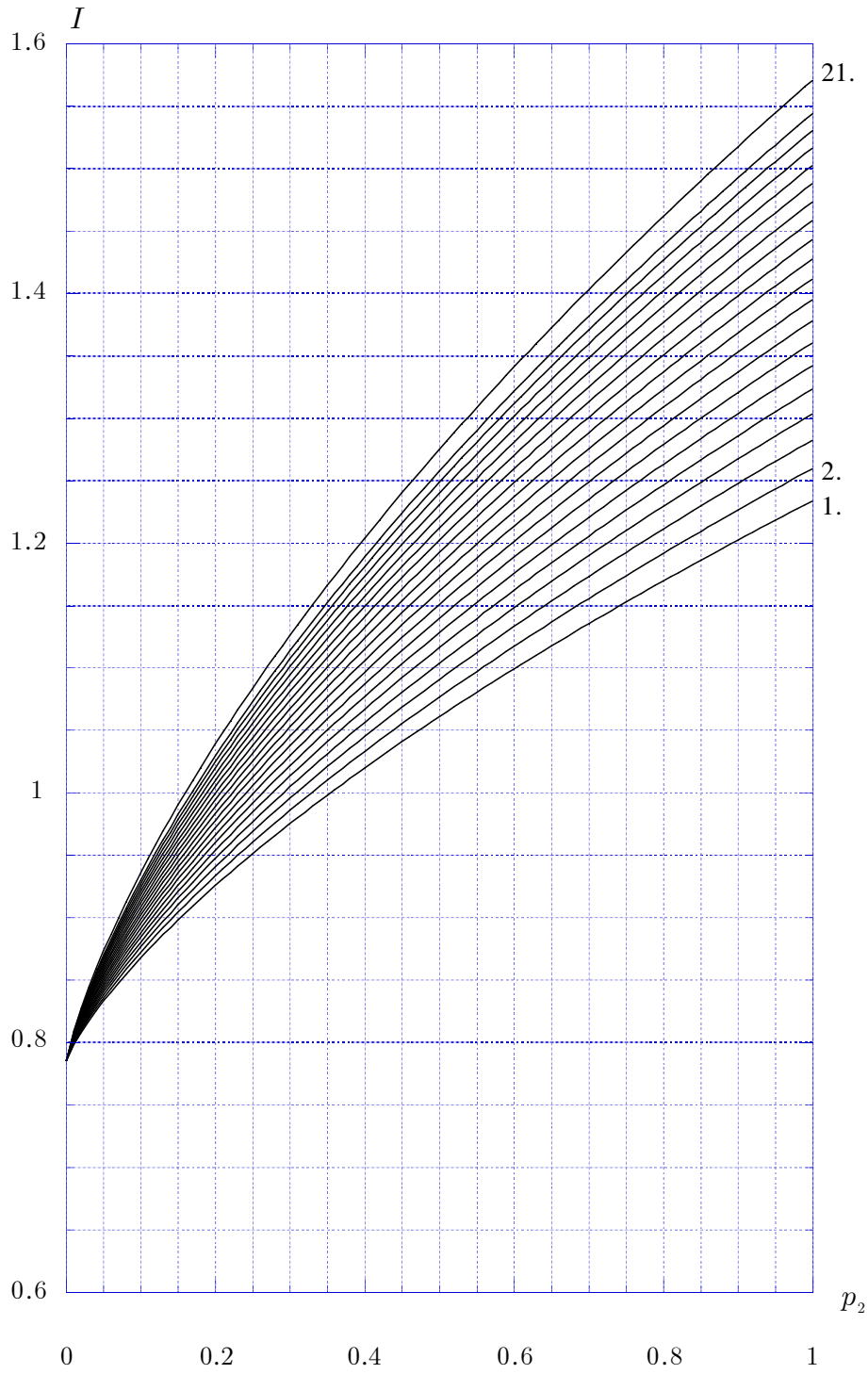
Вводя в соотношения (2.6) главные удлинения поврежденности с помощью равенств (I.2.20) параметры p_1 , p_2 могут быть интерпретированы как квадраты отношений главных удлинений поврежденности. Так мы находим:

$$\sqrt{p_1} = \frac{L_{(2)}^D}{L_{(1)}^D}, \quad \sqrt{p_2} = \frac{L_{(3)}^D}{L_{(2)}^D}, \quad \sqrt{C} = L_{(1)}^D L_{(2)}^D. \quad (2.7)$$

Результаты численного анализа интеграла $I = I(p_1, p_2)$, представленные в форме изолиний $p_1(p_2, I) = const$, изображены на рис. 8. Значения интеграла, вычисленные для значений параметров p_1 , p_2 , изменяющихся на отрезке $[0,1]$ с шагом 0.05 сведены в таблицу.¹⁰ Максимальная абсолютная погрешность вычисления значений интеграла имеет порядок 10^{-3} .

Замечательные значения интеграла I есть:

¹⁰Таблица значений упомянутого интеграла располагается по адресу:
<http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/Numerical Results.zip>



$$I(p_1, 0) = \frac{\pi}{4}, \quad I(0, 1) = \int_0^1 \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{1-k^2}} = 1.233701\dots, \quad I(1, 1) = \frac{\pi}{2}$$

(1. $p_1 = 0.0$, 2. $p_1 = 0.05$, ... , 21. $p_1 = 1.0$)

Рис. 8: Распределение изолиний $p_1(p_2, I) = \text{const}$ для заданных значений параметра p_1 .

$$\begin{aligned}
I(p_1, 0+0) &= \frac{\pi}{4}, \quad I(1, 1) = \frac{\pi}{2}, \quad I(0, 1) = \int_0^1 \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{1-k^2}} = \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{8}{15} - \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n-1)2^{2n+1}n!(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}} - \dots \right\} = \\
&= 1.233701\dots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Последняя формула получается интегрированием степенного разложения (2.3) с использованием следующего равенства:

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = \frac{n!}{2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\dots\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Для того чтобы охарактеризовать разброс значений интеграла $I = I(p_1, p_2)$, введем разность $\Delta_1 I = I(1, p_2) - I(0, p_2)$. Экстремальные значения этой разности равны

$$\Delta_1 I|_{p_2=0} = 0, \quad \Delta_1 I|_{p_2=1} = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{1-k^2}} = 0.337095\dots \tag{2.10}$$

Численный анализ дает следующее среднее значение разности $\Delta_1 I$:

$$\langle \Delta_1 I \rangle = \int_0^1 (I(1, p_2) - I(0, p_2)) dp_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial I}{\partial p_1} dp_1 dp_2 = 0.101046\dots \tag{2.11}$$

Стандартная евклидова метрика на плоскости (p_1, p_2) может быть использована для усреднения интеграла $I = I(p_1, p_2)$. Численный результат подобного усреднения выражается формулой

$$\langle I \rangle = \int_0^1 \int_0^1 I(p_1, p_2) dp_1 dp_2 = 1.157790\dots \quad (2.12)$$

Таким образом, среднее (а в некотором смысле наиболее вероятное) значение отношения $\langle \varsigma \rangle / \sqrt{C}$ вычисляется в следующем виде:

$$\left\langle \langle \varsigma \rangle / \sqrt{C} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \langle I \rangle = 0.737072\dots \quad (2.13)$$

Отметим также еще два интегральных представления средней сплошности. Простыми преобразованиями равенство (2.4) приводится сначала к следующему виду:

$$\frac{\pi \langle \varsigma \rangle}{2\sqrt{C}} = q^{-1}(1 + p^2 q^2) J(p, q), \quad (2.14)$$

где

$$J(p, q) = \int_0^q \frac{k \mathbf{E}(k) dk}{\sqrt{q^2 - k^2} (1 + p^2 k^2)^2}, \quad (2.15)$$

$$p = \sqrt{(p_2^{-1} - 1)(1 - p_1)}, \quad q = \sqrt{1 - p_1}. \quad (2.16)$$

Вводя в последние соотношения главные удлинения поврежденности, получим также

$$p = \sqrt{\frac{L_{(1)}^{D^2} L_{(2)}^{D^2} - L_{(1)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2}}{L_{(1)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2} - L_{(2)}^{D^2} L_{(3)}^{D^2}}}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{L_{(2)}^{D^2}}{L_{(1)}^{D^2}}}. \quad (2.17)$$

Приведенным соотношениям можно придать более симметричную форму, если ввести новые переменные по формулам:

$$k^* = \frac{k}{q}, \quad p^* = pq, \quad q^* = q. \quad (2.18)$$

После простейших преобразований получаем:

$$\frac{\pi \langle \varsigma \rangle}{2\sqrt{C}} = (1 + p^{*2}) J^*(p^*, q^*), \quad (2.19)$$

$$J^*(p^*, q^*) = \int_0^1 \frac{k^* \mathbf{E}(q^* k^*) dk^*}{\sqrt{1 - k^{*2} (1 + p^{*2} k^{*2})^2}}, \quad (2.20)$$

где параметры p^* , q^* выражаются симметрично через главные удлинения поврежденности по следующим формулам:

$$p^* = \sqrt{\frac{L_{(2)}^D{}^2}{L_{(3)}^D{}^2} - 1}, \quad q^* = \sqrt{1 - \frac{L_{(2)}^D{}^2}{L_{(1)}^D{}^2}}. \quad (2.21)$$

Интеграл $J^*(p^*, q^*)$ может быть вычислен с помощью разложения (2.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} J^*(p^*, q^*) = & \frac{\pi}{2p^{*4}} (1 + \frac{1}{4} q^{*2} p^{*-2}) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{4} (1 + p^{*-2})^{-3/2} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + \frac{1}{2p^{*-2}(1 + p^{*-2})} \right\} - \\ & - \frac{1}{8p^{*4}} \frac{q^{*2}}{\sqrt{1 + p^{*-2}}} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + O(q^{*4}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Последняя формула позволяет просто вычислить среднюю сплошность в случае умеренной и слабой анизотропии ($q^* \rightarrow 0$).

Если главные удлинения поврежденности с номерами 1 и 2 совпадают (что выполняется, например, в случае осесимметричной поврежденности), то интеграл (2.20) вычисляется точно:

$$J^*(p^*, 0) = \frac{\pi}{2p^{*4}} \left\{ \frac{1}{4} (1 + p^{*-2})^{-3/2} \ln \frac{\sqrt{1 + p^{*-2}} + 1}{\sqrt{1 + p^{*-2}} - 1} + \frac{1}{2p^{*-2}(1 + p^{*-2})} \right\}. \quad (2.23)$$

Таким образом, если анизотропное состояние поврежденности характеризуется только двумя главными поврежденностями, то средняя сплошность вычисляется с помощью простых точных формул (2.19), (2.23).

II.3. Усреднение четвертого порядка. Амплитудный спектр поврежденности

Аппроксимация четвертого порядка трехмерного ориентационного распределения сплошности $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ приводит к следующему выражению для среднего значения сплошности:

$$\begin{aligned} \langle \varsigma \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left\{ (C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi) (1 - \tau^2)^2 + \right. \\ \left. + 2 (C_{(13)} \cos^2 \varphi + C_{(23)} \sin^2 \varphi) \tau^2 (1 - \tau^2) + C_{(33)} \tau^4 \right\}^{1/4} d\tau d\varphi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

которое удобно представить в форме

$$\langle \varsigma \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\varphi d\varphi, \quad (3.2)$$

где

$$I_\varphi = \int_0^1 \sqrt[4]{\alpha_\varphi \tau^4 + 2\beta_\varphi \tau^2 + \gamma_\varphi} d\tau. \quad (3.3)$$

Коэффициенты биквадратного полинома в (3.3) определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi &= C_{(33)} + C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi - 2C_{(13)} \cos^2 \varphi - 2C_{(23)} \sin^2 \varphi, \\ \beta_\varphi &= C_{(13)} \cos^2 \varphi + C_{(23)} \sin^2 \varphi - C_{(11)} \cos^4 \varphi - 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - C_{(22)} \sin^4 \varphi, \\ \gamma_\varphi &= C_{(11)} \cos^4 \varphi + 2C_{(12)} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + C_{(22)} \sin^4 \varphi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а его дискриминант вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi &= \left(C_{(13)}^2 - C_{(33)} C_{(11)} \right) \cos^4 \varphi + 2 \left(C_{(13)} C_{(23)} - C_{(12)} C_{(33)} \right) \times \\ &\times \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \left(C_{(23)}^2 - C_{(33)} C_{(22)} \right) \sin^4 \varphi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Прямой численный анализ средней сплошности (3.2) даже с применением самых современных компьютеров невозможен из-за чрезмерных затрат времени, необходимого для вычисления достаточного числа значений повторного интеграла, зависящего от шести параметров. Мы, поэтому, сначала преобразуем внутренний интеграл (3.3) к форме, пригодной для его ускоренного вычисления.

Заменой переменной

$$\alpha_\varphi \tau^4 + 2\beta_\varphi \tau^2 + \gamma_\varphi = \tau^4 z^4, \quad \tau^2 = \frac{\beta_\varphi + \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}}{z^4 - \alpha_\varphi} \quad (3.6)$$

указанный интеграл приводится к сумме двух интегралов

$$\begin{aligned} I_\varphi = \frac{1}{2} \int z d\tau = I_1 + I_2 = 2\beta_\varphi \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{z^4 dz}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2} + \\ + \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{\gamma_\varphi z^8 + (2\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi) z^4}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2 \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} dz, \end{aligned} \quad (3.7)$$

из которых первый вычисляется явно в виде ([119], формулы 2.132.1, 2.134.1)

$$I_1 = \frac{\beta_\varphi}{8\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3} \sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_\varphi} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_\varphi}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_\varphi}} \right], \quad (3.8)$$

где использовано следующее обозначение: $\psi_\varphi = 2\beta_\varphi + \gamma_\varphi$.

Второй из интегралов в сумме (3.7) стандартными преобразованиями приводится к сумме интегралов

$$\begin{aligned}
I_2 = & \alpha_\varphi(2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi\gamma_\varphi) \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^4 - \alpha_\varphi)^2 \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} + \\
& + (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi\gamma_\varphi) \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^4 - \alpha_\varphi) \sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}} + \\
& + \gamma_\varphi \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\beta_\varphi^2 - \gamma_\varphi(\alpha_\varphi - z^4)}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Дальнейшие вычисления зависят от знака дискриминанта (3.5). Предполагая сначала, что

$$\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi\gamma_\varphi < 0 \tag{3.10}$$

и обозначая

$$\delta_\varphi = \sqrt[4]{\alpha_\varphi - \frac{\beta_\varphi^2}{\gamma_\varphi}}, \tag{3.11}$$

формулу (3.9) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi\gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\
& \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} - \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} \right] + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi\gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \times \\
& \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} + \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 - \delta_\varphi^4}} \right].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Все интегралы в последней формуле идентифицируются (см. [99], формулы 212.12, 337.04, 336.00, 336.01, 336.02):

$$J'_0(a, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}} F\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.13)$$

$$J'_1(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)\sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}(a^2 + p)} \left[\Pi\left(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} J'_2(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)^2 \sqrt{t^4 - a^4}} = \frac{1}{a\sqrt{2}(a^2 + p)^2} & \left\{ F\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\Pi\left(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\ & + \frac{1}{(\rho^2 - 1)(1 - 2\rho^2)} \left[\rho^2 E\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right) F\left(s, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(3\rho^2 - \rho^4 - \frac{3}{2}\right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \Pi\left(s, \rho^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \rho^4 \mu \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\mu^2(1 - \rho^2\mu^2)^{-1}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где введены следующие обозначения:

$$s = \arcsin \mu, \quad \rho^2 = \frac{a^2 + p}{2a^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{2a^2}{a^2 + y^2}}. \quad (3.16)$$

Канонические эллиптические интегралы Лежандра представляются, как обычно, формулами

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}, \\ E(\varphi, k) &= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\Pi(\varphi, \omega^2, k) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \omega^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Равенства (3.12)-(3.15), а также (3.8), позволяют получить значение интеграла I_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J'_0(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\ & \times \left(J'_1(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J'_1(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \times \\ & \times \left(J'_2(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J'_2(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

и, следовательно, вычислить среднюю сплошность в форме интеграла

$$\begin{aligned} \langle \varsigma \rangle = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\beta_\varphi}{8\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi^3} \sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_\varphi} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_\varphi}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_\varphi}} \right] + \right. \\ & + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{\sqrt{\gamma_\varphi}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \left(J'_1(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J'_1(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \\ & \left. + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left(J'_2(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J'_2(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) \right\} d\varphi + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J'_0(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В случае, когда дискриминант (3.5) положителен

$$\beta_\varphi^2 - \alpha_\varphi \gamma_\varphi > 0, \quad (3.20)$$

обозначая

$$\delta_\varphi = \sqrt[4]{\frac{\beta_\varphi^2}{\gamma_\varphi} - \alpha_\varphi}, \quad (3.21)$$

вместо формулы (3.12) имеем

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\ & \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} - \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi}) \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} \right] + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \times \\ & \times \left[\int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 - \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} + \int_{\sqrt[4]{C_{(33)}}}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \sqrt{\alpha_\varphi})^2 \sqrt{z^4 + \delta_\varphi^4}} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Интегралы в последней формуле также идентифицируются (см. [99], формулы 263.50, 266.04, 341.00-341.05, 361.54)

$$J_0''(a, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a} F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} J_1''(a, p, y) = & \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p) \sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a(a^2 + p)} \times \\ & \times \left[\frac{1}{1 - \sigma} \left(\Pi\left(\zeta, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - G \right) - F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$J_2''(a, p, y) = \int_y^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - p)^2 \sqrt{t^4 + a^4}} = \frac{1}{2a(a^2 + p)^2} \left\{ F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{2}{1 - \sigma} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\Pi\left(\zeta, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - G \right) + \frac{2(1 + \sigma)^2}{\sigma^4 - 1} \left[-\frac{1}{1 - \sigma^2} \left(\Pi\left(\zeta, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - G \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(1 + \sigma^2)F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sigma^2 E\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sigma^2 \sqrt{1 - \lambda^4}}{\sqrt{2}(1 + \sigma\lambda)} \right] \Bigg\}, \quad (3.25)
\end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\zeta = \arccos \lambda, \quad \sigma = \frac{a^2 + p}{a^2 - p}, \quad \lambda = \frac{y^2 - a^2}{y^2 + a^2}, \quad (3.26)$$

$$G = \begin{cases} \sqrt{2}\sigma\omega_1 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1 + \sigma^2)(1 - \lambda^2)}{(1 - \sigma^2)(1 + \lambda^2)}}, & \omega^2 < \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}\sigma \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}}, & \omega^2 = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}\sigma\omega_2 \ln \frac{\sqrt{(1 + \sigma^2)(1 + \lambda^2)} + 2\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \lambda^2)}}{\sqrt{(1 + \sigma^2)(1 + \lambda^2)} - 2\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \lambda^2)}}, & \omega^2 > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (3.27)$$

где, в свою очередь, для сокращения записи приняты обозначения

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1 - \sigma^2}{1 + \sigma^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 + 1}}, \quad \omega^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} J_0''(\delta_\varphi, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma_\varphi}} (2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\varphi}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_\varphi}} \right) \times \\
& \times \left(J_1''(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) - J_1''(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right) + \\
& + \frac{2\beta_\varphi^2 + \alpha_\varphi \gamma_\varphi}{4\sqrt{\gamma_\varphi}} \left(J_2''(\delta_\varphi, \sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) + J_2''(\delta_\varphi, -\sqrt{\alpha_\varphi}, \sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}) \right). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Формула для среднего значения сплошности в этом случае вполне аналогична формуле (3.19) с точностью до замены J'_α на J''_α ($\alpha = 0, 1, 2$).

В интеграле (3.19) заменим переменную, введя обратную амплитуду u по формуле $s = \operatorname{am} u$:

$$\text{tg}^2\varphi \equiv R^2(u) = \frac{-(4C_{(12)}C_{(33)} - 4C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}^{-1}\text{sd}^4u) \pm 4\sqrt{D}}{-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1}\text{sd}^4u}, \quad (3.29)$$

где

$$16D = (C_{(33)}^{-2}\text{sd}^8u - 8\text{sd}^4u + 16C_{(33)}^2)(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)}) + \\ + (4C_{(33)}^{-1}\text{sd}^4u - 16C_{(33)})(2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - C_{(23)}^2C_{(11)} - C_{(13)}^2C_{(22)}) \quad (3.30)$$

и через $\text{sd}u$ обозначена эллиптическая функция Якоби, равная отношению синус-амплитуды и дельта-амплитуды.

Выбор знака в формуле (3.29) осуществляется так, чтобы все отношение было положительным.

В результате преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle \varsigma \rangle = & \frac{2}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\text{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\ & + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\alpha_u\gamma_u} - \beta_u^2} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\ & \times (f_1^+(u, \omega^+) - f_1^-(u, \omega^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}}(f_2^+(u, \omega^+) + f_2^-(u, \omega^-)) \Big\} \times \\ & \times \frac{R'(u)}{1 + R^2(u)} du, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$f_1^\pm(u, \rho^2) = \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\sqrt{2}\sqrt{\text{dn}^{-2}u - 1}(\sqrt{C_{(33)}^{-1}}(\text{dn}^{-2}u - 1) \pm \sqrt{\alpha_u})} [\Pi(u, \rho^2) - u], \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
f_2^\pm(u, \rho^2) &= \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{dn}^{-2}u - 1}(\sqrt{C_{(33)}^{-1}}(\operatorname{dn}^{-2}u - 1) \pm \sqrt{\alpha_u})^2} \times \\
&\times \left\{ u - 2\Pi(u, \rho^2) + \frac{1}{(\rho^2 - 1)(1 - 2\rho^2)} \times \right. \\
&\times \left. \left[\rho^2 E(u) + \left(\frac{1}{2} - \rho^2\right)u + (3\rho^2 - \rho^4 - \frac{3}{2})\Pi(u, \rho^2) - \frac{\rho^4 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - \rho^2 \operatorname{sn}^2 u} \right] \right\}, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\omega_u = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_u}\sqrt{C_{(33)}}(\operatorname{dn}^{-2}u - 1)^{-1}, \tag{3.34}$$

$$\alpha_u = C_{(33)} + \frac{C_{(11)} - 2C_{(13)} + 2(C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)})R^2(u) + (C_{(22)} - 2C_{(23)})R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2},$$

$$\beta_u = \frac{C_{(13)} + (C_{(13)} + C_{(23)} - 2C_{(12)})R^2(u) + (C_{(23)} - C_{(11)} - C_{(22)})R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2}, \tag{3.35}$$

$$\gamma_u = \frac{C_{(11)} + 2C_{(12)}R^2(u) + C_{(22)}R^4(u)}{(1 + R^2(u))^2},$$

$$\omega^- = \frac{1}{2} - \omega_u, \quad \omega^+ = \frac{1}{2} + \omega_u.$$

Значения u_1 , u_2 вычисляются как решения следующих уравнений:

$$\operatorname{sn} u_1 = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(11)}^{-1}C_{(13)}^2}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(11)}^{-1}C_{(13)}^2}}}, \tag{3.36}$$

$$\operatorname{sn} u_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(22)}^{-1}C_{(23)}^2}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(22)}^{-1}C_{(23)}^2}}}.$$

Заметим, что в формулах, приведенных выше, и в дальнейшем модуль эллиптических функций k всегда равен $1/\sqrt{2}$.

В случае (3.20) обратная амплитуда определяется как $\zeta = \text{am} u$ (ср. (3.29), (3.30)):

$$\text{tg}^2 \varphi \equiv R^2(u) = \frac{-(C_{(13)}C_{(23)} - 2C_{(12)}C_{(33)}(1 + \text{cn}^2 u)(1 + \text{cnu})^{-2}) \pm \sqrt{D}}{C_{(23)}^2 - 2C_{(22)}C_{(33)}(1 + \text{cn}^2 u)(1 + \text{cnu})^{-2}}, \quad (3.37)$$

$$D = 2C_{(33)} \left(C_{(11)}C_{(23)}^2 + C_{(22)}C_{(13)}^2 - 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} \right) \frac{(1 + \text{cn}^2 u)}{(1 + \text{cnu})^2} + \\ + 4C_{(33)}^2 \left(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)} \right) \frac{(1 + \text{cn}^2 u)^2}{(1 + \text{cnu})^4}. \quad (3.38)$$

Формула (3.31) для средней сплошности во втором случае приобретает вид:

$$\langle \varsigma \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\text{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\beta_u^2 - \alpha_u\gamma_u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \right. \quad (3.39) \\ \left. \times (h_1^+(u, \sigma_u^+) - h_1^-(u, \sigma_u^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}}(h_2^+(u, \sigma_u^+) + h_2^-(u, \sigma_u^-)) \right\} \frac{R'(u)du}{1 + R^2(u)},$$

где

$$h_1^\pm(u, \sigma) = \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}}{2\sqrt{(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1}} (\sqrt{C_{(33)}}(1 - \text{cnu})(1 + \text{cnu})^{-1} \pm \sqrt{\alpha_u})} \times \\ \times \left[\frac{1}{1 - \sigma} (\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G) - u \right], \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
h_2^\pm(u, \sigma) = & \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}^{-1}}}{2\sqrt{(1 - \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{cn} u)^{-1}} \left(\sqrt{C_{(33)}}(1 - \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{cn} u)^{-1} \pm \sqrt{\alpha_u} \right)^2} \times \\
& \times \left\{ u - \frac{2}{1 - \sigma} \left(\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G \right) + \frac{2(1 + \sigma)^2}{\sigma^4 - 1} \times \right. \\
& \times \left. \left[-\frac{1}{1 - \sigma^2} \left(\Pi(u, \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}) - G \right) + \frac{1}{2}(1 + \sigma^2)u - \sigma^2 E(u) + \frac{\sigma^2 \sqrt{1 - \operatorname{cn}^4 u}}{\sqrt{2}(1 + \sigma \operatorname{cn} u)} \right] \right\}, \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\sigma_u^\pm = \frac{(1 - \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{cn} u)^{-1} \sqrt{C_{(33)}} \pm \sqrt{\alpha_u}}{(1 - \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{cn} u)^{-1} \sqrt{C_{(33)}} \mp \sqrt{\alpha_u}}. \quad (3.42)$$

Заметим также, что

$$\frac{\sigma_u^{\pm 2}}{\sigma_u^{\pm 2} - 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\alpha_u + C_{(33)}(1 - \operatorname{cn} u)^2(1 + \operatorname{cn} u)^{-2}}{4\sqrt{C_{(33)}}\sqrt{\alpha_u}(1 - \operatorname{cn} u)(1 + \operatorname{cn} u)^{-1}}$$

и при вычислении значений функции G следует воспользоваться формулой (3.27), в которой следует положить

$$\lambda = \operatorname{cn} u. \quad (3.43)$$

Значения u_1, u_2 определяются как решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cn} u_1 = & \frac{\sqrt{C_{(33)}} - \sqrt{C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1} - C_{(33)}}}{\sqrt{C_{(33)}} + \sqrt{C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1} - C_{(33)}}}, \\
\operatorname{cn} u_2 = & \frac{\sqrt{C_{(33)}} - \sqrt{C_{(23)}^2 C_{(22)}^{-1} - C_{(33)}}}{\sqrt{C_{(33)}} + \sqrt{C_{(23)}^2 C_{(22)}^{-1} - C_{(33)}}}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Соответствующие значениям u_1, u_2 амплитуды s_1, s_2 (или ζ_1, ζ_2) назовем амплитудами поврежденности, отрезок $[s_1, s_2]$ (или $[\zeta_1, \zeta_2]$) – амплитудным спектром поврежденности, а отрезок $[u_1, u_2]$ – обратным амплитудным спектром поврежденности.

Необходимо отметить, что формулы (3.31) и (3.32), а также определение обратного амплитудного спектра, корректны только если замена переменной по формулам (3.29), (3.37) приводит к монотонной зависимости $u = u(\varphi)$. Мы исследуем этот вопрос ниже.

Правые части уравнений (3.36), (3.44), наряду с диагональными элементами $C_{(11)}$, $C_{(22)}$, $C_{(33)}$, дают пять значимых комбинаций элементов спектра поврежденности. Последняя – шестая – есть само значение средней поврежденности.

Длина отрезка $[u_1, u_2]$ (ширина обратного амплитудного спектра поврежденности) δu может служить одной из скалярных мер анизотропии состояния поврежденности. Действительно, если правые части уравнений (3.36) (уравнений (3.44)) мало отличаются, то и значения обратных амплитуд поврежденности u_1 и u_2 также мало отличаются (узкополосный спектр поврежденности), следовательно, средняя сплошность может быть вычислена достаточно точно для каждого из случаев соответственно в виде:

$$\begin{aligned}
\langle \varsigma \rangle = & \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\
& + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\alpha_u\gamma_u - \beta_u^2}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\
& \times (f_1^+(u, \omega^+) - f_1^-(u, \omega^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}}(f_2^+(u, \omega^+) + f_2^-(u, \omega^-)) \Big\}_{u=\bar{u}} + \\
& + O(\delta u),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varsigma \rangle = & \left\{ \frac{\beta_u}{8\sqrt[4]{\alpha_u^3}} \left[\frac{4\sqrt[4]{\alpha_u^3}\sqrt[4]{C_{(33)}}}{\psi_u} - \pi + \ln \left| \frac{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \alpha_u}{\sqrt[4]{C_{(33)}} - \sqrt[4]{\alpha_u}} \right| + 2\operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{C_{(33)}}{\alpha_u}} \right] + \right. \\
& + \frac{u}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\gamma_u}\sqrt[4]{\beta_u^2 - \alpha_u\gamma_u}} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_u}}(2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u) \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_u}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{\alpha_u}} \right) \times \\
& \times (f_1^+(u, \omega^+) - f_1^-(u, \omega^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u\gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}}(f_2^+(u, \omega^+) + f_2^-(u, \omega^-)) \Big\}_{u=\bar{u}} + \\
& + O(\delta u),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\times (h_1^+(u, \sigma_u^+) - h_1^-(u, \sigma_u^-)) + \frac{2\beta_u^2 + \alpha_u \gamma_u}{4\sqrt{\gamma_u}} (h_2^+(u, \sigma_u^+) + h_2^-(u, \sigma_u^-)) \Big\}_{u=\bar{u}} + O(\delta u),$$

где

$$\bar{u} = u_1 + \frac{1}{2}\delta u.$$

Если правые части пары уравнений (3.36) или (3.44) равны, то $\delta u = 0$, и обратный амплитудный спектр поврежденности вырождается в точку (вырожденный обратный амплитудный спектр поврежденности). Средняя сплошность при этом вычисляется точно по одной из формул (3.45), (3.46) с отброшенным слагаемым $O(\delta u)$.

Две последние формулы чрезвычайно удобны для представления поврежденного состояния в среднем и могут быть еще уточнены в плане вычисления членов высших порядков малости по δu .

Наконец, рассмотрим условия положительности дискриминанта (3.5) и монотонности замены $u = u(\varphi)$.

Дискриминант (3.5) определяется через обратную амплитуду u по формуле

$$\begin{aligned} \beta_u^2 - \alpha_u \gamma_u = & \left[C_{(13)}^2 - C_{(33)}C_{(11)} + 2(C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}) R^2(u) + \right. \\ & \left. + (C_{(23)}^2 - C_{(33)}C_{(22)}) R^4(u) \right] [1 + R^2(u)]^{-2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Дискриминант выражения в квадратных скобках в свою очередь равен

$$\begin{aligned} \Delta_1 = C_{(33)} \left(C_{(12)}^2 C_{(33)} + C_{(13)}^2 C_{(22)} + C_{(23)}^2 C_{(11)} - 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - \right. \\ \left. - C_{(11)}C_{(22)}C_{(33)} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

а его корни

$$R_{1,2}^2 = \frac{-(C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}) \pm \sqrt{\Delta_1}}{C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)}}. \quad (3.49)$$

Вычисления зависели также от знака α_u , который совпадает со знаком биквадратного трехчлена (см. (3.35))

$$(C_{(22)} + C_{(33)} - 2C_{(23)})R^4 + 2(C_{(33)} + C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)})R^2 + C_{(11)} + C_{(33)} - 2C_{(13)}, \quad (3.50)$$

дискриминант и корни которого есть:

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & C_{(12)}^2 + C_{(13)}^2 + C_{(23)}^2 - 2C_{(13)}C_{(23)} - 2C_{(12)}C_{(13)} - 2C_{(12)}C_{(23)} + \\ & + 2C_{(12)}C_{(33)} + 2C_{(23)}C_{(11)} + 2C_{(13)}C_{(22)} - \\ & - C_{(11)}C_{(22)} - C_{(11)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$R_{1,2}^2 = \frac{-(C_{(33)} + C_{(12)} - C_{(13)} - C_{(23)}) \pm \sqrt{\Delta_2}}{C_{(22)} + C_{(33)} - 2C_{(23)}}. \quad (3.52)$$

Исследуем теперь вопрос о монотонности функции $u = u(\varphi)$. Нули производной $du/d\varphi$ являются корнями следующего биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned} & \left[C_{(12)} \left(C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)} \right) + C_{(22)} \left(C_{(12)}C_{(33)} - C_{(13)}C_{(23)} \right) \right] R^4 + \\ & + \left(C_{(11)}C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(13)}^2 \right) R^2 + C_{(13)} \left(C_{(11)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(13)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

дискриминант которого вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta_3 = & (C_{(13)}^2 C_{(22)} + C_{(23)}^2 C_{(11)})^2 - 4C_{(13)}^3 C_{(22)} C_{(12)} C_{(23)} - \\ & - 4C_{(23)}^3 C_{(11)} C_{(12)} C_{(13)} + 4C_{(12)}^2 C_{(13)}^2 C_{(23)}^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Корни уравнения (3.53) есть:

$$R_{1,2}^2 = \frac{- \left(C_{(11)}C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(13)}^2 \right) \pm \sqrt{\Delta_3}}{2 \left[C_{(12)} \left(C_{(23)}^2 - C_{(22)}C_{(33)} \right) + C_{(22)} \left(C_{(12)}C_{(33)} - C_{(13)}C_{(23)} \right) \right]}. \quad (3.55)$$

Если дискриминант (3.54) положителен, то в правых частях формул (3.31), (3.39) появляются суммы интегралов по отрезкам монотонного изменения обратной амплитуды в зависимости от угла φ .

Если поврежденность удовлетворяет условиям $C_{(11)} = C_{(22)}$, $C_{(13)} = C_{(23)}$, то дискриминант Δ_3 положителен, а корни уравнения (3.53) есть $R_{1,2}^2 =$

$+1, -1$, что соответствует углу $\varphi = \pi/4$. Обратный амплитудный спектр разделяется на два отрезка (фактически же обратный амплитудный спектр представляет собой один и тот же отрезок дважды проходимый в прямом и обратном направлении) значением u , определяемым как корень уравнения

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - 2C_{(13)}^2 (C_{(11)} + C_{(12)})^{-1}}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - 2C_{(13)}^2 (C_{(11)} + C_{(12)})^{-1}}}}. \quad (3.56)$$

В п.5 мы покажем, что осесимметричная поврежденность характеризуется условиями $C_{(11)} = C_{(22)}$, $C_{(13)} = C_{(23)}$, $C_{(11)} = C_{(12)}$.

Если $C_{(11)} \rightarrow C_{(22)}$, $C_{(13)} \rightarrow C_{(23)}$, $C_{(12)} \rightarrow C_{(11)}$, то дискриминант Δ_3 вырождается, а отношение (3.55) становится неопределенным типа $0/0$.

Верхняя граница обратного амплитудного спектра при этом совпадает с нижней, т.е. обратный спектр вырождается. Средняя поврежденность вычисляется в этом случае по одной из формул (3.45), (3.46) с отброшенным слагаемым $O(\delta u)$. Значение \bar{u} определяется как корень уравнения

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{2\sqrt{C_{(33)} - C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1}}}{\sqrt{C_{(33)}^{-1}} + \sqrt{C_{(33)} - C_{(13)}^2 C_{(11)}^{-1}}}}.$$

Следует отметить, что отношение в уравнении (3.29) при этом также становится неопределенным типа $0/0$.

С целью эффективного вычисления значений средней поврежденности мы рассмотрим ниже разложения эллиптических функций Якоби и эллиптических интегралов Лежандра в быстро сходящиеся ряды Фурье по обратной амплитуде u .

II.4. Использование рядов Фурье для вычисления средней поврежденности

Вычисление средней поврежденности по формулам (3.31), (3.39) эффективно реализуется только если значения подинтегральной функции достаточно быстро могут быть вычислены в пределах отрезка $[u_1, u_2]$.

Для вычисления эллиптических функций Якоби имеем следующие разложения ([119], формулы 8.146.4, 8.146.1, 8.146.2, 8.146.3; [99], формула 908.10):

$$\begin{aligned}
s, \zeta = \operatorname{am} u &= \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}}, \\
\operatorname{sn} u &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
\operatorname{cn} u &= \frac{\sqrt{k'} \vartheta_2(v)}{\sqrt{k} \vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{k\mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1+q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2\mathbf{K}}, \\
\operatorname{dn} u &= \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)} = \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
\operatorname{sdu} &= \frac{2\pi}{k k' \mathbf{K}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2\mathbf{K}},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$v = \pi u / (2\mathbf{K}), \quad q = \exp(-\pi \mathbf{K}' / \mathbf{K}), \tag{4.2}$$

и полный эллиптический интеграл первого рода вычисляется как сумма ряда ([119], формула 8.113.1)

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} k^2 + \frac{(1 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 4)^2} k^4 + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n} + \dots \right\}. \tag{4.3}$$

Приведем также формулы, необходимые для вычисления производной $R'(u)$:

$$\operatorname{sd}' u = \operatorname{cn} \operatorname{und}^2 u, \quad \operatorname{cn}' u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \tag{4.4}$$

Так дифференцируя (3.29), находим

$$\begin{aligned}
\frac{2RR'}{\text{sd}^3 u \text{cn} u \text{nd}^2 u} = & \left\{ 4 \frac{-(4C_{(12)}C_{(33)} - 4C_{(13)}C_{(23)} - C_{(12)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u) \pm 4\sqrt{D}}{(-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u)^2} C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \pm \right. \\
& \pm \frac{\sqrt{D^{-1}} \left[C_{(33)}^{-2} (C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)}) \text{sd}^4 u + 2 \left(C_{(33)}^{-1} \Gamma_{(123)} - 2(C_{(12)}^2 - C_{(11)}C_{(22)}) \right) \right]}{-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u} + \\
& \left. + \frac{4C_{(12)}C_{(33)}^{-1}}{-4C_{(23)}^2 + 4C_{(22)}C_{(33)} - C_{(22)}C_{(33)}^{-1} \text{sd}^4 u} \right\}, \quad (4.5)
\end{aligned}$$

где использовано следующее обозначение

$$\Gamma_{(123)} = 2C_{(12)}C_{(13)}C_{(23)} - C_{(23)}^2 C_{(11)} - C_{(13)}^2 C_{(22)}.$$

С целью вычисления эллиптических интегралов Лежандра воспользуемся аппаратом тэта-функций, определяемых как суммы рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \sin(2m-1)z = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\
\vartheta_2(z) &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{(m-\frac{1}{2})^2} \cos(2m-1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} e^{i(2n-1)z}, \\
\vartheta_3(z) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz}, \\
\vartheta_4(z) \equiv \vartheta_0(z) \equiv \vartheta(z) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Для логарифмов и логарифмических производных тэта-функций имеем следующие Фурье-разложения ([99], 1050.02):

$$\begin{aligned}
\ln \vartheta_1(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \sin z) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_2(z) &= \ln(2\sqrt[4]{\xi} \cos z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_3(z) &= \ln \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz, \\
\ln \vartheta_0(z) &= \ln \xi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \cos 2nz,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\xi = 0.57721566\dots$ есть число Эйлера,

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta'_1(z)}{\vartheta_1(z)} &= \operatorname{ctg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_2(z)}{\vartheta_2(z)} &= -\operatorname{tg} z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_3(z)}{\vartheta_3(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nz, \\
\frac{\vartheta'_0(z)}{\vartheta_0(z)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nz.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Эллиптический интеграл второго рода выражается через тэта-функции по формуле ([115], 13.20.16)

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{d}{du} \ln \vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\mathbf{K}}\right), \tag{4.9}$$

которая, в силу (4.8), может быть представлена в виде

$$E(u, k) = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u + \frac{2\pi}{\mathbf{K}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin \frac{m\pi u}{\mathbf{K}}. \tag{4.10}$$

Вычисление эллиптического интеграла Лежандра третьего рода распадается на несколько случаев. Вводя переменные

$$v = \frac{\pi u}{2\mathbf{K}}, \quad t = \frac{\pi \gamma}{2\mathbf{K}}, \tag{4.11}$$

имеем ([115], формулы 13.20.21, 13.20.25, 13.20.22; 13.20.19, 13.20.24, 13.20.23; 13.20.20, 13.19.19.4, 13.19.18.1; 13.20.18, 13.19.19.1, 13.19.18.4):

Круговой случай I: $\omega^2 = -k^2 \text{sn}^2(\gamma, k') \text{cn}^{-2}(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$)

$$\begin{aligned} \frac{\text{dn}(\gamma, k')}{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')} \Pi(u, -k^2 \frac{\text{sn}^2(\gamma, k')}{\text{cn}^2(\gamma, k')}, k) &= \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v+it)}{\vartheta_0(v-it)} + i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} v, \\ \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_0(v+it)}{\vartheta_0(v-it)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nv \text{sh} 2nt, \\ i \frac{\vartheta'_1(it)}{\vartheta_1(it)} &= \text{ctht} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \text{sh} 2nt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Круговой случай II: $\omega^2 = \text{dn}^2(\gamma, k')$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}'$)

$$\begin{aligned} k'^2 \frac{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')}{\text{dn}(\gamma, k')} \Pi(u, \text{dn}^2(\gamma, k'), k) &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v+it)}{\vartheta_2(v-it)} - i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} v, \\ \frac{1}{2i} \ln \frac{\vartheta_2(v+it)}{\vartheta_2(v-it)} &= -\text{arctg}(\text{tg} v \cdot \text{th} t) + \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nv \text{sh} 2nt, \\ i \frac{\vartheta'_3(it)}{\vartheta_3(it)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \text{sh} 2nt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Гиперболический случай I: $\omega^2 = k^2 \text{sn}^2(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$)

$$\begin{aligned} \frac{\text{cn}(\gamma, k) \text{dn}(\gamma, k)}{\text{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, k^2 \text{sn}^2(\gamma, k), k) &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} + \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} v, \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_0(v+t)}{\vartheta_0(v-t)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\ \frac{\vartheta'_1(t)}{\vartheta_1(t)} &= \text{ctgt} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Гиперболический случай II: $\omega^2 = \text{sn}^{-2}(\gamma, k)$ ($0 < \gamma < \mathbf{K}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{cn}(\gamma, k) \operatorname{dn}(\gamma, k)}{\operatorname{sn}(\gamma, k)} \Pi(u, \operatorname{sn}^{-2}(\gamma, k), k) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| > t \\ \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(t+v)}{\vartheta_1(t-v)} - \frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} v, & |v| < t \end{cases} \\
\frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_1(v+t)}{\vartheta_1(v-t)} &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sin(v+t)}{\sin(v-t)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \sin 2nv \sin 2nt, \\
\frac{\vartheta'_0(t)}{\vartheta_0(t)} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin 2nt.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Оперирование с приведенными формулами упрощается, если воспользоваться разложениями (4.1), (4.7), а также следующими Фурье-разложениями ([119], формулы 8.146.7, 8.146.8, 8.146.11, 8.146.26, 8.146.27):

$$\begin{aligned}
\operatorname{nd}u &= \frac{1}{\operatorname{dn}u} = \frac{2\pi}{k'K} \left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{K} \right], \\
\operatorname{tn}u &= \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u} = \frac{\pi}{2k'K} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi u}{2K} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{K} \right], \\
\operatorname{cd}u &= \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u} = -\frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}} \cos \frac{(2n-1)\pi u}{2K}, \\
\operatorname{sn}^2u &= \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2k^3} \left[1 + k^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4K^2} \right] \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2K}, \\
\frac{1}{\operatorname{sn}^2u} &= \frac{\pi^2}{4K^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi u}{2K} + \frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{2K},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

и, кроме того ([119], формулы 8.146.15, 8.146.16, 8.146.17)

$$\begin{aligned}
\text{tnudnu} &= \frac{\pi}{2\mathbf{K}} \left[\text{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + (-1)^n q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right], \\
\text{snucdu} &= \frac{4\pi^2}{k^2 \mathbf{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{1 - q^{2(2n-1)}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{\mathbf{K}}, \\
\text{tnundu} &= \frac{\pi}{2k'^2 \mathbf{K}} \left[\text{tg} \frac{\pi u}{2\mathbf{K}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{1 - q^n} \sin \frac{n\pi u}{\mathbf{K}} \right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Использование приведенных выше формул для вычисления эллиптического интеграла Лежандра третьего рода требует решения уравнения вида

$$\text{sn} \gamma = f(u) \tag{4.18}$$

с целью определения параметра γ . Подобное же уравнение возникает при определении обратных амплитуд поврежденности u_1 , u_2 (см. уравнения (3.36), (3.44)).

Решение уравнения (4.18) может быть найдено в форме интеграла Лежандра первого рода, а затем вычислено с помощью разложения в ряд ([119], формула 8.117):

$$\gamma = \frac{2\mathbf{K}}{\pi} \text{am} \gamma - \text{sn} \gamma \sqrt{1 - \text{sn}^2 \gamma} \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \text{sn}^2 \gamma + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \text{sn}^4 \gamma + \dots \right), \tag{4.19}$$

$$a_0 = \frac{2\mathbf{K}}{\pi} - 1, \quad a_n = a_{n-1} - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 k^{2n}.$$

Заметим, что коэффициент a_n представляет собой остаток ряда (4.3) после n -го члена и очень быстро стремится к нулю (практически как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/2$).

В приведенных выше Фурье-разложениях и в степенном разложении (4.19) следует положить:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{K} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[\Gamma \left(\frac{1}{4} \right) \right]^2 = 1.854075\dots, \\
\mathbf{E} &= \frac{\pi}{4\mathbf{K}} + \frac{1}{2} \mathbf{K} = 1.350644\dots, \quad q = 0.043214\dots
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Поскольку q является малым числом, то ряды Фурье для эллиптических функций Якоби и тэта-функций сходятся чрезвычайно быстро (практически как геометрическая прогрессия со знаменателем $1/25$), поэтому достаточно первых нескольких членов для весьма точного вычисления их сумм.

Представляет интерес сравнить средние значения сплошности, учтя в простейшей форме недиагональные элементы спектра поврежденности (положив их равными и достаточно малыми).

Для этого рассмотрим спектр поврежденности, удовлетворяющий условиям

$$D = D_{(12)} = D_{(13)} = D_{(23)}, \quad D \leq D_{(33)} \leq D_{(22)} \leq D_{(11)}, \quad (4.21)$$

т.е., в частности, когда недиагональные элементы спектра поврежденности малы.

В этом случае средняя сплошность вычисляется как

$$\frac{\pi \langle \varsigma \rangle}{2\sqrt[4]{C}} = I(p_1, p_2, p_3), \quad (4.22)$$

где

$$I(p_1, p_2, p_3) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt[4]{\alpha_\varphi^* \tau^4 + 2\beta_\varphi^* \tau^2 + \gamma_\varphi^*} d\tau, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi^* &= p_3 - 1 - (1 - p_1)\cos^4\varphi - (1 - p_2)\sin^4\varphi, \\ \beta_\varphi^* &= (1 - p_1)\cos^4\varphi + (1 - p_2)\sin^4\varphi, \\ \gamma_\varphi^* &= 1 - (1 - p_1)\cos^4\varphi - (1 - p_2)\sin^4\varphi, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$p_1 = \frac{C_{(11)}}{C}, \quad p_2 = \frac{C_{(22)}}{C}, \quad p_3 = \frac{C_{(33)}}{C} \quad (p_1, p_2, p_3 \in (0, 1)). \quad (4.25)$$

Анализ интеграла (4.21) упрощается ввиду следующего свойства симметрии:

$$I(p_1, p_2, p_3) = I(p_2, p_1, p_3). \quad (4.26)$$

Ниже приводятся результаты численного анализа интеграла (4.22) (ср. (2.11)-(2.13)):

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_3 I \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 (I(p_1, p_2, 1) - I(p_1, p_2, 0)) dp_1 dp_2 = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial I}{\partial p_3} dp_1 dp_2 dp_3 = 0.119293\dots,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\langle I \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 I(p_1, p_2, p_3) dp_1 dp_2 dp_3 = 1.422007\dots \tag{4.28}$$

Наиболее вероятное значение отношения $\langle \varsigma \rangle / \sqrt[4]{C}$ есть:

$$\left\langle \langle \varsigma \rangle / \sqrt[4]{C} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \langle I \rangle = 0.9052777\dots \tag{4.29}$$

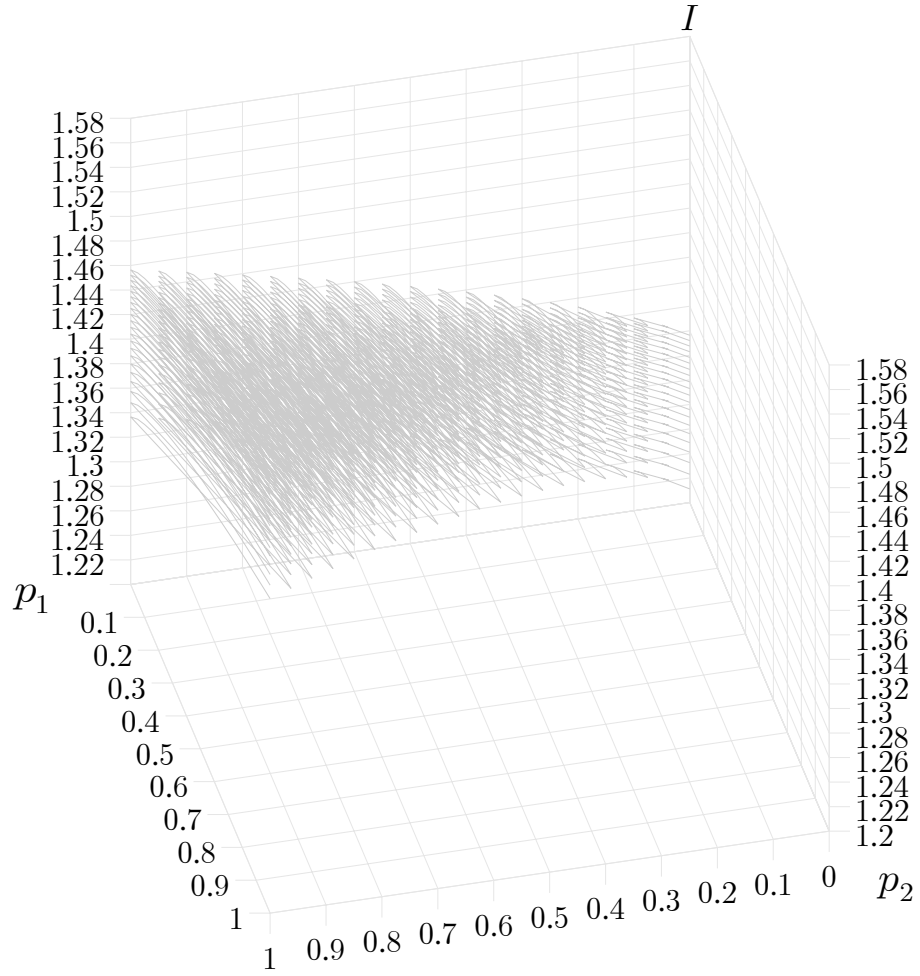
Значения интеграла (4.23), вычисленные для всего диапазона изменения параметров p_1, p_2, p_3 с шагом 0.05, сведены в таблицу.¹¹ Формула (4.29) получена усреднением восьми тысяч значений интеграла I , вычисленных с высокой точностью.

Значения интеграла $I(p_1, p_2, p_3)$ непрерывно заполняют слой, изображенный на рис. 9. Проекция слоя на плоскости $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$ представлены на рис. 10, 11. На рис. 12 указанный слой представлен так как он видится наблюдателю, располагающемуся на прямой $I - 1.2 = p_1 = p_2$. На рис. 13 тот же самый слой виден с позиции $I = 0, p_1 = p_2$.

II.5. Расчет осесимметричного состояния поврежденности

Ниже приводятся расчетные формулы для осесимметричного анизотропно поврежденного состояния. Поврежденность в этом случае характеризуется осесимметричным распределением $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$, не зависящим от угла φ . Из уравнения (I.3.16) заключаем, что в главных осях поврежденности выполняются следующие соотношения: $D_{(11)} = D_{(22)} = D_{(12)}$, $D_{(13)} = D_{(23)}$. Заметим также, что главные оси поврежденности в плоскости $\varphi = \text{const}$ не обязательно совпадают с продольной и поперечной осями образца. Вводя в

¹¹Таблица значений упомянутого интеграла располагается по адресу:
<http://www.ssu.samara.ru/common/structure/mathematix/radayev/Numerical Results.zip>



$$I(0,0,0) = 1.211125, \quad I(1,0,0) = 1.336621, \quad I(1,1,0) = 1.456258, \\ I(0,0,1) = 1.336326, \quad I(1,0,1) = 1.456374, \quad I(1,1,1) = 1.570796$$

$$\Delta_3 I|_{p_1=0, p_2=0} = 0.125200, \quad \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=0} = 0.119753, \quad \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=1} = 0.114538$$

Рис. 9: Трехмерный слой, заполненный значениями интеграла I .

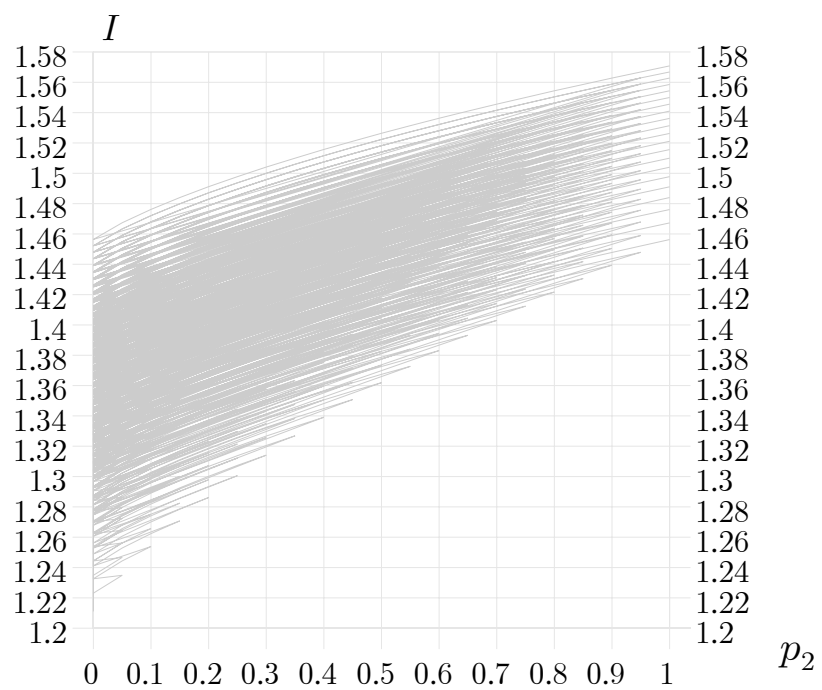


Рис. 10: Проекция слоя на плоскость $p_1 = 0$.

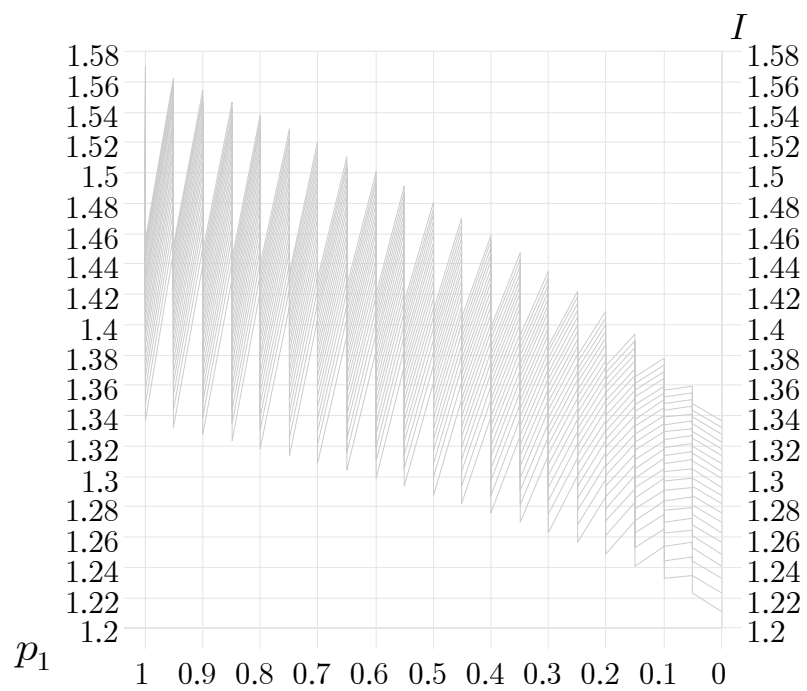
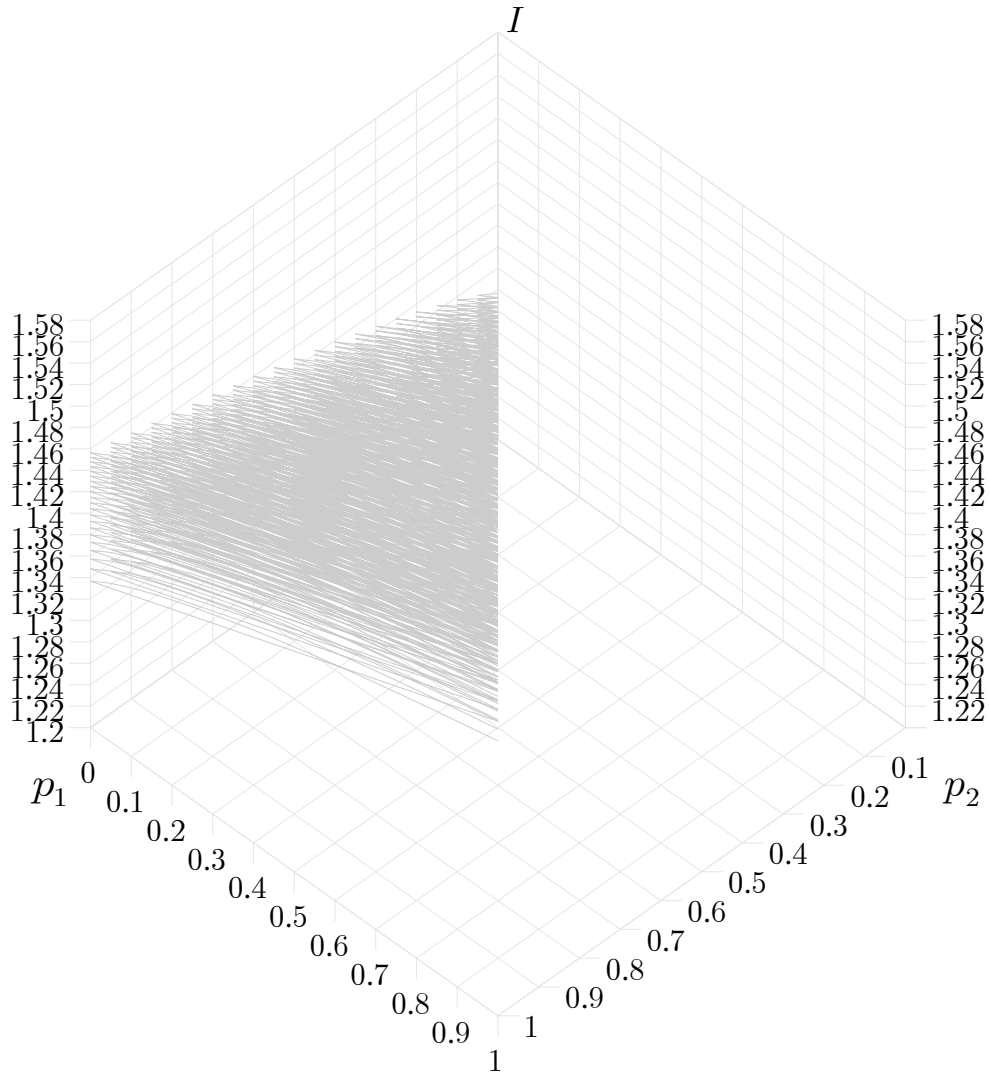


Рис. 11: Проекция слоя на плоскость $p_2 = 0$.



$$I(0,0,0) = 1.211125, \quad I(1,0,0) = 1.336621, \quad I(1,1,0) = 1.456258, \\ I(0,0,1) = 1.336326, \quad I(1,0,1) = 1.456374, \quad I(1,1,1) = 1.570796$$

$$\Delta_3 I|_{p_1=0, p_2=0} = 0.125200, \quad \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=0} = 0.119753, \quad \Delta_3 I|_{p_1=1, p_2=1} = 0.114538$$

Рис. 12: Слой, заполненный значениями интеграла I , (изображение с позиции, равноудаленной от координатных осей).

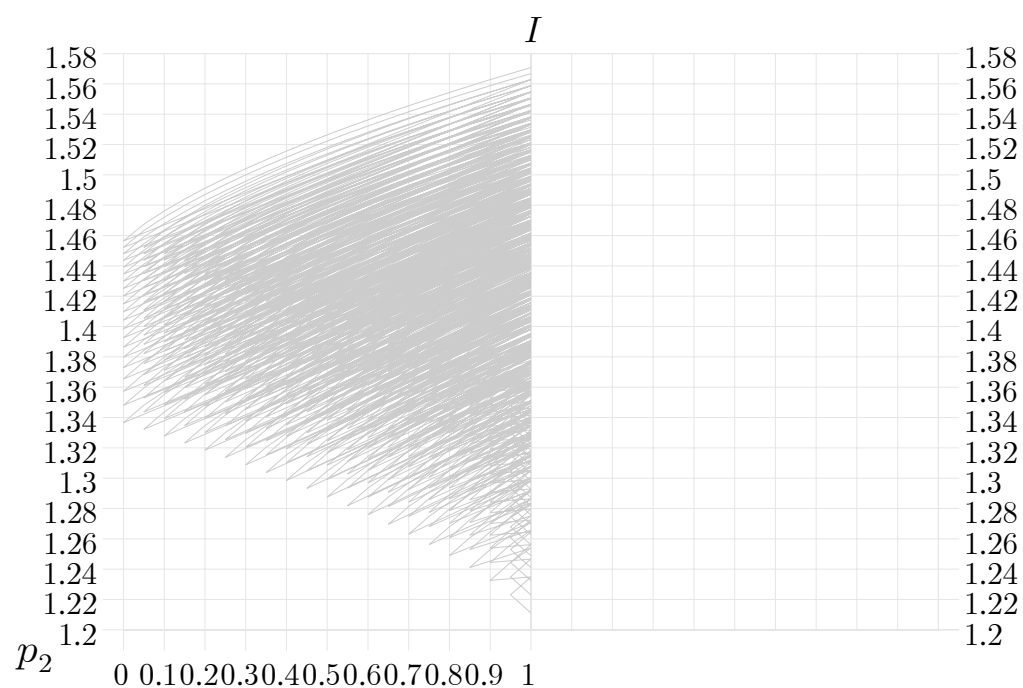


Рис. 13: Слой, заполненный значениями интеграла I , (изображение с позиции $I = 0$, $p_1 = p_2$).

формулы (I.5.32) сферические координаты θ, φ по отношению к главным осям поврежденности, находим:

$$\begin{aligned}
D_{(11)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \sin^4 \theta \cos^4 \varphi - 7 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}, \\
D_{(22)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \sin^4 \theta \sin^4 \varphi - 7 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}, \\
D_{(33)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \cos^4 \theta - 7 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}, \\
D_{(12)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \frac{7}{6} \sin^2 \theta + \frac{1}{6} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}, \\
D_{(13)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{7}{6} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) + \frac{1}{6} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}, \\
D_{(23)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{21}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{7}{6} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) + \frac{1}{6} \right) \sin \theta d\theta d\varphi}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Полагая, что распределение поврежденности является осесимметричным, как например при одноосном сжатии образца, можно выполнить интегрирование по углу φ . Используя формулы (I.4.4) и (I.4.6), получаем:

$$\begin{aligned}
D_{(11)} = D_{(22)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^6} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{5 \cdot 3}{2} - 7 \cdot 5 \cos^2 \theta + \frac{9 \cdot 7}{2} \cos^4 \theta \right) \sin \theta d\theta}, \\
D_{(33)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^3} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{7 \cdot 3}{2} \cos^4 \theta - 7 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) \sin \theta d\theta}, \\
D_{(12)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^6} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(\frac{7 \cdot 3}{2} \cos^4 \theta - \frac{7 \cdot 5}{3} \cos^2 \theta + \frac{5}{2} \right) \sin \theta d\theta}, \\
D_{(13)} = D_{(23)} &= 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^6} \int_0^\pi \varsigma^4 \left(-7 \cdot 3 \cos^4 \theta + \frac{7 \cdot 8}{3} \cos^2 \theta - \frac{5}{3} \right) \sin \theta d\theta}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Последние формулы показывают также, что $D_{(11)} = D_{(12)}$.

Результатом экспериментального измерения поврежденности как правило являются кусочно-разрывные круговые или сферические диаграммы, поэтому мы вычислим интегралы в последних формулах, предполагая, что отрезок $[0, \pi]$ разбит на m частей $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = \pi$ так, что в пределах отрезка $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) сплошность ς сохраняет постоянное значение $\varsigma = \varsigma_i$.

Вводя следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta I_i^{(1)} &= \cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i, \\
\Delta I_i^{(3)} &= \frac{1}{3} (\cos^3 \theta_{i-1} - \cos^3 \theta_i), \\
\Delta I_i^{(5)} &= \frac{1}{5} (\cos^5 \theta_{i-1} - \cos^5 \theta_i),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

имеем

$$D_{(11)} = D_{(22)} = D_{(12)} = 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^6} \sum_{i=1}^m \varsigma_i^4 \left(\frac{5 \cdot 3}{2} \Delta I_i^{(1)} - 7 \cdot 5 \Delta I_i^{(3)} + \frac{9 \cdot 7}{2} \Delta I_i^{(5)} \right)},$$

$$D_{(33)} = 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3}{2^3} \sum_{i=1}^m \varsigma_i^4 \left(\frac{7 \cdot 3}{2} \Delta I_i^{(5)} - 7 \Delta I_i^{(3)} + \frac{1}{2} \Delta I_i^{(1)} \right)}, \quad (5.4)$$

$$D_{(13)} = D_{(23)} = 1 - \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 3^2}{2^5} \sum_{i=1}^m \varsigma_i^4 \left(-7 \cdot 3 \Delta I_i^{(5)} + \frac{7 \cdot 8}{3} \Delta I_i^{(3)} - \frac{5}{3} \Delta I_i^{(1)} \right)}.$$

После того как спектр поврежденности определен, средняя сплошность вычисляется по одной из формул (3.45), (3.46) при $\delta u = 0$.

Среднее значение сплошности, конечно же, может быть также вычислено по формуле

$$\frac{\langle \varsigma \rangle}{\sqrt[4]{C_{(11)}}} = \int_0^1 \sqrt[4]{p\tau^4 + 2q\tau^2 + 1} d\tau, \quad (5.5)$$

где

$$p = C_{(33)}C_{(11)}^{-1} - 2C_{(13)}C_{(11)}^{-1} + 1, \quad q = C_{(13)}C_{(11)}^{-1} - 1.$$

Для оценки средней и средне-квадратичной сплошности в случае осевой симметрии можно использовать известную схему Гаусса [43], которая для интегрирования распределения на сфере вдоль меридиана требует вычисления корней полиномов Лежандра. Этот подход кажется предпочтительным, не только по причине своей эффективности и надежной численной реализации, но и потому, что еще указывает ориентации площадок, где сплошность подлежит экспериментальному определению.

II.6. Двумерное распределение поврежденности

Двумерное распределение поврежденности представляется не столь сложными уравнениями как трехмерное и, уже в силу этого, также представляет практический интерес.

Аппроксимации второго и четвертого порядков двумерного распределения поврежденности имеют следующий вид:

$$\varsigma^2 = \frac{1}{2} (C_{(1)} + C_{(2)}) + \frac{1}{2} (C_{(1)} - C_{(2)}) \cos 2\varphi, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}\varsigma^4 = \frac{3}{8} (C_{(11)} + C_{(22)}) + \frac{1}{4} C_{(12)} + \frac{1}{2} (C_{(11)} - C_{(22)}) \cos 2\varphi + \\ + \left[\frac{1}{8} (C_{(11)} + C_{(22)}) - \frac{1}{4} C_{(12)} \right] \cos 4\varphi.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Спектры поврежденности вычисляются соответственно по следующим формулам:

$$\begin{aligned}C_{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varsigma^2 (1 + 2\cos 2\varphi) d\varphi, \\ C_{(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varsigma^2 (1 - 2\cos 2\varphi) d\varphi,\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}C_{(11)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 (1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi) d\varphi, \\ C_{(22)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 (1 - 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi) d\varphi, \\ C_{(12)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varsigma^4 (1 - 6\cos 4\varphi) d\varphi.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Вычислим спектр двумерной поврежденности, исходя из наблюдаемых в экспериментах структур поврежденности. На рис. 14 представлены результаты подсчета плотности и ориентации микротрещин в образце кварцита при его сжатии [121]. Подавляющее большинство микротрещин оказывается ориентированными в пределах угла примерно в ± 10 градусов по отношению к продольной оси образца, а ориентации всего поля трещин изменяются в пределах угла $70 - 95$ градусов. Данные представлены в форме значений плотности микротрещин, отнесенной к средней плотности распределения, распределенных по пяти секторам, угол раствора каждого из которых равен 5 градусам. Значения $1.8, 7.2, 10.8, 14.4, 1.8$ показывают во сколько раз плотность распределения микротрещин превосходит среднюю плотность. Разумеется вся картина центрально-симметрична. Ось 2 соответствует продольной оси образца. Отношение $\rho / \langle \rho \rangle$ и угол φ есть

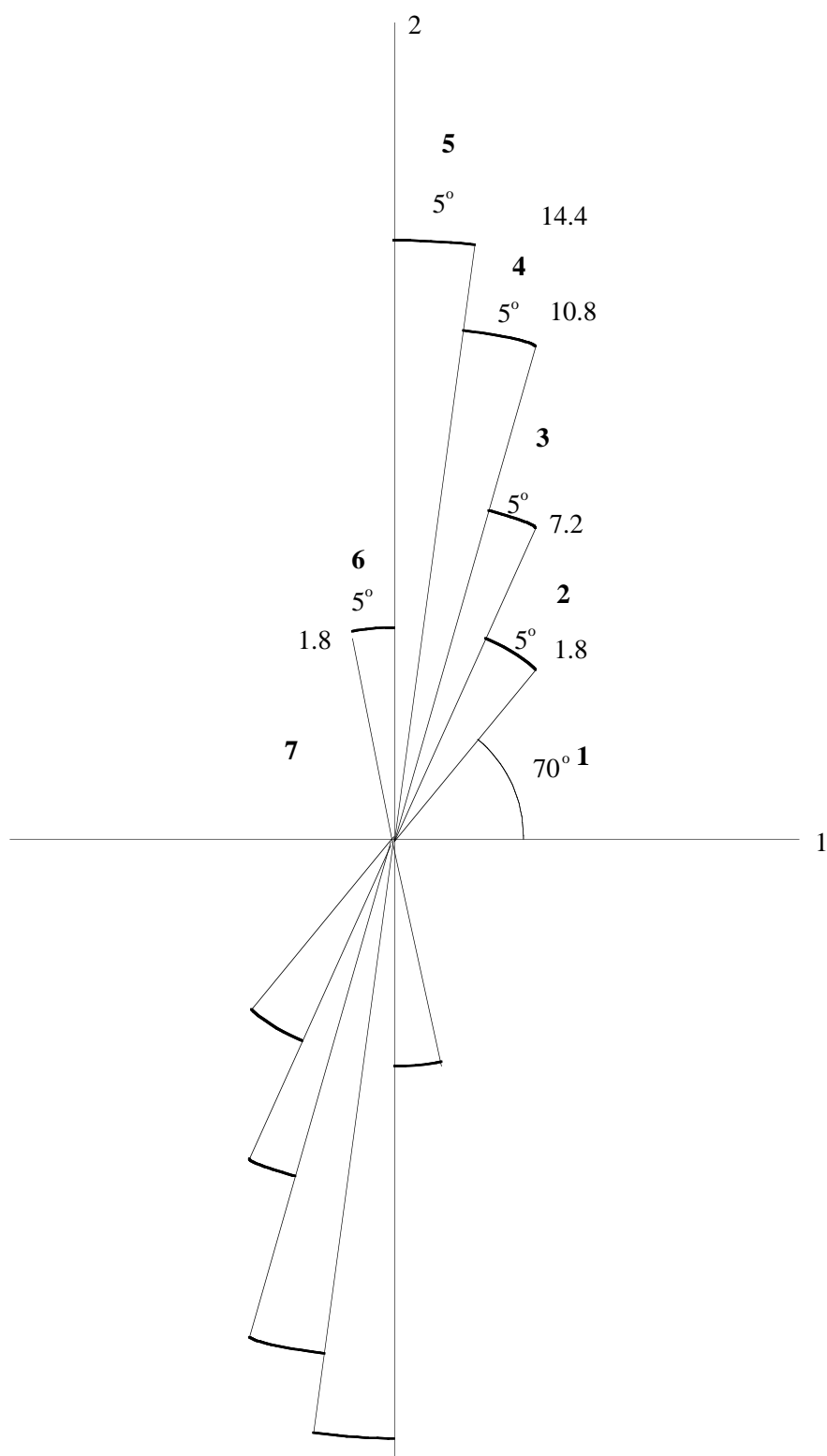


Рис. 14: Двумерное распределение по ориентациям плотности микротрещин (отнесенной к средней плотности распределения) при сжатии образца кварцита.

соответственно полярный радиус и полярный угол, отсчитываемый от горизонтальной оси 1.

Для представления поврежденного состояния возьмем сначала тензор поврежденности второго, а затем четвертого ранга. Переменная $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ имеет смысл относительной (по отношению к критической плотности микротрещин, ориентированных нормально директору \mathbf{n}) плотности ориентационного распределения микротрещин:

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \frac{\rho_C(\mathbf{n}) - \rho(\mathbf{n})}{\rho_C(\mathbf{n})}. \quad (6.5)$$

Производя вычисления по формулам (6.3), (6.4) находим спектры поврежденности в виде ($\gamma_i = \langle \rho \rangle / \rho_{C(i)}$):

для аппроксимации второго порядка

$$D_{(1)} = 1 - (1.121 - 0.0177(1 - 1.8\gamma_2)^2 - 0.0225(1 - 7.2\gamma_3)^2 - 0.0258(1 - 10.8\gamma_4)^2 - 0.0275(1 - 14.4\gamma_5)^2 - 0.0275(1 - 1.8\gamma_6)^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$D_{(2)} = 1 - (0.6012 + 0.0732(1 - 1.8\gamma_2)^2 + 0.078(1 - 7.2\gamma_3)^2 + 0.0814(1 - 10.8\gamma_4)^2 + 0.083(1 - 14.4\gamma_5)^2 + 0.083(1 - 1.8\gamma_6)^2)^{\frac{1}{2}},$$

для аппроксимации четвертого порядка

$$D_{(11)} = 1 - (0.9098 + 0.0012(1 - 1.8\gamma_2)^4 + 0.013(1 - 7.2\gamma_3)^4 + 0.022(1 - 10.8\gamma_4)^4 + 0.0269(1 - 14.4\gamma_5)^4 + 0.0269(1 - 1.8\gamma_6)^4)^{\frac{1}{4}},$$

$$D_{(22)} = 1 - (0.39 + 0.0921(1 - 1.8\gamma_2)^4 + 0.1136(1 - 7.2\gamma_3)^4 + 0.1292(1 - 10.8\gamma_4)^4 + 0.1375(1 - 14.4\gamma_5)^4 + 0.1375(1 - 1.8\gamma_6)^4)^{\frac{1}{4}},$$

$$D_{(12)} = 1 - (1.5 - 0.0289(1 - 1.8\gamma_2)^4 - 0.0788(1 - 7.2\gamma_3)^4 - 0.1158(1 - 10.8\gamma_4)^4 - 0.1355(1 - 14.4\gamma_5)^4 - 0.1355(1 - 1.8\gamma_6)^4)^{\frac{1}{4}}.$$

Средняя поврежденность для каждой из рассматриваемых аппроксимаций вычисляется соответственно в виде

$$\langle \varsigma \rangle = \frac{2}{\pi} \sqrt{C_{(2)}} \mathbf{E}(\sqrt{1 - C_{(1)} C_{(2)}^{-1}}), \quad (6.6)$$

$$\frac{\pi < \varsigma >}{2\sqrt[4]{C_{(11)}}} = \int_0^1 \sqrt[4]{\frac{p\tau^4 - 2q\tau + 1}{\tau^4 - 2\tau + 1}} d\tau. \quad (6.7)$$

$$(p = 1 + (C_{(22)} - 2C_{(12)})C_{(11)}^{-1}, \quad q = 1 - C_{(12)}C_{(11)}^{-1})$$

Результаты численного анализа зависимости отношения

$$\pi < \varsigma > / (2\sqrt{C_{(2)}})$$

от отношения квадратов главных сплошностей для аппроксимации второго порядка приводятся на рис. 15.

Результаты приведенного расчета могут быть сравнены с данными работы [157], в которой поврежденность представляется с помощью иных тензорных мер. Так для вычисления компонент тензора поврежденности для состояния поврежденности, представленного на рис. 14, по предлагаемой в [157] методике необходимо иметь только значение средней плотности $< \rho >$, вместо пяти отношений $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$.

II.7. Экстремальные свойства ориентационного распределения сплошности

Проанализированные выше усредненные по всем ориентациям в пространстве значения анизотропного распределения поврежденности (см. (2.4) и (4.22)) обладают одним интересным экстремальным свойством, которое сейчас будет доказано: средняя сплошность (отнесенная к максимальной главной сплошности) стремится принять наибольшее значение при выравнивании элементов спектра поврежденности, т.е. при эволюции к изотропному распределению.

Распределение поврежденности по ориентациям, представленное согласно низшим возможным аппроксимациям (именно – аппроксимациям второго и четвертого порядка), после усреднения по всем ориентациям, приводит к соотношениям (2.4) и (4.22) соответственно. Здесь необходимо еще раз акцентировать внимание на том, что среднее по всем ориентациям в пространстве в форме (4.22) выше было проанализировано фактически только в случае когда недиагональные поврежденности значительно меньше, чем диагональные. Но и в этом случае значения средней сплошности из-за различия элементов диагонального спектра и вклада недиагонального спектра

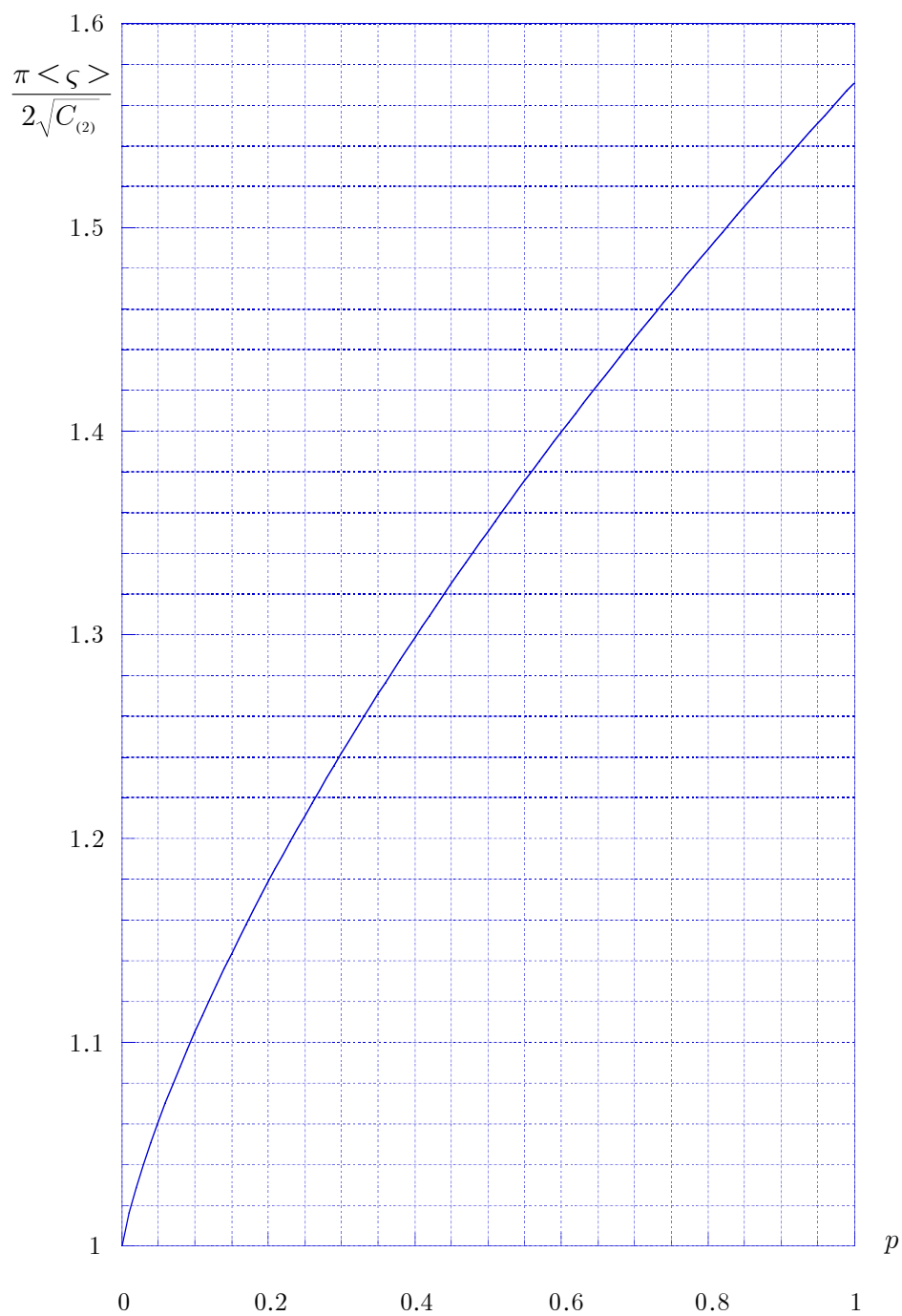


Рис. 15: Зависимость средней плотности от отношения квадратов плотностей (аппроксимация второго порядка двумерного распределения.)

поврежденности разбросаны внутри характерного слоя, изображенного на рис. 9. Для аппроксимации второго порядка разброс значений средней по ориентациям сплошности наблюдается только вследствие различия трех диагональных элементов спектра поврежденности и графически представляется в форме расходящихся из общего начала изолиний, изображенных на рис. 8.

Обозначим через $\langle \varsigma \rangle_0$, $\langle \varsigma \rangle_2$, $\langle \varsigma \rangle_4$ усреднение поврежденности по ориентациям, выполненное с помощью аппроксимаций нулевого, второго и четвертого порядков соответственно.

Нетрудно видеть (см. формулы (2.4) и (4.22), а также рис. 8 и рис. 9), что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\max \{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}\}}{C}} &\leq \\ &\leq \frac{\langle \varsigma \rangle_2}{\langle \varsigma \rangle_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\max \{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}\}}{C}} I(p_1, p_2) \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\max \{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}\}}{C}}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} 1.211125... \sqrt[4]{\frac{\max \{C_{(ik)}\}}{C}} &\leq \\ &\leq \frac{\langle \varsigma \rangle_4}{\langle \varsigma \rangle_0} = \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\max \{C_{(ik)}\}}{C}} I(p_1, p_2, p_3) \leq \\ &\leq \sqrt[4]{\frac{\max \{C_{(ik)}\}}{C}}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $C = 1 - D$.

С помощью правых частей этих двойных неравенств легко устанавливается, что $\langle \varsigma \rangle_2$ и $\langle \varsigma \rangle_4$, отнесенные соответственно к максимальным главным сплошностям $\max \{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)}\}$ и $\max \{C_{(ik)}\}$, достигают максимума для изотропного распределения при p_1, p_2, p_3 равных единице.

Таким образом, изотропное распределение поврежденности характерно максимальной сплошностью, по сравнению с анизотропным распределением, нормированными на максимальную сплошность.

Полученный только что результат, несмотря на свою простоту, приводит к важным следствиям при исследовании термодинамики состояния поврежденности и будет использован в последующих главах для исследования экстремальных (по энергии) состояний поврежденности и формулировке универсального критерия эволюции поврежденности.

Глава III. МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ С ТЕНЗОРОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ВТОРОГО РАНГА

В этой главе диссертационной работы развивается так называемый геометрический подход механики поврежденности, изложенный впервые в работе [171], где на основе представления об эквивалентной конфигурации континуума как собрании элементов, поврежденность которых некоторым воображаемым образом элиминирована, приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности), которая обладает фундаментальным свойством симметрии.

Геометрический подход [171] естественно возникает при попытке обобщения первых классических представлений о поврежденности, восходящих к Л. М. Качанову и Ю. Н. Работнову, и в то же самое время позволяет в самой простейшей форме учесть анизотропию состояния поврежденности. Одним из главных преимуществ этого подхода является возможность достаточного простого и естественного представления эффекта возрастания внутренних напряжений в среде с повреждениями с помощью понятия эффективного напряжения, что открывает возможность применения механики поврежденности в классических разделах механики деформируемого твердого тела: теории упругости, пластичности и теории ползучести. В последней главе диссертационной работы геометрический подход [171] выступает в качестве основы для вывода связанных уравнений теории пластичности и поврежденности.

Отметим, что мы применяем тензор поврежденности второго ранга, определение которого отлично от приведенного в [171] и впервые дано в [175]. Новая тензорная мера анизотропной поврежденности, в силу определения, являясь мерой сокращения, вследствие распределенных микродефектов, реально несущей нагрузку площади поверхностного элемента в зависимости от его ориентации, с самого начала вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с

несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Показано также, что эквивалентная конфигурация, введенная в работе [171], может быть корректно определена только как трехмерное риманово многообразие, при этом тензор поврежденности выступает как изометрический инвариант указанного многообразия.

Для того, чтобы отделить влияние упругой деформации на процесс накопления повреждений, вводится тензор поврежденности по отношению к конфигурации элементов, упругая деформация которых элиминирована путем локальных разгрузок из текущей конфигурации. Одним из центральных результатов здесь выступает принцип коориентированности главных осей тензора напряжений и тензора поврежденности вдоль всего процесса нагружения, если влияние упругих деформаций на состояние поврежденности является пренебрежимо малым.

На основе представления о возрастании напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений вводится тензор эффективных напряжений. Обсуждаются условия его симметрии и предлагается процедура его симметризации, основанная с одной стороны на новом подходе к моделированию анизотропной поврежденности, а с другой – на классической количественной мере указанного возрастания напряжений.

Изложение данной главы в основном следует работам [175], [57].

III.1. Модель Качанова-Работнова. Параметр поврежденности. Эффективные напряжения

Как уже отмечалось, геометрический подход [171] естественно возникает при попытке обобщения первых классических представлений о поврежденности, восходящих к Л. М. Качанову и Ю. Н. Работнову, и в то же самое время позволяет в самой простейшей форме учесть анизотропию состояния поврежденности.

Существо этого подхода к математическому моделированию процессов накопления повреждений может быть достаточно ясно продемонстрировано на примере простейшего одномерного состояния поврежденности одноосно растянутого образца.

Рассмотрим цилиндрический образец растягиваемый силой P . Обозна-

чим через A_0 и A площади поперечных сечений образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно.

В соответствии с классической теорией Качанова-Работнова, текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности) D , который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени $0 \leq D \leq 1$, причем $D = 0$ для начального неповрежденного состояния и $D = 1$ для конечного состояния разрушения.

Обычно параметр поврежденности D интерпретируется как относительное сокращение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площади поперечного сечения. Поэтому, деградация материала объясняется как постепенное уменьшение эффективной площади, которая реально несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца растяжению. В силу такой интерпретации, текущая несущая нагрузку площадь оказывается равной не A , а некоторому меньшему значению A^* и для параметра D имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - D = \frac{A^*}{A}. \quad (1.1)$$

Ясно, что определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой чисто геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности, однако его эволюция определяется конечно же и свойствами материала, и историей внешнего нагружения.

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение площади, несущей растягивающую нагрузку, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными поврежденностями. Действительно, наряду с напряжением

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.2)$$

очевидно следует рассмотреть эффективное напряжение

$$\sigma^* = \frac{P}{A^*}, \quad (1.3)$$

которое в силу формулы (1.1) можно также представить в виде

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (1.4)$$

Последняя формула выражает эффект повышения уровня напряжений в поврежденном материале, поскольку $0 \leq D \leq 1$.

Таким образом, мы можем представить себе вместо исходного образца другой, воображаемый неповрежденный образец, площадь поперечного сечения которого равна A^* , и который растягивается той же самой силой P (см. рис. 16). Механическое состояние подобного образца полностью эквивалентно текущему состоянию поврежденного образца, а изменение геометрии полностью описывается параметром поврежденности D .

Изложенные выше понятия, несмотря на свою простоту, являются достаточными предпосылками для дальнейшего развития механики поврежденного континуума. Ясно, однако, что понятия о геометрической мере поврежденности, выражающей сокращение несущей способности поверхностных элементов внутри деградирующего континуума, и об эффективных напряжениях нуждаются в корректном обобщении на случай произвольного трехмерного состояния анизотропной поврежденности. Такое обобщение было выполнено в работах [169], [170], [171].

В данной главе диссертационной работы мы попытаемся с одной стороны дать строгое формальное обоснование и уточнение основных положений трехмерной теории анизотропной поврежденности, а с другой – ее дальнейшее развитие на основе нового подхода к моделированию анизотропии, вызванной трехмерным распределением повреждений. Отличительной чертой предлагаемого подхода к тензорному представлению поврежденности также является и то, что с одной стороны возможность строго определить и ясно интерпретировать тензорную меру поврежденности (в этом плане работа является отчасти формализацией подхода [171]), а с другой – явно вычислять тензор поврежденности по экспериментальным диаграммам ориентационного распределения поврежденности. На основе развиваемой в работе теории появляется возможность ввести новую симметричную тензорную меру возрастания внутренних напряжений в анизотропно поврежденном теле, интерпретация собственных элементов которой согласуется с геометрической и механической интерпретацией собственных элементов как тензора поврежденности, так и тензора напряжений Коши.

Аккуратное аналитическое описание поврежденного состояния представляет собой довольно сложную проблему. Не вдаваясь здесь в детальное

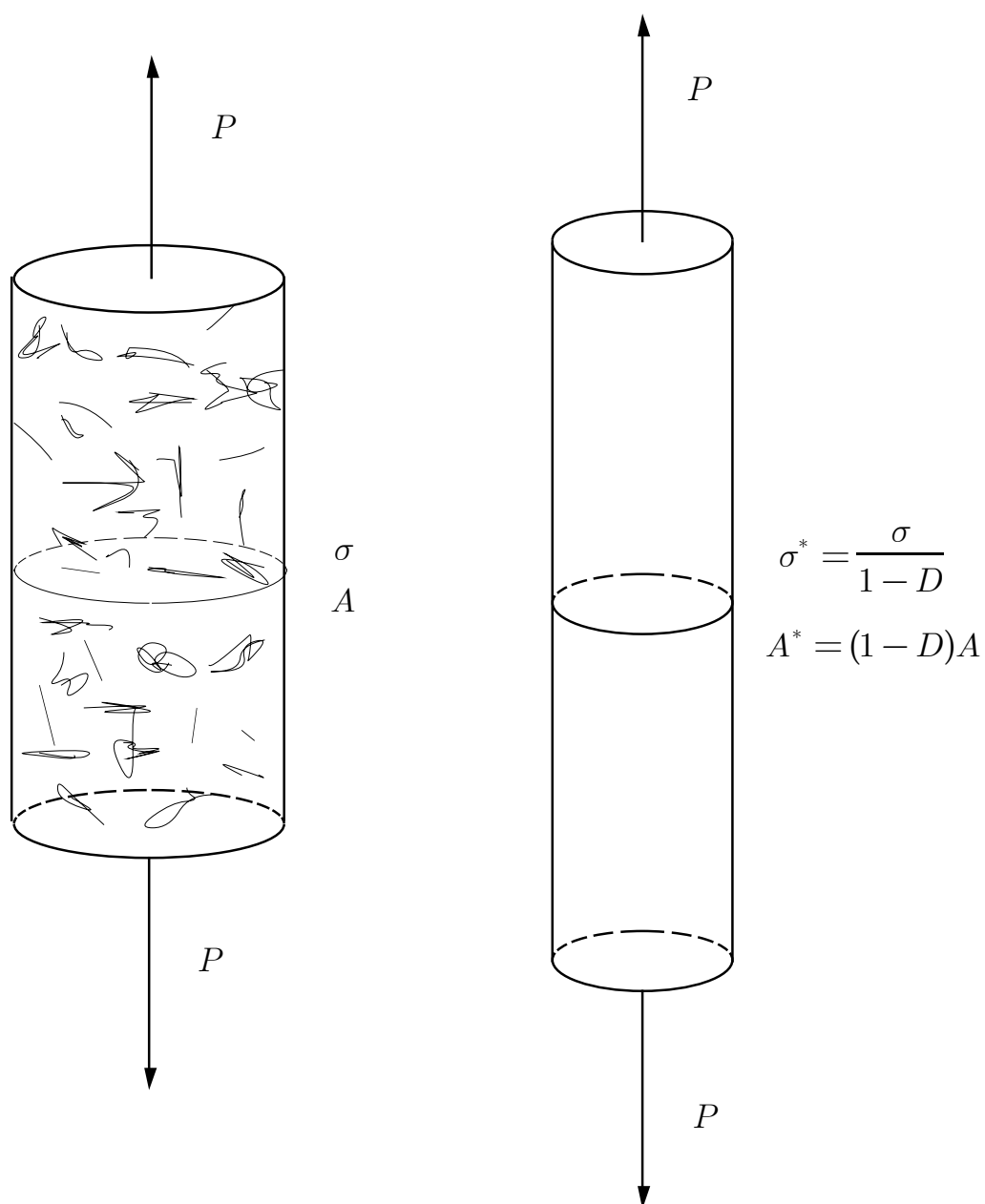


Рис. 16: Поврежденный и эквивалентный неповрежденный образец.

обсуждение всего многообразия подходов к моделированию анизотропной поврежденности, укажем только на недавно опубликованную работу [157], где имеется достаточно полный список работ, посвященных тензорным мерам поврежденности.

III.2. Эквивалентная конфигурация континуума с внутренним распределением повреждений

Как было указано выше, распределение микродефектов внутри континуума приводит с феноменологической точки зрения к сокращению реальной несущей способности поверхностных элементов континуума. В рамках математической модели это сокращение, зависящее очевидно от ориентации элемента, может быть описано, как это будет показано ниже, с помощью симметричного тензора второго ранга, имеющего простой геометрический смысл. Мы, поэтому, следуя [171], начнем с геометрического рассмотрения текущего состояния поврежденного континуума.

Рассмотрим континуум с внутренним распределением повреждений в текущем деформированном состоянии B_t . Обозначим через \mathbf{x} положение в пространстве материальной точки континуума, которая до деформации занимала положение \mathbf{X} в отсчетной (которую также будем считать неповрежденной) конфигурации B_0 .

Отображение $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$ определяет деформацию континуума. Обозначим через \mathbf{F} градиент деформации:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x})^T. \quad (2.1)$$

Если через \mathbf{I}_k и \mathbf{i}_k обозначить локальные базисные векторы конвективной системы координат в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, то справедлива также формула

$$\mathbf{i}_k = \mathbf{F} \mathbf{I}_k. \quad (2.2)$$

Выберем произвольно объемный элемент $d\tau_{\mathbf{R}}$, локализованный в окрестности точки \mathbf{X} отсчетной конфигурации, а через $d\tau$ обозначим его деформированный образ, локализованный в окрестности точки \mathbf{x} текущей конфигурации. Вследствие трехмерного распределения микродефектов, несущая нагрузку площадь плоского элемента, выбранного произвольно внутри объемного элемента $d\tau$, будет меньше геометрической площади этого элемента.

Поэтому, поврежденный плоский элемент можно заменить на неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами и считать оба элемента эквивалентными. Если элементарный объем $d\tau$ разложить на множество плоских поврежденных элементов, а затем заменить каждый поврежденный элемент ему эквивалентным, то собрав уже неповрежденные элементы, получим эквивалентный неповрежденный объемный элемент.

Искажение геометрии поврежденного элемента при описанной выше его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент определяет тензор второго ранга, который будем называть фиктивной дисторсией поврежденного элемента и обозначать через \mathbf{G} .

Если теперь каждый элемент континуума в его текущем поврежденном состоянии заменить эквивалентным неповрежденным элементом, а затем осуществить сборку эквивалентных элементов в одно тело, то получим конфигурацию, которую следуя [171], будем называть эквивалентной конфигурацией поврежденного континуума B_t^* .

Обозначим через \mathbf{x}^* положение в эквивалентной конфигурации материальной точки, которая в текущей поврежденной конфигурации занимала положение \mathbf{x} , а через $d\tau^*$ – деформированный в результате перехода в эквивалентное неповрежденное состояние элемент объема $d\tau$.

Отметим два важных для дальнейших рассуждений обстоятельства. Прежде всего ясно, что введенная выше эквивалентная конфигурация не определена однозначно, ибо сборка эквивалентных объемных элементов в единое тело может быть произведена многими различными способами. Можно даже указать степень такого произвола: положение эквивалентного элемента определяется с точностью до вращения его как жесткого целого. И второе важное замечание. Поскольку вообще говоря фиктивные дисторсии поврежденных объемных элементов несовместны, то не существует непрерывного поля перемещений из текущей конфигурации в эквивалентную и отображение $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ не является гладким.

Чтобы восстановить гладкость этого отображения необходимо рассматривать эквивалентную конфигурацию как трехмерное риманово многообразие [97], метрика которого $g_{\alpha\beta}^*$ определяется фиктивной дисторсией \mathbf{G} :

$$g_{\alpha\beta}^* = \mathbf{i}_\alpha^* \cdot \mathbf{i}_\beta^*, \quad (2.3)$$

где векторы \mathbf{i}_α^* ($\alpha = 1, 2, 3$) являются образами базисных векторов \mathbf{i}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) при трансформации в эквивалентное состояние:

$$\mathbf{i}_\alpha^* = \mathbf{G} \mathbf{i}_\alpha. \quad (2.4)$$

Еще раз подчеркнем, что метрика $g_{\alpha\beta}^*$, в отличие от метрики текущего поврежденного состояния $g_{\alpha\beta}$, не является евклидовой и, поэтому, тензор Римана-Кристоффеля не исчезает [93]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \neq 0. \quad (2.5)$$

III.3. Определение и координатное представление тензора поврежденности

Определенные выше понятия об эквивалентной конфигурации и фиктивной дисторсии поврежденных элементов являются ключевыми для корректного построения тензорной меры анизотропной поврежденности и ее последующей механической интерпретации. Как сейчас будет показано, тензор поврежденности может быть определен только через тензор фиктивной дисторсии \mathbf{G} .

Рассмотрим тензор фиктивной дисторсии \mathbf{G} . Равенства (2.4) можно рассматривать как формальное определение тензора \mathbf{G} и получить, как следствие, следующее выражение:

$$\mathbf{G} = \mathbf{i}_\alpha^* \otimes \mathbf{i}^\alpha. \quad (3.1)$$

Чтобы вычислить изменение площади поврежденного плоского элемента при его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент, рассмотрим внутри объема $d\tau$ произвольно ориентированный плоский элемент PQR (см. рис. 17), который будем представлять с помощью вектора $d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA$, где \mathbf{n} – единичный вектор нормали, dA – площадь элемента PQR .

Эквивалентный неповрежденный элемент $P^*Q^*R^*$ в свою очередь представляется вектором $d\mathbf{A}^* = \mathbf{n}^* dA^*$.

В соответствии с определением тензора \mathbf{G} справедливы следующие соотношения:

$$\overline{P^*Q^*} = \mathbf{G} \overline{PQ}, \quad \overline{P^*R^*} = \mathbf{G} \overline{PR}. \quad (3.2)$$

Далее, следуя [171], используя последнюю формулу, с помощью теоремы Нансона, можно получить следующее уравнение, связывающее векторные

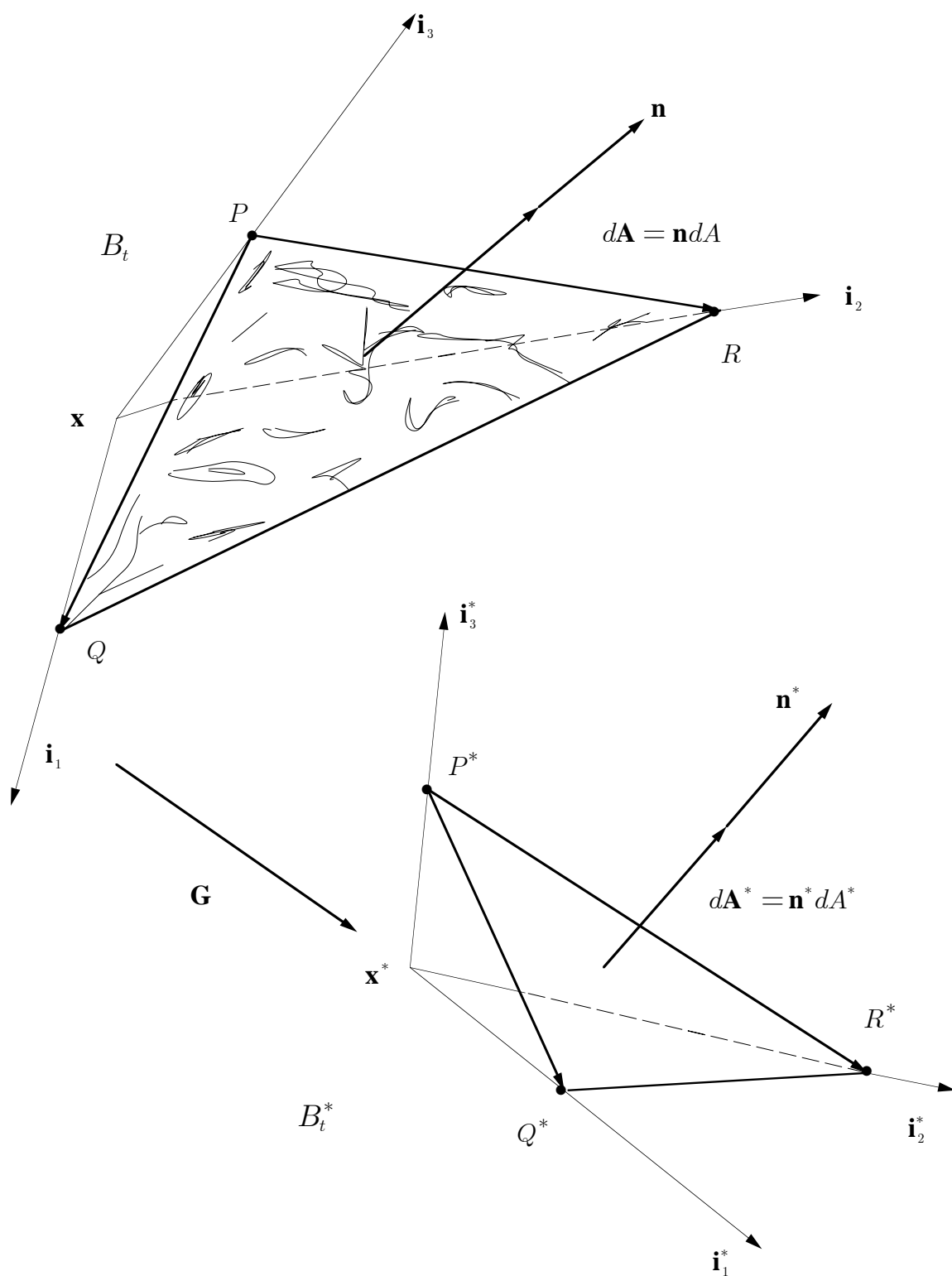


Рис. 17: Изменение площади поврежденного плоского элемента при его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент.

элементы площади $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$:

$$d\mathbf{A}^* = \frac{1}{2} \overline{P^*Q^*} \times \overline{P^*R^*} = \frac{1}{2} (\mathbf{G} \overline{PQ}) \times (\mathbf{G} \overline{PR}) = (\det \mathbf{G}) \mathbf{G}^{-T} d\mathbf{A}. \quad (3.3)$$

Определяя тензор \mathbf{D} посредством соотношения [171]

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = (\det \mathbf{G}) \mathbf{G}^{-T}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор, уравнение (3.3) может быть представлено в форме

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) d\mathbf{A}. \quad (3.5)$$

Последнее уравнение показывает, что тензор \mathbf{D} полностью определяет ориентацию и площадь эквивалентного неповрежденного элемента и в принципе может быть принят в качестве тензорной меры поврежденности, как это было сделано в работе [171]. Однако, как следует из определения (3.4), тензор \mathbf{D} , вообще говоря, несимметричен, что вызывает значительные трудности при его интерпретации. Поэтому, мы продолжим рассуждения, чтобы найти более подходящую меру.

Как было отмечено выше эквивалентное неповрежденное тело может быть собрано в одно целое из эквивалентных элементарных объемов многими способами. Ясно также, что вращения эквивалентных элементов в процессе сборки следует исключить, что равносильно требованию симметричности тензора фиктивной дисторсии \mathbf{G} . Можно, однако, считать тензор \mathbf{G} несимметричным и учесть указанную инвариантность относительно вращений эквивалентных элементов следующим образом.

Умножим скалярно левую и правую части уравнения (3.3) сами на себя. В результате получим соотношение

$$d\mathbf{A}^* \cdot d\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{G})^2 (d\mathbf{A})^2 |\mathbf{G}^{-T} \mathbf{n}|^2, \quad (3.6)$$

подставляя в которое следующее очевидное равенство

$$|\mathbf{G}^{-T} \mathbf{n}|^2 = \text{tr} [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})], \quad (3.7)$$

получим

$$\frac{dA^*}{dA} = (\det \mathbf{G}) \sqrt{\text{tr} [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.8)$$

Последнее уравнение выражает сокращение эффективной, несущей нагрузку площади в зависимости от ориентации плоского поврежденного элемента и позволяет корректно ввести симметричный тензор поврежденности.

Введем в уравнение (3.8), пользуясь формулой (3.4), тензор \mathbf{D} , в результате получим следующее уравнение:

$$\frac{dA^*}{dA} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T(\mathbf{I} - \mathbf{D})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.9)$$

Определим тензор второго ранга $\overline{\mathbf{D}}$ посредством следующего соотношения:

$$\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}} = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T(\mathbf{I} - \mathbf{D})}. \quad (3.10)$$

Подобное определение является корректным, поскольку под корнем находится симметричный положительно определенный тензор.

В силу определения тензор $\overline{\mathbf{D}}$ является симметричным и положительно определенным, поэтому его собственные значения $\overline{D}_{(\alpha)}$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$1 - \overline{D}_{(\alpha)} > 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.11)$$

Покажем, что вращательная составляющая тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ оказывается исключенной.

Рассмотрим полярное разложение Коши тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – ортогональный тензор, $\mathbf{\Sigma}$ – симметричный положительно определенный тензор. Подставляя это разложение в формулу (3.10) получим

$$\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}} = \sqrt{\mathbf{\Sigma} \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Sigma}. \quad (3.13)$$

Следовательно разложение (3.12) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}). \quad (3.14)$$

Исключая вращательную часть, т. е. полагая

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{I},$$

получим равенство двух тензорных мер поврежденности

$$\mathbf{D} = \overline{\mathbf{D}}. \quad (3.15)$$

Тензор \mathbf{D} в работе [171] был назван тензором поврежденности. Мы сохраним это название, но за тензором $\overline{\mathbf{D}}$. В дальнейшем для сокращения записи уравнений вместо обозначения $\overline{\mathbf{D}}$ будем использовать более короткое – \mathbf{D} .

Тензор поврежденности определяет сокращение несущей нагрузку площади плоского элемента с нормалью \mathbf{n} по формуле (см. уравнения (3.9), (3.10)):

$$\frac{dA^*}{dA} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}. \quad (3.16)$$

Сравнивая выражения (3.8) и (3.16) для отношения площадей поврежденного и эквивалентного элементов, можно получить следующее представление тензора поврежденности через фиктивную дисторсию:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})}}. \quad (3.17)$$

Как следует из последнего уравнения, тензор $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2$ вполне аналогичен тензорной мере деформации Фингера [198].

Рассмотрим координатное представление тензора поврежденности. Для этого симметричный тензор, находящийся под корнем в уравнении (3.17), представим, пользуясь тождеством Гамильтона-Кэли [117], в следующем виде:

$$\frac{\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}}{\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{I}, \quad (3.18)$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ и $\Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ главные инварианты тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$.

В силу формулы (3.1) имеем

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}^* \mathbf{i}^\alpha \otimes \mathbf{i}^\beta. \quad (3.19)$$

Подстановка последнего выражения в (3.18) и подсчет инвариантов тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ приводят к следующей формуле для компонент тензора $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2$ относительно конвективной системы координат текущего поврежденного состояния:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D})_{\gamma\lambda}^2 = g_{\gamma\beta}^* g_{\mu\lambda}^* g^{\beta\mu} - g_{\gamma\lambda}^* g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}] g_{\gamma\lambda}. \quad (3.20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.16), получим также

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} n^\nu n^\alpha - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\alpha\beta} n^\mu n^\nu + \\ &+ \frac{1}{2} [(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Формулы (3.20), (3.21) показывают, что тензор поврежденности является изометрическим инвариантом как текущей поврежденной, так и эквивалентной неповрежденной конфигурации, т. е. не изменяется при любых трансформациях указанных конфигураций, при которых метрики $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^*$ остаются неизменными.

Таким образом, эквивалентная неповрежденная конфигурация определена также с точностью до ее изометрической трансформации.

Заканчивая на этом исследование формальных свойств тензора поврежденности, переходим к содержательной интерпретации собственных элементов тензора поврежденности.

III.4. Главные поврежденности и главные оси поврежденности. Геометрическая и механическая интерпретация собственных элементов тензора поврежденности

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности \mathbf{D} имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности).

Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора \mathbf{D} будем обозначать через $\mathbf{d}_{(\alpha)}$, а собственные значения, как указывалось выше, — через $D_{(\alpha)}$.

Для содержательной интерпретации, тензор поврежденности удобно представить в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^3 D_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)}. \quad (4.1)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации B_t , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (см. рис. 18). Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}}$.

В силу уравнений (3.5), (3.15) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением:

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{D})d\mathbf{A}, \quad (4.2)$$

подставляя в которое спектральное разложение (4.1) получим

$$d\mathbf{A}^* = \sum_{\alpha=1}^3 (1 - D_{(\alpha)}) dA_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (4.3)$$

где $dA_{(\alpha)} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{(\alpha)}$ есть площади граней тетраэдра $OPQR$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Умножая обе части уравнения (4.3) скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(\beta)}$, получим

$$dA_{(\beta)}^* = (1 - D_{(\beta)}) dA_{\beta}, \quad (4.4)$$

(по β не суммировать $\beta = 1, 2, 3$)

где $dA_{(\alpha)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{\alpha}$ есть площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенных в главных плоскостях поврежденности.

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности, так как это определяется простыми формулами (4.4).

Формула (4.4) в простейшей форме выражает количественно эффект сокращения эффективной площади элементов континуума с внутренним распределением повреждений.

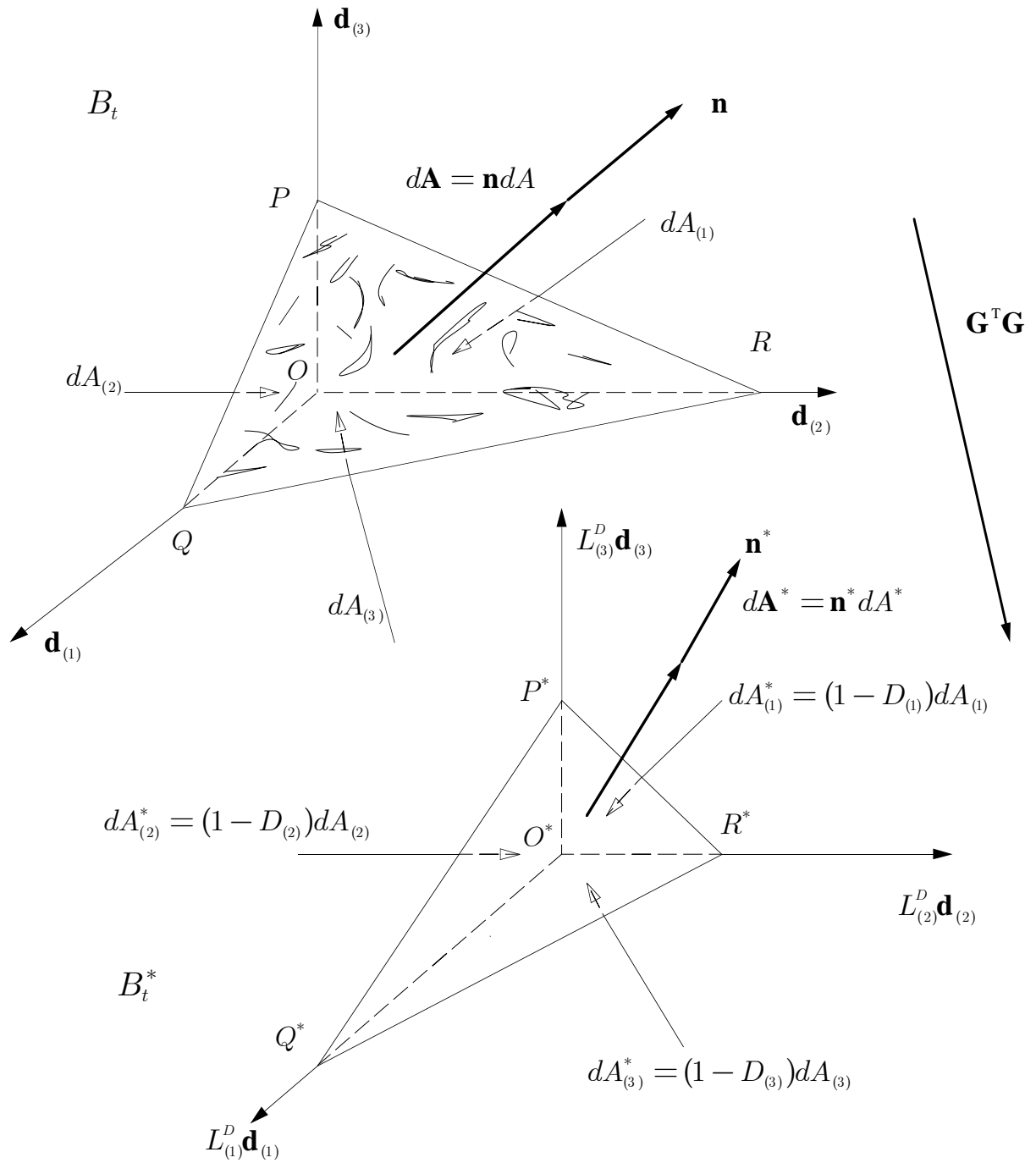


Рис. 18: Трансформация поврежденного объемного элемента, опирающегося на главные оси поврежденности, в эквивалентное неповрежденное состояние.

Возможна также и другая интерпретация главных поврежденностей через сокращение линейных размеров тетраэдра $OPQR$ при его трансформации в эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$.

Действительно, поскольку тензоры $\mathbf{I}-\mathbf{D}$ и $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ соосны, то справедливы соотношения

$$\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{d}_{(\alpha)} = L_{(\alpha)}^D \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (4.5)$$

(по α не суммировать $\alpha = 1, 2, 3$)

где $L_{(\alpha)}^D$ есть фиктивные удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное неповрежденное состояние.

Воспользовавшись уравнениями (3.17), (4.5) находим соотношения, связывающие главные поврежденности с главными фиктивными удлинениями:

$$1 - D_{(\alpha)} = \frac{L_{(1)}^D L_{(2)}^D L_{(3)}^D}{L_{(\alpha)}^D}. \quad (4.6)$$

Разрешив последние уравнения относительно $L_{(\alpha)}^D$, находим также

$$\begin{aligned} L_{(1)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(2)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(3)})}{(1 - D_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^D &= \sqrt{\frac{(1 - D_{(1)})(1 - D_{(2)})}{(1 - D_{(3)})}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Таким образом, главные поврежденности $D_{(\alpha)}$ определяют удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное состояние B_t^* в соответствии с формулами (4.7) и позволяют вычислить приведенные длины поврежденности. При этом, очевидно, что при переходе в эквивалентное состояние объем элемента изменяется, т. е. поврежденность имеет ненулевую объемную меру.

III.5. Экстремальные свойства главных поврежденностей. Вычисление тензора поврежденности по экспериментальным диаграммам

Главные поврежденности $D_{(\alpha)}$ обладают важным экстремальным свойством, которое может также служить их определением. Кроме того тензор поврежденности и главные поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения ориентационного распределения поврежденности, что дает возможность прямого вычисления тензорной меры поврежденности исходя из полученных экспериментально диаграмм распределения поврежденности по ориентациям.

Формула (3.16), переписанная в главных осях поврежденности, имеет вид

$$\frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} = (1 - D_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - D_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - D_{(3)})^2 n_{(3)}^2. \quad (5.1)$$

Занумеровав главные поврежденности в порядке их убывания

$$D_{(1)} \geq D_{(2)} \geq D_{(3)}$$

и подставляя равенство

$$n_{(1)}^2 = 1 - n_{(2)}^2 - n_{(3)}^2$$

в формулу (5.1), после преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= (1 - D_{(1)})^2 + [(1 - D_{(2)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(2)}^2 + \\ &+ [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(3)}^2 \geq (1 - D_{(1)})^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогично может быть получена оценка сверху для отношения площадей поврежденного и неповрежденного плоских элементов:

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= (1 - D_{(3)})^2 - [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(2)})^2] n_{(2)}^2 - \\ &- [(1 - D_{(3)})^2 - (1 - D_{(1)})^2] n_{(1)}^2 \leq (1 - D_{(3)})^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Объединяя оценки (5.2) и (5.3), получим следующую двустороннюю оценку:

$$1 - D_{(1)} \leq \frac{dA^*}{dA} \leq 1 - D_{(3)}, \quad (5.4)$$

которая показывает, что наибольшее и наименьшее сокращение несущей нагрузку площади происходит в первом и третьем главных направлениях поврежденности.

Экстремальные значения относительного сокращения эффективной площади равны $D_{(1)}$ и $D_{(3)}$, как это следует из оценки

$$D_{(3)} \leq \frac{dA - dA^*}{dA} \leq D_{(1)}. \quad (5.5)$$

Таким образом, главные поврежденности устанавливают границы относительного уменьшения эффективной площади плоских элементов в континууме с внутренним распределением повреждений.

Обратимся теперь к исходному определению тензора поврежденности (3.16).

На основании (I.5.29) уравнение (3.16) может быть разрешено относительно тензора поврежденности в виде

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint_S \varsigma^2(\mathbf{n}) [5\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}] dS}, \quad (5.6)$$

где интегрирование производится по сфере единичных направлений S и введено обозначение

$$\varsigma(\mathbf{n}) = \frac{dA^*(\mathbf{n})}{dA(\mathbf{n})}.$$

Таким образом, тензор поврежденности второго ранга может быть вычислен, исходя из известного (в том числе, определенного экспериментально) локального распределения поврежденности в зависимости от направления $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$.

Формула (5.6) в главных осях поврежденности приобретает следующий вид

$$D_{(\alpha)} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi} \iint_S \varsigma^2(\mathbf{n}) [5n_{(\alpha)}^2 - 1] dS} \quad (5.8)$$

и может быть использована для прямого подсчета главных поврежденностей.

Наиболее типичны получаемые экспериментально кусочно-постоянные на сфере единичных направлений диаграммы поврежденности. Если обозначить через ς_i значение сплошности для участка сферы малой площади δA_i , в пределах которого поврежденность можно считать постоянной, то тензор поврежденности вычисляется по формуле

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \sum_l \varsigma_l^2 [5\mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l - \mathbf{I}] \delta A_l}, \quad (5.9)$$

которая связывает теоретическую модель с экспериментальным измерением поврежденности.

III.6. Возрастание напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений. Тензор эффективных напряжений

Как было отмечено, вследствие сокращения эффективной площади элементов поврежденного континуума, уровень напряжений в поврежденном континууме должен возрастать. Для моделирования этого эффекта обычно вводится соответствующий тензор, который затем используется также при формулировке определяющих уравнений поврежденного континуума, заменяя тензор истинных напряжений Коши.

Прежде всего определим вектор эффективных напряжений \mathbf{t}^* , полагая, что поверхностные усилия, действующие на поврежденный плоский элемент и эквивалентный неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами, равны:

$$\mathbf{t} dA = \mathbf{t}^* dA^*. \quad (6.1)$$

Пользуясь формулой (3.16), последнее уравнение можно также представить в форме

$$\mathbf{t}^* = \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]}}. \quad (6.2)$$

Ясно, что вектор эффективного поверхностного усилия \mathbf{t}^* имеет то же направление, что и вектор истинного поверхностного усилия \mathbf{t} , превосходя

его по абсолютной величине.

Вводя в уравнение (6.1) тензор напряжений Коши \mathbf{T} и используя формулу (4.2), получим

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{T} \frac{d\mathbf{A}}{dA^*} = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \frac{d\mathbf{A}^*}{dA^*} = \mathbf{T}^* \mathbf{n}^*, \quad (6.3)$$

где тензор \mathbf{T}^* определен следующим равенством

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}. \quad (6.4)$$

Мы будем называть тензор \mathbf{T}^* тензором эффективных напряжений.

Как следует из определения, тензор \mathbf{T}^* , вообще говоря, не является симметричным, поэтому система эффективных поверхностных усилий, действующих на эквивалентный неповрежденный объемный элемент $d\tau^*$, не будет самоуравновешенной.

Так как поверхностные усилия, действующие на элемент $d\tau$, самоуравновешены, то

$$\mathbf{t}dA + \mathbf{t}^1dA_1 + \mathbf{t}^2dA_2 + \mathbf{t}^3dA_3 = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{t} , \mathbf{t}^1 , \mathbf{t}^2 , \mathbf{t}^3 – поверхностные усилия, действующие на грани тетраэдра $OPQR$, образованного плоским элементом PQR , опирающимся на векторы \mathbf{i}_α конвективного базиса (см. рис. 19).

В силу уравнения (6.1) из уравнения равновесия (6.5) следует также

$$\mathbf{t}^*dA^* + \mathbf{t}^{*1}dA_1^* + \mathbf{t}^{*2}dA_2^* + \mathbf{t}^{*3}dA_3^* = \mathbf{0}, \quad (6.6)$$

т. е. главный вектор эффективных поверхностных усилий, действующих на грани эквивалентного неповрежденного тетраэдра равен нулю. Поэтому эквивалентный объемный элемент будет находиться только под действием неуравновешенной пары сил.

Последнее обстоятельство чрезвычайно затрудняет использование тензора \mathbf{T}^* для представления напряжений в поврежденном континууме, поэтому мы сначала обсудим условия симметрии тензора.

Так как тензор напряжений Коши симметричен, то из уравнения (6.4) следует

$$\mathbf{T}^{*\mathbf{T}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{T}^* (\mathbf{I} - \mathbf{D}). \quad (6.7)$$

Полученное уравнение позволяет сформулировать условие симметрии

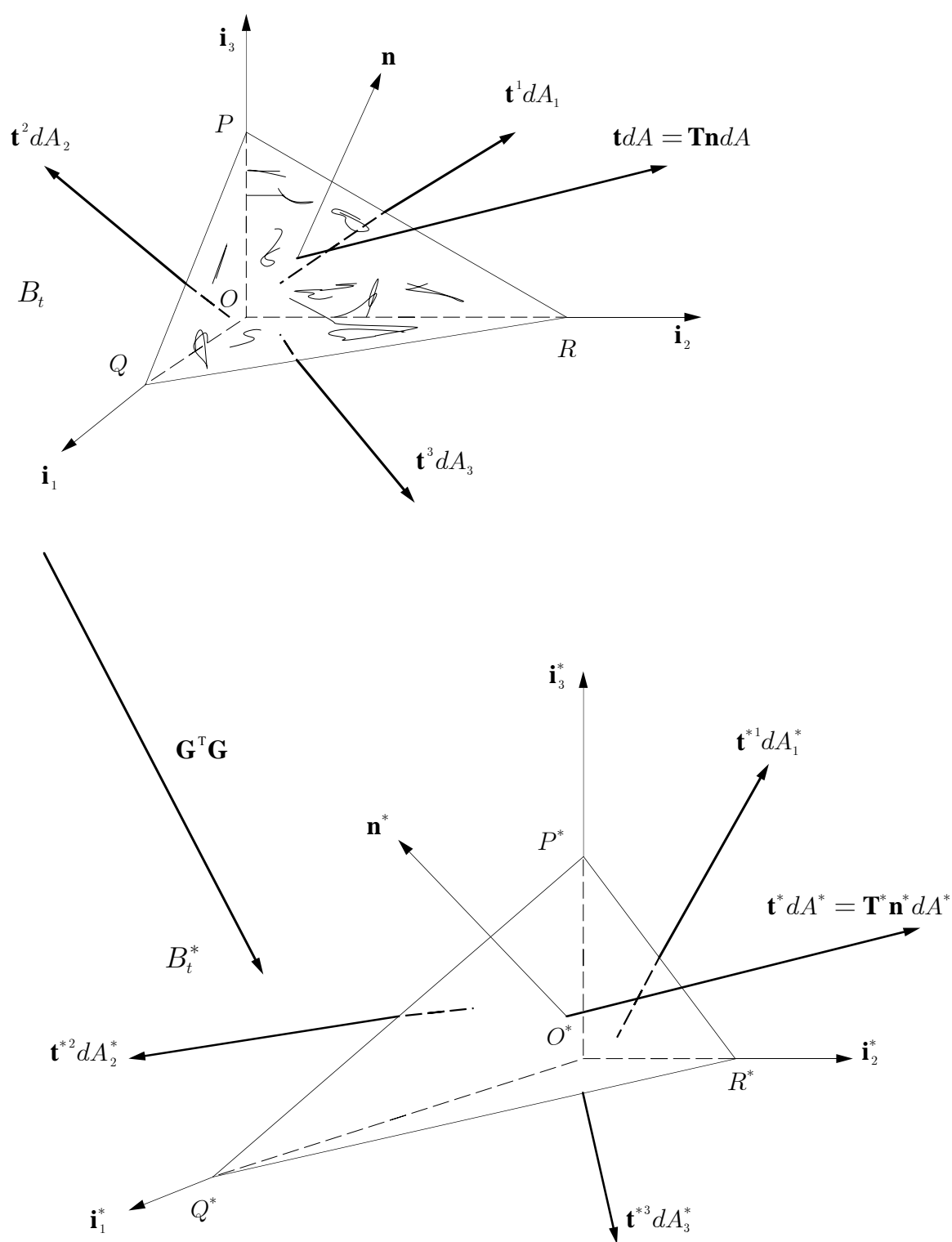


Рис. 19: Равновесие поврежденного и эквивалентного неповрежденного элемента.

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{*\mathbf{T}} \quad (6.8)$$

в виде

$$\mathbf{T}^*\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{T}^* \quad (6.9)$$

или также в виде

$$\mathbf{T}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{T}. \quad (6.10)$$

Таким образом, тензор \mathbf{T}^* симметричен тогда и только тогда, когда тензор поврежденности перестановочен с тензором напряжений Коши. Перестановка двух симметричных тензоров второго ранга возможна в свою очередь тогда и только тогда, когда эти тензоры соосны (точнее имеют по крайней мере одну общую тройку главных направлений).

Если тензоры \mathbf{T} и \mathbf{D} соосны, то тензор \mathbf{T}^* также им соосен, так что в главных осях поврежденности имеем следующее равенство (см. уравнение (6.4)):

$$T_{(\alpha)}^* = \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}}. \quad (6.11)$$

(по α не суммировать $\alpha = 1, 2, 3$)

Полученная формула в простейшей, согласующейся с геометрическим смыслом тензора поврежденности форме описывает эффект возрастания напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений.

Становится также ясно, что тензор \mathbf{T}^* необходимо симметризовать таким образом, чтобы выполнялось соотношение, аналогичное (6.11). Мы опишем процедуру симметризации ниже. Здесь же отметим, что необходимость симметризации тензора эффективных напряжений была осознана давно и были предложены различные схемы симметризации (см., например, [189], [169], [108], [95], [158], [200])¹².

¹²Симметризация тензора эффективных напряжений достигается, как правило, с помощью линейной трансформации тензора напряжений Коши:

$$T_{ij}^* = \mathfrak{D}_{ikjl} T_{kl},$$

где \mathfrak{D}_{ikjl} – тензор влияния.

Различные варианты возможных выражений для тензора влияния – следующие:

III.7. Тензор поврежденности для конфигурации упруго разгруженных поврежденных элементов

Тензор поврежденности был выше определен как мера сокращения эффективной площади плоских поврежденных элементов континуума (можно сказать, что он определен по отношению к текущей конфигурации B_t). Все предыдущие рассуждения касались только одного необратимого изменения состояния – накопления повреждений, вне всякой связи с другими необратимыми изменениями состояния. Не касаясь здесь термодинамического аспекта процесса накопления повреждений, отделим влияние упругой (в широком смысле – обратимой части) деформации на состояние поврежденности элементов. Как будет показано ниже, это позволит ввести еще одну тензорную меру анизотропной поврежденности, а также по новому интерпретировать условия симметрии тензора эффективных напряжений.

Помимо трех введенных ранее конфигураций B_0 , B_t , B_t^* , рассмотрим конфигурацию \tilde{B}_t , состоящую из поврежденных элементов, упругая деформация которых элиминирована путем упругой разгрузки каждого элемента из его текущего состояния. Подобная процедура отделения упругой деформации широко используется в теории пластичности (см., например, [161]).

Положения элементов в конфигурации \tilde{B}_t будем обозначать через $\tilde{\mathbf{x}}$.

Дисторсия поврежденного элемента в результате его упругой разгрузки описывается тензором \mathbf{F}^{e-1} , следовательно тензор $\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{e-1}\mathbf{F}$ описывает чисто необратимую часть деформации (см. рис. 20).

Таким образом градиент деформации представляется в виде композиции упругого и пластического градиентов:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (7.1)$$

Конвективный базис \mathbf{i}_α , трансформируясь вместе с элементом при его

$$\mathfrak{D}_{ikjl} = (\delta_{ik} - D_{ik})^{-1/2} (\delta_{jl} - D_{jl})^{-1/2},$$

$$\mathfrak{D}_{ikjl} = \frac{1}{4} [\delta_{ij}(\delta_{kl} - D_{kl})^{-1} + \delta_{il}(\delta_{kj} - D_{kj})^{-1} + (\delta_{ij} - D_{ij})^{-1}\delta_{kl} + (\delta_{il} - D_{il})^{-1}\delta_{kj}],$$

$$\mathfrak{D}_{ikjl} = \frac{1}{2} [(\delta_{ij} - D_{ij})^{-1}(\delta_{kl} - D_{kl})^{-1} + (\delta_{il} - D_{il})^{-1}(\delta_{kj} - D_{kj})^{-1}],$$

$$\mathfrak{D}_{ikjl} = \frac{1}{2} \left[\exp\left(\frac{D_{ij}}{2}\right) \exp\left(\frac{D_{kl}}{2}\right) + \exp\left(\frac{D_{il}}{2}\right) \exp\left(\frac{D_{kj}}{2}\right) \right].$$

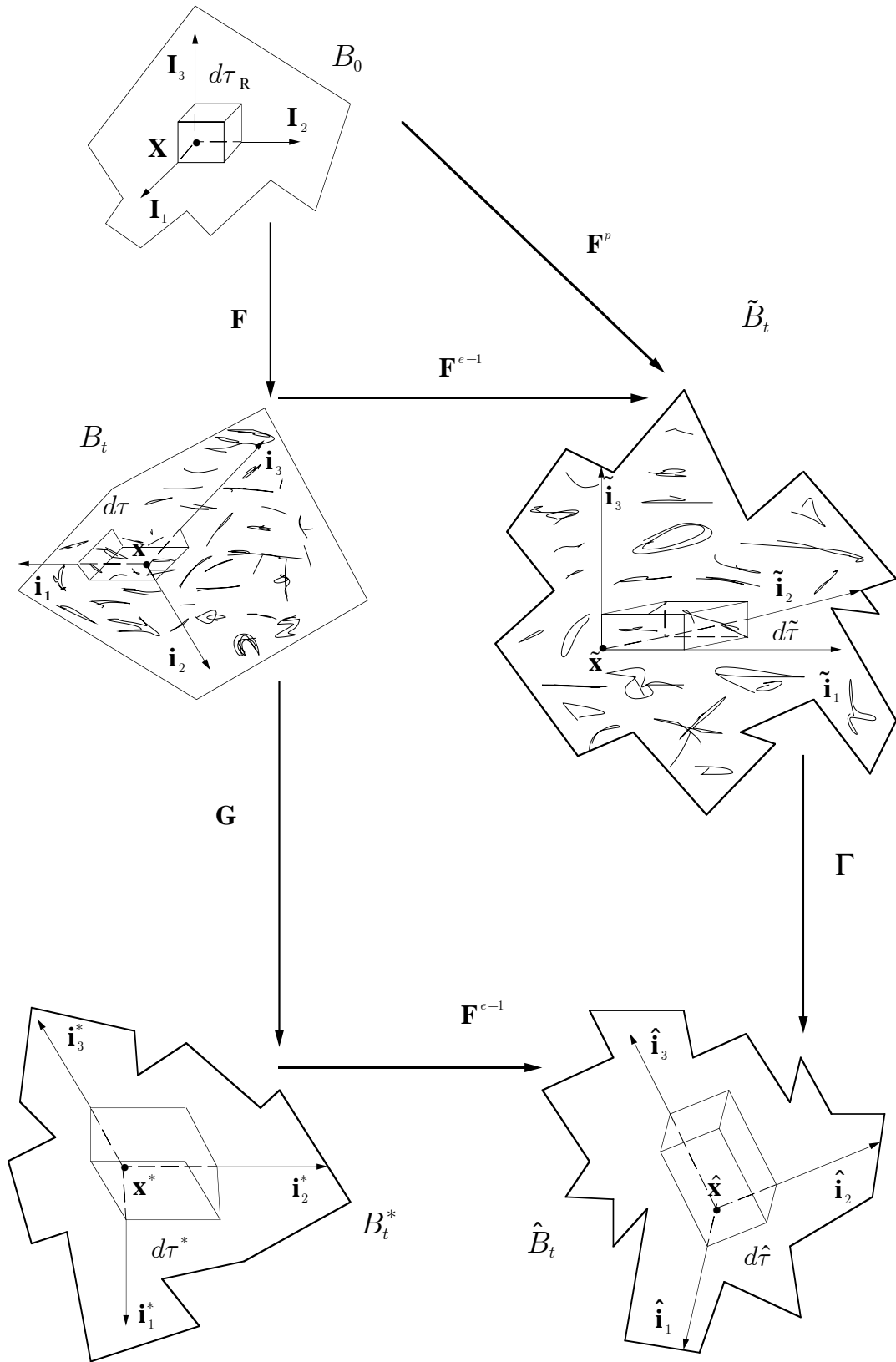


Рис. 20: Отделение упругой составляющей конечной деформации и повреждения.

упругой разгрузке, преобразуется в базис $\tilde{\mathbf{i}}_\alpha$. Образ векторного элемента $d\mathbf{A}$ при указанной трансформации обозначим через $d\tilde{\mathbf{A}}$.

Так как дисторсия, опеределяемая тензором \mathbf{G} , является полностью не-обратимой, то дисторсия эквивалентных неповрежденных элементов при их упругой разгрузке описывается тем же самым тензором \mathbf{F}^{e-1} .

Будем обозначать через \hat{B}_t конфигурацию эквивалентных неповрежденных элементов, подвергшихся упругой разгрузке, через $\hat{\mathbf{x}}$ – положение элементов в этой конфигурации, а через $d\hat{\mathbf{A}}$ – образ векторного элемента площади эквивалентного неповрежденного элемента после его упругой разгрузки.

Дисторсия поврежденного элемента в конфигурации \tilde{B}_t , в результате его трансформации в конфигурацию \hat{B}_t , описывается тензором

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{G} \mathbf{F}^e. \quad (7.2)$$

Определим тензор $\mathbf{\Delta}$ равенством, аналогичным (3.17),

$$\mathbf{I} - \mathbf{\Delta} = \sqrt{\frac{\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{\Gamma}^{-T}}{\det(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{\Gamma}^{-T})}}. \quad (7.3)$$

Тензор $\mathbf{\Delta}$ вполне аналогичен тензору \mathbf{D} и его интерпретация не вызывает затруднений. Тензор $\mathbf{\Delta}$ определяет сокращение эффективной площади поврежденных, подвергшихся упругой разгрузке элементов в соответствии с формулой

$$\frac{d\hat{A}}{d\tilde{A}} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{\Delta})^2(\tilde{\mathbf{n}} \otimes \tilde{\mathbf{n}})]}. \quad (7.4)$$

Тензор $\mathbf{\Delta}$ будем называть тензором поврежденности по отношению к конфигурации \tilde{B}_t .

Сокращение эффективной площади плоских поврежденных элементов в конфигурации \tilde{B}_t , нормальных собственным векторам $\boldsymbol{\delta}_{(\alpha)}$ тензора $\mathbf{\Delta}$, определяется формулами ($\Delta_{(\alpha)}$ – главные поврежденности в конфигурации \tilde{B}_t):

$$d\hat{A}_\beta = (1 - \Delta_{(\beta)}) d\tilde{A}_\beta \quad (7.5)$$

(по β не суммировать $\beta = 1, 2, 3$)

аналогичными (4.4).

Удлинения (сокращения) главных осей поврежденности в конфигурации \tilde{B}_t вычисляются по формулам (см. (4.7)):

$$\begin{aligned} L_{(1)}^\Delta &= \sqrt{\frac{(1 - \Delta_{(2)})(1 - \Delta_{(3)})}{(1 - \Delta_{(1)})}}, \\ L_{(2)}^\Delta &= \sqrt{\frac{(1 - \Delta_{(1)})(1 - \Delta_{(3)})}{(1 - \Delta_{(2)})}}, \\ L_{(3)}^\Delta &= \sqrt{\frac{(1 - \Delta_{(1)})(1 - \Delta_{(2)})}{(1 - \Delta_{(3)})}}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Полученные результаты позволяют дать другую формулировку условий симметрии тензора эффективных напряжений.

III.8. Условия симметрии и симметризация тензора эффективных напряжений

Как уже отмечалось, тензор эффективных напряжений не является, вообще говоря, симметричным. Следовательно, эквивалентная конфигурация не является самоуравновешенной.

Тензор эффективных напряжений, однако, заведомо симметричен, если тензор напряжений Коши и тензор поврежденности соосны. Мы сейчас интерпретируем это условие, используя результаты п.7.

Рассмотрим уравнение (7.2). Тензор \mathbf{G} в принципе можно считать симметричным (см. п.3), также как и тензор \mathbf{F}^e и по тем же самым причинам. Поэтому, тензор $\mathbf{\Gamma}$ симметричен тогда и только тогда, когда тензоры \mathbf{G} (или \mathbf{D}) и \mathbf{F}^e соосны. При этом тензоры $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{G} совпадают, также как и тензоры \mathbf{D} и $\mathbf{\Delta}$ и выполняется равенство

$$\mathbf{F}^e \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{F}^e \tag{8.1}$$

или, что эквивалентно, равенство

$$\mathbf{B}^e \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{B}^e, \tag{8.2}$$

где \mathbf{B}^e – левый тензор Коши-Грина упругой деформации.

Предположив теперь, что континуум является упруго изотропным, заключаем, что уравнение (8.2) удовлетворяется, только если главные оси тензоров \mathbf{D} и \mathbf{T} совпадают.

Итак, тензор эффективных напряжений симметричен тогда и только тогда, когда главные оси упругой деформации ориентированы также, как и главные оси поврежденности, т. е. плоские поврежденные элементы с экстремальными значениями сокращения эффективной площади нормальны главным осям упругой деформации в конфигурации B_t . При этом тензоры поврежденности \mathbf{D} и Δ совпадают, что означает, что упругая деформация никак не влияет на состояние поврежденности.

В виду того, что нарушение симметрии тензора эффективных напряжений вызвано различием в ориентации главных осей тензора напряжений и тензора поврежденности, тензор

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{T} \quad (8.3)$$

может служить мерой экстронапряжений, которые представляют пары сил, действующие на эквивалентные элементы в конфигурации B_t^* и может быть назван тензором экстронапряжений поврежденного континуума.

Для характеристики различия в ориентации главных осей напряжений и главных осей поврежденности введем ортогональный тензор \mathbf{Q} , который определяет преобразование поворота главных осей поврежденности в главные оси напряжений:

$$\mathbf{s}_{(\alpha)} = \mathbf{Q}\mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (8.4)$$

где \mathbf{s}_{α} – векторы ортонормированного собственного базиса тензора напряжений. Напомним, что главные оси нумеруются так, что соответствующие собственные значения располагаются в порядке убывания. Тензор \mathbf{Q} будем называть тензором поворота главных осей поврежденности.

В процессе накопления повреждений материал приобретает дополнительные анизотропные свойства. Подобная анизотропия также интегрально проявляется в дополнительном изменении ориентации главных осей напряжений относительно главных осей деформации в конфигурации B_t . Следовательно, тензор \mathbf{Q} может также служить мерой дополнительной анизотропии, вызванной внутренним распределением повреждений.

Указанное выше разделение анизотропных свойств материала на начальные и индуцированные внутренним распределением повреждений, впи-

сывается в концепцию эффективных напряжений требованием соосности тензора эффективных напряжений и тензора поврежденности. Если еще учесть, что эффект возрастания напряжений в поврежденном континууме в соответствии с геометрическим и механическим смыслом тензора поврежденности выражается классической формулой (6.11), то симметричный тензор эффективных напряжений определяется двумя только что сформулированными требованиями однозначно в следующем виде:

$$\mathbf{T}_D = \mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q} (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}. \quad (8.5)$$

Тензор \mathbf{T}_D , определенный последним равенством, очевидно, является симметричным, поскольку тензоры $\mathbf{Q}^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$ и $(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}$ имеют одинаковые главные оси. В главных осях поврежденности формула (8.5) имеет вид:

$$T_{D(\alpha)} = \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}}. \quad (8.6)$$

(по α не суммировать $\alpha = 1, 2, 3$)

Тензор \mathbf{T}_D будем называть симметризованным тензором эффективных напряжений.

В соответствии с обычной процедурой континуальной механики поврежденного континуума, тензор эффективных напряжений используется при формулировке определяющих уравнений поврежденного материала. Последние получаются в результате замены тензора напряжений Коши в уравнении (8.5) определяющим функционалом неповрежденного континуума. Чтобы представить эти уравнения в наиболее удобной для последующего анализа форме, введем в уравнение (8.5) вместо тензора поворота соответствующий полярный вектор по формуле [198]:

$$\mathbf{Q} = (\kappa^2 - |\mathbf{p}|^2) \mathbf{I} + 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + 2\kappa \mathbf{P}, \quad (8.7)$$

$$(\mathbf{p} = \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{m}, \quad \kappa = \cos \frac{\theta}{2})$$

где \mathbf{m} – единичный вектор, направленный вдоль оси поворота, θ – угол поворота, а антисимметричный тензор \mathbf{P} определен как оператор векторного умножения (\mathbf{u} – произвольный вектор трехмерного пространства):

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}. \quad (8.8)$$

Полярный вектор \mathbf{p} будем называть директором анизотропной поврежденности.

Вводя в уравнение (8.7) векторный инвариант \mathbf{P}_\times тензора \mathbf{P} получим также:

$$\mathbf{Q} = (1 - |\mathbf{P}_\times|^2)\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_\times \otimes \mathbf{P}_\times + \sqrt{4 - |\mathbf{P}_\times|^2}\mathbf{P}. \quad (8.9)$$

Подставляя полученное равенство в формулу (8.5), после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\mathbf{D} = & \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{P}_\times|^2\right) \left[\left(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{P}_\times|^2\right)\mathbf{T} + \text{sym}((\mathbf{P}_\times \otimes \mathbf{P}_\times)\mathbf{T}) + \right. \right. \\ & + 2\sqrt{4 - |\mathbf{P}_\times|^2}\text{sym}(\mathbf{T}\mathbf{P}) \left. \right] + \sqrt{4 - |\mathbf{P}_\times|^2}\text{sym}((\mathbf{P}_\times \otimes \mathbf{P}_\times)\mathbf{T}\mathbf{P}) + \\ & \left. + \frac{1}{4}(\mathbf{P}_\times \otimes \mathbf{P}_\times)\mathbf{T}(\mathbf{P}_\times \otimes \mathbf{P}_\times) - (4 - |\mathbf{P}_\times|^2)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P} \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

В качестве примера рассмотрим определяющее уравнение поврежденного континуума со слабой анизотропией, индуцированной внутренним распределением повреждений. Примеры использования симметричного тензора эффективных напряжений для формулировки определяющих уравнений ползучести и верификация их адекватности имеются в целом ряде работ (см., например, [171]).

В этом случае угол θ можно считать малым и для директора анизотропной поврежденности имеем простое выражение вида

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\theta\mathbf{m}.$$

В силу (8.4), (8.7) находим также

$$\mathbf{d}_{(\alpha)} = \mathbf{s}_{(\alpha)} - \theta\mathbf{m} \times \mathbf{s}_{(\alpha)}. \quad (8.11)$$

Подставляя полученное соотношение в спектральное разложение тензора эффективных напряжений

$$\mathbf{T}_D = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)}, \quad (8.12)$$

получим следующее уравнение:

$$\mathbf{T}_D = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}} \mathbf{s}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{s}_{(\alpha)} + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}} \text{sym} [(\mathbf{m} \otimes \mathbf{s}_{(\alpha)}) \boldsymbol{\Omega}_{D(\alpha)}], \quad (8.13)$$

где тензор $\boldsymbol{\Omega}_{D(\alpha)}$ определен следующим условием

$$\boldsymbol{\Omega}_{D(\alpha) \times} = -2\theta \mathbf{s}_{(\alpha)}.$$

Вторая сумма в формуле (8.13) появляется вследствие дополнительной слабой анизотропии континуума, вызванной распределением повреждений.

Подставляя в последнее уравнение определяющее уравнение неповрежденного континуума, которое мы возьмем в наиболее общей форме в виде

$$T_{(\alpha)} = \Upsilon_{(\alpha)}(L_{(\beta)}, \boldsymbol{\Upsilon}, \eta_\omega), \quad \mathbf{s}_{(\alpha)} = \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{l}_{(\alpha)},$$

где $L_{(\beta)}$ – главные удлинения, $\mathbf{l}_{(\alpha)}$ – единичные векторы, направленные по главным осям деформации в текущей конфигурации, η_ω – термодинамические параметры состояния, $\boldsymbol{\Upsilon}$, $\Upsilon_{(\alpha)}$ – определяющие функционалы, получим определяющее уравнение поврежденного континуума в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_D = & \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\Upsilon_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}} ((\boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{l}_{(\alpha)}) \otimes \mathbf{l}_{(\alpha)}) \boldsymbol{\Upsilon}^T + \\ & + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\Upsilon_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}} \text{sym} [(\mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{l}_{(\alpha)}) \boldsymbol{\Omega}_{D(\alpha)}]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Последнее уравнение в простейшей форме учитывает слабую анизотропию континуума вследствие внутреннего распределения повреждений.

Глава IV. КАНОНИЧЕСКИЕ СКРЫТЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Рассматривается общая термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах, сформулированная на основе метода скрытых переменных состояния.

Формальное представление модели предложено в двух канонических вариантах – энергетическом и энтропийном. Оба варианта развиваются на основе канонической трансформации переменных состояния, которая позволяет привести к каноническому виду выражения для внутренней энергии и энтропии в стадии соответственно значительной деградации внутренней энергии и существенного роста энтропии вследствие накопления поврежденности. Падение внутренней энергии и возрастание энтропии могут быть оценены, как будет показано, через среднее (по ориентациям) значение эффективной площади. С помощью канонических представлений внутренней энергии и энтропии получены канонические выражения для других термодинамических потенциалов состояния.

Найден один из вариантов канонического описания анизотропного состояния поврежденности, который дает возможность трактовать канонические скрытые переменные состояния как коэффициенты Фурье канонического ориентационного распределения сплошности, и непосредственно использовать все преимущества гармонического представления поврежденности. Указанный вариант канонического описания поврежденности не только позволяет дать формальное определение ориентационной поврежденности, но и установить соответствие между канонической нормой и усредненной по ориентациям поврежденностью.

Установлено одно важное экстремальное свойство свободной энергии, ассоциированной с состоянием поврежденности.

В следующей главе, которая является логическим развитием термодина-

мической модели поврежденности, с помощью полученных потенциалов состояния и на основе принципа термодинамической ортогональности будут сформулированы кинетические уравнения накопления анизотропной поврежденности, дан термодинамический анализ концепции эффективных напряжений, широко применяемой в современных исследованиях по поврежденности твердых тел, и найдены инвариантные отношения, которые сохраняют значения вдоль изотермических процессов роста поврежденности.

Изложение данной главы в основном следует статье [176].

IV.1. Введение

Традиционным предметом механики поврежденности, начиная с основополагающих работ [40], [71], являются процессы накопления микродефектов (особенно параллельно с ростом необратимых деформаций в зоне их локализации). Следует отметить, что рассеянные вблизи концентраторов напряжений микродефекты могут существенно влиять на состояние трещин и на устойчивость конструкций в целом. Ясно, что равновесное состояние трещины может быть нарушено под влиянием деградации прочностных свойств материала. В настоящее время существует множество различных мер, характеризующих деградацию механических свойств тела, например через уменьшение сопротивления, жесткости, прочности, твердости и остаточного времени жизни (см. по этому поводу [150]).

Актуальное состояние поврежденности в рамках континуальной механики поврежденности традиционно представляется некоторой макроскопической переменной (скалярной или тензорной) [129], [135], [150], [144]. Эта же переменная выступает и в качестве скрытой термодинамической переменной состояния. Скрытые термодинамические переменные состояния, представляющие анизотропную поврежденность, могут быть затем использованы при формулировке определяющих уравнений тела с рассеянной поврежденностью и кинетических уравнений накопления поврежденности, следуя обычной схеме термодинамики необратимых процессов [111], [120], [205], [161]. Применение метода скрытых термодинамических переменных состояния (или как их часто еще называют – динамических переменных состояния) к исследованию эволюции поврежденности в твердых телах ознаменовалось значительными достижениями как в плане создания общих математических моделей поврежденности [150], [102], [103], [160], [152], так и в плане численного моделирования роста поврежденности в условиях пол-

зучести, водородного охрупчивания, жесткого γ -излучения. Главное преимущество метода скрытых термодинамических переменных – это возможность учета взаимного влияния микроструктуры на напряженно-деформируемое состояние тела на основе феноменологических представлений без учета деталей микронеоднородности и микроструктуры твердого тела, изучение которых часто находится за пределами возможностей современных экспериментальных, численных и аналитических методов.

Выражения для термодинамических потенциалов состояния, полученные в скрытых термодинамических переменных состоянии практически во всех современных моделях трехмерной анизотропной поврежденности, характеризуются регулярной зависимостью от этих переменных [150], [160], [102], [103]. Ясно, что подобные выражения заведомо не применимы в тех случаях, когда возрастание энтропии и падение свободной энергии тела вследствие роста поврежденности является столь значительным, что регулярные термодинамические потенциалы поврежденности не в состоянии адекватно представить эту ситуацию.

Сингулярные выражения для термодинамических потенциалов состояния были впервые предложены в работе [176]. Следует также отметить, что в основу сингулярного представления потенциалов состояния трехмерной анизотропной поврежденности было положено обобщение регулярного канонического представления энтропии, приведенного в работе [105].

Стоит также отметить, что структура термодинамических потенциалов состояния, рассматриваемых в настоящей работе, исследуется на основе двух взаимных вариационных принципов, сформулированных Гиббсом [31], исходя из которых им было осуществлено блестящее построение теории термодинамического равновесия.

Целью ближайших рассмотрений (имеется ввиду не только данная глава работы, но и следующая) является полный термодинамический анализ трехмерной анизотропной поврежденности (как самого состояния, так его эволюции), последовательно затрагивающий следующие аспекты проблемы:

1. Определение естественных тензорных переменных, способных представлять анизотропное состояние поврежденности.
2. Преобразование естественных скрытых переменных состояния в их канонические аналоги с целью упростить выражения термодинамических потенциалов для состояний, характеризующихся значительным

возрастанием энтропии и значительной деградацией свободной энергии.

3. Каноническое продолжение потенциалов поврежденности на состояния начальной фазы накопления поврежденности.
4. Механическая интерпретация формальной процедуры канонизации естественных скрытых переменных состояния.
5. Эффективное построение канонического описания состояния поврежденности и параллельное использование возможных преимуществ тензорного и гармонического формализма.
6. Канонические формы определяющих и эволюционных уравнений.
7. Термодинамический анализ концепции эффективных напряжений.
8. Термодинамика процессов накопления повреждений с хрупкой, пластической или вязкой доминантой.

В любом случае термодинамический анализ состояния поврежденности и его эволюции подразумевает тот или иной выбор скалярной, векторной или тензорной меры поврежденности в зависимости от типа состояния поврежденности (для процессов охрупчивания различной этиологии – это объемная система микротрещин, для пластических деформаций это – активная система дислокаций, реализующая систему скольжения, для ползучести это – межзеренные поры, для усталости это – поверхностные микротрещины). Обзор истории вопроса (и в частности – возможных тензорных мер состояния поврежденности), данный во введении, избавляет нас от обсуждения этой проблематики еще раз. Ясно, что поврежденность многолика и не может быть напрямую измерена, как например, деформация или температура. Поэтому все попытки связать определение меры поврежденности с некоторой экспериментальной процедурой по ее вычислению или оценке служат скорее лишь как дополнительное обоснование "теневого" принципа, на котором само определение собственно и базируется.

IV.2. Каноническое преобразование скрытых переменных состояния анизотропной поврежденности

Представление состояния поврежденности в рамках континуальной модели традиционно реализуется на основе метода скрытых (или динамических) переменных состояния. В настоящее время считается, что с помощью этого метода могут быть обрисованы только общие рамки модели, а более конкретное наполнение (и прежде всего сам выбор переменных состояния) требует дополнительных рассматриваний, уже не связанных только с термодинамикой. В любом случае представление поврежденности по схеме метода скрытых переменных должно удовлетворять по крайней мере следующим трем основным принципам [118]:

1. Объяснение главных изученных закономерностей состояния поврежденности и его эволюции.
2. Обеспечение количественной оценки напряжений и деформаций для тех состояний поврежденности, которые можно реализовать экспериментально, с целью сравнения теории и эксперимента.
3. Математическая формулировка задачи на основе модели должна быть корректной (существование, единственность, устойчивость).

Согласно традиционной схеме метода скрытых переменных состояния (см., например, [120]), плотность внутренней энергии тела с рассеянной поврежденностью u_D может быть представлена в форме некоторой зависимости от плотности энтропии s_D , тензора упругих деформаций \mathbf{Y}^e (и, возможно, некоторых других явных переменных состояния) и скрытых переменных \mathbf{D} , η_ω :

$$u_D = u_D(s_D, \mathbf{Y}^e, \mathbf{D}, \eta_\omega). \quad (2.1)$$

Здесь мы пока предпочитаем не уточнять конкретный смысл скрытых переменных состояния η_ω , поскольку до определенной стадии речь будет идти об общей схеме представления поврежденности, но уже сейчас тензор поврежденности \mathbf{D} выделен как особая скрытая переменная, имеющая ключевое значение для всего изложения.

Итак, множество переменных состояния η_ω включает скалярные, векторные или тензорные переменные, которые могут потребоваться для представления поврежденности,¹³ исключая сам тензор поврежденности.

Ясно, также, что весьма желательна, хотя и необязательна, возможность содержательной интерпретации переменных состояния, что естественно позволяет вскрыть физический смысл переменных, используемых при построении модели поврежденности. Если подобная содержательная интерпретация оказывается возможной, то можно вести речь о естественных переменных состояния, в противовес другим наборам скрытых переменных состояния.

Переменные состояния s_D и \mathbf{Y}^e будем называть явными. Список явных переменных состояния может быть существенно расширен в зависимости от того какой спектр явлений, наблюдаемых в ходе изменения состояния, подлежит учету. Так влияние атермической пластической деформации, изотропного и трансляционного упрочнения учитывается введением дополнительных переменных состояния: пластической деформации, параметров истории и тензора пластических микродеформаций. Как правило учет того или иного дополнительного эффекта, влияющего на значение внутренней (или свободной) энергии, реализуется добавлением некоторого слагаемого к уже имеющемуся выражению.

Для представления напряженно-деформированного состояния тела будут использованы сопряженные по энергии пары тензоров напряжений и деформаций (см., например, [65], [56]), для обозначения которых будут применяться символы \mathbf{S} и \mathbf{Y} соответственно.

Посредством каждой такой энергетически сопряженной пары удовлетворяется равенство

$$\text{tr}(J\mathbf{T}\text{sym}(\nabla \otimes \mathbf{v})) = \text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{Y}}), \quad (2.2)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши (тензор истинных напряжений), \mathbf{v} – пространственное поле скоростей, J – якобиан отображения, соответствующего деформации $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}$.

Для удобства (см. таблицу 1), следуя [78], приведем наиболее употребительные тензоры конечных деформаций. Таких тензоров имеется шесть пар: каждая пара состоит из тензора конечной деформации с естественным отсчетным или пространственным представлением. Отметим также,

¹³Речь идет о тензорах анизотропии различных физических свойств, влияние поврежденности на которые (как впрочем и обратное влияние) весьма существенно.

что геометрически нелинейные соотношения теории конечных деформаций приводятся в таких авторитетных руководствах как [29], [55], [56].

	Естественное отсчетное представление	Естественное пространственное представление
I	Тензор деформации Грина $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$	Тензор деформации Альманси $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1})$
II	Тензор деформации Коши $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	Тензор деформации Коши $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$
III	Вторая мера деформации $\mathcal{E} = \sqrt{\mathbf{C}} - \mathbf{I}$	Вторая мера деформации $\mathcal{A} = \mathbf{I} - \sqrt{\mathbf{B}^{-1}}$
IV	Тензор деформации Фингера \mathbf{C}^{-1}	Тензор деформации Фингера \mathbf{B}
V	Тензор деформации плоских элементов $\mathcal{C} = (\det \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1}$	Тензор деформации плоских элементов $\mathcal{B}^{-1} = (\det \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{B}$
VI	Вторая мера деформации плоских элементов $\mathbf{I} - \sqrt{\mathcal{C}}$	Вторая мера деформации плоских элементов $\mathbf{I} - \sqrt{\mathcal{B}^{-1}}$

Таблица 1: Наиболее употребительные пары тензоров конечных деформаций.

Энергетически сопряженную пару образуют например симметричный второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа и тензор деформации Грина. В случае совершенно упругого тела (гиперупругого тела) сопряженность

этих тензоров по энергии проявляется также в форме

$$\mathbf{S} = \rho_R \frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}}. \quad (2.3)$$

Ниже (см. таблицу 2) приводятся энергетически сопряженные пары напряжений и деформаций (см., например, [65]).

Заметим, что тензор \mathbf{H} определяется как интеграл следующего уравнения:

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}).$$

Особое положение занимает шестая сопряженная пара¹⁴, ибо в этом случае тензор \mathbf{Y} совпадает с градиентом деформации и, следовательно, включает поворот. Уравнение (2.3) в терминах шестой энергетически сопряженной пары приобретает вид:

$$(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{K})^T = \rho_R \frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{F}},$$

где $\mathbf{K} = J\mathbf{T}$ – тензор напряжений Кирхгофа.

Заметим также, что для изотропных тел тензоры \mathbf{U} и $\mathbf{S} = J\mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}$ соосны, поэтому

$$\text{tr}(\mathbf{T}\text{sym}(\nabla \otimes \mathbf{v})) = \sum_{\alpha} T_{(\alpha)}(\ln U_{(\alpha)}).$$

и, следовательно, в приведенной таблице энергетически сопряженных пар можно положить $\mathbf{H} = \ln \mathbf{U}$. Тензор \mathbf{H} часто называют логарифмическим тензором деформации.

Часто удобным оказывается использование первой энергетически сопряженной пары: симметричного второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа и тензора деформаций Грина. Для этой пары справедливо соотношение:

$$\text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{Y}}) = \text{tr}(\mathbf{K}\mathbf{A}^\nabla),$$

где \mathbf{A} – тензор деформации Альманси, определяемый согласно формуле

¹⁴Иногда тензор напряжений шестой энергетической пары называют номинальным тензором напряжений, а первым (несимметричным) тензором напряжений Пиола-Кирхгофа считают тензор, транспонированный тому, который приведен в таблице.

I	Второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$	Тензор деформации Грина $\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{I})$
II	$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^T\mathbf{T}\mathbf{F}$	$\mathbf{Y} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-2})$
III	$\mathbf{S} = J\mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}$	$\mathbf{Y} = \mathbf{H}$
IV	Тензор напряжений Био $\mathbf{S} = \frac{1}{2}J(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T})$	Вторая мера деформации \mathcal{E} $\mathbf{Y} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$
V	$\mathbf{S} = \frac{1}{2}J(\mathbf{F}^T\mathbf{T}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{F})$	$\mathbf{Y} = \mathbf{I} - \mathbf{U}^{-1}$
VI	Первый тензор напряжений Пиола-Кирхгофа $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}$	Градиент деформации $\mathbf{Y} = \mathbf{F}$

Таблица 2: Энергетически сопряженные пары тензоров напряжений и деформаций.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}),$$

а треугольником, обращенным вниз, обозначено коротационное дифференцирование согласно Коттеру-Ривлину:

$$\mathbf{A}^\nabla = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T\mathbf{A}.$$

Двойственное соотношение имеет вид

$$\text{tr}(\mathbf{Y}\dot{\mathbf{S}}) = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{K}^\nabla),$$

где треугольником обозначено объективное дифференцирование по времени согласно Олдройду:

$$\mathbf{K}^\nabla = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{L}\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{L}^\text{T}.$$

Внутренняя энергия выступает как термодинамический потенциал состояния только по отношению к переменным s_D , \mathbf{Y}^e , В современной нелинейной механике твердого тела широко используются еще два термодинамических потенциала состояния: свободная энергия Гельмгольца ψ_D и свободная энергия Гиббса ϕ_D . Вся необходимая для дальнейшего изложения информация о трех основных потенциалах сведена в таблицу 3. Заметим, что абсолютная температура определена как обычно термодинамической производной

$$\vartheta = \left(\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right)_{\mathbf{Y}^e, \dots}.$$

Разрешив уравнение (2.3) относительно энтропии, получим

$$s_D = s_D(u_D, \mathbf{Y}^e, \mathbf{D}, \eta_\omega). \quad (2.4)$$

Ясно, что точные выражения для внутренней энергии и энтропии тела с рассеянной поврежденностью (2.1) и (2.4) вряд ли удастся определить, даже если удалось обосновать выбор физически содержательных внутренних переменных состояния.

Действительно, внутренняя энергия есть скаляр, зависящий от тензорных явных и скрытых переменных состояния. Ясно, что тензорные переменные могут входить в выражение для внутренней энергии только в виде определенного количества объективных форм. Соответствующая теория развита в работах [193], [192], [201], [194], [203], где могут быть найдены также соответствующие списки объективных форм.

Так, например для внутренней энергии, зависящей от тензоров второго ранга \mathbf{Y}^e и \mathbf{D} , полный базис из объективных форм включает следующие индивидуальные и совместные инварианты:

$$\text{tr}(\mathbf{Y}^e \mathbf{I}), \text{tr}(\mathbf{Y}^e \mathbf{Y}^e), \text{tr}(\mathbf{Y}^{e2} \mathbf{Y}^e),$$

	Потенциал состояния	Переменные состояния	Уравнения состояния
I	Внутренняя энергия u_D	s_D, \mathbf{Y}^e, \dots	$\mathbf{S} = \rho_R \left(\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right)_{s_D, \dots}$ $\vartheta = \left(\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right)_{\mathbf{Y}^e, \dots}$
II	Свободная энергия $\psi_D = u_D - \vartheta s_D$	$\vartheta, \mathbf{Y}^e, \dots$	$\mathbf{S} = \rho_R \left(\frac{\partial \psi_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right)_{\vartheta, \dots}$ $s_D = - \left(\frac{\partial \psi_D}{\partial \vartheta} \right)_{\mathbf{Y}^e, \dots}$
III	Свободная энергия Гиббса $\phi_D = \rho_R^{-1} \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{Y}^e) - \psi_D$	$\vartheta, \mathbf{S}, \dots$	$\mathbf{Y}^e = \rho_R \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial \mathbf{S}} \right)_{\vartheta, \dots}$ $s_D = \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial \vartheta} \right)_{\mathbf{S}, \dots}$
IV	Энтальпия $e_D = u_D - \rho_R^{-1} \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{Y}^e)$	s_D, \mathbf{S}, \dots	$\mathbf{Y}^e = -\rho_R \left(\frac{\partial e_D}{\partial \mathbf{S}} \right)_{s_D, \dots}$ $\vartheta = \left(\frac{\partial e_D}{\partial s_D} \right)_{\mathbf{S}, \dots}$
V	Свободная энтальпия $h_D = -\phi_D$	$\vartheta, \mathbf{S}, \dots$	$\mathbf{Y}^e = -\rho_R \left(\frac{\partial h_D}{\partial \mathbf{S}} \right)_{\vartheta, \dots}$ $s_D = - \left(\frac{\partial h_D}{\partial \vartheta} \right)_{\mathbf{S}, \dots}$

Таблица 3: Термодинамические потенциалы состояния.

$$\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{I}), \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{D}^2\mathbf{D}),$$

$$\text{tr}(\mathbf{Y}^e\mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{Y}^e\mathbf{D}^2), \text{tr}(\mathbf{Y}^{e2}\mathbf{D}), \text{tr}(\mathbf{Y}^{e2}\mathbf{D}^2).$$

Ситуация еще более осложняется, если тензор поврежденности имеет четвертый ранг и становится вообще трудно обозримой для тензора поврежденности шестого ранга.

Итак, более или менее точное выражение внутренней энергии и энтропии тела с рассеянным полем повреждений, по-видимому, должно довольно сложным образом зависеть от совместных инвариантов явных тензорных переменных состояния и тензора поврежденности, что не оставляет никаких шансов для их последовательного вывода. Однако, не осуществляя этот вывод, их можно, приняв выражения внутренней энергии и энтропии в наиболее общей форме, упростить, преобразовав специальным образом внутренние переменные состояния. Для регулярной зависимости внутренней энергии и энтропии от внутренних переменных состояния такое преобразование было выполнено в работе [105]. Ниже описывается процедура упрощения представления внутренней энергии и энтропии для нерегулярного случая, который особенно интересен при исследовании состояния поврежденности.

Рассмотрим набор естественных скрытых переменных состояния

$$\mathbf{D}, \eta_{\omega}, \quad (2.5)$$

которые с содержательной (но не с формальной!) точки зрения являются наиболее подходящими для представления напряженно-деформированного состояния тела с повреждениями.

Естественные переменные могут быть скалярными, векторными или тензорными. Введем единую нумерацию и единое безразмерное представление для скрытых переменных состояния:

$$o_1, o_2, \dots, o_r, \quad (2.6)$$

где дополнительно можно считать, что каждая скрытая переменная изменяется в пределах канонического единичного отрезка

$$0 \leq o_{\beta} \leq 1 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r), \quad (2.7)$$

причем $o_{\beta} = 1$ для отсчетного (и неповрежденного) состояния, а $o_{\beta} = 0$ для финального состояния разрушения.

Ясно, что можно представлять себе некоторые из переменных набора (2.6) тензорными. Если, например, переменная $\mathbf{o}_{\beta'}$ есть тензор второго ранга, то неравенства (2.7) следует заменить на

$$0 \leq \|\mathbf{o}_{\beta'}\|^2 \leq 3, \quad (2.8)$$

где норма тензора как обычно определяется суммой квадратов компонент

$$\|\mathbf{o}_{\beta'}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{o}_{\beta'} \mathbf{o}_{\beta'}^T), \quad (2.9)$$

(по β' не суммировать)

и считать, что $\mathbf{o}_{\beta'} = \mathbf{I}$ для начального состояния и $\mathbf{o}_{\beta'} = \mathbf{0}$ – для состояния, непосредственно предшествующего разрушению.

С точки зрения термодинамики необратимых процессов финальное состояние (состояние разрушения) представляет собой равновесное состояния при приближении к которому энтропия существенно возрастает. Как и любое состояние термодинамического равновесия, его можно охарактеризовать следующим принципом максимума¹⁵:

В состоянии термодинамического равновесия энтропия имеет максимальное значение, по сравнению с любым другим состоянием, характеризующимся тем же самым значением внутренней энергии и упругой деформации.

Ясно, что сформулированный вариационный принцип может быть выражен с помощью следующих вариационных условий:

$$\begin{aligned} (\delta_{o_{\beta}} s_D)_{o_{\beta}=0} &= 0 \quad (\delta u_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \\ (\delta_{o_{\beta}}^2 s_D)_{o_{\beta}=0} &\leq 0 \quad (\delta u_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Взаимный вариационный принцип устанавливает, что в состоянии термодинамического равновесия внутренняя энергия имеет минимальное значение, по сравнению с любым другим состоянием, характеризующимся тем же самым значением энтропии и упругой деформации.

Соответствующие вариационные условия термодинамически равновесного состояния имеют вид:

$$\begin{aligned} (\delta_{o_{\beta}} u_D)_{o_{\beta}=0} &= 0 \quad (\delta s_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \\ (\delta_{o_{\beta}}^2 u_D)_{o_{\beta}=0} &\geq 0 \quad (\delta s_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹⁵Приводимый ниже вариационные принципы известны как вариационные принципы Гиббса. Эти принципы были сформулированы в работе Гиббса "О равновесии гетерогенных веществ" ([31], с. 61-349) и послужили исходными принципами созданной Гиббсом теории термодинамического равновесия. Обсуждение вариационных принципов Гиббса может быть найдено в [17].

Наряду с вариационными условиями (2.10) и (2.11) может быть сформулирован и ряд эквивалентных, которые также будут фиксировать некоторое экстремальное свойство состояния термодинамического равновесия. Мы остановим свой выбор на следующих:

$$\begin{aligned} \left(\delta_{o\beta} \frac{1}{s_D} \right)_{o\beta=0} &= 0 \quad (\delta u_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \\ \left(\delta_{o\beta}^2 \frac{1}{s_D} \right)_{o\beta=0} &\geq 0 \quad (\delta u_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \left(\delta_{o\beta} \frac{1}{u_D} \right)_{o\beta=0} &= 0 \quad (\delta s_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \\ \left(\delta_{o\beta}^2 \frac{1}{u_D} \right)_{o\beta=0} &\leq 0 \quad (\delta s_D = 0, \delta \mathbf{Y}^e = 0), \end{aligned} \quad (2.13)$$

подразумевая, что разрушение является особым равновесным состоянием, характеризуемым значительно возросшим значением энтропии и значительным падением внутренней энергии, освобождение которой сопровождается разрыв связей кристаллической структуры твердого тела и приводит в конце концов к нарушению его целостности.

Заметим, что место внутренней энергии в сформулированных выше вариационных условиях может быть занято любым другим термодинамическим потенциалом состояния, приведенным в таблице 3, с соответствующей поправкой на условия варьирования. Отметим также, что все классические термодинамические потенциалы в состоянии равновесия характеризуются минимальным свойством. Только энтропия обладает в этом плане особым статусом – для энтропии равновесного состояния справедлив принцип максимума.

Решение вариационных задач (2.12), (2.13) может быть получено в чрезвычайно простой форме, если воспользоваться известной леммой Морса: за счет замены независимых переменных функция в окрестности своего минимума может быть приведена (с точностью до аддитивной константы) к канонической сумме квадратов новых независимых переменных. Применение только что сформулированного результата позволяет представить энтропию и внутреннюю энергию в окрестности финального состояния роста повреждений в следующем виде:

$$\frac{s_0}{s_D} = \frac{s_0}{s_c} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^r o_{\beta}'^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{u_0}{u_D} = \frac{u_0}{u_c} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^r o_{\beta}''^2, \quad (2.15)$$

где s_c и u_c есть соответственно энтропия и внутренняя энергия в состоянии непосредственно предшествующем разрушению, s_0 и u_0 есть термодинамические функции отсчетного состояния, o_{β}' и o_{β}'' некоторые новые скрытые внутренние переменные. Ясно, что переход от естественных скрытых переменных (2.5) к новым скрытым переменным o_{β}' и o_{β}'' зависит (как от параметров) от u_D , \mathbf{Y}^e в первом случае и от s_D , \mathbf{Y}^e во втором. Кроме того, термодинамические функции в состоянии, непосредственно предшествующем разрушению, зависят от явных переменных состояния:

$$s_c = s_c(u_c, \mathbf{Y}^e), \quad u_c = u_c(s_c, \mathbf{Y}^e).$$

И еще раз отметим, что

$$s_c(\cdot, \cdot) \equiv s_D(\cdot, \cdot, o_{\beta})|_{o_{\beta}=0}, \quad u_c(\cdot, \cdot) \equiv u_D(\cdot, \cdot, o_{\beta})|_{o_{\beta}=0}. \quad (2.16)$$

Дальнейшее развитие теории необходимо требует уточнения выражений для термодинамических потенциалов (в частности, внутренней энергии) в критическом состоянии, непосредственно предшествующем разрушению. Ясно, что в принципе, можно представить себе как в действительности реализовать измерение внутренней энергии для указанного состояния: для этого в условиях адиабатической изоляции необходимо измерить обратимую часть работы, затраченной на деформирование образца вплоть до момента его разрушения, и знать величину упругой деформации непосредственно перед актом разрушения образца. Однако, в некоторых случаях подобное уточнение является излишним, поскольку термодинамические потенциалы критического состояния можно вообще исключить из рассмотрения. И причины для этого две.

Во-первых, достижение критического состояния, соответствующего условию $\|\mathbf{o}'\| = 0$, по-видимому никогда неосуществимо, поскольку полное исчерпание ресурса прочности одновременно по всем ориентациям реально

никогда не наступает и разрушение наблюдается на более ранней стадии. В силу этого условие $\|\mathbf{o}'\| = 0$ невозможно реализовать практически.

Во-вторых, в состоянии, непосредственно предшествующем разрушению, значение энтропии существенно больше ее отсчетного значения, т.е.

$$\frac{s_c}{s_0} \gg 1, \quad (2.17)$$

что позволяет просто считать, что

$$\frac{s_0}{s_c} = 0, \quad (2.18)$$

если при приближении к критическому состоянию энтропия растет существенно быстрее, чем убывает квадрат нормы скрытых переменных состояния

$$\|\mathbf{o}'\|^{-2} \frac{s_0}{s} \rightarrow 0 \quad (\|\mathbf{o}'\| \rightarrow 0).$$

Ясно также, что атрибутом критического состояния является не только критически большое значение энтропии, но и существенное падение ниже отсчетной отметки внутренней энергии, которая по своему смыслу отражает уровень обратимого отклика твердого тела. Существенное понижение последнего – результат накопления повреждений.

Итак, наряду с равенством (2.18) можно сформулировать взаимное –

$$\frac{u_0}{u_c} = 0. \quad (2.19)$$

Обратим еще раз внимание на тот факт, что представления (2.14) и (2.15) были получены как локальные, справедливые в некоторой окрестности критического состояния

$$0 \leq o'_\beta \leq \tilde{o}'_\beta, \quad 0 \leq o''_\beta \leq \tilde{o}''_\beta \quad (\beta = 1, 2, \dots, r), \quad (2.20)$$

где верхние границы \tilde{o}'_β и \tilde{o}''_β вообще говоря зависят от явных переменных состояния, за пределами которой приведенные разложения могут оказаться не отражающими реальное положение вещей. Более того за пределами указанной окрестности само существование новых скрытых переменных состояния также не обосновано. К счастью, вопрос о возможности расширения сферы применимости новых скрытых переменных к представлению любых допустимых состояний решается положительно и достаточно просто.

Рассмотрим верхние пределы изменения новых скрытых переменных. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\tilde{o}'_{\beta} > 0, \quad \tilde{o}''_{\beta} > 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, r). \quad (2.21)$$

В противном случае скрытые переменные можно еще раз переопределить, изменив знаки у некоторых из них (именно у тех, которые не удовлетворяют неравенствам (2.21)), что, очевидно, не нарушит формы представлений (2.14), (2.15).

Ясно, что формально можно доопределить, причем многими различными способами, переменные состояния o'_{β} и o''_{β} так, чтобы они имели смысл вообще для всех состояний и, в частности, для отсчетного состояния. Значения скрытых переменных o'_{β} и o''_{β} в отсчетном состоянии обозначим через $o'_{\beta 0}$ и $o''_{\beta 0}$. Ясно, что указанные значения $o'_{\beta 0}$ и $o''_{\beta 0}$ являются, вообще говоря, функциями от явных переменных состояния, т.е. соответственно от переменных u_D, \mathbf{Y}^e, \dots и s_D, \mathbf{Y}^e, \dots . Остается еще показать, что интервалы $(0, o'_{\beta 0})$ и $(0, o''_{\beta 0})$ можно трансформировать в канонический единичный интервал $(0, 1)$ путем трансформации переменных o'_{β} и o''_{β} так, чтобы представления (2.14) и (2.15) сохранили свою форму. Ниже мы покажем, что подобная трансформация может быть реализована с помощью ортогонального преобразования и преобразования всестороннего растяжения в пространстве скрытых переменных состояния. Для определенности исследуем только случай переменных o'_{β} .

Рассмотрим скрытые переменные состояния o'_{β} как компоненты r -мерного вектора \mathbf{o}' и введем ортогональный линейный оператор \mathbf{O}' , действующий в этом пространстве, подчиненный единственному условию

$$\mathbf{O}' \frac{\mathbf{o}'_0}{\|\mathbf{o}'_0\|} = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{e}\|}, \quad (2.22)$$

где

$$\mathbf{e} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_r). \quad (2.23)$$

Заметим, что тензор второго ранга \mathbf{O}' должен, вообще говоря, зависеть от явных переменных состояния u_D, \mathbf{Y}^e, \dots .

Вместо o'_{β} определим новые скрытые переменные состояния ξ_{β} посредством соотношения

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{o}'_0\|} \mathbf{O}' \mathbf{o}'. \quad (2.24)$$

В силу уравнений (2.22) и (2.24) в отсчетном состоянии $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{e}$ и кроме того нормы переменных $\boldsymbol{\xi}$ и \mathbf{o}' соотносятся между собой как

$$\|\mathbf{o}'\| = \sigma \|\boldsymbol{\xi}\|, \quad (2.25)$$

где использовано обозначение

$$\sigma = \|\mathbf{e}\|^{-1} \|\mathbf{o}'_0\|. \quad (2.26)$$

Подобным же образом переменные \tilde{o}''_β могут быть трансформированы в переменные ς_β , $0 < \varsigma_\beta < 1$, так, что будет справедливо соотношение

$$\|\mathbf{o}''\| = \Delta \|\boldsymbol{\varsigma}\|, \quad (2.27)$$

аналогичное (2.25).

В дальнейшем скрытые переменные состояния ξ_β и ς_β будем называть соответственно энтропийными каноническими переменными состояния и энергетическими каноническими переменными состояния.

Отметим, что множители пропорциональности в уравнениях (2.25), (2.27), характеризующие искажение норм канонических переменных при обратном преобразовании, являются функциями явных переменных состояния: множитель σ зависит от u_D , \mathbf{Y}^e , ..., а множитель Δ – от s_D , \mathbf{Y}^e ,

IV.3. Канонические асимптотики энтропии и внутренней энергии

Канонические переменные состояния ξ_β и ς_β , определенные выше, позволяют представить энтропию и внутреннюю энергию (в окрестности состояния, непосредственно предшествующего разрушению) в следующем виде:

$$\frac{s_0}{s_D} = \frac{s_0}{s_c} + \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{\beta=1}^r \xi_\beta^2, \quad (3.1)$$

$$\frac{u_0}{u_D} = \frac{u_0}{u_c} - \frac{1}{2} \Delta^2 \sum_{\beta=1}^r \varsigma_\beta^2. \quad (3.2)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) действительно точно представляют энтропию и внутреннюю энергию в окрестности упомянутого состояния

$$\|\boldsymbol{\xi}\| < \|\bar{\boldsymbol{\xi}}\| \quad (\xi_\beta > 0), \quad \|\boldsymbol{\varsigma}\| < \|\bar{\boldsymbol{\varsigma}}\| \quad (\varsigma_\beta > 0), \quad (3.3)$$

где $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}(u_D, \mathbf{Y}^e)$ и $\bar{\boldsymbol{\varsigma}} = \bar{\boldsymbol{\varsigma}}(s_D, \mathbf{Y}^e)$, причем это представление является точным.

Отличительной чертой канонических представлений является их метрическая инвариантность относительно замены канонических переменных. Действительно, любая линейная ортогональная трансформация вида

$$\xi_\beta \rightarrow \xi'_\beta, \quad \varsigma_\beta \rightarrow \varsigma'_\beta, \quad (3.4)$$

которая оставляет неподвижным вектор \mathbf{e} , т.е.

$$\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e},$$

сохраняет как форму канонических разложений (3.1), (3.2) и длину канонического интервала $(0, 1)$, так и канонические нормы

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \|\boldsymbol{\xi}'\|, \quad \|\boldsymbol{\varsigma}\| = \|\boldsymbol{\varsigma}'\|. \quad (3.5)$$

Представления (3.1), (3.2) с учетом (2.18), (2.19) приобретают следующий вид:

$$s_D = \frac{s_0}{\frac{1}{2}\sigma^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2} \quad (\|\boldsymbol{\xi}\| < \|\bar{\boldsymbol{\xi}}\|), \quad (3.6)$$

$$u_D = -\frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2 \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2} \quad (\|\boldsymbol{\varsigma}\| < \|\bar{\boldsymbol{\varsigma}}\|). \quad (3.7)$$

В отличие от точных формул (3.1), (3.2) полученные выражения являются асимптотическими при $\|\boldsymbol{\xi}\| \rightarrow 0$, $\|\boldsymbol{\varsigma}\| \rightarrow 0$ и описывают асимптотическое поведение энтропии и внутренней энергии на предфинальной стадии накопления повреждений.

Исследуем еще вопрос об аппроксимации канонического преобразования. Для определенности снова рассмотрим только энтропийный случай.

Исходной точкой анализа здесь выступает аппроксимация второго порядка

$$\frac{s_0}{s_D} = \frac{s_0}{s_c} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma=1}^r \left[\frac{\partial^2}{\partial o_\alpha \partial o_\gamma} \frac{s_0}{s_D} \right]_{o_\beta=0} o_\alpha o_\gamma, \quad (3.8)$$

которая после ортогонального преобразования скрытых переменных состояния o_β

$$\mathbf{o} = \mathcal{R} \hat{\mathbf{o}}, \quad (3.9)$$

приобретает вид

$$\frac{s_0}{s_D} = \frac{s_0}{s_c} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^r h_\gamma^2 \hat{o}_\gamma^2, \quad (3.10)$$

где h_γ^2 есть собственные значения матрицы

$$\mathcal{H} = \left\| \left[\frac{\partial^2}{\partial o_\alpha \partial o_\gamma} \frac{s_0}{s_D} \right]_{o_\beta=0} \right\|. \quad (3.11)$$

Ортогональный тензор \mathcal{R} преобразует матрицу тензора \mathcal{H} к каноническому диагональному виду:

$$\mathcal{R}^T \mathcal{H} \mathcal{R} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, \dots, h_r^2). \quad (3.12)$$

Далее, вводя переменные o'_β согласно формулам

$$o'_\beta = h_\beta \hat{o}_\beta, \quad (3.13)$$

(по β не суммировать, $\beta = 1, 2, 3$)

получим аппроксимационную формулу, аналогичную (2.14).

Таким образом, если аппроксимация второго порядка (3.8) может рассматриваться как удовлетворительная для оценки роста энтропии на предфинальной стадии накопления повреждений, то переход от переменных o'_β к каноническим переменным ξ_β реализуется с помощью линейного ортогонального преобразования и преобразования растяжения в r -мерном пространстве скрытых переменных o'_β так, как это было описано выше (см. формулу (2.24)).

Резюмируя содержание предшествующих рассуждений, можно сказать, что асимптотика канонического преобразования скрытых переменных состояния $\mathbf{o} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ есть по существу линейное преобразование, определяемое следующей формулой:

$$\boldsymbol{\xi} = \sigma^{-1} \mathbf{O}' \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_r) \mathcal{R}^T \mathbf{o}. \quad (3.14)$$

Закljučая заметим, что проведенный анализ канонической замены скрытых переменных состояния справедлив только если матрица (3.11) имеет ранг, в точности равный размерности пространства скрытых переменных, т.е. равный r , что означает $h_\beta > 0$. В этом случае действительно мы имеем асимптотику вида

$$s_D^{-1} - s_c^{-1} = O(\|\mathbf{o}\|^2) \quad (\|\mathbf{o}\| \rightarrow 0). \quad (3.15)$$

Если асимптотика приведенного только что вида не является приемлемой, то естественно нельзя получить и линейной аппроксимации канонической замены скрытых переменных состояния. Этот случай конечно же требует специального анализа, который мы опускаем. В дальнейшем ограничимся только сформулированным выше случаем: матрица (3.11) имеет ранг, в точности равный размерности пространства скрытых переменных.

IV.4. Аппроксимация термодинамических потенциалов состояния на начальной стадии развития повреждений. Глобальные канонические представления

Асимптотические формулы (3.6), (3.7) определяют энтропию и внутреннюю энергию только для предфинальных состояний, предшествующих разрушению. Пограничные значения канонических норм были введены ранее: $\bar{\xi} = \bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)$ и $\bar{\varsigma} = \bar{\varsigma}(s_D, \mathbf{Y}^e)$.

Ясно, что необходимо еще продолжить канонические представления энтропии и внутренней энергии вообще на все допустимые состояния. Ниже мы сформулируем основные принципы такого продолжения.

Прежде всего заметим, что состояния, характеризующиеся условиями

$$\|\boldsymbol{\xi}\| < \|\bar{\boldsymbol{\xi}}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|,$$

$$\|\mathfrak{s}\| < \|\bar{\mathfrak{s}}(s_D, \mathbf{Y}^e)\| ,$$

группируются, в отличие от рассмотренных выше, возле начального равновесного состояния, определяемого условиями $\|\xi\| = 0$ и $\|\mathfrak{s}\| = 0$.

По отношению к начальному равновесному состоянию, можно снова определить канонические скрытые переменные состояния (как энтропийные, так и энергетические) и представить энтропию и внутреннюю энергию для состояний вида

$$\begin{aligned} \|\xi\| &< \|\bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)\| , \\ \|\mathfrak{s}\| &< \|\bar{\mathfrak{s}}(s_D, \mathbf{Y}^e)\| \end{aligned}$$

в форме степенных (по соответствующим каноническим нормам) разложений:

$$s_D = s_0(u_D, \mathbf{Y}^e) + s_1(u_D, \mathbf{Y}^e)(\|\xi\|^2 - r) + s_2(u_D, \mathbf{Y}^e)(\|\xi\|^2 - r)^2 + \dots , \quad (4.1)$$

$$u_D = u_0(s_D, \mathbf{Y}^e) + u_1(s_D, \mathbf{Y}^e)(\|\mathfrak{s}\|^2 - r) + u_2(s_D, \mathbf{Y}^e)(\|\mathfrak{s}\|^2 - r)^2 + \dots , \quad (4.2)$$

где коэффициенты s_i , u_i зависят от явных переменных состояния и подлежат определению.

Полученные разложения позволяют зафиксировать один из принципов продолжения¹⁶: продолжение канонических представлений (3.6) и (3.7) на все допустимые термодинамические состояния должно быть каноническим по форме.

Ясно, что канонические степенные разложения (4.1) и (4.2) должны удовлетворять следующим из принципа необратимости ограничениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_D}{\partial \|\xi\|^2} &\leq 0 & (\|\bar{\xi}\|^2 \leq \|\xi\|^2 \leq r), \\ \frac{\partial u_D}{\partial \|\mathfrak{s}\|^2} &\geq 0 & (\|\bar{\mathfrak{s}}\|^2 \leq \|\mathfrak{s}\|^2 \leq r). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В формулах (4.3) дифференцирование по каноническим нормам осуществляется при фиксированных явных переменных состояния.

¹⁶В дальнейшем этот принцип будем называть принципом каноничности продолжения.

Надо отдавать себе отчет в том, что коэффициенты s_i, u_i подлежат определению из каких-то дополнительных условий. Однако некоторое продвижение в дальнейшей спецификации этих коэффициентов может быть сделано уже сейчас.

Предполагая, что канонические продолжения (4.1), (4.2) справедливы вплоть до начала предфинальной стадии, характеризуемой условиями

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\xi}\| &= \|\bar{\boldsymbol{\xi}}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|, \\ \|\boldsymbol{\varsigma}\| &= \|\bar{\boldsymbol{\varsigma}}(s_D, \mathbf{Y}^e)\|,\end{aligned}$$

можно объединить (3.6), (4.1) и (3.7), (4.2) в единые глобальные¹⁷ представления, составленные по непрерывности из канонических асимптотических разложений:

$$\begin{aligned}s_D &= H(\|\boldsymbol{\xi}\| - \|\bar{\boldsymbol{\xi}}\|) \left[s_0(u_D, \mathbf{Y}^e) + s_1(u_D, \mathbf{Y}^e)(\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - r) + \right. \\ &\quad \left. + s_2(u_D, \mathbf{Y}^e)(\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - r)^2 + \dots \right] + H(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}\| - \|\boldsymbol{\xi}\|) \frac{s_0}{\frac{1}{2}\sigma^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2}, \\ &\quad (0 < \|\boldsymbol{\xi}\|^2 < r)\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}u_D &= H(\|\boldsymbol{\varsigma}\| - \|\bar{\boldsymbol{\varsigma}}\|) \left[u_0(s_D, \mathbf{Y}^e) + u_1(s_D, \mathbf{Y}^e)(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 - r) + \right. \\ &\quad \left. + u_2(s_D, \mathbf{Y}^e)(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 - r)^2 + \dots \right] - H(\|\bar{\boldsymbol{\varsigma}}\| - \|\boldsymbol{\varsigma}\|) \frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2 \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2}, \\ &\quad (0 < \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 < r)\end{aligned}\tag{4.5}$$

где $H(\cdot)$ есть функция Хевисайда:

$$H(\kappa) = \begin{cases} 1 & (\kappa > 0), \\ 0 & (\kappa < 0). \end{cases}\tag{4.6}$$

Непрерывность энтропии и внутренней энергии при переходе через пограничное состояние

¹⁷Здесь подразумевается, что полученные представления термодинамических потенциалов будут пригодны для всех допустимых состояний.

$$\begin{aligned}\|\xi\| &= \|\bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|, \\ \|\varsigma\| &= \|\bar{\varsigma}(s_D, \mathbf{Y}^e)\|\end{aligned}$$

позволяет установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\bar{s}_D &= \frac{s_0}{\frac{1}{2}\sigma^2 \|\bar{\xi}\|^2}, \\ \bar{u}_D &= -\frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2 \|\bar{\varsigma}\|^2},\end{aligned}\tag{4.7}$$

где введены обозначения

$$\bar{s}_D = (s_D)_{\|\xi\|=\|\bar{\xi}\|}, \quad \bar{u}_D = (u_D)_{\|\varsigma\|=\|\bar{\varsigma}\|}\tag{4.8}$$

для энтропии и внутренней энергии пограничного состояния.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\delta_s(u_D, \mathbf{Y}^e) &= \frac{\bar{s}_D - s_0}{s_0}, \\ \delta_u(s_D, \mathbf{Y}^e) &= -\frac{\bar{u}_D - u_0}{u_0}\end{aligned}\tag{4.9}$$

соответственно для относительного возрастания энтропии и падения внутренней энергии в процессе эволюции к пограничному состоянию

$$\begin{aligned}\|\xi\| &= \|\bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|, \\ \|\varsigma\| &= \|\bar{\varsigma}(s_D, \mathbf{Y}^e)\|\end{aligned}$$

при постоянных значениях явных переменных состояния.

Условия непрерывности (4.7) дают возможность выразить функции явных переменных состояния σ и Δ через указанные относительные значения:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{2}{(1 + \delta_s) \|\bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|^2}, \\ \Delta^2 &= \frac{2}{(\delta_u - 1) \|\bar{\varsigma}(s_D, \mathbf{Y}^e)\|^2}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Поскольку относительное возрастание энтропии до начала стадии ускоренного роста энтропии можно часто считать незначительным, т.е. $\delta_s \ll 1$, то можно положить, что

$$\sigma^2 = \frac{2(1 - \delta_s)}{\|\bar{\xi}(u_D, \mathbf{Y}^e)\|^2}.$$

Второе из уравнений (4.10) показывает, что $\delta_u > 1$. Если $\delta_u \approx 1$, то физически это означает, что падение внутренней энергии в пограничном состоянии сравнимо с тем значением внутренней энергии, которое соответствует неповрежденному состоянию с теми же самыми значениями энтропии, упругой деформации и других явных переменных состояния.

Предполагая, что непрерывны при переходе через пограничное состояние не только сами потенциалы состояния, но и их первые производные по квадрату канонической нормы (принцип гладкости глобального канонического представления), получим следующие соотношения:

$$\frac{-s_0}{\frac{1}{2}\sigma^2 \|\bar{\xi}\|^4} = s_1(u_D, \mathbf{Y}^e) + 2s_2(u_D, \mathbf{Y}^e)(\|\bar{\xi}\|^2 - r) + \dots, \quad (4.11)$$

$$\frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2 \|\bar{\varsigma}\|^4} = u_1(s_D, \mathbf{Y}^e) + 2u_2(s_D, \mathbf{Y}^e)(\|\bar{\varsigma}\|^2 - r) + \dots. \quad (4.12)$$

Уравнения (4.7), наряду с только что полученными уравнениями (4.11) и (4.12), позволяют определить коэффициенты двучленных глобальных канонических представлений (4.4), (4.5).

IV.5. Канонический тензор поврежденности

Рассмотрим один важный частный случай канонического представления энтропии и внутренней энергии тела с повреждениями, когда имеется всего одна естественная скрытая переменная состояния – тензор поврежденности второго ранга \mathbf{D} . Обозначим через Ξ и \mathbf{Z} канонические тензорные скрытые переменные состояния в энтропийном и энергетическом представлениях соответственно. Ясно, что Ξ и \mathbf{Z} – симметричные положительно определенные тензоры второго ранга.

Чтобы найти асимптотические соотношения, связывающие естественный тензор поврежденности \mathbf{D} и его канонические аналоги $\mathbf{\Xi}$ и \mathbf{Z} , поступим следующим образом.

Сначала, чтобы подчеркнуть неоднозначность канонических аналогов тензора поврежденности, введем тензор второго ранга $\mathbf{\Lambda}$ с помощью любого ортогонального преобразования в пространстве симметричных тензоров второго ранга \mathfrak{A} :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathfrak{A}(\mathbf{I} - \mathbf{D}). \quad (5.1)$$

Напомним, что тензоры четвертого ранга (и, в частности, тензор \mathfrak{A}) трактуются нами как линейные операторы, действующие в линейном пространстве тензоров второго ранга, в котором скалярное произведение определено формулой

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB}^T). \quad (5.2)$$

Поскольку особый интерес представляет пространство симметричных тензоров второго ранга, то в дальнейшем мы этим пространством и ограничимся, определив скалярное произведение как

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{AB}).$$

Тензор \mathfrak{A} в формуле (5.1) – любой ортогональный тензор четвертого ранга, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}. \quad (5.3)$$

Согласно (3.14) асимптотика канонического преобразования (в его энтропийном варианте) имеет вид:

$$\mathbf{\Xi} = \sigma^{-1} \mathfrak{D}' \sqrt{\mathfrak{X}^T \mathfrak{C} \mathfrak{X}}^T \mathbf{\Lambda}. \quad (5.4)$$

Поясним, что ортогональный тензор четвертого ранга \mathfrak{X} преобразует тензор четвертого ранга

$$\mathfrak{C} = \left[\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \frac{s_0}{s_D} \right]_{\mathbf{\Lambda}=0} \quad (5.5)$$

к канонической диагональной форме.

Ортогональный тензор четвертого ранга \mathfrak{D}' обязан удовлетворять соотношению (ср. (2.24))

$$\mathfrak{D}' \frac{\sqrt{\mathfrak{X}^T \mathfrak{C} \mathfrak{X} \mathfrak{X}^T \mathbf{I}}}{\left\| \sqrt{\mathfrak{X}^T \mathfrak{C} \mathfrak{X} \mathfrak{X}^T \mathbf{I}} \right\|} = \frac{\mathbf{I}}{\|\mathbf{I}\|}. \quad (5.6)$$

Величина σ определена следующей формулой (ср. (2.26)):

$$\sigma = \|\mathbf{I}\|^{-1} \left\| \sqrt{\mathfrak{X}^T \mathfrak{C} \mathfrak{X} \mathfrak{X}^T \mathbf{I}} \right\|. \quad (5.7)$$

Таким образом, канонический тензор поврежденности \mathbf{D}_s (в энтропийном представлении) определяется согласно уравнению

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{I} - \mathfrak{E} = \mathbf{I} - \sigma^{-1} \mathfrak{D}' \sqrt{\mathfrak{X}^T \mathfrak{C} \mathfrak{X} \mathfrak{X}^T \mathfrak{A}} (\mathbf{I} - \mathbf{D}). \quad (5.8)$$

Аналогично могут быть проведен вывод канонического тензора поврежденности в его энергетическом варианте \mathbf{D}_u .

С помощью канонических тензоров поврежденности канонические асимптотики (3.6) и (3.7) могут быть представлены в форме

$$s_D = \frac{s_0}{\frac{1}{2} \sigma^2 \|\mathbf{I} - \mathbf{D}_s\|^2} \quad (\mathbf{D}_s \rightarrow \mathbf{I}), \quad (5.9)$$

$$u_D = -\frac{u_0}{\frac{1}{2} \Delta^2 \|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \quad (\mathbf{D}_u \rightarrow \mathbf{I}), \quad (5.10)$$

где

$$\sigma = \sigma(u_D, \mathbf{Y}^e), \quad \Delta = \Delta(s_D, \mathbf{Y}^e) \quad (5.11)$$

подлежат дальнейшей спецификации.

И то, и другое каноническое представление (5.9), (5.10) ниже будет использоваться при общем термодинамическом анализе состояния поврежденности и его эволюции.

IV.6. Механическая интерпретация канонических норм

Каноническое преобразование скрытых термодинамических переменных состояния выше было определено из формального условия наиболее про-