

стого представления термодинамических потенциалов состояния, по сравнению с представлением с помощью естественных скрытых переменных. Для более или менее ясной физической интерпретации канонического преобразования скрытых переменных состояния рассмотрим процедуру канонической замены для простейшей мыслимой ситуации, когда тензор четвертого ранга

$$\mathfrak{C} = \left[\frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{I} - \mathbf{D})\partial(\mathbf{I} - \mathbf{D})} \left(\frac{s_0}{s_D} \right) \right]_{\mathbf{D}=\mathbf{I}} \quad (6.1)$$

является изотропным, т.е.

$$\mathfrak{C} = \sigma^2 \mathfrak{I}, \quad (6.2)$$

где скаляр σ в точности равен значению, указанному формулой (5.7).

В условиях, сформулированных выше, имеем:

$$\Xi = \mathbf{I} - \mathbf{D}. \quad (6.3)$$

В силу уравнений (6.1), (6.2) каноническая аппроксимация энтропии есть (см. также (3.6)):

$$s_D = \frac{s_0}{\frac{1}{2}\sigma^2 \|\mathbf{I} - \mathbf{D}\|^2} \quad (\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{I}). \quad (6.4)$$

Для того чтобы установить смысл канонической нормы $\|\mathbf{I} - \mathbf{D}\|$ рассмотрим сферу малого радиуса ρ , локализованную в точке \mathbf{x} актуального деформированного состояния. Определим среднее значение сокращения эффективной площади как

$$\left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|=\rho} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} dS'}. \quad (6.5)$$

В соответствии с определением тензора поврежденности второго ранга находим

$$\begin{aligned} \frac{(dA^*)^2}{(dA)^2} &= \text{tr} [(\mathbf{I} - \mathbf{D})^2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] = \\ &= (1 - D_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - D_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - D_{(3)})^2 n_{(3)}^2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $n_{(i)}$ есть компоненты директора \mathbf{n} относительно собственного базиса тензора поврежденности $\mathbf{d}_{(1)}$, $\mathbf{d}_{(2)}$, $\mathbf{d}_{(3)}$.

Подставляя последнюю формулу в (6.5), получим

$$\left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle^2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(1 - D_{(1)})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (1 - D_{(2)})^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + (1 - D_{(3)})^2 \cos^2 \theta] \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.7)$$

или

$$\left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(1 - D_{(1)})^2 + (1 - D_{(2)})^2 + (1 - D_{(3)})^2}, \quad (6.8)$$

что позволяет ввести каноническую норму

$$\left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \|\mathbf{I} - \mathbf{D}\|. \quad (6.9)$$

Таким образом, каноническая норма может быть выражена через среднее (по всем ориентациям в пространстве) сокращение эффективной (т.е. несущей нагрузку) площади плоских элементов тела с повреждениями.

Приведенная интерпретация нормы тензора сплошности иллюстрируется рис. 21, где изображены многогранные элементы (поврежденный вписан в сферу, эквивалентный неповрежденный с сокращенной эффективной площадью – в эллипсоид, оси которого ориентированы вдоль главных осей тензора поврежденности), по изменению площади поверхности которых можно судить о среднем сокращении эффективной площади плоских элементов тела. Точное значение отношения (6.5) может быть получено в результате предельного перехода

$$\left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle = \sqrt{\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^m dA^{(i)}} \sum_{j=1}^m \frac{(dA^{*(j)})^2}{(dA^{(j)})^2} dA^{(j)}}, \quad (6.10)$$

когда многогранники все более точно приближают поверхность сферы и эллипсоида и нормали к их граням пробегают все возрастающее число различных ориентаций.

Используя уравнения (6.4), (6.9), для энтропии имеем асимптотику

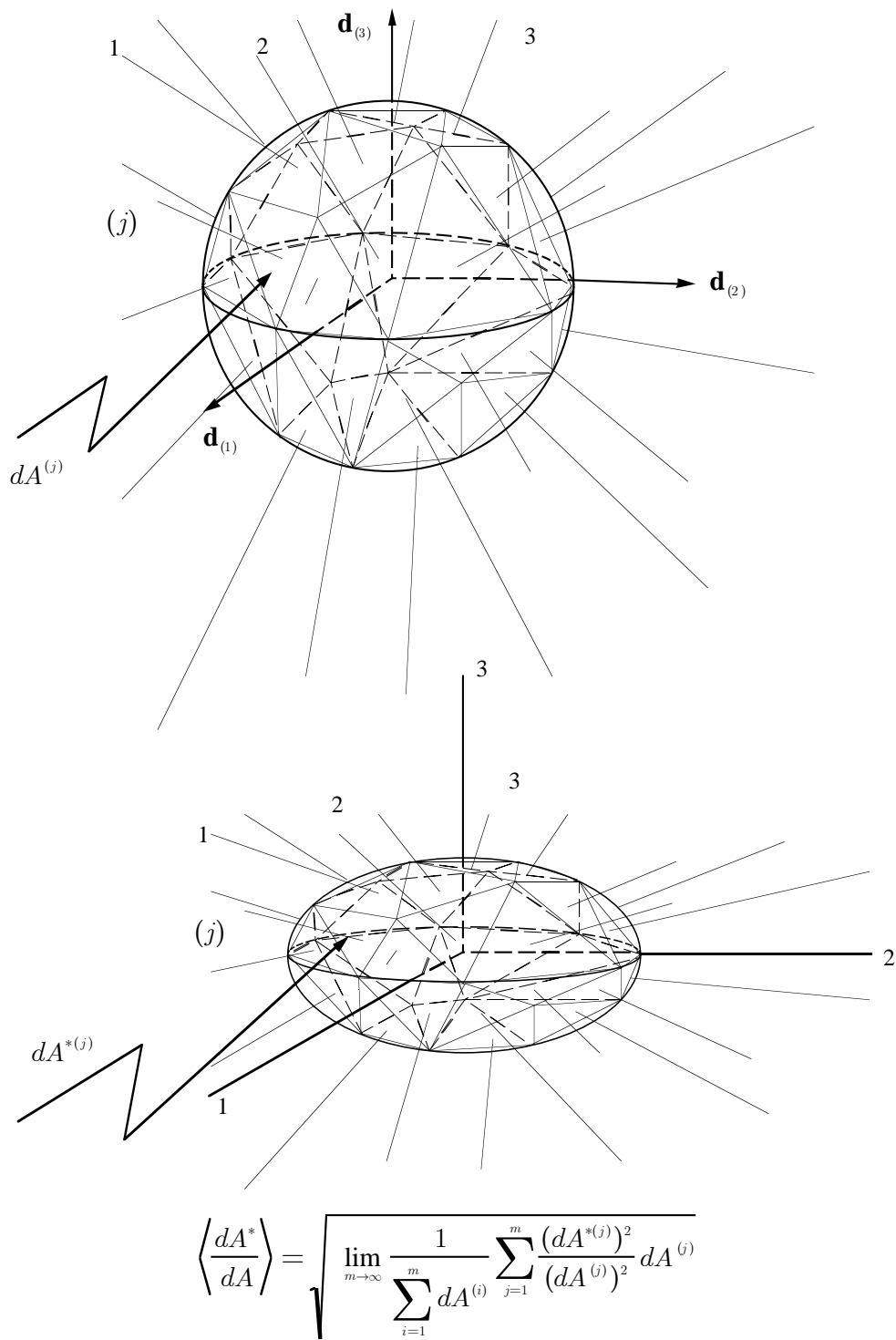


Рис. 21: К механической интерпретации нормы тензора сплошности.

$$s_D = \frac{s_0}{\frac{3}{2}\sigma^2 \left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle^2}, \quad (6.11)$$

и по аналогии находим асимптотику внутренней энергии

$$u_D = -\frac{u_0}{\frac{3}{2}\Delta^2 \left\langle \frac{dA^*}{dA} \right\rangle^2}. \quad (6.12)$$

Полученные формулы очень важны для выявления механического смысла канонических представлений энтропии и внутренней энергии. С их помощью удастся связать возрастание энтропии и падение уровня внутренней энергии элемента тела с повреждениями с сокращением (в среднем по всем возможным ориентациям) эффективной площади плоских элементов тела. Ясно, что подобная связь должна быть, хотя полученные результаты представляются следствием сильно упрощенных реальных обстоятельств существования анизотропного распределения повреждений в твердом теле (имеется ввиду полный отказ от учета сколько-нибудь сложной микроструктуры). Однако сама схема канонической замены скрытых переменных состояния гарантирует, что любое сколь угодно сложное представление поврежденности все равно можно трансформировать так, что термодинамические потенциалы состояния окажутся зависящими только от канонической нормы.

IV.7. Каноническая асимптотика свободной энергии тела с повреждениями

Для исследования поврежденности в изотермических условиях наиболее удобны термодинамические потенциалы состояния, которые известны как свободная энергия Гельмгольца и свободная энергия Гиббса (см. таблицу 3).

Свободная энергия Гельмгольца ψ_D есть преобразование Лежандра от внутренней энергии по одной явной переменной состояния – энтропии. Поэтому для ψ_D находим

$$\psi_D(\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \dots, \|\varsigma\|) = u_D(s_D, \mathbf{Y}^e, \dots, \|\varsigma\|) - \vartheta_\varsigma s_D, \quad (7.1)$$

где переменная s_D в правой части должна быть всюду выражена через переменные

$$\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \dots, \|\boldsymbol{\varsigma}\|$$

с помощью уравнения

$$\vartheta_\varsigma = \left(\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right)_{\mathbf{Y}^e, \dots, \|\boldsymbol{\varsigma}\|},$$

определяющего абсолютную температуру в каноническом энергетическом представлении.

Ясно, что искомое выражение энтропии через явные переменные состояния $\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \dots$ (напомним, что мы не указываем другие возможные явные переменные состояния, ограничиваясь только началом списка) следует разыскивать в форме

$$s_D = g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots), \quad (7.2)$$

где введена новая переменная состояния

$$\gamma = \vartheta_\varsigma \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2. \quad (7.3)$$

Функция $g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)$ определена неявно уравнением

$$-\gamma = \frac{\partial}{\partial g} \left(\frac{2u_0(g, \mathbf{Y}^e, \dots)}{\Delta^2(g, \mathbf{Y}^e, \dots)} \right)_{\mathbf{Y}^e, \dots}. \quad (7.4)$$

Вводя функцию состояния $f(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)$, определенную согласно

$$f(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots) = -\frac{2u_0(g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots), \mathbf{Y}^e, \dots)}{\Delta^2(g(\gamma, \mathbf{Y}^e), \mathbf{Y}^e, \dots)}, \quad (7.5)$$

свободную энергию Гельмгольца можно представить в форме

$$\psi_D = \vartheta_\varsigma \left[\frac{f(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)}{\gamma} - g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots) \right], \quad (7.6)$$

где в силу уравнений (7.2), (7.4) и (7.6)

$$\gamma \frac{\partial g}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial \gamma}. \quad (7.7)$$

Асимптотику функции состояния $g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)$ будем разыскивать в следующем виде:

$$\frac{\gamma^h g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)}{G(\mathbf{Y}^e, \dots)} = 1 + o(1) \quad (\gamma \rightarrow 0), \quad (7.8)$$

где $G(\mathbf{Y}^e, \dots)$ есть функция состояния, зависящая только от явных переменных состояния (исключая температуру), $h > 0$ – некоторая постоянная.

Разыскивая затем асимптотику функции $f(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)$ при $\gamma \rightarrow 0$ в форме

$$\frac{\gamma^l f(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)}{F(\mathbf{Y}^e, \dots)} = 1 + o(1), \quad (7.9)$$

с помощью соотношения (7.7) можно заключить, что $l = h - 1$ и, кроме того,

$$-hG(\mathbf{Y}^e, \dots) = (1 - h)F(\mathbf{Y}^e, \dots). \quad (7.10)$$

Учитывая уравнение (7.6), приходим к асимптотике свободной энергии тела с повреждениями вида

$$\psi_D = \frac{\vartheta_\varsigma G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\gamma^h} \left(-\frac{1}{1 - h} + o(1) \right). \quad (7.11)$$

Полученное выражение может быть также представлено в следующей форме:

$$\psi_D = -\frac{1}{1 - h} \frac{\vartheta_\varsigma^{1-h} G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\|\mathbf{s}\|^{2h}}. \quad (7.12)$$

Последнее соотношение является искомой канонической асимптотикой свободной энергии для состояний в пределах предфинальной стадии. В случае самого примитивного представления поврежденности с помощью скалярной переменной D каноническая норма равна просто $1 - D$ и следует положить $h = 1/2$ для согласования с традиционным определением эффективного напряжения.

Отдельного исследования требует случай $h = 1$. В этом случае уравнения (7.11) и (7.12) непригодны. Опуская детали, приведем асимптотику свободной энергии для указанного условия $h = 1$:

$$\psi_D = -\frac{\vartheta_\varsigma \ln \gamma}{\gamma} G(\mathbf{Y}^e, \dots). \quad (7.13)$$

Полученные асимптотики свободной энергии тела с повреждениями позволяют немедленно получить (дифференцированием по упругой деформации) энергетически сопряженные напряжения:

$$\mathbf{S}_\varsigma = -\rho_R \frac{1}{1-h} \frac{\vartheta_\varsigma}{\gamma^h} \frac{\partial G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\partial \mathbf{Y}^e} \quad (h > 0, \quad h \neq 1), \quad (7.14)$$

$$\mathbf{S}_\varsigma = -\rho_R \frac{\vartheta_\varsigma \ln \gamma}{\gamma} \frac{\partial G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\partial \mathbf{Y}^e} \quad (h = 1). \quad (7.15)$$

Отказ от асимптотики (7.8) влечет за собой и изменение асимптотической формулы для свободной энергии. Так вместо (7.11) имеем

$$\begin{aligned} \psi_D = \frac{f(0, \mathbf{Y}^e, \dots)}{\|\varsigma\|^2} + \vartheta_\varsigma [f'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) - g(0, \mathbf{Y}^e, \dots)] + \\ + \vartheta_\varsigma^2 \|\varsigma\|^2 \left[\frac{1}{2} f''_{II}(0, \mathbf{Y}^e, \dots) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) \right] + O(\|\varsigma\|^4). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Энергетические напряжения при этом, очевидно, имеют следующую асимптотику при $\gamma \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \left\{ \frac{1}{\|\varsigma\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e, \dots)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \vartheta_\varsigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} [f'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) - g(0, \mathbf{Y}^e, \dots)] + \right. \\ \left. + \vartheta_\varsigma^2 \|\varsigma\|^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} \left[\frac{1}{2} f''_{II}(0, \mathbf{Y}^e, \dots) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) \right] \right\} + O(\|\varsigma\|^4). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Аналогом разложения (7.16) при наличии асимптотики (7.8) является

$$\psi_D = -\frac{\vartheta_\varsigma G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\gamma^h} \left(\frac{1}{1-h} + \frac{1}{2-h} \Gamma'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) + \frac{1}{3(3-h)} \Gamma''_{II}(0, \mathbf{Y}^e, \dots) \gamma^2 + \dots \right), \quad (7.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma'_I(0, \mathbf{Y}^e, \dots) = \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} \Gamma(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots) \right)_{\gamma=0}, \quad \Gamma''_{II}(0, \mathbf{Y}^e, \dots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \Gamma(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots) \right)_{\gamma=0}, \\ \Gamma(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots) = \frac{\gamma^h g(\gamma, \mathbf{Y}^e, \dots)}{G(\mathbf{Y}^e, \dots)}. \end{aligned}$$

IV.8. Вариант канонического описания поврежденности

Как было показано выше, каноническое представление состояния поврежденности не является единственным. Любая реализация канонического представления поврежденности, однако, не должна нарушать форму канонических асимптотик (3.6), (3.7) и величину канонических норм $\|\varsigma\|$ и $\|\xi\|$.

Один из возможных вариантов канонического энергетического представления поврежденности, основанный на использовании коэффициентов Фурье разложения по сферическим гармоникам Лапласа переменной ориентации, выведенной из канонических выражений для термодинамических потенциалов состояния, приводится ниже.

Канонические асимптотики энтропии, внутренней и свободной энергии (3.6), (3.7) и (7.12) включают скрытые термодинамические переменные состояния только в форме единственного метрического инварианта – соответствующей канонической нормы. В частности свободная энергия Гельмгольца выражается через энергетическую каноническую норму

$$\|\varsigma\| = \sqrt{\varsigma_\beta \varsigma_\beta}, \quad (8.1)$$

где ς_β ($\beta = 1, 2, \dots, r$) есть канонические скрытые переменные состояния в энергетическом представлении.

Представление анизотропной поврежденности в рамках математической модели – это неизбежно некоторая функция ориентации, для которой ранее было зарезервировано обозначение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$, где \mathbf{n} есть единичный вектор, задающий ориентацию. Значение этой переменной суть поврежденность, конкретное понятие о которой зависит от формы, в которой поврежденность существует, измеренная тем или иным способом.

Канонические асимптотики потенциалов состояния содержат характерную сумму квадратов скрытых переменных состояния, которая в принципе должна стремиться к нулю в процессе эволюции. Нетрудно заметить, что функция ориентации $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ также имеет единственный похожий инвариант (инвариант, не зависящий от поворота локального триэдра, применяемого исследователем для координатного представления функции $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$). Ясно, что этот единственный инвариант – квадрат нормы функции $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$, рассматриваемой как числовая функция на единичной сфере $\|\mathbf{n}\|$, который в соответствии с классической формулой Фурье-Бесселя вычисляется как сумма квадратов коэффициентов Фурье этой функции по

отношению к ортонормированной системе сферических гармоник Лапласа $\tilde{Y}_l^{(k)}$.

Не следует забывать, что сферические гармоники Лапласа $\tilde{Y}_l^{(k)}$ действительно однозначно определены только после того как наблюдателем выбран некоторый локальный триэдр $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$, относительно которого обычным образом отсчитываются сферические углы Θ, Φ . После этого, как и любую другую функцию ориентации, $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ можно разложить в ряд Фурье по сферическим гармоникам Лапласа

$$\varsigma(\Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} c_{2l}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \quad (8.2)$$

где, как обычно, коэффициенты Фурье $c_{2l}^{(k)}$ вычисляются по формулам Фурье-Лапласа.

Среднеквадратичное ориентационного распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ вычисляется согласно формуле Фурье-Бесселя

$$\bar{\varsigma} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\varsigma(\Theta, \Phi)|^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi} = \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} |c_{2l}^{(k)}|^2} \quad (8.3)$$

и представляется через характерную сумму квадратов, подобную той, которая фигурирует в канонических термодинамических потенциалах состояния.

Поворот локального триэдра $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ конечно же сказывается как на самих базисных функциях, по которым осуществляется разложение, так и на величинах коэффициентов Фурье, однако сумма квадратов коэффициентов Фурье от поворота не зависит, что указывает на индифферентность этой суммы относительно вращений.

Таким образом, один из вариантов канонического представления поврежденности – использование в качестве скрытых термодинамических переменных состояния модулей коэффициентов Фурье $c_{2l}^{(k)}$ в разложении ориентационного распределения $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ по ортонормированным сферическим гармоникам Лапласа $\tilde{Y}_l^{(k)}$. Необходимо только подобрать ориентационное распределение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ таким образом, чтобы его среднеквадратичное совпадало с энергетической канонической нормой $\|\varsigma\|$.

Итак, вариант канонического описания поврежденности будет действительно получен, если ориентационное распределение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} \left| c_{2l}^{(k)} \right|^2 = \sum_{\beta} \varsigma_{\beta}^2. \quad (8.4)$$

Тогда канонические скрытые переменные состояния получают интерпретацию модулей коэффициентов Фурье в разложении в ряд по сферическим гармоникам Лапласа функции ориентации $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$. Ориентационное распределение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$, которое удовлетворяет уравнению (8.4), в котором ς_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, r$) есть канонические скрытые переменные состояния в энергетическом представлении, будем называть каноническим распределением поврежденности по ориентациям.

Ясно, что уравнение (8.4) не определяет однозначно каноническое ориентационное распределение $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$. С равным правом мы можем назвать каноническими и разложение

$$\varsigma(\Theta, \Phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} c'_{2l}{}^{(k)} \tilde{Y}_{2l}^{(k)}(\Theta, \Phi), \quad (8.5)$$

где коэффициенты Фурье $c'_{2l}{}^{(k)}$ связаны с коэффициентами Фурье канонического разложения $c_{2l}^{(k)}$ посредством соотношений

$$c'_{2l}{}^{(k)} = e^{i\chi_{l,k}} c_{2l}^{(k)}, \quad (8.6)$$

гарантирующих неизменность канонической энергетической нормы (см. уравнение (8.4)). Можно даже считать все коэффициенты Фурье $c_{2l}^{(k)}$ вещественными и положительными. Кроме того, сам порядок назначения коэффициентам Фурье значений канонических скрытых переменных состояния

$$\left| c_{(2l)}^{((k))} \right| = \varsigma_{\beta} \quad (8.7)$$

может быть абсолютно произвольным, подразумевая лишь одно из возможных соответствий между индексами коэффициентов Фурье и индексами канонических скрытых переменных состояния

$$\beta = \beta(l, k). \quad (8.8)$$

Единственная необходимая условность при задании соответствия (8.8) есть

$$\beta(l, -k) = \beta(l, k). \quad (8.9)$$

Решение уравнения (8.4) может быть представлено с помощью сферических гармоник $\tilde{Y}_{(l)}^{((k))}$, сконструированных по отношению к сферическим углам θ, φ , определяемым по отношению к отличному от $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ триэдру $\mathbf{d}_{(1)}, \mathbf{d}_{(2)}, \mathbf{d}_{(3)}$:

$$\varsigma(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} c_{(2l)}^{((k))} \tilde{Y}_{(2l)}^{((k))}(\theta, \varphi), \quad (8.10)$$

где

$$\|\varsigma\| = \sqrt{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-2l}^{2l} \left| c_{(2l)}^{((k))} \right|^2}. \quad (8.11)$$

Аналогично может быть выведено каноническое ориентационное распределение, исходя из канонической асимптотики энтропии (3.6). В этом последнем случае канонические скрытые переменные состояния, трактуемые как коэффициенты Фурье $c_{2l}^{(k)}$ канонического ориентационного распределения поврежденности, обязаны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \ln s_D}{\partial c_{2l}^{(k)}} = -\frac{c_{2l}^{(k)}}{\bar{\varsigma}^2}. \quad (8.12)$$

Умножая обе части полученного уравнения на

$$\frac{d}{dt} c_{2l}^{(k)}$$

и суммируя по всем k и l , для процесса, происходящего при постоянных явных переменных состояния, получим интегрируемое соотношение

$$\frac{d}{dt} (\ln s_D + \ln \bar{\varsigma}^2) = 0, \quad (8.13)$$

которое устанавливает обратно пропорциональную зависимость между энтропией и квадратом нормы канонического ориентационного распределения.

Приведенный только что вариант канонического описания поврежденности не только позволяет дать формальное определение ориентационной поврежденности, но и установить соответствие между канонической нормой и усредненной по ориентациям поврежденностью. Действительно, поскольку одновременно выполняются соотношения (8.1) и (8.11), то в канонической асимптотике свободной энергии, которую ради определенности возьмем в форме (7.12), под канонической нормой следует понимать среднеквадратичное по сфере единичных направлений значение сплошности. Ясно, что каноническая норма в первом приближении равна просто среднему значению ориентационного распределения:

$$\|\varsigma\| = \langle \varsigma \rangle = c_{(0)}^{((0))}. \quad (8.14)$$

Средняя по ориентациям поврежденность в деталях была проанализирована во второй главе настоящей работы и здесь мы намерены воспользоваться результатами этого анализа.

В силу формул (II.2.19), (II.2.20), в наиболее симметричной форме представляющий среднюю поврежденность, каноническая асимптотика свободной энергии (7.12) в случае $h = 1/2$ приобретает следующий вид:

$$\psi_D = - \frac{\pi \sqrt{\vartheta_\varsigma} G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\sqrt{C}(1 + p^{*2}) J^*(p^*, q^*)}, \quad (8.15)$$

где скрытые переменные состояния p^* и q^* определены симметричными соотношениями (II.2.21). Ясно, что скрытые переменные состояния p^* и q^* вместе с оставшейся скрытой переменной состояния C образуют наиболее удобный термодинамический базис для представления поврежденности.

Экстремальные свойства канонической нормы могут быть установлены на основании двойных неравенств (II.7.1), (II.7.2). Ясно также, что соответствующие экстремальные свойства могут быть сформулированы и для свободной энергии, ассоциированной с ориентационной поврежденностью: абсолютная величина свободной энергии, умноженная на максимальную главную сплошность, достигает минимального значения (по сравнению с любыми другими состояниями, характеризуемыми теми же самыми значениями явных переменных состояния) для изотропного состояния поврежденности.

Глава V. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И КАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТ- НЫЕ ОТНОШЕНИЯ

В этой главе каноническое описание анизотропного состояния поврежденности применяется для формулировки эволюционных уравнений роста поврежденности в твердых телах. Ясно, что наиболее интересным здесь представляется явный учет взаимодействия необратимых деформаций и поврежденности на основе связанных уравнений (в связках пластическая деформация – поврежденность, ползучесть – поврежденность).

Основой для вывода связанных уравнений выступает принцип термодинамической ортогональности [204], [205]. Этот принцип может рассматриваться как базовый вообще для всей механики континуума, поскольку с помощью него могут быть получены (см., например, [206]) все основные классы определяющих законов для деформируемых тел. Естественно, что каноническое представление поврежденности позволяет отчасти упростить оперирование с соотношениями термодинамической ортогональности. Концепция термодинамической ортогональности подразумевает задание только двух потенциалов состояния – свободной энергии Гельмгольца и потенциала рассеяния – для полной идентификации модели.

Канонический формализм применяется далее к термодинамическому анализу понятия эффективного напряжения. Для механики поврежденности характерно представление возрастания внутренних напряжений с развитием повреждений в теле в форме сингулярного множителя, который неограниченно возрастает при приближении к финальной стадии накопления повреждений. Ясно, что подобная модель – чрезмерное упрощение, которое часто вообще не соответствует сути происходящего, поскольку достаточно развитая поврежденность существенно ослабляет кристаллическую структуру тела, что неизбежно приводит к падению уровня напряжений. Ясно также, что понятие эффективного напряжения нуждается как в термодинамиче-

ском обосновании, так и в анализе пределов его применимости. Решающую роль при решении этих проблем играют канонические асимптотики энергетического тензора напряжений и особенно – энтропийная асимптотика, поскольку с ее помощью традиционная для механики поврежденности сингулярность по параметру сплошности вообще устраняется.

Соотношения термодинамической ортогональности удобны тем, что содержат и определяющий закон, и эволюционные уравнения для скрытых переменных состояния. Если ограничиться только квадратичными по скоростям скрытых переменных состояния вкладом в выражение для потенциала рассеяния, то получающиеся в результате уравнения эволюции будут квазилинейными, с определенной спецификой, обусловленной каноническим выбором скрытых переменных состояния. Квазилинейная аппроксимация уравнений эволюции позволяет учесть связку необратимая деформация – поврежденность в наиболее приемлемой для аналитического и численного анализа форме.

Квазилинейные уравнения накопления повреждений в их каноническом варианте часто вообще могут быть проинтегрированы до конца. Достигается это с помощью набора точных интегралов¹⁸ системы уравнений, определяющих эволюцию повреждений. Ясно, что эти интегралы являются аналогами законов сохранения и выражают баланс поврежденностей (точнее некоторых дробно-степенных комбинаций поврежденностей, которые мы называем инвариантными отношениями) в процессе их развития. Понятно, что существование инвариантных отношений значительно облегчает анализ процесса накопления повреждений, развивающегося параллельно с накоплением необратимой деформации в условиях, например атермической пластичности или изотермической ползучести. Одна общая оценка времени до разрушения, также может быть получена с помощью инвариантных отношений для весьма общей формулировки закона роста повреждений.

Заканчивается глава исследованием на основе базовых термодинамических уравнений основных процессов развития повреждений в твердых телах. Отдельно рассмотрено развитие хрупкой поврежденности в упругом теле. Выполнен учет влияния пластической деформации на поврежденность преимущественно хрупкого типа. Изучена также интересная проблема, связанная с оценкой поврежденности, вызванной освобождением скрытой сво-

¹⁸Интегралы уравнений накопления повреждений имеют форму отношения степеней от линейных комбинаций компонент канонического тензора поврежденности и поэтому мы вправе называть их инвариантными отношениями, в том смысле, что эти отношения сохраняют свои значения в процессе роста повреждений.

бодной энергии микронапряжений в пределах локализованной пластической зоны.

Изложение данной главы в основном следует [177], [179], [180].

V.1. Введение

Поврежденность – чрезвычайно сложный объект для моделирования методами механики сплошных сред. Явно просматриваемая тенденция [135], [102], [103], [161], [150], [96], [143], [144] к усложнению определяющих и эволюционных уравнений роста повреждений в твердых телах привела к тому, что большинство этих уравнений оказалось слишком сложными с точки зрения их практического использования. Часто общие уравнения модели вообще оказываются противоречивыми, или их структура не поддается какому бы то ни было оправданию с точки зрения тех общих принципов, которые в настоящее время действительно стали достаточно надежной основой для построения современных моделей сплошных сред.

Традиционно (см. [118] для ознакомления с перспективами и тенденциями развития), состояние поврежденности и его эволюция представляются некоторыми скрытыми переменными состояния и уравнениями квазилинейного типа для скоростей этих переменных. В последние годы предпринимаются попытки видоизменить метод скрытых переменных состояния с целью явного учета градиентов скрытых переменных [160]. Этот подход развивается в рамках более общей схемы канонического представления уравнений механики сплошных сред [162]. Основная нерешенная проблема здесь – построение такой модели поврежденности, которая позволила бы детерминировать и зоны локализации поврежденности, и рост поврежденности в пределах этих зон. Обычный формализм скрытых переменных состояния не в силах этого сделать. Чаще всего приходится довольствоваться предположением (впрочем хорошо подтверждаемым экспериментальными фактами) о том, что поврежденность локализуется в пределах пластических зон или зон со значительными деформациями ползучести, локализация которых в свою очередь подразумевает предварительный (например, упругопластический) анализ, который часто сам по себе представляет значительные трудности. Выраженная пространственная локализация поврежденности – лишь один аспект проблемы. Под действием напряжений поврежденность, локализованная первоначально в пластических зонах, стремится распространиться на соседние области (диффузия поврежденности), приводя в конце концов

к тотальной перестройке напряженно-деформированного состояния тела.

Традиционно [133], [142], [148], [149], [160], [191], термодинамические потенциалы состояния есть просто произведение множителя $1 - D$ на потенциал неповрежденного состояния. Подобное представление, чрезмерно упрощенное по форме и часто недостаточное по существу (в частности, из-за заранее установленного предела деградации свободной энергии), и в настоящее время – практически единственная форма, используемая для учета влияния поврежденности на напряженно-деформированное состояние. Каноническое представление термодинамических потенциалов состояния, предложенное в [176], не связано, в частности, с ограничением нижнего предела деградации свободной энергии и допускает падение энергии ниже уровня, который достигается после освобождения запасенной в элементе механической энергии деформации. Подобное допущение совершенно необходимо, если не исключать многообразные физико-химические процессы, приводящие к деградации прочности, и приток энергии в окрестность локализованной зоны поврежденности и ее затраты на разрыв связей в микроструктуре тела.

После **Введения**, настоящая глава содержит краткую сводку основных уравнений термодинамики и технику преобразования к каноническим термодинамическим производным. Целью здесь является установление единой системы обозначений и понятий, которые применяются впоследствии. Ключевым здесь безусловно является уравнение баланса энтропии. Выражение для производства энтропии необходимо для того, чтобы расщепить аддитивные вклады на термодинамические потоки и силы.

Далее устанавливаются соотношения термодинамической ортогональности и приводится их каноническая форма.

Термодинамический анализ концепции эффективных напряжений приводится с целью выяснения условий и пределов применимости понятия эффективного напряжения. Канонические асимптотики тензора энергетического напряжения по обратным степеням канонической нормы также могут быть использованы для термодинамически оправданных выражений для тензора напряжений в средах с рассеянными повреждениями.

Затем приводится вывод канонических квазилинейных уравнений для скоростей тензора поврежденности и простейших возможных форм, включающих связку необратимая деформация – поврежденность. Уравнения эволюции затем анализируются с целью поиска инвариантных отношений, сохраняющих свое значение в процессе роста поврежденности. Эти инвари-

антные отношения могут быть получены после своеобразной замены переменных в уравнениях для скоростей и по существу выражают баланс поврежденностей и их взаимное влияние друг на друга. Инвариантные отношения являются достаточно мощным средством общего анализа уравнений роста поврежденности и позволяют, в частности, установить оценки сверху и снизу времени до разрушения.

Канонический формализм с успехом может быть применен к исследованию различных изотермических процессов накопления повреждений. Заканчивается данная глава изучением процессов роста хрупкой поврежденности и влияния пластической деформации (в том числе с учетом возможной микронеоднородности распределения напряжений) на развитие поврежденности преимущественно хрупкого типа. Основой анализа будет служить каноническое энергетическое представление термодинамических потенциалов состояния и уравнение баланса энтропии.

Мы сочли необходимым особое внимание уделить оценке поврежденности, обусловленной растрескиванием тела вследствие освобождения скрытой упругой энергии, ассоциированной с микронеоднородным полем напряжений. Как известно, в твердых телах в зоне локализации пластических деформаций (например, у вершины трещины) распределение напряжений следует считать микронеоднородным, поскольку свободная энергия, связанная с микронеоднородными напряжениями, составляет заметную часть полной свободной энергии. Осредненные по характерному объему напряжения и деформации, которые собственно используются для записи уравнений механики сплошных сред, не содержат никакой информации о микрофлуктуациях напряжений и деформаций и возможного турбулентного характера их распределения и, поэтому, оказывается исключенной из рассмотрения и свободная энергия, ассоциированная с указанными микрофлуктуациями. Именно поэтому часть свободной энергии, недоступная для учета посредством традиционных методов механики сплошных сред, называется скрытой. Скрытая свободная энергия является преимущественным энергетическим источником образования и развития поврежденности в зонах локализации пластических деформаций. Накопленная скрытая энергия при некоторых благоприятных для этого условиях (знакопеременное циклическое нагружение, охрупчивание в результате водородной коррозии или нейтронного облучения) может освобождаться, вызывая растрескивание тела в зонах локализованного пластического течения и поддерживая процесс микроразрушения этих зон. Ясно, что микроразрушения можно трактовать как

некоторое поле повреждений в пределах локализованной зоны и применить каноническую схему исследования поврежденности.

V.2. Уравнение баланса энтропии и энтропийное представление энергетических напряжений

Ниже, следуя обычной процедуре термодинамики неравновесных процессов, получено уравнение баланса энтропии для среды, упругая реакция которой сокращается с течением времени. Рассмотрения проводятся для каждого из канонических вариантов – энергетического и энтропийного.

В соответствии с обычной схемой метода скрытых переменных представим процесс накопления повреждений как непрерывное убывание некоторых параметров состояния. Выбор термодинамического базиса для представления поврежденности естественно диктуется преимуществами канонических скрытых переменных состояния, которые подробно обсуждались в предшествующей главе работы.

Итак, в качестве термодинамических параметров состояния (явных и скрытых) будем использовать один из следующих наборов переменных:

$$\omega_s = \{u_D, \mathbf{Y}^e, \xi_\beta\}, \quad (2.1)$$

$$\omega_u = \{s_D, \mathbf{Y}^e, \varsigma_\beta\}, \quad (2.2)$$

где ξ_β и ς_β – канонические энтропийные и энергетические скрытые переменные состояния соответственно.

Математическая модель необратимости вследствие таких факторов как рост поврежденности, пластичность, ползучесть, теплопроводность не может быть корректно сформулирована без явного указания на источники внутреннего производства энтропии и расщепления выражения для внутреннего производства энтропии на сумму скоростей совершения работы обобщенными термодинамическими силами на сопряженных (по потенциалу рассеяния) потоках. Наша ближайшая цель в этом плане – вывод уравнения баланса энтропии и установление выражения для внутреннего производства энтропии в каноническом варианте, т.е. только через термодинамические функции состояния от одного из наборов канонических переменных (2.1), (2.2).

Сначала рассмотрим энергетический вариант, т.е. второй набор переменных, и внутреннюю энергию (в расчете на единицу массы) как термодинамический потенциал состояния:

$$u_D = u_D(s_D, \mathbf{Y}^e, \varsigma_\beta). \quad (2.3)$$

Дифференцируя это уравнение по времени, находим

$$\rho_R \dot{u}_D = \rho_R \vartheta_\varsigma \dot{s}_D + \text{tr} \left\{ \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \varsigma_\beta} \dot{\mathbf{Y}}^e \right\} + \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \varsigma_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\varsigma}_\beta, \quad (2.4)$$

где каноническая термодинамическая производная

$$\vartheta_\varsigma = \left[\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \varsigma_\gamma} \quad (2.5)$$

есть абсолютная температура в каноническом энергетическом ς -представлении.

Подставляя затем уравнение (2.4) в уравнение баланса внутренней энергии (см., например, дополнение в монографии [161])

$$\rho_R \dot{u}_D + \nabla_R \cdot \mathbf{h}_R = \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}) + \rho_R \Sigma[u_D] \quad (\mathbf{h}_R = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{h}), \quad (2.6)$$

где \mathbf{h} – вектор потока тепла, \mathbf{F} – градиент деформации, $J = |\det \mathbf{F}|$, $\Sigma[u_D]$ – производство внутренней энергии (в единицу времени в расчете на единицу массы), \mathbf{S} , \mathbf{Y} – энергетически сопряженная пара тензора напряжений и деформаций, получим

$$\rho_R \vartheta_\varsigma \dot{s}_D - \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) + \nabla_R \cdot \mathbf{h}_R + \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \varsigma_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\varsigma}_\beta - \rho_R \Sigma[u_D] = 0. \quad (2.7)$$

Здесь и в дальнейшем через \mathbf{Y}^a условимся обозначать неупругую составляющую тензора конечных деформаций \mathbf{Y} .

Приведем один из ряда возможных вариантов отделения неупругой составляющей деформации. Полагая $\mathbf{S} = J \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R}$, и определяя сопряженный тензор деформации с помощью дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{Y}} = \text{sym}(\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1})$, неупругую часть деформации отделяем согласно уравнению

$\dot{\mathbf{Y}}^a = \dot{\mathbf{Y}} - \dot{\mathbf{Y}}^e$. Ясно, что если сопряженные по энергии тензоры напряжений и деформаций коаксиальны, то $\mathbf{Y} = \ln \mathbf{U}$ и мультипликативное разложение сводится просто к сложению упругой и неупругой логарифмической деформации.

Наряду с уравнением (2.7) рассмотрим уравнение баланса энтропии

$$\rho_R \dot{s}_D + \nabla_R \cdot \mathbf{J}_{sR} = \rho_R (\Sigma_e[s_D] + \Sigma_i[s_D]) \quad (\mathbf{J}_{sR} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{J}_s), \quad (2.8)$$

где \mathbf{J}_s – вектор потока энтропии, $\Sigma_e[s_D]$ – внешнее производство энтропии, $\Sigma_i[s_D]$ – внутренне производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Внешнее производство энтропии необходимо учитывать в процессах, связанных с поглощением тепла, переносимого излучением.

Только внутреннее производство энтропии подчиняется неравенству необратимости

$$\Sigma_i[s_D] \geq 0.$$

Используя уравнение (2.8), уравнение (2.7) представим в форме

$$\begin{aligned} \nabla_R \cdot (\mathbf{h}_R - \vartheta_\zeta \mathbf{J}_{sR}) + \mathbf{J}_{sR} \cdot \nabla_R \vartheta_\zeta + \rho_R \vartheta_\zeta \Sigma_i[s_D] - \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) + \\ + \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \zeta_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\zeta}_\beta + \rho_R \vartheta_\zeta \Sigma_e[s_D] - \rho_R \Sigma[u_D] = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Это уравнение должно тождественно удовлетворяться для всех термодинамически допустимых процессов. Но тогда, очевидно, должны выполняться следующие соотношения (которые по сути являются формальными определениями вектора потока энтропии, внутреннего и внешнего производства энтропии):

$$\mathbf{J}_{sR} = \vartheta_\zeta^{-1} \mathbf{h}_R, \quad (2.10)$$

$$\vartheta_\zeta \Sigma_e[s_D] = \Sigma[u_D], \quad (2.11)$$

$$\rho_R \vartheta_\zeta \Sigma_i[s_D] = \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) - \mathbf{J}_{sR} \cdot \nabla_R \vartheta_\zeta - \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \zeta_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\zeta}_\beta, \quad (2.12)$$

где тензор напряжений \mathbf{S} , как обычно, определяется посредством канонической термодинамической производной

$$\mathbf{S} = \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \xi_\beta}. \quad (2.13)$$

Под канонической термодинамической производной некоторой функции состояния мы понимаем частную производную по одной из переменных набора (2.1) (или (2.2)) при фиксированных значениях всех остальных переменных из того же самого набора (2.1) (или соответственно (2.2)).

Уравнение (2.12) более или менее конкретно определяет внутреннее производство энтропии. Аддитивные вклады обусловлены неупругой деформацией тела, теплопроводностью и накоплением повреждений.

Ясно, что внутреннее производство энтропии может быть представлено и с помощью энтропийных канонических переменных состояния ξ_β . Соответствующая формула приведена ниже:

$$\rho_R \vartheta_\xi \Sigma_i[s_D] = \text{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) - \mathbf{J}_{s_R} \cdot \nabla_R \vartheta_\xi - \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\xi}_\beta, \quad (2.14)$$

где термодинамическая производная

$$\vartheta_\xi = \left[\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\gamma} \quad (2.15)$$

есть абсолютная температура в каноническом ξ -представлении.

Уравнение (2.14) оказывается не совсем удобным, поскольку в действительности термодинамические производные

$$\left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \xi_\beta}, \quad \left[\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\gamma}, \quad \left[\frac{\partial u_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e}$$

не являются каноническими, так как переменные

$$s_D, \mathbf{Y}^e, \xi_\beta$$

не образуют канонического набора переменных. Указанные производные необходимо преобразовать к каноническому набору переменных, если мы хотим воспользоваться преимуществами канонического формализма. С этой

целью выражение (2.14) для внутреннего производства энтропии подставим в уравнение баланса энтропии (2.8).

В результате находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left\{ \left[\rho_R \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \xi_{\beta'}} + \mathbf{S} \right] \dot{\mathbf{Y}}^e \right\} + \\ + \sum_{\beta=1}^r \rho_R \left\{ \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e} + \left[\frac{\partial u_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \right\} \dot{\xi}_\beta = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

и, как следствие, – искомые перепредставления термодинамических производных:

$$\left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \xi_\beta} = - \left[\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\beta} \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \xi_\beta} = - \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \xi_\beta}, \quad (2.17)$$

$$\left[\frac{\partial u_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} = - \left[\frac{\partial u_D}{\partial s_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\gamma} \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e} = - \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e}, \quad (2.18)$$

где абсолютная температура (точнее обратная температура¹⁹) также представлена через каноническую термодинамическую производную

$$\vartheta_\xi^{-1} = \left[\frac{\partial s_D}{\partial u_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\gamma}. \quad (2.19)$$

С учетом уравнений (2.17), (2.18) формула (2.14) приобретает вид

$$\rho_R \vartheta_\xi \Sigma_i[s_D] = \operatorname{tr}(\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) - \mathbf{J}_{sR} \cdot \nabla_R \vartheta_\xi + \sum_{\beta=1}^r \rho_R \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\xi}_\beta. \quad (2.20)$$

Таким образом, канонические представления внутреннего производства энтропии в процессе роста поврежденности выражаются формулами (2.12), (2.20).

¹⁹Обратную температуру, в соответствии с терминологией школы рациональной механики следует называть холодностью.

Остановимся еще на одной важной формуле. Энергетический тензор напряжений выше (см. (2.13)) вычислялся с помощью канонической термодинамической производной энергетического типа. Соответствующее энтропийное ξ -представление также может быть найдено. Не вдаваясь в детали, сразу приведем результат:

$$\mathbf{S} = -\rho_R \left\{ \left[\frac{\partial s_D}{\partial u_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \xi_\gamma} \right\}^{-1} \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \xi_\beta}. \quad (2.21)$$

В последующем изложении мы воспользуемся формулами (2.13) и (2.21) для асимптотического анализа напряжений на предфинальной стадии роста повреждений.

С помощью уравнения баланса энтропии (2.8) без труда может быть дана оценка возрастания энтропии в изотермическом (исключая также и теплопроводность) процессе накопления повреждений:

$$\rho_R \vartheta_\zeta (s_D - \overline{s_D}) = \int \text{tr} (\mathbf{S} \dot{\mathbf{Y}}^a) dt - \rho_R \int \left(\frac{\partial u_D}{\partial \zeta_\beta} \right)_{s_D, \mathbf{Y}^e} \dot{\zeta}_\beta dt, \quad (2.22)$$

где $\overline{s_D}$ – значение энтропии в отсчетной точке процесса.

Оценка величины возрастания энтропии представляет значительный интерес для механики разрушения, и прежде всего в силу того обстоятельства, что сам феномен разрушения может трактоваться как насыщение элемента тела энтропией, предельное значение которой часто может выступать как универсальная физическая характеристика твердого тела (см. по этому поводу [44], [45], [89], особенно в связи с энтропийным критерием разрушения). Ясно, что энтропийный критерий разрушения имеет также и двойственную формулировку в терминах критического падения свободной энергии.

V.3. Условия термодинамической ортогональности

Самый важный шаг в моделировании того или иного необратимого процесса состоит в формулировке определяющих соотношений, связывающих необратимые термодинамические потоки и силы. В этой части работы будут сформулированы канонические определяющие уравнения тела с повреждениями. Эти уравнения мы выводим из одного достаточно общего принципа термодинамики необратимых процессов, предложенного Г. Циглером

[204], [205], [206], – принципа термодинамической ортогональности, устанавливающего ортогональность необратимой термодинамической силы поверхности уровня потенциала рассеяния. Соотношения термодинамической ортогональности имеют давнюю историю, начинающуюся с попыток обобщения соотношений Онсагера на нелинейные модели, и формально могут быть выведены из целого ряда вариационных формулировок термодинамики необратимых процессов, например, из принципа максимального производства энтропии [204].

Принцип максимального производства энтропии обладает достаточной общностью: все наиболее распространенные модели необратимых процессов могут быть выведены из этого единственного принципа [206].

Прежде всего необходимо представить внутреннее производство энтропии в форме произведений обобщенных термодинамических сил и сопряженных потоков. Это совершенно необходимо, если предполагается применить традиционный формализм термодинамики необратимых процессов [205], [120].

Рассмотрим сначала каноническое ξ -представление. Обозначая через \mathbf{P}_ξ'' и \mathbf{J}_ξ обобщенную термодинамическую силу и сопряженный поток, имеем

$$\rho_R \vartheta_\xi \Sigma_i[s_D] = \text{tr}(\mathbf{P}_\xi'' \mathbf{J}_\xi). \quad (3.1)$$

В силу уравнения (2.20) термодинамическая сила и поток \mathbf{P}_ξ'' и \mathbf{J}_ξ должны быть определены как

$$\mathbf{P}_\xi'' = \left\{ \mathbf{S}, -\nabla_R \vartheta_\xi, \rho_R \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e} \right\}, \quad \mathbf{J}_\xi = \left\{ \dot{\mathbf{Y}}^a, \mathbf{J}_{sR}, \dot{\xi}_\beta \right\}. \quad (3.2)$$

Поток $\dot{\xi}_\beta$, соответствующий канонической переменной состояния ξ_β , и необратимая термодинамическая сила P_{ξ_β}''

$$P_{\xi_\beta}'' = \rho_R \vartheta_\xi \left[\frac{\partial s_D}{\partial \xi_\beta} \right]_{u_D, \mathbf{Y}^e} \quad (3.3)$$

считаются сопряженными (относительно энтропии).

Далее, принимая, что рассеяние $\vartheta_\xi \Sigma_i[s_D]$ может быть представлено только как функция потока, имеем

$$\vartheta_\xi \Sigma_i[s_D] = r_D(\mathbf{J}_\xi). \quad (3.4)$$

Применяемое здесь обозначение для потенциала рассеяния (в расчете на единицу массы) $r_D(\mathbf{J}_\xi)$ не совсем корректно, поскольку, вообще говоря не следует исключать его возможную зависимость от предыстории неупругой деформации, теплового потока и канонических переменных. Обозначение

$$r_D = r_D(\dot{\mathbf{Y}}^a, \mathbf{J}_{sR}, \dot{\xi}_\beta; \mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^{at}, \mathbf{J}_{sR}^t, \xi_\beta^t) \quad (3.5)$$

является корректным, но иногда для сокращения записи уравнений мы будем пользоваться более коротким – $r_D(\mathbf{J}_\xi)$.

Сравнивая (3.1) и (3.4) можно заключить, что

$$\rho_R r_D(\mathbf{J}_\xi) = \text{tr}(\mathbf{P}_\xi'' \mathbf{J}_\xi). \quad (3.6)$$

Определяющие уравнения, которые по существу связывают обобщенные термодинамические потоки и силы, получим опираясь на принцип максимального производства энтропии [204], [205]: действительные термодинамические потоки \mathbf{J} максимизируют величину производства энтропии, при условии, что необратимые термодинамические силы \mathbf{P}'' фиксированы, и выполняются ограничения

$$\rho_R \vartheta_\xi \Sigma_i[s_D] = \rho_R r_D(\mathbf{J}_\xi) = \text{tr}(\mathbf{P}_\xi'' \mathbf{J}_\xi) \geq 0. \quad (3.7)$$

Ясно, что принцип максимального производства энтропии сводится к решению вариационной задачи

$$\delta_{\mathbf{J}_\xi} r_D(\mathbf{J}_\xi) = 0, \quad \delta_{\mathbf{J}_\xi}^2 r_D(\mathbf{J}_\xi) \leq 0 \quad (3.8)$$

при следующем одностороннем ограничении:

$$\rho_R r_D(\mathbf{J}_\xi) - \text{tr}(\mathbf{P}_\xi'' \mathbf{J}_\xi) = 0. \quad (3.9)$$

Решение сформулированной вариационной задачи известно и представляет собой условие термодинамической ортогональности обобщенных потоков и сил

$$\mathbf{P}_\xi'' = \Lambda \frac{\partial r_D(\mathbf{J}_\xi)}{\partial \mathbf{J}_\xi}, \quad (3.10)$$

обобщающее известные соотношения Онсагера на нелинейные необратимые процессы.

Множитель Λ определяется согласно формуле

$$\Lambda = \frac{\rho_R r_D (\mathbf{J}_\xi)}{\text{tr} \left(\mathbf{J}_\xi \frac{\partial r_D (\mathbf{J}_\xi)}{\partial \mathbf{J}_\xi} \right)}. \quad (3.11)$$

На основании (3.2) канонические уравнения термодинамической ортогональности примут форму

$$\mathbf{S} = \rho_R r_D \Gamma_\xi^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\mathbf{Y}}^a}, \quad (3.12)$$

$$-\nabla_R \vartheta_\xi = \rho_R r_D \Gamma_\xi^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \mathbf{J}_{sR}}, \quad (3.13)$$

$$2\vartheta_\xi \frac{\partial s_D}{\partial \|\boldsymbol{\xi}\|^2} \xi_\beta = r_D \Gamma_\xi^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\xi}_\beta}, \quad (3.14)$$

где для сокращения записи уравнений было введено обозначение

$$\Gamma_\xi = \text{tr} \left\{ \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\mathbf{Y}}^a} \dot{\mathbf{Y}}^a \right\} + \sum_{\beta=1}^r \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\xi}_\beta} \dot{\xi}_\beta + \frac{\partial r_D}{\partial \mathbf{J}_{sR}} \cdot \mathbf{J}_{sR}. \quad (3.15)$$

В приближении малых деформаций в уравнении (3.12) энергетический тензор напряжений \mathbf{S} должен быть заменен девиатором, если неупругая деформация объема отсутствует.

Необратимая термодинамическая сила и сопряженный поток в энергетическом ς -представлении определены как

$$\mathbf{P}''_\varsigma = \left\{ \mathbf{S}, -\nabla_R \vartheta_\varsigma, -\rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \varsigma_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e} \right\}, \quad \mathbf{J}_\varsigma = \left\{ \dot{\mathbf{Y}}^a, \mathbf{J}_{sR}, \dot{\varsigma}_\beta \right\}, \quad (3.16)$$

где термодинамическая сила P''_{ς_β} , сопряженная (по энергии) потоку $\dot{\varsigma}_\beta$, выражается канонической термодинамической производной

$$P''_{\varsigma_\beta} = -\rho_R \left[\frac{\partial u_D}{\partial \varsigma_\beta} \right]_{s_D, \mathbf{Y}^e}. \quad (3.17)$$

Соотношения термодинамической ортогональности в энергетическом ς -представлении имеют следующую форму:

$$\mathbf{S} = \rho_R r_D \Gamma_\varsigma^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\mathbf{Y}}^a}, \quad (3.18)$$

$$-\nabla_R \vartheta_\varsigma = \rho_R r_D \Gamma_\varsigma^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \mathbf{J}_{sR}}, \quad (3.19)$$

$$-2 \frac{\partial u_D}{\partial \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2} \varsigma_\beta = r_D \Gamma_\varsigma^{-1} \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\varsigma}_\beta}, \quad (3.20)$$

где введено обозначение

$$\Gamma_\varsigma = \text{tr} \left\{ \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\mathbf{Y}}^a} \dot{\mathbf{Y}}^a \right\} + \sum_{\beta=1}^r \frac{\partial r_D}{\partial \dot{\varsigma}_\beta} \dot{\varsigma}_\beta + \frac{\partial r_D}{\partial \mathbf{J}_{sR}} \cdot \mathbf{J}_{sR}. \quad (3.21)$$

Полученные группы соотношений термодинамической ортогональности, к которым следует добавить энергетическую и энтропийную формы (2.13) и (2.21), есть по существу канонические формы определяющих уравнений тела с повреждениями.

Для изотермических процессов естественно следующее представление необратимой термодинамической силы:

$$P''_{\varsigma_\beta} = -\rho_R \left(\frac{\partial \psi_D}{\partial \varsigma_\beta} \right)_{\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \dots}. \quad (3.22)$$

Ясно, что по смыслу необратимая термодинамическая сила P''_{ς_β} представляет собой скорость освобождения свободной энергии по отношению к непрерывному убыванию канонической переменной ς_β при фиксированных значениях остальных скрытых канонических переменных состояния (равно как и явных переменных состояния).

Дальнейший анализ величины необратимой термодинамической силы будет основываться на канонических асимптотиках свободной энергии, рассмотренных в п. IV.7. Для определенности асимптотику свободной энергии примем в форме (IV.7.12), считая также, что $h = 1/2$. С учетом указанной асимптотики, уравнение (3.22) приобретает вид

$$P''_{\varsigma_\beta} = \frac{2\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma} G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|^3} \varsigma_\beta. \quad (3.23)$$

Полученное выражение для необратимой термодинамической силы может быть также представлено в форме

$$-P''_{\varsigma\beta} = \rho_R \psi_D \frac{\varsigma_\beta}{\|\varsigma\|^2}, \quad (3.24)$$

явно связывающей величину необратимой термодинамической силы и значение свободной энергии.

Определяя норму необратимой термодинамической силы традиционным соотношением

$$\|\mathbf{P}''_{\varsigma}\| = \sqrt{P''_{\varsigma\beta} P''_{\varsigma\beta}}, \quad (3.25)$$

можно, учитывая (3.24), получить

$$\|\mathbf{P}''_{\varsigma}\|^2 = \frac{\rho_R^2 \psi_D^2}{\|\varsigma\|^2}. \quad (3.26)$$

Таким образом, норма необратимой термодинамической силы, сопряженной потоку поврежденности, представляет собой нормированную на каноническую норму объемную плотность свободной энергии Гельмгольца.

Более содержательная интерпретация величины необратимой термодинамической силы, сопряженной потоку поврежденности будет найдена в результате общего термодинамического анализа наиболее важных процессов роста поврежденности в твердых телах.

В последующем изложение будет ограничено только линейными по скоростям изменения скрытых переменных состояния уравнениями, которые являются следствиями (3.12)-(3.14), или (3.18)-(3.20), в случае квадратичной зависимости потенциала рассеяния от скоростей изменения скрытых термодинамических переменных состояния.

V.4. Термодинамическое определение эффективных напряжений

Одним из ключевых понятий современной механики разрушения и механики поврежденности является понятие об эффективном напряжении [171]. Поле напряжений внутри тела с повреждениями, из-за наличия рассеянных микродефектов, характеризуется значительной концентрацией и локализацией напряжений. Ясно, что эффект резкого местного возрастания напряжений при умеренных напряжениях дальнего поля обязан учитываться

при моделировании состояний тела с рассеянными повреждениями. Возрастание уровня напряжений в элементе тела с повреждениями как раз и моделируется с помощью эффективного напряжения.

Если трактовать параметр поврежденности D как относительное сокращение несущей нагрузки площади, то простой пересчет площадей приводит к следующему определению эффективного напряжения σ^* :

$$\sigma^* = \sigma \frac{dA}{dA^*} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (4.1)$$

Эффективное напряжение используется и при формулировке определяющих уравнений тела с повреждениями. Обычно считается (см., например, [150]), что поврежденный материальный элемент под напряжением σ дает отклик по деформациям точно такой же, какой давал бы неповрежденный элемент под эффективным напряжением σ^* .

Обобщение понятия эффективного напряжения на общий трехмерный случай сталкивается с большими трудностями. Часто бывает вообще неясно как подобное обобщение реализовать, оставаясь в рамках классической механики деформируемого твердого тела. Весьма содержательная дискуссия по этому поводу имеется в работе [200].

Прямое обобщение формулы (4.1), очевидно, сводится к следующему определению тензора эффективных напряжений:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}. \quad (4.2)$$

Тензор эффективных напряжений (4.2), как было показано в [57], симметричен только если главные оси тензора поврежденности \mathbf{D} коориентированы главным осям тензора истинных напряжений Коши (что содержательно эквивалентно предположению о полной индифферентности состояния поврежденности по отношению к упругой деформации [175], [57]). Тогда величина главных нормальных напряжений возрастает обратно пропорционально уменьшению сплошности, т.е. справедлива традиционная формула:

$$T_{(\alpha)}^* = \frac{T_{(\alpha)}}{1 - D_{(\alpha)}}, \quad (4.3)$$

(по α не суммировать, $\alpha = 1, 2, 3$)

которая согласуется с общепринятой трактовкой тензора поврежденности

второго ранга. В иных случаях тензор эффективных напряжений с трудом поддается интерпретации.

Большой спектр предлагаемых определений и трактовок тензора эффективных напряжений никогда не подвергался термодинамическому анализу на предмет вывода этих тензоров из подходящих выражений для термодинамических потенциалов состояния.²⁰

Нашей ближайшей целью является термодинамический анализ концепции эффективных напряжений.

Тензор напряжений \mathbf{S} , энергетически сопряженный тензору деформаций \mathbf{Y} , определяется каноническими термодинамическими производными (2.13), (2.21).

На основании канонической асимптотики внутренней энергии

$$u_D = -\frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2 \|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \quad (\Delta = \Delta(s_D, \mathbf{Y}^e), \mathbf{D}_u \rightarrow \mathbf{I}), \quad (4.4)$$

где \mathbf{D}_u – канонический тензор поврежденности второго ранга (в энергетическом представлении), $u_0(s_D, \mathbf{Y}^e)$ – внутренняя энергия (в расчете на единицу массы) тела в отсчетном (и неповрежденном) состоянии, тензор напряжений вычисляется как каноническая термодинамическая производная²¹

$$\mathbf{S}_\varsigma = -\rho_R \frac{1}{\|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} \frac{u_0}{\frac{1}{2}\Delta^2} \right]_{s_D} \quad (\mathbf{D}_u \rightarrow \mathbf{I}). \quad (4.5)$$

Выражение для Δ было найдено выше (см. формулу (4.10) предшествующей главы):

$$\Delta^2 = \frac{2}{(\delta_u - 1) \|\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}_u\|^2}. \quad (4.6)$$

Напомним, что $\delta_u(s_D, \mathbf{Y}^e)$ есть относительное падение внутренней энергии для процесса с постоянной энтропией и упругой деформацией при достижении пограничного состояния. Все такие термодинамические процессы характеризуются условием

²⁰Прекрасной иллюстрацией этого является недавняя работа [200], в которой нет ни одной попытки согласовать определения и подходы с общими принципами нелинейной необратимой термодинамики.

²¹Для того, чтобы различать представления тензора напряжений (энергетическое от энтропийного) в дальнейшем будут использоваться соответственно обозначения \mathbf{S}_ς и \mathbf{S}_ξ .

$$\|\overline{\mathbf{D}}_u\| < \|\mathbf{D}_u\| < \sqrt{3}, \quad (4.7)$$

где $\overline{\mathbf{D}}_u(s_D, \mathbf{Y}^e)$ есть значение канонического тензора поврежденности в переходном состоянии.

Полагая далее, что внутренняя энергия в переходном состоянии есть (по абсолютному значению) величина порядка той, которая запасалась бы в неповрежденном элементе тела при тех же самых значениях энтропии и упругой деформации, и, кроме того, – канонический тензор поврежденности в переходном состоянии слабо зависит от изменения упругой деформации, т.е.

$$\overline{\mathbf{D}}_u(s_D, \mathbf{Y}^e) = \overline{\mathbf{D}}_u(s_D, \overline{\mathbf{Y}}^e) + \bar{\boldsymbol{\delta}}(s_D, \mathbf{Y}^e), \quad (4.8)$$

$$(\|\bar{\boldsymbol{\delta}}(s_D, \mathbf{Y}^e)\| \ll 1, \left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} \|\bar{\boldsymbol{\delta}}(s_D, \mathbf{Y}^e)\| \right\| \ll 1)$$

на основании уравнений (4.5) и (4.6) получим

$$\mathbf{S}_\zeta = (\delta_u(s_D, \overline{\mathbf{Y}}^e) - 1) \frac{\|\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}_u\|^2}{\|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \mathbf{S}_0 \quad (\mathbf{D}_u \rightarrow \mathbf{I}),$$

или, учитывая, что $\delta_u(s_D, \overline{\mathbf{Y}}^e) - 1 \approx 1$,

$$\mathbf{S}_\zeta = \frac{\|\mathbf{I} - \overline{\mathbf{D}}_u\|^2}{\|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \mathbf{S}_0, \quad (4.9)$$

где тензор \mathbf{S}_0 определяется по термодинамическому потенциалу отсчетного (и неповрежденного) состояния:

$$\mathbf{S}_0 = \rho_R \left[\frac{\partial u_0(s_D, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.9) действительно описывает увеличение внутренних напряжений в поврежденной среде, причем при выводе тензора \mathbf{S}_ζ не вводилось никаких дополнительных предположений и не производился перерасчет эффективной площади, передающей контактные взаимодействия.

Ясно, что тензор \mathbf{S}_ξ уже обладает всеми признаками эффективного напряжения. Однако следует помнить, что формула (4.9) имеет асимптотическую природу, и ее справедливость может быть обоснована в рамках канонического формализма только в асимптотическом смысле (т.е. в пределах предфинальной стадии роста поврежденности, когда поврежденность действительно выступает как решающий фактор, влияющий на возрастание напряжений). Не следует забывать также, что реальная асимптотика напряжений в процессе развития повреждений не всегда обратно квадратичная по канонической норме, поскольку для реального процесса параллельно происходит уменьшение упругой составляющей деформации, что, несомненно сказывается на энергетических напряжениях, поскольку и числитель (по норме) и знаменатель одновременно убывают.

Тот же самый анализ, но с использованием энтропийного канонического варианта приводит к противоположному результату: тензор напряжений оказывается равным

$$\mathbf{S}_\xi = \mathbf{S}_0 \quad (\mathbf{D}_s \rightarrow \mathbf{I}), \quad (4.11)$$

где тензор напряжений \mathbf{S}_0 вычисляется через канонические термодинамические производные по формуле

$$\mathbf{S}_0 = -\rho_R \left\{ \left[\frac{\partial s_0}{\partial u_D} \right]_{\mathbf{Y}^e} \right\}^{-1} \left[\frac{\partial s_0}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D}, \quad (4.12)$$

не будучи, таким образом, зависимым явно от канонической нормы и традиционного множителя $1 - D$. Последнее означает, что для процессов, происходящих при постоянном значении внутренней энергии и упругой деформации, тензор напряжений \mathbf{S}_ξ вообще не изменяется, т.е. является инвариантом. Реальный процесс накопления повреждений в изотермических условиях всегда сопровождается уменьшением упругой составляющей деформации и падением свободной энергии, поэтому инвариантность тензора \mathbf{S}_ξ в этом плане носит относительный характер.

Итак, из проведенного анализа следует, что традиционная схема введения эффективного напряжения действительно согласуется с термодинамикой необратимых процессов только в асимптотическом смысле и только в рамках энергетического описания.

Рассмотрим далее изотермические асимптотики напряжений в среде с повреждениями.

Для поиска изотермических асимптотик тензора напряжений представим его сначала как каноническую термодинамическую производную

$$\mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \left[\frac{\partial \psi_D(\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \|\boldsymbol{\varsigma}\|)}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{\vartheta_\varsigma, \varsigma_\beta}, \quad (4.13)$$

где ψ_D – свободная энергия Гельмгольца:

$$\psi_D(\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \|\boldsymbol{\varsigma}\|) = u_D(s_D, \mathbf{Y}^e, \|\boldsymbol{\varsigma}\|) - \vartheta_\varsigma s_D. \quad (4.14)$$

Асимптотика преобразования Лежандра (4.14) уже рассматривалась достаточно подробно в предыдущей главе работы.

Определяя функцию

$$s_D = g(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e) \quad (4.15)$$

неявно уравнением

$$-\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma = \left[\frac{\partial}{\partial s_D} \frac{u_0(s_D, \mathbf{Y}^e)}{\frac{1}{2} \Delta^2(s_D, \mathbf{Y}^e)} \right]_{\mathbf{Y}^e}, \quad (4.16)$$

и используя каноническую асимптотику внутренней энергии, находим

$$\psi_D = -\frac{u_0(g, \mathbf{Y}^e)}{\frac{1}{2} \Delta^2(g(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e), \mathbf{Y}^e) \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2} - \vartheta_\varsigma g(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e), \quad (4.17)$$

или, разлагая в ряд по степеням первого из аргументов функции g , –

$$\begin{aligned} \psi_D = & \frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2} + \vartheta_\varsigma [f'_I(0, \mathbf{Y}^e) - g(0, \mathbf{Y}^e)] + \\ & + \vartheta_\varsigma^2 \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \left[\frac{1}{2} f''_{II}(0, \mathbf{Y}^e) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e) \right] + O(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^4), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где

$$f(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e) = -\frac{u_0(g, \mathbf{Y}^e)}{\frac{1}{2} \Delta^2(g(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e), \mathbf{Y}^e)}. \quad (4.19)$$

В силу формул (4.13), (4.18) асимптотика тензора напряжений может быть получена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \left\{ \frac{1}{\|\varsigma\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \vartheta_\varsigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} [f'_I(0, \mathbf{Y}^e) - g(0, \mathbf{Y}^e)] + \right. \\ \left. + \vartheta_\varsigma^2 \|\varsigma\|^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} \left[\frac{1}{2} f''_{II}(0, \mathbf{Y}^e) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e) \right] \right\} + \mathbf{O}(\|\varsigma\|^4), \end{aligned} \quad (4.20)$$

или, сохраняя только главный член –

$$\mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \frac{1}{\|\varsigma\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \mathbf{O}(1). \quad (4.21)$$

Полученная формула показывает, что напряжения в основном приближении не зависят от температуры и раскладываются в произведение множителя, неограниченно возрастающего при приближении к финальному состоянию, и тензора, зависящего только от упругой составляющей деформации:

$$\mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \frac{1}{\|\mathbf{I} - \mathbf{D}_u\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \mathbf{O}(1) \quad (\mathbf{D}_u \rightarrow \mathbf{I}). \quad (4.22)$$

Итак, напряжения в значительной степени поврежденной среде асимптотически не зависят от температуры (если справедлива регулярная асимптотика функции состояния $f = f(\|\varsigma\|^2 \vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e)$).

Если асимптотика этой функции имеет степенную форму ($h > 0$)

$$f = F(\mathbf{Y}^e) \gamma^{1-h} \quad (\gamma = \|\varsigma\|^2 \vartheta_\varsigma), \quad (4.23)$$

то, согласно формуле (7.8) предыдущей главы

$$g = G(\mathbf{Y}^e) \gamma^h \quad (\gamma = \|\varsigma\|^2 \vartheta_\varsigma), \quad (4.24)$$

и изотермическая асимптотика напряжений имеет вид (см. также уравнение (7.14) предыдущей главы)

$$\mathbf{S}_\varsigma = -\rho_R \frac{1}{1-h} \frac{\vartheta_\varsigma}{\gamma^h} \frac{\partial G(\mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e}. \quad (4.25)$$

Ясно, что в этом случае зависимость напряжений от температуры становится существенной.

V.5. Термодинамическая модель связки необратимая деформация – поврежденность

Ниже рассматриваются уравнения термодинамической ортогональности, представленные в двух канонических вариантах, в случае, когда потенциал рассеяния квадратичен по скоростям изменения скрытых переменных состояния.

Квадратичная аппроксимация потенциала рассеяния

$$r_D = \sum_{\alpha, \beta=1}^p K_{\alpha\beta} \dot{\Lambda}_\alpha \dot{\Lambda}_\beta$$

подразумевает линейную зависимость между термодинамическими потоками и силами.

Сильная нелинейность может быть введена посредством полиномиальной (четной степени) зависимости

$$r_D = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p=0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 2m}}^{2m} K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \dot{\Lambda}_1^{\alpha_1} \dot{\Lambda}_2^{\alpha_2} \dots \dot{\Lambda}_p^{\alpha_p} \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Однако использование этой последней зависимости вряд ли оправдано, поскольку никакого реального продвижения в плане общего анализа уравнений, устанавливающих закон роста повреждений, не может быть сделано.

В любом случае квадратичная аппроксимация вполне достаточна, для описания связки необратимая деформация – поврежденность, поскольку содержит один из совместных инвариантов скоростей неупругой деформации и тензора поврежденности. Ограничимся следующим квадратичным представлением потенциала рассеяния

$$r_D = \text{tr}(\dot{\mathbf{Y}}^a (\mathfrak{K}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \dot{\mathbf{Y}}^a)) + 2\text{tr}(\dot{\mathbf{\Xi}} (\mathfrak{K}^{\mathbf{\Xi} \mathbf{Y}^a} \dot{\mathbf{Y}}^a)) + \text{tr}(\dot{\mathbf{\Xi}} (\mathfrak{K}^{\mathbf{\Xi} \mathbf{\Xi}} \dot{\mathbf{\Xi}})), \quad (5.1)$$

где $\mathbf{\Xi} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_s$ – канонический тензор сплошности, феноменологические коэффициенты

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\mathbf{Y}^e, \mathbf{\Xi}; \mathbf{Y}^{a^t}) \quad (5.2)$$

являются симметричными тензорами четвертого ранга:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_{ijkl}^{Y^a Y^a} &= \mathfrak{K}_{klij}^{Y^a Y^a}, \\
\mathfrak{K}_{ijkl}^{\Xi Y^a} &= \mathfrak{K}_{klij}^{\Xi Y^a}, \\
\mathfrak{K}_{ijkl}^{\Xi \Xi} &= \mathfrak{K}_{klij}^{\Xi \Xi}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Второе слагаемое в правой части представления (5.1) учитывает взаимодействие поврежденности и неупругой деформации.

В силу принципа термодинамической ортогональности и квадратичной аппроксимации потенциала рассеяния (5.1), уравнения термодинамической ортогональности в энтропийном варианте приобретают следующий вид:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{K}^{\Xi Y^a} \dot{\Xi} + \mathfrak{K}^{Y^a Y^a} \dot{Y}^a, \tag{5.4}$$

$$2\vartheta_{\Xi} \frac{\partial s_D}{\partial \|\Xi\|^2} \Xi = \mathfrak{K}^{\Xi \Xi} \dot{\Xi} + \mathfrak{K}^{\Xi Y^a} \dot{Y}^a. \tag{5.5}$$

Полученные квазилинейные (т.е. линейные по скоростям) уравнения термодинамической ортогональности включают все практически используемые в механике поврежденности варианты кинетических уравнений накопления повреждений (см., например, [135]).

Разрешив систему уравнений (5.4), (5.5) относительно скоростей $\dot{\Xi}$, \dot{Y}^a , условия термодинамической ортогональности можно представить в форме:

$$\dot{Y}^a = 2\vartheta_{\Xi} \frac{\partial s_D}{\partial \|\Xi\|^2} \mathfrak{L}^{\Xi Y^a} \Xi + \mathfrak{L}^{Y^a Y^a} \mathbf{S}, \tag{5.6}$$

$$\dot{\Xi} = 2\vartheta_{\Xi} \frac{\partial s_D}{\partial \|\Xi\|^2} \mathfrak{L}^{\Xi \Xi} \Xi + \mathfrak{L}^{\Xi Y^a} \mathbf{S}. \tag{5.7}$$

Феноменологические тензоры \mathfrak{K} и \mathfrak{L} соотносятся как обратные тензоры, т.е.

$$\left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{K}^{\Xi Y^a} & \mathfrak{K}^{Y^a Y^a} \\ \mathfrak{K}^{\Xi \Xi} & \mathfrak{K}^{\Xi Y^a} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathfrak{L}^{\Xi Y^a} & \mathfrak{L}^{Y^a Y^a} \\ \mathfrak{L}^{\Xi \Xi} & \mathfrak{L}^{\Xi Y^a} \end{array} \right\|^{-1}. \tag{5.8}$$

Отметим также следующие условия симметрии:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{ijkl}^{Y^a Y^a} &= \mathfrak{L}_{klij}^{Y^a Y^a}, \\
\mathfrak{L}_{ijkl}^{\Xi Y^a} &= \mathfrak{L}_{klij}^{\Xi Y^a}, \\
\mathfrak{L}_{ijkl}^{\Xi \Xi} &= \mathfrak{L}_{klij}^{\Xi \Xi}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Подставляя уравнения (2.19), (2.21) в (5.6), (5.7), получим уравнения роста повреждений в энтропийном варианте:

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = \left\{ \left[\frac{\partial s_D}{\partial u_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \Xi} \right\}^{-1} \left\{ 2 \frac{\partial s_D}{\partial \|\Xi\|^2} \mathfrak{L}^{\Xi \mathbf{Y}^a} \Xi - \rho_R \mathfrak{L}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \Xi} \right\}, \quad (5.10)$$

$$\dot{\Xi} = \left\{ \left[\frac{\partial s_D}{\partial u_D} \right]_{\mathbf{Y}^e, \Xi} \right\}^{-1} \left\{ 2 \frac{\partial s_D}{\partial \|\Xi\|^2} \mathfrak{L}^{\Xi \Xi} \Xi - \rho_R \mathfrak{L}^{\Xi \mathbf{Y}^a} \left[\frac{\partial s_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{u_D, \Xi} \right\}. \quad (5.11)$$

Энергетическое каноническое представление квазилинейных уравнений термодинамической ортогональности есть:

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = -2\rho_R \frac{\partial u_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \mathbf{S}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = -2\rho_R \frac{\partial u_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Z}} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a} \mathbf{S}, \quad (5.13)$$

где $\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_u$ – канонический тензор сплошности в энергетическом представлении, $\mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a}$, $\mathfrak{J}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a}$, $\mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Z}}$ – симметричные тензоры четвертого ранга (материальные тензоры).

Заменяя тензор напряжений канонической термодинамической производной, получим также

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = \rho_R \left\{ -2 \frac{\partial u_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \mathbf{Z}} \right\}, \quad (5.14)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \rho_R \left\{ -2 \frac{\partial u_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Z}} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a} \left[\frac{\partial u_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{s_D, \mathbf{Z}} \right\}. \quad (5.15)$$

В случае изотермического роста поврежденности удобнее воспользоваться уравнениями

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = \rho_R \left\{ -2 \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Z} \mathbf{Y}^a} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \left[\frac{\partial \psi_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{\vartheta_s, \mathbf{Z}} \right\}, \quad (5.16)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \rho_R \left\{ -2 \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{ZZ} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{ZY^a} \left[\frac{\partial \psi_D}{\partial \mathbf{Y}^e} \right]_{\vartheta_\varsigma, \mathbf{Z}} \right\}. \quad (5.17)$$

Подставляя в полученную систему уравнений каноническую асимптотику свободной энергии (4.18), получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}^a = \rho_R \left\{ 2 \left[\frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{Z}\|^4} - \vartheta_\varsigma^2 \left[\frac{1}{2} f''_{\Pi}(0, \mathbf{Y}^e) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e) \right] + \mathbf{O}(\|\mathbf{Z}\|^2) \right] \mathfrak{J}^{ZY^a} \mathbf{Z} + \right. \\ \left. + \mathfrak{J}^{Y^a Y^a} \left[\frac{1}{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \vartheta_\varsigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} [f'_I(0, \mathbf{Y}^e) - g(0, \mathbf{Y}^e)] + \mathbf{O}(\|\mathbf{Z}\|^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} = \rho_R \left\{ 2 \left[\frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{Z}\|^4} - \vartheta_\varsigma^2 \left[\frac{1}{2} f''_{\Pi}(0, \mathbf{Y}^e) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e) \right] + \mathbf{O}(\|\mathbf{Z}\|^2) \right] \mathfrak{J}^{ZZ} \mathbf{Z} + \right. \\ \left. + \mathfrak{J}^{ZY^a} \left[\frac{1}{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \vartheta_\varsigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}^e} [f'_I(0, \mathbf{Y}^e) - g(0, \mathbf{Y}^e)] + \mathbf{O}(\|\mathbf{Z}\|^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

или, сохраняя только главный член асимптотики, —

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = \rho_R \left\{ 2 \left[\frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{Z}\|^4} + \mathbf{O}(1) \right] \mathfrak{J}^{ZY^a} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{Y^a Y^a} \left[\frac{1}{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \mathbf{O}(1) \right] \right\}, \quad (5.20)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = \rho_R \left\{ 2 \left[\frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{Z}\|^4} + \mathbf{O}(1) \right] \mathfrak{J}^{ZZ} \mathbf{Z} + \mathfrak{J}^{ZY^a} \left[\frac{1}{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} + \mathbf{O}(1) \right] \right\}. \quad (5.21)$$

Полученные выше квазилинейные уравнения, описывающие рост анизотропной поврежденности, чрезвычайно сложны для сколько-нибудь результативного аналитического анализа. Однако упрощенные варианты приведенных уравнений оказываются вполне пригодными для этой цели. Ниже приводится общий анализ системы квазилинейных уравнений роста поврежденности в одном практически важном случае.

V.6. Баланс повреждений в связке неупругая деформация – поврежденность (изотермическое приближение)

Канонические уравнения накопления повреждений (5.16), (5.17) могут быть применены для выяснения влияния необратимой деформации (пластической, или деформации ползучести) на изотермический рост поврежденности. Ясно, что более или менее общий анализ этой системы сопряжен со значительными трудностями.

Ситуация, однако, значительно упрощается, если считать, что феноменологический тензор \mathfrak{J}^{ZY^a} равен нулю. В этом случае влияние напряженного состояния на рост поврежденности может быть учтено только в форме зависимости феноменологического тензора \mathfrak{J}^{ZZ} от напряжений (или упругой составляющей деформации). Аналогично, влияние поврежденности на рост необратимой деформации возможно только через тензор $\mathfrak{J}^{Y^a Y^a}$.

Уравнения (5.16), (5.17) при условии $\mathfrak{J}^{ZY^a} = \mathbf{o}$ могут быть представлены в виде

$$\dot{Y}^a = \rho_R \mathfrak{J}^{Y^a Y^a} \left[\frac{\partial \psi_D}{\partial Y^e} \right]_{\vartheta, \mathbf{Z}}, \quad (6.1)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = -2\rho_R \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{ZZ} \mathbf{Z}. \quad (6.2)$$

Для того чтобы условие

$$\mathfrak{J}^{ZY^a} = \mathbf{o} \quad (6.3)$$

не исключало полностью связку неупругая деформация – поврежденность, будем считать, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^{Y^a Y^a} &= \mathfrak{J}^{Y^a Y^a}(\|\mathbf{Z}\|, Y^e; Y^{a^t}), \\ \mathfrak{J}^{ZZ} &= \mathfrak{J}^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, Y^e; Y^{a^t}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

сохранив при этом каноническую форму зависимости от скрытой переменной состояния.

Вблизи состояния разрушения уравнения изотермического роста повреждений имеют вид (см. уравнения (5.20), (5.21)):

$$\dot{\mathbf{Y}}^a = \rho_R \frac{1}{\|\mathbf{Z}\|^2} \mathfrak{J}^{\mathbf{Y}^a \mathbf{Y}^a} \frac{\partial f(0, \mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e}, \quad (6.5)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = 2\rho_R \frac{f(0, \mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{Z}\|^4} \mathfrak{J}^{ZZ} \mathbf{Z}, \quad (6.6)$$

который по существу – самый простой, и в то же время позволяющий учесть связку неупругая деформация – поврежденность.

Аналитическая структура системы уравнений (6.2) может быть существенно упрощена в случае, когда главные оси тензора \mathfrak{J}^{ZZ} не изменяются с течением времени. Тогда можно определить тензорную скрытую переменную состояния \mathbf{Z}' согласно

$$\mathbf{Z} = \mathfrak{Q} \mathbf{Z}', \quad (6.7)$$

где \mathfrak{Q} – ортогональный линейный оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров второго ранга, который преобразует матрицу тензора \mathfrak{J}^{ZZ} к диагональному виду

$$\mathfrak{Q}^T \mathfrak{J}^{ZZ} \mathfrak{Q} = \text{diag}(\mathfrak{J}_{ik}^{ZZ}) \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (6.8)$$

Так как тензор \mathfrak{Q} ортогонален, то $\|\mathbf{Z}\| = \|\mathbf{Z}'\|$ и в новых переменных состояния уравнение (6.2) примет вид

$$\dot{Z}'_{ik} = -2\rho_R \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}'\|^2} \mathfrak{J}_{ik}^{ZZ} Z'_{ik}, \quad (6.9)$$

(по i, k не суммировать; $i, k = 1, 2, 3$)

где \mathfrak{J}_{ik}^{ZZ} ($i, k = 1, 2, 3$) – собственные значения тензора \mathfrak{J}^{ZZ} . Ясно, что указанные собственные значения положительны

$$\mathfrak{J}_{ik}^{ZZ} > 0 \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (6.10)$$

и удовлетворяют условию симметрии

$$\mathfrak{J}_{ik}^{ZZ} = \mathfrak{J}_{ki}^{ZZ} \quad (i, k = 1, 2, 3)]. \quad (6.11)$$

Система уравнений (6.9) имеет шестой порядок и для ее интегрирования необходимо знать шесть первых интегралов. Пять из этих шести интегралов находятся явно, если предположить, что тензор \mathfrak{J}^{ZZ} раскладывается в произведение вида

$$\mathfrak{J}^{ZZ} = \tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ} \mathfrak{J}^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e; \mathbf{Y}^{a^t}), \quad (6.12)$$

где тензор четвертого ранга $\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}$ есть постоянный симметричный положительно определенный тензор, а скаляр \mathfrak{J}^{ZZ} – положителен.

Действительно, рассматривая отношения уравнений (6.9) к одному выбранному уравнению той же системы (индексы соответствующей скрытой переменной будем снабжать штрихами), получим пять уравнений

$$\frac{dZ'_{ik}}{dZ'_{i'k'}} = \frac{\tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}}{\tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}} \frac{Z'_{ik}}{Z'_{i'k'}}. \quad (6.13)$$

(по i, k, i', k' не суммировать; $i, k, i', k' = 1, 2, 3$)

Эти уравнения сразу же интегрируются. Пять интегралов, следующих из уравнений (6.13), приводятся ниже

$$\frac{Z'^{\tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}}_{ik}}{Z'^{\tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}}_{i'k'}} = C_{iki'k'} \quad (i, k, i', k' = 1, 2, 3). \quad (6.14)$$

В знаменателях здесь расположена одна и та же компонента тензора \mathbf{Z}' , которую назовем эталонной канонической сплошностью.

Возвращаясь в (6.14) к прежним каноническим переменным состояниям, находим инвариантные отношения степеней линейных комбинаций компонент канонического тензора сплошности:

$$\frac{(\mathfrak{Q}_{iklm}^{-1} Z_{lm})^{\tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}}}{(\mathfrak{Q}_{i'k'l'm'}^{-1} Z_{l'm'})^{\tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}}} = C_{iki'k'} \quad (i, k, i', k' = 1, 2, 3). \quad (6.15)$$

Полученные отношения не изменяются в процессе накопления повреждений и, поэтому, могут быть названы также инвариантами поврежденности, или просто – инвариантными отношениями.

Инвариантные отношения (6.15) устанавливают баланс поврежденностей, соответствующих различным ориентациям, и выражают некоторый закон сохранения поврежденностей.

Первые интегралы (6.14) позволяют выразить все компоненты Z'_{ik} только с помощью одной компоненты, $Z'_{i'k'}$. Таким образом, находим

$$Z'_{ik} = Z'_{i'k'} (\tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}, \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}, C_{iki'k'}). \quad (6.16)$$

Закон изменения компоненты $Z'_{i'k'}$ по-прежнему имеет вид (6.9), поскольку в силу ортогональности оператора \mathfrak{Q}_{iklm} каноническая норма при замене скрытой переменной состояния (6.7) инвариантна $\|\mathbf{Z}'\| = \|\mathbf{Z}\|$:

$$\dot{Z}'_{i'k'} = -2\rho_R \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ} Z'_{i'k'} \left[\mathfrak{J}^{ZZ} \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}'\|^2} \right]_{\|\mathbf{Z}'\|=\|\mathbf{Z}\| (Z'_{i'k'}, \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}, \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}, C_{ik i'k'})}. \quad (6.17)$$

(по i', k' не суммировать; $i', k' = 1, 2, 3$)

Уравнение (6.17) также может быть проинтегрировано, если скалярная материальная функция \mathfrak{J}^{ZZ} может быть представлена как

$$\mathfrak{J}^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e; \mathbf{Y}^{a^t}) = \mathfrak{J}_1^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e) \mathfrak{J}_2^{ZZ}(\mathbf{Y}^{a^t}), \quad (6.18)$$

т.е. возможно отделение зависимости от предыстории неупругой деформации, и кроме того, упругая составляющая деформации существенно не изменяется с ростом повреждений (установившийся упругий режим)²².

При этих условиях, вводя внутреннее время по формуле

$$t' = \int^t \mathfrak{J}_2^{ZZ}(\mathbf{Y}^{a^t}) dt, \quad (6.19)$$

решение дифференциального уравнения (6.17) можно получить в форме

$$\int \frac{dZ'_{i'k'}}{Z'_{i'k'} \left[\mathfrak{J}_1^{ZZ} \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}'\|^2} \right]_{\|\mathbf{Z}'\|=\|\mathbf{Z}\| (Z'_{i'k'}, \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}, \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}, C_{ik i'k'})}} = -2\rho_R \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ} t'. \quad (6.20)$$

Недостающий шестой интеграл, поэтому, находится в виде:

²²Предположение об установившемся упругом режиме может быть снято. Проводимые ниже рассуждения сохраняют свою силу, если вдоль процесса возможно получить интегрируемое соотношение, связывающее упругую деформацию и каноническую норму так, что упругая составляющая деформации полностью исключается во всех подынтегральных выражениях, фигурирующих ниже. Примеры таких процессов рассмотрены в следующем параграфе данной главы.

$$\int \frac{dZ'_{i'k'}}{Z'_{i'k'} \left[\mathfrak{J}_1^{ZZ} \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}'\|^2} \right]_{\|\mathbf{Z}'\|=\|\mathbf{Z}\| (Z'_{i'k'}, \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}, \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}, C_{iki'k'})}} = -2\rho_R \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ} \int \mathfrak{J}_2^{ZZ} (\mathbf{Y}^{a^t}) dt. \quad (6.21)$$

В соответствии с полученной формулой, время до разрушения t_c оценивается с помощью соотношения

$$\int_{\hat{Z}'_{i'k'}}^0 \frac{dZ'_{i'k'}}{Z'_{i'k'} \left[\mathfrak{J}_1^{ZZ} \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}'\|^2} \right]_{\|\mathbf{Z}'\|=\|\mathbf{Z}\| (Z'_{i'k'}, \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}, \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ}, C_{iki'k'})}} = -2\rho_R \tilde{\mathfrak{J}}_{i'k'}^{ZZ} \int_{\hat{t}}^{t_c} \mathfrak{J}_2^{ZZ} (\mathbf{Y}^{a^t}) dt, \quad (6.22)$$

где $\hat{Z}'_{i'k'}$ есть начальное ($t = \hat{t}$) значение $Z'_{i'k'}$.

Ясно, что оценка времени до разрушения t_c – самый важный прикладной результат предлагаемой схемы моделирования накопления повреждений. Принципиально важным является то, что каноническая схема позволяет при достаточно общих предположениях дать оценку времени до разрушения, рассматривая разрушение как финал процесса необратимого роста повреждений.

Канонические уравнения роста повреждений в форме (6.2) могут быть использованы также и для более грубых оценок времени до разрушения t_c .

Умножим обе части уравнения (6.2) слева на канонический тензор сплошности

$$2\mathbf{Z}\dot{\mathbf{Z}} = -2^2\rho_R \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2} \mathbf{Z}(\mathfrak{J}^{ZZ}\mathbf{Z}), \quad (6.23)$$

и отсюда также находим

$$\frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{Z}\|^2}{-2^2\rho_R \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2}} = \text{tr} [\mathbf{Z}(\mathfrak{J}^{ZZ}\mathbf{Z})]. \quad (6.24)$$

Считая справедливым разложение (6.12), получим следующую двустороннюю оценку:

$$(\min_{i,k} \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}) \mathfrak{J}^{ZZ} \|\mathbf{Z}\|^2 \leq \text{tr} [\mathbf{Z}(\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}\mathbf{Z})] \leq \|\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}\| \mathfrak{J}^{ZZ} \|\mathbf{Z}\|^2. \quad (6.25)$$

В случае изотермического роста повреждений полученное двойное неравенство преобразуется к

$$\begin{aligned} (\min_{i,k} \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}) &\leq \\ &\leq \frac{d}{dt'} \int^{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{d\|\mathbf{Z}\|^2}{-2^2 \rho_R \|\mathbf{Z}\|^2 \mathfrak{J}_1^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e) \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2}(\hat{\vartheta}_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \|\mathbf{Z}\|^2)} \leq \\ &\leq \|\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}\|. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Интегрируя эти неравенства по внутреннему времени при условии

$$t' \rightarrow t'_c \quad (\|\mathbf{Z}\| \rightarrow 0),$$

получим оценки

$$(\min_{i,k} \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ})(t'_c - t') \leq I(\|\mathbf{Z}\|) \leq \|\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}\| (t'_c - t'), \quad (6.27)$$

где введено следующее обозначение

$$I(\|\mathbf{Z}\|) = \int_0^{\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{d\|\mathbf{Z}\|^2}{2^2 \rho_R \|\mathbf{Z}\|^2 \mathfrak{J}_1^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e) \frac{\partial \psi_D}{\partial \|\mathbf{Z}\|^2}(\hat{\vartheta}_\varsigma, \mathbf{Y}^e, \|\mathbf{Z}\|^2)}. \quad (6.28)$$

Интеграл (6.28) действительно зависит только от канонической нормы, если накопление повреждений происходит при установившемся упругом режиме, либо вдоль процесса существует интегрируемое соотношение, с помощью которого удастся исключить упругую деформацию из подынтегрального выражения (6.28), выразив ее через каноническую норму. Интеграл (6.28) в дальнейшем будем называть каноническим интегралом повреждения.

Асимптотика интеграла (6.28) имеет вид

$$I(\|\mathbf{Z}\|) = -\frac{\|\mathbf{Z}\|^{4+\omega}}{2^2 \rho_R C(\mathbf{Y}^e) f(0, \mathbf{Y}^e) (2 + \omega/2)} + o(\|\mathbf{Z}\|^{4+\omega}), \quad (6.29)$$

если принять степенную асимптотику материальной функции

$$\mathfrak{J}_1^{ZZ}(\|\mathbf{Z}\|, \mathbf{Y}^e) = C(\mathbf{Y}^e) \|\mathbf{Z}\|^{-\omega} \quad (\|\mathbf{Z}\| \rightarrow 0). \quad (6.30)$$

Полагая в (6.27) $t = \hat{t}$, можно получить оценки сверху и снизу для времени до разрушения

$$\|\tilde{\mathfrak{J}}^{ZZ}\|^{-1} I(\|\hat{\mathbf{Z}}\|) \leq t'_c - \hat{t}' \leq (\min_{i,k} \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ})^{-1} I(\|\hat{\mathbf{Z}}\|), \quad (6.31)$$

которые оказываются реально работающими, если известна или задана история накопления неупругой деформации.

Отметим, что формулы (6.22) и (6.31), которые позволяют оценить время до разрушения, наиболее важны в прикладном плане. Однако их эффективное применение требует предварительного анализа истории неупругого деформирования, без чего невозможен пересчет внутреннего времени (6.19) к реальному масштабу времени. Ясно, что точные выражения для предыстории \mathbf{Y}^{a^t} может быть получено лишь в исключительных случаях. Однако, общие пределы накопленной неупругой деформации могут быть установлены с помощью классических методов упруго-пластического анализа [139], [42], [140] и результатов по исследованию усталости при циклическом нагружении [100].

Заметим далее, что с учетом асимптотик (4.18) и (6.30) уравнение (6.20) может быть представлено как (Z'_{sp} – эталонная каноническая сплошность)

$$\int \frac{\|\mathbf{Z}'\|^{4+\omega} dZ'_{sp}}{Z'_{sp}} = 2\rho_R C(\mathbf{Y}^e) f(0, \mathbf{Y}^e) \tilde{\mathfrak{J}}_{sp}^{ZZ} t' \quad (\|\mathbf{Z}\| \rightarrow 0). \quad (6.32)$$

(по s, p не суммировать; $s, p = 1, 2, 3$)

В силу уравнения (6.14) для канонической нормы имеем асимптотику

$$\|\mathbf{Z}'\|^2 = \bar{C}_{i^*k^*sp}^2 Z'^{2\Omega_{i^*k^*sp}}_{sp} \quad (\|\mathbf{Z}\| \rightarrow 0), \quad (6.33)$$

(по i^*, k^*, s, p не суммировать; $i^*, k^*, s, p = 1, 2, 3$)

где

$$\overline{C}_{i^*k^*sp} = C_{i^*k^*sp} \frac{1}{\tilde{\mathfrak{J}}_{sp}^{ZZ}}$$

и четырехиндексный символ $\Omega_{i^*k^*sp}$ определяется соотношениями

$$\Omega_{i^*k^*sp} = \frac{\tilde{\mathfrak{J}}_{i^*k^*}^{ZZ}}{\tilde{\mathfrak{J}}_{sp}^{ZZ}}, \quad \tilde{\mathfrak{J}}_{i^*k^*}^{ZZ} = \min_{i,k} \tilde{\mathfrak{J}}_{ik}^{ZZ}. \quad (6.34)$$

На основании формул (6.32), (6.33) выводятся асимптотики

$$\overline{C}_{i^*k^*sp}^{4+\omega} Z_{sp}'^{(4+\omega)\Omega_{i^*k^*sp}} = -2\rho_R(4+\omega)C(\mathbf{Y}^e)f(0, \mathbf{Y}^e)\tilde{\mathfrak{J}}_{i^*k^*}^{ZZ}(t'_c - t'), \quad (6.35)$$

(по i^*, k^*, s, p не суммировать; $i^*, k^*, s, p = 1, 2, 3$)

$$\|\mathbf{Z}\|^{4+\omega} = -2\rho_R(4+\omega)C(\mathbf{Y}^e)f(0, \mathbf{Y}^e)\tilde{\mathfrak{J}}_{i^*k^*}^{ZZ}(t'_c - t'). \quad (6.36)$$

Для определенности рассмотрим циклический процесс со стабилизировавшейся при $t > t_s$ упругой деформацией. Асимптотика (6.36) позволяет тогда заключить, что

$$\|\mathbf{Z}\| = B(t_c - t)^\nu \quad (t \rightarrow t_c), \quad (6.37)$$

где константы B и ν определены согласно

$$B^{4+\omega} = -2\hat{\rho}(4+\omega)C(\mathbf{Y}^e)f(0, \mathbf{Y}^e)\tilde{\mathfrak{J}}_{i^*k^*}^{ZZ}\tilde{\mathfrak{J}}_2^{ZZ}(\mathbf{Y}^{a^{ts}}), \quad (6.38)$$

$$\nu = (4+\omega)^{-1}. \quad (6.39)$$

Заключая, приведем результаты численного анализа канонического интеграла поврежденности.

Подставляя асимптотики (4.18), (6.30) в (6.28), получим

$$I^*(\|\mathbf{Z}\|) = \frac{1}{p^{2+\omega/2}} \int_0^{p\|\mathbf{Z}\|^2} \frac{\lambda^{1+\omega/2} d\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad (6.40)$$

где приняты следующие обозначения:

$$I^*(\|\mathbf{Z}\|) = -2^2 \rho_R C(\mathbf{Y}^e) f(0, \mathbf{Y}^e) I(\|\mathbf{Z}\|), \quad (6.41)$$

$$p = \vartheta_\zeta h(\mathbf{Y}^e), \quad (6.42)$$

$$h^2(\mathbf{Y}^e) = -\frac{\frac{1}{2}f''_{\text{II}}(0, \mathbf{Y}^e) - g'_I(0, \mathbf{Y}^e)}{f(0, \mathbf{Y}^e)}. \quad (6.43)$$

Значения интеграла I^* как функции от квадрата канонической нормы $\|\mathbf{Z}\|^2$ для $\omega = 0.5$ и возрастающих значений параметра

$$p^2 = 1, 10, 20, \dots, 100$$

представлены на рис. 22.

Зависимость интеграла I^* как функции от параметра p^2 для $\omega = 0.5$ и возрастающих значений квадрата канонической нормы

$$\|\mathbf{Z}\|^2 = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$$

представлена на рис. 23.

V.7. Канонический термодинамический анализ процессов накопления повреждений в твердых телах

Канонический формализм с успехом может быть применен к исследованию различных процессов накопления повреждений. Ниже мы рассмотрим процессы роста хрупкой поврежденности и влияния пластической деформации (в том числе с учетом возможной микронеоднородности распределения напряжений) на развитие поврежденности преимущественно хрупкого типа. Основой анализа будет служить каноническое энергетическое представление термодинамических потенциалов состояния и уравнение баланса энтропии.

V.7.1. Процессы накопления хрупкой поврежденности

Рассмотрим изотермический процесс накопления поврежденности в хрупком теле. Последнее обстоятельство подразумевает незначительные необратимые деформации, влиянием которых на развитие поврежденности можно пренебречь. Но тогда в уравнении баланса энтропии

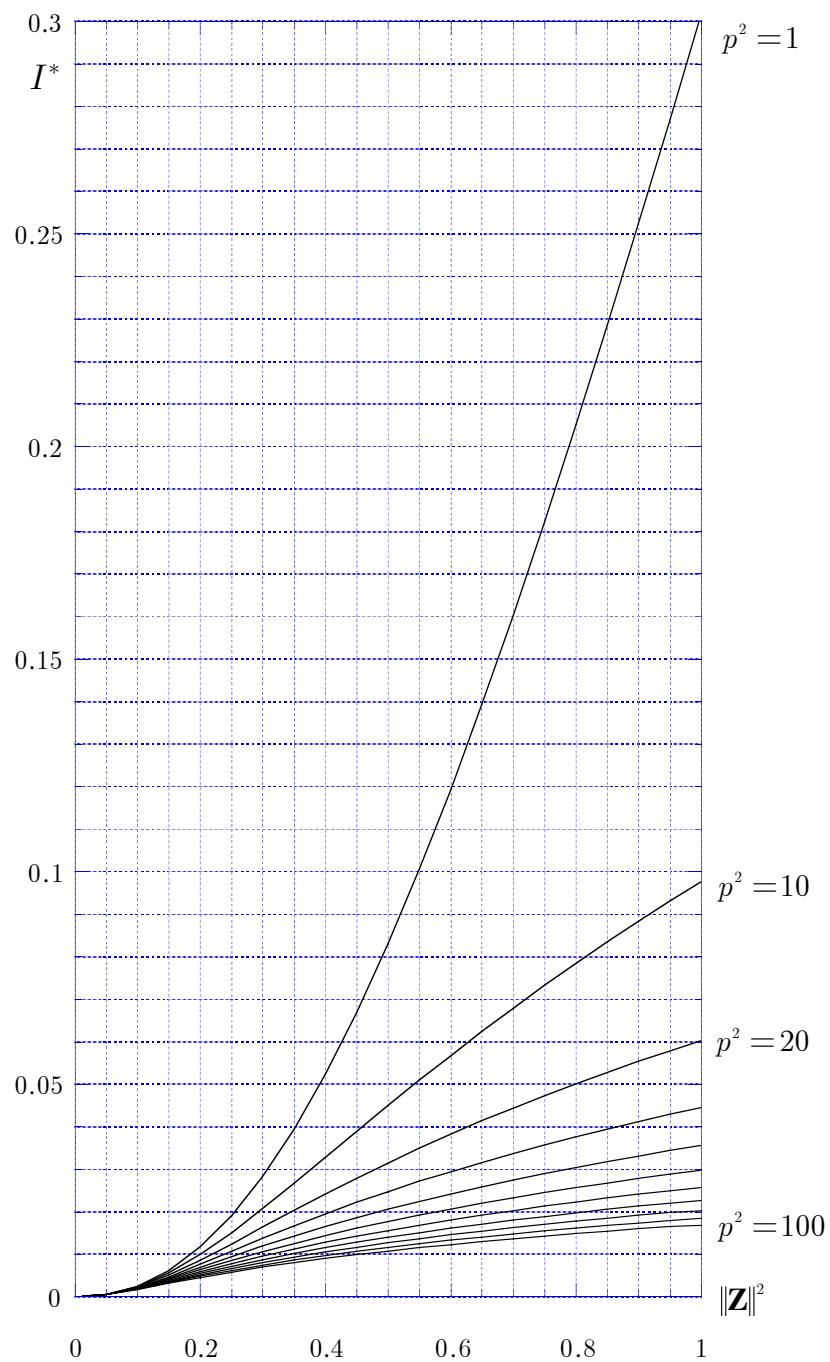


Рис. 22: Графики зависимости канонического интеграла от квадрата канонической нормы для $\omega = 0.5$ и возрастающих значений параметра $p^2 = 1, 10, 20, \dots, 100$.

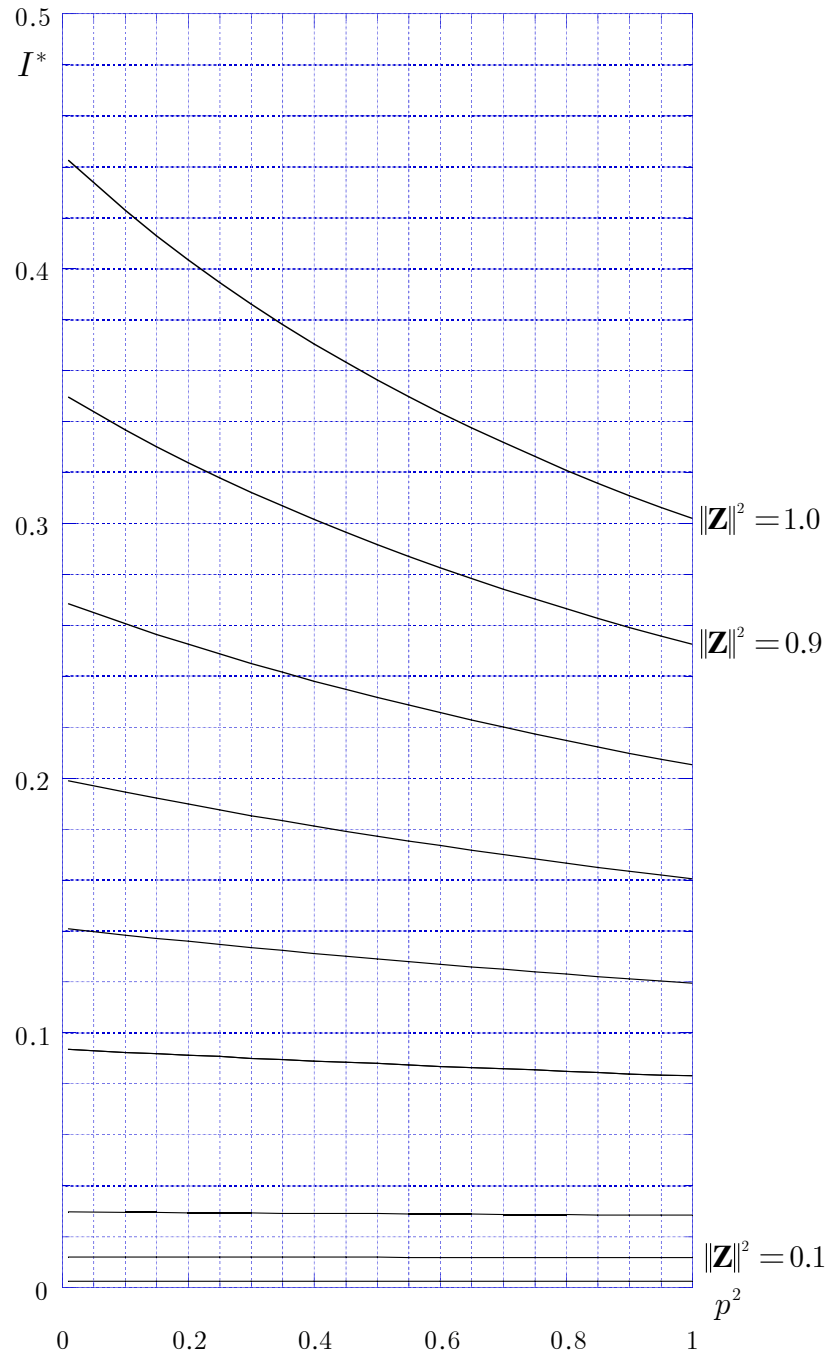


Рис. 23: Графики канонического интеграла как функции от параметра p^2 для $\omega = 0.5$ и возрастающих значений квадрата канонической нормы $\|Z\|^2 = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$.

$$\rho_R \vartheta_\varsigma \dot{s}_D = \text{tr} \left(\mathbf{S}_\varsigma \dot{\mathbf{Y}}^a \right) - \sum_\beta \rho_R \left(\frac{\partial \psi_D}{\partial \varsigma_\beta} \right)_{\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e} \dot{\varsigma}_\beta, \quad (7.1)$$

следует пренебречь первым членом в правой части.

Уравнение баланса энтропии, следовательно, приобретает вид

$$\rho_R \vartheta_\varsigma \dot{s}_D = - \sum_\beta \rho_R \left(\frac{\partial \psi_D}{\partial \varsigma_\beta} \right)_{\vartheta_\varsigma, \mathbf{Y}^e} \dot{\varsigma}_\beta. \quad (7.2)$$

Воспользуемся теперь выражением для энтропии с помощью скрытых канонических энергетических переменных (см. формулы IV.7.2 и IV.7.3):

$$s_D = g(\gamma, \mathbf{Y}^e). \quad (7.3)$$

Дифференцируя это уравнение по времени вдоль процесса, находим

$$\dot{s}_D = 2\vartheta_\varsigma \frac{\partial g}{\partial \gamma} \|\mathbf{s}\| \|\dot{\mathbf{s}}\| + \text{tr} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{Y}^e} \dot{\mathbf{Y}}^e \right). \quad (7.4)$$

Используя затем асимптотику (IV.7.8) при $h = 1/2$

$$g = \frac{G(\mathbf{Y}^e)}{\sqrt{\gamma}}, \quad (7.5)$$

приходим к уравнению

$$\sqrt{\vartheta_\varsigma} \dot{s}_D = - \frac{G(\mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{s}\|^2} \|\mathbf{s}\| \|\dot{\mathbf{s}}\| + \frac{1}{\|\mathbf{s}\|} \text{tr} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}^e} \dot{\mathbf{Y}}^e \right). \quad (7.6)$$

На основании канонической асимптотики свободной энергии (IV.7.12) имеем

$$\frac{\partial \psi_D}{\partial \varsigma_\beta} = \frac{2\sqrt{\vartheta_\varsigma} G(\mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{s}\|^2} \frac{\varsigma_\beta}{\|\mathbf{s}\|}. \quad (7.7)$$

Сворачивая это обе части этого уравнения с $\dot{\varsigma}_\beta$, находим

$$\frac{\partial \psi_D}{\partial \varsigma_\beta} \dot{\varsigma}_\beta = \frac{2\sqrt{\vartheta_\varsigma} G(\mathbf{Y}^e)}{\|\mathbf{s}\|^2} \|\mathbf{s}\| \|\dot{\mathbf{s}}\|. \quad (7.8)$$

Подставляя уравнения (7.6) и (7.8) в уравнение баланса энтропии (7.2) после ряда преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\|\varsigma\|}{\|\varsigma\|} + \frac{1}{G(\mathbf{Y}^e)} \text{tr} \left(\frac{\partial G(\mathbf{Y}^e)}{\partial \mathbf{Y}^e} \dot{\mathbf{Y}}^e \right) = 0, \quad (7.9)$$

которое интегрируется и приводит к универсальному интегралу

$$\|\varsigma\| G(\mathbf{Y}^e) = \text{Const}. \quad (7.10)$$

Полученный универсальный интеграл устанавливает, что в процессе изотермического роста хрупкой поврежденности (каноническая норма непрерывно убывает, так же как и величина упругих деформаций) падение величины свободной энергии полностью определяется энергетической канонической нормой.

V.7.2. Влияние необратимых деформаций на рост хрупкой поврежденности

Как известно, необратимые деформации (как пластические, так и вязкие) могут, иногда существенно, задерживать прогрессирование хрупкой поврежденности. Поэтому, представляет интерес исследование с позиций термодинамики влияния необратимых деформаций на рост доминирующей хрупкой поврежденности.

Исходной точкой рассуждений здесь снова выступает уравнение баланса энтропии (7.1). Ясно, что пренебречь первым слагаемым в правой части этого уравнения баланса уже нельзя. Снова, используя каноническую асимптотику свободной энергии, данную в п. IV.7, вместо уравнения (7.9) находим (здесь мы опускаем детали вывода):

$$G(\mathbf{Y}^e) \|\varsigma\| + \|\varsigma\| \text{tr} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}^e} \dot{\mathbf{Y}}^e \right) = \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \text{tr} \left(\|\varsigma\|^2 \mathbf{S}_\varsigma \dot{\mathbf{Y}}^a \right). \quad (7.11)$$

В отличие от (7.9) полученное уравнение не допускает интеграла, сохраняющего свое значение вдоль процесса, без некоторых дополнительных ограничений. В качестве такого ограничения может, например, выступать уравнение вида

$$\|\varsigma\|^2 \mathbf{S}_\varsigma = \bar{\mathbf{S}}_\varsigma, \quad (7.12)$$

где $\bar{\mathbf{S}}_\varsigma = \mathbf{0}$, которое должно выполняться вдоль всего процесса.

Сформулированное условие частично может быть оправдано (и выведено) с помощью универсального интеграла (7.10).

Принимая во внимание (7.12), уравнение (7.11) интегрируется:

$$G(\mathbf{Y}^e) \|\mathbf{s}\| = \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \text{tr} (\bar{\mathbf{S}}_\varsigma \mathbf{Y}^a) + \text{const.} \quad (7.13)$$

Интеграл вдоль процесса (7.13) отличается от универсального соотношения (7.9) присутствием дополнительного слагаемого в правой части, обусловленного влиянием необратимых деформаций.

Поскольку вдоль всего процесса выполняется неравенство

$$\text{tr} (\bar{\mathbf{S}}_\varsigma \mathbf{Y}^a) \dot{} \geq 0, \quad (7.14)$$

то, как следует из (7.13), необратимые деформации задерживают развитие хрупкой поврежденности: при одном и том же уровне деградации упругого отклика тела каноническая норма будет больше именно там, где параллельно развиваются необратимые деформации.

V.7.3. Влияние микронеоднородности пластического течения на рост поврежденности

Канонический формализм с успехом может быть применен к анализу поврежденности, обусловленной растрескиванием тела вследствие освобождения скрытой упругой энергии, ассоциированной с микронеоднородным полем напряжений. В твердых телах в зоне локализации пластических деформаций (например, у вершины трещины) распределение напряжений следует считать микронеоднородным, поскольку свободная энергия, связанная с микронеоднородными напряжениями, составляет заметную часть полной свободной энергии. Осредненные по характерному объему напряжения и деформации, которые собственно используются для записи уравнений механики сплошных сред, не содержат никакой информации о микрофлуктуациях напряжений и деформаций и возможного турбулентного характера их распределения и, поэтому, оказывается исключенной из рассмотрения и свободная энергия, ассоциированная с указанными микрофлуктуациями. Именно поэтому часть свободной энергии, недоступная для учета посредством традиционных методов механики сплошных сред, называется скрытой. Ясно, что доля свободной энергии, приходящаяся на микронапряжения,

никак не участвует в традиционных уравнениях механики и требуется особый подход для ее учета.

Скрытая свободная энергия является преимущественным энергетическим источником образования и развития поврежденности в зонах локализации пластических деформаций. Накопленная скрытая энергия при некоторых благоприятных для этого условиях (знакопеременное циклическое нагружение, охрупчивание в результате водородной коррозии или нейтронного облучения) может освобождаться, вызывая растрескивание тела в зонах локализованного пластического течения и поддерживая процесс микроразрушения этих зон. Микроразрушения можно трактовать как некоторое поле повреждений в пределах локализованной зоны и применить каноническую схему исследования поврежденности.

В случае микронеоднородного распределения напряжений \mathbf{S}_ζ ²³ и пластических деформаций \mathbf{Y}^P воспользуемся разложениями энергетически сопряженных напряжений и деформаций на регулярные (средние по характерному объему) и флуктуирующие части:

$$\mathbf{S}_\zeta = \overline{\mathbf{S}_\zeta} + \mathbf{S}_\zeta^\mu, \quad (7.15)$$

$$\mathbf{Y}^P = \overline{\mathbf{Y}^P} + \mathbf{Y}^{\mu P}. \quad (7.16)$$

В качестве дополнительной термодинамической переменной состояния выберем тензор микропластической деформации $\mathbf{Y}^{\mu P}$. Свободная энергия в пределах локализованной пластической зоны зависит от более широкого спектра переменных:

$$\psi_D = \psi_D(\mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^{\mu P}, \|\zeta\|). \quad (7.17)$$

Пользуясь принципом эквивалентности энергетически сопряженных пар \mathbf{S}_ζ^μ , $\mathbf{Y}^{\mu P}$ и Σ_ζ , \mathbf{Y}^P , где Σ_ζ есть тензор экстра напряжений, обусловленных микронеоднородностью напряженно-деформированного состояния в зоне локализации, имеем

$$\overline{\text{tr}(\mathbf{S}_\zeta^\mu \dot{\mathbf{Y}}^{\mu P})} = \text{tr}(\Sigma_\zeta \dot{\overline{\mathbf{Y}}^P}), \quad (7.18)$$

где чертой сверху обозначается усреднение по характерному объему микронеоднородного распределения.

²³Здесь мы используем для определенности энергетический вариант канонической схемы.

Считая процесс растрескивания в пределах локализованной пластической зоны изотермическим, по аналогии с (7.11) можно получить уравнение (для сокращения записи мы опускаем знак усреднения над символами \mathbf{Y}^P , $\dot{\mathbf{Y}}^P$, \mathbf{S}_ς)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^P) \|\boldsymbol{\varsigma}\| + \|\boldsymbol{\varsigma}\| \operatorname{tr} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}^e} \dot{\mathbf{Y}}^e \right) + \|\boldsymbol{\varsigma}\| \operatorname{tr} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{Y}^P} \dot{\mathbf{Y}}^P \right) = \\ = \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \operatorname{tr} \left(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \mathbf{S}_\varsigma \dot{\mathbf{Y}}^P \right) + \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \operatorname{tr} \left(\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \boldsymbol{\Sigma}_\varsigma \dot{\mathbf{Y}}^P \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Как и выше, при условиях $\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \mathbf{S}_\varsigma = \bar{\mathbf{S}}_\varsigma$, $\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \boldsymbol{\Sigma}_\varsigma = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\varsigma$, где $(\bar{\mathbf{S}}_\varsigma)^\cdot = \mathbf{0}$, $(\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\varsigma)^\cdot = \mathbf{0}$, уравнение (7.19) интегрируется вдоль процесса:

$$G(\mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^P) \|\boldsymbol{\varsigma}\| = \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \operatorname{tr} (\bar{\mathbf{S}}_\varsigma \mathbf{Y}^P) + \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \operatorname{tr} (\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\varsigma \mathbf{Y}^P) + \text{const.} \quad (7.20)$$

В процессе микрорастрескивания под напряжением локализованной пластической зоны регулярные упругие и пластические деформации, по-видимому, заметно не изменяются. Поэтому, тензор напряжений \mathbf{S}_ς также можно считать постоянным. Пренебрегая вкладом от регулярного поля напряжений, считая процесс простым (ориентация главных осей экстра-напряжений и пластических деформаций не изменяется) и принимая определяющую зависимость для экстра-напряжений в форме

$$Y_{(\alpha)}^P = \omega(J_\Sigma) \Sigma_{\varsigma(\alpha)} \quad (2J_\Sigma = \Sigma_{\varsigma(\nu)} \Sigma_{\varsigma(\nu)}), \quad (7.21)$$

где $Y_{(\alpha)}^P$ есть главные пластические деформации, $\Sigma_{\varsigma(\alpha)}$ – главные экстра-напряжения, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dJ_\Sigma} [G(\mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^P) \|\boldsymbol{\varsigma}\|] = \frac{1}{\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \left(\omega + 2J_\Sigma \frac{d\omega}{dJ_\Sigma} \right). \quad (7.22)$$

Оценку канонической нормы, а следовательно и поврежденности как результата микрорастрескивания, можно получить интегрированием последнего уравнения, считая что интенсивность экстра-напряжений в процессе растрескивания постепенно ослабевает до нуля. Можно также предположить, что микронеоднородная локализованная пластическая зона насыщена

микронапряжениями. Тогда значение $G(\mathbf{Y}^e, \mathbf{Y}^P)$ не зависит от упругой и пластической деформации и может быть заменено значением G_∞ , соответствующим порогу насыщения. В результате для канонической энергетической нормы получим оценку

$$const - \frac{1}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|} = \frac{1}{\rho_R G_\infty \sqrt{\vartheta_\varsigma}} \int^{J_\Sigma} \left(\omega + 2J_\Sigma \frac{d\omega}{dJ_\Sigma} \right) dJ_\Sigma. \quad (7.23)$$

V.7.4. Процессы с постоянными энергетическими напряжениями

Выше был дан общий термодинамический анализ процессов накопления поврежденности, характеризуемых асимптотикой энергетических напряжений вида $\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2 \|\mathbf{S}_\varsigma\| = O(1)$.

Процесс накопления повреждений, однако, может сопровождаться не только возрастанием, но и падением напряжений, обусловленным разрывом связей, обеспечивающих целостность элементов тела.

Ниже канонический формализм применяется для исследования процессов, по ходу которых энергетические напряжения поддерживаются постоянными.

Тензор энергетических напряжений на основании (IV.7.14) определим как

$$\mathbf{S}_\varsigma = - \frac{2\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|} \frac{\partial G(\mathbf{Y}^e, \dots)}{\partial \mathbf{Y}^e}. \quad (7.24)$$

Для определенности, рассмотрим одно из возможных выражений для функции $G = G(\mathbf{Y}^e, \dots)$. Примем, что в случае хрупкой поврежденности $G(\mathbf{Y}^e, \dots)$ зависит только от упругой деформации и эта зависимость на самом деле реализуется через посредство разности $\mathbf{Y}_C^e - \mathbf{Y}^e$, где $\mathbf{Y}_C^e = \mathbf{Y}_C^e(\mathbf{Y}^e)$ – поверхность, образованная максимальными упругими деформациями, достижимыми в процессе, например, лучевого нагружения, проходящего состояние \mathbf{Y}^e .

Уравнение (7.24) тогда конкретизируется:

$$S_{\varsigma ij} = - \frac{2\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|} \frac{\partial G}{\partial \Delta_{kl}} \left(\frac{\partial Y_{Ckl}^e}{\partial Y_{ij}^e} - \delta_{ki} \delta_{lj} \right), \quad (7.25)$$

где

$$\Delta_{kl} = Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e. \quad (7.26)$$

Ясно, что простейшая возможная аппроксимация зависимости $G = G(\mathbf{Y}_C^e - \mathbf{Y}^e)$ – квадратичная по разности $\mathbf{Y}_C^e - \mathbf{Y}^e$. Следовательно, можно принять, что

$$G = \frac{1}{2} K_{ijkl} (Y_{C\,ij}^e - Y_{ij}^e) (Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e), \quad (7.27)$$

где K_{ijkl} – симметричный положительно определенный тензор.

Таким образом, энергетические напряжения представляются в форме суперпозиции линейного по разности $\Delta_{kl} = Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e$ и дополнительного слагаемого, существенного только для траекторий, отклоняющейся от лучевой:

$$S_{\varsigma\,ij} = \frac{2\rho_R \sqrt{\vartheta_\varsigma}}{\|\varsigma\|^2} \left[K_{ijkl} (Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e) - K_{mnkl} \frac{\partial Y_{C\,kl}^e}{\partial Y_{ij}^e} (Y_{C\,mn}^e - Y_{mn}^e) \right]. \quad (7.28)$$

Для процессов лучевого нагружения при постоянно поддерживаемых энергетических напряжениях имеем:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{S}_\varsigma = \rho_R \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \mathbf{Y}^e \partial \mathbf{Y}^e} d\mathbf{Y}^e + \rho_R \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial \mathbf{Y}^e \partial \|\varsigma\|} \frac{\varsigma_\beta}{\|\varsigma\|} d\varsigma_\beta, \quad (7.29)$$

и с учетом квадратичной аппроксимации (7.27) находим также

$$K_{ijkl} \left(\|\varsigma\|^2 dY_{kl}^e + (Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e) \varsigma_\beta d\varsigma_\beta \right) = 0. \quad (7.30)$$

В силу положительной определенности тензора K_{ijkl} из последнего равенства следует, что вдоль всего процесса

$$\|\varsigma\|^2 dY_{kl}^e + (Y_{C\,kl}^e - Y_{kl}^e) \varsigma_\beta d\varsigma_\beta = 0. \quad (7.31)$$

С другой стороны вдоль рассматриваемого процесса имеем:

$$\begin{aligned} \rho_R d(\psi_D - \psi_D^C) &= \text{tr}(\mathbf{S}_\varsigma d(\mathbf{Y}_C^e - \mathbf{Y}^e)) = \\ &= \frac{1}{\|\varsigma\|^2} \text{tr}(\mathbf{S}_\varsigma (\mathbf{Y}_C^e - \mathbf{Y}^e)) \varsigma_\beta d\varsigma_\beta = \\ &= \rho_R (\psi_D - \psi_D^C) \frac{d\|\varsigma\|^2}{\|\varsigma\|^2}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где

$$\psi_D^C = \psi_D|_{\mathbf{Y}^e = \mathbf{Y}_C^e}.$$

Итак для рассматриваемых процессов каноническая энергетическая норма (точнее ее квадрат) в силу

$$\frac{d(\psi_D - \psi_D^C)}{\psi_D - \psi_D^C} = \frac{d \|\boldsymbol{\varsigma}\|^2}{\|\boldsymbol{\varsigma}\|^2}. \quad (7.33)$$

может быть просто отождествлена с величиной падения свободной энергии.

Глава VI. О ВЛИЯНИИ УДАЛЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ И ПОВРЕЖДЕННОСТИ НА РАСКРЫТИЕ ТРЕЩИНЫ

В этой главе диссертационной работы исследуется влияние очага локализации пластических деформаций и поврежденности, удаленного от кончика трещины нормального отрыва, на трещину в условиях плоского напряженного состояния. Удаленные локализованные зоны пластического течения, сопровождаемого развитием в этих зонах повреждений, могут зарождаться в процессе циклического нагружения или температурного воздействия.

Нагружение трещины нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния в поле остаточных напряжений (связанных с предыдущими циклами нагружения) может приводит к образованию двух очагов пластического течения: непосредственно у кончика трещины и в зоне максимального остаточного растяжения, которое в случае циклического нагружения достигает одной трети предела текучести. Моделируя по схеме Дагдейла пластические зоны отрезками, для определения трех безразмерных параметров, характеризующих положения пластических зон, получена система нелинейных уравнений, которая анализируется с помощью оригинального численного алгоритма, разработанного специально для этой цели. Получена точная формула для вычисления раскрытия трещины при двухзонно локализованных пластических деформациях. Асимптотический анализ величины раскрытия трещины для случая, когда линейный размер удаленной пластической зоны мал по сравнению с длиной трещины, приводит к заключению, что влияние удаленной пластической зоны на трещину проявляется в форме ее дополнительного закрытия.

Циклическое нагружение трещины с локализованной у ее вершины пластической зоной активизирует процесс освобождения скрытой свободной энергии, связанной с микронеоднородным в пределах пластической зоны полем напряжений. На долю микронеоднородного распределения приходится

до 15 % от всей работы, затраченной на пластическое деформирование [18], [61]. Освобождающаяся энергия является основным источником развития поврежденности в зонах локализации необратимых деформаций. Поврежденность, в свою очередь, искажая поле напряжений и геометрию локализованных зон, влияет на состояние трещины. Одной из характеристик подобного влияния может служить изменение раскрытия трещины, оценка которого приводится в данной главе, обусловленное перераспределением напряжений и изменением зон локализации пластических деформаций вследствие роста поврежденности.

Изложение данной главы в основном следует работам [178], [80].

VI.1. Постановка задачи и основные уравнения

Исследование плоского напряженного состояния трещины нормального отрыва было впервые выполнено в работе [113]. Аналогичная по существу схема была предложена Г. И. Баренблаттом [14], [15], [16], [94] при исследовании сил сцепления в кончике трещины нормального отрыва.

Предполагалось, в соответствии с экспериментальными данными, что пластическая зона представляет собой отрезок, находящийся на продолжении линии трещины (см. [113], [122]).

С тех пор, предложенная в [113] модель, известная как модель Дагдейла, широко используется для расчета напряженного состояния и вычисления раскрытия трещины в стальных пластинах [41]. Соответствующая подобной сильно локализованной у вершины трещины зоны текучести модель трещины основывается на следующих основных предположениях [82]:

1. Элементы пластической зоны подвержены воздействию только нормального растягивающего напряжения, равного пределу текучести.
2. Толщина пластической зоны намного меньше, чем ее длина, так что внутренняя граница упругой зоны может рассматриваться как сильно сплюснутый эллипс с большой полуосью равной $2(l + c)$, где $2l$ – длина трещины, c – длина пластической зоны.
3. Длина пластической зоны в точности такова, что пластическая зона полностью поглощает сингулярность поля нормальных напряжений.

В представляемой работе рассматривается нагружение пластины с трещиной нормального отрыва, при котором возникает дополнительная, удаленная от кончика трещины зона пластического растяжения. Подобная ситуация, как показывают расчеты, действительно реализуется при цикли-

ческом нагружении с переменной амплитудой напряжений. Разгрузка трещины сопровождается мгновенным образованием у кончика трещины сжатой пластической зоны, в то время как на некотором удалении от кончика трещины возникает зона остаточного растяжения, в которой напряжения могут достигать трети от предела текучести. В этой последней зоне в течении последующих циклов нагружения могут локализоваться пластические деформации, образуя новый очаг пластического течения.

Вычисление параметров, определяющих локализацию зон пластического течения, сопряжено с решением сложной системы двух нелинейных уравнений и поэтому реализовано численно. Величина раскрытия трещины при повторном нагружении вычисляется с помощью полученной точной формулы, в которую входят только указанные параметры локализации. Эта формула тем самым позволяет оценить влияние удаленной пластической зоны на величину раскрытия трещины.

Поврежденность также считается локализованной в пределах пластической зоны, что несколько упрощает анализ, поскольку отпадает необходимость отдельного анализа локализации поврежденности.

Необходимо отметить, что анализ напряженно-деформированного состояния и поврежденности у вершины трещины Дагдейла был впервые выполнен в [131]. Рассматривалась трещина нормального отрыва в условиях плоского напряженного состояния. Предполагалось, что необратимые пластические деформации и поврежденность локализуются в узкой зоне перед вершиной трещины, в которой напряженное состояние считается однородным. За пределами указанной зоны локализации поврежденность рассматривалась как пренебрежимо малая и не влияющая на определяющее соотношение. Скалярный параметр поврежденности определялся как логарифм отношения геометрической площади элемента к его эффективной несущей нагрузке площади. Подобное определение при малых поврежденностях согласуется с классическим определением Качанова. Напряжения и деформации связывались традиционной кусочно-линейной диаграммой, характерной для упруго идеально пластического тела. Предполагалось также, что скалярный параметр поврежденности связан с деформацией степенным соотношением. Целью работы было выяснение влияния поврежденности на длину пластической зоны. Было найдено, что решающим фактором, влияющим на размер локализованной у вершины трещины пластической зоны, выступает поврежденность, соответствующая состоянию, при котором эффективные напряжения достигают предела текучести. Поскольку это зна-

чение параметра поврежденности может быть выражено только через материальные константы, то результатом работы можно считать выявление материального параметра, который в наибольшей степени влияет на локализацию пластических деформаций и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва.

В работе [195] поврежденность у вершины трещины исследовалась на основе концепции эффективных пластических деформаций. Было установлено, что размер пластической зоны зависит от величины раскрытия трещины, критической деформации рекристаллизации и деформации в момент образования зоны поврежденности.

Распределение поврежденности у вершины трещины Дагдейла в упруго-идеально пластической среде было предметом исследования [165]. Обобщение на случай среды со степенным деформационным упрочнением приведено в [166]. В качестве параметра поврежденности был использован логарифм квадратного корня отношения модуля Юнга к его эффективному значению для текущего состояния поврежденности. Параметр поврежденности, таким образом, оказывается пропорциональным логарифму отношения деформации к ее значению в момент начала текучести. Распределение нормальных напряжений задавалось авторами работы и проверялось на предмет соответствия FEM-анализом этой же задачи. Выбор в конце концов был сделан в пользу степенной сингулярной при приближении к вершине трещины аппроксимации нормальных напряжений. Поврежденность, как следствие, получается логарифмически сингулярной при приближении к кончику трещины. Оказалось, что зона поврежденности несколько меньше, чем пластическая зона Дагдейла. При увеличении показателя в степенном законе упрочнения эта разница становится менее заметной.

Цикл работ [12], [13], [26], [27], [28] посвящен моделированию по схеме Баренблатта-Дагдейла интерфейсной трещины-расслоения с локализованными у вершин трещины зонами пластического течения, разупрочнения и возможных нелинейных связей в концевых областях с целью описания подготовки разрушения в указанных концевых областях. Особый интерес здесь представляет анализ влияния нелинейности связей внутри концевых зон на состояние трещины-расслоения. Оригинальная математическая модель термофлуктуационного зарождения и развития дефектов в области ослабленных связей на плоской границе сопряжения двух тел предложена в [28].

Рассмотрим трещину нормального отрыва $|x_1| \leq l$ в пластине в условиях плоского напряженного состояния. Обозначим через Y предел теку-

чести при одноосном растяжении. Напряжения и перемещения представляются через единственный комплексный потенциал по формулам Колосова-Мусхелишвили [58]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= 2\operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z^2 \varphi^*], \\ \sigma_{22}^* &= 2\operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*] + 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z^2 \varphi^*], \\ \sigma_{12}^* &= -2x_2 \operatorname{Re} [\partial_z^2 \varphi^*],\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}2Gu_1^* &= (\kappa - 1)\operatorname{Re} [\varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Im} [\partial_z \varphi^*], \\ 2Gu_2^* &= (\kappa + 1)\operatorname{Im} [\varphi^*] - 2x_2 \operatorname{Re} [\partial_z \varphi^*],\end{aligned}\tag{1.2}$$

в которых

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= \sigma_{11}, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12}, \quad \sigma_{22}^* = \sigma_{22} - \hat{\sigma}_{22}^\infty, \\ u_1^* &= u_1, \quad u_2^* = u_2 - x_2 E^{-1} \hat{\sigma}_{22}^\infty, \\ \kappa &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu},\end{aligned}$$

$\varphi^*(z)$ – комплексный потенциал, который является аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функцией комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, $\hat{\sigma}_{22}^\infty$ – нормальные растягивающие напряжения на бесконечности.

Обозначим через $\hat{\sigma}_{ij}$, \hat{u}_i напряжения и перемещения, а через $x_1 = l + \hat{c}$ – координату границы пластической зоны при первом нагружении напряжением $\hat{\sigma}_{22}^\infty$.

В соответствии с решением Дагдейла находим:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\sigma}_{22}}{Y} &= 1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} + \xi}{(1 + \xi) \sec \hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} - \xi}{(1 - \xi) \sec \hat{\beta}} \right\}, \\ &(|\xi| \geq \sec \hat{\beta})\end{aligned}\tag{1.3}$$

$$\frac{\pi E \hat{u}_2}{2Yl} = -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln \cos \hat{\beta} + 2\ln(\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}) + \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} +$$

$$+ \xi \ln \frac{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1}{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1}, \quad (1.4)$$

$$(1 \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta})$$

$$\frac{\hat{c}}{l} = \sec \hat{\beta} - 1, \quad (1.5)$$

где введены следующие безразмерные величины

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad \hat{\beta} = \frac{\pi}{2Y} \hat{\sigma}_{22}^\infty. \quad (1.6)$$

Распределение нормальных напряжений и перемещений на продолжении трещины для возрастающих значений отношения

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}^\infty}{Y} = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

представлены на рис. 24, 25.

Для исследования напряженно-деформированного состояния после разгрузки пластины введем следующие разности

$$\Delta \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}, \quad \Delta u_i = \tilde{u}_i - \hat{u}_i,$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}$ и \tilde{u}_i – остаточные напряжения и перемещения, которые наблюдаются в пластине с трещиной после разгрузки.

Основой последующего анализа является предположение о том, что после снятия нагрузки у вершины трещины мгновенно происходит перераспределение напряжений: нормальные растягивающие напряжения на пределе текучести мгновенно сменяются сжимающими, равными пределу текучести при сжатии. Таким образом, поле остаточных напряжений сжимает вершину трещины, что приводит к ее закрытию. Что касается перемещений, то поскольку снятие нагрузки за пределами локализованной зоны сжатия приводит к обратному переходу из пластичности в упругое состояние, то изменения нормальных перемещений вне указанной зоны остаточного сжатия не происходит.

Исходя из приведенного выше анализа, для определения комплексного потенциала $\Delta \varphi^*$ граничные условия могут быть сформулированы в виде:

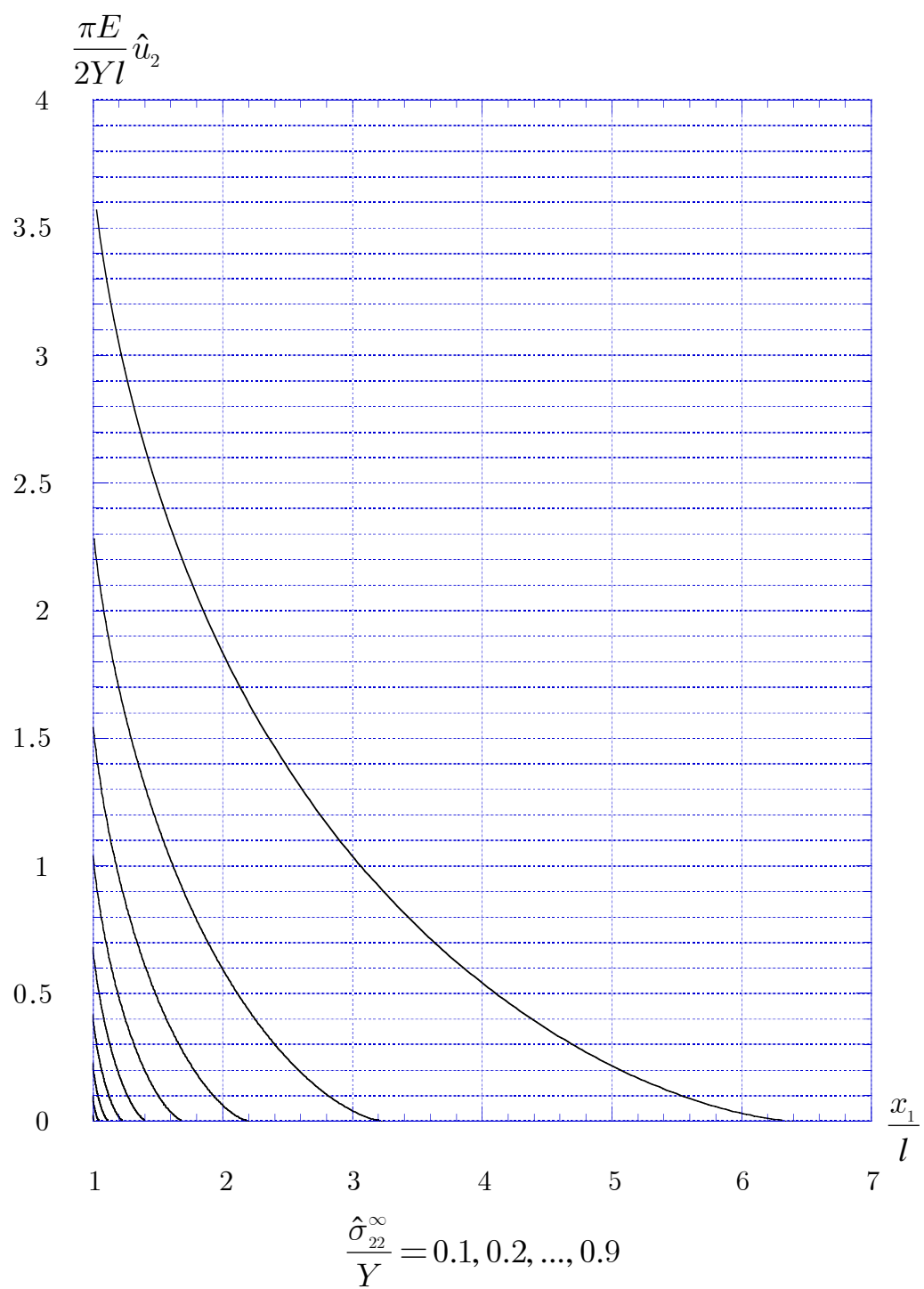


Рис. 24: Графики нормальных перемещений в зоне пластического течения (решение Дагдейла).

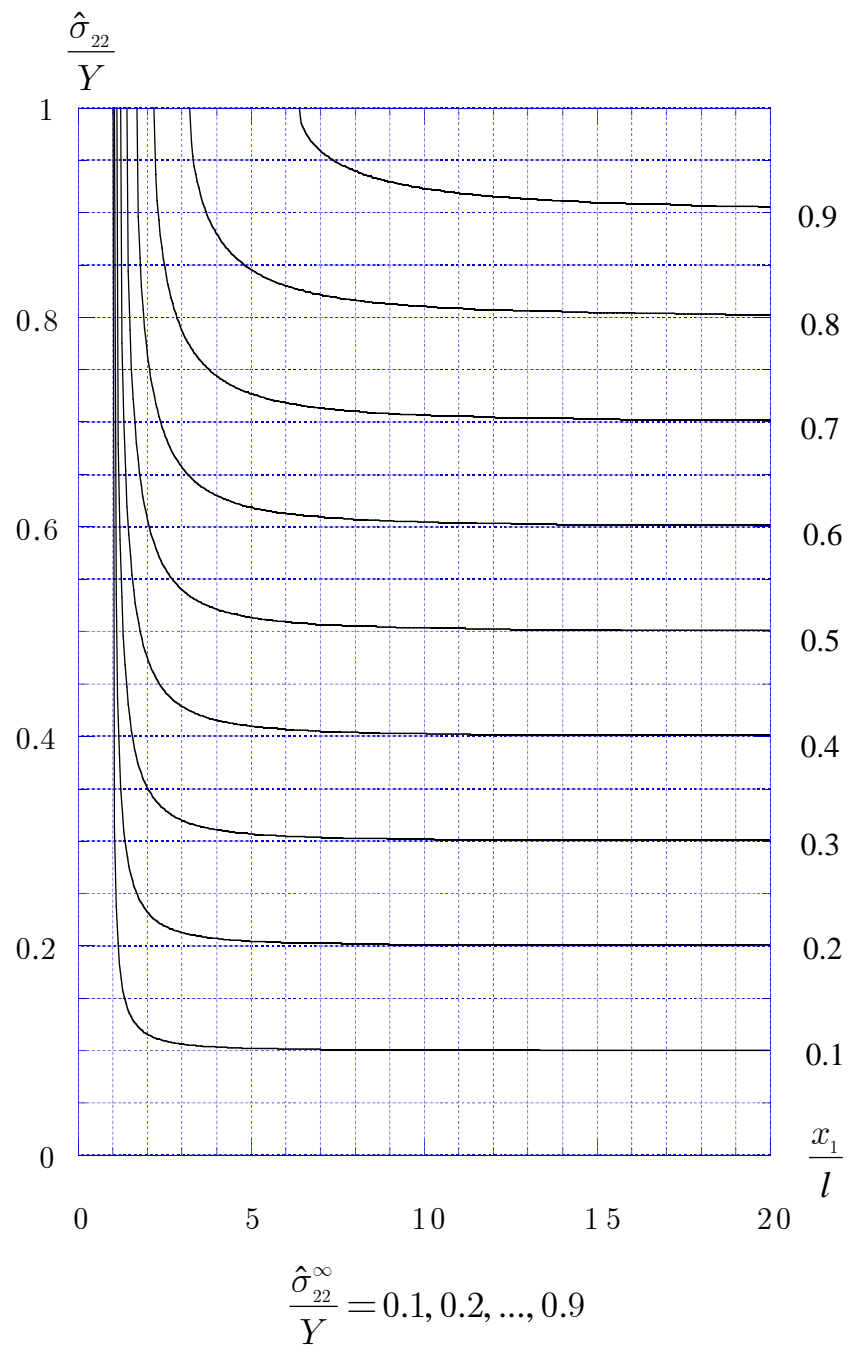


Рис. 25: Графики нормальных напряжений в зоне пластического течения (решение Дагдейла).

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{22}^* &= \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (|x_1| \leq l, \ x_2 = 0), \\
\Delta\sigma_{22}^* &= -2Y + \hat{\sigma}_{22}^\infty \quad (l \leq |x_1| \leq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\
\Delta u_2 &= 0 \quad (|x_1| \geq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\
\partial_z \Delta\varphi^*(z) &= O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} + \hat{\sigma}_{22}^\infty$, $x_1 = l + \tilde{c}$ – координата остаточной сжатой пластической зоны.

Предполагается (и это подтверждается полученным решением), что при повторном нагружении пластины растягивающим напряжением $\tilde{\sigma}_{22}^\infty$ образуются две локализованные пластические зоны

$$l \leq x_1 \leq l + \tilde{c},$$

$$l + c' \leq x_1 \leq l + c'',$$

первая из которых примыкает к вершине трещины, а вторая – находится на некотором удалении от первой.

Относительно разностей

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{ij} &= \tilde{\sigma}_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}, \\
\Delta u_i &= \tilde{u}_i - \bar{u}_i
\end{aligned}$$

снова получается упругая задача с граничными условиями вида:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{22}^* &= -\tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (|x_1| \leq l, \ x_2 = 0), \\
\Delta\sigma_{22}^* &= 2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (l \leq |x_1| \leq l + \tilde{c}, \ x_2 = 0), \\
\Delta\sigma_{22}^* &= Y - \bar{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{22}^\infty \quad (l + c' \leq |x_1| \leq l + c'', \ x_2 = 0), \\
\Delta u_2 &= 0 \quad (l + \tilde{c} \leq |x_1| \leq l + c', \ x_2 = 0; \quad |x_1| \geq l + c'', \ x_2 = 0), \\
\partial_z \Delta\varphi^*(z) &= O(z^{-2}) \quad (z \rightarrow \infty),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\Delta\sigma_{22}^* = \Delta\sigma_{22} - \tilde{\sigma}_{22}^\infty$.

Граничные задачи (1.7), (1.8) относительно потенциала $\Delta\varphi^*$ сводятся к смешанной задаче теории аналитических функций для верхней полуплоскости, которая может быть эффективно разрешена с помощью интегралов

типа Коши [92], анализ которых в случае дополнительной пластической зоны представляет однако значительные трудности.

Решение граничной задачи (1.7) может быть получено в замкнутом виде. Для определения комплексного потенциала $\Delta\varphi^*$ краевой задачи относительно приращений может быть получено следующее уравнение:

$$\frac{d\Delta\varphi^*(z)}{dz} = -\frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2}} \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{22}^\infty - 2Y}{2} J_1 + Y J_2 \right\}, \quad (1.9)$$

где приняты обозначения

$$J_1 = \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt, \quad J_2 = \int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt,$$

и аналитическая ветвь корня определяется условием

$$\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} = z - \frac{(l + \tilde{c})^2}{2z} + \dots \quad (z \rightarrow \infty).$$

Интегралы в формуле (1.9), по существу аналогичные тем, которые входят в схему Дагдейла, вычисляются явно как это приводится ниже:

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{z - t} dt = -\pi (\sqrt{z^2 - (l + \tilde{c})^2} - z), \quad (1.10)$$

$$(z \notin [-l - \tilde{c}, l + \tilde{c}])$$

$$\int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{(l + \tilde{c})^2 - t^2}}{t - x_1} dt = -\pi x_1 \quad (1.11)$$

$$(x_1 \in [-l - \tilde{c}, l + \tilde{c}])$$

$$\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - t^2}}{t-z} dt = -2z \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} + \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2} \ln \frac{z-l}{z+l} +$$

$$+ \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2} \ln \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2} + (l+\tilde{c})^2 + zl}{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2} + (l+\tilde{c})^2 - zl}, \quad (1.12)$$

$$(z \notin [-l, l])$$

$$\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - t^2}}{t-x_1} dt = -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} + \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} \ln \left| \frac{x_1-l}{x_1+l} \right| +$$

$$+ \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} \ln \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} + (l+\tilde{c})^2 + x_1 l}{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - l^2} \sqrt{(l+\tilde{c})^2 - x_1^2} + (l+\tilde{c})^2 - x_1 l}, \quad (1.13)$$

$$(|x_1| \leq l + \tilde{c})$$

$$\int_{-l}^l \frac{\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - t^2}}{t-x_1} dt = -2x_1 \arcsin \frac{l}{l+\tilde{c}} + \sqrt{x_1^2 - (l+\tilde{c})^2} \times$$

$$\times \left\{ \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 + x_1 l}{(l+x_1)(l+\tilde{c})} + \arcsin \frac{(l+\tilde{c})^2 - x_1 l}{(l-x_1)(l+\tilde{c})} \right\}. \quad (1.14)$$

$$(|x_1| \geq l + \tilde{c})$$

В приведенных выше формулах

$$\sqrt{(l+\tilde{c})^2 - z^2}$$

обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные положительные значения, если $z \in (-l-\tilde{c}, l+\tilde{c})$, символ \ln обозначает аналитическую ветвь, которая принимает вещественные значения, если $l < z < l+\tilde{c}$.

Длина остаточной пластической зоны вычисляется по формуле

$$\frac{\tilde{c}}{l} = \sec \frac{\hat{\beta}}{2} - 1. \quad (1.15)$$

Поле остаточных напряжений определяется в виде:

$$Y^{-1}\tilde{\sigma}_{22} = -1 - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} + \xi}{(1 + \xi)\sec \hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2 \hat{\beta} - \xi}{(1 - \xi)\sec \hat{\beta}} \right\} + \\ + \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + \xi}{(1 + \xi)\sec(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - \xi}{(1 - \xi)\sec(\hat{\beta}/2)} \right\}, \quad (1.16)$$

$$(|\xi| \geq \sec \hat{\beta})$$

$$Y^{-1}\tilde{\sigma}_{22} = -1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + \xi}{(1 + \xi)\sec(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - \xi}{(1 - \xi)\sec(\hat{\beta}/2)} \right\}. \quad (1.17)$$

$$(\sec(\hat{\beta}/2) \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta})$$

Остаточные перемещения определяются в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi E \tilde{u}_2}{2Yl} = & 2\ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + 2\ln \frac{\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}}{[\sin(\hat{\beta}/2) + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)}]^2} - \\
& - \xi \ln \frac{\xi - 1}{\xi + 1} + \ln(\xi^2 - 1) + \xi \ln \frac{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1}{\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1} + \\
& + \xi \ln \frac{(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} - \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}{(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} + \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}, \\
& (1 \leq |\xi| \leq \sec(\hat{\beta}/2))
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi E \tilde{u}_2}{2Yl} = & -\ln(\xi^2 - 1) - 2\ln \cos \hat{\beta} + 2\ln(\sin \hat{\beta} + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}}) + \\
& + \xi \ln \frac{(\xi - 1)(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)}{(\xi + 1)(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)}. \\
& (\sec(\hat{\beta}/2) \leq |\xi| \leq \sec \hat{\beta})
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Как следует из приведенного решения, вблизи кончика трещины поле остаточных напряжений является сжимающим и стремится закрыть трещину. По мере удаления от трещины сжимающие напряжения сменяются растягивающими. Максимум остаточного растягивающего напряжения достигается у правой границы пластической зоны, сформировавшейся непосредственно перед разгрузкой и равен

$$\max \frac{\tilde{\sigma}_{22}}{Y} = -1 + \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}. \tag{1.20}$$

При малых значениях отношения $\hat{\sigma}_{22}^{\infty}/Y$ этот максимум достигает значительной величины, равной одной трети предела текучести.

Распределение остаточных напряжений и перемещений для возрастающих значений отношения

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}^{\infty}}{Y} = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$$

представлено на рис. 26, 27.

Безразмерная координата точки, в окрестности которой остаточное сжатие переходит в остаточное растяжение, есть

$$\xi = \sqrt{\sec \hat{\beta}}. \quad (1.21)$$

Локализация максимального остаточного перемещения определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\pi E}{2Yl} \tilde{u}_2(\xi, 0) = 0 \quad (1 < \xi < \sec \hat{\beta}),$$

которое можно привести к эквивалентному –

$$\frac{(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} + \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} - \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2}{(\sin \hat{\beta} \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \hat{\beta}} - \xi \cos^2 \hat{\beta} + 1)(\sin(\hat{\beta}/2) \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2(\hat{\beta}/2)} + \xi \cos^2(\hat{\beta}/2) + 1)^2} - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} = 0.$$

Численный анализ этого уравнения для значений безразмерного параметра $0 < \hat{\beta} < \pi/2$ позволяет построить график зависимости безразмерной координаты локализации максимального остаточного растяжения $\tilde{\xi}_{\max}$ в зависимости от безразмерного отношения $\tilde{\sigma}_{22}/Y$. Этот график изображен на рис. 28.

Если $\hat{\beta} \rightarrow \pi/2$, то уравнение, определяющее локализацию максимального остаточного перемещения, приводится к кубическому уравнению

$$5\xi^3 + \xi^2 - 9\xi - 1 = 0 \quad (1 < \xi < \sqrt{2}).$$

Корень этого последнего уравнения (результат численного анализа) есть $\xi = 1.301317\dots$

Решению, таким образом подлежит краевая задача с условиями (1.8), в которых остаточное поле напряжений вычисляется по формулам (1.16), (1.17).

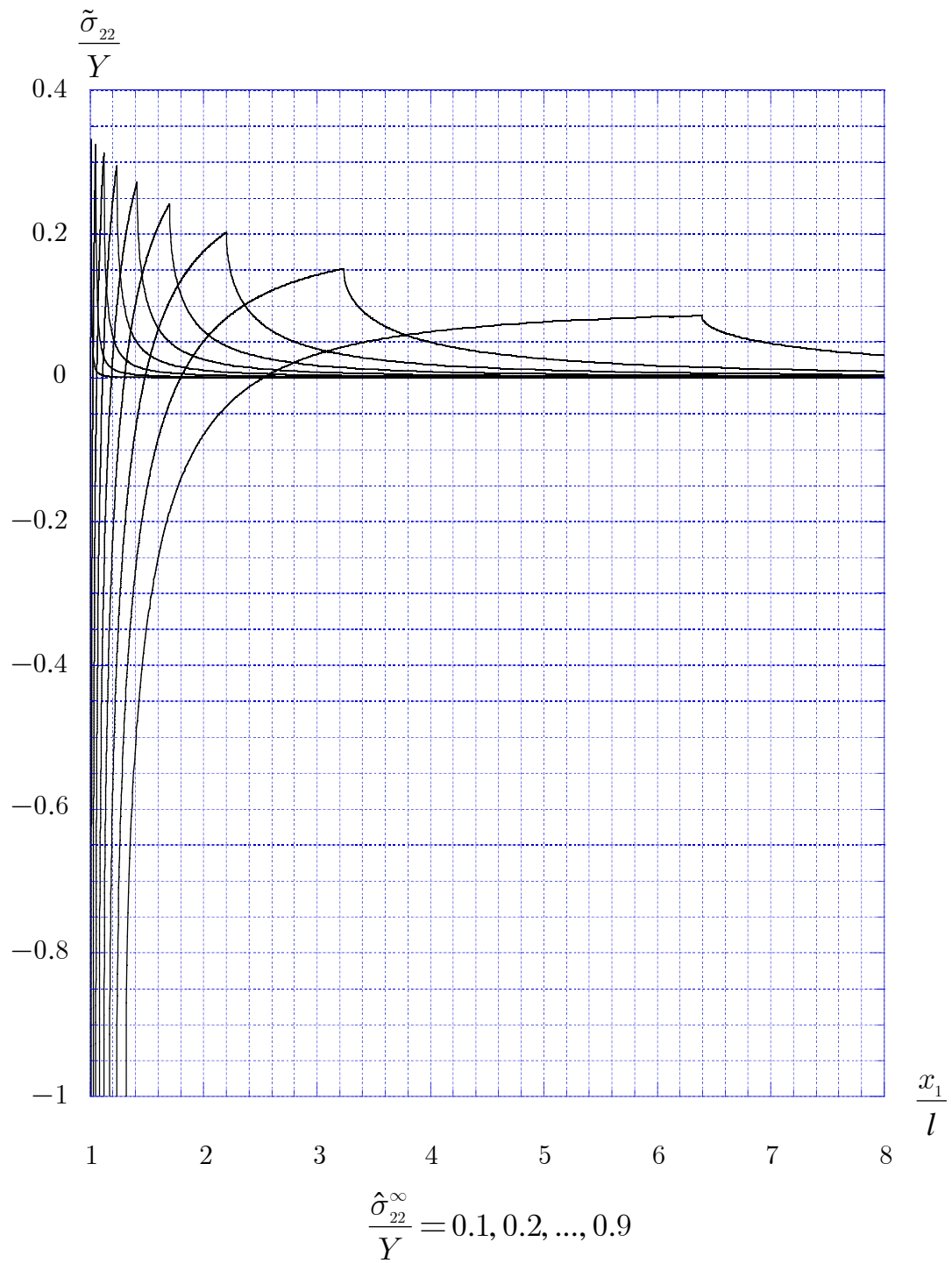


Рис. 26: Распределение остаточных напряжений вдоль линии трещины после первого цикла нагружения.

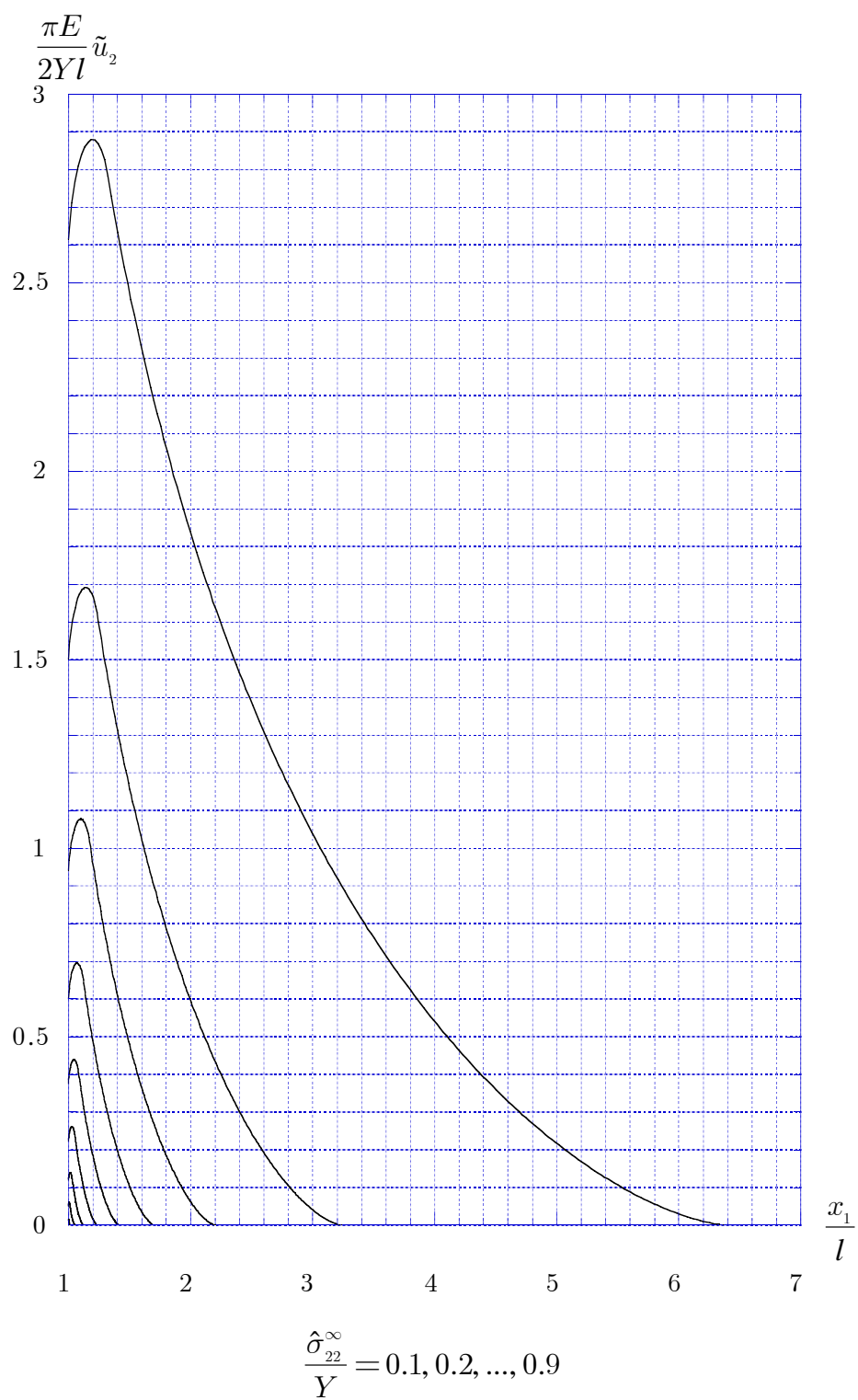


Рис. 27: Распределение остаточных перемещений вдоль линии трещины после первого цикла нагружения.

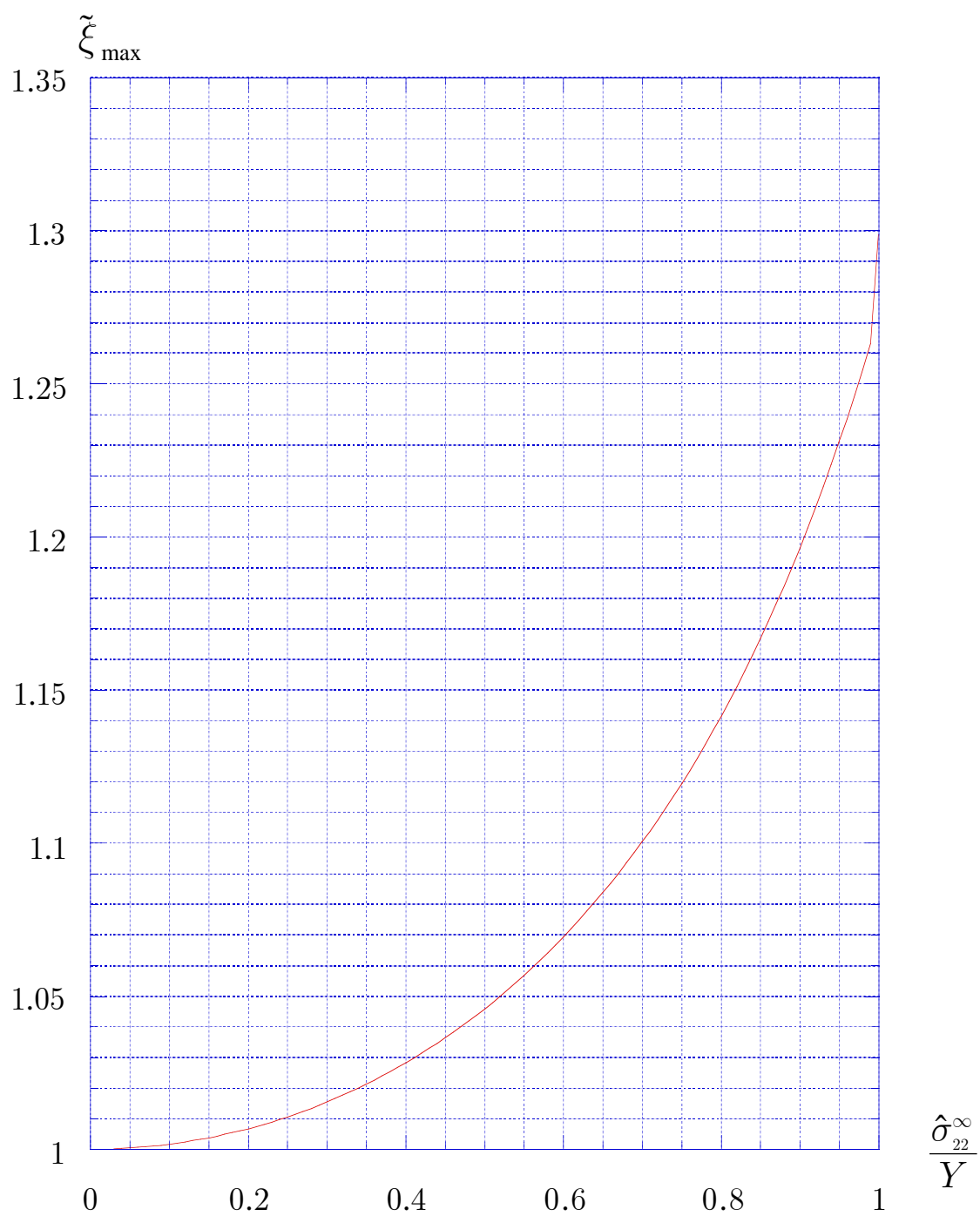


Рис. 28: График зависимости безразмерной координаты локализации максимального остаточного растяжения от отношения растягивающего напряжения к пределу текучести.

VI.2. Локализация пластических деформаций при повторном нагружении

Анализ повторного нагружения связан с решением смешанной граничной задачи (1.8). Эта задача значительно сложнее, чем (1.7), поскольку увеличивается число точек смены граничных условий, что, в свою очередь, существенно затрудняет анализ решения, которое формально сразу же может быть выписано (см. [92]). Заметим также, что в формальном решении граничной задачи (1.8) будет присутствовать дополнительная константа, подлежащая определению.

Решение граничной задачи (1.8) имеет вид [92]:

$$\begin{aligned}
 2\pi\sqrt{G(z)}\partial_z\Delta\varphi^* = & -(2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z} dt + 4zY \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t^2-z^2} dt + \\
 & + 2Y \int_{-l}^l \frac{\sqrt{|G(t)|}}{t-z} dt + C_1 z.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

В последней формуле использованы следующие обозначения:

$$G(z) = [z^2 - (l + c'')^2][z^2 - (l + c')^2][z^2 - (l + \tilde{c})^2],
 \tag{2.2}$$

$$2Yh(x_1) = Y - \tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0) - \tilde{\sigma}_{22}^\infty.$$

Помимо неизвестных параметров локализации пластических деформаций, определению подлежит также и константа C_1 . Аналитическая ветвь корня фиксируются условиями:

$$\begin{aligned}
\sqrt{G(z)} &= -\sqrt{[x_1^2 - (l + c'')^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}, \\
&\quad (z \in (-\infty, -l - c'')) \\
\sqrt{G(z)} &= -i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}, \\
&\quad (z \in (-l - c'', -l - c')) \\
\sqrt{G(z)} &= +\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}, \\
&\quad (z \in (-l - c', -l - \bar{c})) \\
\sqrt{G(z)} &= +i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][(l + \bar{c})^2 - x_1^2]}, \\
&\quad (z \in (-l - \bar{c}, l + \bar{c})) \tag{2.3} \\
\sqrt{G(z)} &= -\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][(l + c')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}, \\
&\quad (z \in (l + \bar{c}, l + c')) \\
\sqrt{G(z)} &= -i\sqrt{[(l + c'')^2 - x_1^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}, \\
&\quad (z \in (l + c', l + c'')) \\
\sqrt{G(z)} &= +\sqrt{[x_1^2 - (l + c'')^2][x_1^2 - (l + c')^2][x_1^2 - (l + \bar{c})^2]}. \\
&\quad (z \in (l + c'', +\infty))
\end{aligned}$$

Устраняя сингулярность в формуле (2.1), приходим к условиям на границах пластических зон:

$$\lim_{z \rightarrow l + \bar{c}} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow l + c'} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow l+c''} (2\pi \sqrt{G(z)} \partial_z \Delta \varphi^*) = 0.$$

Эти условия могут быть представлены также в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \sqrt{\frac{[(l+\tilde{c})+t][(l+c')^2-t^2][(l+c'')^2-t^2]}{(l+\tilde{c})-t}} dt - \\ & - 2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l+\tilde{c})+t][(l+c')^2-t^2][(l+c'')^2-t^2]}{(l+\tilde{c})-t}} dt + \\ & + 2(l+\tilde{c}) \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2-(l+c')^2][(l+c'')^2-t^2]}{t^2-(l+\tilde{c})^2}} dt + (l+\tilde{c})C_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \sqrt{\frac{[(l+\tilde{c})^2-t^2][(l+c')+t][(l+c'')^2-t^2]}{(l+c')-t}} dt - \\ & - 2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l+\tilde{c})^2-t^2][(l+c')+t][(l+c'')^2-t^2]}{(l+c')-t}} dt + \\ & + 2(l+c') \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2-(l+\tilde{c})^2][(l+c'')^2-t^2]}{t^2-(l+c')^2}} dt + (l+c')C_1 = 0, \end{aligned}$$

$$(2Y - \tilde{\sigma}_{22}^\infty) \int_{-(l+\tilde{c})}^{l+\tilde{c}} \sqrt{\frac{[(l+\tilde{c})^2-t^2][(l+c'')+t][(l+c')^2-t^2]}{(l+c'')-t}} dt -$$

$$\begin{aligned}
& -2Y \int_{-l}^l \sqrt{\frac{[(l + \bar{c})^2 - t^2][(l + c'') + t][(l + c')^2 - t^2]}{(l + c'') - t}} dt - \\
& -2(l + c'') \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{\frac{[t^2 - (l + \bar{c})^2][t^2 - (l + c')^2]}{(l + c'')^2 - t^2}} dt + (l + c'')C_1 = 0.
\end{aligned}$$

Введем три безразмерных параметра, характеризующих положение очагов пластических деформаций

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{l + \bar{c}}{l}, \quad \frac{1}{\Delta'} = \frac{l + c'}{l + \bar{c}}, \quad \frac{1}{\Delta''} = \frac{l + c''}{l + \bar{c}} \quad (2.4)$$

и еще одно безразмерное отношение

$$\Sigma = \frac{\bar{\sigma}_{22}^{\infty}}{2Y}. \quad (2.5)$$

Условия устранения сингулярностей в граничных точках пластических зон примут тогда форму:

$$\begin{aligned}
& \frac{1 - \Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1 - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq + \\
& + \frac{1}{\Delta^2 \Delta''^2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1 - q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq + \frac{C_1}{2Y l^2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{1 - \Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta'^{-2} - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} dq +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta^2 \Delta''^2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2)}{q(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0, \\
& \frac{1-\Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2}-q)}} dq - \\
& - \frac{1}{\Delta^2 \Delta''^2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})(q-\Delta''^2)}{q(1-q)}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$h(q) = 1 - \Sigma,$$

$$((\Delta \Delta'' \sec(\hat{\beta}/2))^2 \geq q)$$

$$\begin{aligned}
h(q) = 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + (\Delta \Delta'')^{-1} \sqrt{q}}{(1 + (\Delta \Delta'')^{-1} \sqrt{q}) \sec(\hat{\beta}/2)} + \right. \\
\left. + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - (\Delta \Delta'')^{-1} \sqrt{q}}{(1 - (\Delta \Delta'')^{-1} \sqrt{q}) \sec(\hat{\beta}/2)} \right\},
\end{aligned}$$

$$((\Delta \Delta'' \sec(\hat{\beta}/2))^2 \leq q \leq (\Delta \Delta'' \sec \hat{\beta})^2)$$

$$\begin{aligned}
h(q) = 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} & \left\{ \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} + \right. \\
& \left. + \arcsin \frac{\sec^2(\hat{\beta}/2) - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec(\hat{\beta}/2)} \right\} + \\
& + \frac{1}{2\pi} \left\{ \arcsin \frac{\sec^2\hat{\beta} + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 + (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat{\beta}} + \arcsin \frac{\sec^2\hat{\beta} - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q}}{(1 - (\Delta\Delta'')^{-1}\sqrt{q})\sec\hat{\beta}} \right\} \\
& (q \geq (\Delta\Delta''\sec\hat{\beta})^2)
\end{aligned}$$

Полученная система уравнений после вычитания второго уравнения из третьего, а третьего уравнения из первого приобретает вид (первое уравнение сохраняется неизменным, но становится последним по порядку следования):

$$\begin{aligned}
(1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - q}{q(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} - q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq + \\
+ \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta'^{-2}\Delta''^2)}} dq = 0, \\
(1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta'^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q)}} dq + \\
+ \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2}\Delta''^2}{q(1 - q)(q - \Delta''^2)}} dq = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\Sigma}{\Delta^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2}-q)(\Delta''^{-2}-q)}{q(1-q)}} dq - \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}{q(\Delta^{-2}-q)}} dq + \\ + \frac{1}{\Delta^2\Delta''^2} \int_{\Delta''^2\Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2\Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}} dq + \frac{C_1}{2Yl^2} = 0. \end{aligned}$$

Полученная система уравнений (2.6) может быть также представлена в сжатой форме:

$$(1-\Sigma)J_{13} - J_{11} + L_{12} = 0,$$

$$(1-\Sigma)J_{23} - J_{21} + L_{22} = 0, \quad (2.7)$$

$$(1-\Sigma)I_{33} - \Delta^2 I_{31} + \Delta''^{-2} S_{32} + (2Y)^{-1} l^{-2} \Delta^2 C_1 = 0,$$

или, предполагая, что длина удаленной пластической зоны значительно меньше длины трещины и заменяя функцию $h(q)$ ее максимальным значением,

$$(1-\Sigma)J_{13} - J_{11} + h_c J_{12} = 0,$$

$$(1-\Sigma)J_{23} - J_{21} + h_c J_{22} = 0, \quad (2.8)$$

$$(1-\Sigma)I_{33} - \Delta^2 I_{31} + \Delta''^{-2} h_c I_{32} + (2Y)^{-1} l^{-2} \Delta^2 C_1 = 0,$$

где введены следующие обозначения

$$J_{11} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q)}} dq,$$

$$J_{12} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta'^{-2} \Delta''^2)}} dq,$$

$$L_{12} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta'^{-2} \Delta''^2)}} dq,$$

$$J_{13} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq,$$

$$J_{21} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} dq,$$

$$J_{22} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2} \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta''^2)}} dq, \quad L_{22} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{q - \Delta'^{-2} \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta''^2)}} dq,$$

$$J_{23} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta'^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta''^{-2} - q)}} dq,$$

$$I_{31} = \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq,$$

$$I_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq,$$

$$S_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq,$$

$$I_{33} = \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1-q)}} dq,$$

$$h_c = 1 - \Sigma - \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}.$$

Для определения константы C_1 (или безразмерного отношения $\Delta^2 C_1 / (2Yl^2)$) необходимо дополнительное уравнение. Наиболее простой путь получить это дополнительное условие описывается ниже.

Прежде всего заметим, что из непрерывности нормальных перемещений на границах удаленной пластической зоны следуют условия:

$$\Delta u_2^*(l + c', 0) = 0, \quad \Delta u_2^*(l + c'', 0) = 0. \quad (2.9)$$

Интегрируя частную производную

$$\frac{\partial \Delta u_2^*}{\partial x_1}(x_1, 0)$$

вдоль удаленной пластической зоны и учитывая формулы (2.9), получим уравнение

$$\int_{l+c'}^{l+c''} \frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} dx_1 = 0, \quad (2.10)$$

в котором в силу (1.2) подынтегральное выражение выражается в форме

$$\frac{\partial \Delta u_2^*}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \text{Im} [\partial_z \Delta \varphi^*]. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.1) в это последнее уравнение и затем интегрируя (2.11) вдоль удаленной пластической зоны, находим с помощью формулы (2.10), что

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta^2 C_1}{2Yl^2} \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} + \\ & + \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \frac{1}{\theta' - \theta} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \times \\ & \times \left\{ \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta' h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}{\theta'}} + \right. \\ & + \int_0^{\Delta^2} d\theta' \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} - \\ & \left. - (1 - \Sigma) \int_0^1 d\theta' \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как (см. [99], формулы 235.00, 235.17)

$$\int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} d\theta \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} = \frac{2\mathbf{K}(s)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}},$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \frac{d\theta}{\theta' - \theta} = \\
& = \frac{2}{(1 - \theta')\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left[(\Delta'^{-2} - 1)(\Delta'^{-2} - \theta')^{-1} \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s) \right],
\end{aligned}$$

где

$$s^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - 1}, \quad \alpha^2 = s^2 \frac{1 - \theta'}{\Delta'^{-2} - \theta'}$$

и полные эллиптические интегралы первого и третьего рода определяются как обычно формулами

$$\mathbf{K}(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

$$\Pi(\alpha^2, s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

то уравнение (2.12) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta^2 \mathbf{K}(s) C_1}{2Yl^2} + \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})}{\theta'(\theta' - 1)}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) + \mathbf{K}(s)] d\theta' - \\
& - \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(1 - \theta')}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s)] d\theta' + \\
& + (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(1 - \theta')}} [S(\theta', \Delta') \Pi(\alpha^2, s) - \mathbf{K}(s)] d\theta' = 0,
\end{aligned}$$

$$S(\theta', \Delta') = \frac{\Delta'^{-2} - 1}{\theta' - \Delta'^{-2}},$$

или после ряда преобразований – к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{C_1 \Delta^2}{2Yl^2} = - \frac{\Delta'^{-2} - 1}{\mathbf{K}(s)} & \left\{ \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} \Pi(\alpha_2^2, s) dq + \right. \\
& + \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} \Pi(\alpha_1^2, s) dq - \\
& \left. \right\}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}} \Pi(\alpha^2, s) dq \Bigg\} - \\
& - \frac{1}{\Delta''^2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1 - q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq - \\
& - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1 - q)}} dq + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha^2 = s^2 \frac{1 - q}{\Delta'^{-2} - q}, \quad \alpha_1^2 = s^2 \frac{\Delta^{-2} - q}{\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q}, \quad \alpha_2^2 = s^2 \frac{q - \Delta''^2}{q - \Delta''^2 \Delta'^{-2}},$$

$$s^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - 1}.$$

Альтернативное представление может быть получено с помощью формулы ([67], формула 1.2.27.5)

$$\int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} \sqrt{\frac{1}{(\Delta''^{-2} - \theta)(\theta - \Delta'^{-2})(\theta - 1)}} \frac{d\theta}{\theta' - \theta} = - \frac{2}{(\Delta''^{-2} - \theta') \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \Pi(\omega^2, s),$$

где

$$\omega^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - \theta'}.$$

В результате преобразований вместо (2.13) получается уравнение (см. также [99], формула 235.00):

$$\begin{aligned} & \frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} - \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\theta' - 1)(\theta' - \Delta'^{-2})}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' - \\ & - \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(1 - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' + (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')}{\theta'(\Delta''^{-2} - \theta')}} \Pi(\omega^2, s) d\theta' = 0, \end{aligned}$$

которое затем приводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} = \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1 - q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq + \\ & + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\omega^2 = \frac{\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}}{\Delta''^{-2} - q}, \quad \omega_1^2 = \frac{1 - \Delta''^2 \Delta'^{-2}}{1 - q}, \quad \omega_2^2 = \frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - \Delta'^{-2} \Delta^{-2}}{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}.$$

С учетом уравнения (2.13) третье уравнение системы (2.7) примет вид

$$-(1 - \Sigma) J_{33} + J_{31} + L_{32} = 0, \quad (2.15)$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны,

$$-(1 - \Sigma) J_{33} + J_{31} + h_c J_{32} = 0,$$

где

$$J_{31} = \int_0^1 \Pi(\alpha_1^2, s) \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} dq,$$

$$J_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq,$$

$$L_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq,$$

$$J_{33} = \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq.$$

Константа C_1 при этом вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \frac{C_1 \Delta^2}{2Yl^2} = & -\Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q-\Delta''^2)}} dq + \\ & + \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} - q)}} dq - \\ & - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta'^{-2} - q)(\Delta''^{-2} - q)}{q(1-q)}} dq. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Уравнения (2.15), (2.16) заменяют третье уравнение систем (2.7), (2.8) соответственно.

Из полученных таким образом систем уравнений может быть исключен параметр $1 - \Sigma$, а параметр Δ может быть принят в качестве независимого параметра нагружения.

Итак решению относительно параметров локализации пластических деформаций Δ' , Δ'' подлежит система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{J_{31} - \Lambda_{32}}{J_{33} - J_{32}} &= \frac{J_{21} + \Lambda_{22}}{J_{23} + J_{22}}, \\ \frac{J_{11} + \Lambda_{12}}{J_{13} + J_{12}} &= \frac{J_{21} + \Lambda_{22}}{J_{23} + J_{22}},\end{aligned}\tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}\Lambda_{12} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2}{q(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\ \Lambda_{22} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{q - \Delta''^2 \Delta'^{-2}}{q(1-q)(q - \Delta''^2)}} dq, \\ \Lambda_{32} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq,\end{aligned}$$

$$H(q) = 1 - \Sigma - h(q),$$

или, в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, – система

$$\begin{aligned}\frac{J_{31} - \hat{h} J_{32}}{J_{33} - J_{32}} &= \frac{J_{21} + \hat{h} J_{22}}{J_{23} + J_{22}}, \\ \frac{J_{11} + \hat{h} J_{12}}{J_{13} + J_{12}} &= \frac{J_{21} + \hat{h} J_{22}}{J_{23} + J_{22}},\end{aligned}\tag{2.19}$$

где

$$\hat{h} = \frac{1}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{3\cos^2(\hat{\beta}/2) - 1}{2\cos^3(\hat{\beta}/2)} + \arcsin \frac{\sec(\hat{\beta}/2)}{2} \right\}.$$

Укажем ряд канонических представлений интегралов, с помощью которых формулируются разрешающие системы уравнений, через эллиптические интегралы Лежандра:

$$J_{11} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - 1) F(\Omega, \Delta's) \right\},$$

([67], формула 1.2.39.7)

$$J_{21} = \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta's) \right\},$$

([67], формула 1.2.39.6)

$$J_{12} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \Pi(s^2, \Delta's),$$

([67], формула 1.2.35.7)

(2.20)

$$J_{22} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} [\Pi(s^2, \Delta's) - \mathbf{K}(\Delta's)],$$

([67], формула 1.2.35.6)

$$J_{13} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -\Pi(s^2, \Delta's) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}} \right\},$$

([67], формула 1.2.38.7; [99], формула 117.02)

$$J_{23} = \frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -\Pi(s^2, \Delta's) + \mathbf{K}(\Delta's) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}} \right\},$$

([67], формула 1.2.38.6; [99], формула 117.02)

где

$$\sigma^2 = \frac{-1}{\Delta''^{-2} - 1}, \quad \sin^2 \Omega = \frac{\Delta''^{-2} - 1}{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - 1},$$

и неполные эллиптические интегралы Лежандра определены формулами:

$$F(\varphi, s) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}},$$

$$\Pi(\varphi, \alpha^2, s) = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{(1 - \alpha^2 \sin^2 \vartheta) \sqrt{1 - s^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Стоит отметить также следующие соотношения:

$$J_{22} - J_{12} = -\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \mathbf{K}(\Delta's),$$

$$J_{11} - J_{21} = -\frac{2\Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} F(\Omega, \Delta's),$$

$$J_{22} + J_{23} = J_{12} + J_{13} = \frac{\pi \Delta'(\Delta'^{-2} - 1)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}.$$

С помощью канонических представлений (2.20) и первых двух уравнений системы (2.8) находим

$$1 - \Sigma - h_c = \frac{2\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - 2(\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) - (\Delta'^{-2} - 1)h_c\pi S(s, \Delta')}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + \pi S(s, \Delta')]} -$$

$$- \frac{2(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta's)}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + \pi S(s, \Delta')]},$$

$$1 - \Sigma - h_c = \frac{2\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - 2(\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) - (\Delta'^{-2} - 1)h_c\pi S(s, \Delta')}{(\Delta'^{-2} - 1)[-2\Pi(s^2, \Delta's) + 2\mathbf{K}(\Delta's) + \pi S(s, \Delta')]},$$

$$S(s, \Delta') = \sqrt{\frac{1}{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}.$$

Полученные уравнения затем после ряда преобразований приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{K}(\Delta's)\hat{h} = F(\Omega, \Delta's), \quad (2.21)$$

$$1 - \Sigma - \hat{h} = \frac{2\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)} \times \right.$$

$$\times \left[\mathbf{K}(\Delta's) - \Pi(s^2, \Delta's) + \frac{\pi}{2}\sqrt{(1 - s^2)^{-1}(1 - \Delta'^2)^{-1}} \right] +$$

$$\left. + \Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) \right\}. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.16) на основании (2.22) преобразуется к виду:

$$\int_0^1 \Pi(\alpha_1^2, s) \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)}} dq -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq = \\
& = \frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
& \quad \left. + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, s^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \right\} \times
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_0^1 \Pi(\alpha^2, s) \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \Pi(\alpha_2^2, s) \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq \right\},
\end{aligned}$$

где использовано следующее обозначение:

$$L(s, \Delta') = \mathbf{K}(\Delta' s) - \Pi(s^2, \Delta' s) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}.$$

Таким образом, уравнения (2.21), (2.23) образуют систему уравнений для определения параметров локализации пластического течения, пригодную для использования в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны, т. е. $\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1$.

Напомним также, что величина Δ должна выступать в качестве параметра нагружения.

С помощью уравнения (2.22) уравнение (2.14) в случае $\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1$ сводится к следующему:

$$\begin{aligned}
\frac{C_1 \Delta^2 \mathbf{K}(s)}{2Yl^2} &= \Delta^2 \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq - \\
&- \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \\
&- \frac{2\sqrt{(1 - s^2)(1 - \Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
&+ \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \Big\} \times \\
&\times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{(1 - q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \right. \\
&- \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1 - q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Численный анализ локализации пластических деформаций проводился в случае малого линейного размера удаленной пластической зоны. Система (2.19) была заменена эквивалентной системой уравнений

$$\frac{\hat{h} J_{22} + J_{21}}{J_{22} + J_{23}} = \frac{\hat{h} I_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\hat{h}J_{32} - J_{31}}{J_{32} - J_{33}} = \frac{\hat{h}I_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \quad (2.26)$$

в которой

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq, \\ I_{22} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} dq, \\ I_{23} &= \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} dq. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Канонические представления интегралов (2.27) имеют вид:

$$\begin{aligned} I_{21} &= \frac{2\Delta'}{\Delta'' \sqrt{1-\Delta''^2}} \{ \mathbf{K}(\Delta' s) - \Pi(\lambda^2, \Delta' s) \} = \\ &= \frac{2\Delta' \Delta''}{\sqrt{1-\Delta''^2}} \left\{ (1-\Delta'^{-2}) \Pi(s^2, \Delta' s) - (1-\Delta''^{-2}) \mathbf{K}(\Delta' s) \right\}, \\ &\quad (\lambda^2 = 1 - \Delta'^2 \Delta''^{-2}) \\ &\quad ([67], \text{ формулы 1.2.34.5, 1.2.39.5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ (\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\Delta'^2, \Delta's) + (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})\mathbf{K}(\Delta's) \right\} = \\
&= \frac{2\Delta'}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ -(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(s^2, \Delta's) + (\Delta''^{-2} - 1)\mathbf{K}(\Delta's) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi}{2}\Delta'^{-2}\sqrt{(1 - \Delta'^2)(1 - s^2)^{-1}} \right\},
\end{aligned}$$

([67], формула 1.2.38.5 и [99], формула 117.02)

$$I_{23} = \frac{2\Delta'}{\Delta''^2\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's).$$

([67], формулы 1.2.39.5)

Численное решение системы уравнений (2.25) и (2.26) относительно параметров локализации Δ' и Δ'' сопряжено со значительными трудностями и требует значительных затрат времени. Для оптимизации счета был специально разработан алгоритм ускоренного вычисления входящих в уравнения квадратур, основанный на разложении эллиптических интегралов в ускоренно сходящиеся ряды Фурье. Численные расчеты, которые проводились для случая, когда линейный размер удаленной локализованной пластической зоны значительно меньше длины трещины, подтверждают разрешимость указанной системы и, таким образом, также обосновывают предлагаемую схему локализации пластических деформаций.

Если характерный линейный размер удаленной пластической зоны нельзя считать малым по сравнению с длиной трещины, то система уравнений (2.25) и (2.26) должна быть заменена на

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda_{22} + J_{21}}{J_{22} + J_{23}} &= \frac{\Lambda_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}}, \\
\frac{\Lambda_{32} - J_{31}}{J_{32} - J_{33}} &= \frac{\Lambda_{21} - I_{23}}{I_{21} - I_{22}},
\end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{21} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} dq.$$

VI.3. Вычисление раскрытия трещины при двухзонной локализации пластических деформаций

Раскрытие трещины – один из важнейших параметров механики разрушения. Поэтому оценка влияния удаленной пластической зоны на трещину может быть выполнена на основе вычисления изменения раскрытия трещины, обусловленного влиянием второго очага локализации пластических деформаций.

В принципе, для точного определения раскрытия трещины необходимо дополнительно учесть изменение геометрии берегов трещины, искаженных остаточными перемещениями. Однако, перенос граничных условий на деформированные берега трещины делает невозможным аналитический анализ проблемы. В дальнейшем предполагается, что граничные условия формулируются на неискаженных берегах трещины (что вносит погрешность порядка величины раскрытия трещины). Ясно, что приближенность формулировки краевых задач о разгрузке и повторном нагружении практически не влияет на расчет локализации пластических деформаций, поскольку на линии продолжения трещины на расстояниях от вершины трещины порядка величины раскрытия влияние погрешности формулировки граничных условий несущественно.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1}(x_1, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*], \quad (3.1)$$

интегрируя которое вдоль пластической зоны, примыкающей к кончику трещины, получим

$$-\Delta u_2(l, 0) = \frac{\kappa + 1}{2G} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1. \quad (3.2)$$

Раскрытие трещины, поэтому, может быть вычислено по формуле:

$$\frac{\pi E \tilde{u}_2}{4Yl} = \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} - \frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1. \quad (3.3)$$

Второе слагаемое в правой части полученного уравнения

$$J = -\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 \quad (3.4)$$

может быть вычислено только через три параметра локализации пластических деформаций Δ , Δ' , Δ'' как показано ниже.

Подставляя формулу (2.1) в (3.4) получим

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 &= \frac{C_1}{2Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{[(l+c'')^2 - x_1^2][(l+c')^2 - x_1^2][(l+\tilde{c})^2 - x_1^2]}} + \\ &+ \frac{2}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l+c'')^2 - x_1^2][(l+c')^2 - x_1^2][(l+\tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\ &\times \int_{l+c'}^{l+c''} h(t) \sqrt{[(l+c'')^2 - t^2][t^2 - (l+c')^2][t^2 - (l+\tilde{c})^2]} dt + \\ &+ \frac{2}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l+c'')^2 - x_1^2][(l+c')^2 - x_1^2][(l+\tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\ &\times \int_0^l \sqrt{[(l+c'')^2 - t^2][(l+c')^2 - t^2][(l+\tilde{c})^2 - t^2]} dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{1-\Sigma}{l} \int_l^{l+\tilde{c}} \frac{x_1 dx_1}{(t^2 - x_1^2) \sqrt{[(l+c'')^2 - x_1^2][(l+c')^2 - x_1^2][(l+\tilde{c})^2 - x_1^2]}} \times \\
& \times \int_0^{l+\tilde{c}} \sqrt{[(l+c'')^2 - t^2][(l+c')^2 - t^2][(l+\tilde{c})^2 - t^2]} dt,
\end{aligned}$$

или после ряда преобразований –

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \text{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{C_1 \Delta}{4Yl^2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} + \\
& + \frac{\Delta}{2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}{\theta'}} d\theta' + \\
& + \frac{\Delta}{2} \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} d\theta' - \\
& - \frac{\Delta}{2} (1 - \Sigma) \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta''^{-2} - \theta')(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}{\theta'}} d\theta'.
\end{aligned}$$

Первый из интегралов в правой части полученного уравнения и внешние интегралы могут быть идентифицированы. Действительно, поскольку ([67], формулы 1.2.31.1, 1.2.31.6)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} = \frac{2F(\gamma, s)}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}, \\
& \int_{\Delta^2}^1 \frac{d\theta}{(\theta' - \theta) \sqrt{(\Delta''^{-2} - \theta)(\Delta'^{-2} - \theta)(1 - \theta)}} = \\
& = \frac{2}{(\theta' - \Delta'^{-2}) \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \frac{1 - \Delta'^{-2}}{\theta' - 1} \Pi(\gamma, \beta^2, s) + F(\gamma, s) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\beta^2 = \frac{\theta' - \Delta'^{-2}}{\theta' - 1}, \quad \sin^2 \gamma = \frac{1 - \Delta^2}{\Delta'^{-2} - \Delta^2},$$

то можно заключить, что

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{Yl} \int_l^{l+\tilde{c}} \operatorname{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \left\{ \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) - \right. \\ & - \int_{\Delta'^{-2}}^{\Delta''^{-2}} h(\theta') \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\theta' - \Delta'^{-2})(\theta' - 1)}} \left[(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q)F(\gamma, s) \right] d\theta' - \\ & - \int_0^{\Delta^2} \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}} \left[(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q)F(\gamma, s) \right] d\theta' - \\ & \left. - (1 - \Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - \theta'}{\theta'(\Delta'^{-2} - \theta')(1 - \theta')}} \left[(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1 - q)F(\gamma, s) \right] d\theta' \right\}. \end{aligned}$$

Полученное уравнение, следовательно, преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}{Y \Delta l} \int_l^{l+\tilde{c}} \operatorname{Im}[\partial_z \Delta \varphi^*] dx_1 = \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) - \\ & - \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 h(q) \sqrt{\frac{1 - q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1 - q)F(\gamma, s)] dq - \\ & - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1 - q)F(\gamma, s)] dq - \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$-(1-\Sigma) \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}} [(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq,$$

где

$$\beta^2 = \frac{q - \Delta'^{-2}}{q - 1}, \quad \beta_1^2 = \frac{q - \Delta^{-2}\Delta'^{-2}}{q - \Delta^{-2}}, \quad \beta_2^2 = \frac{q - \Delta''^2\Delta'^{-2}}{q - \Delta''^2}.$$

Отметим также формулу

$$\beta^2 = \frac{s^2}{\alpha^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{s^2}{\alpha_1^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{s^2}{\alpha_2^2}.$$

Подставляя формулу (3.5) в (3.3) и выражение для $1-\Sigma$ согласно уравнению (2.22), предполагая тем самым малым размер удаленной пластической зоны, после многочисленных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi E \tilde{u}_2 \sqrt{\Delta''^{-2}-1}}{4\Delta Y l} &= \Delta^{-1} \sqrt{\Delta''^{-2}-1} \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \frac{C_1}{2Y l^2} F(\gamma, s) - \\ &- \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2}-q}{q(\Delta^{-2}-q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2}-q)}} [(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq - \\ &- \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2}-q}{q(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}} [(\Delta'^{-2}-1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq - \\ &- \frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2}-1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2}-1)F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \end{aligned}$$

(3.6)

$$\begin{aligned}
& +\Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) \Big\} \times \\
& \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq + \right. \\
& \left. + \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq \right\}.
\end{aligned}$$

Если исключить теперь константу C_1 из последнего уравнения с помощью соотношения (2.24), то для вычисления раскрытия трещины при повторном нагружении можно получить формулу:

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi E \tilde{u}_2 \sqrt{\Delta''^{-2} - 1}}{4\Delta Y l} = \Delta^{-1} \sqrt{\Delta''^{-2} - 1} \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \\
& + \frac{F(\gamma, s)}{\mathbf{K}(s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega_2^2, s) dq - \\
& - \frac{F^2(\gamma, s)}{\Delta^2 \mathbf{K}^2(s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}{q(\Delta''^{-2} - q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \\
& - \frac{2F(\gamma, s)}{\pi \Delta^2 \mathbf{K}(s)} \frac{\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ - \frac{(\Delta'^{-2} - 1)F(\Omega, \Delta's)}{\mathbf{K}(\Delta's)} L(s, \Delta') + \right. \\
& \left. + \Delta''^{-2}\Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta's) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2})F(\Omega, \Delta's) \right\} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-q)(\Delta'^{-2}-q)}{q(\Delta''^{-2}-q)}} \Pi(\omega^2, s) dq - \right. \\
& \left. - \Delta''^{-2} \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(1-q)}} \Pi(\omega_1^2, s) dq \right\} - \quad (3.7) \\
& - \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2} \Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2} \Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1-q) F(\gamma, s)] dq - \\
& - \frac{F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q) F(\gamma, s)] dq - \\
& - \frac{2\sqrt{(1-s^2)(1-\Delta'^2)}}{\pi(\Delta'^{-2} - 1)} \left\{ -\frac{(\Delta'^{-2} - 1) F(\Omega, \Delta' s)}{\mathbf{K}(\Delta' s)} L(s, \Delta') + \right. \\
& \left. + \Delta''^{-2} \Pi(\Omega, \sigma^2, \Delta' s) - (\Delta''^{-2} - \Delta'^{-2}) F(\Omega, \Delta' s) \right\} \times \\
& \times \left\{ \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q) F(\gamma, s)] dq + \right. \\
& \left. + \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q-\Delta''^2)(q-\Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1) \Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q) F(\gamma, s)] dq \right\}.
\end{aligned}$$

Уравнение (3.7) позволяет вычислить раскрытие трещины если три безразмерных параметра локализации пластических деформаций Δ , Δ' , Δ''

определены или заданы. Тем самым может быть охарактеризовано влияние удаленной пластической зоны на трещину.

В случае, если характерный линейный размер удаленной пластической зоны сравним с длиной трещины, то на основании формул (3.3) и (3.5) и (2.17) находим

$$\begin{aligned} \frac{\pi E \bar{u}_2(l, 0)}{4Yl} = & \ln \frac{\cos^2(\hat{\beta}/2)}{\cos \hat{\beta}} + \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta''^{-2} - 1}} \times \\ & \times \left\{ \frac{C_1}{2Yl^2} F(\gamma, s) - V_1 + \bar{V}_2 - (1 - \Sigma)(V + V_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$V = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta''^{-2} - q}{q(1-q)(\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq,$$

$$V_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{\Delta^{-2}\Delta''^{-2} - q}{q(\Delta^{-2} - q)(\Delta^{-2}\Delta'^{-2} - q)}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_1^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq,$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} \times \\ \times [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq, \end{aligned}$$

$$V_2 = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 \sqrt{\frac{1-q}{q(q - \Delta''^2)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}} [(\Delta'^{-2} - 1)\Pi(\gamma, \beta_2^2, s) + (1-q)F(\gamma, s)] dq,$$

$$\frac{C_1}{2Yl^2} = \Delta''^{-2} \Delta^{-2} \bar{S}_{32} + I_{31} - (1 - \Sigma) \Delta^{-2} (I_{33} + \Delta''^{-2} I_{32}),$$

$$\bar{S}_{32} = \int_{\Delta''^2 \Delta'^{-2}}^1 H(q) \sqrt{\frac{(1-q)(q - \Delta''^2 \Delta'^{-2})}{q(q - \Delta''^2)}} dq,$$

$$1 - \Sigma = \frac{J_{11} + \Lambda_{12}}{J_{13} + J_{12}}.$$

Таким образом, если параметры локализации определены, то формула (3.8) позволяет вычислить раскрытие трещины при любой протяженности удаленной пластической зоны (для этого необходимо вычислить только приведенные выше квадратуры).

Асимптотический анализ величины раскрытия трещины при малой (по сравнению с длиной трещины) длине удаленной пластической зоны приводит к простой зависимости

$$\frac{\pi E}{4Yl} \Delta u_2 = -\gamma [2 - (4Y)^{-1} \pi \sqrt{(\Delta'^{-2} - 1)^{-1} \tilde{\sigma}_{22}^\infty}] \quad (\Delta''^2 \Delta'^{-2} \rightarrow 1 - 0) \quad (3.9)$$

для дополнительного закрытия трещины при повторном нагружении.

Таким образом, возникновение нового очага пластического течения при повторном нагружении проявляется в форме дополнительного закрытия трещины, асимптотическое значение которого может быть вычислено по формуле (3.9).

Следует отметить, что предлагаемая методика оценки влияния удаленных от вершины трещины локализованных очагов пластических деформаций на равновесие трещины нормального отрыва может быть использована и при иных источниках подобной локализации (локальное возрастание напряжений вследствие термического воздействия, накопления повреждений в условиях водородного охрупчивания и нейтронного облучения и т.п.). Формально вид поля остаточных напряжений учитывается только через функцию $H(q)$, которая согласно определению вычисляется в виде

$$2H(q) = 1 + \frac{\tilde{\sigma}_{22}(x_1, 0)}{Y} \Big|_{x_1 = \Delta^{-1} \Delta''^{-1} l \sqrt{q}}.$$

Никаких дополнительных модификаций предложенная в работе схема не требует.

VI.4. Пример численного анализа

Для анализа локализации пластических деформаций во время повторного нагружения необходимо получить численное решение системы уравнений (2.25), (2.26).

Использование традиционных методов решения систем нелинейных уравнений (метода наискорейшего спуска, метода Ньютона, итерационных методов) наталкивается на значительные трудности, связанные, например, с дифференцированием функций, определяемых в данном случае интегралами. Поэтому использован численный алгоритм, заключающийся в следующем.

Для решения системы двух нелинейных уравнений разыскивается точка пересечения двух кривых на плоскости (Δ', Δ'') , задаваемых исследуемыми уравнениями (2.25) и (2.26) (кривые (I) и (II) соответственно). После выделения области на плоскости (Δ', Δ'') возможного нахождения решения системы уравнений, задается значение одной из переменных, например Δ' , и определяется точка пересечения с кривой (I). Если точка пересечения с данной кривой при фиксированном значении Δ' отсутствует, то находится точка пересечения с другой кривой. Если нет пересечений как с первой кривой, так и со второй, то задаваемое значение переменной Δ' делится пополам и процедура повторяется до определения значения Δ'' . Затем полученное значение переменной Δ'' фиксируется и осуществляется переход на другую кривую: если значение Δ'' найдено при пересечении с первой кривой, то разыскивается пересечение со второй кривой при фиксированном значении Δ'' , и наоборот. Тем самым определяется новое значение переменной Δ' и процедура повторяется. Таким образом, осуществляется обход точки пересечения кривых по "закручивающейся" ломаной, звеньями которой являются отрезки, параллельные координатным осям. Следует отметить, что процесс поиска точки пересечения кривых будет сходящимся, если биссектриса противоположных углов, составленных касательными в

точке пересечения, имеет отрицательный угол наклона к горизонту. В противном случае процесс будет расходящимся.

В случае "раскручивающейся" ломаной необходимо изменить направление обхода на противоположное. Используемый алгоритм также учитывает возможные частные случаи, такие как касание кривых, пересечение кривых с почти горизонтальной биссектрисой указанных углов.

Область поиска решения определяется неравенствами:

$$l + \bar{c} < l + c' \leq l + c,$$

$$l + c' < l + c'' \leq 2(l + c) - (l + \bar{c}).$$

Первое неравенство означает, что левый конец удаленной пластической зоны лежит строго правее конца прилегающей к вершине трещины пластической области и левее точки, в которой остаточные напряжения достигают максимума.

Условие в левой части второго неравенства очевидно, а условие в правой части подразумевает, что правый конец удаленной пластической области не может находиться от точки максимума остаточных напряжений далее, чем на длину отрезка от конца примыкающей к вершине трещины пластической области до точки, где находился конец пластической области при начальном нагружении.

Для безразмерных параметров Δ' и Δ'' эти неравенства приобретают следующий вид:

$$\cos \hat{\beta} \leq \Delta' < 1,$$

$$\frac{1}{2\Delta \sec \hat{\beta} - 1} \leq \Delta'' < \Delta'.$$

Параметр Δ выбирался из интервала $\Delta = \cos(\hat{\beta}/2) + R(1 - \cos(\hat{\beta}/2))$ ($0 < R < 1$) с тем, чтобы фиксируя R , можно было бы задавать все возможные значения Δ . Для расчета было принято $R = 0.95$, т.е. длина пластической области, примыкающей к трещине, очень мала по сравнению с длиной трещины.

Количество точек разбиения при вычислении интегралов в первом уравнении выбиралось равным $N = 10^6$. При вычислении интегралов, входящих во второе уравнение, содержащее повторные интегралы, полагалось, что число точек разбиения для внутренних интегралов равно $N = 10^4$, для внешних – $N = 10^3$, поскольку более сильное измельчение отрезков интегрирования, а также увеличение числа итераций в подпрограмме, определяющей корень нелинейного уравнения на заданном отрезке, ведет к многократному увеличению времени работы программы.

При

$$\frac{l + \tilde{c}}{l} = \frac{1}{\Delta} = 1.00003,$$

$$\frac{l + c}{l} = \sec \hat{\beta} = 1.00309$$

были получены следующие результаты:

$$\frac{l + c'}{l} = \frac{1}{\Delta\Delta'} = 1.00012,$$

$$\frac{l + c''}{l} = \frac{1}{\Delta\Delta''} = 1.0014,$$

что доказывает исходное предположение о возникновении удаленной пластической зоны.

Кривые (I) и (II) в окрестности их пересечения для указанных значений Δ , $\hat{\beta}$ изображены на рис. 29.

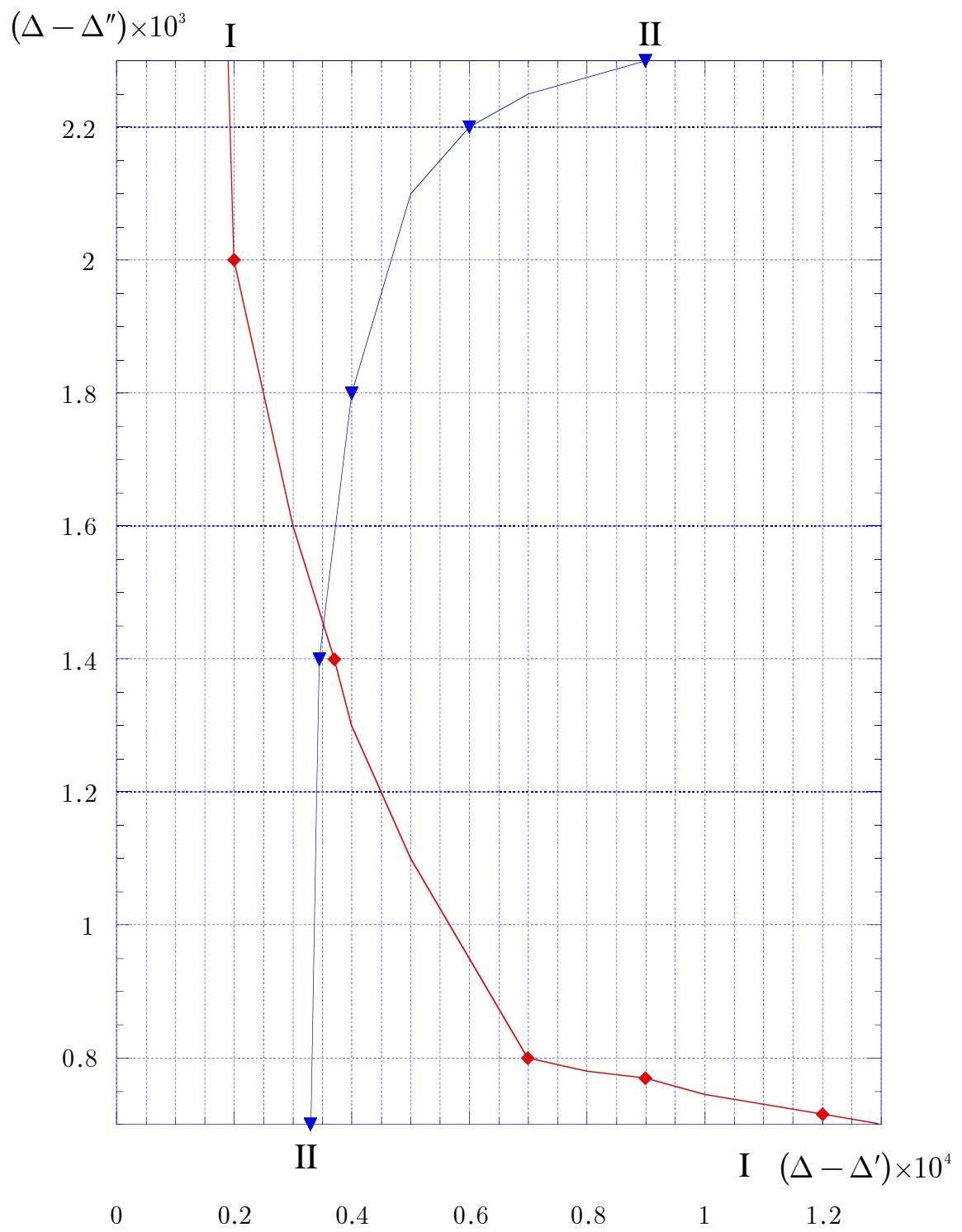


Рис. 29: Кривые I и II в окрестности их пересечения.

Глава VII. КАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ

Рассматриваются трехмерные уравнения равновесия упругопластической среды с рассеянными повреждениями при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения. Напряженное состояние может соответствовать как грани, так и ребру поверхности текучести. Распределение повреждений в среде представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга, главные оси которого предполагаются координированными главным осям напряжений.

Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности. В качестве уравнений кинематики пластического течения приняты уравнения совместности (сплошности) приращений малых деформаций. Выведены статические и кинематические соотношения связанной задачи вдоль траекторий главных напряжений, которые представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, найдены такие канонические криволинейные координаты, при преобразовании к которым уравнения равновесия, сформулированные для ребра поверхности текучести приводятся к трем уравнениям, допускающим при некоторых ограничениях точные интегралы. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения при продвижении вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями. Построены канонические координаты плоской задачи и найдены инвариантные отношения, устанавливающие баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений. Выделены классы пространственных задач равновесия упругопластических

тел, для которых поля напряжений являются расслоенными.

Получены соотношения для скоростей пластических деформаций вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями.

В этой главе работы основные уравнения теории пластичности представляются сначала в традиционной тензорной записи в декартовой системе координат. Затем они переформулируются в инвариантную безындексную запись. В части, касающейся вывода условий совместности приращений малых деформаций в изостатической криволинейной сетке, все соотношения приводятся в физических компонентах по отношению к локальному базису, связанному с линиями главных напряжений. При этом мы сочли необходимым отойти от соглашения, согласно которому индексы у физических компонент тензора должны заключаться в треугольные скобки, чтобы упростить запись довольно сложных тензорных уравнений.

Представление условий совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке линий главных напряжений представляет собой довольно трудную задачу ввиду большого количества трудно обозримых соотношений. Однако, если пренебречь упругими деформациями, то согласно ассоциированному закону течения тензор приращения полных деформаций оказывается соосным тензору напряжений, что существенно упрощает дело. Тем не менее и в этом случае приходится отказываться от важного преимущества идеально пластического течения – его несжимаемости – с тем, чтобы учесть влияние поля повреждений на него, которое может проявляться прежде всего в возможной сжимаемости пластического течения. Влияние поля микродефектов на кинематику пластического течения может быть учтено и в форме несовместности деформаций, и в наиболее общей форме – в рамках неклассической кинематики.

Специальное место в этой главе отводится важной проблеме учета влияния упругой деформации на кинематику пластического течения в среде с повреждениями.

VII.1. Основные уравнения модели упругопластического тела с условием пластичности Треска

Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви [53]. Пространственная задача теории идеальной пластичности при условии текучести Мизеса, статически неопределима, и кроме того, соответствующая краевая задача является эллиптиче-

ской [87], что в принципе не позволяет обобщить методы интегрирования, развитые для плоской задачи [87], [66], [83]. Напомним, что уравнения плоской задачи принадлежат к гиперболическому типу, что позволяет ввести представление о системе скольжения как механизме пластического течения, согласующееся с многочисленными экспериментальными данными по геометрии пластического течения металлов. Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими [33].

Исследованию уравнений осесимметричной и пространственной задачи теории пластичности посвящены работы [24], [86], [37], [36], [196], [197], [109], [116].

Смысл гипотезы полной пластичности [86], как такого напряженного состояния пластической среды, при котором изображающая напряжения в пространстве главных напряжений точка располагается на ребре призмы Треска, был установлен в [37]. Осесимметричная жесткопластическая задача с использованием гипотезы полной пластичности исследовалась в работе [36], где было доказано, что уравнения статики принадлежат к гиперболическому типу, найдены характеристики и предложен численный метод интегрирования этих уравнений.

В работе [33] показано, что при условии пластичности Треска пространственная задача статически определима, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, система уравнений пластического равновесия принадлежит к гиперболическому типу и нормали к характеристическим поверхностям совпадают с нормальными к площадкам максимальных касательных напряжений (площадкам скольжения). Отметим также, что вопросы построения теории идеальной пластичности при условии соответствия напряженного состояния ребру призмы Треска рассматривались в цикле работ [33], [34], [35].

Ассоциированный закон течения для ребра призмы Треска не фиксирует направление вектора, представляющего приращение тензора пластической деформации [46]. Поэтому появляется дополнительная функция – угол, определяющий положение вектора приращения пластической деформации между нормальными к граням призмы, – которой можно воспользоваться для построения согласованного поля скоростей. Именно поэтому на ребре призмы Треска часто можно отыскать решения прикладных задач о течении пластических тел.

Необходимо также отметить то обстоятельство, что решения уравнений статики, полученные в известных работах [24], [36], соответствуют именно ребру призмы Треска, так как условие пластичности Мизеса в сочетании с условием Хаара-Кармана оставляет только те напряженные состояния, которые соответствуют прямым, по которым пересекается цилиндр Мизеса и вписанная в него призма Треска.

Принципиально важным также является тот факт, что соотношения пространственной и осесимметричной задачи вдоль характеристик являются неинтегрируемыми в отличие от случая плоской пластической деформации. Конечные соотношения можно получить, как будет показано ниже, только вдоль линий главных напряжений. Поэтому отличительной чертой предлагаемого подхода является то, что уравнения пространственной задачи исследуются не методом характеристик, а с помощью канонических преобразований, естественно определяемых с помощью сетки линий главных напряжений. Последовательное проведение такого подхода поразумевает представление всех уравнений в криволинейной сетке линий главных напряжений (изостат). Ясно, что изостаты исключительно удобны при анализе статических уравнений и записи соотношений ассоциированного кусочно-линейному условию пластичности закона течения, поскольку в главных осях напряжений вообще удастся получить полные соотношения в приращениях главных девиаторов напряжений и деформаций, но переформулировка уравнений кинематики в изостатические координаты сопряжена со значительными трудностями.

Связанная постановка задачи, когда пластическое течение искажается полем повреждений и одновременно повреждения возрастают в процессе накопления пластических деформаций, вообще не подвергалась анализу с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к интегрированию более сложных, по сравнению с традиционными уравнениями теории пластичности, связанных уравнений.

Несколько слов необходимо сказать о выборе представления анизотропной поврежденности. Мы использовали модель, предложенную в [57] и ограничили тензором эффективных напряжений построенным как произведение тензора напряжений Коши и соосного ему обратного тензора сплошности. Это условие соосности, как было установлено в [57], действительно выполняется только если в процессе нагружения влиянием упругой деформации на состояние поврежденности можно пренебречь. Заметим, что достаточно полное изложение современной механики поврежденности может

быть найдено в книге [144].

Формулировки связанных уравнений теории пластичности и поврежденности могут быть получены на основе микромеханического подхода. В. Н. Кукуджановым в работе [48] предложена микромеханическая модель упруговязкопластической среды с поврежденностью и дано ее приложение к исследованию процессов локализации пластических деформаций. Согласно концепции В. Н. Кукуджанова пластическое течение и разрушение есть единый процесс, вызванный движением дислокаций, а на более поздней стадии – зарождением и развитием микродефектов (микропор различной геометрии). Модель может учитывать форму микропор: эллипсоидальную или сферическую. В случае эллипсоидальных микропор поврежденность тела представляется с помощью тензора поврежденности второго ранга. В этой же работе предложено условие пластичности пористого материала с кинематическим упрочнением, сформулирован соответствующий ассоциированный закон течения и получена определяющая зависимость для пористости.

Еще раз следует подчеркнуть, что все основные соотношения связанной задачи будут представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

Рассмотрим, следуя [33], уравнения равновесия упругопластического тела, подчиняющегося условию пластичности Треска. Пусть в жесткопластическом теле, материал которого характеризуется константой k – пределом текучести при чистом сдвиге, осуществляется напряженное состояние, соответствующее ребру призмы Треска. Обозначим через σ_{ij} тензор напряжений; l_i, m_i, n_i – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – соответствующие собственные значения (главные напряжения).

Спектральное разложение тензора напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j. \quad (1.1)$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска для тела без повреждений представляется правильной шестигранной призмой с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Поскольку базис l_i, m_i, n_i предполагается ортонормированным, то

$$\delta_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j. \quad (1.2)$$

Учитывая уравнения (1.1) и (1.2), а также уравнение ребра призмы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\sigma_{ij} = (\sigma_3 \pm 2k)\delta_{ij} \mp 2kn_i n_j. \quad (1.3)$$

Таким образом, напряжения в неповрежденном жесткопластическом теле определяются скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем n_i .

Традиционное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

после подстановки в него разложения (1.3) может быть представлено в следующей инвариантной форме

$$\text{grad} \sigma_3 \mp 2k \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.4)$$

Следовательно, задача о равновесии жесткопластического тела для ребра призмы Треска статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора n_i), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Вводя обозначение

$$\Sigma = \frac{\sigma_3}{\mp 2k},$$

уравнение (1.4) приведем к виду:

$$\text{grad}\Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

В декартовых координатах уравнение (1.5) эквивалентно системе уравнений:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.6) принадлежит к гиперболическому типу, так как в каждой точке существует три характеристических направления (нормали к характеристическим поверхностям).

Если обозначить через $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ единичные нормали к характеристическим поверхностям в данной точке, то

$$\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{n}^{(2)} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{n}^{(3)} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.7)$$

Заметим, что характеристиками являются не только поверхности скольжения, но и поверхности, составленные из интегральных линий векторного поля \mathbf{n} .

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.5):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n},$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}.$$

В дальнейшем мы будем использовать также следующее равенство:

$$((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}) \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0.$$

Любопытно отметить, что уравнения статики плоской пластической деформации (см., например, [83])

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= 0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

где $p = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$, θ – угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению σ_1 к оси x_1 , по форме являются двумерным аналогом уравнений (1.6).

Действительно, вводя обозначения $\Sigma = p/(2k)$ и определяя единичное плоское векторное поле \mathbf{n} с помощью соотношений

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta,$$

систему (1.9) можно представить в форме (1.6).

В дальнейшем особую роль будут играть расслоенные векторные поля \mathbf{n} . Векторное поле, определенное в некоторой области пространства называется расслоенным, если существует семейство поверхностей, заполняющих эту область, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства совпадает с полем \mathbf{n} .

Для того чтобы векторное поле \mathbf{n} было расслоенным в некоторой области пространства необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0.\tag{1.10}$$

Здесь мы опускаем детали вывода этого далеко не очевидного условия.

Слои векторного поля \mathbf{n} состояются из векторных линий поля $\text{rot } \mathbf{n}$ следующим образом: сначала выбирается поверхность, так чтобы векторы \mathbf{n} касались ее в каждой точке, затем на этой поверхности строится семейство траекторий, ортогональных векторам \mathbf{n} , и из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля $\text{rot } \mathbf{n}$, образуя слой векторного поля \mathbf{n} .

Для единичного векторного поля \mathbf{n} введем углы ϑ , ψ , определяющие его ориентацию в пространстве:

$$\mathbf{n} = \sin \psi \sin \vartheta \mathbf{i} - \cos \psi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}.\tag{1.11}$$

Тогда условие расслоенности поля напряжений, следующее из (1.10), можно получить в виде:

$$\begin{aligned} \cos \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \\ + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sin^2 \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Заметим, что любое плоское и осесимметричное векторное поле является расслоенным.

Таким образом, для напряженного состояния соответствующего ребру призмы Треска, которое, кроме того, является расслоенным в некоторой области пространства, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением \mathbf{n} должно удовлетворять уравнениям:

$$\text{rot div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (1.13)$$

Векторное уравнение (1.5) имеет инвариантную форму, исключительно удобную для преобразования к криволинейным координатам. Преобразуем его к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Ковариантные компоненты векторного поля $\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ определяются как следует ниже (см., например, [84]):

$$(\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} n^k n^m) + n^r n^s [rs, l], \quad (1.14)$$

где g_{kl} – компоненты метрического тензора, $g = \det g_{ij}$, $[rs, l] = \Gamma_{rs, l}$ – символы Кристоффеля первого рода, через n^m обозначены контравариантные компоненты векторного поля \mathbf{n} .

Используя формулу (1.14), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^l} + \frac{1}{\sqrt{g}} g_{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (\sqrt{g} n^k n^m) + n^r n^s [rs, l] = 0. \quad (1.15)$$

Ниже мы воспользуемся последним уравнением для преобразования уравнений пластического равновесия к специальным образом подобранным криволинейным координатам.

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_2 \delta_{ij} - (\sigma_2 - \sigma_3) n_i n_j + 2k l_i l_j. \quad (1.16)$$

Уравнения равновесия, поэтому, получаются в виде (ср. (1.5))

$$\begin{aligned} \text{grad}\Sigma_2 + \text{div}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)] \mathbf{n} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$.

Аналогом векторного уравнения (1.8) будет выступать уравнение:

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] + \\ + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Векторное уравнение (1.8) представим также в форме проекций на характерные ориентации, связанные с полем напряжений: проектируя на направление \mathbf{n} , находим

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \nabla \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (1.19)$$

проектируя на любое ортогональное вектору \mathbf{n} направление (задаваемое ортом $\boldsymbol{\tau}$), получим

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}] = 0. \quad (1.20)$$

Проектируя векторное уравнение (1.18) на главные оси тензора напряжений, находим:

направление \mathbf{n} :

$$\frac{\partial \Sigma_3}{\partial n} + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (1.21)$$

направление \mathbf{l} :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial l} + (\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}]\} = 0; \quad (1.22)$$

направление \mathbf{m} :

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}]\} = 0. \quad (1.23)$$

Обратимся теперь к соотношениям, связывающим приращения напряжений и деформаций. Известно, что одним из важнейших преимуществ

кусочно-линейных условий пластичности (к которым относится и условие пластичности Треска) является возможность для напряженных состояний, соответствующих грани поверхности текучести, выразить приращения главных пластических деформаций $d\varepsilon_i^P$ через полные приращения $d\varepsilon_i'$. Здесь и в дальнейшем штрихом обозначается девиатор тензора второго ранга. Ясно, что принципиально иная ситуация в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру: приращение пластической деформации здесь принципиально определить нельзя ни по величине, ни по направлению.

Искомые соотношения (как для граней, так и для ребер призмы Треска) без труда выводятся с помощью разложения приращения пластической деформации на три части

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\varepsilon_{ij}^{P(1)} + d\varepsilon_{ij}^{P(2)} + d\varepsilon_{ij}^{P(3)}, \quad (1.24)$$

каждая из которых соответствует одной из трех функций текучести

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k, \\ f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k, \\ f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k, \end{aligned} \quad (1.25)$$

составляющих условие пластичности Треска, и ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = 0, & f^{(\alpha)} < 0 \text{ или } f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \\ d\varepsilon_{ij}^{P(\alpha)} = \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda^{(\alpha)}, & f^{(\alpha)} = 0 \text{ и } \frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad d\lambda^{(\alpha)} > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ясно также, что достаточно получить только три соотношения, связывающих приращения главных напряжений и деформаций, поскольку ассоциированный закон течения устанавливает лишь соосность приращения тензора пластических деформаций и тензора напряжений и не дает никаких дополнительных соотношений для определения ориентаций **l**, **m**, **n** в пространстве.²⁴

²⁴Напомним, что векторы, задающие ориентацию главных осей тензора напряжений, присутствуют в уравнениях равновесия для ребра (1.5) и грани (1.17), и неизбежно появляются в кинематических уравнениях — уравнениях совместности для приращений полной деформации.

Опуская детали вывода, приведем итоговые соотношения

$$\begin{aligned}
d\sigma'_1 &= 2G\Delta \left[(4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_1 + \right. \\
&\quad + (2\gamma^{(1)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_2 + \\
&\quad \left. + (2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_3 \right], \\
d\sigma'_2 &= 2G\Delta \left[(2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_1 + \right. \\
&\quad + (4 - 2\gamma^{(1)} - 2\gamma^{(2)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_2 + \\
&\quad \left. + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_3 \right], \\
d\sigma'_3 &= 2G\Delta \left[(2\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_1 + \right. \\
&\quad + (2\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} + \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_2 + \\
&\quad \left. + (4 - 2\gamma^{(2)} - 2\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} + \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})d\varepsilon'_3 \right],
\end{aligned} \tag{1.27}$$

где G – упругий модуль сдвига,

$$\gamma^{(1)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_2 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_2| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_2| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_2)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_2) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(2)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_2 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_2 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_2 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\gamma^{(3)} = \begin{cases} 1, & |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } d\sigma_1 - d\sigma_3 = 0 \\ 0, & |\sigma_1 - \sigma_3| < 2k \text{ или } |\sigma_1 - \sigma_3| = 2k \text{ и } (d\sigma_1 - d\sigma_3)\text{sgn}(\sigma_1 - \sigma_3) < 0, \end{cases}$$

$$\Delta = (4 - \gamma^{(1)}\gamma^{(2)} - \gamma^{(2)}\gamma^{(3)} - \gamma^{(1)}\gamma^{(3)})^{-1}.$$

Из полученных соотношений, в частности, для нагружений вдоль ребра призмы Треска, которое определяется условием

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\
f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k = 0, \\
f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_3| - 2k < 0, \\
d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0, \quad d\sigma_2 - d\sigma_3 = 0,
\end{aligned} \tag{1.28}$$

находим

$$d\sigma'_1 = 0, \quad d\sigma'_2 = 0, \quad d\sigma'_3 = 0. \tag{1.29}$$

Для нагружений, соответствующих смещению изображающей напряжения точки вдоль грани призмы

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_1 - \sigma_2| - 2k = 0, \\
f^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_2 - \sigma_3| - 2k < 0, \\
f^{(3)}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= |\sigma_3 - \sigma_1| - 2k < 0, \\
d\sigma_1 - d\sigma_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

получим полные соотношения в форме

$$\begin{aligned}
d\sigma'_1 = d\sigma'_2 &= G(d\varepsilon'_1 + d\varepsilon'_2), \\
d\sigma'_3 &= 2Gd\varepsilon'_3.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

К уравнениям равновесия и определяющим уравнениям, очевидно, необходимо присоединить еще кинематические уравнения. В качестве таких вместо уравнений для скоростей перемещений, традиционно используемых в теории пластичности, исключительно удобными оказываются уравнения сплошности (см., например, [25], [54]) для приращений полных главных деформаций, сформулированные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения кинематики будут рассмотрены несколько ниже.

VII.2. Канонические инварианты уравнений пластического равновесия

Рассмотрим класс напряженных состояний с расслоенными полями \mathbf{n} . Как было отмечено выше все плоские и осесимметричные пластические поля напряжений заведомо входят в этот класс.

Воспользуемся предположением о расслоенности векторного поля \mathbf{n} и выберем криволинейные координаты ξ^m специальным образом: поверхно-

сти $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля \mathbf{n} , а поверхности $\xi^1 = \text{const}$, $\xi^2 = \text{const}$ – интегральные поверхности векторного поля \mathbf{n} .

При таком выборе криволинейных координат имеем:

$$g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad n^1 = 0, \quad n^2 = 0,$$

что позволяет существенно упростить уравнения (1.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^1} - \frac{1}{2} (n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^1} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} (n^3)^2 \frac{\partial g_{33}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \xi^3} + \frac{1}{2} (n^3)^2 g_{33} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln(g_{33}g) + g_{33} \frac{\partial}{\partial \xi^3} (n^3)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как

$$(n^3)^2 = \frac{1}{g_{33}},$$

то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\Sigma - \frac{1}{2} \ln g_{33} + \frac{1}{2} \ln g \right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) интегрируются вдоль линий главных напряжений: инвариант $I_{1,2} = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}}$ сохраняет свое значения на каждом из слоев поля \mathbf{n} , инвариант $I_3 = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} + \ln \sqrt{g}$ не изменяется вдоль векторной линии поля \mathbf{n} .

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась в работе [132] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [185], [153], [154]. Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [74]. В этой же

работе была установлена связь между преобразованием области пластического течения с помощью координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время А. Пуанкаре [68], [69] (см. также [3]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью производящих функций. Как было показано в [73], [74], уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, обладают важными свойствами инвариантности относительно преобразований Лежандра и Ампера.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (2.2) состоит в возможности разложения детерминанта g на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3)G_2(\xi^1, \xi^2). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является одновременно и общим интегралом уравнений (1.13): если задаться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы $g_{13} = 0, g_{23} = 0$ и выполнялось уравнение (2.3), то векторное поле

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}\xi^3}{|\text{grad}\xi^3|}$$

будет тождественно удовлетворять уравнениям (1.13).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное и плоское векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты r, φ, z , то слоями осесимметричного поля \mathbf{n} будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметрии ортогональных полю \mathbf{n} траекторий, расположенных в плоскости $\varphi = 0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля \mathbf{n} .

Система уравнений (2.1) может быть также выведена из известных уравнений Ламе – уравнений равновесия, представленных в ортогональной криволинейной сетке изостат.²⁵ Изостаты отнюдь не всегда образуют сетку, которая допускает подбор криволинейных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы изостаты совпадали с координатными линиями.²⁶ Но если такая возмож-

²⁵Напомним, что изостатой (или линией главного напряжения) называется кривая, касательная к которой направлена вдоль главной оси тензора напряжений.

²⁶Необходимое и достаточное условие этого – одновременное выполнение равенств

$$\mathbf{l} \cdot \text{rot } \mathbf{l} = 0, \mathbf{m} \cdot \text{rot } \mathbf{m} = 0, \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} = 0.$$

ность существует, то уравнения равновесия сводятся к трем соотношениям вдоль изостат [155]:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r_{12}} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{r_{13}} + \rho F_{<1>} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{r_{23}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{r_{21}} + \rho F_{<2>} &= 0, \\ \frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{r_{31}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{r_{32}} + \rho F_{<3>} &= 0,\end{aligned}\tag{2.4}$$

где L_1, L_2, L_3 – натуральные параметры, измеряемые вдоль взаимно ортогональных изостат, $F_{<1>}, F_{<2>}, F_{<3>}$ – физические компоненты поля массовых сил по отношению к локальному ортонормированному базису, связанному с изостатами,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{13}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{33}}, & \frac{1}{r_{23}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{33}}, \\ \frac{1}{r_{31}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{11}}, & \frac{1}{r_{32}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \ln \sqrt{g_{22}}, \\ \frac{1}{r_{12}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \ln \sqrt{g_{22}}, & \frac{1}{r_{21}} &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \ln \sqrt{g_{11}}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Заметим, что $r_{ij} \neq r_{ji}$.

Следует отметить, что изостатические сетки, использованные для формулировки уравнений (2.2) и (2.4) различны поскольку в первом случае $g_{12} \neq 0$, а во втором – недиагональные компоненты метрического тензора равны нулю.

Коэффициенты $1/r_{ij}$ в уравнениях (2.4) легко могут быть выражены через кривизны изостат в соответствующих локальных координатных плоскостях. Действительно, преобразуя уравнение равновесия

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \sigma_3) = \mathbf{0}$$

к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{l} \frac{\partial \sigma_1}{\partial l} + \mathbf{m} \frac{\partial \sigma_2}{\partial m} + \mathbf{n} \frac{\partial \sigma_3}{\partial n} + \sigma_1 [\mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + \sigma_2 [\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] + \\ + \sigma_3 [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] = \mathbf{0},\end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{l} &= \kappa_{32} + \kappa_{23}, & \nabla \cdot \mathbf{m} &= \kappa_{13} + \kappa_{31}, & \nabla \cdot \mathbf{n} &= \kappa_{12} + \kappa_{21}, \\ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{21},\end{aligned}$$

где κ_{ij} есть кривизна изостаты с номером i в локальной координатной плоскости перпендикулярной направлению j , находим

$$\frac{1}{r_{12}} = \kappa_{23}, \quad \frac{1}{r_{21}} = \kappa_{13}, \quad \frac{1}{r_{13}} = \kappa_{32}, \quad \frac{1}{r_{31}} = \kappa_{12}, \quad \frac{1}{r_{23}} = \kappa_{31}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \kappa_{21}.$$

Для напряженных состояний на ребре призмы Треска с максимальным третьим собственным значением и в случае отсутствия массовых сил уравнения Ламе приобретают весьма простой вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} - \frac{2k}{r_{13}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} - \frac{2k}{r_{23}} &= 0, \\ \frac{d\sigma_3}{dL_3} + \frac{2k}{r_{31}} + \frac{2k}{r_{32}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Чтобы преобразовать уравнения (2.6) к форме (2.2) достаточно воспользоваться (2.5).

В двумерном случае аналогом уравнений (2.4) являются уравнения Ламе-Максвелла [85]:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} &= 0, \\ \frac{d\sigma_2}{dL_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} &= 0,\end{aligned}\tag{2.7}$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против хода часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории

определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.7) приобретают вид соотношений

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dL_1} + \frac{2k}{\rho_2} &= 0, \\ \frac{d\sigma_1}{dL_2} + \frac{2k}{\rho_1} &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Заметим также, что двумерные дифференциальные уравнения равновесия вдоль линий наибольших касательных напряжений имеют вид [85]:

$$\begin{aligned}\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_1} - \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_2} + \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{R_1} &= 0, \\ \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_2} - \frac{d(\sigma_1 - \sigma_2)}{ds_1} - \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{R_2} &= 0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

где s_1, s_2 – натуральные параметры, измеряемые вдоль линий наибольших касательных напряжений, R_1, R_2 – радиусы кривизны, причем считается установленным сформулированное выше правило выбора знаков кривизн.

Ясно, что в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и уравнения (2.9) существенно упрощаются

$$\begin{aligned}\frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_1} + \frac{4k}{R_1} &= 0, \\ \frac{d(\sigma_1 + \sigma_2)}{ds_2} - \frac{4k}{R_2} &= 0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

и непосредственно приводят к интегралам Генки вдоль линий скольжения.

Обратимся теперь к уравнениям кинематики. Как было подчеркнуто выше в качестве таковых удобно взять уравнения совместности приращений полных главных деформаций, представленные в изостатической криволинейной сетке. Уравнения совместности деформаций пригодны при любой определяющей зависимости и в инвариантной форме представляются тензорным уравнением

$$\nabla \times \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

где тензор второго ранга \mathbf{P} есть транспонированный вихрь тензора полных деформаций (или приращения полных деформаций).

Согласно соотношениям ассоциированного закона течения приращение пластических деформаций есть тензор, соосный тензору напряжений, что оказывается, вообще говоря, неверным для приращения упругих деформаций. Ясно, поэтому, что преобразование уравнений совместности деформаций к главным осям напряжений проще всего осуществляется в том случае, когда упругими деформациями можно пренебречь. Заметим также, что при выводе уравнений совместности мы с самого начала не будем предполагать несжимаемость пластического деформирования, чтобы получить соотношения, пригодные и в случае учета анизотропной поврежденности (влияние анизотропной поврежденности проявляется, в частности, и в том, что пластическое течение становится сжимаемым).

С целью вывода уравнений сплошности рассмотрим сначала инвариантное представление этих уравнений для приращений главных деформаций (приращениями упругих деформаций будем пренебрегать, но откажемся от требования несжимаемости):

$$\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Замечая, что²⁷

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1) &= [(\nabla d\varepsilon_1) \times \mathbf{l}] \otimes \mathbf{l} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\Gamma_{11}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \Gamma_{11}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}) - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{12}^2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{13}^3 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

а также два аналогичных выражения

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2) &= [(\nabla d\varepsilon_2) \times \mathbf{m}] \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} (-\Gamma_{22}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \Gamma_{22}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{21}^1 \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \Gamma_{23}^3 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \right\} d\varepsilon_2, \end{aligned}$$

²⁷Для ортогональной криволинейной сетки мы определяем Γ -символы как коэффициенты в разложениях частных производных от **единичных** локальных базисных векторов \mathbf{i}_α :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{i}_\gamma,$$

где

$$|\mathbf{i}_\gamma| = 1.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3) &= [(\nabla d\varepsilon_3) \times \mathbf{n}] \otimes \mathbf{n} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} (\Gamma_{33}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} - \Gamma_{33}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{31}^1 \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{32}^2 \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \right\} d\varepsilon_3, \end{aligned}$$

матрицу тензора

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3))^T$$

в главных осях напряжений можно получить в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{r_{31}} & -d_2 d\varepsilon_1 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{r_{21}} \\ -d_3 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{r_{32}} & 0 & d_1 d\varepsilon_2 + \frac{d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1}{r_{12}} \\ d_2 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2}{r_{23}} & -d_1 d\varepsilon_3 + \frac{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{r_{13}} & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.12)$$

Здесь d_k обозначает производную

$$\frac{d}{dL_k} = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial \xi^k}. \quad (2.13)$$

(по k не суммировать ($k = 1, 2, 3$))

Таким образом, уравнения совместности есть

$$\nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0},$$

где вихрь тензора $d\mathbf{P}$ в главных осях тензора напряжений представляется матрицей (мы опускаем детали вывода и опускаем для краткости символ d в записи тензора $d\mathbf{P}$), элементы которой приводятся ниже:

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = d_2 P_{31} - d_3 P_{21} + \frac{1}{r_{23}} P_{31} - \frac{1}{r_{32}} P_{21} + \\ + \frac{1}{r_{13}} P_{23} - \frac{1}{r_{12}} P_{32},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2 P_{32} + \frac{1}{r_{23}} (P_{32} + P_{23}) + \frac{1}{r_{12}} P_{31},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = -d_3 P_{23} - \frac{1}{r_{32}} (P_{23} + P_{32}) - \frac{1}{r_{13}} P_{21},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1 P_{31} - \frac{1}{r_{13}} (P_{31} + P_{13}) - \frac{1}{r_{21}} P_{32},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_3 P_{12} - d_1 P_{32} + \frac{1}{r_{31}} P_{12} - \frac{1}{r_{13}} P_{32} + \\ + \frac{1}{r_{21}} P_{31} - \frac{1}{r_{23}} P_{13},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = d_3 P_{13} + \frac{1}{r_{31}} (P_{13} + P_{31}) + \frac{1}{r_{23}} P_{12},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 P_{21} + \frac{1}{r_{12}} (P_{21} + P_{12}) + \frac{1}{r_{31}} P_{23},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 P_{12} - \frac{1}{r_{21}} (P_{12} + P_{21}) - \frac{1}{r_{32}} P_{13},$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_1 P_{23} - d_2 P_{13} + \frac{1}{r_{12}} P_{23} - \frac{1}{r_{21}} P_{13} + \\ + \frac{1}{r_{32}} P_{12} - \frac{1}{r_{31}} P_{21}.$$

Подставляя элементы матрицы (2.12) в матрицу вихря тензора \mathbf{P} находим физические компоненты вихря тензора \mathbf{P} в форме:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = & d_2 d_2 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_2 + d_2 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - d_3 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] + \\
& + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \\
& + \kappa_{32} \kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32} \kappa_{23}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = & -d_2 d_1 d\varepsilon_3 + d_2 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_2 d\varepsilon_3 + \\
& + \kappa_{31} \kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{31} \kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{23} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = & -d_3 d_1 d\varepsilon_2 - d_3 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_2 - \\
& - \kappa_{23} \kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{32} \kappa_{21}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21} \kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = & -d_1 d_2 d\varepsilon_3 - d_1 [\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{13} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1 - \\
& - \kappa_{31} \kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13} \kappa_{32}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_{13} \kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = & d_1 d_1 d\varepsilon_3 + d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - d_1 [\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] + \\
& + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \\
& - \kappa_{32}^2(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{13} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{31} \kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = & -d_3 d_2 d\varepsilon_1 + d_3 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_3 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1 + \\
& + \kappa_{12} \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{12} \kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{31} \kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = & -d_1 d_3 d\varepsilon_2 + d_1 [\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_2 + \\
& + \kappa_{23} \kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \kappa_{23} \kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + \kappa_{23} \kappa_{12}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = & -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2 [\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{13} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1 - \\
& - \kappa_{12} \kappa_{13}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) - \kappa_{21} \kappa_{13}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \kappa_{13} \kappa_{21}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = & d_1 d_1 d\varepsilon_2 + d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 [\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - d_2 [\kappa_{13}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] + \\
& + \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{23}^2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\
& - \kappa_{13}^2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \kappa_{12} \kappa_{21}(d\varepsilon_1 - 2d\varepsilon_3 + d\varepsilon_2).
\end{aligned}$$

Равенство нулю всех приведенных выше компонент вихря тензора \mathbf{P} и дает условия совместности деформаций. Как известно, независимых уравнений должно быть шесть (т.к. тензор $\nabla \times \mathbf{P}$ симметричен).

Рассмотрим далее различные частные формы представлений условий сплошности деформаций.

Плоская, возможно сжимаемая, пластическая деформация. В случае плоской сжимаемой пластической деформации (при пренебрежимо малых упругих деформациях) матрица тензора \mathbf{P} в главных осях напряжений есть

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -d_2 d\varepsilon_1 + \frac{1}{r_{21}}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \\ 0 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 + \frac{1}{r_{12}}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.15)$$

Уравнение совместности в приращениях полных главных деформаций, поэтому, получаются как

$$d_1 P_{23} - d_2 P_{13} + \frac{1}{r_{12}} P_{23} - \frac{1}{r_{21}} P_{13} = 0, \quad (2.16)$$

или

$$\begin{aligned} d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 d_1 d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \left(d_1 \frac{1}{r_{12}} - d_2 \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{12}^2} - \frac{1}{r_{21}^2} \right) + \\ + \frac{1}{r_{12}} d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) + \frac{1}{r_{21}} d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая, что $r_{12} = \rho_2$, $r_{21} = -\rho_1$, получим также

$$\begin{aligned} d_2 d_2 d\varepsilon_1 + d_1 d_1 d\varepsilon_2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) \left(d_1 \frac{1}{\rho_2} + d_2 \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) + \\ + \frac{1}{\rho_2} d_1 (2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \frac{1}{\rho_1} d_2 (2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Пространственное несжимаемое пластическое течение при нагружениях вдоль грани призмы Треска. Для нагружений жесткопла-

стического тела вдоль грани (1.30) имеем $d\varepsilon_3 = 0$, $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$, следовательно матрица (2.12) приобретает вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{12} d\varepsilon_1 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ d_3 d\varepsilon_1 + 2\kappa_{21} d\varepsilon_1 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ \kappa_{31} d\varepsilon_1 & \kappa_{32} d\varepsilon_1 & 0 \end{array} \right\|. \quad (2.19)$$

Вихрь тензора \mathbf{P} при этом в главных осях напряжений имеет компоненты

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = -d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_2 (\kappa_{31} d\varepsilon_1) - d_3 (\kappa_{21} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + (\kappa_{31}^2 - 3\kappa_{32}\kappa_{23} - \kappa_{21}^2) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2 (\kappa_{32} d\varepsilon_1) - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} (\kappa_{32} - \kappa_{23}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = d_3 d_1 d\varepsilon_1 + 2d_3 (\kappa_{23} d\varepsilon_1) + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + 2\kappa_{21} (\kappa_{23} - \kappa_{32}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1 (\kappa_{31} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{32} (\kappa_{13} - \kappa_{31}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 (\kappa_{12} d\varepsilon_1) - d_1 (\kappa_{32} d\varepsilon_1) + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1 + \\ + (\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 + 2\kappa_{31}\kappa_{13}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = -d_3 d_2 d\varepsilon_1 - 2d_3 (\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1 + \\ + 2\kappa_{12} (\kappa_{31} - \kappa_{13}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 d_3 d\varepsilon_1 + d_1(\kappa_{21} d\varepsilon_1) + 2\kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - 2\kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_2 d_2 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_1 - 2d_1(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + 2d_2(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + 2(\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2) d\varepsilon_1,$$

или, пренебрегая квадратами кривизн для слабо искривленных траекторий главных напряжений,

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{11} = -d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_2(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - d_3(\kappa_{21} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{12} = d_2(\kappa_{32} d\varepsilon_1) - \kappa_{31} d_1 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{13} = d_3 d_1 d\varepsilon_1 + 2d_3(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + \kappa_{21} d_1 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{21} = -d_1(\kappa_{31} d\varepsilon_1) - \kappa_{32} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{22} = d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - d_1(\kappa_{32} d\varepsilon_1) + \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{23} = -d_3 d_2 d\varepsilon_1 - 2d_3(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{12} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{31} d_3 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{31} = d_1 d_3 d\varepsilon_1 + d_1(\kappa_{21} d\varepsilon_1) + 2\kappa_{23} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_1 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{32} = -d_2 d_3 d\varepsilon_1 - d_2(\kappa_{12} d\varepsilon_1) - 2\kappa_{13} d_3 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_2 d\varepsilon_1,$$

$$(\nabla \times \mathbf{P})_{33} = d_2 d_2 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_1 - 2d_1(\kappa_{23} d\varepsilon_1) + 2d_2(\kappa_{13} d\varepsilon_1) - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_1 + \\ + \kappa_{13} d_2 d\varepsilon_1 + \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1.$$

Плоское несжимаемое пластическое течение. В случае плоской несжимаемой пластической деформации при пренебрежимо малых упругих деформациях матрица (2.15) и уравнение совместности деформаций (2.18) соответственно приобретают форму

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -d_2 d\varepsilon_1 - 2\kappa_{13} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & +d_1 d\varepsilon_2 - 2\kappa_{23} d\varepsilon_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

$$(d_2 d_2 - d_1 d_1) d\varepsilon_1 - 2(d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2) d\varepsilon_1 - 3\kappa_2 d_1 d\varepsilon_1 - 3\kappa_1 d_2 d\varepsilon_1 = 0. \quad (2.21)$$

Пренебрегая в последнем уравнении квадратами кривизн линий главных напряжений, получим

$$(d_2 d_2 - d_1 d_1) d\varepsilon_1 - 2(d_1 \kappa_2 + d_2 \kappa_1) d\varepsilon_1 - 3\kappa_2 d_1 d\varepsilon_1 - 3\kappa_1 d_2 d\varepsilon_1 = 0. \quad (2.22)$$

VII.3. Учет анизотропной поврежденности

Мы по-прежнему будем рассматривать упругопластическое тело, подчиняющееся критерию текучести Треска, но предметом исследования будет являться учет анизотропного распределения поврежденности в основных уравнениях. Ограничимся простейшим вариантом: поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга \mathbf{D} , главные оси которого считаются коориентированными главным осям тензора напряжений.

Рассеянное поле микродефектов довольно сильно искажает картину деформирования, что часто требует отхода от классической евклидовой схемы (в частности, появляется дополнительная тензорная мера деформации третьего ранга в форме тензора кручения) и оперирования с несовместным полем деформаций (см., например, [64]). Ясно, что несовместность поля деформаций из-за присутствия рассеянного поля микродефектов проявляется как неоднородность (в форме тензора второго ранга) в уравнениях совместности (точнее несовместности) деформаций.

Подробное изложение этого круга вопросов заинтересованный читатель может найти в упомянутой выше книге [64], где достаточно подробно обсуждаются неевклидовы характеристики деформации и модификация уравнений совместности деформаций. Здесь мы лишь отметим, что вместо уравнения совместности деформаций (2.11) следует рассматривать уравнение с тензором несовместности в правой части:

$$\nabla \times d\mathbf{P} = d\boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – тензор расхождения Кренера, который выражается через тензор плотности дислокаций.

Микронапряжения χ_{ij} , обусловленные сопротивлением несовместности, определяется, как обычно, термодинамической производной

$$\chi_{ij} = \rho \frac{\partial \psi_D}{\partial \eta_{ij}}$$

и могут быть включены в определяющие зависимости согласно схеме, изложенной в монографии [61].

Несколько слов следует сказать и о постановке условий на границах зон локализации пластических деформаций и поврежденности. Традиционное для постановок задач математической теории пластичности условие непрерывности всех компонент тензора напряжений при переходе через границу локализованного пластического течения нуждается в особой проверке и может быть заменено более общим граничным условием [4].

Ключевой принцип, позволяющий сформулировать основные уравнения модели, состоит в использовании тензора эффективных напряжений вместо тензора истинных напряжений во всех определяющих зависимостях.

Сначала будем считать, что эффективные напряжения находятся на ребре призмы Треска и занумеруем главные оси так, чтобы третье главное эффективное напряжение было максимальным (или минимальным), а два других главных эффективных напряжения принимаются равными друг другу:

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} = \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = \frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k, \quad (3.1)$$

причем главные поврежденности D_1, D_2 также считаются равными (их общее значение обозначим через \tilde{D}).

Тензор напряжений тогда представляется в форме (ср. (1.3)):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \right) (1 - \tilde{D}) \delta_{ij} + \left[\left(1 - \frac{1 - \tilde{D}}{1 - D_3} \right) \sigma_3 \mp 2k(1 - \tilde{D}) \right] n_i n_j. \quad (3.2)$$

Уравнение равновесия имеет вид (ср. (1.5)):

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[(1 - \tilde{D}) \left(-1 + \frac{\Sigma}{1 - D_3} \right) \right] + \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} \left\{ \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \right] \right\} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где по-прежнему используется обозначение $\Sigma = \sigma_3 / (\mp 2k)$.

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\left(-\frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \right] - \\ - \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}) \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Более простые соотношения получаются в том случае, если поврежденность, соответствующая ориентациям \mathbf{l} и \mathbf{m} пренебрежимо мала. На основании

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \quad (3.5)$$

получим следующее представление напряжений:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\sigma_3}{1 - D_3} \pm 2k \right) \delta_{ij} + \left[\left(1 - \frac{1}{1 - D_3} \right) \sigma_3 \mp 2k \right] n_i n_j, \quad (3.6)$$

и уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\Sigma}{1-D_3} + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \left(1 - \frac{1}{1-D_3}\right) \Sigma \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} \left\{ \mathbf{n} \cdot \text{grad} \left[\left(1 - \frac{1}{1-D_3}\right) \Sigma \right] \right\} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + \left[\left(1 - \frac{1}{1-D_3}\right) \Sigma + 1 \right] (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\Sigma}{1-D_3} + \left[\left(1 - \frac{1}{1-D_3}\right) \Sigma + 1 \right] \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Наконец, изотропное по ориентациям распределение поврежденности, подразумевает соотношение

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k(1-D), \quad (3.9)$$

которое приводит к тензору напряжений вида

$$\sigma_{ij} = (\sigma_3 \pm 2k(1-D)) \delta_{ij} \mp 2k(1-D) n_i n_j, \quad (3.10)$$

и уравнению равновесия

$$\begin{aligned} \text{grad}(\Sigma - (1-D)) + (1-D) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{n} [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(1-D)] = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направление \mathbf{n} и на направление $\boldsymbol{\tau}$, ортогональное вектору \mathbf{n} , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} + (1-D)(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (\Sigma - (1-D)) + (1-D) \boldsymbol{\tau} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{n}] = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим теперь основные соотношения для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, уравнение которой в терминах эффективного напряжения имеет вид

$$\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_2}{1-D_2} = 2k. \quad (3.13)$$

Тензор напряжений в этом случае представим в форме:

$$\sigma_{ij} = \sigma_2 \delta_{ij} + 2k(1 - D_1) l_i l_j + \left(\frac{1 - D_1}{1 - D_2} - 1 \right) \sigma_2 l_i l_j + (\sigma_3 - \sigma_2) n_i n_j. \quad (3.14)$$

Уравнение равновесия, следовательно, может быть получено как

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\Sigma_3 - \Sigma_2) [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})] + \mathbf{n} [\mathbf{n} \cdot \nabla (\Sigma_3 - \Sigma_2)] + \\ + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l})] + \\ + \mathbf{l} \left\{ \mathbf{l} \cdot \nabla \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \right\} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Проектируя последнее уравнение соответственно на направления \mathbf{n} , \mathbf{l} , \mathbf{m} , находим:

$$\frac{\partial \Sigma_3}{\partial n} + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = 0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial l} + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] (\nabla \cdot \mathbf{l}) + \\ + \frac{\partial}{\partial l} \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] + \left[(1 - D_1) + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2 \right] \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] = 0. \quad (3.18)$$

Из полученных соотношений для грани призмы Треска непосредственно могут быть выведены основные уравнения пластического плоского деформированного состояния, на которое накладывается поле рассеянной поврежденности. Условие пластичности выражается уравнением (3.13).

Опуская детали вывода, приведем уравнение равновесия в случае плоского деформированного состояния

$$\omega [(1 \cdot \nabla)1 + 1(\nabla \cdot 1)] + 1[1 \cdot \nabla \omega] + \Sigma_2 [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m} + \mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{m})] + \mathbf{m}[\mathbf{m} \cdot \nabla \Sigma_2] = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\omega = 1 - D_1 + \frac{1 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2, \quad \Sigma_2 = \frac{\sigma_2}{2k}.$$

Ясно, что с помощью этого уравнения, имеющего инвариантную форму, без труда могут быть получены переформулировки для любой нужной координатной системы. Ясно, что наибольший интерес представляет уравнение (3.19), записанное в криволинейной координатной сетке изостат. С этой целью спроектируем уравнение (3.19) соответственно на главные направления $1, \mathbf{m}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial l} + \omega(\nabla \cdot 1) + \Sigma_2 1 \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}] &= 0, \\ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial m} + \Sigma_2(\nabla \cdot \mathbf{m}) + \omega \mathbf{m} \cdot [(1 \cdot \nabla)1] &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Пользуясь затем геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \nabla \cdot \mathbf{m}, \quad \kappa_2 = \nabla \cdot 1, \\ -\kappa_1 &= \mathbf{m} \cdot [(1 \cdot \nabla)1], \quad -\kappa_2 = 1 \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{m}], \end{aligned} \quad (3.21)$$

где κ_1, κ_2 – кривизны соответственно первого и второго семейства изостатических траекторий, уравнения (3.20) представим в форме, которая является обобщением уравнений (2.8) на случай пластической среды с рассеянными повреждениями (L_1, L_2 – натуральные параметры вдоль изостатических траекторий):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dL_1} - (\Sigma_2 - \omega)\kappa_2 &= 0, \\ \frac{d\Sigma_2}{dL_2} + (\Sigma_2 - \omega)\kappa_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ясно также, что кривизны изостатических траекторий κ_1, κ_2 выражаются (с учетом сформулированного правила знаков) через радиусы кривизны ρ_1, ρ_2 по формулам:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\rho_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_2}. \quad (3.23)$$

Отметим также следующие формулы:

$$\frac{1}{\rho_1} = d_2 \ln \frac{d\xi^1}{dL_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = -d_1 \ln \frac{d\xi^2}{dL_2}.$$

Нам осталось еще рассмотреть соотношения ассоциированного закона течения для тела с рассеянными повреждениями.

Начнем с соотношений для грани (3.13). Ассоциированный закон течения здесь имеет форму двух соотношений

$$d\varepsilon_1^P = \frac{d\lambda}{1 - D_1}, \quad d\varepsilon_2^P = -\frac{d\lambda}{1 - D_2}, \quad d\varepsilon_3^P = 0. \quad (3.24)$$

Множитель $d\lambda$ определяется из условия непрерывности

$$d \left(\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_2}{1 - D_2} \right) = 0,$$

которое в результате преобразований и с учетом уравнений роста повреждений, которые мы примем в достаточно общей форме,

$$dD_k = F_k(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \varepsilon_1^P, \varepsilon_2^P, \varepsilon_3^P, D_1, D_2, D_3) d\gamma \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.25)$$

где γ – длина траектории пластического деформирования

$$\gamma = \int \sqrt{d\varepsilon_j^P d\varepsilon_j^P}, \quad (3.26)$$

приводит к соотношению

$$d\lambda = \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)}{\sqrt{(1 - D_1)^2 + (1 - D_2)^2}} d\gamma,$$

или

$$d\lambda = \frac{(1 - D_1)(1 - D_2)}{\sqrt{(1 - D_1)^2 + (1 - D_2)^2}} \frac{(1 - D_1)d\sigma_2 - (1 - D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k [(1 - D_2)F_1 + (1 - D_1)F_2]}.$$

Ясно, что с помощью последнего соотношения уравнения ассоциированного закона течения для грани (3.24) могут быть представлены в форме

$$\begin{cases} (1 - D_1)d\varepsilon_1^P + (1 - D_2)d\varepsilon_2^P = 0, \\ d\varepsilon_1^P = \frac{1 - D_2}{\sqrt{(1 - D_1)^2 + (1 - D_2)^2}} \frac{(1 - D_1)d\sigma_2 - (1 - D_2)d\sigma_1}{\sigma_2 F_1 - \sigma_1 F_2 + 2k [(1 - D_2)F_1 + (1 - D_1)F_2]}, \\ d\varepsilon_3^P = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Таким образом, приращения пластической деформации однозначно определены.

Заметим, что пластическое течение при нагружениях на грани призмы Треска из-за влияния анизотропной поврежденности становится сжимемым.

Рассмотрим соотношения на ребре. Предположим, что ребро образовано пересечением граней

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_3}{1 - D_3} = 2k, \quad \frac{\sigma_2}{1 - D_2} - \frac{\sigma_3}{1 - D_3} = 2k. \quad (3.28)$$

Приращение полной главной деформации в соответствии с нумерацией функций текучести (1.25) тогда есть

$$d\varepsilon_k^P = d\varepsilon_k^{P(2)} + d\varepsilon_k^{P(3)},$$

где согласно ассоциированному закону течения

$$\begin{cases} (1 - D_2)d\varepsilon_2^{P(2)} + (1 - D_3)d\varepsilon_3^{P(2)} = 0, \\ d\varepsilon_2^{P(2)} = \frac{1 - D_3}{\sqrt{(1 - D_2)^2 + (1 - D_3)^2}} \frac{(1 - D_2)d\sigma_3 - (1 - D_3)d\sigma_2}{\sigma_3 F_2 - \sigma_2 F_3 + 2k [(1 - D_3)F_2 + (1 - D_2)F_3]}, \\ d\varepsilon_1^{P(2)} = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\begin{cases} (1 - D_1)d\varepsilon_1^{P(3)} + (1 - D_3)d\varepsilon_3^{P(3)} = 0, \\ d\varepsilon_1^{P(3)} = \frac{1 - D_3}{\sqrt{(1 - D_1)^2 + (1 - D_3)^2}} \frac{(1 - D_1)d\sigma_3 - (1 - D_3)d\sigma_1}{\sigma_3 F_1 - \sigma_1 F_3 + 2k [(1 - D_3)F_1 + (1 - D_1)F_3]}, \\ d\varepsilon_2^{P(3)} = 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Соотношения ассоциированного закона течения однозначно определяют все три приращения $d\varepsilon_1^P$, $d\varepsilon_2^P$, $d\varepsilon_3^P$. Действительно,

$$d\varepsilon_1^P = d\varepsilon_1^{P(3)}, \quad d\varepsilon_2^P = d\varepsilon_2^{P(2)}, \quad -d\varepsilon_3^P = \frac{1 - D_1}{1 - D_3} d\varepsilon_1^{P(3)} + \frac{1 - D_2}{1 - D_3} d\varepsilon_2^{P(2)},$$

где приращения $d\varepsilon_1^{P(3)}$, $d\varepsilon_2^{P(2)}$ в свою очередь однозначно определены (3.29), (3.30).

В двумерном случае полная система уравнений плоской пластической деформации включает два уравнения равновесия (3.22), условие пластичности (3.13), уравнение совместности (2.18) в формулировке, не исключающей возможную сжимаемость течения, два соотношения ассоциированного закона течения (3.27) и два уравнения (см. (3.25)), определяющих изменение главных поврежденностей D_1 , D_2 с возрастанием пластических деформаций. Всего имеется восемь уравнений для определения восьми неизвестных величин: двух главных напряжений σ_1 , σ_2 , двух приращений $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, двух главных поврежденностей D_1 , D_2 , и двух уравнений определяющих преобразование декартовых координат в изостатические координаты. Ясно, что определение напряжений не может быть проведено независимо от поврежденности и поля деформаций. Плоская задача в принципе статически неопределима.

Укажем далее случаи, когда соотношения вдоль изостат могут быть точно проинтегрированы.

VII.4. Инварианты плоской и пространственной связанной (пластичность-поврежденность) задачи

Ниже приводятся инварианты плоской и пространственной связанной задачи, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений.

Все инварианты непосредственно находятся из уравнений равновесия (3.4), (3.8), (3.12) и (3.22), сформулированных в проекциях на главные оси напряжений, при условии (для трехмерных уравнений) расслоенности векторного поля \mathbf{n} .

1. Пространственная задача (ребро (3.1), две различных главных поврежденности). При условии, что Σ , \tilde{D} , D_3 не изменяются на слое векторного поля \mathbf{n} , величина

$$I = \Sigma - \ln \sqrt{g_{33}} = \Sigma + \ln \frac{d\xi^3}{dL_3} \quad (4.1)$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение

$$d_3 \Sigma = \Gamma d_3 \left(\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln \frac{d\xi^2}{dL_2} \right), \quad (4.2)$$

где

$$\Gamma = \left(\frac{\Sigma}{1 - \tilde{D}} - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1 \right) (1 - \tilde{D}).$$

2. Пространственная задача (ребро (3.5), одноосная поврежденность). При условии, что Σ , D_3 не изменяются на слое векторного поля \mathbf{n} , величина (4.1) является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение (4.2), в котором следует считать

$$\Gamma = \Sigma - \frac{\Sigma}{1 - D_3} + 1.$$

3. Пространственная задача (ребро (3.9), изотропная поврежденность). При условии, что поврежденность D не изменяются на слое векторного поля \mathbf{n} , величина

$$I = \frac{\Sigma}{1 - D} + \ln \frac{d\xi^3}{dL_3} \quad (4.3)$$

является инвариантом на указанном слое.

Вдоль векторной линии поля \mathbf{n} имеем соотношение

$$d_3 \Sigma = (1 - D) d_3 \left(\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} + \ln \frac{d\xi^2}{dL_2} \right). \quad (4.4)$$

4. Плоская пластическая деформация (условие пластичности (3.13), двумерное распределение поврежденности). В случае, когда Σ_2 не изменяется вдоль изостат первого семейства отношение

$$I_1 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\frac{d\xi^2}{dL_2}} \quad (4.5)$$

также не изменяется вдоль изостат первого семейства.

В случае, когда ω не изменяется вдоль изостат второго семейства отношение

$$I_2 = \frac{\omega - \Sigma_2}{\frac{d\xi^1}{dL_1}} \quad (4.6)$$

также не изменяется вдоль изостат второго семейства.

Заметим также, что

$$\ln \frac{d\xi^1}{dL_1} = \int \frac{dL_2}{\rho_1}, \quad -\ln \frac{d\xi^2}{dL_2} = \int \frac{dL_1}{\rho_2}. \quad (4.7)$$

И в первом и во втором случае ξ^1, ξ^2 есть аналоги канонических переменных, введенных в [73] посредством преобразования

$$x_1 = x_1(\xi^1, \xi^2), \quad x_2 = x_2(\xi^1, \xi^2)$$

области пластического течения, не изменяющего площади любого элемента пластической зоны.

Общие соотношения вдоль линий главных напряжений для первых из трех перечисленных выше случаев имеют следующий вид:

$$\begin{cases} d_3\Sigma + \Gamma(d_1\vartheta_{12} + d_2\vartheta_{21}) = 0, \\ d_1(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{31} = 0, \\ d_2(\Gamma - \Sigma) + \Gamma d_3\vartheta_{32} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь ϑ_{ik} – угол между касательной к проекции изостаты с номером i на плоскость, нормальную изостате с номером k , и фиксированным направлением в этой плоскости.

Для напряженного состояния, соответствующего грани (3.13), общие соотношения вдоль линий главных напряжений есть

$$\begin{cases} d_3 \Sigma_3 + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(d_1 \vartheta_{12} + d_2 \vartheta_{21}) - \Gamma d_1 \vartheta_{12} = 0, \\ d_1(\Gamma + \Sigma_2) - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3 \vartheta_{32} + \Gamma(d_3 \vartheta_{32} + d_2 \vartheta_{23}) = 0, \\ d_2 \Sigma_2 - (\Sigma_3 - \Sigma_2)d_3 \vartheta_{31} - \Gamma d_1 \vartheta_{13} = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где

$$\Gamma = 1 - D_1 + \frac{D_2 - D_1}{1 - D_2} \Sigma_2.$$

Заключение

Сформулируем основные выводы о наиболее существенных результатах, полученных в настоящей работе.

1. Предложен алгоритм построения тензорных мер анизотропной поврежденности, исходя из распределения микродефектов по ориентациям. Алгоритм позволяет вывести тензор поврежденности заданного ранга непосредственно из известного, или полученного экспериментально, распределения поврежденности по ориентациям. Методы и результаты, приведенные в работе могут быть применены к анализу любой физической величины непрерывно, или кусочно-непрерывно, распределенной по ориентациям.

2. Дана механическая интерпретация собственных элементов (главных направлений и спектра поврежденности) тензора поврежденности. Понятие о спектре трехмерной анизотропной поврежденности распространено вплоть до бесконечного (счетного) дискретного спектра.

3. Показано, что тензоры поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения тонкой структуры поврежденного состояния и получены формулы для непосредственного вычисления компонент тензора поврежденности, ориентации его главных осей и спектра, исходя из ориентационного распределения поврежденности.

4. Представление поврежденности с помощью бесконечной последовательности коэффициентов ряда Фурье – **гармоническое описание поврежденности** – является важной альтернативой традиционному тензорному описанию, а в случае недетерминированного распределения поврежденности по ориентациям – единственной работоспособной схемой исследования.

5. Установлено соответствие между тензорным и гармоническим представлениями ориентационного распределения поврежденности.

6. С помощью быстро сходящихся рядов Фурье по обратной амплитуде выполнен численный анализ усредненной по ориентациям поврежденности в зависимости от состава спектра поврежденности. Вычислен разброс средней поврежденности, обусловленный вкладом недиагональных поврежденностей.

Получены эффективные при численном анализе поврежденности формулы для вычисления средней поврежденности в случае узкополосных и вырожденных обратных амплитудных спектров поврежденности. Приво-

дится техника расчета осесимметричной и двумерной поврежденности.

7. Вводятся понятия об амплитудном и обратном амплитудном спектрах поврежденности, которые позволяют дать первичную классификацию анизотропии состояний поврежденности.

8. Установлено, что усредненные по всем ориентациям в пространстве значения анизотропного распределения поврежденности обладают одним важным экстремальным свойством: средняя сплошность (отнесенная к максимальной главной сплошности) стремится принять наибольшее значение при выравнивании элементов спектра поврежденности, т.е. при эволюции к изотропному распределению.

9. Разработана общая термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах, сформулированная на основе канонической трансформации скрытых переменных состояния, которая позволяет привести к каноническому виду выражения для внутренней энергии и энтропии в стадии соответственно значительной деградации внутренней энергии и существенного роста энтропии вследствие накопления поврежденности. Получены канонические представления внутренней энергии, энтропии и всех важнейших термодинамических потенциалов состояния.

10. Найден один из вариантов канонического описания анизотропного состояния поврежденности, который дает возможность трактовать канонические скрытые переменные состояния как коэффициенты Фурье канонического ориентационного распределения сплошности, и непосредственно использовать все преимущества гармонического представления поврежденности. Указанный вариант канонического описания поврежденности не только позволяет дать формальное определение ориентационной поврежденности, но и установить соответствие между канонической термодинамической нормой и усредненной по ориентациям поврежденностью.

11. С помощью принципа термодинамической ортогональности в терминах канонических переменных состояния получены связанные уравнения накопления повреждений, учитывающие взаимодействия необратимых деформаций и поврежденности (в связках пластическая деформация – поврежденность, ползучесть – поврежденность).

12. Найден набор точных интегралов квазилинейных уравнений накопления повреждений в их каноническом варианте. Интегралы уравнений накопления повреждений имеют форму отношения степеней от линейных комбинаций компонент канонического тензора поврежденности. Эти интегралы являются аналогами законов сохранения и выражают баланс поврежденно-

стей (точнее некоторых дробно-степенных комбинаций поврежденностей, которые мы называем инвариантными отношениями) в процессе их развития.

Существование инвариантных отношений значительно облегчает анализ процесса накопления повреждений, развивающегося параллельно с накоплением необратимой деформации в условиях, например атермической пластичности или изотермической ползучести. Найдена одна общая оценка времени до разрушения, которая может быть получена с помощью инвариантных отношений для весьма общей формулировке закона роста повреждений.

13. Дан общий термодинамический анализ основных процессов развития повреждений в твердых телах. Отдельно рассмотрено развитие хрупкой поврежденности в упругом теле. Изучено влияние пластической деформации на поврежденность преимущественно хрупкого типа. Изучен термодинамический аспект такой интересной проблемы, как оценка поврежденности, вызванной освобождением скрытой свободной энергии микронапряжений в пределах локализованной пластической зоны.

14. Локализация необратимых деформаций и поврежденности в областях пластического течения может существенно влиять на состояние трещин. Исследовано влияние очага локализации пластических деформаций и поврежденности, удаленного от кончика трещины нормального отрыва, на трещину в условиях плоского напряженного состояния. Показано, что удаленно локализованная поврежденность может стабилизировать докритическое состояние трещины нормального отрыва.

15. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности (упругопластическое тело с рассеянными повреждениями при условии пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения). Все статические и кинематические уравнения, соотношения ассоциированного закона течения приводятся в физических компонентах по отношению к локальному базису, связанному с линиями главных напряжений. Выведены также статические и кинематические соотношения связанной задачи вдоль траекторий главных напряжений, которые представлены в приращениях, взятых при изменении положения вдоль траекторий главных напряжений, что исключительно удобно при численной реализации предлагаемой схемы.

16. При условии расслоенности поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напря-

жению, найдены такие канонические криволинейные координаты, при преобразовании к которым уравнения равновесия, сформулированные для ребра поверхности текучести приводятся к трем уравнениям, допускающим при некоторых ограничениях точные интегралы. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения при продвижении вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями и устанавливающие баланс главных напряжений, повреждений и кривизн линий главных напряжений. В плоской задаче указанные инварианты имеют форму отношений, не изменяющих значений вдоль траектории главного напряжения.

17. Выведены кинематические уравнения течения в криволинейной сетке линий главных напряжений, в том числе и с учетом возможной сжимаемости пластического течения и несовместности поля деформаций, обусловленного влиянием поля повреждений. Получены соотношения для главных скоростей пластических деформаций вдоль линий главных напряжений в среде с повреждениями.

Литература

- [1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [2] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [3] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
- [4] Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Об условиях на границах раздела в упругопластических телах//ДАН Армении. 1990. Т. 91. No. 1. С. 35-39.
- [5] Астафьев В. И. О росте трещин при ползучести с учетом пластической зоны вблизи вершины трещины//ПМТФ. 1979. No. 6. С. 154-158.
- [6] Астафьев В. И. Закономерности подрастания трещин в условиях ползучести//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1986. No. 1. С. 127-134.
- [7] Астафьев В. И., Григорова Т. В., Пастухов В. А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести//ФХММ. 1992. Т. 28. No. 1. С. 5-11.
- [8] Астафьев В. И., Григорова Т. В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. No. 3. С. 160-166.
- [9] Астафьев В. И., Ширяева Л. К. Накопление поврежденности в металлах в условиях коррозионного растрескивания под напряжением//Известия РАН. Мех. тверд. тела. 1997. No. 3. С. 111-119.
- [10] Астафьев В. И., Ширяева Л. К. Накопление поврежденности и коррозионное растрескивание металлов под напряжением. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1998. 124 с.

- [11] Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. Задача о разгрузке для трещины Дагдейла//Вестник Самарского гос. университета²⁸. 1997. No. 4(6). С. 103-114.
- [12] Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения двух материалов: Препринт/Институт проблем механики РАН. М., 1998. No. 620. 24 с.
- [13] Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель трещины-расслоения с областями пластического течения и разупрочнения вблизи вершины на границе соединения двух материалов: Препринт/Институт проблем механики РАН. М., 1999. No. 638. 40 с.
- [14] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные задачи//Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 434-444.
- [15] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах//Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 706-721.
- [16] Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин//Прикл. матем. и механика. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 893-900.
- [17] Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [18] Большанина М. А., Панин В. Е. Скрытая энергия деформации/Сб. статей: Исследования по физике твердого тела. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 193-234.
- [19] Вакуленко А. А., Качанов М. Л. Континуальная модель среды с трещинами//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1971. No. 4. С. 159-166.

²⁸Вестник Самарского гос. университета – регулярное научное издание Самарского государственного университета, которое доступно как в печатной, так и в электронной форме. Электронная версия журнала находится на сервере Самарского государственного университета по адресу: <http://www.ssu.samara.ru/science/vestnik>

- [20] Вакуленко А. А., Морозов Н. Ф., Проскура А. В. Определение скорости распространения трещин//ФХММ. 1993. Вып. 3. С. 137-140.
- [21] Вакуленко А. А., Морозов Н. Ф., Проскура А. В. Расчет времени задержки разрушения/Исследования по упругости и пластичности. Механика разрушения. Теория и эксперимент. N17. 1995. С. 19-22.
- [22] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965. 588 с.
- [23] де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
- [24] Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80-101.
- [25] Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
- [26] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина со связями на границе раздела материалов: Препринт/Институт проблем механики РАН. М., 1996. No. 568. 72 с.
- [27] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейным взаимодействием берегов: Препринт/Институт проблем механики РАН. М., 1998. No. 619. 48 с.
- [28] Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование зарождения дефектов на границе раздела материалов: Препринт/Институт проблем механики РАН. М., 1999. No. 648. 21 с.
- [29] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
- [30] Зайцев Ю. В. Механика разрушения для строителей. М.: Высш. школа, 1991. 288 с.
- [31] Гиббс Дж. В. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.

- [32] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.: Гостехиздат, 1948.
- [33] Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучих сред//Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90-96.
- [34] Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях//Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, No. 3. С. 546-549.
- [35] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
- [36] Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля//Прикл. матем. и механика. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201-224.
- [37] Ишлинский А. Ю. Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел//Изв. АН СССР. ОН. 1945. No. 3. С. 250-260.
- [38] Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением//Украинский математический журнал. 1954. Т. 6. No. 3. С. 314-325.
- [39] Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения//Прикл. матем. и механика. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 78-89.
- [40] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести//Изв. АН СССР. ОН. 1958. No. 8. С. 26-31.
- [41] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
- [42] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
- [43] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 507 с.
- [44] Киялбаев Д. А., Чудновский А. И. К вопросу о характеристиках разрушений. Механика стержневых систем и сплошных сред/Тр. Ленинградского инж. строительного института. 1969. No. 10. С. 32-34.

- [45] Киялбаев Д. А., Чебанов В. М., Чудновский А. И. Вязкое разрушение при переменных температурах и напряжениях//Проблемы механики деформируемого твердого тела. Л.: Судостроение, 1970. С. 217-222.
- [46] Койтер В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 78 с.
- [47] Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. Численные методы в инженерных исследованиях. Киев: Высш. школа, 1986. 263 с.
- [48] Кукуджанов В. Н. Способ расчета эффективных характеристик пористых нелинейно-упругих материалов при конечных деформациях//IX Конференция по прочности и пластичности. Москва, 22-26 января 1996. Труды конференции. Т. 2. М., 1996. С. 118-125.
- [49] Кунин И. А. Теория дислокаций/В книге: Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 373-443.
- [50] Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
- [51] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [52] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 584 с.
- [53] Леви М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 20-23.
- [54] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 492 с.
- [55] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [56] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [57] Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности//Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. No. 4. С. 93-110.

- [58] Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1954. 648 с.
- [59] Новожилов В. В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений//Прикл. матем. и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 394-400.
- [60] Новожилов В. В. О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения/В книге: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С. 349-359.
- [61] Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
- [62] Новожилов В. В. Вопросы механики сплошной среды. Л.: Судостроение, 1989. 400 с.
- [63] Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминев В. Н. Теория ползучести и длительной прочности металлов. М.: Металлургиздат, 1959. 488 с.
- [64] Онами М., Ивасимидзу С. и др. Введение в микромеханику. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
- [65] Поздеев А. А., Трусков П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М: Наука, 1986. 232 с.
- [66] Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 398 с.
- [67] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [68] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 3//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 9-445.
- [69] Пуанкаре А. Об одной геометрической теореме//В кн.: Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 775-807.

- [70] Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения/Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5-7.
- [71] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [72] Работнов Ю. Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
- [73] Радаев Ю. Н. Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1988. No. 6. С. 69-75.
- [74] Радаев Ю. Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. No. 1. С. 86-94.
- [75] Радаев Ю. Н. Пластическое течение четвертьплоскости под действием плоского штампа//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1992. No. 2. С. 93-100.
- [76] Радаев Ю. Н. Термодинамическая модель накопления анизотропной поврежденности в твердых телах//IX Конференция по прочности и пластичности. Москва, 22-26 января 1996. Труды конференции. Т. 2. М., 1996. С. 148-153.
- [77] Радаев Ю. Н. Задачи и теоремы по курсу "Математическая теория пластичности". Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1996. 80 с.
- [78] Радаев Ю. Н. Теория конечных деформаций сплошных сред. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 1997. 103 с.
- [79] Радаев Ю. Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности//Вестник Самарского гос. университета. 1998. No. 2(8). С. 79-105.
- [80] Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. О влиянии удаленной локализованной пластической зоны на раскрытие трещины нормального от-

рыва//Вестник Самарского гос. технического университета²⁹. 1999. Вып. 7, серия "Физико-математические науки". С. 70-85.

- [81] Радаев Ю. Н. Точное усреднение тонкой структуры поврежденности//Вестник Самарского гос. университета. 1999. No. 2(12). С. 71-96.
- [82] Разрушение. Т. 2 (под ред. Г. Либовица). М.: Мир, 1975. 768 с.
- [83] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
- [84] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
- [85] Фрохт М. М. Фотоупругость. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений. Т. I. М., Л.: Гостехтеориздат, 1948. 432 с.
- [86] Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах//Сб. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 41-56.
- [87] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 480 с.
- [88] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [89] Чудновский А. И. О разрушении макротел/Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1973. No. 9. С. 3-40.
- [90] Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести//Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1984. No. 3. С. 126-141.
- [91] Шестериков С. А., Лебедев С. Ю., Юмашева М. А. Новые функциональные соотношения для описания процессов ползучести и длительной прочности//IX Конференция по прочности и пластичности.

²⁹Вестник Самарского гос. технического университета – регулярное научное издание Самарского государственного технического университета, которое доступно как в печатной, так и в электронной форме. Электронная версия журнала находится на сервере Самарского гос. технического университета по адресу: <http://www.star.sstu.samara.ru>

Москва, 22-26 января 1996. Труды конференции. Т. 3. М., 1996. С. 130-134.

- [92] Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Л.: Гостехтеориздат, 1949. 272 с.
- [93] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 316 с.
- [94] Barenblatt G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture//Adv. Appl. Mech. 1962. V. 7. P. 55-129.
- [95] Betten J. Damage tensors in continuum mechanics//J. de Mecanique Theorique et Appliquee. 1983. V. 2. No. 1. P. 13-32.
- [96] Betten J. Applications of tensor functions in continuum damage mechanics//Int. J. Damage Mechanics. 1992. V. 1. No. 1. P. 47-59.
- [97] Brillouin L. Tensors in Mechanics and Elasticity. New York, London: Academic Press, 1964. 478 pp.
- [98] Budiansky B., O'Connell R. J. Elastic moduli of a cracked solid//Int. J. Solids and Structures. 1976. V. 12. P. 81-97.
- [99] Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicist. Berlin, Gottingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1954. 355 pp.
- [100] Cailletaud G., Chaboche J. L. On the calculation of structures in cyclic plasticity or viscoplasticity//Computers and Structures. 1986. V. 23. P. 23-31.
- [101] Chaboche J. L. Le Concept de Contrainte Effective Applique a l'Elasticite et a la Viscoplasticite en Presence d'un Endommagement Anisotrope/Colloque Euromech 115, Villard de Lans, June.
- [102] Chaboche J. L. Continuum damage mechanics: Part I – General concepts //J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 59-64.
- [103] Chaboche J. L. Continuum damage mechanics: Part II – Damage growth, crack initiation, and crack growth//J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 65-72.

- [104] Chow C. L., Wang J. Ductile fracture characterization with the anisotropic continuum damage theory//Eng. Fracture Mech. 1988. V. 30. P. 547-563.
- [105] Ciancio V., Verhas J. On the representation of dynamic degrees of freedom//J. Non-Equilib. Thermodyn. 1993. V. 18. P. 39-50.
- [106] Cocks A. C. F., Ashby M. F. The growth of dominant crack in a creeping material//Scr. Metall. 1982. V. 16. P. 109-114.
- [107] Coleman B. D., Gurtin M. Thermodynamics with internal variables//J. Chem. Phys. 1967. V. 47. P. 597-613.
- [108] Cordebois J. P., Sidoroff F. Anisotropic damage in elasticity and plasticity//J. de Mecanique Theorique et Appliquee. 1982. Numero Special. P. 45-60.
- [109] Craggs J. W. Characteristic surfaces in ideal plasticity in three dimensions//Quart. J. Mech. Appl. Math. 1945. V. 7. No. 1. P. 35-31.
- [110] Davison L., Stevens A. L. Thermodynamic constitution of spalling elastic bodies//J. Appl. Phys. 1973. V. 44. P. 668-674.
- [111] De Groot S. R., Mazur P. Non-Equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962.
- [112] Dragon A., Mroz Z. A continuum model for plastic brittle behavior of rock and concrete//Int. J. Eng. Sci. 1979. V. 17. No. 2, P. 121-137.
- [113] Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits//J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. No. 2. P. 100-104.
- [114] Epstein M., Maugin G. A. Notions of Material Uniformity and Homogeneity/Theoretical and Applied Mechanics 1996. Proc. XIXth Int. Congress of Theoretical and Appl. Mechanics, Kyoto, Japan. Elsevier, 1997. P. 201-215.
- [115] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. Vol. I, II, Vol. III. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1953, 1955. 302 pp., 396 pp., 292 pp.

- [116] Ericksen J. L. Singular surfaces in plasticity//J. Math. Physics. 1955. V. 34. No. 1. P. 74-79.
- [117] Ericksen J. L. Tensor Fields/Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 794-858.
- [118] Germain P., Nguyen Q. S., Suquet P. Continuum thermodynamics//J. Appl. Mech. 1983. V. 50. P. 1010-1020.
- [119] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of Integrals, Series and Products. New York, London: Academic Press, 1965. 1086 pp.
- [120] Gyarmati I. Non-Equilibrium Thermodynamics. Berlin: Springer, 1970 pp.
- [121] Hallbauer D. K., Wagner H., Cook N. G. Some observations concerning the microscopic and mechanical behavior of quartzite specimens in stiff, triaxial compression tests//Int. J. Rock Mech. Sci. Geomech. Abstr. 1973. V. 10. P. 713-726.
- [122] Hanh G. T., Rosenfield A. R. Local yielding and extension of crack under plane stress//Acta Met. 1969. V. 13. P. 292-306.
- [123] Hayhurst D. R. Creep rupture under multi-axial state of stress//J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20. P. 381-390.
- [124] Hayhurst D. R., Brown P. R., Morrison C. J. The role of continuum damage in creep crack growth//Phyl. Trans. Roy. Soc., London. 1984. V. A311. P. 131-158.
- [125] Hayhurst D. R., Dimmer P. R., Chernuka M. W. Estimates of the creep rupture lifetime of structures using finite element method//J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 335-355.
- [126] Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge: Cambridge University Press, 1955. 500 pp.
- [127] Horii H., Nemat-Nasser S. Overall moduli of solids with microcracks: load-induced anisotropy//J. Mech. and Phys. of Solids. 1983. V. 31. P. 155-171.

- [128] Hui C. Y., Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions//Int. J. of Fracture. V. 17. P. 409-425.
- [129] Hult J. Creep in Continua and Structures/Topics in Applied Continuum Mechanics. Ed. by J.L.Zeman and F.Ziegler. Vienna: Springer, 1974. P. 137-155.
- [130] Hutchinson J. W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material tip//J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13-31.
- [131] Janson J. Dugdale-crack in a material with continuous damage formation//Eng. Fract. Mech. 1977. V. 9. P. 891-899.
- [132] Jenne W. Raumliche Spannungsverteilungen in festen Korpern bei plastischer Deformation//ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18-44.
- [133] Ju J. W. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects//Int. J. Solids Structures. 1989. V. 25. P. 803-833.
- [134] Ju J. W. Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics//J. Engineering Mechanics. 1990. V. 116. No. 12. P. 2764-2770.
- [135] Kachanov L. M. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht, Boston: Martinus Nijhoff, 1986. 135 pp.
- [136] Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts//Appl. Mech. Rev. 1992. V. 45. P. 304-335.
- [137] Kanatani K. Distribution of directional data and fabric tensors//Int. J. Eng. Sci. 1984. V. 22. No. 2. P. 149-164.
- [138] Kestin J. Local-Equilibrium Formalism Applied to Mechanics of Solids//Int. J. Solids Structures. 1992. V. 29. P. 1827-1836.
- [139] Koiter W. T. General theorems for elastic-plastic solids/Progress in Solid Mechanics. Eds. I. N. Sneddon and R. Hill. Amsterdam: North-Holland, 1960. P. 167-221.

- [140] Konig J. A. Shakedown of Elastic-Plastic Structures. Amsterdam: Elsevier, 1987.
- [141] Krajcinovic D., Fonseka G. U. The continuous damage theory of brittle materials. Part I: General theory//J. Appl. Mech. 1981. V. 48. No. 4. P. 809-815.
- [142] Krajcinovic D. Constitutive equations for damaging materials//J. Appl. Mech. 1983. V. 50. P. 355-360.
- [143] Krajcinovic D. Damage mechanics//Mech. Materials. V. 8, 1989. P. 117-197.
- [144] Krajcinovic D. Damage Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1996. 762 pp.
- [145] Kubo S., Ohji K., Ogura K. An analysis of creep crack propagation on the basis of the plastic singular stress field//Eng. Frac. Mech. 1979. V. 11. P. 315-329.
- [146] Kukudzanov V. N. A Numerical Method for Solution of Nonsteady Elasticviscoplastic Problems at Large Strains/In: Finite Inelastic Deformation – Theory and Applications (Eds. D. Besdo, E. Stein). IUTAM Symposium. Hannover (Germany). 1991. P. 289-298.
- [147] Lee E. H. Some comments on elastic-plastic analysis//Int. J. Solids Structures. V. 17. 1981. P. 859-872.
- [148] Lemaitre J. Continuum damage mechanics model for ductile fracture//J. Eng. Materials and Technology. 1985. V. 107. P. 83-89.
- [149] Lemaitre J. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations//Comp. Math. Appl. Mech. and Engrn. 1985. V. 51. P. 31-49.
- [150] Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 210 pp.
- [151] Lemaitre J., Chaboche J. L. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement//J. de Mechanique Appliquee. 1978. V. 2. P. 317-365.

- [152] Lemaitre J., Chaboche J. L. *Mechanics of Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [153] Lippman H. Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation//*J. Mech. Phys. Solids*. 1962. V. 10. No. 2. P. 111-122.
- [154] Lippman H. Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow//*J. Mech. Phys. Solids*. 1965. V. 13. No. 1. P. 29-39.
- [155] Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1944. 643 pp.
- [156] Lubarda V. A., Lee E. H. A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance//*Trans. ASME. J. Applied Mech.* V. 48. 1981. P. 35-40.
- [157] Lubarda V. A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution//*Int. J. Solids Structures*. 1993. V. 30. No. 20. P. 2859-2877.
- [158] Lu T. J., Chow C. L. On constitutive equations of inelastic solids with anisotropic damage//*Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. V. 14. 1990. P. 187-218.
- [159] MacRobert T. M. *Spherical Harmonics*. Oxford, London, New York: Pergamon Press, 1967. 345 p.
- [160] Maugin G. A. Internal variables and dissipative structures//*J. Non-Equilib. Thermodyn.* 1990. V. 15. P. 173-192.
- [161] Maugin G. A. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992. 350 pp.
- [162] Maugin G. A. Material forces: Concepts and applications//*ASME. Appl. Mech. Rev.* 1995. V. 48. No. 5. P. 213-245.
- [163] Maugin G. A. Thermomechanics of inhomogeneous-heterogeneous systems: application to irreversible progress of two- and three-dimensional defects//*ARI*. 1997. V. 50. P. 41-56.
- [164] Maugin G. A. On shock waves and phase-transition fronts in continua//*ARI*. 1998. V. 50. P. 141-150.

- [165] Mou Y., Han R. P. S. Damage zones based on Dugdale model model for materials//Int. J. Fract. 1995. V. 68. P. 245.
- [166] Mou Y., Han R. P. S. Damage zones in strain-hardening materials//Mech. Materials. 1996. V. 2. P. 131-147.
- [167] Mroz Z. Hardening and degradation rule for metals under monotonic and cycling loading//J. of Engn. Material Technology, Trans. of the ASME. 1983. V. 105. P.113-119.
- [168] Murakami S. Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory//J. Engineering Materials and Technology. 1983. V. 105. P. 99-105.
- [169] Murakami S., Ohno N. A Continuum Theory of Creep and Creep Damage/Creep in Structures. Eds. A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst. Berlin: Springer-Verlag, 1981. P. 422-444.
- [170] Murakami S. Anisotropic Aspects of Material Damage and Application of Continuum Damage Mechanics/Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications. Eds. D. Krajcinovic and J. Lemaitre. Wien: Springer-Verlag, 1987. P. 91-133.
- [171] Murakami S. Mechanical modeling of material damage//J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 2. P.280-286.
- [172] Neilsen M. K., Schreyer H. L. Bifurcations in elastic-damaging materials/Damage Mechanics and Localization. Eds. J. W. Ju and K. C. Valanis. ASME, AMD. 1992. V. 34. P. 109-123.
- [173] Onat E. T. Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids//Int. J. Engng. Sci. 1984. V. 22. No. 8-10. P. 1013-1021.
- [174] Onat E. T., Leckie F. A. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure//J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 1. P. 1-10.
- [175] Radayev Y. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics//Trans. Japan Soc. Mech. Engn. 1994. V. 60A. No. 580. P. 68-76.

- [176] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part I. Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State//J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. V. 21. No. 2. P. 129-152.
- [177] Radayev Y. N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth. Part II. Canonical Damage Growth Rate Equations and Theory of Damage Invariants//J. Non-Equilib. Thermodyn. 1996. V. 21. No. 3. P. 197-222.
- [178] Radayev Y. N. On the Crack Opening Displacement in a Cracked Sheet After a Loading-Unloading Cycle//Proc. 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics. August 17-20, 1998. Shanghai: Shanghai University Press, 1998. P. 347-352.
- [179] Radayev Y. N. On the Thermodynamics of Three-Dimensional Anisotropic Damage State in Solids/32nd Solid Mechanics Conference. Volume of Abstracts. Zakopane, 1998. P. 313-314.
- [180] Radayev Y. N. Constitutive Models of Anisotropic Damage Growth and Modeling of Damaging Processes in Solids//Proc. 1st Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics, Victoria, B. C., Canada, June 16-20, 1999. V. 1. P. 294-303.
- [181] Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material//J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 32-48.
- [182] Riedel H. The extension of a macroscopic crack at elevated temperature by the coalescence of microvoids/In: Creep Structures: Proc. 3rd Symp. Leicester. 1980. Berlin: Springer, 1981. P. 504-519.
- [183] Riedel H. Fracture at High Temperature. Berlin: Springer, 1987. 418 pp.
- [184] Riedel H., Rice J. R. Tensile crack in creeping solids//ASTM STP 7000. 1980. P. 112-130.
- [185] Schield R. T. On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry//Proc. Roy. Soc. Lond. 1955. V. A233. No. 1193. P. 267-287.

- [186] Seweryn A., Mroz Z. A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading//Eng. Fracture Mech. 1995. V. 51. P. 955-973.
- [187] Seweryn A., Mroz Z. A non-local stress failure and fatigue damage accumulation condition/Multiaxial Fatigue and Design. Eds. A. Pineau, G. Cailletaud, T. Lindley. London, Mechanical Engineering Publications, 1996. P. 259-280.
- [188] Seweryn A., Mroz Z. On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states//Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35. No. 14. P. 1589-1616.
- [189] Sidoroff F. Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity/Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids (No. 295 Comportement Mechanique Des Solides Anisotropes). Ed. J. -P. Boehler. Dordrecht, Martinus Nijhoff, 1979.
- [190] Sidoroff F. Description of Anisotropic Damage Application to Elasticity/Physical Non-Linearities in Structural Analysis (IUTAM Series). Eds. J. Hult and J. Lemaitre. New York, Springer-Verlag, 1980. P. 237-244.
- [191] Simo J. C., Ju J. W. Strain- and stress- based continuum damage models – I. Formulation//Int. J. Solids Structures. 1987. V. 23. No. 7. P. 821-840.
- [192] Smith G. F. On Isotropic Integrity Basis//Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 18. P. 282-292.
- [193] Spencer A. J. M., Rivlin R. S. The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua//Arch. Rat. Mech. Anal. 1958, 1959. V. 2. P. 309-336.
- [194] Spencer A. J. M. Theory of Invariants/In: Continuum Physics. V. I. Ed. A. C. Eringen. New York: Academic Press, 1971. P. 239-353.
- [195] Tai W. H. Plastic damage and ductile fracture in mild steels//Eng. Fracture Mech. 1990. V. 37. P. 853.
- [196] Thomas T. Y. On the characteristic surfaces of the von Mises plasticity equations//J. Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. No. 3. P. 343-357.

- [197] Thomas T. Y. Singular surfaces and flow lines in the theory of plasticity//J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. No. 2. P. 339-381.
- [198] Truesdell C., Toupin R. A. The Classical Field Theories/Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, Vol.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226-793.
- [199] Voyiadjis G. Z., Kattan P. I. A plasticity-damage theory for large deformation of solids. Part I: Theoretical formulation//Int. J. Engn. Sci. 1992. V. 30. No. 9. P. 1089-1108.
- [200] Voyiadjis G. Z., Park T. Anisotropic damage effect tensors for the symmetrization of the effective stress tensor//Trans. of the ASME. J. Applied Mechanics. 1997. V. 64. P. 106-110.
- [201] Wang C. C. On Representations for Isotropic Functions. Part I, II//Arch. Rat. Mech. Anal. 1969. V. 33. P. 249-287.
- [202] Zhao Jun, Zhang Xing. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics//Eng. Fract. Mech. 1995. V. 50. No. 1. P. 131-141.
- [203] Zheng Q. -S. Theory of Representation for Tensor Functions: A Unified Invariant Approach to Constitutive Equations//Appl. Mech. Rev. 1994. V. 47. P. 545-587.
- [204] Ziegler H. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with applications to continuum mechanics/Progress in Solid Mechanics. Eds. I. N. Sneddon and R. Hill. V. 4. Amsterdam: North-Holland, 1963. P. 93-193.
- [205] Ziegler H. An Introduction to Thermomechanics. Amsterdam: North-Holland, 1983.
- [206] Ziegler H., Wehrli, C. The derivation of the constitutive relations from the free energy and the dissipation functions/Advances in Applied Mechanics. Eds. T. Y. Wu and J. W. Hutchinson. V. 25. New York: Academic Press, 1987. P. 183-238.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОРИЕНТАЦИОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

Ниже исследуется вопрос об адекватности гармонического представления ориентационной поврежденности с помощью гармонических полиномов второго, четвертого и восьмого порядков. Исследование проводится с помощью доступных экспериментальных данных по прямому подсчету микротрещин различной ориентации в образце кварцита при его сжатии [121], измерению микротвердости вдоль различных лучей, выходящих из вершины коррозионной трещины, в пределах концевой зоны, поврежденной воздействием водородсодержащей среды, измерению микропластической усталостной поврежденности при совместном циклическом кручении и изгибе и ее оценке на основе микромеханической модели [188].

1. Двумерное распределение микротрещин при сжатии образца кварцита.

Точность приближения ориентационного распределения микротрещин с помощью гармонических полиномов (см. (I.6.1)) по методике, изложенной в первой главе диссертационной работы, оценим на основе двумерного распределения, наблюдаемого при сжатии образца кварцита. На рис. 14, приведенном во второй главе, представлены результаты подсчета плотности и ориентации микротрещин в образце кварцита при его сжатии [121].

Ясно, что подавляющее большинство микротрещин оказывается ориентированными в пределах угла примерно в ± 10 градусов по отношению к продольной оси образца, а ориентации всего поля трещин изменяются в пределах угла 70 — 95 градусов. Данные представлены в форме значений плотности микротрещин, отнесенной к средней плотности распределения, в пределах пяти секторов, угол раствора каждого из которых равен 5 градусам. Значения 1.8, 7.2, 10.8, 14.4, 1.8 показывают во сколько раз плотность распределения микротрещин превосходит среднюю плотность.

Для аппроксимации наблюдаемого распределения микротрещин воспользуемся гармоническими приближениями вида (I.6.1) (в частности, при $s = 1, 2$ удобнее воспользоваться развернутыми формулами (I.6.8) и (I.6.15), или их двумерными аналогами (II.6.1) и (II.6.2)). Расчет коэффициентов Фурье-Лапласа производится по классическим формулам гармонического анализа (см. формулы (I.5.6) и (I.5.7)) и заключается в вычислении ряда простых интегралов.

Результаты расчетов представлены на рис. 30, где по отношению к продольной и поперечной осям образца построены экспериментальная полярная диаграмма и полярные диаграммы гармонических приближений второго, четвертого и восьмого порядков.

Видно, что приближение восьмого порядка достаточно точно описывает распределение микротрещин и превосходит все низшие гармонические аппроксимации и в качественном, и в количественном плане. Отметим, что аппроксимация четвертого порядка предсказывает наличие лишь 45% всех микротрещин в диапазоне ориентаций 70-95 градусов (где должны быть сосредоточены практически все микротрещины). Более реалистичная гармоническая аппроксимация восьмого порядка дает цифру в 70%.

2. Двумерное ориентационное распределение поврежденности в концевой зоне коррозионной трещины.

С целью проверки адекватности гармонических приближений ориентационного распределения поврежденности рассмотрим двумерное распределение поврежденности в концевой зоне коррозионной трещины в низколегированной стали 30G2 после 400 часов выдержки в водородсодержащей среде³⁰.

Для оценки поврежденности в концевой зоне трещины брались пробы микротвердости по Кнупу (Knoop microhardness), численные значения H которой обычно выражаются в условных единицах твердости.

Испытания микротвердости проводились (см. рис. 31) в трех направлениях под углами $-30, 0, +45$ градусов к линии трещины в пределах рас-

³⁰Приводимые ниже экспериментальные данные получены в работе: Ботвина Л. Р., Тетюева Т. В., Иоффе А. В. Стадийность множественного разрушения сталей в среде сероводорода // Металловедение и термическая обработка металлов. 1998. No. 2. С. 14-22.

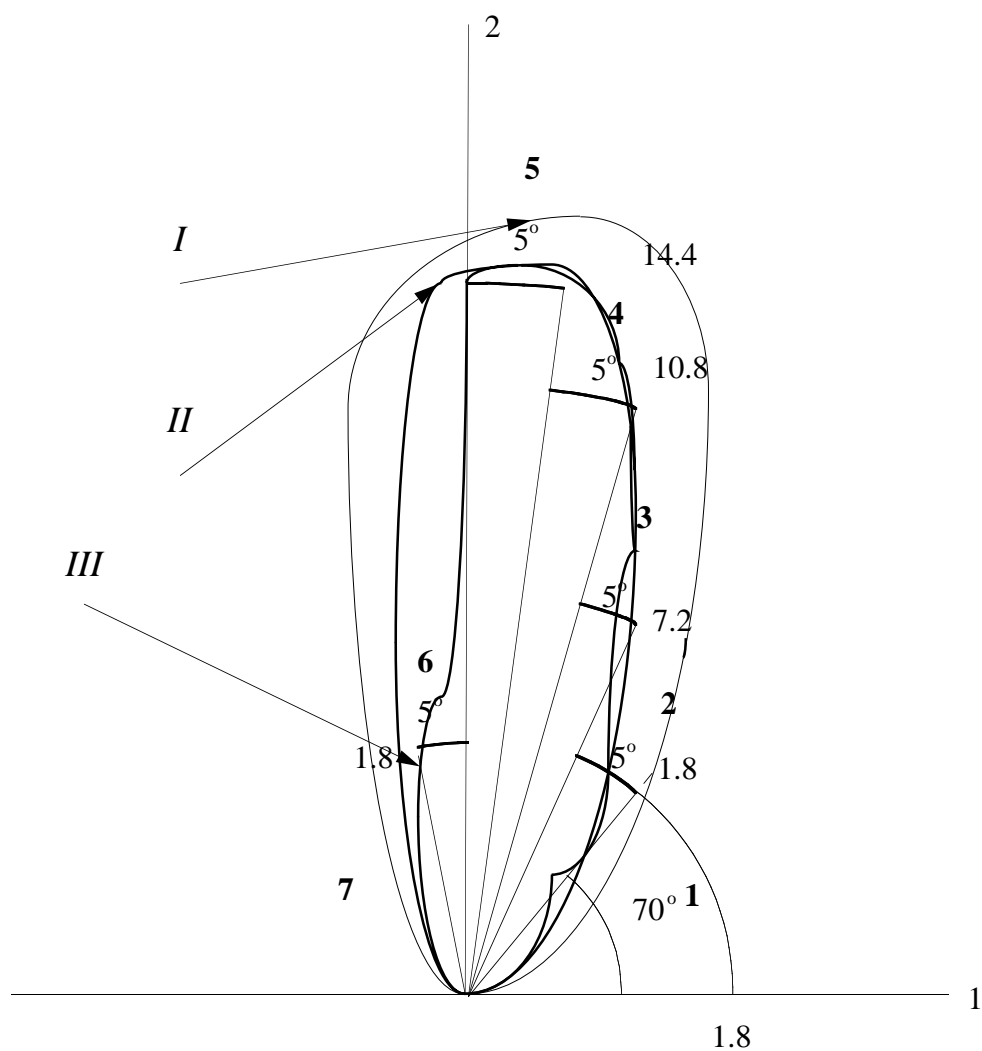


Рис. 30: Двумерное распределение по ориентациям плотности микротрещин (отнесенной к средней плотности распределения) при сжатии образца кварцита [121] и его гармонические аппроксимации порядков $s = 1, 2, 4$ (кривые *I*, *II*, *III* соответственно).

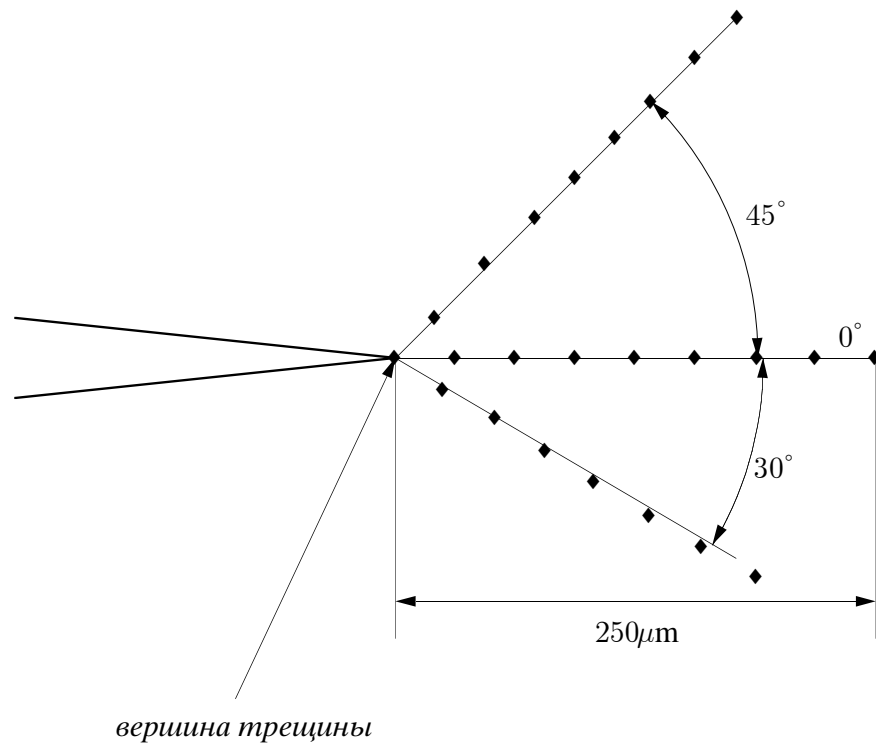


Рис. 31: Концевая зона трещины и ориентации проб микротвердости.

стояния $250\mu\text{m}$, где микротвердость практически не отличается от таковой для неповрежденной стали.

Результаты испытаний графически изображены на рис. 32. По горизонтальной оси измеряется расстояние (в микрометрах), по вертикальной – в условных единицах изменение $\Delta H = H - H_0$ микротвердости по отношению к микротвердости неповрежденного материала H_0 , значение которой равно ста условным единицам.

Определяя ориентационную поврежденность как абсолютную величину относительного изменения микротвердости вдоль каждого из направлений, исходящего из вершины трещины, на характерном расстоянии, когда анизотропия поврежденности ярче всего выражена, порядка одной десятой линейного размера поврежденной концевой зоны (т.е. $25\mu\text{m}$), для сплошности находим выражение

$$\varsigma(\mathbf{n}) = 1 + \frac{H(\mathbf{n}) - H_0}{H_0}.$$

Согласно приведенным экспериментальным данным, ориентационное распределение сплошности $\varsigma = \varsigma(\mathbf{n})$ можно представить в форме полярной

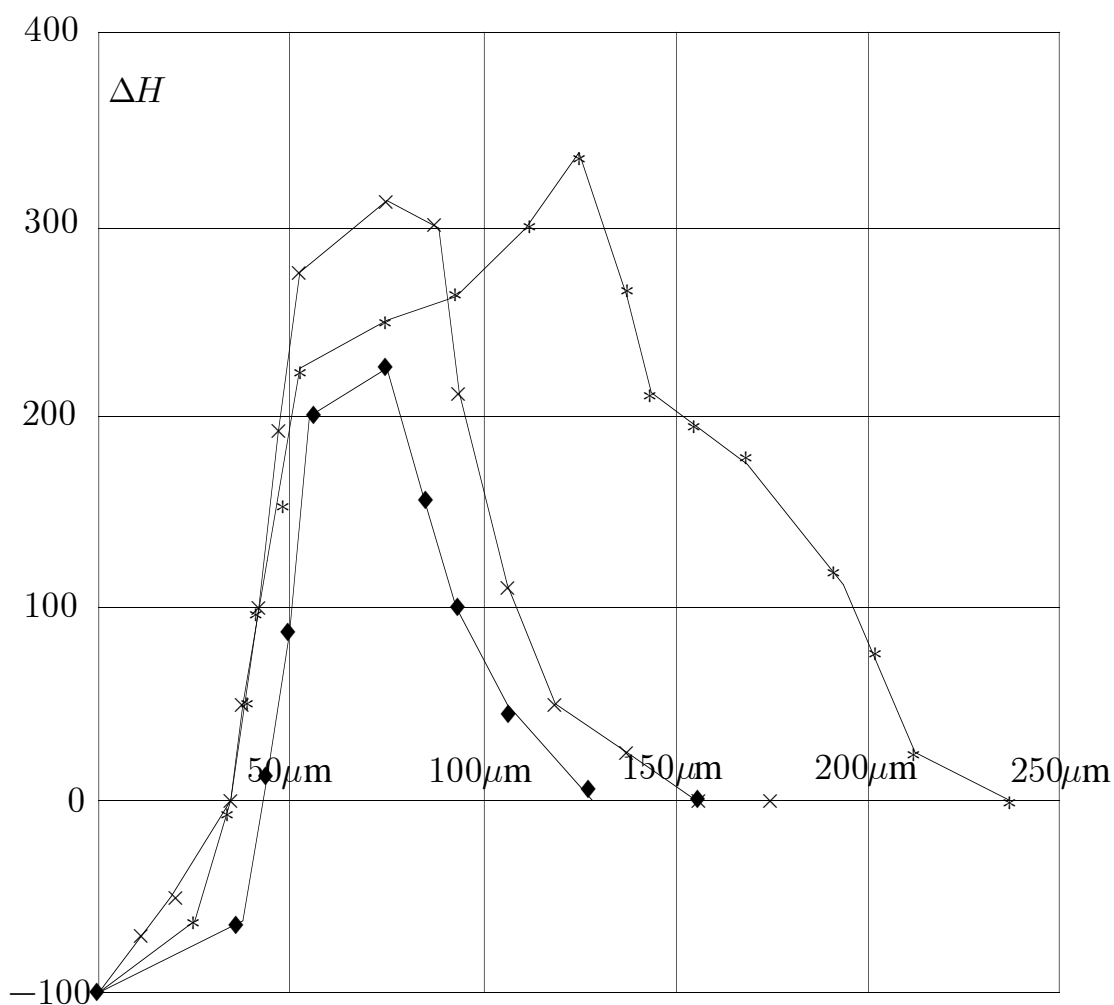


Рис. 32: Результаты испытаний микротвердости низколегированной стали 30G2 по трем направлениям в концевой зоне коррозионной трещины после 400 часов выдержки в водородсодержащей среде. Ориентациям -30 , 0 , $+45$ градусов по отношению к линии трещины соответствуют данные, отмеченные крестиками, черными ромбиками и звездочками.

диаграммы, изображенной на рис. 33.

Указанная полярная диаграмма аппроксимировалась гармоническими полиномами вида (I.6.1) при $s = 2, 4$. Расчет коэффициентов гармонических приближений производился по классическим формулам гармонического анализа (см. формулы (I.5.6) и (I.5.7)). Для удобства гармонические приближения четвертого и восьмого порядков построены на той же самой диаграмме и изображены на рис. 34 в виде пунктирной и сплошной линий.

Возрастающая степень адекватности гармонического описания состояния поврежденности с ростом степени гармонического полинома, приближающего распределение, очевидна. Аппроксимация восьмого порядка качественно практически правильно воспроизводит реальную картину распределения сплошности по ориентациям. Тем не менее, минимальное значение сплошности, наблюдаемое на продолжении линии трещины, предсказывается этим гармоническим приближением с большой абсолютной погрешностью порядка 60%.

3. Усталостная хрупкая и микропластическая поврежденность при совместном действии циклического кручения и изгиба.

Степень адекватности гармонического представления поврежденности оценим на примере ориентационного распределения усталостной хрупкой и микропластической поврежденности, развивающейся при совместном циклическом закручивании и изгибе цилиндрического образца [188].

Цилиндрический образец подвергается совместной циклической деформации кручения и изгиба так, что поверхность цилиндра растрескивается. Поврежденность в этом случае существует в форме поверхностных микродефектов и может быть оценена количественно.

Максимум нормальных и сдвиговых напряжений (ось z направлена вдоль оси цилиндра) σ_{zz} и $\tau_{r\varphi}$ достигается на поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sigma_a \sin(\Omega t) + \sigma_m, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_a \sin(\Omega t - \delta) + \tau_m,\end{aligned}$$

где Ω – циклическая частота, σ_a , τ_a – амплитуды нормального и касательного напряжений, σ_m , τ_m – средние по времени нормальные и касательные напряжения, δ – фазовый угол.

Нормальное и касательное напряжения, действующие на физической площадке, нормальной поверхности цилиндра, вычисляются в виде:

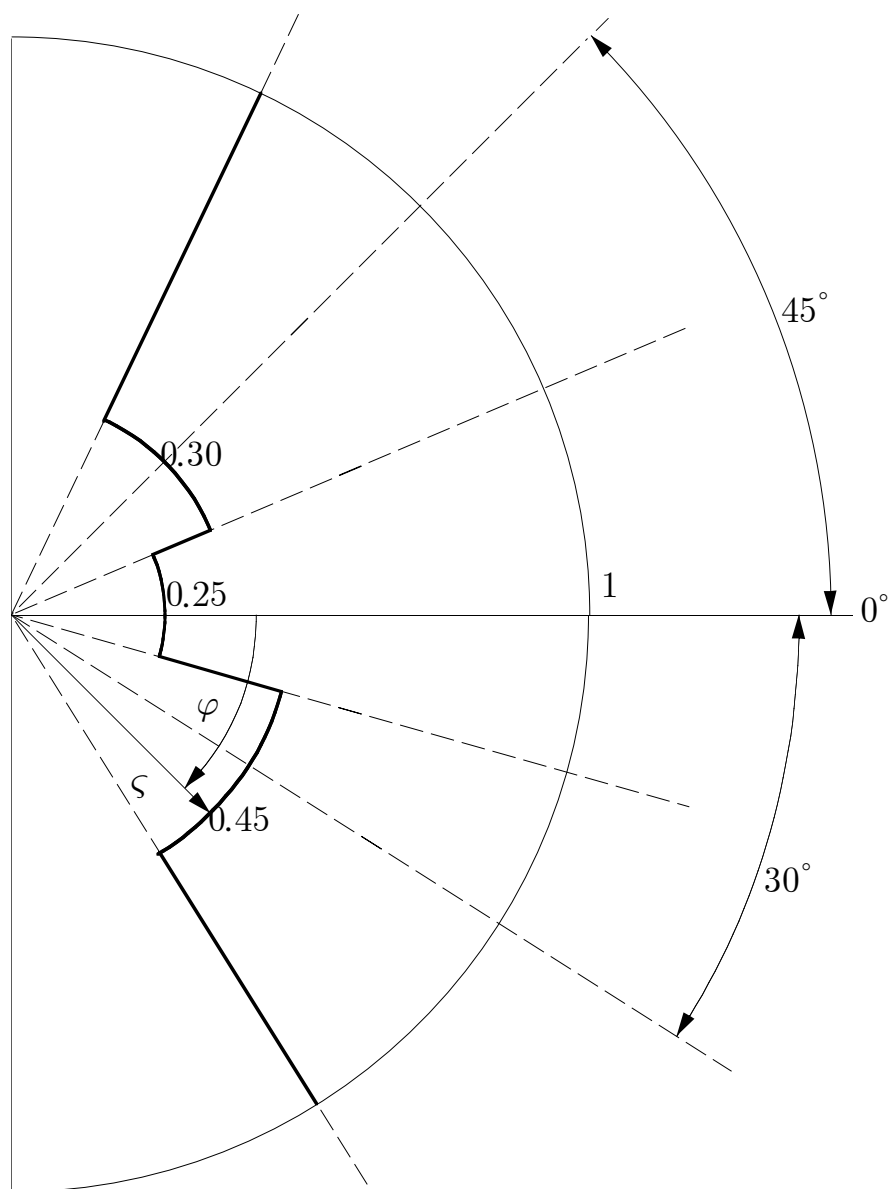


Рис. 33: Полярная диаграмма распределения сплошности по ориентациям в концевой зоне коррозионной трещины. Горизонтальная ось, от которой отсчитывается полярный угол, соответствует линии трещины. Величина сплошности вычисляется как полярный радиус кусочно-постоянного распределения.

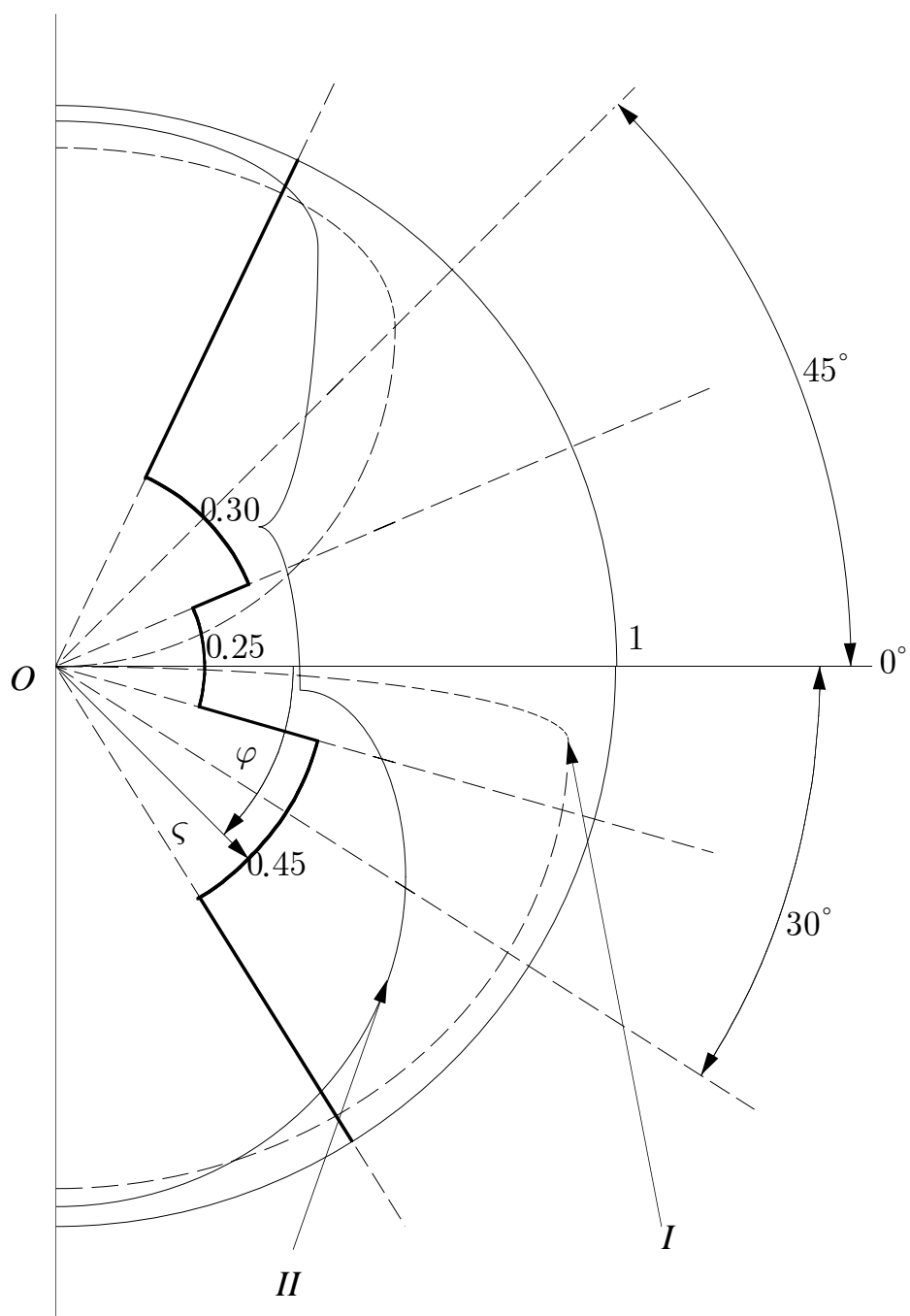


Рис. 34: Полярная диаграмма (темная линия) распределения сплошности по ориентациям в концевой зоне коррозионной трещины в стали 30G2 и две гармонические аппроксимации (кривые *I* и *II*).

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}\sigma_{zz} + k_0 \cos 2(\vartheta + \vartheta_m), \\ \tau_n &= k_0 \sin 2(\vartheta + \vartheta_m),\end{aligned}$$

где

$$k_0 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{z\varphi}^2},$$

ϑ – угол наклона площадки к оси z , ϑ_m – угол наклона главной площадки к оси z .

Поврежденность, следуя [188], определим как скалярную функцию ориентации $\omega(\mathbf{n})$, которая задает уменьшение критического нормального и касательного напряжения для плоского элемента образца, нормального директору \mathbf{n} :

$$\sigma_c = \sigma_c(\omega(\mathbf{n})), \quad \tau_c = \tau_c(\omega(\mathbf{n})).$$

В качестве конкретной количественной меры уменьшения критического напряжения принимается классическая степенная зависимость Качанова-Работнова:

$$\sigma_c = \sigma_c^{(0)}(1 - \omega)^p, \quad \tau_c = \tau_c^{(0)}(1 - \omega)^p,$$

где $\sigma_c^{(0)}$, $\tau_c^{(0)}$ – критическое нормальное и касательное напряжение для неповрежденного тела, p – материальная константа.

Заметим, что для хрупких материалов (горные породы, керамика, некоторые виды стеклопластиков) обычно можно считать, что

$$\frac{\sigma_c}{\tau_c} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

в то время как для большинства сталей

$$\frac{\sigma_c}{\tau_c} = \sqrt{3}.$$

Распределение хрупкой и микропластической поврежденности ω , нормированной на ее максимальное по ориентациям значение, в зависимости от угла ϑ на физических площадках, выходящих на поверхность цилиндра, для широкого спектра условий, определяющих нагружение образца, приводится в статье [188].

Здесь мы ограничимся исследованием лишь двух распределений, соответствующих усталостной хрупкой и микропластической поврежденности при пропорциональном циклическом (без запаздывания по фазе и нулевыми средними) совместном изгибе и кручении (см. полярные диаграммы, изображенные на рис. 35, 36). На этих диаграммах угол ϑ определяет ориентацию площадки по отношению к продольной оси образца, поврежденность ω , нормированная на максимальное по всем ориентациям значение, есть полярный радиус.

Как следует из приведенных диаграмм хрупкая усталостная поврежденность удовлетворительно описывается гармоническим приближением четвертого порядка.

Усталостная микропластическая поврежденность, характеризуется более сложной полярной диаграммой, удовлетворительная аппроксимация которой достигается гармоническим полиномом восьмой степени.

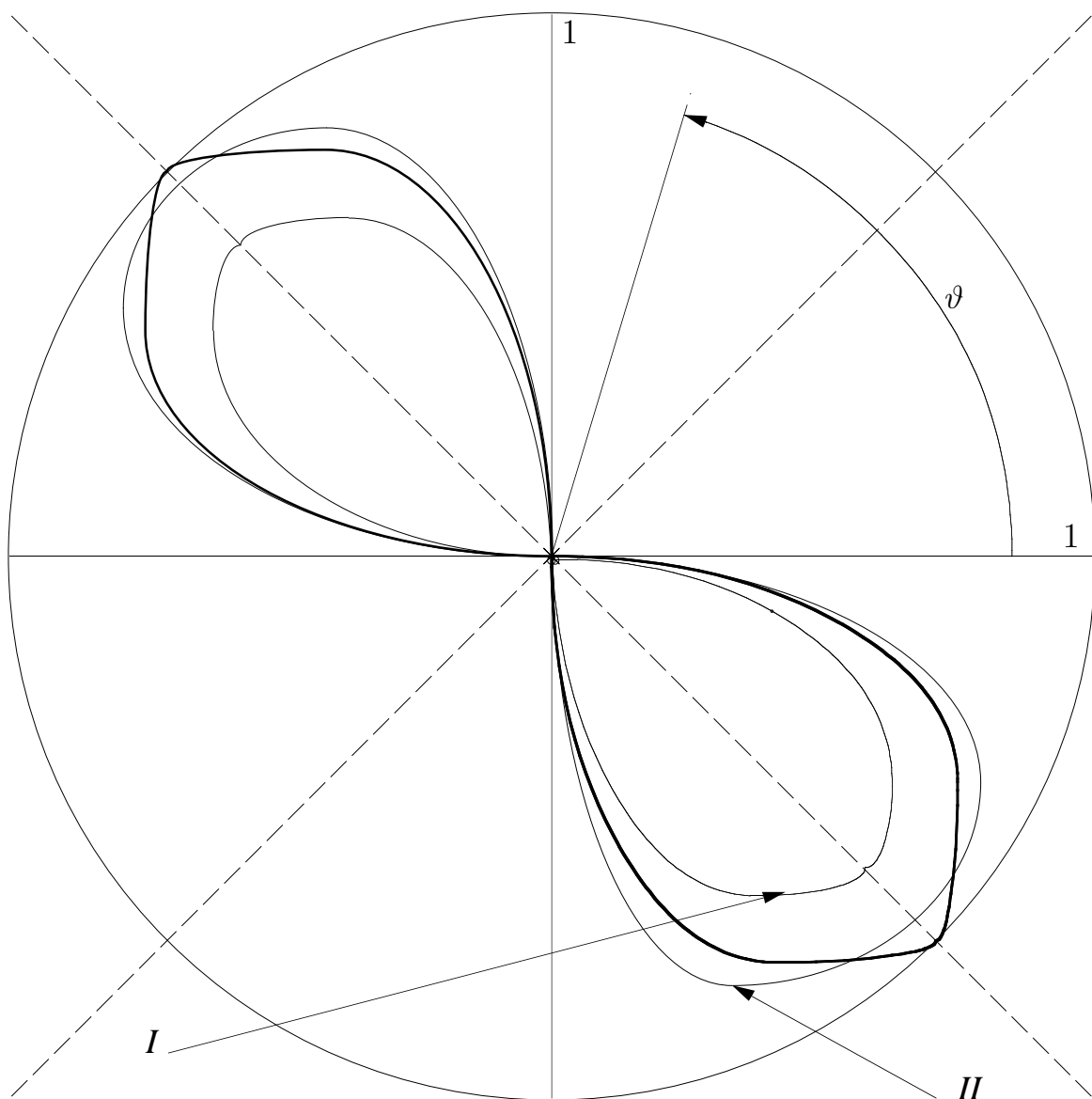


Рис. 35: Полярная диаграмма (темная линия) [188] распределения хрупкой усталостной поврежденности при совместном циклическом кручении и изгибе цилиндрического образца. Гармонические аппроксимации второго и четвертого порядков изображены светлыми линиями (кривые *I*, *II* соответственно).

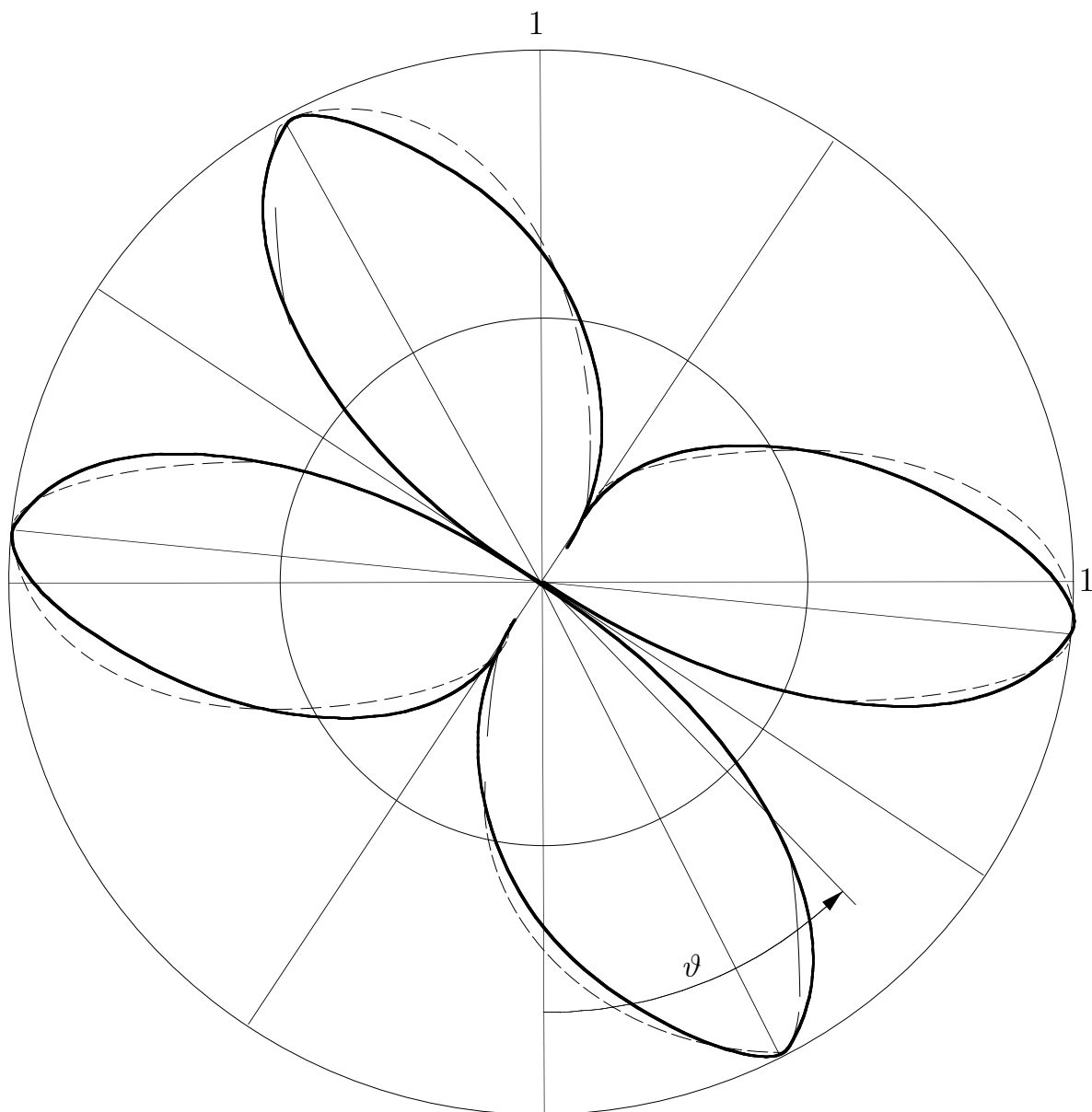


Рис. 36: Полярная диаграмма (темная линия) [188] распределения микропластической усталостной поврежденности при совместном циклическом кручении и изгибе цилиндрического образца. Гармоническая аппроксимация восьмого порядка изображена штриховой линией. Внутренняя окружность – приближение изотропным распределением.