

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

УДК 531.01

Розенблат Григорий Маркович

**Задачи механики твердого тела
с сухим трением**

Специальность 01-02-01 — Теоретическая механика

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва

2009

Оглавление

Введение	4
ГЛАВА 1. Задачи о равновесии твердого тела на шероховатой плоскости	14
§ 1.1. Постановка и формализация задачи о равновесии для непрерывного контакта	15
§ 1.2. Постановка и формализация задачи о равновесии для дискретного контакта	18
§ 1.3. Непрерывный контакт в случае стержня. Формулировка результатов и их обоснование	20
§ 1.4. Дискретный контакт в случае опирания на две точки. Формулировка результатов и их обоснование	32
§ 1.5. Дискретный контакт при опирании на три точки. Формулировка результатов и их обоснование	43
§ 1.6. Равновесие твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением	67
ГЛАВА 2. Задачи о движении плоских тел по шероховатой плоскости	90
§ 2.1. Движение тела, опирающегося двумя свободно укрепленными площадками на шероховатую плоскость	91

§ 2.2. Движение тела, опирающегося двумя жестко укрепленными площадками на шероховатую плоскость	97
§ 2.3. Движение тела, опирающегося произвольной площадкой на шероховатую плоскость	100
§ 2.4. Движение тела, опирающегося круглой площадкой на шероховатую плоскость	124
§ 2.5. Движение тела, опирающегося кольцевой площадкой на шероховатую плоскость	148
§ 2.6. Движение тела, опирающегося прямоугольной площадкой на шероховатую плоскость	159
§ 2.7. Движение однородного тяжелого шара, опирающегося круглой площадкой на шероховатую плоскость	170
§ 2.8. Интегрирование уравнений движения диска по шероховатой плоскости	174
ГЛАВА 3. Движение твердого тела по шероховатой плоскости .	181
§ 3.1. О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой	181
§ 3.2. Метод определения параметров безотрывного движения волчка на плоскости	207
§ 3.3. Безотрывные движения волчка по абсолютно шероховатой плоскости	223
§ 3.4. К динамике неголономных моделей колесных экипажей	232
Литература	250

Введение

Глава 1 посвящена задачам о статическом равновесии твердых тел, опирающихся на шероховатую горизонтальную плоскость при наличии сил сухого трения. Контакт тела с плоскостью может быть либо непрерывно распределенным (пятно контакта), либо дискретным. §§ 1.1, 1.2 содержат формализованную постановку задачи о равновесии тела для этих двух видов контакта.

В § 1.3 излагаются и обосновываются результаты об условиях равновесия в том случае, когда область контакта представляет собой стержень (т. е. очень узкий прямоугольник). Эти условия равновесия представлены в простом аналитическом виде, что позволяет решать задачи о минимальных силах или моментах, способных сдвинуть такое тело.

В § 1.4 излагаются и обосновываются результаты об условиях равновесия в случае дискретного опирания тела на две точки. Полученные условия равновесия также представлены в простом аналитическом виде, что позволяет решать различные оптимизационные задачи (например, как распределить нормальные нагрузки в точках контакта, чтобы увеличить сопротивляемость тела сдвигам или поворотам).

В § 1.5 излагаются и обосновываются результаты об условиях равновесия в случае дискретного опирания тела на три точки. Эти условия в некоторых частных случаях представлены простыми аналитическими формулами. Однако в самом общем случае конфигу-

рации точек контакта, распределения в них нормальных нагрузок и приложения произвольной системы сил условия равновесия выписаны в достаточно громоздком аналитическом виде. Случаи, представленные простыми формулами, позволяют решать оптимизационные задачи о распределении нормальных нагрузок с целью повышения сопротивляемости тела перемещениям или нахождения минимальных сил, способных сдвинуть тело при фиксированных нормальных нагрузках.

В § 1.6 излагается решение задачи об условиях статического равновесия твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость с анизотропным сухим трением одной, двумя или тремя своими точками. Модель анизотропного сухого трения обобщает известную изотропную модель Кулона. Методика исследования использует понятие анизотропной силы трения покоя, что существенно облегчает получение аналитических условий равновесия; полученные результаты представлены достаточно простыми формулами и обобщают аналогичные результаты из §§ 1.4, 1.5 для изотропного сухого трения.

Глава 2 посвящена динамическим задачам о движении тел, опирающихся на шероховатую горизонтальную плоскость при наличии сил сухого трения. Характер опирания тела на плоскость может быть либо непрерывным (пятно контакта), либо дискретным (опирание на очень маленькие площадки).

В § 2.1 исследуется задача о движении по горизонтальной плоскости невесомого стержня с двумя свободно укрепленными весовыми площадками на концах под действием сил сухого трения. В некоторых частных случаях эту задачу удастся проинтегрировать в квадратурах. Дается качественный анализ движения стержня, показано,

что почти всегда (за исключением вырожденных ситуаций, которые также описаны) процесс движения заканчивается вращением стержня вокруг одной из остановившихся площадок.

В § 2.2 исследуется задача, аналогичная задаче из § 2.1, в предположении, что площадки контакта *жестко* закреплены на стержне. Этот вид закрепления приводит к необходимости применения модели двумерного сухого трения, разработанной В. Ф. Журавлевым [21] и учитывающей зависимость силы трения, приложенной к площадке, не только от скорости ее центра, но также и от угловой скорости стержня (т. к. площадка контакта жестко связана со стержнем!). В этом случае показано, что интегрирование уравнений движения сводится к интегрированию нелинейного дифференциального 1-го порядка (для определенного класса начальных условий). Однако можно показать, что при достаточно малых размерах площадок контакта решения рассматриваемой системы стремятся к соответствующим явным решениям, выписанным в § 2.1. Качественным (и главным) отличием движения рассматриваемой системы от движения системы из § 2.1 является то, что в процессе движения никогда не происходит вращения вокруг одной из остановившихся точек (площадок). Таким образом, площадки движутся все время и останавливаются лишь в конце, в момент остановки всего тела!

В § 2.3 исследуется движение тела, опирающегося произвольной непрерывной областью на горизонтальную плоскость при наличии сил сухого трения. Нормальное давление считается равномерно распределенным по этой области.

Здесь получены следующие результаты.

- 1) Приведены основные способы аналитического вычисления сил

трения и моментов сил трения, действующих на область контакта. Это способ, использующий прямоугольные координаты, и способ А. И. Лурье [19], использующий полярные координаты, связанные с мгновенным центром скоростей области контакта.

- 2) Получены оценки сверху и снизу для времени полной остановки тела при произвольных начальных условиях.
- 3) Рассмотрены вопросы о существовании чисто поступательных и чисто вращательных движений тела. Показано, что при совпадении центра нормальных давлений, действующих на область контакта, с проекцией центра масс тела на горизонтальную плоскость процесс движения заканчивается лишь при одновременном обращении в нуль угловой скорости области и скорости этой проекции центра масс!
- 4) Рассмотрена задача об определении максимального пути, проходящего проекцией центра масс тела на область контакта, вплоть до полной остановки *в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией*. Показано, что максимальный путь реализуется на чисто поступательном движении (если, конечно, оно осуществимо!). Подчеркнем, что при поступательном движении сила трения (замедляющая движение центра масс) является максимальной, однако и начальная скорость центра масс также максимальна среди всех движений, имеющих фиксированную начальную кинетическую энергию.

В § 2. 4 задача из § 2. 3 рассмотрена в том частном случае, когда область контакта является кругом. Здесь показано, что проекция цен-

тра масс на область контакта движется прямолинейно и задача исследования движения упрощается.

Получены следующие результаты.

- 1°) В зависимости от параметров задачи (масса тела, радиус площадки контакта, момент инерции тела относительно вертикали, проходящей через центр масс) все движения тела (т.е. независимо от начальных условий) стремятся либо к чисто поступательному движению, либо к чисто вращательному движению вокруг центра площадки, либо к смешанному движению, представляющему собой качение без проскальзывания диска фиксированного радиуса по прямой, параллельной траектории центра масс, причем центр этого диска совпадает с центром площадки контакта, а радиус определяется параметрами задачи.
- 2°) Получены «неулучшаемые» (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) оценки времени остановки тела (сверху и снизу). Эти оценки связаны с результатами из 1° и достигаются на чисто поступательных, чисто вращательных или смешанных движениях, описанных в п. 1° (в зависимости от параметров задачи!).

В § 2.5 результаты из § 2.4 распространяются для случая, когда область контакта является тонким кольцом. Полученные здесь результаты полностью аналогичны соответствующим из § 2.4.

В § 2.6 задача из § 2.3 рассматривается в том частном случае, когда область контакта есть узкий прямоугольник (стержень). Здесь получен следующий результат. В определенной области изменения параметров системы (отношение полудлины стержня к радиусу инер-

ции тела относительно вертикальной оси, проходящей через центр стержня, меньше $\sqrt{2}$) все движения тела (независимо от начальных условий) стремятся к чисто вращательному вокруг центра стержня.

В § 2.7 обсуждается задача о движении однородного тяжелого шара по горизонтальной шероховатой плоскости с проскальзыванием. При этом областью контакта шара с плоскостью является круг малого радиуса. Дано качественное описание движения шара вплоть до прекращения проскальзывания.

В § 2.8 решается задача точного интегрирования уравнений движения диска по шероховатой горизонтальной плоскости. Здесь принят неравномерный, но радиально-симметричный закон распределения нормального давления по области диска. Закон движения диска удается представить в элементарных функциях, определить пройденный диском путь и время вплоть до остановки.

Глава 3 посвящена некоторым классическим задачам о движении твердого тела по шероховатой плоскости. Контакт тела с плоскостью предполагается точечным, а характер взаимодействия является кулоновым (сухое трение) с коэффициентом трения, принимающим значения от нуля (абсолютно гладкая плоскость) до бесконечности (абсолютно шероховатая плоскость, т. е. неголономная связь).

В § 3.1 рассматривается задача о безотрывном плоском движении твердого тела по шероховатой прямой (с произвольным коэффициентом сухого трения) под действием произвольной плоской системы сил. Связь в точке контакта предполагается односторонней. Дана полная классификация переходов движений со скольжением в движения чистого качения и наоборот, при безотрывном движении тела. Получены достаточные условия безотрывного движения тела, кото-

рые применяются затем для задач о движении неоднородного круглого диска, тонкого стержня и эллиптического диска по шероховатой прямой в вертикальной плоскости в поле силы тяжести. Основным принципом, используемым при решении такого рода задач, является корректный выбор начальных условий, при которых движение тела является безотрывным в моменты времени, предшествующие начальному.

В § 3.2 рассматривается задача о безотрывном движении волчка (геометрически и динамически симметричного твердого тела) по гладкой плоскости в поле силы тяжести. Контакт тела с плоскостью предполагается точечным, а трение отсутствует. В некоторых случаях удастся получить простые формулы для силы нормальной реакции опорной плоскости (полином второго порядка от косинуса угла нутации), а затем выписать аналитические условия, которым должны удовлетворять начальные данные и параметры тела, обеспечивающие его безотрывное движение.

В § 3.3 рассматривается задача о безотрывном движении волчка по абсолютно шероховатой плоскости (коэффициент трения бесконечен) в поле силы тяжести. В предположении непроскальзывания точки контакта тела с плоскостью мы получаем неголономную связь. В некоторых случаях здесь также удастся вычислить в явном виде силу нормальной реакции (полином третьего порядка от косинуса угла нутации), а затем выписать условия безотрывного движения волчка, т. е. положительной нормальной реакции.

Кроме того, в случае обращения нормальной реакции в нуль, рассматривается задача о возможности отрыва тела от опорной плоскости. Показано, что здесь могут возникать парадоксальные ситуации,

свидетельствующие о том, что до момента обнуления нормальной реакции должно начаться проскальзывание точки опоры, т. е. неголономная постановка задачи имеет ограниченную область применимости.

В § 3.4 рассмотрены две классические задачи неголономной механики: 1) движение без проскальзывания колёсной пары по наклонной плоскости; и 2) движение плоской колёсной модели экипажа типа скейтборда. При составлении уравнений движения используются основные теоремы динамики и кинематические соотношения, характеризующие неголономные связи. Этот метод дает возможность наряду с определением движения системы, получать также и выражения для сил, реализующих это движение и наложенные связи (нормальные и касательные силы реакции, т. е. силы трения покоя).

Для движения колёсной пары под действием силы тяжести по наклонной плоскости получены уравнения траектории её центра масс, а также условия безотрывного движения. Если последние нарушаются, то происходит отрыв одного из колёс и показано, что возникает парадоксальная ситуация, что указывает на ограниченную область применимости неголономной модели. Таким образом, в этих случаях необходимо учитывать конечность коэффициента трения и рассматривать процесс движения колёсной пары с возможностью проскальзывания колёс.

Задача о неуправляемом движении плоского колёсного экипажа (скейтборд) сведена к явно вычисляемым квадратурам.

Результаты настоящей работы были доложены автором на следующих научных семинарах:

- 1) семинар ИПМ РАН «Теория управления и динамики систем» под руководством академика РАН Ф. Л. Черноусько (январь, 2006);
- 2) семинар ИПМ РАН «Механика систем» им. академика А. Ю. Ишлинского под руководством академиков РАН В. Ф. Журавлева, Д. М. Климова (январь, ноябрь, 2006 г.);
- 3) семинар НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова «Прикладная механика и управление» им. академика А. Ю. Ишлинского под руководством профессоров В. В. Александрова, Н. А. Парусникова, Ю. Г. Мартыненко, Ю. В. Болотина (февраль, 2007 г.);
- 4) семинар мех.-мат. факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Аналитическая механика и устойчивость движения» под руководством академика РАН В. В. Румянцева, член-корр. РАН В. В. Белецкого, профессора А. В. Карапетяна (октябрь, 2006 г.).
- 5) семинар «Научно-практические задачи развития автомобильно-дорожного комплекса в России».

Председатель: академик РАН В. В. Козлов; сопредседатели: академики РАН К. В. Фролов, А. С. Бугаев, член-корр. РАН В. М. Приходько, проф. А. П. Буслаев, М. В. Яшина, Л. А. Ведешин (декабрь, 2006 г.)

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность руководителям и всем участникам этих семинаров за благожелательные и конструктивные замечания, которые способствовали улучшению книги. Кроме того, автор выражает свою глубокую признательность рецензентам: академику РАН Феликсу Леонидовичу Черно-

усько, доктору физ.-мат. наук Николаю Николаевичу Болотнику за нелегкий труд рецензирования и трезвой оценки содержания настоящей работы. Здесь автор целиком согласен с высказыванием Бориса Пастернака, что «...пораженья от победы ты сам не должен отличать».

ГЛАВА 1

Задачи о равновесии твердого тела на шероховатой плоскости

В данной главе рассматриваются задачи о статическом равновесии твердого тела, контактирующего с шероховатой плоскостью. Характер взаимодействия может быть двух видов:

- а) непрерывный (пятно контакта, например отрезок, круг, эллипс, кольцо и т. п.);
- б) дискретный или точечный контакт (тело опирается двумя, тремя или более своими точками).

Предполагается, что реакция шероховатой плоскости осуществляется по законам кулонова (сухого) трения, причем известен закон распределения нормальных давлений по пятну контакта, сила трения изотропна (на плоскости) и задан предельный коэффициент трения. Пусть к телу приложена произвольная плоская система сил, характеризуемая главным вектором $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$ и главным моментом $\vec{M}_0 = (0, 0, M_{0z})$ относительно произвольной точки O в системе координат $Oxyz$ (ось z — по нормали к плоскости). Требуется определить необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять \vec{F} и \vec{M}_0 , чтобы тело сохраняло состояние покоя.

Поясним, что означает необходимость и достаточность наших условий. Нарушение равновесия тела приводит к началу его движения, которое представляет собой, как известно, мгновенное вращение вокруг некоторой точки P плоскости (в частности, точка P может уйти в бесконечность, т. е. будет мгновенно поступательное движение).

Тогда необходимость означает следующее. Если условия равновесия нарушены, то всегда существует хотя бы одна такая точка P_* плоскости, вращение вокруг которой не противоречит закону динамики вращательного движения при реализации допустимых сил трения (скольжения). Если же условия равновесия выполнены (достаточность), то, наоборот, начало вращения тела вокруг любой точки плоскости приводит к нарушению закона динамики вращательного движения при реализации предельно допустимых сил трения (скольжения). Отметим, что в дальнейшем мы предполагаем выполненным условие $|\vec{F}| < F_{\text{тр max}}$, что исключает появление бесконечно удаленных точек P (поступательное движение тела не допустимо). Если $|\vec{F}| \geq F_{\text{тр max}}$, то возможно поступательное начальное движение, а приложение момента M_0 может привести к вращению тела, что уменьшит $F_{\text{тр max}}$ (этот факт был отмечен еще Н. Е. Жуковским в [8]).

§ 1.1. Постановка и формализация задачи о равновесии для непрерывного контакта

На рисунке 1.1 представлена произвольная область S непрерывного контакта в системе координат Oxy . Будем предполагать, что нормальное давление распределено равномерно по области S , и обозначим его через p . Тогда элементарная сила трения для элемента ds в

точке A удовлетворяет соотношениям:

$$d\vec{F}_{\text{тр}}(A) = \begin{cases} -k \cdot p \cdot ds \cdot \vec{v}_A / |\vec{v}_A|, & \vec{v}_A \neq 0 \\ d\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{покоя}}, \vec{v}_A = 0, & |d\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{покоя}}(A)| \leq k \cdot p \cdot ds, \end{cases} \quad (1.1)$$

где k — коэффициент трения, \vec{v}_A — скорость точки A (которая коллинеарна ускорению точки A для начального движения из состояния покоя!). Отметим, что направление вектора $d\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{покоя}}$ неопределенно и лишь модуль его удовлетворяет приведенному неравенству. Пусть \vec{F} — главный вектор плоской системы сил, приложенной к области S , а M_{0z} — главный момент этой системы относительно начала O . Поставим задачу найти все такие значения M_{0z} , при которых сохранится покой области S , т.е. найти такое множество $D \in [M_1, M_2]$, где $M_1 = \min M_{0z} \geq -\infty$, $M_2 = \max M_{0z} \leq \infty$, чтобы при

$$M_{0z} \in D$$

не существовала точка P , относительно которой возможно начальное вращение области S , а при

$$M_{0z} \notin D$$

можно указать такую точку P^* , относительно которой возможно начальное вращение области S .

Чтобы формализовать эти рассуждения, поступим следующим образом. Пусть P — произвольная точка плоскости с координатами (x, y) . Если началось вращение вокруг точки P против часовой стрелки, то будет выполнено неравенство

$$M_{0z} + F_x y - F_y x - kp \iint_S \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \geq 0, \quad (1.2)$$

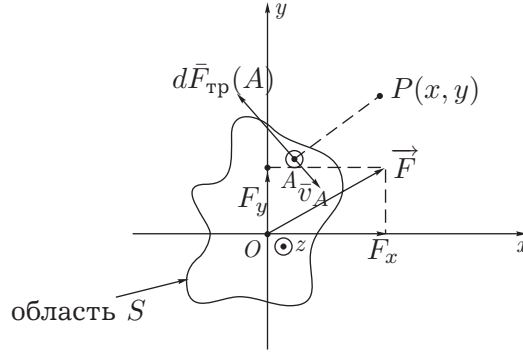


Рис. 1.1. Непрерывный контакт: $\vec{F} = (F_x, F_y, 0)$ — главный вектор плоской системы сил; $P(x, y)$ — произвольная точка плоскости, относительно которой может начаться вращение где ξ, η — координаты точки A области S , $dS = d\xi d\eta$ — элемент области S .

Аналогично, если началось вращение по часовой стрелке, то

$$-M_{0z} - F_x y + F_y x - kp \iint_S \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \geq 0. \quad (1.3)$$

А чтобы вращения не было, нужно поменять в (1.2), (1.3) знаки неравенства на противоположные. В результате мы получим следующее соотношение:

$$\Phi_2(x, y) < M_{0z} < \Phi_1(x, y),$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= F_y x - F_x y + kp \iint_S \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta, \\ \Phi_2(x, y) &= F_y x - F_x y - kp \iint_S \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Наконец, для того чтобы вращения не было ни для какой точки плоскости, необходимо и достаточно соблюдения неравенств

$$f_2 < M_{0z} < f_1, \quad (1.4)$$

где $f_1 = \min_{(x, y)} \Phi_1(x, y)$; $f_2 = \max_{(x, y)} \Phi_2(x, y)$, а операции \min и \max берутся по всем точкам плоскости (x, y) . Неравенство (1.4) и определяет искомое множество D изменения момента M_{0z} для равновесия.

Ясно, что множество D непусто в том и только в том случае, если $f_2 < f_1$. В частности, при $F_x = F_y = 0$ мы получим

$$-M_0 < M_{0z} < M_0,$$

где

$$M_0 = \min_{x,y} \left[kp \iint \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} d\xi d\eta \right],$$

и множество D заведомо непусто.

§ 1.2. Постановка и формализация задачи о равновесии для дискретного контакта

Рассмотрим задачу о равновесии при кулоновом трении в случае дискретного контакта при опирании на две точки A, B (рис. 1.2) и опирании на три точки A, B, C (рис. 1.3). Эти случаи статически определимы, и поэтому будем предполагать, что нормальные реакции (нагрузки) в точках A, B, C заданы и равны, соответственно, N_A, N_B, N_C . Тогда сила трения в точке A дается соотношениями:

$$\vec{F}_{\text{тр}}(A) = \begin{cases} -kN_A \cdot \vec{v}_A / |\vec{v}_A|, & \vec{v}_A \neq 0, \\ \vec{F}_{\text{тр}A}^{\text{покоя}}, \vec{v}_A = 0, & |\vec{F}_{\text{тр}}^{\text{покоя}}(A)| \leq kN_A, \end{cases} \quad (1.5)$$

где k — коэффициент трения, \vec{v}_A — скорость точки A , которая коллинеарна ее ускорению для начального движения из состояния покоя, направление силы $\vec{F}_{\text{тр}A}^{\text{покоя}}$ также неопределенно, и только модуль ее удовлетворяет приведенному неравенству (отметим, что, согласно гипотезе Пэнлеве [1], сила трения покоя в точке A направлена против проекции равнодействующей внешних сил на плоскость опирания). Формулы, аналогичные (1.5), имеют место и для точек B и C .

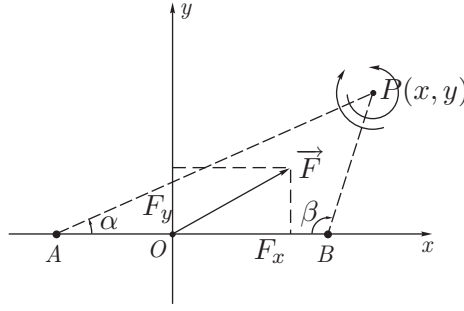


Рис. 1.2. Дискретный контакт. Опираие на две точки A, B : \vec{F} — главный вектор плоской системы сил; $P(x, y)$ — произвольная точка плоскости, относительно которой может начаться вращение, $AO = OB = l$

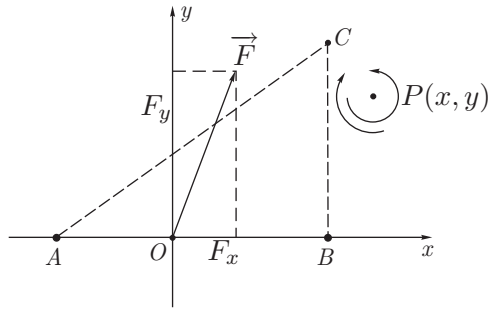


Рис. 1.3. Дискретный контакт. Опираие на три точки A, B, C : \vec{F} — главный вектор плоской системы сил; $P(x, y)$ — произвольная точка плоскости, относительно которой может начаться вращение. $AO = OB = \frac{c}{2}$

Пусть \vec{F} — главный вектор плоской системы сил, приложенной в области дискретного контакта. Поставим задачу найти все такие значения главного момента M_{0z} этой системы, при которых сохраняется покой отрезка AB (рис. 1.2) или треугольника ABC (рис. 1.3). Рассуждения, аналогичные § 1.1, приводят к следующей формализации этой задачи. Для схемы на рис. 1.2:

$$g_2 < M_{0z} < g_1, \quad (1.6)$$

где

$$g_1 = \min_{x,y} \left[F_y x - F_x y + k \left(N_A \sqrt{(x+l)^2 + y^2} + N_B \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \right) \right]$$

$$g_2 = \max_{x,y} \left[F_y x - F_x y - k \left(N_A \sqrt{(x+l)^2 + y^2} + N_B \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \right) \right].$$

Для схемы на рис. 1.3:

$$g_2 < M_{0z} < g_1, \quad (1.7)$$

где

$$g_1 = \min_{x,y} [F_y x - F_x y + k g(x, y)],$$

$$g_2 = \max_{x,y} [F_y x - F_x y - k g(x, y)],$$

$$g(x, y) = N_A \sqrt{(x - x_A)^2 + y^2} +$$

$$+ N_B \sqrt{(x - x_B)^2 + y^2} + N_C \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2},$$

где x_A — координата точки A , x_B — координата точки B , (x_C, y_C) — координаты точки C (см. рис. 1.3).

§ 1.3. Непрерывный контакт в случае стержня. Формулировка результатов и их обоснование

В настоящем параграфе рассматривается задача о равновесии на шероховатой плоскости в том случае, когда область контакта S представляет собой тонкий однородный стержень AB (см. рис. 1.4), в предположениях, изложенных в § 1.1. Начало координат поместим в центр масс стержня, ось x направим вдоль стержня, ось y — перпендикулярно AB , а направления осей выберем так, чтобы соответствующие проекции главного вектора приложенной системы сил (в плоскости контакта) были положительны: $F_x \geq 0, F_y \geq 0$. Ясно, что

это не нарушает общности. Пусть длина стержня равна $2l$ ($AO = OB = l$), p — нормальное давление на единицу длины стержня, которое предполагаем равномерным, k — коэффициент трения. Пусть M — главный момент системы сил относительно точки O . Требуется определить необходимые и достаточные условия, которые связывают величины F_x, F_y, M , параметры p, k, l и обеспечивают равновесие стержня. Будем предполагать выполненным условие

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} < F_{\text{тр}} = kp \cdot 2l, \quad (1.8)$$

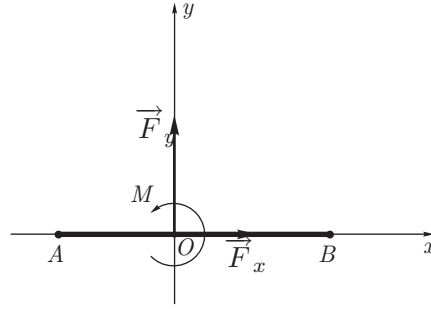


Рис. 1.4. Область контакта — тонкий стержень: AB — стержень, $\vec{F} = (F_x, F_y)$ — главный вектор, M — главный момент относительно центра масс O стержня приложенной системы сил

которое обеспечивает отсутствие возможного начального поступательного движения стержня при приложении как угодно малого момента M . Вводим безразмерные величины

$$f_x = F_x/F_{\text{тр}}, \quad f_y = F_y/F_{\text{тр}}, \quad m = M/(2l \cdot F_{\text{тр}}).$$

Условие (1.8) тогда примет вид

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2 < 1. \quad (1.9)$$

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. Пусть выполнено (1.9). Тогда для равновесия стержня необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$|m| < \frac{1}{4} \left[(1 - f_y^2)z - f_x \sqrt{1 - f_y^2} \sqrt{z^2 - 1} \right], \quad (1.10)$$

где z — корень уравнения

$$\Psi(z) = \sqrt{z^2 - 1} \ln \frac{z + 1}{z - 1} = \frac{2f_x}{\sqrt{1 - f_y^2}}, \quad z \in (1, \infty), \quad (1.11)$$

который всегда существует и является единственным.

Перед доказательством теоремы сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. График функции $\Psi(z)$ из уравнения (1.11) представлен на рисунке 1.5. Функция $\Psi(z)$ является положительной, монотонно возрастающей, выпуклой вверх на интервале $1 < z < \infty$, причем она имеет горизонтальную асимптоту $\Psi = 2$. Обоснование этих утверждений приведено в конце доказательства теоремы 1.1. Введем обозначение

$$\sigma = 2f_x / \sqrt{1 - f_y^2}. \quad (1.12)$$

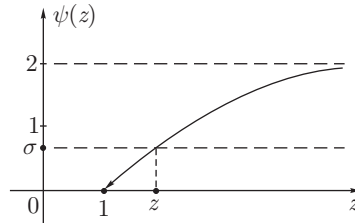


Рис. 1.5. График функции $\Psi(z)$, определяющей решение z уравнения (1.11). $\sigma = \frac{2f_x}{\sqrt{1 - f_y^2}}$, $\sigma \in [0, 2)$

Используя (1.9), можно показать, что $\sigma \in [0, 2)$. Отсюда и следует существование единственного корня уравнения (1.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно видеть, что правая часть неравенства (1.10) всегда положительна:

$$(1 - f_y^2)^2 z^2 > f_x^2 (1 - f_y^2) (z^2 - 1) \rightarrow (1 - f_y^2) z^2 > f_x^2 (z^2 - 1).$$

Последнее неравенство эквивалентно $f_x^2 > z^2 (f^2 - 1)$, которое, очевидно, выполнено при $f^2 < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используя обозначение (1.12), условия теоремы 1.1 можно переписать более компактно:

$$|m| < \frac{1 - f_y^2}{4} \left(z - \frac{\sigma}{2} \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad \Psi(z) = \sigma.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 1.1 позволяет решить следующую задачу. Зафиксируем модуль главного вектора сил f . Будем искать такую ориентацию вектора \vec{f} , при которой условия равновесия для главного момента максимально широки, т. е. обеспечивается максимум правой части неравенства (1.10) при условии (1.11).

Оказывается (доказательство приведено ниже после доказательства теоремы 1.1), что этот максимум достигается при горизонтальном расположении силы \vec{f} , т. е. $f_y = 0$, $f_x = f$. При этом

$$m_{\max} = \frac{1}{4}(z_0 - f\sqrt{z_0^2 - 1}),$$

где z_0 — корень уравнения

$$\sqrt{z^2 - 1} \ln \frac{z + 1}{z - 1} = 2f.$$

Таким образом, мы имеем необходимое условие равновесия:

$$|m| \leq \frac{1}{4}(z_0 - f\sqrt{z_0^2 - 1}) = \frac{1}{4} \left[z_0 - \frac{1}{2}(z_0^2 - 1) \ln \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} \right].$$

Согласно рис. 1.5 при $f \rightarrow 1$ $z_0 \rightarrow \infty$. Вычислим предел:

$$\lim_{z_0 \rightarrow \infty} \left[z_0 - \frac{1}{2}(z_0^2 - 1) \ln \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} \right] = 0$$

(при вычислении предела использовались замена $t = \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1}$, затем правило Лопиталья). Таким образом, при $f \rightarrow 1$ $m_{\max} = 0$, т. е. любой как угодно малый момент выводит стержень из равновесия.

Рассмотрим другой предельный случай: $f \rightarrow 0$ (отсутствие главного вектора). В этом случае $f_x = f_y = 0$ и из (1.10) и (1.11) получим: $z = 1$ (см. рис. 1.5 при $\sigma = 0$) и $m < \frac{1}{4}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотрим случай нормального к стержню главного вектора \vec{f} , т. е. $f_x = 0$, $f_y \neq 0$. Тогда уравнение (1.11) имеет лишь только корень $z = 1$, условие равновесия (1.10) принимает вид неравенства

$$|m| < \frac{1 - f_y^2}{4}, \tag{1.13}$$

а область равновесия в плоскости переменных $\{f_y, m\}$ ограничена двумя параболой, как это указано на рис 1.6.

Неравенство (1.13) может быть использовано при решении следующей задачи [9]. Стержень AB (см. рис. 1.7) лежит на шерохова-

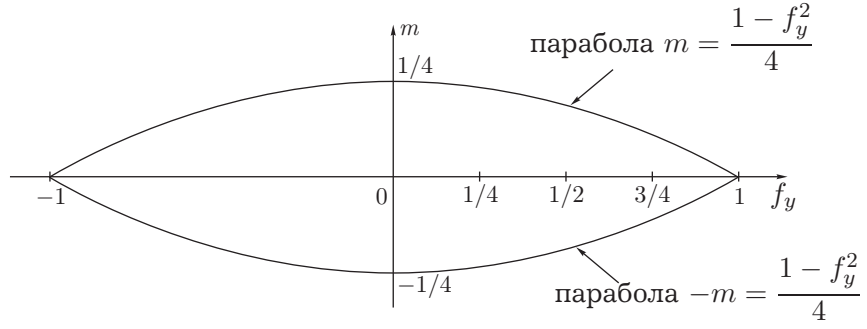


Рис. 1.6. Область равновесия в случае $f_x = 0$, $|f_y| < 1$

том горизонтальном столе. Коэффициент трения k , масса стержня m . Какой минимальной силой F , приложенной к одному из концов и перпендикулярной стержню, возможно его стронуть? В данном случае мы имеем $F_x = 0$, $F_y = F$, $M = Fl$, $p = \rho g$, где ρ — линейная плотность стержня, l — его полудлина. Переходя к безразмерным переменным

$$f_y = F_y / (k\rho g 2l), \quad m = Fl / (k\rho g 4l^2),$$

мы запишем неравенство (1.13) в виде:

$$\frac{F_y l}{k\rho g 4l^2} < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{F_y^2}{k^2 \rho^2 g^2 4l^2} \right), \quad (1.14)$$

и нам остается найти максимальное F_y , удовлетворяющее этому неравенству. Ясно, что найденное F_y будет соответствовать минимальной силе F_y , способной привести стержень AB в движение. Максимальное же F_y получается тогда, когда в (1.14) будет знак равенства. Решая соответствующее квадратное уравнение относительно F_y , мы найдем ответ:

$$F_y = -2lk\rho g + \sqrt{8l^2 k^2 \rho^2 g^2} = k \cdot 2l\rho g(\sqrt{2} - 1) = kmg(\sqrt{2} - 1).$$

Оказывается, что этот же ответ справедлив и для решения более общей задачи. В какой точке стержня и в каком направлении

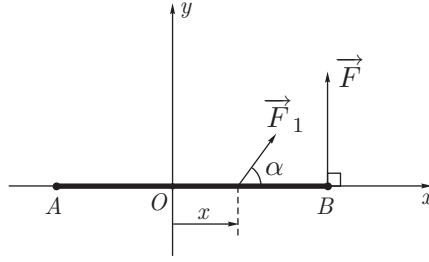


Рис. 1.7. Задача о перемещении стержня при помощи одиночной силы

следует приложить силу \vec{F}_1 , чтобы его сдвинуть и обеспечить минимум модуля \vec{F}_1 (см. рис. 1.7)? Пусть сила \vec{F}_1 приложена в точке стержня, отстоящей от его центра на расстояние x , $-l \leq x \leq l$, и под углом α , $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (случай $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ полностью симметричен). Тогда имеем: $F_x = F_1 \cos \alpha$, $F_y = F_1 \sin \alpha$, $M = xF_1 \sin \alpha$. В безразмерных переменных

$$f_x = f \cos \alpha, \quad f_y = f \sin \alpha, \quad m = \xi f \sin \alpha,$$

где

$$f = \frac{F_1}{k\rho g \cdot 2l}, \quad \xi = \frac{x}{2l}, \quad |\xi| \leq \frac{1}{2},$$

неравенство (1.10) для равновесия примет вид:

$$f|\xi| \sin \alpha < \frac{1}{4} \left[(1 - f^2 \sin^2 \alpha)z - f \cos \alpha \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{z^2 - 1} \right], \quad (1.15)$$

где z — решение соответствующего уравнения (1.11), причем $z > 1$. Покажем, что неравенство (1.15) выполнено при любых $f < \sqrt{2} - 1$ (т.е. при $F_1 < kmg(\sqrt{2} - 1)$), $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $z > 1$, $\xi \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ (т.е. при $|x| < l$). Это будет означать равновесие стержня и минимальность модуля двигающей силы \vec{F} , которая перпендикулярна AB и приложена в конце стержня. Перепишем (1.15) в виде

$$4f|\xi| \sin \alpha - \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha} \left[z \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha} - f \cos \alpha \sqrt{z^2 - 1} \right] < 0. \quad (1.16)$$

Найдем минимум по $z \in [1, \infty)$ выражения в квадратных скобках, беря производную по z и приравнивая ее к нулю:

$$z_{\min} = \frac{\sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{1 - f^2}}. \quad (1.17)$$

Нетрудно проверить, что это точка минимума, т.к. вторая производная по z от квадратной скобки положительна. Следовательно, неравенство (1.16) выполнено, если (1.16) соблюдается при $z = z_{\min}$ из (1.17). Подставляя (1.17) в (1.16), получим

$$4f|\xi| \sin \alpha - \sqrt{1 - f^2} \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha} < 0. \quad (1.18)$$

Производная по α левой части неравенства (1.18) положительная при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, (1.18) выполнено, если оно соблюдено при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т.е. имеем неравенство

$$4f|\xi| - (1 - f^2) < 0.$$

Последнее неравенство соблюдается, если оно выполнено при $\xi = \frac{1}{2}$, т.е. получим

$$2f - 1 + f^2 < 0, \quad (1.19)$$

а неравенство (1.19) выполнено при $0 < f < f_1 = -1 + \sqrt{2}$. Что и требовалось доказать.

Отметим, что элементарное обсуждение рассмотренной задачи содержится в книге [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Задача о равновесии стержня рассматривалась в работе [10]. Решение осуществлялось путем сведения к эквивалентной задаче оптимального управления и применения принципа максимума Л. С. Понтрягина. Затем решение исследовалось численно и строилась область равновесия в пространстве параметров $\{f_x, f_y, m\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

В соответствии с методом, изложенным в § 1. 1, для равновесия стержня необходимо и

достаточно выполнение условия (см. формулу (1.4))

$$\max_{(x,y)} \Phi_2(x, y) \leq M \leq \min_{(x,y)} \Phi_1(x, y), \quad (1.20)$$

причем в случае области, образуемой тонким стержнем, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y) &= F_y x - F_x y + kp \int_{-l}^l \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \\ \Phi_2(x, y) &= F_y x - F_x y - kp \int_{-l}^l \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

где (x, y) — произвольная точка плоскости. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \max_{(x,y)} \Phi_2(x, y) &= -\min_{(x,y)} (-\Phi_2(x, y)) = \\ &= -\min_{(x,y)} \left[-F_y x + F_x y + k \int_{-l}^l \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Если (x^*, y^*) — точка, доставляющая \min функции $\Phi_1(x, y)$, то, в силу симметрии, точка $(-x^*, -y^*)$ будет доставлять \min выражению в квадратных скобках, и потому $\max_{(x,y)} \Phi_2 = -\min_{(x,y)} \Phi_1$. Следовательно, условие равновесия (1.20) приобретает вид:

$$|M| \leq \min_{(x,y)} \Phi_1(x, y). \quad (1.22)$$

Берем интеграл в выражении (1.21) для Φ_1 , получим, используя безразмерные величины $f_x = F_x/F_{\text{тр}}$, $f_y = F_y/F_{\text{тр}}$, $m = M/(2lF_{\text{тр}})$:

$$\Phi_1(x, y) = f_y x - f_x y + \frac{(x + l)\rho_1 - (x - l)\rho_2}{4l} + \frac{y^2}{4l} \ln \frac{x + l + \rho_1}{x - l + \rho_2}, \quad (1.23)$$

где обозначено

$$\rho_1 = \sqrt{y^2 + (x + l)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{y^2 + (x - l)^2}. \quad (1.24)$$

Условие равновесия (1.22) принимает вид:

$$|m| \leq \frac{1}{2l} \min_{(x,y)} \Phi_1(x, y), \quad (1.25)$$

где $\Phi_1(x, y)$ дается формулой (1.23). Ищем стационарные точки функции $\Phi_1(x, y)$. Имеем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= f_y + \frac{1}{2l}(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} &= -f_x + \frac{y}{2l} \ln \frac{x + l + \rho_1}{x - l + \rho_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Из уравнений (1.24) получим, используя (1.26):

$$x = -f_y(\rho_1 + lf_y), \quad y = \sqrt{1 - f_y^2} \sqrt{(\rho_1 + lf_y)^2 - l^2}. \quad (1.27)$$

Используя (1.27), преобразуем (1.26) к виду:

$$\rho_1 - \rho_2 = -2lf_y, \quad \sqrt{(\rho_1 + lf_y)^2 - l^2} \ln \frac{\rho_1 + lf_y + l}{\rho_1 + lf_y - l} = \frac{2lf_x}{\sqrt{1 - f_y^2}}. \quad (1.28)$$

В новых обозначениях, с использованием (1.26), получим из (1.23):

$$\min_{(x,y)} \Phi_1 = \frac{1}{2} \left[(1 - f_y^2)(\rho_1 + lf_y) - f_x \sqrt{1 - f_y^2} \sqrt{(\rho_1 + lf_y)^2 - l^2} \right].$$

Обозначим $z_1 = \rho_1 + lf_y$. Тогда

$$\min_{(x,y)} \Phi_1 = \frac{1}{2} \left[(1 - f_y^2)z_1 - f_x \sqrt{1 - f_y^2} \sqrt{z_1^2 - l^2} \right], \quad (1.29)$$

причем, как это следует из (1.28), параметр z_1 удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{z_1^2 - l^2} \ln \frac{z_1 + l}{z_1 - l} = \frac{2lf_x}{\sqrt{1 - f_y^2}}. \quad (1.30)$$

Наконец, вводя безразмерный параметр $z = \frac{z_1}{l}$, получим из (1.25), (1.29), (1.30) соотношения (1.10), (1.11) теоремы 1.1.

Установим теперь свойства функции $\Psi(z)$ из (1.11), указанные в замечании 1. Для упрощения выкладок сделаем замену $t = \frac{z+1}{z-1}$. Отсюда получим $z = \frac{t+1}{t-1}$. Тогда имеем:

$$\Psi(z) = \Psi(t) = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} \ln t.$$

Точка $z = 1$ соответствует точке $t = \infty$, а точка $z = \infty$ — точке $t = 1$. Имеем:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{t} \ln t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{2\sqrt{t}}{t} + \frac{\ln t}{\sqrt{t}}}{1} = 2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{t} \ln t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{t}}{t} + \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \right) = 0 = \lim_{z \rightarrow 1} \Psi(z).$$

Далее,

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{t}}{t} + \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \right) (t-1) - 2\sqrt{t} \ln t}{(t-1)^2} = \frac{2(t-1) - (t+1) \ln t}{\sqrt{t}(t-1)^2}.$$

Покажем, что $\gamma(t) = 2(t-1) - (t+1) \ln t < 0$ при $t > 1$.

Имеем $\gamma(1) = 0$, $\gamma'_t = 2 - \ln t - \frac{t+1}{t}$, $\gamma'(1) = 0$, $\gamma''_{t^2} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} < 0$ при $t > 1$. Отсюда следует: $\gamma'(t) < 0$ при $t > 1$ и $\gamma(t) < 0$ при $t > 1$, а значит, и $\Psi'_t < 0$. (!) А так как $\frac{dt}{dz} = -\frac{2}{(z-1)^2} < 0$, то мы получаем $\frac{d\Psi}{dz} > 0$ при $z > 1$. Итак, функция $\Psi(z)$ монотонна по

$z \in [1, \infty)$ и заключена между числами 0 и 2, причем эти значения достигаются на концах интервала $(1, \infty)$. Отсюда следует существование и единственность корня уравнения (1.11), т. к. параметр $\sigma = \frac{2fx}{\sqrt{1-f_y^2}}$ принимает значения от 0 до 2 при $f_x^2 + f_y^2 < 1$.

Отметим в заключение доказательства еще одно важное обстоятельство. Формулы (1.26) для стационарной точки дают лишь необходимое условие экстремума функции Φ_1 . Для того чтобы быть уверенным, что мы обнаружили минимум, надо проверить положительную определенность второй вариации в найденной стационарной точке, что эквивалентно условиям:

$$\Delta = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} > 0,$$

где производные берутся в стационарной точке. Подсчеты показывают, что в стационарной точке

$$\Delta = \frac{1-f_y^2}{z^2-1} \left(\frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1 \right) > 0 \quad \text{при } z \in [1, \infty).$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \frac{z(1-f_y^2)}{z^2-1} > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - \frac{z(1-f_y^2)}{z^2-f_y^2} = \\ &= \frac{1}{z} \left[\frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - \frac{z^2(1-f_y^2)}{z^2-f_y^2} \right] > \frac{1}{z} \left[\frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1 \right] > 0, \end{aligned}$$

т. к. $z \ln \frac{z+1}{z-1} > 2$ и $\frac{z^2(1-f_y^2)}{z^2-f_y^2} < 1$ при $z \in (1, \infty)$. Подробные выкладки опущены в силу их громоздкости.

На этом доказательство теоремы 1.1 полностью закончено. ■

Докажем теперь утверждение, высказанное в замечании 4. Зафиксируем модуль главного вектора f , и пусть α — угол, составляемый вектором \vec{f} с осью x . Тогда $f_x = f \cos \alpha$, $f_y = f \sin \alpha$, а соотношения (1.10) и (1.11) теоремы 1.1 приобретают вид:

$$|m| < \Phi_1 = \frac{1}{4} \left[(1 - f^2 \sin^2 \alpha) z - f \cos \alpha \sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{z^2 - 1} \right], \quad (1.31)$$

$$\Psi(z) = \sqrt{z^2 - 1} \ln \frac{z+1}{z-1} = \frac{2f \cos \alpha}{\sqrt{1 - f^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (1.32)$$

Нам нужно выбрать α так, чтобы максимизировать Φ_1 из (1.31) при условии (1.32). Из соотношения (1.32) найдем $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ через Ψ :

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 - f^2}{f^2} \frac{\Psi^2}{4 - \Psi^2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{4f^2 - \Psi^2}{f^2(4 - \Psi^2)}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (1.31) для Φ_1 . Получим Φ_1 как функцию от z :

$$\Phi_1(z) = 2(1 - f^2) \frac{2z - (z^2 - 1) \ln \frac{z+1}{z-1}}{4 - (z^2 - 1) \left(\ln \frac{z+1}{z-1} \right)^2}. \quad (1.33)$$

Ясно, что максимизация Φ_1 по $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ эквивалентна максимизации Φ_1 из (1.33) по $z \in [1, \infty)$. Покажем, что $\Phi_1(z)$ является монотонной возрастающей по z функцией, для чего вычислим производную от $\Phi_1(z)$:

$$\frac{d\Phi_1}{dz} = \frac{\left[8 + (z^2 + 1) \left(\ln \frac{z+1}{z-1} \right)^2 - 6z \ln \frac{z+1}{z-1} \right] \cdot 4(1 - f^2)}{\left[4 - (z^2 - 1) \left(\ln \frac{z+1}{z-1} \right)^2 \right]^2}. \quad (1.34)$$

Докажем, что выражение в квадратных скобках числителя полученного выражения положительно при $z \geq 1$. Действительно, имеем тождество:

$$h(z, \eta) = 8 + (z^2 + 1)\eta^2 - 6z\eta = (z\eta - 3)^2 + \eta^2 - 1, \quad (1.35)$$

где обозначено

$$\eta = \ln \frac{z+1}{z-1}.$$

Из (1.35) следует, что $h(z, \eta) > 0$ при $\eta \geq 1$. Неравенство $\eta \geq 1$ справедливо при $z \in (1, z_1]$, где z_1 — число, соответствующее $\eta = 1$. т.е. $\ln \frac{z_1+1}{z_1-1} = 1$, и, следовательно, $z_1 = \frac{e+1}{e-1}$, где $e \approx 2,71$, т.е. $z_1 \approx 2,17$.

Нам осталось исследовать интервал $z \in [z_1, \infty)$. Вспомним, что η удовлетворяет соотношению (1.32), следовательно

$$\eta\sqrt{z^2 - 1} < 2 \rightarrow \eta < \eta_1 = \frac{2}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Фиксируем z и находим $\min_{\eta \in (0, \eta_1)} h(z, \eta)$. Из (1.35), беря производную по η , получим:

$$2\eta(z^2 + 1) - 6z = 0 \rightarrow \eta = \eta_2 = \frac{3z}{z^2 + 1}.$$

Покажем, что $\eta_2 > \eta_1$, т.е.

$$\frac{3z}{z^2 + 1} > \frac{2}{\sqrt{z^2 - 1}}. \quad (1.36)$$

Неравенство (1.36) эквивалентно неравенству

$$5z^4 - 17z^2 - 4 > 0.$$

Нетрудно проверить, что последнее неравенство заведомо выполнено при $z > z_1 = 2,17$ (положительный корень уравнения $5z^4 - 17z^2 - 4 > 0$ равен $\sqrt{3,6} < 2,17!$). Итак, $\eta_2 > \eta_1$, а значит, $\min h(z, \eta)$ достигается на концах интервала $(0, \eta_1)$. Имеем

$$h(z, 0) = 8 > 0; \quad h(z, \eta_1) = \frac{4}{\sqrt{z^2 - 1}} \left(\frac{3z^2 - 1}{\sqrt{z^2 - 1}} - 3z \right) > 0,$$

т.к. неравенство $\frac{3z^2 - 1}{\sqrt{z^2 - 1}} > 3z$ эквивалентно неравенству $1 > -3z^2$, которое заведомо верно.

Приведенные рассуждения доказывают справедливость неравенства $h(z, \eta) > 0$ при $z \in (1, \infty)$. А это обеспечивает положительность производной из выражения в (1.34). Следовательно, максимум $\Phi_1(z)$ из (1.33) достигается при максимальном $z = z_0$, удовлетворяющем уравнению (1.32). Такое значение достигается при α , которое

максимизирует правую часть уравнения (1.32), что происходит при $\alpha = 0$. Следовательно, z_0 удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{z_0^2 - 1} \ln \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = 2f,$$

а соответствующий максимум равен

$$\Phi_1(z_0) = \frac{1}{4} \left[z_0 - f \sqrt{z_0^2 - 1} \right].$$

Таким образом, утверждение из замечания 4 доказано.

§ 1.4. Дискретный контакт в случае опирания на две точки.

Формулировка результатов и их обоснование

В настоящем параграфе рассматривается задача о равновесии на шероховатой плоскости в том случае, когда область контакта дискретна и состоит из двух точек A и B (см. рис. 1.2). Задача решается в предположениях, изложенных в § 1.2. Начало координат поместим в центре отрезка AB (точка O на рис. 1.2), ось x направим вдоль AB , ось y — перпендикулярно AB , а направления осей выберем так, чтобы соответствующие проекции главного вектора приложенной системы сил (в плоскости контакта) были положительны: $F_x \geq 0$, $F_y \geq 0$. Ясно, что это не нарушает общности. Пусть длина AB равна $2l$ ($AO = OB = l$), N_A , N_B — нормальные давления (нагрузки) в точках A и B , k — коэффициент трения. Пусть M — главный момент приложенной (плоской) системы сил относительно центра O . Требуется определить необходимые и достаточные условия, которые связывают величины F_x, F_y, M , параметры N_A, N_B, k, l и обеспечивают равновесие отрезка AB . Будем предполагать выполненным условие

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} < F_{\text{тр}} = k(N_A + N_B), \quad (1.37)$$

которое обеспечивает отсутствие возможного начального поступательного движения AB при приложении как угодно малого момента M . Вводим безразмерные величины:

$$f_x = \frac{F_x}{F_{\text{тр}}}, \quad f_y = \frac{F_y}{F_{\text{тр}}}, \quad m = \frac{M}{2l \cdot F_{\text{тр}}},$$

$$\mu_1 = \frac{N_A}{N_A + N_B}, \quad \mu_2 = \frac{N_B}{N_A + N_B}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Условие (1.37) тогда примет вид

$$f^2 = f_x^2 + f_y^2 < 1. \quad (1.38)$$

Для удобства дальнейшего письма введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \mu_2 - \mu_1 = 2\mu_2 - 1 = 1 - 2\mu_1, \quad \text{при } \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_1 + \mu_2 = 1, \\ \xi_1 &= \frac{f_y - f^2}{1 - f_y}, \quad \xi_2 = \frac{f_y + f^2}{1 + f_y}, \\ A(\sigma) &= \frac{1}{2f^2} \left(f_y \sigma + f_x \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)} \right) \quad \text{при } |\sigma| < f, \\ B(\sigma) &= \frac{1}{2} \min \{ (1 - f_y + \sigma), (1 + f_y - \sigma) \}. \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Отметим, что функция $A(\sigma)$ из (1.39) определена на отрезке $\sigma \in [-f, f]$ и при $f \neq 0$. Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть выполнено (1.38). Тогда для равновесия области AB необходимо и достаточно:

- 1) при $f_y \leq f^2$ $|\sigma| \leq |\xi_1|$, $-A(-\sigma) < m < A(\sigma)$,
- 2) при $f_y \leq f^2$ $|\xi_1| < \sigma \leq \xi_2$, $-B(-\sigma) < m < A(\sigma)$,
- 3) при $f_y \leq f^2$ $\sigma \notin [\xi_1, \xi_2]$, $-B(-\sigma) < m < B(\sigma)$,
- 4) при $f_y > f^2$ $\sigma \in [\xi_1, \xi_2]$, $-B(-\sigma) < m < A(\sigma)$,
- 5) при $f_y > f^2$ $\sigma \notin [\xi_1, \xi_2]$, $-B(-\sigma) < m < B(\sigma)$.

Перед доказательством теоремы сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для корректности формул, приведенных в теореме 1.2, необходимо показать соблюдение следующих неравенств:

$$|\xi_1| < \xi_2 < f, \quad (1.40)$$

т. к. в случаях 1), 2), 4) теоремы требуется введение функции $A(\sigma)$, которая определена при $|\sigma| < f$. Отметим, что $\xi_2 > 0$ при любых значениях параметров $f_x \geq 0$, $f_y \geq 0$, а $\xi_1 > 0$ при $f_y > f^2$ и $\xi_1 < 0$ при $f_y < f^2$.

Доказательство неравенств (1.40) сводится к проверке следующих неравенств:

$$\xi_1^2 < \xi_2^2, \quad \xi_2 < f.$$

Первое из этих неравенств (с использованием обозначений из (1.39)) эквивалентно (после проведения соответствующих выкладок) неравенству

$$(1 - f^2)(f^2 - f_y^2) > 0,$$

которое, очевидно, справедливо, т. к. $f < 1$, $f_y < f$. Второе неравенство эквивалентно неравенству

$$(1 - f)(f - f_y) > 0,$$

которое также выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество значений для m , определяемое случаем 1) теоремы, непусто при $f_x > 0$, $|\sigma| < f$.

Действительно,

$$A(\sigma) + A(-\sigma) = \frac{f_x}{f^2} \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)} > 0.$$

При $f_x = 0$ мы получим $f_y = f$, т. е. $f_y > f^2$ (т. к. $f < 1$), и мы получаем случаи 4), 5) теоремы. При $|\sigma| \geq f$ будем иметь $\sigma \notin [\xi_1, \xi_2]$, т. е. случаи 3), 5) теоремы.

Проверим еще непустоту множества для t в случае 2). Имеем:

$$\begin{aligned} A(\sigma) + B(-\sigma) &= \frac{1}{f^2} \left(f_y \sigma + f_x \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)} \right) + 1 - f_y - \sigma = \\ &= \frac{f_x}{f^2} \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)} + (1-f_y) - \sigma \frac{f^2-f_y}{f^2} > \\ &> \frac{f_x}{f^2} \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)} + (1-f_y) - \frac{f^2+f_y}{1+f_y} \cdot \frac{f^2-f_y}{f^2}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо потому, что, согласно условиям 2) теоремы, имеем

$$0 < |\xi_1| < \sigma \leq \xi_2 = \frac{f_y + f^2}{1 + f_y}.$$

Производя алгебраические преобразования в полученном соотношении, приходим к неравенству:

$$A(\sigma) + B(-\sigma) > \frac{f_x}{f^2} \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)} + \frac{(1-f^2)(f^2+f_y^2)}{f^2(1+f_y)} > 0.$$

Аналогично проверяется непустота множеств для t в случаях 3)–5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Рассмотрим случай $\sigma = 0$, т. е. $\mu_2 = \mu_1 = \frac{1}{2}$. Этот случай равных нормальных реакций в точках A и B подробно рассматривался Н. Е. Жуковским [8], а также затем отмечался в работе Ф. Л. Черноусько [11].

При $\sigma = 0$ имеем из (1.39):

$$A(0) = \frac{1}{2f} f_x \sqrt{1-f^2}, \quad B(0) = \frac{1}{2}(1-f_y).$$

Ясно, что при $\sigma = 0$ могут реализоваться лишь случаи 1) и 5) теоремы. Поэтому для равновесия необходимо и достаточно:

$$\begin{aligned} \text{при } f_y \leq f^2 \quad |m| &< \frac{1}{2f} f_x \sqrt{1-f^2}, \\ \text{при } f_y > f^2 \quad |m| &< \frac{1}{2}(1-f_y). \end{aligned}$$

Этот результат был приведен в работе [10].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

- 1) $f_x = 0$, $f_y = f > 0$ (главный вектор перпендикулярен отрезку AB). В этом случае из (1.39) получим:

$$A(\sigma) = \frac{\sigma}{2f}, \quad B(\sigma) = \frac{1}{2} \min \{(1 - f + \sigma), (1 + f - \sigma)\},$$

$$\xi_1 = f, \quad \xi_2 = f, \quad B(-\sigma) = \frac{1}{2} \min \{(1 - f - \sigma), (1 + f + \sigma)\}.$$

Ясно, что реализуются случаи 4), 5) теоремы, т. к. $f < 1$. Поэтому получим условия равновесия в виде:

$$\sigma = f, \quad -\frac{1}{2}(1 - 2f) < m < \frac{1}{2} \quad (\text{случай 4) вырождается!}),$$

$$\sigma \in (f, 1), \quad -\frac{1}{2}(1 - f - \sigma) < m < \frac{1}{2}(1 + f - \sigma),$$

$$\sigma \in [-f, f), \quad -\frac{1}{2}(1 - f - \sigma) < m < \frac{1}{2}(1 - f + \sigma),$$

$$\sigma \in [-1, -f], \quad -\frac{1}{2}(1 + f + \sigma) < m < \frac{1}{2}(1 - f + \sigma).$$

Если теперь в этих соотношениях устремить $f \rightarrow 0$ (нулевой главный вектор), то получим условия:

$$\sigma = 0, \quad |m| < \frac{1}{2},$$

$$\sigma \in (0, 1), \quad -\frac{1}{2}(1 - \sigma) < m < \frac{1}{2}(1 - \sigma) \rightarrow |m| < \frac{1}{2}(1 - \sigma),$$

$$\sigma \in (-1, 0), \quad -\frac{1}{2}(1 + \sigma) < m < \frac{1}{2}(1 + \sigma) \rightarrow |m| < \frac{1}{2}(1 + \sigma).$$

Эти три неравенства эквивалентны одному условию:

$$\sigma \in (-1, 1), \quad |m| < \frac{1}{2}(1 - |\sigma|).$$

- 2) $f_y = 0$, $f_x = f > 0$ (главный вектор коллинеарен отрезку AB). В этом случае из (1.39) получим:

$$A(\sigma) = \frac{1}{2f} \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)}, \quad |\sigma| < f,$$

$$B(\sigma) = \frac{1}{2} \min \{(1 + \sigma), (1 - \sigma)\} = \frac{1}{2}(1 - |\sigma|), \quad \xi_1 = -f^2, \quad \xi_2 = f^2.$$

Ясно, что здесь реализуются случаи 1)–3) теоремы (т. к. $f^2 \geq f_y = 0$). Поэтому получим условия равновесия в следующем виде:

$$\sigma \in [-f^2, f^2], \quad |m| < \frac{1}{2f} \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)},$$

$$\sigma = f^2, \quad -\frac{1}{2}(1 - |\sigma|) \leq m \leq \frac{1}{2f} \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - f^4)} = \frac{1}{2}(1 - f^2),$$

$$\sigma \notin [-f^2, f^2], \quad |m| < \frac{1}{2}(1 - |\sigma|).$$

Таким образом, получим следующий результат: при $f_y = 0$, $f_x = f > 0$ уравнивающий главный момент m удовлетворяет необходимым и достаточным условиям:

$$\text{при } |\sigma| \leq f^2, \quad |m| < \frac{1}{2f} \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)},$$

$$\text{при } |\sigma| > f^2, \quad |m| < \frac{1}{2}(1-|\sigma|).$$

Первое условие можно представить так:

$$|\sigma| \leq f^2, \quad |m| < \frac{1}{2} \sqrt{1-f^2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{f}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{1-f^2}.$$

Если теперь осуществить предельный переход при $f \rightarrow 0$ (отсутствие главного вектора), то мы получим: при $\sigma \in [-1, 1]$, $|m| \leq \frac{1}{2}(1-|\sigma|)$, т. е. то, что было получено в п. 1. Это, конечно, можно было предвидеть.

Отметим, в заключение, вырожденную ситуацию: $f_x = f_y = 0$ и $\sigma = \pm 1$. В этом случае $m = 0$, т.е. как угодно малый момент нарушает равновесие, что соответствует вращению отрезка AB вокруг нагруженной точки (A или B).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. С помощью результатов теоремы 1.2 можно решать некоторые оптимизационные задачи таких типов:

- а) Определить такое распределение нормальных нагрузок μ_1, μ_2 ($\mu_1 + \mu_2 = 1$), при котором границы (или граница) изменения равновесного момента имеют наибольшее значение, т. е. достигается наибольшая сопротивляемость к поворотам площади контакта при фиксированном главном векторе \vec{f} . Нетрудно показать, используя результаты из замечания 4, что при симметричном расположении главного вектора ($f_x = 0$ или $f_y = 0$) наибольшая сопротивляемость поворотам реализуется при $\sigma = 0$, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ (равномерное и симметричное распределение). Если же $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$, то можно достичь максимальной верхней границы для m при распределении $\mu_2 - \mu_1 = \sigma = \sqrt{\frac{1-f^2}{1-f_y^2}}$, при этом значение верхней границы для m будет

$$m^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-f^2}{1-f_y^2}}.$$

б) Другой класс задач относится к задачам о минимальных силах. Фиксируем распределение нагрузок μ_1, μ_2 и ищем силу, минимальную по модулю и приложенную в некоторой ограниченной области отрезка AB , способную сдвинуть отрезок AB . Решение таких задач достаточно громоздко и поэтому здесь не рассматривается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2.

Доказательство теоремы основывается на формулах (1.6) из § 1.2. Пусть $P(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Используя введенные безразмерные величины $f_x, f_y, m, \mu_1, \mu_2$, мы должны решить следующие две задачи на экстремум (минимум):

1)

$$\begin{aligned} G_1(x, y, f_x, f_y, \mu_1, \mu_2) = \\ = f_y x - f_x y + \mu_1 \sqrt{(x+l)^2 + y^2} + \mu_2 \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \rightarrow \min_{(x,y)}; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} G_2(x, y, f_x, f_y, \mu_1, \mu_2) = \\ = -f_y x + f_x y + \mu_1 \sqrt{(x+l)^2 + y^2} + \mu_2 \sqrt{(x-l)^2 + y^2} \rightarrow \min_{(x,y)}. \end{aligned}$$

Если эти две задачи будут решены, то необходимые и достаточные условия для равновесного момента будут, следуя (1.6), такими:

$$-\frac{1}{2l} \min_{(x,y)} G_2 < m < \frac{1}{2l} \min_{(x,y)} G_1,$$

где операции минимизации проводятся по всем точкам плоскости. Напомним, что функция G_1 отвечает возможному начальному вращению вокруг точки P против часовой стрелки, а G_2 — вращению по часовой стрелке (см. рис. 1.2). Займемся сначала функцией G_1 . Обозначим

$$\rho_1 = \sqrt{(x+l)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2},$$

ρ_1 — это расстояние AP , ρ_2 — расстояние BP (см. рис. 1.2). Запишем необходимые условия экстремума:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} &= \frac{\mu_1}{\rho_1}(x+l) + \frac{\mu_2}{\rho_2}(x-l) + f_y = 0, \\ \frac{\partial G_1}{\partial y} &= \frac{\mu_1}{\rho_1}y + \frac{\mu_2}{\rho_2}y - f_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

Если решение системы (1.41) существует, то в этой точке выпишем достаточные условия

экстремума. После небольших преобразований получим:

$$\begin{aligned} G''_{1xx} &= y^2 \left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} \right) > 0, \\ G''_{1yy} &= \frac{\mu_1}{\rho_1^3} (x+l)^2 + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} (x-l)^2 > 0, \\ G''_{1xy} &= -y \left[\frac{\mu_1}{\rho_1^3} (x+l) + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} (x-l) \right]. \end{aligned}$$

Вычисляем $\delta = G''_{1xx} \cdot G''_{1yy} - (G''_{1xy})^2$:

$$\delta = \frac{\mu_1 \mu_2}{\rho_1^3 \rho_2^3} [(x-l) - (x+l)]^2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\rho_1^3 \rho_2^3} \cdot 4l^2 > 0.$$

Следовательно, в экстремальной точке достигается минимум. Теперь будем искать решения системы (1.41). Вводя углы α и β , в соответствии с рис. 1.2, получим:

$$\cos \alpha = \frac{x+l}{\rho_1}, \quad \sin \alpha = \frac{y}{\rho_1}, \quad \cos \beta = -\frac{x-l}{\rho_2}, \quad \sin \beta = \frac{y}{\rho_2}.$$

Тогда уравнения (1.41) запишутся так:

$$\mu_1 \cos \alpha - \mu_2 \cos \beta = -f_y, \quad \mu_1 \sin \alpha + \mu_2 \sin \beta = f_x. \quad (1.42)$$

Будем искать α и β из уравнений (1.42). Прежде всего, заметим, что $\min_{(x,y)} G_1$, если он существует, достигается при $y \geq 0$, следовательно, $\sin \alpha \geq 0$, $\sin \beta \geq 0$, причем $\alpha + \beta < \pi$! Вводим в рассмотрение три вектора:

$$\vec{\mu}_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \cos \alpha \\ \mu_1 \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu}_2 = \begin{pmatrix} -\mu_2 \cos \beta \\ \mu_2 \sin \beta \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -f_y \\ f_x \end{pmatrix},$$

модули векторов $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$ равны, соответственно, μ_1 , μ_2 , а вектор \vec{f}' перпендикулярен вектору \vec{f} и равен ему по модулю. Согласно равенствам (1.42) имеем:

$$\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{f}', \quad (1.43)$$

т. е. векторы $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, \vec{f}' образуют треугольник. Отсюда следует, что для разрешимости уравнений (1.42) необходимо соблюдение неравенств треугольника:

$$\mu_1 + \mu_2 > f, \quad \mu_1 + f > \mu_2, \quad \mu_2 + f > \mu_1.$$

Последние неравенства (т. к. $\mu_1 + \mu_2 = 1$ и $f < 1$) эквивалентны одному:

$$|\sigma| < f, \quad \sigma = \mu_2 - \mu_1. \quad (1.44)$$

Будем предполагать это неравенство выполненным. Векторное равенство (1.43) дает возможность строить экстремальные точки геометрически. Берем вектор \vec{f} и поворачиваем

его на 90° против часовой стрелки. Полученный вектор \vec{f}' прикладываем в точке A , затем из начала A вектора \vec{f}' проводим окружность радиуса μ_1 , а из конца — окружность радиуса μ_2 . Две эти окружности обязательно пересекутся при выполнении неравенства (1.44). Точки пересечения (их будет не более двух!) определяют углы α и β , по которым надо построить треугольник ABP . Из двух точек надо выбрать ту, для которой соответствующий треугольник ABP лежит в полуплоскости $y \geq 0$, кроме того, углы в вершинах A и B должны быть α и β , и $\alpha + \beta < \pi$! Все эти геометрические соображения приводят к дополнительным (уже достаточным!) условиям разрешимости системы (1.42) и исходной задачи на минимум:

$$\xi_1 = \frac{f_y - f^2}{1 - f_y^2} < \sigma = \mu_2 - \mu_1 < \frac{f^2 + f_y}{1 + f_y} = \xi_2. \quad (1.45)$$

Нужное (т. е. дающее решение исходной задачи на минимум функции G_1 !) решение тригонометрических уравнений (1.42) приводит к следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{f} (f_y \sqrt{1 - b^2} - f_x b), & \cos \alpha &= \frac{1}{f} (f_y b + f_x \sqrt{1 - b^2}), \\ \sin \beta &= \frac{1}{f} (-f_y \sqrt{1 - a^2} + f_x a), & \cos \beta &= \frac{1}{f} (f_y a + f_x \sqrt{1 - a^2}), \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где обозначено:

$$a = \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2 + f^2}{2\mu_2 f}, \quad b = \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2 - f^2}{2\mu_1 f}.$$

Нетрудно проверить непосредственно, что формулы (1.46) удовлетворяют системе (1.42). Для этого удобно использовать следующие тождества:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - a^2} &= \frac{1}{2\mu_2 f} \cdot \Delta, \quad \sqrt{1 - b^2} = \frac{1}{2\mu_1 f} \cdot \Delta, \\ \Delta &= \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)}, \end{aligned}$$

где $\sigma = \mu_2 - \mu_1$. Тогда проверка становится элементарной. Кроме того, при условии (1.44) соотношения (1.46) корректны (т. е. синусы и косинусы меньше единицы по модулю), а при выполнении условий (1.45) (более жестких, нежели условие (1.44)) будем иметь:

$$\sin \alpha \geq 0, \quad \sin \beta \geq 0, \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{\Delta}{2\mu_1 \mu_2} > 0, \quad \text{т. е. } (\alpha + \beta) < \pi. \quad (1.47)$$

Условия (1.47) обеспечивают возможность построения треугольника ABP в полуплоскости $y \geq 0$, а проверку (1.47) лучше всего проводить графически, построив графики следующих функций от σ :

$$f_y \sqrt{1 - a^2}, \quad f_y \sqrt{1 - b^2}, \quad f_x a, \quad f_x b.$$

Тогда нижняя граница для σ в (1.45) будет являться бóльшим корнем уравнения

$$f_y \sqrt{(1 - f^2)(f^2 - \sigma^2)} = f_x(\sigma + f^2) \quad \text{при } |\sigma| < f,$$

а верхняя граница для σ из (1.45) будет являться бóльшим корнем уравнения

$$f_y \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)} = f_x(\sigma - f^2) \text{ при } |\sigma| < f.$$

Отметим следующее немаловажное обстоятельство. Система (1.42) имеет еще одно решение, получаемое из (1.46) заменой знака у радикалов на обратный (это соответствует второй точке пересечения кругов радиусов μ_1 и μ_2 в описанной выше геометрической интерпретации решения!). Однако получаемое решение (даже удовлетворяющее условиям $\sin \alpha \geq 0$, $\sin \beta \geq 0$) не годится, т. к. для него

$$\sin(\alpha + \beta) = -\frac{\Delta}{2\mu_1\mu_2} < 0,$$

т. е. $\alpha + \beta > \pi$ и экстремальный треугольник ABP в области $y \geq 0$ построить невозможно!

Далее, из теоремы синусов для $\triangle ABP$ и формул (1.46) находим

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{2l \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2l\mu_1}{f^2 \cdot \Delta} [-f_y \cdot \Delta + f_x(\sigma + f^2)], \\ \rho_2 &= \frac{2l \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2l\mu_2}{f^2 \cdot \Delta} [f_y \cdot \Delta - f_x(\sigma - f^2)], \\ x &= -l + \frac{2l \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{l}{f^4 \cdot \Delta} [(f_x^2 - f_y^2)\sigma\Delta + f_x f_y (2\sigma^2 - f^2 - f^2\sigma^2)], \\ y &= \frac{2l \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{l}{f^4 \cdot \Delta} [-f_x^2(\sigma^2 - f^4) - f_y^2\Delta^2 + 2f_x f_y \sigma\Delta], \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Delta = \sqrt{(1-f^2)(f^2-\sigma^2)}, \quad \sigma = \mu_2^2 - \mu_1^2.$$

Подставляя полученные формулы в выражение для функции G_1 (см. начало доказательства), мы находим

$$\text{extremum}_{(x,y)} G_1 = 2l \cdot A(\sigma),$$

где $A(\sigma)$ введена в формулах (1.39). Причем полученная формула справедлива при соблюдении неравенств (1.45). Выше уже было показано (используя положительность второй вариации), что полученный экстремум является локальным минимумом. А так как функция $G_1(x, y)$ является выпуклой по (x, y) , то полученный минимум является также и глобальным!

Если условия (1.45) нарушены ($\sigma > \xi_2$ или $\sigma < \xi_1$), то поиск минимума следует продолжить. Здесь можно рассуждать двумя способами.

- 1) Если стационарной точки у функции G_1 внутри области $y > 0$ не имеется, то минимум ее достигается на границе этой области. Здесь следует ограничить область $y > 0$, например, так:

$$|x| < R \text{ при } y = 0, \quad x^2 + y^2 \leq R \text{ при } y \neq 0, \quad y > 0$$

и устремлять $R \rightarrow +\infty$. Нетрудно видеть, что на границе $x^2 + y^2 \leq R$, $y \neq 0$, $G_1 \rightarrow \infty$, при $R \rightarrow \infty$ и соблюдении неравенства $f^2 = f_x^2 + f_y^2 < \mu_1 + \mu_2 = 1$ и, следовательно, $\min G_1$ нужно искать на границе $|x| < R$, $y = 0$. Здесь функция G_1 упрощается и имеет вид:

$$G_1(x, 0) = f_y x + \mu_1 |x + l| + \mu_2 |x - l|.$$

Несложное исследование показывает, что минимум этой функции по $x \in [-\infty, +\infty]$ достигается в точке $x = l$ либо в точке $x = -l$, т. е. соответствует вращению (начальному или возможному) вокруг одной из точек опоры: A или B . Тогда

$$\min_x G_1(x, 0) = 2lB(\sigma),$$

где $B(\sigma)$ введена в формулах (1.39).

- 2) Воспользуемся выпуклостью функции G_1 по (x, y) и покажем, что при $\sigma \notin [\xi_1, \xi_2]$ в точке A либо в точке B выполнены достаточные условия локального минимума. Эти условия, как известно, заключаются в том, что производная функции $G_1(x, y)$ (в точке A или B) по любому направлению является неотрицательной. Имеем:

1° при $\sigma < \xi_1$ для точки A :

$$\frac{\partial G_1}{\partial \rho_\varphi} = \mu_1 - \mu_2 \cos \varphi + f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi;$$

2° при $\sigma > \xi_2$ для точки B :

$$\frac{\partial G_1}{\partial \rho_\varphi} = \mu_2 + \mu_1 \cos \varphi + f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi.$$

Неотрицательность производной при $\varphi \in [0, 2\pi]$ в случае 1° эквивалентна неравенству

$$\mu_1 > \sqrt{(f_y - \mu_2)^2 + f_x^2},$$

которое, после преобразований, приобретает вид $\sigma < \xi_1$, а соответствующие выводы в случае 2° приводят к неравенству $\sigma > \xi_2$. Таким образом, при указанных условиях локальный минимум достигается в одной из точек опоры и является, в силу выпуклости G_1 , глобальным ее минимумом. Вычисление функции G_1 в точках A или B приводит, опять же, к соотношению

$$\min G_1 = 2l \cdot B(\sigma), \text{ при } \sigma \notin [\xi_1, \xi_2].$$

На этом исследование минимума функции G_1 полностью завершено.

Перейдем к минимизации функции G_2 :

$$G_2(x, y, f_x, f_y, \mu_1, \mu_2) = -f_y x + f_x y + \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2.$$

Несложно заметить, что

$$G_2(x, y, f_x, f_y, \mu_1, \mu_2) = G_1(-x, -y, f_x, f_y, \mu_2, \mu_1),$$

т. е. задача сводится, опять же, к минимизации функции G_1 , где μ_2 заменяется на μ_1 , а μ_1 заменяется на μ_2 , и мы немедленно получаем ответ:

$$\min_{(x,y)} G_2 = 2l \cdot A(-\sigma) \quad \text{при} \quad -\sigma \in [\xi_1, \xi_2],$$

$$\min_{(x,y)} G_2 = 2l \cdot B(-\sigma) \quad \text{при} \quad -\sigma \notin [\xi_1, \xi_2].$$

Комбинация всех рассмотренных случаев приводит к неравенствам, выписанным в формулировке теоремы 1.2.

Доказательство теоремы завершено. ■

§ 1.5. Дискретный контакт при опирании на три точки.

Формулировка результатов и их обоснование

В настоящем параграфе рассматривается задача о равновесии на шероховатой плоскости области контакта, состоящей из трех точек A, B, C (см. рис. 1.3). Постановка задачи изложена в § 1.2. Начало координат O поместим в центре стороны AB ($AO = OB = \frac{c}{2}$), ось x направим вдоль AB , ось y — перпендикулярно AB , а направления осей (без ограничения общности) выберем так, чтобы соответствующие проекции главного вектора плоской приложенной системы сил были положительны: $F_x \geq 0$, $F_y \geq 0$. Длины сторон обозначим буквами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, а углы — соответствующими буквами вершин: A, B, C . Пусть N_A, N_B, N_C — нормальные давления (нагрузки) в точках A, B, C , которые (в силу статической определимости задачи) будем считать заданными, k — коэффициент трения. Пусть M — главный момент плоской системы сил относительно центра O . Требуется определить необходимые и достаточные условия, которые связывают величины F_x, F_y, M , параметры $N_A, N_B, N_C, k, a, b, c, A, B, C$ и обеспечивают равновесие треугольника ABC . Будем, аналогично

(1.37), предполагать выполненным условие

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} < F_{\text{тр}} = k(N_A + N_B + N_C) = kN, \quad (1.48)$$

которое обеспечивает отсутствие возможного начального поступательного движения ABC при приложении как угодно малого момента M . Вводим безразмерные величины:

$$f_x = \frac{F_x}{F_{\text{тр}}}, \quad f_y = \frac{F_y}{F_{\text{тр}}}, \quad m = \frac{M}{F_{\text{тр}}c},$$

$$\mu_1 = \frac{N_A}{N}, \quad \mu_2 = \frac{N_B}{N}, \quad \mu_3 = \frac{N_C}{N}, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Условие (1.48) тогда принимает вид

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} < 1. \quad (1.49)$$

Сформулируем сначала результаты, относящиеся к наиболее простому случаю $f_x = f_y = 0$, т. е. отсутствует главный вектор приложенной системы сил.

Теорема 1.3. Пусть $f = 0$ и из чисел μ_1, μ_2, μ_3 нельзя составить треугольник. Пусть, для определенности, $\mu_3 = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Тогда необходимое и достаточное условие равновесия для главного момента m следующее:

$$|m| < \frac{1}{c} (a\mu_2 + b\mu_1). \quad (1.50)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1.3 μ_1, μ_2, μ_3 удовлетворяют неравенству

$$\mu_3 - \mu_2 > \mu_1, \quad (1.51)$$

если, конечно, μ_3 — максимальное из чисел μ_1, μ_2, μ_3 .

Например, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{8}, \mu_3 = \frac{3}{4}$. Неравенство (1.51) и означает то, что из чисел μ_1, μ_2, μ_3 нельзя построить треугольник. Если максимальным является число μ_2 , то условие равновесия (1.50) будет

таким:

$$|m| < \frac{1}{c} (c\mu_1 + a\mu_3),$$

а если μ_1 максимально, то

$$|m| < \frac{1}{c} (c\mu_2 + b\mu_3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что условие равновесия (1.50) не зависит, вообще говоря, от углов $\triangle ABC$, а зависит только от отношений его сторон: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$. При постепенном нарушении условия (1.50) всегда начинается начальное вращение вокруг наиболее нагруженной точки (в данном случае точка C).

Рассмотрим теперь случай, когда из чисел μ_1, μ_2, μ_3 можно составить треугольник. Это означает справедливость строгих неравенств:

$$\mu_1 + \mu_2 > \mu_3, \quad \mu_1 + \mu_3 > \mu_2, \quad \mu_2 + \mu_3 > \mu_1, \quad (1.52)$$

которые, в силу условия $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, влекут неравенства (также строгие!):

$$1 > 2\mu_3, \quad 1 > 2\mu_2, \quad 1 > 2\mu_1. \quad (1.53)$$

Прежде чем сформулировать теорему 1.4, введем следующие обозначения: (x_C, y_C) — координаты вершины C в системе Oxy , $y_C > 0$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(1 - 2\mu_3)(1 - 2\mu_2)(1 - 2\mu_1)}, \quad \mu_j \in \left(0, \frac{1}{2}\right), j = 1, 2, 3 \\ \lambda &= \frac{2\mu_3^2 y_C + c\sigma}{2\mu_3^2 x_C + c(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \\ x_p &= \frac{c}{2(1 + \lambda^2)} \left[(1 - \lambda^2) \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_3^2} + 2\lambda \frac{\sigma}{\mu_3^2} + 2\lambda \frac{\mu_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2}{\sigma} \right], \\ y_p &= \frac{c}{2(1 + \lambda^2)} \left[2\lambda \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_3^2} + (\lambda^2 - 1) \frac{\sigma}{\mu_3^2} + 2\lambda^2 \frac{\mu_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2}{\sigma} \right], \\ m_0 &= \frac{1}{c} \left[\mu_1 \sqrt{\left(x_p + \frac{c}{2}\right)^2 + y_p^2} + \mu_2 \sqrt{\left(x_p - \frac{c}{2}\right)^2 + y_p^2} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_3 \sqrt{(x_p - x_C)^2 + (y_p - y_C)^2} \right], \\ m_1 &= \min \left\{ \frac{a}{c} \mu_2 + \frac{b}{c} \mu_1, \mu_1 + \frac{a}{c} \mu_3, \mu_2 + \frac{b}{c} \mu_3 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Отметим, что, в силу неравенств (1.53), обозначение для σ из (1.54) корректно, а если в выражении для λ знаменатель обращается в нуль, то в выражениях для x_p, y_p из (1.54) следует перейти к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теорема 1.4. Пусть $f = 0$ и из чисел μ_1, μ_2, μ_3 можно составить треугольник (т.е. соблюдены неравенства (1.52)). Тогда если углы треугольника ABC удовлетворяют неравенствам

$$\cos A > \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2}{2\mu_2\mu_3}, \quad \cos B > \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2 - \mu_3^2}{2\mu_1\mu_3}, \quad \cos C > \frac{\mu_3^2 - \mu_2^2 - \mu_1^2}{2\mu_1\mu_2}, \quad (1.55)$$

то необходимое и достаточное условие равновесия следующее:

$$|m| < m_0, \quad (1.56)$$

а если хотя бы одно из неравенств в (1.55) нарушено, то необходимое и достаточное условие для равновесия такое:

$$|m| < m_1, \quad (1.57)$$

где m_0, m_1 даются формулами (1.54).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что при выполнении условий (1.55) (и $f = 0$) равновесие сохраняется при главном моменте, удовлетворяющем неравенству (1.56), но как только это неравенство нарушится, то возможно начальное вращение ABC вокруг точки P , лежащей внутри ABC и имеющей координаты x_P, y_P из формул (1.54). Причем эта точка P заведомо не совпадает ни с одной из точек A, B, C ! А если одно из неравенств (1.55) нарушается (ниже, при доказательстве, будет показано, что нарушиться может в точности одно из неравенств (1.55)!), то равновесие сохраняется при соблюдении неравенства (1.57). Но как только (1.57) нарушится, то возможно начальное вращение $\triangle ABC$ вокруг одной из своих вершин (A, B или C), причем той, для которой нарушается неравенство (1.55).

Например, если $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$, то неравенства (1.55) имеют вид:

$$\cos A > -\frac{1}{2}, \quad \cos B > -\frac{1}{2}, \quad \cos C > -\frac{1}{2},$$

и нарушение происходит в той вершине, угол в которой больше 120° (ясно, что этот угол один!), а начальное вращение может начаться именно вокруг этой вершины.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что, в отличие от условий теоремы 1.3 (см. замечание 2 к теореме 1.3), здесь, при нарушении условий равновесия (1.57), вращение может начаться и вокруг менее нагруженной вершины!

Действительно, положим

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Ясно, что $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, а из μ_1, μ_2, μ_3 можно составить равнобедренный треугольник, который еще является и прямоугольным. Неравенства (1.55) принимают вид:

$$\cos A > 0, \quad \cos B > -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos C > -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

и если нарушается неравенство, например, в вершине B , т. е. $\cos B < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то угол $B > 135^\circ$ (оставшиеся два неравенства, очевидно, выполнены, т. к. $A < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2}$). Поэтому при выборе треугольника ABC с углом при вершине $B > 135^\circ$, при нарушении условия равновесия (1.57), может начаться вращение вокруг точки B , хотя эта точка является менее нагруженной, чем точка A !

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассмотрим отдельно случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0 = \frac{1}{3}$. В этом случае задача сводится к отысканию в $\triangle ABC$ такой точки P , сумма расстояний от которой до вершин A, B, C является минимальной. Это — известная задача Штейнера (см., например, [12]). Элегантное ее решение получается при помощи поворота $\triangle ABC$ вокруг, например, точки B на угол 60° . После этого поворота точка A перейдет в точку A_1 , а затем уже нетрудно показать, что искомая минимальная сумма расстояний есть отрезок A_1C . Причем такое построение корректно, если все углы треугольника менее 120° . В противном случае вершина, в которой угол более 120° , является искомой точкой. Согласно такому построению

$$A_1C = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ + B)}.$$

Нетрудно проверить, что теорема 1.4 в этом частном случае дает в точности те же самые результаты. Равенства (1.54) дают координаты искомой точки P (точка Торичелли), из которой все стороны $\triangle ABC$ видны под углом 120° . Наличие же угла, большего 120° , влечет нарушение одного из неравенств в (1.55), т. к. в этом случае все правые части в неравенствах (1.55) равны $-\left(\frac{1}{2}\right)$, т. е. искомая точка совпадет с соответствующей вершиной.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Рассматриваемая задача о равновесии изучалась в работе [13], где число точек контакта равнялось $n \geq 3$. В этой работе получены необходимые и достаточные условия того, чтобы начальное нарушение равновесия достигалось при вращении вокруг одной из точек контакта. Нетрудно проверить, что при $n = 3$ полученные в этой статье условия совпадают с одним из нарушаемых неравенств (1.55).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что в условиях теоремы 1.3 ($\mu_3 - \mu_2 > \mu_1$) обязательно нарушается последнее из неравенств (1.55) в теореме 1.4, т. е. имеет место условие равновесия (1.57), где $m_1 = \frac{a}{c}\mu_2 + \frac{b}{c}\mu_1$. Действительно, нетрудно видеть, что при $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ выполнено неравенство

$$\frac{\mu_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2}{2\mu_1\mu_2} > 1,$$

которое эквивалентно неравенству $\mu_3^2 > (\mu_1 + \mu_2)^2$.

Следовательно, последнее из неравенств (1.55), наверняка, нарушено. Кроме того, нетрудно показать справедливость неравенств

$$\frac{a}{c}\mu_2 + \frac{b}{c}\mu_1 < \mu_1 + \frac{a}{c}\mu_3,$$

$$\frac{a}{c}\mu_2 + \frac{b}{c}\mu_1 < \mu_2 + \frac{b}{c}\mu_3,$$

которые заведомо выполнены при $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$, и условия того, что a, b, c образуют треугольник. Действительно, первое из неравенств эквивалентно такому:

$$0 < a(\mu_3 - \mu_2) + (c - b)\mu_1,$$

которое выполнено, т.к. $\mu_3 - \mu_2 > \mu_1$ и $a + c - b > 0$. Аналогично показывается справедливость второго неравенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отметим, что рассматриваемая задача упоминается в качестве примера в трактате [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 9. С геометрической точки зрения, задача о нахождении точки, сумма расстояний от которой до вершин данного треугольника ABC , соответственно умноженных на три данных положительных числа μ_1, μ_2, μ_3 , была минимальной, рассматривалась в книге [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 10. С помощью результатов, полученных в теоремах 1.3, 1.4, можно решить следующую оптимизационную задачу. Найти такое распределение нормальных нагрузок μ_1, μ_2, μ_3 , чтобы $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ и обеспечивался максимум величин m_0 и m_1 , т. е. реализовалась наибольшая сопротивляемость поворотам. Если $\triangle ABC$ равносторонний, то решение этой задачи таково: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/3$ (симметрия). В произвольном случае решение достаточно громоздко и здесь не приводится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.3 И 1.4.

В соответствии с формулами (1.7) из § 1.2, при $F_x = F_y = 0$, мы получим условие равновесия для безразмерного момента m в виде

$$|m| < \frac{1}{c} \min_{(x,y)} g_0(x, y), \quad (1.58)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= \mu_1 \rho_1(x, y) + \mu_2 \rho_2(x, y) + \mu_3 \rho_3(x, y), \\ \rho_1(x, y) &= \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2}, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2}, \\ \rho_3(x, y) &= \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

x_c, y_c — координаты точки C в системе Oxy (см. рис. 1.8), а операция минимизации в (1.58) берется по всем точкам плоскости (x, y) .

Функция $g_0(x, y)$ является, как известно, выпуклой (строго), поэтому ее локальный минимум является глобальным и принадлежит внутренней части $\triangle ABC$ (это можно показать непосредственно). Будем искать стационарные точки функции $g_0(x, y)$ из (1.58), для

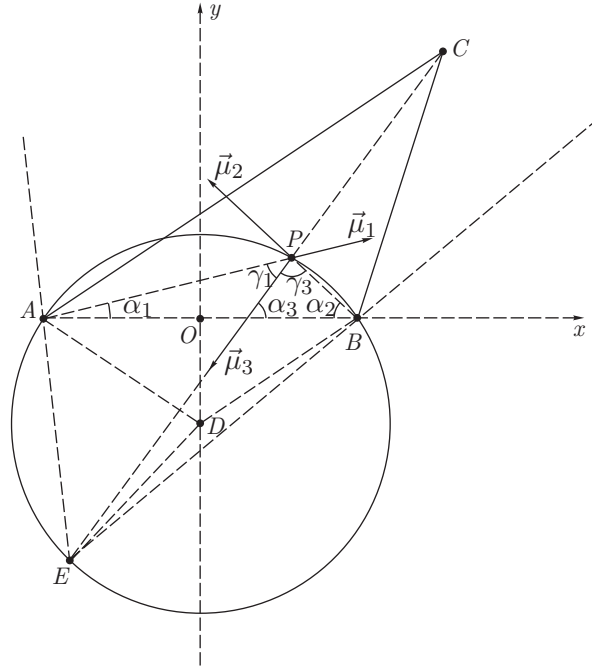


Рис. 1.8. К доказательству теорем 1.3, 1.4. A, B, C — точки опоры, нормальные нагрузки в которых, соответственно, μ_1, μ_2, μ_3 ; P — экстремальная точка, вокруг которой может начаться вращение $\triangle ABC$; ее координаты (x, y) ; Oxy — система координат, причем $OA = OB = \frac{c}{2}$

чего берем частные производные по x, y от $g_0(x, y)$ и приравниваем их к нулю. Получим

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \frac{x + \frac{c}{2}}{\rho_1} + \mu_2 \frac{x - \frac{c}{2}}{\rho_2} + \mu_3 \frac{x - x_c}{\rho_3} &= 0 \\ \mu_1 \frac{y}{\rho_1} + \mu_2 \frac{y}{\rho_2} + \mu_3 \frac{y - y_c}{\rho_3} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.60)$$

Вводим углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (см. рис. 1.8) в соответствии с равенствами

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{y}{\rho_1}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{y}{\rho_2}, \quad \sin \alpha_3 = -\frac{y - y_c}{\rho_3}, \\ \cos \alpha_1 &= \frac{x + \frac{c}{2}}{\rho_1}, \quad \cos \alpha_2 = -\frac{x - \frac{c}{2}}{\rho_2}, \quad \cos \alpha_3 = -\frac{x - x_c}{\rho_3}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.60) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \cos \alpha_1 - \mu_2 \cos \alpha_2 - \mu_3 \cos \alpha_3 &= 0, \\ \mu_1 \sin \alpha_1 + \mu_2 \sin \alpha_2 - \mu_3 \sin \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.61)$$

Если мы введем векторы $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3$ с модулями μ_1, μ_2, μ_3 и направим их так, как показано на рис. 1.8 (т. е. от вершины вдоль соответствующей прямой), то равенства (1.61) эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 = 0,$$

т. е. векторы $\vec{\mu}_1$, $\vec{\mu}_2$, $\vec{\mu}_3$ образуют треугольник (см. рис. 1.9). Отсюда сразу следует утверждение теоремы 1.3, т. к. если из чисел μ_1 , μ_2 , μ_3 нельзя составить треугольник, то стационарной точки (удовлетворяющей уравнениям (1.60)) внутри ABC нет, т. е. внутри ABC нет локального минимума, а значит, локальный минимум реализуется в одной из вершин ABC . А так как при этом выполнено неравенство $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$, то этот минимум находится в наиболее нагруженной вершине C (см. проверку соответствующих неравенств в замечании 7 к теореме 1.4).

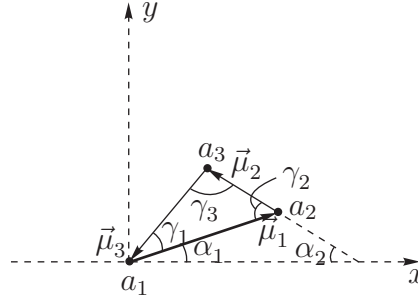


Рис. 1.9. К доказательству теорем 1.3, 1.4. a_1, a_2, a_3 — треугольник, построенный на векторах $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2, \vec{\mu}_3$ в соответствии с экстремальным свойством: $\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3 = 0$

Далее будем предполагать, что из μ_1 , μ_2 , μ_3 можно составить $\triangle a_1a_2a_3$ (см. рис 1.9). Тогда углы этого треугольника суть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и могут быть однозначно определены через μ_1, μ_2, μ_3 :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sigma}{2\mu_1\mu_3}, \quad \sin \gamma_2 = \frac{\sigma}{2\mu_1\mu_2}, \quad \sin \gamma_3 = \frac{\sigma}{2\mu_2\mu_3}, \quad (1.62)$$

где σ введено в (1.54). Углы γ_1 и γ_3 представлены также на рис. 1.8, из которого следует, что из экстремальной точки P сторона AB видна под углом $\gamma_1 + \gamma_3 = \pi - \gamma_2$, т. е. под некоторым фиксированным углом, синус которого находится из формул (1.62). Следовательно, точка P лежит на дуге окружности, проходящей через точки A и B , причем угловой размер этой дуги (центральный угол ADB , где D — центр окружности, см. рис. 1.8) равен $2\pi - 2(\gamma_1 + \gamma_3) = 2\gamma_2$. А для того, чтобы найти искомую точку P , мы должны провести через вершину C секущую CPE так, чтобы образовались две точки пересечения с окружностью. При этом должны быть выполнены следующие условия: точка P должна принадлежать верхней дуге AB , а точка E — нижней, $\angle APE = \gamma_1$, $\angle BPE = \gamma_3$, где γ_1, γ_3 находятся из формул (1.62).

Ясно, что такое построение возможно в том и только в том случае, если точка C находится вне указанной окружности, но внутри угла $\angle AEB$, откуда следует (см. чертеж рис. 1.8), что $\gamma_1 + \gamma_3 > C$, а следовательно,

$$\cos(\gamma_1 + \gamma_3) < \cos C.$$

Используя соотношения (1.62), мы получим третье из неравенств (1.55). Проводя аналогичные рассуждения для сторон BC и AC , мы получим и первые два неравенства из (1.55). Итак, пусть условия (1.55) выполнены. Будем искать координаты точки P , удовлетворяющие условиям $\angle APE = \gamma_1$, $\angle BPE = \gamma_3$ и точки C, P, E лежат на одной прямой.

Пусть D — центр окружности, который лежит на оси Oy (см. рис. 1.8). В $\triangle AOD$ имеем $\angle ADO = \pi - (\gamma_1 + \gamma_3) = \gamma_2$, $AO = \frac{c}{2}$. Поэтому находим радиус R окружности и смещение $h = OD$:

$$R = \frac{c\mu_1\mu_2}{\sigma}, \quad h = OD = \frac{c}{2\sigma}(\mu_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2).$$

Тогда уравнение окружности в системе Oxy

$$x^2 + (y + h)^2 = R^2. \quad (1.63)$$

Из $\triangle AED$ ($\angle ADE = 2\gamma_1$) находим AE , а затем, используя равенство $\angle EAB = \gamma_3$, находим координаты точки E :

$$x_E = -\frac{c(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{2\mu_3^2}, \quad y_E = -\frac{c\sigma}{2\mu_3^2}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки E и C ,

$$\frac{y - y_E}{x - x_E} = \frac{y_C - y_E}{x_C - x_E} = \frac{2\mu_3^2 y_C + c\sigma}{2\mu_3^2 x_C + c(\mu_1^2 - \mu_2^2)} = \lambda. \quad (1.64)$$

Решая совместно уравнения (1.63), (1.64), находим координаты точки P (см. формулы (1.54)).

Если одно из неравенств (1.55) нарушается, то указанное построение невозможно и, следовательно, экстремум (локальный минимум) достигается в той вершине, для которой нарушилось одно из неравенств (1.55).

Доказательство теорем 1.3 и 1.4 завершено. ■

Сформулируем теперь результаты, относящиеся к случаю $f \neq 0$. Пусть область контакта есть равнобедренный $\triangle ABC$, $AC = CB$, приведенные (безразмерные) нормальные нагрузки в точках A, B, C таковы, что $\mu_1 = \mu_2$, $2\mu_1 + \mu_3 = 1$, а главный вектор приложенной системы сил \vec{F} направлен вдоль оси x (т. е. параллельно стороне AB , см. рис. 1.10). Безразмерный главный вектор $f = f_x = \frac{F}{F_{\text{тр}}}$ (см. (1.48)), причем $f_y = 0$ и $0 < f = f_x < 1$.

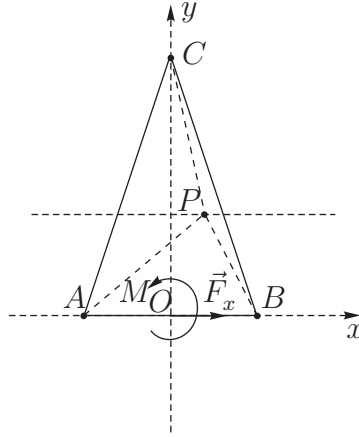


Рис. 1.10. К формулировке и доказательству теоремы 1.5. Oxy — система координат, $AO = OB = \frac{c}{2}$, ABC — равнобедренный треугольник: $AC = CB$, μ_1, μ_2, μ_3 — приведенные нормальные нагрузки, соответственно, в точках A, B, C , причем $\mu_1 = \mu_2$, $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, $OC = h_0$ — высота $\triangle ABC$, P — точка возможного начального вращения, $\vec{F} = \vec{F}_x$ — главный вектор приложенной системы сил, M — главный момент относительно O

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{f_x + \mu_3}{2\mu_1}, \quad \lambda_2 = \frac{f_x - \mu_3}{2\mu_1}, \\ y_1 &= \frac{c}{2} \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}}, \quad y_2 = \frac{c}{2} \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_2^2}} \\ \text{при } |\lambda_j| &< 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5. Пусть область дискретного контакта — равнобедренный $\triangle ABC$ (см. рис. 1.10), причем приведенные (безразмерные) нормальные нагрузки в точках A, B, C и главный вектор приложенной системы сил удовлетворяют условиям:

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad f_y = 0, \quad 0 < f_x = f < 1.$$

Пусть h_0 — высота CO в $\triangle ABC$. Тогда необходимое и достаточное условие равновесия для безразмерного главного момента отно-

сительны точки O следующее:

$$-\frac{1}{c}g_2 < m < \frac{1}{c}g_1, \quad (1.66)$$

где величины g_1 и g_2 даются следующими формулами:

а) если соблюдено неравенство

$$0 < f_x < 2\mu_1 - \mu_3, \quad (1.67)$$

то

$$g_1 = -f_x z + 2\mu_1 \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{4}} + \mu_3 |h_0 - z|, \quad (1.68)$$

где

$$z = y_1 \quad \text{при} \quad h_0 \geq y_1,$$

$$z = h_0 \quad \text{при} \quad y_1 > h_0 \geq y_2,$$

$$z = y_2 \quad \text{при} \quad y_2 > h_0 \geq 0;$$

б) если соблюдены неравенства

$$2\mu_1 - \mu_3 < f_x, \quad \mu_3 < f_x, \quad (1.69)$$

то g_1 дается формулой (1.68), где

$$z = y_2 \quad \text{при} \quad y_2 > h_0,$$

$$z = h_0 \quad \text{при} \quad y_2 \leq h_0;$$

в) если соблюдены неравенства

$$2\mu_1 - \mu_3 < f_x, \quad \mu_3 > f_x, \quad (1.70)$$

то g_1 дается формулой (1.68), где $z = h_0$;

г) если соблюдено неравенство

$$0 < f_x < \mu_3 - 2\mu_1, \quad (1.71)$$

то

$$g_2 = f_x z + 2\mu_1 \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{4}} + \mu_3 |h_0 - z|, \quad (1.72)$$

где $z = h_0$;

д) если соблюдено неравенство

$$\mu_3 - 2\mu_1 < f_x, \quad (1.73)$$

то g_2 дается формулой (1.72), где

$$z = -y_2 \quad \text{при} \quad -y_2 \leq h_0,$$

$$z = h_0 \quad \text{при} \quad -y_2 > h_0.$$

В формулах (1.67)–(1.73) y_1 и y_2 даются выражениями из (1.65).

Перед доказательством теоремы сделаем несколько замечаний по поводу формулировки теоремы 1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Из формул (1.65) следует, что $\lambda_1 > \lambda_2$, причем $\lambda_2 < 1$ (т. к. $f_x < 2\mu_1 + \mu_3 = 1!$). Кроме того, при $|\lambda_j| < 1$ ($j = 1, 2$) имеем $y_1 > y_2$.

Последнее неравенство очевидно при $f_x < \mu_3$, т. к. тогда $y_2 < 0$, а $y_1 > 0$ всегда. Если $f_x > \mu_3$, то $y_2 > 0$, а неравенство $y_1 > y_2$, в соответствии с (1.65), эквивалентно неравенству

$$\lambda_1^2(1 - \lambda_2^2) > \lambda_2^2(1 - \lambda_1^2),$$

которое, конечно, справедливо, т. к. $\lambda_1 > \lambda_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. При соблюдении неравенства (1.67), в соответствии с обозначениями (1.65), будем иметь

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad -1 < \lambda_2 < 1.$$

Первое из этих соотношений эквивалентно неравенству

$$0 < f_x + \mu_3 < 2\mu_1, \rightarrow f_x > -\mu_3, f_x < 2\mu_1 - \mu_3,$$

которые, очевидно, выполнены при соблюдении (1.67). Второе из соотношений эквивалентно неравенствам

$$-2\mu_1 < f_x - \mu_3 < 2\mu_1 \rightarrow f_x > \mu_3 - 2\mu_1, f_x < 2\mu_1 + \mu_3 = 1,$$

которые также выполнены, т.к. $f_x \in (0, 1)$ и

$$\mu_3 - 2\mu_1 = -(2\mu_1 - \mu_3) < 0 \quad \text{в силу (1.67).}$$

Следовательно, использование величин y_1 и y_2 в пункте а) теоремы вполне корректно.

Аналогично показывается корректность использования величины y_2 в пункте б), где выполнены условия (1.69). Если выполнено неравенство (1.73) пункта д), то будем иметь $-1 < \lambda_2 < 1$. Действительно, это соотношение эквивалентно неравенствам

$$-2\mu_1 < f_x - \mu_3 < 2\mu_1 \rightarrow f_x > \mu_3 - 2\mu_1, f_x < \mu_3 + 2\mu_1 = 1,$$

которые, очевидно, выполнены в силу условий (1.73) и $f_x \in (0, 1)$.

В пунктах в) и г) величины y_1 и y_2 не используются (при условии (1.70) будем иметь $\lambda_1 > 1$, а при условии (1.71) будет $\lambda_2 < -1$!).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Смысл функций g_1 из (1.68) и g_2 из (1.72) следующий. Формула (1.68) — это суммарный момент силы \vec{f}_x и сил трения при вращении $\triangle ABC$ против часовой стрелки около точки, лежащей на оси y с координатой $y = z$, взятый с обратным знаком. Формула (1.72) — то же самое, но при вращении по часовой стрелке.

Таким образом, в каждом из пунктов теоремы определена точка начального вращения для $\triangle ABC$, как только нарушается правая (пп. а)–в)) или левая (пп. г), д)) часть неравенства (1.66). Как видим из формулировки теоремы, эта точка может и не принадлежать внутренности $\triangle ABC$ (см., к примеру, пп. а) и б)). Кроме того, возможно вращение только лишь вокруг вершины C .

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Множество для m , определяемое соотношениями (1.66), непусто, т. к. нетрудно проверить справедливость неравенств $g_1 > -g_2$ для всех пунктов теоремы 1.5. Подробное доказательство здесь опускается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5.

В соответствии с формулами (1.7) из § 1.2, при $F_y = 0, F_x = F \neq 0$, мы получим условие равновесия для безразмерного момента m в виде:

$$-\frac{1}{c}g_2 < m < \frac{1}{c}g_1,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} g_1 &= \min_{(x,y)} g_1(x,y), & g_2 &= \min_{(x,y)} g_2(x,y), \\ g_1(x,y) &= \mu_1(\rho_1 + \rho_2) + \mu_3\rho_3 - f_x y, & g_2(x,y) &= \mu_1(\rho_1 + \rho_2) + \mu_3\rho_3 + f_x y, \\ \rho_1 &= \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2}, & \rho_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2}, & \rho_3 &= \sqrt{x^2 + (y - h_0)^2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что координаты точки C суть $(0, h_0)$ и $\mu_1 = \mu_2$ (см. рис. 1.10), (x, y) — координаты точки P — возможного центра вращения, а операция \min берется по всем точкам плоскости (x, y) . Без ограничения общности полагаем, что $f_x \in (0, 1)$.

Рассмотрим сначала задачу определения

$$g_1 = \min_{(x,y)} g_1(x,y).$$

Ищем стационарные точки функции $g_1(x, y)$:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \mu_1 \left(\frac{x + \frac{c}{2}}{\rho_1} + \frac{x - \frac{c}{2}}{\rho_2} \right) + \mu_3 \frac{x}{\rho_3} = 0, \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \mu_1 \left(\frac{y}{\rho_1} + \frac{y}{\rho_2} \right) + \mu_3 \frac{y - h_0}{\rho_3} - f_x = 0. \quad (1.75)$$

Рассмотрим уравнение (1.74). Пусть $x > 0$. Тогда нетрудно показать, что

$$\frac{x + \frac{c}{2}}{\rho_1} > \left| \frac{x - \frac{c}{2}}{\rho_2} \right|.$$

Это следует из того факта, что функция

$$S(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + y^2}}$$

является монотонно возрастающей по ξ . Следовательно, $\frac{\partial g_1}{\partial x} > 0$ при $x > 0$. Аналогично можно показать, что $\frac{\partial g_1}{\partial x} < 0$ при $x < 0$. Таким образом, уравнение (1.74) имеет единственный корень $x = 0$. Подставляем это значение в уравнение (1.75). Получим соотношение для стационарного значения y :

$$\mu_1 y \frac{2}{\sqrt{y^2 + \frac{c^2}{4}}} + \mu_3 \frac{y - h_0}{|y - h_0|} - f_x = 0. \quad (1.76)$$

При этом функция g_1 имеет вид:

$$g_1(0, y) = -f_x y + 2\mu_1 \sqrt{y^2 + \frac{c^2}{4}} + \mu_3 |h_0 - y|. \quad (1.77)$$

Дальнейшие рассуждения относятся к поиску корней по y уравнения (1.76) в областях $y < h_0$ и $y > h_0$. Затем рассматривается расположение этих корней по отношению к точке $y = h_0$, которая является точкой разрыва производной функции $g_1(0, y)$. Нетрудно видеть, что корнем уравнения (1.76) при $y < h_0$ является y_1 из (1.65), а при $y > h_0$ — y_2 из (1.65). Графики функции g_1 из (1.77) в различных случаях представлены на рис. 1.11. Этот рисунок описывает ситуацию, соответствующую пункту а) теоремы. Пункт б) описывает ситуацию, когда корня y_1 нет, а корень y_2 существует, а пункт в) относится к случаю, когда и корня y_2 нет. На этом исследование минимума функции $g_1(x, y)$ полностью исчерпано.

Обратимся к задаче о минимизации функции $g_2(x, y)$. Здесь исследование полностью аналогично, но вместо уравнений (1.76) и (1.77) мы получим уравнения

$$\mu_1 y \frac{2}{\sqrt{y^2 + \frac{c^2}{4}}} + \mu_3 \frac{y - h_0}{|y - h_0|} + f_x = 0, \quad (1.78)$$

$$g_2(0, y) = f_x y + 2\mu_1 \sqrt{y^2 + \frac{c^2}{4}} + \mu_3 |h_0 - y|. \quad (1.79)$$

Ситуация здесь даже проще рассмотренной выше, т. к. уравнение (1.78) в области $y < h_0$ может иметь только один корень $y = -y_2$, а в области $y > h_0$ у него корней, очевидно, нет! Случаи, соответствующие пунктам г), д) теоремы, представлены графиками на рис. 1.12. Для пункта г) (неравенство (1.71)) уравнение (1.78) корней не имеет и функция g_2 достигает минимума в точке излома $y = h_0$, для пункта д) (неравенство (1.73)) уравнение (1.78) имеет корень $y = -y_2$, и если он менее h_0 , то там будет минимум, а если он более h_0 , то минимум будет, опять же, в точке излома $y = h_0$ (рис. 1.12). Таким образом, все возможные ситуации исчерпаны. Доказательство теоремы 1.5 завершено. ■

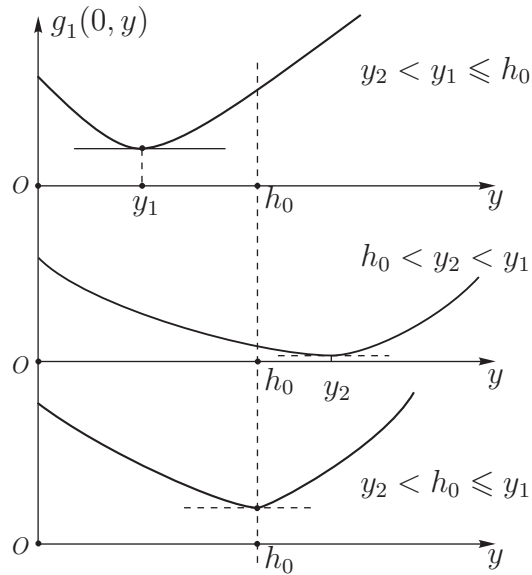


Рис. 1.11. К доказательству теоремы 1.5. График функции g_1 из (1.77) при различных случаях расположения нулей ее производной

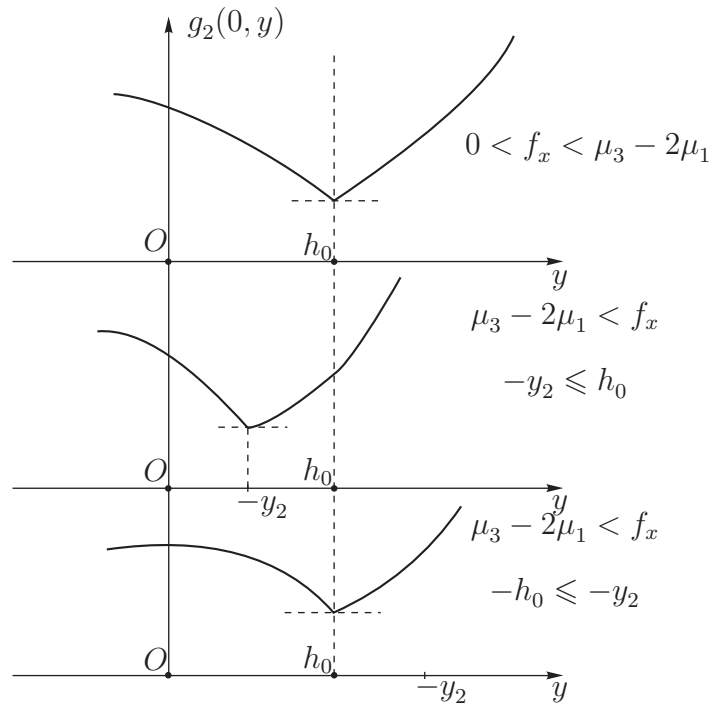


Рис. 1.12. К доказательству теоремы 1.5. График функции g_2 из (1.79) в различных случаях

Рассмотрим теперь задачу о равновесии при контакте на три точки A, B, C при наличии произвольного главного вектора приложенной системы сил (рис. 1.13). Будем предполагать, что в точках A, B, C действуют приведенные (безразмерные) нормальные нагрузки, со-

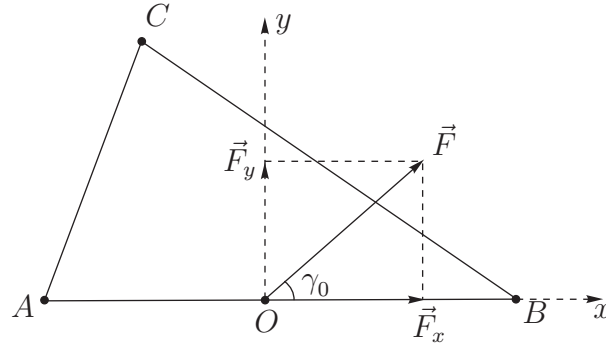


Рис. 1.13. Контакт на произвольные три точки (A, B, C) и на произвольном главном векторе \vec{F} . $F_x = F \cos \gamma_0$, $F_y = F \sin \gamma_0$, $\gamma_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ответственно, μ_1, μ_2, μ_3 . Причем

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \mu_j \neq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Начало координат поместим в центре O стороны AB ($AO = OB = c/2$), ось x — вдоль AB , а ось y — перпендикулярно AB . Пусть главный вектор \vec{F} приложен к точке O . Будем предполагать, что

$$F_x = F \cos \gamma_0 > 0, F_y = F \sin \gamma_0 > 0.$$

Это, очевидно, не нарушает общности, т. к. при $F_x < 0$ можно повернуть картинку на рис. 1.13 вокруг оси y (поменяв A и B местами), а при $F_y < 0$ можно в качестве оси x взять другую сторону треугольника ABC (например, AC). Введем безразмерные величины:

$$f_x = F_x/F_{\text{тр}}, \quad f_y = F_y/F_{\text{тр}}, \quad m = M_0/(F_{\text{тр}} \cdot c), \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

где $F_{\text{тр}} = k(N_A + N_B + N_C)$, N_A, N_B, N_C — нормальные реакции в A, B, C . В соответствии с вышеизложенным будем предполагать, что

$$f_x > 0, \quad f_y > 0, \quad f^2 = f_x^2 + f_y^2 < 1.$$

Перед формулировкой основного результата, введем следующие обозначения.

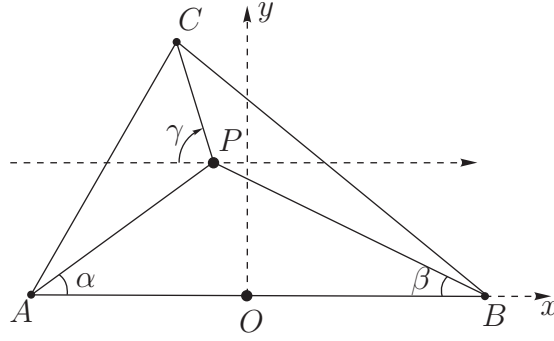


Рис. 1.14. К формулировке и доказательству теоремы 1.6. $P(x, y)$ — произвольная точка полуплоскости $y \geq 0$

(x_c, y_c) — координаты вершины C в системе Oxy ;

(x, y) — координаты произвольной точки P в полуплоскости $y \geq 0$ (см. рис. 1.14);

α, β, γ — углы, образуемые с осью x прямыми AP, BP, CP , соответственно, и отсчитываемые так, как это показано на рис. 1.14;

γ_0 — угол, образуемый вектором \vec{f} с осью x ;

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f \cos(\gamma + \gamma_0), \quad f_2 = f \sin(\gamma + \gamma_0), \\ f_3 &= f_x + \mu_3 \sin \gamma, \quad f_4 = f_y + \mu_3 \cos \gamma, \\ f_0^2 &= f^2 + \mu_3^2 + 2\mu_3 f_2 = f_3^2 + f_4^2, \\ \varepsilon &= \mu_1 + \mu_2 = 1 - \mu_3, \quad \sigma = \mu_2 - \mu_1, \\ \Delta^2 &= (\varepsilon^2 - f_0^2)(f_0^2 - \sigma^2) = [\varepsilon^2 - f_0^2][f_0^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2], \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

если выполнены неравенства

$$|\sigma| < f_0 < \varepsilon, \quad \xi_2 = \frac{f_4 \varepsilon - f_0^2}{\varepsilon - f_4} < \sigma < \xi_1 = \frac{f_4 \varepsilon + f_0^2}{\varepsilon + f_4}. \quad (1.81)$$

Далее, обозначим

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \mu_2^2 - \mu_1^2 + f_0^2 = \varepsilon\sigma + f_0^2, \quad \Delta_2 = \mu_2^2 - \mu_1^2 - f_0^2 = \varepsilon\sigma - f_0^2; \\ \varrho_1 &= |\overline{AP}|, \quad \varrho_2 = |\overline{BP}|, \quad \varrho_3 = |\overline{CP}|, \\ m_0(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= \frac{1}{c}(\mu_1\varrho_1 + \mu_2\varrho_2 + \mu_3\varrho_3 + f_yx - f_xy). \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1.6. Пусть $f \in (0, 1)$, $f_x > 0$, $f_y > 0$ (т. е. $\gamma_0 \in (0, \pi/2)$).

а) Пусть $\gamma = \gamma_1$ — корень уравнения:

$$\begin{aligned} (-\Delta \cdot f_4 + \Delta_1 \cdot f_3)[\Delta \cdot (\mu_3 + f_2) - \Delta_2 \cdot f_1] = \\ = \frac{2 \cdot b}{c} f_0^4 \cdot \Delta \cdot \sin(\gamma + A), \end{aligned} \quad (1.83)$$

удовлетворяющий условию $\gamma_1 \in (0, \pi)$ и неравенствам (1.81), где $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, f_j$ ($j = 0, 4$) даются формулами (1.80), (1.82), A — угол при вершине A , $b = AC$, $c = AB$. Тогда необходимые и достаточные условия для безразмерного главного момента m (относительно точки O), сохраняющего равновесие области ABC , следующие:

$$-m_0(x_2, y_2, \mu_2, \mu_1, \mu_3) < m < m_0(x_1, y_1, \mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad (1.84)$$

где функция m_0 определяется из (1.82),

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{c}{2\Delta \cdot f_0^4} [(f_3^2 - f_4^2) \cdot \sigma \cdot \Delta \cdot \varepsilon + f_3 \cdot f_4 (2\sigma^2 \varepsilon^2 - f_0^2 - f_0^2 \sigma^2 \varepsilon^2)], \\ y_1 &= \frac{c}{2\Delta \cdot f_0^4} [-f_3^2 (\sigma^2 \varepsilon^2 - f_0^4) - f_4^2 \cdot \Delta^2 + 2f_3 f_4 \cdot \sigma \cdot \Delta \cdot \varepsilon], \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

а параметры $f_3, f_4, f_0, \Delta, \sigma, \varepsilon$ вычисляются по формулам (1.80) при $\gamma = \gamma_1$.

Для вычисления x_2, y_2 нужно в (1.80)—(1.83), (1.85) поменять μ_1, μ_2 местами.

б) Пусть уравнение (1.83) при условиях (1.81) и $\gamma \in (0, \pi)$ не имеет решений для конфигурации $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$. Тогда правая часть неравенств (1.84) заменяется на

$$m_0^+ = \min \left\{ m_0 \left(-\frac{c}{2}, 0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \right), \right. \\ \left. m_0 \left(\frac{c}{2}, 0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \right), m_0(x_C, y_C, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \right\}. \quad (1.86)$$

в) Пусть уравнение (1.83) при условиях (1.81) и $\gamma \in (0, \pi)$ не имеет решений для конфигурации $\{\mu_2, \mu_1, \mu_3\}$. Тогда левая часть неравенств (1.84) заменяется на $(-m_0^-)$, где

$$m_0^- = \min \left\{ m_0 \left(-\frac{c}{2}, 0, \mu_2, \mu_1, \mu_3 \right), \right. \\ \left. m_0 \left(\frac{c}{2}, 0, \mu_2, \mu_1, \mu_3 \right), m_0(x_C, y_C, \mu_2, \mu_1, \mu_3) \right\}. \quad (1.87)$$

Перед доказательством теоремы 1.6 сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Как следует из теоремы 1.6, решение задачи о равновесии при контакте на три точки определяется решением уравнения (1.83).

В общем случае это решение приходится разыскивать численными методами. Однако в ситуациях, рассмотренных в теоремах 1.4, 1.5, это решение можно получить аналитически. Действительно, в случае теоремы 1.4 имеем $f = f_x = f_y = 0$. Тогда для параметров, введенных в (1.80), (1.82), имеем:

$$f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = \mu_3 \sin \gamma, \quad f_4 = \mu_3 \cos \gamma, \quad f_0 = \mu_3,$$

$$\Delta^2 = (1 - 2\mu_1)(1 - 2\mu_2)(1 - 2\mu_3), \quad \Delta_1 = \mu_2^2 - \mu_1^2 + \mu_3^2, \quad \Delta_2 = \mu_2^2 - \mu_1^2 - \mu_3^2.$$

Уравнение (1.83) приобретает вид:

$$-\Delta \cdot \cos \gamma + \Delta_1 \sin \gamma = \frac{2 \cdot b}{c} \mu_3^2 \sin(\gamma + A),$$

которое при $\Delta, \Delta_1 = \text{const}$ может быть легко разрешено. Неравенства (1.81) при этом имеют вид

$$|\mu_1 - \mu_2| < \mu_3 < \mu_1 + \mu_2, \quad \frac{\mu_3 \varepsilon \cos \gamma - \mu_3^2}{\varepsilon - \mu_3 \cos \gamma} < \sigma < \frac{\mu_3 \varepsilon \cos \gamma + \mu_3^2}{\varepsilon + \mu_3 \cos \gamma},$$

которые, в частности, означают, что из чисел μ_1, μ_2, μ_3 можно составить треугольник. В результате проведения несложных выкладок мы получим результат теоремы 1.4 (а также, конечно, и результат теоремы 1.3, т. к. если из μ_1, μ_2, μ_3 нельзя составить треугольник, то

реализуются случаи (б), (в) теоремы 1.6, которые, как несложно видеть, дают результат теоремы 1.3!).

Для ситуации, рассматриваемой теоремой 1.5, мы имеем:

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ (т.е. } \sigma = 0), \quad f_y = 0, \quad f = f_x < 1 \text{ (т.е. } \gamma_0 = 0).$$

Тогда для параметров из (1.80), (1.82) получим:

$$f_1 = f \cos \gamma, \quad f_2 = f \sin \gamma, \quad f_3 = f + \mu_3 \sin \gamma, \quad f_4 = \mu_3 \cos \gamma,$$

$$f_0^2 = f^2 + \mu_3^2 + 2f\mu_3 \sin \gamma, \quad \Delta^2 = (4\mu_1^2 - f_0^2) \cdot f_0^2,$$

$$\Delta_1 = f_0^2, \quad \Delta_2 = -f_0^2.$$

Неравенства (1.81) приобретают вид

$$0 < f^2 + \mu_3^2 + 2f\mu_3 \sin \gamma < (\mu_1 + \mu_2)^2 = 4\mu_1^2,$$

$$\frac{\mu_3 \cos \gamma - f_0^2}{\varepsilon - \mu_3 \cos \gamma} < 0 < \frac{\mu_3 \cos \gamma + f_0^2}{\varepsilon + \mu_3 \cos \gamma}.$$

Далее, нетрудно показать, что уравнение (1.83) при таком выборе параметров имеет корень $\gamma = \pi/2$ (если соблюдено неравенство $0 < (f + \mu_3)^2 < 4\mu_1^2$). Вторая совокупность неравенств при $\gamma = \pi/2$ выполняется автоматически. Действительно, в этом случае при $\gamma = \pi/2$ соотношение (1.83) имеет вид:

$$[\Delta_1(f + \mu_3)] \cdot [\Delta(f + \mu_3)] = \frac{2b}{c}(f + \mu_3)^2 \cdot \Delta \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right).$$

После сокращений и использования того факта, что для равнобедренного треугольника ABC имеем $c/(2b) = \cos A$, мы получим тождество. Дальнейшие несложные рассуждения и выкладки приводят к результату теоремы 1.5. Существуют и другие случаи, когда уравнение (1.83) имеет аналитические решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Поясним смысл величин x_1, x_2, y_1, y_2 , фигурирующих в формулировке теоремы 1.6. Пусть уравнение (1.83) имеет решение, удовлетворяющее условиям (1.81)

и $\gamma \in (0, \pi)$, как в конфигурации $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, так и в конфигурации $\{\mu_2, \mu_1, \mu_3\}$. Тогда при нарушении правого неравенства в (1.84) может начаться вращение вокруг точки (x_1, y_1) против часовой стрелки, а при нарушении левого неравенства в (1.84) может начаться вращение вокруг точки (x_2, y_2) по часовой стрелке. Если же реализуются условия б) или в) теоремы, то соответствующее вращение может начаться вокруг одной из вершин треугольника ABC .

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Если $\mu_3 \rightarrow 0$, то теорема 1.6 дает результат, полученный в теореме 1.2 для опирания на две точки. Действительно, при $\mu_3 = 0$ имеем для параметров, входящих в (1.85):

$$f_0 = f, \quad f_3 = f_x, \quad f_4 = f_y, \quad \sigma = \mu_2 - \mu_1, \quad \Delta^2 = (1 - f^2)(f^2 - \sigma^2),$$

т. е. значения x_1, y_1, x_2, y_2 , не зависят от угла γ , а значит, не зависят от уравнения (1.83)! Тогда неравенства (1.81) переходят в неравенства (1.44), (1.45) (см. доказательство теоремы 1.2), а различные случаи теоремы 1.6 — в соответствующие пункты теоремы 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6.

В соответствии с формулами (1.7) из § 1.2 мы получим условия равновесия для безразмерного момента m в виде:

$$-\frac{1}{c} \min_{(x,y)} g_2(x, y) < m < \frac{1}{c} \min_{(x,y)} g_1(x, y),$$

где обозначено

$$g_1(x, y) = \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \mu_3 \rho_3 + f_y \cdot x - f_x \cdot y,$$

$$g_2(x, y) = \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \mu_3 \rho_3 - f_y \cdot x + f_x \cdot y,$$

$$\rho_1 = |\overline{AP}|, \quad \rho_2 = |\overline{BP}|, \quad \rho_3 = |\overline{CP}|,$$

$P(x, y)$ — произвольная точка полуплоскости $y \geq 0$. Будем искать $\min g_1(x, y)$ по всем точкам P полуплоскости $y \geq 0$. Из геометрических соображений, ясно, что этот \min достигается при $y \geq 0$. (Предположив противное, мы можем взять точку, симметричную исходной относительно оси x , в результате чего при $f_x > 0, f_y > 0$ значение функции g_1 уменьшится!)

Отметим, что функция g_1 является выпуклой, т. е. её локальный минимум является также и глобальным. Будем искать стационарные точки функции g_1 , приравнивая её частные производные по x и y к нулю; получим:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \frac{x + c/2}{\rho_1} + \mu_2 \frac{x - c/2}{\rho_2} + \mu_3 \frac{x - x_c}{\rho_3} + f_y &= 0, \\ \mu_1 \frac{y}{\rho_1} + \mu_2 \frac{y}{\rho_2} + \mu_3 \frac{y - y_c}{\rho_3} - f_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

В соответствии с углами α, β, γ , введенными на рис. 1.14, мы будем иметь

$$\sin \alpha = y/\rho_1, \quad \sin \beta = y/\rho_2, \quad \sin \gamma = (y_c - y)/\rho_3,$$

$$\cos \alpha = (x + c/2)/\rho_1, \quad \cos \beta = (-x + c/2)/\rho_2, \quad \cos \gamma = (x - x_c)/\rho_3.$$

Тогда уравнения (1.88) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \cos \alpha - \mu_2 \cos \beta &= -f_y - \mu_3 \cos \gamma, \\ \mu_1 \sin \alpha + \mu_2 \sin \beta &= f_x + \mu_3 \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

Для нахождения трех углов α, β, γ двух уравнений (1.89) недостаточно. Третье уравнение мы получим из геометрических соображений, рассматривая треугольники APC и APB и применяя к ним теорему синусов (см. рис. 1.14).

В результате получим соотношение:

$$\frac{\sin \beta}{\sin(A + \gamma)} = \frac{b}{c} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \gamma)}. \quad (1.90)$$

Теперь будем решать систему уравнений (1.89), (1.90).

Зафиксируем γ и решим систему (1.89).

Заметим, что подобная система уже решалась при доказательстве теоремы 1.2 для контакта на две точки (см. (1.42)). Решение получилось в виде формул (1.46), где в качестве f_x нужно брать $f_x + \mu_3 \sin \gamma$, в качестве f_y нужно брать $f_y + \mu_3 \cos \gamma$, а вместо f подставить $f_0 = \sqrt{f^2 + \mu_3^2 + 2\mu_3 f_2}$, $f_2 = f \sin(\gamma + \gamma_0)$.

Причем решение корректно при соблюдении неравенств (1.44), (1.45), где также нужно сделать указанные изменения. В результате мы приходим к неравенствам (1.81). Экстремальная точка определяется углами α и β из соотношений (1.46), т. е. в новых обозначениях будем иметь

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{2\mu_1 f_0^2} [f_4 \cdot \Delta - f_3(\sigma\varepsilon - f_0^2)], \quad \sin \beta = \frac{1}{2\mu_2 f_0^2} [-f_4 \cdot \Delta + f_3(\sigma\varepsilon + f_0^2)], \\ \cos \alpha &= \frac{1}{2\mu_1 f_0^2} [f_4(\sigma\varepsilon - f_0^2) + f_3 \cdot \Delta], \quad \cos \beta = \frac{1}{2\mu_2 f_0^2} [f_4(\sigma\varepsilon + f_0^2) + f_3 \cdot \Delta], \end{aligned}$$

где новые параметры введены в соответствии с (1.80). Подставляя полученные соотношения в уравнение (1.90), мы получим (после несложных преобразований) уравнение (1.83) для определения угла γ .

Далее, мы можем воспользоваться формулами для определения координат экстремальной точки P , полученными при доказательстве теоремы 1.2, которые приводят к соотношениям (1.85) теоремы 1.6.

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны соответствующим рассуждениям в доказательстве теоремы 1.2. Таким образом, справедливость условий (1.84) можно считать

доказанной. Если же уравнение (1.83) решений не имеет или же при $\gamma \in (0, \pi)$ нарушено одно из неравенств (1.81), то стационарной точки нет и тогда; в связи с выпуклостью функций g_1 и g_2 экстремум достигается в одной из вершин треугольника ABC , что и соответствует утверждениям пп. б), в) теоремы 1.6. Теорема 1.6 доказана. ■

§ 1.6. Равновесие твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением

Рассматривается задача об условиях статического равновесия тела, опирающегося на шероховатую плоскость одной, двумя или тремя точками. Предполагается, что к телу приложена произвольная система активных сил, а трение на шероховатой опорной плоскости анизотропно. Эта модель обобщает известную изотропную модель сухого кулоновского трения. Получены явные аналитические формулы, выражающие необходимые и достаточные условия статического равновесия. Методика исследования использует понятие анизотропной силы трения покоя, что позволяет существенно облегчить получение аналитических результатов для условий равновесия.

1. Постановка задачи о равновесии, описание модели анизотропного трения и основные уравнения

Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат. Рассмотрим твердое тело, опирающееся на плоскость Oxy своими точками: A_1, \dots, A_n . Обозначим радиус-вектор точки A_k через $r_k = (x_k, y_k, 0)^T$. Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, $k = 1, 2, \dots, n$. На рис. 1.15 изображена опорная плоскость Oxy (вид сверху с положительного направления оси Oz), на которой представлена одна точка опоры A_k . Реакция плоскости в точке A_k состоит из нормальной составляющей N_k ,

направленной по оси Oz , и касательной составляющей F_k (силы трения), лежащей в плоскости Oxy . Пусть к телу приложена произвольная система активных сил, имеющая главный вектор $F = (F_x, F_y, F_z)^T$ и главный момент относительно точки O : $M_O = (M_x, M_y, M_z)^T$. Требуется определить условия на величины F, M_O , координаты точек A_k и характеристики трения в точках A_k , при которых существуют такие реакции $N_k = (0, 0, N_k)^T$, $F_k = (F_{kx}, F_{ky}, 0)^T$, что удовлетворяются условия статического равновесия тела:

$$F + \sum_k (N_k + F_k) = 0, \quad M_O + \sum_K [r_k \times (N_k + F_k)] = 0. \quad (1.91)$$

Кроме того, должны выполняться условия неотрицательности проекции нормальной реакции на вертикаль ($N_k \geq 0$) и соответствующие неравенства для сил трения покоя F_k при анизотропном сухом трении.

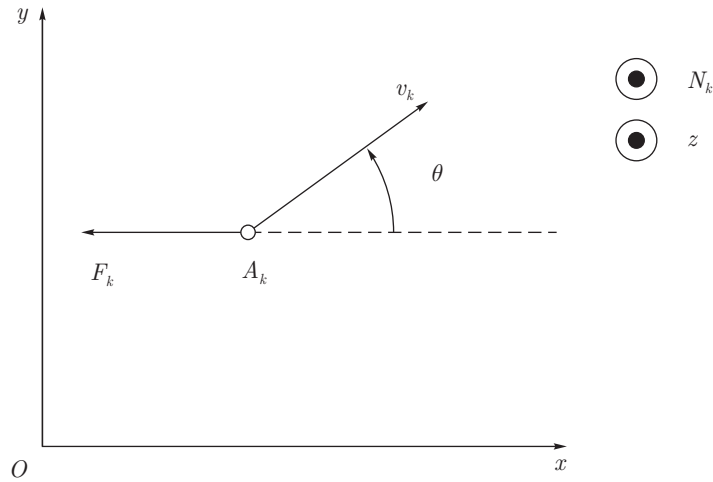


Рис. 1.15

Опишем, следуя известному подходу [31], модель анизотропного сухого трения, которая обобщает обычный закон Кулона (изотропное сухое трение).

Пусть точка контакта A_k приобрела скорость v_k в плоскости Oxy ,

направленную под углом θ к положительной оси Ox (рис. 1.15). Тогда анизотропная сила трения скольжения определяется формулой:

$$F_{\text{fr}} = -N_k \Phi_O v_k / |v_k|, \quad (1.92)$$

где $\Phi_O = ||f_{ij}|| - (2 \times 2)$ — матрица тензора трения, предполагаемая положительно определенной, поскольку мощность силы F_{fr} при любой скорости v должна быть отрицательна, т. е. $(v^T \Phi_O v) > 0$. Следовательно, необходимо выполнены следующие условия: $f_{11} > 0$, $f_{22} > 0$, $\Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} > 0$. Отметим, что необходимыми и достаточными условиями положительной определенности матрицы Φ_O являются неравенства: $f_{11} > 0$, $f_{22} > 0$, $f_{11}f_{22} - 0,25(f_{12} + f_{21})^2 > 0$, которые совпадают с приведенными лишь при $f_{12} = f_{21}$.

При классическом законе изотропного сухого трения (закон Кулона) имеем $\Phi_O = fE$, где E — единичная матрица, f — коэффициент трения. Проецируя векторное равенство (1.92) на оси x, y , получаем

$$F_{\text{fr}x} = -N_k(f_{11} \cos \theta + f_{12} \sin \theta), \quad F_{\text{fr}y} = -N_k(f_{21} \cos \theta + f_{22} \sin \theta). \quad (1.93)$$

Формула (1.92) для анизотропной силы трения при движении (при начальном движении) подразумевает наличие соответствующей анизотропной силы трения покоя F_k , которая определяется при помощи следующего принципа.

Сила трения покоя F_k , направленная под углом α к положительной оси Ox , по модулю не превосходит модуля возможной силы трения движения, которая также направлена под углом α к оси Ox . Ясно, что соответствующее возможное начальное скольжение точки A_k происходит в этом случае под углом θ к оси Ox , который определяется при помощи формул (1.93) и равенств

$$\text{tg } \alpha = F_{\text{fr}y} / F_{\text{fr}x} = F_{ky} / F_{kx}. \quad (1.94)$$

Тогда получаем

$$\operatorname{tg} \theta = (f_{11} \operatorname{tg} \alpha - f_{21}) / (f_{22} - f_{12} \operatorname{tg} \alpha). \quad (1.95)$$

Подставляя выражение (1.95) в соотношения (1.93), имеем

$$\begin{aligned} F_{\text{fr}x}^2 + F_{\text{fr}y}^2 &= \Delta^2 N_k^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) / (a^2 + b^2); \\ a &= f_{22} - f_{12} \operatorname{tg} \alpha, \quad b = f_{11} \operatorname{tg} \alpha - f_{21}. \end{aligned}$$

Тогда для составляющих сил трения покоя F_k при учете последнего равенства, сформулированного выше принципа и соотношений (1.94) получим неравенства

$$\begin{aligned} (f_{12} F_{ky} - f_{22} F_{kx})^2 + (f_{21} F_{kx} - f_{11} F_{ky})^2 &\leq \xi^2 = \Delta^2 N_k^2; \\ \Delta &= f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} > 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Совершенно аналогично определяются условия для сил трения покоя и при других законах анизотропного трения скольжения, которые были указаны ранее [32].

Если трение ортотропно, т. е. оси Ox и Oy — главные направления матрицы Φ_O , то $f_{12} = f_{21} = 0$ и ограничение (1.96) принимает вид

$$F_{kx}^2 / (f_{11} N_k)^2 + F_{ky}^2 / (f_{22} N_k)^2 \leq 1,$$

т. е. это эллипс трения. Если трение изотропно (закон Кулона), то $f_{11} = f_{22} = f$ и получим круг трения.

Итак, поставленная задача формулируется следующим образом. Определить условия, налагаемые на величины $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z, (x_k, y_k)$ и коэффициенты трения f_{ij} ($i, j = 1, 2$), при которых существуют такие реакции $N_k = (0, 0, N_k)^T$, $F_k = (F_{kx}, F_{ky}, 0)^T$, что удовлетворяются уравнения равновесия (1.91) и выполнены неравенства (1.96) и $N_k \geq 0$, т. е. силы реакции плоскости являются допустимыми.

В данной работе рассматриваются случаи $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, т.е. число точек опоры не превосходит трех. Эти случаи — статически определимые для нормальных реакций и могут быть рассмотрены в рамках модели абсолютно твердого тела. Случаи $n > 3$ рассматривались ранее [33, 34]; в частности, были исследованы условия гарантированного равновесия. Было показано [33], что условия гарантированного равновесия (при $n > 3$) сводятся к исследованию задачи о равновесии при опоре на какие-либо три из заданных n точек опоры. Таким образом, случай $n = 3$ — определяющий при исследовании задач о гарантированном равновесии тела с произвольным числом точек опоры в рамках модели абсолютно твердого тела.

Отметим, что поставленная в данной работе задача касается только поиска условий, при которых может быть реализовано равновесие. Вопросы устойчивости этих равновесий здесь не рассматриваются. Такие задачи требуют привлечения динамических уравнений движения твердого тела по шероховатой плоскости, и в некоторых случаях были исследованы [35].

2. Формулировка и обоснование результатов в случае $n = 1$

Пусть A_1 — единственная точка опоры. Без ограничения общности будем считать ее совпадающей с началом координат O , т.е. $x_1 = y_1 = z_1 = 0$. Уравнения равновесия (1.91) тогда сводятся к следующим:

$$F_x + F_{1x} = 0, \quad F_y + F_{1y} = 0, \quad F_z + N_1 = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0. \quad (1.97)$$

Неравенство (1.96) для допустимых сил реакции при $k = 1$ имеет вид:

$$(f_{12}F_{1y} - f_{22}F_{1x})^2 + (f_{21}F_{1x} - f_{11}F_{1y})^2 \leq \Delta^2 N_1^2; \quad N_1 = -F_z > 0. \quad (1.98)$$

Из соотношений (1.97) и (1.98) сразу получаем следующий результат.

Утверждение 1. Для статического равновесия тела, опирающегося одной точкой A_1 на плоскость с анизотропным сухим трением, характеризуемым (2×2) — матрицей $\Phi_O = ||f_{ij}||$, необходимо и достаточно соблюдение условий

$$M_{A_1} = 0, \quad F_z < 0, \quad (f_{12}F_y - f_{22}F_x)^2 + (f_{21}F_x - f_{11}F_y)^2 \leq \Delta^2 F_z^2, \quad (1.99)$$

где M_{A_1} — главный момент активных сил относительно точки A_1 , $F = (F_x, F_y, F_z)^T$ — главный вектор активных сил.

Следствие 1. В случае изотропного сухого трения $f_{12} = f_{21} = 0$, $f_{11} = f_{22} = f$ и условия (1.99) имеют вид

$$M_{A_1} = 0, \quad F_z < 0, \quad F_x^2 + F_y^2 \leq f^2 F_z^2 = f^2 N^2$$

т.е. получаем обычный кулоновский конус трения.

ПРИМЕР 1. Тяжелая точка массы m находится на шероховатой анизотропной наклонной плоскости. Пусть φ_0 — угол наклона плоскости к горизонту, а система координат $Oxyz$, в которой задана матрица трения Φ_O , такова, что ось Oz нормальна к плоскости, а ось Ox образует угол ψ_0 с прямой наибольшего ската. Тогда $F_x = mg \sin \varphi_0 \cos \psi_0$, $F_y = mg \sin \varphi_0 \sin \psi_0$, $F_z = -mg \cos \varphi_0$, а условие равновесия имеет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 \leq \Delta / \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = f_{12} \sin \psi_0 - f_{22} \cos \psi_0,$$

$$b = f_{21} \cos \psi_0 - f_{11} \sin \psi_0, \quad \Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}.$$

В частности, для изотропного сухого трения это условие приобретает хорошо известный вид $\operatorname{tg} \varphi_0 \leq f$, где f — коэффициент трения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Был исследован [36] частный случай рассматриваемой задачи: о начале движения материальной точки по плоскости с ортотропным трением ($f_{12} = f_{21} = 0$). Начало движения — это первый момент выхода точки из состояния статического равновесия.

Нарушение последнего неравенства в (1.99) и означает возможность начала движения материальной точки под действием активной силы F , так как первые два условия выполнены заведомо (при $F_z < 0$).

Таким образом, для ортотропного трения нарушение равновесия точки, т. е. ее начальное движение, происходит при

$$f_{22}^2 F_x^2 + f_{11}^2 F_y^2 > f_{11}^2 f_{22}^2 F_z^2.$$

Если величина F_z зафиксирована, то минимальная сила, действующая в плоскости Oxy под углом δ к оси x и нарушающая равновесие точки, дается формулой

$$F_{\min} = f_{11} f_{22} |F_z| / \sqrt{f_{22}^2 \cos^2 \delta + f_{11}^2 \sin^2 \delta}.$$

Этот же результат был получен [36] методом предельного равновесия, который восходит к Кулону, Желле, Жуковскому и другим классикам теоретической механики. Метод основан на предположении, что точка начинает движение из состояния покоя (равновесия). В результате такого предположения становятся известными модуль и направление силы трения, в соответствии с формулами (1.93), (1.94). Затем выводятся условия, которым должна удовлетворять сила F , чтобы это движение могло быть реализовано для какого-либо угла θ , образуемого вектором скорости возможного скольжения с положительной осью x . Невыполнение этих условий для всех углов θ приводит к условиям равновесия. Строгое применение этого метода для рассматриваемой задачи достаточно громоздко и здесь не приводится.

3. Формулировка и обоснование результатов в случае $n = 2$

Пусть A_1, A_2 — две точки опоры тела на плоскость, причем A_1 совпадает с началом координат, а точка A_2 имеет координаты $x_2 = a \cos \alpha$,

$y_2 = a \sin \alpha$, где a — длина отрезка A_1A_2 , α — угол, образуемый вектором A_1A_2 с положительной осью Ox (рис. 1.16). На рис. 1.16 также изображен вектор F_{xy} , являющийся проекцией главного вектора F на плоскость Oxy , ψ_0 — угол, образуемый вектором F_{xy} с вектором A_1A_2 . Все углы отсчитываются против часовой стрелки.

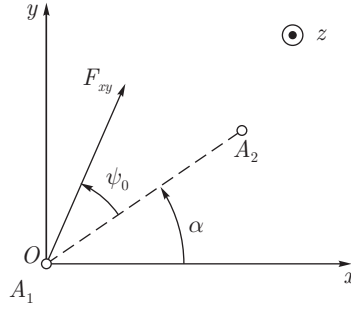


Рис. 1.16

В данном случае уравнения равновесия (1.91) имеют вид

$$F_{1x} + F_{2x} + F_x = 0, \quad F_{1y} + F_{2y} + F_y = 0, \quad N_1 + N_2 = -F_z \quad (1.100)$$

$$M_x + N_2 a \sin \alpha = 0, \quad M_y - N_2 a \cos \alpha = 0, \quad M_z + F_{2y} a \cos \alpha - F_{2x} a \sin \alpha = 0. \quad (1.101)$$

Первые два уравнения системы (1.101) налагают связь на M_x и M_y :

$$M_x \cos \alpha + M_y \sin \alpha = 0, \quad (1.102)$$

которая означает отсутствие условий, обеспечивающих вращение тела вокруг оси A_1A_2 . Следовательно, из уравнений (1.100), (1.101) получим выражения для нормальных реакций

$$N_1 = -F_z - M_y / (a \cos \alpha) > 0, \quad N_2 = M_y / (a \cos \alpha) > 0. \quad (1.103)$$

Таким образом, здесь в состоянии статического равновесия нормальные реакции зависят только от заданных активных сил, их моментов и геометрических параметров. Поэтому в дальнейшем будем

считать N_1 и N_2 заданными положительными величинами, которые определяются формулами (1.103), причем $N_2 \geq N_1$, что не нарушает общности рассмотрения. Для решения задачи об условиях равновесия необходимо, используя уравнения равновесия (1.100), (1.101), удовлетворить неравенствам (1.96) при $k = 1, 2$ для сил трения покоя.

Вводим обозначения

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= f_{22} \cos \varphi - f_{12} \sin \varphi, \quad h(\varphi) = f_{11} \sin \varphi - f_{21} \cos \varphi, \\ \sigma^2(\varphi) &= g^2(\varphi) + h^2(\varphi), \quad \gamma = \alpha + \psi_0, \quad \Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}, \\ \kappa &= g(\alpha)g(\gamma) + h(\alpha)h(\gamma), \quad F_0^2 = F_x^2 + F_y^2, \quad m = M_z/a, \\ F_{01} &= F_0 \sin \psi_0, \quad F_{02} = F_0 |\kappa|/\Delta, \quad F_{00}^2 = F_{01}^2 + F_{02}^2, \\ \lambda_k &= N_k \sigma(\alpha), \quad k = 1, 2; \quad \sigma_1(\gamma) = f_{12}g(\gamma) - f_{11}h(\gamma). \end{aligned} \quad (1.104)$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 2. Для статического равновесия твердого тела, опирающегося двумя точками на шероховатую поверхность с анизотропным сухим трением, описываемым Φ_O , необходимо и достаточно соблюдения условия (1.102), неравенств (1.103), а также неравенств

$$|m| < \lambda_2, \quad |m - F_{01}| < \lambda_1, \quad F_{02} < \sqrt{\lambda_2^2 - m^2} + \sqrt{\lambda_1^2 - (m - F_{01})^2}. \quad (1.105)$$

Величины λ_1 , λ_2 , m , F_{01} , F_{02} определяются формулами (1.104).

Утверждение 3. 1°. Если $F_{00}^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$, то неравенства (1.105) решений не имеют и статическое равновесие невозможно.

2°. Если $F_{00}^2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2$, то статическое равновесие возможно только при $m \in [m_1, m_2]$, где m_1 и m_2 вычисляются по следующим правилам (напомним, что $\lambda_2 \geq \lambda_1$, так как по предположению $N_2 \geq N_1$).

Пусть $F_{01} > 0$ (т.е. $\sin \psi_0 > 0$). Тогда:

1) если $F_{00}^2 \geq \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + 2\lambda_1 F_{01}$, то

$$m_{1,2} = \frac{1}{2F_{00}^2} \left(F_{01}\nu \pm F_{02}\sqrt{4\lambda_2^2 F_{00}^2 - \nu^2} \right), \quad \nu = F_{00}^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2; \quad (1.106)$$

2) если $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_2 F_{01} \leq F_{00}^2 < \lambda_2^2 - \lambda_1^2 + 2\lambda_1 F_{01}$, то $m_1 = F_{01} - \lambda_1$, а m_2 дается формулами (1.106), где берется знак плюс;

3) если $0 \leq F_{00}^2 < \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_2 F_{01}$, то

$$m_1 = F_{01} - \lambda_1, \quad m_2 = \begin{cases} \lambda_2 & \text{при } F_{01} > \lambda_2 - \lambda_1 \\ F_{01} + \lambda_1 & \text{при } 0 < F_{01} < \lambda_2 - \lambda_1 \end{cases}.$$

Пусть $F_{01} < 0$ (т.е. $\sin \psi_0 < 0$). Тогда:

4) если $F_{00}^2 \geq \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_1 F_{01}$, то m_1 и m_2 даются формулами (1.106);

5) если $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_2 F_{01} \leq F_{00}^2 < \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - 2\lambda_1 F_{01}$, то $m_2 = F_{01} + \lambda_1$, а m_1 дается формулами (1.106), где берется знак минус;

6) если $0 \leq F_{00}^2 < \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_2 F_{01}$, то,

$$m_2 = F_{01} + \lambda_1, \quad m_1 = \begin{cases} -\lambda_2 & \text{при } F_{01} < \lambda_1 - \lambda_2 \\ F_{01} - \lambda_1 & \text{при } \lambda_1 - \lambda_2 < F_{01} < 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.

Без ограничения общности будем полагать $\cos \alpha > 0$. Обозначим $x = F_{2x}$. Тогда из уравнений (1.100), (1.101) получим $F_{1x} = -x - F_0 \cos \gamma$, $F_{1y} = -x \operatorname{tg} \alpha - F_0 \sin \gamma + m / \cos \alpha$, $F_{2y} = x \operatorname{tg} \alpha - m / \cos \alpha$.

Подставляя эти выражения в неравенства (??) ($k = 1, 2$) и используя обозначения (1.104), получаем следующие квадратичные по x неравенства:

$$Q_1(x) = x^2 \sigma^2(\alpha) + 2xm[f_{12}g(\alpha) - f_{11}h(\alpha)] + m^2(f_{12}^2 + f_{11}^2) - \xi_2^2 \cos^2 \alpha \leq 0, \quad (1.107)$$

$$Q_2(x) = Q_1(x) + 2F_0 x \cos \alpha + (d_0 + \xi_2^2 - \xi_1^2) \cos^2 \alpha \leq 0, \quad (1.108)$$

где

$$d_0 = F_0^2 \sigma^2(\gamma) + 2mF_0 \sigma_1(\gamma) \cos \alpha, \quad (1.109)$$

а остальные параметры определены формулами (1.104).

Для возможности равновесия необходимо и достаточно, чтобы неравенства (1.107) и (1.108) имели хотя бы одно общее действительное решение x . Так как коэффициент при x^2 в выражениях для Q_1 и Q_2 положителен, то для этого нужно, во-первых, чтобы квадратные трехчлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ имели только вещественные корни $x_2 < x_1$ для $Q_1(x)$ и $x_4 < x_3$ для $Q_2(x)$, а во-вторых, чтобы отрезки $[x_2, x_1]$ и $[x_4, x_3]$ имели непустое пересечение, т. е. должны одновременно выполняться два неравенства

$$x_4 < x_1, \quad x_2 < x_3. \quad (1.110)$$

Алгебраические вычисления, которые здесь опускаем, дают согласно соотношениям (1.106)–(1.109) следующие выражения для корней x_1, \dots, x_2 :

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \left[-m\sigma_1(\alpha) \pm \sqrt{\Delta_1} \right] / \sigma^2(\alpha), \\ x_{3,4} &= \left[-m\sigma_1(\alpha) - F_0\kappa \cos \alpha \pm \sqrt{\Delta_2} \right] / \sigma^2(\alpha), \end{aligned} \quad (1.111)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \xi_2^2 \sigma^2(\alpha) \cos^2 \alpha - m^2 \Delta^2 \cos^2 \alpha, & \xi_2^2 &= \Delta^2 N_2^2 \\ \Delta_2 &= \xi_1^2 \sigma^2(\alpha) \cos^2 \alpha - (m - F_0 \sin \psi_0)^2 \Delta^2 \cos^2 \alpha, & \xi_1^2 &= \Delta^2 N_1^2. \end{aligned}$$

Используя формулы (1.111), можно установить, что неравенства (1.110) и условия вещественности корней функций $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ эквивалентны неравенствам

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad |F_0\kappa \cos \alpha| < \sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2},$$

которые после простых преобразований и использования обозначений из (1.104) приводят к соотношениям (1.105). ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.

Рассмотрим функцию:

$$\psi(m) = \sqrt{\lambda_2^2 - m^2} + \sqrt{\lambda_1^2 - (m - F_{01})^2}.$$

Исследование этой функции показывает, что $\psi''_{m^2} < 0$, т. е. ее график — выпуклый вверх, и она имеет точку максимума

$$m_* = F_{01} \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2),$$

если только $|F_{01}| < \lambda_1 + \lambda_2$. Но это неравенство обязательно должно выполняться, так как только тогда существуют решения первых двух неравенств (1.105). Действительно, из неравенств (1.105) имеем

$$-\lambda_2 < m < \lambda_2, \quad -\lambda_1 + F_{01} < m < \lambda_1 + F_{01}.$$

Чтобы эти интервалы имели непустое пересечение, необходимо и достаточно выполнение условий

$$-\lambda_2 < \lambda_1 + F_{01}, \quad -\lambda_1 + F_{01} < \lambda_2 \Rightarrow |F_{01}| < \lambda_1 + \lambda_2.$$

Таким образом, точка $m = m_*$ принадлежит области определения функции $\psi(m)$, причем

$$\max \psi(m) = \psi(m_*) = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - F_{01}^2}.$$

Исследуем корни уравнения $\psi(m) = F_{02}$. Ясно, что при $F_{02} > \psi(m_*) = \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - F_{01}^2}$ уравнение не имеет корней, т. е. при $F_{02}^2 + F_{01}^2 > (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ решений неравенств (1.105) нет и равновесие невозможно. Оставшаяся часть утверждения 3 доказывается непосредственной проверкой (легче всего это сделать графически). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для изотропного трения $\Phi_0 = fE$, а неравенства (1.105) из утверждения 2 имеют вид:

$$|m| < fN_2, \quad |m - F_0 \sin \psi_0| < fN_1, \\ F_0 |\cos \psi_0| < \sqrt{f^2 N_2^2 - m^2} + \sqrt{f^2 N_1^2 - (m - F_0 \sin \psi_0)^2}$$

а утверждение 3 дает результат, полученный ранее [37] методом предельного равновесия.

ПРИМЕР 2. Применим результаты утверждения 3 для случая $N_1 = N_2 = N_0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = N_0 \sigma(\alpha)$ (см. обозначения (1.104)). Будем полагать $F_{01} > 0$, т. е. $\sin \psi_0 > 0$. Обозначая

$$\kappa_1 = |\kappa|/\Delta \Rightarrow \kappa_1^2 + \sin^2 \psi_0 = \sigma^2(\alpha) \sigma^2(\gamma) / \Delta^2,$$

будем иметь

$$F_{01} = F_0 \sin \psi_0, \quad F_{02} = F_0 \kappa_1, \quad F_{00}^2 = F_0^2 (\kappa_1^2 + \sin^2 \psi_0) = F_0^2 \sigma^2(\alpha) \sigma^2(\gamma) / \Delta^2.$$

Согласно утверждению 3 при равновесии реализуется лишь случай 1 или 3.

Обозначим

$$F_{11} = 2\lambda_0 / \sqrt{\kappa_1^2 + \sin^2 \psi_0}, \quad F_{12} = 2\lambda_0 \sin \psi_0 / (\kappa_1^2 + \sin^2 \psi_0).$$

Тогда получаем следующий результат.

1) При $F_0 > F_{11}$ равновесие невозможно.

2) При $F_0 \in [F_{12}, F_{11}]$ равновесие возможно только при $m \in [m_1, m_2]$;

$$m_{1,2} = \frac{1}{2} \left(F_0 \sin \psi_0 \pm k_1 \sqrt{F_{11}^2 - F_0^2} \right)$$

3) При $0 \leq F < F_{12}$ равновесие возможно только при $m \in [m_1, m_2]$;

$$m_1 = F_0 \sin \psi_0 - \lambda_0, \quad m_2 = \lambda_0.$$

Из приведенных выражений видно, что граница области равновесия в плоскости параметров F_0, m при фиксированных ψ_0 и α состоит из отрезков прямых и дуг эллипсов. Изобразим такую границу для главного момента m_c относительно центра отрезка A_1A_2 . Ясно, что

$$m_c = m - \frac{1}{2}F_0 \sin \psi_0.$$

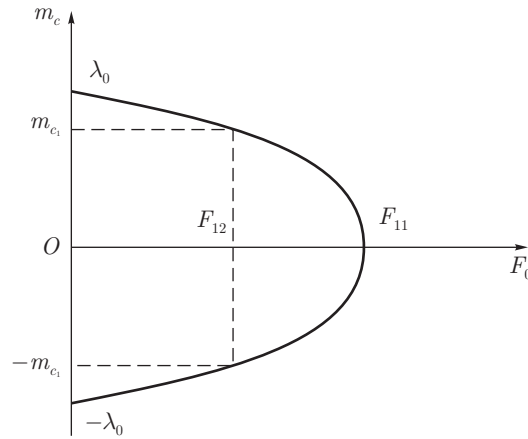


Рис. 1.17

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_0 \sin \psi_0 - \lambda_0 < m_c < -\frac{1}{2}F_0 \sin \psi_0 + \lambda_0 & \text{ при } F_0 \in (0, F_{12}) \\ -\frac{\kappa_1}{2}\sqrt{F_{11}^2 - F_0^2} < m_c < \frac{\kappa_1}{2}\sqrt{F_{11}^2 - F_0^2} & \text{ при } F_0 \in (F_{12}, F_{11}). \end{aligned}$$

На рис. 1.17 представлена полученная симметричная область равновесия в плоскости параметров F_0, m_c при фиксированных значениях параметров ψ_0 и α . При изменении параметров ψ_0 и α область

равновесия также изменяется. Полагая, что трение ортотропно, т. е. $f_{12} = f_{21} = 0$ рассмотрим два простейших случая.

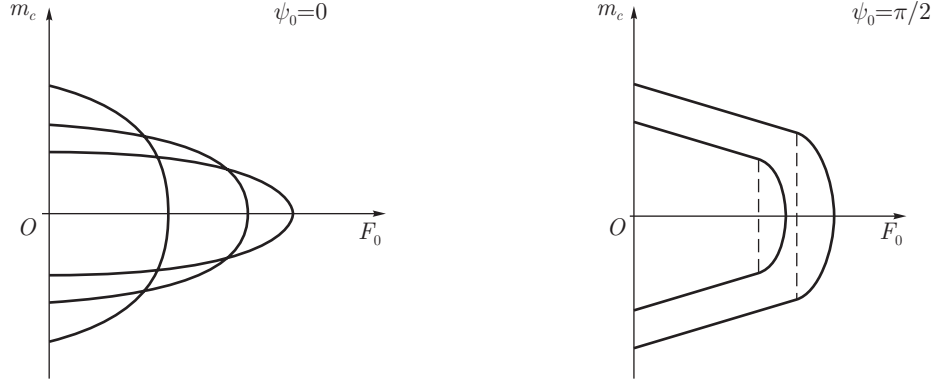


Рис. 1.18

Случай $\psi_0 = 0$. Тогда $F_{12} = 0$, т. е. границы областей равновесия при $\alpha \in (0, \pi/2)$ состоят только из дуг эллипсов (левая часть рис. 1.18) с полуосями

$$F_{11} = 2N_0 f_{11} f_{22} / f_0, \quad m_{c_1} = N_0 f_0; \quad f_0 = \sqrt{f_{22}^2 \cos^2 \alpha + f_{11}^2 \sin^2 \alpha}.$$

Видно, что длины полуосей эллипсов существенно зависят от угла α — наклона отрезка $A_1 A_2$ к оси x , причем длина одной из полуосей монотонно возрастает, а длина другой убывает с изменением угла α .

Случай $\psi_0 = \pi/2$. Тогда

$$F_{12} = 2N_0 f_{11}^2 f_{22}^2 / (f_0 f_{00}^2), \quad \lambda_0 = N_0 f_0, \quad F_{11} = 2N_0 f_{11} f_{22} / f_{00};$$

$$f_{00} = \sqrt{f_{22}^2 \sin^2 \alpha + f_{11}^2 \cos^2 \alpha}.$$

Здесь области равновесия при разных α состоят из отрезков прямых и гладко сопряженных с ними дуг эллипсов (правая часть рис. 1.18), причем, так как F_{11} и λ_0 — одновременно монотонно убывающие или возрастающие функциями угла α , то эти области вложены одна в другую.

Отметим, что области равновесия, представленные на рис. 1.18,

существенно отличаются от полученных ранее аналогичных областей равновесия ([31, с.227]).

4. Формулировка и обоснование результатов в случае $n = 3$

Пусть $A_j(x_j, y_j)$ ($j = 1, 2, 3$) — точка опоры (рис. 1.19).

Начало координат O совпадает с точкой A_1 .

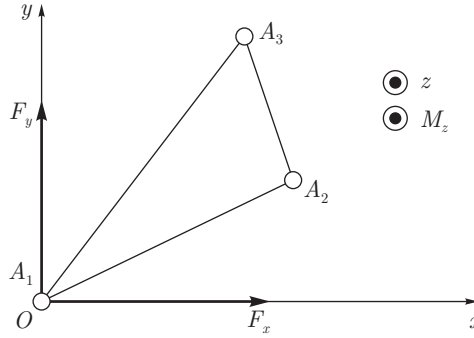


Рис. 1.19

В опорной шероховатой плоскости в осях Oxy анизотропное трение задается положительно определенной (2×2) -матрицей $\Phi_0 = ||f_{ij}||$.

Полагаем, что в точках опоры A_j заданы неотрицательные нормальные реакции N_j , которые определяются из уравнений равновесия (1.91) и зависят лишь от внешних заданных сил их моментов и геометрических параметров тела. Пусть F_j — силы трения покоя в точках A_j . Тогда уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -(F_{2x} + F_{3x} + F_x), \\ F_{1y} &= -(F_{2y} + F_{3y} + F_y); \\ M_z &= F_{2x}y_2 - F_{2y}x_2 + F_{3x}y_3 - F_{3y}x_3; \end{aligned} \tag{1.112}$$

при ограничениях (1.96) для сил трения покоя.

Введем матрицу Φ_1 и переменные u_j, ν_j ($j = 1, 2, 3$), P_1, P_2 по фор-

мулам

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} f_{22} & -f_{12} \\ f_{21} & -f_{11} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_j \\ v_j \end{vmatrix} = \Phi_1 \begin{vmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \Phi_1 \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}.$$

Используя введенные обозначения и уравнения (1.112), для главного момента M_z получим выражение:

$$\Psi = M_z \Delta = u_2 a_2 + v_2 b_2 + u_3 a_3 + v_3 b_3, \quad (1.113)$$

где

$$a_j = f_{11} y_j - f_{21} x_j, \quad b_j = -f_{12} y_j + f_{22} x_j, \quad j = 2, 3;$$

$$\Delta = f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21} > 0.$$

Ограничения (1.96) примут вид

$$(u_2 + u_3 + P_1)^2 + (v_2 + v_3 + P_2)^2 \leq \xi_1^2 \quad (1.114)$$

$$u_2^2 + v_2^2 \leq \xi_2^2, \quad u_3^2 + v_3^2 \leq \xi_3^2. \quad (1.115)$$

Поставим задачу определения экстремумов функции Ψ из (1.113) при ограничениях (1.114)–(1.115). Решив эту задачу, получим условие возможности статического равновесия в терминах параметров $\{M_z, P_1, P_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, a_2, b_2, a_3, b_3\}$, которые нетрудно сформулировать и для исходных параметров $(F_x, F_y, x_2, y_2, x_3, y_3)$.

Пусть Q_1 , Q_2 и Q_3 — множества (выпуклые) в четырехмерном пространстве $\{u_2, v_2, u_3, v_3\}$, определяемые, соответственно, неравенствами (1.114)–(1.115).

Тогда, в силу линейности функций Ψ , ее максимум и минимум достигаются лишь на границе пересечения множеств Q_1, Q_2, Q_3 . Поэтому поиск экстремума заключается в переборе всех вариантов гра-

ниц пересечения указанных множеств. Рассмотрим эти возможные случаи.

Случай 1. Пусть множество $D_1 = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ непусто. Исследуем значения функции Ψ на его границе.

Здесь справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. 1°. Множество Γ_1 точек границы множества D_1 , в которых неравенства (1.114)–(1.115) обращаются в равенства, непусто тогда и только тогда, когда

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \in [\xi_{01}, \xi_{02}], \quad (1.116)$$

где

$$\xi_{01} = \max\{\xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \xi_2 - \xi_1 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1 - \xi_2\}, \quad \xi_{02} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

2°. Функция Ψ (1.113) на множестве Γ_1 задается формулой:

$$\Psi(\varphi) = \xi_2(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi) + \frac{1}{q_2} \left(zq_1 \pm q_0 \sqrt{\xi_3^2 q_2 - z^2} \right), \quad (1.117)$$

где

$$\begin{aligned} q_2 &= 1 + \frac{P^2}{\xi_2^2} + \frac{2}{\xi_2}(P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi), \\ q_1 &= a_3 \cos \varphi + b_3 \sin \varphi + \frac{1}{\xi_2}(a_3 P_1 + b_3 P_2), \\ q_0 &= a_3 \sin \varphi - b_3 \cos \varphi + \frac{1}{\xi_2}(a_2 P_2 - b_3 P_1), \\ z &= h_0 - P_1 \cos \varphi - P_2 \sin \varphi, \quad h_0 = \frac{1}{2\xi_2}(\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - P^2) \end{aligned} \quad (1.118)$$

а параметр φ изменяется так, что:

$$P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi \in [P_{01}^-, P_{01}^+], \quad P_{01}^\pm = \frac{(\xi_1 \pm \xi_3)^2 - \xi_2^2 - P^2}{2\xi_2},$$

(при выполнении (1.116) множество изменения параметра φ непусто!).

Таким образом, здесь исходная задача об экстремуме сводится к исследованию корней уравнения $d\Psi/d\varphi = 0$, где функция $\Psi(\varphi)$ дается формулами (1.117), (1.118), а параметр φ изменяется в указанных пределах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4.

Доказательство заключается в совместном решении четырех уравнений (1.113) и (1.114), (1.115) (где неравенства заменены на равенства). Пусть $u_2 = \xi_2 \cos \varphi$, $v_2 = \xi_2 \sin \varphi$. Тогда первое равенство (1.115) удовлетворено. Из оставшихся трех равенств имеем

$$\begin{aligned} a_3 u_3 + b_3 v_3 &= \Psi - \xi_2(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi), \\ \left(\cos \varphi + \frac{P_1}{\xi_2}\right) u_3 + \left(\sin \varphi + \frac{P_2}{\xi_2}\right) v_3 &= h_0 - (P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi), \end{aligned} \quad (1.119)$$

$$u_3^2 + v_3^2 = \xi_3^2. \quad (1.120)$$

Величина h_0 определена последней формулой (1.118).

Решим линейную относительно u_3, v_3 систему (1.119) и результаты подставим в равенство (1.120). Получим следующее квадратное относительно $\Psi_1 = \Psi - \xi_2(a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi)$, уравнение:

$$\Psi_1^2 q_2 - 2\Psi_1 z q_1 + (a_3^2 + b_3^2) z^2 - \xi_3^2 q_0^2 = 0. \quad (1.121)$$

Величины q_1, q_2, q_3, z определены формулами (1.118). Используя нетрудно проверяемое тождество

$$q_1^2 - q_2(a_3^2 + b_3^2) = -q_0^2,$$

получаем из уравнения (1.121) выражение (1.117).

Справедливость первой части утверждения 4 следует из условия положительности подкоренного выражения в равенстве (1.117). Действительно,

$$\xi_3^2 q_2 - z^2 = \xi_3^2 \left[1 + \frac{P^2}{\xi_2^2} + \frac{2h_0 - 2z}{\xi_2} \right] - z^2 \geq 0.$$

Следовательно,

$$z \in [z_1^+, z_1^-]; \quad z_1^\pm = -\frac{\xi_3}{\xi_2}(\pm \xi_1 + \xi_3).$$

Кроме того, согласно предпоследнему равенству (1.118)

$$z \in (h_0 - P, h_0 + P)$$

Что приводит к включению (1.116). ■

Случай 2. Исследуем функцию Ψ на границе множества $D_2 = Q_i \cap Q_j$ ($i \neq j$), причем точки этой границы должны принадлежать внутренности множества Q_k ($k \neq i, k \neq j$). Если на таком множестве функция Ψ имеет точки локального экстремума, то эти точки являются, в силу ее линейности, также и глобальными экстремумами. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5. Рассмотрим границу Γ_2 множества $D_2 = Q_2 \cap Q_3$, т. е. неравенства (1.115), обращаются в равенства. Тогда функция Ψ имеет локальный экстремум на Γ_2 , который является внутренней точкой множества Q_1 , в том и только том случае, если:

$$\pm \left(\cos A_{23} + \frac{P}{\xi_3} \cos \gamma_2 + \frac{P}{\xi_2} \cos \gamma_3 \right) < \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - P^2}{2\xi_2\xi_3}, \quad (1.122)$$

где знак плюс берется для точки максимума, знак минус — для точки минимума, A_{23} — угол между векторами $d_2 = (a_2, b_2)$, и $d_3 = (a_3, b_3)$, γ_2, γ_3 — углы, составляемые вектором $P = (P_1, P_2)$ с векторами d_2 и d_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 5.

Граница Γ_2 задается формулами:

$$u_j = \xi_j \cos \varphi_j, \quad v_j = \xi_j \sin \varphi_j; \quad j = 2, 3, \quad \varphi_j \in (0, 2\pi).$$

Тогда точки экстремума функции Ψ из (1.113) даются равенствами:

$$u_j = \pm \xi_j \frac{a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}, \quad v_j = \pm \xi_j \frac{b_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2}}; \quad j = 2, 3.$$

Подставляя эти выражения в неравенство (1.114), получим (1.122). ■

Для множеств $Q_1 \cap Q_3$ и $Q_1 \cap Q_2$ аналогичные (1.122) неравенства получаются циклической перестановкой индексов.

Случай 3. Множество $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ пусто, т. е. равновесие заведомо невозможно.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6. *Неравенства (1.114)–(1.116) не имеют решения тогда и только тогда, когда*

$$P > \xi_{02} = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3. \quad (1.123)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 6.

Ясно, что неравенства (1.114)–(1.115) не имеют общего решения тогда и только тогда, когда

$$\Phi = \min [(u_2 + u_3 + P_1)^2 + (v_2 + v_3 + P_2)^2] > \xi_1^2$$

при условиях (1.115). Применяя, например, метод неопределенных множителей Лагранжа, можно получить, что

$$\Phi = \begin{cases} (P - \xi_2 - \xi_3)^2 & \text{при } P > \xi_2 + \xi_3, \\ 0 & \text{при } 0 < P < \xi_2 + \xi_3. \end{cases}$$

Таким образом, если $P > \xi_2 + \xi_3$, то неравенства (1.114)–(1.115) несовместны при выполнении условия (1.123). ■

Случай 4. Множество Q_1 содержит пересечение множеств Q_2 и Q_3 , т. е. $Q_1 \supset [Q_2 \cap Q_3]$. Другие возможные аналогичные ситуации получаются циклической перестановкой индексов.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть среди чисел*

$$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \quad \xi_2 - \xi_1 - \xi_3, \quad \xi_3 - \xi_1 - \xi_2 \quad (1.124)$$

есть одно положительное, например, первое из них (двух положительных, очевидно, быть не может при $\xi_j > 0$, $j = 1, 2, 3$). Тогда, если $0 \leq P < \xi_1 - \xi_2 - \xi_3$, то $Q_1 \supset [Q_2 \cap Q_3]$, и экстремум Ψ вычисляется так же, как в утверждении 5 (точка экстремума заведомо принадлежит внутренности множества Q_1). Другие возможные ситуации получаются циклической перестановкой индексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 7.

Ясно, что включение $Q_1 \supset [Q_2 \cap Q_3]$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\Phi = \max [(u_2 + u_3 + P_1)^2 + (v_2 + v_3 + P_2)^2] < \xi_1^2$$

при условиях (1.115). Значения Φ можно вычислить, например, методом неопределенных множителей Лагранжа. Имеем

$$\Phi = (P + \xi_2 + \xi_3)^2 < \xi_1^2 \Rightarrow P < \xi_1 - \xi_2 - \xi_3.$$

■

ПРИМЕР 3. Рассмотрим применение полученных результатов к случаю $F_x = F_y = 0$. Тогда $P_1 = P_2 = P = 0$. Следует различать два случая.

1°. Значения ξ_1, ξ_2, ξ_3 не удовлетворяют неравенствам треугольника. Тогда среди чисел (1.124) есть одно положительное, и можно применить результат утверждения 7. Пусть, например, $\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 > 0$. Тогда

$$\Psi_{\text{extr}} = M_z \Delta = \pm \left(\xi_2 \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \xi_3 \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \right).$$

Остальные возможные ситуации получаются циклической перестановкой индексов. Например, если $\xi_2 - \xi_1 - \xi_3 > 0$, то

$$\Psi_{\text{extr}} = M_z \Delta = \pm \left(\xi_1 \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \xi_3 \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2} \right).$$

2°. Значения ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворяют неравенствам треугольника. Тогда все числа (1.124) отрицательны, и применимы утверждения 4 и 5. Здесь следует различать два случая. Если выполнено неравенство (1.122) (или подобное ему при циклической перестановке индексов), то экстремум функции Ψ находится так же, как и в утверждении 7 (с соответствующей циклической перестановкой индексов). Если неравенства (1.122) не выполнены, т. е.

$$\pm \cos A_{23} > \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}{2\xi_2\xi_3}, \quad (1.23)$$

(A_{ij} — угол между векторами d_i, d_j , (1 2 3) означает циклическую перестановку индексов), то следует применять утверждение 4, которое в данном случае сводит поиск экстремума к исследованию функции

$$\Psi(\varphi) = \Psi_C \cos \varphi + \Psi_S \sin \varphi, \quad (1.125)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_C &= \xi_2 a_2 + h_0 a_3 \mp b_3 \sqrt{\xi_3^2 - h_0^2}, \quad \Psi_S = \xi_2 b_2 + h_0 b_3 \pm a_3 \sqrt{\xi_3^2 - h_0^2}, \\ h_0 &= \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}{2\xi_2}, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Ясно, что $h_0 < \xi_3$, так как это неравенство сводится к неравенствам для треугольника со сторонами ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Таким образом, функция $\Psi(\varphi)$ (1.125) определена корректно на всем отрезке $\varphi \in [0, 2\pi]$. Экстремумы функции $\Psi(\varphi)$ даются формулами:

$$\Psi_{\text{extr}} = \pm \sqrt{\Psi^2},$$

где

$$\begin{aligned} \Psi^2 &= \Psi_C^2 + \Psi_S^2 \\ &= \tilde{\Psi}^2 + 2|b_2 a_3 - b_3 a_2| \xi_2 \left[\left(\xi_3 - \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}{2\xi_2} \right) \left(\xi_3 + \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}{2\xi_2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\Psi}^2 &= \frac{1}{2} [\xi_1^2(l_2^2 + l_3^2 - l_1^2) + \xi_2^2(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2) + \xi_3^2(l_3^2 + l_1^2 - l_2^2)], \\ l_1^2 &= (a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2, \quad l_2^2 = a_2^2 + b_2^2, \quad l_3^2 = a_3^2 + b_3^2. \end{aligned}$$

Использование формулы Герона для треугольника со сторонами ξ_1, ξ_2, ξ_3 и того факта, что $|b_2 a_3 - b_3 a_2| = 2S_{ab}$, где S_{ab} — площадь треугольника, образованного векторами $d_2 = (a_2, b_2)$, $d_3 = (a_3, b_3)$, дает следующий результат:

$$\Psi^2 = \tilde{\Psi}^2 + 8S_{ab}S,$$

где S — площадь треугольника, со сторонами ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты, приведенные в данном параграфе отражены в работе [38].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полученные результаты существенно зависят от ориентации треугольника $A_1A_2A_3$ и главного вектора F_{xy} относительно осей координат Oxy , так как матрица анизотропного трения Φ_0 зависит от выбора системы координат Oxy . Можно оси x и y направлять по главным осям матрицы Φ_0 , и если они взаимно перпендикулярны, то будем иметь ортотропное трение, а условие равновесия будут зависеть также и от ориентации треугольника A_1, A_2, A_3 и вектора F_{xy} относительно этих главных осей.

Аналогичные результаты для изотропного трения были получены [37] методом предельного равновесия. Рассматривалась [34] задача гарантированного равновесия на плоскости с ортотропным трением при произвольном числе точек опоры.

ГЛАВА 2

Задачи о движении плоских тел по шероховатой плоскости

В данной главе рассматриваются задачи динамики при движении тел, контактирующих с шероховатой плоскостью. Характер взаимодействия (как и в главе 1) может быть двух видов:

- а) непрерывный (т. е. пятно контакта);
- б) точечный или дискретный (тело опирается на плоскость двумя или более точками своего основания).

Предполагается, что реакция шероховатой плоскости осуществляется по законам кулонова (сухого) трения (справедливым для элементарной площади контакта), сила трения изотропна на плоскости, задан предельный коэффициент трения и известен закон распределения нормальных реакций (давлений) по пятну контакта. Отметим, что в случае (а) вычисление главного вектора и главного момента сил трения, приложенных к пятну контакта, производится интегрированием элементарных сил и моментов по области контакта. Результат естественным образом зависит от угловой скорости области контакта и линейной скорости ее центра (например, центра масс). Таким образом, силы трения и моменты сил трения всегда (за исключением вырожденных случаев, может быть) существуют одновременно и взаимосвязаны.

Этот факт, пожалуй, впервые был отмечен в работе Контенсу [16]. Что же касается случая б) (точечный контакт), то здесь необходимы некоторые уточнения. Если рассматривать точечный контакт как результат предельного перехода малой области контакта при стремлении размеров этой области к нулю, то ответ зависит от вида движения этой области, т. е. от способа закрепления площади контакта на движущемся теле. Тогда естественным образом для точки контакта следует принять либо «классическую» (одномерную) модель сухого трения (см. Пэнлеве П. [1]), зависящую только от скорости точки контакта, либо двумерную (см. Журавлев В. Ф. [17]), в которой силы и моменты трения зависят и от скорости точки контакта и от ее угловой скорости вращения вместе с исходным движущимся телом. Подробно эти ситуации обсуждаются ниже, в § 2.1, § 2.2, где рассматривается задача о движении тела, опирающегося двумя площадками на шероховатую плоскость. В последующих параграфах рассматриваются задачи о движении тела, опирающегося на непрерывную область контакта.

§ 2.1. Движение тела, опирающегося двумя свободно укрепленными площадками на шероховатую плоскость

Рассмотрим движение по горизонтальной плоскости невесомого стержня с двумя весомыми площадками на концах под действием сил сухого трения. Пусть это — стержень AB длины $2l$, а массы площадок A и B , соответственно, m_1 и m_2 (см. рис. 2.1). Форма площадок — окружности радиуса ε .

Предполагаем, что площадки укреплены на стержне при помо-

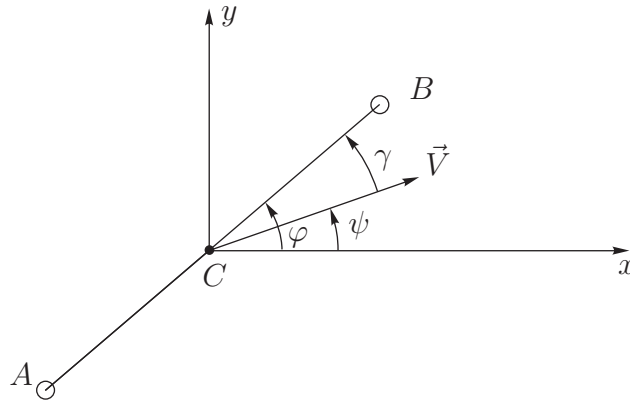


Рис. 2.1. Стержень AB с площадками на концах, движущийся по горизонтальной шероховатой плоскости. C — центр масс системы, \vec{V} — скорость центра масс

щи идеальных цилиндрических шарниров, которые не создают реактивных моментов от стержня и, следовательно, не могут заставить площадки поворачиваться. В силу симметрии формы площадок и распределения нормальных нагрузок (нормальное напряжение зависит только от расстояния до центра площадки) главный вектор сил трения, действующих на площадку, коллинеарен вектору скорости центра площадки и направлен против последнего, а главный момент сил трения относительно центра площадки равен нулю (см. Лурье А. И. [19], Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. [20]). Таким образом, площадки совершают поступательное движение (если, конечно, вращение площадки не было создано заранее каким-либо образом, но это уже другая задача!). Следовательно, применима одномерная («классическая») модель сухого трения: сила трения \vec{f}_i , приложенная к площадке m_i ($i = 1, 2$), направлена против вектора ее поступательной скорости \vec{v}_i и пропорциональна ее весу, если площадка движется, и против вектора суммы остальных внешних сил, если площадка покоится.

Более точно:

$$\vec{f}_i = \begin{cases} -k_i \cdot m_i g \cdot \vec{v}_i / |\vec{v}_i|, & \vec{v}_i \neq 0, \\ -\min \left\{ k_i \cdot m_i g, \left| \vec{F}_i \right| \right\} \cdot \vec{F}_i / \left| \vec{F}_i \right|, & \vec{v}_i = 0, \vec{F}_i \neq 0, \\ 0, & \vec{v}_i = 0, \vec{F}_i = 0, \end{cases}$$

где k_i — коэффициент трения площадки m_i , \vec{v}_i — ее поступательная скорость, \vec{F}_i — равнодействующая внешних сил (в данном случае сила реакции стержня в момент остановки, т. е. при $\vec{v}_i = 0$, $i = 1, 2$).

Пусть C — центр масс системы, \vec{v} — скорость точки C . Введем поступательно движущуюся систему координат Cxy , начало которой в точке C . Обозначим:

φ — угол, образуемый AB с осью Cx ,

ψ — угол, образуемый вектором \vec{v} с осью Cx ,

γ — угол, составленный вектором \vec{v} с AB (см. рисунок 2.1).

Все эти углы отсчитываются против часовой стрелки. Ясно, что $\varphi = \gamma + \psi$. Пусть $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость стержня AB . Тогда для скоростей \vec{v}_A , \vec{v}_B точек A, B имеем:

$$v_{Ax} = v \cos \psi + \omega l_1 \sin \varphi, \quad v_{Ay} = v \sin \psi - \omega l_1 \cos \varphi,$$

$$v_{Bx} = v \cos \psi - \omega l_2 \sin \varphi, \quad v_{By} = v \sin \psi + \omega l_2 \cos \varphi,$$

$$v_A^2 = v^2 + \omega^2 l_1^2 + 2v\omega l_1 \sin \gamma, \quad v_B^2 = v^2 + \omega^2 l_2^2 - 2v\omega l_2 \sin \gamma,$$

где обозначено

$$l_1 = 2l \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad l_2 = 2l \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Пусть $v_A \neq 0$, $v_B \neq 0$. Тогда теоремы динамики плоскопараллельного

движения приводят к следующим трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= -\frac{\mu_1}{2mv_A}(v + \omega l_1 \sin \gamma) - \frac{\mu_2}{2mv_B}(v - \omega l_2 \sin \gamma), \\ v\dot{\psi} &= -\omega \cos \gamma \left(\frac{\mu_2 l_2}{2mv_B} - \frac{\mu_1 l_1}{2mv_A} \right), \\ J\dot{\omega} &= -\frac{\mu_1 l_1}{v_A}(\omega l_1 + v \sin \gamma) - \frac{\mu_2 l_2}{v_B}(\omega l_2 - v \sin \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где $\mu_i = k_i m_i g$ ($i = 1, 2$), $2m = m_1 + m_2$, $J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$.

Далее будем рассматривать случай равных масс $m_1 = m_2 = m$ и равных коэффициентов трения $k_1 = k_2 = k$. Тогда уравнения (2.1) упрощаются и при обозначениях $v_1 = \omega \cdot l$, $\mu = kg/2$ приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= -\mu \left(\frac{v + v_1 \sin \gamma}{v_A} + \frac{v - v_1 \sin \gamma}{v_B} \right), \\ \dot{v}_1 &= -\mu \left(\frac{v_1 + v \sin \gamma}{v_A} + \frac{v_1 - v \sin \gamma}{v_B} \right), \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{l} + \mu \frac{v_1}{v} \cos \gamma \left(\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_A} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

При получении последнего уравнения в (2.2) было использовано тождество $\dot{\gamma} = \omega - \dot{\psi}$.

Вводим новую переменную $\lambda = v/v_1$. Тогда в переменных $\{v_1, \lambda, \gamma\}$ система (2.2) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\mu \left(\frac{1 - \lambda \sin \gamma}{\xi_1} + \frac{1 + \lambda \sin \gamma}{\xi_2} \right), \\ \dot{\lambda} &= \frac{\mu(1 - \lambda^2) \sin \gamma}{v_1} \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right), \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{l} + \frac{\mu \cos \gamma}{\lambda v_1} \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где

$$\xi_1^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \sin \gamma, \quad \xi_2^2 = 1 + \lambda^2 + 2\lambda \sin \gamma.$$

Дальнейшее исследование движения сводится, таким образом, к изучению свойств решений системы (2.3).

I. Пусть начальные условия $v(0), v_1(0)$ таковы, что $\lambda(0) = 1$ и $\gamma(0) \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда $\lambda = 1$ — решение, которое тождественно удовлетворяет второму уравнению системы (2.3). По сути, $\lambda = 1$ — частный первый интеграл системы (2.3).

При $\lambda = 1$ оставшиеся два уравнения из (2.3) будут иметь вид (после небольших тригонометрических преобразований):

$$\dot{v}_1 = -\sqrt{2}\mu \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \dot{\gamma} = \frac{v_1}{l} + \frac{\sqrt{2}\mu}{v_1} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad (2.4)$$

$$\dot{v}_1 = -\sqrt{2}\mu \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \dot{\gamma} = \frac{v_1}{l} - \frac{\sqrt{2}\mu}{v_1} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi. \quad (2.5)$$

Системы (2.4), (2.5) нетрудно проинтегрировать. Например, для (2.4) получим

$$\frac{dv_1}{d\gamma} = -\sqrt{2}\mu \frac{\cos \gamma}{\frac{v_1}{l} + \frac{\sqrt{2}\mu}{v_1} \sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (2.6)$$

Обозначая $z = \sin \frac{\gamma}{2}$, $v_1^2 = y$, $y/z = u$, получим из (2.6):

$$z \frac{du}{dz} = -\frac{u^2 + 5\sqrt{2}\mu l \cdot u}{u + \sqrt{2}\mu l}.$$

В последнем уравнении переменные разделяются, и мы получаем интеграл

$$\left(5\mu\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{v_1^2}{l}\right)^4 \cdot \frac{v_1^2}{l} = C_1 = \text{const}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (2.7)$$

Аналогично интегрируется система (2.5), для которой получается интеграл

$$\left(5\mu\sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \frac{v_1^2}{l}\right)^4 \cdot \frac{v_1^2}{l} = C_2 = \text{const}, \quad \frac{\pi}{2} < \gamma \leq \pi. \quad (2.8)$$

Отметим, что значение $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ является особым, т. к. при этом происходит остановка одной из площадок (A или B). В соответствии с моделью одномерного трения в этой точке следует проверять неравенство

$$kg > \frac{2v_1^2}{l}. \quad (2.9)$$

Если (2.9) выполнено, то процесс движения заканчивается вращением стержня AB вокруг остановившейся точки. Если же (2.9) не выполняется, то процесс продолжается в соответствии с интегралом (2.7) или (2.8), однако, в конце концов, всегда заканчивается вращением вокруг одной из точек A или B (за исключением той единственной ситуации, когда реализуется равенство $\frac{v_1^2}{l} = 5\mu\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ при $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$, т. к. в этом случае процесс заканчивается движением по закону $v_1 = \left(5\mu l\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{1/2}$, см. интеграл (2.8)). Отметим, что условие (2.9) физически означает, что сила трения покоя, возникающая в остановившейся точке (например, B), в состоянии обеспечить реализовавшееся нормальное ускорение в точке, продолжающей движение (точка A). Более подробно такая ситуация обсуждается в работе Ишлинского А. Ю., Соколова Б. Н., Черноусько Ф. Л. [20].

Используя, в соответствии с (2.7) и (2.8), функциональную связь между v_1 и γ , можно, при помощи (2.4) и (2.5), получить выражение квадратур для функций от времени $v_1(t)$ и $\gamma(t)$. Далее, используя соотношение $\dot{\psi} = \frac{v_1}{l} - \dot{\gamma}$, можем найти ψ как функцию времени. Тогда траектория движения центра масс C находится из интегрирования кинематических соотношений:

$$\dot{x}_C = v \cos \psi, \quad \dot{y}_C = v \sin \psi.$$

II. Пусть начальные условия $v(0)$, $v_1(0)$ таковы, что $\lambda(0) \neq 1$, тогда из второго уравнения системы (2.3) следует, что $\lambda(t) \rightarrow \lambda^*$ монотонно по t . Справедливость этого утверждения следует из соблюдения неравенства

$$\sin \gamma \left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2} \right) > 0, \quad \gamma \in [0, \pi],$$

которое обеспечивает знакопостоянство $\dot{\lambda}$, т. е. монотонность функции $\lambda(t)$. Переходя далее к новому "времени" $\tau = 1/v_1$, которое при

изменении v_1 от $v_1(0)$ до 0 меняется в пределах $[v_1^{-1}(0), \infty)$, можно исследовать асимптотику решения $\lambda(t)$ второго уравнения из (2.3). Более подробно эти рассуждения приведены далее в конце § 2. 2.

§ 2. 2. Движение тела, опирающегося двумя жестко укрепленными площадками на шероховатую плоскость

Рассмотрим движение системы из § 2. 1, в которой площадки контактов A и B закреплены жестко на стержне AB . Такой вид закрепления приводит к тому, что главный вектор и главный момент сил трения относительно центра площадки, при контакте уже зависят и от скорости центра площадки и от ее угловой скорости (которая есть угловая скорость стержня AB), причем при обращении скорости центра площадки в нуль и ненулевой угловой ее скорости также обращается в нуль и главный вектор сил трения. Это вытекает из симметрии площадки и распределения ее нормальных нагрузок. Поэтому при исследовании движения такой системы следует применять модель двумерного сухого трения, теория которого была разработана Журавлевым В. Ф. [17, 21]. Используя результаты этих работ, примем, что сила трения \vec{f}_i , приложенная к площадке m_i ($i = 1, 2$), дается формулой:

$$\vec{f}_i = -f_{0i} \frac{|\bar{v}_i|}{|v_i + b\omega\varepsilon|} \cdot \frac{\vec{v}_i}{|\bar{v}_i|} = -\frac{f_{0i} \cdot \vec{v}_i}{|\bar{v}_i| + b\omega\varepsilon},$$

где \bar{v}_i — скорость центра площадки m_i , $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость площадки, ε — радиус площадки, $f_{0i} = k_i m_i g$, k_i — коэффициент трения, b — константа, зависящая от вида распределения нормальной нагрузки [21].

Отметим, что главный момент сил трения относительно центра площадки при $\varepsilon/l \rightarrow 0$ значительно меньше суммы моментов сил \vec{f}_1

и \vec{f}_2 относительно центра масс C стержня и поэтому в дальнейшем учитываться не будет. Предполагая, как и в § 2.1, $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$, мы получим вместо уравнений (2.3) следующие уравнения в переменных $\{v_1, \lambda, \gamma\}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\mu \left(\frac{1 - \lambda \sin \gamma}{\xi_1 + \varepsilon_0} + \frac{1 + \lambda \sin \gamma}{\xi_2 + \varepsilon_0} \right), \\ \dot{\lambda} &= \frac{\mu(1 - \lambda^2)}{v_1} \sin \gamma \left(\frac{1}{\xi_1 + \varepsilon_0} - \frac{1}{\xi_2 + \varepsilon_0} \right), \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{l} + \frac{\mu \cos \gamma}{\lambda v_1} \left(\frac{1}{\xi_1 + \varepsilon_0} - \frac{1}{\xi_2 + \varepsilon_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где $\mu = kg/2$, $\varepsilon_0 = b\varepsilon/l$, ξ_1, ξ_2 — такие же, как и в (2.3). Как видим, система (2.10) отличается от системы (2.3) из § 2.1 наличием безразмерного малого параметра ε_0 в соответствующих знаменателях. Кроме того (и это самое важное здесь), движение системы нужно изучать в условиях модели двумерного трения, т.е. при обращении ξ_1 или ξ_2 в нуль (что соответствует $v_A = 0$ или $v_B = 0$) сила трения также обращается в нуль ($\dot{\varphi} \neq 0$). Отсюда следует вывод, что (в отличие от систем из § 2.1) вращения стержня AB вокруг остановившейся точки не будет в течение всего процесса движения, вплоть до самой остановки.

Дальнейшие исследования движения аналогичны изложенному в § 2.1.

Если $\lambda(0) = 1$, то $\lambda = 1$ является также частным интегралом уравнения (2.10). При $\lambda = 1$ оставшиеся два уравнения системы (2.10) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\mu \left(\frac{1 - z}{\varepsilon_0 + \sqrt{2}\sqrt{1 - z}} + \frac{1 + z}{\varepsilon_0 + \sqrt{2}\sqrt{1 + z}} \right), \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{l} + \frac{\mu \cos \gamma}{v_1} \left(\frac{1}{\varepsilon_0 + \sqrt{2}\sqrt{1 - z}} - \frac{1}{\varepsilon_0 + \sqrt{2}\sqrt{1 + z}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где $z = \sin \gamma$.

Уравнения (2.11) эквивалентны одному нелинейному уравнению 1-порядка, проинтегрировать которое не удастся. Однако можно показать близость решения системы (2.11) при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ к соответствующим явным решениям системы (2.3) из § 2.1 (см. интегралы (2.8), (2.9)). Кроме того, при $\gamma = \pm\pi/2$ остановившаяся точка продолжает свое движение вплоть до полной остановки AB .

Если же $\lambda(0) \neq 1$, то, аналогично § 2.1, можно показать, что $\lambda(t)$ монотонная функция и $\lim \lambda(t) = 1$. Получается это следующим образом.

Перейдем в (2.10) к «новому» времени $\tau = 1/v_1(t)$. Тогда уравнения (2.10) приобретают вид (дифференцирование по τ обозначаем штрихом):

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{v_1}{h}(1 - \lambda^2) \sin \gamma \left(\frac{1}{\xi_1 + \varepsilon_0} - \frac{1}{\xi_2 + \varepsilon_0} \right), \\ \gamma' &= \frac{v_1}{\mu h} \left[\frac{v_1^2}{l} + \frac{\mu \cos \gamma}{\lambda} \left(\frac{1}{\xi_1 + \varepsilon_0} - \frac{1}{\xi_2 + \varepsilon_0} \right) \right], \\ v_1' &= -v_1^2, \quad h = \frac{1 - \lambda \sin \gamma}{\xi_1 + \varepsilon_0} + \frac{1 + \lambda \sin \gamma}{\xi_2 + \varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Отметим, что $\tau \in \left[\frac{1}{v_1(0)}, \infty \right)$, и из первого уравнения системы (2.12) получаем монотонность изменения функции $\lambda(\tau)$, причем при $\lambda < 1$ эта функция монотонно возрастающая, а при $\lambda > 1$ она является монотонно убывающей. Следовательно, эта функция имеет конечный предел $\lambda^* = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda(\tau)$.

Покажем, что $\lambda^* = 1$. Действительно, в противном случае из первого уравнения системы (2.12) получим $\gamma(\tau) \rightarrow 0$, а второе уравнение системы (2.12) не имеет таких решений в силу его неустойчивости по первому приближению. Это следует из того, что $v_1(\tau) \sim 1/\tau$ при $\tau \rightarrow \infty$, а h — ограниченная сверху и снизу положительная функция.

Далее, несложные рассуждения приводят к тому факту, что $\lambda(\tau) = 1$ лишь при $\tau = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты, приведенные в §§ 2.1, 2.2 отражены в работе [18].

§ 2.3. Движение тела, опирающегося произвольной площадкой на шероховатую плоскость

Рассмотрим движение по горизонтальной плоскости произвольной области S под действием сил сухого трения. Эту область (см. рис 2.2) можно считать основанием (опорой, зоной контакта) некоторого твердого тела, совершающего движения по плоскости. Основные предположения о характере взаимодействия области S с плоскостью такие же, как и в § 1. 1.

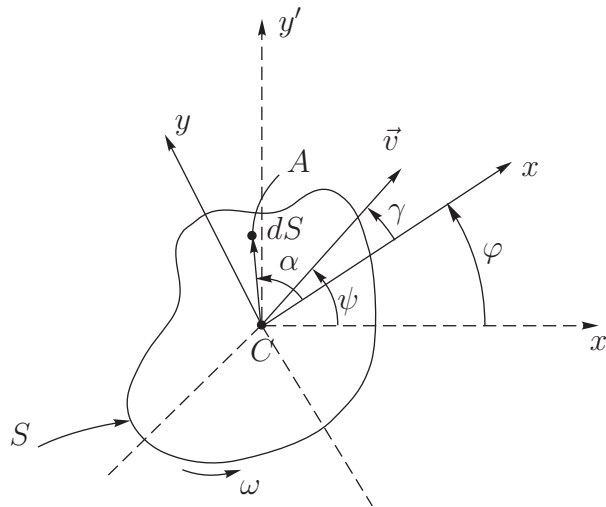


Рис. 2.2. К способу вычисления сил трения и моментов сил трения в прямоугольной системе координат. C — центр масс, \vec{v} — скорость центра масс C , Cxy — система координат, жестко связанная с пластиной, $Cx'y'$ — поступательная система координат

Пусть p — нормальное давление, равномерно распределенное по области S , а элементарная сила трения $d\vec{F}_{\text{тр}}(A)$ для точки A области удовлетворяет соотношению (1.1). Отметим, что здесь влияние силы трения покоя при движении S не существенно, т. к. точка с ну-

левой скоростью может быть только одной (если она вообще принадлежит области S) и при интегрировании элементарных сил трения по области S вносит бесконечно малый вклад.

В данном параграфе будут рассмотрены основные способы аналитического вычисления сил трения и моментов сил трения, действующих на область S . Затем составляются уравнения динамики для движения области S , даются способы оценки сверху и снизу для времени полной ее остановки, рассматриваются вопросы о финальных движениях и максимальном пути, проходимом областью S до полной ее остановки.

На рис. 2.2 представлено тело S , совершающее движение в плоскости рисунка, где C — центр масс тела (вернее, проекция его на плоскость), Cxy — система координат, жестко связанная с телом, \vec{v} — скорость точки C , φ — угол собственного поворота тела S (т. е. угол, образуемый осью Cx с горизонталью Cx'), ψ — угол, образуемый вектором \vec{v} с горизонталью Cx' , $\gamma = \psi - \varphi$ — угол, образуемый вектором \vec{v} с положительным направлением подвижной оси Cx , $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость тела. Все углы отсчитываются против часовой стрелки. Рассмотрим элемент dS в произвольной точке A тела, координаты которой суть (x, y) в системе Cxy . Тогда имеем соотношения для скорости точки A :

$$v_{Ax} = v \cos \gamma - \omega y, \quad v_{Ay} = v \sin \gamma + \omega x, \quad (2.13)$$

$$v_A(x, y) = |\vec{v}_A| = \sqrt{(v \cos \gamma - \omega y)^2 + (v \sin \gamma + \omega x)^2}.$$

Используя уравнение (1.1), получим для проекций полной силы трения на оси x и y :

$$\begin{aligned} F_x &= \iint dF_{\text{тр}x} = -kp \iint \frac{v_{Ax}}{v_A} dx dy, \\ F_y &= \iint dF_{\text{тр}y} = -kp \iint \frac{v_{Ay}}{v_A} dx dy, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где интегрирование ведется по всей области S , а v_{Ax} , v_{Ay} , v_A даются формулами из (2.13). Для суммарного момента сил трения относительно точки C мы получим соотношение:

$$M_C = -kp \iint \frac{v_{Ay} \cdot x - v_{Ax} \cdot y}{v_A} dx dy, \quad (2.15)$$

где опять же интегрирование ведется по всей области S . Преобразуем (2.14) и (2.15), используя вытекающие из (2.13) тождества:

$$\frac{v_{Ax}}{v_A} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial v_A}{\partial y}, \quad \frac{v_{Ay}}{v_A} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial v_A}{\partial x}. \quad (2.16)$$

Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$ — уравнения контура (границы) области S , соответственно, под и над осью Cx (т.е. при $y < 0$ и $y > 0$); и пусть при этом x изменяется от x_1 до x_2 (т.е. x_1 , x_2 — абсциссы точек, в которых ось Cx пересекает контур области S); аналогично, пусть $f_1(y)$, $f_2(y)$ — уравнения контура области S , соответственно, слева и справа от оси Cy (т.е. при $x < 0$ и $x > 0$), а y изменяется от y_1 до y_2 (т.е. y_1 , y_2 — ординаты точек, в которых ось Cy пересекает контур области S). Будем предполагать, что систему Cxy можно выбрать так, чтобы g_1 , g_2 , f_1 , f_2 были однозначными функциями своих аргументов (например, S — выпуклая область). Если это не так, то область S придется разбивать на выпуклые подобласти и вычисления усложнятся технически. Отметим, что если S — круг радиуса R , то

$$g_2 = -g_1 = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x_2 = -x_1 = R,$$

$$f_2 = -f_1 = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad y_2 = -y_1 = R.$$

Если S — прямоугольник длины $2a$, ширины $2b$, то, выбирая Cxy так, что x параллельна стороне $2a$, а y — стороне $2b$, получим:

$$g_2 = -g_1 = b, \quad x_2 = -x_1 = a; \quad f_2 = -f_1 = a, \quad y_2 = -y_1 = b.$$

Используя описанные предположения, тождества (2.16) и обозначения для $v_A(x, y)$ из (2.13), получим из (2.14):

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{kp}{\omega} \int_{x_1}^{x_2} \left[v_A(x, g_2(x)) - v_A(x, g_1(x)) \right] dx, \\ F_y &= -\frac{kp}{\omega} \int_{y_1}^{y_2} \left[v_A(f_2(y), y) - v_A(f_1(y), y) \right] dy. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Далее, проводя в (2.15) интегрирование по частям, с использованием тождеств (2.16), получим

$$M_c = -\frac{kp}{\omega} \left[m_1 + m_2 - 2 \iint v_A(x, y) dx dy \right], \quad (2.18)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[g_2(x) v_A(x, g_2(x)) - g_1(x) v_A(x, g_1(x)) \right] dx, \\ m_2 &= \int_{y_1}^{y_2} \left[f_2(y) v_A(f_2(y), y) - f_1(y) v_A(f_1(y), y) \right] dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Пусть m — масса тела S , J — его момент инерции относительно центра масс C (т. е. относительно вертикали, проходящей через точку C). Запишем уравнения движения центра масс в подвижной системе Cxy :

$$\begin{aligned} m \left[(v \cos \gamma)^{\cdot} - \omega v \sin \gamma \right] &= F_x, \\ m \left[(v \sin \gamma)^{\cdot} + \omega v \cos \gamma \right] &= F_y. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Далее запишем теорему кинетического момента относительно центра масс C (т. е. относительно вертикали, проходящей через C):

$$J\dot{\omega} = M_c. \quad (2.21)$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right)^{\cdot} = -kp \iint v_A(x, y) dx dy, \quad (2.22)$$

где стоящая справа величина есть суммарная мощность сил трения, действующих на тело S .

Используя (2.18) и равенство (2.22), получим из (2.21):

$$J\dot{\omega} = -\frac{kp}{\omega} \left[m_1 + m_2 + \frac{2}{kp} \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right)^{\cdot} \right].$$

Упрощая последнее равенство, получим:

$$\left(mv^2 + \frac{3}{2}J\omega^2 \right)^{\cdot} = -kp(m_1 + m_2). \quad (2.23)$$

Умножая первое из уравнений в (2.20) на $v \cos \gamma$, а второе — на $v \sin \gamma$ и складывая, получим:

$$\left(\frac{mv^2}{2} \right)^{\cdot} = v(F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma). \quad (2.24)$$

Используя полученное равенство, из (2.23) имеем

$$\left(\frac{3}{2}J\omega^2 \right)^{\cdot} = -kp(m_1 + m_2) - 2v(F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma).$$

Преобразуя последнее равенство, имеем следующее уравнение моментов (вместо (2.21)!):

$$J\dot{\omega} = -\frac{kp}{3\omega}(m_1 + m_2) - \frac{2}{3}\frac{v}{\omega}(F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma) = M_C. \quad (2.25)$$

Таким образом, мы получили систему трех динамических уравнений (2.20) и (2.25), в которых все силовые факторы (от сил трения)

выражены через скорости только точек контура области S , в соответствии с формулами (2.17) и (2.19).

Теорема о кинетической энергии (2.22) примет вид:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right)' = -\frac{kp}{3}(m_1 + m_2) + \frac{1}{3}v(F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma), \quad (2.26)$$

где F_x, F_y, m_1, m_2 даются формулами (2.17), (2.19). Последнее равенство получено умножением уравнения (2.25) на ω и сложением затем с уравнением (2.24). Отметим, что равенство (2.23) есть некий аналог теоремы об изменении кинетической энергии и является более простым уравнением, чем равенство (2.26).

Изложенный способ подсчета сил трения и их моментов использует систему прямоугольных координат. Этот способ удобен для контуров, состоящих из прямых линий (например, прямоугольников, стержней и т.д.). Изложим теперь способ, принадлежащий А.И. Лурье [19] и использующий интегрирование в полярных координатах с полюсом в мгновенном центре скоростей пластинки S . Этот способ удобен для контуров, состоящих из окружностей или эллипсов (или других кривых, компактно описываемых в полярных координатах).

На рисунке 2.3 представлена область (пластинка) S , у которой в точке P находится мгновенный центр скоростей, C — центр масс пластинки, скорость которого \vec{v} . В остальном обозначения такие же, как и на рис. 2.2. Примем PC за ось полярной системы координат, причем P — ее полюс. Возьмем в точке A тела произвольный элемент dS , и пусть α — полярный угол, образуемый вектором \vec{PA} с осью PC , $r = |\vec{PA}|$, $dS = r dr d\alpha$, \vec{v}_A — скорость в точке A , причем $\vec{v}_A \perp \vec{AP}$.

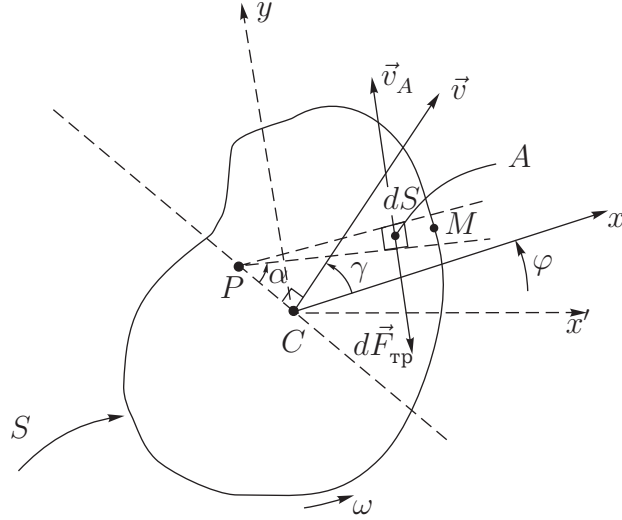


Рис. 2.3. К способу вычисления сил трения и моментов сил трения в полярной системе координат (А. И. Лурье [19]). α — полярный угол, образуемый вектором \vec{PA} с полярной осью PC ; P — мгновенный центр скоростей тела S , который лежит внутри области S , Cxy — связанная с пластиной система координат

Тогда имеем

$$d\vec{F}_{\text{тр}} = -kp dS \frac{\vec{v}_A}{|\vec{v}_A|},$$

$$dF_{\text{тр}x} = -kp dS \cdot \cos(\gamma + \alpha), \quad dF_{\text{тр}y} = -kp dS \cdot \sin(\gamma + \alpha),$$

$$dM_{\text{тр. отн. т. } P} = -kp \cdot dS \cdot r,$$

$$dM_{\text{тр. отн. т. } C} = -kp \cdot dS \cdot (r - R \cos \alpha),$$

где обозначено $R = PC$ — расстояние от центра масс C до мгновенного центра скоростей P .

В дальнейшем будем различать два случая:

1° P лежит внутри области S . Тогда интегрирование полученных

соотношений дает

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -kp \int_0^{2\pi} \cos(\gamma + \alpha) d\alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{2}; \\ F_y &= -kp \int_0^{2\pi} \sin(\gamma + \alpha) d\alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{2}; \\ M_p &= -kp \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{3}; \\ M_c &= -kp \left[\int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \frac{r^3(\alpha)}{3} - R \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

где $r(\alpha)$ — уравнение контура во введенной систем полярных координат (угол α отсчитывается от оси PC против часовой стрелки и изменяется в пределах от 0 до 2π).

2° P лежит вне области S (см. рис. 2.4). Тогда, проводя интегрирование, получим:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -kp \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \cos(\gamma + \alpha) d\alpha \left[\frac{r_2^2(\alpha) - r_1^2(\alpha)}{2} \right]; \\ F_y &= -kp \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \sin(\gamma + \alpha) d\alpha \left[\frac{r_2^2(\alpha) - r_1^2(\alpha)}{2} \right]; \\ M_p &= -kp \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha \frac{r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)}{3}; \\ M_c &= -kp \left[\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} d\alpha \frac{r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)}{3} - R \int_{-\alpha_2}^{\alpha_1} \cos \alpha d\alpha \frac{r_2^2(\alpha) - r_1^2(\alpha)}{2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где $r_1(\alpha) = PM_1$, $r_2(\alpha) = PM_2$ (см. рис. 2.4), α_1, α_2 — углы, образуемые с осью PC предельными касательными PN_1 и PN_2 , проведенными из точки P к контуру S (см. рис. 2.4).

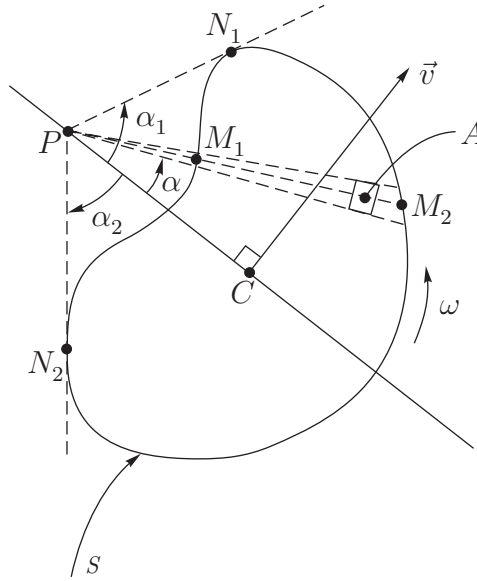


Рис. 2.4. К способу вычисления сил трения и моментов сил трения в полярной системе координат. P — мгновенный центр скоростей тела S , который лежит вне области S

Отметим, что конфигурация контура области S предполагается такой, что функции $r(\alpha), r_1(\alpha), r_2(\alpha)$ являются однозначными и кусочно-гладкими функциями своих аргументов. В противном случае необходимо производить разбиение области S на подобласти, в которых эти функции являются однозначными.

Полученные выражения для F_x, F_y и M_C , даваемые формулами (2.27) или (2.28), необходимо затем подставлять в уравнения движения (2.20), (2.21). Неудобством здесь, конечно же, является то, что нужно следить, где находится мгновенный центр скоростей (внутри или вне области S). Отметим, что вычисление в прямоугольных координатах (т. е. по формулам (2.17), (2.18)) свободно от этого неудобства!

Покажем теперь, как можно получить оценки снизу и сверху для времени остановки тела S . Пусть заданы начальные условия $v_0 = v(0)$, $\omega_0 = \omega(0)$. Разделим обе части уравнения (2.23) на

$$2\sqrt{mv^2 + \frac{3}{2}J\omega^2}.$$

В результате получим соотношение:

$$\left(\sqrt{mv^2 + \frac{3}{2}J\omega^2} \right) = -kp \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{mv^2 + \frac{3}{2}J\omega^2}}. \quad (2.29)$$

Нетрудно видеть, в силу соотношений (2.19) и (2.13), что правая часть полученного равенства является функцией угла γ и отношения $\xi = \frac{v}{\omega}$. Обозначаем поэтому правую часть в (2.29) так:

$$S(\gamma, \xi) = -kp \frac{m_1^* + m_2^*}{2\sqrt{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}}, \quad \xi = \frac{v}{\omega}, \quad (2.30)$$

где m_1^*, m_2^* даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} m_1^* &= \int_{x_1}^{x_2} [g_2 \cdot v_A^*(x, g_2) - g_1 \cdot v_A^*(x, g_1)] dx; \\ m_2^* &= \int_{y_1}^{y_2} [f_2 \cdot v_A^*(f_2, y) - f_1 \cdot v_A^*(f_1, y)] dy; \\ v_A^*(x, g_i) &= \sqrt{(\xi \cos \gamma - g_i)^2 + (\xi \sin \gamma + x)^2}, \quad i = 1, 2; \\ v_A^*(f_i, y) &= \sqrt{(\xi \cos \gamma - y)^2 + (\xi \sin \gamma + f_i)^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Далее будем искать верхнюю и нижнюю границы функции $S(\gamma, \xi)$ при $\gamma \in [0, 2\pi]$, $\xi \in [0, \infty)$. Структура функций m_1^* и m_2^* из (2.31) позволяет утверждать, что эти границы существуют и являются отрицательными. Поэтому для $S(\gamma, \xi)$ из (2.30) введем обозначения:

$$-S_1 = \inf_{\gamma, \xi} S(\gamma, \xi),$$

$$-S_2 = \sup_{\gamma, \xi} S(\gamma, \xi),$$

$$S_1 > S_2 > 0.$$

Интегрируем равенство (2.29) от $t = 0$ до $t = t^*$, где t^* — время оста-

новки (т. е. $v(t^*) = \omega(t^*) = 0$):

$$-\sqrt{mv_0^2 + \frac{3}{2}J\omega_0^2} = \int_0^{t^*} S(\gamma, \xi) dt.$$

Отсюда получаются следующие оценки для t^* :

$$\frac{1}{S_1} \sqrt{mv_0^2 + \frac{3}{2}J\omega_0^2} < t^* < \frac{1}{S_2} \sqrt{mv_0^2 + \frac{3}{2}J\omega_0^2}. \quad (2.32)$$

Таким образом, все дело сводится к нахождению величин S_1 и S_2 . В последующих параграфах, где рассматриваются примеры конкретных областей S , будет показано, как находить S_1 и S_2 . Тем не менее даже в случае произвольного контура можно получать оценки величин S_1 и S_2 (сверху и снизу). Предположим, для сокращения выкладок, что контур S имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, и выберем систему координат Cxy так, чтобы оси x и y были направлены по осям симметрии (это может быть эллипс, прямоугольник или еще какая-либо фигура такого типа). Тогда имеем соотношения:

$$g_2(x) = -g_1(x) = g(x),$$

$$f_2(y) = -f_1(y) = f(y),$$

$$x \in [x_1, x_2], \quad y \in [y_1, y_2],$$

$$x_2 = -x_1 = x_0, \quad y_2 = -y_1 = y_0.$$

Тогда, в соответствии с формулами (2.30), (2.31), задача сводится

к оценке (сверху и снизу) интегралов:

$$I_1 = \int_{-x_0}^{x_0} \left[\frac{\sqrt{\xi^2 + x^2 + g^2 - 2\xi(g \cos \gamma - x \sin \gamma)}}{2\sqrt{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} + \frac{\sqrt{\xi^2 + y^2 + g^2 - 2\xi(-g \cos \gamma - x \sin \gamma)}}{2\sqrt{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} \right] g(x) dx;$$

$$I_2 = \int_{-y_0}^{y_0} \left[\frac{\sqrt{\xi^2 + x^2 + f^2 - 2\xi(y \cos \gamma - f \sin \gamma)}}{2\sqrt{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} + \frac{\sqrt{\xi^2 + y^2 + f^2 - 2\xi(y \cos \gamma + f \sin \gamma)}}{2\sqrt{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} \right] f(y) dy.$$

Сводя в этих интегралах интегрирование в пределах $x \in [0, x_0]$, $y \in [0, y_0]$, используя тождество

$$\sqrt{A+B} + \sqrt{A-B} = \sqrt{2} \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B^2}}, \quad A > B,$$

и неравенства

$$0 \leq |a \sin \gamma + b \cos \gamma| \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \gamma \in [0, 2\pi],$$

получаем следующие оценки:

$$I_1 < 2 \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{\xi^2 + x^2 + g^2}{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} g(x) dx \leq 2 \int_0^{x_0} H_{11}(x) g(x) dx;$$

$$I_1 > \sqrt{2} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{\xi^2 + x^2 + g^2 + |\xi^2 - x^2 - g^2|}{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} g(x) dx \geq \sqrt{2} \int_0^{x_0} H_{12}(x) g(x) dx;$$

$$I_2 < 2 \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{\xi^2 + y^2 + f^2}{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} f(y) dy \leq 2 \int_0^{y_0} H_{21}(y) f(y) dy;$$

$$I_2 > \sqrt{2} \int_0^{y_0} \sqrt{\frac{\xi^2 + y^2 + f^2 + |\xi^2 - y^2 - f^2|}{m\xi^2 + \frac{3}{2}J}} f(y) dy \geq \sqrt{2} \int_0^{y_0} H_{22}(y) f(y) dy,$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
H_{11}(x) &= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{\frac{x^2 + g^2}{\frac{3}{2}J}} \right\}, \\
H_{12}(x) &= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{\frac{x^2 + g^2}{\frac{3}{2}J}} \right\}, \quad x \in [0, x_0], \\
H_{21}(y) &= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{\frac{y^2 + f^2}{\frac{3}{2}J}} \right\}, \\
H_{22}(y) &= \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}}, \sqrt{\frac{y^2 + f^2}{\frac{3}{2}J}} \right\}, \quad y \in [0, y_0].
\end{aligned}$$

Используя полученные оценки, для величин S_1 и S_2 из соотношений (2.32) имеем:

$$\begin{aligned}
S_1 < S_{10} &= 2kp \left[\int_0^{x_0} H_{11}(x)g(x)dx + \int_0^{y_0} H_{21}(y)f(y)dy \right], \\
S_2 > S_{20} &= \sqrt{2}kp \left[\int_0^{x_0} H_{12}(x)g(x)dx + \int_0^{y_0} H_{22}(y)f(y)dy \right].
\end{aligned}$$

Следовательно, оценка (2.32) для времени остановки приобретает вид:

$$\frac{1}{S_{10}} \sqrt{mv_0^2 + \frac{3}{2}J\omega_0^2} < t^* < \frac{1}{S_{20}} \sqrt{mv_0^2 + \frac{3}{2}J\omega_0^2}.$$

Конечно, полученные оценки являются достаточно грубыми и могут быть, тем или иным образом, сделаны более точными. Существенное улучшение оценок может быть достигнуто при рассмотрении конкретных и простых контуров области S (окружность, кольцо, прямоугольник и т. п.), что будет показано в последующих параграфах.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о существовании чисто поступательных и чисто вращательных движений

области S , а также связанные с ними вопросы о финальных (конечных) движениях области S и максимальном пути, пройденном центром масс C за время движения.

На рис. 2.5 изображена область S , где C — проекция на плоскость xy центра масс тела, опирающегося на область S .

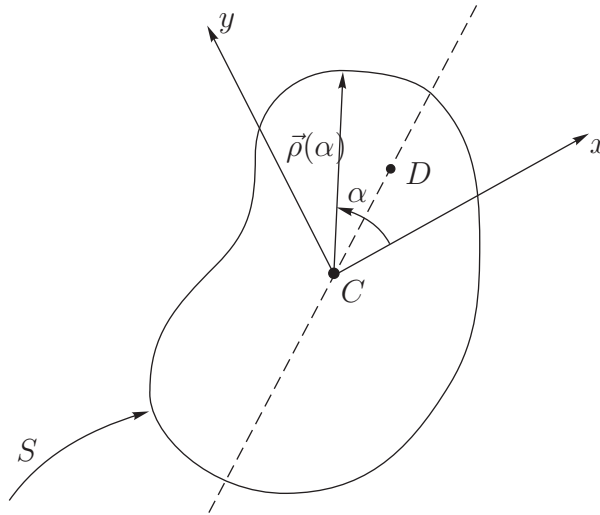


Рис. 2.5. Чисто поступательные и чисто вращательные движения области S . C — проекция центра масс тела на горизонтальную плоскость xy , D — центр нормальных давлений на площадку S , $\vec{\rho}(\alpha)$ — радиус-вектор точки контура, соответствующий полярному углу $\alpha \in [0, 2\pi]$

Cxy — система координат, жестко связанная с областью S , $\vec{\rho}(\alpha)$ — радиус-вектор произвольной точки контура с полярным углом α , который отсчитывается от оси Cx против хода часовой стрелки. Введем следующие определения.

Определение 1. Центром нормальных давлений, приложенных к области S , называется такая точка D , координаты которой в системе Cxy даются формулами:

$$x_D = \frac{1}{S_0} \iint x dx dy, \quad y_D = \frac{1}{S_0} \iint y dx dy, \quad S_0 = \iint dx dy,$$

где интегрирование проводится по всей области S .

Отметим, что для однородной пластинки S мы будем иметь $x_D = y_D = 0$, т.е. точка D совпадает с точкой C (центром масс). Такая же ситуация будет для однородного шара или других симметричных твердых тел, опирающихся на круговую область S . Если точка D не совпадает с точкой C (проекцией центра масс тела на плоскость опоры), то нарушаются условия равновесия тела относительно горизонтальных осей, что существенно усложняет задачу (в частности, точка C не будет, вообще говоря, неподвижной относительно области S !).

Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что точка D совпадает с точкой C , т.е. выполнены равенства

$$\iint_S x dx dy = \iint_S y dx dy = 0. \quad (2.33)$$

Определение 2. Область S будем называть *почти симметричной*, если для функции $\varrho(\alpha)$, описывающей ее контур в какой-либо системе координат с началом в точке C , выполнено равенство

$$\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \varrho^2(\alpha) \sin \alpha d\alpha = \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \varrho^2(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 0, \quad (2.34)$$

для любых $\phi \in [0, 2\pi]$.

Отметим, что равенства (2.34) заведомо выполнены для центрально-симметричных (относительно точки C) областей (круг, эллипс, прямоугольник и т.п.). Однако равенство (2.34) соблюдается также для любых положительных 2π -периодических функций $\varrho(\alpha)$, для которых у $\varrho^2(\alpha)$ в разложении в ряд Фурье отсутствуют слагаемые с $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 2.1.

- а) При соблюдении равенств (2.33) (т.е. центр нормальных давлений D совпадает с проекцией C центра масс тела на плоскость xu) допустимо чисто поступательное движение области S по любому направлению, которое остается фиксированным в процессе движения (т.е. C движется по прямой линии).
- б) Если дополнительно к этому выполнено равенство (2.34) (т.е. область S является почти симметричной), то допустимо чисто вращательное движение области S с центром вращения в точке C .
- в) При соблюдении равенств (2.33) (равенства (2.34) могут и нарушаться, т.е. область S может и не быть почти симметричной!) процесс движения области S прекращается лишь при одновременном обращении в нуль величин $v(t)$ и $\omega(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.

Перепишем уравнения движения (2.20), (2.21) в виде нормальной формы Коши, введя обозначения

$$z_1 = v \cos \gamma, z_2 = v \sin \gamma, z_3 = \omega,$$

и, полагая для простоты $m = 1$, $J = 1$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 z_3 + F_x(z_1, z_2, z_3), \\ \dot{z}_2 &= -z_1 z_3 + F_y(z_1, z_2, z_3), \\ \dot{z}_3 &= M_c(z_1, z_2, z_3), \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

где, в соответствии с (2.13)–(2.15), обозначено:

$$\begin{aligned}
F_x(z_1, z_2, z_3) &= -kp \iint \frac{z_1 - z_3 y}{u} dx dy, \\
F_y(z_1, z_2, z_3) &= -kp \iint \frac{z_2 + z_3 x}{u} dx dy, \\
M_c &= -kp \iint \frac{(z_2 + z_3 x)x - (z_1 - z_3 y)y}{u} dx dy, \\
u &= u(x, y, z_1, z_2, z_3) = \sqrt{(z_1 - z_3 y)^2 + (z_2 + z_3 x)^2}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Чисто поступательное движение соответствует случаю $z_3 \equiv 0$. Тогда из (2.36) имеем

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad F_x = -kp \frac{z_1 \cdot S_0}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \\
F_y &= -kp \frac{z_2 \cdot S_0}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad M_c \equiv 0,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

S_0 — площадь области S . Последнее равенство ($M_c \equiv 0$) выполнено в силу условий (2.33); подстановка (2.37) в (2.35) приводит к уравнениям:

$$dz_1/dz_2 = z_1/z_2, \quad z_3^* = 0,$$

откуда и следует утверждение а) теоремы.

Чисто вращательное движение вокруг точки C соответствует случаю $z_1 = z_2 = 0$, $z_3 \neq 0$ ($z_3 > 0!$). Тогда из (2.36) имеем:

$$\begin{aligned}
u &= z_3 \cdot \varrho, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad F_x = kp \iint \frac{y}{\varrho} dx dy, \\
F_y &= -kp \iint \frac{x}{\varrho} dx dy, \quad M_c = -kp \iint \varrho dx dy.
\end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что уравнения (2.35) будут иметь решение $z_1 = z_2 = 0$, если выполнены равенства:

$$\iint \frac{y}{\varrho} dx dy = \iint \frac{x}{\varrho} dx dy = 0,$$

которые при записи их в полярных координатах ϱ, α и интегрировании по ϱ принимают вид соотношений из (2.34). Отсюда следует справедливость утверждения б) теоремы.

Пусть теперь $z_1(0), z_2(0), z_3(0)$ — произвольные начальные условия такие, что

$$z_1^2(0) + z_2^2(0) \neq 0, \quad z_3(0) \neq 0. \tag{2.38}$$

Предположим, что при $t = t_1$ имеем $z_3(t_1) = 0$, $z_1^2(t_1) + z_2^2(t_1) \neq 0$, причем $0 < t_1 < t^*$, где t^* — время остановки движения. Тогда решение системы (2.35) как вперед от момента t_1 , так и назад с начальными условиями $z_3(t_1) = 0$, $z_1(t_1), z_2(t_1)$, приводит к чисто поступательному движению, что противоречит условиям (2.38), т. к. получается $z_3(0) = 0!$

Предположим, что при $t = t_1$ имеем $z_1(t_1) = z_2(t_1) = 0$, $z_3(t_1) \neq 0$, причем $0 < t_1 < t^*$, где t^* — время остановки движения. Тогда, если условия (2.34) выполнены, то мы получаем чисто вращательное движение в системе (2.35); решая ее назад от момента t_1 , будем иметь $z_1(0) = z_2(0) = 0$, что противоречит (2.37). Если же хотя бы одно из первых двух условий (2.34) нарушено, например

$$\iint \frac{x}{\varrho} dx dy = \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \varrho^2(\alpha) \cos \alpha \neq 0,$$

то из (2.35) при $t = t_1$ мы получим:

$$\dot{z}_2 = -kp \iint \frac{x}{\varrho} dx dy \neq 0,$$

т. е. при $t > t_1$ скорость $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ вновь становится ненулевой. Таким образом, справедливость пункта в) доказана, т. е. $v(t)$ и $\omega(t)$ обращаются в нуль одновременно и в конце движения, в момент полной остановки. При этом для не почти симметричных областей S не исключается возможность обращения $v(t)$ в нуль, но это происходит лишь в дискретные моменты времени до полной остановки.

Теорема 2.1 полностью доказана. ■

Рассмотрим далее задачу об определении максимального пути, проходимого центром масс области S вплоть до ее полной остановки. Естественно, что этот путь (или его оценка) зависит от начальных условий $v(0), \omega(0)$ и $\gamma(0)$ (γ — угол, задающий ориентацию вектора \vec{v} относительно системы координат, жестко связанной с областью S). Будем предполагать, что начальные условия удовлетворяют определенным ограничениям, т. е. принадлежат некоторому ограниченному множеству. Ниже, в качестве ограничения берется начальная кинетическая энергия, сообщаемая телу. При этом угол $\gamma(0)$ может быть произвольным ($\gamma \in (0, 2\pi)$). Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 2.2. Среди всех движений области S , имеющих фиксированную начальную кинетическую энергию T_0 , максимальный путь, который проходит ее центр масс C , реализуется на чисто

поступательном ее движении и равен

$$l_{\max} = T_0/(kG),$$

где k — коэффициент трения, G — вес тела (полное нормальное движение).

Перед доказательством сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ясно, что минимальный путь для центра масс S равен нулю и реализуется на чисто вращательном движении (если оно существует в соответствии с теоремой 2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поясним смысл теоремы 2.2. Для того чтобы «отбросить» тело S как можно дальше, необходимо весь имеющийся начальный запас кинетической энергии сосредоточить в поступательном его движении, а любое, как угодно малое, начальное вращение (при том же уровне начальной кинетической энергии) приводит к сокращению пройденного до остановки пути.

Отметим, что при поступательном движении суммарная сила трения (замедляющая движение центра масс) является максимальной (это было замечено еще Н.Е.Жуковским [8]). Тем не менее путь при этом является максимально возможным среди всех движений, имеющих фиксированную начальную кинетическую энергию!

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Зафиксируем начальную кинетическую энергию поступательного движения, т. е. скорость v_0 . Тогда добавление вращения тела (т. е. угловой скорости ω_0) приводит к увеличению пройденного центром масс пути (по сравнению с тем путем, который тело пройдет без вращения). Справедливость этого утверждения следует из уравнения (2.24), которое можно переписать так, введя вместо t независимую переменную l — пройденный путь:

$$d(mv^2/2) = (F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma)dl.$$

Из (2.17), с использованием формул (2.13), следует, что $F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma < 0$. Кроме того:

$$|F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma| \leq F_{\text{тр}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Учитывая полученные неравенства и интегрируя последнее дифференциальное уравнение от начала движения до полной остановки, приходим к искомому результату. Этот эффект известен как эффект «полотера» [22].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии из (2.22), вводя вместо t независимую переменную l — пройденный путь:

$$dT = -kp \frac{dl}{v} \iint \sqrt{(v \cos \gamma - \omega y)^2 + (v \sin \gamma + \omega x)^2} dx dy.$$

Вводя обозначение $\xi = \omega/v$, мы получим из последнего равенства:

$$dT = -kp \cdot dl \cdot \iint v(\xi, x, y, \gamma) dx dy,$$

где обозначено

$$v(\xi, x, y, \gamma) = \sqrt{(\cos \gamma - \xi y)^2 + (\sin \gamma + \xi x)^2}.$$

Введем обозначение для интеграла в правой части полученного равенства:

$$H(\xi, \gamma) = \iint v(\xi, x, y, \gamma) dx dy, \quad \xi \in (0, \infty), \quad \gamma \in (0, 2\pi).$$

Вычислим первую и вторую производные по ξ от функции $H(\xi, \gamma)$:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \iint \frac{-y(\cos \gamma - \xi y) + x(\sin \gamma + \xi x)}{v(\xi, x, y, \gamma)} dx dy,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} = \iint \frac{[x(\cos \gamma - \xi y) + y(\sin \gamma + \xi x)]^2}{[v(\xi, x, y, \gamma)]^3} dx dy.$$

Из полученных выражений следует:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \geq 0, \quad \xi \in [0, \infty),$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\cos \gamma \iint y dx dy + \sin \gamma \iint x dx dy = 0,$$

т. к. выполнены равенства (2.33) (центр давлений находится в точке $C!$). Найденные соотношения позволяют сделать вывод, что $\frac{\partial H}{\partial \xi} \geq 0$ при $\xi \in (0, \infty)$, т. е. $H(\xi, \gamma)$ монотонно возрастает по ξ при любом $\gamma \in (0, 2\pi)$! Следовательно;

$$\min_{\xi} H(\xi, \gamma) = H(0, \gamma) = S_0,$$

где S_0 — площадь области S . Тогда интегрирование дифференциального уравнения для кинетической энергии от начала движения до его полной остановки приводит к соотношению:

$$-T_0 = -kp \int_0^{l_1} H(\xi, \gamma) dl \leq -kp \cdot H(0, \gamma) \cdot l_1 = -kpS_0l_1,$$

где l_1 — путь, пройденный центром масс C до полной остановки тела. Из последнего равенства имеем:

$$l_1 \leq \frac{T_0}{kpS_0} = \frac{T_0}{kG},$$

где $G = pS_0$ — полное нормальное давление (вес тела). Нетрудно видеть, что правая часть полученного равенства достигается при $\xi = 0$, что соответствует $\omega = 0$, т. е. поступательному движению с начальной кинетической энергией, равной T_0 .

Теорема 2.2 доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Применим результаты, полученные в настоящем параграфе для решения задачи Рауса, приведенной в [27]: «Тело с плоским основанием находится на неабсолютно шероховатой плоскости с коэффициентом трения μ . Центр тяжести тела располагается в точности над центром тяжести основания, форма которого такова, что его радиус инерции относительно любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через центр тяжести, равен γ . Тело пущено вдоль плоскости так, что начальная скорость центра тяжести равна v_0 , а начальная угловая скорость вокруг вертикальной оси равна ω_0 . Считая ω_0 весьма малым, доказать, что центр тяжести движется прямолинейно со скоростью $v_0 - \mu gt$ в момент t и что угловая скорость в тот же момент времени удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\gamma^2}{k^2} \ln \frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \frac{\mu gt}{v_0}, \quad (2.39)$$

где k — радиус инерции тела относительно вертикали, проходящей через центр тяжести.»

Сразу же отметим, что приведенный ответ (2.39) неверен (возможно, что опечатка?). Правильный (правдоподобный) ответ должен быть таким

$$\frac{k^2}{\gamma^2} \ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega_0} \right) = \ln \left(1 - \frac{\mu gt}{v_0} \right). \quad (2.40)$$

Отсюда следует формула:

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 - \frac{\mu gt}{v_0} \right)^\sigma, \quad (2.41)$$

где $\sigma = \gamma^2/k^2$.

Тем не менее, и формула (2.41) справедлива лишь для тех t , для которых выполнено условие:

$$\lambda = a\omega(t)/v(t) \ll 1,$$

где a — характерный размер основания (для круглого основания a — его радиус). Если тело есть круглая однородная пластинка или невысокий круглый цилиндр, то $\gamma^2 = 1/4$, $k^2 = 1/2$, т.е. $\sigma = 1/2$. Тогда имеем формулы:

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\mu g t}{v_0}}, \quad v(t) = v_0 - \mu g t.$$

Отсюда получаем: $\lambda = \frac{a\omega(t)}{v(t)} = \frac{a\omega_0}{v_0} \sqrt{\frac{v_0}{v_0 - \mu g t}}$, т.е. $\lambda \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow v_0/(\mu g)$.

Если же параметры тела таковы, что $\sigma > 1$, то

$$\lambda = \frac{a\omega(t)}{v(t)} = \frac{a\omega_0}{v_0} \left(\frac{v_0 - \mu g t}{v_0} \right)^{\sigma-1},$$

и λ монотонно убывает до нуля. Таким образом формула (2.41) корректна при всех t только для $\sigma > 1$.

Покажем как получить результат Рауса, используя уравнения настоящего параграфа. Из (2.20), (2.21) и формул (2.13)–(2.15) имеем следующие уравнения движения тела (для коэффициента трения используем обозначение μ , а для угла γ — обозначение δ):

$$\left. \begin{aligned} v\dot{\psi} &= -\mu p a^2 I_1(\lambda) \\ v\dot{\gamma} &= -\mu p a^2 I_2(\lambda) \\ k^2 \dot{v}_1 &= -\mu p a^4 I_3(\lambda) \end{aligned} \right\}, \quad (2.42)$$

где введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\lambda) &= \iint \frac{1}{W} \lambda (\eta \sin \delta + \xi \cos \delta) d\xi d\eta, \\ I_2(\lambda) &= \iint \frac{1}{W} [1 + \lambda (\xi \sin \delta - \eta \cos \delta)] d\xi d\eta, \\ I_3(\lambda) &= \iint \frac{1}{W} [\lambda (\xi^2 + \eta^2) + \xi \sin \delta - \eta \cos \delta] d\xi d\eta, \\ W &= \sqrt{1 + \lambda^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2\lambda (\xi \sin \delta - \eta \cos \delta)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

$\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$, $\lambda = \frac{v_1}{v}$, $v_1 = \omega a$, $p = \frac{g}{S_0}$ — нормальное давление ($m = 1$ — масса тела, S_0 — площадь основания), a — характерный размер основания, интегрирование в (2.43) ведется по всей площадке основания в прямоугольной системе координат, жестко связанной с центром масс основания.

В предположении малости безразмерного параметра λ , разложим I_1 , I_2 , I_3 из (2.43) в ряд Тейлора с точностью до малых 2-го порядка по λ :

$$I_1(\lambda) = I_1(0) + I'_1(0) \cdot \lambda,$$

$$I_2(\lambda) = I_2(0) + I'_2(0) \cdot \lambda,$$

$$I_3(\lambda) = I_3(0) + I'_3(0) \cdot \lambda.$$

Используя (2.43), получаем:

$$I_1(0) = 0, \quad I'_1(0) = \iint (\eta \sin \delta + \xi \cos \delta) d\xi d\eta;$$

$$I_2(0) = \iint d\xi d\eta = S_0/a^2, \quad I'_2(0) = 0;$$

$$I_3(0) = \iint (\xi \sin \delta - \eta \cos \delta) d\xi d\eta, \quad I'_3(0) = \iint (\xi \cos \delta + \eta \sin \delta)^2 d\xi d\eta.$$

Учитывая, что центр масс основания лежит в начале координат, получаем:

$$\iint \xi d\xi d\eta = \iint \eta d\xi d\eta = 0.$$

Следовательно, $I'_1(0) = 0$, $I_3(0) = 0$. Величина же $I'_3(0)$ представляет собой момент инерции основания (в безразмерных переменных $\xi = x/a$, $\eta = y/a$) относительно прямой, проведенной через центр масс основания, лежащей в плоскости основания и образующей угол $\pi - \delta$ с осью ξ . Согласно условию, $I'_3(0)$ не зависит от δ и мы имеем:

$$I'_3(0) = \frac{1}{a^4} \cdot S_0 \cdot \gamma^2,$$

где γ — радиус инерции из условия задачи. Используя полученные разложения, из (2.42) имеем следующие приближенные уравнения движения:

$$v\dot{\psi} = 0, \quad \dot{v} = -\mu p S_0, \quad k^2 v_1 = -\mu p S_0 \gamma^2 \cdot \lambda.$$

Вспоминая, что $v_1 = a\omega$, $\lambda = a\omega/v$, $pS_0 = g$, и производя несложное интегрирование полученных уравнений, имеем $v(t) = v_0 - \mu g t$ и формулу (2.41). Подчеркнем еще раз, что эти соотношения и прямолинейность движения центра масс справедливы при $\lambda_0 = a\omega_0/v_0 \ll 1$, $\sigma = \frac{\gamma^2}{k^2} > 1$ и наличия определенной симметрии основания, описанной в условии задачи Рауса (например, симметричный крест или «розочка», описываемая в полярных координатах уравнением $r(\alpha) = |\cos 2\alpha|$, $\alpha \in [0, 2\pi]$). Можно показать (доказательство здесь не приводится), что прямолинейность движения центра масс при любых начальных условиях имеет место тогда и только тогда, когда область основания является либо круговой, либо кольцевой, т. е. границы основания являются окружностями.

§ 2.4. Движение тела, опирающегося круглой площадкой на шероховатую плоскость

В настоящем параграфе задача из § 2.3 рассмотрена в том частном случае, когда область S (область опирания) является кругом. Задача изучения движения при этом упрощается, что позволяет получать более точные количественные и качественные результаты.

Пусть область S — круг радиуса a (см. рис. 2.6), причем точка C (проекция центра масс тела на плоскость xy) является его центром, \bar{v} — скорость точки C , ω — угловая скорость круга, P — мгновенный центр скоростей, который будем предполагать лежащим внутри круга. Для вычисления сил трения и моментов сил трения используем метод А. И. Лурье, описанный в § 2.3 (см. формулы (2.27) и (2.28)). В данном случае (точка P внутри круга) применим формулы (2.27). Из $\triangle PCM$ (см. рис. 2.6), в котором $PC = R$, $CM = a$, $PM = r(\alpha)$, имеем

$$PM = r(\alpha) = R \cos \alpha + \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2.44)$$

Это равенство получено так: опускаем из C высоту CH на сторону PM , тогда

$$\begin{aligned} PM &= PH + HM, \quad PH = PC \cdot \cos \alpha, \\ HM &= \sqrt{CM^2 - CH^2}, \quad CH = PC \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Вычислим F_x из (2.27):

$$F_x = -kp \cos \gamma \cdot \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\alpha)}{2} \cos \alpha d\alpha - kp \sin \gamma \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\alpha)}{2} \sin \alpha d\alpha, \quad (2.45)$$

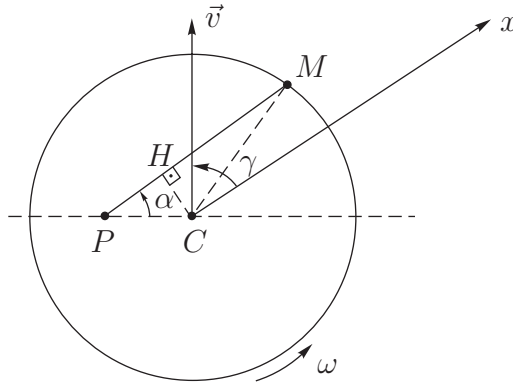


Рис. 2.6. Площадка контакта — круг радиуса a . Мгновенный центр скоростей P — внутри круга. $\alpha \in [0, 2\pi]$ — полярный угол, C — центр масс, $PC = R < a$

но т. к. $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$, $r^2(2\pi - \alpha) = r^2(\alpha)$, то интеграл при $\sin \gamma$ в (2.45) исчезает. Далее имеем, используя (2.44):

$$\begin{aligned}
 F_x &= -\frac{kp}{2} \cos \gamma \int_0^{2\pi} \left[a^2 + R^2 \cos^2 \alpha - R^2 \sin^2 \alpha + \right. \\
 &\quad \left. + 2R \cos \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} \right] \cos \alpha d\alpha = \\
 &= -(kpR) \cos \gamma \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \\
 &= -4kpR \cos \gamma \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Совершенно аналогично получается выражение для F_y :

$$F_y = -4kpR \sin \gamma \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Таким образом, получается следующий результат:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F \cos \gamma, \quad F_y = F \sin \gamma, \\
 F &= -4kpR \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Формулы (2.47) показывают, что полная сила трения $\vec{F} = (F_x, F_y)$ коллинеарна скорости центра масс C , т. е. центр масс C движется прямо-

линейно. Следовательно, уравнения движения (2.20) для центра масс сводятся к одному уравнению:

$$m\dot{v} = F_x \cos \gamma + F_y \sin \gamma = F, \quad (2.48)$$

а второе уравнение получается $\dot{\gamma} + \omega = 0$, которое является тривиальным. Далее вычисляем из (2.27) момент сил трения относительно точки P :

$$\begin{aligned} M_P &= -\frac{kp}{3} \int_0^{2\pi} d\alpha \left[R^3 \cos^3 \alpha + 3R^2 \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + 3R \cos \alpha (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha) + (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} \right] = \\ &= -\frac{kp}{3} \int_0^{2\pi} (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} d\alpha - kpR^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \\ &= -\frac{4}{3}kp \int_0^{\pi/2} (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} d\alpha - 4kpR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Момент M_c относительно точки C , в соответствии с последним уравнением из (2.27), будет:

$$M_c = M_P + kpR \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{2} d\alpha = -\frac{4}{3}kp \int_0^{\pi/2} (a^2 - R^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}} d\alpha. \quad (2.49)$$

Здесь было использовано полученное выражение для M_P и уже вычисленный интеграл:

$$kpR \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot \frac{r^2(\alpha)}{2} d\alpha = 4kpR^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Преобразуем полученные выражения для F из (2.47) и M_c из (2.49) к полным эллиптическим интегралам. Вводим стандартные обозначения:

$$E(\mu) = \int_0^{\pi/2} (1 - \mu \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} d\alpha, \quad K(\mu) = \int_0^{\pi/2} (1 - \mu \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha,$$

где обозначено $\mu = R^2/a^2$, причем, в силу того, что $0 \leq R \leq a$, имеем $0 \leq \mu \leq 1$.

При преобразовании будет использоваться формула, известная из теории интегрирования эллиптических функций (см. [23]):

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \sqrt{1 - \mu \sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{1 - \mu}{3\mu} K(\mu) - \frac{1 - 2\mu}{3\mu} E(\mu). \quad (2.50)$$

Формулу (2.50) можно получить и непосредственно, представляя интеграл в виде:

$$\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \mu \sin^2 \alpha} d(-\cos \alpha),$$

а затем интегрируя по частям. Используя формулу (2.50), мы находим:

$$\begin{aligned} F(\mu) &= -\frac{4}{3\pi} kG \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}} [(1 + \mu)E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu)], \\ M_c(\mu) &= -\frac{4a}{9\pi} kG [(4 - 2\mu)E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu)], \\ \mu &= \frac{R^2}{a^2} \in (0, 1), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $G = p \cdot \pi a^2$ — полное нормальное давление, равное весу тела (если, конечно, отсутствует движение центра масс по вертикали!).

Пусть теперь мгновенный центр скоростей P находится вне круга (см. рис. 2.7). Для вычисления сил трения и моментов сил трения применяем формулы (2.28). Из $\triangle PCM_2$ (см. рис. 2.7), в котором мы проводим высоту CH , получим:

$$\begin{aligned} r_1(\alpha) &= PM_1 = R \cos \alpha - \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha}, \\ r_2(\alpha) &= PM_2 = R \cos \alpha + \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2(\alpha) - r_1^2(\alpha)}{2} &= 2R \cos \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha}, \\ \frac{r_2^3(\alpha) - r_1^3(\alpha)}{3} &= \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} \cdot [a^2 + R^2(2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1)]. \end{aligned}$$

Подставляя полученные формулы в (2.28), используя симметрию относительно оси PC , нечетность функции $\sin \alpha$, мы получим:

$$\begin{aligned}
F_x &= -kp \cdot 2R \cdot \cos \gamma \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \\
&= -4kpR \cos \gamma \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha; \\
F_y &= -kp \cdot 2R \sin \gamma \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \\
&= -4kpR \sin \gamma \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha; \\
M_p &= -\frac{2}{3}kp \left[(a^2 - R^2) \cdot 2 \int_0^{\alpha_0} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha + \right. \\
&\quad \left. + 8R^2 \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \right]; \\
M_c &= -\frac{4}{3}kp(a^2 - R^2) \int_0^{\alpha_0} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha - \\
&\quad - \frac{4}{3}kpR^2 \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \cdot \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha,
\end{aligned}$$

где $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ — угол, определяемый соотношением $\sin \alpha_0 = \frac{a}{R}$.

Преобразуем полученные выражения к стандартным полным эллиптическим интегралам. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
E(\mu_1) &= \int_0^{\pi/2} (1 - \mu_1 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha, \\
K(\mu_1) &= \int_0^{\pi/2} (1 - \mu_1 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha, \quad \mu_1 = a^2/R^2.
\end{aligned}$$

Ввиду того, что $R \geq a$, имеем $0 \leq \mu_1 \leq 1$.

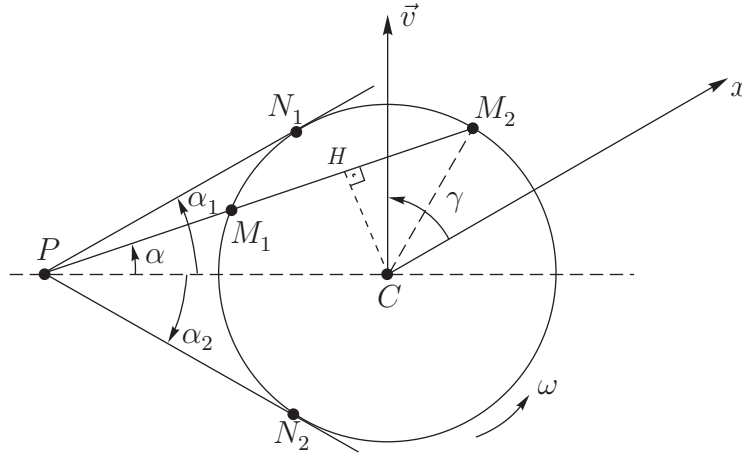


Рис. 2.7. Площадка контакта — круг радиуса a . Мгновенный центр скоростей P — вне круга. $\alpha \in [-\alpha_2, \alpha_1]$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, α — полярный угол, C — центр масс, $PC = R > a$

Сначала сделаем в полученных выражениях для F_x , F_y , M_c замену:

$$\sin \alpha = \frac{a}{R} \sin \beta, \quad \alpha \in [0, \alpha_0], \quad \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_0} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha &= R\mu_1 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \beta d\beta}{\sqrt{1 - \mu_1 \sin^2 \beta}} = \\ &= R \left[E(\mu_1) - (1 - \mu_1) K(\mu_1) \right]; \\ \int_0^{\alpha_0} \cos^2 \alpha \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2 \alpha} d\alpha &= R\mu_1 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \mu_1 \sin^2 \beta) \cos^2 \beta d\beta}{\sqrt{1 - \mu_1 \sin^2 \beta}} = \\ &= R\mu_1 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta \sqrt{1 - \mu_1 \sin^2 \beta} d\beta = \\ &= \frac{R}{3} \left[(1 + \mu_1) E(\mu_1) - (1 - \mu_1) K(\mu_1) \right]. \end{aligned}$$

Используя эти формулы, мы получим:

$$F_x = F \cos \gamma, \quad F_y = F \sin \gamma,$$

$$\begin{aligned} F &= -\frac{4}{3}kpR^2 \left[(1 + \mu_1)E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right], \\ M_C &= -\frac{4}{3}kp(a^2 - R^2) \cdot R \left[E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right] - \\ &\quad - \frac{4}{9}kpR^3 \left[(1 + \mu_1)E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right] = \\ &= -\frac{4}{3}kpR^3 \left[(\mu_1 - 1)(E - (1 - \mu_1)K) + \frac{1}{3}(1 + \mu_1)E - \frac{1}{3}(1 - \mu_1)K \right] = \\ &= -\frac{4}{9}kpR^3 \left[(4\mu_1 - 2)E(\mu_1) + (1 - \mu_1)(2 - 3\mu_1)K(\mu_1) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно, вводя обозначение $G = p\pi a^2$ — полное нормальное давление, мы получим соотношения

$$\begin{aligned} F(\mu_1) &= -\frac{4}{3\pi}kG \cdot \frac{1}{\mu_1} \left[(1 + \mu_1)E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right], \\ M_c(\mu_1) &= -\frac{4a}{9\pi}kG \cdot \frac{1}{\mu_1\sqrt{\mu_1}} \left[(4\mu_1 - 2)E(\mu_1) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \mu_1)(2 - 3\mu_1)K(\mu_1) \right], \quad \mu_1 = \frac{a^2}{R^2} \in (0, 1). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Таким образом, мы получили следующий результат. При движении тела, опирающегося круглой площадкой на шероховатую плоскость, его центр масс движется прямолинейно, а динамика движения описывается двумя уравнениями:

$$m\dot{v} = F, \quad J\dot{\omega} = M_c, \tag{2.53}$$

где F и M_c являются функциями только отношения $v/(\omega a)$, причем если $\mu = R^2/a^2 = (v/(\omega a))^2 \leq 1$, то F и M_c даются формулами (2.51), а если $\mu_1 = a^2/R^2 = (\omega a/v)^2 \leq 1$, то F и M_c даются формулами (2.52).

Отметим, что в (2.53) m — масса тела, J — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку C . Если рассматривается движение круглой пластинки радиуса a , то $J = ma^2/2$. В дальнейшем будем использовать обозначение

$$v_1 = \omega a.$$

Тогда уравнения (2.53) примут вид:

$$\dot{v} = \frac{1}{m}F, \quad \dot{v}_1 = \frac{a}{J} \cdot M_c. \quad (2.54)$$

Будем изучать поведение траекторий уравнения (2.54) в плоскости $\{v, v_1\}$. Ввиду того, что $v \geq 0$, $v_1 \geq 0$, будем рассматривать лишь 1-й квадрант плоскости $\{v, v_1\}$.

Запишем уравнения для изменения величин

$$\mu = (v/v_1)^2 \quad \text{и} \quad \mu_1 = (v_1/v)^2$$

во времени. Для этого дифференцируем по времени равенства:

$$\mu v_1^2 = v^2, \quad \mu_1 v^2 = v_1^2$$

— и используем уравнения (2.54). В результате несложных выкладок мы придем к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} b \cdot v_1 \cdot \dot{\mu} &= \Phi(\mu) \quad \text{при} \quad v \leq v_1, \quad \mu \in [0, 1], \\ \Phi(\mu) &= \left[-2\sigma\mu^2 + \mu(4\sigma - 1) - 1 \right] \cdot E(\mu) + (1 - \mu)(1 - \sigma\mu) \cdot K(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

$$\left. \begin{aligned} b \cdot v \cdot \dot{\mu}_1 &= \Psi(\mu_1), \quad \text{при} \quad v > v_1, \quad \mu_1 \in [0, 1], \\ \Psi(\mu_1) &= \left[\mu_1^2 + \mu_1(1 - 4\sigma) + 2\sigma \right] \cdot E(\mu_1) + (1 - \mu_1)(3\sigma\mu_1 - \mu_1 - 2\sigma) \cdot K(\mu_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

где обозначено

$$b = \frac{3\pi m}{8kG}, \quad \sigma = \frac{ma^2}{3J}. \quad (2.57)$$

Перейдем к анализу решений системы (2.54). Нетрудно установить, что прямые $v = 0$ и $v_1 = 0$ являются траекториями системы (2.54), проходящими через начало координат. Эти прямые соответствуют чисто вращательным и поступательным движениям круга. Формально это следует из (2.51) и (2.52) с использованием известных разложений эллиптических функций:

$$K(\mu) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\mu}{4} + \dots \right), \quad E(\mu) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\mu}{4} + \dots \right), \quad \mu \ll 1.$$

Основные результаты для других траекторий сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 2.3. Пусть безразмерный параметр σ определен в (2.57). Тогда справедливы утверждения:

- 1) Если $0 < \sigma < 1/2$, то для функций $\Phi(\mu)$ и $\Psi(\mu_1)$ из (2.55), (2.56) справедливы неравенства:

$$\Phi(\mu) < 0, \quad \mu \in (0, 1), \quad \Psi(\mu_1) > 0, \quad \mu_1 \in (0, 1),$$

а все траектории системы (2.54) (кроме $v_1 = 0$) входят в начало координат с углом наклона касательной, равным $\pi/2$ (т.е. так же, как и $v = 0$!) (см. рис. 2.8).

- 2) если $\frac{4}{3} < \sigma < \infty$, то для функций $\Phi(\mu)$ и $\Psi(\mu_1)$ из (2.55), (2.56) справедливы неравенства:

$$\Phi(\mu) > 0, \quad \mu \in (0, 1), \quad \Psi(\mu_1) < 0, \quad \mu_1 \in (0, 1),$$

а все траектории системы (2.54) (кроме $v = 0$) входят в начало координат с нулевым наклоном касательной (т.е. так же, как и $v_1 = 0$!) (см. рис. 2.10).

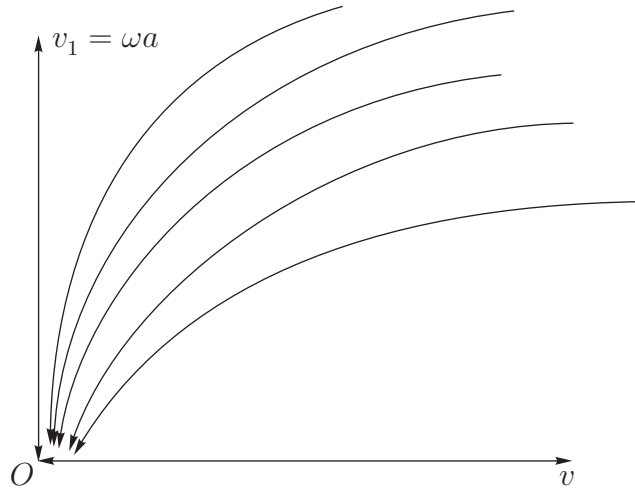


Рис. 2.8. Интегральные кривые при $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$

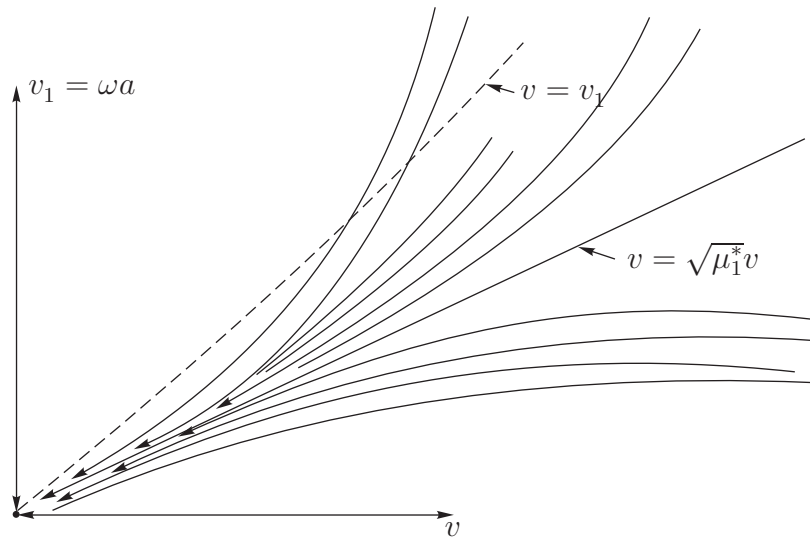


Рис. 2.9. Интегральные кривые при $\sigma \in (1, \frac{4}{3})$, $v_1 = \sqrt{\mu_1^*} v$ — интегральная кривая, $\mu_1^* \in (0, 1)$
— корень $\Psi(\mu_1) = 0$

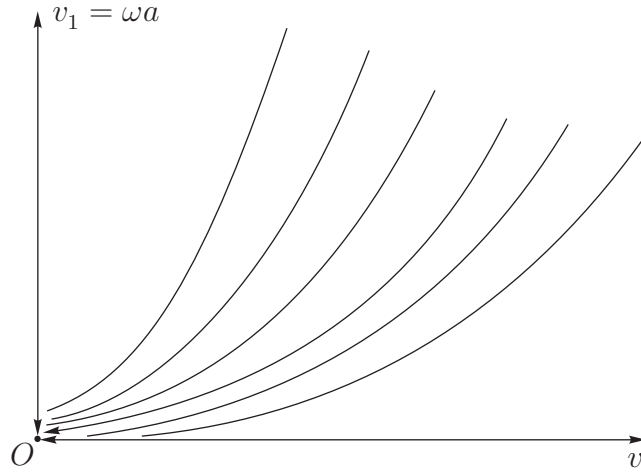


Рис. 2.10. Интегральные кривые при $\sigma \in \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$

- 3) если $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, то функция $\Phi(\mu)$ из (2.55) имеет на интервале $(0,1)$ единственный корень $\mu = \mu^*$, причем выполнены неравенства:

$$\Phi(\mu) > 0, \quad \mu \in (0, \mu^*), \quad \Phi(\mu) < 0, \quad \mu \in (\mu^*, 1), \quad \Psi(\mu_1) > 0, \quad \mu_1 \in (0, 1),$$

кроме того, прямая $v = \sqrt{\mu^*} v_1$ является траекторией, а все остальные траектории (кроме $v = 0, v_1 = 0$) входят в начало координат с углом наклона $\alpha^* = \arctg \frac{1}{\sqrt{\mu^*}}$, т.е. так же, как прямая $v = \sqrt{\mu^*} v_1$ (см. рис. 2.11).

- 4) если $1 < \sigma < \frac{4}{3}$, то функция $\Psi(\mu_1)$ из (2.56) имеет на интервале $(0,1)$ единственный корень $\mu_1 = \mu_1^*$, причем выполнены неравенства:

$$\Psi(\mu_1) > 0, \quad \mu_1 \in (0, \mu_1^*),$$

$$\Psi(\mu_1) < 0, \quad \mu_1^* \in (\mu_1^*, 1),$$

$$\Phi(\mu) > 0, \quad \mu \in (0, 1),$$

кроме того, прямая $v_1 = \sqrt{\mu_1^*} v$ является траекторией, а все остальные траектории (кроме $v = 0, v_1 = 0$) входят в нача-

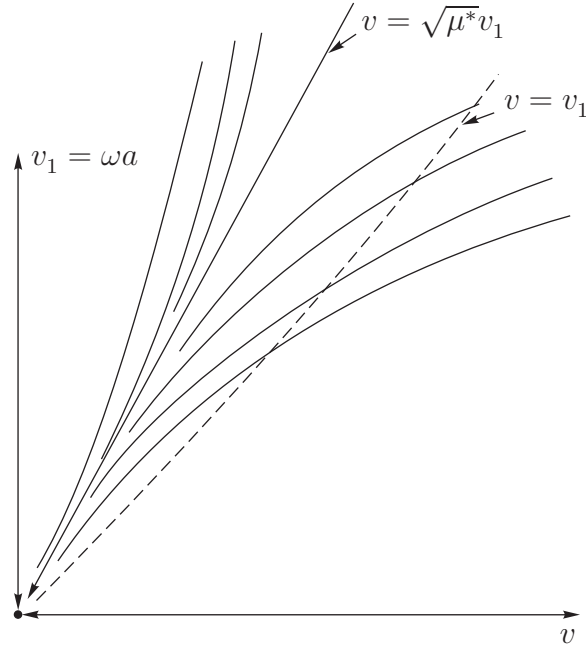


Рис. 2.11. Интегральные кривые при $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $v = \sqrt{\mu^*} v_1$ — интегральная кривая, $\mu^* \in (0, 1)$ — корень $\Phi(\mu) = 0$

ло координат с углом наклона $\alpha_1^* = \arctg \sqrt{\mu_1^*}$ (т.е. так же, как прямая $v_1 = \sqrt{\mu_1^*} v$) (см. рис. 2.9).

Прежде чем привести доказательство сформулированной теоремы, сделаем замечание, касающееся качественного описания движения тела с круглой площадкой контакта.

ЗАМЕЧАНИЕ. При малых $\sigma = ma^2/(3J)$ ($0 < \sigma < 1/2$), в соответствии с п. 1 теоремы, движение тела стремится к чисто вращательному, т.к. скорость v стремится к нулю быстрее, чем $v_1 = a\omega$ (см. рис. 2.8). Малость параметра σ реализуется, например, при большом моменте инерции J относительно вертикальной оси. При $\sigma > 4/3$ (п. 2 теоремы) получается противоположная ситуация: движение тела стремится к чисто поступательному движению, т.к. $v_1 = \omega a$ стремится к нулю быстрее, чем v (см. рис. 2.10).

Промежуточные значения $\sigma \left(\frac{1}{2} < \sigma < \frac{4}{3}\right)$ характеризуются *смешанным* движением: если $1/2 < \sigma < 1$, то движение тела стремится к движению по прямой без проскальзывания круга меньшего радиуса $a^* = \sqrt{\mu^*} \cdot a$, где μ^* — корень уравнения $\Phi(\mu) = 0$, $\mu \in (0, 1)$; а если $1 < \sigma < 4/3$, то движение тела стремится к движению по прямой без проскальзывания круга большего радиуса $a^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^*}} \cdot a$, где μ_1^* — корень уравнения $\Psi(\mu_1) = 0$ при $\mu_1 \in (0, 1)$. Это следует из пп. 3, 4 теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3.

Пусть функции Φ и Ψ определяются из формул (2.55), (2.56). Используем известные формулы для производных эллиптических интегралов:

$$\frac{dK}{d\mu} = \frac{E - (1 - \mu)K}{2\mu(1 - \mu)}, \quad \frac{dE}{d\mu} = -\frac{K - E}{2\mu},$$

с помощью которых мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\mu} &= \left(\frac{11}{2}\sigma - 5\mu\sigma - \frac{3}{2} \right) E + \frac{5}{2}\sigma(\mu - 1)K, \\ \frac{d\Psi}{d\mu} &= \left(1 + \frac{5}{2}\mu - \frac{9}{2}\sigma \right) E + (1 - \mu)\left(\frac{9}{2}\sigma - 1\right)K, \\ \frac{d^2\Psi}{d\mu^2} &= \frac{15}{4}E - \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\sigma \right) \cdot K. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

В дальнейшем производную по μ будем обозначать штрихом. Далее нетрудно получить из (2.55), (2.56), (2.58),

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0) &= K(0) - E(0) = 0, \quad (\text{т. к. } K(0) = E(0) = \pi/2), \\ \Phi(1) &= E(1)(2\sigma - 2) = 2(\sigma - 1), \quad (\text{т. к. } E(1) = 1, \\ \lim_{\mu \rightarrow 1} (1 - \mu)K(\mu) &= 0), \\ \Psi(0) &= K(0)(-2\sigma) + E(0) \cdot 2\sigma = 0, \\ \Psi(1) &= E(1)(2 - 2\sigma) = 2(1 - \sigma), \\ \Phi'(0) &= \frac{3\pi}{2} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right), \quad \Psi'(0) = 0, \\ \Psi''(0) &= \frac{9\pi}{8} \left(\frac{4}{3} - \sigma \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

1) Пусть $0 < \sigma < 1/2$. Тогда из первого уравнения (2.58) следует:

$$\begin{aligned} \Phi'(\mu) &= -K(1 - \mu)\frac{5}{2}\sigma + E\left(\frac{11}{2}\sigma - 5\mu\sigma - \frac{3}{2}\right) < \\ &< -E(1 - \mu)\frac{5}{2}\sigma + E\left(\frac{11}{2}\sigma - 5\mu\sigma - \frac{3}{2}\right) = E\left(3\sigma - \frac{5}{2}\mu\sigma - \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Это неравенство следует из известного неравенства:

$$K(\mu)(1 - \mu) < E(\mu). \quad (2.60)$$

Ясно, что полученное выражение отрицательно, т. к. при $\sigma < 1/2$ имеем

$$3\sigma - \frac{5}{2}\mu\sigma - \frac{3}{2} < 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\mu\sigma - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}\mu\sigma < 0.$$

Итак, $\Phi'(\mu) < 0$, $\mu \in (0, 1)$. Кроме того, из (2.59) имеем $\Phi(0) = 0$, т. е. $\Phi(\mu)$ — монотонно убывающая отрицательная функция на интервале $(0, 1)$ и корней не имеет. Далее из (2.58) имеем:

$$\Psi'(\mu) = \frac{5}{2}\mu \cdot E + \left(1 - \frac{9}{2}\sigma\right) \left[E - K(1 - \mu)\right].$$

Если $\left(1 - \frac{9}{2}\sigma\right) > 0$, т. е. $0 < \sigma < \frac{2}{9}$, то $\Psi'(\mu > 0)$ в силу неравенства (2.60), а если $\left(1 - \frac{9}{2}\sigma\right) < 0$, то

$$\begin{aligned} \Psi'(\mu) &= (1 - \mu) \left(\frac{9}{2}\sigma - 1\right) K + \left(1 + \frac{5}{2}\mu - \frac{9}{2}\sigma\right) E > \\ &> (1 - \mu) \left(\frac{9}{2}\sigma - 1\right) E + \left(1 + \frac{5}{2}\mu - \frac{9}{2}\sigma\right) E = E \cdot \mu \left(-\frac{9}{2}\sigma + \frac{7}{2}\right). \end{aligned}$$

Это неравенство следует из неравенства $K > E$. Полученное выражение больше нуля, т. к. при $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ имеем:

$$-\frac{9}{2}\sigma + \frac{7}{2} > -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{5}{4} > 0.$$

Итак, $\Psi'(\mu)$ положительно при $\mu \in (0, 1)$, а т. к. $\Psi'(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, то $\Psi(\mu)$ — монотонно возрастающая положительная функция на интервале $(0, 1)$, т. е. $\Psi(\mu)$ не имеет корней на этом интервале.

Далее выпишем решения в квадратурах. Для этого разделим первое уравнение из (2.54) на уравнение из (2.56), а второе уравнение из (2.54) — на уравнение из (2.55). В результате несложного интегрирования мы находим:

$$v_1(\mu) = v_1(0) \exp \left[\frac{ab}{J} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{M_C(\mu)}{\Phi(\mu)} d\mu \right], \quad 0 < \mu = \frac{v^2}{v_1^2} < 1, \quad (2.61)$$

$$v(\mu) = \sqrt{\mu} \cdot v_1(\mu), \quad 0 < \mu_0 = \frac{v_0^2}{v_{10}^2} < 1.$$

$$v(\mu_1) = v(0) \exp \left[\frac{b}{m} \int_{\mu_{10}}^{\mu_1} \frac{F(\mu_1)}{\Psi(\mu_1)} d\mu_1 \right], \quad 0 < \mu_1 = \frac{v_1^2}{v^2} < 1, \quad (2.62)$$

$$v_1(\mu_1) = \sqrt{\mu_1} \cdot v(\mu_1), \quad 0 < \mu_{10} = \frac{v_{10}^2}{v_0^2} < 1.$$

Отметим, что в (2.61) $M_C(\mu)$ дается формулой из (2.51), а в (2.62) $F(\mu_1)$ дается формулой из (2.52). Пусть движение началось из точки $\{v(0), v_1(0)\}$, для которой $\mu_{10} = [v_1(0)/v_0]^2 < 1$. Тогда т. к. $\Psi(\mu_1) > 0$, то, в силу (2.56), $\mu_1(t)$ возрастает вплоть до момента $t = t_1$, когда $\mu_1(t_1) = 1$, причем $t_1 < t^*$, где t^* — момент остановки. Предположив противное

(т. е. остановку), мы бы получили в (2.62) $v(\mu_1) \rightarrow 0$, чего быть не может, т. к. выражение показателя \exp в (2.62) является ограниченным при $\mu_1 \in [\mu_{10}, 1)$! Далее движение происходит в соответствии с уравнениями (2.61) и (2.55), причем т. к. $\Phi(\mu) < 0$, то μ монотонно убывает от значения $\mu(t_1) = 1$ до $\mu(t^*) = 0$, где t^* — момент остановки. Предположив противное (т. е. $\mu(t^*) \neq 0$) мы бы получили в (2.61) $v_1(t^*) \neq 0$, т. к. выражение показателя \exp в (2.61) является ограниченным при $\mu \neq 0$! Зато если $\mu = 0$ в (2.61), то имеем

$$\int_{\mu_0}^0 \frac{M_C(\mu)}{\Phi(\mu)} d\mu = -\infty,$$

и $\lim_{\mu \rightarrow 0} v_1(\mu) = 0$ для $v_1(\mu)$ из (2.61). Последнее утверждение о равенстве интеграла минус бесконечности следует из вида функций $M_C(\mu)$, $\Phi(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$. Аналогичное рассуждение (но более короткое) справедливо для случая, когда движение началось из точки $\{v(0), v_1(0)\}$, для которой $\mu_0 = [v(0)/v_1(0)] < 1$.

Таким образом, мы показали, что в рассматриваемом случае на любой траектории имеем $\mu = v^2/v_1^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t^*$, где t^* — момент остановки. При этом из (2.54) получим

$$dv_1/dv = \frac{am}{J} M_C(\mu)/F(\mu) \rightarrow \infty \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

Последнее соотношение вытекает из формул (2.51), где $E(\mu)$ и $K(\mu)$ нужно заменить их разложениями при $\mu \rightarrow 0$. Справедливость пункта 1 теоремы доказана.

2) Пусть $\frac{4}{3} < \sigma < \infty$. Покажем, что $\Phi(\mu) > 0$. Если $1 - \sigma\mu > 0$, то, используя неравенство $K > E$, имеем из (2.55):

$$\begin{aligned} \Phi(\mu) &> E(\mu) \left[(1 - \mu)(1 - \sigma\mu) + 4\sigma\mu - 2\sigma\mu^2 - \mu - 1 \right] = \\ &= E(\mu) \cdot \mu(-2 - \sigma\mu + 3\sigma) > E(\mu) \cdot \mu(-2 - 1 + 3\sigma). \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, т. к. $\sigma\mu < 1$ (по предположению). Таким образом, $\Phi(\mu) > E(\mu) \cdot \mu \cdot 3(\sigma - 1) > 0$ при $\sigma > \frac{4}{3}$!

Если $1 - \sigma\mu < 0$, то, используя неравенство $(1 - \mu)K < E$, имеем аналогично:

$$\begin{aligned} \Phi(\mu) &> -(\sigma\mu - 1) \cdot E + (4\sigma\mu - 2\sigma\mu^2 - \mu - 1)E = \\ &= E(\mu) \cdot \mu(-2\sigma\mu + 3\sigma - 1) > E(\mu) \cdot \mu(-2\sigma + 3\sigma - 1). \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо, т. к. $0 < \mu < 1$. Таким образом, $\Phi(\mu) > E(\mu) \cdot \mu(\sigma - 1) > 0$ при $\sigma > \frac{4}{3}$!

Теперь покажем, что $\Psi(\mu) < 0$. Из последнего выражения в формулах (2.58) с использованием неравенства $K > E$ имеем:

$$\Psi''(\mu) < \frac{15}{4}E(\mu) - \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\sigma\right)E(\mu) = \frac{9}{4}E(\mu)\left(\frac{4}{3} - \sigma\right) < 0,$$

т. к. $\sigma > \frac{4}{3}$. В соответствии с равенствами из (2.59) имеем $\Psi'(0) = 0$, тогда т. к. $\Psi''(\mu) < 0$, то и $\Psi'(\mu) \leq 0$ при $\mu \in (0, 1)$, а т. к. $\Psi(0) = 0$, то и $\Psi(\mu) < 0$ при $\mu \in (0, 1)$. Что и требовалось.

Дальнейшие рассуждения о поведении траекторий, вполне аналогичные соответствующим из доказательства для п. 1, и являются симметричными относительно прямой $v = v_1$. Таким образом, картинки для рис. 2.8 и рис. 2.10 симметричны относительно прямой $v = v_1$.

Справедливость п. 2 теоремы доказана.

3) Пусть $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Покажем, что $\Phi(\mu)$ обязательно имеет корень на интервале $(0, 1)$. Имеем из (2.59): $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 2(\sigma - 1) < 0$ при $\sigma < 1$, $\Phi'(0) = \frac{3\pi}{2}(\sigma - \frac{1}{2}) > 0$ при $\sigma > \frac{1}{2}$, следовательно, $\Phi(\mu)$ при малых μ принимает положительные значения, а при $\mu = 1$ она должна стать отрицательной, т. е. корень есть. Для доказательства единственности этого корня подсчитаем значения функции $\Phi(\mu)$ в экстремальных точках $\mu = \mu_0$, т. е. в таких, для которых $\Phi'(\mu_0) = 0$. Для таких точек имеем:

$$(1 - \mu_0)K(\mu_0) = \frac{2}{5}\sigma \cdot E(\mu_0) \cdot \left(\frac{11}{2}\sigma - 5\mu_0\sigma - \frac{3}{2}\right).$$

Подставляя полученное в формулу для $\Phi(\mu)$ из (2.55), имеем:

$$\Phi(\mu_0) = \frac{2}{5}\sigma \cdot E(\mu_0) \cdot \left(-6\mu_0\sigma + 3\sigma + \frac{9}{2}\mu_0\sigma^2 - \frac{3}{2}\right).$$

Выражение в круглых скобках — монотонно убывающая функция от μ_0 , т. к.

$$-6\sigma + \frac{9}{2}\sigma^2 < 0 \quad \text{при} \quad 0 < \sigma < \frac{4}{3}.$$

Это означает, что если $\Phi(\mu_0) < 0$ для некоторой экстремальной точки (т. е. корень μ^* — в интервале $(0, \mu_0)$), то для всех остальных экстремальных точек $\mu > \mu_0$ будет также $\Phi(\mu) < 0$, что и гарантирует отсутствие других корней (в противном случае мы бы имели для экстремальной точки $\mu > \mu_0$ неравенство $\Phi(\mu) > 0$!).

Покажем теперь, что $\Psi(\mu) > 0$, $\mu \in (0, 1)$, т. е. $\Psi(\mu)$ корней не имеет. Из (2.59):

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi''(0) = \frac{9\pi}{8}\left(\frac{4}{3} - \sigma\right) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma < \frac{4}{3},$$

$$\Psi(1) = 2(1 - \sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma < 1.$$

Следовательно, $\Psi(\mu)$ в окрестности концов интервала $(0, 1)$ принимает положительные значения. Подсчитаем $\Psi(\mu)$ для внутренних экстремальных точек μ_0 , т. е. таких, для которых

$\Psi'(\mu_0) = 0$. Для таких точек имеем

$$(1 - \mu_0) \cdot K(\mu_0) = -\frac{1 + \frac{5}{2}\mu_0 - \frac{9}{2}\sigma}{\frac{9}{2}\sigma - 1} \cdot E(\mu_0).$$

Подставим полученное выражение в формулу для $\Psi(\mu)$ из (2.56):

$$\Psi(\mu_0) = \frac{E(\mu_0)}{\frac{9}{2}\sigma - 1} \cdot 3\mu_0 \left[\mu_0 \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) + \sigma \left(2 - \frac{3}{2}\sigma \right) \right]. \quad (2.63)$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках положительно. Имеем:

$$\mu \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) + \sigma \left(2 - \frac{3}{2}\sigma \right) > \left(\frac{1}{2} - \sigma \right) + \sigma \left(2 - \frac{3}{2}\sigma \right),$$

т. к. $\sigma > \frac{1}{2}$ и $0 < \mu < 1$. Далее:

$$\frac{1}{2} - \sigma + \sigma \left(2 - \frac{3}{2}\sigma \right) = \frac{1}{2} + \sigma - \frac{3}{2}\sigma^2 = (1 - \sigma) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sigma \right) > 0$$

при $\sigma < 1$. Учитывая установленное неравенство и то, что $\frac{9}{2}\sigma - 1 > 0$ при $\sigma > \frac{1}{2}$, мы получаем из (2.63) $\Psi(\mu_0) > 0$. Таким образом, $\Psi(\mu)$ положительно во всех внутренних экстремальных точках интервала $(0, 1)$, что и означает справедливость неравенства $\Psi(\mu) > 0$ при $\mu \in (0, 1)$.

Теперь рассмотрим поведение траекторий в этом случае. Доказанные неравенства для функций $\Phi(\mu)$ и $\Psi(\mu)$, и уравнения (2.55), (2.56) позволяют утверждать, что $v(t)/v_1(t) \rightarrow \sqrt{\mu^*}$, где μ^* — корень уравнения $\Phi(\mu) = 0$, для любой траектории, выходящей из точки $\{v(0), v_1(0)\}$ при $v(0) \neq 0$; $v_1(0) \neq 0$. Доказательство этого факта с использованием квадратур (2.61), (2.62) проводится совершенно аналогично п.1, с той лишь разницей, что функция $\Phi(\mu)$ обнуляется не в точке $\mu = 0$, а в точке $\mu = \mu^*$!

Кроме того, т. к. $\Phi(\mu^*) = 0$, то $\mu = \mu^*$ — решение уравнения (2.55), и, следовательно, решение уравнений (2.54) с начальными условиями $v(0)$ и $v_1(0)$ такими, что $v(0)/v_1(0) = \sqrt{\mu^*}$ и при $F = F(\mu^*)$, $M_C = M_C(\mu^*)$, для любого t удовлетворяет соотношению

$$v(t)/v_1(t) = \sqrt{\mu^*}.$$

Справедливость п. 3 теоремы доказана.

4) Пусть $1 < \sigma < \frac{4}{3}$. Покажем, что $\Psi(\mu)$ имеет корень на интервале $(0, 1)$. Действительно,

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi''(0) = \frac{9\pi}{8} \left(\frac{4}{3} - \sigma \right) > 0 \quad \text{при } \sigma < \frac{4}{3},$$

а $\Psi(1) = 2(1 - \sigma) < 0$ при $\sigma > 1$. Таким образом, $\Psi(\mu) > 0$ в окрестности точки $\mu = 0$ и $\Psi(\mu) < 0$ в окрестности точки $\mu = 1$, т. е. корень будет обязательно. Доказательство единственности совершенно аналогично доказательству единственности корня для $\Phi(\mu)$ из п. 3. Действительно, из формулы (2.63), дающей значение $\Psi(\mu_0)$ в экстремальной точке $\mu = \mu_0$ (где $\Psi'(\mu_0) = 0$), мы заключаем, что выражение в квадратных скобках есть монотонно убывающая функция от μ_0 (т. к. $\frac{1}{2} - \sigma < 0$ при $\sigma > 1$!). Поэтому если функция $\Psi(\mu)$ стала отрицательной в какой-то экстремальной точке, то и в последующих экстремальных точках она будет также отрицательной (строго!) (отметим, что множитель при квадратной скобке в (2.63) положителен, т. к. $E(\mu_0) > 0$ и $\frac{9}{2}\sigma - 1 > 0$ при $\sigma > 1$!). Этот факт и позволяет утверждать единственность нуля $\mu_1 = \mu_1^*$ для функции $\Psi(\mu_1)$ на интервале $(0, 1)$.

Неравенство же $\Phi(\mu) > 0$, $\mu \in (0, 1)$, было уже доказано в п. 2 доказательства настоящей теоремы, которое верно при $\sigma \in (1, \infty)$.

Указанное поведение траекторий следует из доказанных неравенств для функций $\Phi(\mu)$ и $\Psi(\mu)$ при $\mu \in (0, 1)$ и устанавливается аналогично п. 3 доказательства. Таким образом, здесь также наблюдается симметрия относительно прямой $v = v_1$, т. е. рис. 2.11 и рис. 2.9 симметричны относительно прямой $v = v_1$.

Доказательство теоремы 2.3 завершено. ■

Результаты теоремы 2.3 (помимо общей качественной картины траекторий в плоскости $\{v, v_1\}$) могут использоваться для получения «неулучшаемых» (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) оценок времени остановки тела. Уточним постановку задачи. Пусть заданы начальные условия $\omega(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0$. Тогда время до полной остановки тела будет функцией этих параметров:

$$t_{\text{ост}} = t(\omega_0, v_0).$$

Требуется найти максимум и минимум этой функции по всем $\omega_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, удовлетворяющих равенству:

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2}, \quad (2.64)$$

где T_0 — фиксированное значение начальной кинетической энергии

тела. Таким образом, требуется определить величины:

$$t_1 = \min_{\omega_0 \geq 0, v_0 \geq 0} t(\omega_0, v_0), \quad t_2 = \max_{\omega_0 \geq 0, v_0 \geq 0} t(\omega_0, v_0),$$

где ω_0, v_0 связаны равенством (2.64).

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4. Пусть безразмерный параметр σ определен в (2.57).

Тогда справедливы утверждения:

1) если $0 < \sigma < 1/2$, то

$$t_1 = 2\sqrt{3\sigma} \cdot t_0, \quad t_2 = 3 \cdot t_0,$$

где $t_0 = \frac{\sqrt{T_0 \cdot J}}{\sqrt{2a} \cdot kG}$, T_0 — значение начальной кинетической энергии из (2.64), a — радиус круглой площадки, G — полный вес тела (полное нормальное давление), k — коэффициент трения. При этом величина t_1 (минимальное время остановки) достигается на чисто поступательном движении, а величина t_2 (максимальное время остановки) достигается на чисто вращательном движении;

2) если $\frac{4}{3} < \sigma < \infty$, то

$$t_1 = 3 \cdot t_0, \quad t_2 = 2\sqrt{3\sigma} \cdot t_0,$$

причем t_1 достигается на чисто вращательном движении, а t_2 — на чисто поступательном движении. Величина t_0 определяется так же, как и в п. 1 настоящей теоремы;

3) если $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, то

$$t_1 = \sigma_1 \cdot t_0, \quad t_2 = t_{23}(\mu^*),$$

где $\sigma_1 = \min\{3, 2\sqrt{3\sigma}\}$,

$$t_{23}(\mu^*) = t_0 \cdot \frac{9\pi\sqrt{3\sigma\mu^* + 1}}{2 \left[(7 + \mu^*)E(\mu^*) - 4(1 - \mu^*)K(\mu^*) \right]},$$

μ^* — корень уравнения $\Phi(\mu) = 0$ (см. п.3 теоремы 2.3). Причем t_1 достигается на чисто поступательном движении, если $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$, или на чисто вращательном движении, если $\frac{3}{4} < \sigma < 1$, а t_2 достигается на движении, описываемом решением $v = \sqrt{\mu^*} \cdot a\omega$;

4) если $1 < \sigma < \frac{4}{3}$, то

$$t_1 = 3t_0, \quad t_2 = t_{24}(\mu_1^*),$$

где

$$t_{24}(\mu_1^*) = t_0 \cdot \frac{9\pi\mu_1^*\sqrt{3\sigma + \mu_1^*}}{2 \left[(7\mu_1^* + 1)E(\mu_1^*) - (1 + 3\mu_1^*)(1 - \mu_1^*)K(\mu_1^*) \right]},$$

μ_1^* — корень уравнения $\Psi(\mu_1) = 0$ (см. п.4 теоремы 2.3). Причем здесь t_1 достигается на чисто вращательном движении, а t_2 достигается на движении, описываемом решением $a\omega = \sqrt{\mu_1^*} \cdot v$.

Перед доказательством теоремы 2.4 сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При уменьшении радиуса площади контакта ($a \rightarrow 0$) и неизменных m и J будем иметь $\sigma \rightarrow 0$, а п.1 теоремы 2.4 дает:

$$t_1 = 2\sqrt{3\sigma} \cdot t_0 = \frac{1}{kg} \sqrt{\frac{2T_0}{m}} < \infty, \quad t_2 = 3t_0 \frac{3\sqrt{T_0 J}}{\sqrt{2akG}} \rightarrow \infty \quad (\text{при } a \rightarrow 0).$$

Таким образом, время остановки при чисто поступательном движении остается ограниченным (при $a \rightarrow 0$), а время остановки при чисто вращательном движении стремится (при $a \rightarrow 0$) к бесконечности. Можно показать (см. далее § 2.7), что для любых смешанных движений (т.е. $\mu \neq 0$ и $\mu \neq \infty$) время остановки также неограничено (при $a \rightarrow 0$). Этот факт был еще отмечен Ю. И. Неймарком и Н. Л. Фуфаевым в монографии [24] в связи с обсуждением задачи о качении со скольжением шара по шероховатой плоскости. Более подробно эта задача рассматривается ниже, в § 2.7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть тело представляет собой однородный тонкий диск радиуса a . Тогда имеем $J = ma^2/2$, т.е. $\sigma = 2/3$, и мы находимся в условиях п.3 теоремы. Тогда получим $G = mg$, и, следовательно,

$$t_0 = \frac{\sqrt{\frac{T_0}{m}}}{2kg}, \quad \sigma_1 = 2\sqrt{2}, \quad t_1 = \frac{\sqrt{\frac{2T_0}{m}}}{kg}.$$

Таким образом, для времени остановки имеем оценки:

$$\frac{\sqrt{\frac{2T_0}{m}}}{kg} \leq t_{\text{ост}} \leq t_{23}(\mu^*),$$

где $t_{23}(\mu^*)$ дается формулой из п.3 теоремы, а $\mu^* \approx 0.44$ — корень уравнения $\Phi(\mu) = 0$, причем нижняя оценка (т.к. $\sigma = 2/3 \in (1/2, 3/4)$) достигается на чисто поступательном движении диска, а верхняя — на смешанном движении диска, представляющем собой качение по прямой без проскальзывания диска радиусом $a^* = \sqrt{\mu^*} \cdot a \approx 0.66 \cdot a$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как следует из формулировки теоремы 2.4, при $\sigma \in (0, 3/4)$ минимум времени движения (при фиксированной начальной кинетической энергии) реализуется на чисто поступательном движении, но в то же самое время, как это следует из результата теоремы 2.2 (см. § 2.3), при чисто поступательном движении реализуется максимальный пройденный телом путь (при том же уровне начальной кинетической энергии). Таким образом, вращение «помогает» увеличению времени движения, но мешает «перемещению» (при фиксированном уровне кинетической энергии)!

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4.

Используя уравнение движения (2.53), запишем теорему об изменении кинетической энергии.

$$\frac{dT}{dt} = F \cdot v + M_C \cdot \omega,$$

где $T = \frac{mv^2 + J\omega^2}{2}$ — кинетическая энергия системы. Деля обе части полученного равенства на $2\sqrt{T}$, имеем:

$$\frac{d\sqrt{T}}{dt} = \frac{F \cdot v + M_C \cdot \omega}{2\sqrt{T}}. \quad (2.65)$$

Вводя обозначения $\mu = \frac{v^2}{(a\omega)^2}$, $\mu_1 = \frac{(a\omega)^2}{v^2}$, используя формулы (2.51) и (2.52) для F и M_C , мы получим из (2.65) следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sqrt{T}) &= -g_0 \cdot Z(\mu), \quad \mu \in (0, 1), \\ Z(\mu) &= \frac{(7 + \mu)E(\mu) - 4(1 - \mu)K(\mu)}{\sqrt{3\sigma\mu + 1}}, \quad \mu = \frac{v^2}{a^2\omega^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sqrt{T}) &= -g_0 \cdot Z_1(\mu_1), \quad \mu_1 \in (0, 1), \\ Z_1(\mu_1) &= \frac{(7\mu_1 + 1)E(\mu_1) - (1 + 3\mu_1)(1 - \mu_1)K(\mu_1)}{\sqrt{3\sigma\mu_1^2 + \mu_1^3}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

где

$$\mu_1 = \frac{v^2}{a^2\omega^2}, \quad g_0 = \frac{2\sqrt{2}a \cdot kG}{9\pi\sqrt{J}}, \quad \sigma = \frac{ma^2}{3J}.$$

Интегрируя уравнения (2.66), (2.67) от начального значения $t = 0$ до какого-то текущего, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{T} - \sqrt{T_0} &= -g_0 \int_0^t Z(\mu) dt, \quad \mu \in (0, 1), \\ \sqrt{T} - \sqrt{T_0} &= -g_0 \int_0^t Z_1(\mu_1) dt, \quad \mu_1 \in (0, 1), \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

причем, в соответствии с теоремой 2.3, движение происходит всегда так, что $\mu(t)$ и $\mu_1(t)$ меняются монотонно, как функции времени.

Для получения оценок времени остановки из (2.68) достаточно определить минимум и максимум функций $Z(\mu)$ и $Z_1(\mu_1)$ по соответствующим аргументам μ и μ_1 . Используя выражения из (2.66), (2.67) для функций Z и Z_1 , формулы для производных эллиптических интегралов E и K (см. начало доказательства теоремы 2.3), получим, после несложных выкладок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{d\mu} &= -\frac{3\Phi(\mu)}{\mu(3\sigma\mu + 1)^{3/2}}, \quad \mu \in (0, 1), \\ \frac{dZ_1}{d\mu_1} &= -\frac{3\Psi(\mu_1)}{(3\sigma + \mu_1)^{3/2}}, \quad \mu_1 \in (0, 1), \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

где $\Phi(\mu)$, $\Psi(\mu_1)$ — функции, введенные в равенствах (2.55), (2.56) и которые описывают изменение $\mu(t)$, $\mu_1(t)$ во времени! Разберем теперь различные случаи для параметра σ .

1) $\sigma \in (0, 1/2)$. В этом случае п.1 теоремы 2.3 дает $\Phi(\mu) < 0$, $\mu \in (0, 1)$, $\Psi(\mu_1) > 0$, $\mu_1 \in (0, 1)$. Следовательно, из (2.69) получим, что $Z(\mu)$ монотонно возрастает по μ , а $Z_1(\mu_1)$ монотонно убывает по μ_1 ! Но при этом (в соответствии с (2.55), (2.56)) любое движение происходит так, что $\mu_1(t)$ монотонно возрастает по t вплоть до значения $\mu_1 = 1$, а затем $\mu(t)$ монотонно убывает по t от значения $\mu = 1$ вплоть до значения $\mu = 0$ (в момент остановки!). Эти движения представлены на рис. 2.8. Таким образом, получаем неравенства:

$$Z(0) \leq Z(\mu) \leq Z(1) = Z_1(1) \leq Z_1(\mu_1) \leq Z_1(0),$$

причем движение происходит так, что эти неравенства проходятся справа налево. Изложенные соображения и уравнения (2.68) позволяют утверждать, что для всех движений,

имеющих фиксированную начальную кинетическую энергию T_0 , справедливы неравенства:

$$-g_0 Z_1(0) t_{\text{ост}} \leq -\sqrt{T_0} \leq -g_0 Z(0) t_{\text{ост}}, \quad (2.70)$$

где $t_{\text{ост}}$ — время окончания движения, т. е. когда $T = 0$. Из (2.66) имеем $Z_0 = \frac{3\pi}{2}$, а для вычисления $Z_1(0)$ из (2.67) нужно использовать разложения:

$$E(\mu_1) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{4} + \dots \right), \quad K(\mu_1) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\mu_1}{4} + \dots \right), \quad \mu_1 \ll 1.$$

Тогда нетрудно получается формула:

$$Z_1(0) = \frac{9\pi}{4\sqrt{3}\sigma}.$$

Следовательно, из (2.70) получаются оценки:

$$2\sqrt{3}\sigma \cdot t_0 = \frac{4\sqrt{3}\sigma T_0}{9\pi g_0} = \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z_1(0)} \leq t_{\text{ост}} \leq \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(0)} = \frac{\sqrt{T_0}}{3\pi g_0} = 3 \cdot t_0, \quad (2.71)$$

где t_0 определено в формулировке теоремы 2.4.

Кроме того, из приведенных рассуждений следует, что правая часть в неравенстве (2.71) достигается при $\mu = 0$ (т. е. $v = 0$, чисто вращательное движение), а левая — при $\mu_1 = 0$ (т. е. $\omega = 0$, чисто поступательное движение). Утверждение п. 1 теоремы доказано.

2) $\sigma \in (4/3, \infty)$. Здесь рассуждения полностью аналогичны соответствующим из п. 1 и являются симметричными, т. к. здесь из п. 2 теоремы 2.3 следует $\Phi(\mu) > 0$, $\mu \in (0, 1)$, $\Psi(\mu_1) < 0$, $\mu_1 \in (0, 1)$. Соответственно, симметрично изменится оценка (2.71), и мы будем иметь:

$$3t_0 \leq t_{\text{ост}} \leq 2\sqrt{3}\sigma \cdot t_0,$$

причем правая часть достигается при $\mu_1 = 0$ (т. е. $\omega \equiv 0$), а левая — при $\mu = 0$ (т. е. $v \equiv 0$), что и доказывает справедливость п. 2 теоремы.

3) $\sigma \in (1/2, 1)$. В этом случае, в соответствии с п. 3 теоремы 2.3, мы имеем неравенства:

$$\Phi(\mu) > 0, \quad \mu \in (0, \mu^*),$$

$$\Phi(\mu) < 0, \quad \mu \in (\mu^*, 1),$$

$$\Psi(\mu_1) > 0, \quad \mu_1 \in (0, 1),$$

где μ^* таково, что $\Phi(\mu^*) = 0$. Следовательно, из (2.69) мы получим, что $Z(\mu)$ имеет в точке $\mu = \mu^*$ строгий и единственный минимум при $\mu \in (0, 1)$, а функция $Z_1(\mu_1)$ — монотонно убывающая на интервале $\mu_1 \in (0, 1)$, причем $Z_1(1) = Z(1)$. Для удобства графики функций $Z(\mu)$, $Z_1(\mu)$ в этом случае представлены на рис. 2.12. Из приведенных рассуждений (и рис. 2.12) следуют неравенства:

$$Z(\mu^*) \leq Z(\mu) \leq Z(0), \quad \mu \in (0, \mu^*), \quad (2.72)$$

$$Z(\mu^*) \leq Z(\mu) \leq Z(1) = Z_1(1) \leq Z_1(\mu_1) \leq Z_1(0), \quad \mu \in (\mu^*, 1), \mu_1 \in (0, 1), \quad (2.73)$$

причем для начальных условий $\mu_0 = \frac{v_0^2}{a^2 \omega_0^2} \in (0, \mu^*)$ функция $\mu(t)$ монотонно возрастает вплоть до значения $\mu(t_{\text{ост}}) = \mu^*$ в момент остановки $t = t_{\text{ост}}$, а при $\mu_0 = \frac{v_0^2}{a^2 \omega_0^2} \in (\mu^*, 1)$ функция $\mu(t)$ монотонно убывает вплоть до значения $\mu(t_{\text{ост}}) = \mu^*$ в момент остановки. Кроме того, для начальных условий $\mu_{10} = \frac{a^2 \omega_0^2}{v_0^2} \in (0, 1)$, функция $\mu_1(t)$ монотонно возрастает вплоть до значения $\mu_1 = 1$, а дальше движение идет так же, как было описано для $\mu(t)$. Это следует из результата п. 3 теоремы 2.3 (см. также рис. 2.11). Изложенные рассуждения, равенства (2.68) и неравенства (2.72), (2.73), позволяют получить следующие оценки для времени остановки:

$$\frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(0)} \leq t_{\text{ост}} \leq \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(\mu^*)} \quad \text{при} \quad \mu_0 = \frac{v_0^2}{a^2 \omega_0^2} \in (0, \mu^*),$$

$$\frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z_1(0)} \leq t_{\text{ост}} \leq \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(\mu^*)} \quad \begin{cases} \text{при} \quad \mu_0 = \frac{v_0^2}{a^2 \omega_0^2} \in (\mu^*, 1), \\ \text{или при} \quad \mu_{10} = \frac{a^2 \omega_0^2}{v_0^2} \in (0, 1). \end{cases}$$

Из последних соотношений следует, что для всех начальных условий $\omega_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$, имеющих фиксированную кинетическую энергию $T_0 = \frac{mv_0^2 + J\omega_0^2}{2}$, справедливы следующие оценки для времени остановки:

$$\frac{\sqrt{T_0}}{g_0} \min \left\{ \frac{1}{Z(0)}, \frac{1}{Z_1(0)} \right\} \leq t_{\text{ост}} \leq \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(\mu^*)},$$

причем правая часть неравенства достигается на движении, которое описывается решением $v = \sqrt{\mu^*} a \omega$, а левая — на решении $\mu = 0$ (т. е. $v \equiv 0$), если $Z(0) > Z_1(0)$, и на решении $\mu_1 = 0$ (т. е. $\omega \equiv 0$), если $Z(0) < Z_1(0)$. В п. 1 доказательства было показано, что

$$Z(0) = \frac{3\pi}{2}; \quad Z_1(0) = \frac{9\pi}{4\sqrt{3}\sigma},$$

поэтому $Z(0) > Z_1(0)$ эквивалентно $\sigma > \frac{3}{4}$, а $Z(0) < Z_1(0)$ — эквивалентно $\sigma < \frac{3}{4}$.

Несложные алгебраические выкладки приводят к результату п. 3 теоремы 2.4, что и доказывает справедливость п. 3 теоремы.

4) $\sigma \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$. Здесь рассуждения полностью аналогичны рассуждениям п. 3 настоящего доказательства и являются симметричными относительно прямой $v = a\omega$ (везде μ надо заменить на μ_1 , Φ — на Ψ , а Ψ — на Φ). Причем здесь (т. к. $\sigma > \frac{4}{3} > \frac{3}{4}$) будет $Z(0) > Z_1(0)$, и мы имеем оценки:

$$\frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z(0)} \leq t_{\text{ост}} \leq \frac{\sqrt{T_0}}{g_0 Z_1(\mu_1^*)},$$

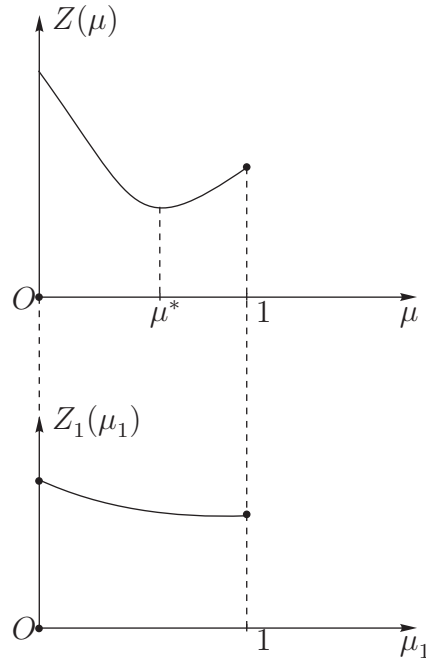


Рис. 2.12. Графики функций $Z(\mu)$, $Z_1(\mu_1)$ при $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. μ^* — корень уравнения $\Phi(\mu) = 0$, $\mu \in (0, 1)$, являющийся минимумом функции $Z(\mu)$, причем $Z(1) = Z_1(1)$

причем левая часть достигается на движении $\mu = 0$ (т. е. $v \equiv 0$), а правая — на движении, соответствующем решению $a\omega = \sqrt{\mu_1^*} \cdot v$. Справедливость п. 4 установлена, и теорема 2.4 доказана. ■

§ 2.5. Движение тела, опирающегося кольцевой площадкой на шероховатую плоскость

В настоящем параграфе результаты из § 2.4 распространяются для случая, когда область S (область опирания) является тонким кольцом.

На рис. 2.13 изображено кольцо радиуса a и ширины ε , причем $\frac{\varepsilon}{a} \ll 1$. Кроме того, центр кольца C совпадает с проекцией центра масс тела на плоскость контакта, нормальное давление p равномерно распределено по площади кольца, \vec{v} — скорость точки C , ω — угловая скорость кольца.

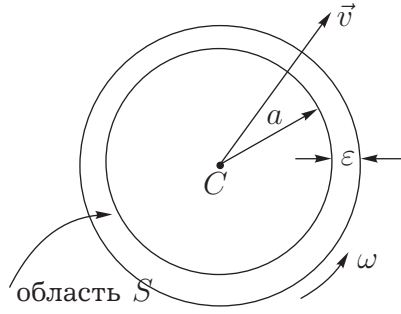


Рис. 2.13. Область опирания S — тонкое кольцо радиуса a . Ширина кольца равна ε , причем $\varepsilon \ll a$. C — проекция центра масс тела на плоскость, \vec{v} — скорость точки C , ω — угловая скорость кольца

Используя выражения для сил и моментов сил трения, полученные в § 2.4 для диска, нетрудно найти аналогичные выражения и для кольца. Действительно, сила трения, действующая на кольцо, равна алгебраической разности сил трения, действующих на диск радиуса $a + \varepsilon$ и диск радиуса a (имеющих, конечно, одинаковые v и ω !), и коллинеарна скорости \vec{v} (т.к. это справедливо для каждого из дисков!). Аналогично, момент сил трения, приложенных к кольцу, есть разность соответствующих моментов для дисков радиуса $a + \varepsilon$ и a . Используя эти соображения, мы можем записать для силы трения F° и момента сил трения относительно точки C M_C° , приложенных к кольцу, следующие выражения:

$$\begin{aligned} F^\circ &= F(a + \varepsilon) - F(a) \simeq \frac{dF}{da} \cdot \varepsilon, \\ M_C^\circ &= M_C(a + \varepsilon) - M_C(a) \simeq \frac{dM_C}{da} \cdot \varepsilon, \\ S_0 &= \pi(a + \varepsilon)^2 - \pi a^2 \simeq 2\pi a \varepsilon \quad \text{— площадь кольца.} \end{aligned} \tag{2.74}$$

Эти равенства соблюдаются с точностью до $o(\varepsilon)$, что является корректным в предположении $\varepsilon \ll a$. Заметим, что в (2.74) F и M_C берутся из (2.51) или (2.52), смотря по тому, где находится мгновенный центр скоростей кольца: внутри (формулы (2.51)) или вне последнего

(формулы (2.52)). Пусть $0 < \mu = \frac{v^2}{(a\omega)^2} \leq 1$. Тогда из (2.51) получим:

$$F(a) = -\frac{4k}{3\pi} \pi p a^2 \frac{\omega a}{v} \left[(1 + \mu)E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu) \right],$$

$$M_C(a) = -\frac{4k}{9\pi} \pi p a^3 \left[(4 - 2\mu)E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu) \right].$$

Отсюда, используя формулы для производных от эллиптических интегралов $E(\mu)$ и $K(\mu)$ (см. начало доказательства теоремы 2.3), получим:

$$\frac{dF}{da} = -\frac{4k}{3\pi} 3\pi a^2 p \frac{\omega}{v} \left[E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu) \right],$$

$$\frac{dM_C}{da} = -\frac{4k}{9\pi} \cdot 9\pi a^2 p \cdot E(\mu).$$

Подставляя последние соотношения в (2.74), и используя обозначение $G_0 = S_0 p \simeq 2\pi a \cdot \varepsilon \cdot p$ — вес тела (нормальное давление на кольцо), имеем:

$$F^\circ = -\frac{c}{\sqrt{\mu}} \left[E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu) \right], \quad M_C^\circ = -caE(\mu), \quad (2.75)$$

где обозначено $c = \frac{2kG_0}{\pi}$.

Пусть $0 < \mu_1 = \frac{\omega^2 a^2}{v^2} \leq 1$. Тогда, поступая аналогично, из (2.52) получим:

$$\frac{dF}{da} = -\frac{4k}{3\pi} \cdot 3\pi p a \cdot E(\mu_1),$$

$$\frac{dM_C}{da} = -\frac{4k}{9\pi} \cdot 9\pi p a \frac{v}{\omega} \left[E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right].$$

Подставляя эти соотношения в (2.74) с учетом обозначений $G_0 = 2\pi a \cdot \varepsilon \cdot p$, $c = \frac{2kG_0}{\pi}$, имеем:

$$F^\circ = -cE(\mu_1), \quad M_C^\circ = -\frac{ca}{\sqrt{\mu_1}} \left[E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right]. \quad (2.76)$$

Таким образом, уравнения движения кольца суть:

$$m\dot{v} = F^\circ, \quad J\dot{\omega} = M_C^\circ, \quad (2.77)$$

где F° , M_C° даются формулами (2.75), если $\mu = \frac{v^2}{(a\omega)^2} \leq 1$, и формулами (2.76), если $\mu_1 = \frac{a^2\omega^2}{v^2} \leq 1$.

Далее, аналогично § 2.4, вводя обозначение $v_1 = a\omega$, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} b_0 v_1 \dot{\mu} &= \Phi_0(\mu), \quad \text{при } v \leq v_1, \mu \in (0, 1), \\ \Phi_0(\mu) &= -(1 - 3\mu\sigma)E(\mu) + (1 - \mu)K(\mu), \\ b_0 v_1 \dot{\mu}_1 &= \Psi_0(\mu_1), \quad \text{при } v \geq v_1, \mu_1 \in (0, 1), \\ \Psi_0(\mu_1) &= -(3\sigma - \mu_1)E(\mu_1) + 3\sigma(1 - \mu_1)K(\mu_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.78)$$

где обозначено

$$b_0 = \frac{m}{2c}, \quad \sigma = \frac{ma^2}{3J}.$$

Дальнейший анализ решений системы (2.77) вполне аналогичен соответствующему анализу для диска из § 2.4. Сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.5. Пусть безразмерный параметр σ определяется формулой:

$$\sigma = \frac{ma^2}{3J}.$$

Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $0 < \sigma < \frac{1}{6}$, то для функций Φ_0 , Ψ_0 из (2.78) справедливы неравенства:

$$\Phi_0(\mu) < 0, \mu \in (0, 1), \quad \Psi_0(\mu_1) > 0, \mu_1 \in (0, 1),$$

а все траектории системы (2.77) (кроме $v_1 = 0$) входят в начало координат $\{v = 0, v_1 = 0\}$ с углом наклона касательной, равным $\frac{\pi}{2}$ (т.е. так же, как и $v = 0$) (см. рис. 2.8);

2) если $\frac{2}{3} < \sigma < \infty$, то для функций Φ_0 , Ψ_0 имеют место неравенства:

$$\Phi_0(\mu) > 0, \mu \in (0, 1), \quad \Psi_0(\mu_1) < 0, \mu_1 \in (0, 1),$$

а все траектории системы (2.77) (кроме $v = 0$) входят в начало координат с нулевым углом наклона касательной (т.е. так же, как и $v_1 = 0$) (см. рис. 2.10);

3) если $\frac{1}{6} < \sigma < \frac{1}{3}$, то $\Phi_0(\mu)$ из (2.78) имеет на интервале $(0, 1)$ единственный корень $\mu = \mu^*$, причем выполнены неравенства:

$$\Phi_0(\mu) > 0, \mu \in (0, \mu^*), \quad \Phi_0(\mu) < 0, \mu \in (\mu^*, 1),$$

$$\Psi_0(\mu_1) > 0, \mu_1 \in (0, 1),$$

кроме того, прямая $v = \sqrt{\mu^*} v_1$ является траекторией, а все остальные траектории (кроме $v = 0$ и $v_1 = 0$) входят в начало координат под углом $\alpha^* = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^*}}\right)$ (см. рис. 2.11);

4) если $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{2}{3}$, то $\Psi_0(\mu_1)$ из (2.78) имеет на интервале $(0, 1)$ единственный корень $\mu_1 = \mu_1^*$, причем выполнены неравенства:

$$\Psi_0(\mu_1) > 0, \mu_1 \in (0, \mu_1^*), \quad \Psi_0(\mu_1) < 0, \mu_1 \in (\mu_1^*, 1),$$

$$\Phi_0(\mu) > 0, \mu \in (0, 1),$$

кроме того, прямая $v_1 = \sqrt{\mu_1^*} v$ является траекторией, а все остальные траектории (кроме $v = 0$ и $v_1 = 0$) входят в начало координат под углом $\alpha_1^* = \arctg(\sqrt{\mu_1^*})$ (см. рис. 2.9).

Перед доказательством теоремы 2.5 отметим, что качественное описание движения кольцевой области такое же, как и у дисковой области (см. замечание к теореме 2.3 из § 2.4). Изменяются лишь границы соответствующих интервалов для параметра σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5.

Здесь рассуждения полностью аналогичны соответствующим из доказательства теоремы 2.3.

Поэтому отметим лишь основные пункты доказательства, касающиеся неравенств для функций Φ_0 и Ψ_0 при различных значениях параметра σ , фигурирующих в пп. 1–4 теоремы 2.5.

Прежде всего заметим, что функцию Ψ_0 из (2.78) можно записать в виде:

$$\Psi_0(\mu_1) = 3\sigma \left[-\left(1 - \frac{1}{3\sigma}\right) E(\mu_1) + (1 - \mu_1)K(\mu_1) \right], \quad (2.79)$$

где выражение в квадратных скобках есть функция $\Phi_0(\mu)$ из (2.78), в которой параметр σ нужно заменить на $\sigma_1 = \frac{1}{9\sigma}$. Таким образом, достаточно указанные в теореме 2.5 неравенства установить для функции Φ_0 при всех значениях параметра $\sigma \in (0, \infty)$, а затем переформулировать их для функции Ψ_0 , соответствующим образом изменив границы параметра σ .

Для функции $\Phi_0(\mu)$ из (2.78) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(\mu) &= -(1 - 3\mu\sigma)E(\mu) + (1 - \mu)K(\mu), \\ \Phi_0(0) &= 0, \quad \Phi_0(1) = 3\sigma - 1, \\ \frac{d\Phi_0(\mu)}{d\mu} &= \frac{1}{2} \left[9\sigma \cdot E(\mu) - (1 + 3\sigma)K(\mu) \right], \quad \Phi'_0(0) = \frac{\pi}{4}(6\sigma - 1). \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Пусть $\mu_0 \in (0, 1)$ — какая-либо точка экстремума функции $\Phi_0(\mu)$. Тогда из равенства $\Phi'_0(\mu_0) = 0$ находим:

$$\left. \begin{aligned} E(\mu_0) &= \frac{1 + 3\sigma}{9\sigma} K(\mu_0), \\ \Phi_0(\mu_0) &= \frac{-1 + 6\sigma + \mu_0(9\sigma^2 - 6\sigma)}{9\sigma} \cdot K(\mu_0), \quad \mu_0 \in (0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

а) Пусть $0 < \sigma < \frac{1}{6}$. Тогда имеем из (2.80), используя неравенство $E(\mu) < K(\mu)$, соотношение:

$$\frac{d\Phi_0}{d\mu} < \frac{1}{2} \left[9\sigma \cdot K(\mu) - (1 + 3\sigma)K(\mu) \right] = \frac{K(\mu)}{2}(6\sigma - 1) < 0, \quad \mu \in (0, 1).$$

Последнее неравенство верно, т. к. $\sigma < \frac{1}{6}$.

Отсюда, используя $\Phi_0(0) = 0$, делаем заключение, что $\Phi_0(\mu) < 0$, $\mu \in (0, 1)$.

б) Пусть $\frac{1}{3} < \sigma < \infty$. Тогда из (2.80) для функции $\Phi_0(\mu)$ имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mu) &= -E(\mu) + 3\mu\sigma E(\mu) + \\ &+ (1 - \mu)K(\mu) > -E(\mu) + \mu E(\mu) + (1 - \mu)K(\mu). \end{aligned}$$

Это неравенство верно, т. к. $\sigma > \frac{1}{3}$. Преобразуя, получим:

$$\Phi_0(\mu) > (1 - \mu)[K(\mu) - E(\mu)] > 0 \text{ при } \mu \in (0, 1).$$

в) Пусть $\frac{1}{6} < \sigma < \frac{1}{3}$. Тогда, используя (2.80), получаем:

$$\Phi_0(0) = 0, \quad \Phi_0(1) = 3\sigma - 1 < 0, \quad \Phi'_0(0) = \frac{\pi}{4}(6\sigma - 1) > 0.$$

Эти соотношения позволяют утверждать, что $\Phi_0(\mu) > 0$ в окрестности точки $\mu = 0$ и $\Phi_0(\mu) < 0$ в окрестности точки $\mu = 1$. Таким образом, существует корень $\mu = \mu^*$ уравнения $\Phi_0(\mu) = 0$.

Единственность корня следует из равенства (2.81) для экстремальных точек функции Φ_0 . Действительно, знак функции $\Phi_0(\mu_0)$ определяется выражением

$$f(\mu_0) = -1 + 6\sigma + \mu_0(9\sigma^2 - 6\sigma),$$

которое является монотонно убывающей функцией аргумента μ_0 , т. к.

$$\frac{df}{d\mu_0} = 9\sigma^2 - 6\sigma = 9\sigma(\sigma - \frac{2}{3}) < 0 \text{ при } \sigma < \frac{2}{3}.$$

Следовательно, при наличии двух корней и так как $\Phi_0(1) < 0$, отрицательный минимум функции Φ_0 должен смениться положительным максимумом, чего быть не должно в силу высказанных соображений о монотонно убывающей функции $f(\mu_0)$, определяющей знак функции $\Phi_0(\mu_0)$. Таким образом, можно утверждать, что

$$\Phi_0(\mu) > 0, \mu \in (0, \mu^*), \quad \Phi_0(\mu) < 0, \mu \in (\mu^*, 1).$$

Далее, используя доказанные свойства функции $\Phi_0(\mu)$ при различных значениях параметра $\sigma \in (0, \infty)$ и формулу (2.79), получим соотношения:

$$\text{г) } \sigma \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{9\sigma} \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \rightarrow \Psi_0(\mu_1) > 0, \quad \mu_1 \in (0, 1),$$

$$\text{д) } \sigma \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{9\sigma} \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \Psi_0(\mu_1) \text{ имеет корень } \mu_1 = \mu_1^* \text{ на интервале } (0, 1) \text{ и при этом}$$

$$\Psi_0(\mu_1) > 0, \mu_1 \in (0, \mu_1^*), \quad \Psi_0(\mu_1) < 0, \mu_1 \in (\mu_1^*, 1);$$

$$\text{е) } \sigma \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{9\sigma} \in \left(0, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \Psi_0(\mu_1) < 0, \mu_1 \in (0, 1).$$

Объединяя доказанное в пп. а)–е), мы получаем утверждения пп. 1–4 теоремы 2.5 (указанные свойства траекторий устанавливаются так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.3).

Теорема 2.5 доказана. ■

Результаты теоремы 2.5 аналогично тому, как это было сделано в § 2.4, могут быть использованы для получения «неулучшаемых» (в классе движений с фиксированной начальной кинетической энергией) оценок времени остановки тела (продолжительности движения). Задаем начальные условия $\omega(0) = \omega_0$, $v(0) = v_0$, удовлетворяющие равенству:

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2}, \quad (2.82)$$

и поставим задачу определения величин:

$$t_1 = \min_{\omega_0 \geq 0, v_0 \geq 0} t^*(\omega_0, v_0), \quad t_2 = \max_{\omega_0 \geq 0, v_0 \geq 0} t^*(\omega_0, v_0),$$

где t^* — время до полной остановки тела, а ω_0, v_0 удовлетворяют (2.82) с фиксированным (заданным) значением T_0 .

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы, которая аналогична теореме 2.4 из § 2.4.

Теорема 2.6. Пусть безразмерный параметр σ определяется формулой:

$$\sigma = \frac{ma^2}{3J},$$

тогда справедливы утверждения:

а) если $0 < \sigma < \frac{1}{6}$, то

$$t_1 = \sqrt{3\sigma}t_0, \quad t_2 = t_0,$$

где $t_0 = \frac{\sqrt{2T_0J}}{kaG_0}$, T_0 — заданное значение начальной кинетической энергии из (2.82), a — радиус кольца, G_0 — полный вес тела, k — коэффициент трения. При этом величина t_1 (минимальное время остановки) достигается на чисто поступательном движении, а величина t_2 (максимальное время остановки) достигается на чисто вращательном движении;

б) если $\frac{2}{3} < \sigma < \infty$, то

$$t_1 = t_0, \quad t_2 = \sqrt{3\sigma}t_0,$$

где t_0 такое же, как и в п. а) настоящей теоремы, а величина t_1 достигается на чисто вращательном движении, t_2 — на чисто поступательном движении;

в) если $\frac{1}{6} < \sigma < \frac{1}{3}$, то

$$t_1 = \sqrt{3\sigma}t_0, \quad t_2 = \frac{\pi\sqrt{3\sigma\mu^* + 1}}{4E(\mu^*) - 2(1 - \mu^*)K(\mu^*)}t_0,$$

где μ^* — корень уравнения $\Phi_0(\mu) = 0$, $\mu \in (0, 1]$, а функция $\Phi_0(\mu)$ определена в (2.78).

При этом величина t_1 достигается на чисто поступательном движении, а величина t_2 достигается на движении, описываемом решением $v = \sqrt{\mu^*}a\omega$;

г) если $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{2}{3}$, то

$$t_1 = t_0, \quad t_2 = \frac{\pi\sqrt{3\sigma + \mu_1^*}}{4E(\mu_1^*) - 2(1 - \mu_1^*)K(\mu_1^*)},$$

где μ_1^* — корень уравнения $\Psi_0(\mu_1) = 0$, $\mu_1 \in (0, 1]$, а функция $\Psi_0(\mu_1)$ определена в (2.78).

При этом величина t_1 достигается на чисто вращательном движении, а величина t_2 достигается на движении, описываемом решением $a\omega = \sqrt{\mu_1^*}v$.

Перед тем как привести доказательство теоремы 2.6, сделаем замечание, являющееся одновременно следствием теоремы 2.6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть тело представляет собой тонкое однородное кольцо радиуса a . Тогда получим $J = ma^2$, т. е. $\sigma = \frac{1}{3}$ и мы находимся на границе пп. в) и г) теоремы 2.6. Эти пункты (естественно!) дают один и тот же результат для времени остановки t^* :

$$t_0 \leq t^* \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4E(1)} t_0, \quad t_0 = \frac{\sqrt{2T_0J}}{kaG_0}. \quad (2.83)$$

Действительно, при $\sigma = \frac{1}{3}$ $\Phi_0(\mu)$ и $\Psi_0(\mu_1)$ из (2.78) имеют вид:

$$\Phi_0(\mu) = -E(\mu)(1 - \mu) + K(\mu)(1 - \mu) = (1 - \mu)[K(\mu) - E(\mu)],$$

$$\Psi_0(\mu_1) = -E(\mu_1)(1 - \mu_1) + K(\mu_1)(1 - \mu_1) = (1 - \mu_1)[K(\mu_1) - E(\mu_1)].$$

Следовательно, $\mu^* = \mu_1^* = 1$ (!) т. е. выполнено (2.83).

Итак, максимальное время остановки достигается на движении, описываемом решением $v = a\omega$. Минимальное же время остановки достигается либо на чисто поступательном, либо на чисто вращательном движении, которые, в данном случае, приводят к одному и тому же (!) времени остановки $t_0 = \frac{\sqrt{2T_0J}}{kaG_0} = \frac{\sqrt{v_0^2 + a^2\omega_0^2}}{kg}$.

Таким образом, учитывая, что $E(1) = 1$, получим из (2.83) следующие оценки:

$$\frac{\sqrt{v_0^2 + a^2\omega_0^2}}{kg} \leq t^* \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{v_0^2 + a^2\omega_0^2}}{kg}. \quad (2.84)$$

Вводя безразмерные переменные, так же, как и в статье [20]:

$$v_{01} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{akg}}, \quad \omega_{01} = \frac{\omega_0 \sqrt{\pi}a}{\sqrt{akg}}, \quad t_1^* = \frac{t^*}{\sqrt{\pi a}} \cdot \sqrt{kg},$$

мы приведем (2.84) к виду:

$$\frac{\sqrt{v_{01}^2 + \omega_{01}^2}}{\pi} \leq t_1^* \leq \frac{\sqrt{2(v_{01}^2 + \omega_{01}^2)}}{4}. \quad (2.85)$$

Отметим, что нижняя оценка в (2.85) совпадает с соответствующей нижней оценкой, полученной в упомянутой статье [20], а вот верхняя оценка в (2.85) более точная, т. к.

$$\frac{\sqrt{2(v_{01}^2 + \omega_{01}^2)}}{4} < \frac{\sqrt{2(v_{01}^2 + \omega_{01}^2)}}{\pi} = 0.449\sqrt{v_{01}^2 + \omega_{01}^2}.$$

Правая часть в последнем неравенстве — это верхняя оценка для t_1^* (время остановки), полученное в статье [20]. Это и неудивительно, т. к. теорема 2.6 дает достижимые оценки времени остановки. Отметим, что в числах (2.85) имеет вид:

$$0,318\sqrt{v_{01}^2 + \omega_{01}^2} \leq t_1^* \leq 0,354\sqrt{v_{01}^2 + \omega_{01}^2} < 0,449\sqrt{v_{01}^2 + \omega_{01}^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6.

Рассуждения здесь вполне аналогичны соответствующим из доказательства теоремы 2.4 § 2.4. Поэтому наметим только основные пункты. Записываем теоремы об изменении кинетической энергии для кольца, которая стандартным образом следует из уравнений (2.77):

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \right)^\cdot = F^0 \cdot v + M_C^0 \omega.$$

Делим обе части полученного равенства на $2\sqrt{T}$, где $T = \left(mv^2 + \frac{J\omega^2}{2} \right)$, используем формулы (2.75) и (2.76), получим, после несложных преобразований:

$$(\sqrt{T})^\cdot = \frac{2kaG_0}{\pi\sqrt{2J}} \cdot Z_0(\mu),$$

$$\text{где } Z_0(\mu) = \frac{2E(\mu) - (1 - \mu)K(\mu)}{\sqrt{3\sigma\mu + 1}}, \quad 0 < \mu = \frac{v^2}{(\omega a)^2} < 1,$$

$$(\sqrt{T})^\cdot = -\frac{2kaG_0}{\pi\sqrt{2J}} \cdot Z_{01}(\mu_1),$$

$$\text{где } Z_{01}(\mu_1) = \frac{2E(\mu_1) - (1 - \mu_1)K(\mu_1)}{\sqrt{3\sigma + \mu_1}}, \quad 0 < \mu_1 = \frac{\omega^2 a^2}{v^2} < 1,$$

где, как обычно, обозначено $\sigma = \frac{ma^2}{3J}$.

Обозначая далее

$$g_0 = \frac{2kaG_0}{\pi\sqrt{2J}}$$

и интегрируя полученные уравнения от начального значения $t = 0$ до какого-то текущего, имеем:

$$\sqrt{T} - \sqrt{T_0} = -g_0 \int_0^t Z_0(\mu) dt, \quad \mu \in (0, 1),$$

$$\sqrt{T} - \sqrt{T_0} = -g_0 \int_0^t Z_{01}(\mu_1) dt, \quad \mu_1 \in (0, 1).$$

Дальнейшие рассуждения основаны на поиске максимумов и минимумов функции $Z_0(\mu)$ и $Z_{01}(\mu_1)$ по μ и μ_1 и используют результаты теоремы 2.5.

Для производных функций $Z_0(\mu)$ и $Z_{01}(\mu_1)$ имеем соотношения:

$$\frac{dZ_0}{d\mu} = -\frac{\Phi_0(\mu)}{2\mu(1+3\sigma\mu)^{3/2}}, \quad \frac{dZ_{01}}{d\mu_1} = -\frac{\Psi_0(\mu_1)}{2\mu_1(3\sigma + \mu_1)^{3/2}},$$

где Φ_0, Ψ_0 определены в уравнениях (2.78).

Полученные формулы показывают полную согласованность поведения функций $Z_0(\mu)$ и $Z_{01}(\mu_1)$ с поведением функций $\Phi_0(\mu)$ и $\Psi_0(\mu_1)$, и, следовательно, с пп. 1–4 теоремы 2.5. Повторяя в точности доказательство теоремы 2.4 (с соответствующими изменениями границ для интервалов изменения параметра σ !), мы придем к результату, сформулированному в теореме 2.6.

Теорема 2.6 доказана. ■

§ 2.6. Движение тела, опирающегося прямоугольной площадкой на шероховатую плоскость

В настоящем параграфе рассматривается случай опирания тела на прямоугольную площадку контакта (см. рис. 2.14). На этом рисунке обозначения стандартные (см. аналогичный рисунок 2.2 из § 2.3). Будем считать, что размер прямоугольника вдоль оси x равен $2x_0$, а размер по оси y равен $2y_0$, причем точка C (проекция центра масс тела) находится в центре симметрии прямоугольника. Кроме того, считаем, что нормальное давление распределено равномерно по площади прямоугольника и равно $p = G/S_0$, где G — вес тела, $S_0 = 4x_0y_0$ — площадь прямоугольника.

Выведем уравнения движения тела, опирающегося на эту площадку, под действием сил сухого трения (кулонова трения). Для этого используем формулы, полученные в § 2.3 ((2.17), (2.19) и уравнения (2.20), (2.25)). Соотношения при этом получаются простыми (они выражаются через элементарные функции), но достаточно громозд-

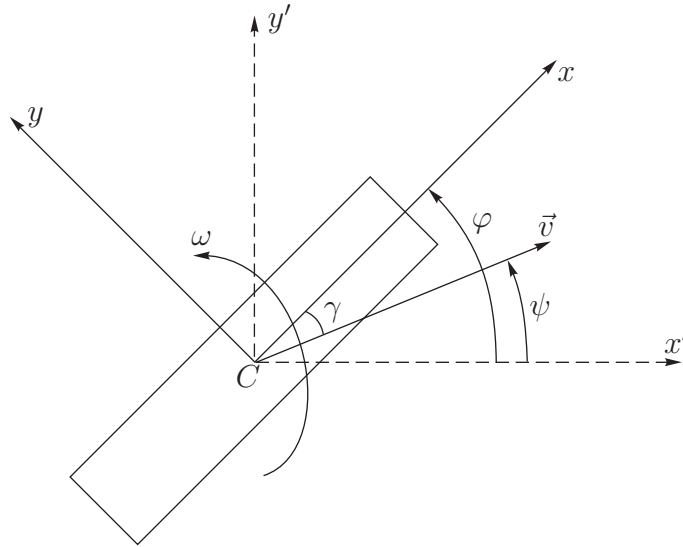


Рис. 2.14. Прямоугольная зона контакта: C — проекция центра масс тела на горизонтальную плоскость; \vec{v} — скорость точки C ; Cxy — прямоугольная система координат, связанная с зоной контакта; $Cx'y'$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат; ψ — угол, образуемый вектором \vec{v} с осью Cx' ; γ — угол, образуемый вектором \vec{v} с осью Cx ; φ — угол собственного поворота прямоугольника; $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость прямоугольника

кими. Поэтому для сокращения выкладок будем считать, что $y_0 \ll x_0$, т. е. прямоугольник очень узкий и является фактически стержнем. В соответствующих формулах для прямоугольника мы перейдем к пределу при $y_0 \rightarrow 0$, вводя при этом давление $p_0 = G/(2x_0)$ — равномерно распределенное уже вдоль длины стержня.

Отметим, что эта модель полезна для качественного изучения движения в более общих случаях. Кроме того, из стержней можно складывать другие, более сложные фигуры. Вводя параметр $\lambda = v/\omega$ и полагая в (2.17), (2.19) $g_2 = -g_1 = y_0$, $x_2 = -x_1 = x_0$, $f_2 = -f_1 = x_0$, $y_2 = -y_1 = y_0$, получим

$$\left. \begin{aligned} F_x &= k \frac{G}{4x_0y_0} (I_1 - I_2), & F_y &= -k \frac{G}{4x_0y_0} (I_3 - I_4), \\ m_1 &= \omega y_0 (I_1 + I_2), & m_2 &= \omega y_0 (I_3 + I_4), \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{(\lambda \cos \gamma - y_0)^2 + (x - \lambda \sin \gamma)^2} dx, \\
I_2 &= \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{(\lambda \cos \gamma + y_0)^2 + (x - \lambda \sin \gamma)^2} dx, \\
I_3 &= \int_{-y_0}^{y_0} \sqrt{(\lambda \cos \gamma - y)^2 + (x_0 - \lambda \sin \gamma)^2} dy, \\
I_4 &= \int_{-y_0}^{y_0} \sqrt{(\lambda \cos \gamma - y)^2 + (x_0 + \lambda \sin \gamma)^2} dy.
\end{aligned}$$

Считая y_0 малым, мы получим (с точностью до малых 2-го порядка малости по y_0):

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_{-x_0}^{x_0} \frac{-2\lambda y_0 \cos \gamma \cdot dx}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x - \lambda \sin \gamma)^2}}, \\
I_3 - I_4 &= 2y_0 \left[\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x_0 - \lambda \sin \gamma)^2} - \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x_0 + \lambda \sin \gamma)^2} \right], \\
I_1 + I_2 &= 2 \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x - \lambda \sin \gamma)^2} dx, \\
I_3 + I_4 &= 2y_0 \left[\sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x_0 - \lambda \sin \gamma)^2} + \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \gamma + (x_0 + \lambda \sin \gamma)^2} \right].
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (2.87) и используя формулу для момента M_c из правой части уравнения (2.25), мы получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
F_x &= -kp_0 x_0 \xi \cos \gamma \cdot \ln U, \\
F_y &= kp_0 x_0 \xi \cos \gamma (\sqrt{1 + z_2^2} - \sqrt{1 + z_1^2}), \\
M_c &= -\frac{1}{2} kp_0 x_0^2 \xi^2 \cos^2 \gamma (-\ln U + z_2 \sqrt{1 + z_1^2} + z_1 \sqrt{1 + z_2^2}),
\end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

где введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} U &= (z_1 + \sqrt{1 + z_1^2})(z_2 + \sqrt{1 + z_2^2}), \\ z_1 &= -\operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\xi} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}, \\ z_2 &= \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\xi} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}, \\ \xi &= \frac{\lambda}{x_0} = \frac{v}{\omega x_0}, \quad p_0 = \frac{G}{2x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Далее, обозначая $v_1 = \omega x_0$, получим из (2.20), (2.25) уравнения движения в переменных $\{v_1, \xi, \gamma\}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{x_0}{J} M_c, \\ v_1 \dot{\xi} &= \frac{1}{m} (F_x \cos \gamma - F_y \sin \gamma) - \xi \frac{x_0}{J} M_c, \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{x_0} - \frac{1}{m v_1 \xi} \cdot (F_x \sin \gamma + F_y \cos \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

где m — масса тела, J — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через точку C , а F_x, F_y, M_c даются формулами (2.88), (2.89). Система (2.90) является замкнутой относительно переменных v_1, ξ, γ .

Для удобства дальнейшего исследования введем следующие обозначения:

$$y_1 = z_1 + \sqrt{1 + z_1^2}, \quad y_2 = z_2 + \sqrt{1 + z_2^2}, \quad y_1 y_2 = u, \quad y_1 + y_2 = u_1. \quad (2.91)$$

Из (2.91) следуют неравенства:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad u \geq 1, \quad u_1^2 \geq 4u, \quad (2.92)$$

которые в дальнейшем будем считать выполненными. Из (2.91) нетрудно получить соотношения:

$$z_i^2 = \frac{y_i^2 - 1}{2y_i}, \quad y_i = \frac{u_1}{2} \pm \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - u}, \quad i = 1, 2.$$

Проводя несложные алгебраические вычисления, уравнения (2.90) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_1 &= -g_0 \varepsilon \xi^2 \cos^2 \gamma \left(\frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \right), \\ v_1 \dot{\xi} &= -g_0 \xi \cos^2 \gamma \left[\frac{u_1^2 (u^2 - 1)}{8u^2} - (1 + \varepsilon \xi^2) \left(\frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \right) \right], \\ \dot{\gamma} &= \frac{v_1}{x_0} + \frac{g_0 \sin \gamma \cos \gamma}{v_1} \left[\ln u - \frac{2(u - 1)}{u + 1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

где обозначено:

$$g_0 = \frac{k p_0 x_0}{m} = \frac{k g}{2}; \quad \varepsilon = \frac{m x_0^2}{2J} = \frac{x_0^2}{2 \varrho_0^2}, \quad (2.94)$$

ϱ_0 — радиус инерции тела относительно вертикали Cz , g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент трения.

Например, для ничем не отягощенного стержня получим $\varrho_0 = \frac{x_0}{\sqrt{3}}$, т. е. $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Основной результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.7. Пусть безразмерный параметр ε определен в (2.94).

Тогда справедливы утверждения:

- 1) если $\varepsilon \in (0, 1)$, то для **любых** начальных условий $v_1(0)$, $\xi(0)$, $\gamma(0)$ движение тела происходит так, что $\xi(t)$ монотонно стремится к нулю, причем $\xi(t_*) = 0$, где t_* — момент остановки тела;
- 2) если $\varepsilon \in (1, \infty)$, то $\xi(t)$ может как убывать, так и возрастать, в зависимости от реализовавшихся значений $v_1(t)$, $\xi(t)$, $\gamma(t)$.

Перед доказательством сделаем несколько замечаний, поясняющих формулировку теоремы 2.7.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пункт 1 теоремы 2.7 утверждает, что при $\varepsilon \in (0, 1)$ движение тела всегда стремится к чисто вращательному вокруг точки C , независимо от начальных условий,

т. е. скорость его поступательного движения стремится к нулю быстрее, чем его угловая скорость (см. рис. 2.8 из § 2.4 для движения круглой площадки!). Условие $\varepsilon \in (0, 1)$ реализуется, например, для крестовины, состоящей из двух (вообще говоря, разных) симметрично соединенных стержней, из которых только один контактирует с шероховатой плоскостью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пункт 2 теоремы 2.7 утверждает, что при $\varepsilon > 1$ существуют такие наборы значений $v_1(t)$, $\xi(t)$, $\gamma(t)$, что $\xi(t)$ в течение некоторого промежутка времени или убывает, или возрастает. Что происходит в финале (т. е. при $t \rightarrow t_*$, t_* — момент остановки) — установить не удалось. Можно только предположить, что движение будет стремиться к чисто поступательному (однако произойти это может, вероятно, при значениях ε много больших 1!).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7.

1) Обратимся ко второму уравнению для $\dot{\xi}$ системы (2.93) и покажем, что выражение в квадратных скобках в правой части этого уравнения всегда положительно, что и будет означать монотонность убывания $\xi(t)$ на всем промежутке времени движения. Имеем:

$$G(u, u_1) = \frac{u_1^2(u^2 - 1)}{8u^2} - (1 + \varepsilon\xi^2) \left(\frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \right), \quad (2.95)$$

где вместо ξ^2 нужно подставить выражение, которое следует из (2.89), (2.91):

$$\xi^2 = \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 - \frac{4u}{u_1^2}, \quad u_1^2 \geq 4u. \quad (2.96)$$

Эта формула получается следующим образом. Сначала из (2.89) находим:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_2 - z_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{4y_1y_2}(1 + y_1y_2) = \frac{\sqrt{u_1^2 - 4u}}{4u}(1 + u) \cdot \operatorname{sign}(\operatorname{tg} \gamma).$$

Далее имеем:

$$z_1 + z_2 = \frac{y_1^2 - 1}{2y_1} + \frac{y_2^2 - 1}{2y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2y_1y_2}(y_1y_2 - 1) = \frac{u_1}{2u}(u - 1).$$

Затем из (2.89) находим:

$$\xi^2 = \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma)}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Подставляя в полученное выражение значения для $\operatorname{tg} \gamma$ и $z_1 + z_2$, приходим к формуле (2.96). Далее, подставляя (2.96) в (2.95), получим:

$$G(u, u_1) = \left[\frac{u_1^2(u^2 - 1)}{8u^2} + \frac{1}{u_1^2} \cdot 4u \cdot \varepsilon \cdot S(u) \right] - \left[1 + \varepsilon \left(\frac{u+1}{u-1} \right)^2 \right] S(u), \quad (2.97)$$

где $S(u) = \frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u$.

Нетрудно показать, что $S(u) \geq 0$ при $u \geq 1$.

Действительно:

$$S(1) = 0, \quad S'_u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) - \frac{1}{u} = \frac{(u-1)^2}{2u^2} \geq 0 \rightarrow S(u) \geq 0.$$

Далее зафиксируем значение $u \geq 1$ и будем искать минимум функции $G(u, u_1)$ из (2.97) при $u_1^2 \geq 4u$ (т. е. чтобы соблюдалось (2.92)).

Имеем:

$$\frac{\partial G}{\partial(u_1^2)} = \frac{u^2 - 1}{8u^2} - \frac{1}{u_1^4} \cdot 4u \cdot \varepsilon \cdot S(u) > \frac{u^2 - 1}{8u^2} - \frac{1}{(4u)^2} \cdot 4u \cdot \varepsilon \cdot S(u).$$

Это неравенство верно, т. к. $u_1^2 \geq 4u$, $S(u) \geq 0$. Далее, т. к. $0 < \varepsilon < 1$, то получим:

$$\frac{\partial G}{\partial(u_1^2)} > \frac{u^2 - 1}{8u^2} - \frac{1}{(4u)^2} \cdot 4u \cdot 1 \cdot S(u) = \frac{\ln u}{8u^2} > 0 \quad \text{при} \quad u \geq 1.$$

Итак, мы получили, что $G(u, u_1)$ при фиксированном u монотонно возрастает по u_1 при $u_1^2 \geq 4u$, $\varepsilon \in (0, 1)$.

Следовательно:

$$\begin{aligned} G(u, u_1) &\geq G(u, \sqrt{4u}) = \ln u - \varepsilon \cdot S(u) \left[\left(\frac{u+1}{u-1} \right)^2 - 1 \right] > \\ &> \ln u - \left(\frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \right) \left[\left(\frac{u+1}{u-1} \right)^2 - 1 \right], \end{aligned}$$

причем последнее неравенство верно, т. к. $0 < \varepsilon < 1$. Раскрывая скобки, мы получим неравенство:

$$\begin{aligned} G(u, u_1) &> \frac{u^2 - 1}{2u} + \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 \ln u - \frac{u^2 - 1}{2u} \cdot \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 \left(\ln u - 2 \frac{u - 1}{u + 1} \right) > 0, \end{aligned}$$

причем последнее неравенство верно, т. к.

$$g(u) = \ln u - 2 \frac{u - 1}{u + 1} > 0 \quad \text{при} \quad u \geq 1.$$

Действительно:

$$g(1) = 0, \quad g'_u = \frac{1}{u} - \frac{4}{(u + 1)^2} = \frac{(u - 1)^2}{u(u + 1)^2} \geq 0 \rightarrow g(u) \geq 0 \quad \text{при} \quad u \geq 1.$$

Таким образом, показано, что

$$G(u, u_1) \geq 0 \quad \text{при} \quad u \geq 1, \quad u_1^2 \geq 4u, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Это и означает монотонное убывание $\xi(t)$ из второго уравнения (2.93).

Покажем теперь, что $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$, где t_* — момент остановки (т. е. $v_1(t_*) = v(t_*) = 0$).

Предположим противное, т. е. $\xi(t) \geq \xi_1 > 0$. Разделим первое уравнение на второе в системе (2.93). Получим:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{v_1} &= \varepsilon \xi d\xi \cdot H(u, u_1), \\ H(u, u_1) &= \frac{1}{\frac{u_1^2(u^2 - 1)}{8u^2 \cdot S(u)} - (1 + \varepsilon \xi^2)} \geq 0, \end{aligned} \tag{2.98}$$

где обозначено $S(u) = \frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \geq 0$.

Покажем, что $H(u, u_1)$ из (2.98) ограничена сверху, если $\xi \geq \xi_1 > 0$. Вспомним, что ξ дается формулой (2.96), из которой следуют нера-

венства:

$$\xi^2 > \left(\frac{u+1}{u-1} \right) - 1 \rightarrow u > \frac{\sqrt{1+\xi^2}+1}{\sqrt{1+\xi^2}-1} > u_0 = \frac{\sqrt{1+\xi_0^2}+1}{\sqrt{1+\xi_0^2}-1} > 1,$$

где ξ_0 – начальное значение для $\xi(t)$. Последнее неравенство следует из того факта, что $\xi(t)$ монотонно убывает от значения $\xi(0) = \xi_0$ и монотонного убывания по ξ функции:

$$h(\xi) = \frac{\sqrt{1+\xi^2}+1}{\sqrt{1+\xi^2}-1}.$$

Далее, т.к. $u > u_0$, то $S(u) \geq S(u_0) > 1$, т.к. $S(u)$ – монотонно возрастающая по u функция. Итак, $S(u)$ – ограниченная снизу строго положительная функция.

Разберем три случая:

1°) u, u_1 – ограничены при $t \in [0, t_*]$. Тогда ограниченность $H(u, u_1)$ из (2.98) очевидна, т.к. знаменатель в выражении для H положителен и в нуль не обращается.

2°) u – ограничена, а $u_1 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$. Тогда из (2.98) имеем $H(u, u_1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$, т.е. $H(u, u_1)$ ограничена сверху.

3°) $u \rightarrow \infty, u_1 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$. Тогда, в силу (2.96) и того, что $\xi \rightarrow \xi_1 > 0$, получим:

$$\frac{4u}{u_1^2} \rightarrow a_0 = 1 - \xi_1^2 \rightarrow u_1^2 \sim \frac{4u}{1 - \xi_1^2},$$

$$H \sim \frac{1}{\frac{4u(u^2-1)}{(1-\xi_1^2)8u^2S(u)} - (1+\varepsilon\xi_1^2)} \sim \frac{1-\xi_1^2}{\xi_1^2(1-\varepsilon) + \varepsilon\xi_1^4} \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

Итак, и в этом случае H ограничена сверху.

Отметим, что случай $u \rightarrow \infty, u_1 < \infty$ быть не может в силу неравенства $4u \leq u_1^2$.

Интегрируя неравенство (2.98) на интервале $(0, t_*)$, получим:

$$\ln[v_1(t_*)] - \ln[v_1(0)] = \varepsilon \int_{\xi_0}^{\xi_1} H \cdot \xi d\xi.$$

Но т. к. $v_1(t_*) = 0$, то левая часть полученного равенства является неограниченной, в отличие от правой! Полученное противоречие и показывает, что $\xi_1 = 0$. Отметим, что доказательство верно при $\xi_1 < 1$. Если же $\xi_1 > 1$, то случаи 1°, 2° рассматриваются аналогично, а случай 3° не реализуется (т. к. для него всегда $\xi_1 < 1$!).

Таким образом, $\xi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$.

2) Пусть $\varepsilon > 1$. Фиксируем $u > 1$ и ищем минимум функции $G(u, u_1)$ из (2.95) по u_1 при $u_1^2 \geq 4u$. Этот минимум достигается в такой точке u_1^* , для которой

$$\frac{1}{(u_1^*)^4} = \frac{u^2 - 1}{8u^2 \cdot 4u\varepsilon S(u)} < \frac{1}{16u^2},$$

т. к. должно быть $(u_1^*)^2 \geq 4u$.

Таким образом, u должно удовлетворять неравенству

$$\phi(u) = (\varepsilon - 1)(u^2 - 1) - 2u\varepsilon \ln u > 0.$$

Ясно, что последнее неравенство выполнено при всех достаточно больших u (при $\varepsilon > 1$!).

Далее имеем:

$$G(u, u_1^*) = (u_1^*)^2 \left\{ \frac{u^2 - 1}{4u^2} - \sqrt{\frac{(u^2 - 1)S(u)}{8u^2 \cdot 4u\varepsilon}} \cdot \left[\varepsilon \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 + 1 \right] \right\}.$$

Нетрудно показать, что при $u \rightarrow \infty$ выражение в фигурных скобках отрицательно, что и означает $G(u, u_1^*) < 0$, т. е. возрастание $\xi(t)$.

Действительно:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left\{ \frac{u^2 - 1}{4u^2} - \sqrt{\frac{(u^2 - 1) \left(\frac{u^2 - 1}{2u} - \ln u \right)}{8u^2 \cdot 4u \cdot \varepsilon}} \left[\varepsilon \left(\frac{u + 1}{u - 1} \right)^2 + 1 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{64\varepsilon}}(\varepsilon + 1) < 0.$$

Последнее неравенство верно, т. к.

$$\frac{1}{16} < \frac{(\varepsilon + 1)^2}{64\varepsilon} \leftrightarrow 4\varepsilon < (\varepsilon + 1)^2 \leftrightarrow (\varepsilon - 1)^2 > 0.$$

В заключение отметим, что, выбирая u_1 достаточно большим (см. (2.95)), мы всегда можем добиться положительности функции $G(u, u_1)$ из (2.95). А это означает *убывание* функции $\xi(t)$.

Теорема 2.7 доказана. ■

В заключение этого параграфа сделаем одно замечание, касающееся качественного описания движения стержневой области.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратимся к третьему уравнению системы (2.93), описывающему изменение угла γ . Пусть начальные условия таковы, что $\gamma(0) = 0$, $v(0) \neq 0$, $\omega(0) \neq 0$, т. е. в начальный момент скорость центра масс направлен вдоль стержня, и, кроме того, стержень поворачивается *влево*, если смотреть по ходу движения. Тогда нетрудно установить, что γ будет *увеличиваться* вплоть до значения $\gamma = \pi/2$, а траектория центра масс будет отклоняться *вправо*, если смотреть по ходу движения (т. е. против вращения стержня). Действительно, запишем уравнение для γ так:

$$\dot{\gamma} = \frac{v_1}{x_0} + \frac{g_0 \sin \gamma \cos \gamma}{v_1} L(u), \quad L(u) = \ln u - \frac{2(u - 1)}{u + 1}.$$

Нетрудно показать, что $L(u) \geq 0$ при $u \geq 1$:

$$L(1) = 0, \quad L'_u = \frac{(u - 1)^2}{u(u + 1)^2} > 0 \rightarrow L(u) \geq 0 \quad \text{при} \quad u \geq 1.$$

Отсюда и следует, что $\gamma(t)$ возрастает.

Далее запишем уравнение для ψ (это угол, составляемый вектором \vec{v} с осью x !):

$$\dot{\psi} = -\frac{g_0 \sin \gamma \cos \gamma}{v_1} \cdot L(u).$$

Отсюда видно, что т.к. угол γ *возрастает* от значения $\gamma = 0$, то $\sin \gamma > 0$, $\cos \gamma > 0$ ($\gamma \in [0, \pi/2]$), т.е. ψ убывает и траектория центра масс отклоняется в сторону, *противоположную* вращению стержня!

§ 2.7. Движение однородного тяжелого шара, опирающегося круглой площадкой на шероховатую плоскость

В настоящем параграфе, следуя Ю.И. Неймарку и Н.А. Фуфаеву [24], мы рассматриваем движение по инерции однородного тяжелого шара по горизонтальной шероховатой плоскости (т.е. при наличии сухого трения), причем зоной контакта шара с плоскостью является круг радиуса a (см. рис.2.15). Предполагаем, что нормальное давление на площадку контакта распределено равномерно и равно $p = G/(\pi a^2)$, где G — вес шара. Вводим неподвижную систему координат $Oxyz$ (см. рис.2.15) и обозначения: $\vec{v}_0(u_0, v_0, 0)$ — скорость центра масс шара, $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — угловая скорость шара, m_0 — масса шара, ϱ — радиус инерции шара, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ — результирующая сил трения, M_c — момент сил трения относительно вертикальной оси, проходящей через центр C площадки контакта, $\vec{v}(v \cos \theta, v \sin \theta, 0)$ — скорость точки шара, совпадающей с центром площадки контакта. Запишем уравнения движения центра масс:

$$m_0 \dot{u}_0 = F_x, \quad m_0 \dot{v}_0 = F_y, \quad (2.99)$$

уравнения кинетического момента относительно центра масс:

$$m_0 \varrho^2 \dot{\omega}_x = R F_y, \quad m_0 \varrho^2 \dot{\omega}_y = -R F_x, \quad m_0 \varrho^2 \dot{\omega}_z = M_c, \quad (2.100)$$

и уравнение кинематической связи

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R},$$

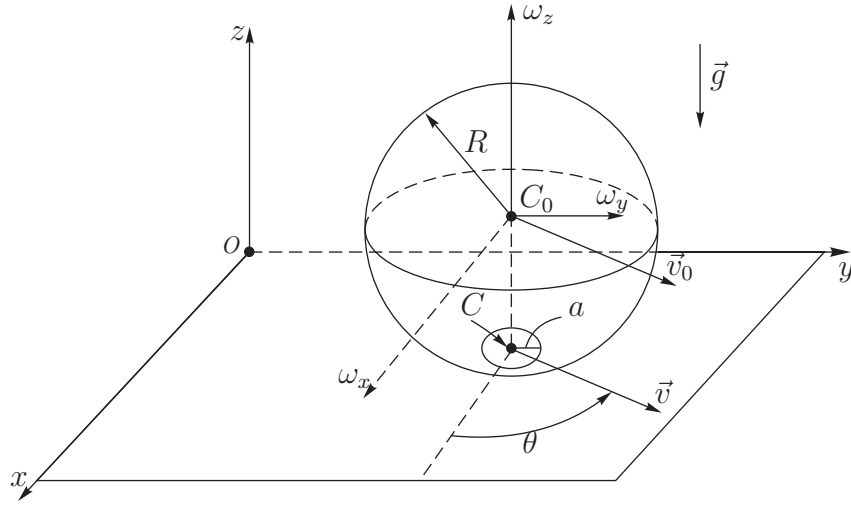


Рис. 2.15. Движение шара по горизонтальной шероховатой плоскости, опирающегося на круглую площадку: C_0 — центр масс шара; C — проекция точки C_0 на горизонтальную плоскость; \vec{v}_0 — скорость центра масс шара C_0 ; \vec{v} — скорость точки C (центра площадки контакта); $Oxyz$ — неподвижная система координат; θ — угол, образуемый вектором \vec{v} с горизонтальной осью Ox ; $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — угловая скорость шара; R — радиус шара, a — радиус площади контакта

которое в проекциях имеет вид:

$$v \cos \theta = u_0 - R\omega_y, \quad v \sin \theta = u_0 + R\omega_x, \quad (2.101)$$

где R — радиус шара. Произведя подсчет силы трения \vec{F} и момента сил трения M_c (при указанных выше предположениях) так же, как это было сделано в § 2.4, мы приходим к выводу, что сила \vec{F} коллинеарна вектору \vec{v} , т. е.

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta.$$

Тогда, дифференцируя равенства (2.101) и используя уравнения (2.99), (2.100), мы получим уравнения:

$$m_0 \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + R^2} \dot{v} = F, \quad m_0 \varrho^2 \dot{\omega}_z = M_c, \quad \dot{\theta} = 0.$$

Последнее соотношение этой системы показывает, что направление скорости скольжения центра площади контакта сохраняется неизменным. Оставшиеся два уравнения образуют замкнутую систему, которая полностью аналогична системе (2.54) из § 2.4, где следует положить:

$$m = m_0 \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + R^2}, \quad J = m_0 \varrho^2, \quad \omega = \omega_z,$$

а F и M_c являются функциями отношения $v/(a\omega_z)$ и даются формулами (2.52) или (2.53) из § 2.4, смотря по тому, где находится мгновенный центр скоростей площадки контакта (внутри или вне площадки). Параметр σ из (2.58), которым определяется характер скольжения шара, получается следующим образом

$$\sigma = \frac{ma^2}{3J} = \frac{1}{3} \frac{a^2}{\varrho^2 + R^2}.$$

Отсюда следует, что так как $a < R$, то $\sigma < 1/3$, т.е. мы находимся в условиях п. 1 теоремы 2.3 из § 2.4. Следовательно, движение шара стремится к почти вращательному (вокруг вертикали Cz).

Одновременно с этим процессом скольжения происходит процесс качения шара в соответствии с первыми двумя уравнениями из (2.100). Нетрудно видеть, что решение этих двух уравнений (пока происходит скольжение!) дается формулами:

$$\omega_x = \omega^* \sin \theta, \quad \omega_y = -\omega^* \cos \theta, \quad \dot{\omega}^* = F \cdot \frac{R}{m_0 \varrho^2}. \quad (2.102)$$

Через конечное время t^* процесс скольжения закончится и одновременно будет $v(t^*) = \omega_z(t^*) = 0$. Оценки (снизу и сверху) для времени t^* дают п. 1 из теоремы 2.4, где в качестве величины T_0 (начальной кинетической энергии) следует брать выражение

$$T_0 = \frac{m_0}{2} \left[\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + R^2} \cdot v^2(0) + \varrho^2 \omega_z^2(0) \right],$$

где $v(0)$ — начальное значение скорости проскальзывания, а $\omega_z(0)$ — начальное значение угловой скорости вращения.

В монографии [24] отмечается, что при $a \rightarrow 0$ время прекращения скольжения $t^* \rightarrow \infty$. В то же время при рассмотрении классической модели движения шара с *точечным* контактом скорость скольжения $v(t)$ обращается в нуль через *конечное* время $t_1^* = \varrho^2 \cdot v(0) / [kg(\varrho^2 + R^2)]$ (для шара, у которого $\varrho^2 = \frac{2}{5}R^2$ имеем $t_1^* = \frac{2}{7} \frac{v(0)}{kg}$), где k — коэффициент трения. При этом угловая скорость вращения ω_z остается неизменной, $\omega_z = \omega_z(0)$! Дальнейший процесс качения происходит уже при *нулевой* (!) силе трения (силе трения сцепления). Подробно этот классический случай рассмотрен в монографии А. П. Маркеева [25].

Можно показать, используя методику, развитую при доказательстве теорем 2.3 и 2.4 из § 2.4, что при малых $a \rightarrow 0$ процесс прекращения скольжения происходит следующим образом.

Если $v(0) \neq 0$, $\omega_z(0) \neq 0$, то за время, близкое к t_1^* (классическое время прекращения скольжения), скорость скольжения v становится величиной, близкой к $a\omega_z(0)$, т. е. очень малой. При этом значение угловой скорости вращения ω_z изменится (уменьшится) мало. Затем процесс скольжения уже длится достаточно долго, однако с очень малым значением скорости проскальзывания, но с *конечным* значением силы трения сцепления (!). При этом величина момента сил трения (сопротивление вращению!) является малой! Отметим, что наличие «долгодействующей» силы трения сцепления при таком процессе малого (но долгого) проскальзывания частично обуславливает факт *сопротивления качению* шара (см. последнее уравнение системы (2.102)).

§ 2.8. Интегрирование уравнений движения диска по шероховатой плоскости

В настоящем параграфе изучается задача о движении однородного диска по горизонтальной плоскости под действием сил сухого (кулонова) трения [28]. Принят неравномерный радиально-симметричный закон распределения нормального давления по области диска (в отличие от задачи из § 2.4!). Уравнения движения удастся проинтегрировать в элементарных функциях, в результате чего получены точные формулы для пройденного диском пути и времени вплоть до остановки.

Уточним постановку задачи. Рассмотрим круглый диск радиуса R , движущийся по горизонтальной шероховатой плоскости. Предполагаем, что элементарная сила трения (действующая на малый элемент диска) подчиняется закону сухого трения Кулона, т. е. пропорциональна нормальному давлению в этом элементе, его площади и прямо противоположна его вектору скорости. Пусть давление распределено по закону [29]:

$$p(\rho) = \frac{p_0}{\sqrt{1 - (\rho/R)^2}}, \quad (2.103)$$

где $p_0 = G/(2\pi R^2)$ — давление в центре диска, ρ — расстояние малого элемента до центра площадки, G — вес диска, R — его радиус.

Такого рода задача изучалась в работе [30], где для изучения движения использовались аппроксимации Падэ, предложенные в работе В. Ф. Журавлева [21].

Пусть v — скорость центра масс диска, направленная по оси x , ω — его угловая скорость. Следуя работе [30], введем безразмерный параметр $k = v/u$, где $u = \omega R$. Запишем уравнения движения диска

(уравнения движения центра масс по оси x и уравнение моментов относительно центра масс):

$$m\dot{v} = -F_{\text{тр}}(k), \quad J\dot{\omega}/R = -M_{\text{тр}}(k), \quad (2.104)$$

где m — масса диска, J — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, $F_{\text{тр}}(k)$, $M_{\text{тр}}(k)$ — главный вектор и главный момент сил трения относительно центра масс. Отметим, что, в силу симметрии диска и распределения нормального давления, главный вектор сил трения направлен строго против вектора скорости центра масс диска, т.е. движение центра масс диска происходит по прямой линии (ось x). В работе [30] для закона (2.103) $F_{\text{тр}}(k)$ и $M_{\text{тр}}(k)$ удалось выразить в элементарных функциях. Приведем эти формулы:

$$F_{\text{тр}}(k) = fp_0R^2 \begin{cases} \pi^2 k/2, & k \in (0, 1), \\ \pi k \arcsin(1/k) + \pi\sqrt{k^2 - 1}/k, & k > 1, \end{cases} \quad (2.105)$$

$$M_{\text{тр}}(k) = fp_0R^3 \begin{cases} \frac{\pi^2}{4}(2 - k^2), & k \in (0, 1) \\ \frac{\pi}{2}(2 - k^2) \arcsin(1/k) + \frac{\pi}{2}\sqrt{k^2 - 1}, & k > 1, \end{cases} \quad (2.106)$$

где f — коэффициент трения.

За подробным выводом формул (2.105)–(2.106) мы отсылаем к работе [30].

Подставляя выражения (2.105)–(2.106) в (2.104), мы получим следующие уравнения движения диска:

$$\dot{v} = -ak, \quad \dot{\omega} = -a(2 - k^2), \quad k \in (0, 1), \quad (2.107)$$

$$\dot{v} = -\frac{2a}{\pi} \left(k\theta^* + \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k} \right), \quad \dot{\omega} = -\frac{2a}{\pi} \left[(2 - k^2)\theta^* + \sqrt{k^2 - 1} \right], \quad k > 1, \quad (2.108)$$

где $v = \dot{x}_c$, $u = \omega R$, $\omega = \dot{\varphi}$, φ — угол собственного поворота диска, $a = fg\pi/4$, $\theta^* = \arcsin(1/k)$, g — ускорение силы тяжести. Сформулируем результаты.

Теорема 2.8. Пусть $k_0 = k(0) = v(0)/[R \cdot \omega(0)] < 1$, тогда решение системы (2.107) дается соотношениями:

$$\frac{4a}{C}t = \ln \left(\frac{2\sqrt{\xi_0} + \sqrt{1+4\xi_0}}{2\sqrt{\xi} + \sqrt{1+4\xi}} \right) + 2(\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi}), \quad (2.109)$$

$$x_c(\xi) = \frac{C^2\sqrt{2}}{12a} \left[(1 + \sqrt{1+4\xi_0})^{3/2} - (1 + \sqrt{1+4\xi})^{3/2} \right], \quad (2.110)$$

$$C = \frac{R\omega(0)k_0^2}{\sqrt{1-k_0^2}}, \quad \xi_0 = \frac{1-k_0^2}{k_0^4}, \quad \xi = \frac{\omega^2 R^2}{C^2}, \quad a = \frac{fg\pi}{4}.$$

При этом функция $k(t) = v(t)/[R\omega(t)]$ монотонно возрастает от $k(0) = k_0$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки $t = t_1$, для которого из (2.109) следует формула:

$$t_{\text{ост}} = t_1 = \frac{R\omega_0}{2a} \left(1 + \frac{k_0^2}{\sqrt{1-k_0^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-k_0^2}}{k_0} \right). \quad (2.111)$$

Из (2.110) получается формула для пройденного центром диска пути:

$$L = x_c(t_1) = \frac{R^2\omega_0^2}{3a} \cdot \frac{k_0(1+k_0+k_0^2)}{1+k_0}. \quad (2.112)$$

Теорема 2.9. Пусть $k(0) = k_0 = v(0)/[R \cdot \omega(0)] > 1$, тогда решение уравнений (2.108) дается соотношениями:

$$\frac{2a}{C}t = \frac{1}{\gamma_0 - \sin \gamma_0} - \frac{1}{\gamma - \sin \gamma}, \quad (2.113)$$

$$x_c(\gamma) = \frac{\pi C^2}{a} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha}{(\alpha - \sin \alpha)^3}, \quad \gamma \in [\gamma_0, \pi), \quad (2.114)$$

$$C = R\omega(0) \frac{\gamma_0 - \sin \gamma_0}{\sin \gamma_0}, \quad \gamma_0 = 2 \arcsin(1/k_0), \quad \gamma = 2 \arcsin(1/k), \quad a = fg\pi/4.$$

При этом функция $k(t) = v(t)/[R \cdot \omega(t)]$ монотонно убывает от значения $k(0) = k_0 > 1$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки $t = t_1$, для которого из (2.113) (при $\gamma(t_1) = 2 \arcsin(1) = \pi$) следует формула:

$$t_{\text{ост}} = t_1 = \frac{R\omega_0 k_0^2}{2a\sqrt{k_0^2 - 1}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(1/k_0) + \frac{\sqrt{k_0^2 - 1}}{k_0^2} \right]. \quad (2.115)$$

Из (2.114) при $\gamma(t_1) = \pi$ получим формулу для пройденного центром диска пути:

$$L = x_c(t_1) = \frac{\pi C^2}{a} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha}{(\alpha - \sin \alpha)^3}. \quad (2.116)$$

Перед доказательством сформулированных теорем сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $k_0 \rightarrow 0$ (т.е. $v(0) \rightarrow 0$ и нет движения центра масс диска), то из (2.111) при $k_0 \rightarrow 0$ получим $t_{\text{ост}} \rightarrow R\omega_0/(2a)$. Эта формула может быть получена и непосредственно из второго уравнения системы (2.107) при $k = 0$. Из формулы (2.112) при $k_0 \rightarrow 0$ получим $L \rightarrow 0$ (что вполне понятно при $v = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $k_0 \rightarrow 1$ (при $k_0 \leq 1$), то $\xi_0 \rightarrow 0$ и из (2.111) получим $t_1 \rightarrow R\omega_0/a$, а из (2.112) получим $L \rightarrow L_1 = R^2\omega_0^2/(2a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $k_0 \rightarrow 0$ при фиксированной начальной скорости $v(0) = v_0$ (т.е. $\omega(0) \rightarrow 0$ и нет вращения), то из (2.115) получим:

$$t_{\text{ост}} \rightarrow \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \frac{v_0 k_0}{2a\sqrt{k_0^2 - 1}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{k_0}\right) + \frac{\sqrt{k_0^2 - 1}}{k_0^2} \right] = \frac{v_0}{fg}.$$

Эта формула может быть получена и непосредственно из первого уравнения системы (2.108) при $k \rightarrow \infty$, т.к. это уравнение при $k \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\dot{v} = -fg.$$

Кроме того, при $k_0 \rightarrow \infty$ имеем $\gamma_0 \rightarrow 0$. Записываем (2.116) в виде:

$$L = \frac{\pi v_0^2 (\gamma_0 - \sin \gamma_0)^2}{4a \cos^2(\gamma_0/2)} \cdot \int_{\gamma_0}^{\pi} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) d\alpha}{(\alpha - \sin \alpha)^3}. \quad (2.117)$$

Вычисляя в этом выражении предел при $\gamma_0 \rightarrow 0$ (например, по правилу Лопиталя), получим: $L \rightarrow L_2 = v_0^2/(2fg)$. Это выражение может быть также получено из уравнения $\dot{v} = -fg$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $k_0 \rightarrow 1$ (при $k_0 \geq 1$), то $\gamma_0 \rightarrow \pi$. Вычисляя в (2.115) предел при $k_0 \rightarrow 1$, получим $t_{\text{ост}} \rightarrow R\omega_0/a$, а из (2.117), вычисляя предел при $\gamma_0 \rightarrow \pi$ по правилу Лопиталя, получим:

$$L \rightarrow L_1 = v_0^2/(2a) = R^2\omega_0^2/(2a),$$

что согласуется с результатом, полученным в Замечании 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Пусть $k_0 \in (0, 1)$. Интегрирование системы (2.107) сводится к интегрированию однородного уравнения:

$$\frac{dv}{du} = u \frac{dk}{du} + k = \frac{k}{2 - k^2}.$$

Отсюда получаем интеграл:

$$\frac{uk^2}{\sqrt{1 - k^2}} = C = \text{const}, \quad C = \frac{R\omega_0 k_0^2}{\sqrt{1 - k_0^2}}. \quad (2.118)$$

Из (2.118) получим:

$$k^2 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\xi}}, \quad \xi = u^2/C^2. \quad (2.119)$$

Из уравнений (2.107) и (2.119) следует, что при $k_0 < 1$ функция $u(t)$ монотонно уменьшается, $k(t)$ монотонно увеличивается от значения k_0 до значения $k(t_1) = 1$ при $u(t_1) = 0$, т.е. в момент остановки. Используя (2.119), второе уравнение системы (2.107) запишем в виде:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\xi(1 + 4\xi)}} + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right) d\xi = -\frac{4a}{C} dt. \quad (2.120)$$

Интеграл уравнения (2.120) имеет вид (2.109). Далее, используя (2.118), (2.119), получим:

$$v = ku = C \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} = C \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} = C \sqrt{\frac{2\xi}{1 + \sqrt{1 + 4\xi}}} = \frac{dx_c}{dt}.$$

Отсюда, с использованием уравнения (2.120), имеем:

$$dx_c = v \cdot dt = -\frac{C^2 \sqrt{2}}{4a} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\xi}}{1 + 4\xi}} d\xi.$$

Интегрируя последнее выражение, приходим к формуле (2.110). ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Пусть $k_0 > 1$. Тогда интегрирование системы (2.108) сводится к интегрированию однородного уравнения:

$$\frac{dv}{du} = u \frac{dk}{du} + k = \frac{k \cdot \arcsin(1/k) + \sqrt{k^2 - 1}/k}{(2 - k^2) \arcsin(1/k) + \sqrt{k^2 - 1}}.$$

Вводя новую переменную $\beta = \arcsin(1/k)$, $\beta \in (0, \pi/2)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$u \frac{d\beta}{du} = \frac{\beta \cos \beta \sin \beta - \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{\beta \cos 2\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta}.$$

А вводя переменную $\gamma = 2\beta$, получим:

$$\frac{du}{u} = \frac{(\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) d\gamma}{(\gamma - \sin \gamma) \sin \gamma}, \quad \gamma \in (0, \pi),$$

интеграл которого имеет вид:

$$u = \frac{C \sin \gamma}{\gamma - \sin \gamma}, \quad C = \frac{u_0(\gamma_0 - \sin \gamma_0)}{\sin \gamma_0} = \text{const.} \quad (2.121)$$

Второе уравнение системы (2.108) в новых обозначениях имеет вид:

$$\dot{u} = -\frac{2a}{\pi} \frac{\sin \gamma - \gamma \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}.$$

Используя интеграл (2.121), отсюда получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{(1 - \cos \gamma) d\gamma}{(\gamma - \sin \gamma)^2} = \frac{2a}{C} dt. \quad (2.122)$$

Из уравнения (2.122) следует, что $\gamma(t) = 2 \arcsin(1/k)$ монотонно увеличивается с течением времени от значения $\gamma(0) = \gamma_0$ вплоть до значения $\gamma(t_1) = \pi$ при $u(t_1) = 0$, т. е. в момент остановки (см. формулу (2.121)). Следовательно, функция $k(t) = 1/(\sin \gamma/2)$ монотонно уменьшается от значения $k(0) = k_0$ вплоть до значения $k(t_1) = 1$ в момент остановки. Интегрируя (2.122), приходим к соотношению (2.113). Формула (2.114) получается аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. ■

ГЛАВА 3

Движение твердого тела по шероховатой плоскости

§ 3.1. О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой

Изучается задача о безотрывном движении (качении) плоской пластинки, ограниченной произвольным выпуклым контуром, по прямой при наличии сухого трения [37, 60]. К пластинке приложена произвольная плоская система сил, а связь в точке ее контакта с прямой предполагается односторонней. Дана полная классификация переходов движений со скольжением в движения чистого качения и, наоборот, при безотрывном движении пластинки. Получены достаточные условия безотрывного движения тела. Полученные результаты применяются для задачи о движении неоднородного круглого диска по горизонтальной шероховатой прямой в вертикальной плоскости в поле силы тяжести, а также для движения эллиптической пластинки.

Постановка задачи

Рассматривается задача о движении плоской пластинки по шероховатой прямой под действием произвольной плоской системы сил. Пластика ограничена выпуклым контуром, который описывается достаточно гладкой функцией (см. рис. 3.1). Связь в точке контакта

P пластинки с прямой предполагается односторонней (неудерживающей), а сила реакции в точке P подчиняется условиям закона сухого трения, т. е. закону Кулона:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -fN \cdot \mathbf{v}_P / |\mathbf{v}_P| && \text{при } v_P \neq 0, \\ |\mathbf{F}| &\leq fN && \text{при } v_P = 0, \\ N &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где \mathbf{v}_P — скорость точки контакта P вдоль оси O_*x , т. е. вдоль опорной прямой, N — нормальная сила реакции, направленная параллельно оси O_*y , \mathbf{F} — касательная сила реакции (сила трения), направленная вдоль оси O_*x , f — коэффициент трения (покоя и скольжения, которые мы предполагаем одинаковыми) (рис. 3.1). Отметим, что при $v_P = 0$ направление и величина касательной силы \mathbf{F} являются, вообще говоря, неопределенными и только выполняется неравенство из (3.1).

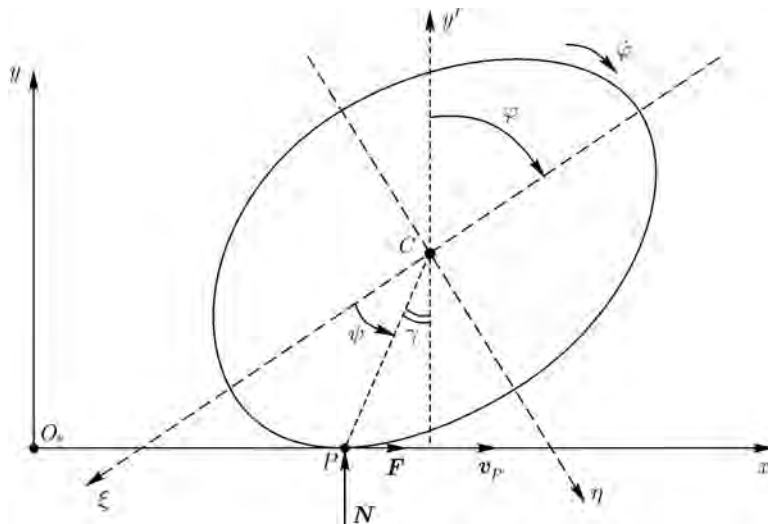


Рис. 3.1. Качение пластинки по шероховатой прямой: O_*xy — неподвижная система координат; C — центр масс; P — точка контакта; $C\xi\eta$ — система координат, жестко связанная с пластинкой; \mathbf{v}_P — скорость точки контакта P ; \mathbf{F} — касательная сила реакции; N — нормальная сила реакции

В данной работе изучаются *безотрывные* движения пластинки,

для которых соблюдается неравенство $N \geq 0$ из (3.1). Устанавливаются условия, при которых безотрывное движение пластинки является однозначно определенным без парадоксальных ситуаций, описанных Пэнлеве [1]. Даны достаточные условия, при которых движение пластинки является безотрывным в течение *всего* интервала времени этого движения. Отметим, что описанная задача рассматривалась ранее в работе Е. А. Болотова [39] с геометрической точки зрения, поэтому полученные в этой работе результаты являются не совсем конструктивными и неудобными для практического применения.

Уравнения движения

На рис. 3.1 изображен контур (пластинка), который катится вдоль неподвижной прямой O_*x . O_*xy — неподвижная прямоугольная система координат, C — центр масс пластинки, $C\xi\eta$ — прямоугольная система координат, жестко связанная с пластинкой, P — точка касания контура с прямой O_*x , φ — угол собственного поворота пластинки, т. е. это угол, образуемый осью $C\xi$ с осью O_*y и отсчитываемый по часовой стрелке (см. рис. 3.1). Введем в системе $C\xi\eta$ полярные координаты r, ψ , тогда уравнение контура будет представляться известной функцией $r = r(\psi)$ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$), относительно которой (помимо выпуклости) будем предполагать достаточную гладкость (например, это может быть эллипс, причем C не обязательно есть его центр). Пусть r, ψ — текущие полярные координаты точки P контура пластинки, которая в данный момент касается опорной прямой, x, y — координаты центра масс C пластинки в системе координат O_*xy . То-

гда для скорости точки P имеем выражения:

$$v_{Px} = \dot{x} - r\dot{\varphi} \cos \gamma, \quad v_{Py} = \dot{y} + r\dot{\varphi} \sin \gamma, \quad \gamma = \varphi - \psi. \quad (3.2)$$

Если пластинка движется по O_*x с проскальзыванием, то

$$v_{Px} = v \neq 0, \quad v_{Py} = 0. \quad (3.3)$$

Если происходит чистое качение, то

$$v_{Px} = v = 0, \quad v_{Py} = 0. \quad (3.4)$$

Пусть $v \neq 0$. Из условия $v_{Py} = 0$ имеем связь:

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \gamma.$$

Тогда из (3.2) и (3.3) имеем

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \gamma + r'_\psi \frac{d\psi}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{d\psi}{d\varphi}\right) \sin \gamma + \dot{v}, \quad (3.5)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \gamma - r'_\psi \frac{d\psi}{d\varphi} \dot{\varphi}^2 \sin \gamma - r\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{d\psi}{d\varphi}\right) \cos \gamma. \quad (3.6)$$

Так как ось O_*x — касательная к контуру, то в системе $C\xi\eta$ имеем

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{ctg} \varphi.$$

Используя полярные координаты r и ψ , отсюда получим

$$\frac{r'_\psi \sin \psi + r \cos \psi}{r'_\psi \cos \psi - r \sin \psi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Решая это уравнение относительно r'_ψ , получаем равенство

$$r'_\psi = -r \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad (3.7)$$

Отметим, что равенство (3.7) справедливо при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$, кроме того, $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, так как контур является выпуклым,

т. е. он весь лежит по одну сторону от касательной. Используя (3.7), мы получаем из (3.5) и (3.6):

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v}, \quad (3.8)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + r\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{\cos \gamma} \frac{d\psi}{d\varphi} - \cos \gamma \right). \quad (3.9)$$

Далее, по определению кривизны k плоской кривой имеем $k = d\alpha/ds$, где α — угол, образуемый касательной O_*x с положительным направлением оси $C\xi$, s — длина дуги кривой. Тогда имеем для радиуса кривизны R контура в точке P :

$$R = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}{d\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = \frac{d\psi}{d\varphi} \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Отсюда, используя (3.7), получим

$$R = \frac{r}{\cos \gamma} \frac{d\psi}{d\varphi}. \quad (3.10)$$

В формуле (3.10) знак модуля можно не использовать, так как $\cos \gamma > 0$ при $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, а ψ и φ мы предполагаем монотонно возрастающими функциями времени. Используя равенство (3.10), мы получим из (3.8), (3.9):

$$\ddot{x} = r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v}, \quad (3.11)$$

$$\ddot{y} = -r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2 (R - r \cos \gamma).$$

Пусть X , Y — главный вектор плоской системы сил, приложенных к пластинке, M — главный момент этих сил относительно центра масс C (кроме сил F и N). Тогда, предполагая массу пластинки $m = 1$, ρ — радиус ее инерции относительно точки C , мы получим следующие

уравнения движения:

$$\begin{aligned}
r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma + \dot{v} &= F + X, \\
-r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) &= N + Y, \\
\rho^2 \ddot{\varphi} &= r(N \sin \gamma - F \cos \gamma) + M, \\
N &\geq 0, \quad F = -fN \cdot \operatorname{sgn} v.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Отметим, что $v > 0$, если пластинка проскальзывает по оси O_*x , $v < 0$, если она проскальзывает против оси O_*x .

Разрешая уравнения (3.12) относительно величин $\ddot{\varphi}$, N , \dot{v} , мы получим:

$$\ddot{\varphi} = \frac{rh}{W}U + \frac{M}{\rho^2}, \tag{3.13}$$

$$N = \frac{\rho^2 U}{W}, \tag{3.14}$$

$$\dot{v} = \frac{1}{W}(\dot{\varphi}^2 A + B), \tag{3.15}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
h &= \sin \gamma + f\varepsilon \cos \gamma, \quad W = \rho^2 + r^2 h \sin \gamma, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} v, \\
U &= \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) - Y - \frac{r \sin \gamma}{\rho^2}M, \\
A &= -f\varepsilon \rho^2(R - r \cos \gamma) - r^2 R h \cos \gamma + r \rho^2 \sin \gamma + r^3 h, \\
B &= Y(f\varepsilon \rho^2 + r^2 h \cos \gamma) + X \cdot W + Mr(f\varepsilon \sin \gamma - \cos \gamma).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Уравнения движения в случае чистого качения (без проскальзывания) получаются из (3.12) при $\dot{v} = 0$ и другого соотношения для силы F :

$$\begin{aligned}
r\ddot{\varphi} \cos \gamma - r\dot{\varphi}^2 \sin \gamma &= F + X, \\
-r\ddot{\varphi} \sin \gamma + \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) &= N + Y, \\
\rho^2 \ddot{\varphi} &= r(N \sin \gamma - F \cos \gamma) + M, \\
N &\geq 0, \quad |F/N| \leq f.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Разрешая уравнения (3.17) относительно $\ddot{\varphi}$, F , N , мы получаем соотношения:

$$\ddot{\varphi} = d \cdot [\dot{\varphi}^2 r R \sin \gamma + r(X \cos \gamma - Y \sin \gamma) + M], \quad (3.18)$$

$$N = d \cdot \{ \dot{\varphi}^2 [(r^2 + \rho^2)(R - r \cos \gamma) - R r^2 \sin^2 \gamma] - \\ - Y(\rho^2 + r^2 \cos^2 \gamma) - X r^2 \sin \gamma \cos \gamma - M r \sin \gamma \}, \quad (3.19)$$

$$F = d \cdot \{ \dot{\varphi}^2 \sin \gamma [r^2 R \cos \gamma - r(r^2 + \rho^2)] - \\ - Y r^2 \sin \gamma \cos \gamma - X(\rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma) + M r \cos \gamma \}, \quad (3.20)$$

где $d = 1/(\rho^2 + r^2)$.

Таким образом, движение пластинки описывается системой уравнений (3.12) или (3.17), в зависимости от функции $v(t)$ — скорости точки касания P . Решения системы (3.12) при $v > 0$ будем называть движениями 1-го рода, а соответствующим величинам $\ddot{\varphi}$, N и \dot{v} из (3.13)–(3.15) приписывать индекс 1, решения системы (3.12) при $v < 0$ будем называть движениями 2-го рода и присваивать величинам $\ddot{\varphi}$, N , \dot{v} из (3.13)–(3.15) индекс 2, а решения системы (3.17) — это движения 3-го рода, причем будем присваивать соответствующим величинам $\ddot{\varphi}$, N , F из (3.18)–(3.20) индекс 3.

Так как мы рассматриваем лишь безотрывные движения пластинки, то в движениях 1, 2 и 3 родов мы полагаем выполненными неравенства $N_1 \geq 0$, $N_2 \geq 0$ или $N_3 \geq 0$. Кроме того, так как связь неудерживающая, то необходимо корректно определить начальные условия. Пусть t — какой-либо момент безотрывного движения пластинки (в частности, это может быть и начальный).

Определение. Состояние $\{\varphi(t), \dot{\varphi}(t), v(t)\}$ безотрывного движения пластинки называется *корректным*, если оно является результатом

решения системы (3.12) или системы (3.17) (при $v(t) = 0$) на интервале $(t - \delta, t)$, где $\delta > 0$ — достаточно малó.

Таким образом, начальное условие $\{\varphi(0), \dot{\varphi}(0), v(0)\}$ или любое текущее состояние $\{\varphi(t), \dot{\varphi}(t), v(t)\}$ для *безотрывного* движения пластинки мы называем *корректным*, если имеется *предыстория* этого состояния (начального условия) в виде *безотрывного* движения пластинки (со скольжением или без). В противном случае, вообще говоря, реализуется «заход» на связь и движение пластинки должно описываться с привлечением дополнительных уравнений движения (без связи) и элементов теории удара с трением. Такие задачи рассматриваются в работах А. П. Иванова [40, 41].

Формулировка результатов

Пусть в некоторый момент времени $t = t_*$ реализовалось корректное (в смысле определения предыдущего пункта) состояние безотрывного движения пластинки. Сформулируем утверждения, касающиеся движения пластинки при $t > t_*$. Везде далее используем обозначения:

$$U = \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) - Y - \frac{1}{\rho^2} Mr \sin \gamma,$$

$$W_0 = \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma - r^2 f |\mu|, \quad \mu = \sin \gamma \cos \gamma,$$

где все переменные величины рассматриваются при $t = t_*$.

Теорема 3.1. Пусть $U \neq 0$. Тогда справедливы утверждения, приведенные в таблице 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из таблицы 3.1, при соблюдении условия $U > 0$ в течение всего времени движения пластинки это движение является *однозначным* и *безотрывным*. При $U < 0$ однозначность сохраняется, однако возможны отрывы пластинки от опорной прямой (см. строчки (6) и (7)). Таблица 3.1 дает полную и однозначную классификацию

Таблица 3.1. К формулировке теоремы 3.1

$U > 0$	$v = 0$			при $t > t_*$ движение 1, 2 или 3 рода, причем только одно	(1)
	$v \neq 0$	$W_0 > 0$		при $t > t_*$ движение 1 или 2 рода, причем только одно	(2)
		$W_0 \leq 0$	$\mu > 0$	1) $v > 0$, тогда при $t > t_*$ движение 1 рода; 2) $v < 0$ — некорректное состояние	(3)
			$\mu < 0$	1) $v > 0$ — некорректное состояние; 2) $v < 0$, тогда при $t > t_*$ движение 2 рода	(4)
$U < 0$	$v = 0$	$W_0 \geq 0$		некорректное состояние	(5)
		$W_0 < 0$	$\mu > 0$	1) из движения 2 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_2(t_*) > 0$ при $t > t_*$ будет <i>отрыв</i> ; 2) из движения 2 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_2(t_*) = 0$ при $t > t_*$ будет движение 1 или 3 рода и только одно; 3) из движения 3 рода при $t \leq t_*$ будет при $t > t_*$ движение 2 или 3 рода и только одно	(6)
			$\mu < 0$	1) из движения 1 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_1(t_*) < 0$ при $t > t_*$ будет <i>отрыв</i> ; 2) из движения 1 рода при $t \leq t_*$ и $\dot{v}_1 = 0$ при $t > t_*$ будет движение 2 или 3 рода и только одно; 3) из движения 3 рода при $t \leq t_*$ будет при $t > t_*$ движение 1 или 3 рода и только одно	(7)
	$v \neq 0$	$W_0 \geq 0$		некорректное состояние	(8)
		$W_0 < 0$	$\mu > 0$	1) $v > 0$ — некорректное состояние; 2) $v < 0$ — при $t \geq t_*$ будет движение 2 рода	(9)
			$\mu < 0$	1) $v > 0$ — при $t \geq t_*$ будет движение 1 рода; 2) $v < 0$ — некорректное состояние	(10)

переходов движений 1, 2 и 3 рода друг в друга при $U \neq 0$. Причем в некоторых случаях (строчки (1), (6), (7)) переход в тот или иной род движения зависит от поведения функции $\dot{v}(t)$ в окрестности нуля. Этот факт был также указан Е. А. Болотовым [39]. Подробнее об этих случаях будет сказано при доказательстве теоремы 3.1.

Следующее утверждение касается классификации переходов движений 1, 2, 3 родов друг в друга в особом случае, когда $U(t_*) = 0$. Здесь все определяется поведением функции $U(t)$ в окрестности точки $t = t_*$, точнее, первой ее ненулевой производной (см. рис. 3.2). Отметим, что производные функции $U(t)$ вычисляются в силу движений при $t \leq t_*$, т. е. уравнений (3.12) или (3.17), которые определяют предысторию рассматриваемого состояния.

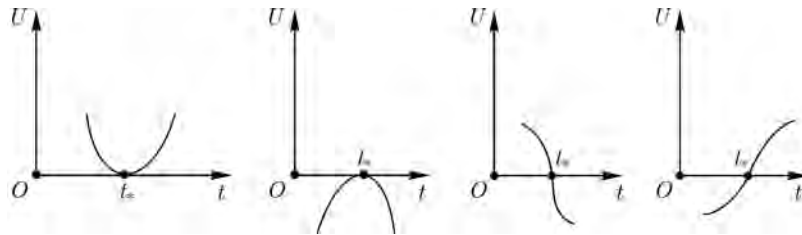


Рис. 3.2. Различные случаи поведения функции $U(t)$ в окрестности точки $t = t_*$, для которой $U(t_*) = 0$

Теорема 3.2. Пусть $U = 0$. Тогда справедливы утверждения, приведенные в таблице 3.2.

Доказательства теорем 3.1, 3.2 приведены в п. 3.4.

Некоторые частные случаи

В данном пункте рассматриваются приложения полученных результатов для движения неоднородного круглого диска и тонкого стержня.

Таблица 3.2. К формулировке теоремы 3.2

$U = 0$	$v = 0$	<p>а) $U^{(2k)}(t_*) > 0$, аналогично строке (1) таблицы 3.1;</p> <p>б) $U^{(2k)}(t_*) < 0$, аналогично строкам (5), (6), (7) таблицы 3.1;</p> <p>в) $U^{(2k-1)}(t_*) < 0$: если $W_0 > 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>если $W_0 > 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет движение 2 рода;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет движение 1 рода;</p> <p>г) $U^{(2k-1)}(t_*) > 0$: если $W_0 > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 2 рода будет движение 1 рода;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 1 рода будет движение 2 рода;</p>
$U = 0$	$v \neq 0$	<p>а) $U^{(2k)}(t_*) > 0$, аналогично строкам (2), (3), (4) таблицы 3.1;</p> <p>б) $U^{(2k)}(t_*) < 0$, аналогично строкам (8), (9), (10) таблицы 3.1;</p> <p>в) $U^{(2k-1)}(t_*) < 0$: если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i> при $v > 0$, если $v < 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i> при $v < 0$, если $v > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 > 0$, то из движения 1 или 2 рода будет <i>отрыв</i>;</p> <p>г) $U^{(2k-1)}(t_*) > 0$: если $W_0 > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu > 0$, то из движения 2 рода будет <i>отрыв</i> при $v < 0$, если $v > 0$, то состояние <i>некорректно</i>;</p> <p>если $W_0 < 0, \mu < 0$, то из движения 1 рода будет <i>отрыв</i> при $v > 0$, если $v < 0$, то состояние <i>некорректно</i>.</p>

а) Неоднородный диск в поле силы тяжести

Схема представлена на рис. 3.3. В данном случае имеем: $X = 0$, $Y = -g$, $M = 0$, $r \sin \gamma = a \sin \varphi$, $r \cos \gamma = R + a \cos \varphi$, где $a = OC$, R — радиус диска, который является его радиусом кривизны. Подставляя эти величины в выражение для U из (3.16), получим $U = g - a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$. Достаточное условие безотрывного движения диска: $U > 0$.

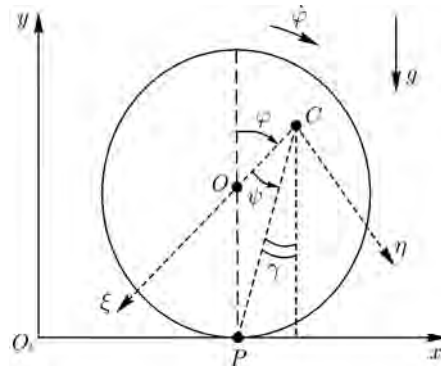


Рис. 3.3. Качение неоднородного диска по шероховатой горизонтальной прямой в поле силы тяжести

Справедливо утверждение.

Теорема 3.3. Пусть начальные условия для диска выбраны корректно (см. определение п. § 3.1) и удовлетворяют условию:

$$\frac{T_0}{ga} + \cos \varphi_0 < 1 + \frac{\rho^2}{2a^2}, \quad (3.21)$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 [a^2 \sin^2 \varphi_0 + \rho^2 + (R + a \cos \varphi_0)^2] + \dot{\varphi}_0 v_0 (R + a \cos \varphi_0) + \frac{1}{2} v_0^2.$$

Тогда $U > 0$ для всех t и движение диска является безотрывным в течение всего времени, пока оно происходит.

Доказательство теоремы 3.3 приведено в п. 3.4.

Следствие. Рассмотрим движение по шероховатой прямой тонкого однородного обруча массы M с жестко укрепленной на нем ма-

териальной точкой массы m из состояния неустойчивого положения равновесия ($\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $v(0) = v_0 = 0$). Тогда $T_0 = 0$ и неравенство (3.21) соблюдается. Это означает, что при любом *конечном* коэффициенте трения f движение обруча будет безотрывным. Если $f = \infty$, т.е. обруч движется без проскальзывания, то можно показать [42], что при $m/M > 13$ всегда существует такое $\varphi = \varphi_* \in [0, \pi)$, что $N(\varphi_*) = 0$. В [41] показано, что оторваться от опорной прямой при $\varphi \geq \varphi_*$ обруч не может (это противоречит законам кинематики твердого тела). Значит, он должен двигаться с проскальзыванием, что противоречит предположению $f = \infty$. Это говорит о нереалистичности модели абсолютно шероховатой опоры.

Пусть $f < \infty$, но обруч невесом, т.е. $M \rightarrow 0$. Тогда $a \rightarrow R$, $\rho \rightarrow 0$ и условие (3.21) выполнено при любом $\varphi_0 \neq 0$. В этом случае теорема 3.3 гарантирует *безотрывное* движение обруча, независимо от того, движется он с проскальзыванием или без. Это и есть ответ на вопрос, который был поставлен Литлвудом в его книге [43].

б) Движение стержня в поле силы тяжести

Схема представлена на рис. 3.4. Стержень тонкий и опирается своим закругленным основанием, для которого радиус кривизны $R \approx 0$. Кроме того, имеем $r \approx l$, $\psi \approx 0$, $\gamma \approx \varphi$. Здесь также $X = 0$, $M = 0$, $Y = -g$. Подставляя эти величины в выражение для U из (3.16), получим:

$$U = g - \dot{\varphi}^2 l \cos \varphi.$$

Достаточное условие безотрывного движения стержня: $U > 0$.

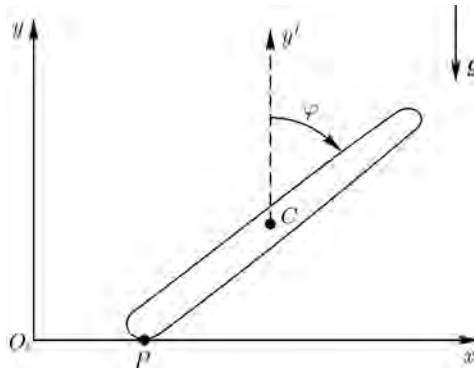


Рис. 3.4. Падение стержня в поле силы тяжести: $PC = l$, $R \approx 0$, $r \approx l$, $\psi \approx 0$, $\gamma \approx \varphi$

Справедливо утверждение.

Теорема 3.4. Пусть начальные условия для стержня выбраны корректно (см. определение § 3.1) и удовлетворяют условию:

$$2T_0 l \cos \varphi_0 < g[\rho^2 + l^2 \sin^2 \varphi_0], \quad (3.22)$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}_0^2 + \frac{1}{2}[(v_0 + l\dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0)^2 + (l\dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0)^2].$$

Тогда $U > 0$ для всех t , а движение стержня является безотрывным в течение всего времени, пока оно происходит.

Доказательство теоремы 3.4 приведено в п. 3.4.

Пусть движение стержня начинается из состояния верхнего (неустойчивого) положения равновесия $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $v(0) = v_0 = 0$. Тогда $T_0 = 0$ и условие (3.22) выполнено, т. е. движение стержня является безотрывным вплоть до момента его падения на опорную прямую.

в) Движение однородного эллипса по горизонтальной шероховатой прямой в поле силы тяжести

Схема движения представлена на рис. 3.1, где C — центр эллипса и его центр масс. В данном случае $X = 0$, $Y = -g$, $M = 0$. Пусть уравнение эллипса в системе координат $C\xi\eta$ есть:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

где a, b — полуоси эллипса, причем $a > b$. Тогда имеем следующее соотношение:

$$(CP)^2 = r^2(\psi) = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi} = \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \quad (3.23)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \psi, \quad y_C = r \cos \gamma = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

где y_C — вертикальная ордината центра масс C . Подробный вывод соотношения (3.23) приведен в книге [44].

1°. Рассмотрим сначала случай качения эллипса без проскальзывания, т. е. горизонтальная опора абсолютно шероховатая (коэффициент трения $f = \infty$). Учитывая, что радиус инерции эллипса $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}/2$, получим следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} v_C^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \right).$$

Потенциальная энергия эллипса есть:

$$\Pi = g y_C = g \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Так как проскальзывание отсутствует, то справедлив интеграл энергии:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \right) + g \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = h = \text{const}, \quad (3.24)$$

который дает нам зависимость $\dot{\varphi}(\varphi)$.

Область возможных движений определяется неравенством:

$$h - g \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} > 0. \quad (3.25)$$

Кроме того, в этой области необходимо проверять положительность нормальной реакции:

$$N(\varphi) \geq 0. \quad (3.26)$$

Наличие неравенства (3.26) может сужать область возможных движений, даваемую неравенством (3.25). Покажем это на конкретном примере, который взят нами из [45]. Приведем формулировку этой задачи [45, задача 7.47, стр. 64]: «однородная эллиптическая пластина с полуосями a и b ($a > b$) может катиться в вертикальной плоскости без проскальзывания по горизонтальной прямой. В начальный момент большая полуось горизонтальна. Какую угловую скорость ω_0 нужно сообщить пластине в начальном положении, чтобы в момент, когда большая полуось образует с горизонтом угол $\pi/4$, угловая скорость пластины равнялась $\omega_0/2$?»

Для начальных условий приведенного примера мы имеем:

$$h = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{4} + b^2 \right) + gb, \quad \varphi(0) = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

Из формулы (3.24) мы получим:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{k(\varphi)} \left[\frac{\omega_0^2}{4} (a^2 + 5b^2) - 2g \left(\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} - b \right) \right], \quad (3.27)$$

где $k(\varphi) = \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \rho^2 + r^2$.

Используя формулу (3.19), подсчитываем нормальную реакцию $N(\varphi)$:

$$N(\varphi) = \frac{1}{\rho^2 + r^2} \left\{ \dot{\varphi}^2 [(r^2 + \rho^2)(R - r \cos \gamma) - Rr \sin^2 \gamma] + g(\rho^2 + r^2 \cos^2 \gamma) \right\}, \quad (3.28)$$

где $\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ — радиус инерции пластины, $R = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$ — радиус кривизны эллипса. Кроме того, имеем из (3.23) соотношения:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \gamma &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \\ r^2 \sin^2 \gamma &= \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (a^2 - b^2)^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

$$R - r \cos \gamma = \frac{a^2 b^2 - (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Подставляя полученные выражения и $\dot{\varphi}^2(\varphi)$ из (3.27) в (3.28), мы получим функцию $N(\varphi)$. Ввиду громоздкости получающихся формул приведем подсчет $N(\varphi_1)$ для условий приведенного примера. Имеем $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/4 = \pi/2 + \pi/4$, $\dot{\varphi}(\varphi_1) = \omega_2/2$. Подставляя эти значения в (3.27), мы получим следующее соотношение для ω_0 :

$$\frac{\omega_0^2}{4} = \frac{4(a^2 + b^2)}{5a^4 + 5b^4 + 2a^2b^2} \left[\omega_0^2(a^2 + 5b^2) - 4g \left(\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2b \right) \right].$$

Решая последнее уравнение относительно ω_0^2 , получаем:

$$\omega_0^2 = \frac{16g(a^2 + b^2) \left(\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2b \right)}{-a^4 + 15b^4 + 22a^2b^2}. \quad (3.29)$$

Этот же ответ приведен в сборнике [45].

Так как $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2b > 0$ при $a > b$, то формула (3.29) справедлива при соблюдении неравенства:

$$-a^4 + 15b^4 + 22a^2b^2 > 0, \quad (3.30)$$

которое эквивалентно неравенствам:

$$b^2 < a^2 < b^2(11 + \sqrt{136}). \quad (3.31)$$

Теперь посмотрим, что нам дает неравенство $N(\varphi_1) > 0$. Используя формулу (3.28) при $\varphi_1 = \pi/2 + \pi/4$, мы получим:

$$k(\varphi_1) \cdot N(\varphi_1) = -\frac{5\sqrt{2}}{8} \dot{\varphi}^2(\varphi_1) \frac{(a^2 - b^2)^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{3}{4} g(a^2 + b^2).$$

Отсюда мы видим, что неравенство $N(\varphi_1) > 0$ эквивалентно неравенству:

$$\frac{\omega_0^2}{4} = \dot{\varphi}^2(\varphi_1) < \frac{3\sqrt{2}g(a^2 + b^2)^{3/2}}{5(a^2 - b^2)^2}. \quad (3.32)$$

Используя формулу (3.29), получим неравенство:

$$\frac{4 \left(\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2b \right)}{-a^4 + 15b^4 + 22a^2b^2} < \frac{3\sqrt{2}(a^2 + b^2)^{1/2}}{5(a^2 - b^2)^2}. \quad (3.33)$$

Неравенства (3.31) и (3.33) определяют область возможных параметров a, b , при которых справедлив ответ (3.29). Ясно, что при $a \rightarrow b$ (круглая пластина) неравенство (3.33) выполнено заведомо. Однако при $a \rightarrow b\sqrt{11 + \sqrt{136}} \approx 4,6b$ неравенство (3.33) будет нарушаться, т.е. наверняка во время движения произойдет обнуление нормальной реакции, что неизбежно должно привести к проскальзыванию пластинки. Таким образом, если пластина имеет форму «вытянутого» эллипса ($a \approx 4,6b$), то сформулированная в сборнике [45] задача не имеет решения в предположении качения без проскальзывания.

2°. Рассмотрим теперь движение эллипса по горизонтальной прямой с *конечным* коэффициентом трения ($f < \infty$). Здесь качение эллипса может происходить с проскальзыванием точки контакта. Покажем, как, используя результаты теоремы 1 из п. III, получить достаточные условия безотрывного движения тела. В соответствии с этой теоремой, для безотрывного движения достаточно соблюдения неравенства

$$U = \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) + g > 0,$$

которое, с учетом (3.29), имеет вид:

$$\dot{\varphi}^2 \cdot \frac{a^2b^2 - u^4}{u^3} + g > 0, \quad (3.34)$$

где $u = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. Ясно, что $u \in [b, a]$ и при $b \leq u \leq \sqrt{ab}$ неравенство (3.34) выполнено. Таким образом, неравенство (3.34) эквивалентно неравенству:

$$\dot{\varphi}^2 < \frac{gu^3}{u^4 - a^2b^2}, \quad \sqrt{ab} < u < a. \quad (3.35)$$

Используя теорему об изменении кинетической энергии, имеем:

$$T(\varphi) - T(0) = A_{\text{тр}} + g \cdot y_C(0) - g \cdot y_C(\varphi), \quad (3.36)$$

где $A_{\text{тр}}$ — работа сил трения, причем $A_{\text{тр}} < 0$, T — кинетическая энергия эллипса, y_C — ордината его центра масс. Далее имеем:

$$T(\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}V_{Cx}^2 + \frac{1}{2}V_{Cy}^2 > \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}V_{Cy}^2 = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}r^2\sin^2\gamma\dot{\varphi}^2. \quad (3.37)$$

Здесь использован тот факт, что в безотрывном движении $\dot{y}_C = -r\dot{\varphi}\sin\gamma$.

Таким образом, из (3.36) и (3.37) имеем неравенство:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2}(\rho^2 + r^2\sin^2\gamma) < T(0) + gy_C(0) - gr\cos\gamma.$$

Обозначая $h_0 = T(0) + gy_C(0)$ и используя (3.29), отсюда получаем неравенство:

$$\dot{\varphi}^2 < \frac{2(h_0 - gu)}{\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{(u^2 - b^2)(a^2 - u^2)}{u^2}} = \frac{8u^2(h_0 - gu)}{5(a^2 + b^2)u^2 - u^4 - a^2b^2}. \quad (3.38)$$

Ясно, что условие безотрывности (3.35) будет выполнено, если правая часть неравенства (3.38) будет меньше правой части неравенства (3.35), т. е. будет соблюдено неравенство:

$$h_0 < gu \frac{5(a^2 + b^2)u^2 + 7u^4 - 9a^2b^2}{8(u^4 - a^2b^2)} \quad \text{при } u \in [\sqrt{ab}, a]. \quad (3.39)$$

Обозначим

$$\psi(u) = \frac{u[5(a^2 + b^2)u^2 + 7u^4 - 9a^2b^2]}{8(u^4 - a^2b^2)}$$

и будем искать $\min \psi$ в интервале $u \in [\sqrt{ab}, a]$. Нетрудно показать, вычисляя $\psi'(u)$, что при $a^2 > b^2 > \frac{2}{5}a^2$ эта функция является монотонно убывающей, т. е.:

$$\min \psi(u) = \psi(a) = \frac{a(3a^2 - b^2)}{2(a - b)(a + b)}.$$

Таким образом, для не очень вытянутых эллипсов $(a > b > \sqrt{\frac{2}{5}}a)$, неравенство (3.39) (т.е. достаточное условие безотрывности) имеет вид:

$$h_0 = T_0 + gy_C(0) < g \cdot \frac{a(3a^2 - b^2)}{2(a - b)(a + b)}. \quad (3.40)$$

Пусть эллипс представляет собой очень мало деформированную окружность, т.е. предположим, что $a - b = \varepsilon \ll a \approx r_0$. Тогда (3.40) имеет вид:

$$T_0 + gy_C(0) < gr_0^2 \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Если в начальный момент было движение без проскальзывания, то:

$$T_0 = \frac{\omega_0^2}{2} \left(\frac{r_0^2}{2} + r_0^2 \right), \quad y_C(0) \approx r_0.$$

Тогда получим неравенство:

$$\omega_0^2 < \frac{g}{2\varepsilon} \cdot \frac{4}{3} - \frac{g}{r_0} \frac{4}{3} \approx \frac{2g}{3\varepsilon} \quad (\text{т.к. } r_0 \gg \varepsilon). \quad (3.41)$$

Отметим, что пренебрежение проскальзыванием при движении эллипса (в условиях обнуления нормальной реакции) приводит к не совсем точным результатам.

В частности, в сборнике [46, задача 1.91, стр.32] при решении (простом, но не очень строгом!) аналогичной задачи утверждается, что отрыв деформированного колеса произойдет при

$$\omega_0^2 > \frac{1g}{2\varepsilon}.$$

Согласно же нашему неравенству (3.41), отрыв может произойти лишь при

$$\omega_0^2 > \frac{2g}{3\varepsilon} > \frac{1g}{2\varepsilon}.$$

Однако и эта оценка еще не совсем точна, т.к. (3.41) представляет собой лишь *достаточное условие* безотрывного движения эллипса.

Рассмотрим другой предельный случай: $b \rightarrow 0$, т.е. очень вытянутый эллипс. Тогда неравенство (3.39) имеет вид:

$$h_0 < g \frac{5a^2 + 7u^2}{8u}, \quad u \in (0, a).$$

Минимум правой части легко находится, и мы приходим к неравенству:

$$h_0 < \frac{ga}{4} \sqrt{35}.$$

Если эллипс падал с вертикального положения ($\varphi_0 = 0$), то получим:

$$\dot{\varphi}_0^2 = \omega_0^2 < \frac{2g}{5a} (\sqrt{35} - 4).$$

Обоснование результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3.1 и 3.2 основывается на следующих утверждениях.

Лемма 1. Для функции \dot{v} , определяемой формулами (3.15), (3.16), имеет место тождество:

$$\dot{v} = -\frac{\rho^2 + r^2}{W} (F_3 + f\varepsilon N_3), \quad (3.42)$$

где W , F_3 , N_3 даются формулами из (3.16), (3.19), (3.20), $\varepsilon = \operatorname{sgn} v$.

В индексных обозначениях соотношение (3.42) эквивалентно равенствам

$$\dot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1} (F_3 + fN_3), \quad v > 0, \quad (3.43)$$

$$\dot{v}_2 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_2} (F_3 - fN_3), \quad v < 0, \quad (3.44)$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma + r^2 f \sin \gamma \cos \gamma, \\ W_2 &= \rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma - r^2 f \sin \gamma \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Лемма 2. *Имеет место тождество:*

$$F_3 - f_0 N_3 = -h_0 U, \quad (3.46)$$

где U дается формулой из (3.16),

$$f_0 = \frac{\rho^2 + r^2 \sin^2 \gamma}{r^2 \mu}, \quad h_0 = \frac{\rho^2}{r^2 \mu}, \quad \mu = \sin \gamma \cos \gamma. \quad (3.47)$$

Лемма 3. а) Если $\dot{v}_1 = 0$, то $N_1 = N_3$, $F_3 = -f N_3$, $\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_3$. б) Если $\dot{v}_2 = 0$, то $N_2 = N_3$, $F_3 = f N_3$, $\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3$.

Справедливость сформулированных лемм устанавливается непосредственной проверкой с использованием формул (3.16), (3.19), (3.20).

Доказательство теорем 3.1 и 3.2 осуществляется при помощи перебора всех возможных вариантов предыдущих (при $t \leq t_*$) движений пластинки и последующих (при $t > t_*$), в результате чего устанавливается однозначность последующего безотрывного движения либо возможность отрыва пластинки от опоры (или некорректность рассматриваемой ситуации).

Рассмотрим подробно строчку (1) таблицы 3.1. Пусть при $t \leq t_*$ было движение 1 рода ($v > 0$). Тогда в соответствии с (3.43) имеем $\dot{v}_1 \leq 0$, и если $W_1 > 0$, то $F_3 + f N_3 \geq 0$. Если выполнено строгое неравенство $\dot{v}_1 < 0$, то

$$F_3 + f N_3 > 0. \quad (3.48)$$

Пусть $\mu > 0$, тогда h_0, f_0 из (3.47) будут положительны и из (3.46) (так как $U > 0$) имеем неравенство

$$F_3 - f_0 N_3 < 0. \quad (3.49)$$

Из (3.48) и (3.49) имеем:

$$-f N_3 < F_3 < f_0 N_3,$$

т. е. $N_3 > 0$ (так как $f > 0$, $f_0 > 0$). Если $|F_3/N_3| > f$, то движение 3 рода невозможно (несмотря на то что $N_3 > 0$!). Тогда $F_3^2 - f^2 N_3^2 > 0$. Если $W_2 > 0$, то, перемножая равенства (3.43) и (3.44), получим:

$$\dot{v}_1 \dot{v}_2 = \frac{(\rho^2 + r^2)^2}{W_1 W_2} (F_3^2 - f N_3^2) > 0.$$

Отсюда, так как $\dot{v}_1 < 0$, получим $\dot{v}_2 < 0$, т. е. реализуется движение 2 рода. Если $W_2 < 0$, то из (3.45) получаем $f > f_0$. Тогда из (3.49), так как $N_3 > 0$, получаем $0 > F_3 - f_0 N_3 > F_3 - f N_3$. Отсюда и из неравенства (3.48) получаем:

$$-f < \frac{F_3}{N_3} < f,$$

т. е. реализуется движение 3 рода, а движение 2 рода не может быть реализовано, так как для него $N_2 = \rho^2 U / W_2 < 0$ ($U > 0$, $W_2 < 0$). Аналогично рассматривается случай $\mu < 0$. Далее, если $\dot{v}_1 = 0$, то в соответствии с леммой 3 имеем $N_3 = N_1 > 0$, $F_3 = -f N_3$, т. е. движение 3 рода может начаться. Кроме того, из (3.43) получим $F_3 = -f N_3$, а из (3.44) имеем:

$$\dot{v}_2 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_2} (-2f N_3) = \frac{2f(\rho^2 + r^2)}{W_2} N_3.$$

Если $W_2 > 0$, то, так как $N_3 > 0$, будет $\dot{v}_2 > 0$, т. е. движение 2 рода не может быть реализовано. А ежели $W_2 < 0$, то $N_2 = \rho^2 U / W_2 < 0$, т. е. опять движение 2 рода не реально. Таким образом, осталось сделать выбор между движениями 1 рода и 3 рода. Мы имеем:

$$\dot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1} (F_3 + f N_3) = 0.$$

Продифференцируем это равенство до тех пор, пока не получится первая ненулевая производная функции \dot{v} . Пусть, например, достаточно продифференцировать один раз:

$$\ddot{v}_1 = -\frac{\rho^2 + r^2}{W_1}(\dot{F}_3 + f\dot{N}_3) \neq 0$$

(отметим, что все производные берутся в точке $t = t_*$). Если $\ddot{v}_1 > 0$, то реализуется движение 1 рода. При этом

$$\dot{F}_3 + f\dot{N}_3 < 0 \rightarrow (F_3/N_3)' < 0,$$

а так как $F_3/N_3 = -f$, то ясно, что движение 3 рода не может состояться в последующем движении. А если $\ddot{v}_1 < 0$, то ситуация становится противоположной: движение 1 рода не может быть реализовано (из точки $v = 0$!), а в силу неравенства

$$\dot{F}_3 + f\dot{N}_3 > 0 \rightarrow (F_3/N_3)' > 0,$$

и так как $F_3/N_3 = -f$, то выполнены условия для движения 3 рода. Совершенно аналогично рассматриваются другие ситуации. Мы видим, что при $\dot{v} = 0$ (и $v = 0$) возможно либо предыдущее движение, либо движение 3 рода. А вот при $\dot{v} \neq 0$ (и $v = 0$) возможен переход либо в противоположное движение, либо в движение 3 рода.

Далее, строчки (2), (3), (4) рассматриваются без труда, так как при $v \neq 0$ выбор нужно делать только между движениями 1 и 2 родов, что получается с использованием формул (3.43), (3.44) и (3.46). Рассмотрим вторую часть таблицы 3.1, т. е. $U < 0$. Строчка (5) доказывается просто, так как при $W_0 \geq 0$ имеем $W_1 > 0$, $W_2 > 0$, тогда при $U < 0$ получим $N_1 < 0$, $N_2 < 0$, т. е. предыдущее движение ни 1, ни 2 рода. Из (3.46) при $U < 0$ и $\mu > 0$ имеем $F_3 - f_0 N_3 > 0$. Если предыдущее состояние было 3 рода, то $N_3 > 0$ и мы получили бы

$F_3 > f_0 N_3 \rightarrow F_3/N_3 > f_0 > f$ (так как при $W_0 > 0$ имеет место неравенство $f_0 > f$). Последнее неравенство говорит о нереализуемости качения, т. е. движения 3 рода. Таким образом, состояние некорректно. Аналогично доказывается некорректность при $\mu < 0$.

Рассмотрим строчку (6). Ясно, что при $W_2 < 0$ и $U < 0$ возможно только движение 2 или 3 рода. Если предыдущее движение 2 рода, то $\dot{v}_2 \geq 0$. Пусть $\dot{v}_2 > 0$ (строго). Тогда из (3.44) при $W_2 < 0$ получим $F_3 - fN_3 > 0$. Если $N_3 > 0$, то $F_3/N_3 > f$, т. е. 3 рода нет. А 1 рода нет, так как $N_1 = \rho^2 U/W_1 < 0$ при $U < 0$ и $W_1 > 0$. Покажем, что в этом случае пластинка перестает контактировать с опорной прямой (отходит от нее вверх по оси O_*y). Пусть P_* — место контакта на прямой O_*x в рассматриваемый момент времени t_* . Рассматривая движение точки P_* как сложное относительно системы $C\xi\eta$, мы получим:

$$a_{P_*y} = \ddot{y} + r\dot{\varphi}^2 \cos \gamma + r\ddot{\varphi} \sin \gamma - 2\dot{\varphi}v_r + \frac{v_r^2}{R},$$

где v_r — относительная скорость точки P_* в системе $C\xi\eta$. Ясно, что $v_r = R\dot{\varphi}$, где R — радиус кривизны контура. Тогда имеем:

$$a_{P_*y} = \ddot{y} + r\dot{\varphi}^2 \cos \gamma - R\dot{\varphi}^2 + r\ddot{\varphi} \sin \gamma.$$

Так как $N_1 < 0$, т. е. прямая не действует на пластинку, то мы полагаем $N_1 = 0$ и $F_1 = -fN_1 = 0$. Тогда $\ddot{y} = Y$, $\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho^2}M$, т. е. имеем:

$$a_{P_*y} = Y - \dot{\varphi}^2(R - r \cos \gamma) + \frac{1}{\rho^2}Mr \sin \gamma = -U > 0,$$

т. е. действительно пластинка будет отходить от опорной прямой. Отметим, что когда имеется контакт, то положительная нормальная реакция устанавливается именно такой, чтобы $a_{P_*y} = 0$, а это обеспечивает контакт.

Остальные пункты строчки (6) рассматриваются аналогично предыдущему. Строчка (7) полностью симметрична строчке (6), а строчки (8), (9) и (10) устанавливаются без труда, так как выбор нужно делать лишь между движениями 1 и 2 родов.

Доказательство теоремы 3.2 почти аналогично доказательству теоремы 3.1, нужно только выполнять необходимое число дифференцирований соотношений (3.43), (3.44) и (3.46). Подробно доказательство здесь не приводится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3.3 и 3.4.

Справедливость утверждений теорем 3.3 и 3.4 следует из теоремы об изменении кинетической энергии, записанной в форме

$$T - T_0 = A_{\text{тр}} + A_g,$$

где T_0 — начальная кинетическая энергия, T — текущее ее значение, $A_{\text{тр}}$ — работа силы трения, которая всегда неположительна, A_g — работа силы тяжести. Тогда получим оценку:

$$T < T_0 + A_g. \quad (3.50)$$

Далее:

$$T = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2) > \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}v_{Cy}^2. \quad (3.51)$$

Для стержня $v_{Cy} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$, для неоднородного диска $v_{Cy} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi$. Из (3.50) и (3.51) получаем оценку сверху для $\dot{\varphi}^2$, которую затем используем для оценки снизу величины $U = g - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi$ для диска и величины $U = g - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi$ для стержня. Требование, чтобы эта оценка была больше нуля, и приводит к результатам, сформулированным в теоремах 3.3 и 3.4. ■

§ 3.2. Метод определения параметров безотрывного движения волчка на плоскости

Постановка задачи и уравнения движения для гладкой плоскости

Пусть динамически и геометрически симметричное твердое тело движется по гладкой горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Предположим, что тело ограничено выпуклой поверхностью вращения, причем ось симметрии поверхности тела совпадает с осью его динамической симметрии, на которой расположен центр тяжести тела. O_*xyz — неподвижная система координат, причем ось O_*z направлена по вертикали, против силы тяжести, а плоскость O_*xy совпадает с опорной плоскостью. Пусть G — центр масс тела, а $G\xi\eta\zeta$ — система координат, жестко связанная с телом и направленная по его главным осям инерции, причем ось $G\zeta$ направлена по оси симметрии тела.

Положение тела описываем тремя координатами x, y, z его центра масс G и тремя углами Эйлера θ, φ, ψ , где θ — угол нутации (угол между осью симметрии $G\zeta$ и вертикалью Oz), φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии. В силу симметрии координата z является функцией только угла θ , т. е.

$$z = f(\theta), \quad (3.52)$$

где $f(\theta)$ будем считать известной функцией θ . Уравнение (3.52) является голономной связью в данной задаче. Таким образом, движение системы описывается пятью обобщенными координатами $\{x, y, \varphi, \psi, \theta\}$. Поэтому начальными условиями для движения тела является набор:

$$\{x(0), y(0), \theta(0), \varphi(0), \psi(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\psi}(0)\}.$$

Внешними силами, приложенными к телу во время движения, яв-

ляются: сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила нормальной реакции, направленная вертикально вверх. Поэтому имеем уравнение движения центра масс по вертикали, полагая $m = 1$ для массы тела:

$$\ddot{z} = N - g.$$

Учитывая соотношение (3.52), получим:

$$f'\ddot{\theta} + f''\dot{\theta}^2 = N - g,$$

где штрихом обозначаем дифференцирование по θ . Таким образом, имеем следующее выражение для силы нормальной реакции:

$$N = g + f'\ddot{\theta} + f''\dot{\theta}^2. \quad (3.53)$$

Для получения уравнения для $\theta(t)$ выпишем, следуя [47] функцию Лагранжа в данном случае:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(A + f'^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A \sin^2 \theta \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - gf, \quad (3.54)$$

где $A = B$ — моменты инерции тела относительно осей $G\xi$ и $G\eta$, C — момент инерции относительно оси $G\zeta$. Из (3.54) видим, что x, y, φ, ψ — циклические координаты, т. е. имеем интегралы:

$$\dot{x} = p_x, \quad \dot{y} = p_y, \quad C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = p_2,$$

$$A \sin^2 \theta \dot{\psi} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta = A \sin^2 \theta \dot{\psi} + p_2 \cos \theta = p_1,$$

где p_x, p_y, p_2, p_1 — константы, определяемые начальными условиями. Без ограничения общности можно предполагать $p_x = p_y = 0$, т. е. центр масс G движется только по вертикали. Используя полученные соотношения и интеграл энергии, который в данном случае имеет место, мы получим следующее уравнение для θ :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2h - 2gf - P(u)}{A + (f')^2}, \quad (3.55)$$

где $P(u) = \frac{(p_1 - p_2 u)^2}{A(1 - u^2)}$, $u = \cos \theta$, h — константа энергии, определяемая формулой:

$$h = \frac{1}{2} \left(A + [f'(\theta_0)]^2 \right) \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} P(u_0) + g f(\theta_0), \quad u_0 = \cos \theta_0. \quad (3.56)$$

Из уравнения (3.55) следует, что область возможных движений по углу θ определяется неравенством:

$$2g f(\theta) + P(\cos \theta) \leq 2h. \quad (3.57)$$

Учитывая, что x , y , φ , ψ — игнорируемые координаты и $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, мы получаем следующий набор начальных условий данной задачи:

$$\{\theta(0), \quad \dot{\theta}(0), \quad \dot{\varphi}(0), \quad \dot{\psi}(0)\}$$

или, т. к. $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, в соответствии с циклическими интегралами, выражаются через θ , p_1 , p_2 , имеем такой набор начальных условий:

$$\{\theta(0), \quad \dot{\theta}(0), \quad p_1, \quad p_2\}. \quad (3.58)$$

Поставим задачу: найти все такие наборы начальных условий (3.58), чтобы при всех θ , удовлетворяющих неравенству (3.57), нормальная реакция, определяемая уравнениями (3.53) и (3.55), являлась положительной величиной. Это и будет обеспечивать безотрывное движение твердого тела по плоскости. Кроме того, необходимо ответить на вопрос о том, что происходит с телом после того, как нормальная реакция обратилась в нуль (если такое обнуление возможно).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Явное интегрирование уравнений движения тяжелого симметричного волчка на гладкой горизонтальной плоскости восходит к С. Д. Пуассону, А. Курно, В. Пюизё и Ф. Клейну. Подробный библиографический список приведен в [47], а также в недавно вышедшей монографии [48].

Формулировка и обоснование результатов

Дифференцируя (3.55) по t , мы получим $\ddot{\theta}$, как функцию θ . Подставляя полученное выражение $\ddot{\theta}(\theta)$ и $\dot{\theta}^2(\theta)$ из (3.55) в (3.53), имеем следующее выражение для нормальной реакции N :

$$\begin{aligned} \left(A + (f')^2 \right)^2 \cdot N = & \left[gA (A + f'^2) + 2Af'' (h - gf) \right] + \\ & + \frac{p_1 - p_2 u}{A(1 - u^2)} \left[-Af'' (p_1 - p_2 u) + f' (A + f'^2) \frac{\sin \theta (p_1 u - p_2)}{1 - u^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Полагая в этом выражении $\theta = \theta_0$ и требуя, чтобы $N(\theta_0) > 0$, мы получим следующее необходимое условие безотрывного движения:

$$g + f''_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{f'_0 \sin \theta_0 (p_1 - p_2 u_0) (p_1 u_0 - p_2)}{A^2 (1 - u_0^2)^2} > 0, \quad (3.60)$$

которое, конечно, не гарантирует безотрывность движения для всей области, даваемой неравенством (3.57).

Полный анализ безотрывных движений удалось сделать для сферического тела (волчок Томсона). В этом случае имеем:

$$f(\theta) = R + d \cos \theta, \quad f' = -d \sin \theta, \quad f'' = -d \cos \theta,$$

где R — радиус сферы, d — расстояние центра масс G до геометрического центра сферы.

В этом случае формула (3.59) упрощается и приобретает вид:

$$\begin{aligned} (A + d^2 \sin^2 \theta)^2 N = & \lambda a_0 u^2 - a_1 u + a_0 (\lambda + 1), \\ a_0 = & A^2 g + d p_1 p_2, \quad a_1 = 2h_0 d A + d [\lambda p_1^2 + (1 + \lambda) p_2^2], \\ \lambda = & d^2 / A, \quad u = \cos \theta, \\ 2h_0 = & 2g d u_0 + (A + d^2 \sin^2 \theta_0) \dot{\theta}_0^2 + \frac{(p_1 - p_2 u_0)^2}{A(1 - u_0^2)}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Причем область возможных движений дается неравенством, которое следует из (3.57):

$$\Psi(u) = 2gdu + \frac{(p_1 - p_2u)^2}{A(1 - u^2)} - 2h_0 \leq 0, \quad |u| \leq 1. \quad (3.62)$$

Таким образом, нахождение области возможных движений сводится к исследованию кубического неравенства:

$$\Psi_1(u) = 2gAdu(1 - u^2) + (p_1 - p_2u)^2 - 2h_0A(1 - u^2) \leq 0, \quad (3.63)$$

а безотрывность движения обеспечивается квадратным неравенством из (3.61):

$$\Phi(u) = a_0\lambda u^2 - a_1u + a_0(\lambda + 1) \geq 0. \quad (3.64)$$

Несложное исследование неравенства (3.63) приводит к следующему утверждению.

Теорема 3.5.

1) Пусть $2h_0A > p_1^2$. Тогда уравнение $\Psi_1(u) = 0$ на интервале $(-1, 1)$ имеет два корня u_1, u_2 , причем $u_1 < 0, u_2 > 0$, и область возможных движений задается неравенствами:

$$u_1 \leq u \leq u_2.$$

2) Пусть $2h_0A \leq p_1^2$. Тогда уравнение $\Psi_1(u) = 0$ на интервале $[-1, 1]$ имеет два корня u_1, u_2 , а область возможных движений задается неравенствами:

$$\begin{aligned} 0 < u_1 \leq u \leq u_2 \leq 1 & \quad \text{при} \quad u_0 > 0, \\ -1 \leq u_1 \leq u \leq u_2 \leq 0 & \quad \text{при} \quad u_0 < 0. \end{aligned}$$

Исследование неравенства (3.64), обеспечивающего безотрывность движения, приводит к следующему результату.

Теорема 3.6. Пусть начальные условия (3.58) и параметры тела таковы, что:

$$\Phi(u_1) > 0, \quad \Phi(u_2) > 0, \quad (3.65)$$

тогда (3.64) выполнено во всей области допустимых движений и отрыва не происходит. А если

$$\Phi(u_1) < 0 \text{ или } \Phi(u_2) < 0, \quad (3.66)$$

то обязательно происходит отрыв (возможно, и в начальный момент времени!). В (3.65) и (3.66) $\Phi(u)$ дается формулой (3.64), u_1, u_2 — корни кубического уравнения $\Psi_1(u) = 0$ на интервале $[-1, 1]$, где $\Psi_1(u)$ определяется формулой из (3.63).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.6. следует из специфического вида функции $\Phi(u)$ из (3.64). А именно точка $u = u_* = a_1/(2\lambda a_0)$ является экстремумом функции $\Phi(u)$, причем при $a_0 > 0$ это точка минимума, а при $a_0 < 0$ — это точка максимума. Корни уравнения $\Phi(u) = 0$ даются формулами:

$$u_{3,4} = u_* \pm \sqrt{u_*^2 - (\lambda + 1)/\lambda}.$$

- 1) Если $|u_*| < \sqrt{(\lambda + 1)/\lambda}$, то уравнение $\Phi(u)$ корней не имеет, и выполнение (3.65) необходимо и достаточно для безотрывности движения.
- 2) Если $|u_*| \geq \sqrt{(\lambda + 1)/\lambda}$, то можно утверждать, что функция $\Phi(u)$ монотонна на интервале $[-1, 1]$ (точка $u = u_*$ перемены знака производной лежит вне интервала $[-1, 1]$!). Тогда неравенства (3.65) опять являются необходимыми и достаточными для безотрывности движения.

■

Рассмотрим теперь некоторые **частные случаи задания начальных условий**.

Теорема 3.7. Пусть начальные условия таковы, что $p_1 = p_2 = 0$, $\dot{\theta}_0 \neq 0$ (плоско-параллельное движение тела). Обозначим

$$\mu^2 = \dot{\theta}_0^2 (A + d^2 \sin^2 \theta_0).$$

1) Если соблюдено неравенство

$$\left| u_0 + \frac{\mu^2}{2gd} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+\lambda}{\lambda} \right), \quad (3.67)$$

то движение происходит без отрыва.

2) Если соблюдено неравенство

$$\left| u_0 + \frac{\mu^2}{2gd} \right| > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+\lambda}{\lambda} \right), \quad (3.68)$$

то обязательно происходит отрыв. Причем если $u_0 < 0$, то отрыв происходит при $u_1 \neq u_0$. А если $u_0 > 0$, то при

$$\left| u_0 + \frac{\mu^2}{2gd} \right| < \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{1}{u_0} \frac{1+\lambda}{\lambda} \right)$$

отрыв происходит при $u_1 \neq u_0$, а при

$$\left| u_0 + \frac{\mu^2}{2gd} \right| \geq \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{1}{u_0} \frac{1+\lambda}{\lambda} \right)$$

отрыв происходит при $u = u_0$, т.е. в начальный момент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7. следует из исследования неравенств (3.62) и (3.64), которые в данном частном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= 2gd \left(u - u_0 - \frac{\mu^2}{2gd} \right) \leq 0, \\ \Phi(u) &= A^2 g \lambda \left[u^2 - 2u \left(u_0 + \frac{\mu^2}{2gd} \right) + \frac{1+\lambda}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Объединение неравенств (3.65) и (3.66) из утверждения 2 приводит к неравенству (3.67). При выполнении же неравенства (3.68) происходит ротационное движение тела (т. е. областью возможных движений по u является весь интервал $[-1, +1]$). Кроме того, при выполнении (3.68) имеем $\Phi(-1) > 0$, $\Phi(+1) < 0$, т. е. происходит отрыв тела. Остальные неравенства устанавливаются непосредственной проверкой. ■

Теорема 3.8. Пусть начальные условия таковы, что $\dot{\theta}_0 = 0$ (p_1, p_2, u_0 — произвольны). Введем безразмерные параметры q_1, q_2 по формулам:

$$q_1 = p_1/\sqrt{2\mu_0}, \quad q_2 = p_2/\sqrt{2\mu_0}, \quad \mu_0 = gdA.$$

Обозначим $\beta_0 = \arctg(u_0) = \arctg(\cos \theta_0)$, $\beta_0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Введем в пространстве параметров $\{q_1, q_2\}$ полярные координаты (q, φ) по формулам:

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = q_1/q_2.$$

Тогда отрыва не будет при

$$0 \leq q^2 \leq \rho^2(\varphi),$$

где функция $\rho^2(\varphi)$ определяется по формулам:

$$\rho^2(\varphi) = \begin{cases} \rho_1^2(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon u_0}{\lambda(\varepsilon - u_0)} \left[\frac{\varepsilon(1 + 2\lambda - 2\lambda u_0^2) + u_0 \sqrt{1 + 4\lambda(1 - \varepsilon^2)(1 + \lambda - \lambda u_0^2)}}{\varepsilon + u_0} \right] & \begin{aligned} &\beta_0 < \varphi < \frac{\pi}{2} - \beta_0 \\ &\pi + \beta_0 < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \beta_0 \end{aligned} \\ \rho_2^2(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon u_0}{\lambda(u_0 - \varepsilon)}. & \begin{aligned} &\frac{\pi}{2} - \beta_0 < \varphi < \pi + \beta_0 \\ &\frac{3\pi}{2} - \beta_0 < \varphi \leq 2\pi \\ &0 \leq \varphi < \beta_0 \end{aligned} \end{cases}$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{\sin 2\varphi - u_0}{1 - u_0 \sin 2\varphi}.$$

Если же $q^2 > \rho^2(\varphi)$, то происходит отрыв, причем при $\rho^2 = \rho_2^2(\varphi)$ отрыв происходит в начальный момент ($u = u_0$), а при $\rho^2 = \rho_1^2(\varphi)$ отрыв происходит при $u \neq u_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты утверждения 3.8 представлены на рис. 3.5, 3.6, где заштрихованы области начальных условий, при которых движение является безотрывным. Границы этих областей состоят из кривых типа 1 и типа 2 (см. рис. 3.5, 3.6), имеющих прямолинейные асимптоты: $q_1/q_2 = \operatorname{tg} \beta_0 = u_0$ и $q_1/q_2 = \operatorname{ctg} \beta_0 = 1/u_0$. При этом кривая типа 2, которая в полярных координатах имеет уравнение $\rho = \rho_2(\varphi)$, в прямоугольных координатах q_1, q_2 может быть представлена в виде:

$$(q_1 - u_0 q_2) \left(q_1 - \frac{1}{u_0} q_2 \right) = + \frac{1 - u_0^2}{2\lambda u_0},$$

т. е. является гиперболой.

Кривая типа 1 напоминает гиперболу, однако в прямоугольных координатах q_1, q_2 является кривой 4-го порядка. Нетрудно видеть, что прямые $q_1 = u_0 q_2$ и $q_1 = \frac{1}{u_0} q_2$ являются асимптотами этих кривых.

Отметим также, что внутри заштрихованной области на рис. 3.5, 3.6 лежит кривая типа 3, уравнение которой

$$\rho_3^2(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon u_0}{\lambda (\varepsilon - u_0)} (1 - u_0^2)$$

или в прямоугольных координатах:

$$(q_1 - u_0 q_2) \left(q_1 - \frac{1}{u_0} q_2 \right) = - \frac{(1 - u_0^2)^2}{2\lambda u_0}.$$

Это — гипербола регулярных прецессий [47].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.8. основано на следующем факте. При $\dot{\theta}_0 = 0$ уравнение $\Psi_1(u) = 0$ заведомо имеет корень $u = u_0$, а тогда функция $\Psi_1(u)$ из (3.63) имеет вид:

$$\Psi_1(u) = 2gdA(u_0 - u) [u^2 - 2\nu^2 u - (1 + 2u_0\nu^2 - \sigma)],$$

где обозначено

$$\nu^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2 - 2u_0 p_1 p_2}{4\mu_0(1 - u_0^2)}, \quad \sigma = \frac{p_1 p_2}{\mu_0}, \quad \mu_0 = g dA.$$

Рассмотрим функцию:

$$\chi(u) = u^2 - 2\nu^2 u - (1 + 2u_0 \nu^2 - \sigma).$$

Тогда при $\chi(u_0) < 0$ областью движений является интервал $u_3 \leq |u| \leq u_0$, а если $\chi(u_0) > 0$ – то интервал $u_0 \leq u \leq u_3$, где u_3 – меньший по модулю корень уравнения $\chi(u) = 0$:

$$u_3 = \nu^2 - \sqrt{\nu^4 + 1 + 2u_0 \nu^2 - \sigma}.$$

Далее применяем утверждения 3.8, т.е. проверяем неравенства $\Phi(u_0) > 0$ и $\Phi(u_3) > 0$ для безотрывности. Нарушение одного из этих неравенств (т.е. $\Phi(u_0) < 0$ или $\Phi(u_3) < 0$) приводит к отрыву. Для сокращения выкладок удобно ввести безразмерные переменные q_1 и q_2 и полярные координаты, как это указано в формулировке. Тогда получим соотношения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu_0 d \left(\frac{1}{\lambda} + q^2 \sin \alpha \right), \\ a_1 &= \mu_0 d \left[2u_0 + \frac{2q^2}{1 - u_0^2} (1 + \lambda - \lambda u_0^2 - u_0 \sin \alpha) \right], \\ \nu^2 &= \frac{1}{2} q^2 \frac{1 - u_0 \sin \alpha}{1 - u_0^2}, \quad \sigma = q^2 \sin \alpha, \quad \alpha = 2\varphi. \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\chi(u) = u^2 - 2u \left[\frac{q^2 (1 - u_0^2 \sin \alpha)}{2 (1 - u_0^2)} \right] - \left[q^2 \frac{u_0 - \sin \alpha}{1 - u_0^2} + 1 \right],$$

$$\chi(u_0) = - (1 - u_0^2) - \frac{q^2}{1 - u_0^2} [2u_0 - \sin \alpha (1 + u_0^2)],$$

$$N(u) = (1 + \lambda + \lambda u^2) \left[\frac{1}{\lambda} + q^2 \sin \alpha \right] - u \left[2u_0 + \frac{q^2}{1 - u_0^2} (1 + \lambda - \lambda u_0^2 - u_0 \sin \alpha) \right],$$

$$N(u_0) = (1 + \lambda - \lambda u_0^2) \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{q^2}{1 - u_0^2} [(1 + u_0^2) \sin \alpha - 2u_0] \right\}$$

Используя полученные выражения и высказанные выше соображения, мы получаем результат утверждения 3.8. Подробные выкладки здесь опускаются. ■

Теорема 3.9. Пусть начальные условия таковы, что $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\psi}(0) = \varepsilon$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, где θ , ψ , φ — углы Эйлера. Таким образом, в начальный момент мы задаем угловую скорость собственного вращения ω_0 и угловую скорость прецессии ε . Тогда в начальный момент нормальная реакция вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} (A + d^2 \sin^2 \theta_0) \cdot N(\theta_0) &= \omega_0 u_0 \varepsilon [(1 + \lambda - \lambda u_0^2) (1 - u_0^2) dCA] \\ &+ A^2 g (1 + \lambda - \lambda u_0^2) + \varepsilon^2 \cdot Ad (1 - u_0^2) [C (1 + \lambda - \lambda u_0^2 + 2\lambda u_0^4) \\ &- Au_0 (1 + \lambda - \lambda u_0^2)]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из формулы (3.69) следует, что при $u_0 \varepsilon < 0$ всегда можно выбрать $\omega_0 > 0$ настолько большим, что $N(\theta_0) < 0$, т.е. тело сразу начинает подпрыгивать на плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.9. устанавливается непосредственной проверкой с использованием формул (3.61) и соотношений

$$p_1 = \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \right), \quad p_2 = C \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \right),$$

где p_1, p_2 — константы. ■

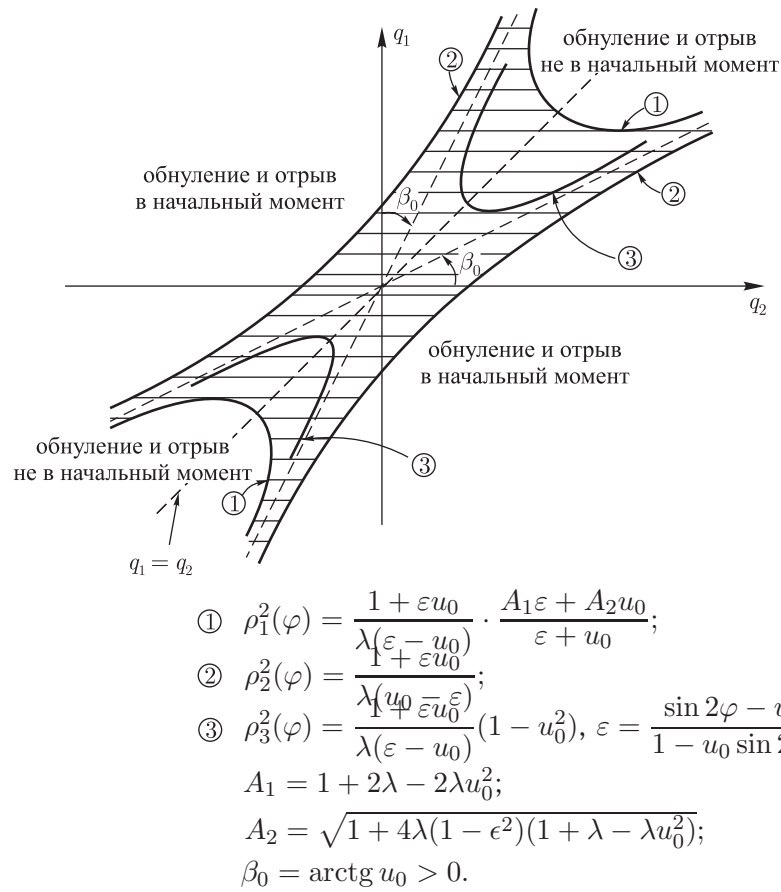


Рис. 3.5. Области начальных условий, при которых происходит безотрывное или отрывное движение ($u_0 > 0$)

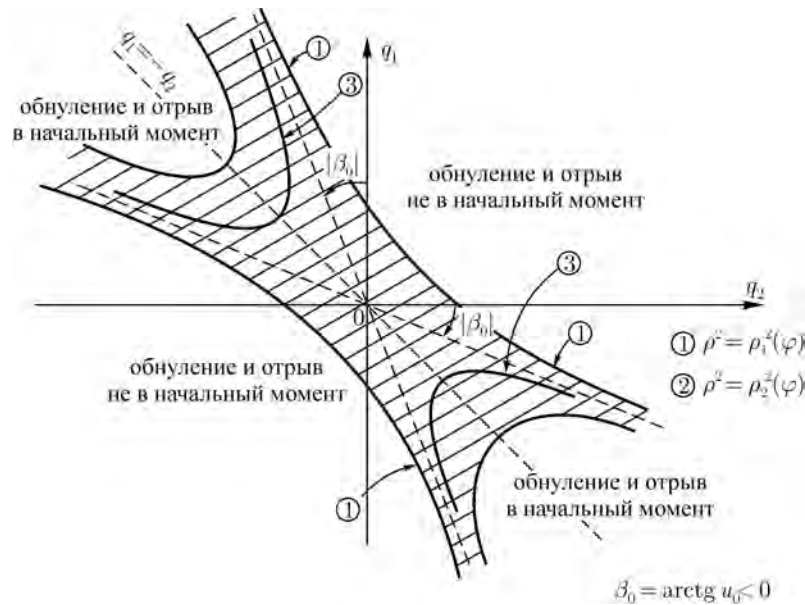


Рис. 3.6. Области начальных условий, при которых происходит безотрывное или отрывное движение ($u_0 < 0$)

Рассмотрим теперь вопрос о движении тела, которое происходит после обнуления нормальной реакции. Пусть O — центр сферической поверхности волчка, которая контактирует с плоскостью в точке P . Предположим, что при $t = t_1$ нормальная реакция обратилась в нуль $N(t_1) = 0$, причем $t_1 > t_0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.10.

- 1) Если t_1 — точка локального минимума функции $N(t)$, то при $t > t_1$ продолжается безотрывное движение тела по плоскости.
- 2) Если t_1 — не есть точка локального минимума функции $N(t)$ (т.е. в любой малой ее окрестности происходит смена знака функции $N(t)$ с плюса на минус), то происходит отрыв тела от плоскости и для вертикальной координаты точки O справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}(t_1 + 0) < 0, \quad z_o(t_1 + 0) = R, \quad \dot{z}_o(t_1 + 0) = \ddot{z}_o(t_1 + 0) = 0, \\ \ddot{z}_o(t_1 + 0) = -h \sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 > 0,\end{aligned}\tag{3.70}$$

$$\text{где } h = \left(\dot{\psi}^2(t_1 + 0) \sin^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 + p_2^2/A^2 \right) d, \quad \theta_1 \in [0, \pi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3.10. основано на следующих рассуждениях. Если нормальная реакция в процессе движения обнуляется, то в соответствии с утверждением 2 обязательно нарушается неравенство (3.65), т.е. мы имеем:

$$u_*^2 = a_1^2 / (4\lambda^2 a_0^2) \geq (1 + \lambda)\lambda > 1.$$

Причем непосредственной проверкой, используя формулы из (3.61),

можно показать, что:

$$u_* \geq \sqrt{(1+\lambda)\lambda} > 1 \quad \text{при} \quad a_0 > 0,$$

$$u_* \leq -\sqrt{(1+\lambda)\lambda} < -1 \quad \text{при} \quad a_0 < 0$$

Основываясь на формуле (3.61) для нормальной реакции N и полученных неравенствах, можно утверждать, что N обнуляется в такой точке $u_1 = \cos \theta_1$, для которой

$$n = dN/du|_{u=u_1} < 0,$$

причем неравенство строгое. Далее имеем:

$$dN/dt|_{t=t_1} = n(-\sin \theta_1 \cdot \dot{\theta}_1) = n(\cos \theta)|_{t=t_1}.$$

- 1) Если t_1 — точка локального минимума $N(t)$, то $\dot{N}|_{t=t_1} = 0$, $\ddot{N}|_{t=t_1} > 0$. Тогда $(\cos \theta)|_{t=t_1} = 0$, $(\cos \theta)'|_{t=t_1} < 0$, т. е. t_1 — точка максимума функции $\cos \theta$, и движение пойдет в ту сторону, где $\cos \theta$ уменьшается, а нормальная реакция строго положительна. Если $\ddot{N}|_{t=t_1} = 0$, то рассуждения аналогичны с привлечением производных высших порядков.

- 2) Если t_1 — не есть точка локального минимума и функция $N(t)$ в окрестности точки $t = t_1$ меняет знак с плюса на минус, то мы имеем

$$\dot{N}|_{t=t_1} = n(\cos \theta)|_{t=t_1} < 0, \quad \rightarrow (\cos \theta)|_{t=t_1} > 0.$$

Ясно, что продолжение контакта тела с плоскостью в дальнейшем невозможно и происходит отрыв. Предположим, что отрыв произошел, и покажем его корректность, т. е. возрастание вертикальной координаты $z_o(t)$ точки O при $t > t_1$. Движение тела при $t \geq t_1 + 0$ (т. е. отсутствие контакта с плоскостью) представляет собой свободное падение точки G в поле силы тяжести и регулярную прецессию вокруг

постоянного вектора кинетического момента тела относительно центра масс G , приложенного в точке G (случай Эйлера–Пуансо). В момент отрыва сохраняются координаты точек тела и их скорости. Покажем, что сохраняется также и величина $\ddot{\theta}$, т. е. $\ddot{\theta}(t_1 - 0) = \ddot{\theta}(t_1 + 0)$. Действительно, выпишем уравнение кинетического момента относительно оси $G\eta$:

$$-A\ddot{\theta} + (-p_2\dot{\psi} \sin \theta + A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) = -Nd \sin \theta,$$

где $p_2 = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$. Отсюда видно, что при $N = 0$ это уравнение переходит в соответствующее уравнение для регулярной прецессии случая Эйлера–Пуансо, а значит, $\ddot{\theta}$ сохраняется. Далее, т. к. при $t = t_1 + 0$ имеем $\ddot{z}_G = -g$ и сохраняются координаты, скорости и величина $\ddot{\theta}$, то при $t = t_1 + 0$ имеем:

$$\begin{aligned} z_o(t) &= z_G(t) - d \cos \theta = R, \\ \dot{z}_o(t) &= \dot{z}_G(t) + d \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0, \\ \ddot{z}_o &= \ddot{z}_G + d \cos \theta \cdot \ddot{\theta} + d \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Вычисляем $\dot{\theta}(\theta)$ и $\ddot{\theta}(\theta)$ при $t \geq t_1 + 0$, т. е. для регулярной прецессии Эйлера–Пуансо:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h_1^2}{A^2} - \frac{(h_2 - p_2 \cos \theta)^2}{A^2 \sin^2 \theta}, \quad \ddot{\theta} = \frac{(h_2 \cos \theta - p_2)(h_2 - p_2 \cos \theta)}{A^2 \sin^3 \theta}, \quad (3.72)$$

где $h_2 = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + p_2 \cos \theta = p_1 = \text{const}$, $h_1^2 = A^2\dot{\theta}^2 + A^2\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \text{const}$. Формулы (3.72) получены из соответствующих формул для случая Лагранжа движения твердого тела вокруг неподвижной точки при устремлении в последних расстояния между неподвижной точкой и центром масс к нулю. Подставляя (3.72) в формулу для \ddot{z}_o из (3.71) и используя равенство $\ddot{z}_G = -g$ при $t \geq t_1 + 0$, получаем:

$$\ddot{z}_o = -g + \left(\frac{h_1^2 + p_2^2}{A^2} \cos \theta - \frac{p_2 h_2}{A^2} \right) d.$$

Дифференцируя по t последнее равенство, получаем:

$$\frac{1}{d}\ddot{z}_o = \frac{h_1^2 + p_2^2}{A^2}(\cos \theta)' > 0 \text{ при } t = t_1 + 0,$$

т. к. было показано, что при $\dot{N}|_{t=t_1} < 0$ имеем $(\cos \theta)'|_{t=t_1} > 0$. Аналогично производится доказательство в том случае, если $\dot{N}|_{t=t_1} = 0$. Тогда берем первую ненулевую производную нечетного порядка функции $N(t)$, которая должна быть отрицательной (для того чтобы $N(t)$ в точке обнуления меняла знак). На этом доказательство утверждения завершено. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Первое из уравнений (3.72) можно проинтегрировать и получить формулу:

$$\cos[\theta(\tau)] = \frac{h_2 p_2}{h_1^2 + p_2^2} + \frac{h_1 \sqrt{h_1^2 + p_2^2 - h_2^2}}{h_1^2 + p_2^2} \sin(\omega_0 \tau + \beta_0), \quad \tau = t - t_1,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{A} \sqrt{h_1^2 + p_2^2}$, а константа β_0 выбирается из начального условия $\cos[\theta(0)] = \cos \theta_1$. Тогда для координаты $z_0(\tau)$ мы получим следующее выражение:

$$z_0(\tau) = R + \frac{g\tau^2}{2} + \left(\frac{L\alpha \cos \beta_0}{A^2 \omega_0} \right) \tau - \frac{L\alpha}{A^2 \omega_0^2} [\sin(\omega_0 \tau + \beta_0) - \sin \beta_0],$$

где $L = \frac{h_1 \sqrt{h_1^2 + p_2^2 - h_2^2}}{h_1^2 + p_2^2}$. Используя это выражение, можно вычислить момент $\tau = \tau_1$, когда $z_0(\tau_1) = R$, т. е. момент приземления тела и начало ударного процесса.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Результаты, приведенные в данном параграфе отражены в работе [61].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Вопросы схода с неударивающей голономной связью, которых касается утверждение 3.6, в общем виде рассматривались в работах [49–58].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Некоторые результаты о безотрывных движениях твердого тела по абсолютно шероховатой плоскости приведены в работе [59].

§ 3.3. Безотрывные движения волчка по абсолютно шероховатой плоскости

Постановка задачи и уравнения движения для абсолютно шероховатой плоскости

Пусть твердое тело вращения движется по абсолютно шероховатой (горизонтальной) плоскости в поле силы тяжести, т. е. наложена неголономная связь, заключающаяся в том, что скорость точки касания тела с плоскостью всегда равна нулю. Пусть O_*xyz — неподвижная система координат с осью O_*z , направленной по вертикали против силы тяжести, и плоскостью O_*xy , совпадающей с опорной плоскостью. G — центр масс тела, а $G\xi\eta\zeta$ — система координат, которая движется в пространстве и в теле так, что $G\zeta$ направлена по оси симметрии тела, $G\xi$ все время лежит в плоскости вертикального меридиана и перпендикулярна оси симметрии $G\zeta$, а $G\eta$ перпендикулярна $G\xi$ и $G\zeta$ и образует с ними правую систему координат. Пусть θ — угол между осью симметрии $G\zeta$ и вертикалью O_*z , φ — угол между вертикальным меридианом $G\xi\eta$ и какой-либо фиксированной меридианной плоскостью тела, ψ — угол между горизонтальной касательной к меридиану $G\xi\zeta$ в точке касания тела с плоскостью и неподвижной осью O_*x . Положение тела вполне описывается тремя углами θ , φ , ψ и координатами x , y точки касания. Как и в §§ 3.2 координата z центра масс G является функцией только угла θ и задается формулой (3.52), а нормальная реакция считается по формуле (3.53).

Пусть p , q , r — проекции вектора угловой скорости тела на оси системы $G\xi\eta\zeta$, а ξ , η , ζ — координаты точки касания в этой же системе.

Тогда, в соответствие с [47], имеем:

$$\xi = -f(\theta) \sin \theta - f'(\theta) \cos \theta, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta, \quad (3.73)$$

$$p = \dot{\psi} \sin \theta, \quad q = -\dot{\theta}, \quad r - p \operatorname{ctg} \theta = \dot{\varphi} \quad (3.74)$$

В работе [62] было показано, что рассматриваемая задача сводится к интегрированию двух линейных уравнений первого порядка и к квадратурам. Подробный библиографический список приведен в [47], а также в сборнике [48]. Для функций $\dot{\theta}$, p , r имеют место соотношения (см. [47]):

$$Ap^2 + (A + \xi^2 + \zeta^2)\dot{\theta}^2 + Cr^2 + (p\zeta - r\xi)^2 + gf(\theta) = 2h = \text{const}, \quad (3.75)$$

$$A \frac{dp}{d\theta} + C \frac{\zeta}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -A \operatorname{ctg} \theta p + Cr, \quad (3.76)$$

$$\zeta \frac{dp}{d\theta} - \frac{C + \xi^2}{\xi} \frac{dr}{d\theta} = -(\zeta \operatorname{ctg} \theta + \xi + \zeta')p + \xi' r. \quad (3.77)$$

Решение уравнений (3.73–3.77) рассматривается при следующем наборе начальных условий:

$$\{\theta(0), \quad \varphi(0), \quad \psi(0), \quad \dot{\theta}(0), \quad \dot{\varphi}(0), \quad \dot{\psi}(0)\}$$

Ясно, что $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ несущественны (в силу симметрии тела), и мы получаем следующий набор начальных условий:

$$\{\theta(0), \quad \dot{\theta}(0), \quad \dot{\varphi}(0), \quad \dot{\psi}(0)\}$$

В силу соотношений (3.74) этот набор сводится к такому:

$$\{\theta(0), \quad \dot{\theta}(0), \quad p(0), \quad r(0)\} \quad (3.78)$$

Поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти все такие наборы начальных условий (3.78), чтобы соответствующие решения рассмотренной задачи обеспечивали во всё время движения неотрицательность нормальной реакции N , вычисляемой по формуле (3.53).

Задача 2. Для наборов начальных условий (3.78), при которых во время движения реакция N меняет знак, выяснить возможность отрыва тела от опорной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Подчеркнем, что факт обнуления нормальной реакции N еще не говорит о том, что происходит отрыв тела от опорной плоскости. Может начаться и проскальзывание точки контакта. Подробно эти эффекты для плоского движения были рассмотрены в [37, 42, 60].

Формулировка и обоснование результатов

Из (3.75) мы можем найти $\dot{\theta}^2$ как функцию θ, p, r (и, конечно, начальных условий). Дифференцируя полученное соотношение по t и используя уравнения (3.76), (3.77), мы получим $\ddot{\theta}$ как функцию θ, p, r . Затем из формулы (3.53) мы найдем N как функцию θ, p, r и начальных условий (3.78). Полученное выражение мы должны исследовать на возможность обнуления в области возможных движений, получаемой из интеграла энергии (3.75):

$$h - gf(\theta) - Ap^2 - Cr^2 - (p\zeta - r\xi)^2 \geq 0$$

Однако полученные результаты будут представлять лишь **достаточные** условия неотрицательности N , т.к. мы не рассматриваем поведение функции N на траекториях системы (3.76—3.77).

Точные результаты удастся получить для сферического волчка. Пусть радиус сферической поверхности контакта равен R , а его центр

масс G находится на оси симметрии тела и отстоит от геометрического центра O сферы на расстоянии d . Тогда имеем:

$$f(\theta) = R + d \cos \theta, \quad \xi = -R \sin \theta, \quad \zeta = -d - R \cos \theta$$

Интегрирование уравнения (3.76) приводит к интегралу Желле:

$$Ap \sin \theta + Cr(\cos \theta + d/R) = Ah_1 = \text{const}, \quad (3.79)$$

Интегрирование уравнения (3.77) приводит к интегралу Чаплыгина:

$$r^2 \left[\frac{C}{R^2} + \sin^2 \theta + \frac{C}{A} \left(\frac{d}{R} + \cos \theta \right)^2 \right] = h_2^2 = \text{const}, \quad (3.80)$$

Обозначая $u = \cos \theta$, мы получим из (3.75), с учетом (3.79), (3.80):

$$(A + R^2 + d^2 + 2Rdu)\dot{\theta}^2 = 2h - 2gR(1 + \frac{d}{R}u) - S(u), \quad (3.81)$$

где функция $S(u)$ определяется равенством:

$$(1 - u^2)S(u) = h_1^2 \left[A + R^2(u + \frac{d}{R})^2 \right] + R^2 h_2^2 \left[1 - u^2 + \frac{C}{A}(u + \frac{d}{R})^2 \right] - \\ - 2h_1 h_2 R^2 (u + \frac{d}{R}) \sqrt{\frac{C}{R^2} + 1 - u^2 + \frac{C}{A}(\frac{d}{R} + u)^2}$$

Область возможных движений задается неравенством

$$2h - 2gR(1 + \frac{d}{R}u) - S(u) \geq 0, \quad (3.82)$$

Дифференцируя по t соотношение (3.81), мы находим $\ddot{\theta}$ и далее из (3.53) получим N как функцию θ и начальных условий задачи. Несложно показать, что при $h_1 \neq 0, h_2 = 0$ или $h_1 = 0, h_2 \neq 0$ исследование знака функции N сводится к исследованию кубического уравнения от $u = \cos \theta$, коэффициенты которого зависят от параметров тела и начальных условий. Покажем как провести полный анализ знака нормальной реакции N при $h_1 = h_2 = 0$. В этом случае из интегралов (3.79) и (3.80) следует, что $p = r = 0$, и движение тела является

плоским. Тогда несложные вычисления приводят к формуле:

$$\frac{4R^2}{g}N = [\omega_1^2 - \xi_0(1 + \sigma)] + 2y + \frac{\xi_0\xi_1\xi_2(1 + \sigma)}{y^2}, \quad (3.83)$$

где:

$$\sigma = \dot{\theta}_0^2 R/g, \quad b^2 = A + R^2 + d^2, \quad \omega_1^2 = 4R^2 - 2b^2 \geq 0,$$

$$\xi_0 = b^2 + 2dRu_0, \quad \xi_1 = b^2 - 2dR, \quad \xi_2 = b^2 + 2dR,$$

$$y = b^2 + 2dRu$$

Исследование функции (3.83), с учетом неравенства (3.82), приводит к следующему результату.

Утверждение 8. Нормальная реакция из (3.83) при плоско-параллельном качении тела без проскальзывания обращается в нуль **только** в следующих случаях:

1) $0 \leq \omega_1^2 < \xi_0 - 3(\xi_0\xi_1\xi_2)^{1/3}$, при любом $\sigma > 0$, причем, при $\sigma < (\xi_2/\xi_1) - 1$ обнуление происходит в **колебательном** режиме (тело не успевает сделать полный оборот), а при $\sigma \geq (\xi_2/\xi_1) - 1$ обнуление происходит в режиме качения (ротационном);

2) $\xi_0 - 3(\xi_0\xi_1\xi_2)^{1/3} \leq \omega_1^2 < (\xi_2^2/\xi_1) - 3\xi_2$, при $\sigma > \varepsilon_* - 1$, где ε_* — корень уравнения $\omega_1^2 - \xi_0\varepsilon + 3(\varepsilon\xi_0\xi_1\xi_2)^{1/3} = 0$ на интервале $\varepsilon \in [1, \infty]$. Этот корень при данных условиях существует и является единственным. Здесь обнуление происходит в режиме качения.

3) $(\xi_2^2/\xi_1) - 3\xi_2 \leq \omega_1^2 < \infty$, при $\sigma \geq \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{\omega_1^2 + 2\xi_2}{\xi_2 - \xi_1} - 1$ и обнуление происходит в режиме качения. Начальные условия, не удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) являются искомыми и решают в сделанных предположениях задачу 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 8.

Доказательство основано на несложном исследовании экстремумов по y функции N из (3.83), с учетом неравенства (3.82), которое

в данном случае имеет простой вид:

$$2h - 2gR - 2gdu \geq 0$$

Сформулируем теперь результат, касающийся решения задачи 2, т. е. происходит ли отрыв тела от плоскости после того, как нормальная реакция N обратилась в нуль. Условимся в дальнейшем считать, что $\theta \in [0, \pi]$, не накладывая ограничений на знак $\dot{\theta}$. Тогда случай $\theta \in [\pi, 2\pi]$ становится полностью симметричным и его можно не рассматривать. Пусть при $t = t_1 \neq t_0$ произошло обнуление нормальной реакции: $N(t_1) = 0$. Тогда имеет место следующее утверждение. ■

Утверждение 9. Введем величину \varkappa по формуле:

$$\varkappa = -d \sin \theta_1 (\ddot{\theta}_1^- - \ddot{\theta}_1^+), \quad (3.84)$$

где $\theta_1 = \theta(t_1)$, $\ddot{\theta}_1^-$ вычисляется дифференцированием соотношения (3.81) в момент $t = t_1$, а $\ddot{\theta}_1^+$ вычисляется из формул регулярной прецессии Эйлера-Пуансо при $t = t_1 + 0$ и дается формулой:

$$\ddot{\theta}_1^+ = \frac{(p_1 \cos \theta_1 - p_2)(p_1 - p_2 \cos \theta_1)}{A^2 \sin^3 \theta_1}, \quad (3.85)$$

$$p_1 = A\dot{\psi}(t_1) \sin^2 \theta_1 + p_2 \cos \theta_1, \quad p_2 = C(\dot{\varphi}(t_1) + \dot{\psi}(t_1) \cos \theta_1)$$

(см. также формулы (3.72)). Тогда при $\varkappa > 0$ происходит отрыв тела от плоскости, при $\varkappa < 0$ отрыв невозможен, а случай $\varkappa = 0$ требует дополнительного исследования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 9.

Доказательство производится следующим образом. Пусть $\vec{\rho} = \vec{OG}$. Тогда имеем при $t = t_1 - 0$:

$$\ddot{z}_G = [\bar{\omega}_1 \times \dot{\bar{\rho}}_1]_z + [\bar{\varepsilon}_1^- \times \bar{\rho}_1]_z = N - g = -g \quad (3.86)$$

Если отрыв произошел, то начинается регулярная прецессия Эйлера-Пуансо и должно быть $\ddot{z}_o|_{t=t_1+0} \geq 0$. Вычисляем $\ddot{z}_o|_{t=t_1+0}$ по формулам кинематики твердого тела, предполагая, что $\bar{\omega}_1$, $\bar{\rho}_1$, $\dot{\rho}_1$ остаются без изменения:

$$\ddot{z}_o|_{t=t_1+0} = \ddot{z}_G + [\bar{\omega}_1 \times (-\dot{\rho}_1)]|_z + [\bar{\varepsilon}_1^+ \times (-\bar{\rho}_1)]|_z, \quad (3.87)$$

Из (3.86) и (3.87) получаем:

$$\ddot{z}_o|_{t=t_1+0} = [(\bar{\varepsilon}_1^- - \bar{\varepsilon}_1^+) \times \bar{\rho}_1]|_z, \quad (3.88)$$

где $\bar{\varepsilon}_1^+$ - вектор углового ускорения при регулярной прецессии Эйлера-Пуансо. Векторы $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\rho}$ в проекциях на оси $G_{\xi\eta\zeta}$:

$$\varepsilon_\xi = \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\varphi}, \quad \rho_\xi = 0,$$

$$\varepsilon_\eta = -\ddot{\theta} - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \rho_\eta = 0,$$

$$\varepsilon_\zeta = \ddot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta, \quad \rho_\zeta = d.$$

Тогда $[\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}]|_z = [\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}]_\xi \sin \theta + [\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}]_\zeta \cos \theta = d \sin \theta (-\ddot{\theta} - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \theta)$

Используя полученное соотношение, формулу (3.88) и тот факт, что θ , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ не изменяются при переходе к регулярной прецессии, получим:

$$\ddot{z}_o|_{t=t_1+0} = -d \sin \theta_1 (\ddot{\theta}_1^- - \ddot{\theta}_1^+) = \varkappa$$

Отсюда и следует справедливость утверждения 9. ■

Применим утверждение 9 к случаю плоского движения тела, которое было рассмотрено в утверждении 8.

Утверждение 10. Для плоского движения твердого тела ($h_1 = h_2 = 0$, $\dot{\theta}_0 \neq 0$) в момент $t = t_1$ обнуления нормальной реакции соблюдается равенство:

$$\varkappa = -d^2 \sin^2 \theta_1 \frac{(b^2 + 2Rdu_0)(\dot{\theta}_0^2 R + g)}{(b^2 + 2Rdu_1)^2}, \quad (3.89)$$

где $b^2 = A + d^2 + R^2$, $u_0 = \cos \theta_0$, $u_1 = \cos \theta_1$ Из (3.89) следует, что $\varkappa < 0$, т.е. отрыва при плоском движении быть не может.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 10.

Доказательство следует из таких рассуждений. Для рассматриваемых начальных условий имеем $\ddot{\theta}_1^+ = 0$ (равномерное вращение при отрыве), а из (3.81) получим:

$$\ddot{\theta}^- = \sin \theta \frac{gb^2d + 2hRd - 2gR^2d}{(b^2 + 2Rdu)^2},$$

где $2h = 2gR + 2gdu_0 + \dot{\theta}_0^2(b^2 + 2Rdu_0)$. Используя формулу (3.84) и полученные соотношения, приходим к формуле (3.89). ■

Рассмотрим предельный случай: $R \rightarrow 0$, т.е. волчок на тонкой ножке. Переходя к пределу ($R \rightarrow 0$, по аналогии с [63]) в формулах (3.79), (3.80), (3.81), мы получим классические уравнения волчка:

$$r = \dot{\varphi} + u\dot{\psi} = r_0 = \text{const}, \quad u = \cos \theta, \quad (3.90)$$

$$p = \dot{\psi}\sqrt{1 - u^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \left[p_0\sqrt{1 - u_0^2} + \sigma r_0(u_0 - u) \right], \quad (3.91)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} (\omega_2^2 - 2\omega_1^2 u) - \frac{(\varepsilon_1 - \sigma r_0 u)^2}{1 - u^2} \geq 0, \quad (3.92)$$

где обозначено:

$$\mu_1 = C/d^2, \quad \mu_2 = C/A, \quad \sigma = \mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2),$$

$$\omega_1^2 = g/d, \quad \omega_2^2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} (p_0^2 + \dot{\theta}_0^2) + 2\omega_1^2 u_0,$$

$$\varepsilon_1 = p_0\sqrt{1 - u_0^2} + \sigma r_0 u_0.$$

Из (3.92) получим $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta \left[-\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \omega_1^2 + \frac{(\varepsilon_1 - \sigma r_0 u)(\sigma r_0 - \varepsilon_1 u)}{(1 - u^2)^2} \right], \quad (3.93)$$

Используя (3.92), (3.93), из (3.53) получим следующее выражение для нормальной реакции:

$$\frac{1}{d}N = u^2 \left(\frac{3\omega_1^2\sigma}{\mu_1} \right) - u \left(\frac{\omega_2^2\sigma}{\mu_1} + \sigma^2 r_0^2 \right) + \left(\frac{\omega_1^2\sigma}{\mu_2} + \varepsilon_1 \sigma r_0 \right), \quad (3.94)$$

Область возможных движений дается неравенством из (3.92). Используя (3.93) и формулу для $\ddot{\theta}^+$ в случае регулярной прецессии Эйлера-Пуансо, мы получаем следующее выражение для величины \varkappa , определяющей возможность отрыва:

$$\varkappa = -\frac{\sigma d}{\mu_1} \left[\omega_1^2(1 - u^2) + p_0 r_0 \mu_2 \sqrt{1 - u_0^2} + \sigma r_0^2 \mu_2 (u_0 - u) \right], \quad (3.95)$$

Из (3.95), в частности, следует, что при $r_0 = 0$ величина $\varkappa < 0$, т. е. отрыва при обнулении нормальной реакции быть не может. Кроме того, несложно показать, что при $r_0 = 0$ и выборе достаточно большого p_0 всегда произойдет обнуление нормальной реакции в области возможных движений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты, приведенные в данном параграфе отражены в работе [59].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что эффект обнуления нормальной реакции волчка рассматривался в трактате Рауса [27, стр.175], где утверждалось, что волчок подпрыгнет над плоскостью. Как видим, это не всегда так. Кроме того, для плоских движений твердого тела с качением без проскальзывания такого рода заблуждения встречаются во многих учебниках, учебных пособиях и задачниках по теоретической механике. Подробное обсуждение этих вопросов приведено в [60, 64, 65].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Явление нарушения контакта волчка с опорной плоскостью отмечалось в работе [66], где в качестве причины этого эффекта указывалась неидеальная ровность поверхностей контакта. В описанных в работе [66] опытах с волчками регистрировался характерный звук («дребезг»). В настоящей работе показано, что нарушение контакта является **неотъемлемым свойством** рассматриваемой модели движения твердого тела при наличии односторонней связи. Это свойство необходимо принимать во внимание при исследовании движения твердого тела по поверхности, в частности, при исследовании устойчивости и квазистационарных движений.

§ 3.4. К динамике неголономных моделей колесных экипажей

В работе [75] рассматриваются две задачи неголономной механики: 1) движение без проскальзывания колесной пары (два диска свободно укрепленных на оси) по наклонной плоскости в поле силы тяжести, и 2) движение плоской колесной модели типа скейтборда. При составлении уравнений движения используются основные теоремы динамики и кинематические соотношения, характеризующие неголономные связи. Эта методика дает возможность наряду с определением движения системы, получать также и выражения для сил, реализующих движение (нормальные и касательные силы реакции опорной плоскости). Таким образом реализуется известный принцип Ньютона о неразделимости сил и движения. Отметим, что в большинстве недавних работ [67–70] при составлении уравнений движения используются такие известные уравнения, как уравнения Аппеля, Тамена–Больцмана и т. п. Помимо аналитической сложности этих уравнений, в них также отсутствуют реакции связей, что снижает их ценность для практических задач.

Колесная пара на наклонной плоскости. Уравнения движения, постановка задачи и формулировка результатов

На рис. 3.7 изображена колесная пара на наклонной плоскости. Эта конструкция представляет собой два однородных диска, массой m и радиуса b каждый, свободно насаженных на ось O_1O_2 , представляющую собой однородный стержень массы M и длины $2l$. Таким образом, диски (колеса) могут свободно и независимо друг от друга вращаться вокруг оси O_1O_2 без трения (см. рис. 3.7).

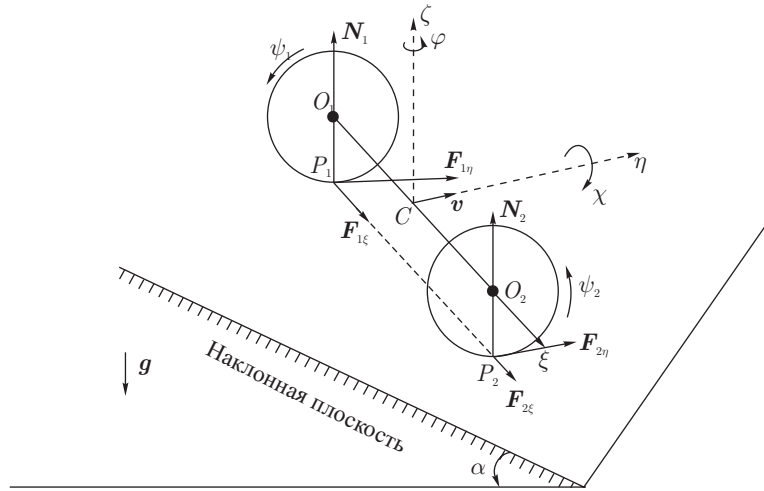


Рис. 3.7. Колесная пара на наклонной плоскости, в поле силы тяжести. P_1, P_2 — точки контакта колес с опорной плоскостью

Описанная система движется под действием силы тяжести по шероховатой наклонной плоскости (угол наклона к горизонтали равен α) так, что в точках контакта колес с плоскостью (точек P_1, P_2 , см. рис. 3.7) не происходит проскальзывания (ни бокового, ни продольного).

Пусть C — центр масс системы (ясно, что он находится в середине отрезка O_1O_2), а $C\xi\eta\zeta$ — система координат, жестко связанная с осью O_1O_2 , причем (см. рис. 3.7) $C\xi$ направлена вдоль оси O_1O_2 , $C\zeta$ — нормально наклонной плоскости вверх, а $C\eta$ — перпендикулярна $C\xi$ и $C\zeta$ и образует с ними правую систему координат.

Движение колесной пары происходит под действием силы тяжести и сил реакции плоскости, возникающих в точках контакта P_1 и P_2 . Эти силы изображены на рис. 3.7: N_1, N_2 — нормальные силы реакции, причем значения их проекций на ось $C\zeta$ должны быть неотрицательными ($N_{1\zeta} \geq 0, N_{2\zeta} \geq 0$), $F_{1\xi}, F_{2\xi}$ — поперечные, а $F_{1\eta}, F_{2\eta}$ — продольные силы сцепления (силы трения покоя). В дальнейшем будем предполагать, что отрыва не происходит и $N_{1\zeta}, N_{2\zeta}$ существенно

положительные величины. Кроме того, пусть коэффициент трения опорной плоскости настолько велик, что в точках P_1, P_2 отсутствуют проскальзывания, т. е. $\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{P_2} = 0$.

Пусть ψ_1, ψ_2 — собственные углы поворота колес относительно оси O_1O_2 , φ — угол поворота оси O_1O_2 в наклонной плоскости, отсчитываемый от линии наибольшего ската против часовой стрелки (если смотреть с положительного конца оси $C\zeta$).

Таким образом, угловая скорость оси O_1O_2 (а, значит, и системы $C\xi\eta\zeta$) в проекциях на оси ξ, η, ζ есть:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \dot{\varphi}). \quad (3.96)$$

Угловая скорость каждого из колес, в проекциях на те же оси:

$$\boldsymbol{\omega}_j = (\dot{\psi}_j, 0, \dot{\varphi}), \quad j = 1, 2. \quad (3.97)$$

Вычислим скорость точки O_1 , считая ее как принадлежащей колесу 1:

$$\mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{v}_{P_1} + [\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{P}_1\mathbf{O}_1]$$

Отсюда, т. к. $\mathbf{v}_{P_1} = 0$, получим:

$$v_{O_1\xi} = 0 \quad v_{O_1\eta} = -b\dot{\psi}_1, \quad v_{O_1\zeta} = 0. \quad (3.98)$$

С другой стороны, т. к. точка O_1 принадлежит оси O_1O_2 , то получим:

$$\mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{CO}_1],$$

или в проекциях на оси ξ, η, ζ имеем:

$$v_{O_1\xi} = v_{C\xi}, \quad v_{O_1\eta} = v_{C\eta} - l\dot{\varphi}, \quad v_{O_1\zeta} = v_{C\zeta}. \quad (3.99)$$

Из (3.98), (3.99) следуют соотношения

$$v_{C\xi} = v_{C\zeta} = 0, \quad v_{C\eta} - l\dot{\varphi} = -b\dot{\psi}_1.$$

Аналогичные рассуждения для точки O_2 приводят к соотношениям:

$$v_{C\xi} = v_{C\zeta} = 0, \quad v_{C\eta} + l\dot{\varphi} = -b\dot{\psi}_2.$$

Таким образом, условия непроскальзывания приводят к следующим выводам:

- а) скорость точки C имеет ненулевую проекцию только на продольную ось $C\eta$, будем обозначать ее в дальнейшем через v , т. е.

$$v_{C\xi} = 0, \quad v_{C\eta} = v, \quad v_{C\zeta} = 0; \quad (3.100)$$

- б) выполняются два соотношения:

$$\begin{cases} v + l\dot{\varphi} = -b\dot{\psi}_2 \\ v - l\dot{\varphi} = -b\dot{\psi}_1 \end{cases} \quad (3.101)$$

Переходим к записи уравнений динамики для колесной пары. Уравнения движения центра масс системы в осях $C\xi\eta\zeta$, с учетом (3.96) и (3.100), имеют вид:

$$\begin{cases} m_0(-v\dot{\varphi}) = F_1\xi + F_2\xi + m_0g \sin \alpha \sin \varphi \\ m_0\dot{v} = F_1\eta + F_2\eta + m_0g \sin \alpha \cos \varphi \\ 0 = N_1 + N_2 - m_0g \cos \alpha, \end{cases} \quad (3.102)$$

где $m_0 = M + 2m$ — общая масса системы.

Для составления уравнений изменения кинетического момента в осях $C\xi\eta\zeta$, вычислим сначала сам кинетический момент K_C в этих осях. Обозначим J_ξ , J_ζ — соответственно, осевой и экваториальный моменты инерции колеса ($J_\xi = mb^2/2$, $J_\zeta = mb^2/4$), J_1 — момент инерции стержня O_1O_2 относительно оси $C\zeta$ (или $C\eta$) ($J_1 = Ml^2/3$). Используя симметрию системы и формулы (3.96) и (3.97) для угловых скоростей, мы получим:

$$K_{C\xi} = J_\xi(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2), \quad K_{C\eta} = 0, \quad K_{C\zeta} = J_0\dot{\varphi}, \quad (3.103)$$

где $J_0 = J_1 + 2J_\zeta + 2ml^2$. Отметим, что равенство $K_{C\eta} = 0$ следует из того, что нет вращения колесной пары вокруг продольной оси $C\eta$ (т. е. колеса не отрываются от опорной плоскости). Используя (3.103) и соотношение (3.96) для угловой скорости системы $C\xi\eta\zeta$, получим уравнения теоремы об изменении кинетического момента \mathbf{K}_C в осях $C\xi\eta\zeta$:

$$\begin{cases} J_\xi(\ddot{\psi}_1 + \ddot{\psi}_2) = b(F_{1\eta} + F_{2\eta}) \\ J_\xi\dot{\varphi}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = (N_1 - N_2)l - b(F_{1\xi} + F_{2\xi}) \\ J_0\ddot{\varphi} = l(F_{2\eta} - F_{1\eta}). \end{cases} \quad (3.104)$$

Далее запишем уравнения для изменения кинетического момента для каждого из колес в отдельности относительно оси ξ , в предположении, что они вращаются свободно на оси ξ и нет поворотов вокруг оси $C\eta$, т. е. отрывов:

$$J_\xi\ddot{\psi}_j = bF_{j\eta}, \quad j = 1, 2. \quad (3.105)$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему 10 уравнений (3.101), (3.102), (3.104), (3.105) для определения 10 неизвестных: v , φ , ψ_1 , ψ_2 , N_1 , N_2 , $F_{1\xi}$, $F_{2\xi}$, $F_{1\eta}$, $F_{2\eta}$. Отметим, что ψ_1 и ψ_2 являются циклическими переменными (решение зависит только от их производных).

Задача, которую мы будем в дальнейшем рассматривать, заключается в следующем. Пусть заданы начальные условия:

$$\{v_C(0), \varphi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\psi}_1(0), \dot{\psi}_2(0)\},$$

такие, что удовлетворены равенства (3.100) и (3.101) при $t = 0$ (т. е. в начальный момент мы «запускаем» колесную пару по плоскости так, что не нарушаются условия неголономной (кинематической) связи). Требуется определить решение системы (3.101), (3.102), (3.104), (3.105),

которое удовлетворяет условию безотрывности: $N_j > 0, j = 1, 2$. В более точной постановке, если задан коэффициент трения f плоскости с колесами, требуется также в процессе движения удовлетворить неравенствам Кулона:

$$F_{j\xi}^2 + F_{j\eta}^2 \leq f^2 N_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Такого рода задача рассматривалась для конька Чаплыгина на наклонной плоскости с трением в работе [71].

Преступим к решению поставленной задачи. Отметим, что в уравнения движения неизвестные $F_{1\xi}, F_{2\xi}$ входят только в виде суммы $F_\xi = F_{1\xi} + F_{2\xi}$ так, что на самом деле, неизвестных всего девять. Однако, так будет видно из дальнейшего решения, независимых уравнений также ровно девять (сумма двух уравнений из (3.105) дает первое уравнение (3.104)!)

Решаем систему (3.101), (3.102), (3.104), (3.105) последовательным исключением неизвестных.

а) Исключаем из первого уравнения (3.102) и второго уравнения (3.104) неизвестную $F_\xi = F_{1\xi} + F_{2\xi}$. Получим уравнение:

$$J_\xi \dot{\varphi}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = (N_1 - N_2)l - bm_0(v\dot{\varphi} + g \sin \alpha \sin \varphi).$$

б) Исключаем $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, F_{1\eta}, F_{2\eta}$:

$$F_{1\eta} = -\frac{J_\xi}{b^2}(\dot{v} - l\ddot{\varphi}), \quad F_{2\eta} = -\frac{J_\xi}{b^2}(\dot{v} + l\ddot{\varphi})$$

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} -\dot{\varphi} \cdot J_{\xi} \frac{2v}{bl} = N_1 - N_2 + \frac{bm_0}{l}(v\dot{\varphi} + g \sin \alpha \sin \varphi), \\ m_0 \dot{v} = -\frac{2J_{\xi}}{b^2} \dot{v} + m_0 g \sin \alpha \sin \varphi, \\ 0 = N_1 + N_2 - m_0 g \cos \alpha, \\ \left(J_0 + J_{\xi} \frac{2l^2}{b^2} \right) \ddot{\varphi} = 0. \end{cases} \quad (3.106)$$

Мы получили систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных: φ, v, N_1, N_2 . Решения системы (3.106) нетрудно получают:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_0 = \text{const} - \dot{\varphi}(0), \\ \dot{v} = kg \sin \alpha \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad k = \frac{1}{1 + 2\rho^2/b^2}, \end{cases} \quad (3.107)$$

$$\begin{cases} 2N_1 = m_0 \left[g \cos \alpha - g \frac{b}{l} \sin \alpha \sin \varphi - \frac{b}{l} v \omega_0 - \frac{b}{l} v \omega_0 \left(\frac{2g^2}{b^2} \right) \right], \\ 2N_2 = m_0 \left[g \cos \alpha + g \frac{b}{l} \sin \alpha \sin \varphi + \frac{b}{l} v \omega_0 + \frac{b}{l} v \omega_0 \left(\frac{2g^2}{b^2} \right) \right], \end{cases} \quad (3.108)$$

где $\rho^2 = J_{\xi}/m_0$.

Интегрирование соотношения (3.107) приводит к формуле:

$$v(t) = v_0 + \frac{g \sin \alpha}{\omega_0 \left(1 + \frac{2\rho^2}{b^2} \right)} [\sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \sin \varphi_0]. \quad (3.109)$$

Пусть x — координата центра масс C по линии наибольшего ската (вниз по наклонной плоскости), y — перпендикулярная ей координата, тогда имеем:

$$\dot{x} = v \cos \varphi, \quad \dot{y} = v \sin \varphi.$$

Несложное интегрирование последних равенств приводит к выводу, что центр масс движется по циклоиде, перпендикулярной линии наибольшего ската, т. е. колесная пара не скатывается вниз.

Исследование формул (3.107), (3.108) приводит к заключению, что безотрывное движение, т. е. положительность нормальных реакций N_1, N_2 , реализуется при выполнении неравенства:

$$\frac{\omega_0 v_0}{g} \left(1 + \frac{2\rho^2}{b^2} \right) < \frac{l}{b} \cos \alpha - 2 \sin \alpha + \sin \alpha \sin \varphi_0. \quad (3.110)$$

Например, при $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ имеем $\operatorname{tg} \alpha < l/(2b)$, т. е. опрокидывание может случиться при достаточно больших α : $\operatorname{tg} \alpha > l/(2b)$.

Пусть неравенство (3.110) нарушено, тогда обязательно наступит такой момент времени, что произойдет обнуление нормальной реакции, например, N_1 . Итак, пусть $N_1(t_1) = 0$ и дальнейшее движение возможно только с отрывом колеса 1 (при сохранении контакта колеса 2). Рассмотрим начало такого отрыва, т. е. возникающий поворот колесной пары вокруг оси $C\eta$. Будем определять такой поворот углом χ , отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть с положительной части оси $C\eta$ (см. рис. 3.7). Рассматривая дальнейшее движение будем считать, что $\chi \approx 0$, $\dot{\chi} \approx 0$, но $\ddot{\chi} \neq 0$. Тогда имеем:

$$v_{C\xi} = 0, \quad v_{C\eta} = v, \quad v_{C\zeta} = l\dot{\chi};$$

$$K_{C\xi} = J_\xi(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2), \quad K_{C\eta} = J_0\dot{\chi}, \quad K_{C\zeta} = J_0\dot{\varphi},$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \dot{\chi}, \dot{\varphi}).$$

Тогда уравнения движения (3.102), (3.104), (3.105) и имеют вид:

$$m_0(-v\dot{\varphi}) = F_{2\xi} + m_0g \sin \alpha \sin \varphi$$

$$m_0\dot{v} = F_{2\eta} + m_0g \sin \alpha \cos \varphi$$

$$m_0(\ddot{\chi}l) = N_2 - m_0g \cos \alpha$$

$$J_\xi \ddot{\psi}_2 = bF_{2\eta}$$

$$J_0\ddot{\chi} + J_\xi\dot{\varphi}(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2) = -N_2l - bF_{2\xi}$$

$$J_0\ddot{\varphi} = lF_{2\eta}$$

$$J_\xi\ddot{\psi}_1 = 0, \quad J\ddot{\psi}_2 = bF_{2\eta}$$

Кроме того, (3.101) превратится в одну кинематическую связь:

$$v + l\dot{\varphi} = -b\dot{\psi}_2 \rightarrow \dot{v} + l\ddot{\varphi} = -b\ddot{\psi}_2.$$

Последовательно исключая неизвестные, $F_{2\xi}$, $F_{2\eta}$, N_2 , $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$, мы получим три уравнения:

$$\dot{v} \left(m_0 + m_0 \frac{\rho^2}{b^2} \right) + m_0 \frac{\rho^2}{b^2} l \ddot{\varphi} = m_0g \sin \alpha \cos \varphi, \quad (3.111)$$

$$\ddot{\chi}(J_0 + m_0l^2) = \frac{2v\dot{\varphi}}{b}J_\xi + bm_0v\dot{\varphi} + m_0g(b \sin \alpha \sin \varphi - l \cos \alpha), \quad (3.112)$$

$$J_0\ddot{\varphi} - m_0l\dot{v} = -m_0gl \sin \alpha \cos \varphi, \quad (3.113)$$

для определения трех неизвестных φ , v , χ .

Учтем теперь, что в момент отрыва $N_1 = 0$, т. е. в соответствии с (3.108), имеем:

$$g \cos \alpha - g \frac{b}{l} \sin \alpha \sin \varphi - \frac{b}{l} v \omega_0 - \frac{b}{l} v \omega_0 \frac{2\rho^2}{b^2} = 0.$$

Тогда и правая часть равенства (3.112) будет равна нулю, т. е. $\ddot{\chi} = 0$.

Дифференцируя (3.112), вычисляем $\ddot{\chi}$:

$$(J_0 + m_0l^2)\ddot{\chi} = \frac{2\dot{v}\dot{\varphi}}{b}J_\xi + \frac{2v}{b}J_\xi\ddot{\varphi} + bm_0(\dot{v}\dot{\varphi} + v\ddot{\varphi}) + m_0gb \sin \alpha \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad (3.114)$$

Из (3.111) и (3.113) находим:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\rho^2 g l \sin \alpha \cos \varphi}{\rho^2 \rho_0^2 + \rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2}, \quad \dot{v} = \frac{(\rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2) g \sin \alpha \cos \varphi}{\rho^2 \rho_0^2 + \rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2},$$

где $\rho^2 = J_\xi / m_0$, $\rho_0^2 = J_0 / m_0$.

Подставляя полученные выражения для $\ddot{\varphi}$ и \dot{v} в (3.114), находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{J_0 + m_0 l^2}{m_0} \right) \ddot{\chi} &= \dot{v} \dot{\varphi} \left(b + \frac{2\rho^2}{b} \right) + v \ddot{\varphi} \left(b + \frac{2\rho^2}{b} \right) + g b \sin \alpha \cos \varphi \dot{\varphi} = \\ &= b g \sin \alpha \cos \varphi \left[\left(1 + \frac{2\rho^2}{b} \right) \left(\dot{\varphi} \frac{\rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2}{\rho^2 \rho_0^2 + \rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2} - v \frac{\rho^2 l}{\rho^2 \rho_0^2 + \rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2} \right) + \dot{\varphi} \right] = \\ &= b g \sin \alpha \cos \varphi \left[\left(1 + \frac{2\rho^2}{b} \right) \frac{\dot{\varphi}(\rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2) - v \rho^2 l}{\rho^2 \rho_0^2 + \rho_0^2 b^2 + \rho^2 l^2} + \dot{\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (3.115)$$

где $\rho^2 = \frac{J_\xi}{m_0}$, $\rho_0^2 = \frac{J_0}{m_0}$

Возьмем, к примеру, такие начальные условия:

$$v_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \neq 0.$$

Тогда имеем, в соответствии с формулой (3.109):

$$v(t) = \frac{g \sin \alpha}{\omega_0 \left(1 + \frac{2\rho^2}{b} \right)} \sin(\omega_0 t).$$

Для нормальной реакции N_1 из (3.108) получим:

$$\frac{2}{m_0} N_1 = g \cos \alpha - 2g \frac{b}{l} \sin \alpha \sin(\omega_0 t) = g \cos \alpha \left(1 - \frac{2b}{l} \operatorname{tg} \alpha \sin \omega_0 t \right).$$

Обнуление N_1 происходит первый раз при $t = t_1$, таком, что:

$$\sin(\omega_0 t_1) = \frac{l}{2b \operatorname{tg} \alpha} \quad \left(\operatorname{tg} \alpha > \frac{l}{2b} \right).$$

Тогда при $t = t_1$ имеем:

$$v(t_1) = \frac{g \cos \alpha}{\omega_0 \left(1 + \frac{2\rho^2}{b} \right)} \frac{l}{2b}.$$

Ясно, что выбирая ω_0 достаточно малым, мы можем добиться больших значений $v(t_1)$, а формула (3.115) нам тогда дает $\ddot{\chi} < 0$, т. е. возникает парадоксальная ситуация при отрыве! Эти рассуждения приводят нас к выводу, что в случаях, когда могут быть обнуления нормальной реакции (нарушение неравенства (3.110)) необходимо учитывать конечный коэффициент трения и рассматривать процесс движения колесной пары с возможными переходами к ситуации проскальзывания колес, что, конечно, усложняет решение задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно обобщить решение задачи на тот случай, когда к колесной паре приложены другие внешние силы (помимо силы тяжести). Например, тяговая сила (колесная пара — автомобильный прицеп) или управляющий момент на оси O_1O_2 (колесная пара автомобиля или робот-тележка). Отметим, что рассматриваемая задача изучалась еще классиками теоретической механики [27].

Динамика плоской колесной модели (скейтборд)

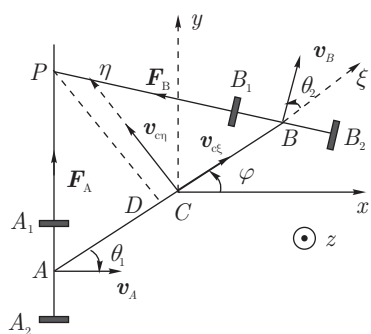


Рис. 3.8.

На рис. 2 изображена модель скейтборда в плане (т. е. вид сверху). Это — две колесные пары A_1A_2, B_1B_2 , соединенные в своих центрах масс жестким стержнем AB . Шарниры в соединениях A и B предполагаются идеальными и цилиндрическими, а качение колес A_1, A_2, B_1, B_2 по опорной плоскости происходит без проскальзывания, т. е. наложена неголономная связь.

В данной модели мы предполагаем (так же как и в [67–70]), что эта связь реализуется только поперечными силами F_A и F_B , приложенными, соответственно, к A_1A_2 и B_1B_2 (см. рис. 3.8). Учет продольных сил рассматривался, например, в статье [72].

Наличие неголономной связи дает право считать, что скорости центров масс колесных пар, обозначаемых как \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B , направлены всегда перпендикулярно соответствующим осям, т.е. $\mathbf{v}_A \perp A_1A_2$, $\mathbf{v}_B \perp B_1B_2$ (см. рис. 3.8).

Далее введены следующие обозначения: θ_1, θ_2 — углы отклонения колесных пар A_1A_2, B_1B_2 от продольной оси ξ скейтборда, причем θ_1 отсчитываем по часовой стрелке, а θ_2 — против оной; $AC = a, CB = b, C$ — центр масс всей системы, который мы предполагаем неизменным, т.е. $a = \text{const}, b = \text{const}$; φ — угол поворота стержня AB относительно неизменно ориентированной оси Cx , отсчитываемый против часовой стрелки; P — мгновенный центр скоростей стержня AB , который в силу неголономных связей, является пересечением прямых A_1A_2 и B_1B_2 ; m_{AB}, m_A, m_B — массы, соответственно, стержня AB , колесных пар A_1A_2, B_1B_2 ; J_{AB} — момент инерции стержня AB — вместе с сосредоточенными массами m_A и m_B на его концах относительно точки C ; J_A, J_B — моменты инерции колесных пар, соответственно A_1A_2, B_1B_2 относительно собственных центров масс A и B ; $C\xi\eta$ — система координат, жестко связанная со стержнем AB .

Для трех углов $\varphi, \theta_1, \theta_2$ мы можем составить три уравнения динамики, которые не содержат неизвестных сил F_1, F_B и сил реакций в шарнирах A и B :

$$K_{Pz} + m [\mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_c]_z = 0, \quad (3.116)$$

$$J_A(\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}_1) = M_{Az}, \quad (3.117)$$

$$J_B(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}_2) = M_{Bz}; \quad (3.118)$$

Уравнение (3.116) — это уравнение кинетического момента относительно подвижной точки P (см. [73]); а уравнения (3.117) и (3.118)

— уравнения кинетических моментов колесных пар относительно их собственных центров масс. В этих уравнениях введены обозначения: $m = m_{AB} + m_A + m_B$ — общая масса системы; K_{Pz} — кинетический момент системы относительно точки P , v_p — скорость точки P (как геометрической относительно неподвижной системы координат), v_c — скорость центра масс C ; M_{Az}, M_{Bz} — управляющие моменты в шарнирах A и B (если таковые имеются). Пусть D — проекция точки P на стержень AB (см. рис. 3.8). Обозначим $CD = \xi_0$. Тогда имеем, в соответствии с теоремой Кенига (см. [74]):

$$K_{Pz} = K_{cz} + m(v_{c\xi} \cdot PD + v_{c\eta} \cdot CD);$$

$$K_{cz} = J_{AB}\dot{\varphi} + J_B(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2) + J_A(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_1).$$

Далее, из кинематических и геометрических соображений получаем:

$$[\mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_c]_z = v_{p\xi}v_{c\eta} - v_{p\eta}v_{c\xi}, \quad v_{c\xi} = \dot{\varphi} \cdot PD, \quad v_{c\eta} = \dot{\varphi} \cdot CD,$$

$$PD = (a - \xi_0) \operatorname{ctg} \theta_1 = (b + \xi_0) \operatorname{ctg} \theta_2 \quad (\text{где } \xi_0 = CD). \quad \text{Тогда}$$

$$\xi_0 = CD = \frac{a \operatorname{tg} \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}, \quad PD = \frac{a + b}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2}.$$

Абсолютная скорость точки P , в соответствии с теоремой о сложении скоростей при сложном движении (см. [74]):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p^{(r)} + \mathbf{v}_p^{(e)} = \mathbf{v}_p^{(r)} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{pc}^{(e)}.$$

Но так как P — мгновенный центр скоростей, то $\mathbf{v}_p^{(e)} = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{pc}^{(e)}$. Тогда получаем: $v_{p\xi} = -(CD) \cdot$, $v_{p\eta} = -(PD) \cdot$, т. е.:

$$v_{p\xi} = \frac{a + b}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^2} \left(\frac{\dot{\theta}_1 \operatorname{tg} \theta_2}{\cos^2 \theta_1} - \frac{\dot{\theta}_2 \operatorname{tg} \theta_1}{\cos^2 \theta_2} \right),$$

$$v_{p\eta} = -\frac{a + b}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^2} \left(\frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} + \frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} \right).$$

Используя приведенные формулы, мы получим следующие соотно-

шения:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_c]_z &= \frac{(a+b)\dot{\varphi}}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^3} \left[\frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} (a \operatorname{tg}^2 \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 + a + b) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} (-a \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 + b \operatorname{tg}^2 \theta_1 + a + b) \right], \\
K_{pz} &= K_{cz} + \frac{m\ddot{\varphi}}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^2} \left[(a+b)^2 + (a \operatorname{tg} \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1)^2 \right] + \\
&\quad + \frac{2m\dot{\varphi}(a+b)}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^3} \left[-\frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} (-a \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 + b \operatorname{tg}^2 \theta_1 + a + b) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} (a \operatorname{tg}^2 \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 + a + b) \right], \\
K_{cz} &= J_{AB}\ddot{\varphi} + J_B(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}_2) + J_A(\ddot{\varphi} - \ddot{\theta}_1) = J_{AB}\ddot{\varphi} + M_{Bz} + M_{Az}.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (3.116) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi} \left\{ J_{AB} + \frac{m}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^2} \left[(a+b)^2 + (a \operatorname{tg} \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1)^2 \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{m\dot{\varphi}(a+b)}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^3} \left[\frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} (a+b - a \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 + b \operatorname{tg}^2 \theta_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{\theta}_1}{\cos^2 \theta_1} (a+b + a \operatorname{tg}^2 \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2) \right] = -M_{Az} - M_{Bz}.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Уравнения (3.117), (3.118), (3.119) образуют замкнутую (относительно $\varphi, \theta_1, \theta_2$) систему уравнений.

Рассмотрим частные случаи.

1°. Закрепим колесную пару A_1A_2 жестко, т.е. полагаем $\theta_1 \equiv 0 \Rightarrow M_{Az} = J_A\ddot{\varphi}$. Тогда уравнение (3.119) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\varphi} \left\{ J_{AB} + J_A + \frac{m}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} \left[(a+b)^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2 \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{m(a+b)\dot{\varphi}}{\operatorname{tg}^3 \theta_2} \left[\frac{\dot{\theta}_2}{\cos^2 \theta_2} (a+b) \right] = -M_{Bz},
\end{aligned} \tag{3.120}$$

получаем модель из [67, 70].

2°. Управление скейтбордом, т. е. M_{Az} и M_{Bz} подбираем так, что $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ (одинаковые отклонения колесных пар, но в разные стороны). Тогда из (3.117), (3.118) мы получаем:

$$M_{Az} + M_{Bz} = (J_A + J_B)\ddot{\varphi}.$$

А из уравнения (3.119) имеем:

$$\ddot{\varphi} \left\{ J_{AB} + J_A + J_B + \frac{m}{4 \operatorname{tg}^2 \theta} \left[(a+b)^2 + \operatorname{tg}^2 \theta (a-b)^2 \right] \right\} - \frac{m\dot{\varphi}(a+b)}{4 \operatorname{tg}^3 \theta} \left[\frac{\theta}{\cos^2 \theta} (a+b) \right] = 0, \quad (3.121)$$

т. е. получаем модель из [69].

Отметим, что для рассматриваемой модели в случае отсутствия управляющих моментов M_{Az} , M_{Bz} (или их консервативности) будет справедлив интеграл энергии. Вычислим кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}(v_{c\xi}^2 + v_{c\eta}^2) + \frac{J_{AB}}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{J_A}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}_1)^2 + \frac{J_B}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)^2, \quad (3.122)$$

последние два слагаемых суть константы (при $M_{Az} = M_{Bz} = 0$). Поэтому интеграл энергии при $M_{Az} = M_{Bz} = 0$ принимает вид:

$$m(v_{c\xi}^2 + v_{c\eta}^2) + J_{AB}\dot{\varphi}^2 = h_0^2 = \text{const.}$$

Из полученных выше кинематических формул следует:

$$v_{c\xi} = \frac{a+b}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} \cdot \dot{\varphi}, \quad v_{c\eta} = \frac{a \operatorname{tg} \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2} \cdot \dot{\varphi},$$

и тогда интеграл энергии приобретает вид:

$$2T = \dot{\varphi}^2 \left[J_{AB} + m \frac{(a+b)^2 + (a \operatorname{tg} \theta_2 - b \operatorname{tg} \theta_1)^2}{(\operatorname{tg} \theta_1 + \operatorname{tg} \theta_2)^2} \right] = h_0^2 = \text{const.} \quad (3.123)$$

Из уравнений (3.117), (3.118) при $M_{Az} = M_{Bz} = 0$, мы получим:

$$\theta_1 = \varphi - h_1 t + p_1, \quad \theta_2 = -\varphi + h_2 t + p_2, \quad (3.124)$$

где h_1, p_1, h_2, p_2 — константы, определяемые начальными условиями. Подставляя (3.124) в (3.123), мы получаем для определения φ нестационарное уравнение 1-го порядка.

1°. Рассмотрим частный случай: закрепленную колесную пару $A_1 A_2$, т. е. $\theta_1 \equiv 0$, тогда интеграл энергии (3.123) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^2 \left[J_{AB} + m \frac{(a+b)^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2}{\operatorname{tg}^2 \theta_2} \right] &= h_0^2 \Rightarrow \\ \dot{\varphi}^2 \left[(J_{AB} + ma^2) + m(a+b)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta_2 \right] &= h_0^2. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Уравнение (3.118) при $M_{Bz} = 0$ дает:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 - \dot{\theta}_2,$$

и из (3.125) мы получаем, обозначая $A^2 = J_{AB} + ma^2$, $B^2 = m(a+b)^2$, $\lambda = h_0/\omega_0$, $x = \operatorname{tg}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\omega_0 \sqrt{B^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2} - h_0 \operatorname{tg} \theta_2}{\sqrt{B^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2}} \rightarrow \\ I &= \int \frac{d\theta_2 \sqrt{B^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2}}{\sqrt{B^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2} - \lambda \operatorname{tg} \theta_2} = \omega_0 t + C \end{aligned}$$

Обозначая $x = \operatorname{tg} \theta_2$, мы получаем

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+x^2} + \lambda \int \frac{x dx \sqrt{B^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta_2}}{(1+x^2)[B^2 + (A^2 - \lambda^2)x^2]} \\ &\quad + \lambda^2 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)[B^2 + (A^2 - \lambda^2)x^2]} \end{aligned}$$

Нетрудно показать что все эти интегралы берутся в элементарных функциях.

Таким образом, в указанном случае уравнения движения системы интегрируются в функциях времени при любых значениях параметров и начальных условиях.

2°. $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ (скейтборд управляемый) \Rightarrow

$$\dot{\varphi} \left\{ J_{AB} + J_A + J_B + \frac{m}{4} \left[\frac{(a+b)^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + (a-b)^2 \right] \right\} - \frac{m\dot{\varphi}(a+b)^2}{4 \operatorname{tg}^3 \theta} \cdot \frac{\theta \cdot}{\cos^2 \theta} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\varphi}^2)}{d\varphi}; \quad \dot{\varphi} \theta \cdot = (\dot{\varphi})^2 \frac{d\theta}{d\varphi}; \quad A = \frac{m}{4} (a-b)^2 + J_{AB} + J_A + J_B$$

$$d(\dot{\varphi}^2) \left[A + \frac{m(a+b)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{4} \right] - \frac{m(a+b)^2}{2 \operatorname{tg}^3 \theta \cos^2 \theta} \cdot (\dot{\varphi})^2 d\theta = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{d(\dot{\varphi}^2)}{\dot{\varphi}^2} = d\theta \cdot \frac{m(a+b)^2}{2 \operatorname{tg}^3 \theta \cos^2 \theta \left[A + \frac{m(a+b)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{4} \right]}$$

Обозначаем $\dot{\varphi}^2 = u$; $\operatorname{tg} \theta = v$; тогда:

$$\frac{du}{u} = \frac{m(a+b)^2}{2} \cdot \frac{dv}{Av^3 + \frac{m(a+b)^2}{4}v}; \quad \frac{m(a+b)^2}{4} = B$$

$$\ln u - C_0 = \frac{m(a+b)^2}{2} \int \frac{dv}{v(Av^2 + \frac{m(a+b)^2}{4})} = 2B \int \frac{dv}{v(Av^2 + B)}$$

$$\ln u - C_0 = \ln \frac{v^2}{Av^2 + B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{u(Av^2 + B)}{v^2} = C_0 = \text{const}}$$

$$\int \frac{dv}{v(Av^2 + B)} = \int \left(\frac{C_0}{v} + \frac{D_0 v + F_0}{Av^2 + B} \right) dv$$

$$C_0 B = 1; \quad E_0 = 0$$

$$C_0(Av^2 + B) + D_0 v^2 + E_0 v = 1 \quad \rightarrow \quad C_0 A + D_0 = 0$$

$$C_0 = \frac{1}{B}; \quad D_0 = -\frac{A}{B}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{v(Av^2 + B)} &= \int \frac{1/B}{v} dv - \frac{2A}{2B} \int \frac{v dv}{Av^2 + B} = \\
&= \frac{1}{B} \ln v - \frac{1}{2B} \ln(Av^2 + B) = \frac{1}{B} \ln \frac{v}{\sqrt{Av^2 + B}} \\
\dot{\varphi}^2 \frac{A \operatorname{tg}^2 \theta + B}{\operatorname{tg}^2 \theta} &= C_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{C_0 \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{A \operatorname{tg}^2 \theta + B}};
\end{aligned}$$

Полученное соотношение является определяющим уравнением движения скейтборда.

Литература

- [1] Пэнлеве П. *Лекции о трении*. — М.: Гостехтеориздат, 1954. — 316 с.
- [2] Фейнман, Лейтон, Сендс. *Задачи и упражнения с ответами и решениями*. М.: Мир. — 1969. — 624 с.
- [3] Тимошенко С., Юнг Д. *Инженерная механика*. — М.: Машгиз, 1960. — 507 с.
- [4] Розенблат Г.М. *Механика в задачах и решениях*. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 160 с.
- [5] Левенсон Л.Б. *Статика и динамика машин*. ОНТИ НКТП СССР. — Госмашметиздат, 1934. — 476 с.
- [6] Жуковский Н.Е. *Трение бандажей железнодорожных колес о рельсы*. Собр. соч., т. VII. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. — С. 426–478.
- [7] Андронов В.В. *Механика в лесоинженерном деле*. — М.: Издательство Московского государственного университета леса, 2000. — 176 с.
- [8] Жуковский Н.Е. *Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением*. Собр. соч., т. 1. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. — С. 339–354.

- [9] *Задачи по физике* под редакцией О. Я. Савченко. — Санкт-Петербург, 2001. — 367 с.
- [10] Смышляев А. С., Черноусько Ф. Л. *Условия равновесия стержня на шероховатой плоскости*. ПММ, т. 66, вып. 2. — 2002. — С. 177–182.
- [11] Черноусько Ф. Л. *Условия равновесия тела на шероховатой плоскости*. Изв. АН СССР, МТТ, 1988, № 6, с. 6–17.
- [12] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление*. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
- [13] Дмитриев Н. Н., Товстик П. Е. *К условиям равновесия тела на шероховатой плоскости*. Изв. РАН, МТТ, 1998, № 6, с. 22–28.
- [14] Раус Э. Дж. *Динамика системы твердых тел*. — М.: Наука. — Т. 1. — 463 с.
- [15] Адамар Ж. *Элементарная геометрия*. Ч. 1. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1948. — 608 с.
- [16] Контенсу П. *Связь между трением скольжения и трением вращения и ее учет в теории волчка*. В кн. «Проблемы гироскопии». — М.: Мир, 1967. — С. 60–77.
- [17] Журавлев В. Ф. *О модели сухого трения в задаче качения твердых тел*. ПММ, т. 62, вып. 5, 1998, с. 762–767.
- [18] Розенблат Г. М. *О движении тела, опирающегося двумя площадками на плоскость при наличии сил сухого трения*. Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. —

М.: Издательство Московского университета, 2004. — Вып. 25. — С. 157–164.

- [19] Лурье А. И. *Аналитическая механика*. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 824 с.
- [20] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. *О движении плоских тел при наличии сухого трения*. Изв. АН СССР, МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
- [21] Журавлев В. Ф. *Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения*. Изв. РАН, МТТ, № 4, 2003, с. 81–88.
- [22] Горшковский В. *Польские физические олимпиады*. — М.: Мир, 1982, 256 с.
- [23] Сикорский Ю. С. *Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике*. — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. — 365 с.
- [24] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Динамика неголономных систем*. — М.: Наука, 1967. — 519 с.
- [25] Маркеев А. П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*. — М.: Наука, 1992. — 335 с.
- [26] *Динамика материальной точки. Методические указания к решению задач и выполнению курсовой работы по теоретической механике* / В. Н. Баранов, О. П. Феокистова, Ю. С. Саратов, Н. Н. Щеглова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 36 с.

- [27] Раус Э. Дж. *Динамика системы твердых тел.* — М.: Наука, 1983. — Т. II. — Стр. 228. — П. 249. — Пример 1.
- [28] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения диска по шероховатой плоскости. — Изв. РАН, МТТ, № 4, 2007, стр. 65–71.
- [29] Галин Л. А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* — М.: Наука, 1980. — с. 303.
- [30] Киреенков А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения. Изв. РАН, МТТ. — № 1, 2002, — с. 60–67.
- [31] Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н. *Основы теории упругого дискретного контакта.* — СПб.: Политехника, 2003. — с. 234.
- [32] Ванторин В. Д. Движение по плоскости с анизотропным трением. *Трение и износ в машинах.* 1962. — Т. 16. — с. 81–120.
- [33] Черноусько Ф. Л. *Условия равновесия тела на шероховатой плоскости.* Изв. РАН. МТТ. 1988. — № 6. — с. 6–17.
- [34] Дмитриев Н. Н., Товстик П. Е. *К условиям равновесия тела на шероховатой плоскости.* Изв. РАН. МТТ. 1998. — № 6. — с. 22–28.
- [35] Иванов А. П. Об устойчивости равновесия в системах с трением. ПММ. 2007. — Т. 71, вып. 3. — с. 427–438.
- [36] Дмитриев Н. Н. *Начало движения тела по плоскости с ортотропным трением // Динамика и устойчивость механических*

систем. — СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1995. — с. 14–20.

- [37] Розенблат Г. М. *Динамические системы с сухим трением.* — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — с. 204 с.
- [38] Розенблат Г. М. Равновесие твердого тела на плоскости с анизотропным сухим трением. ПММ, т. 73, вып. 2, 2009, с. 204–218.
- [39] Болотов Е. А. *О движении материальной плоской фигуры, стесненной связями с трением.* — М.: Университетская типография, Страстной бульвар, 1906. — 147 с.
- [40] Иванов А. П. *О безударных прыжках неоднородного колеса. 1. Случай гладкой опоры* // Изв. РАН, МТТ, 1992, № 1, с. 25–31.
- [41] Иванов А. П. *О безударных прыжках неоднородного колеса. 2. Шероховатая опора* // Изв. РАН, МТТ, 1993, № 1, с. 61–64.
- [42] Розенблат Г. М. *Об одной задаче динамики твердого тела при наличии сил сухого трения.* Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика. Вып. 26 / Под ред. акад. МАН ВШ Ю. Г. Мартыненко. — М.: Изд-во Московского университета, 2006. — с. 113–120.
- [43] Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* — М.: Наука, 1965. — 150 с.
- [44] Розенблат Г. М. *Механика в задачах и решениях.* — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 160 с.
- [45] Пятницкий Е. С., Трухан Н. М., Ханукаев Ю. И., Яковенко Г. Н. *Сборник задач по аналитической механике: Учебное пособие*

для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2002. — 400 с.

- [46] *Задачи московских городских олимпиад по физике 1986–2005*: Под редакцией М. В. Семенова, А. А. Якуты. — М.: МЦНМО, 2006. — 616 с.
- [47] Маркеев А. П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью*. — М.: Наука, 1992. — 335 с.
- [48] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. — 576 с.
- [49] Аппель П. *Теоретическая механика*. т. II, М.: ГИФМЛ, 1960. — 516 с.
- [50] Остроградский М. В. *Общие соображения относительно моментов сил*. В сб.: М. В. Остроградский. Избранные труды, Из-во Академии наук СССР, 1958. — стр. 205–229.
- [51] Суслов Г. К. *Теоретическая механика*. ГИТТЛ, М.-Л., 1946. — 655 с.
- [52] Жуковский Н. Е. *Теоретическая механика*. Собрание сочинений, т. 5, ГИТТЛ, М.-Л.; 1949. — стр. 596–600.
- [53] Козлов В. В., Трещёв Д. В. *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*. Изд-во Московского Университета, 1991. — 168 с.

- [54] Дерябин М. В., Козлов В. В. *К теории систем с односторонними связями*. ПММ, т. 59, вып. 4, 1995. — стр. 531–539.
- [55] Дерябин М. В. *Общие принципы динамики и теория односторонних связей*. Вестник Московского Университета, серия 1. Математика, механика, 1998, №1. — с. 53–59.
- [56] Иванов А. П. *О безударных движениях в системах с неустойчивыми связями*. ПММ, т. 56, вып. 1, 1992. — стр. 3–15.
- [57] Иванов А. П. *Об уравнениях движения неголономной системы с неустойчивающей связью*. ПММ, т. 49, вып. 5, 1985. — стр. 717–723.
- [58] Иванов А. П. *Динамика систем с механическими соударениями*. — М.: "Международная программа образования", 1997. — 336 с.
- [59] Розенблат Г. М. *О безотрывных движениях твердого тела по плоскости*. Доклады РАН, 2007, т. 415, №5. — с. 622–624.
- [60] Розенблат Г. М. *О движении плоского твердого тела по шероховатой прямой* // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 3, с. 293–306.
- [61] Розенблат Г. М. *Метод определения параметров безотрывного движения волчка по гладкой плоскости*. // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 1, с. 87–98.
- [62] Цаплыгин С. А. *О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости*. // Труды отделения физических наук Об-

щества любителей естествознания, антропологии и этнографии.
— 1897. — Т. 9, вып. 1. — С. 10–16.

- [63] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. 429 с.
- [64] Козлова З. П., Пагшина А. В., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Динамика материальной точки. // Под ред. Г. М. Розенבלата. — М.: КомКнига, 2006. — 312 с.
- [65] Козлова З. П., Паншина А. В., Розенблат Г. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Динамика материальной системы // Под ред. Г. М. Розенבלата. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 432 с.
- [66] Самсонов В. А. Ветвление и некоторые свойства нелинейных механических систем. В сб. «Нелинейная механика», под ред. В. М. Матросова, В. В. Румянцева, А. В. Карапетяна; М., Физматлит, 2001, с. 323–361.
- [67] Мартыненко Ю. Г. К теории обобщенного эффекта Магнуса для неголономных механических систем. // ПММ. — 2004. — Т. 68, № 6. — С. 948–957.
- [68] Kuleshov A. S., Further Development of the Mathematical Model of a Snakeboard // Regul. & Chaotic Dyn. — 2007. — Vol. 12, № 3. — P. 321–334.
- [69] Ispolov Yu. G., Smolnikov B. A. Skateboard dynamics // Computer Methods in Appl. Mech. and Eng. — 1996. — № 131. — P. 327–333.

- [70] Лобас Л. Г. Неголономные модели колёсных экипажей. — Киев: Наукова думка, 1986. — 232 с.
- [71] Журавлев В. Ф., Фуфаев Н. А. Механика систем с неудерживающими связями. Отв. редактор академии РАН Климов Д. М. — М., Наука, Институт проблем механики РАН, 1993. — 240 с.
- [72] Буданов В. М., Девянин Е. А. О движении колёсных роботов. // ПММ. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 244–255.
- [73] Суслов Г. К. Теоретическая механика. Издание третье, посмертное. Под ред. проф. Н. Н. Бухгольца и В. К. Гольцмана. — М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1944. — 655 с.
- [74] Маркеев А. П. Теоретическая механика. Изд. 4-е исправленное. — М.-Ижевск. — Регулярная и хаотическая динамика. 2007. — 591 с.
- [75] Розенблат Г. М. К динамике неголономных моделей колёсных экипажей. // Вестник Удмуртского университета. Серия: математика, механика, компьютерные науки., 2008, вып. 3, с. 90–108.