

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Кафедра механики и процессов управления

На правах рукописи

Фомичев Александр Владимирович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 «Теоретическая механика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик РАН
В.Ф. Журавлев

МОСКВА - 2008

Содержание

Содержание.....	1-2
Введение.....	3-15

Глава 1

Исследование колебаний квазилинейных резонансных систем и теория возмущений их конфигурационных многообразий

Постановка задачи. Порождающая система и ее траектории.....	16-22
Многообразие вырожденных форм и учет возмущений.....	22-34
Локальный эволюционный базис и его свойства. Алгебра Ли векторных полей	34-39
Классификация сил по типу порождаемой эволюции.....	39-43
Непосредственное изучение линейных сил.....	44-47
Задача стабилизации вырожденной формы.....	47-52
Траектории системы под действием управления при отсутствии возмущений.....	52-55
О возможности выбора другой обратной связи.....	55-59

Глава 2

О круговых колебаниях в системе с трехкратным резонансом

Постановка задачи.....	60-61
Многообразие, соответствующее круговым траекториям.....	61-62
Учет возмущений.....	62
Локальный базис.....	63-65
Классификация возмущений.....	65-67
Задача стабилизации формы.....	67-68
Алгоритм получения информации от гироскопа.....	68

Глава 3

Исследование обратной связи во втором приближении

Введение.....	69
Необходимые сведения о втором приближении.....	69-71
Подход к задаче стабилизации прямолинейных колебаний.....	71-74
Исследование обратной связи во втором приближении.....	74-77

Глава 4

О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине

Введение.....	78
Постановка задачи и обозначения.....	79-80
Уравнения движения.....	80
Первое приближение нормальной формы при резонансе.....	80-83
Интегралы нормальной формы.....	83-89
Периодическое решение.....	89-92
Эффекты срыва и разворота плоскости колебаний.....	93-99

Глава 5

Задача о колебаниях газового пузыря в жидкости при резонансе частот деформационных и радиальных колебаний 1:2

Постановка задачи.....	100-102
Функция Лагранжа и условие резонанса	102-104
Введение безразмерных параметров и упрощение лагранжиана.....	105
Построение гамильтониана.....	105-107
Исследование системы методом инвариантной нормализации.....	107-109
Анализ уравнений нормальной формы: периодическое решение, малое возмущение периодического решения, эффект перекачки между модами колебаний.....	109-114
Оценка корректности модели идеальной жидкости.....	114-118
Выводы.....	118-121
Литература.....	122-126

Введение

Решение различных задач достаточно часто приводит к исследованию дифференциальных уравнений [5,39,42,43], имеющих вид

$$\dot{z} = f(t, z) + \varepsilon F(t, z), \quad (1)$$

где $f, F \in C_{(t,z)}^{(0,1)}(D)$; $D \subset \mathbb{R}^n$; $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, формализующий тот факт, что соответствующее слагаемое в правой части представляет собой возмущение. Система, получающаяся при $\varepsilon = 0$ называется порождающей или вырожденной. Предполагается, что ее точное решение $z = g(t, x)$, где x – набор постоянных интегрирования, известно. Появление сколь угодно малого возмущения ($\varepsilon \neq 0$) может качественно изменить поведение системы, что и делает задачу исследования возмущенных систем содержательной.

Возмущенная система, как правило, оказывается не интегрируемой. Однако наличие малого параметра позволяет применять методы приближенного анализа. Основным инструментом такого анализа является метод осреднения [9,26,27,36,37]. Не вдаваясь в детали, которые можно уточнить в цитированной литературе и в тексте данной работы, можно сказать, что суть метода состоит в следующем.

Вначале система приводится к стандартному виду

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon) \quad (2)$$

при помощи известной процедуры вариации постоянных. Далее проводится осреднение правой части последней системы по явно входящему времени t . В зависимости от того, является ли правая часть периодической по t или нет, осреднение проводится на периоде, либо бесконечном полуинтервале. В результате получается автономная система

$$\dot{x} = \varepsilon X_0(x, \varepsilon), \quad X_0(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \varepsilon) dt, & \text{если } X(t, x, \varepsilon) - \text{периодична с периодом } T \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, \varepsilon) dt, & \text{если } X(t, x, \varepsilon) - \text{не периодична} \end{cases}$$

По отношению к полученным уравнениям, образующим систему первого приближения метода осреднения, ставится та же задача Коши, что и для точной системы (2). Решение этой задачи Коши позволяет получить функцию $x(t)$, являющуюся приближенным решением (2). Ее подстановка в решение порождающей системы $g(t, x)$ вместо постоянных интегрирования дает приближенное решение исходной системы (1). Близость приближенного решения к точному определяется свойствами правой части системы (2) и конструктивно оценивается при помощи теоремы Н.Н. Боголюбова [9,26].

Большинство известных методов теории возмущений также основаны на идее осреднения, либо специально приспособлены для решения систем определенного вида [26]. Однако в любом случае, как и при использовании метода осреднения, применяется определенный алгоритм, заменяющий исходную систему на более простую приближенную систему, по отношению к которой ставятся те же задачи.

Способ исследования задач, рассматриваемых в частях 1-3 данной диссертации, значительно отличается от только что описанной схемы анализа с помощью традиционных асимптотических методов. Отличаются от традиционных и сами постановки задач. Ниже приводится краткая история возникновения этих задач и описание подхода к их решению.

Еще в 1890 году Брайан [51], исследуя динамику стоячих волн в упругом и нерастяжимом кольце, вращающемся с постоянной угловой скоростью, пришел к открытию следующего эффекта.

Пусть в кольце возбуждена стоячая волна, а само оно вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$, ортогональной плоскости кольца. Тогда в системе

отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω и связанной с кольцом, стоячая волна будет поворачиваться на угол, равный

$$\varphi(t) = -\frac{2}{1+k^2}\omega t$$

где k – номер моды стоячей волны, t - время. Примечательно, что угол поворота волны вообще не зависит от свойств материала кольца, что, однако, является следствием допущения о нерастяжимости средней линии кольца.

Оказалось, что эффект сохраняется и в случае переменной угловой скорости. В системе отсчета, связанной с кольцом и имеющей переменную угловую скорость $\omega(t)$ будет наблюдаться поворот стоячей волны на угол, определяемый по формуле

$$\varphi(t) = -\frac{2}{1+k^2} \int \omega(t) dt. \quad (3)$$

Это соотношение, по-видимому, впервые было установлено экспериментально авторами патента “Vibratory rotation gyro”. Теоретически случай переменной угловой скорости был изучен В.Ф. Журавлевым [27]. Было показано, что формула (3) следует из уравнения колебаний упругого кольца в своей плоскости и является точной, что позволяет сколько угодно раз ее дифференцировать. Двукратное дифференцирование, очевидно, приводит к результату

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{k^2 + 1} \ddot{\omega}$$

Отсюда следует, что момент внешних сил, вызывающий угловое ускорение кольца $\ddot{\omega}$ приводит к появлению углового ускорения прецессирующей волны $\ddot{\varphi}$. Можно показать, что прецессирующая волна несет собственный кинетический момент. Эти факты позволяют говорить о новом физическом явлении, называемом инертностью упругих волн. Название эффекта следует из аналогии поведения упругих волн и тел, обладающих массой.

Эффект инертности упругих волн не теряется и при учете свойств реальных материалов. Конструкции упругих резонаторов, в которых наблюдается эффект, могут быть различными. Наряду с рассмотренным кольцевым резонатором, можно использовать цилиндрические и полусферические оболочки, либо специальные стержневые конструкции, струны и вообще произвольные тела, обладающие осевой симметрией. С их устройствами можно ознакомиться по материалам [16,21,25,27,52,54,55,59,60,62-64]. Наибольшее распространение для практических нужд, описываемых далее, получили полусферические резонаторы.

Наличие свойства инертности волн приводит к идее использования упругих резонаторов в качестве датчиков угловых скоростей для бесплатформенных инерциальных систем навигации [2,10,14,29,30]. Эти датчики носят название волновых твердотельных гироскопов, либо вибрационных гироскопов. Подробнее о них также можно прочитать в работах [16,21,25,27,52,54,55,59,60,62-64].

Впервые практические разработки таких гироскопов начались в США в начале 60-х годов. Начиная с этого времени в США, Великобритании (фирма Marconi) и СССР получено большое количество патентов, содержащих предложения о совершенствовании конструкции датчиков. Однако отсутствие достаточной теоретической базы некоторое время не позволяло создать гироскоп, реализующий потенциальные возможности в полном объеме. После появления публикации [62], где были впервые четко сформулированы основные идеи по реализации волновых гироскопов, ситуация кардинально меняется. Фирма Delco становится лидером в этой отрасли приборостроения. Позже к аналогичным разработкам приступают и другие компании, в том числе и в нашей стране. Среди отечественных организаций наиболее успешные разработки велись в РПКБ, МИЭА и НИИЭМ. Теоретическое обеспечение этих разработок выполнял ИПМех РАН.

В результате были созданы различные конструкции гироскопов, имеющих различные классы точности. На базе этих чувствительных элементов реализованы работающие системы навигации, удовлетворяющие всем техническим требованиям. В качестве примеров можно привести семейство систем типа Carousel фирмы Delco, имеющих достаточно высокий класс точности. Система навигации фирмы Delco, основанная на волновом твердотельном гироскопе, успешно справилась со своими задачами во время недавней миссии «Гюйгенс-Кассини» к спутнику Сатурна Титан. Эксперимент длился около восьми лет (с 1997 г.). В результате были непосредственно исследованы физические свойства грунта и получены фотографии поверхности Титана.

В настоящее время в России практические разработки инерциальных систем, основанных на волновых твердотельных гироскопах высокого и среднего классов точности, на большинстве фирм приостановлены. Тем не менее, исследования не прекращены полностью. Например, в РПКБ ведется разработка бесплатформенной навигационной системы БИНС-ТВГ, создан опытный образец и проведены испытания, показавшие следующие точности навигации: порядка 8 км/ч по скоростям и 13 км по координатам за час работы [16].

Как видно из этих данных, система пока еще является достаточно грубой, что, прежде всего, обусловлено качеством датчиков инерциальной информации. Изготовление высококачественных резонаторов сопряжено со значительными технологическими проблемами. Основными из них являются: однородность материала, отсутствие внутренних механических напряжений и дефектов, необходимость очень точно выдерживать геометрические параметры резонатора и окружающих его элементов и т.д. Кроме этих, имеется множество других проблем, связанных, например, с электроникой, но поскольку все эти вопросы далеки от темы настоящего исследования, описывать их подробнее не будем.

Оказывается, что принципиальных препятствий для создания волновых гироскопов фактически нет. Теоретические результаты и опыт разработки датчиков различными компаниями позволяют говорить об их перспективности. К несомненным достоинствам этих приборов можно отнести такие качества, как малое энергопотребление, малые габариты, относительно невысокая стоимость при серийном производстве (в особенности для датчиков низкого класса точности) и такое примечательное свойство, как сохранение работоспособности при кратковременном отключении питания прибора.

Последнее свойство имеет место при использовании резонаторов с высокой добротностью, достаточной для того, чтобы при кратковременном отключении колебания резонатора не успевали затухнуть или существенно изменить форму. Лазерные и волоконно-оптические гироскопы, получившие в настоящее время наибольшее распространение в серийных и разрабатываемых инерциальных системах навигации, таким свойством не обладают и при любом отключении немедленно теряют информацию.

В последнее время активно продолжается разработка микромеханических датчиков инерциальной информации. Использование вибрационных гироскопов в области микромеханики также представляется наиболее перспективным. Применение иных типов гироскопов при уменьшении размеров часто приводит к принципиальным трудностям. Например, точность оптических гироскопов определяется площадью контура и, следовательно, уменьшается обратно пропорционально квадрату линейного размера. Механические гироскопы малых размеров, очевидно, трудны в изготовлении.

Такова краткая история и перспективы развития гироскопических устройств, основанных на использовании эффекта инертности упругих волн.

Задачи, рассмотренные в частях 1,3 настоящей работы, возникли из теории вышеописанных устройств и по существу представляют собой продолжение исследований, опубликованных в [17]. В части 2 исследуется вопрос о

построении БИНС на основе двух изотропных пространственных осцилляторов, в которых возбуждены колебания круговой формы. При их решении используется следующий математический аппарат.

Основным объектом исследований являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5,39,42,43], которые линейным невырожденным преобразованием приводятся к виду

$$\ddot{q} + \Lambda q = \varepsilon Q(q, \dot{q}, t), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad \Lambda = \text{diag} \|\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\|$$

где ε - малый параметр, а частоты подчинены резонансному соотношению $\omega_1 : \dots : \omega_n = m_1 : \dots : m_n$, $m_i \in \mathbb{Z}$. Такая ситуация называется резонансом типа $m_1 : \dots : m_n$. Для анализа уравнений применяются как стандартные методы работы с дифференциальными уравнениями, в том числе использующие понятия теории групп Ли, так и новый подход, впервые предложенный в [17] и описанный далее.

Из стандартных асимптотических методов применяется метод осреднения в первом и втором приближениях. Решение задачи о стабилизации колебаний заданной формы опирается на факты, известные из математической теории устойчивости [11,15,19,33,34,45,50].

При использовании нового метода исследования многие аналитические проблемы переносятся на геометрический уровень. В связи с этим используются различные результаты известные из геометрии и линейной алгебры [6,12,44].

Потребность в создании нового асимптотического метода была продиктована следующими обстоятельствами. Исследование уравнений, описывающих динамику упругих волн во вращающихся осесимметричных резонаторах, привело к постановкам новых задач, не решаемых классическими методами теории возмущений и теории управления. Их решение и потребовало создания нового метода в теории нелинейных колебаний.

Он был разработан В.Ф. Журавлевым и опубликован в [17]. В этой работе впервые был предложен геометрический метод в теории возмущений резонансных систем. Ниже перечислены основные идеи этого подхода.

В работе [17] показано, что каждой форме колебаний порождающей системы (получающейся из исходной системы при игнорировании возмущений) соответствует определенное многообразие в пространстве постоянных интегрирования. Дана классификация эволюций формы колебаний под действием возмущений и построен базис инфинитезимальных эволюций. Предложена идея раскладывать силы возмущений по базису инфинитезимальных эволюций, что, в свою очередь, позволяет классифицировать силы возмущений по признакам вызываемых ими эволюций формы колебаний. Поставлена и решена принципиально важная задача стабилизации прямолинейных колебаний при постоянно действующих возмущениях для резонансов типа $1:1$ и $1:1:1$. Ее значимость связана с непосредственными техническими приложениями, описанными выше, и тем фактом, что любая форма колебаний порождающей системы неустойчива без стабилизирующей ее обратной связи. Прямолинейная форма выбирается из соображений минимизации действия возмущений, пропорциональных квадратуре (площади эллипса, представляющего собой форму колебаний порождающей системы и способного вырождаться в прямую).

В части 1 данной работы предпринимается попытка обобщения метода [17] на резонансные системы более общего вида. Следует отметить, что повышение размерности системы и кратности резонанса усложняет задачу и подходы, предложенные в [17], путем формального «копирования» применить не удастся. Для преодоления возникающих трудностей предложен новый набор медленных переменных типа полярных координат. Это позволило сильно упростить геометрическую часть задачи. Проблема стабилизации формы также упрощается, однако предложенное управление имеет существенный недостаток, вызванный необходимостью возвращения к исходным

переменным. Оказывается, что при этом неизбежно появляются функции с особенностями. Сравнение управлений, взятых из статьи [17] и полученных в данной работе проводится в одном из разделов части 1.

Очень интересным фактом, впервые установленным в [18], является принципиальная возможность построения полностью автономной бесплатформенной инерциальной навигационной системы на основе единственного изотропного пространственного осциллятора. Теория такой системы построена в [18] и основана на тех же общих принципах, что и работа [17].

В части 2 диссертации рассматривается упрощенная задача [47], когда колебания невозмущенного осциллятора имеют круговую форму, что приводит к потере информации об ориентации относительно оси, ортогональной плоскости колебаний. Однако содержательность задачи оправдана возникающим при этом значительным упрощением по сравнению с общим случаем. Потерю контроля за одной вращательной степенью свободы нетрудно компенсировать установкой еще одного датчика, возбудив в нем колебания в плоскости, ортогональной плоскости колебаний первого датчика.

Для решения очерченного круга проблем обычно используется метод осреднения в первом приближении. Как показывает практика [54,55,60], достигаемая при этом точность оказывается приемлемой, однако известно, что за достаточно большое время величины, не учитываемые в первом приближении, в принципе могут привести к качественным изменениям.

Этот факт оправдывает исследование тех же задач при помощи построения высших приближений. В части 3 при помощи метода осреднения во втором приближении исследуется обратная связь, предложенная в [17]. Показано, что учет второго приближения не позволяет выявить принципиальных недостатков этого управления.

Части 4 и 5 посвящены решению двух различных задач методом инвариантной нормализации гамильтоновых систем, разработанного

В.Ф. Журавлевым [19,23,24] и являющегося одним из алгоритмов построения нормальной формы Биркгофа [6,17,21,22]. Основная идея метода инвариантной нормализации изложена в работе [17] для случая автономных систем. Обобщение задачи нормализации гамильтониана на неавтономные системы и в более общей постановке сделано в [21].

Метод инвариантной нормализации обладает рядом значительных преимуществ по сравнению с другими способами нахождения нормальной формы гамильтониана. Прежде всего, необходимо отметить несоизмеримо меньшие вычислительные трудности по сравнению с другими алгоритмами нахождения нормальной формы. Нормальная форма любого порядка строится по одной скалярной рекуррентной формуле, тогда как использование любого другого способа нахождения нормальной формы сопряжено с крайне громоздкими действиями, такими, как обращение степенных рядов векторных функций.

Известно, что наличие у системы резонанса [4,9,26,36,37,46] или неавтономности, как правило, затрудняет ее исследование. Чтобы обойти эти трудности приходится делать дополнительные замены переменных или искусственно повышать порядок системы. При использовании метода инвариантной нормализации в этих случаях никаких проблем не возникает, поскольку процедура построения нормальной формы остается неизменной вне зависимости от того, является ли система автономной либо резонансной или нет. Это свойство, очевидно, также является значительным преимуществом по сравнению с другими подходами.

В части 4 рассматривается задача о трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки, подвешенной на невесомой пружине при резонансе $1:1:2$, где 1 — соответствует частоте колебаний линеаризованной системы в горизонтальной плоскости, 2 — частоте колебаний по вертикали. Считается, что сила, возникающая при деформации пружины, пропорциональна этой деформации.

Подобная задача в плоской постановке (когда колебания точки происходят в некоторой вертикальной плоскости, а частоты также соотносятся как 1:2) была введена в рассмотрение Виттом и Гореликом в 1933 г. для иллюстрации явления внутреннего резонанса. Позже она исследовалась в достаточно большом количестве работ, например [8,28,37,40,46]. Было установлено, что при резонансе в системе наблюдается эффект перекачки энергии между вертикальной и горизонтальной модами колебаний, представляющий собой периодический процесс перестройки колебаний из почти вертикальных в почти горизонтальные и обратно. Исследование задачи в этих работах проводилось известными классическими методами теории возмущений и, как правило, было достаточно громоздким, что связано с наличием резонанса.

Подход, основанный на методе инвариантной нормализации, позволяет обойти сложности, обусловленные резонансом. Впервые исследования плоской задачи этим методом были опубликованы в работе [28]. Наиболее полные материалы по задаче приведены в статье [40]. В этой работе были вновь получены уже известные свойства системы, однако потребовавшиеся для этого расчеты оказались значительно более компактными по сравнению с предыдущими исследованиями. Кроме сокращений выкладок, приводящих к известным фактам, метод инвариантной нормализации позволяет получить ряд новых результатов. Сюда следует отнести выводы об устойчивости периодического решения и асимптотические разложения для периода перестроек.

Использование инвариантной нормализации при изучении трехмерной системы [41] позволяет обобщить на пространственный случай большинство фактов, установленных для плоской задачи. Однако в трехмерном случае появляются особенности, присущие именно пространственной задаче. При наличии сколь угодно малой проекции кинетического момента на вертикаль в трехмерном случае появляется эффект, названный разворотом плоскости колебаний. Период перестройки мод колебаний в этом случае всегда конечен.

В части 5 рассматривается задача о колебаниях газового пузыря неподвижного относительно идеальной жидкости с поверхностным натяжением. Колебания подразделяются на радиальные, связанные с изменением радиуса сферического пузыря, и деформационные, связанные с изменением его формы. Деформированная форма пузыря аппроксимируется эллипсоидом вращения. Решение этой задачи в линейной постановке хорошо известно [31,32,38]. Точное решение нелинейной задачи построить не удастся и для ее исследования, как правило, используют либо численные, либо асимптотические методы. Например, в работе [1] для решения аналогичной задачи при наличии внешнего возбуждения используется численный метод седьмого порядка аппроксимации. В статьях [53,56-58] применяются разложения по малому параметру деформации пузыря и привлекается идея осреднения. Для уничтожения секулярных членов в выражении для энергии в работе [53] используется метод двух масштабов.

Для аналитического исследования задачи удобно использовать лагранжевы формализм. При этом способе решения система, состоящая из сплошных сред, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями Лагранжа, а не уравнениями в частных производных. Обобщенными координатами служат геометрические параметры поверхности, аппроксимирующей форму пузыря. Лагранжиан для указанной системы может быть получен из функции, приведенной в [31]. Параметры системы (внешнее давление, радиус пузыря, поверхностное натяжение жидкости...) подбираются так, что в линеаризованной системе реализуется резонанс 1:2, где 1 соответствует частоте деформационной, а 2 – радиальной мод колебаний. После этого лагранжиан газового пузыря раскладывается до членов третьего порядка включительно и делается переход к безразмерным координатам и времени, что значительно упрощает его вид. Некоторые члены в полученном разложении оказываются резонансными.

Исследование данной нелинейной системы также проводится методом инвариантной нормализации, для чего делается переход от лагранжевой формы уравнений к их гамильтоновой форме. Гамильтониан системы после нормализации оказывается фактически идентичным гамильтониану плоской задачи о качающейся пружине, отличаясь от него лишь коэффициентом перед кубическим членом. Это позволяет дословно перенести все результаты, известные из решения задачи о качающейся пружине.

Таким образом, две совершенно разные задачи сводятся к исследованию одних и тех же уравнений одинаковым методом. Применение инвариантной нормализации позволяет обойти трудности, возникающие при использовании других способов решения и значительно сократить выкладки.

Далее анализируется вопрос о корректности постановки задачи. Дело в том, что в реальных средах неизбежно протекают диссипативные процессы. Поэтому идеализированную постановку задачи можно считать имеющей отношение действительности лишь при условии малой интенсивности диссипативных процессов на промежутках времени, характерных для задачи. Вычисление декрементов затухания показывает, что для веществ с физически реализуемыми параметрами вязкости и температуропроводности влияние диссипации достаточно велико и будет значительно мешать наблюдаемости процесса перестройки мод колебаний. Нужно отметить, что эту оценку состоятельности идеализации задачи нельзя было сделать предварительно, поскольку для этой оценки необходимо знать характерное время периода перестройки, которое нельзя вычислить, не решая саму задачу.

В каждой части работы, включая введение используется своя нумерация формул.

Глава 1

Исследование колебаний квазилинейных резонансных систем и теория возмущений их конфигурационных многообразий

1. Постановка задачи. Порождающая система и ее траектории.

Исследуются квазилинейные колебательные системы вида

$$A\ddot{q} + B\dot{q} = \varepsilon Q(q, \dot{q}, t)$$

где A и B – симметрические положительно определенные постоянные матрицы размерности $N \times N$, q и Q – векторы размерности $N \times 1$, ε является малым параметром, так что правая часть системы представляет собой малое возмущение. Подходящим линейным преобразованием такая система всегда может быть преобразована к более простой форме

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \varepsilon Q_i(q, \dot{q}, t) \quad i=1, \dots, N$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что система изначально имеет такой вид.

При отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) получается порождающая (или вырожденная) система, вид траекторий которой принципиальным образом зависит от соотношений частот ω_i . А именно, если все частоты несоизмеримы, то любая траектория порождающей системы в конфигурационном пространстве q всюду плотна в многомерном параллелепипеде и, следовательно, не может быть замкнутой кривой. Этот случай называется нерезонансным. Если резонанс имеет место, то есть некоторые частоты оказываются соизмеримыми, то существует подпространство пространства q , соответствующее этим частотам, в котором траектории будут замкнутыми кривыми, которые называются фигурами Лиссажу. Фигуры Лиссажу неустойчивы: при появлении сколь угодно малых возмущений они разрушаются или переходят в фигуры другой формы. Именно этот резонансный случай представляющий наибольший интерес, в том числе в связи с некоторыми техническими приложениями [3,4], и

будет рассматриваться в данной работе. В соответствии с [17], решаются следующие задачи:

- Построить классификацию фигур Лиссажу по признакам симметрии или наличия особенностей;
- Дать описание тех эволюций, которым подвергается фигура при появлении возмущений;
- Классифицировать силы возмущений по типу порождаемой эволюции;
- Построить управление, обеспечивающее устойчивость фигуры заданной формы.

Пусть все частоты соизмеримы. Тогда в самом общем случае система будет иметь вид

$$\ddot{q}_j^i + (m^i)^2 q_j^i = \varepsilon Q_j^i(q, \dot{q}, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k_i, \quad m^i \in \mathbb{Z} \quad \forall i$$

Здесь верхний индекс выделяет группу уравнений с одинаковыми частотами, а нижний – номер уравнения в такой группе. То есть система состоит из

$$N = \sum_{i=1}^n k_i$$

уравнений, которые разбиваются на n групп так, что в i – ой группе содержится k_i уравнений. Частоты m^i могут считаться целыми и не имеющего общего делителя, чего в случае их соизмеримости всегда можно добиться соответствующим изменением масштаба времени. Резонанс при таком соотношении частот будет иметь тип $m^1 : \dots : m^1 : \dots : m^n : \dots : m^n$.

Как уже отмечалось, траекториями исследуемой системы при отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) будут фигуры Лиссажу. В пространстве q они задаются формулами $q_j^i(t) = A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i)$, где A_j^i и ϕ_j^i – произвольные постоянные. Среди всех этих фигур можно выделить три класса особых:

- 1) Абсолютно симметричные фигуры. Такие фигуры симметричны относительно начала координат и любых координатных плоскостей.

2) Фигуры, имеющие точки возврата.

3) Фигуры смешанного типа. Такие фигуры возможны, только если $\dim q \geq 3$.

Проекции этой фигуры на некоторые подпространства пространства q принадлежат к первому типу, тогда как проекции на другие подпространства – ко второму.

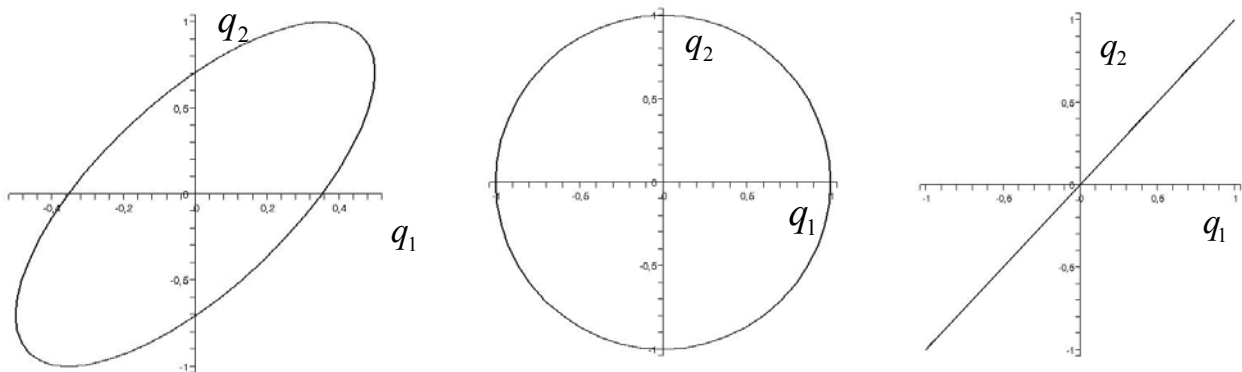
Примеры

1. Случай резонанса 1:1. Порождающая система имеет вид

$$\ddot{q}_1 + q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + q_2 = 0$$

Траекториями системы в пространстве q в общем случае будут эллипсы, однако возможны круговые траектории (фигура первого типа) и траектории в виде отрезков прямой (фигура второго типа) – прямолинейные колебания:

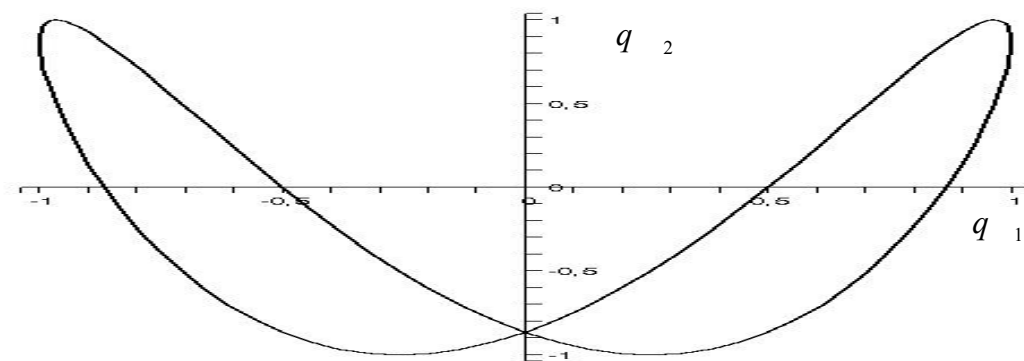


2. Случай резонанса 1:2

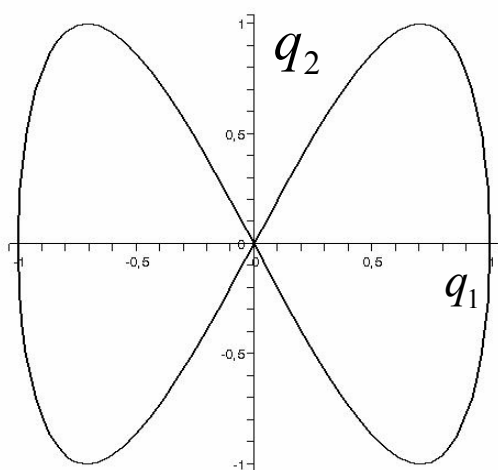
$$\ddot{q}_1 + q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_2 + 4q_2 = 0$$

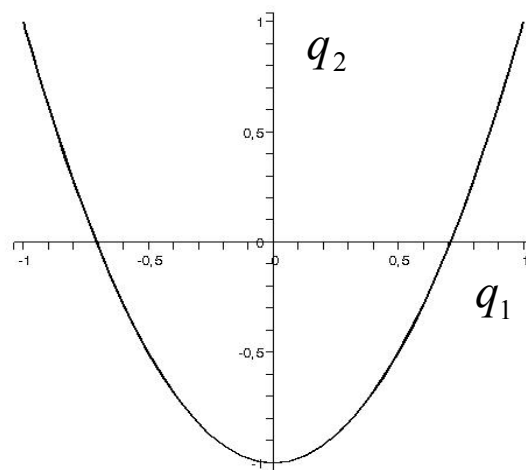
В общем случае траектории имеют вид



Но возможны фигуры типа

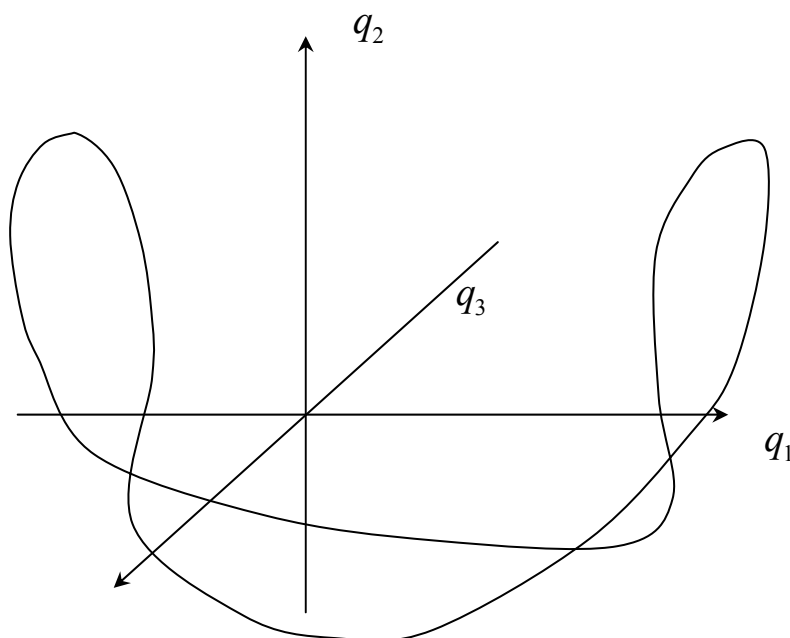


(первый тип)



(второй тип)

3. Примером фигуры третьего типа может служить резонанс 1:2:3, когда фигура имеет вид



В этом случае проекция фигуры на подпространство q_1q_2 принадлежит ко второму типу, а, например, проекция на подпространство q_1q_3 - к первому.

Общее свойство фигур Лиссажу – возможность их представления в виде проекции некоторой другой кривой, расположенной в пространстве размерность которого превышает $\dim q$, на пространство q . Это утверждение фактически очевидно и доказывается при помощи введения фиктивных переменных. Например, введем набор дополнительных переменных \tilde{q} , определяемых по формулам

$$\tilde{q}_j^i(t) = A_j^i \sin(m^i t + \phi_j^i),$$

тогда как

$$q_j^i(t) = A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i).$$

При этом последняя переменная $q_{k_n}^n$ оставляется без дополнительной, и, следовательно, всего имеется $N - 1$ переменных \tilde{q} . Из равенства

$$(\tilde{q}_j^i)^2 + (q_j^i)^2 = (A_j^i)^2$$

следует, что каждая пара (\tilde{q}_j^i, q_j^i) принадлежит некоторой окружности. Ясно, что для качественного описания радиус окружности не имеет значения и она может считаться единичной. Поэтому вся совокупность таких пар принадлежит тору $T^{N-1} = S^1 \times \dots \times S^1$. Переменная $q_{k_n}^n$, оставшаяся без «пары», принадлежит множеству действительных чисел R^1 . Таким образом, вся совокупность переменных $(q(t), \tilde{q}(t))$ принадлежит многообразию $T^{N-1} \times R^1 \subset R_{q, \tilde{q}}^{2N-1}$, образуя на нем некоторую кривую, а сама фигура Лиссажу является проекцией этой кривой вдоль направлений \tilde{q} на пространство q . В случае двумерных фигур $N - 1 = 1$ и тор вырождается в окружность, а само многообразие $T^{N-1} \times R^1$ – в

цилиндр. В частности, поэтому любая двумерная кривая Лиссажу будет проекцией некоторой кривой на цилиндре, о чем сказано, например, в книге [5]. Очевидно, что приведенная геометрическая интерпретация не единственна. Например, можно было ввести переменную $\tilde{q}_{k_n}^n$ и получить, что $(q(t), \tilde{q}(t)) \in T^N$.

Легко видеть, что отмеченные свойства справедливы не только для фигур Лиссажу (резонансный случай), но и произвольных траекторий типа $q_j^i(t) = A_j^i \cos(\omega_j^i t + \phi_j^i)$, где частоты уже могут быть произвольными. Это следует из правомерности проведенных рассуждений для любого соотношения частот.

Наиболее простую форму имеют фигуры второго типа и поэтому могут называться вырожденными. Так, в случае 1:....:1 фигурой такого типа будет отрезок прямой, причем именно с этими прямолинейными колебаниями связаны некоторые технические задачи [16,21,25,27,52,54,55,59,60,62-64], возникающие при исследовании волновых твердотельных и вибрационных гироскопов. Поэтому все написанное ниже будет относиться, в основном, к фигурам второго типа. Для дальнейшего необходимо ввести следующее

Определение

Фигура имеет точку возврата (вырождена), если

$$\exists t^* : q_j^i(t^*) \rightarrow \text{ext} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, k_i$$

то есть существует такой момент времени, когда все $q_j^i(t)$ достигают экстремума. Очевидно, что если такой момент времени найден, то $q_j^i(t)$ будут достигать экстремума при

$$t_k^* = t^* + \pi k, \quad k \in Z,$$

причем можно считать, что между двумя последовательными моментами (то есть при $t \in (t_k^*, t_{k+1}^*)$) этого не происходит: иначе все частоты m^i имеют общий делитель, от которого легко избавиться подходящим выбором масштаба времени.

Менее очевидное свойство произвольной вырожденной фигуры – наличие у нее ровно двух точек возврата. Приведем доказательство этого утверждения

Общий период функций $q_j^i(t)$ равен $T = 2\pi$, так как частоты m^i не имеют общих делителей, а на любом полуинтервале длиной 2π содержится ровно две точки вида t_k^* . Поэтому осталось доказать, что значения всех $q_j^i(t)$ в этих точках не могут совпадать. Допустим противное. Тогда в моменты времени t_k^* и t_{k+1}^* все $q_j^i(t)$ будут иметь одностипные экстремумы (то есть максимум любого $q_j^i(t)$ останется максимумом, минимум – минимумом), что возможно лишь в том случае, если все частоты m^i четны, то есть имеют общий делитель, равный двум (при изменении t от t_k^* до t_{k+1}^* у $q_j^i(t)$ «набегает» фаза πm^i , поэтому сохранение типа экстремума возможно только если m^i – четно), что противоречит выбору частот. Утверждение доказано.

2. Многообразие вырожденных форм и учет возмущений.

Решение системы дифференциальных уравнений порядка $2n$ зависит от $2n$ произвольных постоянных. Задание этих постоянных для порождающей системы определяет тип фигуры, что позволяет поставить в соответствие каждому типу фигуры некоторое многообразие в пространстве постоянных. Для построения этого многообразия, соответствующего вырожденной фигуре, оказывается удобным записать решение порождающей системы в виде

$$q_j^i(t) = A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k_i$$

Удобство этой записи состоит в том, что тип фигуры, очевидно, не зависит от A_j^i (если эти величины не обращаются в ноль), а зависит лишь от соотношений между фазами ϕ_j^i , которые и предстоит выяснить. После этого нужно найти какой – либо момент времени t^* , такой что

$$q_1^1(t^*) \rightarrow \text{ext} \Leftrightarrow \cos(m^1 t + \phi_1^1) \rightarrow \text{ext}$$

например, $t^* = -\frac{\phi_1^1}{m^1}$, и подставить его в оставшиеся условия

$$q_j^i(t) \rightarrow \text{ext} \quad \forall i=1, \dots, n \quad \forall j = \begin{cases} 2, \dots, k_1, i=1 \\ 1, \dots, k_i, i \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos(m^i t^* + \phi_j^i) \rightarrow \text{ext} \Leftrightarrow m^i t^* + \phi_j^i = \pi n_j^i \Leftrightarrow$$

$$\phi_j^i = \pi n_j^i + \frac{m^i}{m^1} \phi_1^1, \quad n_j^i \in Z, \quad \{i, j\} \neq \{1, 1\}$$

Таким образом, произвольные колебания с точками возврата имеют вид

$$q_1^1(t) = A_1^1 \cos(m^1 t + \phi_1^1), \quad q_j^i(t) = A_j^i \cos\left(m^i t + \frac{m^i}{m^1} \phi_1^1 + \pi n_j^i\right), \quad \{i, j\} \neq \{1, 1\}$$

Если считать, что «амплитуды» A_j^i могут принимать отрицательные значения, то зависимость от параметров n_j^i может быть учтена путем выбора знака амплитуд. В этом случае последнее выражение преобразуется к виду

$$q_1^1(t) = A_1^1 \cos(m^1 t + \phi_1^1), \quad q_j^i(t) = A_j^i \cos\left(m^i t + \frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right), \quad \{i, j\} \neq \{1, 1\}$$

Из этой формулы следует, что фигура сохраняет свой вид и в том случае, когда $\phi_1^1 \neq \text{const}$, а зависит от времени (утверждение может нарушаться в некоторых особых случаях, например, если $\phi_1^1 = -m^1 t$ и т.п.). Действительно, если

$\phi_1^1 = \phi_1^1(t)$, то $t + \frac{\phi_1^1}{m^1} = \psi(t)$ – некоторая функция времени и формула

$q_j^i(t) = A_j^i \cos(m^i \psi(t))$ задает фигуру с точками возврата, но неравномерно меняющимся временным параметром.

Попутно с записью формулы для произвольных колебаний исследуемого типа фактически доказана следующая

Теорема

Многообразие вырожденной формы имеет размерность $N + 1$ и может быть представлено как

$$M = l \times R^N$$

Здесь l — прямая, которая задается в пространстве ϕ уравнениями связывающими фазы ϕ_j^i с ϕ_1^1 , а пространству R^N принадлежат амплитуды A_j^i . В принципе это многообразие можно представить и в другом виде. С одной стороны, можно заменить прямую l семейством параллельных прямых (что связано с наличием чисел n_j^i в формулах связывающих фазы), с другой стороны, прямую l можно заменить замкнутой кривой на N – мерном торе (для этого достаточно в формулах, связывающих фазы, дописать $(\text{mod } 2\pi)$). Однако, дальнейшие рассуждения, относящиеся к прямой l , останутся справедливыми для любой прямой из семейства, а геометрия на торе намного сложнее, чем в R^N . Рассмотрение прямой l позволяет избежать этих усложнений.

Кроме того, если бы исследовались колебания (фигуры) другой формы, то теорема осталась бы справедливой, так как форма любой фигуры задается аналогичными соотношениями в пространстве фаз, определяющими некоторую другую прямую.

Еще одним важным случаем является обращение в ноль некоторых амплитуд A_j^i , когда происходит «сплющивание» фигур в фигуры меньшей размерности (фигура превращается в свою проекцию на подпространство, соответствующее ненулевым амплитудам). Оказывается, что размерность

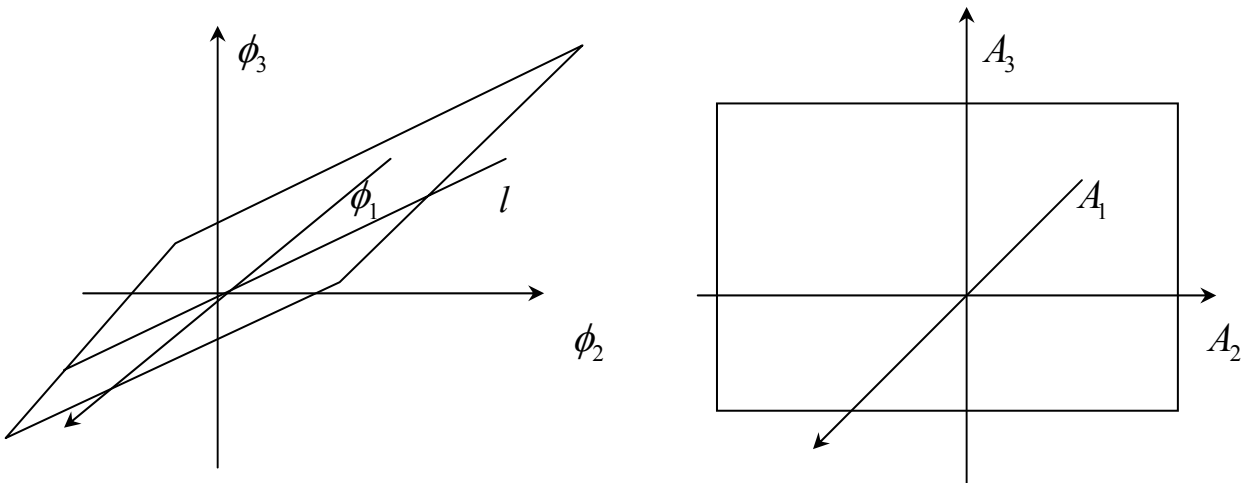
многообразия, соответствующего таким фигурам, остается прежней, хотя само многообразие существенно изменяется.

Доказательство

Пусть имеется k амплитуд $A_{j'}^{i'}$, равных нулю, что определяет $N - k$ – мерное подпространство пространства A , задаваемое уравнениями $A_{j'}^{i'} = 0$. Тогда тип фигуры, очевидно, перестает зависеть от фаз $\phi_{j'}^{i'}$, соответствующих этим амплитудам. Следовательно, $\phi_{j'}^{i'}$ могут быть произвольными, что определяет k – мерное подпространство R^k пространства фаз ϕ . Фазы, соответствующие ненулевым амплитудам, должны принадлежать проекции прямой l на подпространство пространства ϕ , соответствующее этим амплитудам, то есть на ортогональное дополнение пространства R^k . Такой проекцией будет другая прямая, обозначаемая l' .

Таким образом, амплитуды в этом случае принадлежат $N - k$ – мерному пространству, а фазы – $(k+1)$ – мерному пространству $R^k \times l'$. Это и означает, что размерность всего многообразия равна $N+1$, как и в случае, когда все амплитуды отличны от нуля.

Рассмотренная ситуация может быть проиллюстрирована. Пусть $N=3$ и одна амплитуда равна нулю, например A_1 (для удобства здесь используется один индекс). Тогда фазы должны принадлежать плоскости, проходящей через ось ϕ_1 и прямую l , а амплитуды – плоскости $A_2 A_3$



То есть размерность одной части многообразия увеличится на единицу, другой – уменьшается на единицу, тогда как суммарная размерность не меняется.

Решение порождающей системы может быть записано в ином виде

$$q_j^i(t) = x_j^i \cos(m^i t) + y_j^i \sin(m^i t),$$

где x_j^i и y_j^i – произвольные постоянные.

Такая форма записи использовалась в работе [17] и понадобится позже. Ниже получена связь этих постоянных с постоянными (A, ϕ) :

$$q_j^i(t) = A_j^i \cos\left(m^i t + \frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right) = A_j^i \cos(m^i t) \cos\left(\frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right) - A_j^i \sin(m^i t) \sin\left(\frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_j^i \cos\left(\frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right) = x_j^i \\ -A_j^i \sin\left(\frac{m^i}{m^1} \phi_1^1\right) = y_j^i \end{cases}$$

Последняя система может рассматриваться как параметрическое уравнение многообразия M в переменных (x, y) .

Учет возмущений

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Тогда в правой части порождающей системы появится некоторое возмущение и амплитуды с фазами уже перестанут быть постоянными. Для нахождения их эволюций используется метод вариации постоянных, для применения которого делается замена переменных $(q, \dot{q}) \rightarrow (A, \phi)$ в соответствии с формулами

$$q_j^i = A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i)$$

$$\dot{q}_j^i = -A_j^i m^i \sin(m^i t + \phi_j^i).$$

Эти формулы подставляются в уравнения возмущенной системы, которая до этого переписывается в нормальной форме Коши, и делаются некоторые преобразования, результатом которых оказывается следующая система для (A, ϕ) :

$$\begin{aligned}\dot{A}_j^i &= -\frac{\varepsilon}{m^i} Q_j^i(q, \dot{q}, t) \sin(m^i t + \phi_j^i) \\ \dot{\phi}_j^i &= -\frac{\varepsilon}{A_j^i m^i} Q_j^i(q, \dot{q}, t) \cos(m^i t + \phi_j^i)\end{aligned}\quad (4)$$

$$i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k_i$$

(В правых частях данных уравнений делается подстановка $q = q(A, \phi, t)$, $\dot{q} = \dot{q}(A, \phi, t)$). Будем использовать для этих уравнений следующую символическую запись

$$\left\| \begin{array}{c} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{array} \right\| = \varepsilon X(A, \phi, t)$$

Эта система для медленных переменных имеет стандартную форму одночастотной системы, что позволяет использовать метод осреднения. Напомним основную идею этого метода и докажем теорему Н.Н. Боголюбова, которая составляет основной результат теории. При доказательстве строятся конструктивные оценки погрешностей, которые удалось улучшить по сравнению с оценками, приведенными в [26].

Стандартная форма системы дифференциальных уравнений, исследуемой методом осреднения, имеет вид

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Основная идея метода осреднения состоит в том, что эта неавтономная система заменяется автономной системой

$$\dot{u} = \varepsilon X_0(u, \varepsilon)$$

правая часть которой определяется по формулам

$$X_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, u, \varepsilon) dt, \text{ если } X(t, u, \varepsilon) \text{ - непериодическая функция, и}$$

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T X(t, u, \varepsilon) dt, \text{ если } X(t, u, \varepsilon) \text{ имеет период } T.$$

То есть X_0 представляет собой результат осреднения по явно входящему времени. Начальные условия у обеих систем остаются теми же: $x(0) = u(0)$.

Использование метода осреднения корректно только в том случае, когда выполнены условия следующей теоремы [26]

Теорема Н.Н. Боголюбова

Сравниваются две задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(t, x, \varepsilon) & \dot{u} &= \varepsilon X_0(u, \varepsilon) \\ x(0) &= x_0 & u(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Правая часть $X(t, x, \varepsilon)$ считается определенной на множестве $(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_1]$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ некоторая область (открытое и связное множество).

Тогда если выполнены условия

А) $X(t, x, \varepsilon)$ - измеримая по t функция при любых фиксированных x и ε (в частности, кусочно-непрерывная функция, множество точек разрыва которой не имеет точек сгущения);

Б) можно найти такие две ни от чего не зависящие постоянные M и λ , что $\|X(t, x, \varepsilon)\| \leq M$, и $\|X(t, x, \varepsilon) - X(t, x', \varepsilon)\| \leq \lambda \|x - x'\|$ ($\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$) для любых переменных из области определения;

В) предел $X_0(u, \varepsilon) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, u, \varepsilon) dt$ существует равномерно относительно $u \in D$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$.

То если решение $u(t)$ задачи Коши для осредненной системы определено при $t \in [0, \infty)$ и принадлежит области D вместе со своей ρ - окрестностью, то $\forall L \quad \exists \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} \|x(t) - u(t)\| &\leq L \sqrt{\lambda M} e^{\lambda L} \sqrt{\delta(\varepsilon)} \\ \text{при } t &\in [0, L/\varepsilon) \text{ и } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \end{aligned}$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{0 < h \leq L} \sup_{x \in D} \left\| \varepsilon \int_0^{h/\varepsilon} [X(t, x, \varepsilon) - X_0(x, \varepsilon)] dt \right\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Если правая часть системы периодична $X(t+T, x, \varepsilon) \equiv X(t, x, \varepsilon)$, то приведенная оценка существенно улучшаема:

$$\|x(t) - u(t)\| \leq TM \left(\frac{1}{2} \lambda L + 2 \right) e^{\lambda L} \varepsilon$$

Приведенное ниже доказательство фактически дословно повторяет доказательство, данное в монографии [29]. Однако здесь используется несколько иная аппроксимация функций, что позволяет улучшить оценки полученные в [29]. Эта деталь указана на странице 31.

Доказательство

Вычтем из первой системы вторую и перейдем к эквивалентным интегральным уравнениям:

$$x(t) - u(t) = \varepsilon \int_0^t \{ X[t, x(t), \varepsilon] - X_0[u(t), \varepsilon] \} dt$$

После чего в подынтегральном выражении добавим и вычтем функцию $X[t, u(t), \varepsilon]$ и оценим последнее соотношение по норме, пользуясь свойствами нормы и условием Б):

$$\begin{aligned} \|x(t) - u(t)\| &\leq \varepsilon \int_0^t \|X(t, x(t), \varepsilon) - X(t, u(t), \varepsilon)\| dt + \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \lambda \int_0^t \|x(t) - u(t)\| dt + \sup_{t \in [0, L/\varepsilon]} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\|, \end{aligned}$$

где $\tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) = X(t, u(t), \varepsilon) - X_0(u(t), \varepsilon)$. Для дальнейших оценок используется лемма Гронуолла [15, 19, 26]:

Если неотрицательные скалярные непрерывные функции $\alpha(t)$ и $f(t)$ определены на интервале $t \in [0, \infty)$ и удовлетворяют неравенству

$$\alpha(t) \leq C + \int_0^t f(t) \alpha(t) dt,$$

где C – положительное число, то для них также верно неравенство

$$\alpha(t) \leq C \exp \int_0^t f(t) dt$$

на том же интервале времени. Применяя эту лемму для оценки $\|x(t) - u(t)\|$, получим, что

$$\|x(t) - u(t)\| \leq e^{\varepsilon \lambda t} \sup_{t \in [0, L/\varepsilon]} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| \leq e^{\lambda L} J,$$

где

$$J = \sup_{t \in [0, L/\varepsilon]} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\|.$$

Для оценок величины J понадобятся следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|X_0(x, \varepsilon)\| &\leq M, \quad \|\tilde{X}(t, x, \varepsilon)\| \leq 2M, \\ \|X_0(x, \varepsilon) - X_0(x', \varepsilon)\| &\leq \lambda \|x - x'\|, \\ \|\tilde{X}(t, x, \varepsilon) - \tilde{X}(t, x', \varepsilon)\| &\leq 2\lambda \|x - x'\|. \end{aligned}$$

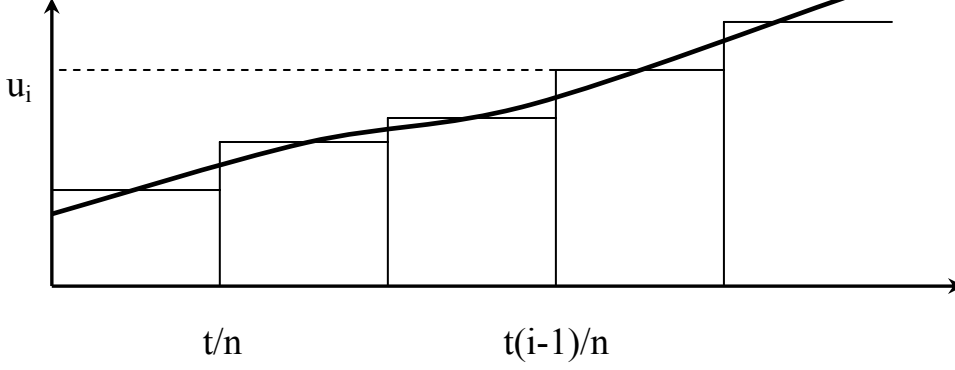
Оценка J зависит от того, является ли \tilde{X} периодической функцией t или нет. В начале рассмотрим непериодический случай. Если $u(t) = \text{const}$ – стационарное решение задачи Коши для системы с правой частью $X_0(x, \varepsilon)$, то, полагая $t = l/\varepsilon$ и пользуясь условием В) теоремы, получим

$$J = \sup_{l \in [0, L]} l \left\| \frac{\varepsilon}{l} \int_0^l \tilde{X}(t, u, \varepsilon) dt \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Обозначим $\delta(\varepsilon) = \sup_{u \in D} J$; $\delta(\varepsilon)$ существует и удовлетворяет условию

$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу условия теоремы В). Таким образом, для стационарного решения $J \leq \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оценка для общего случая

сводится к стационарному при помощи следующего приема. Интервал $[0, t]$ разбивается на n равных интервалов



а для аппроксимации $u(t)$ используется ступенчатая функция. В отличие от аппроксимации, использованной в [26], в качестве u_i выбирается значение $u(t)$ из середины, а не начала интервала $u_i = u(t(i-1/2)/n)$. Это и позволяет улучшить оценки, полученные в [26].

Запишем неравенство

$$\left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} [\tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) - \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon)] dt \right\| + \sum_{i=1}^n \left\| \varepsilon \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) dt \right\|$$

По только что доказанному

$$\left\| \varepsilon \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) dt \right\| \leq \left\| \varepsilon \int_0^{ti/n} \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) dt \right\| + \left\| \varepsilon \int_0^{t(i-1)/n} \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) dt \right\| \leq 2\delta(\varepsilon).$$

Далее оценим

$$\left\| \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} [\tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) - \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon)] dt \right\| \leq 2\lambda \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} \|u(\tau) - u_i\| d\tau$$

Величина $\|u(\tau) - u_i\|$ оценивается из задачи Коши

$$\dot{u} = \varepsilon X_0(u, \varepsilon), \quad u(t(i-1/2)/n) = u_i$$

Следовательно,

$$\|u(\tau) - u_i\| \leq \varepsilon M |\tau|, \quad \text{где} \quad \tau \in \left[-\frac{t}{2n}, \frac{t}{2n}\right]$$

то есть начальные условия задачи Коши выбираются из середины интервала разбиения $\left[t(i-1)/n, ti/n\right]$, а сама задача решается в положительном времени для правой половины интервала, и в отрицательном для левой половины (относительно начального условия $u(t(i-1/2)/n) = u_i$).

Интегрируя последнюю оценку, получим, что

$$2\lambda \int_{t(i-1)/n}^{ti/n} \|u(\tau) - u_i\| d\tau \leq \frac{1}{4} \lambda \varepsilon M \frac{t^2}{n^2}$$

Это приводит к окончательной оценке

$$\left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| \leq \frac{1}{2} \frac{\lambda M L}{n} + 2n\delta(\varepsilon)$$

число n выбирается из условия минимальности правой части последнего соотношения: $n \simeq \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\lambda M}{\delta(\varepsilon)}}$. Отсюда получается следующая оценка

$$\|u(t) - x(t)\| \leq L\sqrt{\lambda M} e^{\lambda L} \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Данная оценка улучшена по сравнению с аналогичным результатом, приведенном в [26], в $2\sqrt{2}$ раз.

Перейдем к периодическому случаю. Пусть T – период и $t \in [(n-1)T, nT]$.

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| &\leq \left\| \varepsilon \int_0^{nT} \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| + \left\| \varepsilon \int_{nT}^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left\| \varepsilon \int_{(i-1)T}^{iT} \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| + 2\varepsilon M T \end{aligned}$$

Для дальнейших оценок используем соотношение

$$\int_{(i-1)T}^{iT} \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) dt = 0$$

где $u_i = u((i-1/2)T)$, поскольку будет использован тот же прием, что и в предыдущем случае: вместо аппроксимации $u(t)$ на отрезке $[(i-1)T, iT]$ величиной $u_i = u((i-1)T)$ выбирается значение $u((i-1/2)T)$.

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon \int_{(i-1)T}^{iT} \left\| \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) - \tilde{X}(t, u_i, \varepsilon) \right\| dt + \\ &+ 2\varepsilon MT \leq \sum_{i=1}^n 2\varepsilon \lambda \int_{(i-1)T}^{iT} \|u(t) - u_i\| dt + 2\varepsilon MT \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, $\|u(\tau) - u_i\| \leq \varepsilon M |\tau|$, где $\tau \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \int_0^t \tilde{X}(t, u(t), \varepsilon) dt \right\| &\leq \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda n M T^2 + 2\varepsilon MT \simeq \left\langle nT \simeq \frac{L}{\varepsilon} \right\rangle \simeq \\ &\simeq \varepsilon MT \left(\frac{1}{2} \lambda L + 2 \right) \end{aligned}$$

откуда получается оценка

$$\|u(t) - x(t)\| \leq TM \left(\frac{1}{2} \lambda L + 2 \right) e^{\lambda L} \varepsilon.$$

Эта оценка также улучшена относительно приведенной в [26], где было указано, что $\|u(t) - x(t)\| \leq TM (\lambda L + 2) e^{\lambda L} \varepsilon$.

Теорема доказана.

Возвращаясь к нашей задаче, учитывая 2π – периодичность правой части, имеем:

$$\left\| \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\| = \varepsilon X(A, \phi, t) \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\| = \varepsilon X(A, \phi), \text{ где } X(A, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(A, \phi, t) dt. \quad (5)$$

3. Локальный эволюционный базис и его свойства. Алгебра Ли векторных полей.

Появление возмущений в порождающей системе приводит к эволюциям фигур. Существует четыре типа таких эволюций: изменение частоты колебаний, изменение их амплитуды, прецессия формы и разрушение формы, определяемое как такая эволюция, которая не может рассматриваться как три предыдущих [17]. Каждому типу эволюций ставится в соответствие определенное направление (или совокупность направлений) в пространстве (A, ϕ) , таких, что возмущение, имеющее проекцию на какое – либо из этих направлений, вызывает соответствующую эволюцию. Указанные направления образуют локальный базис в пространстве (A, ϕ) . Ниже приводятся выражения для векторов базиса и исследуются его свойства. Направления разрушения формы образованы множеством нормалей к многообразию M :

$$\left. \begin{array}{l} k_1 - 1 \left\{ \begin{array}{l} \left\| \underbrace{0, \dots, 0}_N \middle| \underbrace{m^1, -m^1, 0, \dots, 0}_N \right\|^T \\ \dots \dots \dots \left\| \underbrace{0, \dots, 0}_N \middle| \underbrace{m^1, 0, \dots, 0, -m^1, 0, \dots, 0}_N \right\|^T \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ k_n \left\{ \begin{array}{l} \left\| \underbrace{0, \dots, 0}_N \middle| \underbrace{m^n, 0, \dots, 0, -m^1, 0, \dots, 0}_N \right\|^T \\ \dots \dots \dots \left\| \underbrace{0, \dots, 0}_N \middle| \underbrace{m^n, 0, \dots, 0, -m^1}_N \right\|^T \end{array} \right. \end{array} \right\} N - 1 \text{ направление}$$

Здесь и далее первые N координат относятся к пространству A , остальные – к пространству ϕ . В каждом последующем векторе элемент $-m^1$ смещается на одну позицию вправо по сравнению с предыдущим. Совокупность этих векторов образует базис в ортогональном дополнении прямой l .

Направление изменения частоты. Изменение частоты происходит при равномерном движении по прямой l , так как тогда

$$\phi_1^1 = vt \Rightarrow q_j^i = A_j^i \cos \left[m^i \left(t + \frac{\phi_1^1}{m^1} \right) \right] = A_j^i \cos \left[m^i \left(1 + \frac{v}{m^1} \right) t \right].$$

Следовательно, направление, соответствующее изменению частоты образовано направляющим вектором прямой l , который имеет вид

$$\left\| 0, \dots, 0 \left| \underbrace{m^1, \dots, m^1}_{k_1}, \dots, \underbrace{m^n, \dots, m^n}_{k_n} \right. \right\|^T.$$

Направление изменения амплитуды. Амплитудой колебаний естественно считать величину

$$\max \|q\| = \max \sqrt{\sum (q_j^i)^2}$$

В случае вырожденной формы колебаний $\max \|q\| = \sqrt{\sum (A_j^i)^2}$, поэтому направление изменения амплитуды имеет вид

$$\left\| A_1^1, \dots, A_{k_1}^1, \dots, A_1^n, \dots, A_{k_n}^n \left| 0, \dots, 0 \right. \right\|^T$$

Прецессией фигуры называется такая эволюция, при которой не меняется амплитуда и тип фигуры, что в случае вырожденной формы равносильно условию

$$\sum (A_j^i)^2 = R^2 = \text{const}$$

Это уравнение задает $N - 1$ – мерную сферу в N – мерном пространстве амплитуд A . При варьировании параметров A_j^i по сфере происходит растяжение фигуры в одних направлениях и сжатие в других, так что

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\| \begin{array}{cccccc} 2(m^1)^2 & (m^1)^2 & \dots & m^1 m^n & \dots & m^1 m^n \\ & 2(m^1)^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (m^1)^2 + (m^n)^2 \end{array} \right\|, \\
G_2 &= \left\| \begin{array}{cccc} (A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 & A_2^1 A_3^1 & \dots & A_2^1 A_{k_n}^n \\ \dots & (A_1^1)^2 + (A_3^1)^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (A_1^1)^2 + (A_{k_n}^n)^2 \end{array} \right\|, \\
G_3 &= \sum_{i=1}^n k_i (m^i)^2, \quad G_4 = \sum (A_j^i)^2 = \|A\|^2, \quad G_1 = G_1^T, \quad G_2 = G_2^T.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что все эти блоки невырождены, так как представляют собой матрицы Грама тех векторов, линейная независимость которых очевидна.

Таким образом, получены следующие свойства локального базиса:

1. Векторы локального базиса линейно независимы.

Подпространства, соответствующие различным эволюциям, ортогональны. Это означает, что

$$\left\{ e_j^i \right\}_d \perp \left\{ e_j^i \right\}_p \perp \left\{ e \right\}_f \perp \left\{ e \right\}_a$$

В этой формуле буквами « e » с индексами обозначены векторы базиса и на протяжении всего последующего текста индексы под буквами обозначают тип соответствующей эволюции: d означает разрушение формы, p – прецессию, f – изменение частоты и a – изменение амплитуды.

2. Алгебра операторов, порождаемая направлениями локального базиса, имеет размерность $2N$ и является некоммутативной, однако большинство

коммутаторов обращается в ноль. Операторы строятся по правилу

$$U_{*}^i = \left(e_j^i \cdot \nabla \right) \text{ где } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial A_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{k_n}^n} \middle| \frac{\partial}{\partial \phi_1^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_{k_n}^n} \right), \quad e_j^i -$$

вектор локального базиса, * принимает значения из совокупности $\{d, p, f, a\}$ и имеют вид

$$\begin{aligned} U_d^i &= m^i \frac{\partial}{\partial \phi_1^1} - m^1 \frac{\partial}{\partial \phi_j^i}, \\ U_p^i &= A_j^i \frac{\partial}{\partial A_1^1} - A_1^1 \frac{\partial}{\partial A_j^i}, \\ U_f &= m^1 \frac{\partial}{\partial A_1^1} + \dots + m^1 \frac{\partial}{\partial \phi_{k_1}^1} + \dots + m^n \frac{\partial}{\partial \phi_1^n} + \dots + m^n \frac{\partial}{\partial \phi_{k_n}^n}, \\ U_a &= A_1^1 \frac{\partial}{\partial A_1^1} + \dots + A_{k_n}^n \frac{\partial}{\partial A_{k_n}^n}. \end{aligned}$$

В операторах с тремя индексами нумерация начинается с $\{i, j\} = \{1, 2\}$ или $\{2, 1\}$, если первая группа уравнений (с частотой m^1) состоит из одного уравнения.

Операторы U_p^i представляют собой операторы группы вращений, а U_a -

оператор группы подобия. Большая часть этих операторов коммутируют. Исключением будут лишь операторы группы прецессии, для которых справедливы соотношения

$$\left[U_{p^i}^i, U_{p^l}^l \right] = A_k^l \frac{\partial}{\partial A_j^i} - A_j^i \frac{\partial}{\partial A_k^l}$$

То есть их коммутаторы являются операторами группы вращений. Из приведенных коммутационных соотношений следует, что существует возможность воздействовать на систему по одному «каналу» не воздействуя при этом на другие (например, вызывать только прецессию не изменяя других свойств и т.п.).

3. Многообразие M является инвариантным для групп прецессии, изменения частоты и амплитуды.
4. Эволюционный базис неголономен, так как направления прецессии не имеют потенциала.

4. Классификация сил по типу порождаемой эволюции.

Классификация проводится для линейных по координатам и скоростям сил, не зависящих от времени

$$Q = (S + H + N) \begin{pmatrix} q_1^1 \\ \vdots \\ q_{k_n}^n \end{pmatrix} + (D + R + \Gamma) \begin{pmatrix} \dot{q}_1^1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{k_n}^n \end{pmatrix}$$

В этой формуле S – симметрическая матрица потенциальных позиционных сил сферического типа, H – симметрическая матрица потенциальных позиционных сил гиперболического типа, N – кососимметрическая матрица циркулярных позиционных сил, D – симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, R – симметрическая матрица диссипативных сил гиперболического типа, Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Каждая из этих матриц постоянна и будет рассматриваться в своей канонической форме:

$$S = \text{diag}(s, \dots, s), \quad H = \text{diag}(h_1^1, \dots, h_{k_n}^n), \quad \text{tr}H = 0, \quad D = \text{diag}(d, \dots, d),$$

$$R = \text{diag}(r_1^1, \dots, r_{k_n}^n), \quad \text{tr}R = 0,$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & & & \\ -n_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & n_k \\ & & & -n_k & 0 \\ & & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Канонический вид матрицы Γ такой же, как у N , только отличные от нуля элементы Γ будут обозначаться γ_k . Влияние сил будет рассматриваться независимо друг от друга путем подстановки выражений для сил в формулу (4) для $X(A, \phi, t)$, приведенную на странице 16, и осреднением в соответствии с формулой (5) на странице 34. Результатом соответствующих вычислений будет

$$X_S(A, \phi, t) = -s \left(\frac{A_1^1}{m^1} \cos(m^1 t + \phi_1^1) \sin(m^1 t + \phi_1^1), \dots, \frac{A_{k_n}^n}{m^n} \cos(m^n t + \phi_{k_n}^n) \sin(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right) \left| \frac{1}{m^1} \cos^2(m^1 t + \phi_1^1), \dots, \frac{1}{m^n} \cos^2(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right|^T \Rightarrow X_S(A, \phi) = \langle X_S(A, \phi, t) \rangle_t = -\frac{1}{2} s \left(0, \dots, 0 \left| \frac{1}{m^1}, \dots, \frac{1}{m^n} \right|^T \right)$$

$$X_H(A, \phi, t) = - \left(\frac{A_1^1 h_1^1}{m^1} \cos(m^1 t + \phi_1^1) \sin(m^1 t + \phi_1^1), \dots, \frac{A_{k_n}^n h_{k_n}^n}{m^n} \cos(m^n t + \phi_{k_n}^n) \sin(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right) \left| \frac{h_1^1}{m^1} \cos^2(m^1 t + \phi_1^1), \dots, \frac{h_{k_n}^n}{m^n} \cos^2(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right|^T \Rightarrow X_H(A, \phi) = -\frac{1}{2} \left(0, \dots, 0 \left| \frac{h_1^1}{m^1}, \dots, \frac{h_{k_n}^n}{m^n} \right|^T \right)$$

В этих и всех последующих формулах векторы разбиты на два блока размерности $N \times 1$ так, что первый относится к пространству амплитуд, а второй – к пространству фаз. $X_N(A, \phi)$ целесообразно вычислить для случая, когда матрица N содержит лишь один блок, отличный от нуля, то есть

$$N = \left\| \begin{array}{cc} \ddots & \\ & 0 & n_k \\ & -n_k & 0 \\ & & \ddots \end{array} \right\|$$

Матрица N общего вида всегда может быть представлена в виде суммы таких матриц и, следовательно, ее рассмотрение сводится к этому случаю. Причем важно различать две ситуации, в зависимости от того умножается ли отличный от нуля блок

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & n_k \\ -n_k & 0 \end{array} \right\|$$

на группу координат, соответствующую одинаковым либо разным частотам, то есть

$$Q_N = Nq = \left\| \begin{array}{cc} \ddots & \\ & 0 & n_k \\ & -n_k & 0 \\ & & \ddots \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i) \\ A_{j+1}^i \cos(m^i t + \phi_{j+1}^i) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\| \quad \text{или}$$

$$Q_N = \left\| \begin{array}{cc} \ddots & \\ & 0 & n_k \\ & -n_k & 0 \\ & & \ddots \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \dots\dots\dots \\ A_{k_i}^i \cos(m^i t + \phi_{k_i}^i) \\ A_1^{i+1} \cos(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\|$$

соответственно. В первом случае

$$X_N(A, \phi, t) = \left(\dots, -\frac{A_{j+1}^i n_k}{m^i} \sin(m^i t + \phi_j^i) \cos(m^i t + \phi_{j+1}^i), \frac{A_j^i n_k}{m^i} \sin(m^i t + \phi_{j+1}^i) \cos(m^i t + \phi_j^i), \dots \right. \\ \left. \dots, -\frac{A_{j+1}^i n_k}{A_j^i m^i} \cos(m^i t + \phi_j^i) \cos(m^i t + \phi_{j+1}^i), \frac{A_j^i n_k}{A_{j+1}^i m^i} \cos(m^i t + \phi_{j+1}^i) \cos(m^i t + \phi_j^i), \dots \right)^T \Rightarrow \\ X_N(A, \phi) = \left(\dots, -\frac{A_{j+1}^i n_k}{m^i} \sin(\phi_j^i - \phi_{j+1}^i), \frac{A_j^i n_k}{m^i} \sin(\phi_j^i - \phi_{j+1}^i), \dots \left| \dots, -\frac{A_{j+1}^i n_k}{A_j^i m^i} \cos(\phi_j^i - \phi_{j+1}^i), \right. \right. \\ \left. \left. \frac{A_j^i n_k}{A_{j+1}^i m^i} \cos(\phi_j^i - \phi_{j+1}^i), \dots \right)^T$$

откуда видно, что на многообразии M циркулярные силы не могут изменить

амплитуды, так как тогда $\phi_j^i - \phi_{j+1}^i = \pi n_j^i$, $n_j^i \in Z$. Во втором случае

$$X_N(A, \phi, t) = \left(\dots, -\frac{A_1^{i+1} n_k}{m^i} \sin(m^i t + \phi_{k_i}^i) \cos(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}), \frac{A_{k_i}^i n_k}{m^i} \sin(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}) \cos(m^i t + \phi_{k_i}^i), \dots \right. \\ \left. \dots, -\frac{A_1^{i+1} n_k}{A_{k_i}^i m^i} \cos(m^i t + \phi_{k_i}^i) \cos(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}), \frac{A_{k_i}^i n_k}{A_1^{i+1} m^{i+1}} \cos(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}) \cos(m^i t + \phi_{k_i}^i) \right)^T \Rightarrow \\ X_N(A, \phi) \equiv 0$$

и поэтому такие силы в первом приближении вообще не влияют на систему.

$$\begin{aligned}
X_D(A, \phi, t) &= d \left(A_1^1 \sin^2(m^1 t + \phi_1^1), \dots, A_{k_n}^n \sin^2(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right) \\
&\sin(m^1 t + \phi_1^1) \cos(m^1 t + \phi_1^1), \dots, \sin(m^n t + \phi_{k_n}^n) \cos(m^n t + \phi_{k_n}^n) \Big)^T \Rightarrow \\
X_D(A, \phi) &= \frac{d}{2} \left(A_1^1, \dots, A_{k_n}^n \mid 0, \dots, 0 \right)^T, \\
X_R(A, \phi, t) &= \left(A_1^1 r_1^1 \sin^2(m^1 t + \phi_1^1), \dots, A_{k_n}^n r_{k_n}^n \sin^2(m^n t + \phi_{k_n}^n) \right) \\
&r_1^1 \sin(m^1 t + \phi_1^1) \cos(m^1 t + \phi_1^1), \dots, r_{k_n}^n \sin(m^n t + \phi_{k_n}^n) \cos(m^n t + \phi_{k_n}^n) \Big)^T \Rightarrow \\
X_R(A, \phi) &= \frac{1}{2} \left(A_1^1 r_1^1, \dots, A_{k_n}^n r_{k_n}^n \mid 0, \dots, 0 \right)^T
\end{aligned}$$

При рассмотрении гироскопических сил нужно опять выделить два случая, точно так же, как это делалось с циркулярными силами. В первом случае

$$\begin{aligned}
X_\Gamma(A, \phi, t) &= \left(\dots, A_{j+1}^i \gamma_k \sin(m^i t + \phi_{j+1}^i) \sin(m^i t + \phi_j^i), -A_j^i \gamma_k \sin(m^i t + \phi_{j+1}^i) \sin(m^i t + \phi_j^i), \dots \right) \dots \\
&\dots, \frac{A_{j+1}^i \gamma_k}{A_j^i} \cos(m^i t + \phi_j^i) \sin(m^i t + \phi_{j+1}^i), -\frac{A_j^i \gamma_k}{A_{j+1}^i} \cos(m^i t + \phi_{j+1}^i) \sin(m^i t + \phi_j^i), \dots \Big)^T \Rightarrow \\
X_\Gamma(A, \phi) &= \frac{1}{2} \left(\dots, A_{j+1}^i \gamma_k \cos(\phi_{j+1}^i - \phi_j^i), -A_j^i \gamma_k \cos(\phi_{j+1}^i - \phi_j^i), \dots \right) \dots, \frac{A_{j+1}^i \gamma_k}{A_j^i} \sin(\phi_{j+1}^i - \phi_j^i), \\
&-\frac{A_j^i \gamma_k}{A_{j+1}^i} \sin(\phi_{j+1}^i - \phi_j^i), \dots \Big)^T
\end{aligned}$$

а во втором случае

$$\begin{aligned}
X_\Gamma(A, \phi, t) &= \left(\dots, \frac{A_1^{i+1} \gamma_k m^{i+1}}{m^i} \sin(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}) \sin(m^i t + \phi_{k_i}^i), -\frac{A_{k_i}^i \gamma_k m^i}{m^{i+1}} \sin(m^i t + \phi_{k_i}^i) \sin(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}), \dots \right) \dots \\
&\dots, \frac{A_1^{i+1} \gamma_k m^{i+1}}{A_{k_i}^i m^i} \cos(m^i t + \phi_{k_i}^i) \sin(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}), -\frac{A_{k_i}^i \gamma_k m^i}{A_1^{i+1} m^{i+1}} \cos(m^{i+1} t + \phi_1^{i+1}) \sin(m^i t + \phi_{k_i}^i), \dots \Big)^T \\
&\Rightarrow X_\Gamma(A, \phi) \equiv 0
\end{aligned}$$

Таким образом, действие гироскопических сил первого типа на многообразии M , то есть на вырожденную форму колебаний, как бы противоположно действию циркулярных сил: в первом приближении они не влияют на фазовые переменные. Подстановка $X_\Gamma(A, \phi)$ при $(A, \phi) \in M$ в осредненные уравнения (5) для (A, ϕ) , написанные на странице 34, приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_j^i &= \varepsilon C_k A_{j+1}^i \\ \dot{A}_{j+1}^i &= -\varepsilon C_k A_j^i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{A}_j^i + \varepsilon^2 C_k^2 A_j^i = 0 \quad (C_k = \text{const}),$$

из которых следует, что гироскопические силы могут приводить к вырождению фигур в фигуры меньшей размерности:

$$A_j^i(t) = A_{0j}^i \cos(C_k \varepsilon t + \psi_{0j}^i) \Rightarrow \exists t_j^i : A_j^i(t_j^i) = 0.$$

Для того, чтобы выявить влияние какой – либо силы на ту или иную эволюцию нужно спроектировать эту силу на направления базиса, соответствующие этой эволюции. Результат такого проектирования для только что вычисленных осредненных сил $X_*(A, \phi)$ удобно представить в виде следующей таблицы

	S	H	N	D	R	Г
e_d	+	+	+			
e_p					+	+
e_f	+		+			
e_a				+	+	

в которой наличие проекции обозначено знаком «+», а отсутствие проекции никак не отмечается. Из этой таблицы видно, что, например, потенциальные позиционные силы сферического типа (с матрицей S) приводят к разрушению формы и изменению частоты, гироскопические силы вызывают лишь прецессию и т.д.

Если составить аналогичную таблицу для неосредненных сил, то есть $X_*(A, \phi, t)$, то вся таблица окажется заполненной «плюсами» с единственным исключением для гироскопических сил первого типа, для которых отсутствует проекция на направление изменения амплитуды.

5. Непосредственное изучение линейных сил.

Изучение линейных сил может быть проведено напрямую без использования осреднения, поскольку в этом случае можно выписать точные решения соответствующих уравнений. К тому же решение неосредненных уравнений позволит выявить некоторые эффекты второго порядка малости ($\propto \varepsilon^2$). Наиболее проста ситуация в случае диагональных матриц. Решение выписывается элементарно, и позволяет объяснить такие эффекты, как разрушение формы под действием позиционных сил сферического типа и увеличение некоторых амплитуд под действием диссипативных сил гиперболического типа.

Для объяснения первого эффекта достаточно рассмотреть резонанс 1:2

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 &= \varepsilon q_1 \\ \ddot{q}_2 + 4q_2 &= \varepsilon q_2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + (1 - \varepsilon)q_1 &= 0 \\ \ddot{q}_2 + (4 - \varepsilon)q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{1 - \varepsilon}, \quad \omega_2 = \sqrt{4 - \varepsilon}$$

то есть соотношение между частотами $(\omega_1 : \omega_2)$ изменяется и происходит разрушение фигуры. Кроме того, легко видеть, что в подавляющем большинстве случаев частоты становятся несоизмеримыми, и в системе исчезает резонанс. Исключением является случай резонанса 1:....:1, когда соотношения частот не меняются, хотя сами частоты станут и другими.

Влияние диссипативных сил гиперболического типа описывается уравнениями

$$\ddot{q}_j^i + (m^i)^2 q_j^i = \varepsilon r_j^i \dot{q}_j^i.$$

Из условия $\text{tr} R = \sum r_j^i = 0$ следует, что существует хотя бы одна пара индексов $\{i, j\}$, такая что $r_j^i > 0$ (иначе все $r_j^i \equiv 0 \quad \forall \quad i, j$). Аналогично, $\exists \quad i, j: r_j^i < 0$.

Решение имеет вид

$$q_j^i(t) \cong q_{0j}^i \exp\left(\frac{\varepsilon r_j^i}{2} t\right) \cos(m^i t + \phi_{0j}^i)$$

(знак « \cong » стоит в силу того, что изменение частоты при малых ε пропорционально ε^2) и поэтому обязательно имеются как колебания с экспоненциально возрастающей амплитудой, так и с экспоненциально убывающей. Кроме них возможны также и гармонические колебания, если $\exists r_j^i = 0$.

Исследование сил с недиагональными матрицами позволяет обнаружить эффекты, нелинейные по малому параметру.

В случае гироскопических сил первого типа можно считать, что система имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + q_1 &= \varepsilon \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + q_2 &= -\varepsilon \dot{q}_1\end{aligned}$$

так как общий случай сводится к этому. Поиск решения в виде $q = he^{\lambda t}$ сводится к отысканию корней уравнения

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \lambda^2 + 1 & -\varepsilon \lambda \\ \varepsilon \lambda & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} = 0,$$

которое имеет решения $\lambda = \pm \sqrt{\frac{-(2 + \varepsilon^2) \pm \sqrt{4\varepsilon^2 + \varepsilon^4}}{2}} = \pm i \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2} \right) + o(\varepsilon) \Rightarrow$

наблюдается эффект раздвоения частот: $\omega_1 \cong 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, $\omega_2 \cong 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Гироскопические силы второго типа сводятся к системе

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + m^2 q_1 &= \varepsilon q_2 \\ \ddot{q}_2 + n^2 q_2 &= -\varepsilon q_1 \end{aligned} \right\} (m \neq n) \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 + m^2 & -\varepsilon \lambda \\ \varepsilon \lambda & \lambda^2 + n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (*) \Rightarrow$$

$$\lambda^2 = \lambda^2(m^2, n^2, \varepsilon^2) \Rightarrow \lambda^2 \cong \lambda^2(m^2, n^2, 0) + \frac{\partial \lambda^2}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2,$$

$$\lambda_1^2(m^2, n^2, 0) = -m^2, \quad \lambda_2^2(m^2, n^2, 0) = -n^2 \quad (**)$$

Чтобы вычислить $\left. \frac{\partial \lambda^2}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$ уравнение (*) расписывается в явном виде и дифференцируется по ε^2 , после чего туда подставляются выражения (**). В первом случае это приводит к уравнению

$$\left. \frac{\partial \lambda_1^2}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} (n^2 - m^2) + \varepsilon^2 \left. \frac{\partial \lambda_1^2}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} - m^2 = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \lambda_1^2}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \cong \frac{m^2}{n^2 - m^2} \Rightarrow \lambda_1^2 \cong -m^2 + \varepsilon^2 \frac{m^2}{n^2 - m^2} \Rightarrow$$

$$\omega_1 \cong m \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n^2 - m^2)} \right]$$

Аналогичные вычисления для второго корня приводят к следующему результату:

$$\omega_2 \cong n \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2(n^2 - m^2)} \right].$$

Отсюда видно, что гироскопические силы второго типа приводят к увеличению больших частот и к снижению меньших, однако эффект оказывается квадратичным по малому параметру.

Циркулярные силы исследуются точно так же, как и гироскопические. Для сил первого типа

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + q_1 = \varepsilon q_2 \\ \ddot{q}_2 + q_2 = -\varepsilon q_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 + 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2}^2 = -1 \pm i\varepsilon,$$

что в случае малого ε приводит к появлению в решении множителей типа $e^{\pm \frac{\varepsilon}{2}}$ (эффект изменения частоты имеет порядок ε^2).

Силы второго типа:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q}_1 + m^2 q_1 = \varepsilon q_2 \\ \ddot{q}_2 + n^2 q_2 = -\varepsilon q_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 + m^2 & -\varepsilon \\ \varepsilon & \lambda^2 + n^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_1 \cong m \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2m^2(n^2 - m^2)} \right], \quad \omega_2 \cong n \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2n^2(n^2 - m^2)} \right],$$

то есть влияние циркулярных сил второго типа схоже с действием гироскопических сил того же типа (увеличение большей частоты и снижение меньшей), хотя и описывается другими формулами.

6. Задача стабилизации вырожденной формы

Как уже отмечалось, вырожденные фигуры неустойчивы по отношению к исчезающе малым возмущениям. Поэтому для того, чтобы осуществить такие колебания в любой реальной системе, необходимо построить обратную связь (управление), обеспечивающую устойчивость этих колебаний. Кроме того, целесообразно поддерживать постоянную амплитуду колебаний. Без ограничения общности ее можно считать единичной, что позволит несколько упростить выкладки. Сама же обратная связь не должна приводить к изменению частоты и прецессии фигуры. Последние два требования вытекают из возможной области применения данных результатов для управления вибрационными или волновыми твердотельными гироскопами. Ясно, что сигнал любого прибора должен быть стабильным: он не должен ни пропадать, ни становиться слишком большим. Этим диктуется необходимость поддержания постоянной амплитуды. С другой стороны, управление гироскопом не должно вносить погрешности в его показания, откуда и следует вторая группа требований, предъявляемых к управлению.

Таким образом, возникает следующая задача:

Найти обратную связь

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \Psi(A, \phi) \\ \dot{\phi} &= \Phi(A, \phi)\end{aligned}$$

так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость многообразия $M \cap S^{N-1}$, где S^{N-1} - единичная сфера в пространстве амплитуд A . При этом обратная связь не должна давать проекций на направления изменения частоты и прецессии:

$$\left(\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^i \\ p \end{pmatrix} \right) = 0$$

где (\cdot) - скалярное произведение в смысле пространства R^{2N} .

Использование переменных (A, ϕ) позволяет построить такую обратную связь, причем стабилизацию амплитуды и формы можно проводить независимо, что следует как из коммутационных соотношений, так и из того, что стабилизация амплитуды относится только к пространству A , тогда как стабилизация формы – только к пространству фаз ϕ . Наиболее просто стабилизируется амплитуда. Для этого вводится функция

$$S = \frac{1}{2} (\|A\|^2 - 1), \quad \text{где} \quad \|A\|^2 = \sum (A_j^i)^2,$$

характеризующая отклонение амплитуды от единичной, и выбирается обратная связь

$$\begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = -e_a S \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{A} = -AS \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases}$$

Здесь и далее для краткости опускается числовой множитель ε перед правыми частями уравнений обратной связи, так как его наличие не меняет решение принципиальным образом. Очевидно, что условие $S = 0$ равносильно тому, что $A \in S^{N-1}$. Легко видеть, что эта обратная связь имеет проекцию только на направление изменения амплитуды. Дифференцирование функции S в силу указанной обратной связи и некоторые преобразования приводят к уравнению

$$\dot{S} = -(2S + 1)S,$$

откуда следует, что $S = 0$ - устойчивое положение равновесия, причем степень устойчивости имеет экспоненциальный характер, что означает устойчивость $S^{N-1} \subset A$ при постоянно действующих возмущениях.

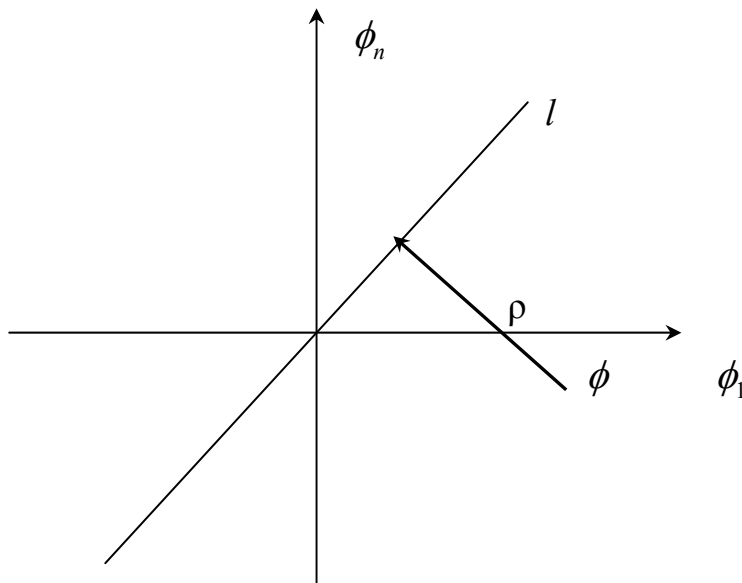
Для решения задачи о стабилизации формы пространство ϕ будет рассматриваться как R^N и все проводимые действия следует понимать в смысле этого пространства.

Пусть $\phi = \phi^0 + e s$ - параметрическое уравнение прямой l , где ϕ^0 - некоторая точка, лежащая на прямой, а e - направляющий вектор прямой, равный

$$\frac{1}{\sqrt{\sum k_i (m^i)^2}} \|m^1, \dots, m^1, \dots, m^n, \dots, m^n\|^T.$$

Тогда вектор ρ , проведенный из произвольной точки ϕ в точку, принадлежащую l , так что $\rho \perp l$, имеет вид

$$\rho = \phi^0 - \phi + e(e \cdot \phi - \phi^0)$$



И если теперь выбрать обратную связь

$$\begin{cases} \dot{A} = 0 \\ \dot{\phi} = \rho = \phi^0 - \phi + e(e \cdot \phi - \phi^0) \end{cases}$$

то легко получить требуемый результат. Действительно, данная обратная связь не дает проекций на направления изменения частоты и прецессии. С другой стороны, произвольный вектор ϕ можно представить в виде $\phi = \phi_l + \phi_\perp$, где вектор ϕ_l имеет начало в полюсе системы координат и конец на прямой l , а вектор ϕ_\perp ортогонален прямой l . Очевидно, что обратная связь не меняет ϕ_l , но приводит к изменению ϕ_\perp в соответствии с формулой

$$\phi_\perp(t) = \phi_\perp(0)e^{-t},$$

что в совокупности с обратной связью для амплитуд обеспечивает экспоненциальную устойчивость многообразия $M \cap S^{N-1}$, а следовательно и его устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Чтобы обеспечить это управление к системе нужно приложить диссипативные силы сферического типа и позиционные силы гиперболического типа, то есть

$$\left\| \begin{matrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{matrix} \right\| = X_D + X_H, \quad \text{где}$$

$$X_D = -S \left\| A_1^1, \dots, A_{k_n}^n \mid 0, \dots, 0 \right\|^T, \quad X_H = \left\| 0, \dots, 0 \mid \frac{h_1^1}{m^1}, \dots, \frac{h_{k_1}^1}{m^1}, \dots, \frac{h_1^n}{m^n}, \dots, \frac{h_{k_n}^n}{m^n} \right\|^T$$

Ситуация с диссипативными силами ясна, так как X_D есть правая часть управления, поэтому осталось разъяснить ситуацию с позиционными силами, а именно нужно показать, что уравнение относительно h_j^i

$$\phi^0 - \phi + e(e \cdot \phi - \phi^0) = \left\| \frac{h_1^1}{m^1}, \dots, \frac{h_{k_n}^n}{m^n} \right\|^T$$

всегда имеет решение. Это следует из двух фактов:

$$1. (X_H \cdot e) = \frac{1}{\|e_f\|} (X_H \cdot e_f) = \frac{1}{\|e_f\|} \sum h_j^i = \frac{1}{\|e_f\|} tr H = 0 \Rightarrow$$

Если рассмотреть всевозможные силы типа X_H , то нетрудно видеть, что эти векторы заполняют ортогональное дополнение прямой l и, таким образом, представляет собой совокупность *всех* векторов, из этого ортогонального дополнения.

2. $\phi^0 - \phi + e(e \cdot \phi - \phi^0)$ является нормалью к прямой l .

Для записи обратной связи в исходных переменных (q, \dot{q}) нужно воспользоваться формулами замены

$$q_j^i = A_j^i \cos(m^i t + \phi_j^i), \quad \dot{q}_j^i = -A_j^i \sin(m^i t + \phi_j^i)$$

из которых следует, что

$$\phi_j^i = m^i t + \arctg\left(\frac{\dot{q}_j^i}{m^i q_j^i}\right) + \pi n_j^i$$

$$A_j^i = \sqrt{(q_j^i)^2 + \left(\frac{\dot{q}_j^i}{m^i}\right)^2}$$

(знак A_j^i учитывается за счет введения n_j^i , значения которых можно ограничить двумя числами – 0 и 1). Подстановка этих выражений в исходные уравнения для q , где вместо возмущений εQ_j^i подставляется управление, приводит к весьма громоздким уравнениям, выписывать которые нет особого смысла ввиду того, что их явный вид далее нигде не используется. С другой стороны, и без того виден существенный недостаток выбранного управления, связанный с неизбежным появлением функций, которые определены не на всем промежутке времени:

$$\arctg\left(\frac{\dot{q}_j^i}{m^i q_j^i}\right)$$

Это осложняет его практическую реализацию. Тем не менее, данное управление представляет определенный интерес, обусловленный тем, что любое другое управление эквивалентное данному в окрестности

стабилизируемого многообразия, тоже будет обеспечивать экспоненциальную устойчивость многообразия. Эквивалентность понимается в смысле линейного приближения и с точностью до числовых множителей:

$X_D + X_H \Leftrightarrow \lambda X_D + \mu X_H$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Это (или локально эквивалентное ему) управление пригодно и в случае вырождения фигуры в фигуру меньшей размерности (что происходит при обращении некоторых амплитуд в ноль), поскольку оно поддерживает требуемые фазовые соотношения и при «выходе» амплитуды из нулевого состояния соответствующая ей фаза будет «на месте».

7. Траектории системы под действием управления при отсутствии возмущений.

Изучение траекторий удобно начать с простейшего случая – резонанса 1:1. Обратная связь имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -AS \\ \dot{\phi} &= \phi^0 - \phi + e(e \cdot \phi - \phi^0)\end{aligned}$$

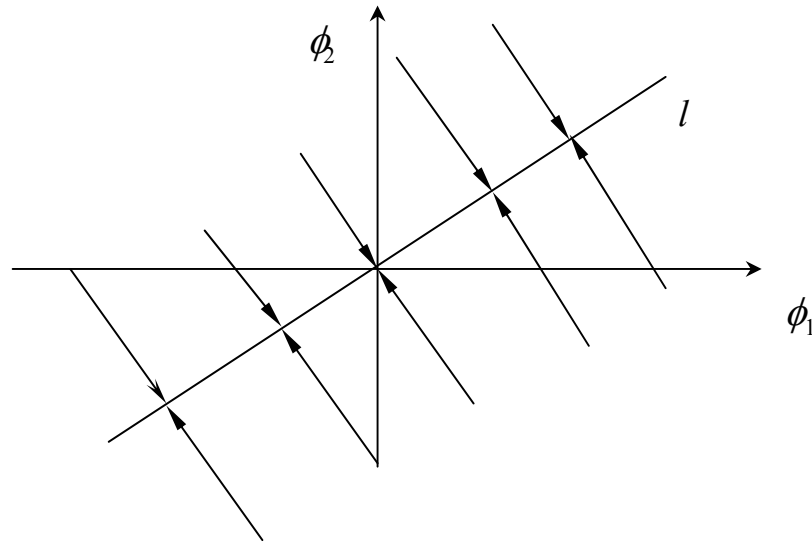
и для сокращения вычислений (не снижая общности) можно считать, что $\phi^0 = 0$. Тогда второе уравнение связи примет вид

$$\dot{\phi} = -\phi + e(e \cdot \phi)$$

и будет иметь решение

$$\phi(t) = \frac{1}{2}[\phi_1(0) + \phi_2(0)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}[\phi_1(0) - \phi_2(0)] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

где $\|\phi_1(0), \phi_2(0)\|^T$ – вектор начальных условий. Вектор $\|1, -1\|^T$ ортогонален прямой l , а $\|1, 1\|^T$ – ее направляющий вектор. Поэтому траектории $\phi(t)$ представляют собой прямые, ортогональные прямой l :



Уравнения для амплитуд в развернутом виде выглядят так:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= -\frac{1}{2} A_1 (A_1^2 + A_2^2 - 1) \\ \dot{A}_2 &= -\frac{1}{2} A_2 (A_1^2 + A_2^2 - 1)\end{aligned}$$

Они задают семейство лучей, проходящих через начало координат, что легко заметить из непосредственно следующего из них уравнения

$$\frac{dA_1}{dA_2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = CA_2$$

где C – произвольная постоянная. А из уравнения $\dot{S} = -S(2S + 1)$, решением которого является

$$S(t) = \frac{S(0)e^{-t}}{2S(0)(1 - e^{-t}) + 1},$$

следует, что характер стремления траекторий к окружности S^1 – экспоненциальный. Используя формулу

$$S = \frac{1}{2} (\|A\|^2 - 1)$$

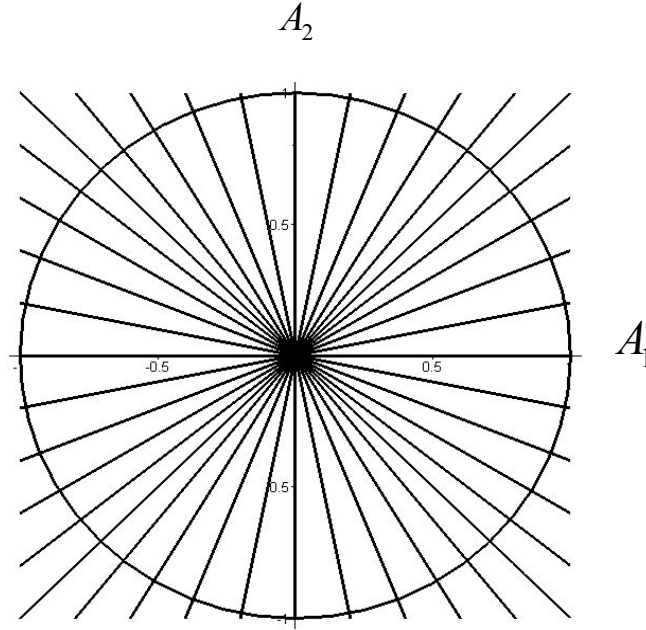
можно получить зависимость $\|A(t)\|$:

$$\|A(t)\| = \frac{\|A(0)\|}{\sqrt{\|A(0)\|^2 + (1 - \|A(0)\|^2)e^{-t}}},$$

откуда, учитывая вид траекторий, легко прийти к выводу о том, что решение $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \frac{A(0)}{\|A(0)\|} \|A(t)\| = \frac{A(0)}{\sqrt{\|A(0)\|^2 + (1 - \|A(0)\|^2)e^{-t}}}$$

то есть

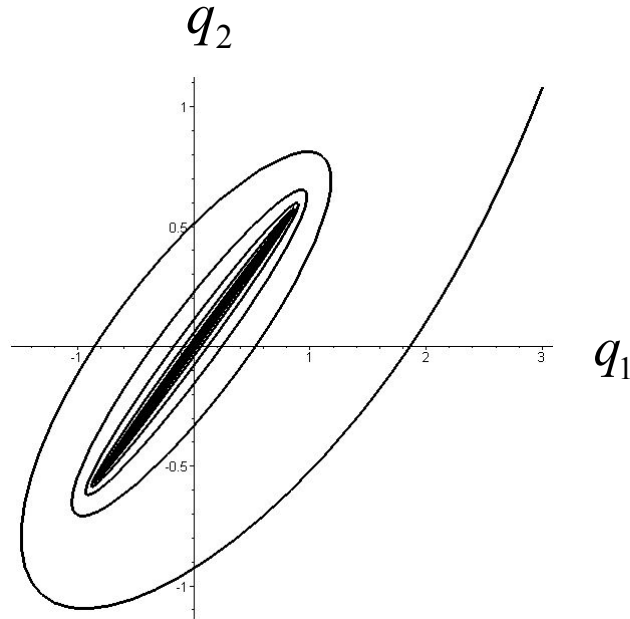


Подстановка этих решений в выражение для $q(t)$ приводит к следующему результату

$$q_1(t) = \frac{A_1(0)}{\sqrt{\|A(0)\|^2 + (1 - \|A(0)\|^2)e^{-t}}} \cos \left[t + \frac{1}{2}(\phi_1(0) + \phi_2(0)) + \frac{1}{2}(\phi_1(0) - \phi_2(0))e^{-t} \right]$$

$$q_2(t) = \frac{A_2(0)}{\sqrt{\|A(0)\|^2 + (1 - \|A(0)\|^2)e^{-t}}} \cos \left[t + \frac{1}{2}(\phi_1(0) + \phi_2(0)) - \frac{1}{2}(\phi_1(0) - \phi_2(0))e^{-t} \right]$$

Это решение для более слабой обратной связи, когда в правой части стоит множитель $\varepsilon = 0.1$, что приводит к замене в последних формулах e^{-t} на $e^{-0.1t}$, имеет примерно такой вид:



Нетрудно выписать аналогичные решения и для общего случая

$$q_j^i(t) = \frac{A_j^i(0)}{\sqrt{\|A(0)\|^2 + (1 - \|A(0)\|^2)e^{-t}}} \cos[m^i t + \xi_j^i(\phi(0)) + \eta_j^i(\phi(0))e^{-t}]$$

где $\xi_j^i(\phi(0))$ и $\eta_j^i(\phi(0))$ – некоторые функции начальных условий $\phi(0)$, такие,

что при $\eta_j^i = 0$ получается вырожденная форма колебаний.

8. О возможности выбора другой обратной связи.

В работе [17] для случая резонанса 1:1 предлагалась иная обратная связь. В переменных (x, y) она имела вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} e_d \\ e_a \end{pmatrix} - S \begin{pmatrix} e_d \\ e_a \end{pmatrix}, \quad (\text{i})$$

где

$$K = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad e_d = \begin{pmatrix} y_2 & -y_1 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}^T, \quad e_a = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}^T,$$

$$S = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 1).$$

В соответствии с материалом, изложенном на странице 26, переменные (x, y) выражаются через (A, ϕ) формулами

$$x_1 = A_1 \cos \phi_1, \quad x_2 = A_2 \cos \phi_2$$

$$y_1 = -A_1 \sin \phi_1, \quad y_2 = -A_2 \sin \phi_2$$

Их подстановка в уравнения (i) приводит к уравнениям обратной связи (i) в переменных (A, ϕ) :

$$\dot{A}_1 = -\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - 1)A_1 - A_1 A_2^2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\dot{A}_2 = -\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - 1)A_2 - A_1^2 A_2 \sin^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{2}A_2^2 \sin 2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\dot{\phi}_2 = -\frac{1}{2}A_1^2 \sin 2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \right\| = V(A, \phi) \quad (ii)$$

Эта обратная связь, вообще говоря, дает проекции на направления изменения частоты и прецессии:

$$\left(V \cdot e_p \right) = A_1 A_2^2 (A_1^2 - A_2^2) \sin^2(\phi_1 - \phi_2), \quad \left(V \cdot e_f \right) = (A_1^2 - A_2^2) \sin 2(\phi_1 - \phi_2)$$

которые обращаются в ноль на многообразии M , так как в этом случае $\phi_1 - \phi_2 = \pi n$, $n \in Z$. Появление отличных от нуля проекций объясняется тем, что вне многообразия M матрица перехода от локального базиса в пространстве (x, y) к базису в пространстве (A, ϕ) не ортогональна, что следует из вида матриц Грама этих базисов:

$$\Gamma_{(x,y)} = \begin{vmatrix} \|x\|^2 + \|y\|^2 & 0 & 0 & 2K \\ 0 & \|x\|^2 + \|y\|^2 & -2K & 0 \\ 0 & -2K & \|x\|^2 + \|y\|^2 & 0 \\ 2K & 0 & 0 & \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{vmatrix} \quad \Gamma_{(A,\phi)} = \text{diag}(2, A_1^2 + A_2^2, 2, A_1^2 + A_2^2).$$

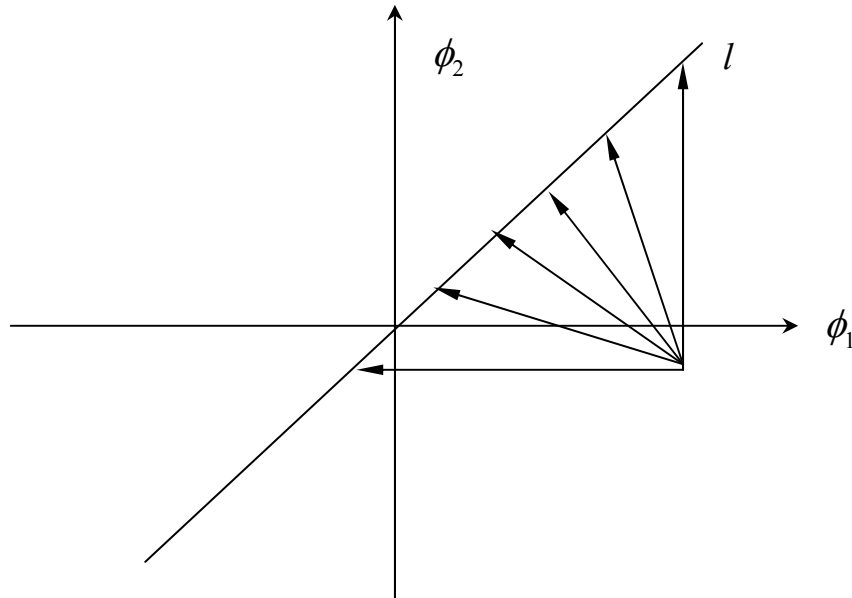
(нормы евклидовы). Линеаризация обратной связи в окрестности многообразия M приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - 1)A_1, & \dot{A}_2 &= -\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 - 1)A_2 \\ \dot{\phi}_1 &= -A_2^2(\phi_1 - \phi_2), & \dot{\phi}_2 &= A_1^2(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

(в качестве M выбрано множество $\{(A, \phi) \mid \|A\| = 1, \phi_1 = \phi_2\}$). Первые два уравнения совпадают с уже полученными при изучении предыдущей обратной связи. Система этих двух уравнений явно интегрируется и поэтому зависимость амплитуд от времени известна. Используя явный вид зависимости амплитуд от времени легко получить, что

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\phi_1(0) - \phi_2(0)}{1 + \|A(0)\|^2(e^t - 1)} \quad \text{и} \quad \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = -\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \text{const} \leq 0,$$

откуда следует, что траектории системы в пространстве фаз являются прямыми линиями и имеют вид



Таким образом, вид траекторий системы под действием обратной связи (ii) отличен от траекторий $\dot{A} = -AS$, $\dot{\phi} = -\phi + e(e \cdot \phi)$, хотя в обоих случаях обеспечивается экспоненциальная устойчивость многообразия

$$M \cap S^{N-1} = M \cap S^1$$

Если исследуемым явлением будет лишь прецессия формы, а другие эволюции не представляют интереса, то возможно некоторое упрощение задачи. Можно стабилизировать не всю прямую l , а какую – нибудь точку на этой прямой, например $\phi = (0, \dots, 0)^T$ (этому соответствует N – мерная плоскость $y = 0$ пространства (x, y)). Конечно, изменение частоты в этом случае становится невозможным, но, как уже отмечалось, при такой постановке задачи эта эволюция не представляет интереса. С другой стороны, задача стабилизации точки гораздо проще задачи стабилизации прямой, поскольку отпадает необходимость заботиться о том, чтобы обратная связь не давала проекций на направление изменения частоты и появляется больше произвола в выборе такой связи.

Таким образом, использование переменных (A, ϕ) позволяет построить обратную связь, обеспечивающую устойчивость многообразия M при постоянно действующих возмущениях, однако, это управление оказывается трудно реализуемым на практике в силу наличия сингулярностей. Тем не менее, оно представляет определенный интерес, так как любое другое управление, эквивалентное данному в малой окрестности стабилизируемого многообразия M , приводит к тому же эффекту. Поэтому главным вопросом в задаче стабилизации формы колебаний становится вопрос о поиске других обратных связей, лишенных тех особенностей, которые препятствуют их нормальной практической реализуемости. По-видимому, целесообразен следующий подход. Геометрические свойства траекторий удобно изучать в переменных «амплитуда – фаза», поскольку геометрические объекты имеют простейший вид именно в этих переменных. Что касается задачи стабилизации

формы, то ее рассмотрение нужно проводить в декартовых координатах (x, y) , так как особенность приведенного выше управления связана только со свойствами полярных координат. Именно наличие вырождения этой системы координат делает ее неудобной при изучении задачи стабилизации.

Глава 2

О круговых колебаниях в системе с трехкратным резонансом

1. Постановка задачи.

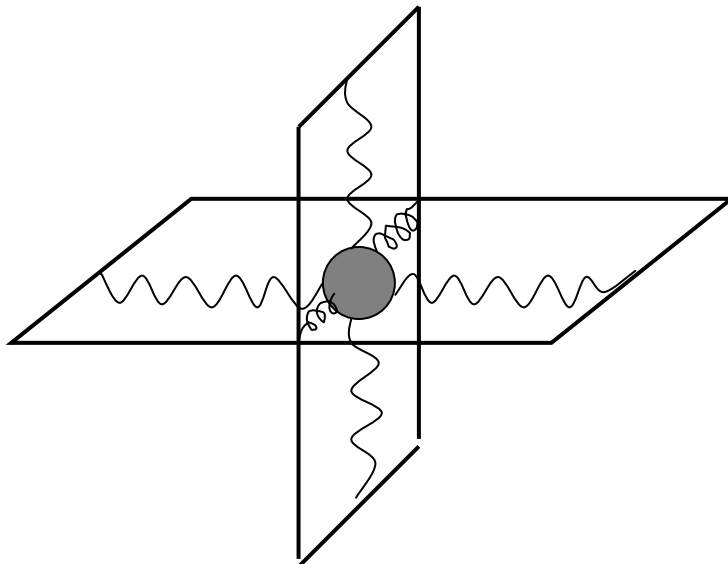
Исследуемая система имеет вид

$$\ddot{q} + q = \varepsilon Q(q, \dot{q}, t)$$

где q – трехмерный вектор, а правая часть – малое возмущение, на что указывает малый параметр ε . Решение порождающей системы, получающейся из исходной при $\varepsilon = 0$, имеет вид

$$q(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \sin t$$

Оно описывает одну из следующих траекторий (фигур) в конфигурационном пространстве системы: эллипс, круг или отрезок прямой. Далее будет рассматриваться случай круговых колебаний, что обусловлено идеей использования механической системы подобной той, что изображена на рисунке



для определения поворотов движущегося объекта, на который установлена подобная система, в двух плоскостях, т.к. плоскость колебаний чувствительной

массы стремится сохранить ориентацию в инерциальном пространстве. Данный прибор, очевидно, должен быть жестко связан с корпусом подвижного объекта. В реальной системе вместо пружин должны устанавливаться упругие элементы, позволяющие как снимать информацию с прибора, так и передавать управляющее воздействие. Такими элементами могут быть, например, упругие стержни прямоугольного сечения, на которые установлены тензодатчики, позволяющие считывать информацию, и управляющие элементы, (см. [18]), или электромагнитный подвес, выполняющий те же функции.

Круговая форма колебаний выбирается исходя из соображений максимальной простоты, что, однако, приводит к потере контроля над поворотом объекта в плоскости колебаний осциллятора [18].

Наряду с этим возможным приложением, будут рассматриваться задачи об эволюции формы колебаний под действием возмущений, классификации самих возмущений по признаку вызываемых эволюций и задача стабилизации круговой формы. Эти задачи, с одной стороны, неразрывно связаны с вышеуказанным приложением, а с другой представляют самостоятельный интерес, обусловленный возможностью сопоставить результаты с аналогичными результатами, уже полученные для прямолинейных колебаний [17].

2. Многообразие, соответствующее круговым траекториям.

Каждой форме траектории порождающей системы можно поставить в соответствие определенное многообразие в пространстве произвольных постоянных x . Чтобы построить такое многообразие для круговых траекторий можно воспользоваться тем, что для этих траекторий и только для них справедливо равенство $\|q(t)\| = \text{const}$, откуда следует, что

$$\begin{aligned}\|q(t)\|^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\cos^2 t + 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)\sin t \cos t + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)\sin^2 t = \\ &= \text{const} = a^2\end{aligned}$$

где a – амплитуда колебаний. Это равенство равносильно следующему

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)\sin t \cos t + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)\sin^2 t = a^2$$

из которого, учитывая соотношения $\|q(0)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|q(t)\|^2 = a^2$, в конечном итоге имеем

$$S_1(x) = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0, \quad S_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

Два последних уравнения задают четырехмерное многообразие N в пространстве x , соответствующее круговым колебаниям.

3. Учет возмущений.

Возмущения приводят к одному из четырех типов эволюций фигуры: изменение частоты колебаний, изменение их амплитуды, прецессия фигуры, которая может трактоваться как уход гироскопа, и разрушение ее формы. Под воздействием возмущений величины x_i становятся медленно меняющимися функциями времени. Для того, чтобы найти их изменение со временем используется замена фазовых переменных $(q, \dot{q}) \rightarrow x$ в соответствии с формулами

$$q = \left\| \begin{matrix} E \cos t \\ E \sin t \end{matrix} \right\| x, \quad \dot{q} = \left\| -E \sin t, E \cos t \right\| x$$

В результате такой замены система переписывается в стандартной форме, к которой применяется метод осреднения. В результате этих преобразований получается система

$$\dot{x} = \varepsilon X(x), \quad X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \begin{matrix} -E \sin t \\ E \cos t \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix} \right\| dt \quad (*)$$

4. Локальный базис.

Каждой из четырех эволюций фигур можно поставить в соответствие совокупность направлений, таких что возмущение $X(x)$, имеющее проекцию на одно из таких направлений, вызывает соответствующую эволюцию. Совокупность таких направлений и образует локальный базис в каждой точке пространства x , который состоит из следующих пучков:

а) направления разрушения круговой формы. Эти направления образованы множеством нормалей к многообразию N :

$$e_1 = \|x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3\|^T, \quad e_2 = \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad -x_4 \quad -x_5 \quad -x_6\|^T$$

б) направления прецессии строятся при помощи ортогональной матрицы A выраженной, например, через углы Крылова α, β, γ :

$$\|A \cos t, A \sin t\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow$$

$$e_4 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \|-x_2 \quad x_1 \quad 0 \quad -x_5 \quad x_4 \quad 0\|^T, \quad e_5 = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \|x_3 \quad 0 \quad -x_1 \quad x_6 \quad 0 \quad -x_4\|^T,$$

$$e_6 = \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \|0 \quad -x_3 \quad x_2 \quad 0 \quad -x_6 \quad x_5\|^T$$

(производные вычисляются при $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

в) направление изменения частоты одномерно и строится как

$$\|E \cos(t + \tau), E \sin(t + \tau)\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \tau) \Rightarrow$$

$$e_6 = \frac{\partial y}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \|x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad -x_1 \quad -x_2 \quad -x_3\|^T$$

г) направление изменения амплитуды также одномерно:

$$(1 + \mu)\|E \cos t, E \sin t\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \mu) \Rightarrow$$

$$e_7 = \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6\|^T$$

Легко видеть, что направления б) – г) не зависят от формы колебаний. Матрица Грама построенной совокупности направлений имеет вид

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{cc|ccc|cc} \|x\|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 & 2S_1 \\ 0 & \|x\|^2 & 0 & 0 & 0 & 2S_1 & S_2 \\ \hline & & & & & 2K_2 & 0 \\ & & G_0 & & & 2K_1 & 0 \\ & & & & & 2K_3 & 0 \\ \hline & & & & & \|x\|^2 & 0 \\ & & & & & & \|x\|^2 \end{array} \right\|, \quad \Gamma = \Gamma^T$$

данная матрица разбита на блоки, соответствующие перемножению векторов базиса из различных пучков, G_0 - блок, порождаемый направлениями прецессии,

$$\text{Det}G_0 = K(x)\|x\|^2, \quad K(x) = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2,$$

$$K_1 = x_3x_4 - x_1x_6, \quad K_2 = x_1x_5 - x_2x_4, \quad K_3 = x_2x_6 - x_3x_5$$

Как показано в [17], условие $K(x)=0$ равносильно тому, что в системе возбуждены прямолинейные колебания. Поэтому в случае круговых колебаний этот блок невырожден. Кроме того, направления разрушения ортогональны остальным направлениям при $x \in N$. Отметим и тот факт, что вектор с компонентами $\|K_3(x) \ K_1(x) \ K_2(x)\|^T$ представляет собой вектор нормали к плоскости колебаний в пространстве q . Значит, по его изменению можно судить о поворотах этой плоскости относительно инерциального пространства. Фактически этот вектор играет роль оси двухстепенного гироскопа. О конкретной процедуре его измерения будет написано позже. Пока же перечислим

свойства базиса.

- В отличие от прямолинейных колебаний, пучки разрушения и прецессии не вырождаются на N и, более того, пучок разрушения является почти всюду не вырожденным (кроме точки $x=0$). Это непосредственно видно из структуры соответствующего блока матрицы Γ .

- На многообразии N ортогональны подпространства

$$\left. \begin{aligned} \{e_1, e_2\} &\perp \{\{e_3, e_4, e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}\}, \\ \{e_3, e_4, e_5\} &\perp \{e_7\} \\ \{e_6\} &\perp \{e_7\} \end{aligned} \right\} \text{ (всюду)}$$

- Алгебра операторов, порождаемая направлениями e_i , семимерна и некоммутативна, хотя операторы групп, соответствующим различным эволюциям, коммутируют. Исключение из этого правила – операторы групп разрушения и изменения частоты.
- N – инвариантное многообразие групп прецессии, изменения частоты и амплитуды.
- Эволюционный базис неголономен, поскольку включает в себя векторные поля не имеющие потенциала.

5. Классификация возмущений.

Проводится по признаку вызываемых эволюций для сил линейных по скоростям и координатам. Эти силы представляются в виде

$$Q = (S + H + N)q + (D + R + \Gamma)\dot{q}$$

где S – симметрическая матрица потенциальных позиционных сил сферического типа, H – аналогичная матрица гиперболического типа, N – кососимметрическая матрица циркулярных сил, D – симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, R – аналогичная матрица гиперболического типа, Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Все эти матрицы постоянны и будут рассматриваться в своей канонической форме, коей является

$$S = \text{diag} \|s \quad \dots \quad s\|, \quad H = \text{diag} \|h_1 \quad \dots \quad h_3\|, \quad \text{tr} H = 0, \quad D = \text{diag} \|d \quad \dots \quad d\|,$$

$$R = \text{diag} \|r_1 \quad \dots \quad r_3\|, \quad \text{tr} R = 0$$

а для кососимметрических матриц N и Γ

$$N = \text{diag} \| * \quad 0 \|, \quad * = \begin{vmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{vmatrix}, \quad n - \text{произвольное число.}$$

(для матрицы Γ вместо n будет стоять γ). В записи для N нуль на диагонали может занимать и другое место (для Γ – аналогично). Силы с такими матрицами подставляются в формулы (*) для осреднения, в результате чего получаются выражения $X_S(x), X_H(x), \dots \in R^6$ для правых частей осредненной системы. Проектируя эти векторы (в смысле R^6) на направления локального базиса, можно получить таблицу влияния сил на эволюции круговых колебаний. Эта таблица при $x \in N$ выглядит так:

	S	H	N	D	R	Γ
e_1, e_2		+			+	
e_3, e_4, e_5	+	+			+	+
e_6	+	+				+
e_7			+	+	+	

Наличие проекции отмечено здесь плюсом. Из приведенной таблицы видно, что, например, диссипативные силы сферического типа приводят только к изменению амплитуды, а аналогичные силы гиперболического типа еще и к прецессии.

Уместно сравнить эту таблицу с аналогичной таблицей для случая прямолинейных колебаний, приведенной в [17]. Для прямолинейных колебаний имеется три направления e_1, e_2, e_3 разрушения формы, которые, однако, становятся линейно зависимыми на многообразии (в пространстве x), соответствующем прямолинейным колебаниям (число линейно независимых направлений в этом случае тоже равно двум), а соответствующая таблица имеет вид

	S	H	N	D	R	Г
e_1, e_2, e_3		+	+			
e_4, e_5, e_6					+	+
e_7	+	+				
e_8				+	+	

Сопоставляя данные таблицы, легко заметить, что влияние одних и тех же сил на различные типы колебаний отличается, причем в случае круговых колебаний та же сила вызывает большее или равное число эволюций. Например, гироскопические силы вызывают только лишь прецессию прямолинейных колебаний, тогда как для круговых колебаний добавляется изменение частоты.

6. Задача стабилизации формы.

Задача эта сводится к поиску обратной связи, которая обеспечивает экспоненциальную устойчивость многообразия N и не приводит к прецессии и изменению частоты колебаний.

Рассмотрим обратную связь

$$\begin{cases} \dot{x} = -Se_1 - S_2e_2 - Se_8 \\ S_1 = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 \\ S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 \\ S = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1) \end{cases}$$

которая имеет своей целью не только стабилизацию формы колебаний, но и стабилизацию их единичной амплитуды. Как видно из структуры матрицы Грама эта обратная связь не дает проекций на направления прецессии и изменения частоты, если $x \in N$, откуда следует, что она не вызывает соответствующих эволюций.

Вычислим производные функций S и S_i в силу уравнений обратной связи:

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -S_1(1+2S) - 2SS_1 \\ \dot{S}_2 = -S_2(1+2S) - SS_2 \\ \dot{S} = -S(1+2S) - 2S_1^2 - S_2^2 \end{cases}$$

Линеаризация этой системы имеет решение $S_i = S_i(0)e^{-t}$, $S = S(0)e^{-t}$, что доказывает экспоненциальную степень устойчивости многообразия $N \cap S^5$.

7. Алгоритм получения информации от гироскопа.

Как уже отмечалось, роль оси кинетического момента «обычного» гироскопа в рассматриваемом случае имеет нормаль к плоскости, в которой лежит круговая траектория. Чтобы определить ориентацию этой плоскости достаточно найти векторы $x^1 = \|x_1 \ x_2 \ x_3\|^T$ и $x^2 = \|x_4 \ x_5 \ x_6\|^T$, тогда вектор $n = x^1 \times x^2$ будет вектором нормали к плоскости. В нулевом приближении, которое оправдывается возможной областью применения такого гироскопа, как датчика невысокой точности, можно считать, что за время порядка периода колебаний осциллятора векторы x^i не меняются под действием возмущений. Это предположение обусловлено тем, что частота колебаний предполагаемого прибора имеет величину порядка $10^3 - 10^4$ Гц, так что за время одного колебания «уход» подобного гироскопа незначителен.

Для вычисления x^i удобнее всего воспользоваться отсчетным генератором [18], при помощи которого можно вычислить

$$q(0) = x^1 \text{ и } q\left(\frac{\pi}{2}\right) = x^2.$$

Последние формулы очевидным образом следуют из решения порождающей системы, которое приведено на странице 60. Кроме того, приведенный алгоритм допускает уточнение путем введения поправки к частоте отсчетного генератора, пропорциональной скалярному произведению $x^1 \cdot x^2$, которое в случае идеальной работы системы тождественно равно нулю, что видно из первого уравнения, задающего многообразие N .

Глава 3

Исследование обратной связи во втором приближении

1. Введение

В работе [17] рассматривалась задача стабилизации прямолинейных колебаний при постоянно действующих возмущениях в системе, описываемой уравнениями

$$\ddot{q} + q = \varepsilon Q(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

где q – двумерный вектор с компонентами $q = \|q_1 \quad q_2\|^T$, а правая часть является возмущением, что формализовано наличием малого параметра $\varepsilon \ll 1$. Для анализа влияния различных возмущений и построения обратной связи, стабилизирующей прямолинейные колебания, в [17] использовался метод осреднения в первом приближении. В рамках этого приближения были получены уравнения обратной связи, обеспечивающей устойчивость прямолинейной формы колебаний при постоянно действующих возмущениях и удовлетворяющей требованиям, описанным в предыдущих двух частях данной работы.

Однако при рассмотрении задачи в первом приближении возможна потеря тех величин в правой части уравнений, которые за достаточно большое время могут приводить к качественным изменениям в поведении системы.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть уравнения полученной обратной связи во втором приближении, что и делается ниже.

2. Необходимые сведения о втором приближении

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

правая часть которой содержит малый параметр ε , 2π - периодична по t и удовлетворяет условиям теоремы Н.Н. Боголюбова [26, или см. стр. 28-34 настоящей работы]. Кроме того, допустим, что все производные, вычисляемые далее, существуют.

Тогда в соответствии с теоремой Н.Н. Боголюбова решение осредненной системы на интервале времени $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$$\dot{u} = \varepsilon X_0(u), \quad \text{где} \quad X_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(u, t) dt$$

будет отличаться от решения исходной системы на величину, оцениваемую по формуле

$$\|x(t) - u(t)\| \leq B\varepsilon$$

где $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$, а B – константа, зависящая от правой части исходной системы.

Ясно, что погрешность появляется в результате отбрасывания величины

$$\varepsilon \tilde{X}(t, x) = \varepsilon [X(t, x) - X_0(x)]$$

Если бы отбрасываемое слагаемое имело вид $\varepsilon^2 \tilde{X}$, то и погрешность имела порядок $B\varepsilon^2$. Эта оценка справедлива на том же интервале времени $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, чтобы повысить порядок точности соответствия нужно привести исследуемую систему к виду

$$\dot{x} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon^2 \tilde{X}(t, x)$$

где $\tilde{X}(t, x)$ - функция, обнуляемая при осреднении по времени:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{X}(t, x) dt = 0$$

Для приведения системы к такому виду используется близкая к тождественной замена переменных $x \rightarrow y$

$$x = y + \varepsilon S(t, y, \varepsilon)$$

подставляя эту замену в исходную систему, получим

$$\dot{y} + \varepsilon \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} \right) = \varepsilon X_0(y + \varepsilon S) + \varepsilon \tilde{X}(t, y + \varepsilon S)$$

С точностью $O(\varepsilon^3)$ последнюю систему можно преобразовать к виду

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(0) + \varepsilon \left(E - \varepsilon \frac{\partial S}{\partial y} \right) \left[\tilde{X}(t, y) - \frac{\partial S}{\partial t} \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial X(t, y)}{\partial y} S - \frac{\partial S}{\partial y} X_0 \right] + O(\varepsilon^3)$$

(E – единичная матрица соответствующего размера). Отсюда видно, что если потребовать выполнения равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{X}(t, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(t, y) = \int_0^t \tilde{X}(t, y) dt + C(y, \varepsilon)$$

то желаемый результат будет достигнут и система для y будет такой:

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon^2 X_1(t, y)$$

где $X_1(t, y) = \frac{\partial X(t, y)}{\partial y} S - \frac{\partial S}{\partial y} X_0(y)$. Применяя к последней системе процедуру осреднения, получим

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y) + \varepsilon^2 X_1(y), \quad X_1(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(t, y) dt$$

Решение этого уравнения будет отличаться от точного на величину порядка $\sim B\varepsilon^2$, оценка будет справедлива на интервале $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$.

3. Подход к задаче стабилизации прямолинейных колебаний

Для дальнейших построений необходимо напомнить подход к анализу рассматриваемого класса систем, предложенный в [17].

Система, получаемая из (1) при отбрасывании возмущений ($\varepsilon = 0$) имеет вид

$$\ddot{q} + q = 0$$

и называется порождающей (или вырожденной). Ее решение записывается в виде

$$q(t) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \sin t$$

Кривая $q(t)$ в конфигурационном пространстве q , соответствующая данному решению и называемая ниже фигурой, в общем случае представляет собой эллипс, способный вырождаться в окружность или отрезок прямой.

Вырождение происходит, если

$$\begin{cases} x_1 x_3 + x_2 x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 \end{cases} \quad (\text{вырождение в окружность})$$

$$K(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \quad (\text{вырождение в отрезок})$$

Последнее уравнение задает трехмерный конус в четырехмерном пространстве x , который соответствует прямолинейным колебаниям.

Для дальнейшего анализа уравнений (1) используется замена переменных $(q, \dot{q}) \rightarrow x$, которая задается формулами

$$\begin{vmatrix} q \\ \dot{q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{(2 \times 2)} \cos t & E \sin t \\ -E \sin t & E \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$

Она приводит к следующим уравнениям для медленных переменных

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \quad X(x) = \begin{vmatrix} -E \sin t \\ E \cos t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix}$$

К ним применяется метод осреднения в первом приближении, в результате чего вместо данной системы решаются уравнения

$$\dot{x} = \varepsilon X(x), \quad X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t, x) dt \quad (2)$$

Под действием возмущений (εQ в правой части (1)) траектории порождающей системы начинают совершать эволюции, которые делятся на 4 типа: изменение амплитуды колебаний, изменение их частоты, прецессия (поворот фигуры относительно координатных осей q_1 и q_2 без изменения формы) и разрушение формы.

Каждой из этих эволюций соответствует определенное направление в пространстве x . Возмущение (2), имеющее проекцию на какое-либо из этих направлений, вызывает соответствующую эволюцию. Выражения для векторов данных направлений имеют вид

$$\begin{aligned} e_1 &= \|x_4 \quad -x_3 \quad -x_2 \quad x_1\|^T && (\text{разрушение формы}) \\ e_2 &= \|x_2 \quad -x_1 \quad x_4 \quad -x_3\|^T && (\text{прецессия}) \\ e_3 &= \|x_3 \quad x_4 \quad -x_1 \quad -x_2\|^T && (\text{изменение частоты}) \\ e_4 &= \|x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4\|^T && (\text{изменение амплитуды}) \end{aligned}$$

Поясним сказанное на примерах. Допустим, что справедливо неравенство $(X(x) \cdot e_1) \neq 0$, где (\cdot) – скалярное произведение в \mathbb{R}^4 . Тогда возмущение $\varepsilon X(x)$ из (2) будет приводить к разрушению формы колебаний, а если, например, $(X(x) \cdot e_3) \neq 0$, то возмущение приводит к изменению частоты.

Совокупность векторов $\{e_i(x)\}$ образуют локальный базис в каждой точке пространства x , который становится ортогональным на многообразии $\{K(x) = 0\} \setminus \{x = 0\}$ (при $x = 0$ все векторы базиса становятся нулевыми) и вырождается на многообразии, соответствующем круговым колебаниям.

Любая форма колебаний порождающей системы неустойчива по отношению к сколь угодно малым возмущениям. При этом прямолинейная форма колебаний представляет практический интерес, связанный с некоторыми техническими приложениями [16,21,25,27,52,54,55,59,60,62-64]. Таким образом, возникает задача стабилизации формы колебаний при

постоянно действующих возмущениях. Она сводится к правой части системы (2), которая должна

- Обеспечивать асимптотическую устойчивость многообразия $S \cap K$ экспоненциального характера (S – единичная сфера в пространстве x . Ее появление связано с контролем амплитуды колебаний, которая без ограничения общности выбирается единичной)
- Иметь нулевые проекции на направления изменения частоты и прецессии. (т.е. не должна вызывать указанных эволюций)

В [17] была предложена обратная связь

$$\dot{x} = -\varepsilon (Ke_1 + Se_4), \quad K = x_1x_4 - x_2x_3, \quad S = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1)$$

которая полностью решала задачу стабилизации прямолинейны колебаний в первом приближении. Правая часть (1), соответствующая этой обратной связи, имеет вид

$$\ddot{q} + q = -\varepsilon \left[2q \times \dot{q} \times q + (q^2 + \dot{q}^2 - 1)\dot{q} \right] \quad (3)$$

4. Исследование обратной связи во втором приближении

Вопрос о влиянии вышеуказанной обратной связи на систему был детально исследован в [17] в первом приближении. Однако из теории возмущений известно, что учет высших приближений может привести к качественным изменениям в поведении системы. Это и оправдывает задачу их построения.

Далее строится второе приближение для правой части (3). Приведем основные величины, необходимые для построения второго приближения.

$$X(t, x) = \begin{pmatrix} \left[S(x)(-x_1 \sin t + x_3 \cos t) - 2K(x)(x_2 \cos t + x_4 \sin t) \right] \sin t \\ \left[2K(x)(x_1 \cos t + x_3 \sin t) + S(x)(-x_2 \sin t + x_4 \cos t) \right] \sin t \\ \left[2K(x)(x_2 \cos t + x_4 \sin t) - S(x)(-x_1 \sin t + x_3 \cos t) \right] \cos t \\ - \left[2K(x)(x_1 \cos t + x_3 \sin t) + S(x)(-x_2 \sin t + x_4 \cos t) \right] \cos t \end{pmatrix}$$

$$K(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad S(x) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - 1)$$

Осредняя правую часть системы по времени, получим

$$X(t, x) = \begin{pmatrix} -Kx_4 - Sx_1 \\ Kx_3 - Sx_2 \\ Kx_2 - Sx_3 \\ -Kx_1 - Sx_4 \end{pmatrix}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, x) &= X(t, x) - X_0(x) = \\ &= \begin{pmatrix} 2S(-x_1 \sin t + x_3 \cos t) \sin t - 2K(x_2 \cos t + x_4 \sin t) \sin t + Kx_4 + Sx_1 \\ 2S(-x_2 \sin t + x_4 \cos t) \sin t + 2K(x_1 \cos t + x_3 \sin t) \sin t - Kx_3 + Sx_2 \\ 2S(x_1 \sin t - x_3 \cos t) \cos t + 2K(x_1 \cos t + x_4 \sin t) \cos t - Kx_2 + Sx_3 \\ 2S(x_2 \sin t - x_4 \cos t) \cos t - 2K(x_1 \cos t + x_3 \sin t) \cos t + Kx_1 + Sx_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ S(t, x) &= \int \tilde{X}(t, x) dt = \begin{pmatrix} (Sx_1 + Kx_4) \sin t \cos t - (Sx_3 - Kx_2) \cos^2 t \\ (Sx_2 - Kx_3) \sin t \cos t - (Sx_4 + Kx_1) \cos^2 t \\ (-Sx_3 + Kx_2) \sin t \cos t - (Sx_1 + Kx_4) \cos^2 t \\ -(Sx_4 + Kx_1) \sin t \cos t - (Sx_2 - Kx_3) \cos^2 t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Функция $X_1(x)$, вычисляемая по формулам последнего абзаца п. 2, имеет весьма громоздкий вид, что сильно затрудняет непосредственный анализ уравнений с этой правой частью. Однако оказывается, что некоторые проекции X_1 на векторы локального базиса преобразуются к достаточно компактным выражениям

$$(X_1 \cdot e_1) = 6(x_1 x_3 - x_2 x_4) K(x) S(x)$$

$$(X_2 \cdot e_2) = K(x) f(x)$$

$$(X_1 \cdot e_4) = -6(x_1 x_3 + x_2 x_4) K^2(x)$$

Функция $f(x)$ представляет собой полином четвертой степени, который имеет довольно громоздкий вид и, по-видимому, не упрощается (попытка упростить полином при помощи Maple не привела к успеху).

Проекция $(X_1 \cdot e_3)$ уже не раскладывается на множители (Maple), однако при $x \in K \cap S$ соответствующее выражение можно упростить, пользуясь тем, что при $x \in K \cap S$ справедливы следующие равенства

$$K(x) = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Подставляя в формулу для проекции условие линейной зависимости векторов, можно получить, что

$$(X_1 \cdot e_3) \Big|_{x \in K} = -\frac{1}{8}(1 + \lambda^2)(x_1^2 + x_2^2) \left[4\lambda^2(x_1^2 + x_2^2) - 1 \right] \left[(1 + \lambda^2)(x_1^2 + x_2^2) - 1 \right] \quad (4)$$

Но при $x \in S \Leftrightarrow \|x\| = 1$ множитель λ не может быть произвольным.

Подставив равенства $x_3 = \lambda x_1$, $x_4 = \lambda x_2$ в условие $\|x\|^2 = 1$, получаем

$$x_1^2 + x_2^2 + \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) = 1 \Leftrightarrow (1 + \lambda^2)(x_1^2 + x_2^2) = 1$$

Из этого соотношения следует, что последняя квадратная скобка в (4) обращается в ноль на многообразии $K \cap S$, откуда следует, что обратная связь не влияет на изменение частоты и во втором приближении.

Таким образом, учет второго приближения метода осреднения позволяет сказать, что обратная связь, предложенная в [17] обладает следующими свойствами:

- Не влияет на разрушение фигуры, если выполнено хотя бы одно из условий

- А) Колебания имеют круговую форму (в этом случае $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$)
- Б) Колебания имеют прямолинейную форму (т. е. когда $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$)
- В) Справедливо равенство $\|x\| = 1$

Кроме того, из выражения для $(X_1 \cdot e_1)$ следует, что эта величина в окрестности многообразия $K \cap S$ имеет второй порядок малости, поскольку содержит произведение двух малых сомножителей: KS .

- Не вызывает прецессию фигуры при $x \in K$ (прямолинейных колебаниях)
- Не влияет на изменение амплитуды при круговых и прямолинейных колебаниях, причем если x принадлежит малой окрестности многообразия K , то $(X_1 \cdot e_4)$ будет величиной второго порядка малости, пропорциональной K^2 .

Таким образом, установлено, что учет второго приближения метода осреднения для обратной связи (3) не приводит к каким либо качественным изменениям. Управление (3) обеспечивает асимптотическую устойчивость многообразия $K \cap S$ экспоненциального вида. Дифференцирование функций $K(x)$ и $S(x)$ в силу обратной связи $\dot{x} = \varepsilon X_0(x) + \varepsilon^2 X_1(x)$ приводит к результату

$$\begin{aligned}\dot{K} &= -\varepsilon [K(1+2S) + 2SK] + 6SK\varepsilon^2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ \dot{S} &= -\varepsilon [S(1+2S) + 2K^2] - 6K^2\varepsilon^2(x_1x_3 + x_2x_4)\end{aligned}$$

Откуда следует асимптотическая устойчивость многообразия $K \cap S$ в силу теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению (выписанная система не замкнута, однако все оценки, используемые при доказательстве теоремы Ляпунова, останутся справедливыми, поскольку функция $x_1x_3 + x_2x_4$ ограничена в окрестности $K \cap S$: $|x_1x_3 + x_2x_4| < 2$).

Глава 4

О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине

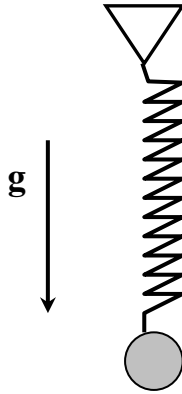
Введение

Рассматривается задача о колебаниях тяжелой материальной точки, подвешенной на невесомой пружине. В отличие от предшествующих работ [8,28,37,40,46], в которых изучались колебания точки в вертикальной плоскости, исследуется задача о трехмерных колебаниях. Для плоских нелинейных колебаний при резонансе частот 1:2 ранее был установлен и описан [8,28,37,40,46] эффект срыва вертикальных колебаний маятника: при любом сколь угодно малом горизонтальном возмущении вертикальные колебания перестраиваются в горизонтальные, затем снова в вертикальные и т. д. Период этих перестроек существенно превышает периоды собственных колебаний маятника

Поведение системы в трехмерном случае во многом аналогично поведению плоской системы. Например, в пространственной системе также имеет место эффект срыва вертикальных колебаний. Однако при сколь угодно малом ненулевом кинетическом моменте относительно вертикальной оси появляется эффект, присущий только трехмерной системе. Решая линеаризованные уравнения движения можно показать, что проекция траектории точки на горизонтальную плоскость xu является эллипсом (при определенных начальных условиях он может вырождаться в отрезок прямой, либо в окружность). Учет нелинейности приводит к тому, что полуоси этого эллипса начинают изменяться (при большинстве начальных условий), а сам эллипс начинает прецессировать в своей плоскости. Соответствующие результаты получены путем аналитического и численного решения уравнений движения системы.

1. Постановка задачи и обозначения

Материальная точка массы m подвешена на невесомой пружине жесткости k в поле тяготения g



Поместим начало системы координат в положение равновесия маятника, направив ось z вниз, и введем параметры l (длина маятника в положении равновесия), частоту линейных колебаний ω и отношение μ частоты колебаний груза при неотклоненной пружине к ω

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad \mu = \sqrt{1 + \frac{k}{mg}}$$

Если выбрать в качестве координат точки величины lx , ly и lz , то длина деформированной пружины будет выражаться через безразмерные координаты x , y , z по формуле

$$lR, \quad \text{где} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + (1+z)^2}$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$E_p = -mgz + \frac{k}{2l_0}(lR - l_0)^2 - \frac{k}{2l_0}(l - l_0)^2,$$

$$E_c = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt'} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt'} \right)^2 \right] = \frac{mgl}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

где t' – размерное время, $t = \omega t'$ – безразмерное время, l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии. Введем безразмерные импульсы

$u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $w = \dot{z}$ (точка – дифференцирование по безразмерному времени) и составим функцию Гамильтона

$$H = \frac{E_c + E_p}{mgl} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\mu^2}{2}(R^2 - 1) - (\mu^2 - 1)(R - 1) - z$$

(константа в гамильтониане выбрана так, чтобы при нулевых значениях всех координат и импульсов он обращался в ноль [14]).

2. Уравнения движения

Запишем первую группу уравнений Гамильтона $\dot{x} = \partial H / \partial u = u$, ... и исключим переменные u, v, w из второй группы. Тогда получим следующую систему уравнений для координат маятника

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu^2 x + (\mu^2 - 1)x / R, & \ddot{y} &= -\mu^2 y + (\mu^2 - 1)y / R, \\ \ddot{z} &= 1 - \mu^2(1 + z) + (\mu^2 - 1)z / R, & R &= \sqrt{x^2 + y^2 + (1 + z)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) удобны для численного моделирования движения маятника.

3. Первое приближение нормальной формы при резонансе

Ниже будет изучаться движение в окрестности положения равновесия методом нормальной формы. Наибольший интерес представляет резонанс 1:1:2, возникающий при $\mu^2 = 4$. В этом случае первые члены разложения гамильтониана в окрестности положения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + 4z^2), \\ H_1 &= \frac{3}{2}z(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Приведем гамильтониан H_1 к нормальной форме Биркгофа, используя алгоритм инвариантной нормализации [19,23,24]. Для построения нормальной формы первого приближения нужно подставить решение линейной системы,

определяемой гамильтонианом H_0 , в H_1 и вычислить интеграл от последней функции по времени:

$$\int_0^t H_1 [x(\tau), y(\tau), z(\tau)] d\tau = \bar{H}_1 t + G + f(t)$$

Величина \bar{H}_1 представляет собой первое приближение нормальной формы гамильтониана возмущения, а G – генератор Ли канонического преобразования, осуществляющего переход к новым координатам, в которых гамильтониан имеет нормальную форму (подробнее – см. ниже на исследуемом примере).

Решение линейной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x &= X \cos t + U \sin t, \\ y &= Y \cos t + V \sin t, \\ z &= Z \cos 2t + \frac{W}{2} \sin 2t \end{aligned} \quad (2)$$

где X, Y, Z – начальные значения соответствующих координат, U, V, W – импульсов; выражения для обобщенных импульсов $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ далее нигде не используются и поэтому не приведены. Вычисление величины

$$\int_0^T H_1 [x(t), y(t), z(t)] dt,$$

выделение множителя при t и члена, не зависящего от t , приводит к результату

$$\begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{3}{8} \left[Z(X^2 + Y^2) - Z(U^2 + V^2) + W(XU + YV) \right] \\ G &= \frac{3}{64} \left[4Z(XU + YV) + 3W(U^2 + V^2) + 5W(X^2 + Y^2) \right] \end{aligned}$$

Замена переменных, приводящая гамильтониан к нормальной форме, такова

$$\begin{aligned} x &= X - G_U, & u &= U + G_X \\ y &= Y - G_V, & v &= V + G_Y \\ z &= Z - G_W, & w &= W + G_Z \end{aligned}$$

Для анализа системы, порождаемой \bar{H}_1 , удобно использовать переменные Биркгофа [19], переход к которым задается каноническим преобразованием

$$z_1 = U + iX, \quad z_2 = V + iY, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}W + \sqrt{2}iZ$$

валентности $2i$. Уравнения Гамильтона в этих переменных имеют вид

$$\dot{z}_i = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_i}, \quad H = \tilde{H}_0 + \tilde{\bar{H}}_1,$$

$$\tilde{H}_0 = i(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + 2z_3 \bar{z}_3)$$

$$\tilde{\bar{H}}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \left[\bar{z}_3 (z_1^2 + z_2^2) - z_3 (\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2) \right]$$

Чтобы избежать излишне громоздких обозначений, ниже " \sim " писать не будем.

Основным свойством нормальной формы гамильтониана является

$$\{H_0, \bar{H}_1\} = 0$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ - скобка Пуассона. Отсюда следует [19,23,24], что система с гамильтонианом $H = H_0 + \bar{H}_1$ может быть решена следующим образом:

уравнения, определяемые функциями H_0 и \bar{H}_1 , решаются независимо друг от друга, после чего решение исходной системы строится как композиция ранее найденных - вместо начальных условий в решение системы с гамильтонианом H_0 следует подставить функции, которые получаются для соответствующих переменных из решения системы с гамильтонианом \bar{H}_1 .

Таким образом, чтобы получить решение уравнений нормальной формы, нужно подставить в решение невозмущенной системы $\dot{z}_i = \partial H_0 / \partial \bar{z}_i$

$$z_1 = Z_1 e^{it}, \quad z_2 = Z_2 e^{it}, \quad z_3 = Z_3 e^{2it} \quad (3)$$

переменные Z_1, Z_2 и Z_3 . Они находятся из решения системы уравнений Гамильтона с функцией \bar{H}_1 . Уравнения, определяемые этой функцией, имеют вид

$$\dot{Z}_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\bar{Z}_1Z_3, \quad \dot{Z}_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{8}\bar{Z}_2Z_3, \quad \dot{Z}_3 = \frac{3\sqrt{2}}{16}(Z_1^2 + Z_2^2) \quad (4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по t .

4. Интегралы нормальной формы

Выпишем первые интегралы системы (4)

$$\begin{aligned} |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_3|^2 &\triangleq c^2 = \text{const} \\ (Z_1^2 + Z_2^2)\bar{Z}_3 - (\bar{Z}_1^2 + \bar{Z}_2^2)Z_3 &\triangleq h = \text{const} \\ Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1Z_2 &\triangleq i\sigma = \text{const}, \quad \sigma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(\triangleq - по обозначению). Первые два выражают сохранение величин H_0 и \bar{H}_1 , третий – закон сохранения проекции кинетического момента на вертикальную ось (для плоских колебаний $\sigma = 0$).

По аналогии со случаем плоских колебаний [40], составим уравнение для величины $|Z_1|^2 + |Z_2|^2$. Ее дифференцирование в силу (2) приводит к выражению

$$\frac{d}{dt}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}[(\bar{Z}_1^2 + \bar{Z}_2^2)Z_3 + (Z_1^2 + Z_2^2)\bar{Z}_3]$$

После повторного дифференцирования получим

$$\frac{d^2}{dt^2}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) = \frac{9}{8}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)|Z_3|^2 - \frac{9}{32}(|Z_1|^4 + Z_1^2\bar{Z}_2^2 + \bar{Z}_1^2Z_2^2 + |Z_2|^4)$$

Использование первых интегралов системы (2) позволяет преобразовать правую часть этого уравнения к функции, зависящей только от $|z_1|^2 + |z_2|^2$:

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_3|^2 = c^2 \Rightarrow |Z_3|^2 = \frac{1}{2}(c^2 - |Z_1|^2 - |Z_2|^2);$$

$$Z_1 \bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 Z_2 = i\sigma \Rightarrow Z_1^2 \bar{Z}_2^2 - 2|Z_1|^2 |Z_2|^2 + \bar{Z}_1^2 Z_2^2 = -\sigma^2 \Rightarrow$$

$$Z_1^2 \bar{Z}_2^2 + \bar{Z}_1^2 Z_2^2 = -\sigma^2 + 2|Z_1|^2 |Z_2|^2$$

подстановка этих соотношений в правую часть уравнения приводит к результату

$$\frac{d^2}{dt^2}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) = \frac{9}{16}c^2(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) - \frac{27}{32}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)^2 + \frac{9}{32}\sigma^2$$

Обозначив $\xi = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$, перепишем уравнение в виде

$$\ddot{\xi} = \frac{9}{16}c^2\xi - \frac{27}{32}\xi^2 + \frac{9}{32}\sigma^2$$

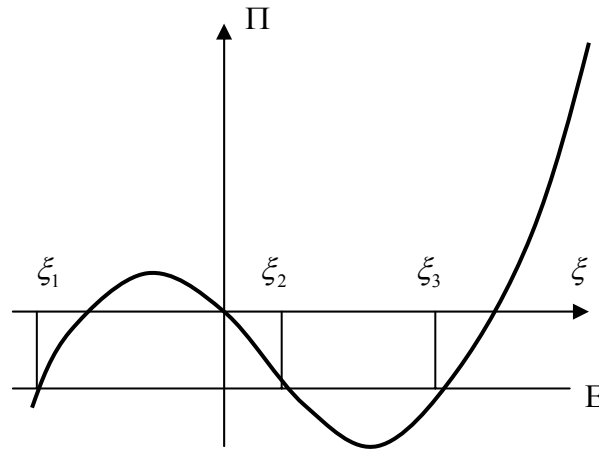
Данное уравнение удобно интерпретировать как закон движения материальной точки единичной массы в потенциале

$$\Pi(\xi) = \frac{9}{32}(\xi^3 - c^2\xi^2 - \sigma^2\xi)$$

Для такого движения справедлив закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \Pi(\xi) = E = \text{const}$$

График потенциальной функции имеет вид



Таким образом, решение $\xi(t)$, соответствующее значению энергии E , изменяется в пределах $[\xi_2, \xi_3]$.

Закон сохранения энергии дает уравнение для ξ , решаемое методом разделения переменных. Используя обозначение $\frac{1}{2}P(\xi) = E - \Pi(\xi)$, получим

$$\dot{\xi}^2 = P(\xi) \Rightarrow t = \pm \int \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}}$$

При помощи этой формулы, можно найти период T колебаний величины ξ :

$$T = 2 \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}}$$

Полином $P(\xi)$ имеет три корня ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 и представляется в виде

$$P(\xi) = \frac{9}{16}(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi_3 - \xi)$$

Замена переменной $\xi = \xi_3 + (\xi_2 - \xi_3)\sin^2 u$ преобразует соотношение, выражающее период, к эллиптическому интегралу

$$T = \frac{16}{3\sqrt{\xi_3 - \xi_1}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad k = \sqrt{\frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}} \leq 1$$

В случае плоских колебаний период аналогичным образом приводится к эллиптическому интегралу [14]. Соответствующая формула получается из данной в пределе при $\sigma \rightarrow 0$.

В работе [40] для плоской задачи приводилось выражение периода через начальные условия и рассматривалось частное решение, соответствующее максимальному значению энергии ($E^{\max} = 0$). Также было показано, что при $E \rightarrow -0$ период $T \rightarrow \infty$. В пространственной задаче при наличии сколь угодно малого $\sigma \neq 0$ данный период оказывается конечным, а максимальное значение энергии - отрицательным $E^{\max} < 0$.

Покажем, что это действительно так. Выберем следующие начальные условия

$$z_1(0) = i\delta_1, \quad z_2(0) = \delta_2, \quad z_3 = i\sqrt{2}\delta_3$$

(начальные отклонения по z_1 и z_3 равны δ_1 и δ_3 соответственно, δ_2 - начальный импульс, направленный вдоль оси y). Энергия E выражается через них следующим образом

$$E = -\frac{9}{8}(\delta_1^2 + \delta_2^2) \left[\delta_3^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2 \delta_2^2 \right]$$

откуда следует, что при $\delta_1 \delta_2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow \sigma \neq 0$) справедливо неравенство $E < 0$. Максимальное значение энергии E^{\max} при фиксированных δ_1 и δ_2 достигается при $\delta_3 = 0$ и также является отрицательным.

Теперь найдем выражение для периода T через начальные условия и получим из этого выражения формулу для $E = E^{\max}$ и $1 \gg \delta_1 \gg \delta_2 > 0$. Неравенство $\delta_1 \gg \delta_2$ соответствует случаю $\sigma \rightarrow 0$, который представляет интерес в связи с тем, что он соответствует предельному переходу от пространственной задачи к плоской.

Выражая коэффициенты полинома $P(\xi)$ через начальные условия, получим

$$P(\xi) = -\frac{9}{16} \left[\xi^3 - (\delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\delta_3^2) \xi^2 - 4\delta_1^2 \delta_2^2 \xi + 4(\delta_1^2 + \delta_2^2) (\delta_3^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2 \delta_2^2) \right]$$

Выпишем его корни в соответствии с ранее введенными обозначениями

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2\delta_3^2 - 2\sqrt{\delta_3^4 + \delta_3^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2 \delta_2^2}, \\ \xi_2 &= 2\delta_3^2 + 2\sqrt{\delta_3^4 + \delta_3^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2 \delta_2^2} \\ \xi_3 &= \delta_1^2 + \delta_2^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad |\delta_3| \leq \delta_3^* = \frac{|\delta_1^2 - \delta_2^2|}{\sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}}$$

при $|\delta_3| > \delta_3^*$ второй и третий корни следует поменять местами:

$$\xi_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2, \quad \xi_3 = 2\delta_3^2 + 2\sqrt{\delta_3^4 + \delta_3^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2 \delta_2^2}$$

Таким образом, модуль эллиптического интеграла равен

$$k = \frac{2\sqrt{\delta_3^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3^2 + \delta_1^2\delta_2^2}}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_3^2 + 2\sqrt{\delta_3^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3^2 + \delta_1^2\delta_2^2}}} \quad \text{при } |\delta_3| \leq \delta_3^*$$

$$k = \frac{\sqrt{2\delta_3^2 - \delta_1^2 - \delta_2^2 + 2\sqrt{\delta_3^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3^2 + \delta_1^2\delta_2^2}}}{2\sqrt{\delta_3^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3^2 + \delta_1^2\delta_2^2}} \quad \text{при } |\delta_3| > \delta_3^*$$

Эти формулы позволяют вычислить периоды для различных частных случаев. Например, для строго вертикальных колебаний $\delta_3 \neq 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ из второй формулы получим, что $k = 1$, чему соответствует $T = \infty$. Для колебаний, вначале близких к вертикальным справедливо неравенство $\delta_3 \gg \delta_1, \delta_2$, что позволяет ввести малые параметры $\varepsilon_1 = \delta_1/\delta_3$, $\varepsilon_2 = \delta_2/\delta_3$ и использовать их для асимптотических разложений.

Через эти параметры можно выразить величину $k' = \sqrt{1-k^2}$, необходимую для разложения эллиптического интеграла по формуле, приведенной ниже.

Выражение для k' имеет вид

$$k'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}} + \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{4\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}}$$

Используя разложение эллиптического интеграла по параметру k' [40]

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{k'^2}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) + O(k'^4 \ln k')$$

можно получить асимптотику для периода перестройки мод колебаний

$$T \approx \frac{8}{3\delta_3} \left[\ln \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} + \frac{1}{8} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \left(\ln \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} - 1 \right) \right].$$

Формулы для плоского случая, приведенные в [40], получаются из только что полученных, если положить в них $\varepsilon_2 = 0$.

Отдельный интерес представляет случай $\delta_3 = 0$, соответствующий максимальному значению энергии E , поскольку в плоской задаче при максимальной энергии решение не является периодическим [40]. Формально этому соответствует $T \rightarrow \infty$. Пространственная задача близка к плоской, если $|\delta_1| \gg |\delta_2|$. При выполнении этого неравенства можно ввести малый параметр $\rho = \delta_2/\delta_1$ и переписать формулу для модуля эллиптического интеграла в виде

$$k = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

При $\rho \rightarrow +0$ $k \rightarrow 1-0$, что вновь позволяет воспользоваться разложением эллиптического интеграла по параметру k' и найти асимптотику для периода.

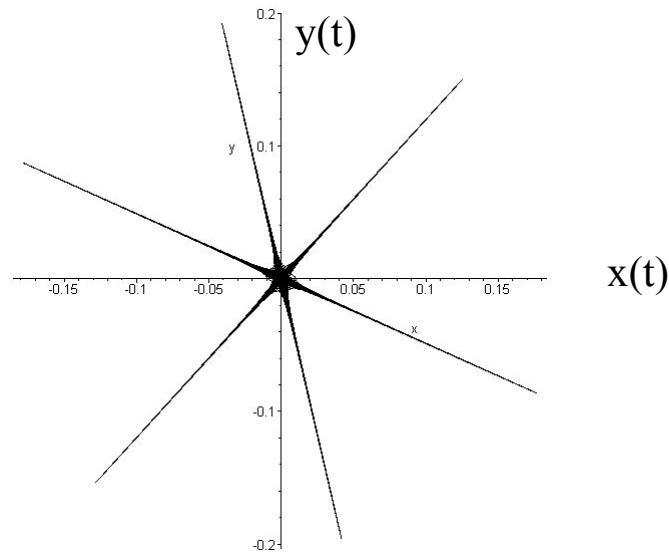
$$T = \frac{16}{3\delta_1(1+\rho)} \left[\ln \frac{2(1+\rho)}{\sqrt{\rho}} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2} \left[\ln \frac{2(1+\rho)}{\sqrt{\rho}} - 1 \right] \right] + O(\rho^2 \ln \rho)$$

В первом приближении

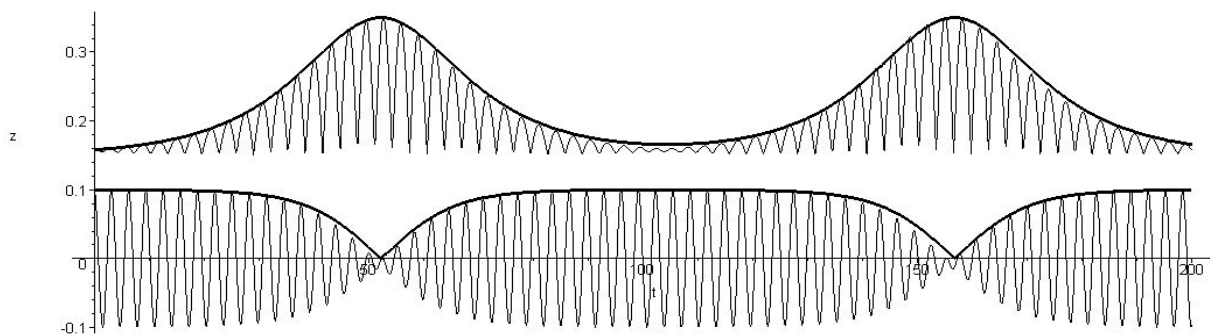
$$T = \frac{8}{3\delta_1} \ln \frac{2}{\sqrt{\rho}}$$

откуда следует, что при $\sigma \neq 0$ этот период конечен. Из этой формулы следует логарифмический характер его стремления к бесконечности при $\rho \rightarrow 0$ (что равносильно $\sigma \rightarrow 0$).

Вычисление периода по указанным формулам при $\delta_1 = 0.01$, $\delta_2 = 0.005$, $\delta_3 = 0.1$ дает $T \cong 106$. Это хорошо согласуется с результатами численного интегрирования, представленными на следующих рисунках:



На этом рисунке изображен вид проекции траектории точки на горизонтальную плоскость (вид «сверху»). Из этого рисунка виден описанный ниже эффект разворота плоскости колебаний.



Здесь изображены зависимости от времени величин $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ (верхний рисунок) и $z(t)$ (нижний). Жирными линиями поверх этих графиков отмечены огибающие, аналитические выражения для которых [40] также приведены ниже.

5. Периодическое решение.

Система уравнений (4) относительно действительных и мнимых частей переменных Z_1, Z_2 и Z_3 имеет шестой порядок. Поэтому четырех найденных

интегралов недостаточно, чтобы проинтегрировать систему. Однако можно найти частный интеграл, соответствующий минимуму $\Pi(\xi)$ в точке

$$\xi \equiv |Z_1|^2 + |Z_2|^2 = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 + 3\sigma^2}}{3} \quad (5)$$

В плоской задаче точке минимума соответствует периодическое решение, найденное в [40].

Построим решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$z_1(0) = i\delta_1, \quad z_2(0) = \delta_2, \quad z_3(0) = i\sqrt{2}\delta_3 \quad (6)$$

Для того, чтобы решение удовлетворяло интегралу (5), величина δ_3 должна иметь следующее значение

$$\delta_3 = \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2\sqrt{2}\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}.$$

При этих начальных значениях постоянные интегрирования таковы

$$c^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}, \quad h = i \frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}, \quad \sigma = 2\delta_1\delta_2, \quad \xi = \delta_1^2 + \delta_2^2$$

Умножая первое уравнение системы (4) на Z_1 , второе - на Z_2 и складывая их, получим

$$\frac{d}{dt}(Z_1^2 + Z_2^2) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}(|Z_1|^2 + |Z_2|^2)Z_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}(\delta_1^2 + \delta_2^2)Z_3$$

Продифференцируем третье уравнение (4) и воспользуемся только что полученным соотношением:

$$\ddot{Z}_3 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{d}{dt}(Z_1^2 + Z_2^2) \Rightarrow \ddot{Z}_3 + \frac{9}{32}(\delta_1^2 + \delta_2^2)Z_3 = 0$$

Решение этого уравнения с вышеуказанным начальным условием имеет вид

$$Z_3(t) = i\sqrt{2}\delta_3 e^{\pm i\varepsilon t}, \quad \varepsilon = \frac{3}{8}\sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}$$

Далее в показателе экспоненты рассматривается знак «+». Решение для показателя противоположного знака строится аналогично.

Подстановка решения $Z_3(t)$ в первое и второе уравнения системы (4) приводит к следующему уравнению

$$\dot{Z}_k = -\frac{3}{4}\delta_3 i \cdot \bar{Z}_k e^{i\varepsilon t}, \quad k=1,2 \quad (7)$$

Замена

$$Z_k = \tilde{Z}_k e^{i(\varepsilon/2)t}$$

приводит уравнение (7) к автономному линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\dot{\tilde{Z}}_k + i\left(\frac{\varepsilon}{2}\tilde{Z}_k + \frac{3}{4}\delta_3 \cdot \bar{\tilde{Z}}_k\right) = 0$$

Его решение ищем в виде

$$\tilde{Z}_k = C_1 e^{i\nu t} + C_2 e^{-i\nu t}$$

Подставляя это выражение в уравнение и приравнявая коэффициенты при экспонентах, получим следующую систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \varepsilon/2 + \nu & \frac{3}{4}\delta \\ \frac{3}{4}\delta & \varepsilon/2 - \nu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ \bar{C}_2 \end{vmatrix} = 0$$

Из равенства нулю определителя найдем

$$\nu = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{9}{16}\delta_3^2} = \frac{3\delta_1\delta_2}{4\sqrt{2(\delta_1^2 + \delta_2^2)}}$$

При этом значении ν получим следующее уравнение для постоянных

$$(\delta_1 + \delta_2)C_1 + (\delta_1 - \delta_2)\bar{C}_2 = 0, \text{ откуда найдем}$$

$C_1 = C(\delta_1 - \delta_2)$, $C_2 = -\bar{C}(\delta_1 + \delta_2)$. Подставляя эти значения в выражение \tilde{Z}_k , затем в Z_k и в (3) получим общее решение для переменных Биркгофа

$$z_k = e^{i(1+(\varepsilon/2))t} \left[C(\delta_1 - \delta_2)e^{i\nu t} - \bar{C}(\delta_1 + \delta_2)e^{-i\nu t} \right], \quad k = 1, 2$$

Из начальных условий (6) найдем при $k=1$: $C=i/2$, при $k=2$: $C=-1/2$.

Отделяя в найденных переменных Биркгофа мнимые части, получим окончательное частное решение для координат маятника с начальными условиями

$$x(0) = \delta_1, \quad u(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad v(0) = \delta_2, \quad z(0) = \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2\sqrt{2}\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}, \quad w(0) = 0$$

Решение удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \nu t & \sin \nu t \\ -\sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \cos \Omega t \\ \delta_2 \sin \Omega t \end{pmatrix}, \quad z(t) = \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{2\sqrt{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2)} \cos 2\Omega t,$$

$$\text{где } \nu = \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{\delta_1 \delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}, \quad \Omega = 1 + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2}}.$$

Этот результат имеет ясную геометрическую интерпретацию: проекция траектории точки на плоскость xu представляет собой эллипс с фиксированными осями δ_1 и δ_2 , который прецессирует с угловой скоростью κ , являющейся малой величиной первого порядка, зависящей от начальных условий. При этом частота обращения по эллипсу отличается от 1 также на малую величину первого порядка, зависящую от начальных условий.

Интересно отметить, что угловая скорость прецессии эллипса пропорциональна его площади (квадратуре). Аналогичный результат был получен в работе [20] для маятника Фуко.

При $\delta_1 = \delta_2$ получаем движение маятника по окружности в горизонтальной плоскости $x = \delta_1 \cos t$, $y = \delta_1 \sin t$, $z = 0$.

6. Эффекты срыва и разворота плоскости колебаний

При большинстве начальных условий (за исключением тех, что рассматривались в предыдущем пункте), в пространственной задаче, как и в плоской [40], наблюдается эффект перекачки энергии между различными модами колебаний. Он проявляется наиболее отчетливо, когда вначале маятник колеблется почти вертикально и состоит в следующем. Система достаточно длительное время продолжает совершать колебания, близкие к почти вертикальным, после чего происходит весьма быстрая перестройка, в результате которой вертикальные колебания значительно затухают, тогда как амплитуда горизонтальной моды колебаний существенно нарастает. Проекция траектории точки на плоскость xu при этих почти горизонтальных колебаниях близка к сильно вытянутому эллипсу с медленно меняющимися полуосями. Его площадь пропорциональна проекции кинетического момента на вертикальную ось. Эта мода существует достаточно длительное время, после чего вновь перестраивается в почти вертикальную и т. д.

Данный результат следует из соотношений п. 2. Было установлено, что величина ξ , характеризующая интенсивность движения в горизонтальной плоскости, совершает периодические колебания между наибольшим и наименьшим значениями. Но в силу закона сохранения H_0 уменьшение (увеличение) ξ влечет за собой увеличение (уменьшение) $|z_3|$. Последняя величина характеризует интенсивность движения по вертикали. Отметим, что при $\sigma \neq 0$ переменная ξ не может обращаться в ноль. Это следует из того, что $\sigma \propto x\dot{y} - \dot{x}y$, а $\xi = 0 \Leftrightarrow x = y = 0, \dot{x} = \dot{y} = 0$.

Колебаниям маятника, изначально близким к вертикальным, соответствует $\xi \ll |z_3|^2$. При перестройке мод колебания становятся почти горизонтальными. Это равносильно тому, что $\xi \gg |z_3|^2$. Следовательно,

$\min \xi = \xi(0) \ll \max \xi$ а $\max \xi$ имеет тот же порядок, что и $\max |z_3|^2 = |z_3(0)|^2$. По этой причине эффект перекачки энергии проявляется сильнее всего при вышеуказанных начальных условиях.

Переход от одной моды к другой происходит с периодом $T/2$, определенным в п.2.

В предшествующих пунктах был построен ряд аналогий между плоской и пространственной задачами. Однако при наличии сколь угодно малого $\sigma \neq 0$ кроме конечного значения периода перестройки, соответствующего максимуму энергии E , появляется еще одно интересное отличие.

Допустим, что в начальный момент материальная точка находится на оси x на некотором расстоянии от плоскости yz , а вдоль оси y сообщается сколь угодно малый импульс. Импульс и отклонение должны быть такими, чтобы амплитуда возникающих колебаний была достаточно малой, а сами колебания в первое время, существенно меньшее периода перекачки энергии между модами, были близки к прямолинейным колебаниям вдоль оси x .

Тогда колебания в горизонтальной плоскости спустя некоторое время перестроятся в почти вертикальные (в соответствии с изложенным в предыдущем пункте). По прошествии времени порядка T они вновь будут близки к горизонтальным. Из сохранения энергии и проекции кинетического момента на вертикальную ось следует, что эти колебания должны иметь форму, близкую к прямолинейной. Таким образом, возникает следующий вопрос: вблизи какой прямой на плоскости xu будут происходить эти колебания?

Чтобы ответить на этот вопрос, было проведено численное интегрирование уравнений движения системы (1) при резонансе ($\mu^2 = 4$).

Траектория движения точки в конфигурационном пространстве, когда $x(0)=0,01$, $\dot{y}(0)=0,005$, $z(0) = 0.1$, а остальные начальные условия равны

нулю, изображена на вышеприведенных рисунках. Интересно отметить, что новое направление, вблизи которого происходят горизонтальные колебания, близкие к прямолинейным, оказывается развернутым относительно первоначального направления на угол, зависящий от начального отклонения по вертикальной оси (δ_3). Например, при $\delta_3 = 0$, $\delta_1 \gg \delta_2$ данный угол оказывается равным $\pi/2$. Этот результат не зависит от начальных условий δ_1 и δ_2 , если они достаточно малы, а колебания в начальный момент близки к прямолинейным колебаниям в горизонтальной плоскости. Вид траекторий при любых других начальных возмущениях качественно не изменяется, однако угол разворота направления горизонтальных колебаний отличается от прямого. Если в начале имеется возмущение по оси z , то вышеуказанный угол разворота может существенно отличаться от 90° (отличие на порядки).

Если разложить правые части точных уравнений движения, оставив только квадратичные нелинейности и снова решить эти уравнения численно, то обнаруживается, что данный эффект хорошо описывается уже в этом приближении. Естественно, соответствие тем лучше, чем меньше амплитуда колебаний, причем с увеличением амплитуды оно может исчезнуть вовсе. Например, при некоторых (достаточно больших) начальных условиях приближенная система имеет неограниченное решение.

Эффект разворота плоскости колебаний, по-видимому, является новым результатом. Можно сказать, что в трехмерной задаче наряду с периодами колебаний маятника и перестройки мод колебаний появляется еще и третий период. Он соответствует средней угловой скорости прецессии вокруг вертикальной оси. Поскольку данный результат был получен путем численного интегрирования, возникает вопрос об его аналитическом описании.

Численное решение уравнений движения при начальных условиях, соответствующих периодическому решению, полученному в пункте 3,

подтверждает полученный там результат о прецессии эллиптической траектории с постоянной угловой скоростью без изменения полуосей эллипса.

В работе [40], посвященной исследованию плоской задачи, были получены аналитические выражения, описывающие зависимость амплитуд вертикальной и горизонтальной мод колебаний от времени. Эти же формулы хорошо описывают аналогичные зависимости в трехмерном случае. Приведем их:

$$|Z_3(t)| = z(0) \left[\left| \operatorname{th} \frac{3z(0)}{4} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right| + \left| \operatorname{th} \frac{3z(0)}{4} \left(t - \frac{3T}{2} \right) \right| - 1 \right]$$

$$\sqrt{|Z_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2} = 2z(0) \left[\operatorname{sech} \frac{3z(0)}{4} \left(t - \frac{T}{2} \right) + \operatorname{sech} \frac{3z(0)}{4} \left(t - \frac{3T}{2} \right) \right]$$

В этих формулах T – период перестройки мод. Графики этих функций размещены на рисунках этой части работы в виде огибающих сверху графиков численных решений.

Для возможности аналитического описания эффекта разворота плоскости колебаний, естественно использовать элементы орбиты, поскольку траектории линеаризованной системы имеют эллиптическую форму, а нелинейность представляет собой малое возмущение. Напомним, как вводятся элементы орбиты, и какой вид имеют уравнения движения в этих элементах. Краткое изложение материала будет основано на работе [20], где написано об этом более подробно.

Исследуемая система имеет вид

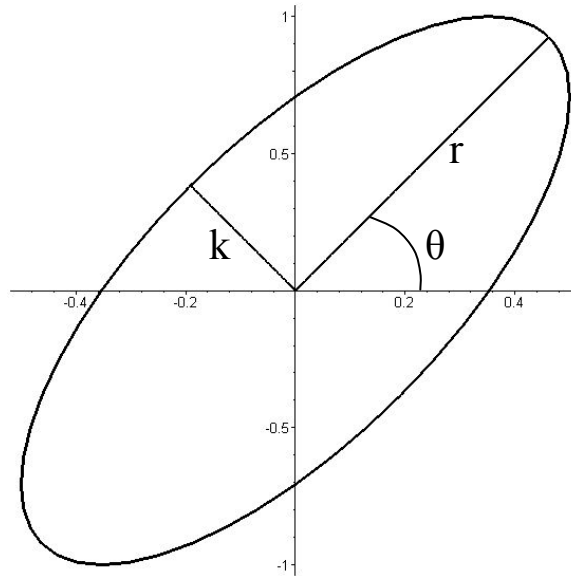
$$\ddot{x} + x = X$$

$$\ddot{y} + y = Y$$

Ее решение при нулевых правых частях, т. е. при $X = Y = 0$, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t + \tau) \cos \theta - k \sin(t + \tau) \sin \theta \\ y &= r \cos(t + \tau) \sin \theta + k \sin(t + \tau) \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

постоянные интегрирования r, k, θ, τ называются элементами орбиты. Их геометрический смысл ясен из следующего рисунка



параметр τ , не изображенный на рисунке, характеризует положение точки на эллипсе в начальный момент.

При отличных от нуля правых частях X и Y элементы орбиты изменяются со временем. Чтобы получить соответствующие уравнения, нужно сделать замену переменных $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (r, k, \theta, \tau)$ в соответствии с формулами (8) и следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r \sin(t + \tau) \cos \theta - k \cos(t + \tau) \sin \theta \\ \dot{y} &= -r \sin(t + \tau) \sin \theta + k \cos(t + \tau) \cos \theta \end{aligned}$$

подстановка и разрешение относительно производных приводит к уравнениям

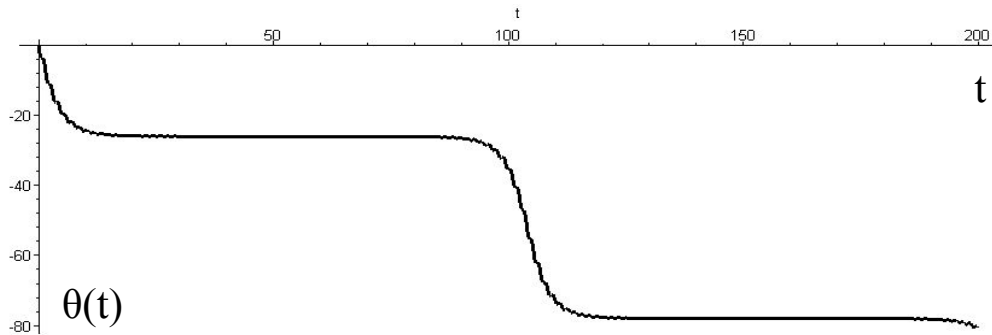
$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -(X \cos \theta + Y \sin \theta) \sin(t + \tau) \\
\dot{k} &= -(X \sin \theta - Y \cos \theta) \cos(t + \tau) \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{r^2 - k^2} \left[k(X \cos \theta + Y \sin \theta) \cos(t + \tau) + r(X \sin \theta - Y \cos \theta) \sin(t + \tau) \right] \\
\dot{\tau} &= \frac{1}{k^2 - r^2} \left[r(X \cos \theta + Y \sin \theta) \cos(t + \tau) + k(X \sin \theta - Y \cos \theta) \sin(t + \tau) \right]
\end{aligned} \quad (9)$$

В исследуемом случае в исходных декартовых переменных (см. разложение функции Гамильтона) $X = -3xz$, $Y = -3yz$. Переход к элементам орбиты приводит к следующим уравнениям

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= 3rz \sin(t + \tau) \cos(t + \tau) \\
\dot{k} &= -3kz \sin(t + \tau) \cos(t + \tau) \\
\dot{\theta} &= -\frac{3rkz}{r^2 - k^2} \cos 2(t + \tau) \\
\dot{\tau} &= \frac{3z}{r^2 - k^2} \left[r^2 \cos^2(t + \tau) - k^2 \sin^2(t + \tau) \right] \\
\ddot{z} + 4z &= -\frac{3}{2} \left[r^2 \cos^2(t + \tau) + k^2 \sin^2(t + \tau) \right]
\end{aligned}$$

Чтобы получить замкнутую систему, (9) дополнена уравнением для z . Полученная система нелинейна и обладает особенностью при $r = k$, что затрудняет ее аналитическое исследование. Ситуация осложняется тем, что из численного решения следует, что со временем эллипс, являющийся проекцией траектории точки на горизонтальную плоскость, стремится к окружности, то есть к тому самому вырождению.

Однако оказывается, что наличие особенности не мешает построить численное решение системы для элементов орбиты при помощи Maple. Наибольший интерес представляет зависимость $\theta(t)$, «отвечающая» за эффект разворота плоскости колебаний. Она имеет следующий вид



Этот график получается при начальных условиях $r(0) = 0.01$, $k(0) = 0.005$, $\theta(0) = 0$, $\tau = 0$, $z = 0.1$, $w(0) = 0$. Из него видна следующая тенденция: большую часть времени угол θ почти не изменяется, а когда начинает преобладать вертикальная мода колебаний, этот угол достаточно быстро изменяет свое значение.

Полученный результат позволяет говорить о том, что в пространственной задаче кроме периодов собственных колебаний и перестройки мод появляется третий период. Он соответствует средней угловой скорости прецессии проекции траектории на горизонтальную плоскость и определяется по формуле

$$T' = 2\pi / \bar{\theta}, \quad \text{где} \quad \bar{\theta} = \frac{\theta(T) - \theta(0)}{T},$$

а T – период перестройки мод колебаний.

Представляет интерес аналитическое описание зависимости $\theta(t)$. Достаточно простой вид графика функции $\theta(t)$ позволяет надеяться, что такое описание возможно.

Глава 5

Задача о колебаниях газового пузыря в жидкости при резонансе частот деформационных и радиальных колебаний 1:2

Постановка задачи

Исследуется задача о колебаниях газового пузыря, центр которого неподвижен относительно идеальной жидкости, обладающей поверхностным натяжением. В равновесии силы давления газа внутри пузыря, поверхностного натяжения жидкости и давления со стороны жидкости уравновешены, а пузырь, очевидно, имеет сферическую форму. При выведении из равновесного состояния в системе возникают колебания, которые можно разделить на два класса – радиальные, связанные с изменением объема при неизменной (сферической) форме, и деформационные, обусловленные изменением формы.

В данной статье рассматривается простейшая деформационная мода колебаний пузыря, аппроксимируемая эллипсоидом вращения [31], что также использовалось во многих других работах.

Известно, что при решении подобных задач можно применять лагранжев формализм. Обобщенными координатами служат геометрические параметры поверхности, аппроксимирующей форму пузыря. Функция Лагранжа, используемая в данной работе, может быть получена из лагранжиана, приведенного в [31].

Функция Лагранжа раскладывается до членов третьего порядка. По квадратичным членам находятся частоты линейных колебаний и условия, при которых их соотношение становится равным 1:2. Для удобства расчетов вводятся безразмерные обобщенные координаты. Оказывается, что некоторые члены третьего порядка в разложении функции Лагранжа являются резонансными.

Для анализа уравнений движения при резонансе делается переход к их гамильтоновой форме. Это позволяет использовать метод инвариантной

нормализации гамильтоновых систем [19,23,24], обладающий рядом преимуществ по сравнению с другими способами нахождения нормальной формы. Процедура построения нормальной формы гамильтониана остается неизменной в автономном - неавтономном, резонансном - нерезонансном случаях и сводится к скалярной рекуррентной формуле. Именно это обстоятельство позволяет значительно упростить исследование рассматриваемой резонансной системы.

Указанный подход позволяет легко отметить аналогию между исследуемой задачей и известной задачей о качающейся пружине [8,28,37,40,46]: уравнения нормальной формы, описывающие эти две системы, совпадают с точностью до коэффициентов. Таким образом, в исследуемой гидродинамической системе может наблюдаться эффект перекачки энергии между деформационной и радиальной модами колебаний. Получены выражения для периода перестройки мод и соотношения, позволяющие по начальным условиям определить диапазоны изменения обобщенных координат при колебаниях.

В последней части работы исследуется вопрос о корректности модели идеальной жидкости. В любой реальной среде происходит диссипация энергии колебаний благодаря наличию вязкости жидкости и теплообмену между жидкостью и газом. Для оценки влияния диссипации используются асимптотики для декрементов затухания линейных колебаний, известные как при больших, так и при малых числах Пекле.

Оказывается, что при больших числах Пекле коэффициент диссипации убывает с увеличением радиуса пузыря. Однако в пределе убывание становится весьма медленным – декремент затухания описывается функцией $\propto 1/\sqrt[4]{r}$. Отсюда следует, что эффект перекачки энергии между радиальной и деформационной модами колебаний наблюдаем лишь при достаточно больших радиусах пузыря. Для его проявления необходимо, чтобы за период перестройки мод колебаний, вычисленный для пузыря в предположении идеальности жидкости, затухание было достаточно малым. Уменьшения

размера пузыря при условии сохранения наблюдаемости перестройки мод колебаний, можно добиться, используя вещества с малыми коэффициентами вязкости и теплопроводности.

Случай малых чисел Пекле интересен тем, что соответствует исследованию пузырьков малых размеров, которые легко реализуемы. Однако оценка декремента затухания показывает, что даже специальный подбор веществ и радиуса пузырька из соображений минимизации декремента не приводит к его уменьшению, достаточному для наблюдаемости перестройки.

1. Функция Лагранжа и условия резонанса

Лагранжиан газового пузыря, центр которого неподвижен относительно жидкости, может быть получен из выражения, приведенного в [31] при отбрасывании слагаемого, связанного с движением центра пузыря. В этом случае

$$L = \frac{1}{2} m_l \dot{l}^2 + \frac{1}{2} m_\varepsilon \dot{\varepsilon}^2 - U(l, \varepsilon), \quad U(l, \varepsilon) = \sigma S + p_\infty V + \frac{p_0 V_0^\gamma}{\gamma - 1} V^{1-\gamma},$$

$$m_l = 4\pi\rho l^3 f_0(\varepsilon), \quad m_\varepsilon = \frac{2}{45} \pi\rho l^5 f_1(\varepsilon), \quad S = 2\pi l^2 s(\varepsilon),$$

$$V = \frac{4}{3} \pi l^3, \quad V_0 = \frac{4}{3} \pi l_0^3,$$

где

σ – поверхностное натяжение жидкости,

p_∞ – ее давление на бесконечности,

V – объем пузыря, выражаемый через радиус сферы эквивалентного объема l ,

V_0 – объем пузыря в состоянии равновесия,

p_0 – давление внутри пузыря в состоянии равновесия,

γ – показатель адиабаты газа, находящегося внутри пузыря,

ρ – плотность жидкости,

ε – параметр деформации пузыря, определяемый соотношением полуосей эллипсоида из формулы $\sqrt{1+\varepsilon} = l_x / l_z$.

Поскольку будут исследоваться колебания при незначительном отклонении пузыря от равновесной сферической формы, параметр ε является малым, что позволяет разложить функции $f_0(\varepsilon)$, $f_1(\varepsilon)$ и $s(\varepsilon)$ в окрестности нуля:

$$\begin{aligned} f_0(\varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon^2), & f_1(\varepsilon) &= \frac{2}{3} - \frac{88}{64}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ s(\varepsilon) &= 2 + \frac{4}{45}\varepsilon^2 - \frac{232}{2835}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

Приведенные формулы выписаны с точностью, необходимой для исследования эффектов, обусловленных кубическими членами в разложении лагранжиана.

Равновесной форме пузыря соответствует стационарная точка потенциальной энергии $U(l, \varepsilon)$, определяемая из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = 0$$

Из этой системы находятся следующие соотношения

$$\varepsilon_0 = 0, \quad l_0 = \frac{2\sigma}{p_0 - p_\infty}$$

где индекс «0» указывает на то, что отмеченные им величины соответствуют состоянию равновесия.

Введем еще один малый параметр x , характеризующий объемную деформацию пузыря, определив его как

$$x = (l - l_0) / l_0$$

Подставляя следующие отсюда равенства $l = l_0(1+x)$, $\dot{l} = l_0\dot{x}$ в функцию Лагранжа и раскладывая ее в ряд до членов третьего порядка включительно, находим L с точностью до несущественной постоянной

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}(a_x + a_{1x})\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(a_\varepsilon + a_{1\varepsilon})\dot{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2}c_x x^2 - \frac{1}{2}c_\varepsilon \varepsilon^2 - c_{1x} x^3 - c_{1\varepsilon} \varepsilon^3 - c_{1x\varepsilon} x \varepsilon^2, \\
a_x &= 4\pi\rho l_0^5, \quad a_{1x} = 12\pi\rho l_0^5 x, \\
a_\varepsilon &= \frac{4}{135}\pi\rho l_0^5, \quad a_{1\varepsilon} = \frac{4}{135}\pi\rho l_0^5 \left(5x - \frac{44}{21}\varepsilon\right), \\
c_x &= 4\pi l_0^2 [2(3\gamma - 1)\sigma + 3p_\infty \gamma l_0], \quad c_\varepsilon = \frac{16}{45}\pi\sigma l_0^2, \\
c_{1x} &= 6\pi p_\infty l_0^3 \gamma (1 - \gamma) - \frac{8}{3}\pi\sigma l_0^2 + 12\pi\sigma l_0^2 \gamma (1 - \gamma), \quad c_{1\varepsilon} = -\frac{464}{2835}\pi\sigma l_0^2, \\
c_{1x\varepsilon} &= \frac{16}{45}\pi\sigma l_0^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Частоты колебаний линеаризованной системы, очевидно, определяются так:

$$\omega_x^2 = \frac{c_x}{a_x} = \frac{p_\infty}{\rho l_0^2} \left[3\gamma + \frac{2\sigma}{l_0 p_\infty} (3\gamma - 1) \right], \quad \omega_\varepsilon^2 = \frac{c_\varepsilon}{a_\varepsilon} = \frac{12\sigma}{\rho l_0^3}$$

Следовательно, при резонансе $\omega_\varepsilon : \omega_x = 1 : 2$ коэффициенты разложения лагранжиана должны удовлетворять равенству

$$\frac{c_x}{a_x} \frac{a_\varepsilon}{c_\varepsilon} = \frac{1}{6} (3\gamma - 1) + \frac{1}{4} \frac{p_\infty \gamma l_0}{\sigma} = 4 \tag{2}$$

откуда можно определить соотношение, связывающее параметры p_∞, γ, σ и радиус пузыря в равновесии, при выполнении которого происходит резонанс:

$$p_\infty = \frac{\sigma}{l_0} \left(\frac{50}{3\gamma} - 2 \right) \tag{3}$$

Например, для воздушного пузыря в воде при атмосферном давлении $p_\infty = 10^6 \text{ дн/см}^2$, $\sigma = 70 \text{ дн/см}$, $\gamma = 1,4$. Подставляя эти числа в последнюю формулу, находим, что резонанс 1:2 получается при $l_0 = 6,93 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, то есть для достаточно малых пузырей.

2. Введение безразмерных параметров и упрощение лагранжиана

Для дальнейших расчетов удобно ввести безразмерные переменные и преобразовать лагранжиан. Делаются следующие замены:

- вводится безразмерное время

$$\tau = \omega_\varepsilon t = \sqrt{\frac{c_\varepsilon}{a_\varepsilon}} t = \sqrt{\frac{12\sigma}{\rho l_0^3}} t$$

- после этого лагранжиан делится на постоянную величину $48\pi\sigma\rho^2$
- используется условие резонанса (3)
- делается растяжение переменной ε по формуле $\varepsilon = \sqrt{135}y$

Эти преобразования приводят функцию Лагранжа к виду

$$\begin{aligned} L &= L_2 + L_3, \\ L_2 &= \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - 2x^2 - \frac{1}{2}y^2, \\ L_3 &= \frac{75\gamma - 73}{36}x^3 + \left(\frac{5}{2}\dot{y}^2 + \frac{3}{2}\dot{x}^2 - y^2\right)x + \frac{29\sqrt{15}}{21}y^3 - \frac{22\sqrt{15}}{7}y\dot{y}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Такой лагранжиан, очевидно, значительно проще исходного. Новые обобщенные координаты входят в него равноправно, тогда как в исходных переменных радиальная мода колебаний несет в себе значительно больше энергии, чем деформационная. Наконец, благодаря использованию условия резонанса, лагранжиан вовсе не зависит от размерных параметров.

3. Построение гамильтониана

Чтобы описать влияние нелинейных членов третьего порядка при резонансе, удобно перейти от лагранжевой формы уравнений к гамильтоновой форме. Преобразования при переходе к уравнениям Гамильтона также следует проводить с точностью до третьего порядка включительно. Поскольку потенциальная энергия при этом переходе не изменяется, приведем лишь

формулы для кинетической энергии. Рассмотрим, например, переход к обобщенному импульсу u , сопряженному координате x . По определению

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (a_x + a_{1x})\dot{x} \Rightarrow \frac{1}{2}(a_x + a_{1x})\dot{x}^2 = \frac{u^2}{2(a_x + a_{1x})} \approx \frac{u^2}{2a_x} \left(1 - \frac{a_{1x}}{a_x}\right)$$

Аналогичным образом нетрудно получить формулу

$$\frac{1}{2}(a_y + a_{1y})\dot{y}^2 \approx \frac{v^2}{2a_y} \left(1 - \frac{a_{1y}}{a_y}\right)$$

Где v – импульс сопряженный координате y , а коэффициенты a_i и a_{1i} , $i = x, y$ в последних двух уравнениях следует выделять из преобразованного лагранжиана (4). Из указанной формулы получим, что

$$a_x = a_y = 1, \quad a_{1x} = 3x, \quad a_{1y} = 5x - \frac{44\sqrt{15}}{7}y$$

Следующее упрощение состоит в том, что из гамильтониана, вычисляемого по формуле $H = T + U$, можно отбросить нерезонансные члены третьего порядка. Нерезонансными называются члены, которые обнуляются при осреднении вдоль траекторий порождающей (линеаризованной) системы. Корректность этого упрощения непосредственно следует из приведенной ниже процедуры инвариантной нормализации.

Поскольку в линеаризованной системе x и u изменяются с частотой, равной двум, а переменные y и v с единичной частотой, резонансными членами разложения гамильтониана являются только xu^2 и xv^2 . Другие резонансные члены, например, пропорциональные uv^2 , в разложении функции Гамильтона отсутствуют.

Таким образом, гамильтониан можно представить в виде

$$H = H_0 + H_1,$$

$$H_0 = \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2x^2,$$

$$H_1 = xy^2 - \frac{5xv^2}{2}$$

где H_0 - гамильтониан линейной порождающей системы, H_1 - гамильтониан возмущения.

4. Исследование системы методом инвариантной нормализации

Метод инвариантной нормализации гамильтоновых систем [19,23,24] позволяет построить нормальную форму гамильтониана с любой степенью точности при помощи одной скалярной рекуррентной процедуры. Процедура нормализации не изменяется в зависимости от того, есть в системе резонанс или нет, а также является ли система автономной, либо неавтономной. Это обстоятельство и существенно меньшая трудоемкость по сравнению с другими способами нахождения нормальной формы, позволяет говорить о значительных преимуществах метода инвариантной нормализации.

Поскольку будет использовано лишь первое приближение метода, здесь описано получение нормальной формы гамильтониана первого порядка. С методами построения высших приближений можно ознакомиться в работах [19,23,24].

Чтобы построить нормальную форму в первом приближении, нужно:

- найти решение порождающей системы в виде функций времени и начальных условий: $x(\tau, x(0), y(0), \dots), y(\tau, x(0), y(0), \dots), \dots$
- подставить это решение в гамильтониан возмущения
- вычислить интеграл от этого гамильтониана

Результат такого интегрирования всегда представляется в виде

$$\int_0^\tau H_1[x(\tau', \dots), y(\tau', \dots), \dots] d\tau' = \bar{H}_1 \tau + G + f(\tau)$$

Функция \bar{H}_1 представляет собой первое приближение нормальной формы гамильтониана возмущения, а G – генератор Ли, задающий каноническое преобразование, которое и приводит гамильтониан к нормальной форме.

В исследуемом случае решение порождающей системы есть

$$y = Y \cos \tau + V \sin \tau, \quad v = -Y \sin \tau + V \cos \tau,$$

$$x = X \cos 2\tau + \frac{U}{2} \sin 2\tau, \quad u = -2X \sin 2\tau + U \cos 2\tau$$

где заглавными буквами обозначены начальные условия для соответствующих переменных. Подставляя это решение в H_1 , интегрируя в пределах от 0 до t и выделяя множитель при t , получим

$$\bar{H}_1 = \frac{7}{8} \left[(Y^2 - V^2) X + UVY \right]$$

Генератор G требуется для построения высших приближений и поэтому не приводится.

Основное свойство нормальной формы гамильтониана имеет вид

$$\{H_0, \bar{H}_1\} = 0$$

и может служить определением нормальной формы [19,23,24] ($\{, \}$ – скобки Пуассона). Это свойство означает, что фазовые потки систем с гамильтонианами H_0 и H_1 коммутируют, что позволяет использовать принцип суперпозиции для нелинейных систем: уравнения, порождаемые H_0 и H_1 решаются независимо друг от друга, после чего вместо начальных условий в решение одной из систем подставляется решение другой системы.

Таким образом, фактически задача свелась к анализу системы, порождаемой гамильтонианом \bar{H}_1 . Для этого оказывается удобным переход к переменным Биркгофа, который задается формулами

$$Z_1 = \frac{U}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}iX, \quad Z_2 = V + iY$$

Такое преобразование является каноническим с валентностью $2i$. Функции Гамильтона в этих переменных принимают вид

$$H_0 = i(2z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2), \quad \bar{H}_1 = \frac{7}{8\sqrt{2}}(Z_1\bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_1Z_2^2),$$

а сами уравнения Гамильтона записываются так: $\dot{z}_i = \partial H / \partial \bar{z}_i$. Для того чтобы получить решение системы с гамильтонианом $H = H_0 + \bar{H}_1$, используя принцип суперпозиции, необходимо подставить в решение невозмущенной системы

$$\dot{z}_i = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{z}_i} \Rightarrow \dot{z}_1 = 2iz_1, \quad \dot{z}_2 = iz_2 \Rightarrow z_1 = Z_1 e^{2i\tau}, \quad z_2 = Z_2 e^{i\tau} \quad (5)$$

вместо постоянных интегрирования решение системы $\dot{Z}_i = \partial \bar{H}_1 / \partial \bar{Z}_i$, которая в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{7}{8\sqrt{2}} Z_2^2 \\ \dot{Z}_2 &= -\frac{7}{4\sqrt{2}} Z_1 \bar{Z}_2, \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные уравнения идентичны системе, которая возникает при использовании этого же способа решения для задачи о качающейся пружине [40]. Отличие состоит в том, что в уравнениях задачи о пружине вместо числового коэффициента $7/8\sqrt{2}$ в функции Гамильтона следует подставить величину $\mu = 3/8\sqrt{2}$.

Установленная аналогия позволяет перенести все результаты, полученные в работе [40] на исследуемую задачу, что и делается ниже.

5. Анализ уравнений нормальной формы: периодическое решение, малое возмущение периодического решения, эффект перекачки энергии между модами колебаний

Результаты этого раздела будут изложены в сжатой форме, поскольку с точностью до постоянных они имеются в статье [40], посвященной исследованию задачи о качающейся пружине.

Заметим, что система с гамильтонианом H имеет первые интегралы

$$H_0 = 2|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = c^2 = \text{const}, \quad \bar{H}_1 = \text{const} \quad (7)$$

Первый из них – закон сохранения энергии, наличие второго следует из определений первого интеграла и нормальной формы гамильтониана. Наличие

первых интегралов позволяет получить автономное уравнение второго порядка для $\xi = |Z_2|^2 = \bar{Z}_2 Z_2$. Дважды дифференцируя ξ в силу (6) и пользуясь интегралом энергии, получим уравнение

$$\ddot{\xi} = 2\mu^2 (2c^2 \xi - 3\xi^2)$$

которое можно интерпретировать как уравнение одномерного движения точки под действием потенциальной силы. Таким образом, нетрудно записать аналог закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{49}{64} (\xi^3 - c^2 \xi^2) = E = \text{const} \quad (8)$$

график потенциальной функции $\Pi(\xi) = \frac{49}{64} \xi^2 (\xi - c^2)$ изображен на Фиг. 1.

Уравнение для ξ позволяет получить следующие результаты

А) Периодическое решение. Соответствует точке $\xi = \frac{2}{3}c^2$, в которой потенциал $\Pi(\xi)$ достигает минимума. Учитывая, что $\xi = |Z_2|^2$ и первый из законов сохранения (7), получим, что в точке минимума потенциала выполняются равенства

$$|Z_1| = \frac{1}{\sqrt{6}}c, \quad |Z_2| = \sqrt{\frac{2}{3}}c$$

Они позволяют искать решение (6) в виде

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}c \exp(i\alpha(\tau - \tau_1)), \quad Z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}c \exp[i(\beta(\tau - \tau_1) + \gamma)].$$

Подставляя эти формулы в (6) находим коэффициенты α , β и γ и решение

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{c}{\sqrt{6}} \exp \left[i \left(2 \pm \frac{7}{4\sqrt{3}}c \right) (\tau - \tau_1) \right] \\ z_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}c \exp \left[i \left(1 \pm \frac{7}{8\sqrt{3}}c \right) (\tau - \tau_1) \pm \frac{i\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(использован принцип суперпозиции – см. (5,6))

Выделяя мнимые части, находим зависимости

$$x(\tau) = \frac{1}{\sqrt{12}} c \sin \left[2 \left(1 \pm \frac{7}{8\sqrt{3}} c \right) (\tau - \tau_1) \right]$$

$$y(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3}} c \sin \left[\left(1 \pm \frac{7}{8\sqrt{3}} c \right) (\tau - \tau_1) \pm \frac{\pi}{4} \right]$$

В) Колебания вблизи периодического решения. Функция $\Pi(\xi)$ вблизи точки минимума хорошо аппроксимируется параболой, что соответствует линейным колебаниям величины ξ . Частота этих колебаний определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\Pi''\left(\frac{2}{3}c^2\right)} = \frac{7}{4\sqrt{2}}c$$

Напомним, что в процессе решения изменялся масштаб времени $\tau=vt$ и приведенная частота относится к безразмерному времени τ . Таким образом, для отклонения от точки минимума $\Pi(\xi)$, определяемого по формуле $\delta\xi = \xi - \frac{2}{3}c^2$, получается уравнение

$$\delta\xi'' + \frac{49}{32}c^2\delta\xi = 0 \Rightarrow \delta\xi = \alpha \cos \left[\frac{7}{4\sqrt{2}}c(\tau - \tau_2) \right]$$

Параметр α характеризует амплитуду отклонения от положения равновесия, τ_2 - фазу. Используя формулы $|Z_2| = \sqrt{\xi}$ и $2|Z_1| + |Z_2| = c^2$, а также разложение

$\sqrt{\frac{2}{3}c^2 + \delta\xi} \approx \sqrt{\frac{2}{3}}c \left(1 + \frac{3\delta\xi}{4c^2} \right)$, легко получить, что

$$|Z_2| \approx \sqrt{\frac{2}{3}}c \left[1 + \frac{3\alpha}{4c^2} \cos \frac{7}{4\sqrt{2}}c(\tau - \tau_2) \right], \quad |Z_1| \approx \frac{c}{\sqrt{6}} \left[1 - \frac{3\alpha}{2c^2} \cos \frac{7}{4\sqrt{2}}c(\tau - \tau_2) \right]$$

Подстановка этих функций в периодическое решение (9) вместо постоянных сомножителей перед экспонентами и те же выкладки, что и в пункте А), приводят к следующим выражениям для координат:

$$x(\tau) = \frac{1}{\sqrt{12}} c \left[1 - \frac{3\alpha}{2c^2} \cos \frac{7}{4\sqrt{2}} c(\tau - \tau_2) \right] \sin \left[2 \left(1 \pm \frac{7}{8\sqrt{3}} c \right) (\tau - \tau_1) \right],$$

$$y(\tau) = \sqrt{\frac{2}{3}} c \left[1 + \frac{3\alpha}{4c^2} \cos \frac{7}{4\sqrt{2}} c(\tau - \tau_2) \right] \sin \left[\left(1 \pm \frac{7}{8\sqrt{3}} c \right) (\tau - \tau_1) \pm \frac{\pi}{4} \right]$$

При $\alpha = 0$ из этих формул получается периодическое решение.

С) Колебания при произвольных начальных условиях. Характеризуются постоянной $E \in \left[-\frac{7}{48} c^6, 0 \right]$, где левая граница интервала соответствует минимуму $\Pi(\xi)$, 0 – максимальное значение постоянной E при физически реализуемых начальных условиях. Зависимость $\xi(t)$ получается при интегрировании уравнения (8). Для удобства интегрирования целесообразно изменить масштабы ξ и τ : $\eta = \frac{\xi}{c^2}$, $\tau' = \frac{7}{8\sqrt{2}} c \tau$. Подстановка этих формул в (8)

приводит к результату

$$\frac{1}{4} \dot{\eta}^2 + \eta^3 - \eta^2 = \eta_0^3 - \eta_0^2 = \frac{64E}{49c^6}$$

Решение этого уравнения

$$\tau' = \frac{1}{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{P(\eta)}}, \quad \text{где} \quad P(\eta) = \eta_0^3 - \eta_0^2 - \eta^3 + \eta^2 = (\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)$$

корни η_1 и η_2 равны

$$2\eta_1 = 1 - \eta_0 + \sqrt{(1 - \eta_0)(1 + 3\eta_0)}, \quad 2\eta_2 = 1 - \eta_0 - \sqrt{(1 - \eta_0)(1 + 3\eta_0)}$$

Полученное решение может быть выражено через эллиптические интегралы. Из приведенных формул следует выражение для периода τ_0 функции $\xi(\tau)$:

$$\tau_0 = \frac{\tau'_0}{\mu c}, \quad \tau'_0 = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{P(\eta)}} = \frac{2}{\sqrt{\eta_1 - \eta_2}} K(k), \quad k = \sqrt{\frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 - \eta_2}}$$

где $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$. Действительно, из графика потенциала (см. стр. 84),

видно, что функция $\xi(\tau)$ изменяется в пределах $[\xi_0, \xi_1]$ (следовательно,

$\eta \in [\eta_0, \eta_1]$) и выражение для периода соответствует прохождению этого интервала в прямом и обратном направлениях.

Из периодичности изменения $\xi(\tau)$ и закона сохранения (7) следует, что при большинстве начальных условий (за исключением попадания в точку минимума $\Pi(\xi)$) в задаче имеет место перекачка энергии между радиальной и деформационной модами колебаний. Это означает, что если, например, вначале колебания близки к радиальным, то спустя половину вышеуказанного периода колебания будут почти деформационными, спустя еще половину периода – вновь почти радиальными и т. д. Этот процесс будет наиболее интенсивен вблизи нулевого значения постоянной E и вовсе исчезнет при минимальном значения этой постоянной, что нетрудно увидеть на рисунке, приведенном на странице 84.

В случае, когда колебания начинаются из состояния покоя, начальные условия таковы: $x(0) = x_0$, $u(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $v(0) = 0$ и период выражается через параметр $\delta = \frac{y_0}{x_0}$:

$$c = \sqrt{4x_0^2 + y_0^2}, \quad \eta_0 = \frac{y_0^2}{c} = \frac{\delta^2}{4(1 + \delta^2/4)}$$

$$\eta_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + \delta^2}}{2(1 + \delta^2/4)}, \quad \eta_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + \delta^2}}{2(1 + \delta^2/4)}$$

Для вычислений удобны разложения функции $K(\kappa)$ вблизи точек $\kappa = 0$ и $\kappa = 1$:

$$k \ll 1 \Rightarrow K(k) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 + O(k^4) \right)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \ll 1 \Rightarrow K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + O(k'^4 \ln k')$$

Пусть для определенности $\delta \ll 1$. В «физических» переменных это означает, что $|x| \gg |\varepsilon|$, то есть начальное радиальное отклонение существенно превышает деформационное. Тогда выражение для периода представляется рядом

$$\tau'_0(\delta) = \ln \frac{32}{\delta^2} + \frac{3}{8} \delta^2 + \frac{3}{256} \left(-17 + 5 \ln \frac{32}{\delta^2} \right) \delta^4 + O(\delta^6 \ln \delta)$$

Приведенные формулы выражены через безразмерные переменные, которые вводились для удобства расчетов. Однако интересно получить зависимости реальных «физических» величин от размерного времени. Ввиду того, что в тексте использовалось несколько замен переменных, и дважды изменялся масштаб времени, приведем список соотношений, позволяющий находить формулы для исходных параметров.

Время:

$$t - \text{время в секундах, } \tau = vt, \quad v = \sqrt{\frac{12\sigma}{\rho l_0^3}}, \quad \tau' = \frac{7}{8\sqrt{2}} c\tau, \quad c = \sqrt{4x^2 + u^2 + y^2 + v^2}$$

Координаты и импульсы:

$$y = \frac{1}{\sqrt{135}} \varepsilon, \quad u = \sqrt{\frac{\rho l_0^3}{12\sigma}} (1 + 3x) \dot{x}, \quad v = \sqrt{\frac{\rho l_0^3}{1620\sigma}} \left(1 + 5x - \frac{44}{21} \varepsilon \right) \dot{\varepsilon}$$

где точкой обозначено дифференцирование по t .

6. Оценка корректности модели идеальной жидкости

В реальных средах всегда происходят диссипативные процессы, приводящие к затуханию колебаний. В связи с этим необходимо исследовать вопрос о допустимости использования модели идеальной жидкости при изучении данной задачи.

Затухание колебаний газовых пузырей в жидкости обусловлено двумя факторами – вязкостью жидкости и теплообменом между газом и жидкостью. Влияние этих факторов можно описать посредством декрементов затухания радиальных колебаний, приведенных, например, в работе [58]:

$$\Lambda_T = \frac{3\pi(\gamma-1)}{\sqrt{2\text{Pe}_0}}, \quad \text{где} \quad \text{Pe}_0 = \sqrt{\frac{3\gamma p_\infty l_0^2}{\rho k^2}}, \quad \Lambda_\nu = \frac{4\pi\nu}{l_0} \sqrt{\frac{\rho}{3\gamma p_\infty}} \quad (10)$$

В этих формулах Λ_T – тепловой декремент затухания, Λ_v – декремент вязкого затухания, Re_0 – число Пекле, k – коэффициент температуропроводности жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Остальные параметры уже были описаны при решении основной задачи. Приведенное соотношение для Λ_T установлено Чепмэном и Плессетом в 1971 г. и справедливо при больших числах Пекле: $Re_0 \gg 1$.

Декремент затухания характеризует степень убывания амплитуды колебаний за период одного колебания. За это время амплитуда уменьшится в $\exp(-\Lambda_i)$ раз. Поэтому результирующий декремент равен

$$\Lambda = \Lambda_T + \Lambda_v.$$

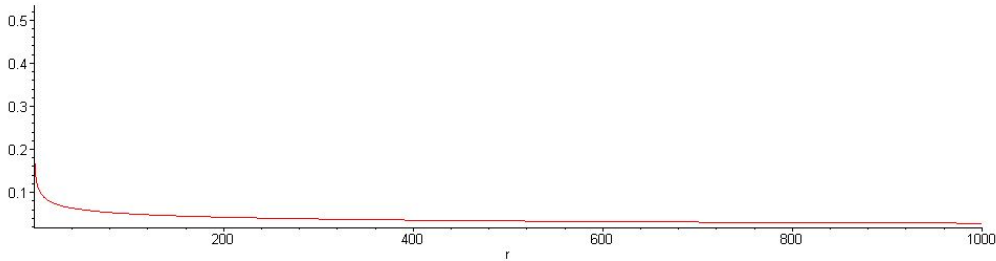
Выражения (10) справедливы при произвольном соотношении частот деформационной и радиальной мод колебаний. Однако при резонансе необходимо учесть формулу (3), из которой следует, что параметры p_∞ и l_0 уже нельзя считать независимыми. С учетом этого декременты затухания преобразуются следующим образом

$$\Lambda_T = \sqrt[4]{\frac{\rho k^2}{4\sigma(50-6\gamma)}} \frac{3\pi(\gamma-1)}{\sqrt[4]{l_0}}, \quad \Lambda_v = \sqrt{\frac{\rho}{\sigma(50-6\gamma)}} \frac{4\pi\nu}{\sqrt{l_0}}.$$

Из приведенных формул следует, что декремент затухания стремится к бесконечности как $1/\sqrt{l_0}$ при уменьшении радиуса пузыря. Поэтому колебания достаточно малых пузырей сильно затухают и результат, полученный в предположении идеальности жидкости, теряет смысл.

Следовательно, необходимым условием наблюдаемости перестройки мод колебаний при $Re_0 \gg 1$ является достаточно большой радиус пузыря. Естественно предположить, что если за период этой перестройки амплитуда изменится слабо, то использование модели идеальной жидкости с поверхностным натяжением можно считать корректным. Необходимо отметить,

что при увеличении радиуса пузыря декремент затухания ведет себя как $1/\sqrt[4]{l_0}$, откуда следует, что его уменьшение очень медленно. Характерный вид зависимости декремента от радиуса пузыря, полученный для воздушного пузыря в воде, имеет вид



Приведем выражения декремента затухания для этих веществ с числовыми коэффициентами:

$$\Lambda \approx \frac{0.158}{\sqrt[4]{l_0}} + \frac{2.4 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{l_0}}.$$

Вычисление по этой формуле для пузыря радиусом 50 см приводит к достаточно большому значению $\Lambda = 0.06$.

Теперь перейдем к асимптотике для малых чисел Пекле, представляющей наибольший интерес, поскольку именно такая ситуация реализуется для малых пузырей, которые нетрудно создать в лабораторных условиях. К тому же в данной статье пузырь считается неподвижным относительно жидкости. Такая идеализация при наличии тяготения может считаться справедливой лишь для достаточно малых пузырьков, когда влияние силы Архимеда может считаться пренебрежимо малым.

Для малых чисел Пекле $Pe_0 < 5$ справедлива асимптотика

$$\Lambda_T = \frac{\pi(\gamma-1)Pe_0}{15\gamma^{3/2}}$$

Подставив в нее выражение для числа Пекле, и воспользовавшись условием резонанса, можно получить формулу

$$\Lambda_T = \frac{4\pi(\gamma-1)}{15k} \sqrt{\frac{3\sigma}{\rho\gamma^3}} \sqrt{l_0}.$$

Выражение для декремента вязкой диссипации не претерпевает изменений. Таким образом, оказывается, что суммарный декремент затухания при малых числах Пекле описывается функцией вида

$$\Lambda = a\sqrt{l_0} + \frac{b}{\sqrt{l_0}}$$

Минимальное значение полученной функции равно

$$\Lambda_{\min} = 2\sqrt{ab}$$

Подставив в эту формулу выражения для коэффициентов a и b , получим следующую формулу для минимального значения результирующего декремента затухания, справедливую при малых числах Пекле:

$$\Lambda_{\min} = \left[8\pi \sqrt{\frac{\gamma-1}{15\gamma^{3/2}}} \sqrt{\frac{3}{50-6\gamma}} \right] \cdot \sqrt{\frac{\nu}{k}}$$

Коэффициент, заключенный в квадратный скобки, при $\gamma = 1.4$ имеет величину порядка 1.6 и достаточно слабо зависит от γ при физически возможных величинах этого параметра.

Приведем данные о значениях кинематической вязкости и температуропроводности некоторых веществ, подберем пару с наименьшим декрементом затухания и сравним его величину со значением, получающимся для воздушного пузыря в воде.

Жидкость	Кинематическая вязкость жидкости	Газ	Коэффициент температуропроводности газа
<i>Вода</i>	<i>0.0105</i>	<i>Воздух</i>	<i>0.266</i>
<i>Ацетальдегид</i>	<i>0.00297</i>	Аргон	0.34
Ацетон	0.00439	Водород	1.851
Н-гексан	0.0054	<i>Гелий</i>	<i>26.89</i>
Изопрен	0.00348	Углекислый газ	0.122

Пентан	0.00376	Кислород	0.266
Н-пентан	0.00387	Метан	0.239

Из приведенной таблицы и формулы для минимального декремента затухания следует, что для воздушного пузыря в воде $\Lambda_{\min} = 0.3$, что, очевидно препятствует наблюдаемости перестройки мод. Минимальное значение декремента затухания достигается для гелиевого пузыря в ацетальдегиде и равно $\Lambda_{\min} = 0.014$, то есть также достаточно велико.

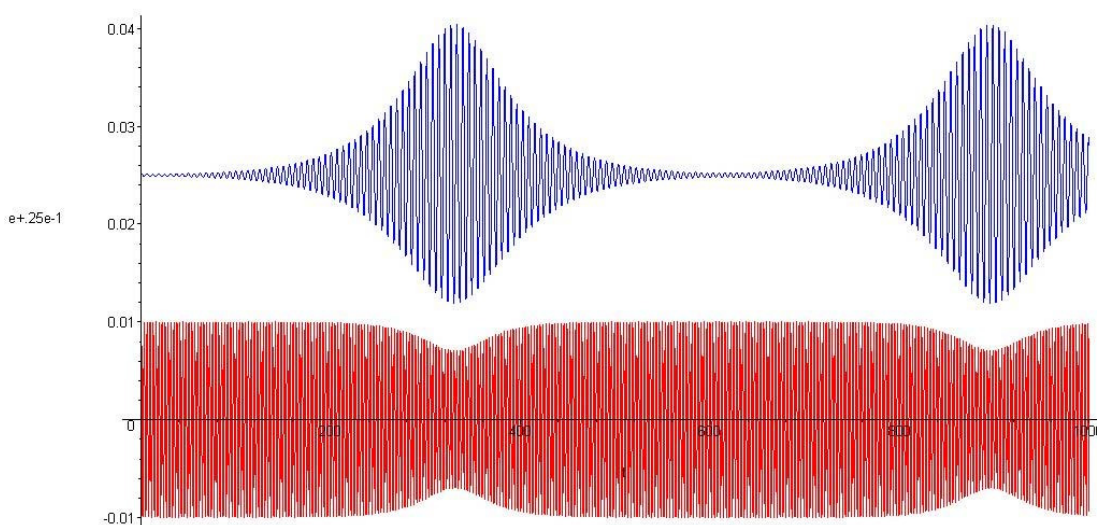
Таким образом установлено, что величина декремента затухания существенным образом зависит от механических и теплофизических свойств веществ, образующих исследуемую систему. Однако кардинально уменьшить декремент затухания, подбирая газ и жидкость из соображений минимизации отношения ν/k представляется маловероятным. Из таблиц физических свойств веществ следует, что параметры вязкости и температуропроводности различных пар веществ могут отличаться от аналогичных величин для воды и воздуха примерно на порядок. Таким образом, величина ν/k путем «подбора» веществ может быть изменена на два прыжка и, следовательно, $\sqrt{\nu/k}$ - на порядок. Этого явно не достаточно для значительного уменьшения декремента затухания.

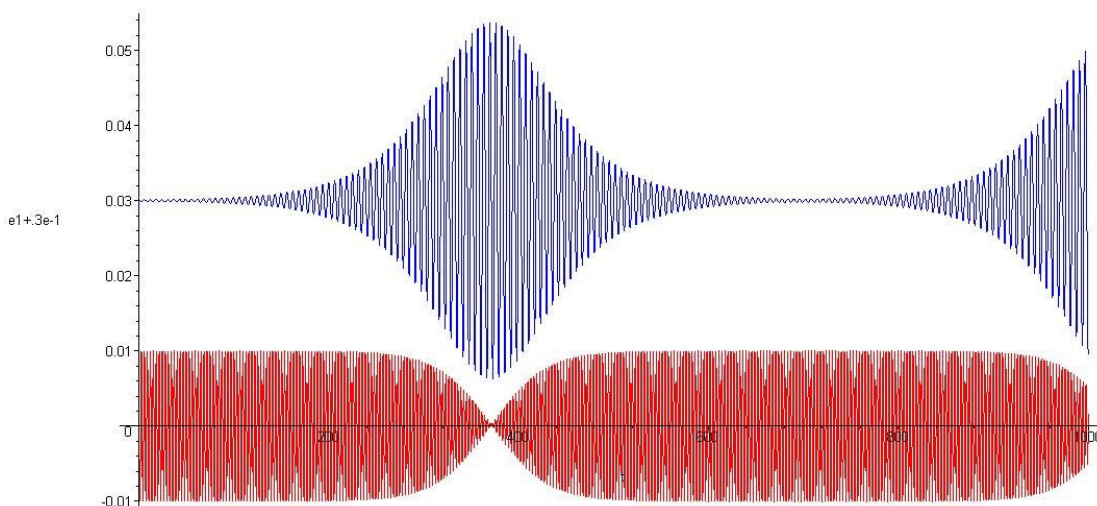
7. Выводы

Приложение аппарата лагранжевой и гамильтоновой механики к задаче о колебаниях газового пузыря в идеальной жидкости с поверхностным натяжением, позволяет установить ее аналогию с известной задачей о качающейся пружине [40]. При определенных условиях (см. (2)) частоты деформационной и радиальной мод колебаний пузыря соотносятся как 1:2, что приводит к тому, что некоторые кубические члены разложения лагранжиана становятся резонансными. Для анализа уравнений движения делается переход

от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона. Это позволяет использовать метод инвариантной нормализации гамильтоновых систем [19,23,24]. Использование данного метода позволяет обойти трудности, обычно возникающие при резонансе в случае использования других подходов, и установить, что нормальные формы гамильтонианов задач о качающейся пружине и о газовом пузыре отличаются лишь постоянными числовыми сомножителями.

Из этого следует, что в задаче о колебаниях газового пузыря при резонансе 1:2 имеет место перекачка энергии между радиальной и деформационной модами колебаний. Получены формулы для периода перекачки и указаны границы интервалов, внутри которых изменяются амплитуды мод колебаний. Для проверки правильности результатов проведено сравнение с численными решениями систем с учетом всех кубических членов разложения лагранжиана и с учетом лишь резонансных членов. Результат сравнения представлен таков





На первом рисунке приведено численное решение уравнений движения с учетом всех кубических членов в разложении гамильтониана. Результат, представленный на втором рисунке – численное решение уравнений движения системы, для которой оставлены только резонансные члены в разложении гамильтониана. Подбором начальных условий установлено, что влияние нерезонансных кубических членов разложения лагранжиана увеличивается с ростом амплитуды колебаний и приводит к ослаблению эффекта перекачки энергии между модами колебаний.

Период перекачки энергии зависит от начальных условий. Как видно из приведенных соотношений, он обратно пропорционален величине s , характеризующей интенсивность начальных возмущений. Поэтому чем слабее начальное возмущение пузыря, тем медленнее будет идти процесс перестройки мод колебаний. С другой стороны, при уменьшении начальных условий убывает влияние нерезонансных нелинейных членов уравнений движения и резонанс должен проявиться более отчетливо.

Приведенный анализ влияния диссипативных процессов показал, что при больших числах Пекле основной вклад в затухание колебаний вносит теплопроводность. Декремент затухания убывает с увеличением радиуса пузыря, однако это убывание оказывается очень медленным. Асимптотика для

декремента при малых числах Пекле показывает, что в этом случае затухание еще более интенсивно фактически для любых реальных веществ.

В качестве основного результата исследования можно указать на противоречивость требований к начальным условиям, необходимым для наблюдаемости резонансного эффекта перекачки энергии для реальных жидкостей и газов. Действительно: для уменьшения влияния нерезонансных нелинейных членов необходимо уменьшать начальные условия, что, в свою очередь, приводит к увеличению периода перестройки. В результате оказывается, что время перестройки должно включать в себя достаточно много периодов собственных колебаний пузыря. Но декремент затухания для реальных размеров пузырей весьма велик и это, как и нелинейные нерезонансные члены, будет препятствовать наблюдаемости.

Отсюда, в частности, следует, что при исследовании собственных колебаний малых пузырей размером в доли миллиметра диссипация столь велика, что модель идеальной жидкости совершенно не соответствует действительности и резонансные явления, типа описанных в данной работе, в таких системах не происходят, ибо резонанс 1:2 является самым грубым. Влияние резонансов других порядков значительно менее выражено.

Список литературы

1. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г. Эллипсоидальные колебания газового пузырька при периодическом изменении давления окружающей жидкости// МЖГ, 2005, № 5.
2. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Физматгиз, 1966, 579 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959, 915 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003, 416 с.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. – 368 с.
6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984
7. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. М., Л.: Гостехиздат, 1941, 320 с.
8. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987, 255 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
10. Бранец В.Н. Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992, 280 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004, 560 с.
13. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975, 415 с.

14. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 1. Математические модели инерциальной навигации. М.: МГУ, 2007, 110 с.
15. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 472 с.
16. Джанжгава Г.И., Виноградов Г. М., Бахонин К. А., Требухов А.В. Гироскопия и навигация 2005.
17. Журавлев В.Ф. Об управлении формой колебаний в резонансных системах. // ПММ, Т. 56, вып. 5, 1992, стр. 827 –836.
18. Журавлев В.Ф. Пространственный осциллятор – датчик полной инерциальной информации. МТТ вып.4, 2005.
19. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 2001, 320 с
20. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов// МТТ. 1997. Вып. 6. С. 27-35.
21. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С. 6-19.
22. Журавлев В.Ф. К динамике упругого твердого тела. // Известия АН СССР. МТТ. 1986. №6. с. 93 – 97.
23. Журавлев В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем// ПММ, 2002, Т. 66, Вып. 3, С. 356-365.
24. Журавлев В.Ф. Новый алгоритм нормализации гамильтоновых систем по Биркгофу. //ПММ. 1977. Т. 61, Вып.1, с.12-17.
25. Журавлев В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа. // Изв. РАН. МТТ. 1995. №5.
26. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 326 с.
27. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985, 126 с.

28. Зарипов М.Н., Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины// Докл. Акад. Наук, Механика. Том 399, № 3, 2004. С. 347-352.
29. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
30. Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984.
31. Ламб Г. Гидродинамика. М. – Л.: Гостехиздат, 1947, 928 с.
32. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидромеханика. М.: Наука, 1986, 733 с.
33. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 532 с.
34. Маркеев А.П. Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
35. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1//ПММ, Том 63, Вып, 5, 1999, с. 757-769.
36. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969, 379 с.
37. Найфе А.Х. Методы теории возмущений. М.: Мир, 1976. (Nayfeh A.H. Perturbations Methods. New York.: J. Wiley, 1973).
38. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В двух томах. М.: Наука, 1987, 823 с.
39. Овсянников Л.В. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 400 с.
40. Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе. Известия Академии Наук. МТТ. № 4, 2006, С. 119-129.
41. Петров А.Г., Фомичев А.В. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине.// Известия Академии Наук. МТТ, в печати
42. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984, 296 с.
43. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970, 332 с.
44. Постников М.М. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982, 447 с.

45. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987, 253 с.
46. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Наука. 1977. 256 с.
47. Фомичев А.В. О круговых колебаниях в системе с трехкратным резонансом. // Известия Академии Наук. МТТ. №4, 2006, с. 113-118.
48. Хорн Р. Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 655 с.
49. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. М.: ГИТТЛ, 1940, 396 с.
50. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004, 238 с.
51. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. – Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. Phys. Sci., 1890, vol. 7, p. 101-111.
52. Charcosset Cl. Bonjour Ch.,... Gyrometre a resonateur mecanique // Demande de brevet europeen EP 0 773 429 A1. Bulletin 1997/20.
53. Ffowcs Williams J.E. and Guo Y.P. On resonant nonlinear bubble oscillations. J. Fluid Mech. (1989), vol. 224, pp. 507-529
54. Friedland B., Hutton M.F. Theory and error analysis of vibrating-member gyroscope. IEEE Transactions On Automatic Control, vol. ac-23, no. 4, August 1978.
55. Leger P. Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint-Petersburg Intern. Conf. On Integrated Navigation Systems. T.1. – Saint-Petersburg, 1996. – P. 143 – 149.
56. Longuet-Higgins M.S. Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations. Part 1. Normal modes. J. Fluid Mech. (1989), vol. 201, pp. 525-541
57. Longuet-Higgins M.S. Monopole emission of sound by asymmetric bubble oscillations. Part 2. An initial-value problem. J. Fluid Mech. (1989), vol. 201, pp. 543-565
58. Longuet-Higgins M.S. Resonance in nonlinear bubble oscillations. J. Fluid

Mech. (1991), vol.

224, pp. 531-549

59. Loper E.J. Lynch D.D. The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange For Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.

60. Lynch D.D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging // 2-я Санкт-Петербург. Международная конференция по гироскопии и навигации. Санкт-Петербург, 1995. СПб, 1995. Ч. 2. Р. 18-26.

61. Peter J. Olver. Applications of Lie groups to differential equations. Springer – Verlag.

62. Scott W.B. Delco Makes Low-Cost Gyro Prototype. Aviation Week And Space Technology, N 25, 1982, p. 64-72

63. Stiles J.C. Vibrating ring gyro. U.S. Patent no: 3, 924, 475, Dec. 9, 1975.

64. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Seria E Appl. Mech. 1964. V. 31. № 3. P. 523-534.