

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ХОРОШЕВ КОНСТАНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ

УДК 539.3

**ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛЕКТРО- И
ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОСТИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

*Диссертация на соискание степени кандидата
физико-математических наук*

Научный руководитель

КАЛОЕРОВ СТЕФАН АЛЕКСЕЕВИЧ,

доктор физико-математических наук,

профессор

Донецк 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛЕЙ И	
МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ	13
1.1. Математические модели и методы термомеханики	13
1.2. Исследования термоупругого, термоэлектро- и термомагнитоупругого состояний	23
1.3 Выводы по разделу 1	29
РАЗДЕЛ 2. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ,	
ТЕРМОЭЛЕКТРО- И ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОСТИ	31
2.1. Краевые задачи теплопроводности, термоэлектро- и термомагнитоупругости	31
2.2. Плотность внутренней энергии	39
2.3. Основные соотношения для комплексного потенциала теплопроводности	43
2.4. Комплексные потенциалы термоэлектроупругости (термомагнитоупругости)	45
2.5. Общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей	54
2.6. Плоская задача	57
2.7. Решения некоторых задач для односвязных областей	63
2.8. Выводы по разделу 2	87
РАЗДЕЛ 3. МНОГОСВЯЗНОЕ ТЕЛО И ПЛАСТИНКА	
3.1. Постановка задачи	89
3.2. Решение задачи теплопроводности	90
3.3. Решение задачи термоэлектроупругости (термомагнитоупругости)	96

3.4. Методика определения коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности	99
3.5. Исследование термоэлектро– и термомагнитоупругого состояния диска и пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами	103
3.6. Выводы по разделу 3	114
РАЗДЕЛ 4. МНОГОСВЯЗНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И ПОЛУПЛОСКОСТЬ	
4.1. Решение задачи с точным удовлетворением граничным условиям на плоской границе	116
4.2. Решение задач с приближенным удовлетворением граничным условиям на плоской границе	132
4.3. Выводы по разделу 4	139
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	142
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	145
ПРИЛОЖЕНИЯ	171
Приложение А	172
Приложение Б	213

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ

1.1. Математические модели и методы термомеханики

В математических моделях термомеханики рассматривают различные способы распространения тепла в сплошных средах. Считается, что распространение тепла может проходить за счет теплопроводности (тепло передается через само вещество), конвекции (тепло передается за счет относительного движения частиц нагретого тела) и излучения (перенос тепла осуществляется за счет электромагнитного излучения). Математические модели теплопроводности были впервые разработаны в XIX в. в работах С. Duhamel [219] и Г. Lamé [239]. Систематическое изложение методов теплопроводности дано в работах А. В. Лыкова [115], Г. Карслоу, Д. Егеря [77]. Тепло за счет теплопроводности [77] распространяется при наличии распределенных и точечных источников и стоков тепла в теле. Распространение тепла всегда сопровождается также возникновением в теле напряжений, деформаций и, быть может, электромагнитных полей. Исследованию напряженно-деформированного состояния тел с учетом различных связей между напряжениями, деформациями и температурой, а также электромагнитными полями, и составляет основу современных моделей термомеханики. Например, предложены математические модели, в которых отражены зависимость температуры от времени, от теплофизических постоянных материала, различных форм взаимодействия полей температур и деформаций, связи тепловых, упругих и электромагнитных полей, способа задания температурных полей и др. Разработаны математические модели решения задач. Коротко остановимся на некоторых из этих моделей и методов.

Модели термомеханики без учета электромагнитных полей. Задачи термоупругости вначале решались на основе модели Дюамеля–Неймана [220, 245], в которой предполагалось, что полная деформация складывается из упругой деформации и теплового расширения. Такая модель не подходила для нестационарных процессов, так как она не была построена на термодинамике проходящих в теле процессов. Основные законы термодинамики для изучения свойств термоупругого тела впервые применил Томсон [89], а затем развили Н. Н. Шиллер [203], Каратеодори [212], Т.А. Афанасьева-Эренфест [7] и другие. В этом случае модель получалась динамической и связанной, т.к. в уравнении теплопроводности и уравнениях движения учитывались слагаемые деформационного нагрева и инерционные члены. Среди работ, посвященных решению связанных задач термоупругости, отметим работы В. Новацкого [136, 137], В.Г. Карнаухова [68], О.П. Червинко, И.К. Сенченкова, Е.В. Доли [192], Л.А. Фильштинского, Ю.В. Сиренко [181] и др.

При рассмотрении термомеханического поведения проходящих в теле процессов, которые, начиная с некоторого момента времени, переходят в установившееся состояние, пользуются квазистатическими моделями термомеханики. В этих моделях инерционный член в уравнениях движения и производные деформаций по времени в уравнении теплопроводности не учитываются, сама модель получается несвязанной, т.е. распределение потоков тепла в теле происходит только за счет теплопроводности (не учитывается возникновение тепла за счет внутреннего трения), а термоупругое состояние является следствием уже распределенных температурных полей. Представление общего решения такой задачи в практически удобной форме было предложено в работах П.Ф. Папковича [141, 142]. При этом решение однородного уравнения для вектора перемещения содержит вектор и скаляр, являющиеся произвольными, а частное решение соответствующего неоднородного уравнения, отвечающее уже определенному температурному полю, определяется через скалярную функцию, получившую название термоупругого потенциала перемещений. Первое систематическое изложение теории несвязанной тер-

моупругости для изотропного тела было дано Н.Н. Лебедевым [106], для анизотропного тела И.А. Прусовым [156], А.И. Уздалевым [173].

В линейной теории термоупругости считается, что максимальное изменение температуры мало по отношению к начальной абсолютной температуре. Случай больших изменений температуры в рамках предположения о малости деформации приводит к необходимости учета нелинейных членов в связанных уравнениях термоупругости, а также зависимости тепловых и упругих свойств от температуры. В рамках предположения о малости деформаций построены модели теории теплопроводности [46, 193] и термоупругости [113, 206, 241], учитывающие зависимость тепловых и упругих свойств материала от температуры.

Особенно широкое развитие получили теории теплопроводности и термоупругости в случае изотропных пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями и трещинами. Для решения таких задач использовались методы комплексных потенциалов [94, 106, 132, 156, 173, 174], сингулярных интегральных уравнений [83, 140], функций Грина [230], малого параметра [42], дисторсии [80], интегральных преобразований [176], асимптотические методы [52, 90], метод конечных элементов [130]. Наиболее удобными в использовании оказались методы комплексных потенциалов, общие положения которых и их применения изложены в монографии [94].

В связи с распространением в последние десятилетия в технике и промышленности композитных материалов, особый интерес вызывают достаточно простые и эффективные методы решения задач теплопроводности и термоупругости для анизотропных сред [39, 94, 156, 173, 174, 188, 189]. Изучению эффективных упругих и тепловых свойств композитных материалов посвящена работа [186], механике композитных материалов при температурных воздействиях – [189–191, 238].

Широкие исследования термоупругого состояния были выполнены для анизотропных пластинок, тонких плит и оболочек. Основываясь на исследованиях, выполненных в [107], А.И. Уздалев для решения плоских задач теп-

лопроводности и термоупругости ввел обобщенные комплексные потенциалы термоупругости [174], позволившие решить различные задачи для односвязных областей. С использованием метода линейного сопряжения решены некоторые задачи термоупругости для некоторых классов анизотропных материалов [142]. Общий подход к построению комплексных потенциалов и решения задач термоупругости в случае многосвязных пластинок и плит был предложен С.А. Калоеровым и А.С. Космодамианским [94], ими был решен ряд задач, когда на контурах отверстий задавались значения температуры, во внутренних точках действуют сосредоточенные источники тепла. В работе [58] эти методы были распространены на случай задания потока тепла на границах и на бесконечности.

С использованием методов интегральных преобразований в работах Р. М. Кушнера, Т. М. Николишина, В. А. Осадчука [101], В. П. Шевченко, А. С. Гольцева [197], А.С. Гольцева [35] были решены задачи термоупругости для ортотропных оболочек и пластин. Различные методы решения плоских задач термоупругости анизотропных тел даны в работах [124, 248, 274].

Достаточно много исследований термоупругого состояния проведено и для термовязкоупругих сред. В этой области можно отметить работы А. А. Ильюшина, Б. Е. Победри [49], В. Г. Карнаухова, И. К. Сенченкова, Б.П. Гуменюка [76], В. Г. Карнаухова, И.Ф. Киричок [73], Ю.Н. Шевченко, Ю.Г. Савченко [201]. Разработке теории и методов расчета задач термопластичности посвящены работы Ю.Н. Шевченко [198–200].

Особое внимание в задачах термомеханики уделяется способу задания тепловой нагрузки и ее моделированию при решении конкретных задач. В этой области проведен ряд исследований, в которых учитывались различные формы моделирования тепловой нагрузки: задание значений температуры и плотности потоков тепла на границе, сосредоточенных источников тепла, однородных потоков тепла на бесконечности. Сосредоточенный источник тепла, как правило, рассматривается как предельный случай задания на контуре кругового отверстия потока тепла постоянной плотности, когда контур стя-

гивается в точку [94]. Для моделирования линейного потока тепла решается задача [58] для прямоугольной пластинки, на противоположных сторонах которой заданы разные значения температуры. Также рассмотрены и различные подходы учета тепловых контактов упругих тел [21, 25, 251].

Изложению различных моделей, а также методам решения задач термомеханики без учета электромагнитных полей посвящены работы Б. Боли, Дж. Уэйнера [14], Б.Е. Гейтвуда [34], В.Г. Карнаухова [68], В.Г. Карнаухова, И.К. Сенченкова, Б..П. Гуменюка [76], Г.С. Кита, М.Г. Кривцуна [83], А.Д. Коваленко [89], А.С. Космодамианского, С.А. Калоерова [94], В. М. Майзеля [116], Э. Мелана, Г. Паркуса [122], В. Новацкого [135, 136, 137], П. М. Огибалова, В. Ф. Грибанова [139], В. В. Панасюка, М. П. Саврука, А.П. Дацишина [140], Г. Паркуса [143], Я.С. Подстригача, Ю.М. Коляно [151, 152], Я.С. Подстригача, В.А. Ломакина, Ю.М. Коляно [153], И.А. Прусова [156, 157], А.И. Уздалева [173, 174]. Обзору основных моделей и методов термоупругости посвящены статьи В.Г. Карнаухова [72], А.Д. Коваленко [87, 88], В. В. Мелешко [123], Т.Р. Tauchert [273].

Модели термомеханики с учетом электромагнитных полей. Изучением термомеханического поведения деформируемых твердых тел с учетом электромагнитных полей, связанных с механическими и тепловыми процессами в теле, занимается механика связанных полей. Основные положения моделей механики сплошной среды, учитывающие взаимодействия полей различной физической природы, изложены в работах С. А. Амбарцумяна [3, 4], А. Н. Гузя, Ф. Г. Махорта [40], А. А. Ильюшина [54], Л. Д. Ландау, Е. М. Лившица [103], Ж. Можена [127], В. Новацкого [138], В. З. Партон, Б. А. Кудрявцева [144], Я. С. Підстригача, Я. Й. Бурак [149], Л. И. Седова [160, 161], А. С. Eringen [225], А. С. Eringen, G. A. Maugin [226], И. Е. Тамма [164], Y. Н Рао [252], Y. Н Рао, К. Hutter[253], Р. Penfield, Н. А. Haus [256] и др. При построении таких моделей механики деформируемого твердого тела влияние электромагнитного поля на термомеханическое поведение тела реализуется через пондеромоторные силы и их моменты, а также через источни-

ки дополнительной энергии, возникающие при взаимодействии тела с внешним электромагнитным полем. При этом формулируются макроскопические уравнения электродинамики Максвелла, описывающие поле во внешней среде и в теле с учетом характеристик поля, таких как токи проводимости, поляризация и намагничивание [160, 226, 53]. На сегодняшний день существуют несколько подходов к получению макроскопических уравнений электродинамики тел, способных к поляризации и намагничиванию, и определению характеристик электромагнитного поля в теле и энергии в нем. Наиболее распространенными в литературе такими подходами являются статистическая модель, модель Лоренца, двудипольная модель и модель Максвелла-Минковского.

В статистической модели [167] путем статистического осреднения электромагнитных полей и уравнений электродинамики на микроуровне, вызванные движением точечных носителей зарядов (электроны, ядра) в рамках стабильных структур (атомы, молекулы, ионы), определяются макроскопические поля и уравнения Максвелла, причем соотношения для поляризации и намагничивания на макроуровне получаются как средние статистические от магнитного и дипольного моментов в теле.

В модели Лоренца [164, 232] тело считается состоящим из положительно и отрицательно электрически заряженных элементарных частиц, движущихся в вакууме под действием их собственных или внешних полей. В этом случае происходит перераспределение микрозарядов и микротоков в сплошной среде, возникают микроскопические электромагнитные поля. Макроскопические уравнения и поля получаются путем пространственно-временного осреднения уравнений и полей на микроуровне, намагниченность и поляризация понимаются как средние плотности магнитного и дипольного моментов в теле.

При рассмотрении тела в двудипольной модели [252, 253, 256] считается: оно состоит из движущихся материальных частиц-носителей электрических, магнитных зарядов, свободных зарядов и токов, создающие электро-

магнитное поле в среде. При этом поляризация и намагниченность моделируются электрическими и магнитными диполями, состоящие из пары положительных и отрицательных электрических и магнитных зарядов соответственно. На основе такого представления формулируется макроскопическая система уравнений электродинамики [256]. В этой модели характеристики поля выводятся из предположения, что на каждый заряд в поле действует сила Лоренца, на диполь – момент таких сил.

В модели Максвелла-Минковского в отличие от рассмотренных выше моделей, в которых макроскопические электромагнитные поля и уравнения электродинамики получается путем осреднения полей и уравнений на микроуровне, уравнения электродинамики для движущегося тела получаются из уравнений Максвелла для неподвижного тела, исходя из предположения Лоренц-инвариантности уравнений электродинамики [216, 232]. Выражения для характеристик поля и энергии получаются из закона сохранения для системы взаимодействия электромагнитного поля и среды, предполагая замкнутость механической и незамкнутость электрических подсистем [232].

Для электропроводных тел в работе [232] показана эквивалентность рассмотренных моделей их термомеханического поведения в нерелятивистском приближении.

Отметим также, что в литературе предложены и более сложные подходы, учитывающие не только заряды, а и спины, магнитные моменты. При этом, кроме известных электромагнитных сил, вводятся еще и обменные, спин-орбитальные, спин-спиновые силы [242].

На основе описанных моделей с использованием локально-равновесной или рациональной термодинамики предложены обобщенные термодинамические модели, описывающие упругую, вязкоупругую, пластическую деформацию тел, способных к поляризации и намагничиванию и обобщающие классические модели линейной термоупругости [49, 54, 89, 136], а также – термовязкоупругости, термовязкопластичности [55, 202]. Кроме уравнения Максвелла, эти модели учитывают различные теплофизические свойства мате-

риалов тел, а именно: электропроводимость, пьезоэффект, пирозэффект и др. Хороший обзор методов построения моделей термомеханического поведения тел с учетом электромагнитных полей содержится в работах [100, 166].

Электропроводные среды. При наличии теплового и электромагнитного полей в электропроводном теле индуцируются электрические токи с выделением джоулева тепла и появлением пондеромоторных сил. Возникающее при этом термоупругое состояние тела существенно зависит от его геометрических характеристик и приложенного электромагнитного поля. При этом система разрешающих уравнений включает в себя уравнения электродинамики, теплопроводности с учетом источников джоулева тепла и уравнениями движения с объемными пондеромоторными силами [254]. Эта система является нелинейной за счет нелинейности обобщенного закона Ома и выражений для пондеромоторных сил и джоулева тепла. Как известно, решение основной системы уравнений термоэлектромагнитоупругости для таких сред сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому при решении конкретных задач во многих работах проводилась ее линеаризация [138, 227, 235, 244, 278, 279].

В связи с необходимостью рациональных режимов термообработки особый интерес представляет проблема термообработки электропроводных тел переменными электромагнитными полями. Первые работы в этом направлении связаны с индукционным нагревом тел без учета поляризации и намагниченности [8, 91, 150, 175], в которых при решении задачи использовалась упрощенная схема несвязанной задачи термомагнитоупругости, состоящая в том, что из уравнений электродинамики определялось электромагнитное поле и соответствующее ему распределение джоулева тепла. Распределение джоулева тепла затем применялось в уравнении теплопроводности как мощность непрерывно распределенных тепловых источников. После определения температурного поля находилось квазистатическое напряженно-деформированное состояние тела. Системному изложению исследований в этом направлении и решению конкретных задач по определению термоупру-

гого состояния электропроводных тел с плоскопараллельными границами, цилиндрических тел, оболочек, пластин при действии квазистационарного или импульсного электромагнитоупругого поля посвящены работы Я. С. Подстригача, Я. И. Бурака, А. Р. Гачкевича, Л. В. Чернявской [168], А. Р. Гачкевича [27], А. Р. Гачкевича, Р. С. Мусия [28], В. И. Дресвянникова [44, 45], Я. И. Лопушанского [114], а также статьи [19, 29, 30, 125, 131].

Построение теории термоупругости электропроводных магнитомягких и магнитотвердых тел, учитывающей специфику намагничивания указанных ферромагнитных тел, при действии квазистационарных электромагнитных полей дано в работах [27, 17]. При этом тепловыделение возникает как за счет джоулева тепла, так и за счет намагничивания, взаимодействие электромагнитных и механических полей обусловлено действием пондеромоторных сил на электрические токи, в том числе и на молекулярные. На основе предложенной методики в работах [27, 17] исследовано термонапряженное состояние тел с плоскопараллельными границами в зависимости от амплитудно-частотных характеристик внешнего поля. Отметим также в этом направлении и работы [1, 2, 27, 31, 33, 162, 254].

Среды с низкой электропроводностью. В работах [18, 27] предложена методика решения задачи термоупругости поляризуемых тел с низкой электропроводностью, находящихся во внешнем квазистационарном электромагнитном поле. При этом тепловыделение в теле происходит за счет электропроводности и поляризации, взаимодействие электромагнитных и механических полей обусловлено действием пондеромоторных сил на электрические токи, в том числе поляризационные. При решении конкретных задач для определения характеристик высокочастотного и сверхвысокочастотного поля применялись приближения теории электромагнетизма типа квазистационарных и геометрической оптики [20, 27, 32, 165, 166].

Пьезоэлектрические и пьезомагнитные среды. Термодинамические модели, учитывающие различные физико-механические свойства сред, наличие механических, температурных и электромагнитных полей в телах и их взаи-

мосвязи, получили широкое развитие в механике связанных полей [13, 22, 144]. В основу таких моделей были положены такие физические эффекты, как пьезоэлектрический эффект и электрострикция (возникновение поляризации в теле при приложении механических усилий), магнитострикция (изменение размеров тела при действии внешнего магнитного поля, обратный линейной магнитострикции – пьезомагнитный эффект), пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты (возникновении поляризации и намагниченности при изменении температуры тела, обратные им – электрокалорический и магнитокалорический эффекты) и др. Учет всех эффектов одновременно приводит к нелинейным уравнениям связи и значительным математическим трудностям, поэтому некоторыми эффектами (в основном нелинейными) при построении различных теорий пренебрегалось в случае их малости и незначительного влияния. Так, в линейных задачах электроупругости и магнитоупругости пьезоактивных сред считается, что процессы, которые происходят в теле являются адиабатическими или изотермическими [13, 38, 48, 102] (т.е. не учитывается влияние температурного поля), причем в первом случае пренебрегалось влиянием магнитного поля, во второй – влиянием электрического поля. Учет температурного поля [134] в термодинамической модели (неравновесный, локально-равновесный процессы) положил начало развитию теорий термоэлектроупругости и термомагнитоупругости.

Разработке термодинамических моделей с учетом пьезоэлектрического эффекта посвящены работы И. С. Желудева [48], Дж. Ная [134], У. Кэди [102], У. Мэзона [133], R. Mindlin [243], Н. Tiersten [276, 277] и др, с учетом пьезомагнитного – работы Д. Берлинкура, Д. Керрана, Г. Жаффе [13], К. П. Белова [12], Н. Tiersten [275], W. Brown [211], К. Б. Власова [23, 24]. На основе разработанных моделей в литературе получили широкое развитие различные методы решения задач электроупругости и магнитоупругости: методы комплексных потенциалов [9, 59, 60, 95, 96, 108–110], асимптотические методы [97, 98, 111, 112], методы конечных элементов [47, 240], сингулярных интегральных уравнений [99, 100] и др.

К настоящему времени в литературе накопилось много различных исследований и конкретных результатов в области механики связанных полей. Достаточно полный обзор этих исследований содержится в работах А. Б. Кудрявцева [99], Б. А. Кудрявцева, В. З. Партон [100], Л. А. Фильштинского, Е. М. Кравец [180]. Отметим также в этом направлении и работы [128, 129, 146, 147, 178, 179, 183, 187, 205, 204].

Известны работы, посвященные исследованию и вязкоэлектромагнитоупругих сред [69–71, 73]. Так, на основе конечной линейной теории вязкоупругости и учета неоднородного обмена, фундаментальных положений механики, термодинамики необратимых процессов и электродинамики сплошных сред в работах В. Г. Карнаухова [69–71] разработаны феноменологические модели интегрального типа для вязкоупругих и вязкоупругопластичных ферромагнитных материалов. С использованием этих моделей дана постановка задач о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве пьезомагнитных тел [74] и ферромагнитного слоя [75] с учетом зависимости характеристик материала от температуры и физической нелинейности.

1.2. Исследования термоупругого, термоэлектро– и термомагнитоупругого состояний

Исследования без учета пьезоэффекта. На сегодняшний день широко развиты методы решения задач термоупругости тел без учета пьезоэффекта.

Пространственные задачи. В работе [169] на современном уровне с одинаковой полнотой рассмотрены трехмерные задачи статики, гармонических колебаний и общей динамики линейной теории упругости, термоупругости и моментной упругости. Методом многомерных сингулярных интегральных уравнений и сингулярных потенциалов исследованы общие вопросы теории и получены представления решений в рядах и квадратурах, допускающие эффективную реализацию на ЭВМ.

В статье [258] с помощью метода разделения переменных решена задача термоупругости для трансверсально-изотропных тел с отверстиями и включениями канонической формы. Изучено термонапряженное состояние возле отверстий и включений, получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжения для эллиптических и гиперболических трещин при действии различных тепловых факторов. При действии теплового потока в [145] изучено термонапряженное состояние тела с эллиптическим жестким включением. В статье [237] исследовано термоупругое состояние тела с эллиптической трещиной. В работах [148, 36, 78] решены контактные задачи термоупругости для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств при вдавливании в него жесткого нагретого штампа.

Двумерные и плоские задачи. В настоящее время наиболее полно разработаны плоские задачи теплопроводности и термоупругости изотропных и анизотропных сред. Разработке подходов к их решению посвящены монографии Г.С. Кита, М.Г. Кривцуна [83], А.Д. Коваленко [89], А.С. Космодамианского, С.А. Калоерова [94], Н.Н. Лебедева [106], И.А. Прусова [156], Г.Н. Савина [159], А.И. Уздалева [173] и др. С использованием этих методов решен ряд задач для односвязных и многосвязных сред.

Проведены многочисленные исследования термоупругого состояния изотропной пластинки с отверстием [11, 94, 170, 229] или трещиной [42, 50, 83]. При этом в качестве тепловых воздействий выступали сосредоточенные источники тепла [11, 42, 94, 170] или однородный поток тепла на бесконечности [83, 229, 236]. Много исследований проведено и для многосвязных сред. Например, известны исследования для изотропного кругового диска с отверстиями [94, 171, 234], включениями [51] или трещинами [163, 234] при действии сосредоточенных источников тепла и разности температур. Решено также множество задач термоупругости для бесконечных изотропных тел с двумя [10, 26, 94, 172, 174, 195] и конечным числом отверстий [15, 94, 104, 194]. В работе [177] решена двоякопериодические задачи теплопроводности и термоупругости для пластинки в случае задания на контурах отверстий по-

стоянной одинаковой температуры, на поверхности пластинки постоянного потока тепла. В работе [126] дано решение обратной задачи термоупругости для пластинки с периодической системой отверстий при неизвестных их контурах, определяемых из условия отсутствия концентрации напряжений.

Изотропная полуплоскость с круговым теплоизолированным или теплоактивным отверстием рассматривалась А.И. Уздалевым [173]. Даны решения задачи с отверстиями, если на границе полуплоскости температура равна нулю, а на контурах отверстий заданы одинаковые [105] или различные [94] значения температуры. В статье [82] исследовано термоупругое состояние полуплоскости с круговым тепловыделяющим включением при идеальном контакте. Для пластинки, состоящей из двух жестко скрепленных полуполос одинаковой ширины из различных изотропных материалов и находящейся в условиях равномерного нагрева, в работе [196] получено точное решение.

Решены задачи для изотропной пластинки с двумя теплоизолированными [81] и теплопроводящими [86] трещинами, для пластинки с трещинами, когда на их берегах задаются различные условия, для пластинки с конечным числом и периодическим рядом теплоизолированных трещин при действии бесконечного линейного потока тепла [140]. Изотропную пластинку с круговым отверстием и теплопроводящими трещинами на продолжении диаметра рассматривал Г.С. Кит [79]. Считалось, что на контуре отверстия задана нулевая температура или он теплоизолирован.

Термоупругое состояние биматериала с трещиной на границе раздела изотропных полуплоскостей, заполненной теплопроводной средой, исследовалось в [119], при неидеальном тепловом контакте ее берегов – в работе [117], при контакте берегов по центру трещины – в [50], для трещины с термосопротивлением – в статье [118]. В статье Н.А. Дороша, Г.С. Кита [43] получено решение задачи термоупругости для полосы с поперечной трещиной при действии источников тепла, с продольной трещиной – рассмотрена в статье [84]. Задаче для полосы с трещинами посвящена и статья Г. С. Кита, И. П. Лысого [85].

Что же касается анизотропных сред, то в работах [5, 94, 174, 269] решены задачи для сплошной конечной анизотропной пластинки, в работах [93, 158, 182] – для сплошной полуплоскости. Много исследований проведено для случая бесконечного тела и пластинки с отверстием. При этом рассматривались различные граничные условия (смешанная задача [37, 154, 155], подкрепление контура [92]) и способы задания тепловых воздействий (на контуре задана температура или плотность потока тепла [94, 120, 121], теплоизолированный контур [174, 215], действие сосредоточенного источника тепла [94], задание потока тепла [174, 207, 215]).

Задача теплопроводности и термоупругости для эллиптического кольца из прямолинейно анизотропного материала решена в монографии [94], а для кругового кольца, обладающего цилиндрической анизотропией – в работах [173, 255]. Решен ряд задач для конечной и бесконечной двухсвязной ортотропной пластинки [94].

В работе [16] дано решение задачи термоупругости для анизотропной полуплоскости с одним эллиптическим отверстием.

Ряд задач решен для анизотропных пластинок с трещинами. Так, в работе [6] дано решение задачи термоупругости для анизотропного диска с конечным числом прямолинейных трещин. В статье [233] исследовано термонапряженное состояние пластинки с двумя параллельными теплоизолированными трещинами при действии на бесконечности однородного потока тепла, перпендикулярного трещинам.

В работах С. А. Калоерова, Ю. С. Антонова [56–58] предложена методика решения задач теплопроводности и термоупругости для конечных и бесконечных многосвязных анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами. Решение построено на использовании теории функции комплексного переменного и удовлетворении граничным условиям методом наименьших квадратов. В статье [62] с использованием методов комплексных потенциалов и наименьших квадратов решена задача для анизотропной пластинки с отверстиями, включениями и трещинами.

Исследования с учетом пьезоэффекта материалов. В последнее десятилетие в литературе широко обсуждаются проблемы исследования термоэлектро- и термомагнитоупругого состояния пьезоактивных сред.

Пространственные задачи. В статье [259] с помощью метода разделения переменных решена задача электро- и термоэлектроупругости для тел с отверстиями канонической формы. Изучено термоэлектронапряженное состояние возле отверстий и включений, получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжения, индукции и напряженности (КИНИН) для эллиптических и параболических трещин и плоских включений, решена контактная задача пьезокерамического полупространства с эллиптической или параболической трещиной. В статьях [213, 257, 272, 283] решена задача термоэлектроупругости, а в статье [247] – задача термоэлектромагнитоупругости для тела с эллиптической трещиной под действием однородного потока тепла. Получены точные решения, формулы для нахождения КИНИН. Используя теорию обобщенных потенциалов в [214] дано решение задачи для пьезокерамического тела с эллиптической трещиной при действии температурной нагрузки в точке на границе трещины, найдено решение в элементарных функциях. В статье [271] исследовано термоэлектроупругое состояние тела с двумя эллиптическими трещинами под действием потока тепла, проведено сравнение с методом конечных элементов.

В [224] на основе принципа Гамильтона получены общие соотношения микрополярной теории термоупругости для пьезоэлектрических и пьезомагнитных сред, в [222] – основные соотношения термоэлектроупругости для сред с неоднородностями.

В статье [282] методом конечных элементов решена задача термоэлектроупругости для трехслойного тела, где один слой металлический, второй – пьезокерамический и между ними – градуированный слой металл-пьезокерамика. В [228] исследовано термоэлектромагнитоупругое состояние многослойной пьезоэлектро-магнитострикционной структуры, дано частное решение для двухслойного тела. Также были проведены исследования и для

слоистых пьезоактивных пластин [228, 250, 270, 284].

Двумерные и плоские задачи. С использованием формализма Stroh и функции Грина в работе [209] дано решения двумерной задачи термоэлектроупругости с эллиптическим отверстием при задании однородного потока тепла и сосредоточенного источника тепла во внутренней точке. При этом в статье утверждается, что однородный поток тепла не вызывает напряжений в сплошном пьезоэлектрическом теле, за счет чего и было получено точное решение, хотя доказательства этого факта не приводится.

Решены двумерные задачи термоэлектроупругости для тел с криволинейным теплоизолированным отверстием [261] или эллиптическим включением [264] при действии источника тепла и однородного потока тепла. С использованием функции Грина выделена логарифмическая особенность. Это решение было распространено на случай теплоизолированного отверстия и трещины, причем трещина моделировалась разрезом, проходящим через точку действия источника тепла, а коэффициент при логарифме считался неизвестной функцией, определенной на линии разреза. Получены сингулярные интегральные уравнения, приведена методика приближенного определения КИНИН. Аналогичным подходом были получены решения для эллиптического или криволинейного теплоизолированного отверстия или включения с трещиной при действии однородного потока тепла и в других работах [209, 260, 263, 268, 281]. Методом граничных элементов в статье [267] решена задача для пьезоэлектрического тела с эллиптическим включением.

Проведены исследования для тел и пластинок с трещинами. Так, в [280] с использованием формализма Stroh, конформных отображений дано решения задачи для прямолинейной пластинки с теплоизолированной трещиной, причем общий вид решения имеет голоморфную часть в виде рядов Лорана и неголоморфную – в виде сингулярной интегральной формы. При этом на границах пластинки задан поток тепла. Методом граничных элементов в статье [265] решена задача термоэлектроупругости для тела с трещиной. Исследованию термоэлектроупругого состояния полупространства с краевой трещи-

ной с использованием интегральных преобразований посвящена статья [284]. В работе [217] решена задача для термопьезоэлектрического тела с коллинеарными трещинами, в [262] – с конечным числом микро- и макротрещин. В [246] предложена методика решения задачи для пьезоэлектрического полупространства с краевой трещиной. Исследованию термоэлектроупругого состояния биматериала с краевыми трещинами с возможным контактом ее берегов посвящена статья [231]. В работе [266] на основе расширенного формализма Stroh и функций Грина рассмотрена двумерная задача термоэлектромагнитоупругости для биматериала.

Отметим, что ни в одной из приведенных здесь работ не было показано влияние однородного потока тепла на значения основных характеристик термоэлектроупругого и термомагнитоупругого состояний в сплошном пьезоэлектрическом или пьезомагнитном бесконечном теле или пластинке, хотя такие исследования необходимы для решения большинства из представленных в этой части обзора решений задач. Как известно, в задачах термоупругости [58] без учета пьезоэффекта однородный поток тепла на бесконечности не вызывает напряжений в пластинке. Для пьезоактивных сред (с учетом взаимосвязи упругого и электрического или магнитного полей) таких исследований не найдено. Авторы [209, 217, 261–264, 280] при решении задач, как правило, считали данный вопрос исследованным (однородный поток тепла на вызывает напряжений в теле или пластинке), не указывая при этом на источники в литературе и на то, как поток тепла влияет на распределение индукции, напряженности, потенциала поля.

1.3. Выводы по разделу 1

Из приведенного выше анализа следует, что

– к настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы решения задач теории упругости и термо-, электро- и магнитоупругости для

односвязных и многосвязных тел с отверстиями и трещинами без учета пьезоэлектрического эффекта;

– разработаны математические основы термоэлектро- и термомагнитоупругости, общие методы и их приложения к решению задач для тел без отверстий и трещин или с одним отверстием, трещиной или включением (односвязные области). Общие подходы к решению задач термоэлектро- и термомагнитоупругости для многосвязных тел с отверстиями и трещинами не разработаны.

В связи с этим необходимо было

1. Разработать методы решения двумерной и плоской задач термоэлектро-, термомагнитоупругости для тел с произвольно расположенными относительно друг друга отверстиями и трещинами;
2. Исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов;
3. С применением этих методов получить теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией и численной реализацией на ЭВМ;
4. Провести численные исследования полученных решений с целью выявления новых физико-механических закономерностей термоэлектроупругого и термомагнитоупругого состояний тел в зависимости от геометрических характеристик тел, физико-механических свойств их материалов при действии температурных полей.

РАЗДЕЛ 2

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ТЕРМОЭЛЕКТРО- И ТЕРМОМАГНИТОУПРУГОСТИ

2.1. Краевые задачи теплопроводности, термоэлектро- и термомангнитоупругости

Рассмотрим многосвязное пьезоэлектрическое (или пьезомагнитное) цилиндрическое тело, обладающее прямолинейной анизотропией и ослабленное продольными цилиндрическими полостями с образующими, параллельными оси цилиндра. Будем считать, что

1. Деформации в теле малы и подчиняются уравнениям термоэлектроупругого (термомангнитоупругого) состояния;
2. Теплофизические свойства материала тела не зависят от температуры;
3. Объемные силы и свободные заряды (токи проводимости) в теле отсутствуют;
4. На тело действует неравномерно распределенное поле температур, а также, быть может, механические усилия и электрические (магнитные) поля так, что оно находится в двумерном термоэлектроупругом (термомангнитоупругом) состоянии, не изменяющемся вдоль образующих полостей, причем внешние температурные, механические, электрические (магнитные) воздействия распределены по цилиндрическим поверхностям тела или сосредоточены вдоль параллельных оси цилиндра линий, проходящих через внутренние точки.

Выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$, направив ось z по направлению образующих полостей. В поперечном сечении тела плоскостью Oxy будем иметь многосвязную область S , ограниченную внешним конту-

ром L_0 и контурами отверстий L_l ($l=1, \mathcal{L}$) (рис. 2.1). В качестве частного случая, когда внешняя цилиндрическая поверхность целиком уходит в бесконечность и, следовательно, контур L_0 отсутствует, будем рассматривать бесконечное многосвязное тело с полостями.

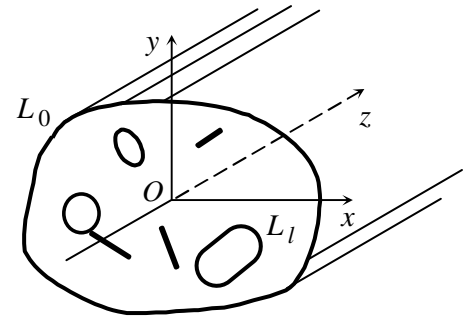


Рис. 2.1

Краевая задача теплопроводности. Определение температурного поля в рассматриваемом теле сводится к интегрированию уравнения стационарной теплопроводности [94]

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

где k_{jp} – коэффициенты теплопроводности, при граничных условиях. Эти условия имеют вид

$$T|_L = \varphi(x, y), \quad (2.2)$$

если на границе L задана температура;

$$q_n|_L = g(x, y), \quad (2.3)$$

если на границе задана плотность потока тепла

$$q_n = -(q_x \cos nx + q_y \cos ny), \quad (2.4)$$

причем

$$q_x = -\left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}\right), \quad q_y = -\left(k_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \quad (2.5)$$

плотности потоков тепла через основные площадки;

$$q_n \big|_L = h[T_e - T] \big|_L,$$

для конвективного теплообмена с окружающей средой, где h – коэффициент теплообмена с окружающей средой; T_e – температура окружающей среды;

$$T_1 \big|_L = T_2 \big|_L, \quad q_n^1 \big|_L = -q_n^2 \big|_L$$

для случая двух идеально контактирующих тел. Здесь T_1 , T_2 и q_n^1 , q_n^2 – температура и плотность потоков тепла на границе контакта тел.

Заметим, что по вычисленной температуре можно вычислить

$$q_z = - \left(k_{13} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{23} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \quad (2.6)$$

плотность потока тепла через площадку, перпендикулярную к оси Oz .

Краевые задачи термоэлектро- и термомагнитоупругости. Определение термоэлектроупругого состояния (ТЭУС) рассматриваемого тела сводится к решению системы уравнений термоэлектроупругости, состоящей из уравнений равновесия [132] и вынужденной электростатики [164]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

соотношений термоэлектроупругого состояния [134]

$$\epsilon_x = s_{11}^{D,T} \sigma_x + s_{12}^{D,T} \sigma_y + s_{13}^{D,T} \sigma_z + s_{14}^{D,T} \tau_{yz} + s_{15}^{D,T} \tau_{xz} + s_{16}^{D,T} \tau_{xy} +$$

$$\begin{aligned}
& +g_{11}^T D_x + g_{21}^T D_y + g_{31}^T D_z + \alpha_1^D T, \\
\varepsilon_y = & s_{12}^{D,T} \sigma_x + s_{22}^{D,T} \sigma_y + s_{23}^{D,T} \sigma_z + s_{24}^{D,T} \tau_{yz} + s_{25}^{D,T} \tau_{xz} + s_{26}^{D,T} \tau_{xy} + \\
& +g_{12}^T D_x + g_{22}^T D_y + g_{32}^T D_z + \alpha_2^D T, \\
\varepsilon_z = & s_{13}^{D,T} \sigma_x + s_{23}^{D,T} \sigma_y + s_{33}^{D,T} \sigma_z + s_{34}^{D,T} \tau_{yz} + s_{35}^{D,T} \tau_{xz} + s_{36}^{D,T} \tau_{xy} + \\
& +g_{13}^T D_x + g_{23}^T D_y + g_{33}^T D_z + \alpha_3^D T = 0, \\
\gamma_{yz} = & s_{14}^{D,T} \sigma_x + s_{24}^{D,T} \sigma_y + s_{34}^{D,T} \sigma_z + s_{44}^{D,T} \tau_{yz} + s_{45}^{D,T} \tau_{xz} + s_{46}^{D,T} \tau_{xy} + \\
& +g_{14}^T D_x + g_{24}^T D_y + g_{34}^T D_z + \alpha_4^D T, \\
\gamma_{xz} = & s_{15}^{D,T} \sigma_x + s_{25}^{D,T} \sigma_y + s_{35}^{D,T} \sigma_z + s_{45}^{D,T} \tau_{yz} + s_{55}^{D,T} \tau_{xz} + s_{56}^{D,T} \tau_{xy} + \\
& +g_{15}^T D_x + g_{25}^T D_y + g_{35}^T D_z + \alpha_5^D T, \\
\gamma_{xy} = & s_{16}^{D,T} \sigma_x + s_{26}^{D,T} \sigma_y + s_{36}^{D,T} \sigma_z + s_{46}^{D,T} \tau_{yz} + s_{56}^{D,T} \tau_{xz} + s_{66}^{D,T} \tau_{xy} + \\
& +g_{16}^T D_x + g_{26}^T D_y + g_{36}^T D_z + \alpha_6^D T, \\
E_x = & -g_{11}^T \sigma_x - g_{12}^T \sigma_y - g_{13}^T \sigma_z - g_{14}^T \tau_{yz} - g_{15}^T \tau_{xz} - g_{16}^T \tau_{xy} + \\
& +\beta_{11}^{\sigma,T} D_x + \beta_{12}^{\sigma,T} D_y + \beta_{13}^{\sigma,T} D_z - t_1^\sigma T, \\
E_y = & -g_{21}^T \sigma_x - g_{22}^T \sigma_y - g_{23}^T \sigma_z - g_{24}^T \tau_{yz} - g_{25}^T \tau_{xz} - g_{26}^T \tau_{xy} + \\
& +\beta_{12}^{\sigma,T} D_x + \beta_{22}^{\sigma,T} D_y + \beta_{23}^{\sigma,T} D_z - t_2^\sigma T, \\
E_z = & -g_{31}^T \sigma_x - g_{32}^T \sigma_y - g_{33}^T \sigma_z - g_{34}^T \tau_{yz} - g_{35}^T \tau_{xz} - g_{36}^T \tau_{xy} + \\
& +\beta_{13}^{\sigma,T} D_x + \beta_{23}^{\sigma,T} D_y + \beta_{33}^{\sigma,T} D_z - t_3^\sigma T = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

и соотношений [132]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x = & \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\gamma_{xy} = & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь D_x, D_y, D_z и E_x, E_y, E_z – компоненты векторов индукции и напряженности поля; ϕ – потенциал электрического поля; $s_{ij}^{D,T}$ – коэффициенты деформации материала тела, измеренные при постоянной электрической индукции и температуре; $\beta_{nm}^{\sigma,T}$ – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; g_{ni}^T – пьезоэлектрические модули, измеренные при постоянной температуре; α_i^D – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электрического поля; t_n^σ – пирозлектрические модули, измеренные при постоянных напряжениях. Под T в формулах (2.9) понимается разность $T_m - T_H$ температур в текущем и начальном состоянии, при котором напряжения и деформации, индукция и напряженность поля равны нулю.

Кроме того, должны выполняться соотношения совместности деформаций Сен-Венана [132]

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Указанную систему уравнений термоэлектроупругости нужно решать при заданных на границе механических и электрических условиях.

Механические граничные условия имеют вид [132]

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny &= X_n, \quad \tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny = Y_n, \\ \tau_{xz} \cos nz + \tau_{yz} \cos ny &= Z_n, \end{aligned} \quad (2.12)$$

если на границе заданы проекции усилий X_n, Y_n, Z_n , или

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad w = w^* \quad (2.13)$$

когда на границе заданы проекции перемещений u^*, v^*, w^* .

Электрические граничные условия записываются в виде [164]

$$D_x \cos nx + D_y \cos ny = D_n \quad (2.14)$$

в случае задания на границе электрической индукции D_n или

$$\Phi = \Phi^*, \quad (2.15)$$

если на границе задан потенциал Φ^* электрического поля.

По аналогии с термоэлектростатикой для определения термомагнитоупругого состояния (ТМУС) нужно решать систему, состоящую из уравнений равновесия (2.7), уравнений магнитостатики [164], соотношений термомагнитоупругого состояния [13]

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & s_{11}^{B,T} \sigma_x + s_{12}^{B,T} \sigma_y + s_{13}^{B,T} \sigma_z + s_{14}^{B,T} \tau_{yz} + s_{15}^{B,T} \tau_{xz} + s_{16}^{B,T} \tau_{xy} + \\ & + \gamma_{11}^T B_x + \gamma_{21}^T B_y + \gamma_{31}^T B_z + \alpha_1^B T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_y = & s_{12}^{B,T} \sigma_x + s_{22}^{B,T} \sigma_y + s_{23}^{B,T} \sigma_z + s_{24}^{B,T} \tau_{yz} + s_{25}^{B,T} \tau_{xz} + s_{26}^{B,T} \tau_{xy} + \\ & + \gamma_{12}^T B_x + \gamma_{22}^T B_y + \gamma_{32}^T B_z + \alpha_2^B T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z = & s_{13}^{B,T} \sigma_x + s_{23}^{B,T} \sigma_y + s_{33}^{B,T} \sigma_z + s_{34}^{B,T} \tau_{yz} + s_{35}^{B,T} \tau_{xz} + s_{36}^{B,T} \tau_{xy} + \\ & + \gamma_{13}^T B_x + \gamma_{23}^T B_y + \gamma_{33}^T B_z + \alpha_3^B T = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} = & s_{14}^{B,T} \sigma_x + s_{24}^{B,T} \sigma_y + s_{34}^{B,T} \sigma_z + s_{44}^{B,T} \tau_{yz} + s_{45}^{B,T} \tau_{xz} + s_{46}^{B,T} \tau_{xy} + \\ & + \gamma_{14}^T B_x + \gamma_{24}^T B_y + \gamma_{34}^T B_z + \alpha_4^B T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = & s_{15}^{B,T} \sigma_x + s_{25}^{B,T} \sigma_y + s_{35}^{B,T} \sigma_z + s_{45}^{B,T} \tau_{yz} + s_{55}^{B,T} \tau_{xz} + s_{56}^{B,T} \tau_{xy} + \\ & + \gamma_{15}^T B_x + \gamma_{25}^T B_y + \gamma_{35}^T B_z + \alpha_5^B T, \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = s_{16}^{B,T} \sigma_x + s_{26}^{B,T} \sigma_y + s_{36}^{B,T} \sigma_z + s_{46}^{B,T} \tau_{yz} + s_{56}^{B,T} \tau_{xz} + s_{66}^{B,T} \tau_{xy} +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_{16}^T B_x + \gamma_{26}^T B_y + \gamma_{36}^T B_z + \alpha_6^B T, \\
H_x = & -g_{11}^T \sigma_x - \gamma_{12}^T \sigma_y - \gamma_{13}^T \sigma_z - \gamma_{14}^T \tau_{yz} - \gamma_{15}^T \tau_{xz} - \gamma_{16}^T \tau_{xy} + \\
& +\chi_{11}^{\sigma,T} B_x + \chi_{12}^{\sigma,T} B_y + \chi_{13}^{\sigma,T} B_z - m_1^\sigma T, \\
H_y = & -\gamma_{21}^T \sigma_x - \gamma_{22}^T \sigma_y - \gamma_{23}^T \sigma_z - \gamma_{24}^T \tau_{yz} - \gamma_{25}^T \tau_{xz} - \gamma_{26}^T \tau_{xy} + \\
& +\chi_{12}^{\sigma,T} B_x + \chi_{22}^{\sigma,T} B_y + \chi_{23}^{\sigma,T} B_z - m_2^\sigma T, \\
H_z = & -\gamma_{31}^T \sigma_x - \gamma_{32}^T \sigma_y - \gamma_{33}^T \sigma_z - \gamma_{34}^T \tau_{yz} - \gamma_{35}^T \tau_{xz} - \gamma_{36}^T \tau_{xy} + \\
& +\chi_{13}^{\sigma,T} B_x + \chi_{23}^{\sigma,T} B_y + \chi_{33}^{\sigma,T} B_z - m_3^\sigma T = 0; \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

где B_x , B_y , B_z и H_x , H_y , H_z – компоненты векторов индукции и напряженности поля; ψ – потенциал магнитного поля; $s_{ij}^{B,T}$ – коэффициенты деформации материала тела, измеренные при постоянной магнитной индукции и температуре; $\chi_{nm}^{\sigma,T}$ – коэффициенты магнитной восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; γ_{ni}^T – пьезомагнитные модули, измеренные при постоянной температуре; α_i^B – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции магнитного поля; m_n^σ – пиромангнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях.

Систему уравнений термомагнитоупругости нужно интегрировать при заданных на границе условиях (2.12) или (2.13), к которым нужно добавить магнитные граничные условия [164]

$$B_x \cos nx + B_y \cos ny = B_n \tag{2.19}$$

при задании на границе магнитной индукции B_n или

$$\Psi = \Psi^*, \quad (2.20)$$

если на границе задан потенциал Ψ^* магнитного поля.

Как видно из сравнения соотношений (2.7)–(2.15) и (2.16)–(2.20), уравнения и краевые условия задачи термомагнитоупругости получаются из соответствующих уравнений и краевых условий термоэлектроупругости, если в последних заменить D , E , ϕ , $\beta_{nm}^{\sigma,T}$, g_{ni}^T , t_n^σ соответственно на B , H , ψ , $\chi_{nm}^{\sigma,T}$, γ_{ni}^T , m_n^σ . Поэтому в дальнейшем будем приводить решения задач лишь термоэлектроупругости, имея ввиду, что решения соответствующих задач термомагнитоупругости имеют такой же вид с учетом указанной замены.

Из 6-го и 9-го уравнений системы (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_z = & - \left[(s_{13}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{31}^T g_{33}^T) \sigma_x + (s_{23}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{32}^T g_{33}^T) \sigma_y + \right. \\ & + (s_{34}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{34}^T g_{33}^T) \tau_{yz} + (s_{35}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{35}^T g_{33}^T) \tau_{xz} + \\ & + (s_{36}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{36}^T g_{33}^T) \tau_{xy} + (g_{13}^T \beta_{33}^{\sigma,T} - \beta_{13}^{\sigma,T} g_{33}^T) D_x + \\ & + (g_{23}^T \beta_{33}^{\sigma,T} - \beta_{23}^{\sigma,T} g_{33}^T) D_y + (\alpha_3^D \beta_{33}^{\sigma,T} + t_3^\sigma g_{33}^T) T \Big] / \Delta, \\ D_z = & - \left[(s_{13}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{31}^T) \sigma_x + (s_{23}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{32}^T) \sigma_y + (s_{34}^{D,T} g_{33}^T - \right. \\ & - s_{33}^{D,T} g_{34}^T) \tau_{yz} + (s_{35}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{35}^T) \tau_{xz} + (s_{36}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{36}^T) \tau_{xy} + \\ & + (g_{13}^T g_{33}^T + s_{33}^{D,T} \beta_{13}^{\sigma,T}) D_x + (g_{23}^T g_{33}^T + s_{33}^{D,T} \beta_{23}^{\sigma,T}) D_y + \\ & + (\alpha_3^D g_{33}^T - s_{33}^{D,T} t_3^\sigma) T \Big] / \Delta, \quad \Delta = s_{33}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + (g_{33}^T)^2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в оставшиеся уравнения (2.9), будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{14} \tau_{yz} + a_{15} \tau_{xz} + a_{16} \tau_{xy} + b_{11} D_x + b_{21} D_y + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_y = & a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{24} \tau_{yz} + a_{25} \tau_{xz} + a_{25} \tau_{xy} + b_{12} D_x + b_{22} D_y + \alpha_2 T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{yz} &= a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} + b_{14}D_x + b_{24}D_y + \alpha_4 T, \\
\gamma_{xz} &= a_{14}\sigma_x + a_{15}\sigma_y + a_{45}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} + b_{15}D_x + b_{25}D_y + \alpha_5 T, \\
\gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} + b_{16}D_x + b_{26}D_y + \alpha_6 T, \\
E_x &= -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{14}\tau_{yz} - b_{15}\tau_{xz} - b_{16}\tau_{xy} + c_{11}D_x + c_{12}D_y - t_1 T, \\
E_y &= -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{24}\tau_{yz} - b_{25}\tau_{xz} - b_{26}\tau_{xy} + c_{12}D_x + c_{22}D_y - t_2 T. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= s_{ij}^{D,T} - \left[s_{i3}^{D,T} \left(s_{j3}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{3j}^T g_{33}^T \right) - g_{3i}^T \left(s_{33}^{D,T} g_{3j}^T - s_{j3}^{D,T} g_{33}^T \right) \right] / \Delta, \\
b_{mj} &= g_{mj}^T + \left[s_{j3}^{D,T} \left(\beta_{m3}^{\sigma,T} g_{33}^T - \beta_{33}^{\sigma,T} g_{m3}^T \right) - g_{3j}^T \left(s_{33}^{D,T} \beta_{m3}^{\sigma,T} + g_{m3}^T g_{33}^T \right) \right] / \Delta, \\
c_{nm} &= \beta_{nm}^{\sigma,T} - \left[g_{n3}^T \left(\beta_{m3}^{\sigma,T} g_{33}^T - g_{m3}^T \beta_{33}^{\sigma,T} \right) + \beta_{n3}^{\sigma,T} \left(s_{33}^{D,T} \beta_{m3}^{\sigma,T} + g_{m3}^T g_{33}^T \right) \right] / \Delta, \\
\alpha_i &= \alpha_i^D - \left[s_{i3}^{D,T} \left(\alpha_3^D \beta_{33}^{\sigma,T} + t_3^\sigma g_{33}^T \right) + g_{3i}^T \left(\alpha_3^D g_{33}^T - s_{33}^{D,T} t_3^\sigma \right) \right] / \Delta, \\
t_n &= t_n^\sigma - \left[g_{n3}^T \left(\alpha_3^D \beta_{33}^{\sigma,T} + t_3^\sigma g_{33}^T \right) - \beta_{n3}^\sigma \left(\alpha_3^D g_{33}^T - s_{33}^{D,T} t_3^\sigma \right) \right] / \Delta - \quad (2.23)
\end{aligned}$$

приведенные постоянные двумерной задачи термоэлектроупругости.

Таким образом, задача о двумерном ТЭУС (ТМУС) тела сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнений равновесия (2.7), электростатики (2.8), состояния (2.22) при заданных граничных условиях типа (2.12) – (2.15). При этом деформации должны удовлетворять уравнениям совместности Сен-Венана (2.11).

2.2. Плотность внутренней энергии

После решения уравнения теплопроводности и системы уравнений термоэлектроупругости станут известными основные характеристики ТЭУС (температура, напряжения, деформации, напряженность и индукция) и тогда

можно найти и плотность внутренней энергии U .

Из первого и второго законов термодинамики следует, что [134]

$$dU = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_{yx} + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \\ + E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z + (T + T_H) dS, \quad (2.24)$$

где

$$S = \alpha_1^D \sigma_x + \alpha_2^D \sigma_y + \alpha_3^D \sigma_z + \alpha_4^D \tau_{yz} + \alpha_5^D \tau_{xz} + \alpha_6^D \tau_{xy} + \\ + t_1^\sigma D_x + t_2^\sigma D_y + t_3^\sigma D_z + \frac{c^{\sigma,D}}{T_H} T - \quad (2.25)$$

энтропия системы; $c^{\sigma,D} = c_V^{\sigma,D} / \rho$ – удельная теплоемкость тела; $c_V^{\sigma,D}$ – теплоемкость тела; ρ – плотность материала. Если в последних равенствах независимыми переменными считать σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} , τ_{xz} , τ_{xy} , D_x , D_y , D_z , и T , то зависимыми будут ε_x , ε_y , ε_z , γ_{yz} , γ_{xz} , γ_{xy} , E_x , E_y , E_z , S и т.д.

Следуя [134], для нахождения плотности внутренней энергии U на единицу объема рассмотрим термодинамический потенциал Гиббса

$$\Phi = U - (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + (T + T_H) S). \quad (2.26)$$

Дифференцируя (2.26) и учитывая (2.24), получаем

$$d\Phi = -\varepsilon_x d\sigma_x - \varepsilon_y d\sigma_y - \varepsilon_z d\sigma_z - \gamma_{yz} d\tau_{yz} - \gamma_{xz} d\tau_{xz} - \\ - \gamma_{xy} d\tau_{xy} + E_x dD_x + E_y dD_y + E_z dD_z - S dT. \quad (2.27)$$

В правой части (2.27) все величины зависят от σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} , τ_{xz} , τ_{xy} , D_x , D_y , D_z , T . Следовательно, и Φ зависит только от этих переменных, и ее полный дифференциал примет вид

$$\begin{aligned}
d\Phi = & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \right)_{D,T} d\sigma_x + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \right)_{D,T} d\sigma_y + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} \right)_{D,T} d\sigma_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} \right)_{D,T} d\tau_{yz} + \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} \right)_{D,T} d\tau_{xz} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} \right)_{D,T} d\tau_{xy} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_x} \right)_{\sigma,T} dD_x + \\
& + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_y} \right)_{\sigma,T} dD_y + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_z} \right)_{\sigma,T} dD_z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\sigma,D} dT. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Сравнивая выражения (2.28) и (2.27), получаем

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \right)_{D,T} &= -\varepsilon_x, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_y} \right)_{D,T} = -\varepsilon_y, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_z} \right)_{D,T} = -\varepsilon_z, \\
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{yz}} \right)_{D,T} &= -\gamma_{yz}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xz}} \right)_{D,T} = -\gamma_{xz}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} \right)_{D,T} = -\gamma_{xy}, \\
\left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_x} \right)_{\sigma,T} &= E_x, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_y} \right)_{\sigma,T} = E_y, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial D_z} \right)_{\sigma,T} = E_z, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\sigma,D} = -S. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Интегрируя (2.28), для функции Φ будем иметь выражение

$$\begin{aligned}
\Phi = & - \left(\frac{1}{2} s_{11}^{D,T} \sigma_x^2 + s_{12}^{D,T} \sigma_x \sigma_y + s_{13}^{D,T} \sigma_x \sigma_z + s_{14}^{D,T} \sigma_x \tau_{yz} + s_{15}^{D,T} \sigma_x \tau_{xz} + s_{16}^{D,T} \sigma_x \tau_{xy} + \right. \\
& + \frac{1}{2} s_{22}^{D,T} \sigma_y^2 + s_{23}^{D,T} \sigma_y \sigma_z + s_{24}^{D,T} \sigma_y \tau_{yz} + s_{25}^{D,T} \sigma_y \tau_{xz} + s_{26}^{D,T} \sigma_y \tau_{xy} + \\
& + \frac{1}{2} s_{33}^{D,T} \sigma_z^2 + s_{34}^{D,T} \sigma_z \tau_{yz} + s_{35}^{D,T} \sigma_z \tau_{xz} + s_{36}^{D,T} \sigma_z \tau_{xy} + \\
& + \frac{1}{2} s_{44}^{D,T} \tau_{yz}^2 + s_{45}^{D,T} \tau_{yz} \tau_{xz} + s_{46}^{D,T} \tau_{yz} \tau_{xy} + \\
& + \frac{1}{2} s_{55}^{D,T} \tau_{xz}^2 + s_{56}^{D,T} \tau_{xz} \tau_{xy} + \frac{1}{2} s_{66}^{D,T} \tau_{xy}^2 + \\
& \left. + (g_{11}^T \sigma_x + g_{12}^T \sigma_y + g_{13}^T \sigma_z + g_{14}^T \tau_{yz} + g_{15}^T \tau_{xz} + g_{16}^T \tau_{xy}) D_x + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(g_{21}^T \sigma_x + g_{22}^T \sigma_y + g_{23}^T \sigma_z + g_{24}^T \tau_{yz} + g_{25}^T \tau_{xz} + g_{26}^T \tau_{xy} \right) D_y + \\
& + \left(g_{31}^T \sigma_x + g_{32}^T \sigma_y + g_{33}^T \sigma_z + g_{34}^T \tau_{yz} + g_{35}^T \tau_{xz} + g_{36}^T \tau_{xy} \right) D_z - \\
& - \frac{1}{2} \beta_{11}^{\sigma,T} D_x^2 - \beta_{12}^{\sigma,T} D_x D_y - \beta_{13}^{\sigma,T} D_x D_z - \\
& - \frac{1}{2} \beta_{22}^{\sigma,T} D_y^2 - \beta_{23}^{\sigma,T} D_y D_z - \frac{1}{2} \beta_{33}^{\sigma,T} D_z^2 + \\
& + \left(\alpha_1^D \sigma_x + \alpha_2^D \sigma_y + \alpha_3^D \sigma_z + \alpha_4^D \tau_{yz} + \alpha_5^D \tau_{xz} + \alpha_6^D \tau_{xy} + \right. \\
& \left. + t_1^\sigma D_x + t_2^\sigma D_y + t_3^\sigma D_z \right) T + \frac{1}{2} \frac{c^{\sigma,D}}{T_H} T^2 \Big). \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Учитывая равенства (2.9) и (2.25), выражение (2.30) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\Phi = \frac{1}{2} \Big[& \left(D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z \right) - \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \right. \\
& \left. + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) - TS \Big]. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Тогда из (2.26) для плотности внутренней энергии получаем форму:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} \Big(& \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \\
& + D_x E_x + D_y E_y + D_z E_z + (T + 2T_H) S \Big). \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.25) в (2.32), найдем выражение плотности внутренней энергии через напряжения, индукцию и температуру

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} s_{11}^{D,T} \sigma_x^2 + s_{12}^{D,T} \sigma_x \sigma_y + s_{13}^{D,T} \sigma_x \sigma_z + s_{14}^{D,T} \sigma_x \tau_{yz} + s_{15}^{D,T} \sigma_x \tau_{xz} + s_{16}^{D,T} \sigma_x \tau_{xy} + \\
+ \frac{1}{2} s_{22}^{D,T} \sigma_y^2 + s_{23}^{D,T} \sigma_y \sigma_z + s_{24}^{D,T} \sigma_y \tau_{yz} + s_{25}^{D,T} \sigma_y \tau_{xz} + s_{26}^{D,T} \sigma_y \tau_{xy} + \\
+ \frac{1}{2} s_{33}^{D,T} \sigma_z^2 + s_{34}^{D,T} \sigma_z \tau_{yz} + s_{35}^{D,T} \sigma_z \tau_{xz} + s_{36}^{D,T} \sigma_z \tau_{xy} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}s_{44}^{D,T}\tau_{yz}^2+s_{45}^{D,T}\tau_{yz}\tau_{xz}+s_{46}^{D,T}\tau_{yz}\tau_{xy}+ \\
& +\frac{1}{2}s_{55}^{D,T}\tau_{xz}^2+s_{56}^{D,T}\tau_{xz}\tau_{xy}+\frac{1}{2}s_{66}^{D,T}\tau_{xy}^2- \\
& -\left(g_{31}^T\sigma_x+g_{32}^T\sigma_y+g_{33}^T\sigma_z+g_{34}^T\tau_{yz}+g_{35}^T\tau_{xz}+g_{36}^T\tau_{xy}\right)D_z+ \\
& +\frac{1}{2}\beta_{11}^{\sigma,T}D_x^2+\beta_{12}^{\sigma,T}D_xD_y+\beta_{13}^{\sigma,T}D_xD_z+ \\
& +\frac{1}{2}\beta_{22}^{\sigma,T}D_y^2+\beta_{23}^{\sigma,T}D_yD_z+\frac{1}{2}\beta_{33}^{\sigma,T}D_z^2+ \\
& +\left(\alpha_1^D\sigma_x+\alpha_2^D\sigma_y+\alpha_3^D\sigma_z+\alpha_4^D\tau_{yz}+\alpha_5^D\tau_{xz}+\alpha_6^D\tau_{xy}+ \right. \\
& \left. +t_1^\sigma D_x+t_2^\sigma D_y+t_3^\sigma D_z\right)(T+2T_H)+\frac{1}{2}\frac{c^{\sigma,D}}{T_H}T(T+2T_H). \quad (2.33)
\end{aligned}$$

В дальнейшем при вычислении плотности внутренней энергии обычно используется билинейная форма (2.32).

2.3. Основные соотношения для комплексного потенциала теплопроводности

Если при решении уравнения (2.1) использовать теорию функции комплексного переменного, то его решением будет функция $F_5(z_5)$, через которую температура и плотности потока тепла выражаются так [94]:

$$T(x, y)=T_H+2\operatorname{Re}F_5(z_5), \quad (2.34)$$

$$q_n=-2\operatorname{Re}\left[i\varpi\delta_5F_5'(z_5)\right]. \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
q_x&=2\operatorname{Re}\left[i\mu_5\varpi F_5'(z_5)\right], \quad q_y=-2\operatorname{Re}\left[i\varpi F_5'(z_5)\right], \\
q_z&=-2\operatorname{Re}\left[(k_{13}+\mu_5k_{23})\delta_5F_5'(z_5)\right]. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Здесь

$$z_5 = x + \mu_5 y; \quad (2.37)$$

$$\mu_5 = (-k_{12} + i\alpha)/k_{22}, \quad \alpha = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$$\delta_5 = \mp dz_5/ds = \mp(dx/ds + \mu_5 dy/ds).$$

При этом функция $F_5(z_5)$ на границе области должна удовлетворять определенным условиям [94]. Так, если на границе задана температура $T(t)$, то

$$2\operatorname{Re} F_5(z_5) = T(t). \quad (2.38)$$

Если же на границе задана плотность потока тепла q_n , то

$$2\operatorname{Re}[i\alpha F_5(t_5)] = \mp \int_0^s q_n(s) ds + c \quad (2.39)$$

или в дифференциальной форме

$$2\operatorname{Re}[i\alpha \delta_5 F_5'(t_5)] = \mp q_n(s), \quad \delta_5 = \frac{dz_5}{ds}. \quad (2.40)$$

Здесь и далее верхние знаки относятся к внешнему контуру области, нижние – к внутренним.

Комплексный потенциал теплопроводности $F_5(z_5)$ определен в области S_5 , получаемой из заданной области S аффинными преобразованиями (2.37). Область S_5 ограничена контурами L_{5l} ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$), соответствующими контурам L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) области S . При этом функция $F_5(z_5)$ имеет вид [94]

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \ln(z_5 - z_{5l}) + \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 \ln(z_5 - z_{5j}^0) + F_{50}(z_5), \quad (2.41)$$

где c_0 – вещественная константа, равная нулю для конечной области и определяемая из условий на контурах отверстий для бесконечной области;

$$D_{5l} = -\frac{q_l}{4\pi\alpha}, \quad \delta_{5j}^0 = -\frac{q_j^0}{4\pi\alpha}; \quad (2.42)$$

q_l – суммарный поток тепла через контур L_l в область S ; z_{5l} – точка, соответствующая при аффинном преобразовании (2.37) произвольной точке внутри контура L_l ; q_j^0 – мощность сосредоточенного источника тепла в точке $z_j^0(x_j^0, y_j^0)$ ($j=1, J$); $F_{50}(z_5)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_5 . При этом, если область S бесконечна, то из условий ограниченности температуры на бесконечности следует, что $T_\infty = 2c_0$ и

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} + \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 = 0. \quad (2.43)$$

Условию (2.43) нужно удовлетворять при решении конкретных задач.

2.4. Комплексные потенциалы термоэлектروупругости (термомагнитоупругости)

Введение комплексных потенциалов. Введем функции напряжений $F(x, y)$, $\Psi(x, y)$ [107] и индукции $X(x, y)$ [59] так, чтобы уравнения равновесия (2.7), первое уравнение электростатики (2.8) удовлетворялись тождественно, положив

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$D_x = \frac{\partial X}{\partial y}; \quad D_y = -\frac{\partial X}{\partial x}. \quad (2.44)$$

Подставляя (2.44) в (2.22), а затем полученные выражения в (2.11) и последнее уравнение (2.8), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{4a}F + L_{3a}\Psi + L_{3b}X &= L_{2\alpha}T, \quad L_{3a}F + L_{2a}\Psi + L_{2b}X = L_{\alpha}T, \\ L_{3b}F + L_{2b}\Psi + L_{2c}X &= L_tT. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{4a} &= a_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_{3a} &= -a_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (a_{25} + a_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (a_{14} + a_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + a_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{3b} &= -b_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (b_{12} + b_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (b_{21} + b_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + b_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2a} &= a_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2b} &= b_{24} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (b_{14} + b_{25}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{15} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2c} &= -c_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{\alpha} = -\alpha_5 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{2\alpha} &= -\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_t = -t_2 \frac{\partial}{\partial x} + t_1 \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Таким образом, задача определения ТЭУС тела сводится к нахождению функций $F(x, y)$, $\Psi(x, y)$ и $X(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям (2.45) и соответствующим граничным условиям. Так, в случае задания на границе усилий и индукции из (2.12), (2.14), (2.44) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \mp \int Y_n ds + c_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \pm \int X_n ds + c_2, \quad \Psi = \pm \int Z_n ds + c_3, \\ X &= \pm \int D_n ds + c_4.\end{aligned}\tag{2.47}$$

При выводе последних формул учтено, что $\cos nx = \pm dy/ds$, $\cos ny = \mp dx/ds$.

Решение системы (2.45) можно представить в следующем виде

$$F = F_0 + F^*, \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi^*, \quad X = X_0 + X^*,\tag{2.48}$$

где F^* , Ψ^* , X^* – частное решение системы (2.45); F_0 , Ψ_0 , X_0 – общее решение однородной системы (2.45). Последнее имеет вид [59]

$$\begin{aligned}F(x, y) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 F_k(z_k), \quad \Psi(x, y) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_k F_k'(z_k), \\ X(x, y) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \nu_k F_k'(z_k),\end{aligned}\tag{2.49}$$

где

$$z_k = x + \mu_k y;\tag{2.50}$$

μ_k ($k = \overline{1, 4}$) – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned}l_8(\mu) &= l_{4a}(\mu)l_{2a}(\mu)l_{2c}(\mu) + 2l_{3a}(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2b}(\mu) - l_{3b}^2(\mu)l_{2a}(\mu) - \\ &\quad - l_{2b}^2(\mu)l_{4a}(\mu) - l_{3a}^2(\mu)l_{2c}(\mu) = 0,\end{aligned}\tag{2.51}$$

$$l_{4a}(\mu) = a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22},$$

$$l_{3a}(\mu) = a_{15}\mu^3 - (a_{14} + a_{56})\mu^2 + (a_{25} + a_{46})\mu - a_{24},$$

$$\begin{aligned}
l_{3b}(\mu) &= b_{11}\mu^3 - (b_{21} + b_{16})\mu^2 + (b_{12} + b_{26})\mu - b_{22}, \\
l_{2a}(\mu) &= a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44}, \quad l_{2b}(\mu) = b_{15}\mu^2 - (b_{14} + b_{25})\mu + b_{24}, \\
l_{2c}(\mu) &= -c_{11}\mu^2 + 2c_{12}\mu - c_{22};
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \frac{l_{3b}(\mu_j)l_{2b}(\mu_j) - l_{3a}(\mu_j)l_{2c}(\mu_j)}{l_{2a}(\mu_j)l_{2c}(\mu_j) - l_{2b}^2(\mu_j)} \quad (j = \overline{1, 3}), \\
\lambda_4 &= \frac{l_{3b}^2(\mu_4) - l_{4a}(\mu_4)l_{2c}(\mu_4)}{l_{3a}(\mu_4)l_{2c}(\mu_4) - l_{3b}(\mu_4)l_{2b}(\mu_4)};
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$v_k = \frac{l_{3a}(\mu_k)l_{2b}(\mu_k) - l_{2a}(\mu_k)l_{3b}(\mu_k)}{l_{2a}(\mu_k)l_{2c}(\mu_k) - l_{2b}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}). \tag{2.54}$$

Частные решения системы (2.45) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
F^*(x, y) &= 2\operatorname{Re} r_5 \int dz_5 \int F_5(z_5) dz_5, \\
\Psi^*(x, y) &= 2\operatorname{Re} r_\psi \int F_5(z_5) dz_5, \\
X^*(x, y) &= 2\operatorname{Re} r_\chi \int F_5(z_5) dz_5,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

где r_5 , r_ψ , r_χ – неизвестные постоянные. Подставляя (2.34) и (2.55) в (2.45) и учитывая (2.52), для их определения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
r_5 l_{4a}(\mu_5) + r_\psi l_{3a}(\mu_5) + r_\chi l_{3b}(\mu_5) &= l_{2a}(\mu_5), \\
r_5 l_{3a}(\mu_5) + r_\psi l_{2a}(\mu_5) + r_\chi l_{2b}(\mu_5) &= l_\alpha(\mu_5), \\
r_5 l_{3b}(\mu_5) + r_\psi l_{2b}(\mu_5) + r_\chi l_{2c}(\mu_5) &= l_t(\mu_5),
\end{aligned} \tag{2.56}$$

в которой

$$\begin{aligned}
l_{2a}(\mu_5) &= -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2, \\
l_\alpha(\mu_5) &= \alpha_5 \mu_5 - \alpha_4, \quad l_t(\mu_5) = t_1 \mu_5 - t_2.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Решая систему (2.56), находим

$$r_5 = l_f(\mu_5)/l_8(\mu_5), \quad r_\psi = l_\psi(\mu_5)/l_8(\mu_5), \quad r_\chi = l_\chi(\mu_5)/l_8(\mu_5). \quad (2.58)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_f(\mu) &= l_{2\alpha}(\mu)l_{2a}(\mu)l_{2c}(\mu) + l_\alpha(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2b}(\mu) + l_t(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2b}(\mu) - \\ &\quad - l_t(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2a}(\mu) - l_{2b}^2(\mu)l_{2a}(\mu) - l_\alpha(\mu)l_{3a}(\mu)l_{2c}(\mu), \\ l_\psi(\mu) &= l_{4a}(\mu)l_\alpha(\mu)l_{2c}(\mu) + l_{2\alpha}(\mu)l_{3b}(\mu)l_{2b}(\mu) + l_{3a}(\mu)l_{3b}(\mu)l_t(\mu) - \\ &\quad - l_{3b}^2(\mu)l_\alpha(\mu) - l_t(\mu)l_{2b}(\mu)l_{4a}(\mu) - l_{3a}(\mu)l_{2\alpha}(\mu)l_{2c}(\mu), \\ l_\chi(\mu) &= l_{4a}(\mu)l_{2a}(\mu)l_t(\mu) + l_{3a}(\mu)l_{3b}(\mu)l_\alpha(\mu) + l_{3a}(\mu)l_{2\alpha}(\mu)l_{2b}(\mu) - \\ &\quad - l_{3b}(\mu)l_{2\alpha}(\mu)l_{2a}(\mu) - l_{2b}(\mu)l_\alpha(\mu)l_{4a}(\mu) - l_{3a}^2(\mu)l_t(\mu). \end{aligned}$$

Таким образом, для функций $F(x, y)$, $X(x, y)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 2\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 F_k(z_k) + r_5 \int dz_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \\ \Psi(x, y) &= 2\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^3 \lambda_k F'_k(z_k) + \frac{1}{\lambda_4} F'_4(z_4) + r_5 \lambda_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \\ X(x, y) &= 2\operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 v_k F'_k(z_k) + r_5 v_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \end{aligned} \quad (2.59)$$

где $\lambda_5 = r_\psi/r_5$, $v_5 = r_\chi/r_5$.

Выражения основных характеристик ТЭУС через комплексные потенциалы. Подставив функции (2.59) с учетом (2.44) в (2.22), получим выражения для напряжений, индукции и напряженности поля [59], а затем, интегрируя (2.22), имеем и формулы для перемещений и потенциала поля. Окончательно будем иметь

$$\left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}\right) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \Phi_k'(z_k), \quad (2.60)$$

$$\left(D_x, D_y\right) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi_k'(z_k). \quad (2.61)$$

$$\left(E_x, E_y\right) = -2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi_k'(z_k), \quad (2.62)$$

$$(u, v, w, \varphi) = 2\text{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, s_k^0, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, w_0, \varphi_0), \quad (2.63)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1j} &= \mu_j^2, \quad \lambda_{2j} = 1, \quad \lambda_{4j} = -\lambda_j, \quad \lambda_{5j} = \lambda_j \mu_j, \quad \lambda_{6j} = -\mu_j, \\ \lambda_{7j} &= v_j \mu_j, \quad \lambda_{8j} = -v_j \quad (j=1, 2, 3, 5), \quad \lambda_{14} = \lambda_4 \mu_4^2, \quad \lambda_{24} = \lambda_4, \\ \lambda_{44} &= -1, \quad \lambda_{54} = \mu_4, \quad \lambda_{64} = -\lambda_4 \mu_4, \quad \lambda_{74} = \lambda_4 v_4 \mu_4, \quad \lambda_{84} = -\lambda_4 v_4; \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$p_j = a_{11} \mu_j^2 - a_{16} \mu_j + a_{12} + (a_{15} \mu_j - a_{14}) \lambda_j + (b_{11} \mu_j - b_{21}) v_j + \frac{\delta_j^5 \alpha_1}{r_5},$$

$$q_j = a_{12} \mu_j - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_j} + \left(a_{25} - \frac{a_{24}}{\mu_j}\right) \lambda_j + \left(b_{12} - \frac{b_{22}}{\mu_j}\right) v_j + \frac{\delta_j^5 \alpha_2^D}{\mu_5 r_5},$$

$$s_j^0 = a_{14} \mu_j - a_{46} + \frac{a_{24}}{\mu_j} + \left(a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_j}\right) \lambda_j + \left(b_{14} - \frac{b_{24}}{\mu_j}\right) v_j + \frac{\delta_j^5 \alpha_4 r_5}{\mu_j},$$

$$r_j^0 = b_{11} \mu_j^2 - b_{16} \mu_j + b_{12} + (b_{15} \mu_j - b_{14}) \lambda_j - (c_{11} \mu_j - c_{12}) v_j + \frac{\delta_j^5 t_1}{r_5} \quad (j=1, 2, 3, 5),$$

$$p_4 = (a_{11} \mu_4^2 - a_{16} \mu_4 + a_{12}) \lambda_4 + a_{15} \mu_4 - a_{14} + (b_{11} \mu_4 - b_{21}) \lambda_4 v_4,$$

$$q_4 = \left(a_{12} \mu_4 - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_4}\right) \lambda_4 + a_{25} - \frac{a_{24}}{\mu_4} + \left(b_{12} - \frac{b_{22}}{\mu_4}\right) \lambda_4 v_4,$$

$$s_4^0 = \left(a_{14} \mu_4 - a_{46} + \frac{a_{24}}{\mu_4}\right) \lambda_4 + a_{45} - \frac{a_{44}}{\mu_4} + \left(b_{14} - \frac{b_{24}}{\mu_4}\right) \lambda_4 v_4,$$

$$r_4^0 = (b_{11}\mu_4^2 - b_{16}\mu_4 + b_{12})\lambda_4 + b_{15}\mu_4 - b_{14} - (c_{11}\mu_4 - c_{12})\lambda_4\nu_4; \quad (2.65)$$

$$\Phi_j(z_j) = F_j'(z_j) \quad (j = \overline{1, 5}), \quad \Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5. \quad (2.66)$$

$-\omega_3 y + u_0$, $\omega_3 x + v_0$, – жесткие перемещения тела в плоскости Oxy , как целого; ω_3 – угол поворота плоскости Oxy против часовой стрелки, причем

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad u_0, v_0, w_0 – \text{компоненты поступательного движения тела,}$$

как целого; ϕ_0 – нулевой уровень потенциала электростатического поля.

Зная основные характеристики ТЭУС, можно найти также напряжения, индукцию и напряженность на площадках с нормалью n и касательной s :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2 ny + \sigma_y \cos^2 nx - 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos nx \cos ny + \tau_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny); \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} D_n &= D_x \cos nx + D_y \cos ny, \quad D_s = D_x \cos ny - D_y \cos nx, \\ E_n &= E_x \cos nx + E_y \cos ny, \quad E_s = E_x \cos ny - E_y \cos nx, \end{aligned} \quad (2.68)$$

Граничные условия. Функции $\Phi_k(z_k)$ на границе должны удовлетворять определенным условиям. В случае задания усилий из (2.60), (2.47)

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}) \Phi_k(z_k) = \mp \int_0^s (X_n, Y_n, Z_n) ds + (c_1, c_2, c_4). \quad (2.69)$$

Если же на границе заданы перемещения u^* , v^* , w^* , то из (2.63) будем иметь

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, s_k^0) \Phi_k(z_k) = (u^* + \omega_3 y - u_0, v^* - \omega_3 x - v_0, w^* - w_0). \quad (2.70)$$

Из (2.47), (2.61), (2.63) получим электрические граничные условия:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5\lambda_{8k}\Phi_k(z_k)=\mp\int_0^s D_n ds+c_3 \quad (2.71)$$

при заданной индукции на контуре и

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5 r_k^0 \Phi_k(z_k)=\varphi^*(z)+c_3 \quad (2.72)$$

при заданном потенциале поля φ^* . В общем случае все условия запишем так:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5 g_{ki}^0 \Phi_k(t_k)=f_i(t) \quad (i=\overline{1,4}). \quad (2.73)$$

При этом

$$\begin{aligned} g_{k1}^0 &= \lambda_{6k}, \quad g_{k2}^0 = \lambda_{2k}, \quad g_{k4}^0 = \lambda_{4k}, \\ f_1 &= \mp \int_0^s Y_n ds + c_1, \quad f_2 = \mp \int_0^s X_n ds + c_2, \quad f_4 = \mp \int_0^s Z_n ds + c_4, \end{aligned} \quad (2.74)$$

если на границе заданы внешние усилия,

$$\begin{aligned} g_{k1}^0 &= p_k, \quad g_{k2}^0 = q_k, \quad g_{k4}^0 = s_k^0, \\ f_1(t) &= u^* + \omega_3 y - u_0, \quad f_2(t) = v^* - \omega_3 x - v_0, \quad f_4(t) = w^* - w_0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

когда на границе заданы перемещения u^* , v^* , w^* ; при задании на границе индукции D_n или потенциала поля φ^* соответственно имеем

$$g_{k3}^0 = \lambda_{8k}, \quad f_3 = \mp \int_0^s D_n ds + c_4, \quad (2.76)$$

$$g_{k3}^0 = r_k^0, \quad f_3 = \varphi^*(t) + c_4, \quad (2.77)$$

Условия (2.73) можно записать и в дифференциальной форме

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 g_{kt}^0 \delta_k \Phi_k'(t_k) = f_i'(t) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (2.78)$$

получаемой из (2.73) дифференцированием по дуге контура ds . Здесь

$$\delta_k = \frac{dx}{ds} + \mu_k \frac{dy}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}; \quad (2.79)$$

$$f_1' = \mp Y_n, \quad f_2' = \mp X_n, \quad f_4' = \mp Z_n \quad (2.80)$$

в случае заданных на границе усилий X_n, Y_n, Z_n ;

$$f_1'(t) = \frac{d}{ds}(u^* + \omega_3 y), \quad f_2'(t) = \frac{d}{ds}(v^* - \omega_3 x), \quad f_4'(t) = \frac{dw^*}{ds} \quad (2.81)$$

для заданных перемещений; при задании на границе индукции D_n или потенциала поля φ^* соответственно имеем

$$f_3' = \mp D_n, \quad (2.82)$$

$$f_3' = d\varphi^*/ds, \quad (2.83)$$

если на границе задан потенциал поля. Здесь s — длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки. Как уже отмечалось, верхние знаки относятся к внешнему контуру области, нижние — к внутренним контурам; x', y' — производные по параметру параметрического задания контура.

2.5. Общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей

Интегрируя функцию (2.41), находим [59]

$$\begin{aligned}\Phi_5(z_5) = & \Gamma_5 z_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{5l} z_5 + B_{5l}) \ln(z_5 - z_{5l}) + \\ & + \sum_{j=1}^J \alpha_{5j}^0 (z_5 - z_{5j}^0) \ln(z_5 - z_{5j}^0) + \Phi_{50}(z_5),\end{aligned}\quad (2.84)$$

где $\Gamma_5 = r_5 c_0$ для бесконечной области, $\Gamma_5 = 0$ в случае конечной области;

$$A_{5l} = r_5 D_{5l}, \quad B_{5l} = r_5 (b_{5l} - z_{5l} D_{5l}), \quad \alpha_{5p}^0 = r_5 \delta_{5p}^0; \quad (2.85)$$

b_{5l} – коэффициент при $(z_5 - z_{5l})^{-1}$ в разложении функции $F_{50}(z_5)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_{5l} . В случае бесконечной области должно выполняться и условие

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{5l} + \sum_{j=1}^J \alpha_{5j}^0 = 0,$$

получаемое из (2.43) умножением на r_5 .

Функции $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в областях S_k , получаемых из S аффинными преобразованиями (2.50). По аналогии (2.84) их выберем в виде

$$\begin{aligned}\Phi_k(z_k) = & \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ & + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln(z_k - z_{kj}^0) + \Phi_{k0}(z_k).\end{aligned}\quad (2.86)$$

Здесь z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях (2.50) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $z_{kj}^0 = x_j^0 + \mu_k y_j^0$; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj}^0 – постоянные, которые будем определять из условий на бесконечности и условий однозначности напряжений, перемещений, индукции и потенциала поля.

В окрестности бесконечно удаленной точки (2.86) имеем

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 \right] \ln z_k + o(1/z_k), \quad (2.87)$$

где $o(1/z_k)$ – величина малости порядка $1/z_k$. При этом из ограниченности напряжений и индукции на бесконечности следует

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 = 0. \quad (2.88)$$

Учитывая соотношения (2.88) и подставляя (2.87) в выражения напряжений, индукции (напряженности) и угла поворота $\omega_3^\infty = (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)^\infty / 2$ на бесконечности, для определения Γ_k ($k = \overline{1, 4}$) получаем

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}(-r_k^0), \lambda_{8k}(-\mu_k r_k^0), q_k - \mu_k p_k \right) \Gamma_k = \\ = \left(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{xz}^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty(E_x^\infty), D_y^\infty(E_y^\infty), \omega_3^\infty \right). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Пусть контур L'_l в многосвязной области S охватывает только контур отверстия L_l , не задевая остальных контуров отверстий. При полном обходе по контуру L'_l функция $\Phi_k(z_k)$ получит приращение $2\pi i(A_{kl}z_k + B_{kl})$. Но

при этом напряжения, перемещения, индукция и потенциал поля в силу их однозначности не должны получать приращений. На основе этого для определения A_{kl} , B_{kl} ($k=\overline{1,4}$) получим определенные соотношения. Вместо однозначности напряжений и индукции будем рассматривать более общие соотношения, выражающие равенство главного вектора внутренних усилий и суммарного потока индукции по L'_l главному вектору внешних усилий и суммарному потоку индукции на контуре отверстия L_l с противоположным знаком, т.е. $(X'_l, Y'_l, Z'_l, Q'_l) = -(X_l, Y_l, Z_l, Q_l)$. При этом на основе соотношений (2.69), (2.71) имеем

$$\begin{aligned} (X'_l, Y'_l, Z'_l, Q'_l) &= - \left[2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}) \Phi_k(z_k) \right]_{L'_l} = \\ &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 2\pi i (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}) (A_{kl} z_k + B_{kl}). \end{aligned}$$

Если к последним соотношениям добавить и условия однозначности перемещений u , v , w и потенциала φ , то будем иметь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0) (A_{kl} z_k + B_{kl}) &= \\ &= \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Z_l}{2\pi}, \frac{Q_l}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Сравнивая в последних равенствах коэффициенты при x , y и свободные члены, для определения A_{kl} , B_{kl} ($k=\overline{1,4}$) получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0) A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (2.90)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0 \right) B_{kl} = \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Z_l}{2\pi}, \frac{Q_l}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right). \quad (2.91)$$

При этом учтены тождества $2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0 \right) \mu_k A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, следующие из (2.90), характеристического уравнения (2.51) и соотношений (2.53), (2.54).

Таким же образом находится система для определения α_{kj}^0 :

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 i \left(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, s_k^0, r_k^0 \right) \alpha_{kj}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (2.92)$$

Таким образом, в случае многосвязной области комплексные потенциалы имеют вид (2.86), где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем (2.89) – (2.92). При этом в случае бесконечной области в (2.90) можно оставлять $L-1$ уравнение и использовать равенства (2.88). Если же в нем оставлять L уравнений, то равенство (2.88) удовлетворится тождественно.

2.6. Плоская задача

Плоская деформация. Пусть в каждой точке тела, находящегося в двумерном ТЭУС, имеется плоскость материальной симметрии. Тогда [134]

$$\begin{aligned} k_{13} &= k_{23} = 0, \quad q_z = 0, \quad \alpha_4^D = \alpha_5^D = t_3^\sigma = 0, \\ s_{14}^{D,T} &= s_{15}^{D,T} = s_{24}^{D,T} = s_{25}^{D,T} = s_{34}^{D,T} = s_{35}^{D,T} = s_{46}^{D,T} = s_{56}^{D,T} = 0, \\ g_{14}^T &= g_{15}^T = g_{24}^T = g_{25}^T = g_{31}^T = g_{32}^T = g_{33}^T = g_{36}^T = 0, \quad \beta_{13}^{\sigma,T} = \beta_{23}^{\sigma,T} = 0 \end{aligned}$$

и приведенное решение распадается на решение задачи о плоской деформации.

ции и антиплоской деформации или кручения тела. Для антиплоской деформации и кручения отличны от нуля τ_{xz} , τ_{yz} и w , а остальные основные характеристики ТЭУС равны нулю. Для плоской деформации

$$\begin{aligned}\sigma_z = & - \left[\left(s_{13}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{31}^T g_{33}^T \right) \sigma_x + \left(s_{23}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{32}^T g_{33}^T \right) \sigma_y + \right. \\ & + \left(s_{36}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{36}^T g_{33}^T \right) \tau_{xy} + \left(g_{13}^T \beta_{33}^{\sigma,T} - \beta_{13}^{\sigma,T} g_{33}^T \right) D_x + \\ & + \left(g_{23}^T \beta_{33}^{\sigma,T} - \beta_{23}^{\sigma,T} g_{33}^T \right) D_y + \left(\alpha_3^D \beta_{33}^{\sigma,T} + t_3^{\sigma} g_{33}^T \right) T \Big] / \Delta, \\ D_z = & - \left[\left(s_{13}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{31}^T \right) \sigma_x + \left(s_{23}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{32}^T \right) \sigma_y + \right. \\ & + \left(s_{36}^{D,T} g_{33}^T - s_{33}^{D,T} g_{36}^T \right) \tau_{xy} + \left(g_{13}^T g_{33}^T + s_{33}^{D,T} \beta_{13}^{\sigma,T} \right) D_x + \\ & + \left(g_{23}^T g_{33}^T + s_{33}^{D,T} \beta_{23}^{\sigma,T} \right) D_y + \left(\alpha_3^D g_{33}^T - s_{33}^{D,T} t_3^{\sigma} \right) T \Big] / \Delta, \\ \Delta = & s_{33}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + \left(g_{33}^T \right)^2. \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,\end{aligned}$$

а остальные основные характеристики ТЭУС находятся из системы (2.7), (2.8), (2.11), (2.22).

Обобщенное плоское термоэлектроупругое состояние пластинки.

Такая же краевая задача, как в случае плоской деформации, получается для обобщенного плоского ТЭУС тонкой пластинки, под которым понимается ТЭУС тонкой пластинки, имеющей в каждой точке плоскость материальной симметрии, параллельную срединной плоскости, нагруженной по боковой поверхности симметричными усилиями и не изменяющимися по толщине температурой и индукцией. Заметим, что при выводе основных соотношений обобщенного плоского ТЭУС (ТМУС) часто основания пластинки считаются термоизолированными, в нашем же случае примем другие условия – температура не зависит от толщинной координаты.

Если вводить усредненные по толщине пластинки напряжения, перемещения, индукцию, напряженность и потенциал поля, то для определения ус-

редненных величин получится такая же краевая задача, как и в случае плоской деформации. Отличие заключается лишь в том, что для обобщенного плоского ТЭУС $\sigma_z = D_z = 0$, а в уравнения состояния входят не приведенные термоэлектроупругие постоянные (2.23), а реальные постоянные соотношений типа (2.9). Задачи о плоской деформации и обобщенном плоском ТЭУС будем называть плоской задачей термоэлектроупругости.

Для обобщенного плоского ТЭУС пластинки уравнения (2.7) – (2.9), (2.11) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (2.93)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = s_{11}^{D,T} \sigma_x + s_{12}^{D,T} \sigma_y + s_{16}^{D,T} \tau_{xy} + g_{11}^T D_x + g_{21}^T D_y + \alpha_1^D T,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = s_{12}^{D,T} \sigma_x + s_{22}^{D,T} \sigma_y + s_{26}^{D,T} \tau_{xy} + g_{12}^T D_x + g_{22}^T D_y + \alpha_2^D T,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = s_{16}^{D,T} \sigma_x + s_{26}^{D,T} \sigma_y + s_{66}^{D,T} \tau_{xy} + g_{16}^T D_x + g_{26}^T D_y + \alpha_6^D T,$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g_{11}^T \sigma_x - g_{12}^T \sigma_y - g_{16}^T \tau_{xy} + \beta_{11}^{\sigma,T} D_x + \beta_{12}^{\sigma,T} D_y - t_1^\sigma T,$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -g_{21}^T \sigma_x - g_{22}^T \sigma_y - g_{26}^T \tau_{xy} + \beta_{12}^{\sigma,T} D_x + \beta_{22}^{\sigma,T} D_y - t_2^\sigma T; \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.95)$$

В этом случае система уравнений (2.45) будет такой:

$$L_{4a} F + L_{3b} X = L_{2\alpha} T; \quad L_{3b} F + L_{2c} X = L_t T. \quad (2.96)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
L_{4a} &= s_{22}^{D,T} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26}^{D,T} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12}^{D,T} + s_{66}^{D,T}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
&\quad - 2s_{16}^{D,T} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11}^{D,T} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\
L_{3b} &= -g_{22}^T \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12}^T + g_{26}^T) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21}^T + g_{16}^T) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11}^T \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{2c} &= -\beta_{22}^{\sigma,T} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_{12}^{\sigma,T} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta_{11}^{\sigma,T} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{2\alpha} &= -\alpha_2^D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_6^D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_1^D \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_t = -t_2^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + t_1^\sigma \frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Для функций $F(x, y)$, $X(x, y)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= 2\text{Re} \left(\sum_{k=1}^3 F_k(z_k) + r_5 \int dz_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right), \\
X(x, y) &= 2\text{Re} \left(\sum_{k=1}^3 v_k F'_k(z_k) + r_5 v_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right),
\end{aligned} \tag{2.98}$$

где

$$\begin{aligned}
v_k &= -\frac{l_{3b}(\mu_k)}{l_{2c}(\mu_k)} \quad (k=1,2,3), \quad r_5 = \frac{l_{2\alpha}(\mu_5)l_{2c}(\mu_5) - l_{3b}(\mu_5)l_t(\mu_5)}{l_{4a}(\mu_5)l_{2c}(\mu_5) - l_{3b}^2(\mu_5)}, \\
l_{4a}(\mu) &= s_{11}^{D,T} \mu^4 - 2s_{16}^{D,T} \mu^3 + (2s_{12}^{D,T} + s_{66}^{D,T}) \mu^2 - 2s_{26}^{D,T} \mu + s_{22}^{D,T}, \\
l_{3b}(\mu) &= g_{11}^T \mu^3 - (g_{21}^T + g_{16}^T) \mu^2 + (g_{12}^T + g_{26}^T) \mu - g_{22}^T, \\
l_{2c}(\mu) &= -\beta_{11}^{\sigma,T} \mu^2 + 2\beta_{12}^{\sigma,T} \mu - \beta_{11}^{\sigma,T}, \\
l_{2\alpha}(\mu_5) &= -\alpha_1^D \mu_5^2 + \alpha_6^D \mu_5 - \alpha_2^D, \quad l_t(\mu_4) = t_1^\sigma \mu_5 - t_2^\sigma;
\end{aligned} \tag{2.99}$$

μ_k ($k=1,2,3$) – корни характеристического уравнения

$$l_{4a}(\mu) l_{2c}(\mu) - l_{3b}^2(\mu) = 0. \quad (2.100)$$

Для основных характеристик ТЭУС получаем следующие формулы:

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 {}^* (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \quad (2.101)$$

$$(D_x, D_y) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 {}^* (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k), \quad (2.102)$$

$$(E_x, E_y) = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 {}^* (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k), \quad (2.103)$$

$$(u, v, \varphi) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 {}^* (p_k, q_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0). \quad (2.104)$$

Здесь и далее «*» означает суммирование по $k=1, 2, 3, 5$;

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k;$$

$$p_k = s_{11}^{D,T} \mu_k^2 - s_{16}^{D,T} \mu_k + s_{12}^{D,T} + (g_{11}^T \mu_k - g_{21}^T) \nu_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_1^D}{r_5},$$

$$q_k = s_{12}^{D,T} \mu_k - s_{26}^{D,T} + \frac{s_{22}^{D,T}}{\mu_k} + \left(g_{12}^T - \frac{g_{22}^T}{\mu_k} \right) \nu_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2^D}{\mu_5 r_5},$$

$$r_k^0 = g_{11}^T \mu_k^2 - g_{16}^T \mu_k + g_{12}^T - (\beta_{11}^{\sigma,T} \mu_k - \beta_{12}^{\sigma,T}) \nu_k + \frac{\delta_k^5 t_1^\sigma}{r_5} \quad (k=1, 2, 3, 5). \quad (2.105)$$

$$\Phi_k(z_k) = F'_k(z_k) \quad (k=1, 2, 3), \quad \Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5, \quad (2.106)$$

Граничные условия для комплексных потенциалов имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 {}^* g_{ki}^0 \Phi_k(t_k) = f_i(t) \quad (i=1, 2, 3), \quad (2.107)$$

или

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5{}^*g_{ki}^0\delta_k\Phi_k'(t_k)=f_i'(t) \quad (i=1,2,3), \quad (2.108)$$

где

$$g_{k1}^0=\lambda_{6k}, \quad g_{k2}^0=\lambda_{2k},$$

$$f_1=\mp\int_0^s Y_n ds+c_1, \quad f_2=\mp\int_0^s X_n ds+c_2, \quad f_1'=\mp Y_n, \quad f_2'=\mp X_n, \quad (2.109)$$

если на границе отсутствуют внешние усилия,

$$g_{k1}^0=p_k, \quad g_{k2}^0=q_k, \quad f_1(t)=u^*+\omega_3 y-u_0, \quad f_2(t)=v^*-\omega_3 x-v_0,$$

$$f_1'(t)=\frac{d}{ds}(u^*-u_*+\omega_3 y), \quad f_2'(t)=\frac{d}{ds}(v^*-v_*-\omega_3 x), \quad (2.110)$$

когда на границе заданы перемещения; при задании на границе индукции или потенциала поля имеем

$$g_{k3}^0=\lambda_{8k}, \quad f_3=\mp\int_0^s D_n ds+c_4, \quad f_3'=\mp D_n \quad (2.111)$$

$$g_{k3}^0=r_k^0 \quad (k=1,2,3), \quad f_3=\Phi^*(t)+c_4, \quad f_3'=\frac{d\Phi^*}{ds}. \quad (2.112)$$

Общий вид комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=\overline{1,3}$) сохранит форму (2.86), где Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj}^0 ($k=\overline{1,3}$), – постоянные, определяемые из систем

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5{}^*\left(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}(-r_k^0), \lambda_{8k}(-\mu_k r_k^0), q_k - \mu_k p_k\right) \Gamma_k =$$

$$=\left(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, D_x^\infty(E_x^\infty), D_y^\infty(E_y^\infty), \omega_3^\infty\right); \quad (2.113)$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5 i(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (2.114)$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5 i(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) B_{kl} = \left(\frac{X_l}{2\pi}, \frac{Y_l}{2\pi}, \frac{Q_l}{2\pi}, 0, 0, 0 \right); \quad (2.115)$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^5 i(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, p_k, q_k, r_k^0) \alpha_{kj}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (2.116)$$

2.7. Решения некоторых задач для односвязных областей

Эллиптический цилиндр или плоский диск. Рассмотрим цилиндр с эллиптическим поперечным сечением L с полуосями a, b (рис. 2.3). В центре цилиндра действует сосредоточенный источник тепла мощности q^0 , на боковой поверхности задана постоянная температура T_0 . На границе внешние усилия и индукция равны нулю, она свободна от подкрепления или жестко подкреплена. В данном случае функции (2.41), (2.86) имеют вид

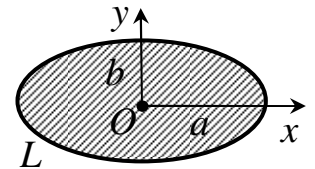


Рис. 2.3

$$F_5(z_5) = \delta_5^0 \ln z_5 + F_{50}(z_5), \quad \Phi_k(z_k) = \alpha_k^0 z_k \ln z_k + \Phi_{k0}(z_k), \quad (2.117)$$

где δ_5^0 – величина, вычисляемая по формуле (2.42); α_k^0 – постоянные, определяемые из системы (2.92); $F_{50}(z_5)$, $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в эллипсах L_5 , L_k , получаемых из L аффинными преобразованиями (2.37) и (2.50). Последние функции могут быть разложены в ряды

$$F_{50}(z_5) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z_5), \quad \Phi_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn} P_n(z_k) \quad (2.118)$$

по полиномам Фабера $P_n(z_k)$, для которых при использовании конформных

отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов L_k

$$z_k = R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right), \quad (2.119)$$

где $R_k = (a - i\mu_k b)/2$, $m_k = (a + i\mu_k b)/(a - i\mu_k b)$, имеют место равенства [94]

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_k^n + \frac{m_k^n}{\zeta_k^n} \quad (n \geq 1). \quad (2.120)$$

На контуре L , где $\zeta_k = \sigma = e^{i\theta}$, $|m_k/\sigma^2| = |m_k| < 1$, θ – параметр параметрического задания эллипса,

$$\begin{aligned} \ln z_k &= \ln \sigma + \ln R_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} m_k^n}{n \sigma^{2n}}, \\ F_5(z_5) &= \delta_5^0 (\ln \sigma + \ln R_5) + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1} \delta_5^0 m_5^n}{n \sigma^{2n}} + b_n \left(\sigma^n + \frac{m_5^n}{\sigma^n} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Подставляя функцию (2.121) в граничное условие (2.38) на контуре L и применяя метод рядов, получаем

$$b_0 = \frac{(T_0 - 2\delta_5^0 \ln |R_5|)}{2}, \quad b_{2n} = \frac{(-1)^n \delta_5^0 \bar{m}_5^n}{(1 + \bar{m}_5^n m_5^n)}, \quad b_{2n-1} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (2.122)$$

Тогда на основании (2.66) с точностью до постоянной находим

$$\Phi_5(z_5) = \alpha_5^0 z_5 \ln z_5 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n} P_{2n-1}(z_5); \quad (2.123)$$

$$\alpha_5^0 = r_5 \delta_5^0, \quad c_{5n} = -\delta_n^1 r_5 R_5 \delta_5^0 + \frac{r_5 R_5 (b_{2n-2} - m_5 b_{2n})}{2n-1}, \quad (2.124)$$

где δ_n^1 – символ Кронекера. Такой же вид имеют функции

$$\Phi_k(z_k) = \alpha_k^0 z_k \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} P_{2n-1}(z_k) \quad (k=\overline{1,4}). \quad (2.125)$$

На контуре L будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \alpha_k^0 R_k \left(\sigma + \frac{m_k}{\sigma} \right) (\ln \sigma + \ln R_k) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} \alpha_k^0 R_k m_k^n}{\sigma^{2n-1}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1-\delta_n^1}{n-1} \right) + c_{kn} \left(\sigma^{2n-1} + \frac{m_k^{2n-1}}{\sigma^{2n-1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.73) и применив метод рядов, для определения c_{kn} ($k=1,2,3,4$) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \left(g_{ki}^0 m_k^{2n-1} c_{kn} + \bar{g}_{ki}^0 \bar{c}_{kn} \right) = & \sum_{k=1}^5 \left\{ (-1)^n g_{ki}^0 \alpha_k^0 R_k m_k^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1-\delta_n^1}{n-1} \right) - \right. \\ & \left. - \delta_n^1 \left(g_{ki}^0 \alpha_k^0 R_k m_k \ln R_k + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k \ln \bar{R}_k \right) \right\} \quad (i=\overline{1,4}; n=1,2,\dots). \quad (2.126) \end{aligned}$$

Если сосредоточенный источник тепла отсутствует, то

$$\delta_5^0 = \alpha_k^0 = 0, \quad b_0 = T_0/2, \quad b_n = 0 \quad (n \geq 1), \quad c_{51} = r_5 R_5 T_0/2, \quad c_{kn} = 0 \quad (n \geq 2);$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 \left(g_{k1}^0, g_{k2}^0, g_{k3}^0, g_{k4}^0, \mu_k g_{k1}^0, \mu_k g_{k2}^0, \mu_k g_{k3}^0, \mu_k g_{k4}^0 \right) \frac{c_{k1}}{R_k} = \\ = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (2.127)$$

При получении системы (2.127) учтено, что $m_k + 1 = a/R_k$ и $m_k - 1 = i\mu_k b/R_k$.

Для комплексных потенциалов окончательно получим

$$F_5(z_5) = T_0/2, \quad \Phi_k(z_k) = c_{k1} z_k / R_k, \quad (2.128)$$

на основании которых найдем

$$T = T_0;$$

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{4k}, \lambda_{5k}, \lambda_{6k}) \frac{c_{k1}}{R_k}, \\ (D_x, D_y, E_x, E_y) &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, -r_k^0, -\mu_k r_k^0) \frac{c_{k1}}{R_k}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

т.е. основные характеристики ТЭУС постоянны во всех точках цилиндра. При этом температура и индукция такие же, как на поверхности, т.е. $T = T_0$, $D_x = D_y = 0$. Последние равенства легко устанавливаются из того, что для данного случая (когда на поверхности задана D_n) $\lambda_{7k} = -\mu_k g_{k3}^0$, $\lambda_{8k} = g_{k3}^0$. Поэтому из третьего и седьмого уравнений (2.127) имеем $D_x = D_y = 0$.

Если боковая поверхность цилиндра не подкреплена, то $\lambda_{1k} = -\mu_k g_{k1}^0$, $\lambda_{2k} = g_{k2}^0$, $\lambda_{4k} = g_{k4}^0$, $\lambda_{5k} = -\mu_k g_{k4}^0$, $\lambda_{6k} = g_{k1}^0$. Тогда значения напряжений (2.129) соответствуют пятому, второму, четвертому, восьмому и первому уравнениям системы (2.127) и, поэтому $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ всюду. Для рассматриваемого случая из (2.22) получим

$$E_x = -t_1 T_0, \quad E_y = -t_2 T_0. \quad (2.130)$$

Если теперь боковая поверхность цилиндра жестко подкреплена, то в (2.127) нужно принять $g_{k1}^0 = p_k$, $g_{k2}^0 = q_k$, $g_{k3}^0 = \lambda_{8k}$, $g_{k4}^0 = \lambda_{4k}$. И в этом случае всюду $T = T_0$, $D_x = D_y = 0$, а напряжения и напряженность после решения системы (2.127) нужно находить по формулам (2.129). Однако, учитывая, что все эти величины постоянны, а на границе деформации равны нулю, удобнее их нахождение выполнить на основе уравнений состояния, записав их в виде

$$\begin{aligned}
a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} &= -\alpha_1 T_0, \\
a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy} &= -\alpha_2 T_0, \\
a_{14}\sigma_x + a_{24}\sigma_y + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy} &= -\alpha_4 T_0, \\
a_{15}\sigma_x + a_{25}\sigma_y + a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy} &= -\alpha_5 T_0, \\
a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{46}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy} &= -\alpha_6 T_0.
\end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned}
E_x &= -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{14}\tau_{yz} - b_{15}\tau_{xz} - b_{16}\tau_{xy} - t_1 T_0, \\
E_y &= -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{24}\tau_{yz} - b_{25}\tau_{xz} - b_{26}\tau_{xy} - t_2 T_0.
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Решив систему (2.131), найдем значения напряжений, по которым на основе (2.132) вычислим значения компонент вектора напряженности.

Таким образом, если на поверхности цилиндра температура постоянна, а индукция равна нулю, то такие же температура и индукция устанавливаются во всем цилиндре. При этом, если поверхность цилиндра не подкреплена и не загружена внешними усилиями, то напряжения в нем будут равны нулю, а компоненты вектора напряженности вычисляются по формулам (2.130). Если поверхность цилиндра жестко подкреплена, то в нем возникают напряжения и напряженность, определяемые на основании (2.131), (2.132). При этом, как следует из формул (2.131), значения напряжений не зависят от электрических свойств материала и получаются такими же, какими они будут в задаче классической термоупругости, без учета электрических свойств материала.

Приведенное решение упрощается, если в каждой точке цилиндра имеется плоскость материальной симметрии, перпендикулярная к его оси, т.е. в случае плоской термоэлектроупругой деформации цилиндра. Для этого случая получается решение, совпадающее с приведенным, если в последнем формально положить $\tau_{yz} = \tau_{xy} = \lambda_{4k} = \lambda_{5k} = s_k^0 = c_{4n} = 0$, $\Phi_4(z_4) = 0$. Так, если отсутствует источник тепла, то в случае неподкрепленной поверхности опять будем иметь, что напряжения в нем равны нулю, компоненты вектора напряженности вычисляются по формулам (2.130), если же поверхность цилиндра

жестко подкреплена, то в нем возникают напряжения и напряженность, определяемые на основании (2.131), (2.132), которые для плоской деформации примут вид

$$\begin{aligned} a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} &= -\alpha_1 T_0, \\ a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} &= -\alpha_2 T_0, \\ a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} &= -\alpha_6 T_0; \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} E_x &= -b_{11}\sigma_x - b_{12}\sigma_y - b_{16}\tau_{xy} - t_1 T_0, \\ E_y &= -b_{21}\sigma_x - b_{22}\sigma_y - b_{26}\tau_{xy} - t_2 T_0. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Решая систему (2.133), будем иметь

$$\sigma_x = -\sigma_1 T_0 / \sigma, \quad \sigma_y = -\sigma_2 T_0 / \sigma, \quad \tau_{xy} = -\sigma_3 T_0 / \sigma, \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_{12}(a_{66}\alpha_2 - a_{26}\alpha_6) + a_{16}(a_{22}\alpha_6 - a_{26}\alpha_2) + \alpha_1(a_{26}^2 - a_{22}a_{66}), \\ \sigma_2 &= a_{11}(a_{26}\alpha_6 - a_{66}\alpha_2) + a_{16}(a_{16}\alpha_2 - a_{12}\alpha_6) + \alpha_1(a_{12}a_{66} - a_{16}a_{26}), \\ \sigma_3 &= a_{11}(a_{26}\alpha_2 - a_{22}\alpha_6) + a_{12}(a_{12}\alpha_6 - a_{16}\alpha_6) + \alpha_1(a_{16}a_{22} - a_{12}a_{26}), \\ \sigma &= a_{11}(a_{26}^2 - a_{22}a_{66}) + a_{12}(a_{12}a_{66} - 2a_{16}a_{26}) + a_{16}^2 a_{22}, \end{aligned}$$

а на основании (2.21) и (2.134) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \left[(s_{13}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{31}^T g_{33}^T) \sigma_1 + (s_{23}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{32}^T g_{33}^T) \sigma_2 + \right. \\ &\quad \left. + (s_{36}^{D,T} \beta_{33}^{\sigma,T} + g_{36}^T g_{33}^T) \sigma_3 + (\alpha_3^D \beta_{33}^{\sigma,T} + t_3^\sigma g_{33}^T) \right] \frac{T_0}{\sigma \Delta}; \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} E_x &= [b_{11}\sigma_1 + b_{12}\sigma_2 + b_{16}\sigma_3 - t_1\sigma] T_0 / \sigma, \\ E_y &= [b_{21}\sigma_1 + b_{22}\sigma_2 + b_{26}\sigma_3 - t_2\sigma] T_0 / \sigma. \end{aligned} \quad (2.137)$$

В случае обобщенного плоского ТЭУС диска решение получается таким

же, как и для плоской деформации цилиндра, за исключением того, что в случае плоского диска $\sigma_z = 0$. Если край диска жестко подкреплён, то напряжения и компоненты напряжённости поля вычисляются по формулам (2.135), (2.137), в которых вместо постоянных (2.23) нужно использовать постоянные, входящие в соотношения (2.94).

Решения задач термомагнитоупругости для цилиндра и диска получаются такими же, как и приведенные выше с учетом указанных выше замен.

Были проведены численные исследования ТЭУС (ТМУС) цилиндра при плоской деформации и плоского диска, когда их границы жестко подкреплены и на них задавалась постоянная относительная температура T_0 . Здесь и далее считалось, что $T_H = 293,15\text{ K} = 20^\circ\text{C}$. Рассматривались случаи различных пьезоэлектрических (пьезомагнитных) материалов.

В задаче термоэлектроупругости рассматривались: 1) монокристалл селенида кадмия с осью симметрии, параллельной оси y (материал ЭМ1) [209]; 2) пьезокерамика, поляризованная по оси y (ЭМ2) [187]; 3) пьезокерамика *Ceramic B*, поляризованная по оси y (ЭМ3) [210]; 4) пьезокерамика титаната бария, поляризованная по оси y (ЭМ4) [13, 221]; 5) пьезокерамика *PZT-4*, поляризованная по оси y (ЭМ5) [221]; 6) пьезокерамика *PZT-5A*, поляризованная по оси y (ЭМ6) [221]. Теплофизические постоянные этих материалов даны в табл. 2.1. При этом считалось, что для материала ЭМ1 и ЭМ2 имеют место равенства $k_{22}/k_{11} = 2$, $c_V^{\sigma,D} = 500c_0$; для материала ЭМ2: $\rho = 6,02\rho_0$.

В качестве пьезомагнитных материалов выбирались 1) пьезокерамика Terfenol-D (ММ7), поляризованная по оси y [223]; 2) модифицированная пьезокерамика Terfenol-D (ММ8), поляризованная по оси y [249]; 3) пьезокерамика CoFe_2O_4 (материал ММ9), поляризованная по оси y [208]. Теплофизические постоянные этих материалов даны в табл. 2.2. Для пьезомагнитных материалов ММ7-ММ9 принималось: $\alpha_1^B = \alpha_3^B = 8,53\alpha_0$,

$\alpha_2^B = 1,99\alpha_0$, $k_{22}/k_{11} = 2$, $m_2^\sigma = 0,0133 MA \cdot (M \cdot Кл)^{-1}$, $c_V^{\sigma,B} = 500c_0$, для ММ9:
 $\rho = 9,2\rho_0$.

Таблица 2.1

Величина	Пьезоэлектрические материалы					
	ЭМ1	ЭМ2	ЭМ3	ЭМ4	ЭМ5	ЭМ6
$s_{11}^{D,T}/s_0, s_{33}^{D,T}/s_0$	23,21	8,27	8,3	8,7	10,9	14,4
s_{22}^{DT}/s_0	16,68	7,21	7,0	7,1	7,9	9,46
$s_{12}^{D,T}/s_0, s_{23}^{D,T}/s_0$	-5,38	-1,77	-1,9	-1,9	-2,1	-2,98
s_{13}^{DT}/s_0	-11,4	-2,34	-2,9	-3,0	-5,42	-7,71
$s_{44}^{D,T}/s_0, s_{66}^{D,T}/s_0$	74,46	18,27	17,1	17,5	19,3	25,2
$s_{55}^{D,T}/s_0$	69,21	21,23	22,4	29,9	32,7	44,3
$g_{21}^T/g_0, g_{23}^T/g_0$	-41,61	-6,16	-5,5	-5,2	-11,1	-11,4
g_{22}^T/g_0	83,15	20,19	14,1	12,6	26,1	24,8
$g_{16}^T/g_0, g_{34}^T/g_0$	-124,4	22,96	21,0	20,2	39,4	38,2
$\beta_{11}^{\sigma,T}/\beta_0, \beta_{33}^{\sigma,T}/\beta_0$	118987,1	246,71	86,92	77,93	76,61	65,31
$\beta_{22}^{\sigma,T}/\beta_0$	106071,5	290,88	94,16	66,47	86,92	66,46
$\alpha_1^D/\alpha_0, \alpha_3^D/\alpha_0$	4,25	2,0	7,5	8,53	4,5	1,5
α_2^D/α_0	2,75	6,5	4,7	1,99	-0,1	2,0
t_2^σ/t_0	-0,037	-0,031	-0,021	0,0133	-0,023	-0,047
$k_{11}/k_0, k_{22}/k_0$	—	—	1,25	2,5	1,25	1,25
ρ/ρ_0	5,684	—	5,55	6,02	7,5	7,75
$c_V^{\sigma,D}/c_0$	—	—	500	500	420	420

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{Кл}^{-1}, \quad \beta_0 = 1 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1},$$

$$t_0 = 1 \text{ МН} \cdot (\text{Кл} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad c_0 = 10^{-6} \text{ МДж} \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^{-1}.$$

Для указанных пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов в табл. 2.3 даны значения комплексных параметров теплопроводности μ_5 и термоэлектростручности (термомагнитоупругости) μ_k ($k = \overline{1,4}$) для двумерной задачи и обобщенного плоского ТЭУС (ТМУС).

Для указанных выше плоской деформации цилиндра и обобщенного

Таблица 2.2

Величина	Пьезомагнитные материалы		
	ММ7	ММ8	ММ9
$s_{11}^{B,T}/s_0, s_{33}^{B,T}/s_0$	3,831	3,640	6,478
$s_{22}^{B,T}/s_0$	4,488	3,480	6,979
$s_{12}^{B,T}/s_0, s_{23}^{B,T}/s_0$	-1,335	-0,896	-2,607
$s_{13}^{B,T}/s_0$	-1,071	-1,262	-2,371
$s_{44}^{B,T}/s_0$	7,307	6,340	21,828
$s_{55}^{B,T}/s_0$	7,353	7,353	17,699
$s_{66}^{B,T}/s_0$	6,335	5,595	21,828
$\gamma_{21}^T/\gamma_0, \gamma_{23}^T/\gamma_0$	-1,398	-5,283	0,036
γ_{22}^T/γ_0	3,205	12,125	0,118
γ_{16}^T/γ_0	2,534	11,222	0,204
γ_{34}^T/γ_0	2,923	12,716	0,204
$\chi_{11}^{\sigma,T}/\chi_0$	0,18417	0,16268	0,01676
$\chi_{22}^{\sigma,T}/\chi_0$	0,18270	0,13806	0,00629
$\chi_{33}^{\sigma,T}/\chi_0$	0,18402	0,15968	0,01676
ρ/ρ_0	9,2	9,2	—

$$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \chi_0 = 1 \text{ МА}^2 \cdot \text{МН}^{-1}, \gamma_0 = 10^{-4} \text{ МА} \cdot \text{М} \cdot \text{МН}^{-1}$$

плоского ТЭУС (ТМУС) диска в случае жесткого подкрепления их границ в табл. А.1 приложения А с точностью до безразмерного множителя $T_0^* = T_0 \cdot 1K^{-1}$ (значения относительной температуры на границе) приведены значения отличных от нуля основных характеристик ТЭУС и ТМУС тел.

Из табл. А.1 видно, что значения напряжений в цилиндре при плоской деформации по модулю значительно больше аналогичных напряжений в плоском диске (например, в задаче термоэлектроупругости для материала ЭМ5, более 5 раз), а компоненты векторов напряженности отличаются незначительно. Видимо, это имеет место и в других задачах, что нужно учитывать, так как в дальнейшем результаты численных исследований будут приведены только для обобщенного плоского ТЭУС (ТМУС) пластинки.

Пластинка с эллиптическим отверстием. Рассмотрим пластинку с эллиптическим отверстием L с полуосями a, b (рис. 2.4). Пусть в точке

Таблица 2.3

Материал	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
Корни характеристического уравнения (2.51)					
ЭМ1	$0 + 1,7490 i$	$0 + 0,9332 i$	$0 + 0,5424 i$	$0 + 1,0412 i$	$0 + 0,7071 i$
ЭМ2	$-0,1816 + 0,9971 i$	$0,1816 + 0,9971 i$	$0 + 1,0953 i$	$0 + 0,9325 i$	$0 + 0,7071 i$
ЭМ3	$-0,2221 + 0,9979 i$	$0,2221 + 0,9979 i$	$0 + 1,0800 i$	$0 + 0,8743 i$	$0 + 1,0000 i$
ЭМ4	$-0,2274 + 1,0027 i$	$0,2274 + 1,0027 i$	$0 + 0,9453 i$	$0 + 0,7683 i$	$0 + 1,0000 i$
ЭМ5	$-0,2007 + 1,0067 i$	$0,2007 + 1,0067 i$	$0 + 1,2186 i$	$0 + 0,7711 i$	$0 + 1,0000 i$
ЭМ6	$-0,2532 + 1,0766 i$	$0,2532 + 1,0766 i$	$0 + 1,0801 i$	$0 + 0,7649 i$	$0 + 1,0000 i$
ММ7	$-0,5740 + 0,8606 i$	$0,5740 + 0,8606 i$	$0 + 0,9997 i$	$0 + 0,9999 i$	$0 + 0,7071 i$
ММ8	$-0,5504 + 0,8787 i$	$0,5504 + 0,8787 i$	$0 + 0,9917 i$	$0 + 0,9324 i$	$0 + 0,7071 i$
ММ9	$0 + 1,9704 i$	$0 + 1,4363 i$	$0 + 0,7056 i$	$0 + 1,1066 i$	$0 + 0,7071 i$
Корни характеристического уравнения (2.98)					
ЭМ1	$0 + 1,5737 i$	$0 + 0,9332 i$	$0 + 0,5460 i$	–	$0 + 0,7071 i$
ЭМ2	$-0,1751 + 0,9949 i$	$0,1751 + 0,9949 i$	$0 + 1,0860 i$	–	$0 + 0,7071 i$
ЭМ3	$-0,2024 + 0,9904 i$	$0,2024 + 0,9904 i$	$0 + 1,0671 i$	–	$0 + 1,0000 i$
ЭМ4	$-0,2133 + 0,9993 i$	$0,2133 + 0,9993 i$	$0 + 0,9237 i$	–	$0 + 1,0000 i$
ЭМ5	$-0,1618 + 1,0130 i$	$0,1618 + 1,0130 i$	$0 + 1,2161 i$	–	$0 + 1,0000 i$
ЭМ6	$-0,2104 + 1,0378 i$	$0,2104 + 1,0378 i$	$0 + 1,0255 i$	–	$0 + 1,0000 i$
ММ7	$-0,5522 + 0,8840 i$	$0,5522 + 0,8840 i$	$0 + 0,9985 i$	–	$0 + 0,7071 i$
ММ8	$-0,5270 + 0,8872 i$	$0,5270 + 0,8872 i$	$0 + 0,9666 i$	–	$0 + 0,7071 i$
ММ9	$0 + 1,9626 i$	$0 + 1,4105 i$	$0 + 0,7276 i$	–	$0 + 0,7071 i$

(x_0, y_0) вне отверстия действует сосредоточенный источник тепла мощности q^0 , на контуре отверстия задана относительная температура T_0 , индукция равна нулю, этот контур свободен от подкрепления или жестко подкреплён.

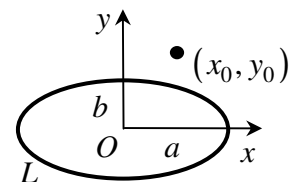


Рис. 2.4

Функции (2.41) и (2.86) примут вид

$$F_5(z_5) = c_0 + D_5 \ln z_5 + \delta_{50} \ln(z_5 - z_5^0) + F_{50}(z_5), \quad (2.138)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + (A_k z_k + B_k) \ln z_k + \alpha_k^0 (z_k - z_k^0) \ln(z_k - z_k^0) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (2.139)$$

где $z_k^0 = x_0 + \mu_k y_0$; $D_5 = -\delta_{50}$; $\delta_{50} = -q^0 / 4\pi \mathfrak{x}$; $\Gamma_5 = r_5 c_0$; $A_5 = r_5 D_5$; $\alpha_5^0 = r_5 \delta_{50}$; $B_5 = r_5 b_5$, b_5 – вычет функции $F_{50}(z_5)$ в точке $z_5 = 0$; Γ_k , A_k , B_k , α_k^0 ($k = \overline{1, 4}$) – величины, определяемые из систем (2.113)–(2.116); $F_{50}(z_5)$, $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_5 и L_k , получаемых из L соответственно аффинными преобразованиями (2.37) и (2.50).

В рассматриваемом случае граничные условия (2.107) на контуре отверстия удобно записывать в виде [94]

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) + \overline{r_k} \overline{\Phi_k(z_k)} + \overline{s_{k+1}} \overline{\Phi_{k+1}(z_{k+1})} + \overline{e_{k+2}} \overline{\Phi_{k+2}(z_{k+2})} + \\ + l_{k5} \Phi_5(z_5) + \overline{n_{k5}} \overline{\Phi_5(z_5)} = 0 \quad (k = \overline{1, 3}), \end{aligned} \quad (2.140)$$

который получается из (2.107) решением этой системы относительно функций $\Phi_k(z_k)$ (считая известными сопряженные функции $\overline{\Phi_k(z_k)}$). Здесь

$$\begin{aligned} \overline{r_k} &= (\overline{g_{k1}^0} \alpha_k + \overline{g_{k2}^0} \beta_k + \overline{g_{k3}^0} \gamma_k) / \Delta_k, \\ \overline{s_{k+1}} &= (\overline{g_{k+1,1}^0} \alpha_k + \overline{g_{k+1,2}^0} \beta_k + \overline{g_{k+1,3}^0} \gamma_k) / \Delta_k, \\ \overline{e_{k+2}} &= (\overline{g_{k+2,1}^0} \alpha_k + \overline{g_{k+2,2}^0} \beta_k + \overline{g_{k+2,3}^0} \gamma_k) / \Delta_k, \\ l_{k5} &= (g_{51}^0 \alpha_k + g_{52}^0 \beta_k + g_{53}^0 \gamma_k) / \Delta_k, \quad \overline{n_{k5}} = (\overline{g_{51}^0} \alpha_k + \overline{g_{52}^0} \beta_k + \overline{g_{53}^0} \gamma_k) / \Delta_k, \\ \alpha_k &= g_{k+1,2}^0 g_{k+2,3}^0 - g_{k+2,2}^0 g_{k+1,3}^0, \quad \beta_k = -g_{k+1,1}^0 g_{k+2,3}^0 + g_{k+2,1}^0 g_{k+1,3}^0, \\ \gamma_k &= g_{k+1,1}^0 g_{k+2,2}^0 - g_{k+2,1}^0 g_{k+1,2}^0, \quad \Delta_k = g_{k1}^0 \alpha_k + g_{k2}^0 \beta_k + g_{k3}^0 \gamma_k; \end{aligned} \quad (2.141)$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, 3, причем значение индекса $k + j$, когда он больше 3, формально полагается равным $k + j - 3$.

Используя формулы (2.119), отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_k| > 1$ на внешности эллипсов L_k . В отображенных областях

$$\ln z_k = \ln R_k + \ln \zeta_k + \ln \left(1 + \frac{m_k}{\zeta_k^2} \right),$$

$$\ln(z_k - z_k^0) = \ln R_k + \ln(\zeta_k - \zeta_{k0}) + \ln \left(1 - \frac{m_k}{\zeta_k \zeta_{k0}} \right),$$

где ζ_{k0} – точки, соответствующие точкам z_k^0 в конформно отображенных плоскостях. Так как $|m_k| < 1$, $|\zeta_{k0}| > 1$, то для функций окончательно найдем

$$F_5(z_5) = c_0 + D_5 \ln \zeta_5 + \delta_{50} \ln(\zeta_5 - \zeta_{50}) + F_{50}(\zeta_5), \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + \left[A_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + B_k \right] \ln \zeta_k + \\ & + \alpha_k^0 R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} - \zeta_{k0} - \frac{m_k}{\zeta_{k0}} \right) \ln(\zeta_k - \zeta_{k0}) + \Phi_{k0}(\zeta_k), \end{aligned} \quad (2.143)$$

причем $F_{50}(\zeta_5)$, $\Phi_{k0}(\zeta_k)$ – функции, голоморфные вне окружностей $|\zeta_k| \geq 1$.

Функция $\ln(\zeta_5 - \zeta_{50})$ имеет особенность в точках $\zeta_5 = \zeta_{50}$ и $\zeta_5 = \infty$, лежащих вне $|\zeta_5| \geq 1$, а внутри $|\zeta_5| \leq 1$ голоморфна. Функция $F_{50}(\zeta_5)$ голоморфна вне указанного круга, причем $F_{50}(\infty) = 0$. Поэтому первую функцию можно разложить в ряд Тейлора по степеням ζ_5 , вторую – в ряд Лорана по отрицательным степеням ζ_5 :

$$\ln(\zeta_5 - \zeta_{50}) = \pi i + \ln \zeta_{50} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_5^n}{n \zeta_{50}^n}, \quad F_{50}(\zeta_5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5n}}{\zeta_5^n}. \quad (2.144)$$

Подставив (2.142) с учетом (2.144) в условия $2\operatorname{Re} F_5(z_5) = T_0$ на контуре

отверстия, где $\zeta_5 = \sigma = e^{i\theta}$, $\bar{\zeta}_5 = 1/\sigma$, будем иметь

$$2c_0 + 2\operatorname{Re}\delta_{50}\ln\zeta_{50} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\bar{c}_{5n} - \frac{\delta_5^0}{n\zeta_{50}} \right) \sigma^n + \left(c_{5n} - \frac{\delta_5^0}{n\bar{\zeta}_{50}} \right) \frac{1}{\sigma^n} \right] = T_0.$$

Сравнивая коэффициенты при σ^n , из последнего соотношения получаем

$$c_0 = \frac{T_0 - 2\operatorname{Re}\delta_{50}\ln\zeta_{50}}{2}, \quad c_{5n} = \frac{\delta_{50}}{n\zeta_{50}}. \quad (2.145)$$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5n}}{\zeta_5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{50}}{n\bar{\zeta}_{50}\zeta_5^n} = -\delta_{50}\ln\left(1 - \frac{1}{\bar{\zeta}_{50}\zeta_5}\right)$ и для $F_5(z_5)$ находим

$$F_5(z_5) = c_0 + D_5\ln\zeta_5 + \delta_{50}\ln(\zeta_5 - \zeta_{50}) - \delta_{50}\ln\left(1 - \frac{1}{\zeta_5\bar{\zeta}_{50}}\right). \quad (2.146)$$

Результат (2.146) можно получить и методом интегралов типа Коши.

Интегрируя (2.146), с точностью до постоянного слагаемого имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = r_5 R_5 \int F_5(z_5) \left(1 - \frac{m_5}{\zeta_5^2}\right) d\zeta_5 = \\ &= \Gamma_5 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} \right) + \left[A_5 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} \right) + B_5 \right] \ln\zeta_5 + \\ &+ \alpha_5^0 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} - \zeta_{50} - \frac{m_5}{\zeta_{50}} \right) \ln(\zeta_5 - \zeta_{50}) + \Phi_{50}(\zeta_5), \end{aligned} \quad (2.147)$$

где $B_5 = -\alpha_5^0 R_5 (m_5/\zeta_{50} + 1/\bar{\zeta}_{50})$,

$$\Phi_{50}(\zeta_5) = -\alpha_5^0 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} - \bar{\zeta}_{50} m_5 - \frac{1}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta_5\bar{\zeta}_{50}}\right).$$

Подставляя функции (2.143) и (2.147) в граничные условия на контуре отверстия (2.140), где $\zeta_k = \sigma$, $\bar{\zeta}_k = \sigma^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned}
& \Phi_{k0}(\sigma) + \bar{r}_k \overline{\Phi_{k0}(\sigma)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi_{k+1,0}(\sigma)} + \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi_{k+2,0}(\sigma)} = \\
& = -\Gamma_k R_k \left(\sigma + \frac{m_k}{\sigma} \right) - \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_k \sigma \right) - \\
& - \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+1} \sigma \right) - \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+2} \sigma \right) - \\
& - l_{k5} \Gamma_5 R_5 \left(\sigma + \frac{\bar{m}_5}{\sigma} \right) - \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 \bar{R}_5 \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_5 \sigma \right) - \\
& - \left\{ A_k R_k \left(\sigma + \frac{\bar{m}_k}{\sigma} \right) + B_k - \bar{r}_k \left[\bar{A}_k \bar{R}_k \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_k \sigma \right) + \bar{B}_k \right] - \right. \\
& - \bar{s}_{k+1} \left[\bar{A}_{k+1} \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+1} \sigma \right) + \bar{B}_{k+1} \right] - \\
& - \bar{e}_{k+2} \left[\bar{A}_{k+2} \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+2} \sigma \right) + \bar{B}_{k+2} \right] + \\
& + l_{k5} \left[A_5 R_5 \left(\frac{1}{\sigma} + m_5 \sigma \right) + B_5 \right] - \bar{n}_{k5} \left[\bar{A}_5 \bar{R}_5 \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_5 \sigma \right) + \bar{B}_5 \right] \left. \right\} \ln \sigma - \\
& - \alpha_k^0 R_k \left(\sigma + \frac{m_k}{\sigma} - \zeta_{k0} - \frac{m_k}{\zeta_{k0}} \right) \ln(\sigma - \zeta_{k0}) - \\
& - \bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_k \sigma - \bar{\zeta}_{k0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k0}} \right) \ln \left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k0} \right) - \\
& - \bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0 \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+1} \sigma - \bar{\zeta}_{k+1,0} - \frac{\bar{m}_{k+1}}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) \ln \left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k+1,0} \right) - \\
& - \bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0 \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+2} \sigma - \bar{\zeta}_{k+2,0} - \frac{\bar{m}_{k+2}}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) \ln \left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k+2,0} \right) - \\
& - l_{k5} \alpha_5^0 R_5 \left(\sigma + \frac{m_5}{\sigma} - \zeta_{50} - \frac{m_5}{\zeta_{50}} \right) \ln(\sigma - \zeta_{50}) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{n}_{k5}\bar{\alpha}_5^0\bar{R}_5\left(\frac{1}{\sigma}+\bar{m}_5\sigma-\bar{\zeta}_{50}-\frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{50}}\right)\ln\left(\frac{1}{\sigma}-\bar{\zeta}_{50}\right)- \\
& -l_{k5}\Phi_{50}(\sigma)-\bar{n}_{k5}\overline{\Phi_{50}(\sigma)}.
\end{aligned} \tag{2.148}$$

На основании (2.115), (2.116) легко показать, что коэффициент при $\ln \sigma$ равен нулю. Учитывая это и применяя метод интегралов типа Коши к условиям (2.148) и замечая, что для точек $|\zeta_k| > 1$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \sigma \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = -\frac{1}{\zeta_k}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \left(\sigma + \frac{m_k}{\sigma} - \zeta_{k0} - \frac{m_k}{\zeta_{k0}} \right) \ln(\sigma - \zeta_{k0}) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = -\frac{m_k}{\zeta_k} \ln \zeta_{k0}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+j}\sigma - \bar{\zeta}_{k+j,0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k+j,0}} \right) \ln\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k+j,0}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = \\
& = -\left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+j}\zeta_k - \bar{\zeta}_{k+j,0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k+j,0}} \right) \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+j,0}}\right) - \frac{1}{\zeta_k} \ln \bar{\zeta}_{k+j,0}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \left(\sigma + \frac{m_5}{\sigma} - \zeta_{50} - \frac{m_5}{\zeta_{50}} \right) \ln(\sigma - \zeta_{50}) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = -\frac{m_5}{\zeta_k} \ln \zeta_{50}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_{k+j}\sigma - \bar{\zeta}_{k+j,0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k+j,0}} \right) \ln\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{k+j,0}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \left(\frac{1}{\sigma} + \bar{m}_5\sigma - \bar{\zeta}_{50} - \frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln\left(\frac{1}{\sigma} - \bar{\zeta}_{50}\right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = \\
& = -\left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_5\zeta_k - \bar{\zeta}_{50} - \frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{50}}\right) - \frac{1}{\zeta_k} \ln \bar{\zeta}_{50}, \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \Phi_{k0}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = -\Phi_{k0}(\zeta_k), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \overline{\Phi_{k+j,0}(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \Phi_{50}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = -\Phi_{50}(\zeta_k), \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\sigma|=1} \overline{\Phi_{50}(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = 0,$$

найдем функции

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}(z_k) = & -\bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_k \zeta_k - \bar{\zeta}_{k0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k0}} \right) - \\ & -\bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0 \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+1} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+1,0} - \frac{\bar{m}_{k+1}}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) - \\ & -\bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0 \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+2} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+2,0} - \frac{\bar{m}_{k+2}}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) + \\ & + l_{k5} \alpha_5^0 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} - \bar{\zeta}_{50} m_5 - \frac{1}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_5 \bar{\zeta}_{50}} \right) - \\ & - \bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0 \bar{R}_5 \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_5 \zeta_k - \bar{\zeta}_{50} - \frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{50}} \right) - \frac{C_k}{\zeta_k}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

где

$$\begin{aligned} C_k = & \Gamma_k R_k m_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} \bar{R}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} \bar{R}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 R_5 m_5 + \\ & + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 \bar{R}_5 + A_k m_k \ln \zeta_{k0} + \bar{r}_k \bar{A}_k \ln \bar{\zeta}_{k0} + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1} \ln \bar{\zeta}_{k+1,0} + \\ & + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2} \ln \bar{\zeta}_{k+2,0} + l_{k5} A_5 m_5 \ln \zeta_{50} + \bar{n}_{k5} \bar{A}_5 \ln \bar{\zeta}_{50}. \end{aligned}$$

Подставляя (2.149) в (2.143), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + \left[A_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + B_k \right] \ln \zeta_k + \\ & + \alpha_k^0 R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} - \zeta_{k0} - \frac{m_k}{\zeta_{k0}} \right) \ln(\zeta_k - \zeta_{k0}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_k \zeta_k - \bar{\zeta}_{k0} - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{k0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k0}} \right) - \\
& -\bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0 \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+1} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+1,0} - \frac{\bar{m}_{k+1}}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) - \\
& -\bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0 \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+2} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+2,0} - \frac{\bar{m}_{k+2}}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) + \\
& + l_{k5} \alpha_5^0 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} - \bar{\zeta}_{50} m_5 - \frac{1}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_5 \bar{\zeta}_{50}} \right) - \\
& -\bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0 \bar{R}_5 \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_5 \zeta_k - \bar{\zeta}_{50} - \frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{50}} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{50}} \right) - \frac{C_k}{\zeta_k}.
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Дифференцируя (2.149) по z_k , будем иметь

$$\begin{aligned}
\Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + A_k \ln \zeta_k + \alpha_k^0 \ln(\zeta_k - \zeta_{k0}) - \\
& -\bar{r}_k \frac{\bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k}{R_k} \left(\frac{\zeta_k^2 \bar{m}_k - 1}{\zeta_k^2 - m_k} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k0}} \right) - \\
& -\bar{s}_{k+1} \frac{\bar{\alpha}_{k+1}^0 \bar{R}_{k+1}}{R_k} \left(\frac{\zeta_k^2 \bar{m}_{k+1} - 1}{\zeta_k^2 - m_k} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+1,0}} \right) - \\
& -\bar{e}_{k+2} \frac{\bar{\alpha}_{k+2}^0 \bar{R}_{k+2}}{R_k} \left(\frac{\zeta_k^2 \bar{m}_{k+2} - 1}{\zeta_k^2 - m_k} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+2,0}} \right) + \\
& + l_{k5} \frac{\alpha_5^0 R_5}{R_k} \left(\frac{\zeta_k^2 - m_5}{\zeta_k^2 - m_k} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{50}} \right) - \\
& -\bar{n}_{k5} \frac{\bar{\alpha}_5^0 \bar{R}_5}{R_k} \left(\frac{\zeta_k^2 \bar{m}_5 - 1}{\zeta_k^2 - m_5} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{50}} \right) + \\
& + \frac{1}{R_k (\zeta_k^2 - m_k)} \left[A_k R_k m_k + B_k \zeta_k - \frac{\alpha_k^0 R_k \zeta_k}{\zeta_{k0}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0 \bar{R}_k \frac{\bar{m}_k \zeta_k - \bar{\zeta}_{k0}}{\bar{\zeta}_{k0}} - \bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0 \bar{R}_{k+1} \frac{\bar{m}_{k+1} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+1,0}}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} - \\
& -\bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0 \bar{R}_{k+2} \frac{\bar{m}_{k+2} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+2,0}}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} + l_{k5} \alpha_5^0 R_5 \frac{\zeta_k - m_5 \bar{\zeta}_{50}}{\bar{\zeta}_{50}} - \\
& -\bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0 \bar{R}_5 \frac{\bar{m}_5 \zeta_k - \bar{\zeta}_{50}}{\bar{\zeta}_{50}} - C_k \Big]. \tag{2.151}
\end{aligned}$$

Из равенства (2.119) имеем

$$\frac{1}{\zeta_k} = \frac{z_k \mp \sqrt{z_k^2 - 4R_k^2 m_k}}{2R_k}. \tag{2.152}$$

Исходя из (2.119) и (2.152), находим

$$\begin{aligned}
\frac{d(1/\zeta_k)}{dz_k} &= -\frac{1}{R_k (\zeta_k^2 - m_k)}, \\
\frac{d(1/\zeta_k)}{dz_k} &= \frac{1}{2R_k m_k} \mp \frac{z_k}{2R_k m_k \sqrt{z_k^2 - 4R_k^2 m_k}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{R_k (\zeta_k^2 - m_k)} = -\frac{1}{2m_k R_k} \pm \frac{z_k}{2m_k R_k \sqrt{z_k^2 - 4R_k^2 m_k}}. \tag{2.153}$$

Подставляя выражения (2.152) и (2.153) в (2.149) и (2.151), получаем выражения комплексных потенциалов и их производных в областях z_k .

Если источник тепла отсутствует, то $\delta_{50} = \alpha_k^0 = A_k = B_k = 0$. Тогда

$$F_5(z_5) = \frac{T_0}{2};$$

$$\begin{aligned}\Phi_k(z_k) &= \Gamma_k z_k + \frac{\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5}{\zeta_k}, \\ \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k - \frac{\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5}{R_k (\zeta_k^2 - m_k)}.\end{aligned}\quad (2.154)$$

Если при отсутствии источника тепла контур отверстия не подкреплён, то на основе (2.113) имеем

$$\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 = 0, \quad (2.155)$$

а следовательно, $\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k$, $\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k$. Учитывая опять соотношения (2.113), легко показать, что в этом случае

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, D_x, D_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Gamma_k = (0, 0, 0, 0, 0), \quad (2.156)$$

т.е. напряжения и индукция в пластинке равны нулю всюду. Однако при этом компоненты напряжённости поля не будут равны нулю и вычисляются по формулам (2.130), в которых нужно заменить t_1, t_2 на t_1^σ, t_2^σ .

Если при отсутствии источника тепла контур отверстия жёстко подкреплён, то $\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5$ не равны нулю и функции сохраняют форму (2.154). В этом случае напряжения, индукция и напряжённость не будут равны нулю и вычисляются по общим для них формулам.

Интерес представляет случай пластинки с разрезом, например, вдоль оси Ox . Тогда $b=0$ и имеет место разрез $[-a, a]$. В этом случае $R_k = a/2$, $m_k = 1$, $A_k = \alpha_k^0 a/2$, $B_5 = \alpha_5^0 a \cdot \operatorname{Re}(1/\zeta_{50})$, $B_k = \alpha_k^0 a \cdot \operatorname{Re}(1/\zeta_{50})$. Вблизи концов разреза $\zeta_k = \pm 1$. Тогда на основании (2.151), (2.153) найдем

$$F_5(z_5) = O(1);$$

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{z_k}{2\sqrt{z_k^2 - a^2}} \left[-\frac{\alpha_k^0}{\zeta_{k0}} + 2\alpha_k^0 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\zeta_{50}} \right) - \frac{\bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0}{\bar{\zeta}_{k0}} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} - \frac{\bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} + \frac{l_{k5} \alpha_5^0}{\zeta_{50}} - \frac{\bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0}{\bar{\zeta}_{50}} \mp C'_k \right] + O(1). \quad (2.157)$$

Здесь

$$C'_k = \Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 + \\ + \alpha_k^0 \ln \zeta_{k0} + \bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0 \ln \bar{\zeta}_{k0} + \bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0 \ln \bar{\zeta}_{k+1,0} + \\ \bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0 \ln \bar{\zeta}_{k+2,0} + l_{k5} \alpha_5^0 \ln \zeta_{50} + \bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0 \ln \bar{\zeta}_{50}.$$

В полярных системах координат (r, θ) с началами в концах разреза

$$x = \pm a \pm r \cos \theta, \quad y = \pm r \sin \theta, \\ z_k = \pm (a + z_k^*), \quad z_k^* = r (\cos \theta + \mu_k \sin \theta).$$

Вблизи концов разреза r мало, $z_k^2 - a^2 = (z_k + a)(z_k - a) \approx 2a z_k^*$. Тогда из (2.143), (2.151), (2.153) вблизи концов трещины будем иметь

$$F_5(z_5) = O(1), \quad \Phi'_k(z_k) = \pm \frac{M_k}{\sqrt{z_k^*}} + O(1), \quad (2.158)$$

где

$$M_k = \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left[-\frac{\alpha_k^0}{\zeta_{k0}} + 2\alpha_k^0 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\zeta_{50}} \right) - \frac{\bar{r}_k \bar{\alpha}_k^0}{\bar{\zeta}_{k0}} - \frac{\bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1}^0}{\bar{\zeta}_{k+1,0}} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2}^0}{\bar{\zeta}_{k+2,0}} - \frac{\bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_5^0}{\bar{\zeta}_{50}} + \frac{l_{k5} \alpha_5^0}{\zeta_{50}} \mp C'_k \right], \quad (2.159)$$

$O(1)$ – ограниченная величина. Подставляя z_k^* в (2.158), найдем

$$\Phi'_k(z_k) = \pm \frac{M_k}{\sqrt{r} \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}} + O(1); \quad (2.160)$$

Тогда вблизи концов разреза (2.101)-(2.104)

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \frac{M_k}{\sqrt{r} \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}}, \quad (2.161)$$

$$(D_x, D_y) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \frac{M_k}{\sqrt{r} \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}}, \quad (2.162)$$

$$(E_x, E_y) = \mp 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \frac{M_k}{\sqrt{r} \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}}, \quad (2.163)$$

$$(u, v, \varphi) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0) M_k \sqrt{r} \sqrt{\cos \theta + \mu_k \sin \theta} + O(1). \quad (2.164)$$

Учитывая, что величинам σ_y , τ_{xy} , D_y и E_x вблизи концов разреза соответствуют коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности (КИНИН) k_1 , k_2 , k_D и k_E , для этих коэффициентов имеем

$$(k_1^\pm, k_2^\pm, k_D^\pm, k_E^\pm) = \pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, -r_k \mu_k) M_k. \quad (2.165)$$

В случае задач термомагнитоупругости вместо коэффициентов k_D^\pm , k_E^\pm приходится вычислять коэффициенты интенсивности магнитоупругости k_B^\pm , k_H^\pm . Их вычисление осуществляется по формулам для k_D^\pm , k_E^\pm заменой в них индукции и напряженности электрического поля D , E на индукцию и напряженность магнитного поля B , H .

Если источник тепла находится на оси Ox , то выражения КИНИН уп-

рошаются. В этом случае $y_0=0$, ζ_{k0} – вещественная величина, причем $\zeta_{k0}=\zeta_{k+j,0}=\zeta_{50}$. Тогда, учитывая соотношения (2.116), будем иметь

$$M_k = \mp \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left(\Gamma_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + \right. \\ \left. + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 + 2 \left(\alpha_k^0 + l_{k5} \alpha_5^0 \right) \ln \zeta_{50} \right). \quad (2.166)$$

Из выражений (2.165), (2.166) видно, что, если источник тепла находится на оси Ox , то значения КИНН в обеих вершинах трещины будут одинаковыми. Учитывая (2.155), для неподкрепленного разреза получим

$$(k_1^\pm, k_2^\pm, k_D^\pm, k_E^\pm) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, -r_k \mu_k \right) \frac{(\alpha_k^0 + l_{k5} \alpha_5^0) \ln \zeta_{50}}{\sqrt{2a}}.$$

Если в случае линейного разреза источник тепла отсутствует, то для неподкрепленного разреза, как и выше, получим, что напряжения и индукция в пластинке равны нулю всюду, $k_1^\pm = k_2^\pm = k_D^\pm = 0$. Компоненты напряженности (2.130) в рассматриваемом случае будут постоянными, а следовательно, не имеют сингулярностей, поэтому $k_E^\pm = 0$.

Если при отсутствии источника тепла берега разреза жестко подкреплены, то, как и раньше, функции сохраняют форму (2.154), а напряжения, индукция и напряженность вычисляются обычным образом. В этом случае вблизи концов разреза имеют место выражения (2.160) – (2.165), где

$$(k_1^\pm, k_2^\pm, k_D^\pm, k_E^\pm) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left(\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, -r_k \mu_k \right) \frac{1}{2\sqrt{2a}} \left[\Gamma_k + \right. \\ \left. + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 \right]. \quad (2.167)$$

Заметим, что полученное выше решение легко обобщить на случай пластинки с отверстием при действии конечного числа внутренних источников.

Так, в этом случае для комплексных потенциалов (2.146), (2.151) имеем

$$\begin{aligned}
 F_5(z_5) = & c_0 + D_5 \ln \zeta_5 + \sum_{j=1}^J \left[\delta_{5j}^0 \ln(\zeta_5 - \zeta_{5j}^0) - \delta_{5j}^0 \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_5 \bar{\zeta}_{5j}^0} \right) \right] \\
 \Phi_k(z_k) = & \Gamma_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + \left[A_k R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} \right) + B_k \right] \ln \zeta_k + \\
 & + \sum_{j=1}^J \left[\alpha_{kj}^0 R_k \left(\zeta_k + \frac{m_k}{\zeta_k} - \zeta_{kj}^0 - \frac{m_k}{\zeta_{kj}^0} \right) \ln(\zeta_k - \zeta_{kj}^0) - \right. \\
 & - \bar{r}_k \bar{\alpha}_{kj}^0 \bar{R}_k \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_k \zeta_k - \bar{\zeta}_{kj}^0 - \frac{\bar{m}_k}{\bar{\zeta}_{kj}^0} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{kj}^0} \right) - \\
 & - \bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1,j}^0 \bar{R}_{k+1} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+1} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+1,j}^0 - \frac{\bar{m}_{k+1}}{\bar{\zeta}_{k+1,j}^0} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+1,j}^0} \right) - \\
 & - \bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2,j}^0 \bar{R}_{k+2} \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_{k+2} \zeta_k - \bar{\zeta}_{k+2,j}^0 - \frac{\bar{m}_{k+2}}{\bar{\zeta}_{k+2,j}^0} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{k+2,j}^0} \right) + \\
 & + l_{k5} \alpha_{5j}^0 R_5 \left(\zeta_5 + \frac{m_5}{\zeta_5} - \bar{\zeta}_{5j}^0 m_5 - \frac{1}{\bar{\zeta}_{5j}^0} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_5 \bar{\zeta}_{5j}^0} \right) - \\
 & \left. - \bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_{5j}^0 \bar{R}_5 \left(\frac{1}{\zeta_k} + \bar{m}_5 \zeta_k - \bar{\zeta}_{5j}^0 - \frac{\bar{m}_5}{\bar{\zeta}_{5j}^0} \right) \ln \left(1 - \frac{1}{\zeta_k \bar{\zeta}_{5j}^0} \right) \right] - \frac{C_k}{\zeta_k}. \quad (2.168)
 \end{aligned}$$

где $D_5 = -\sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0$; Γ_k , A_k , B_k , α_{kj}^0 – постоянные, определяемые из систем

(2.113) – (2.116), в которых нужно положить

$$\Gamma_5 = r_5 c_0, \quad A_5 = R_5 \sum_{j=1}^J \alpha_{5j}^0, \quad B_5 = R_5 \sum_{j=1}^J \alpha_{5j}^0 \left(m_5 / \zeta_{5j}^0 + 1 / \bar{\zeta}_{5j}^0 \right), \quad \alpha_{5j}^0 = r_5 \delta_{5j}^0;$$

$$C_k = \Gamma_k R_k m_k + \bar{r}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_k + \bar{s}_{k+1} \bar{\Gamma}_{k+1} \bar{R}_{k+1} + \bar{e}_{k+2} \bar{\Gamma}_{k+2} \bar{R}_{k+2} + l_{k5} \Gamma_5 R_5 m_5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{n}_{k5} \bar{\Gamma}_5 \bar{R}_5 + \sum_{j=1}^J \left[\alpha_{kj}^0 R_k m_k \ln \zeta_{kj}^0 + \bar{r}_k \bar{\alpha}_{kj}^0 \bar{R}_k \ln \bar{\zeta}_{kj}^0 + \bar{s}_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1,j}^0 \bar{R}_{k+1} \ln \bar{\zeta}_{k+1,j}^0 + \right. \\
& \left. \bar{e}_{k+2} \bar{\alpha}_{k+2,j}^0 \bar{R}_{k+2} \ln \bar{\zeta}_{k+2,j}^0 + l_{k5} \alpha_{5j}^0 R_5 m_5 \ln \zeta_{5j}^0 + \bar{n}_{k5} \bar{\alpha}_{5j}^0 \bar{R}_5 \ln \bar{\zeta}_{5j}^0 \right].
\end{aligned}$$

Были проведены численные исследования ТЭУС (ТМУС) пластинки с круговым отверстием радиуса a или трещиной полудлины a (рис. 2.5). На контуре отверстия (трещины) поддерживалась относительная температура $T_0 = 0 K$, начальная температура $T_H = 293,15 K$. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, причем значения величин, кроме плотности внутренней энергии, приведены с точностью до безразмерного множителя $q \cdot 1 \text{Вт}^{-1}$.

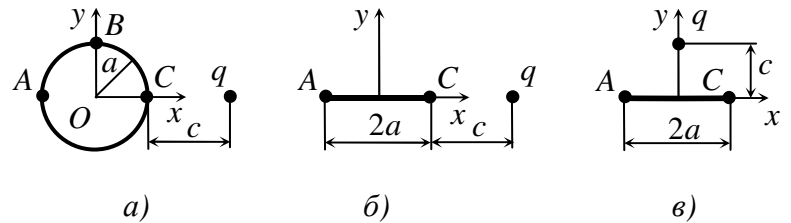


Рис. 2.5

В табл. А.2 приложения А для пластинки с круговым отверстием (рис. 2.5,а) даны значения некоторых величин в точках пластинки для различных значений отношения c/a расстояния от точки действия источника тепла до контура отверстия к радиусу отверстия. На рис. Б.1–Б.4 приложения Б для различных значений c/a приведены графики распределения некоторых величин вблизи контура отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого против часовой стрелки от положительного направления оси Ox . Из табл. А.2 и рис. Б.1.–Б.4 видно, что при сближении источника тепла с отверстием значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) вблизи отверстия по модулю уменьшаются. С «увеличением» проницаемости (с уменьшением коэффициентов восприимчивости) индукция D_θ (B_θ) растет. Напряжения и внутренняя энергия в пластинке из пьезомагнитной керамики ММ9 по модулю значительно превышают соответствующих значений в пластинке из пьезоэлектрических материалов ЭМ1 и ЭМ5 (до 10 раз напряжения, до 1000 и более раз внутренняя энергия).

Для пластинки с трещиной (рис. 2.5б,в) в табл. А.3 в зависимости от отношения c/a расстояния c к полудлине трещины a приведены значения КИНИН для точки С. При этом, в случае действия источника тепла в точке оси Ox $k_2=0$, для источника тепла в точке оси Oy $(k_1, k_D(k_B), k_E(k_H))|_A = (k_1, k_D(k_B), k_E(k_H))|_C$, $k_2|_A = -k_2|_C$. Из табл. А.3. следует, что при действии источника тепла в точке оси Ox значения КИНИН по модулю стремятся к нулю при $c/a \rightarrow \xi \in (0,3; 0,2)$ и растут при $c/a \rightarrow 0,01$. Если же источник тепла расположен в точке оси Oy , то $k_1, k_D(k_B), k_E(k_H)$ с уменьшением c/a по модулю растут, $\lim_{c/a \rightarrow 0} k_2 = 0$. При этом $k_1, k_D(k_B), k_E(k_H)$ для различных отношений $c/a \leq 0,3$ практически равны. Заметим, что значения КИНИН по модулю больше для пластинки из материала с большей проницаемостью (с меньшими коэффициентами восприимчивости). Значения k_1 и k_2 для пластинки из пьезомагнитных материалов (особенно из ММ9) в несколько раз больше, чем для пластинки из пьезоэлектрических материалов.

2.8. Выводы по разделу 2

В данном разделе приведены общие положения решения задачи теплопроводности и основные соотношения двумерной задачи термоэлектро- и термомангнитоупругости, введены комплексные потенциалы двумерной и плоской задач, найдены выражения основных характеристик ТЭУС (ТМУС), КИНИН, получены граничные условия для определения комплексных потенциалов, их общие представления в случае многосвязных областей.

Даны решения задач теплопроводности и термоэлектроупругости (термомангнитоупругости) для эллиптического цилиндра и диска, для пластинки с эллиптическим отверстием.

Установлено, что наибольшее влияние на значения напряжений и ин-

дукции оказывает проницаемость материалов тел (значения коэффициентов диэлектрической и магнитной восприимчивости). Напряжения и плотность внутренней энергии в пьезомагнитной пластинке значительно превышают по модулю соответствующих значений этих величин в пьезоэлектрической пластинке (до 10 раз напряжения, до 1000 и более раз плотность внутренней энергии).

По результатам, представленным в разделе 2, опубликованы работы [63, 65, 66].

РАЗДЕЛ 3

МНОГОСВЯЗНОЕ ТЕЛО И ПЛАСТИНКА

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим пьезоэлектрический (пьезомагнитный) цилиндр с продольными полостями, находящийся под действием неравномерно распределенного поля температур, а также, быть может, механических усилий и электрических (магнитных) полей в двумерном термоэлектроупругом (термомагнитоупругом) состоянии, не изменяющемся вдоль образующих полостей. Будем считать, что на поверхностях цилиндра индукция равна нулю, на внешней поверхности и на поверхностях N полостей задана температура, поверхности остальных полостей теплоизолированы. Кроме температурных воздействий, приложенных на цилиндрических поверхностях, на тело действуют внутренние сосредоточенные источники тепла по линиям, параллельным оси цилиндра. Поверхности цилиндра не подкреплены и не загружены или жестко подкреплены. Если внешняя поверхность уходит в бесконечность, то будем считать, что на бесконечности температура ограничена, напряжения, индукция и угол жесткого поворота тела как целого равны нулю.

В поперечном сечении тела будем иметь многосвязную область S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис 3.1), причем контуры L_l ($l = \overline{1, N}$) соответствуют поверхностям, где задана температура T_l , контуры L_l ($l = \overline{N+1, \mathcal{L}}$) – теплоизолированным поверхностям. Линиям приложения сосредоточенных источников тепла в по-

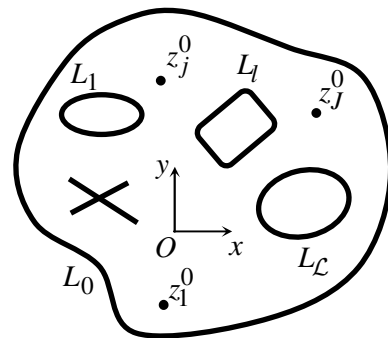


Рис. 3.1

перечном сечении соответствуют точки $z_j^0 = x_j^0 + i y_j^0$ ($j = \overline{1, J}$). В случае бесконечного тела контур L_0 уходит в бесконечность полностью.

Полости с криволинейными поверхностями будем аппроксимировать частями поверхностей эллиптических полостей, плоские разрезы рассматривать как поверхности с поперечными сечениями в виде эллипсов, одна из полуосей которых равна нулю. В связи с этим решение любых рассматриваемых ниже двумерных задач теплопроводности и термоэластостатики (термомеханики) для тела с полостями и плоскими трещинами будем сводить к решениям задач для тела с конечным числом произвольно расположенных эллиптических полостей. Тогда поперечным сечением тела будет область S (рис. 3.2), ограниченная внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), имеющих полуоси a_l , b_l и аффиксы центров x_{0l} , y_{0l}

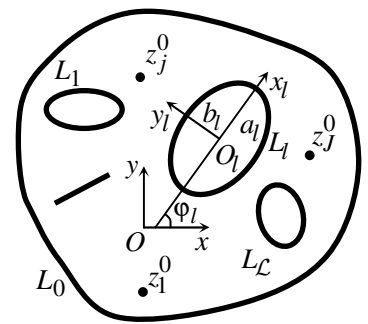


Рис. 3.2

3.2. Решение задачи теплопроводности

Комплексный потенциал задачи. Учитывая, что в рассматриваемом случае контуры отверстий L_l ($l = \overline{N+1, \mathcal{L}}$) теплоизолированы, а следовательно, для них коэффициенты при логарифмических слагаемых функций (2.41) $D_{5l} = 0$, комплексный потенциал представим в виде [56, 58]

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^N D_{5l} \ln(z_5 - z_{5l}) + \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 \ln(z_5 - z_{5j}^0) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} F_{5l}(z_5), \quad (3.1)$$

где c_0 – вещественная константа, равная нулю для конечной области и определяемая из граничных условий на контурах отверстий для бесконечной области; D_{5l} – неизвестные вещественные постоянные, определяемые из гра-

ничных условий на контурах отверстий; δ_{5j}^0 – известные постоянные (2.42), вычисляемые через мощности источников тепла; $F_{50}(z_5)$ и $F_{5l}(z_5)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) – функции, голоморфные внутри внешнего контура L_{50} и вне контуров отверстий L_{5l} , получаемых из соответствующих контуров исходной области аффинными преобразованиями (2.37).

Функцию $F_{50}(z_5)$, голоморфную в конечной области, ограниченной контуром L_{50} , представим рядом по полиномам Фабера и, преобразовав его в ряд Тейлора, запишем в виде [94]

$$F_{50}(z_5) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{50n} \left(\frac{z_5}{R_{50}} \right)^n, \quad (3.2)$$

где R_{50} – характерный геометрический размер, в качестве которого можно взять половину диаметра внешнего контура L_{50} ; c_0, c_{50n} – постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Для построения общего вида функций $F_{5l}(z_5)$ используем методы конформных отображений. Наряду с основной системой координат Oxy введем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 3.2) с началами в центрах L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов так, что в этих локальных системах координат параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (3.3)$$

а в основной системе Oxy имеют вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \quad (3.4)$$

Здесь φ_l – угол между осями Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часо-

вой стрелки; θ – параметр параметрического задания эллипса, который изменяется от 0 до 2π .

Учитывая соотношения (3.3), (3.4), отобразим внешность единичного круга $|\zeta_{5l}| \geq 1$ на внешность эллипса L_{5l} [61]:

$$z_5 = z_{5l} + R_{5l}(\zeta_{5l} + m_{5l}/\zeta_{5l}), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} z_{5l} &= x_{0l} + \mu_5 y_{0l}, \\ R_{5l} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_5 \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_5 \cos \varphi_l) \right] / 2, \\ m_{5l} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_5 \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_5 \cos \varphi_l) \right] / 2R_{5l}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда функции $F_{5l}(z_5)$ в областях ζ_{5l} , как сложные функции, будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$ и исчезают на бесконечности. Поэтому их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{5l} :

$$F_{5l}(z_5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n}. \quad (3.7)$$

Учитывая соотношения (3.2) и (3.7), для комплексного потенциала (3.1) в случае конечной многосвязной области получаем

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^N D_{5l} \ln \zeta_{5l} + G_{50}(z_5) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (3.8)$$

где

$$G_{50}(z_5) = \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 \ln(z_5 - z_{5j}^0), \quad \varphi_{5ln}(z_5) = \begin{cases} z_5^n R_{5l}^{-n}, & l=0, \\ \zeta_{5l}^{-n}, & l \geq 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

При выводе формулы (3.8) учтено, что

$$\ln(z_5 - z_{05l}) = \ln \zeta_{5l} + \ln R_{5l} + \ln \left(1 + \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}^2} \right)$$

и последние слагаемые этой суммы как функции, голоморфные вне $|\zeta_{5l}| \geq 1$, включены в функции $F_{5l}(z_5)$ ($l \geq 1$), голоморфные в этой же области.

По аналогии с приведенными выше выкладками для случая бесконечной многосвязной области с учетом (2.43) имеем

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{N-1} D_{5l} [\ln \zeta_{5l} - \ln \zeta_{5N}] + G_{5g}(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} G_{51}(z_5) &= \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 \left[\ln(z_5 - z_{5j}^0) - \ln \zeta_{5N} \right], \\ \varphi_{5ln}(z_5) &= \zeta_{5l}^{-n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Формулы (3.8) и (3.10) можно объединить в одну, записав их в виде

$$F_5(z_5) = c_0 + \sum_{l=1}^{N-1} D_{5l} [\ln \zeta_{5l} - \ln \zeta_{5N}] + G_{5g}(z_5) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (3.12)$$

в котором $g=0$ в случае конечной пластинки, $g=1$ для бесконечной пластинки; $G_{50}(z_5)$, $G_{51}(z_5)$ – функции вида (3.9) и (3.11).

На основании (3.5) имеем

$$\frac{d\zeta_{5l}}{dz_5} = \frac{\zeta_{5l}^2}{R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})}. \quad (3.13)$$

Тогда для производной функции (3.12) получаем

$$F'_5(z_5) = \sum_{l=1}^{N-g} D_{5l} \left(\frac{\zeta_{5l}}{R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})} - \frac{g \zeta_{5N}}{R_{5N}(\zeta_{5N}^2 - m_{5N})} \right) + \\ + G'_{5g}(z_5) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \phi'_{5ln}(z_5). \quad (3.14)$$

Здесь

$$G'_{51}(z_5) = \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 \left[\frac{1}{z_5 - z_{5j}^0} - \frac{g \zeta_{5N}}{R_{5N}(\zeta_{5N}^2 - m_{5N})} \right], \\ \phi'_{5ln}(z_5) = \begin{cases} n z_5^{n-1} R_{5l}^{-n}, & l=0, \\ -\frac{n}{\zeta_{5l}^{n-1} R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})}, & l \geq 1. \end{cases}$$

Приложение метода наименьших квадратов к определению неизвестных постоянных комплексного потенциала. Неизвестными в функциях (3.10), (3.12), (3.14) являются постоянные c_0 , D_{5l} , c_{5ln} . Их найдем, используя граничные условия на контурах S и метод наименьших квадратов.

Исходя из того, что на контурах L_l ($l = \overline{0, N}$) заданы значения температуры T_l , а контуры L_l ($l = \overline{N+1, \mathcal{L}}$) теплоизолированы, и учитывая граничные условия (2.38) и (2.40), составим функционал

$$J_T = \sum_{m=1}^{M_t} [2 \operatorname{Re} F_5(t_{5m}) - T_l]^2 + \sum_{m=M_t+1}^M [2 \operatorname{Re} i \delta_5 F'_5(t_{5m})]^2, \quad (3.15)$$

где при $m = \overline{1, M_t}$ $t_m \in L_l$ ($l = \overline{1, N}$), при $m = \overline{M_t+1, M}$ $t_m \in L_l$ ($l = \overline{N+1, \mathcal{L}}$); M

– количество всех точек на контурах.

Вычислим производные

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_0} [2 \operatorname{Re} F_5(z_5)] &= 2, \quad \frac{\partial}{\partial D_{5l}} [2 \operatorname{Re} F_5(z_5)] = \omega_l, \\
\frac{\partial}{\partial D_{5l}} [2 \operatorname{Re} F'_5(z_5)] &= \eta_l, \quad \frac{\partial}{\partial c_{5ln}} [2 \operatorname{Re} F_5(z_5)] = \phi_{5ln}(z_5), \\
\frac{\partial}{\partial c_{3ln}} [2 \operatorname{Re} i \delta_5 F'_5(z_5)] &= i \delta_5 \phi'_{5ln}(z_5),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_l &= 2 \operatorname{Re} [\ln \zeta_{5l} - \ln \zeta_{5N}], \\
\eta_l &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{i \delta_{5m} \zeta_{5l}}{R_{5l}(\zeta_{5l}^2 - m_{5l})} - \frac{i \delta_{5m} \zeta_{5N}}{R_{5N}(\zeta_{5N}^2 - m_{5N})} \right].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Учитывая функции (3.12), (3.14) и удовлетворяя условиям минимума $\partial J_T / \partial c_0 = 0$, $\partial J_T / \partial D_{5l} = 0$, $\partial J_T / \partial c_{5ln} = 0$ функционала (3.15), для нахождения неизвестных постоянных, входящих в комплексный потенциал (3.12) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M_t} \left[\sum_{r=1}^{N-1} D_{5r} \omega_r + \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \phi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp}) + 2c_0 \right] = \sum_{m=1}^{M_t} [T_l - G_{51}(t_m)], \\
&\sum_{m=1}^{M_t} \left[\sum_{r=1}^{N-1} D_{5r} \omega_r + \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \phi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp}) + 2c_0 \right] \omega_l + \\
&\quad + \sum_{m=M_t+1}^M \left[\sum_{r=1}^{N-1} D_{5r} \eta_r + \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (i c_{5rp} \delta_{5m} \phi'_{5rp} - i \bar{c}_{5rp} \bar{\delta}_{5m} \bar{\phi}'_{5rp}) \right] \eta_l = \\
&= \sum_{m=1}^{M_t} [T_l - G_{51}(t_m)] \omega_l - \sum_{m=M_t+1}^M i \delta_{5m} G'_{51}(t_m) \eta_l \quad (l = \overline{1, N-1}), \\
&\sum_{m=1}^{M_t} \left[\sum_{r=1}^{N-1} D_{5r} \omega_r + \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \phi_{5rp} + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp}) + 2c_0 \right] \phi_{5ln} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=M_t+1}^M \left[\sum_{r=1}^{N-1} D_{5r} \eta_r + \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(i c_{5rp} \delta_{5m} \phi'_{5rp} - i \bar{c}_{5rp} \bar{\delta}_{5m} \bar{\phi}'_{5rp} \right) \right] i \delta_{5m} \phi'_{5ln} = \\
& = \sum_{m=1}^{M_t} [T_l - G_1(t_m)] \phi_{5ln} - \sum_{m=M_t+1}^M i \delta_{5m} G'_{51}(t_m) \phi'_{5ln} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots). \quad (3.18)
\end{aligned}$$

После решения системы (3.18) постоянные c_0 , D_{5l} , c_{5ln} , а следовательно и функция (3.12), станут известными и можно вычислять температуру (2.34) и плотность потока тепла (2.35) в любой точке тела.

3.3. Решение задачи термоэлектроупругости (термомагнитоупругости)

Комплексные потенциалы. После нахождения $F_5(z_5)$ задача об определении ТЭУС рассматриваемого тела сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ ($k=1, 4$). По аналогии с построением $F_5(z_5)$ из (2.84) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + A_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi_{kln}(z_k), \quad (3.19)$$

где

$$A_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln \zeta_{kl} + \sum_{j=1}^J \alpha_{kj}^0 (z_k - z_{kj}^0) \ln (z_k - z_{kj}^0); \quad (3.20)$$

$$\phi_{kln}(z_k) = \begin{cases} R_{kl}^{-n} z_k^n, & l=0; \\ \zeta_{kl}^{-n}, & l \geq 1; \end{cases} \quad (3.21)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из неявных зависимостей [61]

$$z_k = x + \mu_k y = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right); \quad (3.22)$$

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2, \\ m_{kl} = \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2R_{kl}; \quad (3.23)$$

Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj} ($k=1, 4$) – постоянные, вычисляемые по формулам (2.89) – (2.92), в которых Γ_5 , B_{5l} , A_{5l} , α_{5j} – известные постоянные, определяемые по известной функции $F_5(z_5)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = r_5 c_0 z_5 + r_5 \sum_{l=1}^N D_{5l} R_{5l} \int \ln \zeta_{5l} \left(1 - \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}^2} \right) d\zeta_{5l} + \\ &+ r_5 \int \left[G_0(z_5) - \sum_{n=1}^{\infty} c_{50n} \varphi_{50n}(z_5) \right] dz_5 + r_5 \int \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n} R_{5l} \left(1 - \right. \\ &\left. - \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}^2} \right) d\zeta_{5l} = r_5 c_0 z_5 + \sum_{l=1}^N r_5 R_{5l} \left[D_{5l} \left(\zeta_{5l} + \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}} \right) \right] \ln \zeta_{5l} + \\ &+ \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} r_5 R_{5l} c_{5l1} \ln \zeta_{5l} + r_5 \sum_{j=1}^J \delta_{5j}^0 (z_5 - z_{5j}^0) \ln (z_5 - z_{5j}^0) + \Phi_{50}(z_5), \end{aligned}$$

где $\Phi_{50}(z_5)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_5 . Окончательно функцию $\Phi_5(z_5)$ запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_5(z_5) &= \Gamma_5 z_5 + \sum_{l=1}^N (A_{5l} z_5 + B_{5l}) \ln \zeta_{5l} + \sum_{l=N+1}^{\mathcal{L}} B_{5l} \ln \zeta_{5l} + \\ &+ \sum_{j=1}^J \alpha_{5j}^0 (z_5 - z_{5j}^0) \ln (z_5 - z_{5j}^0) + \Phi_{50}(z_5); \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\Gamma_5 = r_5 c_0, \quad A_{5l} = r_5 D_{5l} \quad (l=1, N),$$

$$B_{5l} = r_5 R_{5l} c_{5l1} - g_{5l} r_5 D_{5l} z_{5l} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (3.25)$$

$g_{5l} = 1$, если $l = \overline{1, N}$, и $g_{5l} = 0$ для других l . Заметим, что на основании (2.90) и (3.25), $A_{kl} = 0$ ($k = \overline{1, 5}, l = \overline{N+1, \mathcal{L}}$). Зная постоянные (3.25), по формулам (2.89) – (2.90) легко найти Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , α_{kj} ($k = 1, 4$).

Для производных функций $\Phi_k(z_k)$ будем иметь

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + A'_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k). \quad (3.26)$$

При этом

$$\begin{aligned} A'_k(z_k) = & \sum_{l=1}^N \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} + \frac{(A_{kl} z_k + B_{kl}) \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \\ & + \sum_{l=N+1}^{\mathcal{L}} \left[\frac{B_{kl} \zeta_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \sum_{j=1}^J \alpha_{kl} \ln(z_k - z_{kj}^0); \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\phi'_{kln}(z_k) = \begin{cases} n R_{kl}^{-n} z_k^{n-1}, & l = 0; \\ -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, & l \geq 1. \end{cases} \quad (3.28)$$

Приложение метода наименьших квадратов к определению неизвестных постоянных комплексных потенциалов. Неизвестными в функциях (3.19) являются постоянные a_{kln} . Их определение выполним из граничных условий на контурах области S с использованием метода наименьших квадратов. Исходя из граничных условий (2.78), составим функционал

$$J_{\sigma} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| 2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^5 \delta_s g_{si}^0 \Phi'_s(t_{sm}) - g_i(t_m) \right|^2 \quad (3.29)$$

где t_m при $m = \overline{1, M}$ – точки контуров L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$); M – количество всех точек на контурах.

Удовлетворив условиям его минимума $\partial J_\sigma / \partial a_{kln} = 0$, найдем

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left[2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^5 \delta_s g_{si}^0 \Phi'_s(t_{sm}) - g_i(t_m) \right] \delta_k g_{ki}^0 \frac{\partial \Phi'_k(t_{km})}{\partial a_{kln}} = 0. \quad (3.30)$$

Вычислив $\partial \Phi'_k(t_{km}) / \partial a_{kln} = \Phi'_{kln}(t_{km})$ и подставив эти выражения и (3.26) в уравнения (3.30), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{r=g}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{s=1}^4 2 \operatorname{Re} \left[\delta_s g_{si}^0 \Phi'_{srp} a_{kln} \right] \delta_k g_{ki}^0 \Phi'_{kln} = \\ & = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left[g_i(t_m) - 2 \operatorname{Re} \delta_5 g_{5i}^0 r_5 F_5(t_{5m}) - \right. \\ & \left. - \sum_{s=1}^4 \delta_s g_{si}^0 A'_s(t_{sm}) \right] \delta_k g_{ki}^0 \Phi'_{kln} \quad (l = \overline{g, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.31)$$

После решения системы (3.31) постоянные a_{kln} , а следовательно и функции (3.26), станут известными и можно вычислять основные характеристики ТЭУС (ТМУС), а также плотность внутренней энергии.

Аналогичным образом получается решение для случая плоской задачи. Последнее совпадает с приведенным, если в нем считать, что индекс k принимает значения 1, 2, 3.

3.4. Методика определения коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности

Если эллиптическая полость вырождается в плоскую трещину, то кроме основных характеристик ТЭУС (ТМУС), можно вычислять и коэффициенты

интенсивности напряжений, индукции и напряженности поля (КИНИН) для ее концов. Если указанной полости в поперечном сечении соответствует эллипс L_l , то он имеет полуось $b_l=0$ и становится разрезом $[-a_l, a_l]$. В этом случае $m_{kl}=1$ и в концах разреза $[-a_l, a_l]$, где $\zeta_{kl}=\pm 1$, производные комплексных потенциалов $\Phi'_k(z_k)$ ($k=\overline{1,4}$) имеют особенность, а функция $\Phi'_5(z_5)=r_5 F_5(z_5)$ ограничена.

В полярных системах координат (r, θ) с началом в концах разреза (рис. 3.3) комплексные потенциалы в этих концах имеют особенность порядка $r^{-1/2}$, где r расстояние от выбранной точки до вершины разреза. Указанную особенность имеют и напряжения, индукция и напряженность, т.е. вблизи концов разреза

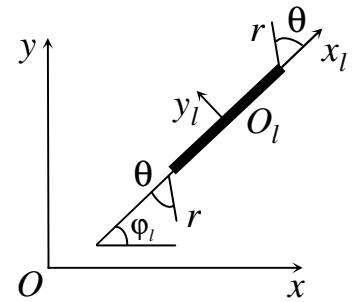


Рис. 3.3

$$\Phi'_k(z_k) = \frac{M_k}{2\sqrt{2z_k^*}} + O(1),$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sqrt{2r}} + O(1), \quad D_{i_l} = \frac{N_{i_l}^D}{\sqrt{2r}} + O(1), \quad E_{i_l} = \frac{N_{i_l}^E}{\sqrt{2r}} + O(1), \quad (3.32)$$

где M_k , $N_{i_l j_l}$, $N_{i_l}^D$, $N_{i_l}^E$ – коэффициенты сингулярности функций $\Phi'_k(z_k)$, напряжений $\sigma_{i_l j_l}$, индукции D_{i_l} и напряженности E_{i_l} поля в системе координат $O_l x_l y_l$; $O(1)$ – ограниченная вблизи концов разреза величина;

$$z_k^* = \pm(z_k - a_l) = r(\cos \theta + \mu_{kl} \sin \theta),$$

$$\mu_{kl} = \frac{\mu_k \cos \varphi_l - \sin \varphi_l}{\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l}.$$

При этом вблизи концов потенциал $F_5(z_5)$ и температура ограничены и

представляются в виде $F_5(z_5) = 2\sqrt{2z_5^*}M_5 + O(1)$, $T = \sqrt{2r}N_5 + O(1)$.

Используя формулу (3.32), по значениям σ_{ij} , D_{i_l} , E_{i_l} при $r \rightarrow 0$ можно найти значения N_{ij} , $N_{i_l}^D$, $N_{i_l}^E$, причем предельный переход при $r \rightarrow 0$, который, конечно, не зависит от направления подхода к концу разреза, можно выполнять по-разному. Наиболее удобным является переход, при котором угол θ для $x_l^* = r \cos \theta$, $y_l^* = r \sin \theta$ постоянен, а r стремится к нулю. Так как исследуемое предельное значение не должно зависеть от значения угла θ , то в практике численного вычисления этого предела переход будем осуществлять для $\theta = 0$, т.е. предельный переход осуществляется по направлению оси $O_l x_l$ локальной системы координат, иначе говоря, вдоль полуоси a_l эллипса L_l . Учитывая, что при $r \rightarrow 0$, $z_{kl}^* \rightarrow 0$, произведение $2\sqrt{2z_{kl}^*}O(1) \rightarrow 0$, из (3.32) получаем

$$\begin{aligned} M_k &= 2 \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \Phi'_k(z_k); \quad N_{i_l j_l} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_{i_l j_l}, \\ N_{i_l}^D &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} D_{i_l}, \quad N_{i_l}^E = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} E_{i_l}. \end{aligned}$$

Исходя из того, что вблизи концов плоского разреза напряжениям σ_{y_l} , $\tau_{x_l y_l}$, $\tau_{y_l z_l}$, индукции D_{i_l} и напряженности E_{i_l} поля соответствуют коэффициенты интенсивности напряжений нормального отрыва k_1 , поперечного сдвига k_2 , продольного сдвига k_3 , индукции k_D и напряженности k_E поля и учитывая указанные выше предельные переходы, получаем

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2r} \sigma_{y_l} \right), \quad k_2^\pm = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2r} \tau_{x_l y_l} \right), \\ k_3^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2r} \tau_{y_l z_l} \right), \quad k_D^\pm = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2r} D_{y_l} \right), \\ k_E^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sqrt{2r} E_{y_l} \right) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Здесь и в дальнейшем КИНИН со знаком «+» в локальной системе координат относится к правому концу разреза (с координатой $x_l = a_l$), со знаком «-» – к левому его концу (с координатой $x_l = -a_l$).

Принимая во внимание, что через основные характеристики ТЭУС для направления $O_l x_l$ имеют место формулы

$$\begin{aligned}\sigma_{y_l} &= \sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \sin \varphi_l \cos \varphi_l, \\ \tau_{x_l y_l} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l), \\ \tau_{y_l z_l} &= \tau_{yz} \cos \varphi_l - \tau_{xz} \sin \varphi_l, \\ D_{y_l} &= -D_x \sin \varphi_l + D_y \cos \varphi_l, \quad E_{y_l} = -E_x \sin \varphi_l + E_y \cos \varphi_l\end{aligned}\quad (3.34)$$

и подставляя (3.34) в (3.33), получаем следующие формулы для КИНИН:

$$\begin{aligned}k_1^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \left[\sigma_x \sin^2 \varphi_l + \sigma_y \cos^2 \varphi_l - 2\tau_{xy} \cos \varphi_l \sin \varphi_l \right], \\ k_2^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \left[(\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right], \\ k_3^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (\tau_{yz} \cos \varphi_l - \tau_{xz} \sin \varphi_l), \\ k_D^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (D_y \cos \varphi_l - D_x \sin \varphi_l), \\ k_E^\pm &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} (E_y \cos \varphi_l - E_x \sin \varphi_l).\end{aligned}\quad (3.35)$$

В случае задач термомагнитоупругости вместо коэффициентов k_D^\pm , k_E^\pm нужно вычислять коэффициенты интенсивности магнитоупругости k_B^\pm , k_H^\pm . Их вычисление осуществляется по формулам для k_D^\pm , k_E^\pm заменой в них индукции и напряженности электрического поля D , E на индукцию и напряженность магнитного поля B , H . В практике расчетов, придавая r различные значения, стремящиеся к нулю, находим последовательность значений.

При этом, начиная с некоторых r , эти значения постоянны и практически не изменяются и их как предельные и принимают за КИНИН. Как показывают расчеты, устойчивые значения КИНИН получаются при $10^{-5} \leq r \leq 10^{-10}$.

3.5. Исследование термоэлектро– и термомагнитоупругого состояния диска и пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами

Приведенные в пп. 3.2, 3.3 решения численно исследованы на сходимость и устойчивость результатов, по ним выполнены многочисленные расчеты по исследованию ТЭУС и ТМУС пластинок с отверстиями и трещинами различных форм, размеров и расположения. Рассматривались эллиптический диск с эллиптическим отверстием (в частном случае круговой диск с круговым отверстием или трещиной), круговой диск с двумя трещинами, бесконечная пластинка с различными сочетаниями отверстий и трещин.

Численные исследования проводились с целью выявления влияния геометрических характеристик сред и физико-механических свойств их материалов, способов загрузки и подкрепления контуров на значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) (напряжений и перемещений, индукции, напряженности и потенциала поля), КИНИН и плотности внутренней энергии. При проведении численных исследований количество членов в рядах (3.8), (3.19) для каждого контура, а также количество точек M на контурах L_l , для которых при использовании метода наименьших квадратов составлялись квадраты невязок, увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (например, отношение разности между точными и приближенными значениями основных характеристик ТЭУС (ТМУС) на границе к их максимальным значениям по модулю не превышало 10^{-2}). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо в (3.8) оставлять от 5 до 100 членов, на каждом контуре брать от 20 до 200 точек.

Эллиптический диск с отверстием или трещиной. Рассмотрим эллиптический диск с эллиптическим отверстием и центром на оси диска. Обозначим внешний и внутренний контуры, их полуоси соответственно через L_0 , a_0 , b_0 и L_1 , a_1 , b_1 , расстояние между их центрами – через h (рис. 3.4,а). Будем считать, что на контурах L_0 и L_1 индукция равна нулю, заданы значения температуры $T_0 = 0K$ и $T_1 = 1K$, они независимо друг от друга свободны от усилий или жестко подкреплены. Для этого случая в приведенном в п.п. 3.2 и 3.3 решении нужно принять $\mathcal{L} = 1$, $f_{il}(t) = 0$, все величины с индексом $k = 4$ положить равным нулю. Ниже описаны некоторые из полученных результа-

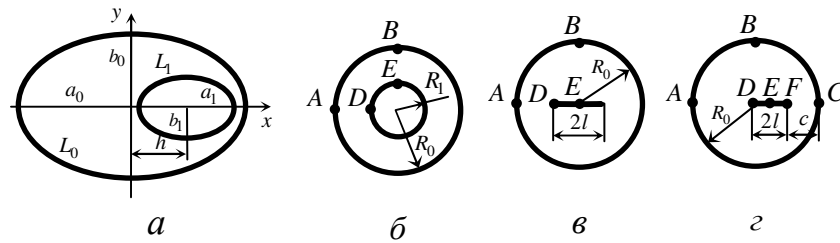


Рис. 3.4

тов. Значения основных характеристик и КИНИН даны с точностью до безразмерного множителя $T_1 \cdot 1K^{-1}$.

Круговое кольцо (рис. 3.4,б). В этом случае $a_0 = b_0 = R_0$, $a_1 = b_1 = R_1$, $h = 0$, где R_0 и R_1 – радиусы внешнего и внутреннего контуров кольца.

В табл. А.4 приведены значения плотности внутренней энергии U в некоторых точках кольца из различных материалов в зависимости от отношения R_1/R_0 . Результаты даны для двух задач: 1) задач термоэлектروупругости (для материалов ЭМ1, ЭМ2 и ЭМ6) и термомагнитоупругости (для материалов ММ7 и ММ9), когда на контурах L_0 и L_1 заданы значения относительной температуры $T_0 = 0K$, $T_1 = 1K$ и они свободны от усилий; 2) задач электроупругости (для материалов ЭМ1, ЭМ2 и ЭМ6) и магнитоупругости (для материалов ММ7 и ММ9) без учета температурного поля, когда контур L_0 свободен от усилий, а на L_1 приложено равномерное давление $p = 1MPa$. Во всех

задачах считалось, что $T_H = 293,15\text{ K}$. На рис. Б.5 для этого же кольца при $R_1/R_0 = 0,9$ изображены графики распределения плотности внутренней энергии в точках внешнего контура в зависимости центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox . Из данных табл. А.4 и рис. Б.5 видно, что вклад температурного поля в ТЭУС (ТМУС) является весомым и пренебрегать им нельзя. Особенно он значителен для кольца из ММ9 (значения плотности внутренней энергии при действии разности температур в 1 K в некоторых точках до 1000 и более раз превышают аналогичные значения при задании на L_1 давления 1 МПа).

В табл. А.5 и А.6 для кругового кольца с неподкрепленными контурами из различных материалов в зависимости от отношения R_1/R_0 приведены значения нормальных напряжений σ_θ вблизи соответственно внешнего и внутреннего контуров на площадках, перпендикулярных к ним. В табл. А.7 для этого же кольца даны значения плотности внутренней энергии U в некоторых его точках. На рис. Б.6 изображены графики распределения напряжений σ_θ вблизи внешнего контура для случая $R_1/R_0 = 0,9$. Сплошные линии соответствуют задачам термоэлектроупругости и термомагнитоупругости, штриховые – классической термоупругости. Для классической задачи термоупругости в уравнениях состояния (2.9) или (2.17) принималось, что $g_{ni}^T = \beta_{nm}^{\sigma,T} = t_n^\sigma = 0$ (для материалов ЭМ1, ЭМ2 и ЭМ6) или $\gamma_{ni}^T = \chi_{nm}^{\sigma,T} = m_n^\sigma = 0$ (для материалов ММ7 и ММ9). При этом уравнения для индукции и напряженности не учитывались.

Из данных табл. А.5–А.7 и рис. Б.6 видно, что для кольца из монокристалла ЭМ1, который отличается от других материалов (см. табл. 2.1) малой проницаемостью (большими коэффициентами восприимчивости $\beta_{nm}^{\sigma,T}$), влияние пьезоэффекта на значения напряжений и плотности внутренней энергии незначительно (напряжения и плотность внутренней энергии, вычисленные с учетом и без учета пьезоэффекта, отличаются друг от друга не более 3%), тогда как для кольца из пьезокерамик ЭМ2, ЭМ6, ММ8 и ММ9 это влияние ве-

лико (напряжения и плотность внутренней энергии, вычисленные с учетом и без учета пьезоэффекта, отличаются друг от друга более 20%, 70%, 400% и 500% соответственно). Но даже в случае монокристалла ЭМ1 возникают представляющие определенный интерес электрические характеристики, которые можно найти, решая задачу термоэлектроупругости.

Для различных значений R_1/R_0 в точках внешнего (сплошные линии) и внутреннего (штриховые линии) контуров кольца на рис. Б.7 изображены графики распределения индукции D_θ для кольца из ЭМ2 и ЭМ6, на рис. Б.8 – индукции B_θ и напряженности H_θ для кольца из ММ9. На рис. Б.9 для кольца из различных пьезоматериалов при $R_1/R_0 = 0,9$ приведены графики распределения компонент векторов напряженности E_θ , E_n для внешнего контура кольца.

Из данных рис. Б.7–Б.9 и других полученных результатов следует, что максимальные значения напряжений σ_θ , плотности внутренней энергии U при уменьшении ширины кольца около внешнего контура растут, около внутреннего – уменьшаются, а значения индукции D_θ , (B_θ) , наоборот, около внешнего контура уменьшаются, около внутреннего – растут (например, значения напряжений $\sigma_\theta|_{\theta=0}$ около внешнего контура в кольце из ЭМ1, ЭМ2, ММ7 и ММ9 при $R_1/R_0 = 0,99$ в 2; 4,5; 4,5 и 5 раз больше, чем аналогичные значения при $R_1/R_0 = 0,1$, значения плотности внутренней энергии $U|_{\theta=0}$ – в 4; 3; 2,7 и 2,7 раза больше). Что же касается напряженности поля E_θ (B_θ), она с уменьшением ширины кольца по модулю растет и около внешнего контура, и около внутреннего. При этом, как уже отмечалось, на значения напряжений и индукции значительно влияние проницаемости материалов: они велики в кольце из материалов ЭМ6 (среди пьезоэлектрических материалов ЭМ1–ЭМ6) и ММ9 (среди пьезомагнитных ММ7–ММ9), обладающих наибольшей проницаемостью (наименьшими коэффициентами восприимчивости $\beta_{nm}^{\sigma,T}$, $\chi_{nm}^{\sigma,T}$). Так, максимальные значения напряжений в пластинке из ЭМ6 и

ММ9 в 8 и 20 раз больше, чем напряжения в пластинке из ЭМ1 и ММ8 соответственно. На значения напряженности поля значительно и влияние пироэлектрических (пиромангнитных) модулей. Максимальных по модулю значений электрические (магнитные) характеристики ТЭУС (ТМУС) достигают в направлении поляризации (в направлении оси Oy). Заметим, что как и в пластинке с одним отверстием или трещиной, в кольце из пьезомагнитных материалов значения плотности внутренней энергии значительно больше (в некоторых точках кольца более 1000 раз) соответствующих значений в пьезоэлектрическом кольце. Значения напряжений в кольце из ММ9 в несколько раз больше аналогичных значений напряжений из других материалов.

В табл. А.8 для различных комбинаций подкреплений контуров кольца приведены значения напряжений и индукции в некоторых точках кольца. Рассматривались случаи, когда внешний и внутренний контур независимо друг от друга жестко подкреплены или свободны от внешних усилий. На рис. Б.10 для кольца с неподкрепленным внутренним контуром из ММ9 изображены графики распределения σ_θ вблизи его внешнего и внутреннего контуров, причем сплошные линии соответствуют случаю, когда внешний контур не подкреплен, штриховые – когда он жестко подкреплен. Как видно из табл. А.8 и рис. Б.10, способ подкрепления границ значительно влияет на значения всех величин. Так, жесткое подкрепление контуров приводит к росту напряжений в кольце, кроме кольца из ЭМ2, для которого подкрепление приводит к уменьшению значений индукции, и кольца из ММ7, когда подкрепление контуров практически не влияет на распределение индукции.

Круговой диск с центральной трещиной (рис. 3.4,в). Численными исследованиями установлено, что трещину можно считать эллиптическим отверстием, если отношение его полуосей менее 10^{-3} . Для рассматриваемого кругового диска с центральной трещиной считалось, что $a_0 = b_0 = R_0$, $a_1 = l$, $b_1 / a_1 = b_1 / l < 10^{-3}$, $h = 0$, где R_0 – радиус внешнего контура, l – полудлина трещины, контуры не подкреплены, температура на них $T_0 = 0K$, $T_1 = 1K$.

В табл. А.9 для различных l/R_0 приведены значения некоторых величин, а на рис. Б.11, Б.12 изображены графики распределения напряжений σ_θ , напряженности E_θ вблизи внешнего контура диска из различных материалов. Сплошные и штриховые линии рисунков относятся к значениям l/R_0 , равным 0,9 и 0,1. На рис. Б.13 приведены графики изменения КИНИН k_1 в зависимости отношения l/R_0 . Как следует из табл. А.9 и рис. Б.11–Б.13, с увеличением длины центральной трещины напряжения и индукция около внешнего контура вблизи перемычки растут (например, значения напряжений $\sigma_x|_A$ в кольце из ЭМ1, ЭМ6, ММ8 и ММ9 при $l/R_0 = 0,9$ в 7; 7,5; 16 и 30 раз больше, чем аналогичные значения при $l/R_0 = 0,1$), значения КИНИН сначала растут, затем уменьшаются. При этом значения напряжений в диске из пьезомагнитных материалов при $l/R_0 > 0,5$ в несколько раз больше, чем в диске из пьезоэлектрических материалов. Заметим, что на значения КИНИН наибольшее влияние оказывает проницаемость материалов: чем она «больше», тем больше значения k_1 , k_D , k_B и меньше значения k_E , k_H .

Круговой диск с нецентральной диаметральной трещиной (рис. 3.3,з). Для нецентральной трещины в предыдущем решении $h \neq 0$. Для этого случая, когда контур диска не подкреплён и $l/R_0 = 0,5$, $T_0 = 0K$, $T_1 = 1K$, в табл. А.10 приведены значения величин в зависимости от значений отношения c/R_0 , где $c = R_0 - h - l$ – длина малой перемычки между трещиной и контуром диска. Из табл. А.10 следует, что с приближением трещины к внешнему контуру напряжения и индукция около этого контура вблизи перемычки по модулю растут. При этом КИНИН для ближайшей к контуру вершины по модулю сначала уменьшаются, а затем растут. В других зонах диска значения характеристик по модулю уменьшаются или изменяются незначительно.

Круговой диск с двумя трещинами (рис. 3.5). Рассмотрим круговой диск с внешним контуром L_0 , радиусом R_0 и трещинами с контурами L_1 , L_2 и полудлинами l . На контуре L_0 относительная температура равна $T_0 = 0K$,

на трещинах – $T_1 = 1K$ при $T_H = 293,15K$. Контур диска и берега трещин не подкреплены, на них индукция равна нулю. В данном случае в приведенном в п.п. 3.2, 3.3 решении нужно принять $L = 2$, $f_{il}(t) = 0$ ($i = \overline{1, 3}$), все величины с индексом $k = 4$ положить равным нулю. Численные исследования были проведены для диска при различных вариантах расположения трещин (рис. 3.5). Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

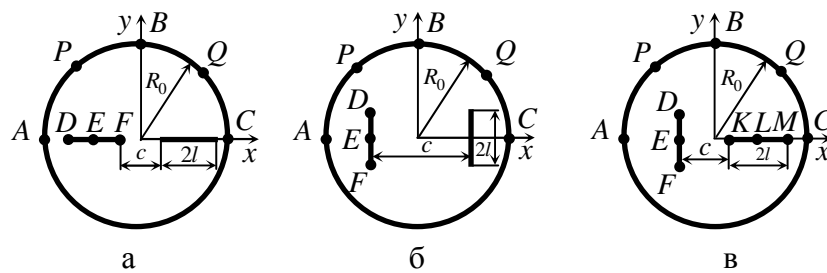


Рис. 3.5

Круглый диск с диаметрными трещинами (рис 3,5а). Пусть в круговом диске радиуса R_0 на расстоянии c друг от друга имеются две равноотстоящие от центра диска диаметрными трещины полудлины l . В табл. А.11 для случая $l = 0,2R_0$ приведены значения некоторых основных характеристик ТЭУС (ТМУС) и КИНИН (в данном случае $k_2 = 0$) для левой трещины в зависимости от отношения c/R_0 . На рис. Б.14 и Б.15 изображены графики распределения индукций D_θ , B_θ и плотности внутренней энергии U в точках контура диска из различных материалов. Сплошные и штриховые линии относятся к значениям c/R_0 , равным 1 и 0,1. Из табл. А.11 и рис. Б. 14–Б.15 видно, что с увеличением расстояния между трещинами (при их сближении с внешним контуром) значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) и плотности внутренней энергии в точках внешнего контура, близких к вершинам трещин, по модулю растут (например, значения напряжений $\sigma_y|_A$ в кольце из ЭМ1, ЭМ3, ЭМ5 и ММ9 при $c/R_0 = 0,1$ в 2,4; 2,3; 2,3 и 4,8 раз больше, чем аналогичные значения при $c/R_0 = 1,0$, значения индукции $D_y|_A$ – в 67; 53; 10 и 1,3 раза). Значения КИНИН k_1 для диска из пьезоэлектрических

материалов с увеличением c/R_0 от 0,1 до 1,0 уменьшается (приблизительно в 1,5–2 раза), для диска из пьезомагнитных материалов – увеличиваются (приблизительно в 1,2 раза). Остальные КИНИН сначала уменьшаются, а затем растут.

Круглый диск с параллельными трещинами (рис. 3.5,б). Пусть в круговом диске имеются две симметричные параллельные трещины, расстояние между которыми равно c . Для этого случая в табл. А.12 приведены значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) в некоторых точках и КИНИН для верхних вершин в зависимости от отношения c/R_0 . Считалось, что $l = 0,5R_0$. В табл. А.12 значения КИНИН для нижних вершин трещин не приведены, так как для них $k_1^- = k_1^+$, $k_2^- = -k_2^+$, $k_D^-(k_B^-) = -k_D^+(k_B^+)$, $k_E^-(k_H^-) = -k_E^+(k_H^+)$. На рис. Б.16, Б.17 даны графики распределения напряжений σ_θ и плотности внутренней энергии U в точках контура диска из различных материалов. Из описанных результатов следует, что вблизи внешнего контура наибольшего по модулю значения основные характеристики ТЭУС (ТМУС) достигают в ближайших к вершине трещины точках. Увеличение расстояния между трещинами приводит к росту значений основных характеристик ТЭУС (ТМУС) и внутренней энергии вблизи внешнего контура. Значение КИНИН k_1 по модулю при сближении трещин с внешним контуром сначала растет, а затем убывает, причем наибольшего своего значения он достигает, когда вершина трещины находится примерно на одинаковом расстоянии от другой трещины и от внешнего контура диска. Значения остальных КИНИН по модулю больше при расположении трещин вблизи внешнего контура, чем вблизи друг друга. Значения КИНИН k_1 , k_2 для диска из ММ9 приблизительно в 10 раз больше значений аналогичных величин в диске из других материалов.

Круглый диск с двумя взаимно перпендикулярными трещинами (рис. 3.5,в). Пусть в круговом диске радиуса R_0 имеются две взаимно перпендикулярные трещины вдоль диаметра и перпендикулярно к нему, находящиеся на расстоянии c друг от друга. В табл. А.13 для этого случая приве-

дены значения некоторых величин в зависимости от отношения c/R_0 . Считалось, что $l/R_0 = 0,5$, центр левой трещины находится в точке $(0,5R_0, 0)$, расстояние c между трещинами увеличивалось за счет движения правой трещины по оси Ox . В табл. А.13 не приведены КИНИН для нижней вершины левой трещины, т. к. для этой трещины $k_1^- = k_1^+$, $k_2^- = -k_2^+$, $k_D^- = -k_D^+$, $k_E^- = -k_E^+$, $k_B^- = -k_B^+$, $k_H^- = -k_H^+$, кроме того, не даны равные нулю КИНИН k_2^\pm для правой трещины. Из данных табл. А.13 видно, что при сближении правой трещины с внешним контуром значения КИНИН и значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) вблизи последнего контура растут.

Пластинка с двумя отверстиями или трещинами (рис. 3.6). Были проведены численные исследования ТЭУС и ТМУС пластинки с двумя различными эллиптическими отверстиями, на контурах которых заданы различные значения температуры. В этом случае в приведенном в п. 3.2 и п. 3.3 решении для бесконечной области нужно принимать количество отверстий $\mathcal{L} = 2$, $f_{il}(t) = 0$ ($i = 1, 3$) и учитывать, что все величины с индексом $k = 4$ равны нулю. С помощью исследований установлено, что эллипс, у которого отношение полуосей менее 10^{-3} может рассматриваться трещиной.

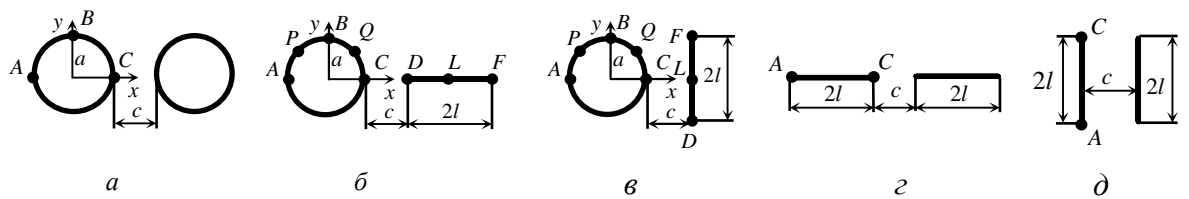


Рис. 3.6

Подробные численные исследования были проведены для пластинки с двумя круговыми отверстиями, с круговым отверстием и трещиной, с двумя трещинами. Считалось, что на контурах заданы значения относительной температуры $T_1 = 0K$ и $T_2 = 1K$ при $T_H = 293,15K$. Контур отверстия свободны от внешних усилий и на них индукция равна нулю. Ниже описаны некоторые из полученных результатов, значения основных характеристик ТЭУС

(ТМУС) и КИНИН даны с точностью до безразмерного множителя $T_2 \cdot 1K^{-1}$.

Пластинка с двумя круговыми отверстиями (рис. 3.6,а). Рассмотрим пластинку с двумя круговыми отверстиями радиуса a , расстояние между которыми равно c .

Для этого случая в табл. А.14, А.15 приведены значения напряжений σ_θ и компонент индукции D_θ , B_θ вблизи контура левого отверстия для различных значений отношения c/a . На рис. Б.18 и Б.19 изображены графики распределения напряженностей E_θ , H_θ и плотности внутренней энергии в точках контура левого отверстия. При этом сплошные и штриховые линии соответствуют случаю значениям c/a , равным 0,1 и 10. Из данных табл. А.14, А.15 и рис. Б.18, Б.19 видно, что при уменьшении c/a от 10 до 0,01 в точках перемены напряжения и индукция растут (приблизительно в 1,5–1,7 раза и 2–4 раза), компоненты напряженности – уменьшаются, причем наибольших значений индукции D_θ и B_θ достигают при $\theta = \pi/6$. Значения других основных характеристик ТЭУС (ТМУС) изменяются незначительно. Значения плотности внутренней энергии при сближении отверстий в точках перемены увеличиваются для пластинок из ЭМ1 и ЭМ2, уменьшаются для пластинок из ЭМ6 и ММ9. В других точках пластинки значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) изменяются незначительно. Отметим также, что наибольшее влияние на значения напряжений и индукции оказывает проницаемость материалов (коэффициенты восприимчивости): напряжения и индукция тем меньше, чем меньше проницаемость материала (больше коэффициенты восприимчивости).

Пластинка с круговым отверстием и трещиной (рис. 3.6,б,в). Пусть в пластинке с круговым отверстием радиуса a имеется горизонтальная (рис. 3.6,б) или вертикальная (рис. 3.6,в) трещина полудлины l . Расстояние между контуром отверстия и трещиной равно c .

В табл. А.16 и А.17 для пластинок с круговым отверстием и соответственно диаметральной или вертикальной трещиной приведены значения неко-

торых величин для различных значений отношения c/a , а на рис. Б.20 и Б.21 изображены графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура отверстия. При этом, считалось, что $l = a$, сплошные кривые соответствуют значению $c/a = 0,1$, штриховые – значению $c/a = 10$. Видно, что при сближении отверстия с трещиной вдоль диаметра КИНИН (кроме пластинки из ЭМ1, где k_1^\pm – уменьшается, остальные увеличиваются) по модулю уменьшаются, а напряжения в точках перемычки вблизи отверстия растут (например, значения напряжений $\sigma_y|_C$ при $c/a = 0,1$ в 1,5–2 раз больше, чем аналогичные значения при $c/a = 10$). При сближении отверстия с параллельной диаметру трещиной напряжения вблизи контура отверстия и КИНИН по модулю растут: значения напряжений $\sigma_y|_C$ при $c/a = 0,1$ для пластинки из материалов ЭМ1, ЭМ2, ММ8 и ММ9 при $c/a = 0,01$ в 36; 39; 40 и 37 раз больше, чем аналогичные значения при $c/a = 10$; значения k_1 – в 4; 7; 12 и 4,8 раза, значения остальных КИНИН – более чем в 100 раз. В других точках пластинки напряжения изменяются незначительно. Отметим также, что поведение остальных характеристик ТЭУС (ТМУ) вблизи контура отверстия в обоих случаях имеет такой же характер, что и для напряжений. Как и в диске с трещиной на значения КИНИН наибольшее влияние оказывает проницаемость материалов: чем она «больше», тем больше значения k_1 , k_D , k_B и меньше значения k_E , k_H .

Пластика с двумя трещинами (рис. 3.6,з,д). В табл. А.18, А.19 для случаев, когда в пластике имеются две коллинеарные или параллельные трещины, приведены значения КИНИН в зависимости от отношения c/l , где c – расстояние между трещинами, l – их полудлина. Видно, что при сближении коллинеарных трещин значения КИНИН по модулю уменьшается; при сближении параллельных трещин k_1 уменьшается, а остальные КИНИН увеличиваются (например, при уменьшении c/l от 10 до 0,01 k_2 растет более, чем в 20 раз для пластинки из ЭМ2, ЭМ6, ММ9, в 12 и 38 раз – для ЭМ1 и ММ8). В

пластинке из материала с большими по модулю $\beta_{nm}^{\sigma,T} (\chi_{nm}^{\sigma,T})$ значения КИН меньше, чем в пластинке из материала с меньшими $\beta_{nm}^{\sigma,T} (\chi_{nm}^{\sigma,T})$.

3.6. Выводы по разделу 3

В данном разделе приведены решения задач теплопроводности и термоэлектроупругости (термомагнитоупругости) для конечных и бесконечных тел с отверстиями и трещинами. С использованием конформных отображений и разложений функций в ряды по полиномам Фабера и в ряды Лорана получены общие представления комплексных потенциалов, выделены особенности производных комплексных потенциалов в концах плоских (прямолинейных разрезов), представляемых «узкими» эллипсами, получены выражения для КИН. С использованием дискретного метода наименьших квадратов рассматриваемые задачи сведены к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Численными исследованиями установлена высокая эффективность предложенной методики решения задач, устойчивость получаемых результатов.

Приведены результаты численных исследований ТЭУС и ТМУС для кругового кольца, кругового диска с одной или двумя трещинами, бесконечной пластинки с двумя круговыми отверстиями, круговым отверстием и трещиной, с двумя трещинами.

Выявлено влияние физико-механических свойств материалов диска и пластинки, геометрических размеров отверстий и трещин, их количества, сочетания и месторасположения на значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС), КИН и плотности внутренней энергии. Численными исследованиями установлено, что вклад температурного поля в ТЭУС и ТМУС является весомым и пренебрегать им нельзя. Пренебречь нельзя также влиянием

пьезоэффекта при исследовании термонапряженного состояния.

При сближении отверстий и трещин друг с другом значения основных характеристик ТЭУС и ТМУС, плотности внутренней энергии в точках перемычек и КИНИН растут.

Жесткое подкрепление внешней границы или контуров отверстий приводит к росту напряжений.

Наибольшее влияние на значения основных характеристик, плотности внутренней энергии и КИНИН оказывает проницаемость материалов: чем она больше, тем больше значения напряжений, индукции, плотности внутренней энергии, КИНИН. Так, максимальные значения напряжений в кольце из материалов ЭМ6 и ММ9, обладающих большей проницаемостью, в 8 и 20 раз больше, чем напряжения в кольце из материалов ЭМ1 и ММ8 соответственно. На значения напряженности поля значительно влияние пьезоэлектрических (пиромагнитных) модулей. Максимальных по модулю значений электрические (магнитные) характеристики ТЭУС (ТМУС) достигают в направлении поляризации. В пластинках из пьезомагнитных материалов значения напряжений и плотности внутренней энергии значительно больше соответствующих значений в пьезоэлектрической пластинке.

Включенные в раздел 3 результаты опубликованы в статьях [64, 184].

РАЗДЕЛ 4

МНОГОСВЯЗНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И ПОЛУПЛОСКОСТЬ

4.1. Решение задачи с точным удовлетворением граничным условиям на плоской границе

Постановка задачи. Рассмотрим нижнее полупространство с внутренними продольными полостями, находящееся под действием неравномерно распределенного поля температур, а также, быть может, механических усилий и электрических (магнитных) полей в двумерном термоэлектродупругом (термомагнитоупругом) состоянии, не изменяющемся вдоль образующих полостей. Будем считать, что на границе полупространства поддерживается относительная температура, равная нулю, на поверхностях полостей заданы значения температуры. Плоская граница и поверхности полостей не подкреплены и не нагружены внешними усилиями, индукция на них равна нулю. На бесконечности относительная температура равна нулю.

В поперечном сечении полупространства будем иметь многосвязную нижнюю полуплоскость S (рис. 4.1) с

прямолинейной границей L^+ и отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), причем граница L^+ и контуры L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) соответствуют плоской границе и поверхно-

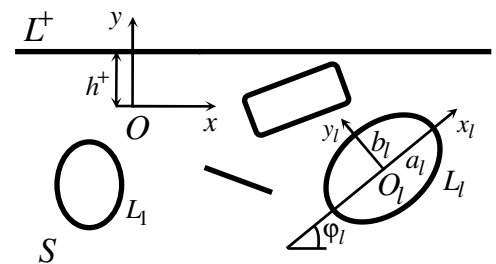


Рис. 4.1

стям полостей, где заданы значения относительных температур $T^+ = 0$ и T_l соответственно.

Полости с криволинейными поверхностями будем аппроксимировать частями поверхностей эллиптических полостей. Плоские разрезы будем рассматривать как поверхности с поперечными сечениями в виде эллипсов, одна

из полюсов которых весьма мала (в пределе равна нулю). В связи с этим решение любых двумерных задач теплопроводности, термоэлектростатости и термомагнитоупругости для полупространства с полостями и плоскими трещинами будем сводить к решениям задач для полупространства с конечным числом эллиптических полостей, не пересекающих плоскую границу. Тогда поперечным сечением будет нижняя полуплоскость S с прямолинейной границей L^+ , ослабленная эллиптическими отверстиями L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$).

Решение задачи теплопроводности. В рассматриваемой задаче комплексный потенциал теплопроводности $F_5(z_5)$ определен в многосвязной нижней полуплоскости S_5 , получаемой из заданной полуплоскости S аффинным преобразованием (2.37), причем прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) в области S соответствуют прямолинейная граница L_5^+ и контуры отверстий L_{5l} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) области S_5 . В рассматриваемом случае комплексный потенциал теплопроводности (2.41) представим в виде

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}^*(z_5) + F_{51}(z_5), \quad (4.1)$$

где D_{5l} – величины, связанные с потоком тепла через L_l и вычисляемые по формуле (2.42); $F_{50}^*(z_5)$ – функция, голоморфная в сплошной нижней полуплоскости S_5 , за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, где она может иметь логарифмическую особенность; $F_{51}(z_5)$ – функция, голоморфная вне эллипсов L_{5l} . Используя конформные отображения (3.5) внешности единичного круга на внешности эллипсов и разлагая в отображенных областях последнюю функцию в ряды Лорана [61], получаем

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} \ln \zeta_{5l} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5l,n}}{\zeta_{5l}^n} + F_{50}^*(z_5). \quad (4.2)$$

Здесь $c_{5\ln}$ – неизвестные постоянные; ζ_{5l} – переменные, определяемые из неявных зависимостей (3.5)

Подставляя комплексный потенциал (4.1) в граничное условие (2.38) на прямолинейной границе, получаем

$$F_{50}^*(t_5) + \overline{F_{50}^*(t_5)} + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[D_{5l} \ln \zeta_{5l} + D_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l} \right] + \\ + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5\ln}}{\zeta_{5l}^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_{5\ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right] = 0. \quad (4.3)$$

При этом, учитывая, что на L_5^+

$$t_5 = x + \mu_5 h^+, \quad \bar{t}_5 = x + \bar{\mu}_5 h^+ = t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5) h^+, \quad (4.4)$$

из (3.5) находим, что $\bar{\zeta}_{5l}$ – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z_5 = \bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+ + \bar{R}_{5l} \left(\bar{\zeta}_{5l} + \frac{\bar{m}_{5l}}{\bar{\zeta}_{5l}} \right) \quad (4.5)$$

внешности единичного круга $|\bar{\zeta}_{5l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l}^+ в верхней полуплоскости S_5^+ с центрами в точках $\bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+$. Здесь h^+ – расстояние от центра выбранной системы координат до границы полуплоскости.

Функцию $F_{50}^*(z_5)$ выберем в виде

$$F_{50}^*(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l^+ \ln \bar{\zeta}_{5l} + F_{50}(z_5), \quad (4.6)$$

где $F_{50}(z_5)$ – функция, голоморфная в сплошной нижней полуплоскости,

включая бесконечно удаленную точку; D_l^+ – неизвестные постоянные. Из (3.5) и (4.5) следует, что в точках прямолинейной границы L^+ имеют место равенства $\overline{\zeta_{5l}}(t_5) = \zeta_{5l}(t_5)$. Учитывая это и выражения (4.6) и требуя, чтобы на прямолинейной границе коэффициенты при логарифмах в (4.3) обращались в нуль, получаем $D_{5l}^+ = -D_{5l}$. Тогда из граничного условия (4.3) следует, что

$$F_{50}(t_5) + \overline{F}_{50}\left(t_5 + (\bar{\mu}_5 - \mu_5)h^+\right) + \sum_{l=1}^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5l} \ln \zeta_{5l}^n}{\zeta_{5l}^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l}^n}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right] = 0.$$

Применяя к последнему соотношению метод интегралов типа Коши, будем иметь, что

$$F_{50}(z_5) = - \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{c}_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l}^n}{\bar{\zeta}_{5l}^n},$$

и окончательное выражение комплексного потенциала (4.2) примет вид

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^L \left[D_{5l} \ln \zeta_{5l} - D_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l} \right] + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{5l} \ln \zeta_{5l}^n}{\zeta_{5l}^n} - \frac{\bar{c}_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l}^n}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right]. \quad (4.7)$$

Неизвестные постоянные, входящие в (4.7) будем определять из граничных условий только на контурах отверстий методом наименьших квадратов.

Исходя из граничных условий (2.38), составим функционал

$$J_T = \sum_{m=1}^M \left[2 \operatorname{Re} F_5(t_{5m}) - T_l \right]^2, \quad (4.8)$$

где $t_m \left(m = \overline{1, M} \right)$ – точки, выбираемые на контурах отверстий L_l .

Удовлетворяя условиям минимума $\partial J_T / \partial D_{5l} = 0$, $\partial J_T / \partial c_{5ln} = 0$ функционала (4.8), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T_l \right] \omega_{5l} &= 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \\ \sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T_l \right] \varphi_{5ln} &= 0 \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $\omega_{5l} = 2\operatorname{Re}[\ln \zeta_{5l} - \ln \bar{\zeta}_{5l}]$, $\varphi_{5ln} = \zeta_{5l}^{-n}(t_m) - \overline{\zeta_{5l}^{-n}(t_m)}$.

Подставив (4.7) в (4.9), для определения постоянных D_{5l} , c_{5ln} получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left[\sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_r + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \varphi_{5rp} - \bar{c}_{5rp} \bar{\varphi}_{5rp}) \right] \omega_l &= \sum_{m=1}^M T_l \omega_l \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \\ \sum_{m=1}^M \left[\sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_r + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} (c_{5rp} \varphi_{5rp} - \bar{c}_{5rp} \bar{\varphi}_{5rp}) \right] \varphi_{5ln} &= \\ &= \sum_{m=1}^M T_l \varphi_{5ln} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (4.10)$$

причем $l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots$. Решая систему (4.10), найдем постоянные D_{5l} , c_{5ln} . Тогда функция (4.7) будет известна и можно вычислять в любой точке температуру (2.34) и плотность потока тепла (2.35).

Решение задачи термоэлектроупругости (термомагнитоупругости).

Интегрируя функцию (4.7), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[(A_{5l} z_5 + B_{5l}) \ln \zeta_{5l} - \right. \\ &\quad \left. - (A_{5l} z_5 + B_{5l}^+) \ln \bar{\zeta}_{5l} \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r_5 b_{5ln}}{\zeta_{5l}^n} - \frac{r_5 \bar{b}_{5ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{5l} &= r_5 D_{5l}, \quad B_{5l} = r_5 R_{5l} c_{5l1} - r_5 z_{5l} D_{5l}, \\
 B_{5l}^+ &= r_5 \bar{R}_{5l} \bar{c}_{5l1} - r_5 \left[\bar{z}_{5l} + (\mu_5 - \bar{\mu}_5) h^+ \right] D_{5l}, \\
 b_{51} &= R_{5l} (2D_{5l} m_{5l} - c_{5l2}), \\
 b_{5ln} &= R_{5l} (m_{5l} c_{5l,n-1} - c_{5l,n+1}) / n \quad (n > 1).
 \end{aligned}$$

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 3}$) определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , получаемых из полуплоскости S аффинными преобразованиями (2.50), причем прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l в областях S_k соответствуют прямолинейная граница L_k^+ и контуры отверстий L_{kl} . Исходя из вида (4.11) функции $\Phi_k(z_k)$ выберем в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln \zeta_{kl} + \Phi_{k0}^*(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (4.12)$$

Здесь a_{kln} – неизвестные постоянные; ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений (3.22); A_{kl} , B_{kl} – известные коэффициенты, определяемые из (2.90), (2.91); $\Phi_{k0}^*(z_k)$ – функции, голоморфные в сплошных нижних полуплоскостях S_k , за исключением бесконечно удаленных точек.

Граничные условия (2.78) на прямолинейной границе, где $\delta_k = 1$, приведем к виду [9]

$$\begin{aligned}
 \Phi'_k(z_k) + \bar{r}_k \overline{\Phi'_k(z_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi'_{k+1}(z_{k+1})} + \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi'_{k+2}(z_{k+2})} + \\
 + \bar{n}_{k+3} \overline{\Phi'_{k+3}(z_{k+3})} + l_{k5} r_5 F_5(z_5) + \bar{n}_{k5} \bar{r}_5 \overline{F_5(z_5)} = 0,
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{r}_k &= \left[\bar{g}_{k1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k4}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
\bar{s}_{k+1} &= \left[\bar{g}_{k+1,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+1,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+1,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+1,4}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
\bar{e}_{k+2} &= \left[\bar{g}_{k+2,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+2,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+2,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+2,4}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
\bar{n}_{k+3} &= \left[\bar{g}_{k+3,1}^0 M_{1k} + \bar{g}_{k+3,2}^0 M_{2k} + \bar{g}_{k+3,3}^0 M_{3k} + \bar{g}_{k+3,4}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
l_{k5} &= \left[g_{51}^0 M_{1k} + g_{52}^0 M_{2k} + g_{53}^0 M_{3k} + g_{54}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
\bar{n}_{k5} &= \left[\bar{g}_{51}^0 M_{1k} + \bar{g}_{52}^0 M_{2k} + \bar{g}_{53}^0 M_{3k} + \bar{g}_{54}^0 M_{4k} \right] / \Delta_k, \\
\Delta_k &= g_{k1}^0 M_{1k} + g_{k2}^0 M_{2k} + g_{k3}^0 M_{3k} + g_{k4}^0 M_{4k},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Дифференцируя комплексные потенциалы, найдем

$$\begin{aligned}
\Phi'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} (\ln \zeta_{kl} + 1) + \frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2A_{kl} m_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \right] + \\
&+ \Phi_{k0}^*(z_k) - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{kl} \ln}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (k = \overline{1, 4}).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Учитывая соотношения (4.4) и то, что на прямолинейной границе

$$\begin{aligned}
t_k &= x + \mu_k h^+, \quad \bar{t}_{k+j} = x + \bar{\mu}_{k+j} h^+ = t_k - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+, \\
t_5 &= x + \mu_5 h^+ = t_k - (\mu_k - \mu_5) h^+, \\
\bar{t}_5 &= x + \bar{\mu}_5 h^+ = t_k - (\mu_k - \bar{\mu}_5) h^+,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

и подставляя функции (4.15) в (4.13), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} (\ln \zeta_{kl} + 1) + \bar{r}_k \bar{A}_{kl} (\ln \bar{\zeta}_{kl} + 1) + \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l} \times \right. \\
&\times (\ln \bar{\zeta}_{k+1,l} + 1) + \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l} (\ln \bar{\zeta}_{k+2,l} + 1) + \bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\ln \bar{\zeta}_{k+3,l} + 1) + (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l} (\ln \zeta_{5l} - \ln \bar{\zeta}_{5l}) + \\
& + \frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2A_{kl} m_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} + \bar{r}_k \frac{(\bar{A}_{kl} \bar{z}_{kl} + \bar{B}_{kl}) \bar{\zeta}_{kl} + 2\bar{A}_{kl} \bar{m}_{kl}}{\bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} + \\
& + \bar{s}_{k+1} \frac{(\bar{A}_{k+1,l} \bar{z}_{k+1,l} + \bar{B}_{k+1,l}) \bar{\zeta}_{k+1,l} + 2\bar{A}_{k+1,l} \bar{m}_{k+1,l}}{\bar{R}_{k+1,l} (\bar{\zeta}_{k+1,l}^2 - \bar{m}_{k+1,l})} + \\
& + \bar{e}_{k+2} \frac{(\bar{A}_{k+2,l} \bar{z}_{k+2,l} + \bar{B}_{k+2,l}) \bar{\zeta}_{k+2,l} + 2\bar{A}_{k+2,l} \bar{m}_{k+2,l}}{\bar{R}_{k+1,l} (\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l})} + \\
& + \bar{n}_{k+3} \frac{(\bar{A}_{k+3,l} \bar{z}_{k+3,l} + \bar{B}_{k+3,l}) \bar{\zeta}_{k+3,l} + 2\bar{A}_{k+3,l} \bar{m}_{k+3,l}}{\bar{R}_{k+3,l} (\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l})} \Big] - \\
& - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n a_{k \ln}}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} + \frac{\bar{r}_k n \bar{a}_{k \ln}}{\bar{\zeta}_{kl}^{n-1} \bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} + \right. \\
& + \frac{\bar{e}_{k+2} n \bar{a}_{k+2, \ln}}{\bar{\zeta}_{k+2,l}^{n-1} \bar{R}_{k+2,l} (\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l})} + \frac{\bar{n}_{k+3} n \bar{a}_{k+3, \ln}}{\bar{\zeta}_{k+3,l}^{n-1} \bar{R}_{k+3,l} (\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l})} - \\
& \left. - (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) \left(\frac{c_{5 \ln}}{\zeta_{5l}^n} - \frac{\bar{c}_{5 \ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right) \right] + \Phi_{k0}'^*(t_k) + \\
& + \bar{r}_k \bar{\Phi}_{k0}'^*(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}_{k+1,0}'^*(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\
& + \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}_{k+2,0}'^*(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + \\
& + \bar{n}_{k+3} \bar{\Phi}_{k+3,0}'^*(t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) = 0, \tag{4.17}
\end{aligned}$$

причем, исходя из (3.22) и (4.16), легко получить, что $\bar{\zeta}_{k+j,l}$, $\bar{\zeta}_{5l}$ – переменные, определяемые из конформных отображений [9]

$$\begin{aligned}
z_k &= \bar{z}_{kl} + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+ + \bar{R}_{k+j,l} (\bar{\zeta}_{k+j,l} + \bar{m}_{k+j,l} / \bar{\zeta}_{k+j,l}), \quad (j = \overline{0, 3}); \\
z_k &= \bar{z}_{5l} + (\mu_k - \bar{\mu}_5) h^+ + \bar{R}_{5l} (\bar{\zeta}_{5l} + \bar{m}_{5l} / \bar{\zeta}_{5l}). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Функцию $\Phi_{k0}^*(z_k)$ выберем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{k0}^*(z_k) = & \sum_{l=1}^L \left[A_{kl}^+ (\ln \bar{\zeta}_{kl} + 1) + A_{k+1,l}^+ (\ln \bar{\zeta}_{k+1,l} + 1) + \right. \\ & \left. + A_{k+2,l}^+ (\ln \bar{\zeta}_{k+2,l} + 1) + A_{k+3,l}^+ (\ln \bar{\zeta}_{k+3,l} + 1) + A_{k5l}^+ \ln \bar{\zeta}_{5l} \right] + \Phi'_{k0}(z_k), \quad (4.19) \end{aligned}$$

где $\Phi'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, включая бесконечно удаленные точки; $A_{k+j,l}^+$, A_{k4l}^+ – неизвестные постоянные. Требуя равенства коэффициентов при логарифмах $\ln \bar{\zeta}_{kl}$, $\ln \bar{\zeta}_{k+j,l}$ и $\ln \bar{\zeta}_{5l}$ на прямой линейной границе нулю, будем иметь

$$\begin{aligned} A_{kl}^+ &= -\bar{r}_k \bar{A}_{kl}, \quad A_{k+1,l}^+ = -\bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l}, \quad A_{k+2,l}^+ = -\bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l}, \\ A_{k+3,l}^+ &= -\bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l}, \quad A_{k5l}^+ = (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l}. \end{aligned}$$

Учитывая выражения (4.14), легко получить, что

$$\begin{aligned} \bar{r}_k r_k + \bar{s}_{k+1} n_k + \bar{e}_{k+2} e_k + \bar{n}_{k+3} s_k &= 1, \\ \bar{r}_k s_{k+1} + \bar{s}_{k+1} r_{k+1} + \bar{e}_{k+2} n_{k+1} + \bar{n}_{k+3} e_{k+1} &= 0, \\ \bar{r}_k e_{k+2} + \bar{s}_{k+1} s_{k+2} + \bar{e}_{k+2} r_{k+2} + \bar{n}_{k+3} n_{k+2} &= 0, \\ \bar{r}_k n_{k+3} + \bar{s}_{k+1} e_{k+3} + \bar{e}_{k+2} s_{k+3} + \bar{n}_{k+3} r_{k+3} &= 0, \\ l_{k5} + \bar{r}_k n_{k5} + \bar{s}_{k+1} n_{k+1,5} + \bar{e}_{k+2} n_{k+2,5} + \bar{n}_{k+3} n_{k+3,5} &= 0, \\ n_{k5} + \bar{r}_k \bar{l}_{k5} + \bar{s}_{k+1} \bar{l}_{k+1,5} + \bar{e}_{k+2} \bar{l}_{k+2,5} + \bar{n}_{k+3} \bar{l}_{k+3,5} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда равенства (4.17) примут вид

$$\sum_{l=1}^L \left[\frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2A_{kl} m_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{r}_k \frac{(\bar{A}_{kl} \bar{z}_{kl} + \bar{B}_{kl}) \bar{\zeta}_{kl} + 2 \bar{A}_{kl} \bar{m}_{kl}}{\bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} + \\
& + \bar{s}_{k+1} \frac{(\bar{A}_{k+1,l} \bar{z}_{k+1,l} + \bar{B}_{k+1,l}) \bar{\zeta}_{k+1,l} + 2 \bar{A}_{k+1,l} \bar{m}_{k+1,l}}{\bar{R}_{k+1,l} (\bar{\zeta}_{k+1,l}^2 - \bar{m}_{k+1,l})} + \\
& + \bar{e}_{k+2} \frac{(\bar{A}_{k+2,l} \bar{z}_{k+2,l} + \bar{B}_{k+2,l}) \bar{\zeta}_{k+2,l} + 2 \bar{A}_{k+2,l} \bar{m}_{k+2,l}}{\bar{R}_{k+2,l} (\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l})} + \\
& + \bar{n}_{k+3} \frac{(\bar{A}_{k+3,l} \bar{z}_{k+3,l} + \bar{B}_{k+3,l}) \bar{\zeta}_{k+3,l} + 2 \bar{A}_{k+3,l} \bar{m}_{k+3,l}}{\bar{R}_{k+3,l} (\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l})} \Big] - \\
& - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n a_{k \ln}}{\bar{\zeta}_{kl}^{n-1} \bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} + \frac{\bar{r}_k n \bar{a}_{k \ln}}{\bar{\zeta}_{kl}^{n-1} \bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} + \right. \\
& + \frac{\bar{e}_{k+2} n \bar{a}_{k+2, \ln}}{\bar{\zeta}_{k+2,l}^{n-1} \bar{R}_{k+2,l} (\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l})} + \frac{\bar{n}_{k+3} n \bar{a}_{k+3, \ln}}{\bar{\zeta}_{k+3,l}^{n-1} \bar{R}_{k+3,l} (\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l})} - \\
& \left. - (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) \left(\frac{c_{5 \ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} - \frac{\bar{c}_{5 \ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right) \right] + \\
& + \Phi_{k0}'^* (t_k) + \bar{r}_k \bar{\Phi}_{k0}'^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_k) h^+) + \\
& + \bar{s}_{k+1} \bar{\Phi}_{k+1,0}'^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+1}) h^+) + \\
& + \bar{e}_{k+2} \bar{\Phi}_{k+2,0}'^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+2}) h^+) + \\
& + \bar{n}_{k+3} \bar{\Phi}_{k+3,0}'^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+3}) h^+) = 0, \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Так как функции

$$\begin{aligned}
& \frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2 A_{kl} m_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad \frac{1}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\
& \zeta_{5l}^{-n}, \quad \bar{\Phi}_{k+j,0}'^* (t_k + (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j}) h^+)
\end{aligned}$$

являются граничными значениями соответствующих функций, голоморфных в сплошной верхней полуплоскости, то интегралы типа Коши от их граничных значений для точек нижней полуплоскости будут равны нулю. Функции

$$\frac{(\bar{A}_{k+j,l}\bar{z}_{k+j,l} + \bar{B}_{k+j,l})\bar{\zeta}_{k+j,l} + 2\bar{A}_{k+j,l}\bar{m}_{k+j,l}}{\bar{R}_{k+j,l}(\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l})},$$

$$\frac{1}{\bar{\zeta}_{k+j,l}^{n-1}\bar{R}_{k+j,l}(\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l})}, \quad \frac{1}{\bar{\zeta}_{5l}^n}, \quad \Phi'_{k0}(t_k)$$

являются граничными значениями функций, голоморфных в нижней полуплоскости. Тогда интегралы типа Коши от их граничных значений для точек нижней полуплоскости восстанавливают эти функции с противоположным знаком. Учитывая это, умножая обе части равенств (4.20) на ядра Коши и вычисляя интегралы типа Коши от полученного равенства, найдем выражения функции $\Phi'_{k0}(z_k)$. Подставляя эти выражения в формулы для производных комплексных потенциалов (4.15), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & G'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{k\ln} \Phi'_{k\ln}(z_k) - \right. \\ & - \bar{r}_k \bar{a}_{k\ln} \bar{\Phi}'_{k\ln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{a}_{k+1,\ln} \bar{\Phi}'_{k+1,\ln}(z_k) - \\ & \left. - \bar{e}_{k+2} \bar{a}_{k+2,\ln} \bar{\Phi}'_{k+2,\ln}(z_k) - \bar{n}_{k+3} \bar{a}_{k+3,\ln} \bar{\Phi}'_{k+3,\ln}(z_k) \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} G'_k(z_k) = & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} - \bar{r}_k \bar{A}_{kl} \ln \bar{\zeta}_{kl} - \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l} \ln \bar{\zeta}_{k+1,l} - \right. \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l} \ln \bar{\zeta}_{k+2,l} - \bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l} \ln \bar{\zeta}_{k+3,l} + (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l} + \\ & + \frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2A_{kl} m_{kl}}{R_{kl}(\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} - \bar{r}_k \frac{(\bar{A}_{kl} \bar{z}_{kl} + \bar{B}_{kl}) \bar{\zeta}_{kl} + 2\bar{A}_{kl} \bar{m}_{kl}}{\bar{R}_{kl}(\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{s}_{k+1} \frac{\left(\bar{A}_{k+1,l} \bar{z}_{k+1,l} + \bar{B}_{k+1,l}\right) \bar{\zeta}_{k+1,l} + 2\bar{A}_{k+1,l} \bar{m}_{k+1,l}}{\bar{R}_{k+1,l} \left(\bar{\zeta}_{k+1,l}^2 - \bar{m}_{k+1,l}\right)} - \\
& -\bar{e}_{k+2} \frac{\left(\bar{A}_{k+2,l} \bar{z}_{k+2,l} + \bar{B}_{k+2,l}\right) \bar{\zeta}_{k+2,l} + 2\bar{A}_{k+2,l} \bar{m}_{k+2,l}}{\bar{R}_{k+1,l} \left(\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l}\right)} - \\
& -\bar{n}_{k+3} \frac{\left(\bar{A}_{k+3,l} \bar{z}_{k+3,l} + \bar{B}_{k+3,l}\right) \bar{\zeta}_{k+3,l} + 2\bar{A}_{k+3,l} \bar{m}_{k+3,l}}{\bar{R}_{k+3,l} \left(\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l}\right)} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5 \right) \frac{\bar{c}_{5\ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \Bigg], \quad \Phi'_{k\ln}(z_k) = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} \left(\zeta_{kl}^2 - m_{kl}\right)}, \\
& \bar{\Phi}'_{k+j,\ln}(z_k) = -\frac{n}{\bar{\zeta}_{k+j,l}^{n-1} \bar{R}_{k+j,l} \left(\bar{\zeta}_{k+j,l}^2 - \bar{m}_{k+j,l}\right)}. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Неизвестные постоянные a_{kln} , как и ранее, будем определять из граничных условий только на контурах отверстий методом наименьших квадратов. Исходя из граничных условий (2.78), составим функционал

$$J_{\sigma} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left| \sum_{k=1}^5 \left[g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k \overline{\Phi'_k(t_{km})} \right] \right|^2, \tag{4.23}$$

где $t_m \left(m = \overline{1, M} \right)$ – точки, выбираемые только на контурах L_l . Удовлетворяя условиям минимума $\partial J_{\sigma} / \partial a_{kln} = 0$ ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$) функционала (4.23), находим

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^5 \left[g_{si}^0 \delta_s \Phi'_s(t_{sm}) + \bar{g}_{si}^0 \bar{\delta}_s \overline{\Phi'_s(t_{sm})} \right] \alpha_{ikln} = 0. \tag{4.24}$$

Здесь

$$\alpha_{ikln} = g_{ki}^0 \delta_k \Phi'_{kln}(z_k) - \bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k r_k \overline{\Phi'_{kln}(z_k)} -$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{g}_{k+1,i}^0 \bar{\delta}_{k+1} s_k \overline{\bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+1})} - \bar{g}_{k+2,i}^0 \bar{\delta}_{k+2} e_k \overline{\bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+2})} - \\
& -\bar{g}_{k+3,i}^0 \bar{\delta}_{k+3} e_k \overline{\bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+3})};
\end{aligned}$$

Подставляя (4.21) в систему (4.24), для определения постоянных a_{kln} будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{srj} \alpha_{isrj} \alpha_{ikln} + \bar{a}_{srj} \bar{\alpha}_{isrj} \alpha_{ikln} \right] = \\
& = - \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{s=1}^4 g_{si}^0 \delta_s G'_s(t_{sm}) + g_{5i}^0 \delta_5 r_5 F_5(t_{5m}) \right] \right\} \alpha_{ikln}, \quad (4.25)
\end{aligned}$$

После решения системы (4.25) комплексные потенциалы (4.21) будут известными, что позволит вычислять основные характеристики ТЭУС (2.60)–(2.63), плотность внутренней энергии (2.33), а в случае трещин также КИН (3.35).

Если рассматривается полуплоскость, то в приведенном выше решении все величины с индексом $k = 4$ нужно положить нулю.

Анализ результатов численных исследований. Для приведенных выше решений выполнены численные исследования по анализу их сходимости и устойчивости, проведены исследования ТЭУС и ТМУС полуплоскости с отверстиями и трещинами различных форм, размеров и расположения. Рассматривались полуплоскость с эллиптическим отверстием (в частных случаях с круговым отверстием или трещиной), с круговым отверстием в сочетании с трещиной (в том числе выходящей на контур отверстия). Численные исследования проводились с целью выявления влияния прямолинейной границы, размеров и форм отверстий и трещин, физико-механических свойств материалов на значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС), КИН и плотности внутренней энергии, а в случае трещин и на значения КИН. При проведении численных исследований количество членов в рядах (4.7),

(4.21) для каждого контура, а также количество точек M на контурах L_l , для которых при использовании метода наименьших квадратов составлялись квадраты невязок, увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (например, отношение разности между точными и приближенными значениями основных характеристик ТЭУС (ТМУС) на границе к их максимальным значениям по модулю не превышало 10^{-2}). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо было в рядах (4.7), (4.21) оставлять от 5 до 100 членов, на каждом контуре брать от 90 до 300 точек «коллокаций». Во всех задачах считалось, что на контурах всех отверстий и трещин поддерживается одинаковая относительная температура $T_1 = 1K$ при $T_H = 293,15K$ (причем T^+ на L^+ равно $0K$). Ниже описаны некоторые из полученных результатов, значения всех величин даны с точностью до безразмерного множителя $T_1 \cdot 1K^{-1}$.

Полуплоскость с круговым отверстием (рис. 4.2,а). Решение данной задачи получается из приведенного выше при $\mathcal{L} = 1$, $a_1 = b_1 = a$, где a – радиус отверстия. При этом в указанном решении все величины с индексом $k = 4$ полагаются равными нулю.

В табл. А.20 и А.21 приведены значения величин в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от отношения c/a , где c – расстояние от границы полуплоскости до контура отверстия. Указанные точки имеют координаты: $A(0; -c - 2a)$, $B(a; -c - a)$, $C(0; -c)$,

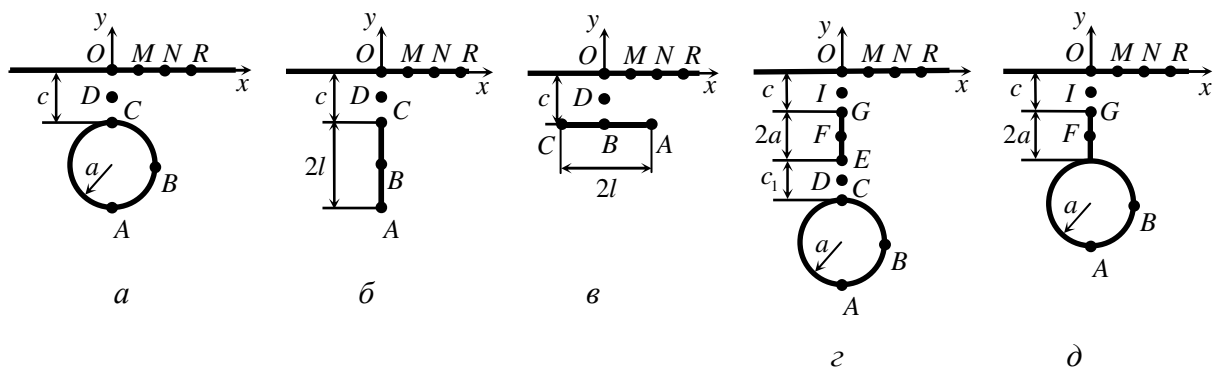


Рис. 4.2.

$D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(a/2; 0)$, $N(a; 0)$, $R(1,5a; 0)$. На рис. Б.22 изображены графики изменения напряжений σ_x в ближайшей к границе полуплоскости точке C контура отверстия в зависимости от отношения c/a , а на рис. Б.23, Б.24, Б.25 для различных значений c/a приведены графики распределения напряжений σ_x вблизи прямолинейной границы, напряженности H_θ и плотности внутренней энергии U для точек контура отверстия. Из данных табл. А.20, А.21, рис. Б.22–Б.25 и других результатов следует, что с уменьшением длины перемычки значения основных характеристик ТЭУС и ТМУС в точках перемычки растут, причем этот рост весьма значителен вблизи контура отверстия. Так, абсолютные значения σ_x в точке C в полуплоскости из ЭМ1, ЭМ5, ЭМ6, ММ8 и ММ9 при $c/a = 0,01$ в 38; 26; 218; 37 и 40 раз больше, чем при $c/a = 10$. Как и в задачах для конечной и бесконечной пластинки с отверстиями, плотность внутренней энергии, а также и значения напряжений в пьезомагнитной полуплоскости в несколько раз (плотность внутренней энергии в 1000 и более раз) больше значений аналогичных величин в полуплоскости из пьезоэлектрических материалов (например, значения σ_x в точке C при $c/a = 0,01$ в полуплоскости из ММ9 в 27 раз больше, чем в полуплоскости из ЭМ1). При этом в полуплоскости из материалов с «большей» проницаемостью (меньшими коэффициентами восприимчивости) максимальные значения напряжений и индукции по модулю намного больше, с «меньшей» проницаемостью (большими коэффициентами восприимчивости). Для напряженности наблюдается обратная картина.

Полуплоскость с трещиной (рис. 4.2, б, в). Численными исследованиями установлено, что трещину в полуплоскости можно считать эллиптическим отверстием, если отношение его полуосей менее 10^{-3} . В табл. А.22 и А.23 для полуплоскости с вертикальной или горизонтальной трещиной полудлины l приведены значения величин в некоторых точках полуплоскости в зависимости от отношения c/l , где c – длина перемычки. Указанные точки для вертикальной трещины имели координаты $A(0; -c - 2l)$, $B(0; -c - l)$,

$C(0; -c)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5l; 0)$, $N(l; 0)$, $R(1,5l; 0)$, для горизонтальной – координаты $A(l; -c)$, $B(0; -c)$, $C(-l; -c)$, $D(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5l; 0)$, $N(l; 0)$, $R(1,5l; 0)$. В табл. А.22 значения k_2 , k_D , k_B , k_E , k_H , а в табл. А.23 значения k_1 не приведены в связи с их сравнительной малостью по сравнению с другими КИНИН. На рис. Б.26 для полуплоскости с вертикальной трещиной приведены графики изменения КИНИН k_1 для ее концов в зависимости от c/l , а на рис. Б.27 – графики распределения напряженности E_x вблизи прямолинейной границы при $c = 0,1l$ (сплошные линии) и $c = l$ (штриховые линии). На рис. Б.28 приведены графики распределения напряженности E_x вблизи прямолинейной границы при $c = 0,1l$ (сплошные линии) и $c = l$ (штриховые линии) для полуплоскости с горизонтальной трещиной. Из табл. А.22, А.23 и рис. Б.16–Б.28 рисунков следует, что с уменьшением длины перемычки максимальные значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) в зоне перемычки и вблизи прямолинейной границы, а также КИНИН резко растут. Так, в полуплоскости из ЭМ1, ЭМ5, ЭМ6, ММ8 и ММ9 с вертикальной трещиной при уменьшении c/l с 10 до 0,01 значения КИНИН $k_1^+|_C$ увеличиваются в 11; 8,8; 12,7; 14,3 и 13,4 раза соответственно. При этом, как и в случае полуплоскости с отверстием, наибольшие значения напряжений, индукции и КИНИН k_1 , k_2 , k_D (k_B), наблюдается в полуплоскости из материалов с наибольшей проницаемостью (с наименьшими значениями коэффициентов восприимчивости), напряженности и КИНИН k_E (k_H) – наоборот.

Полуплоскость с круговым отверстием и вертикальной трещиной в перемычке (рис. 4.2г,д). Проведены численные исследования для полуплоскости с круговым отверстием радиуса a и вертикальной трещиной полудлины $l = a$ в перемычке. Решение данной задачи получается из приведенного выше при $\mathcal{L} = 2$, причем величины с индексом $k = 4$ полагаются равными нулю.

В табл. А.24 и А.25 для полуплоскости с круговым отверстием и трещи-

ной из материалов ЭМ6 и ММ9 даны значения некоторых величин в точках $A(0; -6a)$, $B(a; -5a)$, $C(0; -4a)$, $D(0; -3a + c/2)$, $E(0; -c - 2a)$, $F(0; -c - a)$, $G(0; -c)$, $I(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5a; 0)$, $N(a; 0)$, $R(1,5a; 0)$ в зависимости от отношения c/a , где c – расстояние между трещиной и границей полуплоскости. При этом длина перемычки между прямолинейной границей и отверстием равна двум диаметрам отверстия, т.е. суммарная длина перемычек $c + c_1 = 2a$. Из табл. А.24, А.25 следует, что появление трещины в перемычке между отверстием и границей полуплоскости приводит к увеличению значений основных характеристик ТЭУС и ТМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН, как для трещины, так и для отверстия. При сближении трещины с отверстием значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС), плотности внутренней энергии в зоне перемычки между отверстием и трещиной растут, в остальных зонах – уменьшаются. Выход трещины на контур отверстия приводит к разгрузке в зоне выхода и около прямолинейной границы и увеличению значений величин около отверстия в зоне, противолежащей зоне выхода.

4.2. Решение задач с приближенным удовлетворением граничным условиям на плоской границе

Приведенные выше решения задач теплопроводности и термоэлектроупругости для полупространства точно удовлетворяют граничным условиям на плоской границе. Они справедливы, когда поверхности отверстий L_l не пересекают и не касаются плоской границы. Если хотя бы одна из поверхностей L_l пересекает границу полупространства или касается ее (рис. 4.3), то воспользоваться методом интегралов типа Коши, а следовательно и приведенными решениями, невозможно, так как интегрируемые функции будут иметь особые точки на линиях интегрирования. Более того, линия интегри-

рования в этом случае будет разрывной прямой. Но можно сохранить вид комплексных потенциалов (4.7), (4.21), разлагая функции, голоморфные в сплошных нижних полуплоскостях, в ряды с коэффициентами, не связанными с коэффициентами разложений функций, голоморфных вне отверстий. Обозначая

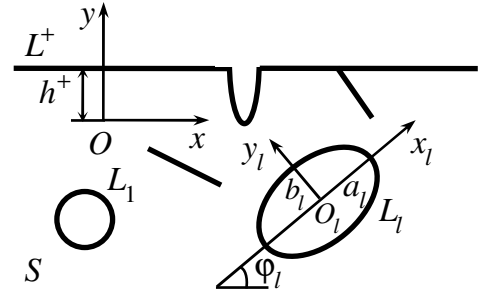


Рис. 4.3.

эти коэффициенты через новые постоянные \bar{d}_{5ln} и \bar{b}_{kln} , а не через \bar{c}_{5ln} и \bar{a}_{kln} , как в формулах (4.7), (4.21), функции запишем в виде

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[D_{5l} \ln \zeta_{5l} - D_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l} \right] + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n} - \frac{\bar{d}_{5ln}}{\bar{\zeta}_{5l}^n} \right]; \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & G'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln} \phi'_{kln}(z_k) - \right. \\ & - \bar{r}_k \bar{b}_{kln} \bar{\phi}'_{kln}(z_k) - \bar{s}_{k+1} \bar{b}_{k+1,ln} \bar{\phi}'_{k+1,ln}(z_k) - \\ & \left. - \bar{e}_{k+2} \bar{b}_{k+2,ln} \bar{\phi}'_{k+2,ln}(z_k) - \bar{n}_{k+3} \bar{b}_{k+3,ln} \bar{\phi}'_{k+3,ln}(z_k) \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} G'_k(z_k) = & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln \zeta_{kl} - \bar{r}_k \bar{A}_{kl} \ln \bar{\zeta}_{kl} - \bar{s}_{k+1} \bar{A}_{k+1,l} \ln \bar{\zeta}_{k+1,l} - \right. \\ & - \bar{e}_{k+2} \bar{A}_{k+2,l} \ln \bar{\zeta}_{k+2,l} - \bar{n}_{k+3} \bar{A}_{k+3,l} \ln \bar{\zeta}_{k+3,l} + (l_{k5} r_5 - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5) D_{5l} \ln \bar{\zeta}_{5l} + \\ & + \frac{(A_{kl} z_{kl} + B_{kl}) \zeta_{kl} + 2A_{kl} m_{kl}}{R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} - \bar{r}_k \frac{(\bar{A}_{kl} \bar{z}_{kl} + \bar{B}_{kl}) \bar{\zeta}_{kl} + 2\bar{A}_{kl} \bar{m}_{kl}}{\bar{R}_{kl} (\bar{\zeta}_{kl}^2 - \bar{m}_{kl})} - \\ & - \bar{s}_{k+1} \frac{(\bar{A}_{k+1,l} \bar{z}_{k+1,l} + \bar{B}_{k+1,l}) \bar{\zeta}_{k+1,l} + 2\bar{A}_{k+1,l} \bar{m}_{k+1,l}}{\bar{R}_{k+1,l} (\bar{\zeta}_{k+1,l}^2 - \bar{m}_{k+1,l})} - \\ & \left. - \bar{e}_{k+2} \frac{(\bar{A}_{k+2,l} \bar{z}_{k+2,l} + \bar{B}_{k+2,l}) \bar{\zeta}_{k+2,l} + 2\bar{A}_{k+2,l} \bar{m}_{k+2,l}}{\bar{R}_{k+1,l} (\bar{\zeta}_{k+2,l}^2 - \bar{m}_{k+2,l})} - \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{n}_{k+3} \frac{\left(\bar{A}_{k+3,l}\bar{z}_{k+3,l} + \bar{B}_{k+3,l}\right)\bar{\zeta}_{k+3,l} + 2\bar{A}_{k+3,l}\bar{m}_{k+3,l}}{\bar{R}_{k+3,l}\left(\bar{\zeta}_{k+3,l}^2 - \bar{m}_{k+3,l}\right)} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(l_{k5} r_5 \bar{d}_{5ln} - \bar{n}_{k5} \bar{r}_5 \bar{c}_{5ln} \right) \bar{\zeta}_{5l}^{-n} \Big]
\end{aligned}$$

Но в отличие от (4.7), (4.21), функции (4.26), (4.27) не удовлетворяют автоматически граничным условиям на плоской границе. Им теперь нужно удовлетворять. Это можно сделать приближенно, например, методом наименьших квадратов, выбирая “коллокационные” точки функционалов (4.8) не только на контурах отверстий L_l , но и на прямолинейной границе L^+ .

Определение неизвестных постоянных. Выбирая точки t_m ($m = \overline{1, M}$) на отрезке прямолинейной границы L^+ («коллокационном отрезке») и контурах отверстий L_l и удовлетворяя условиям минимума $\partial J_T / \partial D_{5l} = 0$, $\partial J_T / \partial c_{5ln} = 0$, $\partial J_T / \partial d_{5ln} = 0$ функционала (4.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T^o(t_m) \right] \omega_{5l} = 0, \\
& \sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T^o(t_m) \right] \phi_{5ln} = 0, \\
& \sum_{m=1}^M \left[F_5(t_{5m}) + \overline{F_5(t_{5m})} - T^o(t_m) \right] \eta_{5ln} = 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Здесь

$$\omega_{5l} = 2\operatorname{Re} \left[\ln \zeta_{5l} - \ln \bar{\zeta}_{5l} \right], \quad \phi_{5ln} = \zeta_{5l}^{-n}(t_m), \quad \eta_{5ln} = -\overline{\zeta_{5l}^{-n}(t_m)}.$$

Подставляя (4.26) в (4.28), для определения постоянных D_{5l} , c_{5ln} , d_{5ln} получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_r \omega_l + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_{5rp} \phi_{5rp} \omega_l + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp} \omega_l + \right. \\
& \quad \left. + d_{5rp} \eta_{5rp} \omega_l + \bar{d}_{5rp} \bar{\eta}_{5rp} \omega_l \right) = \sum_{m=1}^M T^o(t_m) \omega_l \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \\
& \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_r \phi_{5ln} + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_{5rp} \phi_{5rp} \phi_{5ln} + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp} \phi_{5ln} + \right. \\
& \quad \left. + d_{5rp} \eta_{5rp} \phi_{5ln} + \bar{d}_{5rp} \bar{\eta}_{5rp} \phi_{5ln} \right) = \sum_{m=1}^M T^o(t_m) \phi_{5ln}, \\
& \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} D_{5r} \omega_r \eta_{5ln} + \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{p=1}^{\infty} \left(c_{5rp} \phi_{5rp} \eta_{5ln} + \bar{c}_{5rp} \bar{\phi}_{5rp} \eta_{5ln} + \right. \\
& \quad \left. + d_{5rp} \eta_{5rp} \eta_{5ln} + \bar{d}_{5rp} \bar{\eta}_{5rp} \eta_{5ln} \right) = \sum_{m=1}^M T^o(t_m) \eta_{5ln} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots), \quad (4.29)
\end{aligned}$$

причем $l = \overline{1, \mathcal{L}}; n = 1, 2, \dots$. Решив систему (4.29), найдем эти постоянные. Тогда функция (4.26) будет известна и можно вычислять температуру (2.34) и плотность потока тепла (2.35) в любой точке.

Удовлетворяя условиям минимума $\partial J_{\sigma} / \partial a_{kln} = 0$, $\partial J_{\sigma} / \partial b_{kln} = 0$ функционала (4.23), находим

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^5 \left[g_{si}^0 \delta_s \Phi'_s(t_{sm}) + \bar{g}_{si}^0 \bar{\delta}_s \overline{\Phi'_s(t_{sm})} \right] \alpha_{ikln} = 0, \\
& \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^5 \left[g_{si}^0 \delta_s \Phi'_s(t_{sm}) + \bar{g}_{si}^0 \bar{\delta}_s \overline{\Phi'_s(t_{sm})} \right] \beta_{ikln} = 0 \\
& \quad (k = \overline{1, 4}, l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = 1, 2, \dots). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha_{ikln} &= g_{ki}^0 \delta_k \varphi'_{kln}(z_k), \\
\beta_{ikln} &= -\bar{g}_{ki}^0 \bar{\delta}_k r_k \bar{\varphi}'_{kln}(z_k) - \bar{g}_{k+1,i}^0 \bar{\delta}_{k+1} s_k \bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+1}) -
\end{aligned}$$

$$-\bar{g}_{k+2,i}^0 \bar{\delta}_{k+2} e_k \overline{\bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+2})} - \bar{g}_{k+3,i}^0 \bar{\delta}_{k+3} e_k \overline{\bar{\varphi}'_{kln}(z_{k+3})}.$$

Подставляя (4.21) в систему (4.24), для определения постоянных a_{kln} будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{srj} \alpha_{isrj} \alpha_{ikln} + \bar{a}_{srj} \bar{\alpha}_{isrj} \alpha_{ikln} + \right. \\ & \quad \left. + b_{srj} \beta_{isrj} \alpha_{ikln} + \bar{b}_{srj} \bar{\beta}_{isrj} \alpha_{ikln} \right] = \\ & = - \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left(2 \operatorname{Re} \left[\sum_{s=1}^4 g_{si}^0 \delta_s G'_s(t_{sm}) + g_{5i}^0 \delta_5 r_5 F_5(t_{5m}) \right] \right) \alpha_{ikln}, \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 \sum_{r=1}^{\mathcal{L}} \sum_{j=1}^{\infty} \left[a_{srj} \alpha_{isrj} \beta_{ikln} + \bar{a}_{srj} \bar{\alpha}_{isrj} \beta_{ikln} + \right. \\ & \quad \left. + b_{srj} \beta_{isrj} \beta_{ikln} + \bar{b}_{srj} \bar{\beta}_{isrj} \beta_{ikln} \right] = \\ & = - \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^4 \left(2 \operatorname{Re} \left[\sum_{s=1}^4 g_{si}^0 \delta_s G'_s(t_{sm}) + g_{5i}^0 \delta_5 r_5 F_5(t_{5m}) \right] \right) \beta_{ikln}, \quad (4.31) \end{aligned}$$

После решения системы (4.25) комплексные потенциалы (4.21) будут известными, что позволит определять основные характеристики ТЭУС (ТМУС) (2.60)–(2.63), плотность внутренней энергии (2.33), а в случае трещин также КИНН (3.35).

Приведенное выше решение сохраняется и для полуплоскости, если в нем положить равными нулю все величины с индексом $k = 4$.

Анализ результатов численных исследований. Для полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с круговым отверстием и трещиной в перемычке (в том числе выходящей на прямолинейную границу), с двумя вертикальными трещинами, одна из которых выходит на прямолинейную границу, были проведены численные исследования ТЭУС (ТМУС). Особое внимание уделялось точности получаемых результатов приближенным мето-

дом удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе по сравнению с точным удовлетворением этим условиям методом интегралов типа Коши. При проведении численных исследований количество членов в рядах (4.26), (4.27) и точек, выбираемых на контурах отверстий и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы, для которых составлялись невязки при удовлетворении граничным условиям, увеличивались до тех пор, пока эти условия на контурах отверстий и на прямолинейной границе не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-2}). Как показали расчеты, для такого удовлетворения граничным условиям в рядах (4.26), (4.27) необходимо оставлять от 5 до 40 членов, на каждом из контуров, включая и «коллокационный отрезок» прямолинейной границы, брать 50 – 500 точек. «Коллокационный отрезок» выбирался такой длины и в таком месте, чтобы за ним можно было пренебречь влиянием отверстий и трещин на ТЭУС (ТМУС). Установлено, что для каждого концентратора длину такого отрезка достаточно брать от 5 до 10 характерных размеров этого концентратора.

Как показывают расчеты при исследовании ТЭУС и ТМУС для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами, не выходящими на прямолинейную границу, результаты, получаемые обоими методами удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе – описанным в п.4.1 точным, методом интегралов типа Коши, и приведенным здесь приближенным, с использованием метода наименьших квадратов, – при правильном выборе количества и расположения «коллокационных» точек на прямолинейной границе практически совпадают. Это указывает на достоверность результатов, получаемых путем приближенного удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе, который является более общим.

Полуплоскость с круговым отверстием и вертикальной трещиной (рис 4.4, а, б). Рассмотрим полуплоскость с круговым отверстием и вертикальной трещиной, находящейся на расстоянии s от границы полуплоскости и на расстоянии s_1 от контура отверстия. На берегах трещины и на границе полу-

плоскости поддерживается относительная температура, равная нулю, на контуре отверстия равная $1K$ при $T_H = 293,15 K$. На границе

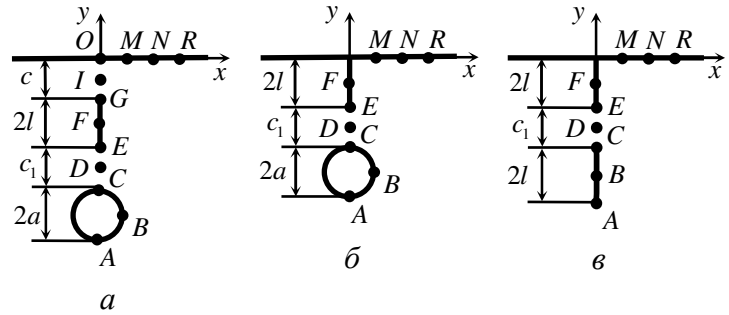


Рис. 4.4.

отверстия и трещины внешние усилия и индукция равны нулю.

В табл. А.26 для полуплоскости из материалов ЭМ6 и ММ9 с круговым отверстием радиуса a и трещиной длины $2l = 2a$, (рис. 4.4,а) даны значения некоторых величин в точках $A(0; -5a)$, $B(a; -4a)$, $C(0; -3a)$, $D(0; -5a/2 + c/2)$, $E(0; -c - 2a)$, $F(0; -c - a)$, $G(0; -c)$, $I(0; -c/2)$, $O(0; 0)$, $M(0,5a; 0)$, $N(a; 0)$, $R(1,5a; 0)$ в зависимости от отношения c/a . При этом принималось, что длина перемычки между трещиной и отверстием $c_1 = a - c$. Значение $c/a = 0$ соответствует случаю полуплоскости с трещиной, выходящей на прямолинейную границу. Из табл. А.26 следует, что выход трещины на границу полуплоскости приводит к снижению значений величин в зоне выхода трещины и увеличению в точках перемычки между трещиной и отверстием.

В табл. А.27 для полуплоскости из материалов ЭМ6 и ММ9 с круговым отверстием радиуса a и краевой трещиной длины $2l = 2a$ (рис. 4.4,б) даны значения некоторых величин в точках $A(0; -4a - c_1)$, $B(a; -3a - c_1)$, $C(0; -2a - c_1)$, $D(0; -2a - c_1/2)$, $E(0; -2a)$, $F(0; -a)$, $M(0,5a; 0)$, $N(a; 0)$, $R(1,5a; 0)$ в зависимости от отношения c_1/a (для данного случая $c = 0$), а на рис. Б.29 изображены графики изменения напряжений σ_x в точках перемычки между трещиной и отверстием и изменения КИНИН k_1 для полуплоскости из материала ММ9. Из табл. А.27 и рис. Б.29 видно, что для полуплоскости при сближении отверстия к трещине значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) в перемычке и КИНИН по модулю растут (например, значения

напряжений $\sigma_x|_C$ в точке C контура отверстия и КИНИН k_1^- для конца трещины в полуплоскости из ММ9 при $c_1/a = 0,5$ в 4,6 и 2 раз больше значений величин при $c_1/a = 10$).

Полуплоскость с двумя вертикальными трещинами (рис. 4.4,б). Рассмотрим полуплоскость с двумя вертикальными трещинами постоянной длины $2l$, одна из которых выходит на прямолинейную границу и отстоит от второй трещины на расстоянии c_1 . На границе полуплоскости и на берегах краевой трещины поддерживается относительная температура $T_1 = 0K$, на берегах второй (нижней) трещины – $T_2 = 1K$ при $T_H = 293,15K$. Граница полуплоскости и берега трещин не подкреплены и свободны от усилий, на них индукция равна нулю.

Для этого случая в табл. А.28 для полуплоскости из материалов ЭМ6 и ММ9 приведены значения некоторых величин в точках $A(0; -4l - c_1)$, $B(l; -3l - c_1)$, $C(0; -2l - c_1)$, $D(0; -2l - c_1/2)$, $E(0; -2l)$, $F(0; -l)$, $M(0,5l; 0)$, $N(l; 0)$, $R(1,5l; 0)$ в зависимости от отношения c_1/l . На рис. Б.30 изображены графики изменения k_1 для вершин трещин в зависимости от значения c_1/l , причем сплошные линии соответствуют полуплоскости из материала ММ9, штриховые – из материала ЭМ6. Из табл. А.28 и рис. Б.30 видно, что при уменьшении длины перемычки между трещинами значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) в зоне перемычки и КИНИН растут. Особенно этот рост значителен для краевой трещины. Так для вершины этой трещины КИНИН k_1 при $c_1/l = 0,25$ в 5 раз больше аналогичного значения при $c_1/l = 10$, тогда как значения КИНИН k_1 для внутренней трещины выросли не более 1,3 раза.

4.3. Выводы по разделу 4

В разделе 4 приведено решение задач теплопроводности, термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для полупространства (полуплоскости) с отверстиями и трещинами.

Сначала с использованием интегралов типа Коши, методов конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана для полупространства с внутренними полостями и плоскими трещинами получены общие представления комплексных потенциалов теплопроводности, термоэлектроупругости и термомагнитоупругости, точно удовлетворяющие граничным условиям на плоской границе и приближенно, с использованием метода наименьших квадратов, на поверхностях полостей. Для случая, когда поверхности полостей или трещин могут пересекать плоскую границу, предложена методика приближенного удовлетворения граничным условиям как на поверхностях полостей и трещин, так и на плоских границах методом наименьших квадратов. Все указанные задачи сведены к решениям систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Численными исследованиями установлена высокая эффективность предложенных методик решения задач, устойчивость получаемых результатов. Показано, что в случаях внутренних концентраторов результаты, получаемые с использованием методов точного и приближенного удовлетворения граничным условиям на плоской (прямолинейной) границе, практически совпадают. Это наряду с большой точностью удовлетворения граничным условиям, проверяемых в многочисленных точках, еще раз подтверждает достоверность результатов, получаемых методом приближенного удовлетворения граничным условиям на плоской (прямолинейной) границе.

Решен ряд задач для полупространства с отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на плоскую границу. Численные исследования проведены для полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с круговым отверстием и трещиной (внутренней или краевой) в перемычке, с двумя тре-

щинами. Исследовано влияние геометрических характеристик и физико-механических свойств материалов на значения основных характеристик ТЭУС, ТМУС, КИНИН и плотности внутренней энергии.

Установлено, что при сближении отверстия или трещины с прямолинейной границей значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) в точках перемычки, особенно вблизи контура отверстия, и КИНИН резко растут. Появление трещины в перемычке между отверстием и границей полуплоскости приводит к увеличению значений основных характеристик ТЭУС, ТМУС и плотности внутренней энергии вблизи границ области, и КИНИН. Выход трещины на контур отверстия или на границу полуплоскости приводит к снижению значений характерных величин в окрестности выхода с одновременным их увеличением в зоне, противоположной точке выхода на границу.

Большой вклад в значения основных характеристик ТЭУС (ТМУС) и КИНИН вносит параметр проницаемости материала. А именно: наибольшие значения напряжений, индукции, плотности внутренней энергии и КИНИН k_1 , k_2 , k_D (k_B), наблюдается в полуплоскости из материалов с большей проницаемостью (с меньшими значениями коэффициентов восприимчивости), а наибольшие значения напряженности и КИНИН k_E (k_H), наоборот, в полуплоскости из материалов с меньшей проницаемостью (с большими значениями коэффициентов восприимчивости). Значения напряжений, КИНИН и плотности внутренней энергии в пьезомагнитной полуплоскости в несколько раз (плотность внутренней энергии в 1000 и более раз) больше значений аналогичных величин в полуплоскости из пьезоэлектрических материалов, причем этот эффект в многосвязной полуплоскости проявляется ярче, чем в пластинке.

Включенные в раздел 4 результаты опубликованы в статьях [67, 185].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения диссертационной работы методы решения задач теплопроводности, термоупругости, электроупругости и магнитоупругости для многосвязных сред с помощью обобщенных комплексных потенциалов распространены на двумерные и плоские задачи термоэлектроупругости и термомагнитоупругости. Основные научные результаты и выводы, представленные в работе, следующие:

1. Введены и исследованы комплексные потенциалы двумерных и плоских задач термоэлектроупругости и термомагнитоупругости, найдены через них выражения основных характеристик ТЭУС и ТМУС, получены граничные условия для определения комплексных потенциалов, общие представления этих функций для тела и полупространства с отверстиями и трещинами; показана эффективность использования комплексных потенциалов при решении задач и достоверность получаемых результатов;

2. С применением конформных отображений и разложений в ряды Лорана и по полиномам Фабера получены общие выражения комплексных потенциалов для многосвязного тела, выделены особенности производных комплексных потенциалов в концах плоских разрезов, представляемых «узкими» эллипсами, получены выражения для КИНН, а также логарифмические особенности, зависящие от свойств материалов тел и вида граничных условий задач. С использованием дискретного метода наименьших квадратов рассматриваемые задачи сведены к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы;

3. Разработан подход решения задач теплопроводности, термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для полупространства с внутренними отверстиями и трещинами с точным удовлетворением граничным условиям на плоской границе и приближенно на поверхностях отверстий и трещин,

при этом введены дополнительные логарифмические слагаемые и используются методы интегралов типа Коши;

4. Разработана основанная на приближенном удовлетворении граничным условиям на всех границах многосвязного полупространства методика, позволяющая решать задачи не только для случая внутренних отверстий и трещин, но и когда последние пересекают плоскую границу, при этом опять же введены дополнительные логарифмические слагаемые;

5. Численными исследованиями установлена высокая эффективность разработанных подходов решения задач для многосвязных сред и устойчивость получаемых результатов;

6. Решен ряд новых задач теплопроводности, термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для тела и полупространства (пластинки и полуплоскости) с отверстиями и трещинами;

7. На алгоритмическом языке разработаны комплексы программ по численной реализации полученных теоретических решений;

8. Проведены численные исследования решений ряда задач о ТЭУС и ТМУС пластинки и полуплоскости с отверстиями и трещинами при различном их сочетании и месторасположении, для различных пьезоактивных материалов;

9. Установлены новые механические закономерности влияния теплофизических свойств материалов тел, геометрических характеристик отверстий и трещин, их количества, сочетания, взаимного расположения относительно друг друга и относительно границы полуплоскости на значения основных характеристик ТЭУС и ТМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН.

В частности, установлено, что вклад температурного поля в ТЭУС и ТМУС является весомым и пренебрегать им нельзя. Пренебречь нельзя также влиянием пьезоэффекта при исследовании термонапряженного состояния. При сближении отверстий и трещин друг с другом, а также с прямолинейной границей значения основных характеристик ТЭУС и ТМУС, плотности внут-

ренной энергии в точках перемычек и КИНИН растут. Выход трещины на контур отверстия или на границу полуплоскости приводит к снижению значений характерных величин в окрестности выхода с одновременным их увеличением в других зонах. Наибольшее влияние на значения основных характеристик, плотности внутренней энергии и КИНИН оказывает проницаемость материалов: чем она больше, тем больше значения напряжений, индукции, плотности внутренней энергии, КИНИН. Так, максимальные значения напряжений в кольце из материалов ЭМ6 и ММ9, обладающих большей проницаемостью, в 8 и 20 раз больше, чем напряжения в кольце из материалов ЭМ1 и ММ8 соответственно. На значения напряженности поля значительно влияние пьезоэлектрических (пиромагнитных) модулей. Максимальных по модулю значений электрические (магнитные) характеристики ТЭУС (ТМУС) достигают в направлении поляризации. В пластинках из пьезомагнитных материалов значения напряжений и плотности внутренней энергии значительно больше соответствующих значений в пьезоэлектрической пластинке, причем этот эффект значительно ярче в случае многосвязной полуплоскости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович З. С., Деревянко Н. И. Деформирование намагниченного тела действием внешнего магнитного поля // Прикладная механика. – 1975. – Т. 10, № 11. – С. 3–8.
2. Агранович З. С., Деревянко Н. И. Деформирование стержней действием внешнего магнитного поля // Прикладная механика. – 1975. – Т. 15, № 5. – С. 67–72.
3. Амбарцумян С. А. Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. – Ереван: Изд-во ЕГУ, 1991. – 143 с.
4. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. – М.: Наука, 1996. – 286 с.
5. Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. – 1962. – №3. – С. 120–127.
6. Антонов Ю. С. Исследование термонапряженного состояния анизотропного диска с прямолинейными трещинами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2005. – Вып.1. – С. 90–93.
7. Афанасьева-Эренфест Т. А. Необратимость, односторонность и второе начало термодинамики. // Журн. прикладной физики. – 1928. – Т.5, №3-4. – С.3–29
8. Бабат Г. И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение. – М. –Л.: Энергия, 1965. – 552 с.
9. Баева А. И., Бороненко О. И. Магнитоупругое состояние многосвязного полупространства и полуплоскости // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 63–72.
10. Баженов В. Г. К расчету плоских стационарных температурных полей и термоупругих напряжений для двухсвязных областей // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып.7. – С. 91 – 96.

11. Бахмат Г. Л. Одна задача термоупругости для плоскости с термоизолированным отверстием // Вестн. Белорус. ун-та. – 1976. – Сер. I. – С. 78–79.
12. Белов К. П. Магнитострикционные явления и их технические приложения. – М.: Наука, 1987. – 159 с.
13. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
14. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
15. Брюханова Е. Н. Термонапряженное состояние круглой пластинки с четырьмя отверстиями // Механика деформируемых сред. – 1974. – Вып. 1. – С. 92 – 97.
16. Бугасова Т. И., Калоеров С. А., Космодамианский А. С. Температурные напряжения в анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. // Изв. АН Арм.ССР, Механика. – 1978. – Т. 31, №3. – С. 63–72.
17. Бурак Я. Й., Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термоупругость электропроводных магнитомягких тел во внешних установившихся электромагнитных полях // ДАН УССР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 44–48
18. Бурак Я. Й., Гачкевич А. Р., Терлецкий Р. Ф. Термомеханика тел низкой электропроводности во внешних квазиустановившихся электромагнитных полях // ДАН СССР. Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 38–41.
19. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Мусій Р. С. Термопружність неферромагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів // Мат. методи. і фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49. – С. 75–84.
20. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного випромінювання // ДАН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 39–43
21. Бурыкин А. Я. Температурные напряжения в пространстве с разрезом // Нелин. диф. уравн. в прикл. задачах. – К.: Наук. думка 1977. – С. 82–88.

22. Введение в теорию термопьезоэлектричества / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин, Н.А. Сеник и др. – М.: УРСС, 2005. – 312 с. (Математическое моделирование в задачах механики связанных полей, в 2 т. Т. 1)
23. Власов К. Б. Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных магнитострикционных сред // Изв. АН СССР. Сер. Физ. – 1957. – Т. 21, № 8. – С. 1140–1148.
24. Власов К. Б. Уравнения состояния, определяющие магнитоупругие свойства ферромагнитных монокристаллов // Журн. exper. и техн. физ. – 1960. – Т. 38, № 3. – С. 889–894.
25. Гаврыш В. И. Температурное поле в полупространстве с параллелепipedным включением, обусловленное потоком тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып.33. – С.18–20.
26. Гайвась И. В., Яремко Т. М. Стационарное термоупругое состояние среды с двумя неравными цилиндрическими полостями // Вестн. Львов. политех. ин-та. – 1977. – №119. – С. 30 – 33.
27. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.
28. Гачкевич А. Р., Мусий Р. С. К определению температурных и механических полей в электропроводных пластинах при воздействии внешнего электромагнитного поля // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 49–54.
29. Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Стасюк Г. Б. Температурные поля и напряжения в длинном полом электропроводном цилиндре при электромагнитном воздействии в режиме с модуляцией амплитуды при импульсном модулирующем сигнале // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 168–181.
30. Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Стасюк Г. Б. Термомеханическое состояние полой электропроводной сфере при импульсном электромагнитном воздействии // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 9–17.

31. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Резонансные явления в магнитомягком электропроводном слое при воздействии установившегося электромагнитного поля // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987. – С. 119-123
32. Гачкевич А. Р., Терлецкий Р. Ф. Температурные поля и напряжения в диэлектрическом упругом слое, находящемся под воздействием установившегося электромагнитного поля // Мат. мет. и физ.-мех. поля. – 1981. – Вып. 14. – С. 37–43.
33. Гачкевич О. Р., Терлецкий Р. Ф. Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризованих електропровідних деформованих твердих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 3. – С. 19–37.
34. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам и ядерным реакторам. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 350 с.
35. Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений плоской задачи термоупругости для тонких ортотропных пластин при симметричном теплообмене // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 1999. – Вып. 1. – С.51-61.
36. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Вища шк., 1981. – 136 с.
37. Грилицкий Д. В., Попович Б. И. Смешанная граничная задача термоупругости для анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1971. – Вып.3. – С. 45–50.
38. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. Т. 5)
39. Гузь А. Н., Гузь Г. В. О задачах термоупругости в механике композитных материалов с крупномасштабным искривлением наполнителя. // Мат. методы и физ. –мех. поля. – 1989. – Вып.29. – С. 10–25.
40. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г. Акустоэлектромагнитоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т.3).

41. Де Гроот С., Сатторт Л.. Электродинамика. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
42. Дорош Н. А., Кит Г. С. Термоупругое состояние плоскости и полуплоскости с трещиной под действием источников тепла // Прикладная механика. – 1969. – Т.5, №12. – С. 83–88.
43. Дорош Н. А., Кит Г. С. Равновесие полосы с прямолинейной поперечной трещиной под действием источников тепла // Прикладная механика. – 1974. – Т.10, №11. – С. 93–98.
44. Дресвянников В. И. Численная схема расчета связанных термомаханических и электромагнитных полей в упругопластических телах // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1980. – Вып. 16. – С. 40-49
45. Дресвянников В. И. Численное моделирование нестационарных магнито-термопластических процессов в электропроводных телах // Проблемы прочности. – 1984. – № 10. – С. 85-89
46. Дудко В. В., Клименко В. А., Ячменев В. А. Задача нелинейной теплопроводности для изотропной полуплоскости с трещиной // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2002. – №1. – С. 59 –62.
47. Еременко С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
48. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. – М.: Наука, 1968. – 463 с.
49. Жермен П. Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая шк., 1983. – 399 с.
50. Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке / Кит Г.С., Мартиняк Р.М., Нагалка С.П., Гончар Х.И. // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып.36. – С. 83-90.
51. Зашкильняк И. М. Влияние тепловыделяющих включений на напряженное состояние диска // Мат. методы в термомеханике. – К., 1979. – С. 153–160.

52. Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теплопроводности и термоупругости. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 224 с.
53. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 501 с.
54. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 220 с.
55. Ильюшин А. А. Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
56. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние конечной многосвязной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2004. – №1. – С. 103–110.
57. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Прикладная механика. – 2005. – Т.41, №9. – С.127–136.
58. Калоеров С. А., Антонов Ю. С. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып.40. – С. 102–116.
59. Калоеров С. А., Баева А. И., Глущенко Ю. А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 84–91.
60. Калоеров С. А., Бороненко О. И. Двумерная и плоская задачи для пьезомагнитного тела с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 111–123.
61. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10-26. (Механика композитов: В 12 т. Т.7).
62. Калоеров С. А., Добряк Д. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А Природн. науки. – 2006. – Вып.2. – С. 77–88.

63. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Термoeлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, №11– С.116-126.
64. Калоеров С.А., Хорошев К.Г. Термoeлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
65. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Двумерное термoeлектронапряженное состояние многосвязного пьезоэлектрического тела // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів: ВКП «ВМС», 2006. – Т. 2. – С.53–55.
66. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Двумерные задачи термoeлектроупругости и термомaгнитоупругости для многосвязных сред // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 89–100
67. Калоеров С. А., Хорошев К. Г. Термoeлектроупругое состояние анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами // Прикладные пробл. мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 75–83
68. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
69. Карнаухов В. Г. Феноменологические модели обобщенных терморeологически простых неупругих ферромагнетиков // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, № 3. – С. 60–69.
70. Карнаухов В. Г. Термодинамическая теория обобщенных терморeологически простых вязкоупругих ферромагнетиков // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 45–49.
71. Карнаухов В. Г. Конечная линейная теория вязкоупругих обобщенных терморeологически простых ферромагнетиков // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 9. – С. 13–18.
72. Карнаухов В. Г. Об исследованиях А.Д. Коваленко по термомеханике связанных полей в материалах и элементах конструкций и их дальнейшем развитии // Прикладная механика. – 2005. – Т.41, №9. – С. 16–25.

73. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В5-ти т.; Т.4).
74. Карнаухов В. Г., Лелюх Ю. И. К постановке задач о колебаниях и диссипативном разогреве пьезомагнитных керамических тел // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 9. – С. 3–8.
75. Карнаухов В. Г., Лелюх Ю. И. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев ферромагнитного стержня // Акустичний вісник. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 44–56.
76. Карнаухов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – К.: Наук. думка, 1985. – 288 с.
77. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
78. Кирилук В. С. О связи решений контактных задач термоупругости для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки – 2005. – Вип. 1. – С. 37–42.
79. Кіт Г. С. Деякі питання термоміцності для тіла з тріщинами // Вісн. АН УРСР. – 1972. – №4. – С. 22–28.
80. Кит Г. С. Метод дисторсии в теории термоупругости тел с трещинами // Физ.-хим. механика матер. – 1976. – Т.11, №3. – С. 9–20.
81. Кит Г. С., Дорош Н. А. Термоупругое состояние плоскости с двумя равными прямолинейными трещинами // Концентрация напряжений. – 1971. – Вып.3. – С. 61–67.
82. Кит Г. С., Зашкільняк І. М. О термоупругом состоянии тела с тепловыделяющим включением // Физ.-хим. механика матер. – 1977. – Т.13, №4. – С. 77–82.
83. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.

84. Кит Г. С., Лысый И. П. Симметричная задача термоупругости для полосы с продольной трещиной // Мат. методы в термомеханике. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 28–36.
85. Кит Г. С., Лысый И. П. О термоупругом состоянии полосы с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып.10. – С. 50–53.
86. Кіт Г. С., Мартиняк Р.М. Термопружність структур з теплопровідними тріщинами // Мат. методи и физ.-мех. поля. –2003. – Т.46, №1.– С. 11–20.
87. Коваленко А. Д. Развитие исследований в области термоупругости, термомпластичности, термовязкоупругости. // Прикладная механика. –1969. – Т.5, № 12. – С. 1-16.
88. Коваленко А. Д. Особенности современной термоупругости // Прикладная механика. –1970. – Т.6, № 4. – С. 23-30.
89. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вища шк., 1975. – 216с.
90. Койтер У. Т. Решение некоторых задач теории упругости асимптотическими методами // Прилож. теор. функций в механике сплошной среды. – М.: Наука, 1965. – Т.1. – С. 15–31.
91. Колодий Б. И. Определение температурных полей и напряжений в полом цилиндре при индукционном нагреве // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 35-41
92. Коляно Ю. М. Влияние подкрепляющего элемента на температурные напряжения в анизотропной пластинке с отверстием // Концентрация напряжений. – 1971. –Вып.3. – С. 67-78.
93. Коляно Ю. М, Лящук Б. А. Краевая задача теплопроводности и термоупругости для полубесконечной анизотропной пластинки с теплообменом // Некоторые вопросы прикладной математики. – 1971. – Вып.5. – С. 58–70.
94. Космодамианский А. С., Калоеров С. А. Температурные напряжения в многосвязных пластинках. – Донецк: Вища шк., 1983. – 160с.
95. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 45-53.

96. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин // Прикладная механика. – 1977. – Т.13, №10. – С. 75-79.
97. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 5. – С. 3-8.
98. Космодамианский А. С., Ложкин В. Н. Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрических эффектов // Прикладная математика и механика. – 1978. – Т.42, №4. – С. 731-736.
99. Кудрявцев Б. А. Механика пьезоэлектрических материалов // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформ. твердого тела. – М. , 1978. – Т. 11. – С. 5-66.
100. Кудрявцев Б.А., Партон В. З. Магнитотермоупругость // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика деформ. твердого тела. – 1981. – Вып. 14. – С. 3–59.
101. Кушнир Р. М., Николишин Т. М., Осадчук В. А. Задача термоупругости для ортотропной цилиндрической оболочки с поперечной сквозной трещиной // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С 109-113.
102. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 717 с.
103. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 621 с.
104. Латышев В. И. Термонапряженное состояние плоскости с конечным числом круговых отверстий // Работы по механике сплошной среды. – Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1974. – С. 86–92.
105. Латышев В. И. Термонапряженное состояние полуплоскости ослабленной конечным числом круговых отверстий // Работы по механике сплошной среды. – Тула: Изд-во Тульск. политехн. ин-та, 1974. – С. 75-86
106. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. – М. –Л.: Гостехтеоретиздат, 1937. – 110 с.

107. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
108. Ложкин В. Н., Олейник Л. Н. Напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием // Механика твердого тела. – 1976. – № 8. – С. 127-130.
109. Ложкин В. Н., Олейник Л. Н. Некоторые случаи электроупругого равновесия однородного анизотропного пьезоэлектрического стержня с эллиптической полостью // Механика тверд. тела. – 1978. – № 10. – С. 113-116.
110. Ложкин В. Н., Олейник Л. Н. Упругое равновесие пьезоэлектрического цилиндрического тела с произвольной анизотропией // Мат. физика. – 1978. – № 24. – С. 98-104.
111. Ложкин В. Н. Асимптотический анализ электроупругого равновесия тонкого пьезоэлектрического полуслоя // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1980. – № 20. – С. 42-45.
112. Ложкин В. Н. Электроупругое равновесие тонкого кристаллического полуслоя с электродированными плоскими гранями // Теорет. и прикладная механика. – 1981. – № 12. – С. 42-47.
113. Ломакин В. А., Эль-Карамани А. М. Плоская задача для упругих тел, свойства которых зависят от температуры // Упругость и неупругость. – 1978. – Вып. 5. – С. 185-194.
114. Лопушанский Я. И. О возможности применения электромагнитных полей для термо- и вибрационной обработки трубчатых элементов конструкций. // Физ.-мех. поля в деформир. средах. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 24-28
115. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая шк., 1967. – 599 с.
116. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости. – К.: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.
117. Мартиняк Р. М. Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів // Физ.-хим. механика матер. – 1999. – Т. 35, № 5. – С. 14-22.

- 118.Мартиняк Р. М., Гончар Х. І., Нагалка С. П. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // Фіз.-хім. механіка матер. – 2003. – Т.39, №5. – С. 59-66.
- 119.Мартыняк Р. М., Гончар Х. И. Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып.41. – С. 58–62.
- 120.Мартынович Т. Л., Кибальникова С. И. Решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропного тела с полостью при заданной температуре на ее поверхности // Термомех. процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – 1978. – С. 70–79.
- 121.Мартынович Т. Л., Кибальникова С. И. Решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропного тела с полостью при заданной плотности теплового потока на ее поверхности // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып.9. – С. 103–110.
- 122.Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
- 123.Мелешко В. В. Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах // Прикладная механика. – 2005. – Т.41, №9. – С. 101–117.
- 124.Метод функций Грина уравнения Лапласа в задачах термоупругости анизотропных тел / С.Д. Волков, В.Н. Гирс, Ю.В. Денисов и др. // Механика полимеров. – 1973. – №5. – С. 823 – 829.
- 125.Методика решения комплексной задачи термомеханики электропроводных тел при импульсных электромагнитных воздействиях / А.Р. Гачкевич, Р. С. Мусий, Г.Б. Стасюк и др. // Теорет. и прикладная механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 105–111.
- 126.Мирсалимов В. М. Обратная задача термоупругости для плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых отверстий // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1976. – №2. – С. 110–114.

- 127.Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
- 128.Мольченко Л. В. Магнитоупругость нелинейных токонесущих оболочек // Магнитоупругость нелинейных токонесущих оболочек и газодинамика струйных течений / Л.В. Мольченко, Ю.М. Рудов. – К.: Вища шк., 1989. – С. 5–59.
- 129.Мольченко Л. В., Дикий П. В. Решение двумерных задач магнитоупругости кольцевой пластины // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 11. – С. 107–114.
- 130.Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Наука, 1980. – 254 с.
- 131.Мусій Р. С. Формулювання і методика розв’язування просторових і двовимірних динамічних крайових задач електромагнітотермопружності для циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 131–139.
- 132.Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
- 133.Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447 с
- 134.Най Дж. Физические свойства кристаллов. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
- 135.Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
- 136.Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
- 137.Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 138.Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
- 139.Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термоустойчивость пластин и оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – 520 с.

- 140.Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – К.: Наук. думка, 1983. – 444 с.
- 141.Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Отд-ние математических и естественных наук. – 1932. – №10. – С. 1425–1435.
- 142.Папкович П. Ф. Общий интеграл тепловых напряжений. // Прикладная математика и механика. – 1937. – Т.1, №2. – С. 245–246.
- 143.Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
- 144.Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
- 145.Пасос Мордаго А. Х., Пивник Я., Подильчук Ю. Н. Распределение напряжений в бесконечном трансверсально - изотропном теле с жестким эллиптическим включением в равномерном тепловом потоке // Прикладная механика. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 3–10.
- 146.Подильчук Ю. Н., Терещенко Л. М. Магнитоупругое поле в ферромагнетике со сферической полостью // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 3. – С. 71–80.
- 147.Подильчук Ю. Н., Терещенко Л. М. Магнитоупругое поле в ферромагнетике с эллиптическим включением // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 84–92.
- 148.Подильчук Ю. Н., Ткаченко В. Ф., Соколовский Я. И. Термоупругая контактная задача о вдавливании нагретого эллиптического в плане штампа в трансверсально-изотропное полупространство // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 38–45.
- 149.Підстригач Я. С., Бурак Я. Й. Деякі аспекти побудови нових моделей механіки твердого тіла з урахуванням електронних процесів // Вісн. АН УРСР. – 1970. – № 12. – С. 18–31
- 150.Подстригач Я. С., Колодий Б. И. Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя // Тепловые напряжения в элемен-

- тах конструкций. – 1970. – Вып.. 10. –С. 208-214
- 151.Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
 - 152.Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. К.: Наук. думка, 1976. – 312 с.
 - 153.Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
 - 154.Попович Б. И. Термоупругое состояние изотропной пластинки с отверстием произвольной формы при смешанных граничных условиях // Прикладная механика. –1992. – Т.28, №2. – С. 53–59.
 - 155.Попович Б. И., Грилицкий Д. В. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием при смешанных граничных условиях // Прикладная механика. – 1973. – Т.9, №6. – С. 54–60.
 - 156.Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 200 с.
 - 157.Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1978. – 200 с.
 - 158.Савин Г. Н. Грилицкий Д. В. Контактная задача термоупругости для анизотропной полуплоскости // Прикладная механика. – 1968. – Т.4, №5. – С. 1–10.
 - 159.Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
 - 160.Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.
 - 161.Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.
 - 162.Селезова Л. В., Кривенко О. П. Ферромагнитный упругий слой в магнитомеханическом поле // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. – К.: Наук. думка, 1986. – С. 169-172
 - 163.Солтыс И. Ф. Температурные напряжения в упругой плоскости с круговой границей и термоизолированными трещинами // Физ.-хим. механіка матер. – 1978. – Т.14, №1. – С. 94–98

164. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
165. Терлецький Р. Ф. Математичне моделювання термомеханічних процесів в тілах низької електропровідності в зовнішньому квазістаціонарному електромагнітному полі // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 36. – С. 34–38.
166. Терлецкий Р. Ф. Термомеханіка багатокомпонентних деформівних твердих тіл низької електропровідності при електромагнітному опроміненні. – Дис. д-ра фіз.-мат. наук. Львов, 2004. – 270 с.
167. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. – М.: Высшая шк., 1980. – 335 с.
168. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич и др. – К.: Наук. думка, 1977. – 247 с.
169. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
170. Уздалев А. И., Брюханова Е. Н. Температурные напряжения в бесконечной пластинке с круговым отверстием, нагреваемой источником тепла // Механика деформ. сред (Саратов). – 1976. – Вып.4. – С. 155–159.
171. Уздалев А. И., Брюханова Е. И. Распределение напряжений в круглой пластине нагреваемой источниками тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – Вып.6. – С. 86–89.
172. Уздалев А. И., Серебрякова Л. М. Квазистатическая задача термоупругости для двухсвязной изотропной пластинки // Механика деформ. сред (Саратов). – 1976. С. 145–154.
173. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. – Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – 167 с.
174. Уздалев А. И. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. – Саратов: Изд-во СГУ, 1975. – 176 с.
175. Установки индукционного нагрева / А.Е. Слухоцкий, В.С. Немков, Н.А. Павлов и др. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 325 с.

176. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 420 с.
177. Фильштинский Л. А. Задачи теплопроводности и термоупругости для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1964. – Вып.4. – С. 103–112.
178. Фильштинский Л. А. Плоская задача магнитоупругости для ферромагнитной среды, ослабленной разрезами // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, вып. 5. – С. 143–152.
179. Фильштинский Л. А., Кравец Е. М. Плоская задача магнитоупругости для ферромагнитной среды, ослабленной отверстиями // Физ.-хим. механика матер. – 1995. – № 6. – С. 38–46.
180. Фильштинский Л. А., Кравец Е. М. Основные направления развития магнитоупругости // Вісн. СумДУ. – 1998. – № 1 (9). – С. 13–19.
181. Фильштинский Л. А., Сиренко Ю. В. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 157–161.
182. Ханжов А. Д. Об одной смешанной задаче термоупругости для полубесконечной ортотропной пластинки. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. – 1975. – Т.28, №2. – С. 61–67.
183. Хома И. Ю. Об одном способе построения уравнений магнитоупругости нетонких пластин // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 3–7.
184. Хорошев К. Г. Термозлектроупругое состояние конечной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2005. – № 2. – С. 67–72
185. Хорошев К. Г. Термозлектронапряженное состояние анизотропной многосвязной полуплоскости // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Матер. IV Міжнар. наук. конф. Донецьк-Мелекно, 12–14 червня 2006 г. – Донецьк: Юго-Восток, 2006. – С.151-154.

186. Хорошун Л. П., Костецкий И. П., Шикула Е. Н. Термоупругость и прочность трехкомпонентных металлокомпозитов // Прикладная механика. – 1990. – Т.26, №11. – С. 24–31.
187. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
188. Хорошун Л. П., Назаренко Л. В. Термоупругость ортотропных композитов с эллипсоидальными включениями // Прикладная механика. – 1990. – Т.26, №9. – С. 3–10.
189. Хорошун Л. П., Шикула Е. Н. К теории кратковременной микроповреждаемости композитных материалов зернистой структуры при температурных воздействиях // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, №1. – С.79-87
190. Хорошун Л. П., Шикула Е. Н. Кратковременная микроповреждаемость слоистых материалов при температурных воздействиях // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, №4. – С. 60–68.
191. Хорошун Л. П., Шикула Е. Н. Микромеханика кратковременной микроповреждаемости слоисто-волоконистых композитов при температурных воздействиях // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, №9. – С. 67–77.
192. Червинко О. П., Сенченков И. К., Доля Е. В. Расчет параметров тепловой неустойчивости слоистой призмы // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып.40. – С. 63–67.
193. Чочиев Т. З. Температурное поле и температурные напряжения в полупространстве при экспоненциальном законе коэффициентов теплопроводности и удельной теплоемкости // Математический сборник (Северо-Осетин. ун-т). – 1975. – Вып.2. – С. 105–117.
194. Шаповалов В. Н. Температурные напряжения в окрестности термоизолированных квадратных отверстий // Прикладная механика. – 1971. – Т.7, №9. – С. 120–124.

195. Шаповалов В. Н. Термоупругая задача для плоскости с двумя круговыми отверстиями // Динамика и прочность машин. – 1971. – Вып.12. – С. 31–35.
196. Шевченко А. Ю. Термонапряженное состояние жесткокрепленных полуполос одинаковой ширины // Прикладная механика. – 1977. – Т.13, №9. – С. 66–72.
197. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Фундаментальное решение уравнений термоупругости пологих ортотропных оболочек // Доп. НАН України. – 2001. – №12. – С.56–60.
198. Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузениях. – К.: Наук. думка, 1970. – 287 с.
199. Шевченко Ю. Н. Приближенные методы решения задач термопластичности при повторном нагружении // Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С. 383–391.
200. Шевченко Ю. Н. Об определяющих уравнениях теории пластического течения при неизотермических процессах нагружения // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1978. – Вып.18. – С.17–23.
201. Шевченко Ю. Н., Савченко Ю. Г. Термовязкопластичность. – К.: Наук. думка, 1987. – 238 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В5-ти т.; Т.2)
202. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. Физические уравнения термовязкопластичности. – Киев: Наук. думка, 1982. – 240 с.
203. Шиллер Н. Н. О втором законе термодинамики и об одной новой его формулировке. – К.: "Университетские известия", 1898. –
204. Шульга Н. А. Эффективные физико-механические свойства мелкослоистых пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов // Соппротив. матер. и теория сооружений. – 1986. – Вып. 48. – С. 43–45.
205. Шульга Н. А. Эффективные магнитоупругие свойства слоистых композитов // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 36–43.

206. Эль-Карамани А. М. Концентрация напряжений в среде с зависящими от температуры свойствами // Прикладная механика. – 1978. – Т.14, №3. – С. 79–86.
207. Юрьева А. А. Термоупругая задача для ортотропной пластинки с отверстием, близким к эллиптическому // – 1968. – №2. – С. 141–145.
208. A magneto-electroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading / Zhao M.H., Wang H., Yang F., Liu T. // Theoret. and Appl. Fract. Mech. – 2006. – Vol. 45. – P. 227–237.
209. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / Liu, J.X.; Zhang, X.S.; Liu, X.L.; Zheng, J. // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16 – P. 148-163
210. Berlincourt D., Krueger H. H. A. Properties of Piezoelectricity Ceramics // Technical Publication TP-226. – www.morgan-electroceramics.com
211. Brown W. F. Magnetoelastic Interactions. – New York: Springer-Verlag, 1966. – VIII, 155 p.
212. Caratheodory C. Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik // Math. Ann. – 1909. – Vol. 67.
213. Chen W. Q., Ding H. J., Ling D. S. Thermoelastic field of a transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution // Int. J. Sol. Struct. – 2004. – Vol. 41. N.1. – P. 69-83
214. Chen W. Q., Lim C. W., Ding H. J. Point temperature solution for a penny-shaped crack in an infinite transversely isotropic thermo-piezo-elastic medium // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2005. – Vol. 29. – P. 524–535
215. Chen W. T. Plane Thermal Stress at an Insulated Hole Under Uniform Heat Flow in an Orthotropic Medium // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. 34, №72. – P. 133–134.
216. Chu L. J., Haus H. A., Penfield P. The force density in polarizable and magnetizable fluids // Proc. IEEE. – 1966. – Vol. 54, N. 7. – P. 920-935

217. Cun-Fa Gao, Min-Zhong Wang. Collinear permeable cracks in thermopiezoelectric materials // *Mech. Mater.* – 2001. – Vol. 33. – P. 1–9
218. Cun-Fa Gao, Ying-Tao Zhao, Min-Zhong Wang. An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media // *Int. J. Sol. Struct.* – 2002. – Vol. 39. – P. 2665–2685
219. Duhamel C. Memoire sur les equations generales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilite n'est pas la mkme dans tous les sens// *J. de l'Ecole Polytechnique.* – 1832. – Vol. 13. – P.356–399.
220. Duhamel C. Memoire sur les phenomenes thermodynamiques // *J. de l'Ecole Polytechnique.* – 1837. – Vol. 15. – P.1–57
221. Dunn M. L. Micromechanics of coupled electroelastic composites: effective thermal expansion and pyroelectric coefficients // *J. Appl. Phys.* – 1993. – Vol. 73. – P. 5131–5140.
222. Dunn M. L. A theoretical framework for the analysis of thermoelectroelastic heterogeneous media with applications // *J. Intelligent Mater. Syst. Struct.* – 1995. – Vol. 6, N. 2. – P. 255–265
223. Effect of magnetic bias field on magnetoelectric coupling in magnetoelectric composites / Liu Y.X., Wan J.G., Liu J. M., Nan C.W. // *J. Appl. Phys.* – 2003. – Vol. 94, № 8. – P. 5118–5122.
224. El'Karamany A. S. Constitutive Laws, Uniqueness Theorem and Hamilton's Principle in Linear Micropolar Thermopiezoelectric/Piezomagnetic Continuum with Relaxation Time // *J. Thermal Stresses.* – 2007. – Vol. 30. N.1. – P. 59–80
225. Eringen A. C. *Mechanics of continuum.* – New York: Wiley, 1967. – 562 p.
226. Eringen A. C., Maugin G. A. *Electrodynamics of continua.* – New York: Springer-Verlag, 1990. – Vol. 2. – 363 p.
227. Ersoy Y. A. dynamic theory for polarizable and magnetizable magneto-electro thermoviscoelastic anisotropic solids possessing magnetic symmetry // *Z. angew. Math. und Mech.* – 1978. – Vol. 58., N. 6. – P. T207-T209

228. Finite Element Modeling of Thermopiezomagnetic Smart Structures / Sunar M., Ahmed Z. Al-Garni M. H. Ali, R. Kahraman // *AIAA Journal*. – 2002. – Vol. 40. N.9. – P. 1846-1851
229. Florence A. L., Goodier J. N. Thermal Stresses Due to Disturbance of Uniform Heat Flow by an Insulated Ovaloid Hole // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1960. – Vol.26, №1. – P. 635–639.
230. Gartwright D. J., Rooke D. P. Green's function in fracture mechanics // *Fracture mechanical: Curr. Status, future prospects. Proc. Conf., Cambridge, 1979, Toronto etc., 1979*, P. 91–123.
231. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture mechanical assessment of interface cracks with contact zones in piezoelectric bimetals under thermoelectromechanical loadings II. Electrically impermeable interface cracks // *Int. J. Sol. Struct.* – 2003. – Vol. 40 – P. 4219-4237
232. Hutter K., van de Ven A. A. Field-matter interaction in thermoelastic solids. – *Lecture Notes in Physics*. – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234 p.
233. Itou S. Thermal Stresses Around Two Parallel Cracks In An Infinite Orthotropic Plate Under Uniform Heat Flow // *J. Therm. Stress*. – 2001. – Vol.24, №7. – P. 677–694.
234. Kajaste-Rudnitski J. S. Thermal stresses induced by the point source in an isotropic circular ring // *Rakenteid. mek.* – 1975. – Vol.8, №2. – P. 138–154.
235. Kaliski. S. Wave equations of thermo-electromagnetoelasticity // *Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci.* – 1965. – Vol. 6, N. 3. – P. 231-265
236. Kerr G., Melrose G., Tweed J. The Disturbance Of A Uniform Heat Flow By Two Line Cracks In An Infinite Anisotropic Thermoelastic Solid // *J. Therm. Stress*. – 1999. – Vol.22, №6. – P. 547–563.
237. Kirilyuk V. S. Equilibrium of a Transversally Isotropic Body with an Elliptic Crack under Thermal Action // *Int. Applied Mechanics*. – 2001. – Vol. 37., N. 10. – P. 1304-1310
238. Kwon Y. W., Cho W. M. Multilevel, Micromechanical Model For Thermal Analysis Of Wovenfabric Composite Materials // *J. Therm. Stress*. – 2004. –

Vol.27, №1. – P. 59–73.

- 239.Lame G., Leçons sur la Théorie analytique de la Chaleur. –Paris: Mallet-Bachelier, 1897. – 414 p.
- 240.Layer wise partial mixed finite element analysis of magneto-electro-elastic plates / Lage G. R., Soares C. M., Soares C. A., Reddy J. N. // Comput. Struct. – 2004. – Vol. 76. – P. 299–317.
- 241.Lewis R. W., Bass B. R. The determination of stresses and temperatures in cooling bodies by finite elements. // Trans. ASME. – 1976. – Vol.C98. – P. 478–484.
- 242.Maugen G. A. On the spin relaxation in deformable ferromagnetics // Physika. – 1975. –A81. – P. 454-468
- 243.Mindlin R. D. Equation of high frequency vibration of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Sol. Struct. – 1974. – Vol. 10, N. 6. – P. 625-637
- 244.Nayfeh A., Nemat-Nasser S. Electromagneto-thermoelastic plane waves in solids with thermal relaxation // Pap. ASME. – 1971. – N. APMW-5. – 6 pp.
- 245.Neumann F. E. Die Geetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimierten oder ungleichformig erwarmten uncrystallinischen Korpern // Abhandl. Konigl. Akad. Wissen. Berlin. – 1841. – №2. – Teil. S. 1–254.
- 246.Niraula O. P., Noda N. The analysis of thermal stresses in thermopiezoelastic semi-infinite body with an edge crack // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 2002. – Vol. 72, N. 2–3 – P. 119-126
- 247.Niraula, O. P., Wang, B. L. Thermal Stress Analysis in Magneto-Electro-Thermo-Elasticity with a Penny-Shaped Crack Under Uniform Heat Flow // J. Therm. Stress. – 2006. – Vol. 26. N.5. – P. 423–437
- 248.Noda N., Takeuti Y. General treatment of transient plane thermoelastic problems in multiply connected orthotropic bodies // Theor. And Appl. Mech. 14th IUTAM Congr., Delt., Amsterdam E.a, 1976. – P. 75.
- 249.Numerical modeling of magnetoelectric effect in a composite structure / Liu Y.X., Wan J.G., Liu J. -M., Nan C.W. // J. Appl. Phys. – 2003. – Vol. 94, № 8. – P. 5111–5117.

250. Oh, Il-Kwon. Thermopiezoelastic nonlinear dynamics of active piezolaminated plates // *Smart Mater. Struct.* – 2005. – Vol. 14, N.1. – P. 823-834
251. Olesiak Zbigniew Axially-symmetric thermal contact stress for a micropolar elastic semi-space // *Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn.* – 1977. – Vol.25, №5 – P. 381–384.
252. Pao Y. H. Electromagnetic forces in deformable continua // *Mechanics Today* / Ed. By S. Nemat-Nasser. – New York etc.: Pergamon press, 1978. – Vol. 1. – P. 209–305
253. Pao Y. H., Hutter K. Electrodynamics for moving elastic solids and viscous fluids // *Proc. IEEE.* – 1975. – Vol. 63, N. 7. – P. 1011-1021
254. Paria G. Magneto-elasticity and magneto-thermoelasticity // *Adv. Appl. Mech.* – 1967. – Vol. 1, N. 1. – P.32–46
255. Parkes E.W. Thermal stresses in anisotropic discs // *Int. J. Mech. Sci.* – 1976. – Vol.18, №1. – P. 5–10.
256. Penfield P., Haus H. A. Electrodynamics of moving media. – Cambridge: MIT, 1967. – 215 p.
257. Podil'chuk Y. N. The Stress State of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body with a Parabolic Crack in a Uniform Heat Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 36, N. 8. – P. 1037-1043
258. Podil'chuk Y. N. Exact Analytical Solutions of Three-Dimensional Static Thermoelastic Problems for a Transversally Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – Vol. 37, N. 6. – p. 728-761
259. Podil'chuk Y. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, N. 2. – p. 132-170
260. Qin H. Q. Thermoelectroelastic Greens function for a piezoelectric plate containing an elliptic hole // *Mech. Mater.* – 1998. – Vol. 30 – P. 21-29
261. Qin H. Q. Greens function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes // *Arch. Appl. Mech.* – 1999. – Vol. 69 – P. 406-418

262. Qin H. Q. Thermopiezoelectric interaction of macro- and micro-cracks in piezoelectric medium // Theor. Appl. Fract. Mech. – 1999. – Vol. 32 – P. 192-135
263. Qin H. Q. General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading // Int. J. Sol. Struct. – 2000. – Vol. 37 – P. 5561-5578
264. Qin H. Q. Thermoelastoelectric solution for elliptic inclusions and application to crack-inclusion problems // Appl. Math. Mod. – 2000. – Vol. 25 – P. 1-23
265. Qin H. Q. Fracture analysis of cracked thermopiezoelectric materials by BEM // Electr. J. Bound. Elem. – 2003. – Vol. 1 – P. 283-301
266. Qin H. Q. 2D Greens functions of defective magnetoelastoelectric solids under thermal loading // Eng. Analys. Bound. Elem. – 2005. – Vol. 29 – P. 577-585
267. Qin H. Q., Meng Lu. BEM for crack-inclusion problems of plane thermopiezoelectric solids // Int. J. Numer. Meth. – 2000. – Vol. 48 – P. 1071-1088
268. Qin H. Q., Yiu-Wing Mai, Sho-Wen Yu. Some problems in plane thermopiezoelectric materials with holes // Int. J. Sol. Struct. – 1999. – Vol. 36 – P. 427-439
269. Rogowski B. The temperaturowe naprezenia I przesmyczenia kompozytowych tarcz I pasm plytowych wywolane ogrzaniem brzozy // Zesz. nauk. Plodz. – 1978. – №279. – S. 25 –43.
270. Senthil S. Vel, Batra R. C. Generalized plane strain thermopiezoelectric analysis of multilayered plates // J. Therm. Stress. – 2003. – Vol. 26 – P. 353-377
271. Shang F., Kuna M., Scherzer M. Analytical solutions for two penny-shaped crack problems in thermo-piezoelectric materials and their finite element comparisons // Int. J. Fract. – 2002. – Vol. 117. N.2. – P. 113-118
272. Shang F., Kuna M. Thermal stress around a penny-shaped crack in a thermopiezoelectric solid // Comput. Mater. Sc. – 2004. – Vol. 26 – P. 197-201
273. Tauchert T. R. Publications On Thermal Stresses // J. Therm. Stress. –2001. – Vol.24, № 1. – P. 91–92.
274. Tauchert T. R., Akoz A. Y. Stationary temperature and stresses fields in an anisotropic elastic slab // Trans. ASME. – 1975. – Vol.E42. – P. 647–650.

275. Tiersten H. F. Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5. – P. 1298–1318.
276. Tiersten H. F. Linear piezoelectric plate vibration. – New York: Premium Press, 1969. – 211 p.
277. Tiersten H. F. On the nonlinear equations of thermoelectroelasticity // Int. J. Sci. – 1971. – Vol. 9. – P. 587-603
278. Tomita S., Shindo Y. Rayleigh waves in magnetothermoelastic solids with thermal relaxation in the magnetic field // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – Vol. 17., N. 2. – P. 227-232
279. Tomita S., Shindo Y. Thermoelastic Rayleigh waves with thermal relaxation in the magnetic field // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. – 1979. – Vol. 27., N. 1. – P. 9-15
280. Tsamasphyros G., Song. Z. F. Analysis of a Crack in a Finite Thermopiezoelectric Plate under Heat Flux // Int. J. Fracture. – 2005. – Vol. 136, N 1–4. – P. 143-166
281. Tsamasphyros, G., Song, Z. F. The General Solution for a Finite Thermopiezoelectric Plate Containing a Hole and a Crack // Arch. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 76, N. 1-2 – P. 1-17
282. Wang B. L., Noda N. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 189-193
283. Wang B. L., Noda N. Exact thermoelectroelasticity solution for a penny-shaped crack in piezoelectric materials // J. Therm. Stress. – 2004. – Vol. 27. N.3. – P. 241-251
284. Zhang C., Di S., Zhang N. A new procedure for static analysis of thermoelectric laminated composite plates under cylindrical bending // Compos. Struct. – 2002. – Vol. 56. – P. 131-140

П Р И Л О Ж Е Н И Я

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1

Значения некоторых величин в цилиндре и диске при постоянной
температуре на жестко подкреплённой границе

Материал	Цилиндр				Диск			
	σ_x	σ_y	E_y	H_y	σ_x	σ_y	E_y	H_y
ЭМ1	-0,616	-0,562	-0,026	–	-0,239	-0,242	-0,027	–
ЭМ2	-0,713	-1,253	-0,012	–	-0,460	-1,015	-0,014	–
ЭМ3	-2,009	-1,762	-0,008	–	-1,127	-0,977	-0,013	–
ЭМ4	-1,935	-1,316	0,020	–	-1,106	-0,576	0,015	–
ЭМ5	-1,025	-0,532	-0,022	–	-0,433	-0,102	-0,025	–
ЭМ6	-0,443	-0,490	-0,042	–	-0,158	-0,261	-0,042	–
ММ7	-0,464	-0,320	–	0,013	-0,266	-0,123	–	0,013
ММ8	-0,472	-0,300	–	0,013	-0,265	-0,126	–	0,013
ММ9	-4,296	-3,495	–	0,013	-1,685	-0,915	–	0,013

Таблица А.2

Значения величин в отдельных точках пластинки с круговым отверстием (рис. 2.5,а) при действии источника тепла

Материал	Точка	Величина	c/a					
			10^6	10	5	1	0,5	0,1
ЭМ1	А	$\sigma_y \cdot 10$	2,527	0,450	0,348	0,188	0,155	0,127
		$D_y \cdot 10^7$	-2,530	-0,443	-0,336	-0,149	-0,104	-0,060
		$u \cdot 10^4$	2,069	0,368	0,284	0,153	0,126	0,104
	В	$\sigma_x \cdot 10$	1,393	0,244	0,187	0,114	0,107	0,107
		$D_x \cdot 10^7$	0,000	0,012	0,020	0,039	0,034	0,012
		$u \cdot 10^4$	1,738	0,304	0,233	0,141	0,134	0,134
	С	$\sigma_y \cdot 10$	2,527	0,427	0,306	0,059	-0,020	-0,123
		$D_y \cdot 10^7$	2,530	0,435	0,320	0,100	0,037	-0,040
		$u \cdot 10^4$	2,069	0,349	0,250	0,049	-0,016	-0,099
ЭМ5	А	$\sigma_y \cdot 10$	5,979	1,073	0,841	0,497	0,439	0,404
		$D_y \cdot 10^4$	-1,864	-0,325	-0,244	-0,099	-0,062	-0,021
		$u \cdot 10^2$	0,122	0,021	0,016	0,006	0,004	0,001
	В	$\sigma_x \cdot 10$	5,810	1,016	0,778	0,476	0,458	0,467
		$D_x \cdot 10^4$	0,000	0,013	0,023	0,044	0,037	0,013
		$u \cdot 10^2$	0,077	0,013	0,010	0,006	0,006	0,006
	С	$\sigma_y \cdot 10$	5,979	1,002	0,710	0,103	-0,087	-0,317
		$D_y \cdot 10^4$	1,864	0,322	0,240	0,088	0,047	0,003
		$u \cdot 10^2$	0,122	0,021	0,016	0,006	0,003	0,000
ММ9	А	$\sigma_y \cdot 10$	-45,460	-7,959	-6,014	-2,602	-1,775	-1,048
		$B_y \cdot 10$	25,740	4,526	3,445	1,595	1,147	0,679
		u	10,050	1,765	1,343	0,622	0,447	0,265
	В	$\sigma_x \cdot 10$	21,080	3,684	2,810	1,185	0,543	-0,394
		$B_x \cdot 10$	0,000	-0,221	-0,384	-0,675	-0,570	-0,199
		u	0,005	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
	С	$\sigma_y \cdot 10$	-45,460	-7,811	-5,739	-1,638	-0,348	1,327
		$B_y \cdot 10$	-25,740	-4,406	-3,225	-0,931	-0,252	0,580
		u	10,050	1,718	1,258	0,363	0,098	-0,226

Таблица А.3

Значения КИНИН для вершин трещины в пластинке (рис.2.5,б,в)
при действии сосредоточенного источника тепла

Материал	Величина	c/a								
		10	5	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Источник тепла находится на линии трещины (рис.2.5,б)										
ЭМ1	$k_1^{\pm} \cdot 10$	0,167	0,125	0,044	0,019	0,012	0,004	-0,005	-0,017	-0,039
	$k_D^{\pm} \cdot 10^7$	-0,326	-0,243	-0,085	-0,037	-0,024	-0,009	0,010	0,034	0,075
	$k_E^{\pm} \cdot 10^2$	-0,427	-0,318	-0,111	-0,048	-0,031	-0,011	0,013	0,044	0,098
ЭМ5	$k_1^{\pm} \cdot 10$	0,538	0,401	0,140	0,060	0,039	0,014	-0,016	-0,056	-0,124
	$k_D^{\pm} \cdot 10^4$	-0,157	-0,117	-0,041	-0,018	-0,011	-0,004	0,005	0,016	0,036
	$k_E^{\pm} \cdot 10^2$	-0,201	-0,150	-0,052	-0,023	-0,015	-0,005	0,006	0,021	0,046
ММ8	k_1^{\pm}	-0,225	-0,167	-0,059	-0,025	-0,016	-0,006	0,007	0,023	0,052
	$k_B^{\pm} \cdot 10^2$	0,859	0,640	0,224	0,097	0,062	0,023	-0,025	-0,089	-0,198
	$k_H^{\pm} \cdot 10^2$	0,136	0,101	0,035	0,015	0,010	0,004	-0,004	-0,014	-0,031
ММ9	k_1^{\pm}	-0,360	-0,268	-0,094	-0,040	-0,026	-0,010	0,011	0,038	0,083
	k_B^{\pm}	0,294	0,219	0,077	0,033	0,021	0,008	-0,009	-0,031	-0,068
	$k_H^{\pm} \cdot 10^2$	0,186	0,138	0,048	0,021	0,013	0,005	-0,005	-0,019	-0,043
Источники тепла находится срединном перпендикуляре (рис. 2.5,в)										
ЭМ1	$k_1^{\pm} \cdot 10$	0,074	0,029	-0,040	-0,047	-0,047	-0,048	-0,048	-0,048	-0,048
	$k_2^{\pm} \cdot 10^2$	-0,034	-0,066	-0,163	-0,144	-0,130	-0,110	-0,083	-0,046	-0,005
	$k_D^{\pm} \cdot 10^7$	-0,187	-0,094	0,069	0,089	0,091	0,093	0,094	0,094	0,095
	$k_E^{\pm} \cdot 10^2$	-0,234	-0,114	0,092	0,117	0,120	0,122	0,123	0,123	0,124
ЭМ5	$k_1^{\pm} \cdot 10$	0,299	0,148	-0,116	-0,148	-0,152	-0,154	-0,155	-0,156	-0,156
	$k_2^{\pm} \cdot 10^2$	-0,112	-0,219	-0,672	-0,632	-0,572	-0,484	-0,362	-0,201	-0,022
	$k_D^{\pm} \cdot 10^5$	-0,847	-0,409	0,339	0,430	0,441	0,448	0,452	0,454	0,454
	$k_E^{\pm} \cdot 10^2$	-0,110	-0,053	0,043	0,055	0,056	0,057	0,058	0,058	0,058
ММ8	k_1^{\pm}	-0,078	-0,017	0,063	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065	0,065
	$k_2^{\pm} \cdot 10^2$	0,462	0,882	1,656	0,979	0,782	0,579	0,377	0,183	0,018
	$k_B^{\pm} \cdot 10^2$	0,418	0,181	-0,202	-0,240	-0,244	-0,247	-0,248	-0,248	-0,249
	$k_H^{\pm} \cdot 10^2$	0,064	0,027	-0,032	-0,038	-0,039	-0,039	-0,039	-0,039	-0,039
ММ9	k_1^{\pm}	-0,161	-0,062	0,092	0,104	0,104	0,104	0,104	0,104	0,104
	$k_2^{\pm} \cdot 10$	0,074	0,144	0,362	0,277	0,233	0,179	0,118	0,057	0,005
	k_B^{\pm}	0,170	0,088	-0,058	-0,079	-0,081	-0,083	-0,085	-0,085	-0,085
	$k_H^{\pm} \cdot 10^2$	0,107	0,055	-0,036	-0,050	-0,051	-0,053	-0,053	-0,054	-0,054

Таблица А.4

Значения плотности внутренней энергии $U \cdot 10^3$ около неподкрепленных контуров кругового кольца (рис. 3.4,б) в задачах термоупругости и теории упругости

Материал	Точка	Задача о действии температуры, значения R_1/R_0			Задача о действии механических сил, значения R_1/R_0		
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
ЭМ6	A	1,552	2,682	3,202	0,000	0,002	0,344
	B	0,079	0,134	0,145	0,000	0,003	0,523
	D	-4,440	-3,849	-3,395	0,015	0,025	0,464
	E	-0,106	-0,137	-0,144	0,014	0,028	0,686
ММ9	A	2092,1	3248,2	3954,6	0,000	0,002	0,254
	B	-1,471	-2,987	-3,311	0,000	0,002	0,236
	D	-6999,1	-5155,2	-4288,4	0,011	0,019	0,346
	E	-2,110	0,278	2,387	0,011	0,018	0,323

Таблица А.5

Значения напряжений σ_θ около внешнего контура L_0 кругового кольца с не-подкрепленными контурами в задачах термоэлектро-, термоманитоупругости и термоупругости (рис. 3.4,б)

Материал	θ , рад	Задачи термоэлектро- и термоманитоупругости, значения R_1/R_0				Задача термоупругости, значения R_1/R_0			
		0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
ЭМ1	0	0,027	0,050	0,071	0,074	0,027	0,051	0,071	0,077
	$\pi/12$	0,027	0,053	0,072	0,075	0,027	0,053	0,072	0,077
	$\pi/6$	0,028	0,058	0,074	0,075	0,028	0,058	0,074	0,077
	$\pi/4$	0,029	0,062	0,075	0,076	0,029	0,062	0,075	0,077
	$\pi/3$	0,032	0,062	0,075	0,077	0,032	0,062	0,075	0,076
	$5\pi/12$	0,035	0,060	0,074	0,077	0,034	0,060	0,074	0,075
	$\pi/2$	0,036	0,058	0,073	0,077	0,036	0,058	0,073	0,076
ЭМ2	0	0,076	0,193	0,295	0,349	0,065	0,165	0,256	0,407
	$\pi/12$	0,081	0,199	0,298	0,353	0,069	0,170	0,258	0,451
	$\pi/6$	0,097	0,215	0,303	0,348	0,082	0,185	0,263	0,449
	$\pi/4$	0,122	0,241	0,309	0,335	0,103	0,208	0,268	0,402
	$\pi/3$	0,153	0,268	0,313	0,318	0,130	0,231	0,272	0,322
	$5\pi/12$	0,181	0,288	0,317	0,302	0,155	0,248	0,274	0,231
	$\pi/2$	0,193	0,295	0,318	0,290	0,166	0,254	0,275	0,153
ЭМ6	0	0,093	0,225	0,312	0,070	0,026	0,056	0,074	0,076
	$\pi/12$	0,100	0,227	0,312	0,063	0,027	0,056	0,074	0,076
	$\pi/6$	0,119	0,235	0,313	0,132	0,029	0,057	0,074	0,077
	$\pi/4$	0,142	0,252	0,315	0,258	0,031	0,058	0,074	0,077
	$\pi/3$	0,162	0,274	0,320	0,406	0,034	0,061	0,075	0,078
	$5\pi/12$	0,176	0,294	0,326	0,538	0,036	0,064	0,075	0,078
	$\pi/2$	0,180	0,302	0,328	0,620	0,037	0,065	0,076	0,078
ММ7	0	0,010	-0,004	-0,050	-0,045	0,033	0,065	0,073	0,071
	$\pi/12$	0,007	-0,013	-0,052	-0,042	0,033	0,062	0,072	0,072
	$\pi/6$	-0,003	-0,031	-0,057	-0,048	0,033	0,056	0,071	0,073
	$\pi/4$	-0,020	-0,051	-0,063	-0,050	0,031	0,052	0,069	0,074
	$\pi/3$	-0,043	-0,066	-0,065	-0,064	0,027	0,052	0,070	0,076
	$5\pi/12$	-0,063	-0,074	-0,065	-0,071	0,024	0,055	0,071	0,076
	$\pi/2$	-0,070	-0,076	-0,064	-0,080	0,023	0,057	0,072	0,076
ММ9	0	-0,143	-0,826	-1,110	-0,739	0,171	0,299	0,359	0,572
	$\pi/12$	-0,172	-0,778	-1,110	-0,789	0,168	0,300	0,360	0,542
	$\pi/6$	-0,276	-0,632	-1,106	-0,941	0,159	0,300	0,360	0,464
	$\pi/4$	-0,401	-0,600	-1,084	-1,156	0,148	0,293	0,359	0,359
	$\pi/3$	-0,506	-0,826	-1,060	-1,376	0,137	0,278	0,356	0,255
	$5\pi/12$	-0,578	-1,089	-1,169	-1,553	0,127	0,263	0,352	0,182
	$\pi/2$	-0,605	-1,196	-1,326	-1,641	0,123	0,257	0,350	0,157

Таблица А.6

Значения напряжений σ_θ около внутреннего контура L_1 кругового кольца с неподкрепленными контурами в задачах термоэлектро-, термомагнитоупругости (ТЭМУ) и термоупругости (ТУ) (рис. 3.4,б)

Материал	θ , рад	Значения R_1/R_0 в ТЭМУ				Значения R_1/R_0 в ТУ			
		0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
ЭМ1	0	-0,167	-0,116	-0,082	-0,075	-0,166	-0,116	-0,082	-0,078
	$\pi/12$	-0,149	-0,106	-0,081	-0,075	-0,148	-0,106	-0,081	-0,078
	$\pi/6$	-0,120	-0,091	-0,079	-0,076	-0,120	-0,090	-0,079	-0,077
	$\pi/4$	-0,104	-0,084	-0,078	-0,077	-0,105	-0,084	-0,078	-0,077
	$\pi/3$	-0,103	-0,086	-0,078	-0,077	-0,103	-0,086	-0,078	-0,076
	$5\pi/12$	-0,110	-0,094	-0,079	-0,078	-0,110	-0,094	-0,079	-0,075
	$\pi/2$	-0,115	-0,098	-0,080	-0,078	-0,115	-0,098	-0,080	-0,076
ЭМ2	0	-0,844	-0,502	-0,347	-0,355	-0,754	-0,442	-0,302	-0,413
	$\pi/12$	-0,81	-0,488	-0,345	-0,358	-0,718	-0,428	-0,299	-0,457
	$\pi/6$	-0,711	-0,451	-0,339	-0,352	-0,617	-0,391	-0,294	-0,454
	$\pi/4$	-0,561	-0,403	-0,332	-0,338	-0,480	-0,348	-0,288	-0,405
	$\pi/3$	-0,421	-0,365	-0,327	-0,332	-0,346	-0,312	-0,284	-0,323
	$5\pi/12$	-0,279	-0,332	-0,324	-0,303	-0,253	-0,291	-0,281	-0,231
	$\pi/2$	-0,235	-0,322	-0,323	-0,291	-0,221	-0,284	-0,281	-0,152
ЭМ6	0	-0,698	-0,446	-0,346	-0,071	-0,148	-0,099	-0,080	-0,077
	$\pi/12$	-0,686	-0,446	-0,346	-0,063	-0,147	-0,100	-0,080	-0,077
	$\pi/6$	-0,639	-0,441	-0,345	-0,132	-0,142	-0,101	-0,081	-0,077
	$\pi/4$	-0,544	-0,418	-0,342	-0,259	-0,129	-0,098	-0,080	-0,078
	$\pi/3$	-0,412	-0,375	-0,337	-0,408	-0,112	-0,092	-0,080	-0,078
	$5\pi/12$	-0,289	-0,331	-0,331	-0,541	-0,100	-0,087	-0,079	-0,078
	$\pi/2$	-0,241	-0,312	-0,328	-0,624	-0,096	-0,085	-0,079	-0,078
ММ7	0	0,342	0,162	0,077	0,048	-0,071	-0,071	-0,074	-0,071
	$\pi/12$	0,321	0,15	0,075	0,044	-0,079	-0,076	-0,074	-0,072
	$\pi/6$	0,246	0,113	0,069	0,049	-0,103	-0,090	-0,076	-0,073
	$\pi/4$	0,111	0,063	0,062	0,049	-0,129	-0,103	-0,078	-0,075
	$\pi/3$	-0,005	0,038	0,063	0,063	-0,134	-0,100	-0,078	-0,076
	$5\pi/12$	-0,045	0,043	0,061	0,071	-0,123	-0,089	-0,076	-0,076
	$\pi/2$	-0,051	0,048	0,061	0,081	-0,118	-0,084	-0,075	-0,077
ММ9	0	2,479	1,45	1,233	0,746	-0,451	-0,422	-0,379	-0,577
	$\pi/12$	2,553	1,486	1,232	0,796	-0,455	-0,419	-0,378	-0,546
	$\pi/6$	2,711	1,635	1,235	0,951	-0,472	-0,417	-0,378	-0,467
	$\pi/4$	2,747	1,871	1,258	1,172	-0,515	-0,425	-0,379	-0,361
	$\pi/3$	2,196	1,841	1,295	1,453	-0,589	-0,450	-0,382	-0,257
	$5\pi/12$	0,524	0,972	1,191	1,562	-0,671	-0,483	-0,387	-0,183
	$\pi/2$	-0,836	0,111	0,95	1,609	-0,710	-0,500	-0,389	-0,157

Таблица А.7

Значения плотности внутренней энергии U в некоторых точках кругового кольца с неподкрепленными контурами в задачах термоэлектро-, термомагнитоупругости (ТЭМУ) и термоупругости (ТУ) (рис. 3.4,б)

Материал	θ , рад	Значения R_1/R_0 в ТЭМУ				Значения R_1/R_0 в ТУ			
		0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
ЭМ1	A	0,023	0,042	0,059	0,097	0,022	0,041	0,057	0,062
	B	0,045	0,073	0,091	0,101	0,045	0,073	0,091	0,094
	D	-0,136	-0,095	-0,068	-0,019	-0,134	-0,093	-0,066	-0,063
	E	-0,144	-0,123	-0,100	-0,103	-0,143	-0,123	-0,100	-0,095
ЭМ2	A	0,288	0,602	0,843	0,898	0,123	0,314	0,487	0,776
	B	0,113	0,173	0,187	0,174	0,097	0,149	0,162	0,090
	D	-1,958	-1,284	-0,960	-0,968	-1,439	-0,844	-0,577	-0,789
	E	-0,138	-0,189	-0,190	-0,174	-0,130	-0,167	-0,165	-0,089
ЭМ6	A	1,552	2,682	3,202	3,792	0,015	0,033	0,043	0,045
	B	0,079	0,134	0,145	0,270	0,016	0,029	0,033	0,034
	D	-4,440	-3,849	-3,395	-5,112	-0,087	-0,058	-0,047	-0,045
	E	-0,106	-0,137	-0,144	-0,267	-0,042	-0,037	-0,035	-0,034
ММ7	A	51,81	99,81	134,20	140,90	0,019	0,038	0,043	0,042
	B	-0,184	-0,190	-0,160	-0,180	0,058	0,142	0,179	0,191
	D	-253,80	-186,00	-149,20	-142,60	-0,042	-0,042	-0,043	-0,041
	E	-0,130	0,120	0,150	0,190	-0,295	-0,210	-0,189	-0,192
ММ9	A	2092,1	3248,2	3954,6	4104,0	0,102	0,178	0,214	0,339
	B	-1,471	-2,987	-3,311	-4,022	0,307	0,644	0,875	0,391
	D	-6999,1	-5155,2	-4288,4	-4142,0	-0,270	-0,252	-0,225	-0,341
	E	-2,110	0,278	2,387	3,968	-1,779	-1,253	-0,976	-0,395

Таблица А.8

Значения напряжений и индукции в отдельных точках кругового кольца (рис. 3.4,б) для различных комбинаций подкреплений контуров кольца

Материал	Точка	Величина	R_1/R_0				
			0,1	0,5	0,9	0,99	
ЭМ2	<i>A</i>	σ_θ	0,065	0,165	0,256	0,299	
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,156	-0,255	-0,305	-0,266	
		σ_θ	0,193	0,295	0,318	0,290	
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,844	-0,502	-0,347	-0,355	
		σ_θ	0,377	0,354	0,323	0,328	
		σ_θ	-0,235	-0,322	-0,323	-0,291	
	L_0 жестко подкреплён, L_1 не подкреплён						
	<i>A</i>	σ_r	-0,056	-0,121	-0,042	0,010	
		σ_θ	0,012	0,011	0,039	0,052	
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,092	-0,144	-0,174	-0,421	
		σ_r	-0,250	-0,198	-0,017	-0,002	
		σ_θ	-0,054	-0,042	-0,003	0,008	
		σ_θ	-1,515	-1,296	-1,033	-0,945	
	<i>D</i>	$D_\theta \cdot 10^4$	0,170	0,154	0,181	-0,045	
		σ_θ	-0,119	-0,270	-0,234	-0,242	
		L_0 неподкреплён, L_1 жестко подкреплён					
		<i>A</i>	σ_θ	0,077	0,238	0,139	0,306
			$D_\theta \cdot 10^4$	-0,154	-0,158	-0,171	-0,937
			σ_θ	0,190	0,099	-0,016	-0,008
	<i>B</i>		$\sigma_r \cdot 10$	0,405	0,759	0,423	-0,003
			σ_θ	-0,986	-0,937	-0,941	-0,691
			$D_\theta \cdot 10^4$	0,338	0,194	0,179	-0,562
		<i>D</i>	$\sigma_r \cdot 10$	0,932	1,526	0,136	0,032
			σ_θ	-0,222	-0,209	-0,236	-0,249
			L_0, L_1 жестко подкреплены				
	<i>A</i>		σ_r	-0,051	-0,121	-0,209	-0,228
			σ_θ	0,013	0,015	0,000	-0,004
			$D_\theta \cdot 10^4$	-0,093	-0,159	-0,183	-0,187
		<i>B</i>	σ_r	-0,264	-0,470	-0,505	-0,507
			σ_θ	-0,057	-0,101	-0,108	-0,109
			<i>D</i>	σ_r	-0,051	-0,133	-0,210
	σ_θ			-1,009	-0,999	-1,007	-1,010
	$D_\theta \cdot 10^4$			0,339	0,232	0,193	0,188
	<i>E</i>			σ_r	-0,300	-0,454	-0,504
		σ_θ		-0,306	-0,339	-0,350	-0,351

Продолжение табл. А.8

Материал	Точка	Величина	R_1/R_0			
			0,1	0,5	0,9	0,99
ММ7			L_0, L_1 не подкреплены			
	A	σ_θ	0,093	0,225	0,312	0,070
		$B_\theta \cdot 10$	0,133	0,256	0,344	0,361
	B	σ_θ	-0,070	-0,076	-0,064	-0,080
	D	σ_θ	0,342	0,162	0,077	0,048
		$B_\theta \cdot 10$	-0,650	-0,476	-0,382	-0,365
	E	σ_θ	-0,050	0,048	0,061	0,080
			L_0 жестко подкреплен, L_1 не подкреплен			
	A	$\sigma_r \cdot 10$	-0,745	-0,856	-0,040	-0,002
		σ_θ	-0,116	-0,207	-0,249	-0,257
		$B_\theta \cdot 10$	0,132	0,254	0,341	0,358
	B	$\sigma_r \cdot 10$	0,207	0,008	-0,142	-0,012
		σ_θ	0,007	0,000	0,006	-0,001
	D	σ_θ	0,448	0,291	0,232	0,214
		$B_\theta \cdot 10$	-0,648	-0,473	-0,379	-0,362
	E	σ_θ	-0,323	-0,301	-0,238	-0,223
			L_0 не подкреплен, L_1 жестко подкреплен			
	A	σ_θ	0,006	-0,122	-0,253	-0,256
		$B_\theta \cdot 10$	0,133	0,254	0,341	0,358
	B	σ_θ	-0,067	0,009	0,016	0,000
	D	$\sigma_r \cdot 10$	0,890	0,714	0,031	0,002
		σ_θ	0,446	0,315	0,227	0,215
		$B_\theta \cdot 10$	-0,649	-0,473	-0,379	-0,362
	E	$\sigma_r \cdot 10$	-0,120	-0,014	0,110	0,013
		σ_θ	-0,227	-0,223	-0,219	-0,224
			L_0, L_1 жестко подкреплены			
	A	σ_r	-0,076	-0,143	-0,135	-0,139
		σ_θ	-0,117	-0,224	-0,284	-0,296
		$B_\theta \cdot 10$	0,132	0,254	0,341	0,358
	B	σ_r	0,021	0,009	-0,052	-0,052
		σ_θ	0,007	0,003	-0,018	-0,019
	D	σ_r	-0,061	-0,121	-0,134	-0,137
		σ_θ	0,401	0,258	0,186	0,172
		$B_\theta \cdot 10$	-0,649	-0,473	-0,379	-0,362
	E	σ_r	-0,003	-0,024	-0,053	-0,053
		σ_θ	-0,224	-0,231	-0,241	-0,240

Таблица А.9

Значения величин в точках в точках диска с центральной трещиной
(рис. 3.4, в) в зависимости от отношения l/R_0

Материал	Точка	Величина	l/R_0			
			0,1	0,5	0,9	0,99
ЭМ1	A	σ_y	0,024	0,078	0,175	0,183
		$D_y \cdot 10^4$	-0,001	-0,001	0,188	-0,295
	B	σ_x	0,028	0,021	0,001	0,001
	D	k_1^-	-0,019	-0,033	-0,026	-0,013
		$k_D^- \cdot 10^5$	0,004	0,005	0,387	-0,478
		$k_E^- \cdot 10$	0,005	0,007	0,412	-0,507
	E	σ_x	-0,021	-0,028	-0,004	0,000
ЭМ6	A	σ_y	0,074	0,223	0,591	0,645
		$D_y \cdot 10$	-0,001	-0,001	-0,030	0,621
	B	σ_x	0,138	0,134	0,060	0,128
	D	k_1^-	-0,035	-0,090	-0,100	-0,047
		$k_D^- \cdot 10^2$	0,004	0,006	-0,091	0,714
		k_E^-	0,004	0,005	-0,059	0,472
	E	σ_x	0,109	0,024	0,054	0,067
ММ8	A	σ_y	-0,072	-0,325	-1,185	-1,696
		B_y	0,013	0,024	0,034	0,335
	B	σ_x	-0,368	-0,333	-0,149	-0,157
	D	k_1^-	0,211	0,249	0,218	0,072
		$k_B^- \cdot 10$	-0,099	-0,130	-0,071	0,303
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,153	-0,200	-0,114	0,422
	E	σ_x	-0,295	-0,031	-0,094	-0,076
ММ9	A	σ_y	-0,070	-0,593	-2,195	-3,683
		B_y	0,459	0,819	1,155	1,645
	B	σ_x	-0,486	-0,580	-0,425	-0,459
	D	k_1^-	0,348	0,392	0,330	-0,055
		k_B^-	-0,338	-0,442	-0,221	-0,027
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,213	-0,279	-0,140	-0,017
	E	σ_x	-2,014	-0,960	-0,655	-0,567

Таблица А.10

Значения величин в точках кругового диска с нецентральной трещи-
ной (рис. 3.4,з) в зависимости от отношения c/R_0 при $l/R_0=0,5$

Мате- риал	Точка	Вели- чина	c/R_0				
			0,5	0,4	0,2	0,1	0,01
ЭМ2	A	σ_y	0,232	0,178	0,095	0,064	0,021
		$D_y \cdot 10^4$	-0,170	-0,179	-0,181	-0,177	11,770
	B	σ_x	0,139	0,140	0,142	0,137	0,112
	C	σ_y	0,232	0,300	0,509	0,708	1,645
		$D_y \cdot 10^4$	-0,170	-0,153	-0,069	0,057	34,440
	D	k_1^-	-0,131	-0,135	-0,136	-0,134	-0,122
		$k_D^- \cdot 10^4$	0,091	0,093	0,097	0,100	0,234
		$k_E^- \cdot 10^2$	0,447	0,458	0,471	0,476	0,850
	E	σ_x	-0,011	-0,010	-0,009	-0,009	-0,001
	F	k_1^+	-0,131	-0,124	-0,097	-0,062	0,080
		$k_D^+ \cdot 10^4$	0,091	0,088	0,082	0,083	4,337
		$k_E^+ \cdot 10^2$	0,447	0,430	0,374	0,328	12,510
ЭМ4	A	σ_y	0,298	0,264	0,207	0,180	0,147
		$D_y \cdot 10^4$	0,114	0,102	0,082	0,072	-1,192
	B	σ_x	0,009	0,006	0,017	0,027	0,020
	C	σ_y	0,298	0,338	0,460	0,580	1,434
		$D_y \cdot 10^4$	0,114	0,127	0,165	0,197	10,420
	D	k_1^-	-0,090	-0,095	-0,097	-0,093	-0,080
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,045	-0,047	-0,048	-0,047	0,390
		$k_E^- \cdot 10^2$	-0,233	-0,242	-0,247	-0,244	2,649
	E	σ_x	-0,179	-0,180	-0,188	-0,199	-0,200
	F	k_1^+	-0,090	-0,082	-0,053	-0,018	0,118
		$k_D^+ \cdot 10^4$	-0,045	-0,042	-0,031	-0,020	0,975
		$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,233	-0,220	-0,171	-0,119	6,392
ЭМ5	A	σ_y	0,197	0,165	0,115	0,093	0,025
		$D_y \cdot 10^4$	-0,181	-0,213	-0,247	-0,268	-4,461
	B	σ_x	0,059	0,060	0,067	0,069	0,032
	C	σ_y	0,197	0,235	0,352	0,465	1,091
		$D_y \cdot 10^4$	-0,181	-0,134	0,063	0,212	24,560
	D	k_1^-	-0,079	-0,082	-0,083	-0,080	-0,062
		$k_D^- \cdot 10^4$	0,140	0,142	0,148	0,138	0,729
		$k_E^- \cdot 10^2$	0,217	0,222	0,229	0,217	0,701

Продолжение таб. А.10

Материал	Точка	Величина	c/R_0				
			0,5	0,4	0,2	0,1	0,01
ЭМ5	<i>E</i>	σ_x	-0,044	-0,045	-0,049	-0,054	-0,050
	<i>F</i>	k_1^+	-0,079	-0,074	-0,053	-0,028	0,051
		$k_D^+ \cdot 10^4$	0,140	0,138	0,138	0,120	1,983
		$k_E^+ \cdot 10^2$	0,217	0,209	0,184	0,137	1,634
ММ7	<i>A</i>	$\sigma_y \cdot 10$	-0,014	0,109	0,268	0,308	0,335
		$B_y \cdot 10$	0,213	0,193	0,156	0,139	0,122
	<i>B</i>	$\sigma_x \cdot 10$	-0,522	-0,516	-0,457	-0,398	-0,313
	<i>C</i>	$\sigma_y \cdot 10$	-0,014	-0,174	-0,654	-1,070	-2,412
		$B_y \cdot 10$	0,213	0,234	0,279	0,296	0,174
	<i>D</i>	$k_1^- \cdot 10$	0,261	0,260	0,262	0,265	0,271
		$k_B^- \cdot 10$	-0,117	-0,121	-0,124	-0,124	-0,123
		$k_H^- \cdot 10$	-0,215	-0,221	-0,227	-0,227	-0,225
	<i>E</i>	$\sigma_x \cdot 10$	-0,270	-0,276	-0,320	-0,361	-0,416
	<i>F</i>	$k_1^+ \cdot 10$	0,261	0,261	0,247	0,213	0,043
		$k_B^+ \cdot 10$	-0,117	-0,113	-0,096	-0,079	-0,046
		$k_H^+ \cdot 10$	-0,215	-0,207	-0,175	-0,145	-0,084
ММ9	<i>A</i>	σ_y	-0,593	-0,368	-0,036	0,085	0,216
		B_y	0,775	0,739	0,656	0,610	0,626
	<i>B</i>	σ_x	-0,580	-0,573	-0,518	-0,469	-0,350
	<i>C</i>	σ_y	-0,593	-0,877	-1,808	-2,788	-4,778
		B_y	0,819	0,846	0,838	0,704	0,566
	<i>D</i>	k_1^-	0,392	0,398	0,397	0,390	0,347
		k_B^-	-0,442	-0,452	-0,465	-0,471	-0,416
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,279	-0,285	-0,293	-0,297	-0,262
	<i>E</i>	σ_x	-0,960	-0,961	-0,970	-0,977	-0,877
	<i>F</i>	k_1^+	0,392	0,379	0,322	0,255	-0,197
		k_B^+	-0,442	-0,430	-0,392	-0,362	-0,169
		$k_H^+ \cdot 10^2$	-0,279	-0,271	-0,247	-0,228	-0,106

Таблица А.11

Значения величин в точках кругового диска с двумя диаметрными трещинами (рис. 3.5,а) в зависимости от отношения c/R_0 при $l/R_0=0,2$

Материал	Точка	Величина	c/R_0				
			0,1	0,2	0,6	0,8	1,0
ЭМ1	A	σ_y	0,061	0,067	0,097	0,117	0,151
		$D_y \cdot 10^5$	-0,010	-0,011	0,097	0,471	0,672
	P	σ_θ	0,045	0,046	0,042	0,035	0,050
		$D_\theta \cdot 10^5$	-0,006	-0,006	0,014	0,043	0,575
	B	σ_x	0,039	0,040	0,031	0,024	0,029
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,188	-0,172	-0,139	-0,113	0,011
		$k_D^- \cdot 10^6$	0,035	0,032	0,579	1,969	0,212
		k_E^-	0,005	0,004	0,062	0,210	0,022
	E	σ_x	-0,039	-0,041	-0,041	-0,046	-0,062
	F	$k_1^+ \cdot 10$	-0,217	-0,187	-0,168	-0,168	-0,143
		$k_D^+ \cdot 10^6$	0,040	0,034	0,430	1,415	1,459
		k_E^+	0,005	0,005	0,046	0,151	0,156
ЭМ3	A	σ_y	0,352	0,381	0,537	0,662	0,836
		$D_y \cdot 10^3$	-0,015	-0,015	-0,010	-0,011	-0,794
	P	σ_θ	0,231	0,237	0,220	0,193	0,159
		$D_\theta \cdot 10^3$	-0,015	-0,015	-0,010	-0,008	-0,114
	B	σ_x	0,191	0,198	0,174	0,144	0,113
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,992	-0,898	-0,667	-0,509	-0,145
		$k_D^- \cdot 10^4$	0,067	0,061	0,053	0,020	-2,042
		$k_E^- \cdot 10^2$	0,145	0,132	0,105	0,061	-1,902
	E	σ_x	-0,210	-0,220	-0,230	-0,229	-0,261
	F	$k_1^+ \cdot 10$	-1,178	-1,011	-0,850	-0,821	-0,758
		$k_D^+ \cdot 10^4$	0,071	0,060	0,045	0,021	-1,440
		$k_E^+ \cdot 10^2$	0,164	0,140	0,113	0,087	-1,287
ЭМ5	A	σ_y	0,164	0,178	0,248	0,303	0,380
		$D_y \cdot 10^3$	-0,032	-0,034	-0,034	-0,054	-0,328
	P	σ_θ	0,110	0,114	0,104	0,089	0,078
		$D_\theta \cdot 10^3$	-0,023	-0,023	-0,018	-0,016	-0,095
	B	σ_x	0,093	0,096	0,081	0,065	0,055
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,475	-0,430	-0,325	-0,255	-0,077
		$k_D^- \cdot 10^4$	0,116	0,105	0,086	-0,017	-0,604

Продолжение табл. А11

Материал	Точка	Величина	c/R_0				
			0,1	0,2	0,6	0,8	1,0
ЭМ5		$k_E^- \cdot 10^2$	0,158	0,143	0,113	0,017	-0,507
	<i>E</i>	σ_x	-0,077	-0,083	-0,088	-0,088	-0,110
	<i>F</i>	$k_1^+ \cdot 10$	-0,558	-0,479	-0,404	-0,392	-0,363
		$k_D^+ \cdot 10^4$	0,130	0,110	0,086	0,015	-0,491
		$k_E^+ \cdot 10^2$	0,180	0,153	0,123	0,061	-0,375
ММ7	<i>A</i>	σ_y	0,003	-0,001	-0,034	-0,063	-0,108
		$B_y \cdot 10$	0,223	0,241	0,300	0,330	0,368
		σ_θ	-0,048	-0,053	-0,055	-0,046	-0,032
	<i>P</i>	$B_\theta \cdot 10$	0,151	0,152	0,121	0,092	0,060
		σ_x	-0,066	-0,061	-0,016	0,006	0,022
	<i>D</i>	$k_1^- \cdot 10$	0,201	0,200	0,279	0,313	0,315
		$k_B^- \cdot 10^2$	-0,818	-0,747	-0,630	-0,588	-0,491
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,150	-0,137	-0,116	-0,108	-0,090
	<i>E</i>	σ_x	-0,034	-0,037	-0,066	-0,080	-0,090
		$k_1^+ \cdot 10$	0,148	0,125	0,200	0,261	0,310
	<i>F</i>	$k_B^+ \cdot 10^2$	-0,919	-0,782	-0,676	-0,689	-0,705
		$k_H^+ \cdot 10^2$	-0,168	-0,143	-0,124	-0,126	-0,130
	<i>A</i>	σ_y	-0,328	-0,366	-0,709	-1,047	-1,565
		B_y	0,882	0,942	1,093	1,131	1,146
		σ_θ	-0,612	-0,634	-0,532	-0,408	-0,283
ММ9	<i>P</i>	B_θ	0,473	0,476	0,398	0,324	0,246
		σ_x	-0,651	-0,621	-0,341	-0,183	-0,044
	<i>D</i>	k_1^-	0,269	0,251	0,271	0,289	0,282
		k_B^-	-0,310	-0,281	-0,230	-0,219	-0,198
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,196	-0,177	-0,145	-0,138	-0,125
	<i>E</i>	σ_x	-0,997	-0,943	-1,036	-1,164	-1,280
		k_1^+	0,267	0,224	0,239	0,278	0,316
	<i>F</i>	k_B^+	-0,353	-0,299	-0,247	-0,248	-0,254
		$k_H^+ \cdot 10^2$	-0,223	-0,189	-0,156	-0,156	-0,160

Таблица А.12

Значения величин в точках кругового диска радиуса R_0 с двумя параллельными трещинами (рис. 3.5,б) в зависимости от отношения c/R_0 при $l/R_0=0,5$

Материал	Точка	Величина	c/R_0							
			0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
ЭМ1	A	$\sigma_y \cdot 10$	0,109	0,109	0,117	0,136	0,161	0,187	0,146	0,144
		$D_y \cdot 10^5$	-0,009	-0,010	-0,011	-0,013	-0,013	-0,001	0,398	1,771
	P	$\sigma_\theta \cdot 10$	0,267	0,294	0,373	0,496	0,668	0,882	0,942	0,257
		$D_\theta \cdot 10^5$	-0,010	-0,010	-0,012	-0,013	-0,013	-0,018	-0,291	-0,989
	B	$\sigma_x \cdot 10$	0,820	0,839	0,735	0,549	0,365	0,214	0,065	-0,132
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,199	-0,216	-0,233	-0,237	-0,233	-0,224	-0,194	-0,094
		$k_2^- \cdot 10^2$	-0,362	-0,212	-0,010	0,073	0,077	0,035	-0,081	-0,414
		$k_D^- \cdot 10^6$	-0,003	-0,003	-0,011	-0,007	-0,015	0,013	-1,334	0,726
		$k_E^- \cdot 10$	-0,008	-0,006	-0,013	-0,008	-0,017	0,016	-1,588	0,859
	E	$\sigma_y \cdot 10$	-0,262	-0,213	-0,166	-0,160	-0,165	-0,158	-0,183	-0,250
		$D_y \cdot 10^5$	-0,016	-0,015	-0,014	-0,013	-0,014	-0,016	-0,384	-1,369
ЭМ3	A	σ_y	0,117	0,117	0,122	0,132	0,145	0,155	0,155	0,111
		$D_y \cdot 10^4$	-0,526	-0,583	-0,683	-0,764	-0,826	-0,876	-1,065	-10,660
	P	σ_θ	0,202	0,218	0,269	0,350	0,468	0,610	0,669	0,406
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,384	-0,416	-0,441	-0,404	-0,288	-0,083	0,263	6,185
	B	σ_x	0,482	0,501	0,473	0,388	0,287	0,194	0,118	0,044
	D	k_1^-	-0,133	-0,143	-0,154	-0,158	-0,157	-0,155	-0,149	-0,130
		$k_2^- \cdot 10$	-0,257	-0,169	-0,036	0,039	0,062	0,047	0,007	-0,103
		$k_D^- \cdot 10^5$	-0,721	-0,779	-0,826	-0,828	-0,810	-0,782	0,031	38,490
		$k_E^- \cdot 10$	-0,009	-0,032	-0,064	-0,080	-0,083	-0,078	0,001	3,367
	E	σ_y	-0,127	-0,104	-0,076	-0,064	-0,059	-0,050	-0,030	-0,026
		$D_y \cdot 10^4$	-0,850	-0,827	-0,785	-0,753	-0,741	-0,757	-0,615	10,870
ЭМ5	A	σ_y	0,055	0,055	0,058	0,063	0,070	0,077	0,078	0,057
		$D_y \cdot 10^4$	-0,677	-0,745	-0,864	-0,961	-1,035	-1,091	-1,227	-5,126
	P	σ_θ	0,107	0,117	0,144	0,186	0,242	0,303	0,311	0,175
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,484	-0,523	-0,559	-0,529	-0,419	-0,226	0,057	2,407
	B	σ_x	0,247	0,257	0,244	0,201	0,147	0,095	0,053	0,011
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,670	-0,722	-0,778	-0,793	-0,786	-0,765	-0,734	-0,622
		$k_2^- \cdot 10^2$	-1,220	-0,805	-0,187	0,146	0,227	0,122	-0,117	-0,720
		$k_D^- \cdot 10^5$	-0,766	-0,872	-0,984	-1,022	-1,019	-0,994	-0,467	14,340
		$k_E^- \cdot 10$	-0,001	-0,004	-0,007	-0,008	-0,009	-0,008	-0,003	0,113

Продолжение табл. А12

Материал	Точка	Величина	c/R_0							
			0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
ЭМ5	E	$D_y \cdot 10^4$	-1,018	-0,987	-0,933	-0,894	-0,876	-0,886	-0,809	3,481
		σ_y	-0,073	-0,061	-0,045	-0,038	-0,036	-0,033	-0,026	-0,027
ММ7	A	σ_y	0,033	0,035	0,034	0,023	0,006	-0,015	-0,035	-0,049
		$B_y \cdot 10$	0,196	0,215	0,251	0,282	0,306	0,324	0,337	0,342
	P	σ_θ	0,006	0,005	-0,008	-0,036	-0,077	-0,127	-0,149	-0,066
		$B_\theta \cdot 10$	0,184	0,203	0,232	0,250	0,252	0,230	0,169	0,062
	B	σ_x	-0,144	-0,147	-0,122	-0,073	-0,019	0,025	0,056	0,074
	D	$k_1^- \cdot 10$	0,230	0,241	0,235	0,209	0,186	0,176	0,181	0,193
$k_2^- \cdot 10^2$		0,361	0,104	-0,142	-0,023	0,329	0,725	1,064	1,359	
$k_B^- \cdot 10^2$		0,100	0,169	0,250	0,271	0,252	0,210	0,158	0,105	
$k_H^- \cdot 10^3$		0,183	0,312	0,461	0,499	0,463	0,385	0,288	0,190	
ММ9	E	σ_y	0,101	0,084	0,072	0,080	0,095	0,112	0,123	0,124
		$B_y \cdot 10$	0,375	0,353	0,323	0,309	0,307	0,313	0,325	0,339
	A	σ_y	0,008	0,006	-0,031	-0,112	-0,222	-0,337	-0,433	-0,482
		B_y	0,762	0,835	0,958	1,046	1,099	1,117	1,104	1,065
	P	σ_θ	-0,263	-0,293	-0,419	-0,643	-0,951	-1,258	-1,265	-0,497
		B_θ	0,638	0,703	0,798	0,840	0,815	0,711	0,519	0,273
	B	σ_x	-1,429	-1,465	-1,266	-0,877	-0,462	-0,105	0,162	0,326
	D	k_1^-	0,328	0,352	0,361	0,340	0,307	0,273	0,244	0,218
		$k_2^- \cdot 10$	0,534	0,243	-0,097	-0,129	0,047	0,315	0,597	0,870
		k_B^-	0,037	0,067	0,104	0,115	0,109	0,090	0,064	0,035
		$k_H^- \cdot 10^4$	0,613	1,112	1,737	1,933	1,819	1,501	1,065	0,562
	E	σ_y	0,634	0,497	0,355	0,352	0,438	0,563	0,684	0,755
		B_y	1,216	1,144	1,031	0,958	0,925	0,927	0,959	1,015

Таблица А.13

Значения величин в точках кругового диска с двумя взаимно перпендикулярными трещинами (рис. 3.5,в) в зависимости от отношения c/R_0 при $l/R_0=0,5$

Материал	Точка	Величина	c/R_0			
			0,1	0,2	0,3	0,4
ЭМ1	A	σ_y	0,103	0,105	0,107	0,110
		$D_y \cdot 10^5$	-0,154	-0,045	-0,167	-0,226
	P	σ_θ	0,021	0,019	0,018	0,019
		$D_\theta \cdot 10^5$	-0,215	-0,058	-0,156	-0,077
	B	σ_x	0,017	0,021	0,024	0,032
	Q	σ_θ	0,080	0,103	0,122	0,167
		$D_\theta \cdot 10^5$	0,267	0,183	0,879	0,978
	C	σ_y	0,028	0,024	0,018	0,021
		$D_y \cdot 10^5$	0,129	0,020	0,023	-0,194
	F	$k_1^- \cdot 10$	-0,264	-0,274	-0,281	-0,288
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,146	0,267	0,334	0,337
		$k_D^- \cdot 10^6$	0,421	0,120	0,371	0,351
		$k_E^- \cdot 10$	0,503	0,146	0,446	0,422
	E	σ_y	-0,016	-0,008	-0,002	0,000
		$D_y \cdot 10^5$	-0,289	-0,098	-0,228	-0,180
	K	$k_1^- \cdot 10$	-0,189	-0,230	-0,245	-0,249
		$k_D^- \cdot 10^6$	2,650	0,781	2,232	2,183
		$k_E^- \cdot 10$	2,823	0,840	2,382	2,329
	L	σ_x	-0,017	-0,018	-0,026	-0,029
		$D_x \cdot 10^5$	0,057	-0,017	-0,093	-0,190
	M	$k_1^+ \cdot 10$	-0,296	-0,275	-0,227	-0,122
		$k_D^+ \cdot 10^6$	1,824	0,981	3,529	2,890
		$k_E^+ \cdot 10$	1,950	1,055	3,758	3,075
ЭМ3	A	σ_y	0,668	0,691	0,708	0,716
		$D_y \cdot 10^2$	0,007	-0,001	-0,001	0,026
	P	σ_θ	0,181	0,173	0,168	0,164
		$D_\theta \cdot 10^2$	0,018	0,008	0,009	0,031
	B	σ_x	0,130	0,144	0,160	0,176
	Q	σ_θ	0,437	0,542	0,687	0,817
		$D_\theta \cdot 10^2$	-0,016	-0,002	-0,004	-0,222

Продолжение табл. А.13

Материал	Точка	Величина	c/R_0			
			0,1	0,2	0,3	0,4
ЭМЗ	C	σ_y	0,119	0,108	0,107	0,105
		$D_y \cdot 10^2$	-0,010	-0,004	-0,004	-0,001
	F	k_1^-	-0,167	-0,175	-0,181	-0,183
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,208	0,991	1,485	1,659
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,258	-0,044	-0,060	-0,611
		$k_E^- \cdot 10$	-0,023	-0,006	-0,008	-0,057
		σ_y	-0,090	-0,054	-0,027	-0,009
	E	$D_y \cdot 10^2$	0,004	-0,008	-0,008	0,019
		k_1^-	-0,105	-0,120	-0,127	-0,124
	K	$k_D^- \cdot 10^4$	-1,144	0,066	-0,064	-3,396
		$k_E^- \cdot 10$	-0,098	0,016	0,004	-0,308
		σ_x	-0,053	-0,070	-0,095	-0,150
	L	$D_x \cdot 10^2$	-0,002	0,001	0,001	0,020
		k_1^+	-0,148	-0,137	-0,115	-0,060
	M	$k_D^+ \cdot 10^4$	-0,912	-0,068	-0,190	-6,263
		$k_E^+ \cdot 10$	-0,073	0,005	-0,008	-0,582
		σ_y	0,332	0,342	0,350	0,354
	A	$D_y \cdot 10^2$	0,008	0,000	0,001	0,010
		σ_θ	0,089	0,085	0,083	0,082
	P	$D_\theta \cdot 10^2$	0,020	0,010	0,011	0,019
		σ_x	0,067	0,076	0,081	0,088
	Q	σ_θ	0,192	0,243	0,306	0,362
		$D_\theta \cdot 10^2$	-0,018	-0,005	-0,011	-0,089
ЭМ5	C	σ_y	0,056	0,055	0,055	0,055
		$D_y \cdot 10^2$	-0,011	-0,005	-0,005	-0,003
	F	$k_1^- \cdot 10$	-0,835	-0,867	-0,893	-0,902
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,037	0,352	0,568	0,642
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,260	-0,061	-0,095	-0,280
		$k_E^- \cdot 10$	-0,020	-0,006	-0,010	-0,024
		σ_y	-0,049	-0,033	-0,023	-0,016
	E	$D_y \cdot 10^2$	0,003	-0,010	-0,009	0,000
		$k_1^- \cdot 10$	-0,474	-0,528	-0,548	-0,530
	K	$k_D^- \cdot 10^4$	-1,031	0,136	-0,086	-1,205
		$k_E^- \cdot 10$	-0,082	0,018	-0,001	-0,097
		σ_x	-0,020	-0,020	-0,034	-0,061
	L	σ_x	-0,020	-0,020	-0,034	-0,061

Продолжение табл. А.13

Материал	Точка	Величина	c/R_0			
			0,1	0,2	0,3	0,4
ЭМ5		$D_x \cdot 10^2$	-0,002	0,001	0,001	0,008
		$k_1^+ \cdot 10$	-0,665	-0,616	-0,517	-0,271
		$k_D^+ \cdot 10^4$	-0,833	-0,021	-0,289	-2,345
		$k_E^+ \cdot 10$	-0,063	0,006	-0,018	-0,197
ММ7	M	σ_y	-0,158	-0,152	-0,144	-0,137
		$B_y \cdot 10$	-0,221	-0,231	-0,238	-0,240
	P	σ_θ	-0,008	-0,007	-0,007	-0,009
		$B_\theta \cdot 10$	-0,316	-0,325	-0,330	-0,332
	B	σ_x	-0,032	-0,029	-0,024	-0,017
		σ_θ	0,010	-0,009	-0,037	-0,088
	Q	$B_\theta \cdot 10$	0,281	0,327	0,388	0,496
		σ_y	-0,046	-0,051	-0,050	-0,044
	C	$B_y \cdot 10$	0,174	0,173	0,166	0,157
		$k_1^- \cdot 10$	0,270	0,256	0,234	0,215
	F	$k_2^- \cdot 10^2$	0,175	0,237	0,384	0,519
		$k_B^- \cdot 10^2$	0,147	0,213	0,246	0,258
		$k_H^- \cdot 10^2$	0,027	0,039	0,045	0,047
		σ_y	0,071	0,073	0,080	0,088
	E	$B_y \cdot 10$	0,326	0,314	0,307	0,304
		$k_1^- \cdot 10$	0,024	-0,077	-0,123	-0,118
		$k_B^- \cdot 10^2$	-1,094	-0,817	-0,647	-0,519
		$k_H^- \cdot 10$	-0,200	-0,149	-0,118	-0,095
	L	σ_x	0,003	-0,003	-0,013	-0,027
		$B_x \cdot 10$	-0,013	-0,009	-0,011	-0,020
	M	$k_1^+ \cdot 10$	0,133	0,146	0,171	0,203
		$k_B^+ \cdot 10^2$	-0,787	-0,611	-0,415	-0,122
		$k_H^+ \cdot 10$	-0,144	-0,112	-0,076	-0,023

Таблица А.14

Значения напряжений σ_θ вблизи контура левого отверстия в бесконечной пластинке с двумя круговыми отверстиями (рис. 3.6,а) в зависимости от отношения c/a

Материал	Величина	θ , рад.	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	σ_θ	0	0,133	0,148	0,156	0,182	0,193	0,211	0,219
		$\pi/12$	0,115	0,126	0,132	0,140	0,132	0,067	0,003
		$\pi/6$	0,084	0,088	0,089	0,074	0,055	0,010	-0,001
		$\pi/4$	0,063	0,060	0,057	0,034	0,019	0,000	-0,002
		$\pi/3$	0,052	0,044	0,038	0,015	0,006	-0,003	-0,004
		$\pi/2$	0,047	0,035	0,029	0,015	0,012	0,010	0,009
		$2\pi/3$	0,052	0,048	0,046	0,044	0,043	0,042	0,042
		$3\pi/4$	0,063	0,063	0,063	0,064	0,063	0,062	0,062
		$5\pi/6$	0,084	0,089	0,090	0,092	0,091	0,090	0,090
		$11\pi/12$	0,115	0,123	0,126	0,129	0,128	0,127	0,126
ЭМ2	σ_θ	π	0,133	0,143	0,147	0,150	0,149	0,148	0,147
		0	0,718	0,781	0,819	0,976	1,059	1,205	1,285
		$\pi/12$	0,677	0,732	0,764	0,834	0,800	0,413	0,016
		$\pi/6$	0,557	0,592	0,606	0,528	0,388	0,058	-0,023
		$\pi/4$	0,379	0,387	0,380	0,231	0,111	-0,041	-0,060
		$\pi/3$	0,191	0,176	0,155	0,011	-0,058	-0,115	-0,119
		$5\pi/12$	0,053	0,024	-0,002	-0,107	-0,140	-0,162	-0,163
		$\pi/2$	0,004	-0,028	-0,049	-0,113	-0,129	-0,139	-0,140
		$2\pi/3$	0,191	0,187	0,184	0,177	0,173	0,167	0,165
		$3\pi/4$	0,379	0,394	0,400	0,407	0,405	0,399	0,396
ЭМ6	σ_θ	$5\pi/6$	0,556	0,588	0,601	0,616	0,614	0,607	0,604
		$11\pi/12$	0,677	0,719	0,735	0,754	0,751	0,744	0,741
		π	0,718	0,763	0,781	0,800	0,798	0,790	0,787
		0	0,591	0,660	0,705	0,895	0,998	1,184	1,309
		$\pi/12$	0,570	0,634	0,673	0,778	0,765	0,413	0,019
		$\pi/6$	0,500	0,548	0,570	0,524	0,395	0,071	-0,011
		$\pi/4$	0,375	0,396	0,397	0,261	0,141	-0,017	-0,038
		$\pi/3$	0,214	0,207	0,190	0,045	-0,028	-0,092	-0,096
		$5\pi/12$	0,077	0,052	0,028	-0,084	-0,121	-0,146	-0,148
		$\pi/2$	0,023	-0,004	-0,025	-0,093	-0,109	-0,121	-0,122
		$2\pi/3$	0,214	0,218	0,220	0,221	0,219	0,215	0,213
		$3\pi/4$	0,375	0,400	0,411	0,430	0,431	0,427	0,425
		$5\pi/6$	0,500	0,541	0,558	0,585	0,586	0,583	0,581
		$11\pi/12$	0,570	0,618	0,638	0,668	0,669	0,665	0,663
		π	0,591	0,641	0,662	0,692	0,693	0,690	0,688

Продолжение табл. А.14

Материал	Величина	θ , рад.	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ММ8	σ_θ	0	-1,732	-1,861	-1,939	-2,266	-2,478	-2,894	-3,141
		$\pi/12$	-1,661	-1,783	-1,854	-2,038	-1,976	-1,037	-0,035
		$\pi/6$	-1,375	-1,473	-1,519	-1,404	-1,045	-0,130	0,100
		$\pi/4$	-0,787	-0,837	-0,845	-0,522	-0,186	0,257	0,309
		$\pi/3$	-0,172	-0,175	-0,152	0,157	0,339	0,496	0,504
		$5\pi/12$	0,141	0,160	0,190	0,389	0,466	0,515	0,515
		$\pi/2$	0,217	0,239	0,264	0,375	0,405	0,423	0,424
		$7\pi/12$	0,141	0,155	0,169	0,219	0,232	0,242	0,244
		$2\pi/3$	-0,172	-0,183	-0,185	-0,182	-0,177	-0,166	-0,161
		$3\pi/4$	-0,787	-0,838	-0,860	-0,893	-0,890	-0,875	-0,869
		$5\pi/6$	-1,375	-1,457	-1,492	-1,538	-1,534	-1,518	-1,511
		$11\pi/12$	-1,661	-1,755	-1,793	-1,838	-1,833	-1,817	-1,810
		π	-1,732	-1,828	-1,866	-1,909	-1,904	-1,888	-1,882
ММ9	σ_θ	0	-2,256	-2,449	-2,627	-3,445	-3,710	-4,113	-4,253
		$\pi/12$	-2,232	-2,407	-2,535	-2,839	-2,724	-1,387	-0,067
		$\pi/6$	-2,160	-2,288	-2,311	-1,783	-1,280	-0,222	0,026
		$\pi/4$	-1,962	-2,029	-1,958	-1,119	-0,644	-0,077	0,003
		$\pi/3$	-1,353	-1,342	-1,212	-0,507	-0,248	-0,027	-0,006
		$5\pi/12$	0,001	0,097	0,251	0,739	0,851	0,913	0,911
		$\pi/2$	1,025	1,142	1,271	1,609	1,677	1,722	1,727
		$7\pi/12$	0,001	0,035	0,103	0,302	0,351	0,398	0,409
		$2\pi/3$	-1,353	-1,393	-1,379	-1,302	-1,273	-1,237	-1,226
		$3\pi/4$	-1,962	-2,043	-2,064	-2,065	-2,049	-2,020	-2,010
		$5\pi/6$	-2,160	-2,270	-2,314	-2,362	-2,352	-2,326	-2,316
		$11\pi/12$	-2,232	-2,365	-2,426	-2,502	-2,494	-2,468	-2,458
		π	-2,256	-2,398	-2,466	-2,551	-2,544	-2,518	-2,508

Таблица А.15

Значения индукции D_θ и B_θ вблизи контура левого отверстия в бесконечной пластинке с двумя круговыми отверстиями (рис. 3.6,а) в зависимости от отношения c/a

Материал	Величина	θ , рад.	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	$D_\theta \cdot 10^6$	0	-0,120	-0,123	-0,123	-0,092	-0,062	-0,016	-0,340
		$\pi/12$	-0,146	-0,153	-0,156	-0,143	-0,134	-0,151	0,376
		$\pi/6$	-0,174	-0,185	-0,190	-0,190	-0,191	-0,198	-0,817
		$\pi/4$	-0,166	-0,173	-0,175	-0,171	-0,171	-0,174	-0,473
		$\pi/3$	-0,126	-0,127	-0,125	-0,117	-0,117	-0,121	-0,224
		$5\pi/12$	-0,068	-0,065	-0,062	-0,057	-0,059	-0,063	-0,061
		$\pi/2$	0,000	0,002	0,004	0,003	0,000	-0,004	0,060
		$3\pi/4$	0,166	0,174	0,177	0,176	0,174	0,172	0,314
		$5\pi/6$	0,174	0,183	0,185	0,184	0,182	0,180	0,334
		$11\pi/12$	0,146	0,151	0,151	0,148	0,147	0,146	0,306
		π	0,120	0,122	0,122	0,117	0,116	0,116	0,278
ЭМ2	$D_\theta \cdot 10^4$	0	-0,175	-0,172	-0,160	-0,008	0,110	0,283	-0,195
		$\pi/12$	-0,204	-0,205	-0,199	-0,122	-0,104	-0,303	-0,473
		$\pi/6$	-0,273	-0,285	-0,289	-0,331	-0,410	-0,601	-0,586
		$\pi/4$	-0,331	-0,353	-0,363	-0,448	-0,521	-0,620	-0,579
		$\pi/3$	-0,314	-0,335	-0,345	-0,410	-0,450	-0,496	-0,449
		$5\pi/12$	-0,193	-0,203	-0,206	-0,236	-0,256	-0,279	-0,230
		$\pi/2$	0,001	0,007	0,012	0,005	-0,005	-0,018	0,031
		$3\pi/4$	0,331	0,349	0,354	0,348	0,345	0,342	0,389
		$5\pi/6$	0,273	0,281	0,281	0,269	0,267	0,266	0,312
		$11\pi/12$	0,204	0,204	0,200	0,185	0,182	0,183	0,229
		π	0,175	0,172	0,167	0,150	0,148	0,149	0,195
ЭМ6	$D_\theta \cdot 10^4$	0	-1,677	-1,761	-1,764	-1,078	-0,388	0,797	1,829
		$\pi/12$	-1,685	-1,779	-1,796	-1,476	-1,341	-2,282	-3,590
		$\pi/6$	-1,718	-1,838	-1,886	-2,157	-2,595	-3,699	-3,959
		$\pi/4$	-1,729	-1,873	-1,946	-2,431	-2,853	-3,459	-3,588
		$\pi/3$	-1,534	-1,664	-1,724	-2,071	-2,298	-2,563	-2,640
		$5\pi/12$	-0,936	-0,992	-1,002	-1,118	-1,209	-1,320	-1,376
		$\pi/2$	0,004	0,054	0,099	0,142	0,111	0,062	0,016
		$2\pi/3$	1,534	1,696	1,768	1,831	1,820	1,805	1,770
		$3\pi/4$	1,729	1,862	1,908	1,917	1,903	1,894	1,861
		$5\pi/6$	1,718	1,807	1,827	1,793	1,776	1,770	1,738
		$11\pi/12$	1,685	1,744	1,748	1,689	1,672	1,667	1,636
		π	1,677	1,725	1,723	1,658	1,641	1,637	1,605

Продолжение табл. А.15

Материал	Величина	θ , рад.	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ММ8	$B_\theta \cdot 10$	0	0,461	0,488	0,497	0,444	0,370	0,248	0,209
		$\pi/12$	0,451	0,477	0,486	0,455	0,425	0,442	0,502
		$\pi/6$	0,421	0,444	0,453	0,460	0,479	0,538	0,551
		$\pi/4$	0,365	0,383	0,390	0,412	0,437	0,478	0,488
		$\pi/3$	0,266	0,278	0,281	0,296	0,312	0,336	0,342
		$5\pi/12$	0,138	0,141	0,140	0,147	0,157	0,171	0,174
		$\pi/2$	0,000	-0,005	-0,008	-0,006	0,000	0,009	0,012
		$7\pi/12$	-0,138	-0,149	-0,154	-0,154	-0,150	-0,143	-0,142
		$2\pi/3$	-0,266	-0,282	-0,289	-0,289	-0,285	-0,280	-0,279
		$3\pi/4$	-0,365	-0,383	-0,389	-0,388	-0,384	-0,380	-0,380
		$5\pi/6$	-0,421	-0,440	-0,445	-0,442	-0,438	-0,435	-0,434
		$11\pi/12$	-0,451	-0,470	-0,474	-0,469	-0,466	-0,463	-0,463
		π	-0,461	-0,480	-0,484	-0,479	-0,476	-0,473	-0,472
ММ9	B_θ	0	1,248	1,304	1,311	1,165	1,103	1,059	1,050
		$\pi/12$	1,267	1,323	1,331	1,215	1,157	1,105	1,097
		$\pi/6$	1,322	1,377	1,386	1,345	1,319	1,271	1,254
		$\pi/4$	1,391	1,442	1,452	1,491	1,514	1,533	1,535
		$\pi/3$	1,384	1,426	1,434	1,527	1,582	1,646	1,665
		$5\pi/12$	1,024	1,037	1,038	1,156	1,218	1,290	1,310
		$\pi/2$	-0,003	-0,036	-0,046	0,058	0,108	0,164	0,179
		$7\pi/12$	-1,024	-1,090	-1,103	-1,039	-1,010	-0,978	-0,970
		$2\pi/3$	-1,386	-1,447	-1,458	-1,422	-1,406	-1,390	-1,385
		$3\pi/4$	-1,391	-1,442	-1,450	-1,427	-1,417	-1,407	-1,405
		$5\pi/6$	-1,322	-1,365	-1,371	-1,353	-1,346	-1,339	-1,337
		$11\pi/12$	-1,267	-1,306	-1,310	-1,295	-1,289	-1,283	-1,281
		π	-1,248	-1,285	-1,289	-1,274	-1,268	-1,263	-1,261

Таблица А.16

Значения величин в точках пластинки с круговым отверстием и диаметральной трещиной (рис. 3.6,б) в зависимости от отношения c/a

Материал	Точка	Величина	c/a					
			∞	10	5	1	0,5	0,1
ЭМ1	А	σ_θ	0,121	0,123	0,122	0,112	0,105	0,089
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,121	0,125	0,126	0,131	0,136	-0,152
	Р	σ_θ	0,069	0,072	0,075	0,085	0,091	0,114
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,162	0,167	0,170	0,173	0,175	-0,102
	В	σ_θ	0,067	0,069	0,071	0,091	0,109	0,166
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,000	0,002	0,004	0,011	0,012	-0,270
	Q	σ_θ	0,068	0,069	0,068	0,055	0,053	0,069
		$D_\theta \cdot 10^6$	-0,162	-0,167	-0,168	-0,162	-0,160	-0,425
	С	σ_θ	0,121	0,127	0,132	0,155	0,175	0,235
		$D_\theta \cdot 10^6$	-0,121	-0,126	-0,129	-0,130	-0,128	4,582
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,449	-0,453	-0,449	-0,374	-0,299	-0,043
		$k_D^- \cdot 10^7$	0,866	0,865	0,847	0,642	0,472	12,770
		$k_E^- \cdot 10$	0,114	0,114	0,111	0,086	0,064	1,358
	L	σ_x	0,011	0,016	0,017	0,018	0,018	0,020
		$k_1^+ \cdot 10$	-0,449	-0,454	-0,452	-0,422	-0,399	-0,339
	F	$k_D^+ \cdot 10^7$	0,867	0,866	0,854	0,757	0,693	4,198
		$k_E^+ \cdot 10$	0,114	0,114	0,112	0,101	0,093	0,462
		σ_θ	0,681	0,698	0,700	0,679	0,664	0,651
	A	$D_\theta \cdot 10^4$	0,185	0,190	0,193	0,209	0,225	0,268
		σ_θ	0,379	0,393	0,400	0,420	0,432	0,479
	P	$D_\theta \cdot 10^4$	0,319	0,329	0,331	0,330	0,331	0,338
		σ_θ	0,041	0,042	0,041	0,067	0,102	0,202
	B	$D_\theta \cdot 10^4$	0,001	0,007	0,013	0,032	0,040	0,057
		σ_θ	0,379	0,388	0,385	0,323	0,307	0,340
	Q	$D_\theta \cdot 10^4$	-0,319	-0,331	-0,338	-0,377	-0,389	-0,379
		σ_θ	0,682	0,713	0,734	0,832	0,917	1,238
	C	$D_\theta \cdot 10^4$	-0,185	-0,191	-0,193	-0,159	-0,112	-0,049
		k_1^-	-0,260	-0,264	-0,263	-0,225	-0,177	-0,010
	D	$k_D^- \cdot 10^4$	0,152	0,151	0,147	0,107	0,079	0,029
		$k_E^- \cdot 10^2$	0,804	0,807	0,794	0,624	0,475	0,098
		σ_x	0,175	0,188	0,194	0,207	0,210	0,211
ЭМ2	F	k_1^+	-0,260	-0,265	-0,265	-0,253	-0,243	-0,213
		$k_D^+ \cdot 10^4$	0,152	0,151	0,149	0,128	0,115	0,087
		$k_E^+ \cdot 10^2$	0,804	0,808	0,800	0,725	0,673	0,549
	L	σ_x	0,175	0,188	0,194	0,207	0,210	0,211

Продолжение табл. А.16

Материал	Точка	Величина	c/a					
			∞	10	5	1	0,5	0,1
ММ8	А	σ_{θ}	-1,666	-1,710	-1,721	-1,701	-1,686	-1,718
		$B_{\theta} \cdot 10$	-0,450	-0,462	-0,465	-0,467	-0,471	-0,496
	Р	σ_{θ}	-0,753	-0,776	-0,783	-0,780	-0,771	-0,778
		$B_{\theta} \cdot 10$	-0,356	-0,368	-0,372	-0,378	-0,382	-0,404
	В	σ_{θ}	0,211	0,223	0,234	0,257	0,250	0,255
		$B_{\theta} \cdot 10$	0,000	-0,005	-0,009	-0,022	-0,026	-0,038
	Q	σ_{θ}	-0,753	-0,776	-0,778	-0,648	-0,592	-0,604
		$B_{\theta} \cdot 10$	0,356	0,367	0,372	0,381	0,386	0,389
	С	σ_{θ}	-1,668	-1,740	-1,784	-1,966	-2,116	-2,751
		$B_{\theta} \cdot 10$	0,451	0,470	0,480	0,498	0,499	0,612
	D	k_1^-	0,611	0,624	0,625	0,549	0,434	0,004
		$k_B^- \cdot 10$	-0,230	-0,231	-0,228	-0,182	-0,138	-0,021
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,363	-0,366	-0,362	-0,291	-0,223	-0,030
	L	σ_x	-0,417	-0,430	-0,438	-0,475	-0,491	-0,498
	F	k_1^+	0,611	0,624	0,627	0,611	0,592	0,535
		$k_B^+ \cdot 10$	-0,230	-0,232	-0,230	-0,210	-0,196	-0,161
		$k_H^+ \cdot 10^2$	-0,363	-0,367	-0,364	-0,336	-0,314	-0,261
ММ9	А	σ_{θ}	-2,176	-2,240	-2,259	-2,240	-2,227	-2,291
		B_{θ}	-1,232	-1,264	-1,273	-1,295	-1,316	-1,417
	Р	σ_{θ}	-1,916	-1,971	-1,990	-2,020	-2,039	-2,162
		B_{θ}	-1,375	-1,420	-1,437	-1,479	-1,509	-1,631
	В	σ_{θ}	1,010	1,066	1,114	1,200	1,220	1,325
		B_{θ}	-0,003	-0,041	-0,075	-0,181	-0,232	-0,322
	Q	σ_{θ}	-1,917	-1,977	-1,976	-1,810	-1,818	-1,818
		B_{θ}	1,375	1,420	1,436	1,486	1,505	1,549
	С	σ_{θ}	-2,178	-2,274	-2,343	-2,816	-3,258	-4,476
		B_{θ}	1,233	1,286	1,314	1,363	1,370	1,674
	D	k_1^-	0,970	0,983	0,978	0,801	0,605	0,005
		k_B^-	-0,779	-0,773	-0,753	-0,570	-0,442	-0,111
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,492	-0,488	-0,475	-0,360	-0,279	-0,070
	L	σ_x	-1,712	-1,740	-1,762	-1,778	-1,718	-1,513
	F	k_1^+	0,970	0,984	0,984	0,926	0,875	0,744
		k_B^+	-0,779	-0,775	-0,761	-0,663	-0,603	-0,455
		$k_H^+ \cdot 10^2$	-0,492	-0,489	-0,480	-0,419	-0,381	-0,288

Таблица А.17

Значения величин в точках пластинки с круговым отверстием и вертикальной трещиной (рис. 3.6,в) в зависимости от отношения c/a

Материал	Точка	Величина	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	А	σ_θ	0,160	0,192	0,209	0,290	0,368	0,738	2,204
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,130	0,140	0,145	0,176	0,208	0,382	1,545
	Р	σ_θ	0,068	0,072	0,075	0,094	0,113	0,209	0,588
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,188	0,213	0,228	0,299	0,368	0,707	2,447
	В	σ_θ	0,037	0,020	0,011	-0,018	-0,040	-0,119	-0,396
		$D_\theta \cdot 10^6$	0,000	0,002	0,005	0,014	0,019	0,046	0,228
	Q	σ_θ	0,068	0,069	0,070	0,068	0,039	-0,111	-0,232
		$D_\theta \cdot 10^6$	-0,188	-0,213	-0,227	-0,290	-0,341	-0,484	-1,844
	С	σ_θ	0,161	0,196	0,217	0,334	0,469	1,174	7,047
		$D_\theta \cdot 10^6$	-0,130	-0,141	-0,149	-0,179	-0,186	-0,577	-7,002
	D	$k_1^- \cdot 10$	-0,256	-0,206	-0,174	-0,029	0,056	0,255	0,859
		$k_2^- \cdot 10$	0,000	0,005	0,012	0,071	0,101	-0,095	-1,296
		$k_D^- \cdot 10^6$	0,000	-0,001	-0,003	0,003	0,022	0,126	0,540
		$k_E^- \cdot 10$	0,000	-0,001	-0,002	0,013	0,039	0,138	0,481
	L	σ_y	-0,013	-0,020	-0,024	-0,051	-0,080	-0,199	-0,308
		$D_y \cdot 10^6$	-0,092	-0,088	-0,083	0,007	0,153	1,226	10,670
ЭМ2	А	σ_θ	0,861	1,011	1,096	1,523	1,929	3,846	11,440
		$D_\theta \cdot 10^4$	0,175	0,175	0,176	0,174	0,181	0,283	0,961
	Р	σ_θ	0,428	0,481	0,513	0,683	0,848	1,626	4,699
		$D_\theta \cdot 10^4$	0,384	0,442	0,475	0,629	0,773	1,508	4,706
	В	σ_θ	-0,049	-0,111	-0,144	-0,327	-0,491	-1,125	-3,449
		$D_\theta \cdot 10^4$	0,000	0,008	0,016	0,050	0,065	0,164	0,901
	Q	σ_θ	0,428	0,476	0,506	0,513	0,258	-0,883	-1,539
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,384	-0,444	-0,478	-0,704	-1,034	-2,173	-2,991
	С	σ_θ	0,862	1,027	1,129	1,786	2,542	6,432	39,730
		$D_\theta \cdot 10^4$	-0,175	-0,178	-0,182	-0,092	0,081	-0,217	-12,940
	D	k_1^-	-0,087	-0,075	-0,062	0,023	0,073	0,182	0,517
		k_2^-	0,000	0,002	0,005	0,043	0,056	-0,092	-0,902
		$k_D^- \cdot 10^4$	0,000	-0,002	-0,002	0,053	0,125	0,407	1,525
		$k_E^- \cdot 10^2$	-0,001	-0,009	-0,018	0,032	0,179	1,215	5,833
	L	σ_y	-0,167	-0,179	-0,192	-0,325	-0,490	-1,066	-1,487
		$D_y \cdot 10^4$	-0,206	-0,193	-0,172	0,175	0,687	4,163	37,830

Продолжение табл. А.17

Материал	Точка	Величина	c/a						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ММ8	А	σ_θ	-2,070	-2,417	-2,617	-3,629	-4,592	-9,141	-27,220
		B_θ	-0,053	-0,060	-0,063	-0,083	-0,101	-0,196	-0,581
	Р	σ_θ	-0,923	-1,075	-1,166	-1,620	-2,048	-4,009	-11,710
		B_θ	-0,042	-0,048	-0,052	-0,069	-0,085	-0,165	-0,493
	В	σ_θ	0,318	0,404	0,455	0,820	1,186	2,609	7,825
		B_θ	0,000	-0,001	-0,001	-0,003	-0,004	-0,011	-0,046
	Q	σ_θ	-0,923	-1,078	-1,173	-1,223	-0,416	3,090	4,899
		B_θ	0,042	0,048	0,052	0,070	0,090	0,158	0,239
	С	σ_θ	-2,072	-2,448	-2,685	-4,235	-5,988	-15,440	-99,010
		B_θ	0,053	0,060	0,066	0,087	0,103	0,289	2,581
	D	k_1^-	0,112	0,107	0,090	-0,097	-0,217	-0,470	-1,269
		k_2^-	0,000	-0,002	-0,008	-0,102	-0,138	0,235	2,218
		$k_B^- \cdot 10$	0,000	0,002	0,004	-0,019	-0,068	-0,343	-1,535
		$k_H^- \cdot 10^2$	0,000	0,004	0,008	-0,019	-0,096	-0,584	-2,745
	L	σ_y	0,490	0,495	0,507	0,713	1,081	2,190	2,825
		B_y	0,023	0,023	0,022	0,000	-0,038	-0,324	-3,358
ММ9	А	σ_θ	-2,685	-3,125	-3,383	-4,722	-5,976	-11,830	-34,950
		B_θ	-1,399	-1,557	-1,646	-2,107	-2,577	-4,930	-14,420
	Р	σ_θ	-2,195	-2,466	-2,623	-3,424	-4,213	-8,003	-23,110
		B_θ	-1,561	-1,748	-1,857	-2,393	-2,927	-5,600	-16,420
	В	σ_θ	1,332	1,606	1,789	2,955	3,998	8,422	25,350
		B_θ	-0,003	-0,045	-0,092	-0,254	-0,356	-0,994	-4,112
	Q	σ_θ	-2,196	-2,481	-2,645	-2,642	-1,855	1,302	2,749
		B_θ	1,561	1,748	1,855	2,357	2,766	3,738	4,261
	С	σ_θ	-2,686	-3,154	-3,453	-5,800	-8,421	-20,330	-118,60
		B_θ	1,400	1,581	1,698	2,290	2,978	8,508	66,950
	D	k_1^-	0,332	0,290	0,209	-0,139	-0,298	-0,593	-1,393
		k_2^-	0,000	-0,008	-0,029	-0,149	-0,146	0,572	4,106
		k_B^-	0,001	0,012	0,012	-0,159	-0,364	-1,451	-6,017
		$k_H^- \cdot 10^2$	0,000	0,002	0,002	-0,026	-0,061	-0,244	-1,017
	L	σ_y	0,619	0,656	0,770	1,666	2,262	4,493	6,139
		B_y	0,754	0,731	0,685	0,047	-0,717	-6,333	-64,980

Таблица А.18

Значения КИНИН для левой трещины в пластинке с двумя коллинеарными трещинами (рис. 3.6,з) в зависимости от отношения c/l

Материал	Точка	КИНИН	c/l						
			∞	10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	А	$k_1^- \cdot 10$	0,439	0,437	0,435	0,419	0,411	0,399	0,395
		$k_D^- \cdot 10^7$	-0,856	-0,852	-0,848	-0,818	-0,801	-0,779	-0,766
		$k_E^- \cdot 10^2$	-1,119	-1,114	-1,108	-1,069	-1,047	-1,019	-1,003
	С	$k_1^+ \cdot 10$	0,439	0,437	0,433	0,396	0,361	0,256	0,126
		$k_D^+ \cdot 10^7$	-0,856	-0,852	-0,845	-0,773	-0,704	-0,500	-0,239
		$k_E^+ \cdot 10^2$	-1,119	-1,114	-1,105	-1,010	-0,921	-0,654	-0,314
ЭМ2	А	k_1^-	0,252	0,252	0,250	0,241	0,236	0,230	0,227
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,151	-0,150	-0,149	-0,144	-0,141	-0,137	-0,136
		$k_E^- \cdot 10^2$	-0,789	-0,786	-0,782	-0,754	-0,739	-0,718	-0,711
	С	k_1^+	0,252	0,251	0,249	0,228	0,208	0,147	0,072
		$k_D^+ \cdot 10^4$	-0,151	-0,150	-0,149	-0,136	-0,124	-0,088	-0,043
		$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,789	-0,786	-0,779	-0,712	-0,650	-0,460	-0,227
ЭМ6	А	k_1^-	0,215	0,214	0,213	0,206	0,202	0,196	0,194
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,940	-0,937	-0,932	-0,898	-0,881	-0,856	-0,848
		$k_E^- \cdot 10^2$	-0,871	-0,868	-0,863	-0,832	-0,816	-0,793	-0,785
	С	k_1^+	0,215	0,214	0,213	0,194	0,177	0,126	0,062
		$k_D^+ \cdot 10^4$	-0,940	-0,937	-0,929	-0,849	-0,775	-0,549	-0,270
		$k_E^+ \cdot 10^2$	-0,871	-0,867	-0,860	-0,786	-0,717	-0,508	-0,250
ММ8	А	k_1^-	-0,589	-0,587	-0,584	-0,563	-0,552	-0,536	-0,531
		$k_B^- \cdot 10$	0,225	0,225	0,223	0,215	0,211	0,205	0,203
		$k_H^- \cdot 10^2$	0,355	0,354	0,352	0,339	0,333	0,323	0,320
	С	k_1^+	-0,589	-0,587	-0,582	-0,532	-0,486	-0,344	-0,169
		$k_B^+ \cdot 10$	0,225	0,224	0,223	0,203	0,186	0,132	0,065
		$k_H^+ \cdot 10^2$	0,355	0,354	0,351	0,321	0,293	0,207	0,102
ММ9	А	k_1^-	-0,944	-0,941	-0,936	-0,902	-0,885	-0,860	-0,851
		k_B^-	0,772	0,769	0,765	0,737	0,723	0,703	0,696
		$k_H^- \cdot 10^2$	0,487	0,486	0,483	0,466	0,457	0,444	0,439
	С	k_1^+	-0,944	-0,941	-0,933	-0,853	-0,778	-0,551	-0,271
		k_B^+	0,772	0,769	0,763	0,697	0,636	0,451	0,222
		$k_H^+ \cdot 10^2$	0,487	0,486	0,481	0,440	0,402	0,285	0,140

Таблица А.19

Значения КИНИН в т. А левой трещины в пластинке с двумя параллельными трещинами (рис. 3.6,д) в зависимости от отношения c/l

Материал	КИНИН	c/l					
		∞	10	5	1	0,5	0,1
ЭМ1	$k_1^- \cdot 10$	0,249	0,202	0,182	0,145	0,135	0,121
	$k_2^- \cdot 10^2$	0,003	0,044	0,091	0,271	0,359	0,540
	$k_D^- \cdot 10^7$	-0,001	-0,013	-0,080	-0,110	-0,146	-0,202
	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,001	-0,010	-0,023	-0,097	-0,129	-0,173
ЭМ2	$k_1^- \cdot 10$	0,865	0,789	0,758	0,724	0,714	0,692
	$k_2^- \cdot 10^2$	0,009	0,137	0,297	1,129	1,690	2,923
	$k_D^- \cdot 10^5$	-0,002	-0,027	-0,067	-0,332	-0,435	-0,572
	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,001	-0,010	-0,023	-0,108	-0,146	-0,208
ЭМ6	$k_1^- \cdot 10$	0,927	0,892	0,884	0,892	0,893	0,884
	$k_2^- \cdot 10^2$	0,009	0,152	0,342	1,473	2,181	3,663
	$k_D^- \cdot 10^5$	-0,013	-0,229	-0,658	-2,736	-3,593	-4,742
	$k_E^- \cdot 10^2$	-0,001	-0,021	-0,050	-0,235	-0,318	-0,450
ММ8	k_1^-	-0,117	-0,122	-0,903	-0,147	-0,153	-0,157
	$k_2^- \cdot 10$	-0,001	-0,016	-0,035	-0,167	-0,297	-0,611
	$k_B^- \cdot 10^2$	0,002	0,025	0,060	0,306	0,419	0,586
	$k_H^- \cdot 10^2$	0,000	0,004	0,010	0,052	0,071	0,102
ММ9	k_1^-	-0,333	-0,332	-0,329	-0,301	-0,292	-0,282
	$k_2^- \cdot 10$	-0,003	-0,048	-0,115	-0,570	-0,805	-1,261
	k_B^-	0,001	0,015	0,034	0,113	0,140	0,187
	$k_H^- \cdot 10^4$	0,016	0,256	0,578	1,905	2,370	3,154

Таблица А.20

Значения некоторых характеристик ТЭУС и ТМУС в точках полуплоскости с круговым отверстием радиуса a в зависимости от отношения c/a

Материал	Точка	Величина	c/a					
			10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	A	σ_x	-0,093	-0,085	-0,058	-0,044	-0,017	0,004
	B	σ_y	-0,158	-0,144	-0,118	-0,111	-0,083	-0,040
		$D_y \cdot 10^6$	0,230	0,228	0,215	0,194	0,221	0,220
	C	σ_x	-0,090	-0,078	-0,002	0,073	0,432	1,974
	D	σ_x	0,029	0,038	0,084	0,123	0,312	1,097
	O	σ_x	0,101	0,121	0,172	0,191	0,219	0,233
	M	σ_x	0,100	0,120	0,170	0,200	0,357	0,308
		$D_x \cdot 10^6$	0,003	0,008	0,029	0,031	0,025	0,028
	N	σ_x	0,099	0,117	0,158	0,180	0,189	0,086
		$D_x \cdot 10^6$	0,006	0,015	0,044	0,047	0,048	0,062
	R	σ_x	0,098	0,113	0,132	0,132	0,096	0,035
		$D_x \cdot 10^6$	0,009	0,021	0,052	0,057	0,071	0,085
ЭМ5	A	σ_x	-0,263	-0,234	-0,139	-0,093	-0,002	0,068
	B	σ_y	-0,304	-0,281	-0,236	-0,225	-0,172	-0,085
		$D_y \cdot 10^3$	0,129	0,127	0,120	0,118	0,128	0,154
	C	σ_x	-0,249	-0,200	0,068	0,317	1,523	6,590
	D	σ_x	0,099	0,127	0,264	0,391	1,006	3,557
	O	σ_x	0,307	0,369	0,519	0,556	0,576	0,563
	M	σ_x	0,306	0,367	0,510	0,593	1,116	0,988
		$D_x \cdot 10^3$	0,004	0,008	0,023	0,026	0,027	0,027
	N	σ_x	0,305	0,360	0,472	0,543	0,597	0,271
		$D_x \cdot 10^3$	0,008	0,016	0,045	0,052	0,058	0,059
	R	σ_x	0,302	0,349	0,408	0,419	0,316	0,112
		$D_x \cdot 10^3$	0,012	0,024	0,060	0,069	0,077	0,078
ЭМ6	A	σ_x	0,031	0,062	0,184	0,251	0,385	0,484
	B	σ_y	-0,729	-0,673	-0,574	-0,553	-0,455	-0,314
		$D_y \cdot 10^3$	0,317	0,315	0,295	0,287	0,308	0,358
	C	σ_x	0,045	0,096	0,473	0,871	2,703	9,786
	D	σ_x	0,138	0,176	0,388	0,586	1,480	4,988
	O	σ_x	0,422	0,496	0,585	0,555	0,408	0,244
	M	σ_x	0,421	0,491	0,598	0,699	1,542	1,364
		$D_x \cdot 10^3$	0,010	0,021	0,057	0,063	0,064	0,064
	N	σ_x	0,417	0,478	0,582	0,710	0,819	0,333
		$D_x \cdot 10^3$	0,020	0,041	0,110	0,127	0,143	0,147
	R	σ_x	0,411	0,457	0,502	0,532	0,370	0,064
		$D_x \cdot 10^3$	0,030	0,060	0,150	0,173	0,194	0,199

Продолжение табл. А.20

Материал	Точка	Величина	c/a					
			10	5	1	0,5	0,1	0,01
ММ8	A	σ_x	-0,477	-0,515	-0,727	-0,852	-1,092	-1,260
	B	σ_y	2,286	2,115	1,805	1,731	1,494	1,220
		$B_y \cdot 10$	-0,752	-0,727	-0,656	-0,637	-0,631	-0,647
	C	σ_x	-0,481	-0,534	-1,205	-2,008	-5,438	-17,870
	D	σ_x	-0,251	-0,320	-0,765	-1,163	-2,789	-8,884
		σ_y	0,231	0,184	-0,074	-0,096	-0,065	-0,022
		$B_y \cdot 10$	-0,149	-0,152	-0,072	-0,035	-0,008	-0,002
	O	σ_x	-0,769	-0,886	-0,841	-0,683	-0,310	0,049
	M	σ_x	-0,765	-0,872	-0,924	-1,132	-2,797	-2,373
		$B_x \cdot 10$	-0,151	-0,317	-0,824	-0,839	-0,758	-0,740
	N	σ_x	-0,753	-0,832	-0,966	-1,260	-1,435	-0,532
		$B_x \cdot 10$	-0,299	-0,618	-1,516	-1,659	-1,788	-1,846
	R	σ_x	-0,733	-0,771	-0,820	-0,882	-0,519	0,048
		$B_x \cdot 10$	-0,442	-0,887	-1,963	-2,169	-2,396	-2,476
ММ9	A	σ_x	-0,659	-0,847	-1,872	-2,922	-7,797	-26,190
	B	σ_y	2,974	2,753	2,442	2,425	1,951	1,112
		B_y	-2,129	-2,081	-1,945	-1,903	-1,863	-1,854
	C	σ_x	-2,434	-2,564	-3,118	-3,459	-4,184	-4,733
	D	σ_x	-2,492	-2,709	-4,278	-6,105	-15,780	-53,360
		σ_y	0,374	0,353	0,001	-0,154	-0,175	-0,070
		B_y	-0,507	-0,550	-0,418	-0,273	-0,058	-0,006
	O	σ_x	-1,991	-2,382	-2,957	-2,683	-1,158	0,606
	M	σ_x	-1,985	-2,357	-2,898	-3,270	-7,788	-7,015
		B_x	-0,048	-0,106	-0,433	-0,573	-0,643	-0,631
	N	σ_x	-1,965	-2,283	-2,640	-3,226	-3,981	-1,393
		B_x	-0,095	-0,208	-0,742	-0,898	-0,968	-0,972
	R	σ_x	-1,932	-2,169	-2,198	-2,422	-1,774	-0,179
		B_x	-0,141	-0,302	-0,902	-1,008	-1,045	-1,048

Таблица А.21

Значения плотности внутренней энергии $U \cdot 10^3$ в точках полуплоскости с круговым отверстием (рис. 4.2,а) в зависимости от отношения c/a

Материал	Точка	c/a					
		10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	A	-0,116	-0,106	-0,072	-0,055	-0,021	0,006
	B	-0,130	-0,119	-0,098	-0,092	-0,070	-0,035
	C	-0,113	-0,098	-0,003	0,087	0,543	2,506
	D	0,023	0,037	0,103	0,155	0,395	1,381
	O	0,125	0,151	0,214	0,239	0,273	0,291
	M	0,125	0,149	0,212	0,250	0,446	0,385
	N	0,124	0,146	0,197	0,225	0,236	0,108
	R	0,122	0,141	0,165	0,165	0,119	0,043
ЭМ5	A	-0,348	-0,309	-0,184	-0,123	-0,003	0,086
	B	-0,846	-0,837	-0,790	-0,775	-0,846	-1,017
	C	-0,329	-0,264	0,090	0,420	2,029	9,117
	D	-0,057	-0,026	0,227	0,428	1,280	4,819
	O	0,406	0,487	0,686	0,735	0,762	0,744
	M	0,405	0,484	0,674	0,785	1,479	1,309
	N	0,402	0,476	0,624	0,718	0,790	0,359
	R	0,399	0,462	0,539	0,554	0,418	0,149
ЭМ6	A	0,014	0,027	0,081	0,111	0,171	0,207
	B	-4,756	-4,695	-4,366	-4,252	-4,482	-5,077
	C	0,020	0,043	0,211	0,390	1,245	5,696
	D	-1,014	-1,053	-0,554	-0,224	0,453	2,624
	O	0,187	0,220	0,260	0,246	0,181	0,108
	M	0,187	0,218	0,266	0,311	0,695	0,613
	N	0,185	0,212	0,259	0,316	0,365	0,148
	R	0,182	0,203	0,223	0,237	0,165	0,029
ММ8	A	-1,205	-1,287	-1,813	-2,124	-2,719	-3,118
	B	-292,30	-282,80	-255,40	-247,80	-245,60	-252,00
	C	-1,217	-1,333	-2,997	-4,964	-13,110	-39,450
	D	-58,60	-60,150	-30,190	-16,770	-9,920	-21,550
	O	-1,913	-2,202	-2,091	-1,699	-0,773	0,122
	M	-1,903	-2,167	-2,289	-2,802	-6,846	-5,826
	N	-1,872	-2,065	-2,379	-3,098	-3,525	-1,297
	R	-1,822	-1,910	-2,008	-2,154	-1,247	0,170
ММ9	A	-7,698	-6,448	-8,151	-8,696	-10,440	-11,810
	B	-8313,0	-8125,0	-7596,0	-7434,0	-7275,0	-7242,0
	C	-9,174	-7,135	-10,380	-15,120	-38,780	-124,400
	D	-1978,0	-2147,0	-1636,0	-1073,0	-244,1	-86,54
	O	-4,967	-5,939	-7,366	-6,686	-2,893	1,517
	M	-4,948	-5,866	-7,063	-7,866	-18,930	-17,050
	N	-4,893	-5,656	-6,117	-7,358	-9,119	-2,685
	R	-4,803	-5,332	-4,798	-5,187	-3,511	0,473

Таблица А.22

Значения некоторых величин в точках полуплоскости с вертикальной трещиной (рис. 4.2,б) в зависимости от отношения c/l

Материал	Точка	Величина	c/l					
			10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ1	A	k_1^-	-0,120	-0,132	-0,184	-0,221	-0,340	-0,546
	B	σ_y	0,062	0,077	0,142	0,187	0,296	0,381
		$D_y \cdot 10^7$	2,095	2,133	2,361	2,543	3,138	3,622
	C	k_1^+	-0,118	-0,128	-0,172	-0,212	-0,415	-1,292
	D	σ_x	-0,058	-0,070	-0,157	-0,269	-1,189	-11,710
		σ_y	-0,016	-0,021	-0,064	-0,117	-0,519	-5,099
		$D_y \cdot 10^7$	0,404	0,432	0,362	0,196	-1,276	-18,310
	M	σ_x	0,000	-0,002	-0,075	-0,231	-0,575	-0,639
		$D_x \cdot 10^7$	0,022	0,043	0,288	1,025	2,066	1,981
	N	σ_x	-0,001	-0,006	-0,124	-0,217	-0,286	-0,280
		$D_x \cdot 10^7$	0,044	0,092	0,760	1,152	1,018	0,686
	R	σ_x	-0,003	-0,012	-0,130	-0,176	-0,200	-0,199
		$D_x \cdot 10^7$	0,066	0,147	0,803	0,840	0,511	0,100
ЭМ4	A	k_1^-	-0,482	-0,511	-0,656	-0,769	-1,137	-1,782
	B	σ_y	0,390	0,420	0,564	0,670	0,910	1,089
		$D_y \cdot 10^4$	-0,219	-0,161	0,113	0,313	0,770	1,111
	C	k_1^+	-0,476	-0,498	-0,613	-0,732	-1,378	-4,183
	D	σ_x	-0,169	-0,205	-0,481	-0,838	-3,689	-35,750
		σ_y	-0,011	-0,022	-0,140	-0,278	-1,306	-12,800
		$D_y \cdot 10^4$	-0,272	-0,319	-0,578	-0,846	-2,804	-24,660
	M	σ_x	0,000	-0,001	-0,155	-0,640	-1,744	-1,916
		$D_x \cdot 10^4$	-0,023	-0,051	-0,259	-0,412	-0,565	-0,574
	N	σ_x	0,000	-0,003	-0,299	-0,600	-0,781	-0,738
		$D_x \cdot 10^4$	-0,046	-0,100	-0,390	-0,486	-0,525	-0,522
	R	σ_x	0,000	-0,008	-0,305	-0,434	-0,471	-0,435
		$D_x \cdot 10^4$	-0,068	-0,144	-0,427	-0,471	-0,470	-0,462
ЭМ6	A	k_1^-	-0,461	-0,518	-0,763	-0,937	-1,478	-2,416
	B	σ_y	0,012	0,066	0,292	0,442	0,778	1,041
		$D_y \cdot 10^4$	3,577	3,786	4,647	5,216	6,491	7,497
	C	k_1^+	-0,454	-0,503	-0,712	-0,894	-1,813	-5,754
	D	σ_x	-0,246	-0,298	-0,658	-1,121	-4,953	-49,310
		σ_y	-0,077	-0,092	-0,221	-0,381	-1,644	-16,210
		$D_y \cdot 10^4$	0,632	0,666	0,311	-0,282	-5,088	-60,570
	M	σ_x	-0,001	-0,006	-0,269	-0,994	-2,745	-3,121

Продолжение табл. А.22

Материал	Точка	Величина	c/l					
			10	5	1	0,5	0,1	0,01
ЭМ6	M	$D_x \cdot 10^4$	0,087	0,193	0,985	1,541	2,072	2,114
	N	σ_x	-0,005	-0,023	-0,577	-1,087	-1,448	-1,445
		$D_x \cdot 10^4$	0,173	0,376	1,470	1,831	2,009	2,022
	R	σ_x	-0,011	-0,050	-0,664	-0,904	-0,999	-0,972
		$D_x \cdot 10^4$	0,257	0,544	1,626	1,810	1,845	1,849
ММ8	A	k_1^-	0,718	0,824	1,271	1,583	2,546	4,209
	B	σ_y	0,457	0,353	-0,064	-0,327	-0,887	-1,321
		$B_y \cdot 10^2$	-5,019	-5,094	-5,402	-5,604	-6,039	-6,353
	C	k_1^+	0,706	0,798	1,189	1,524	3,161	10,120
	D	σ_x	0,429	0,518	1,118	1,885	8,234	82,110
		σ_y	0,220	0,252	0,464	0,731	2,889	27,920
		$B_y \cdot 10^2$	-1,229	-1,344	-1,383	-1,209	0,415	19,430
	M	σ_x	0,004	0,016	0,531	1,891	4,604	5,144
		$B_x \cdot 10^2$	-0,122	-0,269	-1,308	-2,057	-2,771	-2,790
	N	σ_x	0,015	0,062	1,189	2,043	2,498	2,476
ММ9		$B_x \cdot 10^2$	-0,242	-0,521	-1,904	-2,310	-2,393	-2,329
	R	σ_x	0,032	0,131	1,345	1,669	1,748	1,688
		$B_x \cdot 10^2$	-0,358	-0,743	-2,006	-2,125	-2,022	-1,918
	A	k_1^-	1,877	2,134	3,220	3,979	6,341	10,430
	B	σ_y	-0,084	-0,351	-1,453	-2,192	-3,900	-5,268
		B_y	-1,550	-1,551	-1,555	-1,557	-1,562	-1,566
	C	k_1^+	1,846	2,067	2,990	3,778	7,735	24,770
	D	σ_x	1,076	1,301	2,861	4,889	21,790	218,800
		σ_y	0,340	0,411	1,016	1,785	7,864	78,370
		B_y	-0,405	-0,445	-0,502	-0,507	-0,492	-0,274
	M	σ_x	0,006	0,028	1,265	4,354	11,920	13,670
		B_x	-0,038	-0,083	-0,428	-0,696	-1,032	-1,063
	N	σ_x	0,024	0,109	2,499	4,656	6,357	6,393
		B_x	-0,075	-0,163	-0,663	-0,872	-1,002	-1,006
	R	σ_x	0,052	0,230	2,852	3,963	4,516	4,485
		B_x	-0,111	-0,236	-0,758	-0,886	-0,929	-0,925

Таблица А.23

Значения некоторых величин в точках полуплоскости с горизонтальной трещиной (рис. 4.2,б) в зависимости от отношения c/l

Материал	Точка	Величина	c/l				
			10	5	1	0,5	0,1
ЭМ1	А	$k_1^- \cdot 10$	-0,542	-0,494	-0,307	-0,245	-0,132
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,063	0,116	0,444	0,499	0,408
		$k_D^- \cdot 10^7$	1,377	1,317	0,913	0,754	0,503
		$k_E^- \cdot 10$	0,172	0,164	0,112	0,092	0,060
	В	σ_x	-0,016	-0,021	-0,034	-0,028	-0,009
	D	σ_x	0,022	0,025	0,046	0,057	0,080
		$D_y \cdot 10^7$	0,490	0,489	0,310	0,355	0,553
	О	σ_x	0,087	0,097	0,129	0,145	0,175
	М	σ_x	0,086	0,097	0,131	0,145	0,175
		$D_x \cdot 10^7$	0,032	0,067	0,200	0,049	-0,181
	N	σ_x	0,086	0,095	0,135	0,153	0,188
		$D_x \cdot 10^7$	0,063	0,129	0,461	0,505	0,538
	R	σ_x	0,084	0,092	0,101	0,075	0,014
		$D_x \cdot 10^7$	0,093	0,184	0,548	0,749	1,011
ЭМ4	А	$k_1^- \cdot 10$	-0,769	-0,740	-0,596	-0,510	-0,294
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,022	0,038	0,173	0,333	0,489
		$k_D^- \cdot 10^4$	-0,839	-0,793	-0,557	-0,462	-0,285
		$k_E^- \cdot 10^2$	-0,502	-0,474	-0,327	-0,270	-0,168
	В	σ_x	-0,285	-0,289	-0,298	-0,300	-0,288
	D	σ_x	0,066	0,074	0,102	0,124	0,186
		$D_y \cdot 10^4$	-0,275	-0,282	-0,052	-0,003	0,000
	О	σ_x	0,247	0,282	0,472	0,548	0,660
	М	σ_x	0,247	0,282	0,470	0,544	0,660
		$D_x \cdot 10^4$	-0,025	-0,044	-0,091	-0,028	0,000
	N	σ_x	0,247	0,283	0,466	0,535	0,653
		$D_x \cdot 10^4$	-0,049	-0,087	-0,253	-0,277	-0,349
	R	σ_x	0,247	0,284	0,410	0,341	0,069
		$D_x \cdot 10^4$	-0,073	-0,127	-0,390	-0,485	-0,515
ЭМ6	А	k_1^-	-0,248	-0,223	-0,117	-0,086	-0,040
		$k_2^- \cdot 10^2$	0,325	0,598	2,622	2,810	1,991
		$k_D^- \cdot 10^4$	1,626	1,581	1,227	1,051	0,716
		$k_E^- \cdot 10$	1,362	1,302	0,945	0,794	0,520
	В	σ_x	0,173	0,150	0,070	0,115	0,231
	D	σ_x	0,100	0,108	0,201	0,252	0,319

Продолжение табл. А.23

Материал	Точка	Величина	c/l				
			10	5	1	0,5	0,1
ЭМ6	D	$D_y \cdot 10^4$	0,703	0,773	0,245	0,017	0,000
	O	σ_x	0,354	0,394	0,398	0,391	0,408
	M	σ_x	0,353	0,390	0,415	0,399	0,408
		$D_x \cdot 10^4$	0,093	0,169	0,388	0,132	-0,002
	N	σ_x	0,349	0,380	0,406	0,424	0,454
		$D_x \cdot 10^4$	0,185	0,332	1,012	1,110	1,395
	R	σ_x	0,343	0,363	0,287	0,182	0,016
		$D_x \cdot 10^4$	0,275	0,483	1,523	1,891	2,051
MM8	A	k_1^-	0,692	0,617	0,312	0,230	0,109
		$k_2^- \cdot 10$	-0,105	-0,195	-0,736	-0,712	-0,444
		$k_B^- \cdot 10$	-0,349	-0,332	-0,233	-0,194	-0,124
		$k_H^- \cdot 10$	-0,537	-0,508	-0,348	-0,288	-0,182
	B	σ_x	-0,488	-0,428	-0,277	-0,437	-0,667
	D	σ_x	-0,188	-0,200	-0,459	-0,522	-0,631
		σ_y	0,235	0,215	-0,019	0,001	0,000
		$B_y \cdot 10^2$	-1,443	-1,538	-0,253	-0,009	0,000
	O	σ_x	-0,672	-0,742	-0,583	-0,602	-0,595
	M	σ_x	-0,667	-0,730	-0,655	-0,592	-0,595
MM9		$B_x \cdot 10^2$	-0,144	-0,263	-0,492	-0,122	0,000
	N	σ_x	-0,654	-0,696	-0,681	-0,703	-0,731
		$B_x \cdot 10^2$	-0,286	-0,513	-1,428	-1,566	-1,983
	R	σ_x	-0,634	-0,643	-0,389	-0,159	0,008
		$B_x \cdot 10^2$	-0,422	-0,739	-2,082	-2,524	-2,750
	A	k_1^-	1,191	1,081	0,564	0,405	0,179
		k_2^-	-0,016	-0,030	-0,181	-0,228	-0,190
		k_B^-	-1,278	-1,233	-0,933	-0,782	-0,501
		$k_H^- \cdot 10^2$	-0,807	-0,778	-0,588	-0,493	-0,316
	B	σ_x	-2,682	-2,548	-1,711	-1,706	-2,651
	D	σ_x	-0,504	-0,549	-0,954	-1,548	-2,270
		σ_y	0,373	0,378	-0,004	-0,014	0,000
		B_y	-0,490	-0,546	-0,292	-0,065	0,000
	O	σ_x	-1,736	-1,974	-2,261	-1,873	-1,888
	M	σ_x	-1,729	-1,954	-2,211	-2,033	-1,889
		B_x	-0,046	-0,086	-0,388	-0,271	-0,001
	N	σ_x	-1,709	-1,896	-1,815	-1,801	-1,986
		B_x	-0,090	-0,169	-0,770	-0,895	-1,130
	R	σ_x	-1,676	-1,804	-1,190	-0,939	-0,093
		B_x	-0,134	-0,246	-0,968	-1,147	-1,512

Таблица А.24

Значения некоторых величин для полуплоскости из материала ЭМ6 с круговым отверстием и вертикальной трещиной в перемычке (рис. 4.2,з,д) в зависимости от отношения c/a длины верхней перемычки к радиусу отверстия, когда длина двух перемычек $c+c_1=2a$

Точка	Величина	c/a							
		0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	1,9	1,99	2,0
A	σ_x	-5,970	-3,977	-2,652	-2,125	-1,849	-1,755	-1,694	-2,220
	$U \cdot 10^3$	-2,377	-1,641	-1,119	-0,905	-0,791	-0,752	50,580	-4,000
B	σ_y	0,620	0,296	0,032	-0,086	-0,142	-0,150	0,061	-0,030
	$D_y \cdot 10^4$	8,237	6,979	5,979	5,530	5,302	5,306	50,930	3,402
	$U \cdot 10^3$	-10,880	-9,361	-8,152	-7,609	-7,331	-7,341	-68,520	-4,669
C	σ_x	-5,781	-3,861	-2,560	-2,027	-1,745	-1,694	-9,554	—
	$U \cdot 10^3$	-2,310	-1,596	-1,082	-0,865	-0,748	-0,727	-625,20	—
D	σ_x	-2,817	-1,850	-1,349	-1,332	-1,691	-3,939	-17,790	—
	σ_y	-1,135	-0,726	-0,541	-0,515	-0,543	-1,065	-5,156	—
	$D_y \cdot 10^4$	-2,276	-0,704	-0,057	-0,212	-0,890	-3,776	402,30	—
	$U \cdot 10^3$	1,258	-0,257	-0,823	-0,589	0,173	2,912	-505,40	—
E	k_1^-	-2,362	-1,403	-0,889	-0,766	-0,790	-1,128	-1,883	—
F	σ_y	0,986	0,682	0,359	0,243	0,212	0,217	0,099	0,176
G	k_1^+	-5,140	-1,515	-0,730	-0,602	-0,572	-0,602	-0,667	-0,826
I	σ_x	-43,900	-4,001	-0,789	-0,439	-0,338	-0,311	-0,332	-0,447
	σ_y	-14,500	-1,399	-0,331	-0,201	-0,160	-0,153	-0,179	-0,201
	$D_y \cdot 10^4$	-54,070	-4,154	-0,109	0,355	0,480	0,481	-2,067	0,336
	$U \cdot 10^3$	59,940	3,204	-0,388	-0,794	-0,898	-0,883	2,573	-0,772
O	σ_x	0,287	0,268	0,242	0,223	0,211	0,215	0,246	0,188
	$U \cdot 10^3$	-0,537	-0,498	-0,330	-0,137	-0,035	0,005	0,010	-0,023
M	σ_x	-2,773	-2,240	-0,637	-0,023	0,110	0,152	0,178	0,117
	$D_x \cdot 10^4$	2,120	2,082	1,533	0,970	0,672	0,531	-0,596	0,296
	$U \cdot 10^3$	-0,364	-0,344	-0,278	-0,181	-0,098	-0,055	-0,060	-0,098
N	σ_x	-1,251	-1,157	-0,762	-0,315	-0,081	0,011	0,022	-0,052
	$D_x \cdot 10^4$	2,114	2,093	1,880	1,487	1,155	0,958	-1,156	0,783
	$U \cdot 10^3$	-0,353	-0,306	-0,246	-0,190	-0,132	-0,098	-0,112	-0,153
R	σ_x	-0,843	-0,796	-0,641	-0,417	-0,226	-0,127	-0,139	-0,226
	$D_x \cdot 10^4$	2,079	2,059	1,960	1,715	1,445	1,254	-1,612	1,157
	$U \cdot 10^3$	-0,403	-0,317	-0,239	-0,192	-0,150	-0,124	-0,143	-0,185

Таблица А.25

Значения некоторых величин для полуплоскости из материала ММ9 с круговым отверстием и вертикальной трещиной в перемычке (рис. 4.2,з,д) в зависимости от отношения c/a длины верхней перемычки к радиусу отверстия, когда длина двух перемычек $c+c_1=2a$

Точка	Величина	c/a							
		0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	1,9	1,99	2,0
А	σ_x	24,800	15,780	9,771	7,358	6,072	5,593	5,892	11,780
	U	0,064	0,040	0,025	0,019	0,015	0,014	0,018	0,030
В	σ_y	-3,520	-2,024	-0,783	-0,215	0,068	0,138	-0,091	-1,859
	B_y	-2,121	-2,116	-2,114	-2,113	-2,109	-2,135	-2,135	-2,066
	U	-8,287	-8,264	-8,256	-8,251	-8,237	-8,339	-8,337	-8,070
С	σ_x	23,980	15,310	9,397	6,949	5,639	5,537	32,810	—
	U	0,062	0,039	0,024	0,018	0,014	0,014	0,054	—
D	σ_x	12,320	8,053	5,820	5,689	7,063	15,700	75,400	—
	σ_y	5,320	3,423	2,570	2,430	2,498	4,826	25,730	—
	B_y	-1,113	-1,126	-1,140	-1,086	-0,875	-0,308	0,102	—
	U	-4,312	-4,378	-4,437	-4,228	-3,403	-1,160	0,618	—
Е	k_1^-	10,160	5,981	3,751	3,216	3,315	4,596	8,219	—
F	σ_y	-4,946	-3,350	-1,701	-1,104	-0,924	-0,925	-0,813	-1,241
G	k_1^+	21,820	6,298	2,986	2,455	2,329	2,449	2,645	4,985
I	σ_x	192,100	17,070	3,237	1,767	1,354	1,241	1,298	3,299
	σ_y	69,180	6,535	1,519	0,921	0,738	0,713	0,760	1,247
	B_y	-0,303	-0,496	-0,507	-0,504	-0,500	-0,497	-0,496	-0,495
	U	-0,558	-1,887	-1,968	-1,960	-1,946	-1,935	-1,932	-1,921
O	σ_x	-1,439	-1,361	-1,243	-1,160	-1,113	-1,141	-1,171	-0,194
	U	-0,004	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003	0,000
M	σ_x	11,970	9,450	2,564	-0,010	-0,623	-0,827	-0,863	0,309
	B_x	-1,078	-1,047	-0,705	-0,436	-0,306	-0,245	-0,235	-0,235
	U	0,031	0,025	0,007	0,000	-0,001	-0,002	-0,002	0,001
N	σ_x	5,459	4,945	3,074	1,193	0,224	-0,174	-0,204	1,362
	B_x	-1,072	-1,064	-0,918	-0,698	-0,538	-0,449	-0,433	-0,432
	U	0,015	0,013	0,008	0,003	0,001	0,000	0,000	0,004
R	σ_x	3,891	3,550	2,704	1,660	0,845	0,432	0,425	2,315
	B_x	-1,061	-1,058	-0,987	-0,834	-0,692	-0,599	-0,581	-0,580
	U	0,011	0,010	0,008	0,005	0,003	0,001	0,001	0,006

Таблица А.26

Значения величин для полуплоскости из материала ЭМ6 и ММ9 с круговым отверстием и вертикальной трещиной в перемычке (рис. 4.4,а,б) в зависимости от отношения c/a , причем центр отверстия находится на расстоянии $4a$ от границы полуплоскости

Точ- ка	Вели- чина	c/a для ЭМ6				Вели- чина	c/a для ММ9			
		0,5	0,1	0,01	0		0,5	0,1	0,01	0
A	σ_x	0,329	0,037	-0,009	-0,013	σ_x	-3,917	-2,492	-2,270	1,747
	$U \cdot 10^3$	0,146	0,016	-0,004	-0,006	U	-0,010	-0,006	-0,006	-0,006
B	σ_y	-0,636	-0,521	-0,473	-0,438	σ_y	2,714	2,065	1,786	-2,278
	$D_y \cdot 10^4$	2,907	3,393	3,584	4,430	B_y	-2,000	-2,012	-2,015	-2,017
	$U \cdot 10^3$	-4,348	-4,944	-5,178	-6,869	U	-7,812	-7,858	-7,870	-7,878
C	σ_x	0,222	-0,008	-0,067	-0,090	σ_x	-3,366	-2,228	-1,931	-1,892
	$U \cdot 10^3$	0,098	-0,004	-0,030	-0,042	U	-0,008	-0,006	-0,005	-0,005
D	σ_x	0,479	0,205	0,201	0,224	σ_x	-2,472	-1,047	-1,022	-1,138
	σ_y	0,233	0,130	0,143	0,170	σ_y	-1,080	-0,513	-0,578	-0,695
	$D_y \cdot 10^4$	0,880	0,965	1,092	1,705	B_y	-0,317	-0,518	-0,545	-0,544
	$U \cdot 10^3$	-0,853	-1,152	-1,319	-2,130	U	-0,013	-0,049	-0,354	-2,128
E	k_1^-	0,356	0,310	0,344	0,373	k_1^-	-1,633	-1,422	-1,589	-1,734
F	σ_y	-0,225	-0,201	-0,144	-0,200	σ_y	1,271	1,134	0,834	0,575
G	k_1^+	0,461	0,585	1,208	—	k_1^+	-2,172	-2,794	-5,808	—
I	σ_x	0,800	1,789	10,540	—	σ_x	-3,889	-8,806	-52,260	—
	σ_y	0,155	0,493	3,369	—	σ_y	-0,807	-2,640	-18,190	—
	$D_y \cdot 10^4$	0,557	1,872	12,840	—	B_y	-0,001	-0,007	-0,057	—
	$U \cdot 10^3$	-0,312	-1,455	-10,090	—	U	-1,247	-2,025	-2,130	—
O	σ_x	0,436	0,379	0,377	—	σ_x	-2,196	-1,927	-1,925	—
	$U \cdot 10^3$	0,193	0,168	0,167	—	U	-0,005	-0,005	-0,005	—
M	σ_x	0,809	0,949	0,663	0,420	σ_x	-3,968	-4,587	-3,226	-1,988
	$D_x \cdot 10^4$	0,000	0,022	0,014	0,431	B_x	-0,024	-0,030	-0,030	-0,008
	$U \cdot 10^3$	0,361	0,424	0,295	-1,220	U	-0,010	-0,011	-0,008	-0,013
N	σ_x	0,770	0,540	0,357	0,241	σ_x	-3,665	-2,608	-1,727	-1,079
	$D_x \cdot 10^4$	0,150	0,179	0,185	-0,306	B_x	-0,112	-0,126	-0,130	-0,123
	$U \cdot 10^3$	0,343	0,240	0,158	1,705	U	-0,009	-0,006	-0,004	-0,006
R	σ_x	0,636	0,397	0,267	0,183	σ_x	-3,023	-1,903	-1,277	-0,842
	$D_x \cdot 10^4$	0,383	0,436	0,450	-0,799	B_x	-0,231	-0,254	-0,260	-0,253
	$U \cdot 10^3$	0,283	0,176	0,118	-0,722	U	-0,007	-0,005	-0,003	0,001

Таблица А.27

Значения величин для полуплоскости из материалов ЭМ6 и ММ9 с круговым отверстием и вертикальной краевой трещиной (рис. 4.4,б) в зависимости от отношения c_1/a

Точка	Величина	c_1/a для ЭМ6				Величина	c_1/a для ММ9			
		10	5	1	0,5		10	5	1	0,5
А	σ_x	-0,387	-0,348	-0,032	0,233	σ_x	-0,520	-0,670	-2,252	-3,722
	$U \cdot 10^3$	-0,167	-0,149	-0,031	0,123	$U \cdot 10^3$	-1,304	-1,680	-5,654	-9,544
В	σ_y	-0,606	-0,557	-0,486	-0,483	σ_y	2,318	1,970	1,298	1,206
	$D_y \cdot 10^4$	3,661	3,718	3,647	4,689	B_y	-2,141	-2,103	-2,016	-1,996
	$U \cdot 10^3$	-0,170	-0,153	-0,014	-6,678	$U \cdot 10^3$	-8360,0	-8214,0	-7875,0	-7794,0
С	σ_x	-0,380	-0,339	-0,071	0,091	σ_x	-0,540	-0,657	-1,638	-2,494
	$U \cdot 10^3$	-0,167	-0,149	-0,031	0,071	$U \cdot 10^3$	-1,354	-1,647	-4,031	-4,557
D	σ_x	-0,029	-0,020	0,148	0,547	σ_x	0,074	-0,020	-1,323	-3,718
	σ_y	-0,078	-0,071	0,103	0,295	σ_y	0,337	0,220	-0,933	-2,004
	$D_y \cdot 10^4$	0,872	1,019	1,005	1,199	B_y	-0,571	-0,655	-0,549	-0,322
	$U \cdot 10^3$	-1,248	-1,441	-1,248	-1,222	$U \cdot 10^3$	-2229,0	-2555,0	-2146,0	-1267,0
Е	k_1^-	0,250	0,245	0,283	0,448	k_1^-	-1,451	-1,534	-2,039	-2,841
Ф	σ_y	5,007	4,950	4,283	-0,072	σ_y	0,061	0,048	0,009	0,014
М	σ_x	0,322	0,418	0,496	0,780	σ_x	0,060	0,043	0,003	0,019
	$D_x \cdot 10^4$	0,908	-0,195	-0,579	0,013	B_x	-0,005	-0,014	-0,026	-0,029
	$U \cdot 10^3$	-0,753	0,132	0,127	-0,366	$U \cdot 10^3$	0,370	1,070	0,667	1,111
N	σ_x	0,190	0,264	0,351	0,455	σ_x	0,063	0,006	-0,070	0,010
	$D_x \cdot 10^4$	-0,378	-0,166	0,026	0,050	B_x	-0,033	-0,057	-0,128	-0,153
	$U \cdot 10^3$	0,269	0,240	0,130	0,696	$U \cdot 10^3$	2,630	-0,378	-0,164	-0,026
R	σ_x	0,150	0,209	0,290	0,334	σ_x	-0,049	-0,126	-0,154	-0,034
	$D_x \cdot 10^4$	-0,400	0,181	0,258	0,036	B_x	-0,063	-0,115	-0,260	-0,309
	$U \cdot 10^3$	0,269	0,240	0,130	-0,535	$U \cdot 10^3$	-3,643	-0,276	-0,313	-0,018

Таблица А.28

Значения величин для полуплоскости из материалов ЭМ6 и ММ9 с двумя вертикальными трещинами, одна из которых выходит на границу полуплоскости (рис. 4.4,б), в зависимости от отношения c_1/l

Точка	Величина	c_1/l для ЭМ6					Величина	c_1/l для ММ9				
		10	5	1	0,5	0,25		10	5	1	0,5	0,25
A	k_1^-	-0,395	-0,390	-0,393	-0,394	-0,389	k_1^-	1,693	1,750	1,871	1,924	1,980
B	σ_y	-0,513	-0,359	-0,345	-0,666	-0,982	σ_y	0,101	0,030	0,038	0,058	0,080
	$D_y \cdot 10^4$	1,447	0,765	3,419	1,536	0,526	B_y	-1,550	-1,551	-1,551	-1,551	-1,551
	$U \cdot 10^3$	-5,526	-3,733	-7,678	-3,840	-3,164	$U \cdot 10^3$	-6057,0	-6059,0	-6062,0	-6059,0	-6060,0
C	k_1^+	-0,389	-0,380	-0,414	-0,453	-0,525	k_1^+	1,666	1,706	1,828	1,972	2,221
D	σ_x	-0,209	-0,222	-0,380	-0,616	-1,101	σ_x	1,013	1,146	2,174	3,363	5,552
	σ_y	-0,356	-0,576	-1,701	-2,486	-3,384	σ_y	0,126	0,073	0,163	0,203	0,245
	$D_y \cdot 10^4$	-0,056	-2,704	-6,011	-11,220	-15,760	B_y	-0,472	-0,538	-0,690	-0,721	-0,736
	$U \cdot 10^3$	-0,217	3,282	7,265	14,050	19,840	$U \cdot 10^3$	-1838,0	-2096,0	-2684,0	-2805,0	-2856,0
E	k_1^-	-0,059	-0,091	-0,229	-0,305	-0,405	k_1^-	0,287	0,437	0,983	1,285	1,664
F	σ_y	0,038	0,042	0,113	0,150	0,182	σ_y	0,107	0,041	0,066	0,091	0,115
	$U \cdot 10^3$	-9,639	6,331	-9,181	-4,138	-5,897	$U \cdot 10^3$	-17,610	-27,400	-29,720	-19,940	-21,670
M	σ_x	-0,064	-0,024	-0,085	-0,134	-0,183	σ_x	0,083	0,124	0,323	0,417	0,533
	$D_x \cdot 10^4$	-10,37	6,980	-11,290	-3,517	-2,742	B_x	0,019	0,027	0,008	-0,019	-0,019
	$U \cdot 10^3$	0,147	0,111	1,946	0,150	0,373	$U \cdot 10^3$	0,328	0,411	1,305	1,303	1,835
N	σ_x	-0,012	0,017	-0,003	-0,013	-0,028	σ_x	-0,052	-0,077	-0,053	0,001	0,068
	$D_x \cdot 10^4$	-4,678	3,648	-5,759	-1,604	-1,326	B_x	-0,015	-0,027	-0,092	-0,122	-0,132
	$U \cdot 10^3$	-0,060	0,021	-1,438	0,096	0,258	$U \cdot 10^3$	-0,113	-0,048	-0,627	0,070	0,235
R	σ_x	0,009	0,032	0,020	0,010	0,012	σ_x	-0,110	-0,147	-0,075	-0,001	0,061
	$D_x \cdot 10^4$	-3,130	2,553	-1,702	-0,624	-0,393	B_x	-0,048	-0,080	-0,195	-0,232	-0,248
	$U \cdot 10^3$	-0,071	0,034	0,632	-0,080	-0,220	$U \cdot 10^3$	-0,255	-0,417	0,062	-0,068	0,015

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

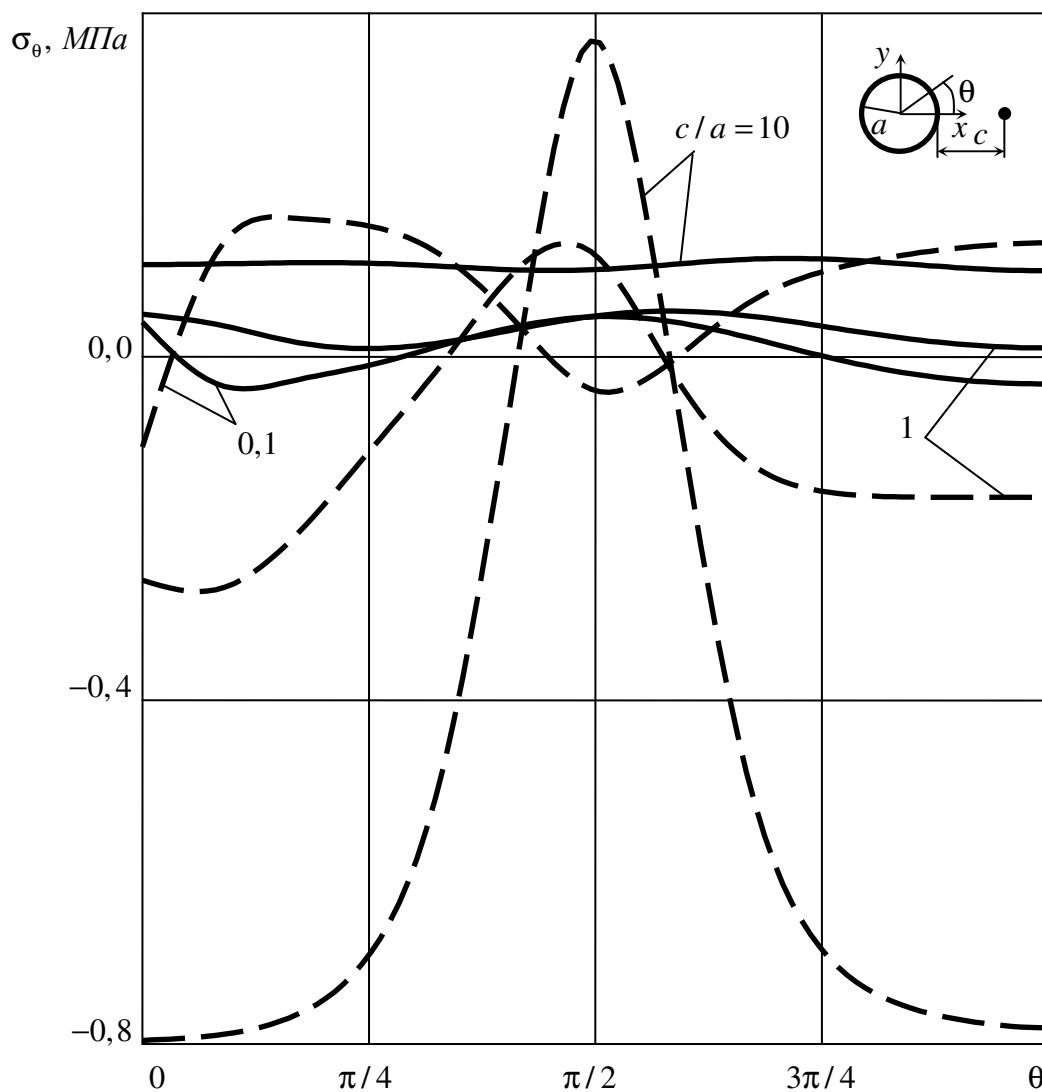


Рис. Б.1. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура отверстия в пластинке из материала ЭМ5 (сплошные линии) и ММ9 (штриховые линии) с круговым отверстием при действии сосредоточенного источника для различных значений c/a .

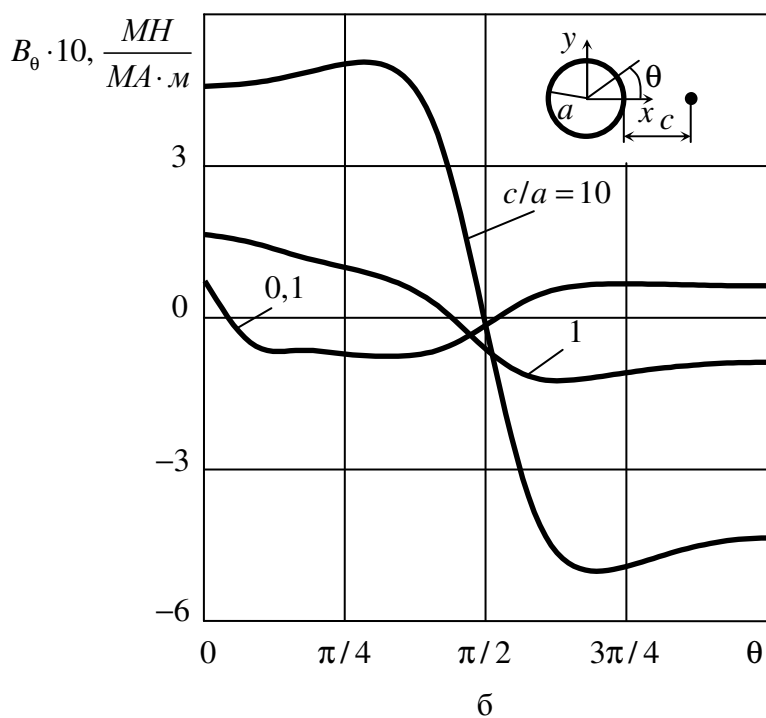
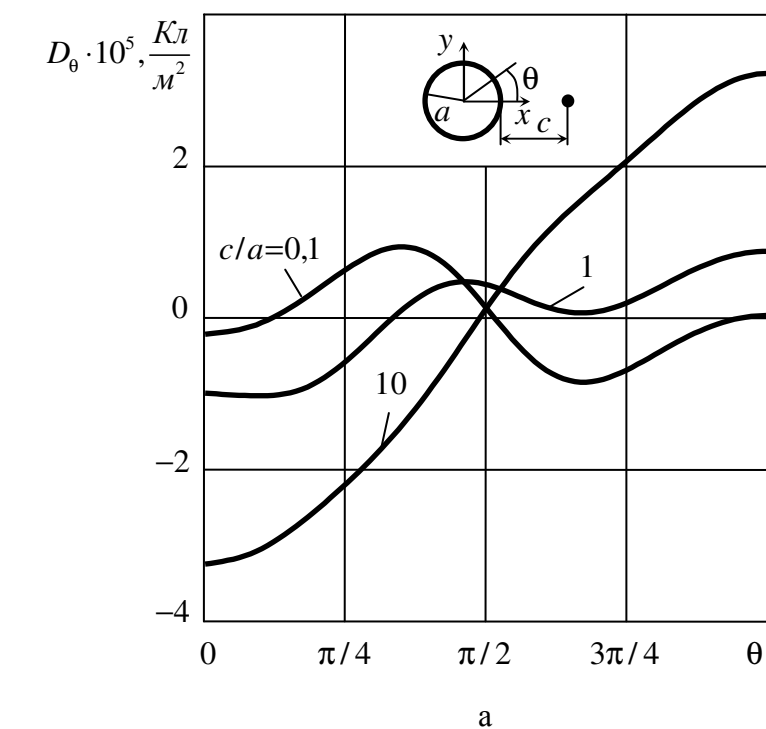


Рис. Б.2. Графики значений индукции электрического (D_θ) и магнитного (B_θ) поля вблизи контура отверстия в пластинке из ЭМ5 и ММ9 с круговым отверстием при действии сосредоточенного источника тепла для различных значений c/a

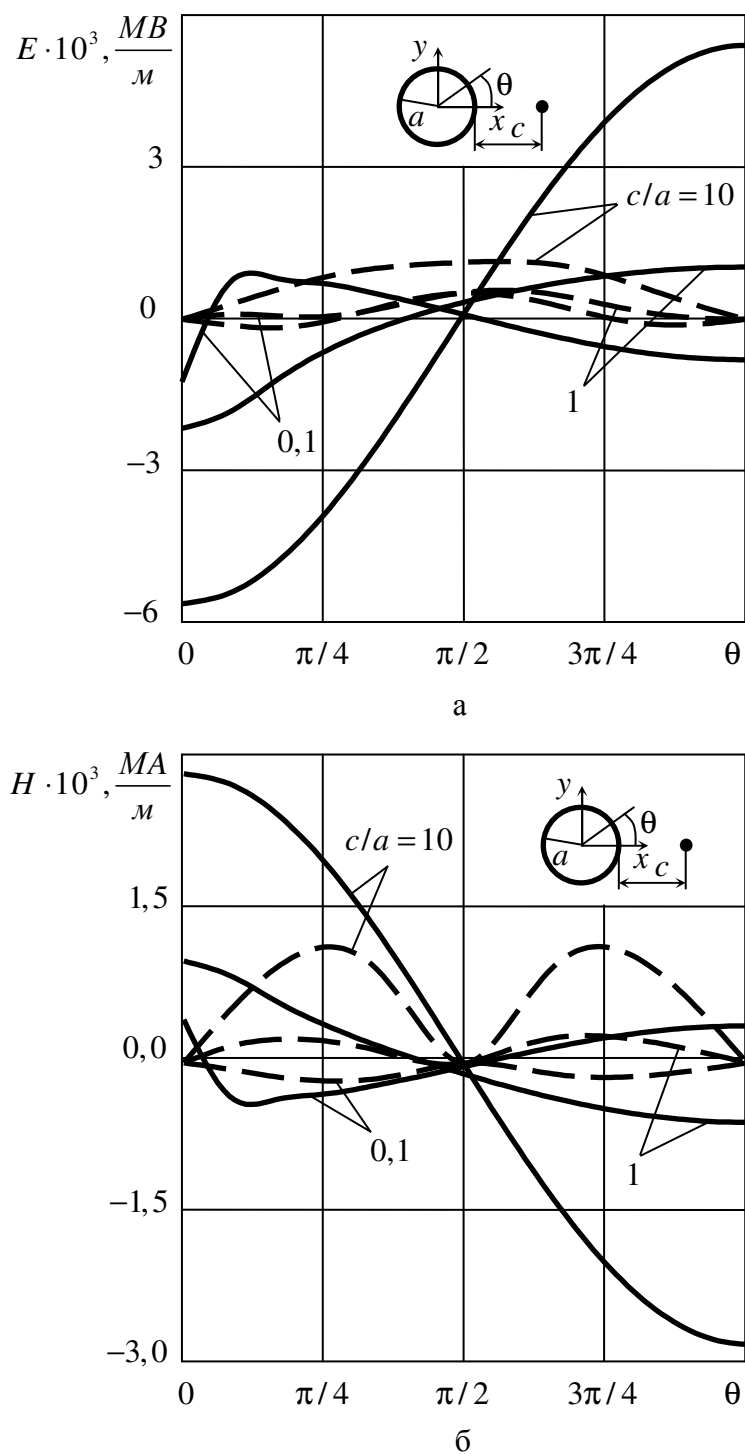


Рис. Б.3. Графики значений компонент напряженности E_θ , H_θ (сплошные линии) и E_n , H_n (штриховые линии) вблизи контура отверстия в пластинке из ЭМ5 и ММ9 с круговым отверстием при действии сосредоточенного источника тепла для различных значений c/a

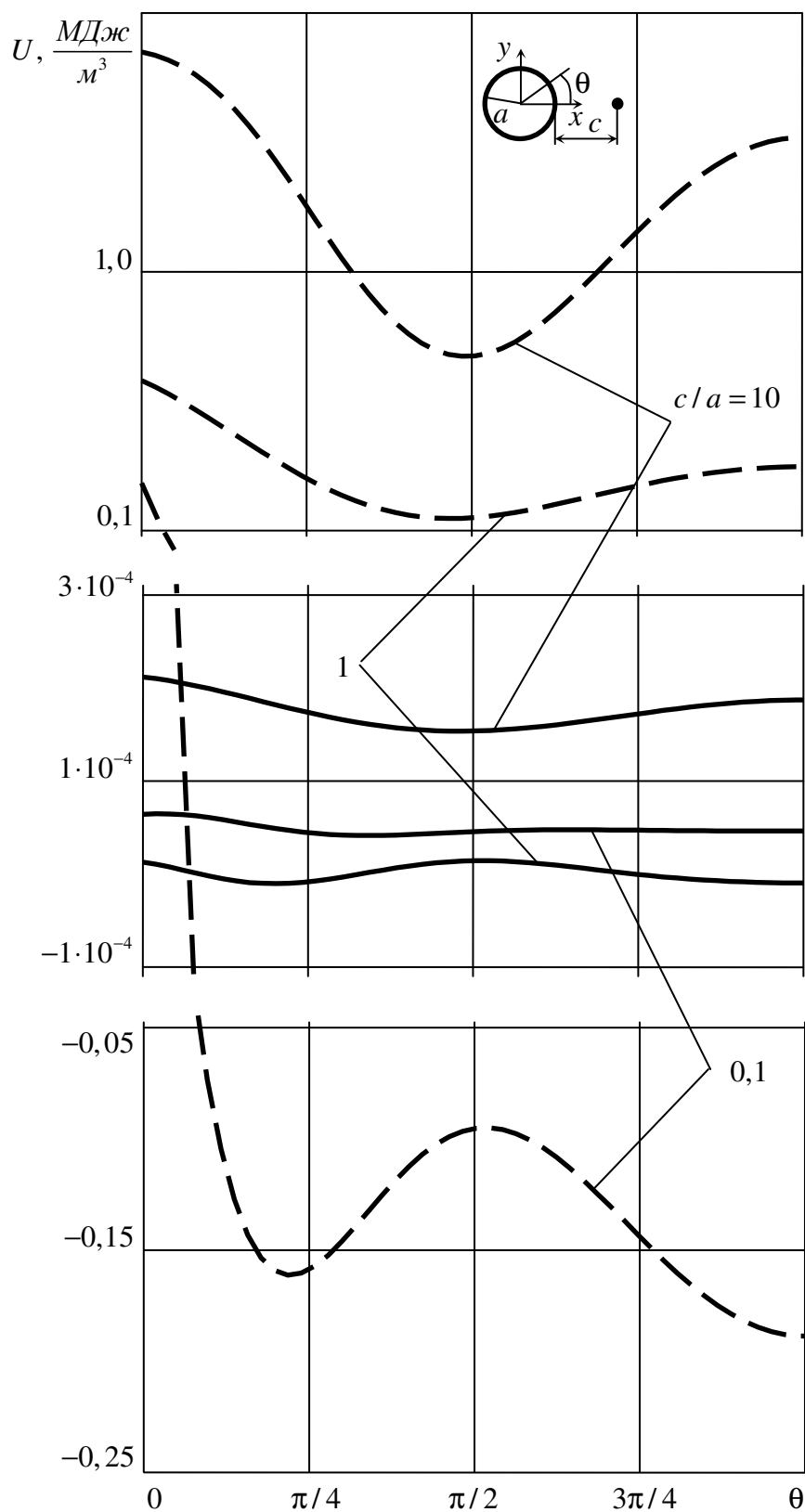


Рис. Б.4. Графики распределения плотности внутренней энергии U в точках контура отверстия в пластинке из ЭМ5 (сплошные линии) и ММ9 (штриховые линии) с круговым отверстием при действии сосредоточенного источника тепла для различных значений c/a

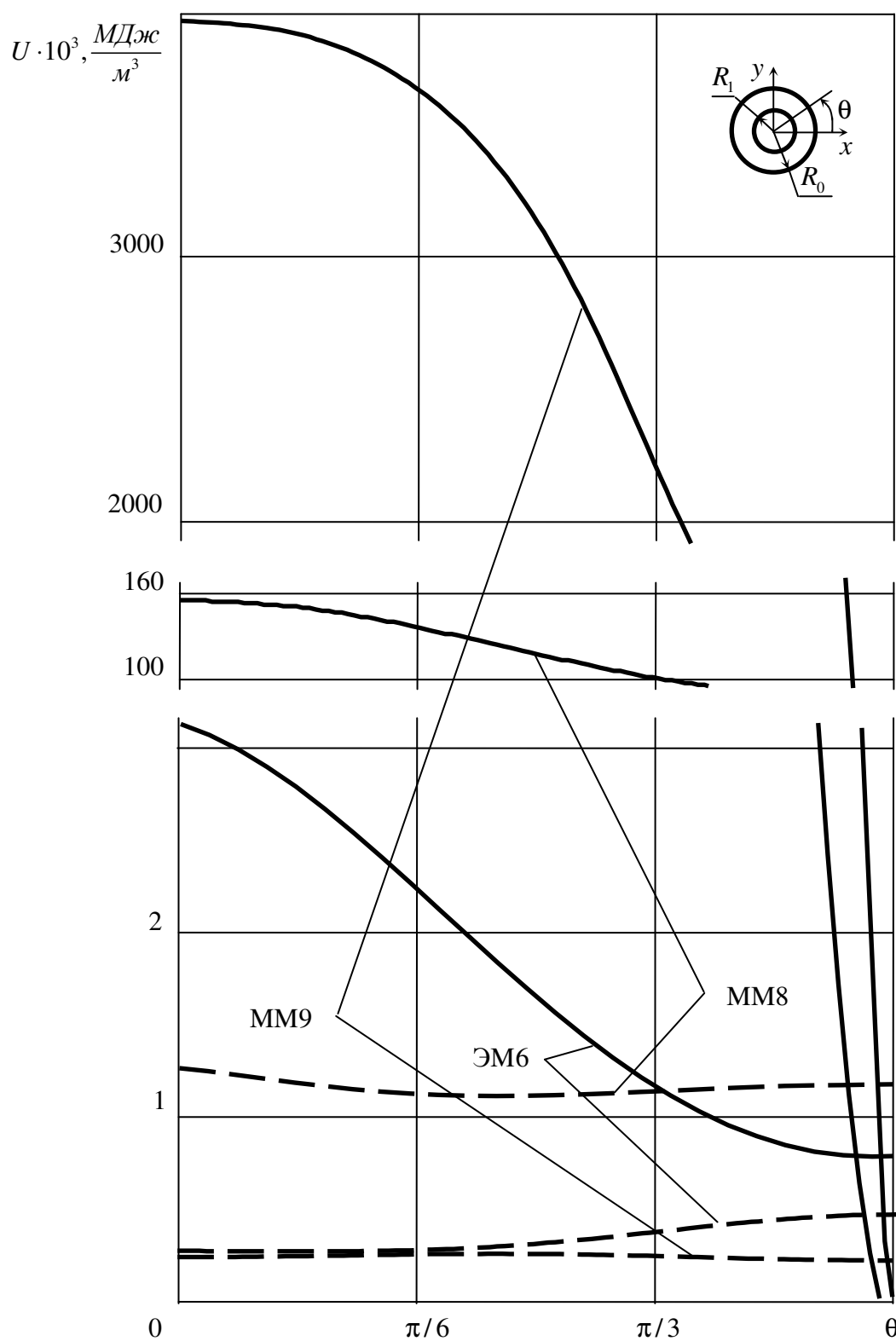


Рис. Б.5. Графики распределения плотности внутренней энергии U в точках внешнего контура в задачах термоэлектро- и термомангнитоупругости (сплошные линии) и электро-, магнитоупругости (штриховые линии) для кольца из различных материалов при $R_1 / R_0 = 0,9$

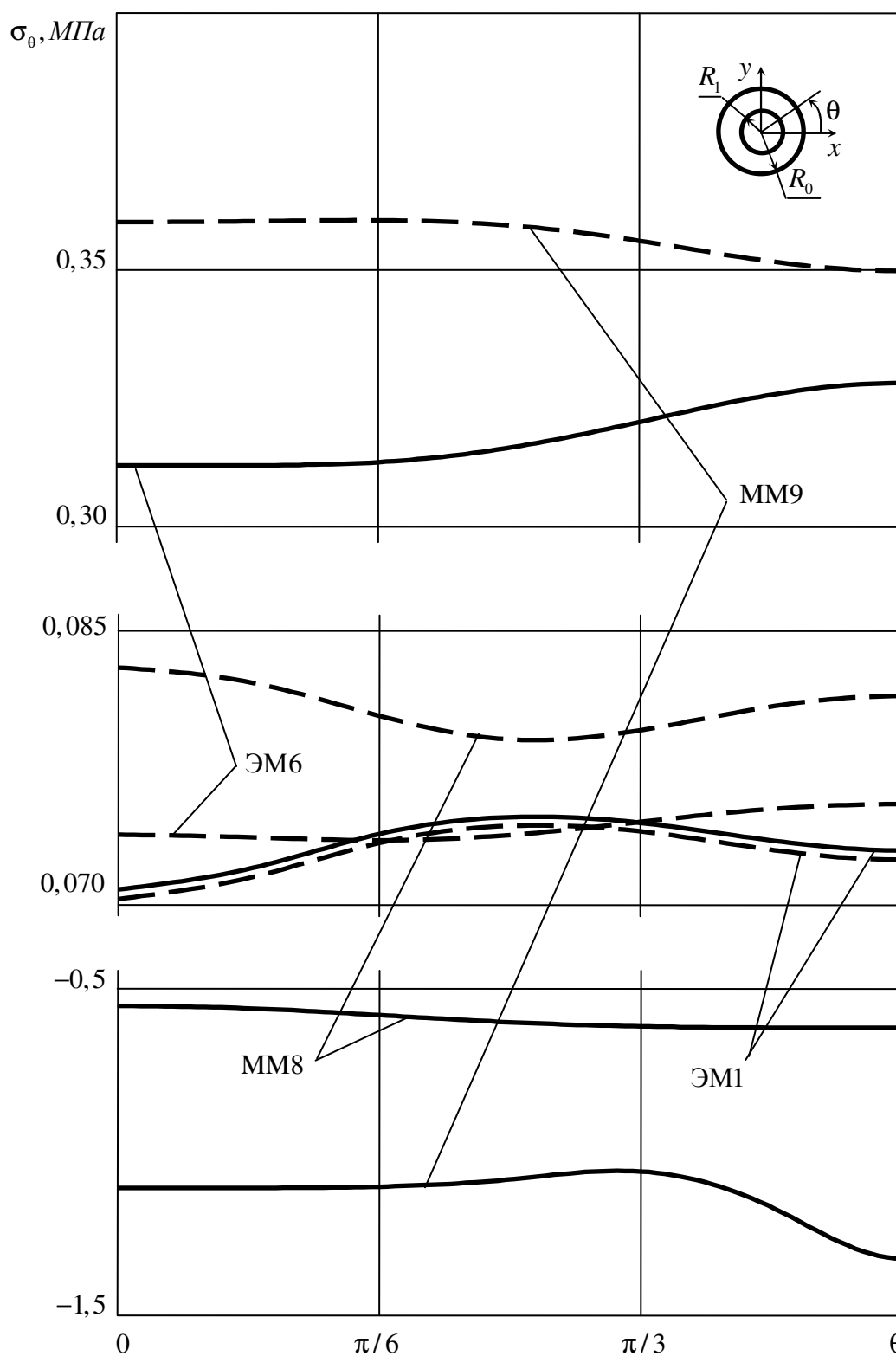


Рис. Б.6. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи внешнего контура в задачах термоэлектро- и термомангнитоупругости (сплошные линии) и в задаче термоупругости (штриховые линии) для кольца из различных материалов при $R_1/R_0 = 0,9$

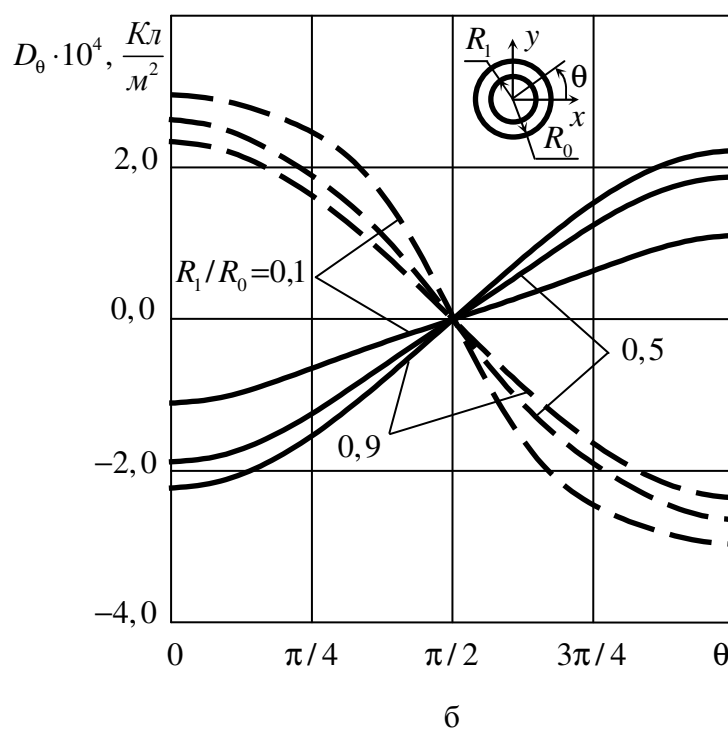
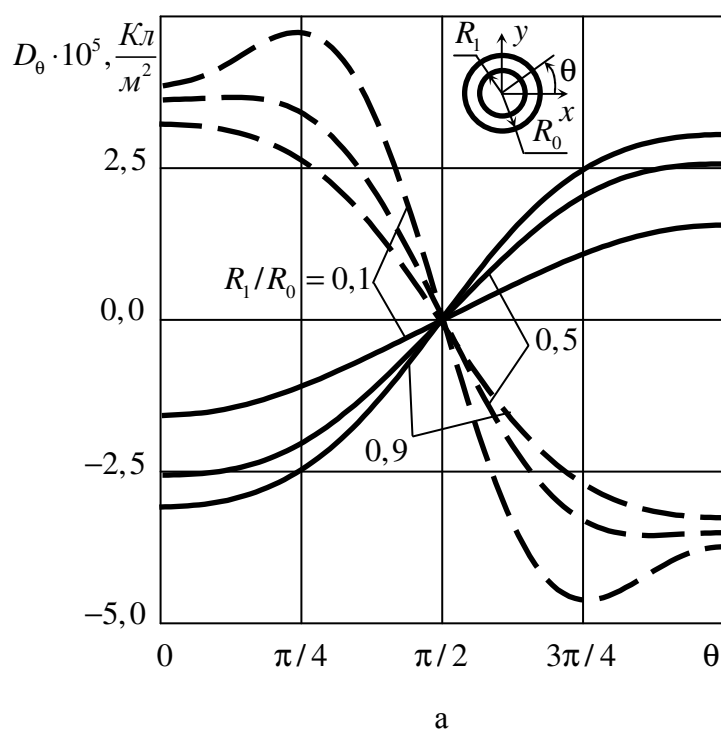


Рис. Б.7. Графики распределения индукции D_θ электрического поля вблизи внутреннего (сплошная линия) и внешнего (штриховая) контура кругового кольца из ЭМ2 (а) и ЭМ6 (б) для различных значений R_1/R_0

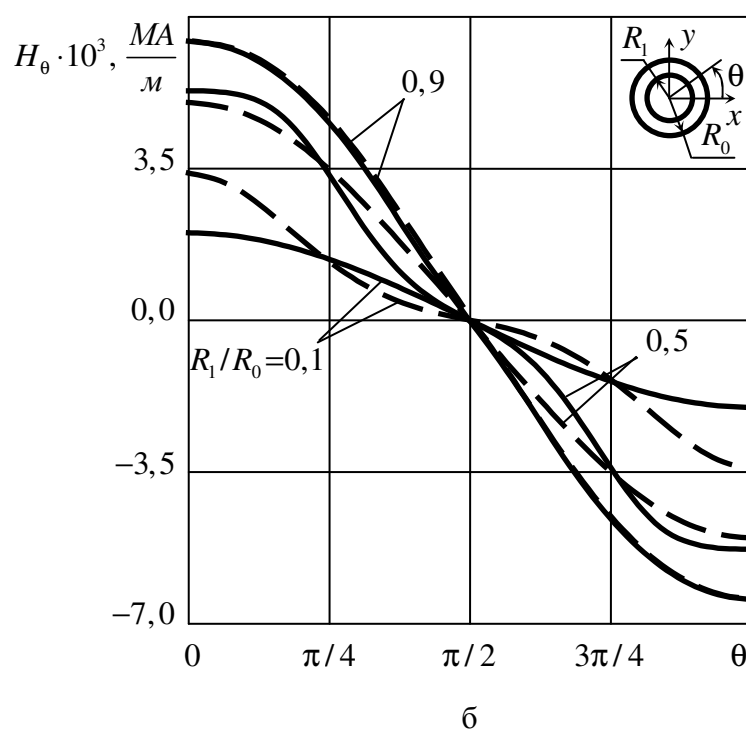
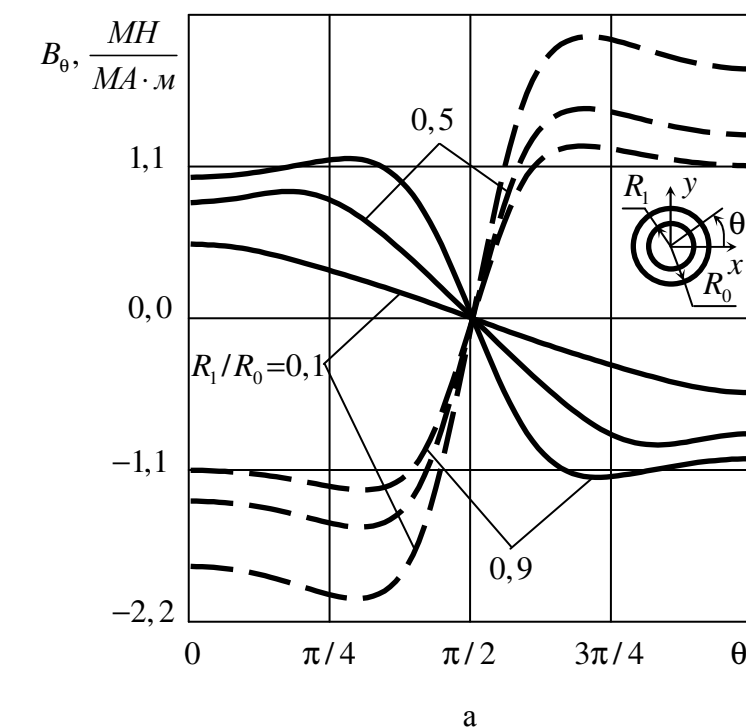


Рис. Б.8. Графики изменения индукции B_θ и напряженности H_θ магнитного поля вблизи внутреннего (сплошные линии) и внешнего (штриховые линии) контура кругового кольца из ММ9 для различных значений R_1/R_0

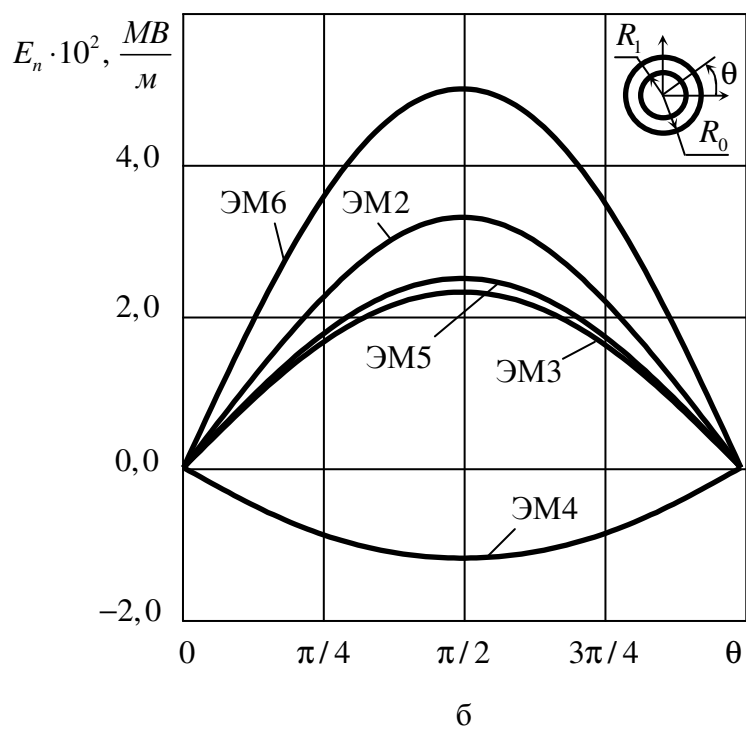
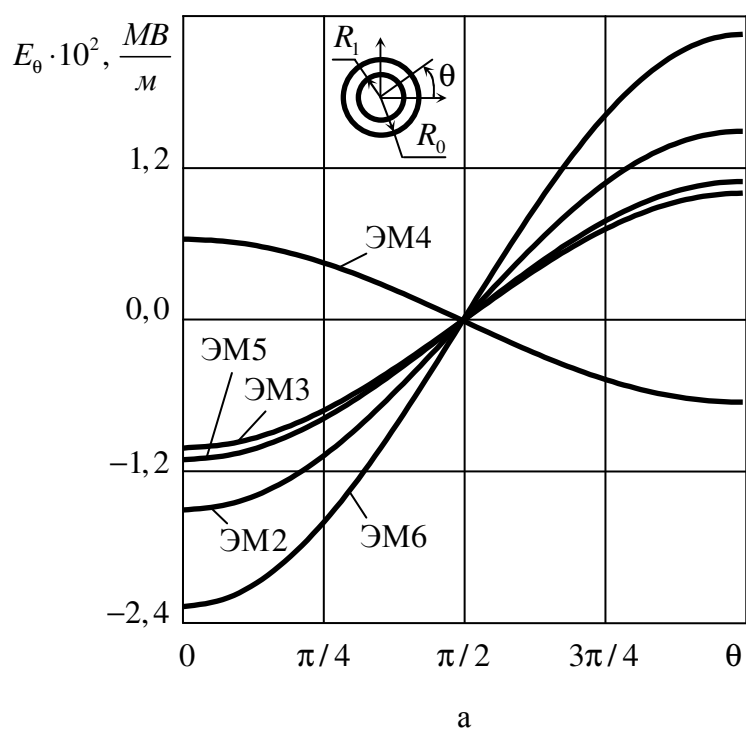


Рис. Б.9. Графики распределения компонент напряженности E_θ и E_n электрического поля вблизи внешнего контура кругового кольца из различных материалов при $R_1 / R_0 = 0,9$.

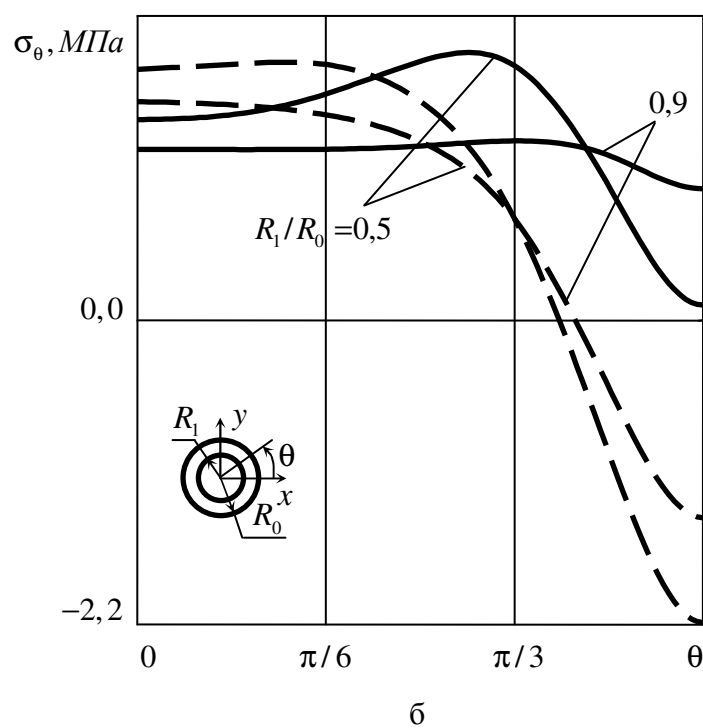
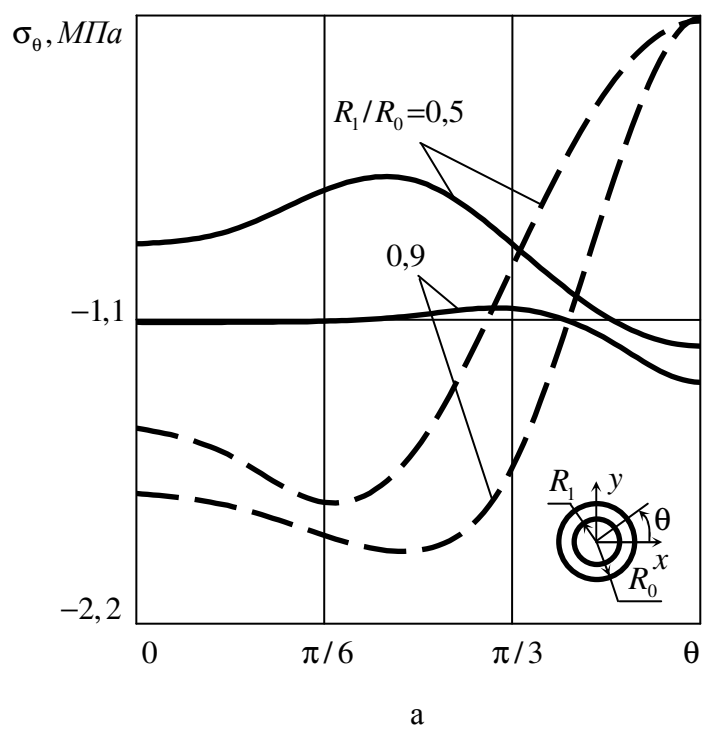


Рис. Б.10. Графики рапсделения напряжений σ_θ вблизи внешнего (рис а) и внутреннего (рис б) контуров кругового кольца из ММ9 с неподкрепленным (сплошные линии) и жестко подкрепленным (штриховые линии) внешним контуром для различных значений R_1 / R_0

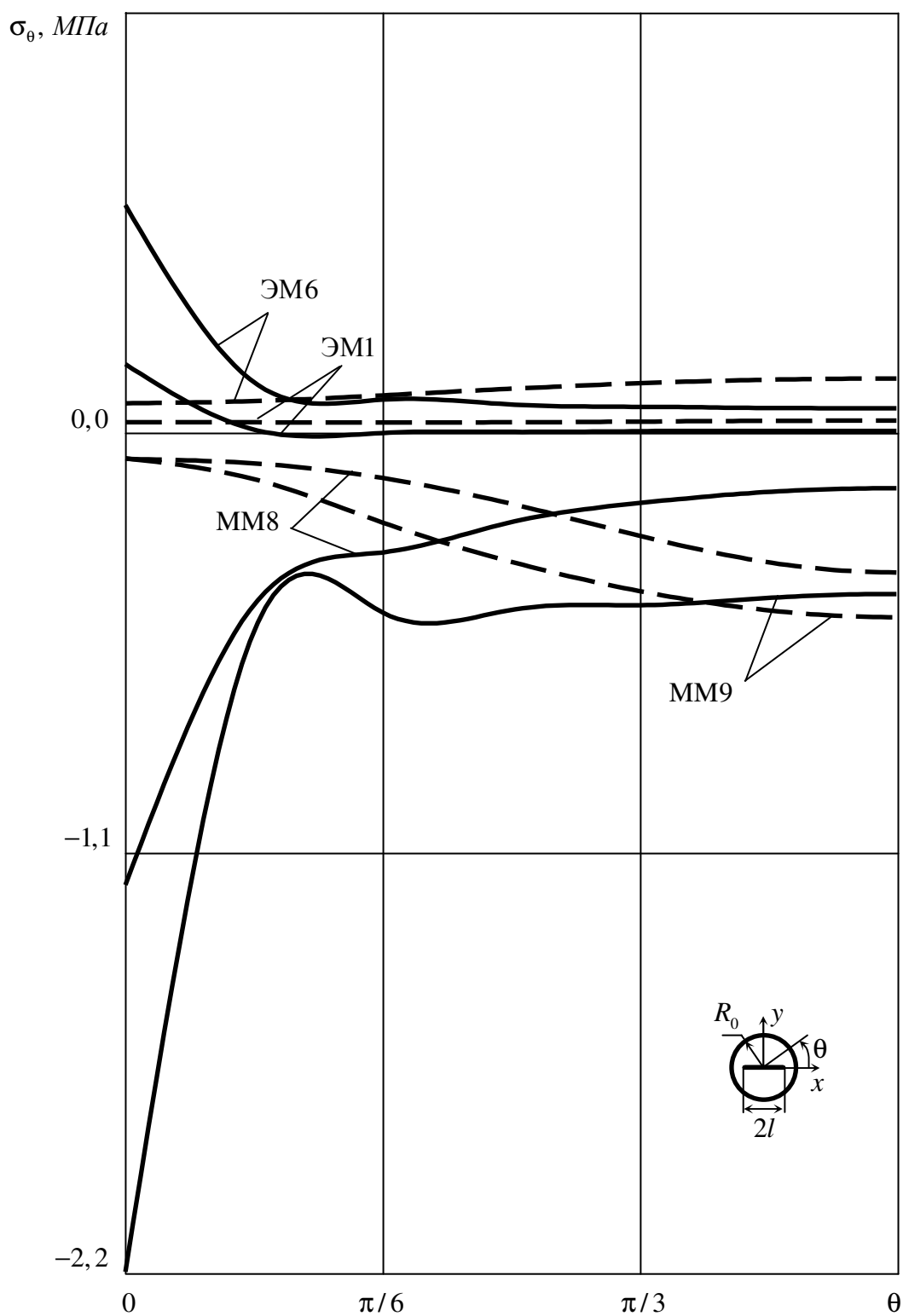


Рис. Б.11. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура кругового диска с центральной трещиной при $l/R_0 = 0,9$ (сплошные линии) и $l/R_0 = 0,1$ (штриховые линии) для различных материалов

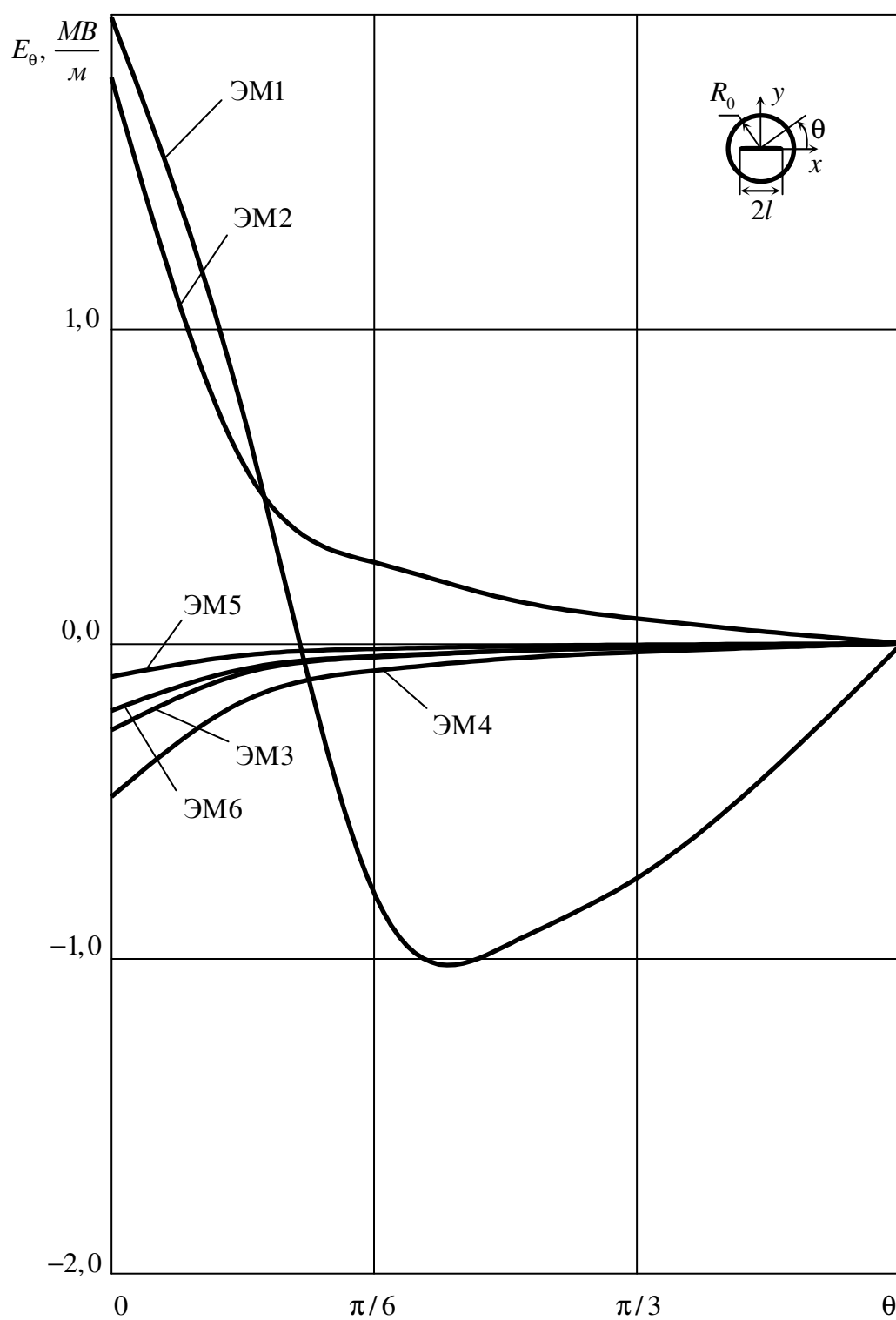


Рис. Б.12. Графики распределения напряженности E_θ вблизи контура кругового диска с центральной трещиной для различных материалов при $l/R_0 = 0,9$

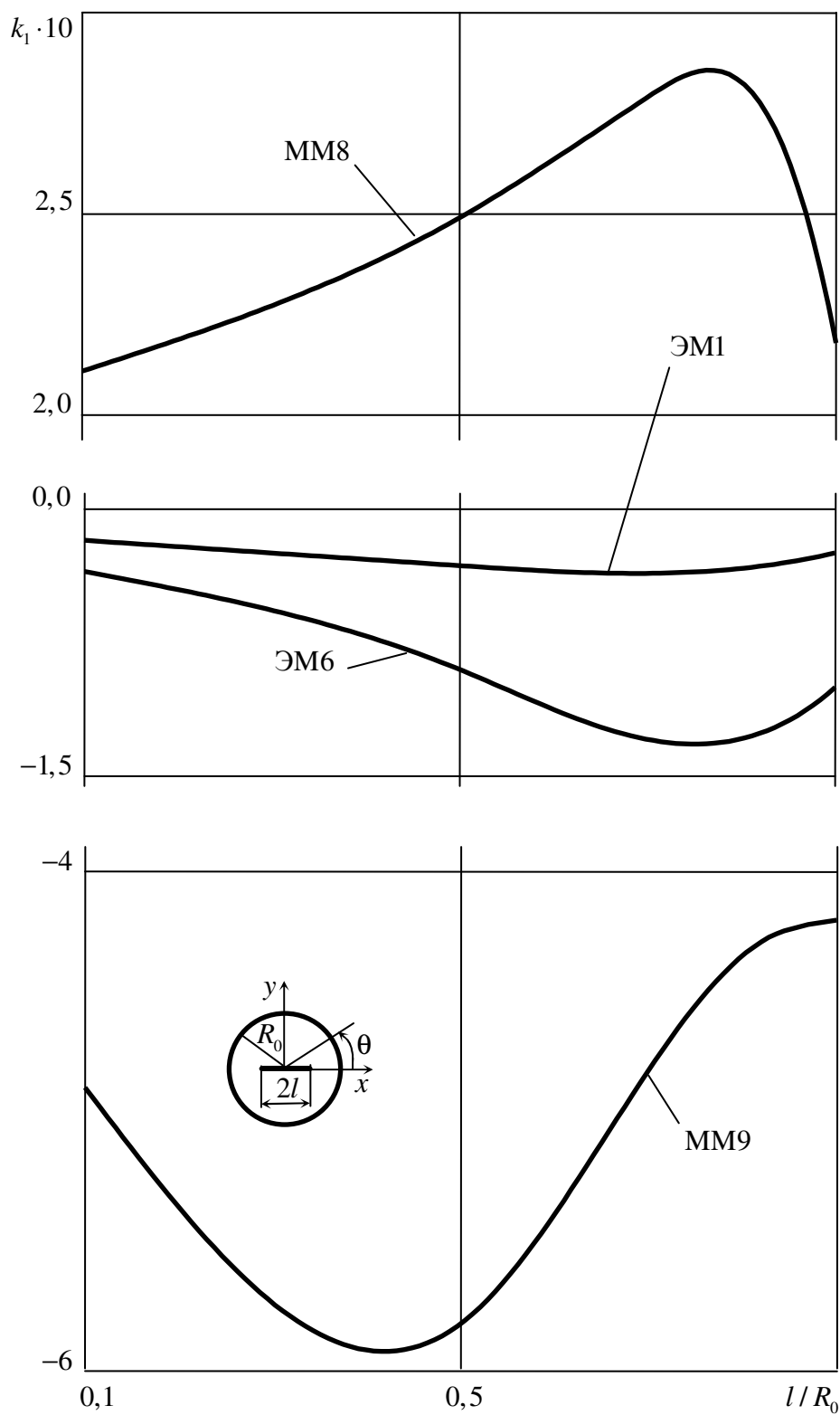


Рис. Б.13. Графики изменения КИНН k_1 для концов трещины в круговом диске с центральной трещиной из различных материалов в зависимости от отношения l/R_0

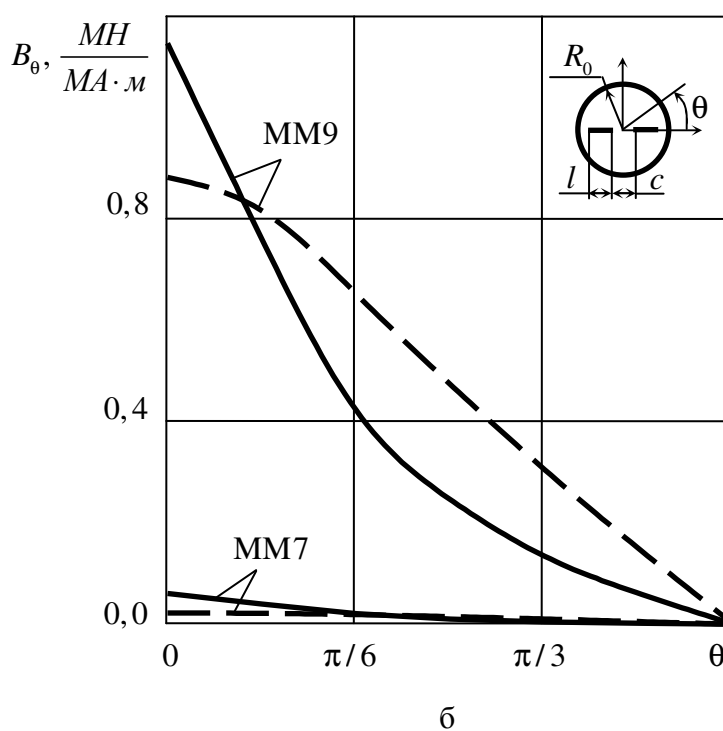
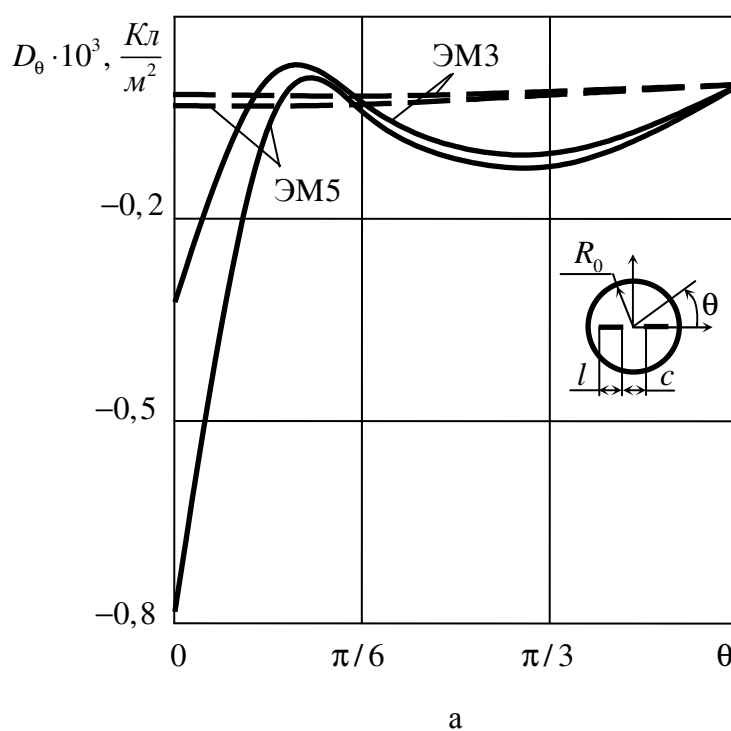


Рис. Б.14. Графики изменения индукций D_θ и B_θ вблизи контура кругового диска с двумя диаметрными трещинами полудлины $l = 0,2R_0$ из различных материалов для случаев $c/R_0 = 1,0$ (сплошные линии) и $c/R_0 = 0,1$ (штриховые линии)

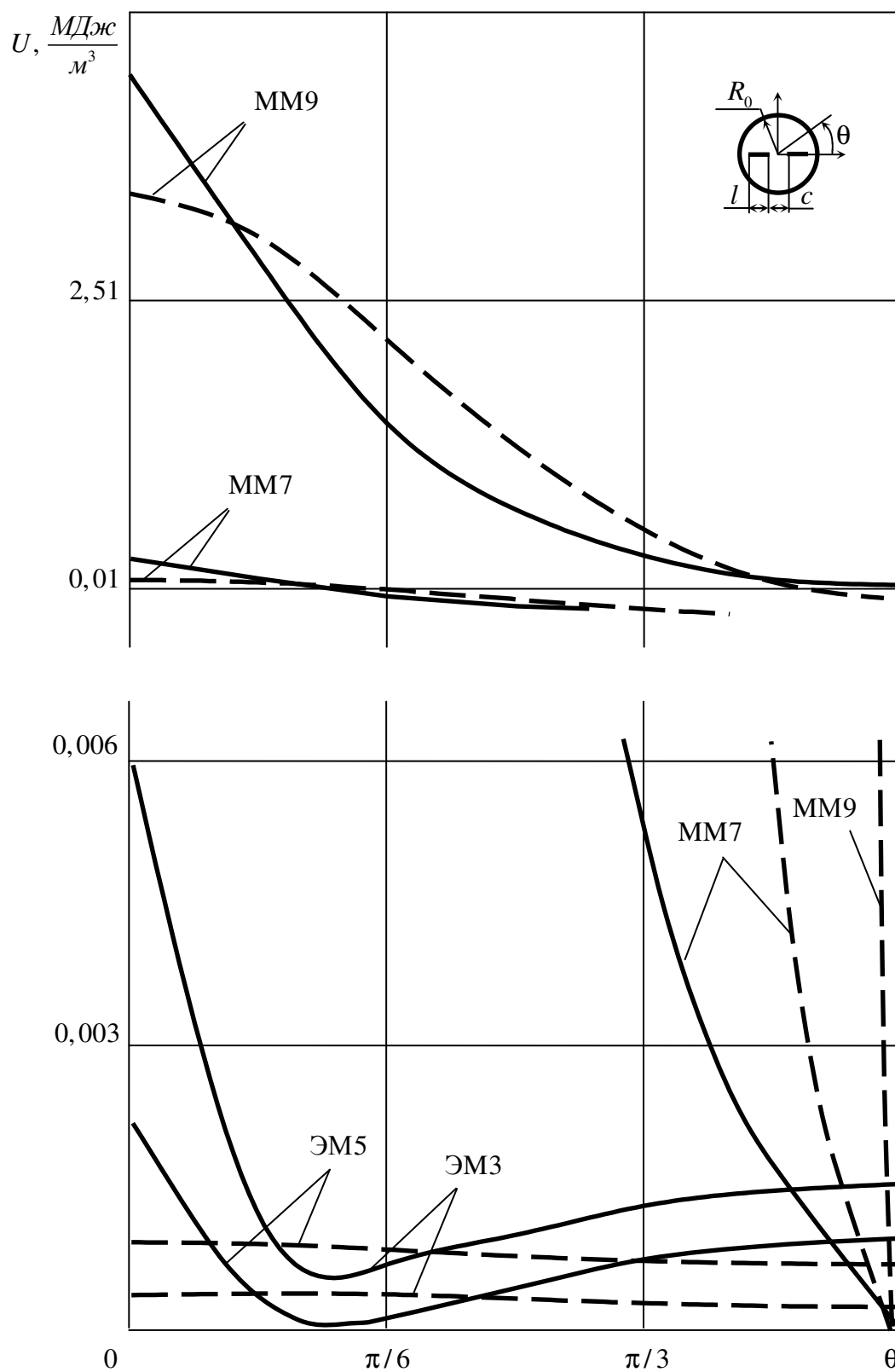


Рис. Б.15. Графики распределения плотности внутренней энергии U по контуру кругового диска из различных материалов с двумя диаметральными трещинами для случаев $c/R_0 = 1,0$ (сплошные линии) и $c/R_0 = 0,1$ (штриховые линии)

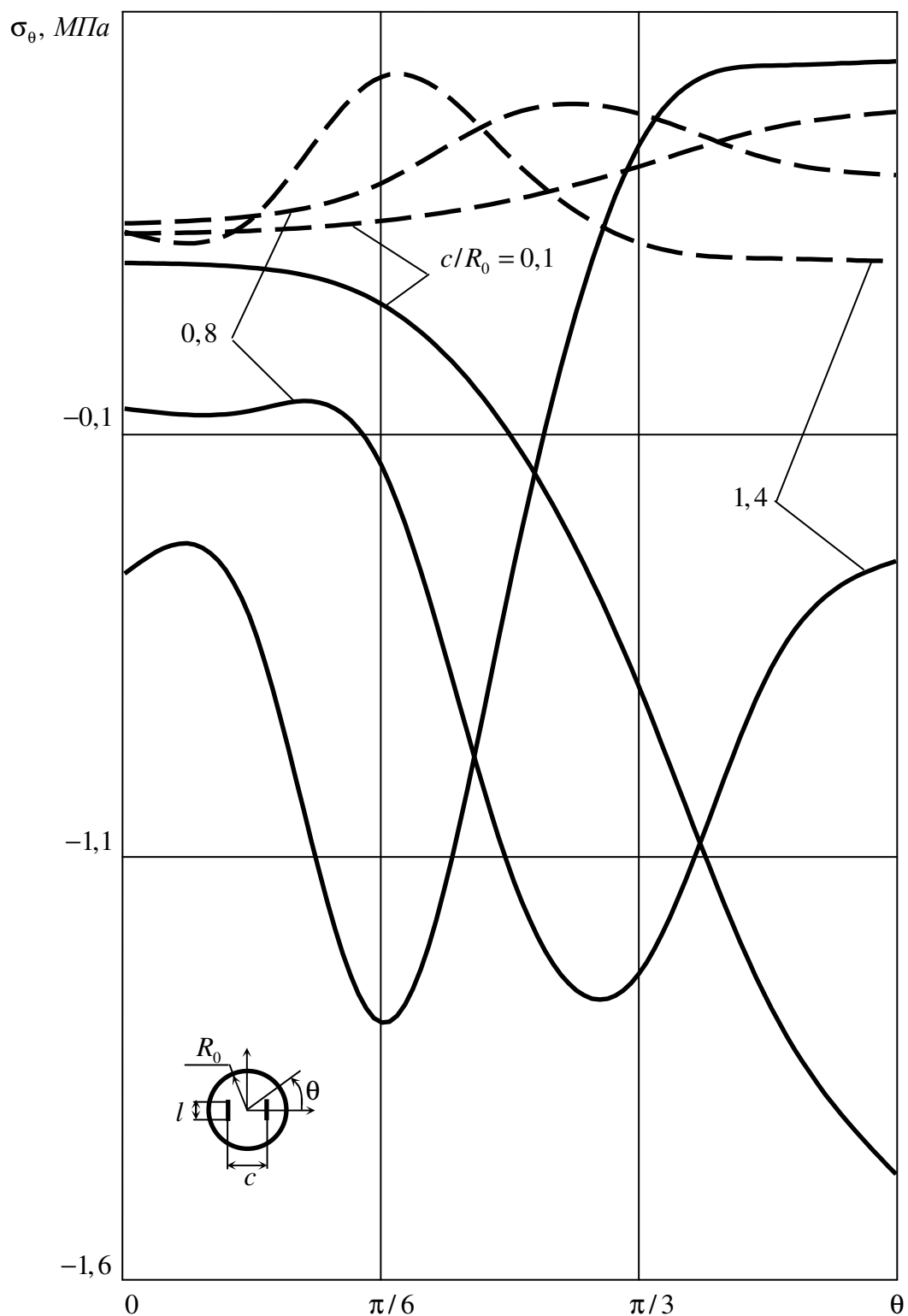


Рис. Б.16. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи контура кругового диска из ММ9 (сплошные линии) и ЭМ5 (штриховые линии) с двумя параллельными трещинами полудлины $l = 0,5R_0$ для различных значений c/R_0

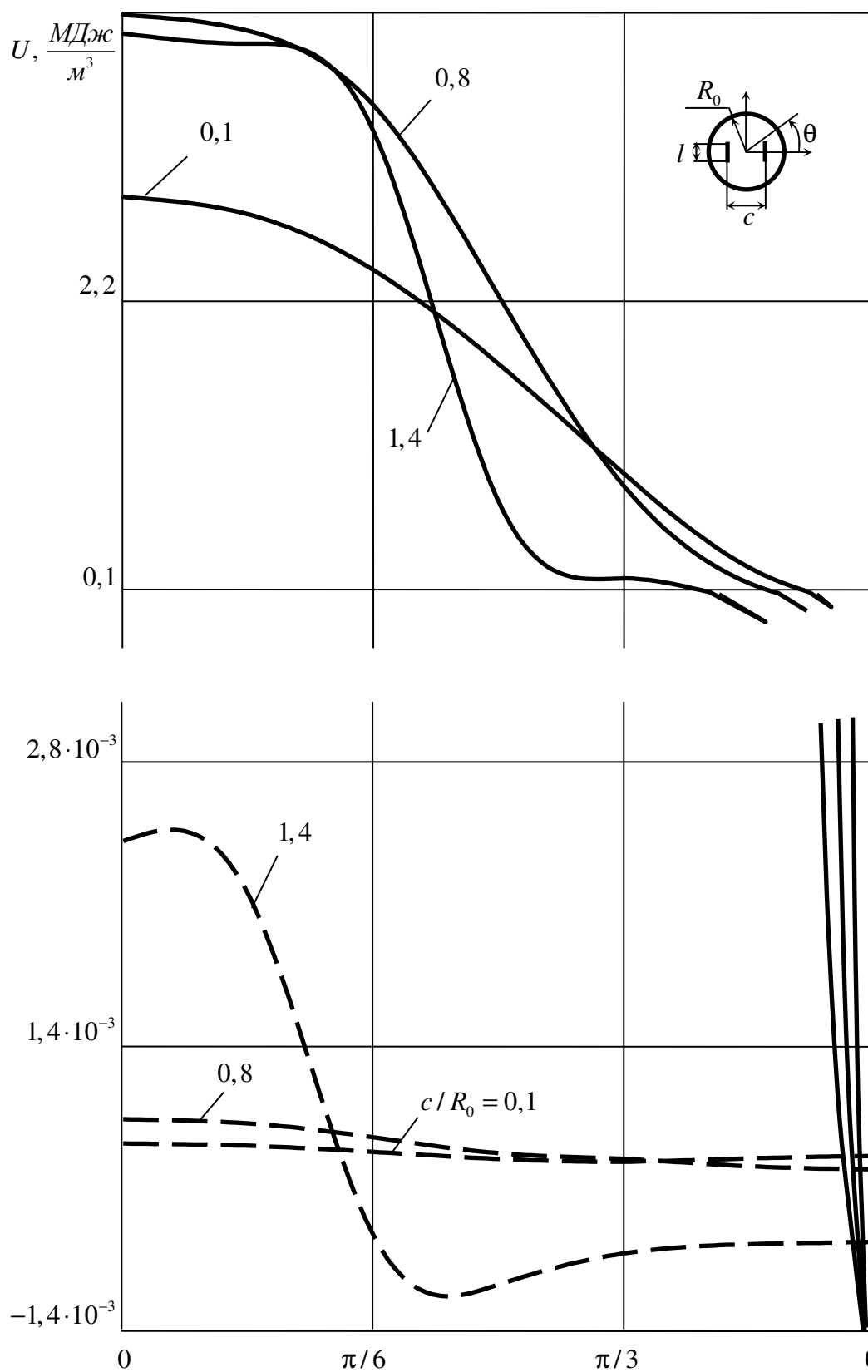


Рис. Б.17. Графики распределения плотности внутренней энергии U по контуру кругового диска из ММ9 (сплошные линии) и ЭМ5 (штриховые линии) с двумя параллельными трещинами полудлины $l = 0,5R_0$ для

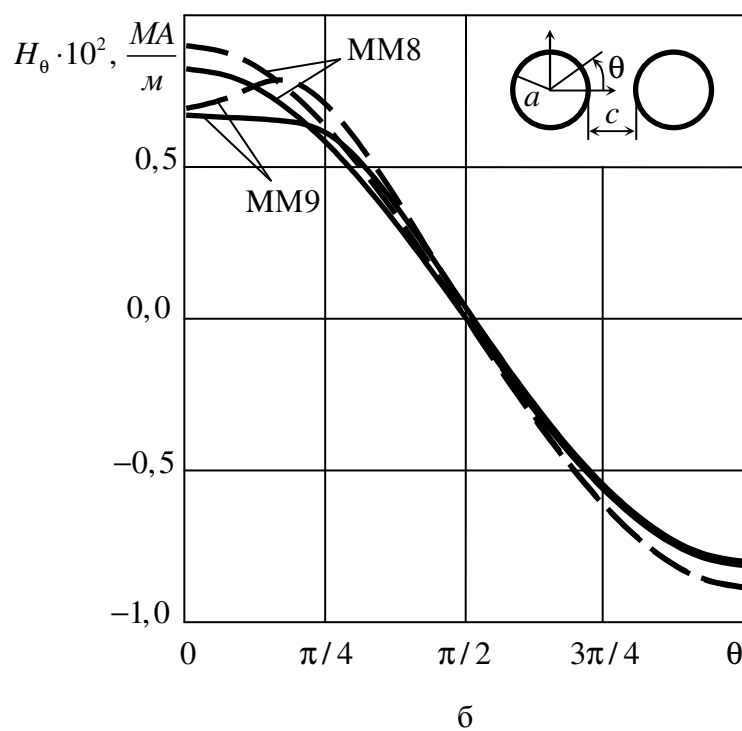
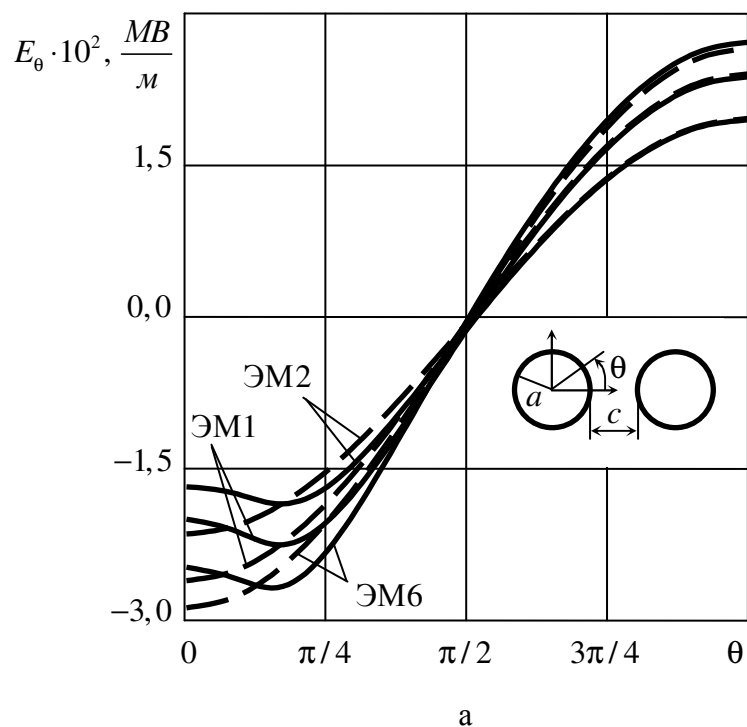


Рис. Б.18. Графики распределения напряженностей E_θ и B_θ вблизи левого контура пластинки с двумя круговыми отверстиями для случаев $c/a = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a = 10$ (штриховые линии) для различных значений c/a

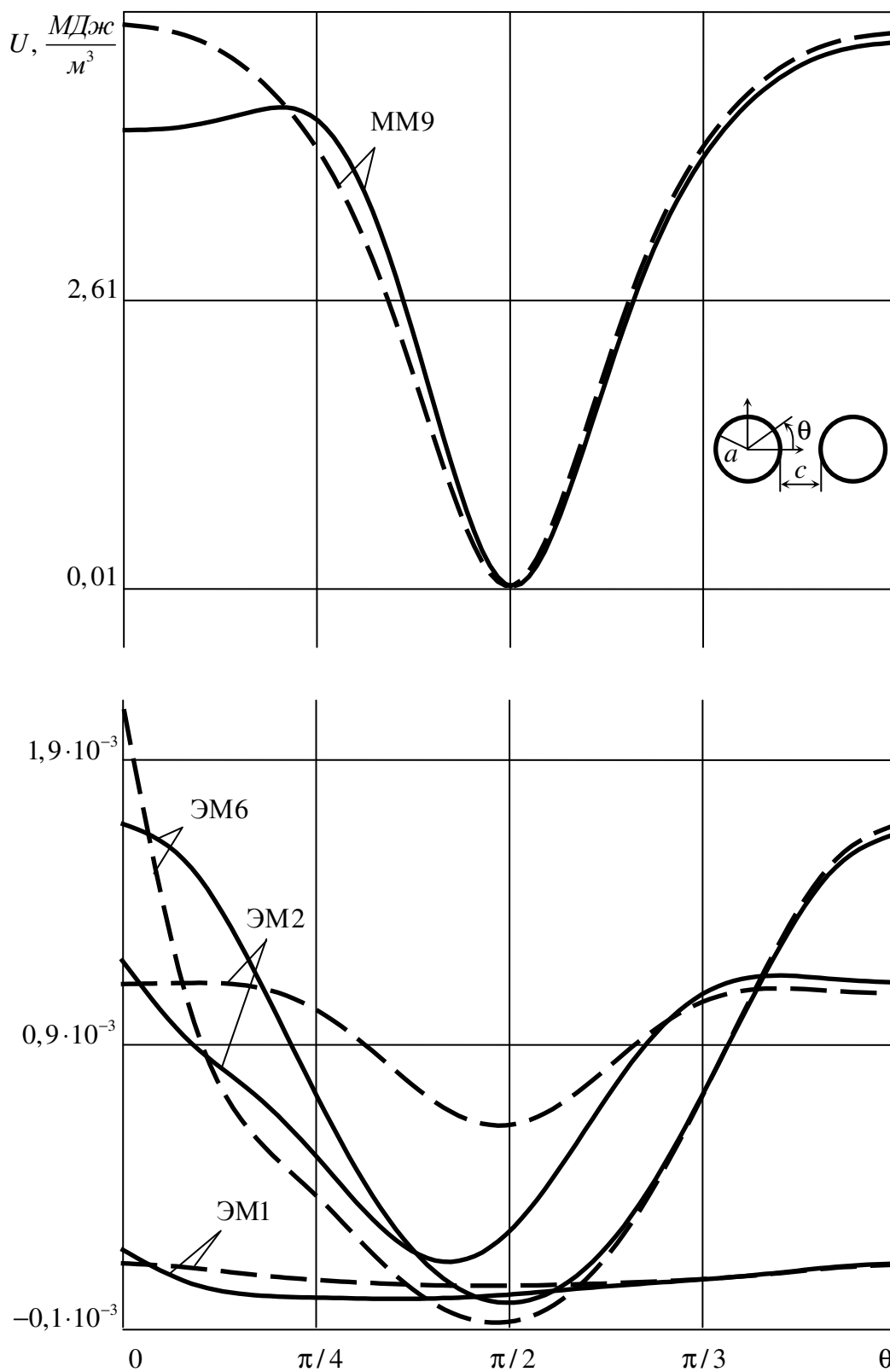


Рис. Б.19. Графики распределения плотности внутренней энергии вблизи левого контура пластинки с двумя круговыми отверстиями из различных материалов при $c/a = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a = 10$ (штриховые линии)

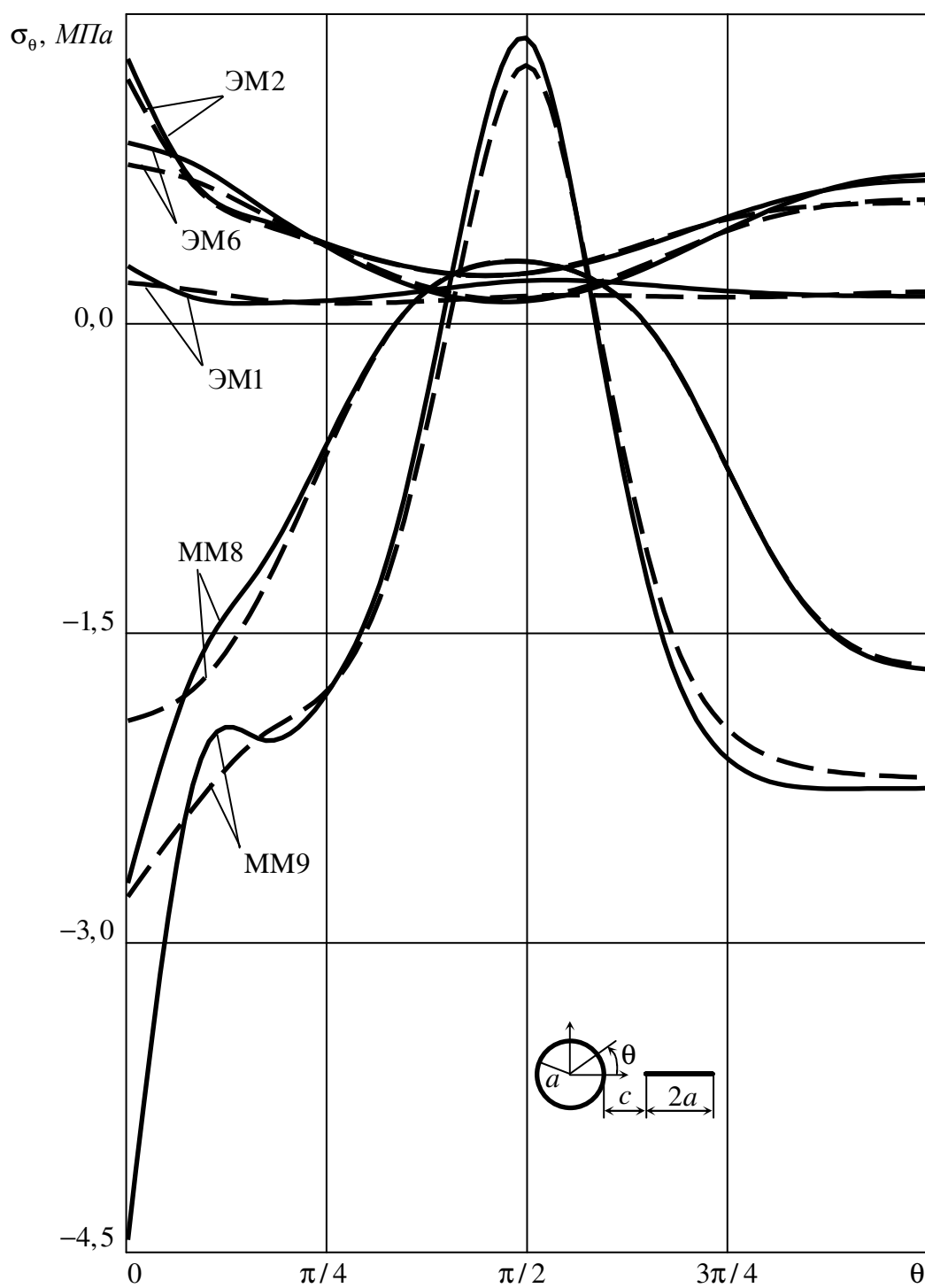


Рис. Б.20. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи левого контура пластинки с круговым отверстием и горизонтальной трещиной из различных материалов при $c/a = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a = 10$ (штриховые линии)

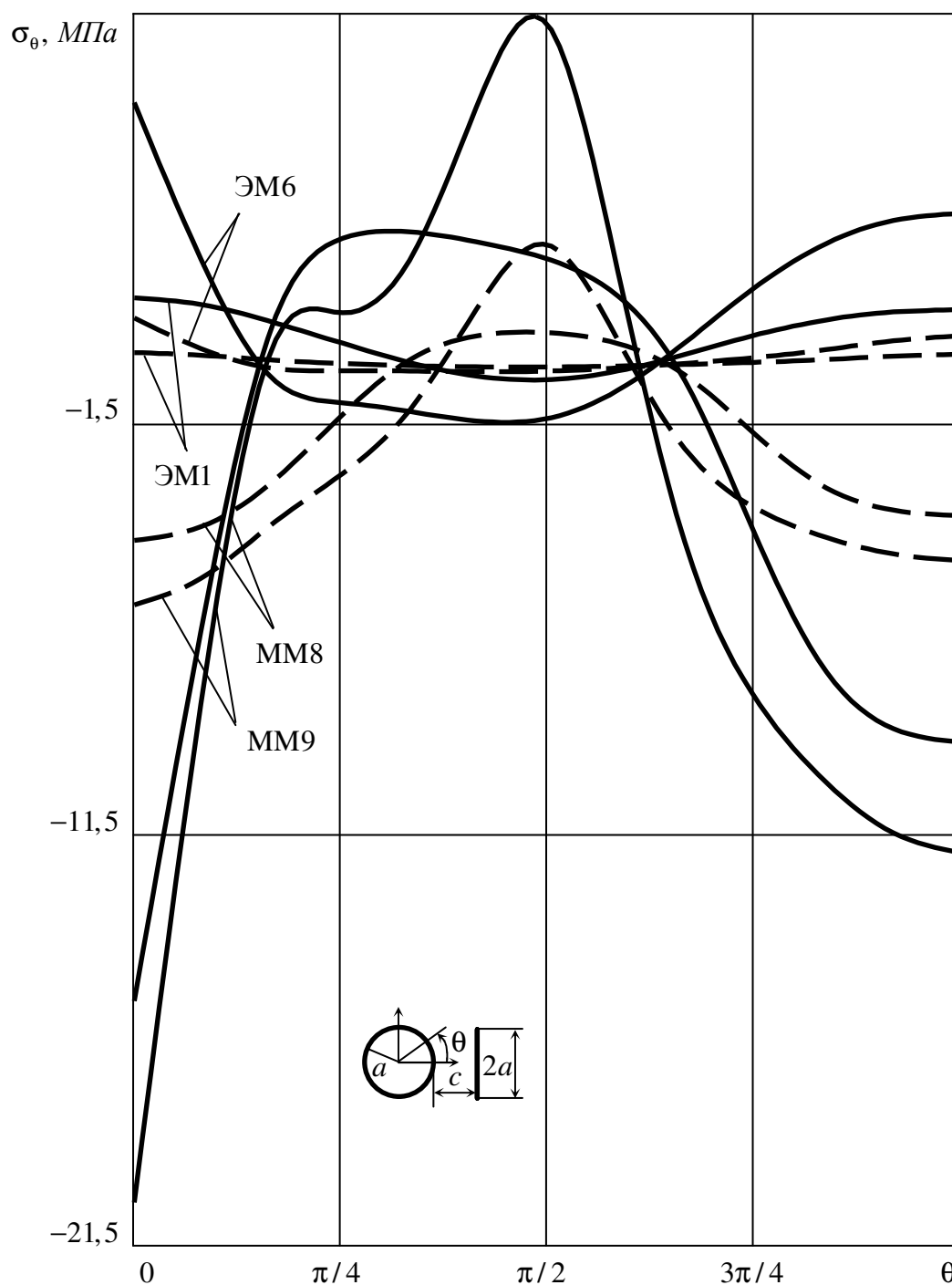


Рис. Б.21. Графики распределения напряжений σ_θ вблизи левого контура в пластинке с круговым отверстием и вертикальной трещиной из различных материалов при $c/a = 0,1$ (сплошные линии) и $c/a = 10$ (штриховые линии)

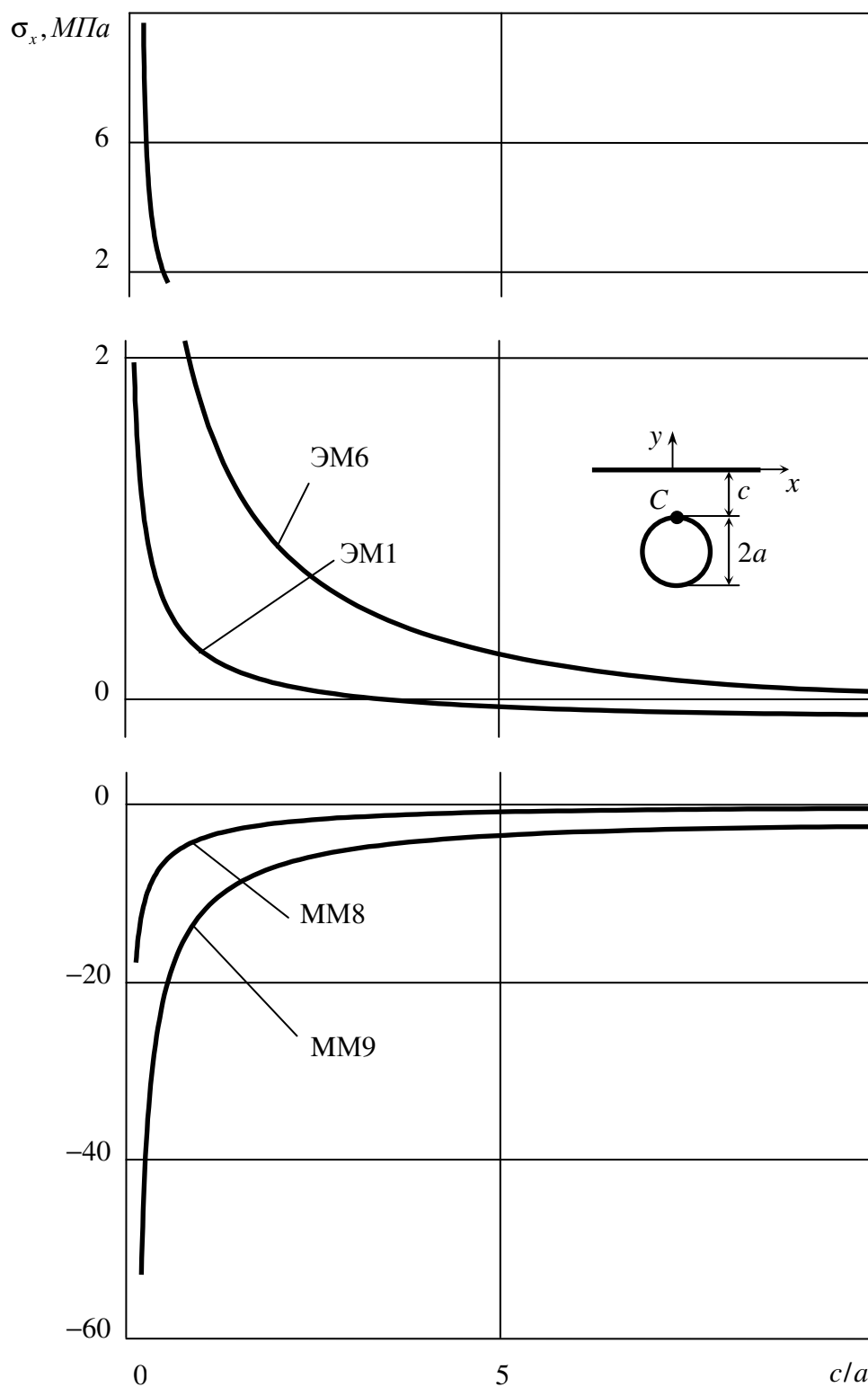


Рис. Б.22. Графики изменения напряжений σ_x в ближайшей к границе полуплоскости точке контура кругового отверстия из различных материалов в зависимости от отношения c/a

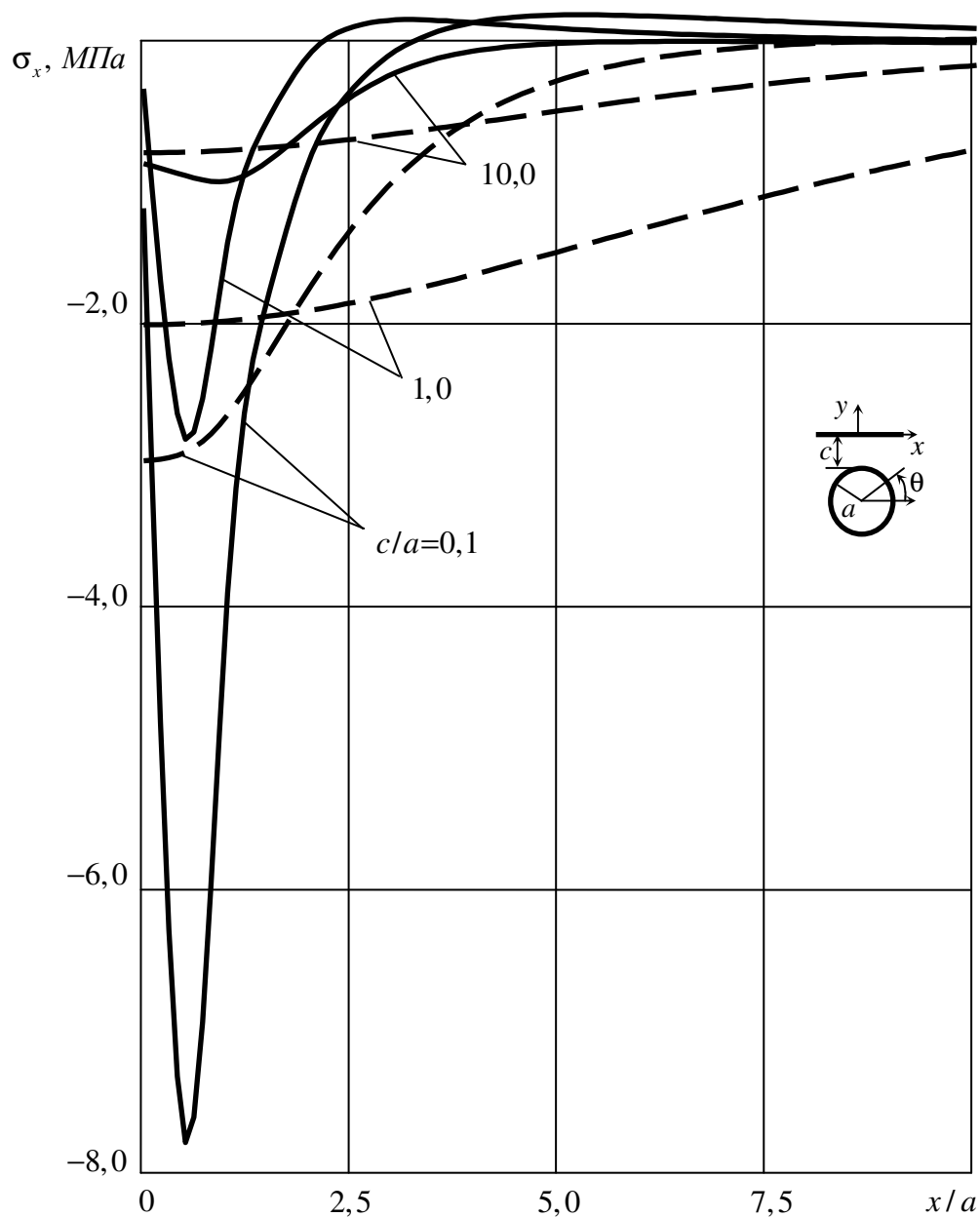


Рис. Б.23. Графики распределения напряжений σ_x вблизи прямой-линейной границы для полуплоскости с круговым отверстием из материалов ММ9 (сплошные линии) и ММ8 (штриховые линии) для различных длин перемычек

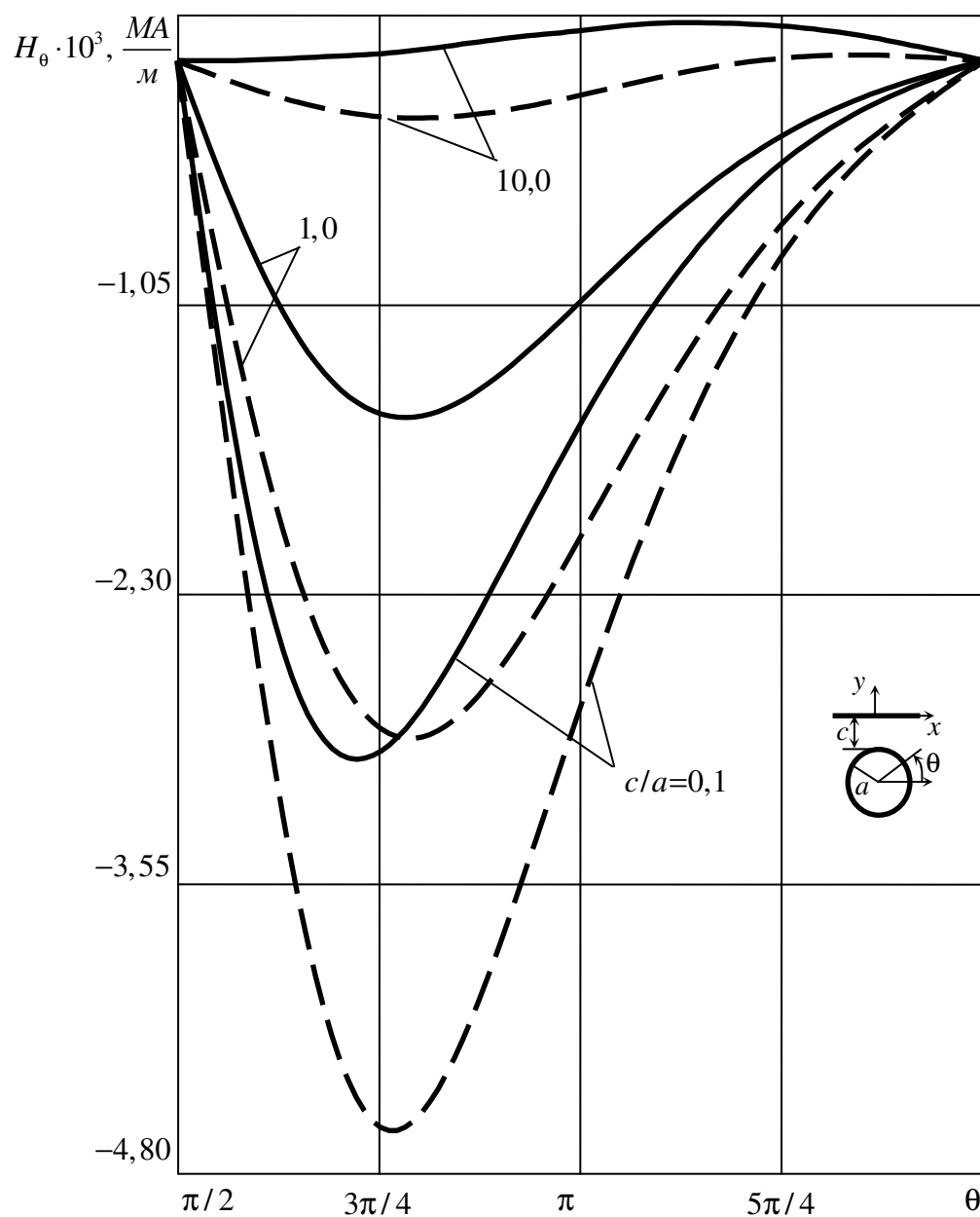


Рис. Б.24. Графики распределения напряженности H_θ вблизи контура отверстия для полуплоскости с круговым отверстием из материалов ММ9 (сплошные линии) и ММ8 (штриховые линии) для различных

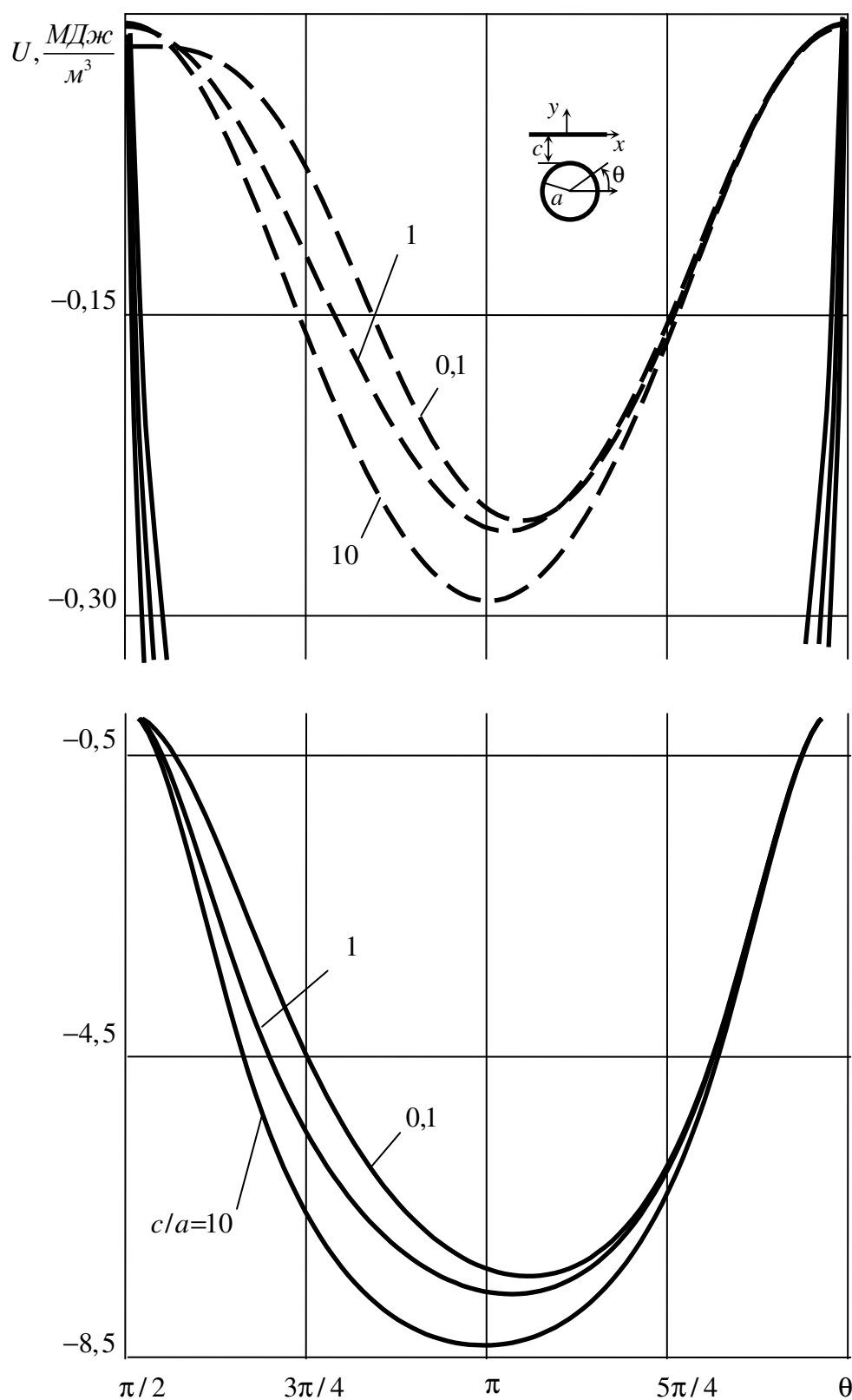


Рис. Б.25. Графики распределения плотности внутренней энергии U по контуру кругового отверстия в полуплоскости из материалов ММ9 (сплошные линии) и ММ8 (штриховые линии) для различных длин перемычек

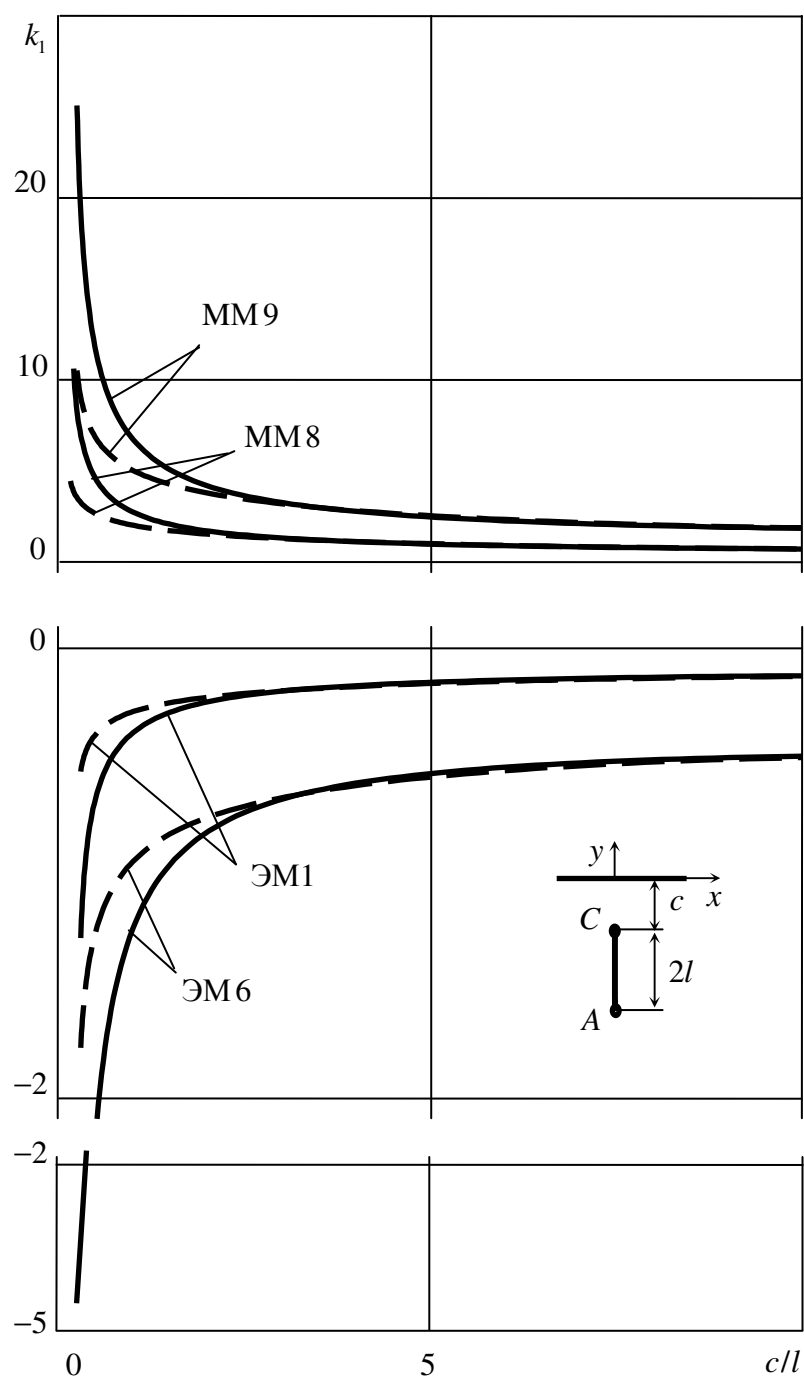


Рис. Б.26. Графики изменения КИНН для вершин трещины C (k_1^+ , сплошные линии) и A (k_1^- , штриховые линии) в полуплоскости с вертикальной трещиной для различных материалов в зависимости от c/l

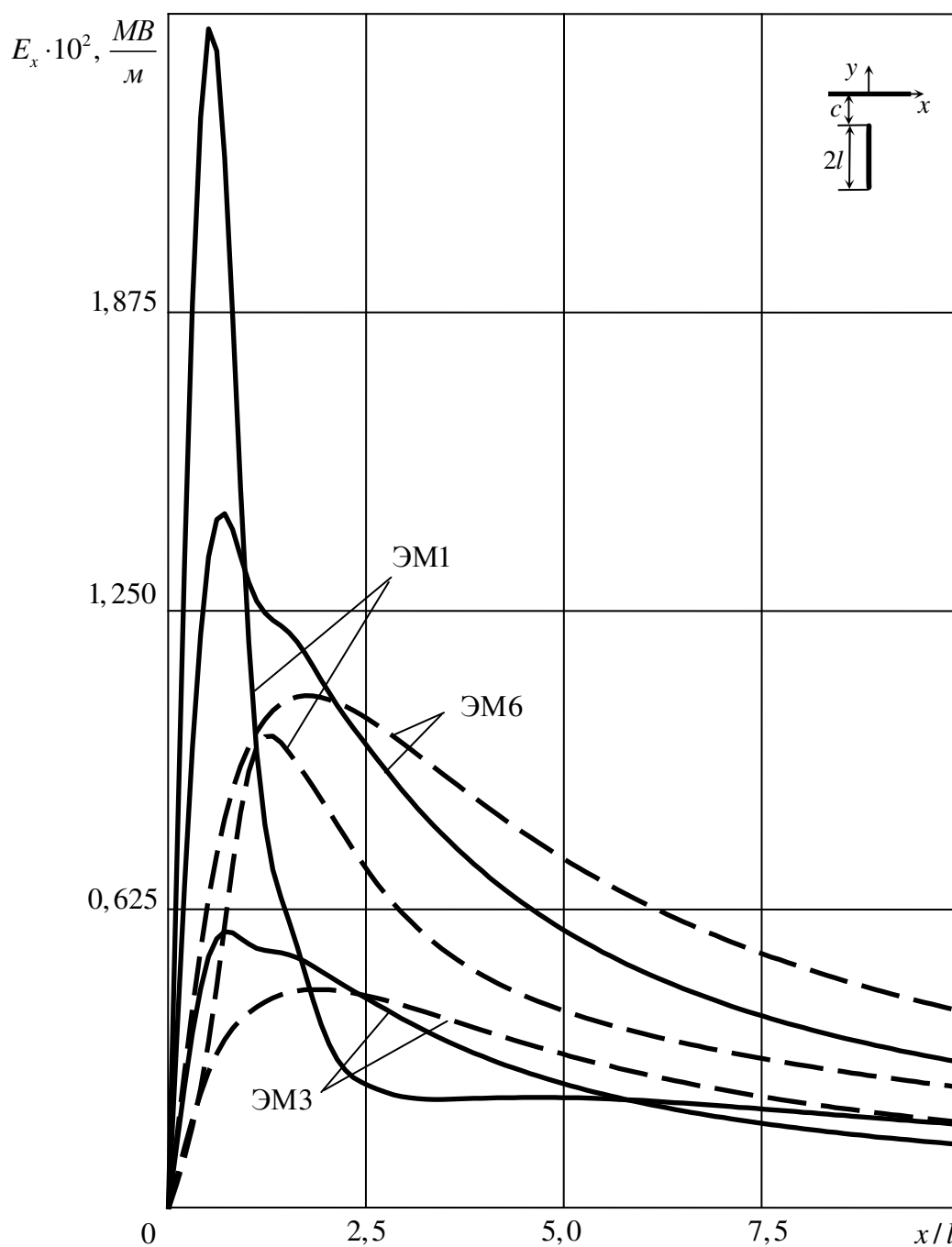


Рис. Б.27. Графики распределения напряженности E_x вблизи прямолинейной границы в полуплоскости с вертикальной трещиной из различных материалов при $c/l = 0,1$ (сплошные линии) и $c/l = 1$ (штриховые линии)

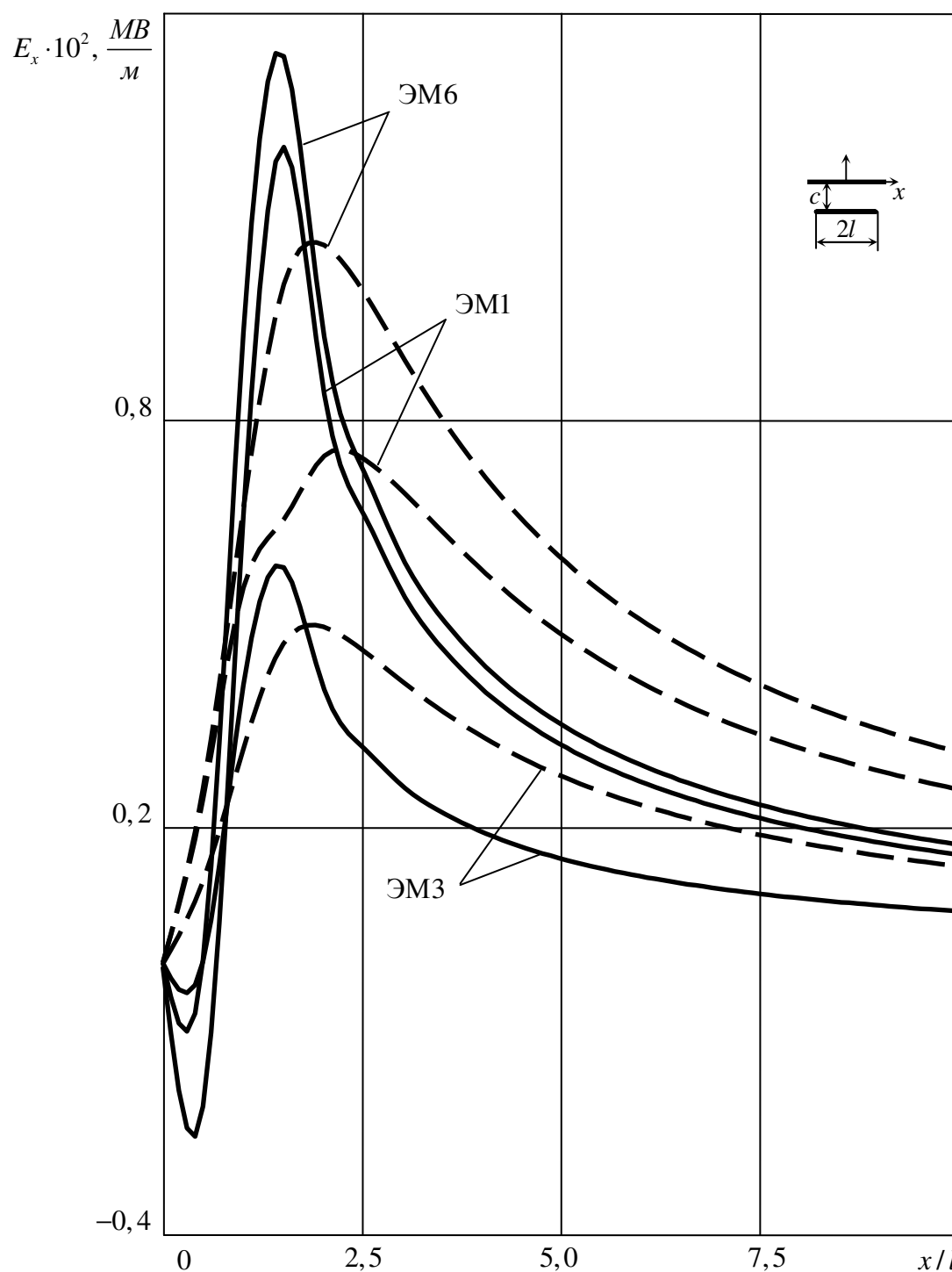
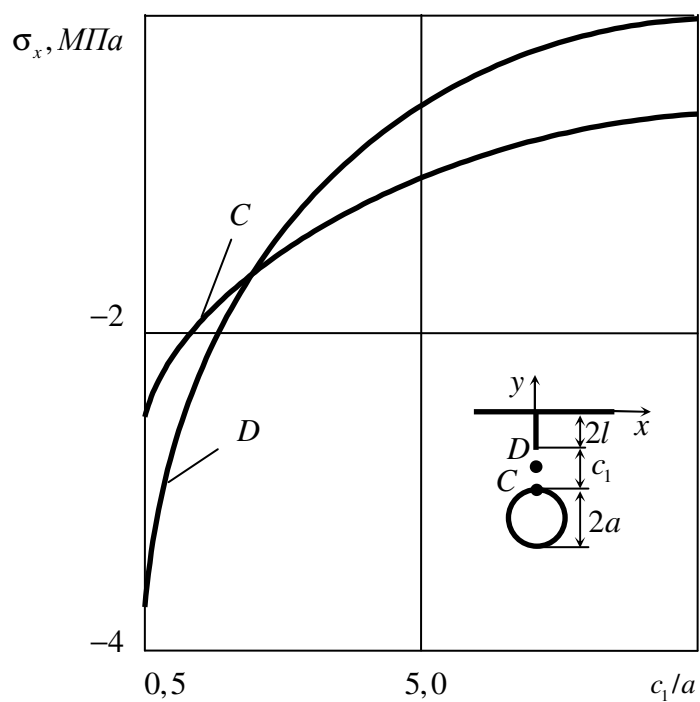
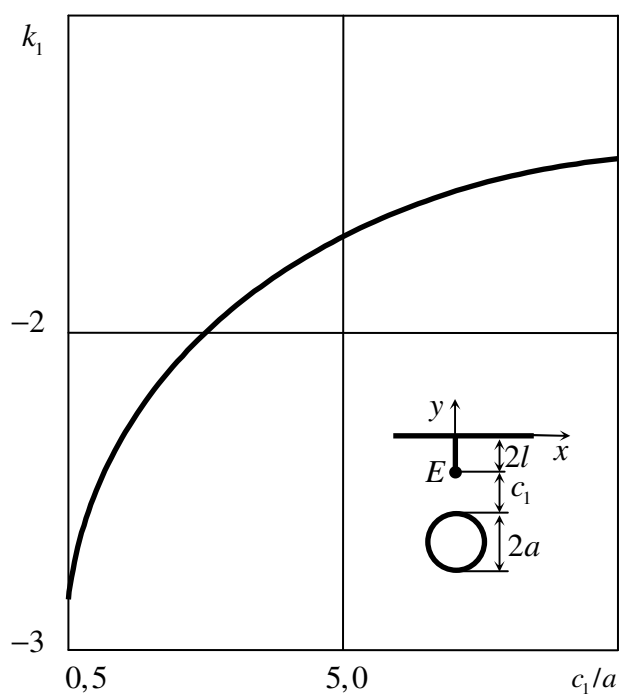


Рис. Б.28. Графики распределения напряженности E_x вблизи прямолинейной границы в полуплоскости с горизонтальной трещиной из различных материалов при $c = 0,1l$ (сплошные линии) и $c = l$ (штриховые линии)



а



б

Рис. Б.29. Графики изменения напряжений σ_x в точках перемычки между трещиной и отверстием и КИНИН k_1 для вершины трещины в полуплоскости из ММ9 с краевой трещиной и круговым отверстием

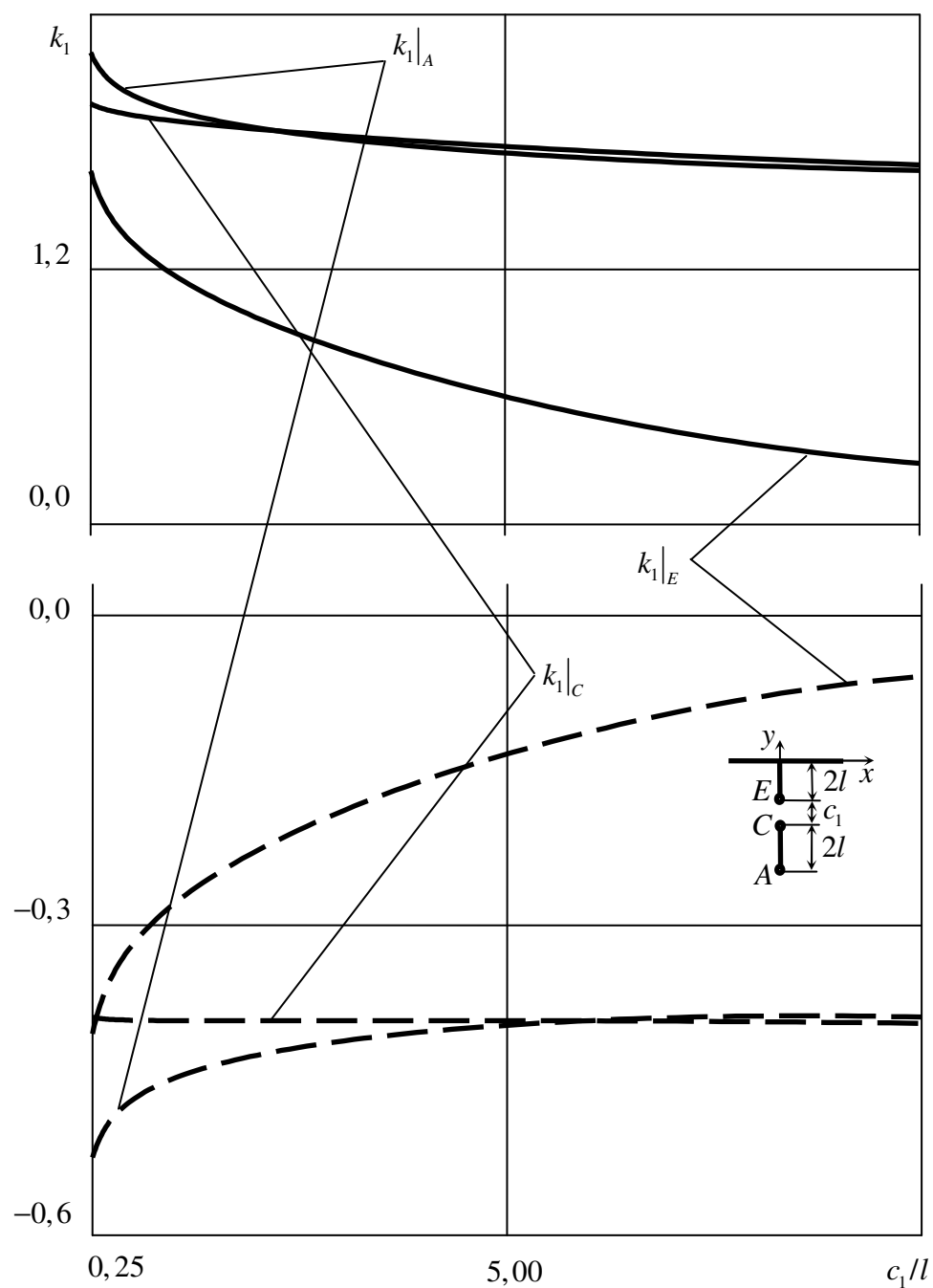


Рис. Б.30. Графики изменения КИН k_1 для вершин трещин в полуплоскости из ММ9 (сплошные линии) и ЭМ6 (штриховые линии) с краевой и вертикальной трещиной в зависимости от c_1/l