

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

на правах рукописи

БЕЛОУСОВ ИГОРЬ ВИКТОРОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ
ВБЛИЗИ КРАЯ СОБСТВЕННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ
СВЕТА В ПРЯМОЗОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора хабилитат физико-математических наук

Кишинев
1998

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
Обзор литературных данных	10
1 Взаимодействие резонансного лазерного излучения с носителями тока в полупроводниках	11
§ 1.1 Двухуровневая система в сильном резонансном поле	11
§ 1.2 Полупроводник в сильном резонансном поле	18
§ 1.3 Поглощение сильной электромагнитной волны. Эффект насыщения . .	23
§ 1.4 Рекомбинационное излучение и поглощение зондирующего сигнала в поле сильной электромагнитной волны	27
§ 1.5 Различные факторы, влияющие на квазиэнергетический спектр полу- проводника в сильном поле резонансной электромагнитной волны . . .	31
§ 1.6 Двухзонная модель полупроводника, описываемая “дираковским” урав- нением	34
2 Распространение интенсивного лазерного излучения в экситонной области спектра в прямозонных полупроводниках	37
§ 2.1 Экситонные возбуждения. Поляритоны	37
§ 2.2 Экситон-фононное взаимодействие.	42
§ 2.3 Неравновесный поляритонный конденсат	44

§ 2.4 Перестройка спектров поляритонного и фононного возбуждений в полупроводниках в присутствии сильной электромагнитной волны. Фोनоритоны	46
§ 2.5 Интенсивная поляритонная волна вблизи порога вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна	53
§ 2.6 Экситон-экситонное взаимодействие. Неустойчивость внеконденсатных мод	58

I Оптические и акустические свойства полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения 64

3 Волновые функции и квазиэнергетический спектр электронов и дырок прямозонного полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения	65
§ 3.1 Трансформационные свойства двухзонного уравнения	65
§ 3.2 Решение двухзонного уравнения во вспомогательной “системе отсчета”	68
§ 3.3 Решения двухзонного уравнения в исходной “системе отсчета”	72
§ 3.4 Точно решаемая модель	78
§ 3.5 Квазиэнергетический спектр	79
4 Рекомбинационное излучение прямозонного полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения	88
§ 4.1 Метод исключения фотонных амплитуд	89
§ 4.2 Представление Фарри	92
§ 4.3 Спектр рекомбинационного излучения	98
5 Поглощение слабого электромагнитного излучения прямозонным полупроводником в сильном поле резонансного лазерного излучения	108
§ 5.1 Вычисление коэффициента поглощения	109
§ 5.2 Спектр поглощения слабого сигнала	112

6	Магнитопоглощение акустической волны прямозонным полупроводником в сильном поле резонансного лазерного излучения	127
§ 6.1	Волновые функции и квазиэнергетический спектр	131
§ 6.2	Вычисление коэффициента поглощения ультразвука	136
§ 6.3	Спектр поглощения ультразвука	144
II	Кинетика частично когерентных поляритонов в прямозонных полупроводниках	151
7	Уравнения Швингера–Дайсона для неравновесной системы частично когерентных поляритонов	153
§ 7.1	Введение	153
§ 7.2	Гамильтониан системы	155
§ 7.3	Метод Келдыша	157
§ 7.4	Производящий функционал	161
§ 7.5	Уравнение Швингера	169
§ 7.6	Преобразование Лежандра	174
§ 7.7	Вершинные функции	180
§ 7.8	Скелетные диаграммы	183
§ 7.9	Использование вариационного метода для описания квантовых систем с нарушенной калибровочной симметрией	189
8	Квантовые кинетические уравнения для неравновесной системы частично когерентных поляритонов	193
§ 8.1	Уравнение для когерентной части поляритонного поля	193
§ 8.2	Уравнение для корреляционной функции	196
§ 8.3	Метод неравновесного статистического оператора	198
§ 8.4	Кинетические уравнения в исходных обозначениях	207
9	Немонотонный распад неравновесного поляритонного конденсата и	

временная динамика распределения внеконденсатных поляритонов в прямозонных полупроводниках	210
§ 9.1 Приближение самосогласованного поля	210
§ 9.2 Основные эволюционные уравнения	213
§ 9.3 Начальная стадия эволюции системы	217
§ 9.4 Численные результаты	220
§ 9.5 Заключительные замечания	228
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	232
ПРИЛОЖЕНИЯ	240
i Обозначения и система единиц, используемые в Части I	241
ii Волновые функции носителей заряда двухзонного полупроводника в поле интенсивной электромагнитной волны с переменной ампли- тудой и фазой	243
§ ii.1 Решение двухзонного уравнения во вспомогательной “системе отсчета”	244
§ ii.2 Решения двухзонного уравнения в исходной “системе отсчета”	249
§ ii.3 Точно решаемая модель	251
iii Деформационное взаимодействие электронов и дырок двухзонного полупроводника с акустическими фононами	254
iv Функциональная формулировка метода Келдыша для неравновес- ной системы, содержащей ферми-поля	256
§ iv.1 Гамильтониан системы	256
§ iv.2 Производящий функционал	258
§ iv.3 Использование универсальных обозначений	268
§ iv.4 Уравнения Швингера–Дайсона	271
§ iv.5 Преобразование Лежандра	277

ВВЕДЕНИЕ

Уникальные физические свойства полупроводников открывают большие возможности их практического применения. Транзисторы, интегральные схемы, квантовые генераторы и другие полупроводниковые приборы и устройства широко используются в различных областях науки и техники. В настоящее время все больший интерес вызывает исследование свойств полупроводников при больших уровнях оптического возбуждения, в частности, изучение свойств полупроводниковых материалов в присутствии интенсивных электромагнитных волн, генерируемых лазером.

Исследование оптических свойств полупроводников в присутствии сильного лазерного излучения можно отнести к новому виду спектроскопии — динамической когерентной спектроскопии полупроводников. В известном смысле, это следующий шаг после разработанной ранее спектроскопии полупроводников в квазистатических классических полях — электрическом (электромультипликационная спектроскопия), магнитном и поле механических напряжений. Эта новая динамическая когерентная спектроскопия интересна как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения.

Высокая интенсивность лазерного возбуждения приводит к проявлению новых физических явлений, что подтверждается экспериментами. Для их объяснения требуется привлечение новых теоретических методов и представлений.

Фундаментальный аспект проблемы связан с тем, что интенсивное лазерное излучение приводит не только к генерации в полупроводнике электронно-дырочных пар, экситонов, фононов, биэкситонов и т.д., но может также радикальным обра-

зом изменить основные свойства этих элементарных возбуждений. Это в свою очередь приводит к существенным изменениям оптических и акустических свойств полупроводника в определенных областях спектра. Именно с этим обстоятельством и связан прикладной аспект когерентной динамической спектроскопии. Речь идет о возможности контролируемого управления физическими характеристиками полупроводника посредством воздействия на него интенсивного лазерного излучения. В некоторых случаях свойства элементарных возбуждений полупроводника зависят от типа поляризации формирующего их лазерного поля (линейная, циркулярная или эллиптическая поляризации). Это явление открывает дополнительные возможности контролируемого управления.

С другой стороны, в результате взаимодействия интенсивного лазерного излучения с элементарными возбуждениями полупроводника меняются и свойства самого излучения. Поэтому, анализируя изменения, происходящие в фотонной подсистеме, можно извлекать важную информацию о фундаментальных характеристиках полупроводниковых кристаллов. Наиболее детальная информация может быть получена с помощью использования сверхкоротких импульсов лазерного излучения и исследования временной динамики системы “фотоны + элементарные возбуждения полупроводника”. Дело в том, что в результате различных процессов рассеяния элементарных возбуждений могут иметь место потеря когерентности взаимодействующего с ними лазерного излучения, истощение исходной лазерной моды, генерация фотонов на иной частоте и другие явления. Варьируя условия эксперимента (интенсивность и частота лазерного излучения, время задержки пробного импульса, время наблюдения и т.д.) можно “включать” те или иные механизмы рассеяния и тем самым получать информацию как о свойствах элементарных возбуждений полупроводника, так и о динамических константах, связанных с каждым из этих механизмов.

Данная диссертация посвящена некоторым вопросам динамической когерентной спектроскопии, включая

I. Исследование оптических и акустических свойств прямозонного полупровод-

ника при больших уровнях резонансного лазерного возбуждения электронов и дырок в зависимости от типа поляризации возбуждающего поля;

- II. Исследование динамики распада интенсивной поляритонной волны, возбуждаемой в прямозонном полупроводнике сверхкоротким импульсом когерентного лазерного излучения, и временной эволюции распределения рассеянных поляритонов.

Несколько слов о структуре диссертации. Она состоит из трех частей. Первая часть (Главы 1,2) представляет собой обзор литературных данных о различных физических явлениях, обусловленных воздействием резонансного лазерного излучения на систему носителей тока в прямозонном полупроводнике.

Вторая и третья части диссертации являются оригинальными. В Части II, объединяющей Главы 3–5, выполнено:

1. Исследование структуры квазиэнергетического спектра электронно-дырочных возбуждений прямозонного полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения в зависимости от типа поляризации возбуждающего поля.
2. Исследование спектра рекомбинационного излучения прямозонного полупроводника, подвергаемого воздействию сильного поля резонансного лазерного излучения в зависимости от температуры образца, типа поляризации возбуждающего поля и направления наблюдения.
3. Исследование спектра поглощения слабого электромагнитного излучения прямозонным полупроводником в сильном поле резонансного лазерного излучения в зависимости от температуры образца, типа поляризации как возбуждающего, так и тестирующего электромагнитных полей, а также от их взаимной ориентации.
4. Исследование квазиэнергетического спектра электронно-дырочных возбуждений прямозонного полупроводника и спектра поглощения ультразвука полупроводником в сильном постоянном магнитном поле и параллельном ему сильном

переменном электрическом поле, вызывающем резонансные переходы электрона между краем валентной зоны и краем зоны проводимости.

Часть III включает в себя Главы 6–8 и посвящена:

1. Микроскопическому выводу уравнений, описывающих временную эволюцию неравновесной системы частично когерентных поляритонов большой плотности в прямозонных полупроводниках.
2. Исследованию ранней стадии распада интенсивной поляритонной волны, возбуждаемой в полупроводнике сверхкоротким импульсом когерентного лазерного излучения, и временной эволюции распределения рассеянных поляритонов с учетом следующих наиболее быстропротекающих процессов: (1) рассеяние изначально когерентных поляритонов волны в другие моды, (2) возврат рассеянных поляритонов в исходную волну, (3) превращение пары рассеянных поляритонов в другую пару с тем же значением суммарного волнового вектора.

Основные результаты и выводы диссертации сформулированы в Заключение. Там же приведен список работ, в которых эти результаты были опубликованы, а также перечень конференций, совещаний и семинаров, на которых они были доложены.

В Приложениях i–iii поясняются обозначения и системы единиц, приведены некоторые громоздкие вычисления и формулы, используемые в основной части диссертации. Самостоятельный интерес представляет Приложение iv, в котором развитая в Главе 6 функциональная формулировка диаграммной техники Келдыша для неравновесных процессов распространяется на случай систем с нарушенной калибровочной симметрией, содержащих Ферми-поля.

Автор глубоко признателен своим учителям — Валентину Петровичу Олейнику и Святославу Анатольевичу Москаленко — за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения ее результатов. Автор благодарен всем участникам руководимого С. А. Москаленко научного семинара, на котором неоднократно докладывались результаты работы. Особую благодарность автор выражает своим коллегам и учени-

кам — Д.И.Абакарову, Ю. М. Швере, В. В. Серженту и В. В. Фролову, в соавторстве с которыми был выполнен ряд исследований.

Обзор литературных данных

Глава 1

Взаимодействие резонансного лазерного излучения с носителями тока в полупроводниках

§ 1.1 Двухуровневая система в сильном резонансном поле

Простую феноменологическую модель для описания основных процессов взаимодействия между электромагнитным излучением и атомами предложил Эйнштейн [1]. Теория Эйнштейна основана на некоторых физически разумных постулатах относительно поглощения и испускания фотонов системой с квантовыми уровнями. Эти постулаты могут быть строго обоснованы в рамках последовательного квантовомеханического рассмотрения процессов взаимодействия. Однако, в теории Эйнштейна квантовая механика явно не используется, за исключением того обстоятельства, что атомные энергетические уровни считаются дискретными, а энергия электромагнитного излучения является квантованной.

Предположим, что мы имеем N одинаковых атомов, каждый из которых обладает парой связанных состояний с энергиями E_1 и E_2 ($E_2 > E_1$), и пусть частота электромагнитного излучения

$$\hbar\omega_0 = E_2 - E_1. \quad (1.1)$$

Для такой системы возможны процессы с сохранением энергии, в которых фотоны с частотой ω_0 испускаются или поглощаются атомами, совершающими переходы меж-

ду указанными двумя состояниями. Числа N_1 и N_2 атомов с энергиями E_1 и E_2 будем называть населенностями соответствующих уровней.

Вероятности поглощения и испускания фотона определяются следующим образом. Если атом находится в состоянии 2, то имеется конечная вероятность в единицу времени A_{21} спонтанного перехода атома в нижнее состояние 1 с испусканием фотона, обладающего энергией $\hbar\omega_0$.

Если атом находился в состоянии 1, то в отсутствие какого-либо излучения частоты $\hbar\omega_0$ переход атома в состояние 2 невозможен, поскольку в таком переходе энергия бы не сохранялась. Однако, при наличии излучения с плотностью $W(\omega_0)$ переход вверх $1 \rightarrow 2$ может иметь место за счет поглощения фотона. Эйнштейн предположил, что скорость такого перехода пропорциональна $W(\omega_0)$ с коэффициентом пропорциональности B_{12} . Кроме того, он предположил, что присутствие излучения с плотностью энергии $W(\omega_0)$ изменяет (увеличивает) скорость перехода из верхнего состояния в нижнее. Этот излучательный процесс называется вынужденным излучением и характеризуется скоростью перехода $B_{21}W(\omega_0)$.

Коэффициенты Эйнштейна A_{21} , B_{12} и B_{21} не зависят от $W(\omega_0)$, определяются только природой атомов и в рассматриваемой теории служат феноменологическими константами. Знание коэффициентов Эйнштейна позволяет написать скоростные уравнения для населенностей N_1 и N_2 . Используя известный для случая теплового равновесия закон распределения плотности излучения по частотам $W_T(\omega_0)$ (формула Планка), Эйнштейну удалось найти связь между коэффициентами A_{21} , B_{12} и B_{21} .

Часто явный вид коэффициентов Эйнштейна получают используя полуклассическое описание взаимодействия излучения с веществом [2, 3]. При этом атом рассматривается как квантовая система, а электромагнитное поле — как классическая. Вычисления проводятся в рамках временной теории возмущений. Приведем полученные таким образом оценки для величин A_{21} , B_{12} и B_{21} :

$$A_{21} \sim \tau_R^{-1}, \quad B_{12}W(\omega_0) = B_{21}W(\omega_0) \simeq (\mathbf{d}_{12}\mathbf{E}_0)^2\tau_R, \quad (1.2)$$

где τ_R — радиационное время жизни состояния 2, \mathbf{d}_{12} — матричный элемент диполь-

ного момента перехода из состояния 1 в состояние 2, \mathbf{E}_0 — амплитуда электрической компоненты внешнего электромагнитного излучения.

При выполнении неравенства

$$A_{21} \lesssim B_{12}W(\omega_0) \quad (1.3)$$

внешнее электромагнитное поле изменяет населенности уровней атома. Изменение населенностей проявляется как уменьшение поглощения сильного внешнего излучения (эффект насыщения) [3]. Если теперь подействовать на систему слабым зондирующим сигналом, то окажется, что величина коэффициента поглощения этого сигнала существенно иная, чем в случае, когда внешнее поле отсутствовало [3]. Слабость зондирующего поля означает, что оно не приводит к насыщению перехода, а лишь вызывает вынужденные переходы между уровнями. Количественно это условие можно представить в виде неравенства

$$A_{21} \gg B_{12}W_1(\omega_1), \quad (1.4)$$

в котором $W_1(\omega_1)$ — плотность энергии зондирующего излучения частоты ω_1 .

В [4] рассмотрена задача о взаимодействии сильной электромагнитной волны с двухуровневым атомом с инверсной населенностью. Используются волновые функции для двухуровневой системы, находящейся в периодическом внешнем поле, полученные в резонансном приближении. Показано, что поле внешней волны вызывает уширение энергетических уровней. Оно увеличивается с $1/\tau_R$ до $\sqrt{(1/\tau_R)^2 + (\mathbf{d}_{12}\mathbf{E}_0)^2}$.

В [5, 6] показано, что сильное поле вызывает переходы между состояниями 1 и 2 с частотой $\varepsilon = |\mathbf{d}_{12}\mathbf{E}_0|$ (в случае точного резонанса (1.1)). Эти переходы проявляются при условии

$$\varepsilon \gg \frac{1}{\tau_R}, \quad (1.5)$$

которое является критерием сильного поля в задачах о резонансном взаимодействии квантовой системы с сильной электромагнитной волной. При описании явлений, имеющих место при резонансном воздействии сильной электромагнитной волны на вещество, использование представлений, предложенных Эйнштейном, оказывается

недостаточным. Сильная внешняя накачка способна существенно изменить не только населенность уровней, но и сами состояния квантовой системы. В этом случае под действием внешнего поля в системе возникают новые состояния, описывающие некоторые коллективные возбуждения. Если внешнее поле является периодическим во времени, естественным базисом для описания этих возбуждений являются состояния с определенной квазиэнергией. Понятие квазиэнергетических состояний, аналогичных блоховским состояниям для электрона, находящегося в периодическом в пространстве поле решетки кристалла, были введены В. И. Ритусом [7] и Я. Б. Зельдовичем [8]. Населенность квазиэнергетических уровней находят из уравнения для матрицы плотности системы, в котором релаксационные процессы учитываются, как правило, введением феноменологических диссипативных членов [5].

Для зондирования квазиэнергетических состояний может быть использован слабый электромагнитный сигнал. Когда его частота попадает в резонанс между квазиэнергетическими уровнями, это фиксируется как резкое изменение в поглощении. В работах [9, 10] изучен спектр поглощения слабого электромагнитного излучения двухуровневой системой в присутствии сильного лазерного излучения. Интерпретация полученных там результатов содержится в [11].

Согласно [11], двухуровневая система в присутствии резонансного лазерного излучения характеризуется четырьмя квазиэнергетическими состояниями, соответствующими четырем квазиэнергетическим уровням (высокочастотный эффект Штарка): $(E_1 - \alpha_1)$, $(E_1 + \alpha_2)$, $(E_2 - \alpha_2)$, $(E_2 + \alpha_1)$. Квазиуровни $(E_1 - \alpha_1)$ и $(E_1 + \alpha_2)$ возникают в результате снятия вырождения за счет электрон-фотонного взаимодействия состояний с энергиями E_1 и $(E_2 - \omega_0)$, а квазиуровни $(E_2 - \alpha_2)$ и $(E_2 + \alpha_1)$ — из-за снятия вырождения состояний с энергиями E_2 и $(E_1 + \omega_0)$.

Обычно при $\omega_0 < E_2 - E_1$ населенность уровней $(E_1 - \alpha_1)$ и $(E_2 - \alpha_2)$ больше, чем уровней $(E_1 + \alpha_2)$ и $(E_2 + \alpha_1)$. Поэтому слабый электромагнитный сигнал частоты ω_1 вызывает квантовые переходы $(E_1 - \alpha_1) \rightarrow (E_2 + \alpha_1)$, сопровождающиеся его поглощением, и переходы $(E_2 - \alpha_2) \rightarrow (E_1 + \alpha_2)$, при которых имеет место уси-

ние сигнала (см. Рис. 1.1). Переходы $(E_1 - \alpha_1) \rightarrow (E_2 - \alpha_2)$ и $(E_1 + \alpha_2) \rightarrow (E_2 + \alpha_1)$, соответствующие частоте $\omega_1 = \omega_2$, малоинтенсивны из-за близких заселенностей соответствующих уровней. Таким образом, появление в спектре как линий поглощения, так и линий усиления слабого сигнала легко понять, если обратиться к картине квазиэнергетического спектра системы, подвергаемой воздействию сильного периодического во времени поля.

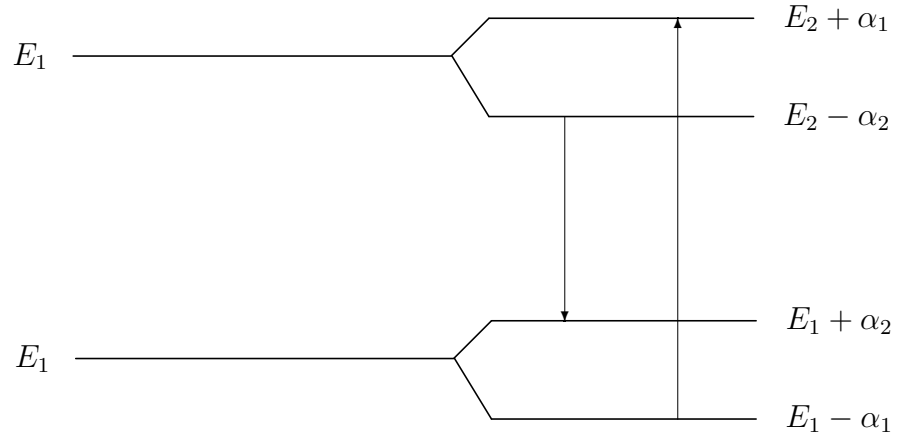


Рис. 1.1. Электронные переходы, вызываемые слабым зондирующим сигналом в двухуровневой системе в состоянии насыщения [11].

В работах [9, 12] исследован спектр спонтанного излучения двухуровневой системы в поле сильной внешней волны. Рассматривая возможные переходы между квазиуровнями $(E_1 - \alpha_1)$, $(E_1 + \alpha_2)$, $(E_2 - \alpha_2)$ и $(E_2 + \alpha_1)$, легко объяснить спектр резонансной флуоресценции [11]. Переходам $(E_2 + \alpha_1) \rightarrow (E_1 + \alpha_2)$ и $(E_2 - \alpha_2) \rightarrow (E_1 - \alpha_1)$ с испусканием кванта света $\omega_1 = E_2 - E_1 + \alpha_1 - \alpha_2$ соответствует центральный пик в спектре излучения (рэлеевское рассеяние). Правый и левый сателлиты определяются соответственно переходами $(E_2 + \alpha_1) \rightarrow (E_1 - \alpha_1)$ и $(E_2 - \alpha_2) \rightarrow (E_1 + \alpha_2)$ (см. Рис. 1.2). Они отстоят от центрального пика на величину $\sim |\mathbf{d}_{12}\mathbf{E}_0|$ (в случае точного резонанса (1.1)). При $\mathbf{d}_{11} = \mathbf{d}_{22} = 0$ переходы $(E_2 + \alpha_1) \rightarrow (E_2 - \alpha_2)$ и $(E_1 + \alpha_2) \rightarrow (E_1 - \alpha_2)$ дипольно запрещены.

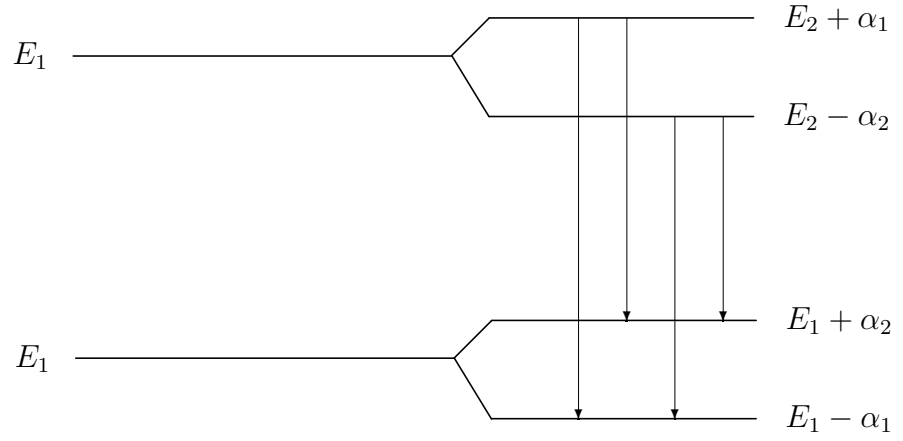


Рис. 1.2. Электронные переходы, вызывающие люминесценцию двухуровневой системы в состоянии насыщения [11].

До сих пор мы ограничивались рассмотрением двухуровневых систем с невырожденными уровнями энергии. Учет вырождения может привести к качественно новым физическим явлениям, стимулированным воздействием сильного резонансного излучения.

В [13] получено аналитическое решение задачи о перестройке мультиплета в переменном внешнем поле для случая, когда взаимодействие атома с полем сравнимо по величине с мультиплетным расщеплением и поэтому обычная теория возмущений не может быть использована. Задачу удастся решить в рамках следующих приближений:

1. Частота внешнего поля ω_0 значительно больше величины расщепления мультиплета в отсутствии поля δ : $\omega_0 \ll \delta$.
2. Предполагается, что рассматриваемый мультиплет локализован в спектре атома: если D — расстояние от мультиплета до ближайшего к нему уровня, не входящего в мультиплет и оптически связанного с ним, то $D \ll \delta$.
3. Если рассматриваемый мультиплет не резонирует на частотах ω_0 и $2\omega_0$ с другими атомными уровнями, то внешнее поле не перемешивает мультиплет с ближайшими к нему уровнями.

Среди рассмотренных в [13] случаев есть и задача о двух мультиплетах в поле частоты ω_0 , примерно равной расстоянию между мультиплетами — однофотонный резонанс. Согласно [13], у атома в резонансном поле увеличивается число наблюдаемых спектральных линий: если N — общее число уровней в обоих мультиплетах невозмущенного атома, то полное число квазиэнергетических уровней атома в поле есть $2N$, причем в каждом мультиплете возникает по N таких уровней. Например, в спектре спонтанного излучения атома, в области частот, близких к ω_0 , для каждого значения $|M|$ (M — магнитное квантовое число) должно наблюдаться $N(N - 1)$ спектральных линий $\Delta M = 0$, отличных по частоте от ω_0 .

Укажем, в каких случаях при воздействии света на атом может сказаться вырождение атомных уровней [5]. Правила отбора по магнитному квантовому числу для линейно- или циркулярно-поляризованного света ($\Delta M = 0$ или $\Delta M = \pm 1$), соответственно, приводят к тому, что в многоэлектронных атомах снятие вырождения может иметь место лишь в случае эллиптически-поляризованного излучения. Исключение составляет атом водорода. Из-за “случайного” вырождения по орбитальному моменту l возможны переходы с фиксированным значением ΔM в состояния с различными значениями l . Следовательно, в случае атома водорода эффекты, связанные с вырождением, возможны для любых типов поляризации электромагнитного поля.

Обратимся к другому примеру. В [14] исследовано зондирование слабым электромагнитным сигналом квазиэнергетического спектра экситона, взаимодействующего с сильным лазерным излучением, резонансным переходу $1s(\Gamma_5^+) \leftrightarrow 2p(\Gamma_4^-)$, для кристалла Cu_2O . Уровень $2p$ является вырожденным. Исследуемая система по своей природе существенно отличается от атомной. Экситон является короткоживущим элементарным возбуждением, которое необходимо каждый раз создавать каким-либо внешним источником. Слабое электромагнитное поле порождает экситон и одновременно зондирует его спектр т.к. поглощение слабого света сопровождается квантовыми переходами из основного состояния кристалла не на энергетические, а на соответствующие квазиэнергетические уровни. В [14] найден спектр квазиэнергий и

утверждается, что в спектре поглощения слабого света при квантовых переходах из основного состояния кристалла на вырожденный уровень $2p(\Gamma_4^-)$ в присутствии резонансного внешнего поля выделяются при $\mathbf{E}_0 \parallel \langle 001 \rangle$ три частоты, а при $\mathbf{E}_0 \parallel \langle 1\bar{1}0 \rangle$ — пять частот. В спектре рекомбинационного излучения при $\mathbf{E}_0 \parallel \langle 001 \rangle$ излучение имеет место на двух частотах, а при $\mathbf{E}_0 \parallel \langle 111 \rangle$ — на четырех.

Рассмотренные примеры показывают, что вырождение энергетических уровней может существенно сказаться на спектрах поглощения слабого сигнала и люминесценции, причем спектры поглощения и люминесценции существенно зависят от поляризации сильного поля.

§ 1.2 Полупроводник в сильном резонансном поле

Сравним свойства атомных двухуровневых систем со свойствами двухзонного полупроводника в присутствии сильного поля резонансной электромагнитной волны.

В первых работах [15, 16], как и в случае квантовых систем с дискретными уровнями, учитывалось, в основном, лишь изменение заселенности зон. Перестройка энергетического спектра носителей тока при этом не принималась во внимание. Инверсная заселенность зон может быть создана инжекцией носителей тока через p – n переход, а также электронным, либо оптическим возбуждением. При инжекции носителей через p – n переход толщина активного слоя сравнима с длиной волны излучения, в то время как возбуждение пучком быстрых электронов или оптическим излучением с энергией квантов, немного превышающей ширину запрещенной зоны, дает сравнительно большие активные области, толщина которых значительно превышает длину волны излучения. В последнем случае возбуждение можно считать однородным по объему. В работе [15] найдено приближенное выражение для коэффициента усиления излучения частоты ω_0 , вызывающего прямые межзонные переходы электрона. В случае наличия инверсной населенности, т.е. при $\mu_e + \mu_h > \varepsilon_g$ (ε_g — ширина запрещенной зоны полупроводника, μ_e и μ_h — квазиуровни Ферми электронов и дырок), коэффициент усиления равен нулю при $\omega_0 = \varepsilon_g$, $\omega_0 = \mu_e + \mu_h$ и достигает

максимума в интервале $\varepsilon_g < \omega_0 < \mu_e + \mu_h$, причем максимальное значение коэффициента поглощения растет с ростом $\mu_e + \mu_h$. Аналогичный результат имеет место и для двухуровневых систем — равенство населенностей приводит к нулевому коэффициенту поглощения (усиления). В отличие от двухуровневых систем, в которых ширина спектральных линий определяется параметрами однородного и неоднородного уширений, для полупроводника характерны широкие линии излучения с шириной $\sim k_B T$ (k_B — постоянная Больцмана, T абсолютная температура кристалла). Это связано с широким распределением носителей тока по энергиям, обусловленным их взаимодействием между собой (времена $\tau_{ee} \sim \tau_{hh} \sim 10^{-12}$ сек), с фононами (времена $\tau_{eL} \sim 10^{-9} - 10^{-10}$ сек), а также процессом излучательной рекомбинации (времена τ_R большие 10^{-9} сек). В [15] предполагалось, что интенсивность электромагнитного поля невелика и под действием быстрых процессов релаксации тепловое равновесие в электронно-дырочной подсистеме, характеризующееся μ_e и μ_h , успевает установиться быстрее, чем происходит рождение или аннигиляция электронно-дырочной пары во внешнем поле.

Та же задача более детально рассматривалась в [16]. В этой работе диссипативные процессы учитывались введением в уравнение для матрицы плотности электронно-дырочной подсистемы двух времен релаксации τ_1 и τ_2 . Первое из них связывалось с рекомбинацией, а второе — с релаксацией поляризации системы.

В [15, 16] не учитывалось изменение энергетического спектра полупроводника под действием внешнего излучения. Такое приближение справедливо только в случае, когда частота ε , с которой внешнее поле вызывает периодические переходы электрона из валентной зоны в зону проводимости и обратно, удовлетворяет условию

$$\varepsilon \lesssim \frac{1}{\tau}, \quad (1.6)$$

в котором τ — время релаксации носителей тока. Поэтому полученные в [15, 16] результаты справедливы лишь при не очень больших интенсивностях внешнего возбуждения, когда быстрые релаксационные процессы обеспечивают возможность использования теории возмущений по внешнему полю.

В работе [17] резонансная часть взаимодействия учитывалась точно уже в нулевом приближении. Для диагонализации нулевого гамильтониана были введены новые фермиевские операторы рождения и уничтожения квазичастиц Галицкого–Гореславского–Елесина. Спектр этих квазичастиц в случае одинаковых эффективных масс электрона и дырки определяется выражением

$$\varepsilon_{a,b}(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{p}) + \lambda^2}, \quad (1.7)$$

в котором

$$\xi(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = \omega_0 - \varepsilon_g, \quad \lambda = |\mathbf{d}\mathbf{E}_0|, \quad (1.8)$$

\mathbf{d} — матричный элемент дипольного момента для перехода между зонами проводимости и валентной. Индексы a, b связаны с возникновением двух сортов квазичастиц, обладающих одинаковым законом дисперсии. При разных эффективных массах электрона и дырки выражения для $\varepsilon_a(\mathbf{p})$ и $\varepsilon_b(\mathbf{p})$ отличаются друг от друга [18]. В спектре квазичастиц имеется энергетический зазор (щель) шириной 2λ (см. Рис. 1.3). Энергетический спектр электрона в валентной зоне (v) и зоне проводимости (c) в сильном поле резонансной электромагнитной волны изображен на Рис. 3.3 Главы 3. Появление щели в непрерывном спектре электронно-дырочных возбуждений аналогично известному эффекту расщепления дискретных уровней в резонансном поле (высокочастотный эффект Штарка).

Таким образом, сильное поле способно не только изменить заселенность зон, но и так же, как и в случае двухуровневых систем привести к радикальной перестройке спектра элементарных возбуждений. Однако, если в двухуровневых системах влияние релаксационных процессов можно учесть, вводя в рассмотрение времена только продольной и поперечной релаксаций, то при исследовании аналогичных явлений в полупроводниках необходим анализ большого числа релаксационных процессов, которые характеризуются различными временами релаксации (τ_{ee} , τ_{hh} , τ_{eL} , τ_R и т.д.). В [17] утверждалось, что для проявления щели в спектре электронно-дырочных воз-

буждений полупроводника необходимо выполнение неравенства

$$\lambda \gg \max \left[\frac{1}{\tau_R}, \frac{1}{\tau_{eL}}, \frac{1}{\tau_{ee}}, \frac{1}{\tau_{hh}} \right] \sim \frac{1}{\tau_{eL}}. \quad (1.9)$$

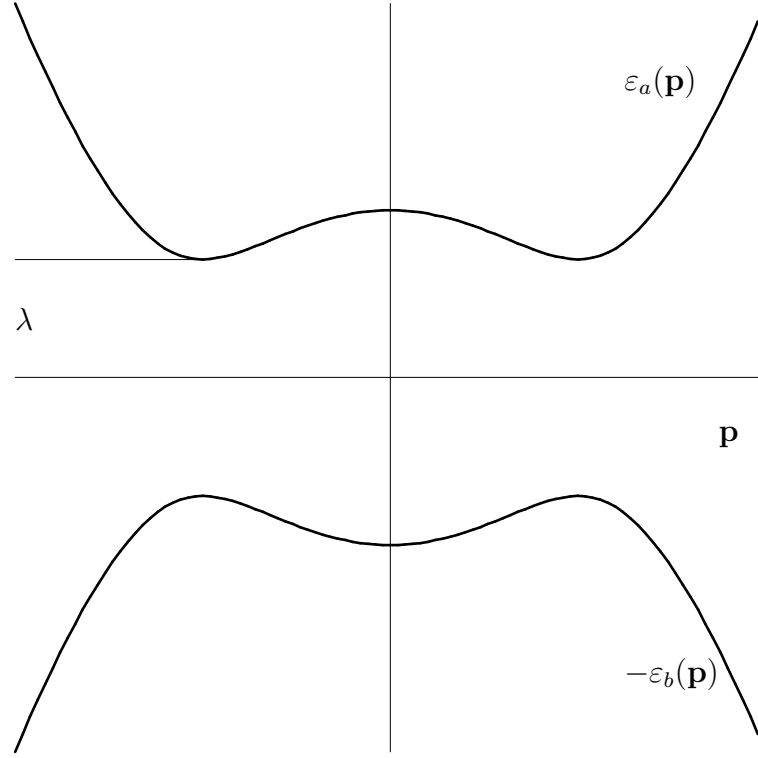


Рис. 1.3. Закон дисперсии квазичастиц Галицкого–Гореславского–Елесина [17].

В работе [18] была развита теория возмущений по взаимодействию носителей тока с фононами, причем в качестве нулевого приближения использовались состояния электронов и дырок полупроводника, находящегося в сильном поле резонансной электромагнитной волны. Были найдены уравнения Швингера–Дайсона для электронной функции Грина, вычислены спектр и затухание элементарных возбуждений. Согласно полученным результатам, при нулевой температуре электрон-фононное взаимодействие практически не влияет на величину щели в спектре, а затухание возбуждений мало. Утверждается, что возможность проявления щели определяется нера-

венством

$$\lambda \gg \frac{1}{\tau_R}, \quad (1.10)$$

более слабым, чем (1.9).

В [19] изучено влияние релаксационных процессов на взаимодействие электронов полупроводника с сильной электромагнитной волной при конечных температурах. С помощью диаграммной техники Келдыша для неравновесных систем [20] получены уравнения для функций Грина и функций распределения носителей тока с учетом излучательной рекомбинации и взаимодействия с фононами. Показано, что в определенном температурном интервале электрон-фононное взаимодействие практически не влияет на щель в спектре электронно-дырочных возбуждений. Поэтому для наблюдения эффектов, связанных с появлением щели в спектре, достаточно обеспечить выполнение условия (1.10).

В [21] исследована возможность спаривания электронов и дырок полупроводника в поле сильной резонансной волны. Показано, что основное состояние связанных электронно-дырочных пар является триплетным, в то время как спаривание в отсутствии поля не зависит от спиновой структуры связанного состояния.

“Устойчивость” щели относительно рассеяния электронов и дырок друг на друге и на фононах связано с тем, что в межзонных переходах участвуют электроны вблизи квазиуровня Ферми, для которых, как известно, затухание мало. Только рассеяние на заряженных примесях способно разрушить щель. Выполненное в [22] исследование влияния примесного рассеяния на спектр электронно-дырочных возбуждений полупроводника показало, что рассеяние на заряженных примесях приводит к разрушению коррелированной полем пары и при некоторой критической концентрации примесей щель исчезает. Аналогичная ситуация имеет место в сверхпроводниках с парамагнитными примесями.

В перечисленных работах взаимодействие электронов и дырок с полем электромагнитной волны учитывалось в резонансном приближении. Учет внутризонного движения носителей тока был впервые выполнен в [23, 24]. Согласно [23], внутри-

зонные переходы

1. Дают возможность многофотонной перестройки энергетического спектра электронов и дырок полупроводника.
2. Приводят к осциллирующей зависимости ширины щели от амплитуды волны.

В работе [24], в которой были получены близкие результаты, отмечается, что внутризонным движением можно пренебречь только в достаточно широкозонных полупроводниках с большими эффективными массами электронов и дырок.

Квазиэнергетический спектр полупроводника с предельно малой шириной запрещенной зоны ($\varepsilon_g \sim 10^{-2}\text{эВ}$) в поле лазерного излучения изучен в [25]. В данной задаче значения всех характерных параметров приближаются к единице и обычное резонансное приближение становится неприменимым. Используемый в [25] метод Хилла позволил изучить квазиэнергетический спектр полупроводника не только в узкой области \mathbf{p} -пространства, непосредственно прилегающей к резонансу, но и во всем \mathbf{p} -пространстве. Было показано, что сильное поле возбуждает все пространство волновых векторов. Имеет место непараллельный сдвиг v и c зон, причем ширина запрещенной зоны может уменьшиться на 40%.

§ 1.3 Поглощение сильной электромагнитной волны. Эффект насыщения

Важной характеристикой полупроводника в поле сильной электромагнитной волны служит ее коэффициент поглощения, который существенно зависит от интенсивности поля. Под действием сильной волны в полупроводнике может установиться состояние насыщения. Это состояние возникает, когда поле рождает электроны и дырки со скоростью, превышающей скорость излучательной рекомбинации. В этом случае происходит заполнение дна зоны проводимости электронами и потолка валентной зоны дырками. Такой характер заполнения зон влияет на вероятность квантовых переходов носителей тока между зонами под действием сильного поля и, соответственно, на

коэффициент поглощения этого поля. В пределе больших интенсивностей поля населенности зон, между которыми происходят переходы, уравниваются и коэффициент поглощения стремится к нулю. Существенное влияние на эффект насыщения оказывают различные процессы релаксации, а также внутризонное движение носителей тока, поскольку они изменяют распределения носителей внутри зон.

В [26] изучено поглощение сильной электромагнитной волны на основе уравнений для матрицы плотности с учетом релаксационных процессов. Резонансная часть взаимодействия носителей тока с полем волны включена в гамильтониан нулевого приближения. Взаимодействие электронно-дырочных возбуждений с оптическими фононами и излучательная рекомбинация учитываются в рамках теории возмущений. Рекомбинация и взаимодействие с фононами дают примерно одинаковый вклад в коэффициент поглощения, однако, при $2\lambda \approx \omega_{2\text{opt}}$ ($\omega_{2\text{opt}}$ — частота оптического фонона) вклад фононов стремится к нулю, и полный коэффициент поглощения уменьшается. Физически это связано с невозможностью гибели пары квазичастиц с образованием фонона из-за наличия щели в квазиэнергетическом спектре. В [26] найдены функции распределения квазичастиц при условии взаимодействия их только с фононами или только с фотонами (излучательная рекомбинация). Если не учитывать рекомбинацию, то функции распределения имеют фермиевский вид с равным нулю химическим потенциалом. Учет рекомбинации приводит к отличному от нуля химическому потенциалу. Это связано с тем, что в результате рекомбинации происходит изменение полного числа квазичастиц.

В [27] исследовано поглощение предельно сильного электромагнитного поля полупроводником в стационарном случае и нестационарное поглощение адиабатически включающегося поля. Приведенное в [27] рассмотрение не охватывает случай ультракоротких импульсов длительностью $\tilde{\tau} \sim \lambda^{-1} \ll \tau_{eL}$ и узкой области переднего фронта импульса. Но для коротких импульсов вклад в поглощение за счет области переднего фронта незначителен, а пренебрежение этим временным интервалом дает возможность использовать более простые уравнения. Показано, что в сильном поле

поглощение может существенно уменьшиться без заполнения электронами дна зоны проводимости. Дело в том, что прямые переходы электронов между зонами насыщены и поглощение (излучение) фотонов происходит за счет непрямых переходов с испусканием (поглощением) фононов, а вероятность непрямых переходов меньше вероятности прямых в $\lambda\tau_{eL}$ раз.

Уменьшение поглощения становится особенно заметным, если интенсивность поля достигает некоторого порогового значения, при котором величина щели 2λ превосходит максимальную частоту фонона $\omega_{2\max}$. В этом случае процессы релаксации подавляются, так как энергии фонона недостаточно для преодоления щели. В результате скорость отвода электронов от места их рождения уменьшается. Это приводит к дополнительному уменьшению поглощения и созданию инверсной населенности как внутри зоны, так и между зонами на частотах, превосходящих частоту внешнего поля.

Изучена роль рекомбинации. Предполагается, что $\tau_{eL} \ll \tau_R$, однако процесс рекомбинации определяет полное число квазичастиц и, если

$$2\lambda > \omega_{2\max} \quad (1.11)$$

($\omega_{2\max}$ — максимальная частота фонона), он может оказать существенное влияние на вид функции распределения квазичастиц. Показано, что при выполнении условия (1.11) влияние рекомбинации наиболее значительно, когда

$$\frac{\tau_{eL}}{\tau_R} \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \gg 1. \quad (1.12)$$

В данной диссертации предполагается, что имеет место неравенство

$$\frac{\tau_{eL}}{\tau_R} \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right)^2 \ll 1, \quad (1.13)$$

обратное (1.12), так что влиянием рекомбинации на функцию распределения можно пренебречь. Поэтому, если

$$2\lambda < \omega_{2\max}, \quad (1.14)$$

то стационарным решением кинетического уравнения будет фермиевская функция распределения с равным нулю химическим потенциалом.

В [28] наряду с резонансной частью взаимодействия сильной электромагнитной волны с носителями тока учтена, также, нерезонансная часть. Используется унитарное преобразование к представлению, в котором гамильтониан имеет не зависящую от времени диагональную часть, описывающую внутризонное движение носителей. Далее выделяется часть гамильтониана, учитывающая резонансные переходы. Эта часть приводит к установлению стационарного распределения квазичастиц. Нерезонансная часть гамильтониана вызывает колебания распределения в окрестности стационарного значения и поглощение энергии поля. Это поглощение определяется откликом системы, находящейся в стационарном состоянии, на малое возмущение.

Рассматриваемый в [28] механизм поглощения должен проявляться в области низких температур, где вклад электрон-фононного взаимодействия мал. При достаточно низких температурах числа заполнения фононов малы и можно предположить, что основную роль в процессе установления равновесия играет электрон-электронное рассеяние. Учет электрон-фононного взаимодействия привел бы к дополнительному поглощению, соответствующему обычным омическим потерям.

Для эффективного исследования поглощения сильного поля полупроводником могут быть использованы ультракороткие лазерные импульсы. Меняя длительность импульса можно “выключать” отдельные механизмы поглощения лазерного поля. В работе [29] изучено поглощение пикосекундных импульсов такой длительности, что за время действия импульса в системе свободных носителей тока устанавливается термодинамическое равновесие, но не успевают произойти процессы рекомбинации и релаксации носителей на фононах. Главный механизм релаксации связан с межэлектронными столкновениями. Поглощение происходит на переднем фронте импульса в процессе установления фермиевского распределения квазичастиц Галицкого–Горелавского–Елесина. Оценка значения поглощенной энергии приводит к результату, совпадающему с известным из эксперимента.

§ 1.4 Рекомбинационное излучение и поглощение зондирующего сигнала в поле сильной электромагнитной волны

Одним из наиболее распространенных методов изучения неравновесных состояний в полупроводниках является исследование спектров рекомбинационного излучения и поглощения слабых световых сигналов. Спектры рекомбинационного излучения и поглощения зондирующего сигнала зависят от зонной структуры электронов и дырок, их энергетического распределения.

Выясним основные особенности спектров излучения и поглощения в случае, когда интенсивность внешнего поля недостаточна для проявления эффектов, связанных с перестройкой энергетического спектра носителей тока. В работе [16] выполнен расчет межзонного поглощения слабого электромагнитного поля частоты ω_1 в полупроводниках, возбуждаемых внешней оптической накачкой частоты ω_0 . Показано, что для частот $\varepsilon_g < \omega_1 < \varepsilon_g + \Delta(|\mathbf{E}_0|)$ поглощение становится отрицательным, причем на частоте $\omega_1 = \omega_0$ коэффициент поглощения обращается в нуль (см. Рис. 1.4.). Здесь $\Delta(|\mathbf{E}_0|) > 0$ — некоторый параметр, описывающий положение края полосы поглощения. Он растет при увеличении интенсивности накачки. Найдено значение поля насыщения, при котором $\Delta(|\mathbf{E}_0|)$ максимально ($\Delta_{max}(|\mathbf{E}_0|) = \omega_0 - \varepsilon_g$).

В [30] найден спектр спонтанного и стимулированного излучения полупроводника с инверсной заселенностью зон. Показано, что спектр излучения представляет собой асимметричную колоколообразную кривую, расположенную в области $\omega_1 > \varepsilon_g$. При температуре $T = 0$ она резко обрывается на частоте $\omega_1 = \omega_0$. В случае, когда возбуждающее поле состоит из одной моды частоты ω_0 , на частоте $\omega_1 = \omega_0$ имеется острый пик (см. Рис. 1.5).

Эти результаты существенно изменяются в случае, когда внешнее поле является достаточно сильным — таким, что в квазиэнергетическом спектре носителей тока возникает щель шириной 2λ . В работе [17] изучено поглощение слабой электромагнитной волны и показано, что при $\omega_1 < 2\lambda$ коэффициент поглощения резко уменьшается.

Это связано с кинематическим запретом процесса рождения квазичастиц фотоном слабого поля из-за наличия щели в квазиэнергетическом спектре (Рис. 1.4).

В [31] исследован спектр поглощения слабой электромагнитной волны частоты $\omega_1 \approx \omega_0$. Показано, что при $\omega_1 > \omega_0 + 2\lambda$ коэффициент поглощения положителен, а при $\omega_1 < \omega_0 - 2\lambda$ — отрицателен (т.е. имеет место усиление слабого сигнала). Из-за наличия щели в спектре квазиэнергии, поглощение отсутствует в области $\omega_0 - 2\lambda < \omega_1 < \omega_0 + 2\lambda$. В точках $\omega_1 = \omega_0 \pm 2\lambda$ коэффициент поглощения имеет резонансные особенности (Рис. 1.4). Их появление связано с тем, что плотность состояний квазичастиц при $p = \sqrt{m\Delta}$ обращается в бесконечность.

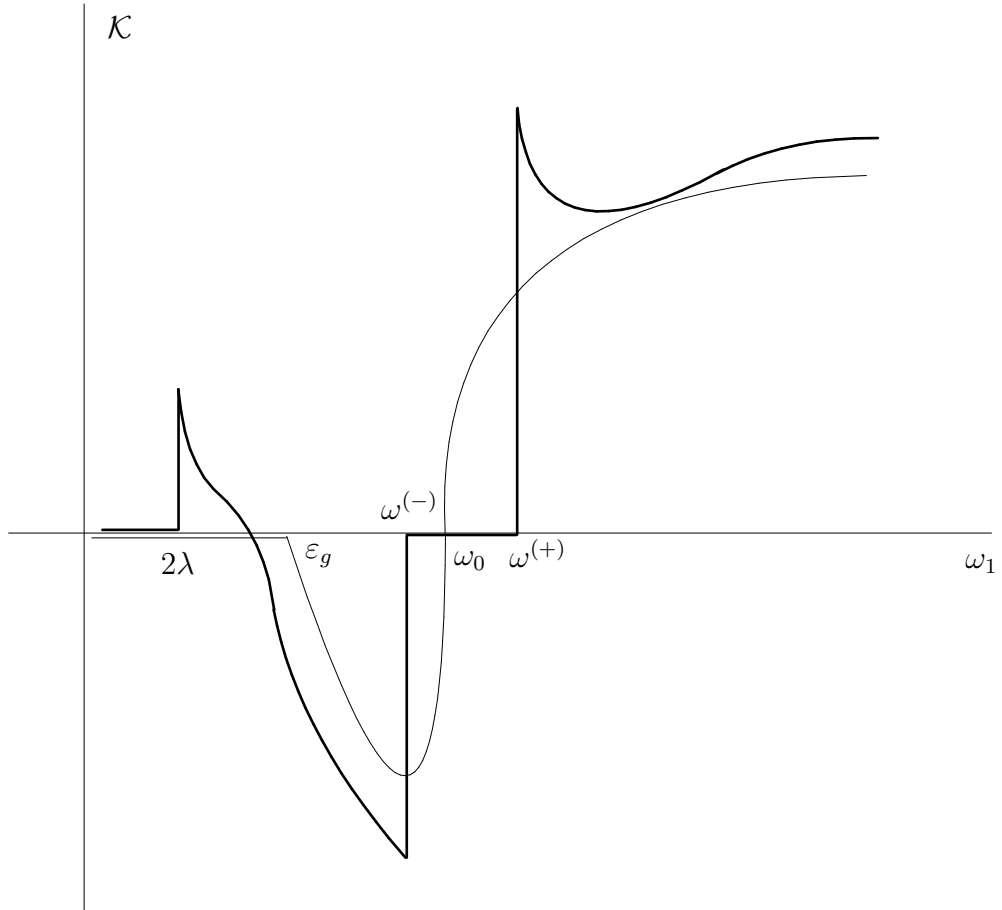


Рис. 1.4. Зависимость коэффициента поглощения слабого электромагнитного сигнала полупроводником в состоянии насыщения согласно результатам работ [16] (тонкая сплошная линия) и [31] (жирная сплошная линия); $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm 2\lambda$.

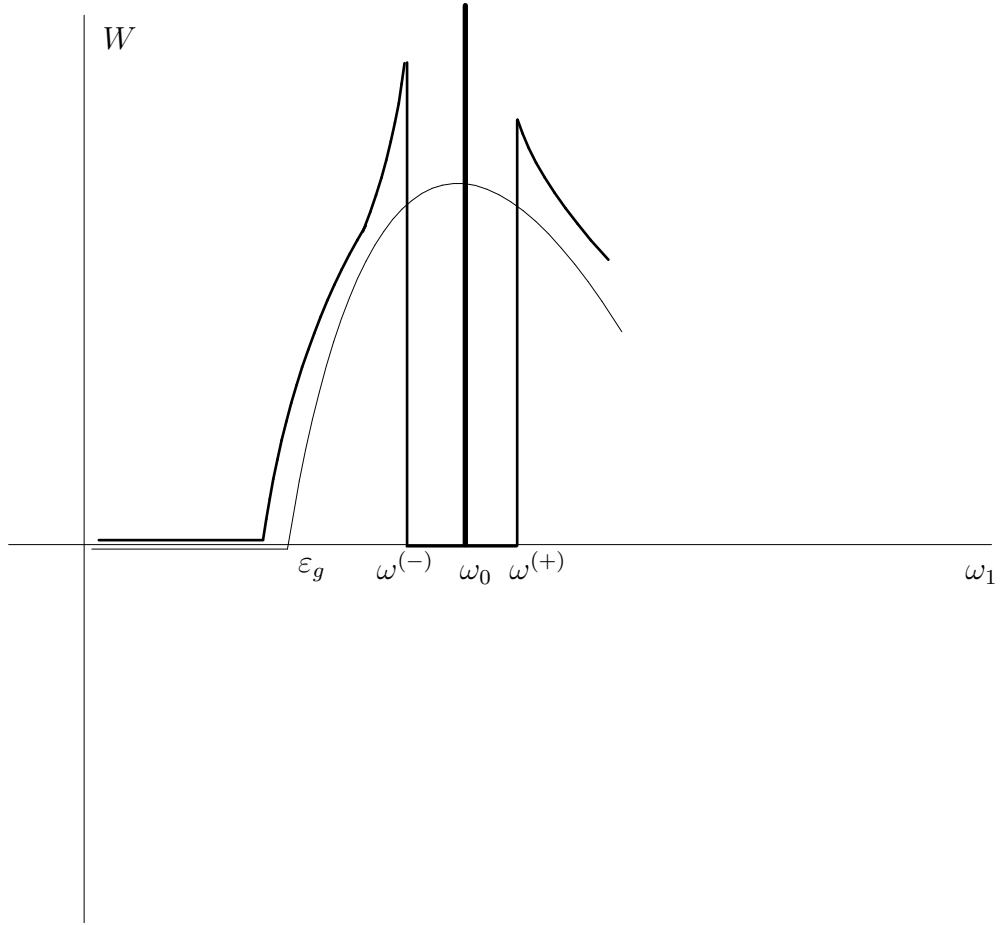


Рис. 1.5. Спектр люминесценции полупроводника в состоянии насыщения согласно результатам работ [30] (тонкая сплошная линия) и [32] (жирная сплошная линия); $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm 2\lambda$.

В [32] изучен спектр спонтанного рекомбинационного излучения полупроводника, находящегося в поле сильной электромагнитной волны в состоянии насыщения. Показано, что интенсивность рекомбинационного излучения резко уменьшается в области частот, близких к частоте сильной волны на интервале, определяемом величиной щели. На самой частоте ω_0 возникает узкий пик излучения (Рис. 1.5). Резонансные пики при $\omega_1 = \omega_0 \pm 2\lambda$ обусловлены особенностями плотности состояний квазичастиц. При $|\omega_1 - \omega_0| \gg 2\lambda$ (т.е. вдали от резонанса) спектр излучения совпадает с

полученным в [30].

В [33] исследовано влияние внутризонного движения носителей тока на коэффициент межзонного поглощения светового сигнала полупроводником в поле сильной электромагнитной волны. Показано, что внутризонное ускорение электронов и дырок приводит к осцилляциям как края поглощения, так и величины коэффициента поглощения.

В работе [34] показано, что учет конечности длины волны света может существенно изменить форму кривой поглощения слабого электромагнитного сигнала и спектральное распределение рекомбинационного излучения полупроводника в состоянии насыщения, приводя к уширению резонансных пиков. Характер этих изменений определяется отношением величины $l_k = v_k / |\mathbf{E}_0| d$ к длине волны λ . Здесь l_k — расстояние, пролетаемое электроном за время перехода между валентной зоной и зоной проводимости под действием сильного поля, v_k — скорость электрона. В случае, когда $\beta = l_k / \lambda \ll 1$, на частотах, граничащих с полосой прозрачности, а в случае, реализуемом в полупроводниковом лазере с оптическим возбуждением, на частоте генерации, коэффициент поглощения и спектральное распределение излучения имеют максимум, высота которого сильно анизотропно зависит от угла Θ_0 между направлениями распространения слабой и сильной электромагнитных волн. Согласно [34], наиболее приемлемой для экспериментальной проверки полученных в [31, 32] результатов является такая “геометрия” эксперимента, в которой сильная и слабая волны распространяются в одном направлении.

Результаты теоретических исследований [31, 32, 34] были качественно подтверждены в экспериментальных работах [35, 36].

§ 1.5 Различные факторы, влияющие на квазиэнергетический спектр полупроводника в сильном поле резонансной электромагнитной волны

Рассмотрим влияние на свойства полупроводников в сильном поле резонансной электромагнитной волны таких факторов, как магнитное поле, квантовый размерный эффект, спиновое вырождение энергетических зон, наличие в запрещенной зоне локальных примесных уровней.

В работе [37] найден коэффициент поглощения слабого электромагнитного излучения полупроводником в присутствии сильной электромагнитной волны в квантующем магнитном поле. Рассмотрена конфигурация, в которой вектор напряженности электрического поля волны параллелен магнитному полю. Главную роль в установлении состояния насыщения играют резонансные переходы электронов между несколькими парами подзон Ландау валентной зоны v и зоны проводимости c . Число подзон \tilde{N} , “перепутываемых” полем сильной волны, определяется формулой (ω_H — циклотронная частота)

$$\tilde{N} = \frac{\omega_0 - \Delta - \omega_H}{2\omega_H}. \quad (1.15)$$

Энергетический спектр электронов и дырок дается выражением

$$E_n(p_z) = \frac{\omega_0}{2} + \text{sign } \xi_n(p_z) \sqrt{\xi_n^2(p_z) + \lambda^2}, \quad \xi_n(p_z) = \frac{p_z^2}{2m} + \omega_H \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega_0}{2}, \quad (1.16)$$

где n — номер подзоны Ландау ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Взаимодействие полупроводника со слабой волной частоты ω_1 учитывается по теории возмущений, а с сильной волной — так же как и в [17]. Зависимость коэффициента поглощения слабой волны от ее частоты является немонотонной и обладает особенностями типа обратного корня. Имеются области прозрачности, определяемые неравенствами

$$\omega_1 \leq \max \left\{ \sqrt{\omega_H^2 + 4\lambda^2}, \frac{1}{2} \left[\sqrt{(\omega_0 - \Delta - \omega_H)^2 + 4\lambda^2} + \sqrt{(\omega_0 - \Delta - 3\omega_H)^2 + 4\lambda^2} \right] \right\},$$

$$\omega_1 \leq 2\lambda, \quad |\omega_1 - \omega_0| \leq 2\lambda.$$

Неравенства $2\lambda \leq \omega_1 - \omega_0 \ll \omega_0$ определяют область усиления слабого поля.

Другая возможность радикально повлиять на энергетический спектр носителей тока полупроводника заключается в использовании тонких пленок, в которых имеют место квантовые размерные эффекты. В таких системах энергия носителей зависит от двумерного волнового вектора \mathbf{k}_{\parallel} и квантового числа n , пробегающего дискретный ряд значений. В работе [38] изучен квазиэнергетический спектр и найдены волновые функции носителей тока в полупроводниковой пленке в поле сильной электромагнитной волны. Воздействие сильной волны приводит к возникновению щели в размерно-квантованном спектре, величина которой зависит как от напряженности электрической компоненты волны, так и от толщины пленки.

В [39] рассмотрено поглощение слабой электромагнитной волны в присутствии сильной в тонких полупроводниковых пленках. Как и в объемном случае [31], имеются области усиления и поглощения слабого сигнала, а также область прозрачности в окрестности частоты $\omega_1 \sim \omega_0$. Если щель анизотропна, то и коэффициент поглощения зависит от угла между напряженностями сильной и слабой волн.

В случае, когда частота сильной электромагнитной волны меньше ширины запрещенной зоны полупроводника, содержащего примесные центры, могут иметь место резонансные электронные переходы типа “примесь–зона” [40]. Согласно [40], переходы из связанного состояния в непрерывный спектр приводят к тому, что дискретный уровень донора (акцептора) превращается в минизону, ширина которой порядка величины образовавшейся в валентной зоне (зоне проводимости) квазиэнергетической щели.

Если в полупроводнике имеются одновременно и доноры и акцепторы, то сильная электромагнитная волна может связать два локализованных состояния. В [41] изучено воздействие резонансной электромагнитной волны на слаболегированный полупроводник в случае, когда концентрация акцепторов существенно превосходит концентрацию доноров. Рассматриваются электронные переходы между основными состояниями мелких доноров и акцепторов. Согласно полученным результатам, име-

ет место высокочастотный эффект Штарка — квазиэнергетические уровни донора и акцептора “отталкиваются” под действием поля. Меняя интенсивности внешнего поля, можно варьировать энергию активации примесей. Поскольку в полупроводнике имеется определенное распределение примесных пар по расстоянию между ними, штарковские сдвиги, соответствующие различным парам, будут отличаться по величине. Это приводит к образованию “примесной зоны”. Указанное явление аналогично неоднородному уширению атомных уровней в сильном световом поле.

В [42] исследовано примесное поглощение слабого электромагнитного сигнала с энергией кванта порядка разности энергий между основными состояниями донора и акцептора в условиях межпримесного резонанса. Показано, что аналогично двухуровневым атомным системам, кроме межпримесного поглощения имеет место усиление слабой волны на другой частоте. Рассмотрен случай не слишком глубоких, но и не слишком мелких примесей. Отмечается существенная зависимость коэффициента межпримесного поглощения от угла между векторами поляризации сильной и слабой волн.

Следующий важный фактор, приводящий к принципиально новым оптическим явлениям — это спиновое вырождение энергетических зон полупроводника. Электрическая компонента поля волны влияет на спиновые состояния носителей тока через посредство спин-орбитального взаимодействия. В [43] изучена оптическая ориентация электронов полупроводника в поле сильной электромагнитной волны на примере простой двухзонной модели, в которой валентная зона и зона проводимости являются двукратно вырожденными по спину. Благодаря спин-орбитальному взаимодействию, поляризованная по кругу электромагнитная волна вызывает межзонные переходы с изменением спина электрона. В используемой в [43] модели матричные элементы межзонных переходов с изменением спина вводятся как заданные параметры. Согласно полученным результатам, для полупроводника в состоянии насыщения при накачке на край зоны идеальное значение величины поляризации составляет 39%. Это значение меньше, чем полученное с помощью теории возмущений (50%). Величи-

на спиновой поляризации оказывается, однако, зависящей от положения квазиуровня Ферми и в полупроводниках p -типа может приблизиться к 100%.

§ 1.6 Двухзонная модель полупроводника, описываемая “дираковским” уравнением

Простая модель полупроводника, состоящего из двух двукратно вырожденных зон, в которой учтено спин-орбитальное взаимодействие, описывается уравнением, формально имеющим вид уравнения Дирака для биспинорной функции $\psi(\mathbf{r}, t)$:

$$\left\{ i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + s\gamma \left[i \nabla - \frac{e_0}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] - ms^2 \right\} \psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.17)$$

Здесь m — эффективная масса электрона (дырки), e_0 — его заряд, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — потенциал внешнего электромагнитного поля, γ_μ — матрицы Дирака ($\mu = 0, x, y, z$), параметр $s = (\varepsilon_g/2m)^{1/2}$ имеет смысл матричного элемента скорости межзонного перехода. Эта модель использовалась в работах [44, 45, 46] для интерпретации различных физических явлений в узкозонных полупроводниках PbS , $PbSe$, $PbTe$ в ситуациях, когда по каким-либо причинам энергия носителей тока в электронной и дырочной зонах имеет такой же порядок величины, что и ширина запрещенной зоны. В этом случае возникает ряд специфических эффектов. Их теоретическое описание осложняется тем, что электронная и дырочная зоны не могут рассматриваться изолированно друг от друга. В работе [44] на основе модели (1.17) исследован спектр локальных примесных уровней, энергия связи которых сравнима с шириной запрещенной зоны полупроводника. В работах [45, 46] на основе модели (1.17) изучены электрические и оптические свойства полупроводника в скрещенных электрическом и магнитном полях.

В работах [47, 48] модель полупроводника, описываемая уравнением (1.17), успешно использовалась для интерпретации экспериментальных данных по магнитопоглощению периодического электрического поля. В результате было устранено существовавшее длительное время расхождение между теорией и экспериментом. Оно состояло в том, что теория, развитая ранее в [49] для широкозонных полупроводников, предсказывала появление максимумов в магнитопоглощении только для переходов с

нечетным числом фотонов, в то время как такие максимумы отчетливо проявляются в экспериментах с четнофотонным, в частности, двухфотонным поглощением.

В [50] изучено межзонное магнитопоглощение слабой электромагнитной волны в присутствии сильной в узкозонном полупроводнике. Показано, что в достаточно сильном магнитном поле, когда расстояние между уровнями Ландау становится величиной одного порядка с шириной запрещенной зоны, сингулярности в спектре многофотонного поглощения, имеющие вид обратного корня, появляются при любой четности полного числа поглощенных фотонов (в отличие от широкозонных полупроводников).

В Части I данной диссертации уравнение (1.17) используется для исследования оптических свойств двухзонного полупроводника в сильном поле резонансной электромагнитной волны, описываемом векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = a [\cos(\omega_0 t - k_z z), G \sin(\omega_0 t - k_z z), 0]. \quad (1.18)$$

Здесь $a = cE_0/\omega_0 = \text{const} > 0$ — амплитуда потенциала, k_z и

$$\omega_0 = \varepsilon_g + \Delta \quad (|\Delta| \ll \varepsilon_g) \quad (1.19)$$

— соответственно волновой вектор и частота волны. Параметр G определяет тип поляризации поля (1.18)¹: при $0 < G < 1$ волна является эллиптически правополяризованной, а при $-1 < G < 0$ — эллиптически левополяризованной; значения $G = 0$ и $G = \pm 1$ соответствуют линейной и циркулярной поляризациям.

В Главе 3 найдены волновые функции и изучен квазиэнергетический спектр носителей тока двухзонного полупроводника во внешнем поле (1.18), (1.19). Использование модели, описываемой уравнением (1.17) и, таким образом, включающей в себя эффекты, связанные со спин-орбитальным взаимодействием, приводит к существенной зависимости квазиэнергетического спектра электронно-дырочных возбуждений полупроводника от типа поляризации внешней волны.

В Главах 4 и 5 найденные волновые функции используются для исследования спектров рекомбинационного излучения электронно-дырочных возбуждений и по-

¹В диссертации используется левая декартова система координат

глощения слабого электромагнитного сигнала полупроводником в состоянии насыщения. Изучена зависимость этих спектров от температуры образца и типа поляризации сильного поля.

В Главе 6 найдены волновые функции и изучен квазиэнергетический спектр электронно-дырочных возбуждений двухзонного полупроводника, описываемого уравнением (1.17), в постоянном магнитном и параллельном ему переменном электрическом полях. Исследовано поглощение ультразвука в такой системе.

Все результаты, полученные в Главах 3–6, справедливы, строго говоря, только для физической ситуации, в которой сильное электромагнитное поле вызывает резонансные переходы между краями двух двукратно вырожденных по спину зон. Как уже отмечалось, такая ситуация может быть реализована в узкозонных полупроводниках PbS , $PbSe$, $PbTe$. Однако, приведенное в этих главах исследование выявляет важную роль правил отбора при изучении резонансного взаимодействия носителей тока полупроводника с сильным полем резонансной электромагнитной волны произвольной поляризации. Оно формирует физические представления, которые в дальнейшем могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных, полученных при исследовании аналогичных явлений в полупроводниках с более сложной структурой (симметрией) зон.

В заключение данной главы отметим монографию [51] и сравнительно недавний обзор [52], содержащие подробное обсуждение физических явлений, обусловленных резонансным воздействием сильного лазерного излучения на систему носителей тока прямозонного полупроводника.

Глава 2

Распространение интенсивного лазерного излучения в экситонной области спектра в прямозонных полупроводниках

§ 2.1 Экситонные возбуждения. Поляритоны

В современной физике конденсированного состояния понятию экситона принадлежит исключительно важная роль в описании широкого круга разнообразных физических явлений. Исходная концепция экситона, выдвинутая в 1931 году Я. И. Френкелем [53], рассматривала его как локализованное на атоме элементарное электронное возбуждение, способное распространяться в диэлектрике благодаря межатомному взаимодействию. Подобная модель достаточно хорошо применима к органическим соединениям и молекулярным кристаллам. В то же время в большинстве диэлектриков и полупроводников реализуется в известном смысле обратный случай экситона — связанного двухчастичного электронно-дырочного комплекса, обладающего сравнительно большим радиусом, значительно превышающим постоянную решетки кристалла [54].

Рассмотрим прямозонный полупроводник с шириной запрещенной зоны ε_g . В изотропной модели дисперсия электронов и дырок вблизи экстремумов зон в приближении эффективной массы имеет вид [55, 56]

$$E_e = \varepsilon_g + \frac{\hbar^2 p^2}{2m_c}, \quad E_h = \frac{\hbar^2 p^2}{2m_v}. \quad (2.1)$$

Здесь m_c и m_v — эффективные массы электрона в зоне проводимости и в валентной зоне, соответственно, \mathbf{p} — его квазиимпульс. Благодаря разноименности зарядов электрон и дырка притягиваются друг к другу. Потенциал притяжения в случае, если расстояние между электроном и дыркой значительно превышает постоянную решетки кристалла, имеет вид

$$U_{e-h}(r) = -\frac{e^2}{\epsilon r}, \quad (2.2)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость кристалла. В соответствии с видом потенциала (2.2) рассматриваемая система двух частиц обладает дискретным спектром связанных состояний водородоподобного типа с энергиями связи

$$E_{ex}^b = -\frac{e^4 \mu}{2\hbar^2 \epsilon^2 n^2}, \quad \mu = \frac{m_c m_v}{m_c + m_v} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.3)$$

При этом такой связанный электронно-дырочный комплекс — экситон — может обладать трансляционным движением с определенным значением квазиимпульса \mathbf{p} , проявляя себя как частица с энергией

$$E_p^{ex} = \epsilon_g + E_{ex}^b + \frac{\hbar^2 p^2}{2M_{ex}}, \quad M_{ex} = m_c + m_v. \quad (2.4)$$

Учет анизотропии кристалла и вырождения зон, который также можно провести в рамках приближения эффективной массы, приводит к некоторому усложнению водородоподобного спектра [57, 58]. По величине энергии связи экситона (2.3) можно оценить его размер a_{ex} — экситонный боровский радиус.

Поскольку величина энергии экситонов порядка нескольких электронвольт, то методом их изучения является оптическая спектроскопия. Экситоны формируют край фундаментального поглощения кристалла и проявляются экспериментально в спектрах оптических переходов в виде узких линий на частотах, меньших ширины запрещенной зоны.

Изучение распространения электромагнитного излучения в кристаллах при резонансном возбуждении экситонов привело к понятию поляритонного элементарного возбуждения [59]. Исходным положением послужил тот факт, что фотон света

при взаимодействии с экситонной подсистемой идеального полупроводника не может быть поглощен без явного учета какой-либо диссипативной подсистемы: первоначальный фотон может превратиться в экситон с тем же самым импульсом, этот экситон, в свою очередь, может излучить только исходный фотон и т.д.. Такой процесс многократных взаимных превращений экситона в фотон и обратно, однозначно определяемый законом сохранения импульса, приводит к поляритонной перестройке фотонного и экситонного спектров. В [59] использовался гамильтониан

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{phot} + \mathcal{H}_{ex} + \mathcal{H}_{int} = \\
&= \sum_{\mathbf{p}, \lambda_{\perp}} \left\{ \hbar c p \left(a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{p}\lambda} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_t \left(b_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} b_{\mathbf{p}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \right. \\
&+ i \frac{\hbar \omega_t^2}{2} \left(\frac{4\pi\tilde{\beta}}{c p \omega_t} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} b_{\mathbf{p}\lambda} - a_{\mathbf{p}\lambda} b_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} + a_{-\mathbf{p}\lambda} b_{\mathbf{p}\lambda} - a_{-\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} b_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} \right] \\
&+ \left. \pi \tilde{\beta} \omega_t^2 \frac{\hbar}{c p} \left[a_{\mathbf{p}\lambda} a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} + a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{p}\lambda} + a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} a_{-\mathbf{p}\lambda}^{\dagger} + a_{\mathbf{p}\lambda} a_{-\mathbf{p}\lambda} \right] \right\}, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

в котором $\hbar \omega_t$ — энергия экситонного уровня относительно потолка валентной зоны, λ_{\perp} — индекс поляризации (рассматриваются только поперечные моды), $a_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger}$ ($a_{\mathbf{p}\lambda}$) — оператор рождения (уничтожения) фотона в состоянии (\mathbf{p}, λ) , $b_{\mathbf{p}\lambda}^{\dagger}$ ($b_{\mathbf{p}\lambda}$) — оператор рождения (уничтожения) кванта поляризации — в нашем случае экситона, безразмерный параметр $4\pi\tilde{\beta}$ характеризует интенсивность экситон-фотонного взаимодействия. Диагонализация гамильтониана (2.5) приводит к дисперсионному уравнению, определяющему спектр поляритонных элементарных возбуждений:

$$\epsilon(\omega, p) \equiv \frac{c^2 p^2}{\omega^2} = \epsilon_g + \frac{4\pi\tilde{\beta}\omega_t^2}{\omega_t^2 - \omega^2 + \frac{\hbar p^2}{M_{ex}}\omega_t - i\omega\gamma}. \tag{2.6}$$

Здесь $\epsilon(\omega, p)$ — диэлектрическая проницаемость кристалла (ϵ_g — фоновая для данного экситонного перехода диэлектрическая проницаемость кристалла), γ — константа затухания экситонного состояния. Уравнение (2.6) приобретает более простой вид в резонансном приближении $|\omega - \omega_t| \ll \omega_t$:

$$\frac{c^2 p^2}{\omega^2} = \epsilon_g + \frac{4\pi\tilde{\beta}\omega_t^2}{\omega_t(p) - \omega - i\omega\gamma/2}, \quad \omega_t(p) = \omega_t + \frac{\hbar p^2}{2M_{ex}}. \tag{2.7}$$

График поляритонных дисперсионных кривых представлен на Рис. 2.1, причем, для полноты картины на нем изображена и дисперсионная кривая продольного экситона, определяемая уравнением $\epsilon(\omega, p) = 0$.

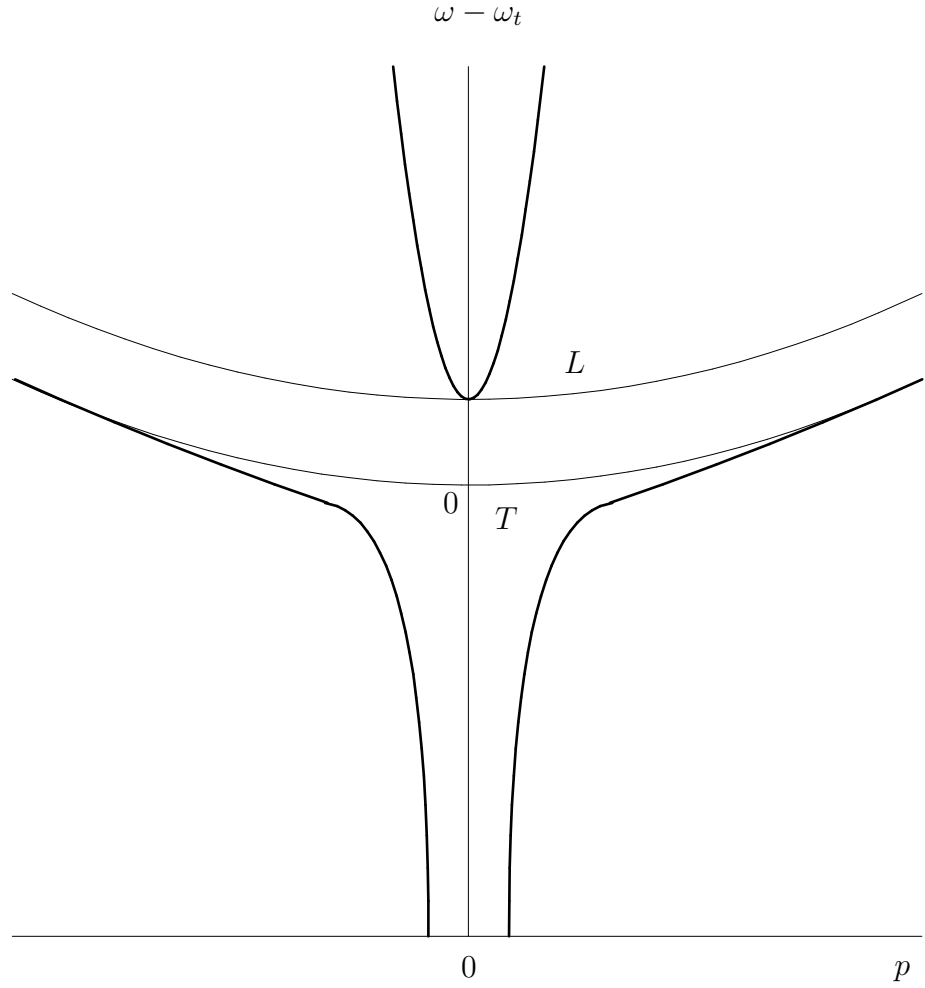


Рис. 2.1. Дисперсионные кривые поляритона (сплошные жирные линии). Тонкими сплошными линиями показаны дисперсии продольного (L) и поперечного (T) экситонов.

Важными параметрами, характеризующими поляритонные свойства полупроводников, являются величины продольно-поперечного расщепления $\omega_{lt} = \omega_l - \omega_t$ и частоты нутации [59, 60, 61, 62]

$$\omega_{lt} = \frac{2\pi\tilde{\beta}}{\epsilon_g}\omega_t, \quad \Omega_c^2 = 2\omega_{lt}\omega_t = \frac{4\pi\tilde{\beta}}{\epsilon_g}\omega_t^2. \quad (2.8)$$

Частота нутации Ω_c , зависящая от константы экситон-фотонного взаимодействия, имеет смысл эффективной частоты взаимных превращений “голый” фотон — “голый” экситон. Это обстоятельство позволило определить условие наблюдения поляритонной перестройки спектра в виде [61]

$$\Omega_c \gg \gamma. \quad (2.9)$$

Более аккуратное изучение этого вопроса [63, 64] приводит к условию

$$2\Omega_c \left(\frac{\hbar\omega_t\epsilon_g}{M_{ex}c^2} \right)^{1/2} \gg \gamma. \quad (2.10)$$

При этом с ростом температуры T и, следовательно, с увеличением экситонного затухания γ , достигается равенство правой и левой частей в (2.10). В этом случае происходит перезамыкание дисперсионных кривых. Последнее можно трактовать как переход от двух поляритоноподобных ветвей спектра к экситоноподобной и фотоноподобной дисперсионным кривым.

Для параметра $4\pi\tilde{\beta}$, характеризующего интенсивность экситон-фотонного взаимодействия, имеет место представление [65]

$$4\pi\tilde{\beta} = \frac{e^2 D^2}{\pi\omega_t^3 m_0^2 a_{ex}^3},$$

в котором m_0 и e — масса и заряд электрона, соответственно, D — матричный элемент дипольного перехода электрона между валентной зоной и зоной проводимости по направлению поляризации поляритонной волны.

Определению характеристик поляритонов в полупроводниковых кристаллах посвящено большое число экспериментальных работ [66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95]. Отметим лишь основные направления исследований. Методом **k**-лазерной спектроскопии, основанной на нелинейном взаимодействии двух лазерных пучков, сопровождающемся генерацией волны на суммарной частоте, волновой вектор которой может легко меняться изменением “геометрии” эксперимента, удастся установить поляритонные дисперсионные кривые [96, 97]. Исследование энергии продуктов распада биекситонов в зави-

симости от частоты возбуждающего света, углов возбуждения и наблюдения, позволяет определить дисперсию нижней поляритонной ветви и продольного экситона [98]. К числу наиболее прямых и точных методов определения дисперсионных кривых поляритонов относится резонансное рассеяние Мандельштама–Бриллюэна [83, 99]. Отметим большой обзор [100], посвященный исследованию экситонных поляритонов лазерными методами.

§ 2.2 Экситон-фононное взаимодействие.

Посредством экситонной составляющей поляритоны могут взаимодействовать между собой и с другими возбуждениями среды. В частности, рассеяние поляритонных волн может быть связано с экситон-фононным взаимодействием, характеризующимся гамильтонианом [101, 63]

$$\mathcal{H}_{ex-phon} = i \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{l}} M(\mathbf{p} - \mathbf{l}) b_{\mathbf{p}}^{\dagger} b_{\mathbf{p}} \left(c_{\mathbf{p}-\mathbf{l}} - c_{-\mathbf{p}+\mathbf{l}}^{\dagger} \right), \quad (2.11)$$

в котором $c_{\mathbf{q}}$ ($c_{\mathbf{q}}^{\dagger}$) — оператор уничтожения (рождения) фонона \mathbf{q} , $M(\mathbf{q})$ — матричный элемент экситон-фононного взаимодействия. Можно выделить несколько механизмов такого взаимодействия различной природы.

Взаимодействие неполярного оптического фонона (ТО или LO) с экситоном определяется зависимостью энергии последнего от межатомного состояния и может быть описано с помощью соответствующего деформационного потенциала Ξ . В этом случае матричный элемент $M(\mathbf{q})$ не зависит от импульса оптического фонона и для простейшей модели определяется формулой [82]

$$M(\mathbf{q}) = \left(\frac{(M_1 + M_2)^2}{2\hbar M_1 M_2 \rho V \Omega_0 a^2} \right)^{1/2} (\Xi_e - \Xi_h). \quad (2.12)$$

Здесь ρ — плотность кристалла, Ω_0 — частота оптического фонона, a — постоянная решетки, $M_{1,2}$ — массы атомов, входящих в элементарную ячейку кристалла, $\Xi_{e,h}$ — деформационный потенциал электрона и дырки, соответственно.

Для случая деформационного взаимодействия экситонов с акустическими коле-

баниями матричный элемент дается выражением

$$M(\mathbf{q}) = \left(\frac{q}{2\hbar\rho V u} \right)^{1/2} D, \quad (2.13)$$

в котором u — скорость акустических волн (LA или TA), D — деформационный потенциал экситона. Явная зависимость матричного элемента от импульса акустического фонона \mathbf{q} связана с тем, что в данном случае деформационное взаимодействие электрона или дырки, образующих экситон, с акустическими фононами определяется не смещением атомов, а градиентом такого смещения [102, 63, 74].

Для большого класса кристаллов, в первую очередь для полярных полупроводников, значительную роль может играть фрелиховское экситон-фононное взаимодействие [103, 71, 104, 72, 73, 105, 74, 75, 76, 77]. Как известно, в полярных кристаллах продольные колебания дипольно-активны и могут эффективно взаимодействовать через соответствующее продольное электрическое поле с электронами и дырками, образующими экситон. Впервые матричный элемент фрелиховского экситон-ЛО-фононного взаимодействия был получен в [106]:

$$M(\mathbf{q}) = \left[\pi \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty} - 1 \right) \left(\frac{m_e - m_h}{m_e + m_h} \right)^2 \frac{a_{ex}^3}{V} \Omega_0 \frac{\hbar q^2}{2\mu} \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

Здесь ϵ_0 и ϵ_∞ — соответственно статическая и высокочастотная диэлектрические проницаемости кристалла. Выражение (2.14) получено в приближении $q \ll a_B^{-1}$. Сильная зависимость матричного элемента (2.14) от импульса \mathbf{q} ЛО-фонона позволяет употреблять термин “запрещенное” рассеяние [103, 73, 82].

В известном смысле с фрелиховским механизмом можно связать и возможное взаимодействие пьезоэлектрического поля ТА-фононов с экситонами [100, 82]. Такое взаимодействие связано с тем, что в некоторых полупроводниках (например, CdS) медленные ТА-фононы вследствие пьезоэлектрического эффекта создают продольное электрическое поле, приводящее к появлению “запрещенного” экситон-ТА-фононного взаимодействия.

Экситон-фононное взаимодействие приводит к таким хорошо известным эффектам, как резонансное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна поляритонов [83, 99, 66,

68, 89, 90, 91, 92, 93] и комбинационное рассеяние поляритонов [100, 71, 104, 72, 73, 105, 74, 78, 79, 107, 108, 109, 110]. Особый интерес вызывают исследования по рамановскому рассеянию в полярных полупроводниках в присутствии постоянного электрического поля [111, 112, 107, 108, 109, 110, 113]. В этом случае можно осуществить управление экситон–ЛО-фононным взаимодействием с помощью внешнего поля [107, 108, 109, 110].

§ 2.3 Неравновесный поляритонный конденсат

К задачам о люминесценции и кинетике экситонных систем относится изучение термализации сильно возбужденных экситонов, в частности, исследование возможности их бозе-конденсации [114, 115, 116, 117]. Одна из главных трудностей экспериментального наблюдения бозе-конденсации экситонов заключается в том, что характерное время образования конденсата, как правило, больше времени жизни экситона в полупроводнике.

Вопрос о распространении электромагнитного излучения при резонансном возбуждении экситонов тесно связан с явлением бозе-конденсации. В самом деле, электромагнитная волна \mathbf{k}_0 , созданная внешним источником и распространяющаяся в кристалле, имеет конечную амплитуду, и, таким образом, мода \mathbf{k}_0 макрозаполнена:

$$\langle a_{\mathbf{k}_0}^\dagger a_{\mathbf{k}_0} \rangle \sim \langle b_{\mathbf{k}_0}^\dagger b_{\mathbf{k}_0} \rangle \sim V,$$

где V — объем кристалла. В данном случае вместо относительно длительного процесса термализации с возможным образованием бозе-конденсата происходит быстрое рассеяние экситонов из исходной волны и, либо установление равновесия в такой экситонной системе с конденсатом в моде \mathbf{k}_0 , либо полный распад конденсата при переходе к равновесному состоянию. Введение макрозаполненной моды \mathbf{k}_0 для описания распространения в кристалле электромагнитной волны с заданной внешним источником амплитудой и частотой $\omega_{\mathbf{k}_0}$, близкой к частоте рассматриваемого экситонного перехода, справедливо лишь в случае слабого экситонного поглощения в данной спектральной области, когда $\text{Re } \mathbf{k}_0 \gg \text{Im } \mathbf{k}_0$. С другой стороны, макрозапол-

ненность поляритонной моды \mathbf{k}_0 наиболее существенна в случае, когда в поляритоне значительна экситонная компонента, т.е. исходная поляритонная волна имеет экситоноподобный характер. Это связано с тем, что именно через экситонную составляющую поляритоны взаимодействуют как между собой, так и с другими элементарными возбуждениями среды. Указанные два условия удается удовлетворить одновременно, если

$$\Omega_c \equiv \sqrt{2\omega_t\omega_{lt}} \geq \omega_t - \omega_{\mathbf{k}} \gg \frac{\omega_{lt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{lt}}{2}\right)^2 + \gamma\omega_{lt}}. \quad (2.15)$$

В самом деле, дисперсионное уравнение для поляритонных элементарных возбуждений в резонансном по экситон-фотонному взаимодействию приближении имеет вид [59, 118]

$$\left(\omega - \frac{\hbar ck}{\sqrt{\epsilon_g}}\right) [\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{ex} + i\gamma] = \frac{\Omega_c^2}{4}, \quad \hbar\omega_{\mathbf{k}}^{ex} = \hbar\omega_t + \frac{\hbar^2 k^2}{2M_{ex}}. \quad (2.16)$$

Анализируя (2.16) можно показать [118], что в рассматриваемом случае поляритонного характера процесса распространения исходной электромагнитной волны ($\Omega_c > \gamma$) характерный частотный масштаб изменения части диэлектрической проницаемости, связанной с выделенным экситонным резонансом, определяется параметром ω_{lt} . При этом спектральная ширина соответствующей экситонному резонансу линии поглощения определяется величинами ω_{lt} и γ . Для экситонных переходов с ярко выраженными поляритонными свойствами ($\omega_{lt} \geq \gamma$) условие $\text{Re } \mathbf{k}_0 \gg \text{Im } \mathbf{k}_0$, определяемое последним неравенством в (2.15), заведомо выполняется при $\omega_t - \omega_{\mathbf{k}} \gg \omega_{lt}$, так что в этом случае нижнюю границу частотной области (2.15) можно определить величиной продольно-поперечного расщепления. В свою очередь, интенсивность экситонной компоненты поляритонной волны частоты $\omega_{\mathbf{k}}$ на рассматриваемой нижней поляритонной ветви характеризуется весовым множителем

$$\varphi_{\mathbf{k}}^{ex} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{ex} - \frac{\hbar ck}{\sqrt{\epsilon_g}}}{\left[\left(\omega_{\mathbf{k}}^{ex} - \frac{\hbar ck}{\sqrt{\epsilon_g}}\right)^2 + \Omega_c^2\right]^{1/2}} \right\} \approx \left[1 + 4 \frac{(\omega_t - \omega_{\mathbf{k}})^2}{\Omega_c^2} \right]^{-1}, \quad (2.17)$$

т.е. характерный частотный масштаб изменения экситонной составляющей определяется величиной Ω_c . Для многих прямозонных полупроводников выполняется нера-

венство $\Omega_c \gg \omega_{lt} \gg \gamma$, что и обеспечивает корректность введения области (2.15). Фактически условие (2.15) означает, что частота $\omega_{\mathbf{k}}$ исходной поляритонной волны \mathbf{k} должна принадлежать низкочастотной “области прозрачности” вблизи линии экситонного поглощения. При этом волновой вектор \mathbf{k} исходной поляритонной волны связан с ее частотой посредством поляритонного дисперсионного уравнения (2.16).

§ 2.4 Перестройка спектров поляритонного и фононного возбуждений в полупроводниках в присутствии сильной электромагнитной волны. Фоноритоны

В работе [119] исследовано распространение макрозаполненной поляритонной волны \mathbf{k}_0 в предположении, что основным механизмом ее затухания является рассеяние экситонов на продольных акустических фононах. Предполагается также, что рассеяние вследствие поглощения экситоном волны акустического фонона происходит гораздо чаще, чем обратный процесс излучения фонона. Это допущение справедливо, когда при поглощении фонона экситон исходной волны попадает на существенно экситоноподобную часть поляритонной дисперсионной кривой, где велика плотность состояний экситонов, а при испускании фонона — на существенно фотоподобную часть, где плотность состояний мала. Это условие может быть реализовано в тех полупроводниках, у которых величина продольно-поперечного расщепления удовлетворяет условию (u — скорость звука в кристалле)

$$\omega_{lt} < 2 (u/c) \epsilon_g^{1/2} \omega_t ,$$

причем рассматривается случай основного энергетического состояния экситонов.

С помощью диаграммной техники Келдыша для неравновесных процессов [20] в [119] получены кинетические уравнения для функций распределения рассеянных экситонов $N_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ и рассеивающих фононов, $n_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}, t)$, изучена перестройка квазиэнергетического спектра этих квазичастиц и дано описание распространения исходной волны.

Важным параметром задачи является величина $\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ — характерная неопределенность энергии в элементарном акте рассеяния экситона исходной волны. Согласно [119],

$$\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \approx \left\{ \left[\gamma(\mathbf{k}) + \gamma_{phon}^A(\mathbf{k}) \right]^2 + \frac{8\pi}{\hbar} N_0 V |M_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}|^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.18)$$

где $\gamma(\mathbf{k}) = 1/\tau$ — обратное время жизни рассеянного экситона \mathbf{k} , связанное с возможностью дальнейшего рассеяния равновесными акустическими фононами, $\gamma_{phon}^A(\mathbf{k}) = 1/\tau_{phon}^A$ — обратное время жизни рассеивающего фонона $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ из-за решеточного ангармонизма кристалла, $M_{\mathbf{k}}$ — матричный элемент рассеяния экситона фононом. Величина $\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ определяет число поляритонных мод \mathbf{k} , в которые происходит рассеяние экситонов из исходной волны, а также количество мод $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ фононной подсистемы, наиболее эффективно участвующих в процессе рассеяния. В зависимости от интенсивности поляритонной волны можно выделить три случая.

Слабые интенсивности

$$N_0 < \gamma(k_0) \gamma_{phon}^A(k_0) / m_{k_0}. \quad (2.19)$$

Этот случай соответствует линейной теории [120]. Коэффициент поглощения волны пропорционален температуре образца и не зависит от интенсивности волны.

Средние интенсивности

$$\gamma(k_0) \gamma_{phon}^A(k_0) / m_{k_0} < N_0 < \left[\gamma(k_0) + \gamma_{phon}^A(k_0) \right]^2 / 4m_{k_0}. \quad (2.20)$$

В этом случае имеет место нелинейное распространение волны, а коэффициент ее поглощения $\sim 1/N_0$ и может достигать значений на несколько порядков меньших, чем для слабых интенсивностей. При низких температурах выполняется неравенство $\gamma_{phon}^A(k_0) \ll \gamma(k_0)$, и в этом случае имеет место явление фононной нелинейности, состоящее в том, что в процессе рассеяния исходной волны фононная подсистема сильно истощается: акт рассеяния экситона в моду \mathbf{k} сопровождается уничтожением фонона $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. Такое сильное уменьшение чисел заполнения мод фононной подсистемы

сопровождается уменьшением коэффициента поглощения волны. При высоких температурах $\gamma(k_0) \ll \gamma_{phon}^A(k_0)$ и нелинейное падение поглощения можно объяснить неравновесной бозе-конденсацией. Это явление заключается в возможности заполнения поляритонных мод \mathbf{k} , в которые рассеиваются экситоны вплоть до значений равновесных фононных чисел заполнения мод $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$; тогда происходит эффективное подавление процесса рассеяния исходной волны и поглощение определяется исключительно дальнейшим рассеянием экситонов \mathbf{k} .

Большие интенсивности

$$[\gamma(k_0) + \gamma_{phon}^A(k_0)]^2 / 4m_{k_0} < N_0. \quad (2.21)$$

При таких интенсивностях имеет место перестройка поляритонной и фононной дисперсионных кривых (см. Рис. 2.2.), заключающаяся в их объединении и расщеплении, подобно тому, как происходит образование поляритонных дисперсионных кривых из экситонной и фотонной. Перестроенному спектру соответствует новое возбуждение, состоящее из поляритонной и фононной компонент — фоноритон. Коэффициент поглощения по-прежнему нелинеен и пропорционален $N_0^{-1/2}$. Неравенство (2.21) является условием того, что величина расщепления спектра $2(m_{k_0}N_0)^{1/2}$ больше обратного времени жизни образовавшегося возбуждения $[\gamma(k_0) + \gamma_{phon}^A(k_0)]$, т.е. указанная перестройка спектра может быть обнаружена. С другой стороны, это условие означает, что в выражении для $\Gamma(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ в (2.18) доминирующий вклад вносит последнее слагаемое под корнем. Это означает, что рассеянный экситон с большой вероятностью возвращается назад в исходную моду \mathbf{k}_0 , что является следствием макрозаполненности моды \mathbf{k}_0 .

Физический смысл фоноритонной перестройки спектров связан со следующей качественной картиной элементарных процессов. Пусть в полупроводнике возбужден пробный поляритон (экситон) $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\omega)$ с энергией $\hbar\omega$, расположенной в области антистоксова резонанса поляритонной волны накачки. Тогда при определенных условиях он может индуцированным образом рассеяться в моду \mathbf{k} , испустив при этом фонон

$\mathbf{p} - \mathbf{k}$. В свою очередь, созданный фонон $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ может быть вновь поглощен поляритоном (экситоном) \mathbf{k} волны накачки, что приведет к рождению исходного пробного поляритона \mathbf{p} . Далее указанный процесс может повторяться. Такие когерентные осцилляции

$$(\text{поляритон } \mathbf{p}) \rightarrow (\text{фонон } \mathbf{p} - \mathbf{k}) + (\text{поляритон } \mathbf{k}) \rightarrow (\text{поляритон } \mathbf{p}) \rightarrow \dots ,$$

подобные обычным поляритонным осцилляциям в системе “экситон + фотон”, как раз и приводят к фоноритонной перестройке спектров.

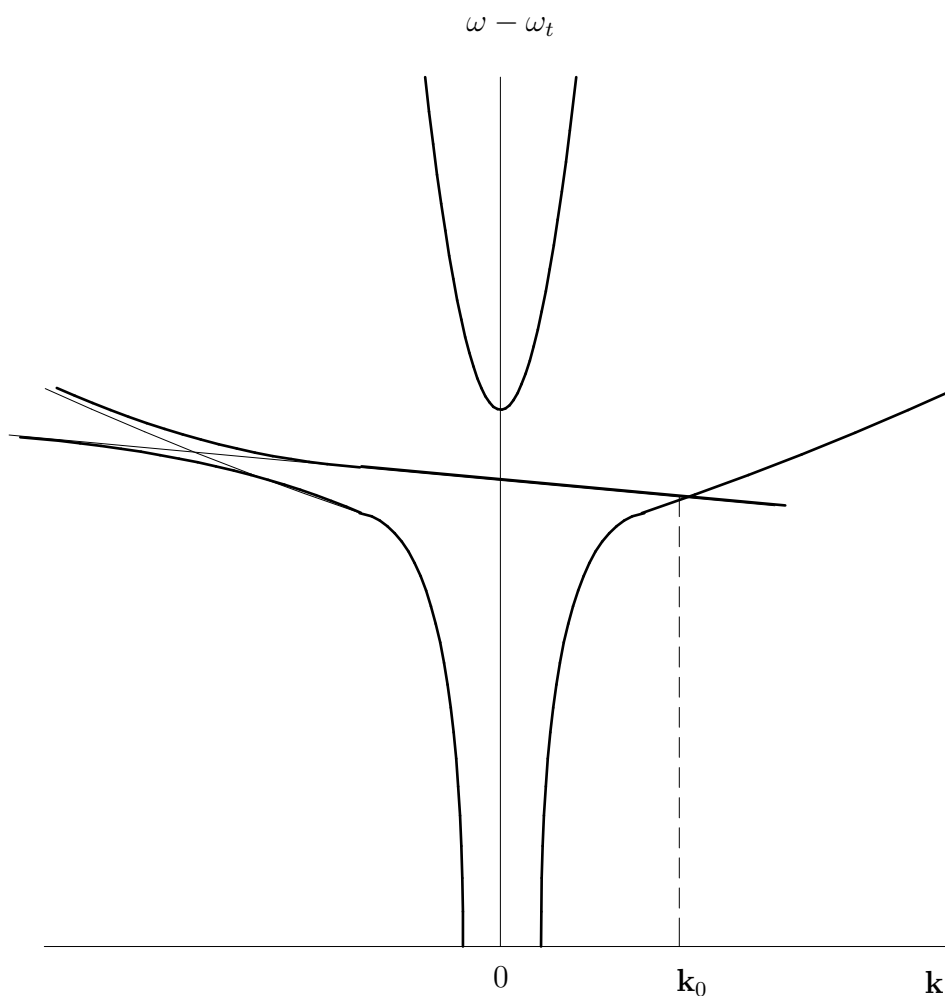


Рис. 2.2. Фоноритонная перестройка спектров взаимодействующих поляритонов и акустических фононов.

Введенное в [119] фоноритонное возбуждение отвечает смешиванию поляритонных и акустических волн. Аналогичным образом можно ввести оптический фоно-

ритон — возбуждение, соответствующее смешиванию поляритонов с оптическими фононами (см. Рис. 2.3.). Последнее особенно интересно для случая полярных прямозонных полупроводников, где велика сила экситон-фононного взаимодействия.

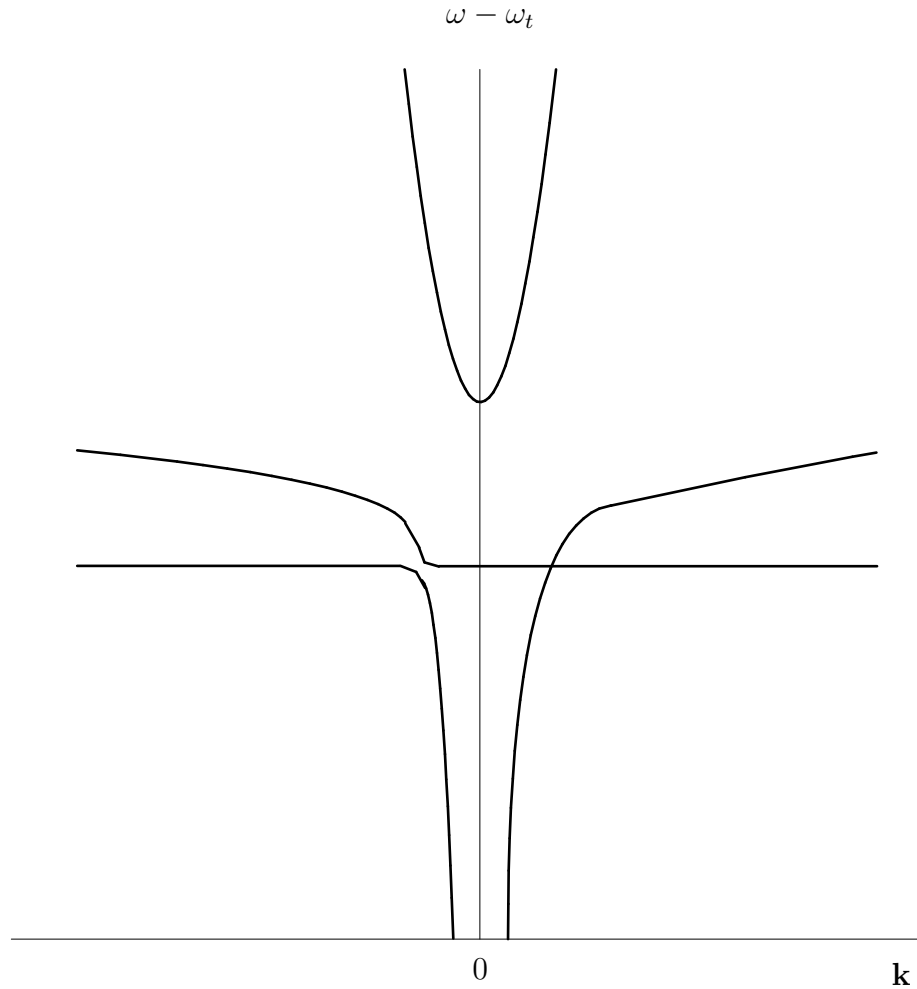


Рис. 2.3. Фोनоритонная перестройка спектров взаимодействующих поляритонов и оптических фононов.

В работах [121, 122] особенности оптических фоноритонных возбуждений исследованы с помощью метода канонического преобразования исходного модельного гамильтониана в приближении заданной когерентной поляритонной волны накачки \mathbf{k} частоты $\omega_{\mathbf{k}}$. Используемый в [121, 122] модельный гамильтониан соответствует резонансному приближению экситон-фотонного взаимодействия и резонансному приближению антистоксовой компоненты экситон-фононного взаимодействия. Кроме того,

из членов, описывающих экситон-фононное взаимодействие, сохранены лишь члены, характеризующие связь экситонной компоненты волны накачки \mathbf{k} с фононной подсистемой.

В рамках используемого модельного гамильтониана процедура диагонализации позволяет точно учесть как экситон-фотонное, так и экситон-фононное взаимодействия. При этом корректное введение новых элементарных возбуждений, вообще говоря, возможно именно в резонансном по антистоксову взаимодействию приближении. Справедливость этого утверждения связана с действительностью корней полученного в этом приближении дисперсионного уравнения, в то время как анализ общего случая связан с рассмотрением более сложного дисперсионного уравнения, которое может иметь комплексные корни. Например, комплексные значения корней получаются при анализе резонансного по стоксову взаимодействию приближения. Физическая природа этого результата понятна и связана с неустойчивостью стоксовой поляритонной волны \mathbf{p} и соответствующей рассеивающей фононной волны $\mathbf{p} - \mathbf{k}$ относительно нарастания их амплитуд за счет распада исходной поляритонной волны \mathbf{k} [123] (см. § 2.5). Существенно, что сильная пространственная дисперсия поляритонных кривых вблизи экситонного резонанса позволяет рассматривать процессы стоксова и антистоксова рассеяния волны накачки как независимые.

Полученные в [121, 122] результаты могут быть использованы как для акустических, так и для оптических фоноритонных возбуждений. Различие связано лишь с разными законами дисперсии акустических и оптических фононов, а также с использованием разных матричных элементов ((2.13) или (2.14)) экситон-фононного взаимодействия. В соответствии с видом матричных элементов как для акустических, так и для оптических фоноритонных возбуждений спектральное расщепление $\Delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ имеет максимальную величину в геометрии “рассеяния назад”.

Возможность рассеяния экситона \mathbf{p} не в исходную макрозаполненную моду \mathbf{k} , а также учет конечности времени жизни фононов приводит к введению параметров $\gamma(\mathbf{k})$ и $\gamma_{phon}^A(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ — обратных времен жизни соответственно рассеянного экситона

и рассеивающего фонона $\mathbf{p} - \mathbf{k}$. При этом справедливость введения фоноритонных элементарных возбуждений, а также возможность экспериментального наблюдения фоноритонной перестройки спектров связана с выполнением условий

$$\Omega_c \gtrsim \Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}, \quad (2.22)$$

$$\sqrt{2\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}} \gtrsim \gamma(\mathbf{p}) + \gamma_{phon}^A(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \quad (2.23)$$

$$\Delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) > \gamma_{имп}(\mathbf{p}), \quad (2.24)$$

где $\Omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}$ — частота фонона, $\gamma_{имп}(\mathbf{p})$ — спектральная ширина исходной поляритонной волны накачки или соответствующего импульса. Условия (2.22)–(2.24) имеют следующий физический смысл. Первое из них фактически является требованием того, чтобы частоты исходной поляритонной волны \mathbf{k} и ее антистоксовой компоненты могли принадлежать области (2.15). Второе условие подобно условию наблюдения поляритонной перестройки спектров и, грубо говоря, сводится к требованию превышения частоты фоноритонных осцилляций над обратным временем жизни фоноритонных возбуждений. Третье условие имеет ясный физический смысл.

Для экспериментально достижимого случая концентрации экситонной компоненты исходной поляритонной волны \mathbf{k} $N_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3}$ в полупроводнике CdS максимальное фоноритонное расщепление может достигать значений для оптических фоноритонов — $\Delta^{max} \approx 0.3 \text{ мэВ}$, а для акустических — $\Delta^{max} \approx 0.02 - 0.03 \text{ мэВ}$. При этом для акустических фоноритонов $\gamma_{phon}^A(\mathbf{p}-\mathbf{k}) < \gamma(\mathbf{p}) \lesssim 0.01 \text{ мэВ}$ для CdS при $T = 4.2 \text{ К}$ [66] и главное условие (2.23) легко выполнимо, однако в этом случае невелико и само фоноритонное расщепление. Для оптических фоноритонов $\gamma(\mathbf{p}) < \gamma_{phon}^A(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \approx 0.1 \text{ мэВ}$ для CdS [124, 125, 126] и условие (2.23) также несложно удовлетворить, но при этом фоноритонное расщепление велико.

Система макроскопических фоноритонных уравнений, позволяющая исследовать не только изменения спектров взаимодействующих частиц, но и анализировать пространственно-временную эволюцию фононных, экситонных и фотонных возбуждений полупроводника в присутствии заданной когерентной поляритонной волны на-

качки, была получена и проанализирована в работах [122, 127], где также был рассмотрен вопрос о дополнительных граничных условиях для фоноритонных волн.

§ 2.5 Интенсивная поляритонная волна вблизи порога вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна

В работе [128] исследовано взаимодействие когерентной электромагнитной волны в кристалле с частотой, близкой к частоте поляритонного резонанса и “шума” рассеянных поляритонов в условиях, когда амплитуда волны приближается к порогу вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна, интенсивность шума сильно нарастает и становится существенным обратное влияние этого шума на распространение когерентной волны. При этом возникают существенные изменения в спектрах как рассеянных поляритонов, так и проходящей волны. Тот факт, что в каждом акте рассеяния одновременно рождаются рассеянный поляритон и акустический фонон, приводит к возникновению некоторой когерентности между ними. В результате вместо исходных рассеянных поляритонных и фононных волн возникают смешанные поляритон-фононные моды. Вблизи порога вынужденного рассеяния затухание одной из этих смешанных волн стремится к нулю. В результате имеет место накопление частиц в этой моде, и ее интенсивность сильно возрастает. В таких условиях поведение как рассеянных поляритонов, так и резонансных с ними фононов полностью определяется только одной этой слабозатухающей модой, так что рассеянные поляритоны и фононы проявляют себя как практически одинаковые квазичастицы. Рассматриваемый процесс рассеяния таким образом превращается эффективно в процесс распада поляритонов когерентной волны на две практически одинаковые смешанные частицы. Обратное влияние этих рассеянных частиц на исходную волну приводит к развитию ее интенсивных флуктуаций, ширина спектра которых увеличивается по мере приближения к порогу.

Формальное рассмотрение описанного выше сценария проведено в [128] в рамках

диаграммной техники для неравновесных процессов. Амплитуда когерентной волны предполагается заданной и не зависящей ни от времени, ни от координат. С формальной точки зрения это эквивалентно предположению о наличии в среде распределенного внутреннего источника, поддерживающего эту амплитуду, несмотря на потери, связанные с рассеянием. Физически же это ограничивает область применимости полученных результатов полями, не слишком близкими к порогу, для которых интенсивность рассеянных волн еще мала по сравнению с проходящей, и можно пользоваться приближением заданной накачки. В работе используется так называемое τ -приближение, в котором учитываются только низшие (не выше линейных) члены в разложении поляризационных операторов по степеням амплитуды когерентной волны. В рамках τ -приближения исследуются полюса функций Грина поляритонов, рассеянных с испусканием фононов (т.е. стоксовой компоненты в спектре рассеянных поляритонов) и резонансных фононов. Показано, что при достижении некоторого порогового значения интенсивности проходящей волны затухание одной из смешанных поляритон-фононных мод меняет знак, т.е. возникает вынужденное рассеяние поляритонов.

Исследованы свойства системы вблизи порога вынужденного рассеяния. Показано, что нормальные и аномальные пропагаторы рассеянных поляритонов и фононов вблизи порога нарастают, что отвечает уменьшению затухания одной из смешанных мод и накоплению частиц в ней. Вблизи порога τ -приближение оказывается недостаточным. Не учитываемые в нем диаграммы для поляризационного оператора прямых поляритонов расходятся при приближении к порогу. Более того, величина диаграмм возрастает с ростом порядка теории возмущений. Таким образом, ситуация вблизи порога вынужденного рассеяния сходна с ситуацией вблизи фазового перехода и полное решение задачи требует использования ренормгруппы.

В работе [128] построена упрощенная модель для одномерной системы, в которой кванты когерентной моды распадаются на два кванта с одинаковым свободным спектром. Для модельной системы вблизи порога построено самосогласованное при-

ближение, аналогичное приближению среднего поля — учитываются большие однопетлевые диаграммы для поляризационных операторов. Показано, что возникают флуктуации проходящей волны с широким спектром и малой интенсивности. Эта шумовая составляющая вблизи когерентной волны вызывает существенное изменение времен жизни и чисел заполнения рассеянных частиц.

Нестационарный процесс установления стоксовой и антистоксовой компонент в спектре рассеянных поляритонов после резкого включения электромагнитного поля в кристалле с частотой ε_0 , близкой к частоте поляритонного резонанса изучен в работе [129]. Используются полученные в [128] уравнения для нормальных и аномальных функций Грина. Рассмотрение ограничено τ -приближением, т.е. предполагается, что нормальные поляризационные операторы не зависят от амплитуды внешнего поля, а в аномальном поляритон-фононном поляризационном операторе, учитывающем корреляции между рассеянными поляритонами и фононами учтены только линейные по амплитуде поля члены. Нормальные поляризационные операторы, мнимые части которых определяют ширины соответствующих уровней, представляют собой интегралы по большой области частот и импульсов и мало меняются в не слишком сильных полях, пока перестройка спектра и изменение чисел заполнения сосредоточены в малых по сравнению с ε_0 и \mathbf{k}_0 областях частот и импульсов (здесь \mathbf{k}_0 — квазиимпульс поляритонной волны). Исключением, как показано в [128], является поведение системы вблизи порога вынужденного рассеяния. Однако, в рассматриваемой в [129] задаче о включении поля и этот случай не является опасным (в смысле неприменимости τ -приближения), так как приводящее к изменению поляризационных операторов накопление слабозатухающих фоноритонов локализовано в узком (по сравнению с суммарной шириной поляритонных и фононных уровней) спектральном диапазоне и, следовательно, происходит весьма медленно.

Поскольку вероятность рассеяния растет с переданным импульсом, расщепление фоноритонных термов максимально для рассеяния назад в моды, расположенные вблизи пересечения невозмущенных спектров поляритонов и поглощенных и испу-

щенных фононов с характерными частотами

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_{\mathbf{p}_{\pm}}, \quad \varepsilon_{\pm} \mp u |\mathbf{p}_{\pm} - \mathbf{k}_0| = \varepsilon_0, \quad \mathbf{p}_{\pm} \parallel \mathbf{k}_0. \quad (2.25)$$

Согласно [129]

$$\begin{aligned} N_{pol}(\mathbf{p}, t) = & N_{0, pol} + \left[N_{0, ph} \mp N_{0, pol} + \frac{1 \mp 1}{2} \right] \frac{\Phi_{\mathbf{p}}^2}{\omega_{\mathbf{p}}^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2} \\ & \times \left[(1 - e^{-2\gamma_1 t}) \frac{\gamma_{ph} - \gamma_1}{\gamma_1} + (1 - e^{-2\gamma_2 t}) \frac{\gamma_{ph} - \gamma_2}{\gamma_2} + \frac{2(\omega_{\mathbf{p}}^2 + \gamma\Gamma)}{\omega_{\mathbf{p}}^2 + \Gamma^2} \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}^4 + \omega_{\mathbf{p}}^2(\Gamma^2 + \gamma^2) + \gamma^2\Gamma^2}}{\omega_{\mathbf{p}}^2 + \Gamma^2} e^{-\Gamma t} \sin(\omega_{\mathbf{p}} t + \psi_{pol}) \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

где

$$N_{0, ph} = [\exp(u |\mathbf{p} - \mathbf{k}_0| / k_B T) - 1]^{-1}, \quad N_{0, pol} = [\exp(\varepsilon_{\mathbf{p}} / k_B T) - 1]^{-1},$$

$$\Phi_{\mathbf{p}} = D \sqrt{\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{k}_0| n_0}{2\hbar \rho u}},$$

$$\omega_{\mathbf{p}} = \text{Re}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad \gamma_{1,2} = \text{Im}(\varepsilon_{1,2}), \quad \tan \psi_{pol} = \frac{(\omega_{\mathbf{p}}^2 + \gamma\Gamma)}{\omega_{\mathbf{p}}(\Gamma - \gamma)},$$

$$\Gamma = \gamma_{pol} + \gamma_{ph}, \quad \gamma = \gamma_{pol} - \gamma_{ph},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1(2)}(\mathbf{p}) = & \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \{ \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_0 \pm u |\mathbf{p} - \mathbf{k}_0| + i\Gamma \\ & + (-) \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_0 \mp u |\mathbf{p} - \mathbf{k}_0| + i\gamma)^2 \pm 4\Phi_{\mathbf{p}}^2} \}; \end{aligned} \quad (2.27)$$

γ_{pol} (γ_{ph}) — обратное время жизни поляритона (фонона), $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ ($u |\mathbf{p} - \mathbf{k}_0|$) — его закон дисперсии. Для того, чтобы получить соответствующую формулу для $N_{ph}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{p}, t)$ следует в (2.26) поменять местами индексы pol и ph (в частности, заменить γ на $-\gamma$).

Рассмотрим сначала антистоксово рассеяние (верхний знак в (2.26), (2.27)). Формула (2.27) описывает установление стационарных чисел заполнения рассеянных поляритонов. В слабых полях, т.е. при $\Phi_{\mathbf{p}_+} < \Gamma$, этот процесс носит релаксационный характер, а в сильных при $\Phi_{\mathbf{p}_+} > \Gamma$ — осцилляционный. Частота осцилляций $\omega_{\mathbf{p}}$ представляет собой расщепление фоноритонных термов (2.27); осцилляции возникают, когда расщепление превышает суммарную ширину линии.

В случае стоксова рассеяния расщепление фоновитонных термов в центральной части линии вблизи $\mathbf{p} \sim \mathbf{p}_-$ всегда мало по сравнению с Γ . Поэтому осцилляции центра линии не возникают. В достаточно сильных полях $\Phi_{\mathbf{p}_-} > \sqrt{\gamma_{pol}\gamma_{ph}}$ в некоторой области импульсов вблизи \mathbf{p}_- меняется знак затухания γ_2 и возникает вынужденное рассеяние. Из (2.27) следует, что при этом число рассеянных поляритонов и испущенных фононов экспоненциально растет со временем. Если $\Phi_{\mathbf{p}_-} \gg \sqrt{\gamma_{pol}\gamma_{ph}}$ и тепловой источник поляритонов отсутствует ($N_{0,pol} = 0$), то

$$N_{pol}(\mathbf{p}_-, t) \approx \frac{1}{4} (1 + N_{0,ph}) \exp(2\Phi_{\mathbf{p}_-} t) .$$

Отметим, что на краях стоксовой линии $\omega_{\mathbf{p}} > \Gamma$ и осцилляции чисел заполнения возможны.

В сильных полях $\Phi_{\mathbf{p}_-} \gg \sqrt{\gamma_{pol}\gamma_{ph}}$ обратное рассеяние фоновитонов приводит к быстрому нарастанию флуктуаций проходящей поляритонной волны, состоящих из скоррелированных пар поляритонов с импульсами $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$. При $N_{0,pol} = 0$

$$\langle \xi(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, t) \xi(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}, t) \rangle \approx \exp(-2i\varepsilon_0 t) N_{pol}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}, t) , \quad (2.28)$$

$$N_{pol}(\mathbf{k}_0, t) = \langle \xi^\dagger(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}, t) \xi(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, t) \rangle \approx (1 + N_{0,ph})^2 \frac{\exp(4\Phi_{\mathbf{p}_-} t)}{\Phi_{\mathbf{p}_-}} . \quad (2.29)$$

Здесь $\xi(\mathbf{k}, t)$ ($\xi^\dagger(\mathbf{k}, t)$) — оператор уничтожения (рождения) поляритона в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} в гайзенберговском представлении. Формулы (2.28) и (2.29) справедливы только для сильных полей, когда интенсивность проходящей волны намного превышает порог вынужденного рассеяния, и на начальной стадии процесса на временах t , удовлетворяющих условию $\Phi_{\mathbf{p}_-}^{-1} \lesssim t \ll \Gamma^{-1}$.

В заключение отметим, что в настоящее время опубликовано большое количество работ [130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143] по исследованию фоновитонной перестройки спектров. О первом экспериментальном наблюдении поляритон-фононной перестройки спектров на примере полупроводника CdS сообщалось в [130]. В дальнейшем последовали публикации [131, 132, 133, 134] об экспериментальных исследованиях фоновитонных эффектов в полупроводниках HgI_2 и PbI_2 .

§ 2.6 Экситон-экситонное взаимодействие. Неустойчивость внеконденсатных мод

При достаточно высоких уровнях возбуждения кристалла доминируют процессы рассеяния поляритонов, связанные с экситон-экситонными столкновениями. Интерес к указанному механизму рассеяния стимулируется недавними экспериментальными исследованиями [144], а также большим количеством привлекательных физических результатов, полученных при теоретическом изучении динамических и кинетических изменений, возникающих в поляритонной системе в результате взаимодействия между экситонами (см., например, [145, 146, 147]).

Согласно [147, 148], при учете экситон-экситонных столкновений наибольший интерес вызывает физическая ситуация, когда когерентное возбуждение поляритонов осуществляется в определенной спектральной области, для которой законы сохранения энергии и импульса допускают реальные процессы двухквантового выхода из конденсата (см. Рис. 2.4). Эти процессы приводят к неустойчивости полностью конденсированного состояния системы поляритонов. Существование указанной области, расположенной в окрестности изолированного экситонного резонанса, связано с особенностями поляритонного закона дисперсии $\Omega_{\mathbf{k}\alpha}$.

В работах [147, 148] изучен энергетический спектр внеконденсатных поляритонов, возникающих в результате распада когерентной поляритонной волны. Показано, что имеются отдельные области \mathbf{k} -пространства, в которых, по мнению авторов [147, 148], энергетический спектр не существует.

Здесь необходимо отметить, что выполненные в [147, 148] исследования основаны на модели, аналогичной по своим формальным свойствам использованной Н. Н. Боголюбовым в [149] для изучения *равновесной* системы слабо неидеального бозе-газа. В рассматриваемой в [147, 148] *неравновесной* физической ситуации, когда имеет место распад поляритонного конденсата, сопровождающийся возбуждением большого числа внеконденсатных поляритонов, эта модель может претендовать на адекватность физической постановке задачи лишь на начальной стадии распада конденсирован-

ного состояния системы, когда число поляритонов в конденсате все еще значительно превосходит полное число внеконденсатных поляритонов. Однако, эта стадия является существенно *нестационарной*, о чем свидетельствует неустойчивость конденсата. Исследование же энергетического спектра предполагает нахождение *стационарных* состояний системы (см. [150], стр. 46). Поэтому, основанные на указанной модели результаты [147, 148], касающиеся энергетического спектра рассматриваемой системы, по нашему мнению, не являются достаточно обоснованными. Это же замечание относится и к сравнительно недавним работам [151, 152].

$$(\Omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{a}} + \Omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{a}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}) \times 10^{-15} \text{ сек}^{-1}$$

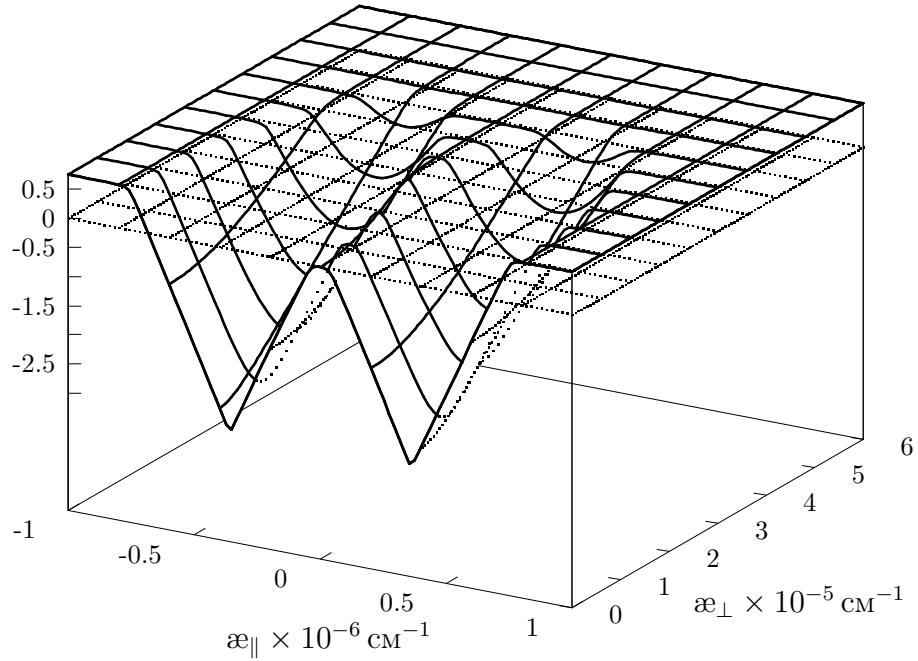


Рис. 2.4. Сплошными жирными линиями представлена поверхность, изображающая зависимость функции $\Omega_{\mathbf{k}_0+\mathbf{a}} + \Omega_{\mathbf{k}_0-\mathbf{a}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}$ от $\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{k}_0)}{k_0^2}\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{k}_0)}{k_0^2}\mathbf{k}_0$ при $\mathbf{k}_0 = 3.6 \times 10^5 \text{ см}^{-1}$ ($(\mathbf{a}_{\parallel}\mathbf{k}_0) = (\mathbf{a}\mathbf{k}_0)$, $(\mathbf{a}_{\perp}\mathbf{k}_0) = 0$). Пересечение этой поверхности с плоскостью $z = 0$ (представленной пунктирными прямыми) определяет множество волновых векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{a}$ поляритонов, способных реально покинуть конденсат.

Существенная нестационарность протекающих в системе процессов требует, строго говоря, использования при ее описании методов неравновесной статистической механики. При этом вывод уравнений, описывающих распад поляритонного конденсата и возбуждение квантовых флуктуаций, обладает рядом специфических особенностей, связанных с наличием в системе вырождения. Поскольку суммарная энергия и суммарный импульс двух внеконденсатных поляритонов могут оказаться равными соответственно энергии и импульсу двух поляритонов в конденсате, имеет место вырождение двухчастичных состояний. Кроме того, наличие в системе конденсата само по себе означает вырождение вследствие его макроскопической амплитуды [153].

Для корректного описания системы при наличии вырождения необходимо наряду с обычной (нормальной) функцией распределения $N_{\mathbf{k}} = \langle \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger \Phi_{\mathbf{k}} \rangle$, ввести в рассмотрение также аномальные функции $\Psi_{\mathbf{k}_0} = \langle \Phi_{\mathbf{k}_0} \rangle$ и $F_{\mathbf{k}} = \langle \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} \rangle$ [154, 155]. Здесь $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^\dagger (\hat{\Phi}_{\mathbf{k}})$ — бозевский оператор рождения (уничтожения) поляритона в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} на нижней поляритонной ветви. Появление в теории аномальных средних означает нарушение правил отбора, связанных с калибровочной инвариантностью системы [154, 155, 156, 157]. В рассматриваемой задаче нарушение калибровочной симметрии возникает вследствие неинвариантного начального условия, связанного с предположением о наличии в системе конденсата в начальный момент времени $t = t_0$.

Попытка получить кинетические уравнения для системы поляритонов, возбуждаемых в полупроводнике внешним классическим источником, действующим стационарно, была предпринята в работах [158, 159, 160, 161]. В этих работах, однако, не принималось во внимание имеющееся в системе вырождение двухчастичных состояний. В частности, аномальная функция распределения $F_{\mathbf{k}}$ в [158, 159, 160, 161] не вводилась. Поэтому неудивительно, что полученные там уравнения содержат нефизическую сингулярность.

Кинетические уравнения, описывающие эволюцию частично когерентных поляритонов и учитывающие особенности, связанные с вырождением, были найдены в [162,

163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170] с помощью метода Л. В. Келдыша [20], сформулированного авторами на языке функционалов. Они совпадают с уравнениями, полученными теми же авторами в [166, 170, 171] методом неравновесного статистического оператора [172] и не содержат нефизических особенностей.

Согласно [162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171], кинетика частично когерентных поляритонов описывается в борновском приближении системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для когерентной части поляритонного поля $\Psi_{\mathbf{k}_0}$, а также нормальной и аномальной функций распределения $n_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2$ и $f_{\mathbf{k}} = F_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2$ соответственно. В отсутствие квантовых флуктуаций, описываемых функциями $n_{\mathbf{k}}$ и $f_{\mathbf{k}}$, уравнения для них обращаются в тождества, а уравнения для $\Psi_{\mathbf{k}\alpha}$ (α – номер поляритонной ветви) в этом случае эквивалентны полученным в [173] для системы взаимодействующих между собой когерентных экситонов и фотонов. В другом частном случае, когда $\Psi_{\mathbf{k}_0} = 0$ и $f_{\mathbf{k}} = 0$, из результатов [169, 171] следует обычное кинетическое уравнение для функции распределения $N_{\mathbf{k}}$, приведенное, например, в [172, 174].

В Главе 7 диссертации дана функциональная формулировка метода Келдыша. С помощью теории виковских нормальных символов вычислен производящий функционал функций Грина–Келдыша и найдено его представление в виде функционального интеграла¹.

Получены уравнения Швингера–Дайсона для системы неравновесных поляритонов. Особую роль при получении этих уравнений играет преобразование Лежандра независимых аргументов производящего функционала. Использование преобразова-

¹Следует отметить, что функциональная формулировка метода Холла, близкого по духу методу Келдыша и позволяющего учесть начальные корреляции в системе, впервые была дана в работе [175]. Однако приведенный в [175] анализ имеет формальный характер. Фактически используются известные формулы теории поля [176], с тем лишь отличием, что все временные аргументы предполагаются принадлежащими не обычной оси времени, направленной из $-\infty$ в $+\infty$, а замкнутому контуру Швингера [177]. Используемый в данной диссертации подход, на наш взгляд, является более корректным, т.к. основан на строгих математических результатах, приведенных в [178]. Он позволяет более контрастно выявить детали, характерные для метода Келдыша. Отметим также, что, в принципе, метод Холла достаточен для описания системы с нарушенной симметрией (при использовании неинвариантных относительно этой симметрии начальных корреляций), однако, является слишком громоздким. Реализованная в диссертации идея использовать для описания таких систем функциональное преобразование Лежандра имеет прозрачный физический смысл и позволяет достигнуть конечных результатов более коротким путем.

ния Лежандра позволило учесть имеющееся в системе вырождение и естественным образом ввести в рассмотрение аномальные средние от операторов поляритонного поля. Вычисление содержащихся в уравнениях Швингера–Дайсона вершинных функций выполнено по теории возмущений с точностью до третьего порядка малости включительно.

В Главе 8 в борновском приближении найдены квантовые кинетические уравнения для системы частично когерентных неравновесных поляритонов. Для получения уравнений использовались два различных подхода. Первый из них основан на использовании полученных в Главе 7 уравнениях Швингера–Дайсона. Во втором подходе используется метод неравновесного статистического оператора. Оба подхода приводят к одной и той же системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для волновой функции поляритонного конденсата, а также нормальной и аномальной функций распределения поляритонов.

В Главе 9 на основе микроскопического подхода изучается временная эволюция неравновесного поляритонного конденсата. Рассмотрение основано на приближении самосогласованного поля. Показано, что это приближение возникает, если в полученных в Главе 8 кинетических уравнениях сохранить только члены первого порядка малости по константе экситон–экситонного взаимодействия. Эти члены описывают наиболее быстрые из протекающих в системе процессов (стадия хаотизации) и являются достаточными для изучения ранней (докинетической) стадии эволюции системы. Показано, что в результате поляритон–поляритонного рассеяния значительное истощение конденсата происходит за очень короткий промежуток времени, определяемый его начальной плотностью. Распад конденсата имеет вид нелинейных затухающих осцилляций.

Исследована динамика функции распределения внеконденсатных поляритонов. Показано, что на начальной стадии эволюции системы она имеет вид симметричного колокола. Затем на контуре функции распределения появляются осцилляции, которые с течением времени переходят в мелкую хаотическую рябь. Площадь под

контуром функции распределения испытывает осцилляции, синфазные осцилляциям плотности поляритонного конденсата. Отмечается зарождение коротковолнового крыла функции распределения. Обращается внимание на возгорание, а затем частичное угасание дополнительного острого пика, возникающего на временном интервале, характеризующемся малыми значениями плотности поляритонного конденсата и относительно медленным ее изменением.

Заслуживает внимания и тот факт, что хотя уравнения, полученные в приближении самосогласованного поля, инвариантны относительно обращения времени, их решение имеет необратимый характер.

Часть I

Оптические и акустические свойства полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения

Глава 3

Волновые функции и квазиэнергетический спектр электронов и дырок прямозонного полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения

§ 3.1 Трансформационные свойства двухзонного уравнения

Прежде чем приступить к решению уравнения (1.17) с 4–потенциалом внешнего поля (1.18), (1.19), обратим внимание на следующее, важное для дальнейшего, обстоятельство. Двухзонное уравнение (1.17) содержит все четыре компоненты 4–вектора $x^\mu = (st, \mathbf{r})$ симметричным образом и, как нетрудно убедиться, формально обладает теми же трансформационными свойствами, что и релятивистское уравнение Дирака. Ниже мы воспользуемся одним из этих свойств, а именно, свойством ковариантности двухзонного уравнения относительно “преобразования Лоренца” к новой “системе отсчета”, в которой пространственные компоненты 4–вектора k равны нулю.

С этой целью рассмотрим преобразование [180]

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu, \quad (\text{I.3.1})$$

осуществляющее переход от исходной “системы отсчета” к вспомогательной. Все величины, относящиеся к вспомогательной “системе отсчета” будем отмечать штрихом.

Требование инвариантности скалярного произведения 4–векторов относительно преобразования (I.3.1) приводит к соотношению для коэффициентов L_ν^μ (δ_ν^ρ — символ Кронекера):

$$L_\nu^\mu L_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho. \quad (\text{I.3.2})$$

Легко проверить, что уравнение (1.17) инвариантно по форме (ковариантно) относительно преобразования (I.3.1) при выполнении следующих условий:

1. Преобразованная волновая функция $\psi'(x')$ имеет вид

$$\psi'(x') = \Lambda^{-1} \psi(x). \quad (\text{I.3.3})$$

2. Матрица Λ удовлетворяет равенству

$$\gamma^\mu L_\mu^\nu = \Lambda^{-1} \gamma^\nu \Lambda. \quad (\text{I.3.4})$$

3. 4–потенциал электромагнитного поля A зависит от пространственно-временных координат лоренц-инвариантным образом:

$$A_{ext}(x') = A_{ext}(Lx) = A_{ext}(x). \quad (\text{I.3.5})$$

Утверждение о ковариантности двухзонного уравнения означает, что в новой “системе отсчета” волновая функция $\psi'(x')$ подчиняется уравнению

$$\left[i\hat{\partial}' + (e_0/c) A'_{ext}(x') - ms \right] \psi'(x') = 0, \quad (\text{I.3.6})$$

в котором, в согласии с (I.3.5),

$$A'_{ext}{}^\mu(x') = L_\nu^\mu A_{ext}^\nu(x). \quad (\text{I.3.7})$$

В соответствии с требованием обращения в нуль в новой “системе отсчета” пространственных компонент 4–вектора k ($\mathbf{k} = 0$) выберем коэффициенты преобразования L_ν^μ в виде¹

$$L_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & 0 & -\sinh 2r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh 2r & 0 & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix}, \quad \tanh 2r = \frac{sk_z}{k_0}. \quad (\text{I.3.8})$$

¹Мы всюду полагаем, что $sk_z/k_0 < 1$.

Этому выбору отвечает следующее решение уравнения (I.3.4) для матрицы Λ :

$$\Lambda = \exp(r\gamma_0\gamma_z) = \cosh r + \gamma_0\gamma_z \sinh r. \quad (\text{I.3.9})$$

Подставляя (I.3.8) в (I.3.1), получаем связь между пространственно-временными координатами в исходной и вспомогательной “системах отсчета”

$$x'^\mu(x) = (st', \mathbf{r}') = \left(\frac{kx}{(k^2)^{1/2}}, x, y, \frac{\mathfrak{a}x}{(k^2)^{1/2}} \right), \quad (\text{I.3.10})$$

где мы ввели 4-вектор

$$\mathfrak{a} = (-k_z, 0, 0, -k_0/s). \quad (\text{I.3.11})$$

Аналогично, можно получить следующие равенства:

$$A'^\mu_{ext}(x') = A^\mu_{ext}(x), \quad (\text{I.3.12})$$

$$k'^\mu(k) = L^\mu_\nu k^\nu = (k'_0/s, 0, 0, k'_z) = ((k^2)^{1/2}, 0, 0, 0), \quad (\text{I.3.13})$$

$$\xi' = k'x'/2 = \xi = k'_0t'/2. \quad (\text{I.3.14})$$

Последнее соотношение обеспечивает выполнение требования (I.3.5).

В заключение параграфа приведем некоторые полезные соотношения для матрицы Λ :

$$\Lambda^\dagger = \Lambda, \quad \Lambda^{-1} = \gamma_0\Lambda\gamma_0 = \exp(-r\gamma_0\gamma_z) = \cosh r - \gamma_0\gamma_z \sinh r, \quad (\text{I.3.15})$$

$$\Lambda^2 = \exp(2r\gamma_0\gamma_z) = \cosh 2r + \gamma_0\gamma_z \sinh 2r, \quad (\text{I.3.16})$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma_0\Lambda &= \gamma_0 \cosh 2r + \gamma_z \sinh 2r, & \Lambda^{-1}\gamma_z\Lambda &= \gamma_z \cosh 2r + \gamma_0 \sinh 2r, \\ \Lambda^{-1}\gamma_x\Lambda &= \gamma_x, & \Lambda^{-1}\gamma_y\Lambda &= \gamma_y, \end{aligned} \quad (\text{I.3.17})$$

$$\begin{aligned} \Lambda\gamma_0\Lambda^{-1} &= \hat{k} (k^2)^{-1/2}, & \Lambda\gamma_z\Lambda^{-1} &= \hat{\mathfrak{a}} (k^2)^{-1/2}, \\ \Lambda\gamma_x\Lambda^{-1} &= \gamma_x, & \Lambda\gamma_y\Lambda^{-1} &= \gamma_y. \end{aligned} \quad (\text{I.3.18})$$

§ 3.2 Решение двухзонного уравнения во вспомогательной “системе отсчета”

В настоящем параграфе мы получим решения уравнения (I.3.6) с 4-потенциалом (I.3.7) во вспомогательной “системе отсчета”, в которой этот потенциал зависит только от временной координаты t' (см. (I.3.14)).

Введем в рассмотрение решения двухзонного уравнения (I.3.6) для свободных носителей заряда полупроводника ($A'_{ext}(x') = A_{ext}(x) \equiv 0$) во вспомогательной “системе отсчета”:

$$\varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(j)'}(x') = \exp(-ijp'x') u_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}'), \quad (\text{I.3.19})$$

$$p'^{\mu} = (\varepsilon(\mathbf{p}')/s, \mathbf{p}'), \quad \varepsilon(\mathbf{p}') = s [(\mathbf{p}')^2 + (ms)^2]^{1/2}. \quad (\text{I.3.20})$$

Здесь $j = \pm$ — индекс, указывающий на соответствие решений электронным (+) или дырочным (−) состояниям, $\sigma = \pm 1$ — спиновый индекс, p' — 4-вектор энергии–импульса свободного электрона или дырки, а биспиноры $u_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')$ без ограничения общности удобно выбрать в виде

$$\begin{aligned} u_{+1}^{(+)' }(\mathbf{p}') &= C'(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} ms^2 + \varepsilon(\mathbf{p}') \\ 0 \\ sp'_z \\ sp'_+ \end{pmatrix}, & u_{-1}^{(+)' }(\mathbf{p}') &= C'(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} 0 \\ ms^2 + \varepsilon(\mathbf{p}') \\ sp'_- \\ -sp'_z \end{pmatrix}, \\ u_{+1}^{(-)' }(\mathbf{p}') &= C'(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} -sp'_z \\ -sp'_+ \\ -ms^2 - \varepsilon(\mathbf{p}') \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{-1}^{(-)' }(\mathbf{p}') &= C'(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} -sp'_- \\ sp'_z \\ 0 \\ -ms^2 - \varepsilon(\mathbf{p}') \end{pmatrix}, \\ p'_{\pm} &= p'_x \pm ip'_y, & C'(\mathbf{p}') &= [2ms^2 (ms^2 + \varepsilon(\mathbf{p}'))]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.21})$$

Функции (I.3.19)–(I.3.21) удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}' [\varphi_{\mathbf{p}'\sigma}^{(j)'}(x')]^{\dagger} \varphi_{\mathbf{p}_1\sigma_1}^{(j_1)' }(x') &= (2\pi)^3 (\varepsilon(\mathbf{p}')/ms^2) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1), \\ (j, j_1 &= \pm, \sigma, \sigma_1 = \pm 1). \end{aligned} \quad (\text{I.3.22})$$

Представив решение уравнения (I.3.6) с 4-потенциалом (I.3.7) в виде разложения

$$\psi'_{\mathbf{p}'}(x') = \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} R_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') \varphi_{j\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x'), \quad (\text{I.3.23})$$

приходим к системе уравнений для коэффициентных функций $R_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi')$:

$$i \frac{d}{d\xi'} R_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = \sum_{j_1=\pm j} \sum_{\sigma_1=\pm\sigma} V_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \xi') R_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \xi') \exp[i\xi'(j-j_1)(2\varepsilon(\mathbf{p}')/k'_0)] , \quad (\text{I.3.24})$$

содержащей матричные элементы $V_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \xi') = \left[V_{\sigma_1,\sigma}^{(j_1,j)}(\mathbf{p}', \xi') \right]^\dagger$, определяемые выражениями ($j, j_1 = \pm 1$; $\sigma, \sigma_1 = \pm 1$)

$$\begin{aligned} V_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \xi') &= 2j\delta_{\sigma,\sigma_1}e_0(s/c) \frac{s\mathbf{p}' \cdot \mathbf{A}'_{ext}(x')}{k'_0\varepsilon(\mathbf{p}')} , \\ V_{\sigma,\sigma}^{(j,-j)}(\mathbf{p}', \xi') &= 2\sigma e_0(s/c) \frac{sp'_z}{ms^2 + \varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{s\mathbf{p}' \cdot \mathbf{A}'_{ext}(x')}{k'_0\varepsilon(\mathbf{p}')} , \end{aligned} \quad (\text{I.3.25})$$

$$\begin{aligned} V_{\sigma,-\sigma}^{(j,-j)}(\mathbf{p}', \xi') &= -2e_0(s/c) \left\{ \frac{1}{k'_0} [A'_{ext\,x}(x') - i\sigma A'_{ext\,y}(x')] \right. \\ &\quad \left. - \frac{s(p'_x - i\sigma p'_y)}{ms^2 + \varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{s\mathbf{p}' \cdot \mathbf{A}'_{ext}(x')}{k'_0\varepsilon(\mathbf{p}')} \right\} . \end{aligned}$$

Отметим, что последнее выражение содержит слагаемое, не зависящее от угла между векторами \mathbf{p}' и \mathbf{A}'_{ext} .

В соответствии с условием резонанса (1.19) ниже нас будут интересовать следующие значения параметров задачи:

$$2ms^2/k'_0 \approx 1; \quad 2e_0as/k'_0, \quad 2s|p'_n|/k'_0 \ll 1 \quad (n = x, y, z) . \quad (\text{I.3.26})$$

Условия (I.3.26) позволяют представить

$$2\varepsilon(\mathbf{p}')/k'_0 = 1 + \delta'(\mathbf{p}') , \quad \text{где} \quad |\delta'(\mathbf{p}')| \ll 1 . \quad (\text{I.3.27})$$

Выполнив в (I.3.24) подстановку

$$R_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') \exp \left\{ i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 [j\delta'(\mathbf{p}') - V_{\sigma,\sigma}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \xi'_1)] \right\} , \quad (\text{I.3.28})$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi'} r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') &= -i \sum_{j_1=\pm j} \sum_{\sigma_1=\pm\sigma} [j\delta'(\mathbf{p}')\delta_{j,j_1}\delta_{\sigma,\sigma_1} \\ &\quad + (1 - \delta_{j,j_1}\delta_{\sigma,\sigma_1}) \tilde{V}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \xi')] r_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \xi') e^{i(j-j_1)\xi'} , \end{aligned} \quad (\text{I.3.29})$$

где

$$\tilde{V}_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}', \xi') = V_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}', \xi') \exp \left\{ i \int_0^{\xi'} d\xi_1' [V_{\sigma, \sigma}^{(j, j)}(\mathbf{p}', \xi_1') - V_{\sigma_1, \sigma_1}^{(j_1, j_1)}(\mathbf{p}', \xi_1')] \right\}. \quad (\text{I.3.30})$$

Принимая во внимание явный вид матричных элементов (I.3.30) и представление (I.3.27), нетрудно заметить, что полученная система уравнений (I.3.29) имеет стандартную форму для ее приближенного решения с помощью асимптотического метода усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [181], которым мы и воспользуемся.

Согласно методу Крылова–Боголюбова–Митропольского, в первом приближении решение системы уравнений (I.3.29) имеет вид

$$r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = \tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi'), \quad (\text{I.3.31})$$

где функции $\tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi')$ ($j, j_1 = \pm$, $\sigma, \sigma_1 = \pm 1$) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi'} \tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = & -i \sum_{j_1 = \pm j} \sum_{\sigma_1 = \pm \sigma} [j \delta'(\mathbf{p}') \delta_{j, j_1} \delta_{\sigma, \sigma_1} \\ & + (1 - \delta_{j, j_1} \delta_{\sigma, \sigma_1}) f_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}')] \tilde{r}_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \xi'), \end{aligned} \quad (\text{I.3.32})$$

получающейся из (I.3.29) путем усреднения правой части последней по явно содержащейся в ней переменной ξ' . Матричные элементы $f_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}')$ определяются выражением

$$f_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\xi' \tilde{V}_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}', \xi') \exp [i (j - j_1) \xi']. \quad (\text{I.3.33})$$

Их вычисление приводит к следующей оценке:

$$f_{\sigma, -\sigma}^{(j, j)} = 0, \quad f_{\sigma, -\sigma}^{(j, -j)} \sim \frac{2e_0 a s}{c k_0'}, \quad f_{\sigma, \sigma}^{(j, -j)} \sim \frac{2e_0 a s}{c k_0'} \frac{2s p_z'}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{s \sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}}{\varepsilon(\mathbf{p}')}. \quad (\text{I.3.34})$$

Учитывая (I.3.34) и условия (I.3.26), (I.3.27), сохраним в правой части (I.3.32) только слагаемые с $j_1 = j, \sigma_1 = \sigma$ и $j_1 = -j, \sigma_1 = -\sigma$. При вычислении $f_{\sigma, -\sigma}^{(j, -j)}(\mathbf{p}')$ опустим члены высшего порядка малости. В результате получим две независимые системы, по два линейных дифференциальных уравнения в каждой, для определения неизвестных функций $\tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi')$:

$$\left(i \frac{d}{d\xi'} - j \delta'(\mathbf{p}') \right) \tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = -\rho_{\sigma}^{(j)'} \tilde{r}_{-\sigma}^{(-j)}(\mathbf{p}', \xi'). \quad (\text{I.3.35})$$

Здесь

$$\rho_{\sigma}^{(j)'} = \rho' \left(\frac{1 + j\sigma G}{2} \right) = \rho_{-\sigma}^{(-j)'}, \quad \rho' \equiv \frac{2e_0 a s}{ck_0'} \ll 1, \quad (j = \pm, \sigma = \pm 1). \quad (\text{I.3.36})$$

Общее решение уравнений (I.3.35) удобно представить в форме:

$$\tilde{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = \sum_{\nu=\pm} c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + j\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp(-i\nu \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') \xi'), \quad (\text{I.3.37})$$

где

$$\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') = \sqrt{\delta'^2(\mathbf{p}') + \rho_{\sigma}^{(j)2}} = \lambda_{-\sigma}^{(-j)'(\mathbf{p}')}, \quad (\text{I.3.38})$$

а коэффициенты $c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}')$ удовлетворяют соотношению симметрии

$$c_{-\sigma,\nu}^{(-j)}(\mathbf{p}') = -\nu c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \quad (j = \pm, \sigma = \pm 1, \nu = \pm 1). \quad (\text{I.3.39})$$

Объединяя формулы (I.3.23), (I.3.28), (I.3.31) и (I.3.37) получим приближенное решение уравнения (I.3.6) с 4-потенциалом внешнего поля (I.3.7) в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}'}'(x') &= \sum_{\nu=\pm 1} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + j\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \varphi_{j\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') \\ &\times \exp \left\{ -i \int_0^{\xi'} d\xi_1' [\nu \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') - j\delta'(\mathbf{p}') + V_{\sigma,\sigma}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \xi_1')] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.3.40})$$

Выберем коэффициенты $c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}')$ таким образом, чтобы выполнялось предельное условие ($j_1 = \pm, \sigma_1 = \pm 1$)

$$\psi_{j_1\mathbf{p}'}'(x') \equiv \psi_{\mathbf{p}',\sigma_1}^{(j_1)'}(x') \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p}',\sigma_1}^{(j_1)'}(x') \quad \text{при} \quad a \rightarrow 0, \quad (\text{I.3.41})$$

в котором $\varphi_{\mathbf{p}',\sigma_1}^{(j_1)'}(x')$ — определенные формулами (I.3.19)–(I.3.21) решения двухзонного уравнения (I.3.6) при $A'(x') \equiv 0$ во вспомогательной “системе отсчета”. Имеем:

$$c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = \Theta[j_1 \nu \delta'(\mathbf{p}')] (\delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} - \nu \delta_{j,-j_1} \delta_{\sigma,-\sigma_1}). \quad (\text{I.3.42})$$

Легко заметить, что выражение (I.3.42) автоматически удовлетворяет соотношению (I.3.39). Подставляя (I.3.42) в (I.3.40), получим следующий результат для функции $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ ($j = \pm, \sigma = \pm 1$):

$$\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') = \exp \left\{ -ij\xi' [\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') \text{sign } \delta'(\mathbf{p}') - \delta'(\mathbf{p}')] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\varphi_{\mathbf{p}', \sigma}^{(j)'}(x') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp \left(-i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(\mathbf{p}', \xi'_1) \right) \right. \\
& \left. + \gamma_0 e^{-2ij(p' - \frac{k'}{2})x'} \varphi_{\mathbf{p}', -\sigma}^{(-j)'}(x') \text{sign } \delta'(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp \left(i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(\mathbf{p}', \xi'_1) \right) \right].
\end{aligned} \tag{I.3.43}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$V'(\mathbf{p}', \xi') = 2 \frac{s\mathbf{p}'}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \cdot \frac{e_0 \mathbf{A}'_{ext}(\xi')}{ck'_0}. \tag{I.3.44}$$

При получении (I.3.43) было использовано равенство

$$\varphi_{-\mathbf{p}', -\sigma}^{(-j)'}(x') e^{-2ij\delta'(\mathbf{p}')\xi'} = -j\gamma_0 \varphi_{\mathbf{p}', -\sigma}^{(-j)'}(x') e^{-2ij(p' - \frac{k'}{2})x'}. \tag{I.3.45}$$

Нетрудно показать, что функции (I.3.43) удовлетворяют тому же условию ортонормировки (I.3.22), что и волновые функции (I.3.19) свободных носителей заряда полупроводника.

§ 3.3 Решения двухзонного уравнения в исходной “системе отсчета”

Используя полученные результаты, найдем решения двухзонного уравнения (1.17) с 4–потенциалом внешнего поля (1.18), (1.19) в исходной “системе отсчета”. Для этого представим общее решение уравнения (I.3.6) с 4–потенциалом (I.3.7) в виде разложения по полной ортонормированной системе функций (I.3.43):

$$\psi'(x') = (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{p}'}{2\varepsilon(\mathbf{p}')} a_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') \psi_{\mathbf{p}', \sigma}^{(j)'}(x'). \tag{I.3.46}$$

Частный выбор коэффициентов

$$a_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') = (2\pi)^{3/2} 2\varepsilon(\mathbf{p}') \delta_{j, j_1} \delta_{\sigma, \sigma_1} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1) \quad (j_1 = \pm, \sigma_1 = \pm 1) \tag{I.3.47}$$

отвечает решениям (I.3.43). Учитывая явный вид функций $\psi_{\mathbf{p}', \sigma}^{(j)'}(x')$, представим (I.3.46) в форме

$$\psi'(x') = (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \int d^4 p a_{\sigma}^{(j)'}(j\mathbf{p}') e^{-ip'x'}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Theta(jp'_0) \delta(p'^2 - (ms)^2) \exp \left\{ -ij\xi' [\lambda_{\sigma}^{(j)'}(j\mathbf{p}') \text{sign } \delta'(j\mathbf{p}') - \delta'(j\mathbf{p}')] \right\} \\
& \times \left[u_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp \left(-i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(j\mathbf{p}', \xi'_1) \right) \right. \\
& \left. + \text{sign } \delta'(j\mathbf{p}') e^{2ij\xi'} \gamma_0 u_{-\sigma}^{(-j)'}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp \left(i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(j\mathbf{p}', \xi'_1) \right) \right]. \quad (I.3.48)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением (I.3.3), перейдем в (I.3.48) к новым переменным интегрирования посредством линейного преобразования

$$p'^{\mu}(p) = L^{\mu}_{\nu} p^{\nu} = \left(\frac{kp}{(k^2)^{1/2}}, p_x, p_y, \frac{\wp p}{(k^2)^{1/2}} \right), \quad (I.3.49)$$

якобиан которого равен единице. В результате получим следующее выражение для общего решения уравнения (1.17)–(1.19) в исходной “системе отсчета”:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \int d^4p a_{\sigma}^{(j)'}[j\mathbf{p}'(p)] e^{-ipx} \\
& \times \Theta(jp_0) \delta(p^2 - (ms)^2) \exp \left(-ij\xi' \left\{ \lambda_{\sigma}^{(j)'}[j\mathbf{p}'(p)] \text{sign } \delta'[j\mathbf{p}'(p)] - \delta'[j\mathbf{p}'(p)] \right\} \right) \\
& \times \left[\Lambda u_{\sigma}^{(j)'}[j\mathbf{p}'(p)] \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta'[j\mathbf{p}'(p)]|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}[j\mathbf{p}'(p)]} \right)} \exp \left(-i \int_0^{\xi} d\xi_1 V'(j\mathbf{p}'(p), \xi_1) \right) \right. \\
& \left. + \text{sign } \delta'[j\mathbf{p}'(p)] e^{2ij\xi} \hat{k} (k^2)^{-1/2} \Lambda u_{-\sigma}^{(-j)'}[j\mathbf{p}'(p)] \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta'[j\mathbf{p}'(p)]|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}[j\mathbf{p}'(p)]} \right)} \right. \\
& \left. \times \exp \left(i \int_0^{\xi} d\xi_1 V'(j\mathbf{p}'(p), \xi_1) \right) \right]. \quad (I.3.50)
\end{aligned}$$

При выводе формулы (I.3.50) мы воспользовались соотношениями²

$$p'x' = px, \quad \xi' = \xi \quad (\text{см. (I.3.14)}),$$

$$\Theta(jp'_0) \delta(p'^2 - (ms)^2) = \Theta(jp_0) \delta(p^2 - (ms)^2)$$

и первым из равенств (I.3.18).

Введем обозначения:

$$\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) \equiv \lambda_{\sigma}^{(j)'}[\mathbf{p}'(p)] = \sqrt{\delta^2(\mathbf{p}) + \rho_{\sigma}^{(j)2}}, \quad \delta(\mathbf{p}) \equiv \delta'[\mathbf{p}'(p)] = 2\frac{kp}{k^2} - 1,$$

²Напомним, что 4–векторы x' и x связаны преобразованием (I.3.1)

$$\rho_{\sigma}^{(j)} = \rho \left(\frac{1 + j\sigma G}{2} \right), \quad \rho = \frac{2e_0 a}{c(k^2)^{1/2}} \ll 1, \quad (\text{I.3.51})$$

$$V(\mathbf{p}, \xi) \equiv V'[\mathbf{p}'(p), \xi] = \frac{2e_0}{c} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_{ext}(\xi)}{kp}. \quad (\text{I.3.52})$$

Выполняя в (I.3.50) интегрирование по переменной p_0 , получаем

$$\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\varepsilon(\mathbf{p})} a_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x). \quad (\text{I.3.53})$$

Здесь

$$a_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = a_{\sigma}^{(j)'}[\mathbf{p}'(p)] \quad (\text{I.3.54})$$

— произвольные коэффициенты разложения,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = & \exp \left\{ -ij\xi \left[\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) \text{sign } \delta(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}) \right] \right\} \\ & \times \left[\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})} \right)} \exp \left(-i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \xi_1) \right) \right. \\ & \left. + \hat{k} (k^2)^{-1/2} e^{-2ij(p - \frac{k}{2})x} \varphi_{\mathbf{p},-\sigma}^{(-j)}(x) \text{sign } \delta(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})} \right)} \exp \left(i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \xi_1) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.3.55})$$

— решения двухзонного уравнения (1.17)–(1.19) в исходной “системе отсчета”, удовлетворяющие предельному условию

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \quad \text{при } a \rightarrow 0, \quad (\text{I.3.56})$$

в котором

$$\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = \Lambda \varphi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)'}[x(x')] \quad (\text{I.3.57})$$

— решения двухзонного уравнения (1.17) для свободных носителей заряда ($\mathbf{A}_{ext}(x) \equiv 0$) в исходной “системе отсчета” [182, 183, 184, 185].

В формулах (I.3.53)–(I.3.57) и ниже 4–вектор p , имеющий смысл 4–вектора энергии–импульса свободной частицы в исходной “системе отсчета”, обладает компонентами

$$p = (\varepsilon(\mathbf{p})/s, \mathbf{p}), \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = s \sqrt{\mathbf{p}^2 + (ms)^2}. \quad (\text{I.3.58})$$

Приведем явный вид функций $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$:

$$\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = e^{-ijpx} u_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}), \quad (\text{I.3.59})$$

где индексы $j = \pm$ и $\sigma = \pm 1$ имеют тот же смысл, что и для решений (I.3.19) двухзонного уравнения с $\mathbf{A}'_{ext}(x') \equiv 0$ во вспомогательной “системе отсчета”, а биспиноры

$$u_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = \Lambda u_{\sigma}^{(j)'}[\mathbf{p}'(p)] \quad (\text{I.3.60})$$

определяются выражениями

$$\begin{aligned} u_{+1}^{(+)}(\mathbf{p}) &= C(\mathbf{p})\Lambda \begin{pmatrix} ms^2 + \frac{skp}{(k^2)^{1/2}} \\ 0 \\ \frac{s\mathfrak{a}ep}{(k^2)^{1/2}} \\ sp_+ \end{pmatrix}, & u_{-1}^{(+)}(\mathbf{p}) &= C(\mathbf{p})\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ ms^2 + \frac{skp}{(k^2)^{1/2}} \\ sp_- \\ -\frac{s\mathfrak{a}ep}{(k^2)^{1/2}} \end{pmatrix}, \\ u_{+1}^{(-)}(\mathbf{p}) &= C(\mathbf{p})\Lambda \begin{pmatrix} -\frac{s\mathfrak{a}ep}{(k^2)^{1/2}} \\ -sp_+ \\ -ms^2 - \frac{skp}{(k^2)^{1/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{-1}^{(-)}(\mathbf{p}) &= C(\mathbf{p})\Lambda \begin{pmatrix} -sp_- \\ \frac{s\mathfrak{a}ep}{(k^2)^{1/2}} \\ 0 \\ -ms^2 - \frac{skp}{(k^2)^{1/2}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.3.61})$$

$$p_{\pm} = p_x \pm ip_y, \quad C(\mathbf{p}) = \left[2ms^2 \left(ms^2 + \frac{skp}{(k^2)^{1/2}} \right) \right]^{-1/2}.$$

Функции (I.3.59) удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} [\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)]^{\dagger} \varphi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) &= (2\pi)^3 (\varepsilon(\mathbf{p})/ms^2) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \\ & (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1). \end{aligned} \quad (\text{I.3.62})$$

Сравнение (I.3.22) и (I.3.62) показывает, что используемая нами нормировка биспиноров

$$\bar{u}_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}') u_{\sigma_1}^{(j_1)'}(\mathbf{p}') = \bar{u}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) u_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}) = j \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \quad (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1) \quad (\text{I.3.63})$$

удобна тем, что условие ортонормировки для решений двухзонного уравнения ковариантно относительно “преобразования Лоренца” (I.3.1).

В том, что функции (I.3.59) действительно являются решениями уравнения (1.17) при $\mathbf{A}_{ext}(x) \equiv 0$ можно убедиться непосредственной подстановкой.

Заметим, что если в (I.3.46) коэффициенты разложения выбраны в виде (I.3.47), то, в соответствии с определением (I.3.54),

$$a_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{3/2} 2\varepsilon(\mathbf{p}) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \quad (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1), \quad (\text{I.3.64})$$

т.е. общее решение (I.3.53) в этом случае переходит в функции (I.3.55). Таким образом, если во вспомогательной “системе отсчета” состояние частицы во внешнем поле электромагнитной волны описывалось функцией $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ из (I.3.43), то ее состояние в исходной “системе отсчета” будет описываться функцией $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ из (I.3.55). Легко заметить, что функции $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ и $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ связаны между собой соотношением

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = \Lambda \psi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)'} [x(x')] . \quad (\text{I.3.65})$$

С другой стороны, поскольку имеют место предельные условия (I.3.41) и (I.3.56), понятен и смысл решений (I.3.19) и (I.3.59) для свободных носителей заряда — состоянию свободной частицы (I.3.19) во вспомогательной “системе отсчета” отвечает состояние (I.3.59) в исходной “системе отсчета”. Связь между решениями (I.3.19) и (I.3.59) дается формулой (I.3.57).

Обратимся теперь к вопросу об ортогональности и нормировке полученных решений (I.3.55) уравнения (1.17)–(1.19). Зависимость решений (I.3.43) уравнения (I.3.6), (I.3.7) во вспомогательной “системе отсчета” от пространственных координат имеет простой вид ($\sim \exp(ij\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}')$) и поэтому непосредственное вычисление нормировочного интеграла не составляет труда. Аналогичное вычисление в исходной “системе отсчета” сопряжено со значительными трудностями, которые, однако, удастся обойти, если принять во внимание установленную здесь связь (I.3.65) между функциями $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ и $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ и воспользоваться уже известным результатом

$$\int d\mathbf{r}' \left[\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') \right]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)'}(x') = (2\pi)^3 \left(\varepsilon(\mathbf{p}')/ms^2 \right) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1) , \quad (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1) . \quad (\text{I.3.66})$$

Для этого рассмотрим тождество

$$\left[\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \right]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) = \frac{-i\partial}{j\partial p - j_1\partial p_1} \left[\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \right]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) \quad (j\partial p \neq j_1\partial p_1) , \quad (\text{I.3.67})$$

в котором

$$p = (\varepsilon(\mathbf{p})/s, \mathbf{p}) , \quad p_1 = (\varepsilon(\mathbf{p}_1)/s, \mathbf{p}_1) , \quad (\text{I.3.68})$$

и уравнение непрерывности для 4-вектора плотности тока

$$\partial^\mu [e_0 (s/c) \bar{\psi}_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \gamma_\mu \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x)] = 0. \quad (\text{I.3.69})$$

Соотношение (I.3.69) следует из исходного уравнения (1.17). С помощью (I.3.67), (I.3.63) выводим равенство

$$\int d\mathbf{r} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) = \frac{i}{j\mathfrak{a}p - j_1\mathfrak{a}p_1} \int d\mathbf{r} \frac{d}{dz} \bar{\psi}_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \hat{k} \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x). \quad (\text{I.3.70})$$

Учитывая (I.3.1), (I.3.63) и первое из равенств (I.3.18), перепишем (I.3.70) в виде

$$\int d\mathbf{r} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) = \frac{i(k^2)^{1/2}}{jp'_z - j_1p'_{z_1}} \int d\mathbf{r}' \frac{d}{dz'} [\psi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)'}(x')]^\dagger \psi_{\mathbf{p}'(p_1),\sigma_1}^{(j_1)'}(x'). \quad (\text{I.3.71})$$

Теперь заметим, что равенство, аналогичное (I.3.70), может быть получено и во вспомогательной “системе отсчета”:

$$\int d\mathbf{r}' [\psi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)'}(x')]^\dagger \psi_{\mathbf{p}'(p_1),\sigma_1}^{(j_1)'}(x') = \frac{i}{jp'_z(p) - j_1p'_z(p_1)} \int d\mathbf{r}' \frac{d}{dz'} [\psi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)'}(x')]^\dagger \psi_{\mathbf{p}'(p_1),\sigma_1}^{(j_1)'}(x'). \quad (\text{I.3.72})$$

Сопоставляя (I.3.71) и (I.3.72), получим, с учетом (I.3.66),

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) = \\ & = (2\pi)^3 \left(\varepsilon(\mathbf{p}')/ms^2 \right) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \frac{p'_z(p) - p'_z(p_1)}{\left(\frac{\mathfrak{a}p}{(k^2)^{1/2}} - \frac{\mathfrak{a}p_1}{(k^2)^{1/2}} \right)} \delta(\mathbf{p}'(p) - \mathbf{p}'(p_1)) \\ & (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1). \end{aligned} \quad (\text{I.3.73})$$

Или, переходя от переменных \mathbf{p}' к переменным \mathbf{p} с помощью формул (I.3.49), (I.3.58), имеем:

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} [\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)]^\dagger \psi_{\mathbf{p}_1,\sigma_1}^{(j_1)}(x) = (2\pi)^3 \left(\varepsilon(\mathbf{p})/ms^2 \right) \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \\ & (j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1). \end{aligned} \quad (\text{I.3.74})$$

Т.о., функции (I.3.55) подчиняются тому же условию ортонормировки, что и решения (I.3.59) двухзонного уравнения для свободных частиц.

Отметим, что условия (I.3.26), налагающие ограничения на область изменения параметров задачи, в исходной “системе отсчета” принимают вид

$$\frac{2ms}{(k^2)^{1/2}} \approx 1, \quad \frac{2}{(k^2)^{1/2}} \left(|p_x|, |p_y|, \frac{|\mathfrak{a}p|}{(k^2)^{1/2}}, \frac{e_0 a}{c} \right) \ll 1. \quad (\text{I.3.75})$$

§ 3.4 Точно решаемая модель

Приведем частный пример, в котором уравнение (1.17), (1.18) допускает точное решение. Такая возможность имеется в одномерном случае, когда проекция импульса заряженной частицы на направление внешнего поля \mathbf{A}_{ext} равна нулю, а само поле поляризовано по кругу [186, 187]:

$$p_x, p_y = 0, \quad G = \pm 1. \quad (\text{I.3.76})$$

Действительно, выполним в (I.3.20) подстановку

$$R_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') \exp [ij\delta_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}')\xi'] , \quad (\text{I.3.77})$$

Здесь

$$\delta_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}') = 2\frac{\varepsilon(\mathbf{p}')}{k'_0} - j\sigma G = \delta_{-\sigma}^{(-j)'}(\mathbf{p}'), \quad \mathbf{p}' = (0, 0, p'_z), \quad \varepsilon(\mathbf{p}') = s\sqrt{\mathbf{p}'^2 + (ms)^2}. \quad (\text{I.3.78})$$

Учитывая (I.3.21), получим систему уравнений

$$\left(i\frac{d}{d\xi'} - j\delta_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}') \right) r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = -\rho' r_{-\sigma}^{(-j)'}(\mathbf{p}', \xi'), \quad (\text{I.3.79})$$

общее решение которой можно представить в форме

$$r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \xi') = \sum_{\nu=\pm} c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + j\nu \frac{\delta_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}')}{\Lambda_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}')} \right)} \exp [ij\Lambda_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}')\xi'] , \quad (\text{I.3.80})$$

где

$$\Lambda_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}') = \sqrt{\delta_\sigma^{(j)'^2}(\mathbf{p}') + \rho'^2} = \Lambda_{-\sigma}^{(-j)'}(\mathbf{p}'), \quad (\text{I.3.81})$$

а коэффициенты $c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}')$ удовлетворяют соотношению (I.3.39). Выберем эти коэффициенты таким образом, чтобы для функции $\psi_{\mathbf{p}'}^{(j)}(x')$, определяемой формулами (I.3.23), (I.3.77), (I.3.80), имело место предельное условие (I.3.41):

$$c_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = \Theta [j_1\nu\delta_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}')] (\delta_{j,j_1}\delta_{\sigma,\sigma_1} - \nu\delta_{j,-j_1}\delta_{\sigma,-\sigma_1}) \quad (j_1 = \pm, \sigma_1 = \pm 1). \quad (\text{I.3.82})$$

Приведем искомые решения сразу в исходной “системе отсчета”: ($j_1 = \pm, \sigma_1 = \pm 1$)

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = \exp \left\{ -ij\xi \left[\Lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}) \text{sign } \delta_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}) - \delta_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}) \right] \right\} \left[\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta_\sigma^{(j)}(\mathbf{p})|}{\Lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p})} \right)} \right]$$

$$+ \hat{k}(k^2)^{-1/2} \varphi_{\mathbf{p}, -\sigma}^{(-j)}(x) e^{-2ij(p-j\sigma G \frac{k}{2})x} \text{sign } \delta_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})|}{\Lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})} \right)} \Bigg] , \quad (\text{I.3.83})$$

$$\Lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\delta_{\sigma}^{(j)2}(\mathbf{p}) + \rho^2} , \quad \delta_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = 2 \frac{kp}{k^2} - j\sigma G ,$$

$$p = (\varepsilon(p_z)/s, 0, 0, p_z) , \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = s \sqrt{p_z^2 + (ms)^2} . \quad (\text{I.3.84})$$

Функции (I.3.83) удовлетворяют предельному условию (I.3.56) и следующему соотношению ортогональности и нормировки:

$$\int dz [\psi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x)]^{\dagger} \psi_{\mathbf{p}_1, \sigma_1}^{(j_1)}(x) = (2\pi)^3 (\varepsilon(\mathbf{p})/ms^2) \delta_{j, j_1} \delta_{\sigma, \sigma_1} \delta(p_z - p_{z1}) ,$$

$$(j, j_1 = \pm; \sigma, \sigma_1 = \pm 1) . \quad (\text{I.3.85})$$

При $s = c$, $k^2 = 0$ (I.3.83), (I.3.84) переходят в известные волковские решения уравнения Дирака [188, 189, 190].

§ 3.5 Квазиэнергетический спектр

Одной из важнейших характеристик квантовой системы является ее энергетический спектр. Его особенности (например, наличие щелей, разрывов, дискретных уровней) определяют многие существенные черты динамики системы. Иногда уже одного вида спектра достаточно для того, чтобы предсказать, какие физические процессы могут протекать в системе, а какие — нет.

Если на систему действует внешнее возмущение, то, как правило, ее энергетический спектр изменяется, деформируется и эти изменения могут в определенной мере повлиять на физические свойства всей системы в целом. Особенно значительны изменения спектра в различных резонансных ситуациях, например, при циклотронном резонансе [191, 192, 193, 194, 195], при облучении полупроводника электромагнитным излучением, частота которого близка к ширине запрещенной зоны [17] либо к величине зазора между двумя зонами проводимости [196]. Существенно, что в резонансных условиях даже относительно слабое возмущение способно радикальным образом

перестроить энергетический спектр системы. Естественно, что изучение энергетического спектра и тех изменений, которые в нем возникают под действием внешних возмущений, представляет значительный интерес.

В предыдущем параграфе на основе простой двухзонной модели, описываемой уравнением (1.17), были получены волновые функции носителей заряда полупроводника, взаимодействующего с внешним полем резонансной электромагнитной волны (1.18), (1.19). В отсутствие внешнего поля энергетический спектр носителей заряда, т.е. зависимость энергии частицы от ее импульса, представляет собой обычные двукратно вырожденные валентную зону и зону проводимости, разделенные зазором в $2ms^2 = \varepsilon_g$. Взаимодействие с внешним полем может привести к значительным изменениям в этой картине и, таким образом, существенно повлиять на динамику электронов и дырок полупроводника. Использование полученных в § 3.3 результатов позволяет выявить эти изменения и установить, каким образом они сказываются на оптических и акустических свойствах рассматриваемой системы [182, 183, 184, 185].

Согласно § 3.3, состояния электронов и дырок полупроводника, во внешнем поле резонансной электромагнитной волны (1.18), (1.19), описываются волновыми функциями (I.3.55), которые могут быть представлены в форме

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = f_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(\xi) \exp(-ijP_{\sigma}^{(j)}x) . \quad (\text{I.3.86})$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(\xi) = & U_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})u_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) \exp\left(-i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\xi_1)\right) \\ & + \hat{k}(k^2)^{-1/2}V_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})u_{-\sigma}^{(-j)}(\mathbf{p})e^{2ij\xi} \exp\left(i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\xi_1)\right) \end{aligned} \quad (\text{I.3.87})$$

— периодическая (с периодом внешнего поля) функция переменной 2ξ , $P_{\sigma}^{(j)}$ — 4-вектор квазиэнергии–квазиимпульса, определяемый выражением

$$P_{\sigma}^{(j)} = p + \frac{1}{2} [\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})\varsigma(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p})] k , \quad \varsigma(\mathbf{p}) = \text{sign } \delta(\mathbf{p}) . \quad (\text{I.3.88})$$

В формуле (I.3.87) используются обозначения:

$$U_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})} \right)}, \quad V_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})} \right)}. \quad (\text{I.3.89})$$

Волновые функции (I.3.86), (I.3.87) были получены с помощью предельного условия (I.3.41), которое в исходной “системе отсчета” приобретает вид (I.3.56). Однако, как показано в Приложении ii, использование этого условия не позволяет установить взаимнооднозначное соответствие между функциями $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ и решениями двухзонного уравнения $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$, описывающими состояния свободных носителей заряда полупроводника. Иными словами, ответ на вопрос, в каком состоянии окажется частица, взаимодействующая с внешним полем (1.18), (1.19), если до взаимодействия она находилась в состоянии, описываемом волновой функцией $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$, не может быть получен с помощью условия (I.3.56). Более того, согласно результатам Приложения ii, использование одного только этого условия оказывается явно недостаточным для установления однозначной связи между 4-векторами $P_{\sigma}^{(j)}$ и p , определение которой необходимо для нахождения квазиэнергетического спектра носителей заряда полупроводника, взаимодействующих с внешним полем электромагнитной волны.

Требуемая однозначность может быть достигнута, если предположить определенное асимптотическое поведение внешнего поля. Пусть взаимодействие электронов и дырок полупроводника с полем (1.18), (1.19) адиабатически медленно включается, а затем выключается при $\eta \rightarrow -\infty$ и $\eta \rightarrow +\infty$, соответственно:

$$A_{ext}(x) = a \exp(-|\eta|) (0, \cos 2\xi, G \sin 2\xi, 0), \quad (\text{I.3.90})$$

где

$$\eta = k_1 x, \quad k_1 = (k_{10}/s, 0, 0, k_{1z}) \quad k_{10} \rightarrow 0 \quad (sk_{1z}/k_{10} = \text{const} < 1).$$

Решения двухзонного уравнения с 4-потенциалом внешнего поля (I.3.90), удовлетворяющие асимптотическим условиям

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{I.3.91})$$

даются формулами (ii.41), (ii.42) и могут быть получены из функций (I.3.86)–(I.3.89) посредством простой замены 4–вектора (I.3.88) на 4–вектор (ii.42). Очевидно, что 4–векторы (I.3.88) и (ii.42) совпадают лишь в случае, когда $sk_{1z}/k_{10} \rightarrow sk_z/k_0$, т.е. когда включение и выключение внешнего поля (1.18), (1.19) осуществляется по переменной ξ , пропорциональной фазе электромагнитной волны.

Наиболее адекватной реальной экспериментальной ситуации, по-видимому, является постановка задачи, при которой внешнее поле включается и выключается во времени ($k_{1z} = 0$) (см. сноску на стр. 253, а также [197, 198, 199, 200, 201]). В этом случае, если частица при $t \rightarrow -\infty$ ($k_{10}t \rightarrow -\infty$) находилась в стационарном состоянии $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ (характеризующемся энергией $\varepsilon(\mathbf{p})$ и импульсом \mathbf{p}), то в любой конечный момент времени ($k_{10}t \rightarrow 0$) она будет находиться в состоянии с определенными значениями квазиэнергии

$$E_{\sigma}^{(j)} = \varepsilon + \frac{1}{2} [\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p})\varsigma(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p})] \frac{sk^2}{k_0} \quad (\text{I.3.92})$$

и квазиимпульса

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}. \quad (\text{I.3.93})$$

При $t \rightarrow +\infty$ ($k_{10}t \rightarrow +\infty$) частица вновь окажется в исходном состоянии $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$.

Формулы (I.3.92), (I.3.93) определяют закон дисперсии (зависимость квазиэнергии от квазиимпульса) электронно-дырочных возбуждений, возникающих в полупроводнике в результате воздействия внешнего поля резонансной электромагнитной волны. В дальнейшем при исследовании закона дисперсии будем, простоты ради, пренебрегать волновым вектором внешней волны \mathbf{k} . В этом случае условия (I.3.75) принимают вид

$$\frac{\varepsilon_g}{k_0} \approx 1, \quad \left(\frac{2s|\mathbf{P}|}{k_0}, \frac{2e_0as}{ck_0} \right) \ll 1, \quad (\text{I.3.94})$$

а зависимость квазиэнергии возбуждения $E_{\sigma}^{(j)}$ от его импульса \mathbf{P} дается выражением

$$E_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{P}) = \frac{k_0}{2} \left[1 + \text{sign } \delta(\mathbf{P}) \sqrt{\delta^2(\mathbf{P}) + \rho^2 \left(\frac{1 + j\sigma G}{2} \right)^2} \right],$$

$$\delta(\mathbf{P}) \approx -\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \frac{\mathbf{P}^2}{m\varepsilon_g}. \quad (\text{I.3.95})$$

Здесь необходимо отметить, что, согласно (I.3.86), (I.3.87), кроме четырех квазиэнергетических ветвей, описываемых формулой (I.3.95), в квазиэнергетическом спектре носителей заряда полупроводника присутствуют также однофотонные повторения $E_{\sigma}^{(+)} - k_0$ и $-E_{\sigma}^{(-)} + k_0$ этих ветвей.

Очевидное соотношение $E_{-\sigma}^{(-j)}(\mathbf{P}) = E_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{P})$ позволяет ограничиться при изучении зависимости квазиэнергии частицы от квазиимпульса (импульса) исследованием только случая $j = +$:

$$E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P}) = \frac{k_0}{2} \left[1 + \text{sign } \delta(\mathbf{P}) \sqrt{\delta^2(\mathbf{P}) + \rho^2 \left(\frac{1 + \sigma G}{2} \right)^2} \right]. \quad (\text{I.3.96})$$

Рассмотрим сначала область неотрицательных значений параметра G : $0 \leq G \leq 1$.

Согласно (I.3.96) и второй из формул (I.3.95), значения импульса

$$P_0 = \sqrt{m\Delta}, \quad (\text{I.3.97})$$

при которых $\delta(\mathbf{P}) = 0$, отвечают точкам разрыва дисперсионных кривых $E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P})$.

Величина скачка квазиэнергии в точках разрыва составляет

$$\Delta_1 = \rho k_0 \left(\frac{1 + G}{2} \right) \quad (\text{I.3.98})$$

для кривой $E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P})$ и

$$\Delta_2 = \rho k_0 \left(\frac{1 - G}{2} \right) \quad (\text{I.3.99})$$

— для $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$. В случае линейной поляризации внешнего поля ($G = 0$) имеем $\Delta_1 = \Delta_2$. При циркулярной поляризации ($G = +1$) кривая $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$ остается непрерывной, а скачок кривой $E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P})$ в точке разрыва достигает своего максимального значения $\Delta_2^{max} = \rho k_0$.

Если $G \neq 0$, то основная часть кривой $E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P})$ располагается выше основной части кривой $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$ и, наоборот, отщепившаяся часть кривой $E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P})$ располагается ниже отщепившейся части кривой $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$. Таким образом, воздействие на полупроводник внешнего поля (1.18), (1.19) способно привести к снятию вырождения зон по спиновому индексу. Максимальное расстояние по квазиэнергии между дисперсион-

ными кривыми $E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P})$ и $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$ достигается в точке разрыва и составляет

$$\left[E_{+1}^{(+)}(\mathbf{P}) - E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P}) \right] \Big|_{P=P_0 \pm 0} = \pm \frac{\rho \varepsilon_g}{2} G. \quad (\text{I.3.100})$$

Из (I.3.100) следует, что при $G \rightarrow 0$ кривые $E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P})$ сливаются (спиновое вырождение восстанавливается), а при $G = +1$ расстояние между ними достигает своего максимального значения $\rho \varepsilon_g / 2$.

Отметим, что при $P_x, P_y = 0$, $G = +1$ и $k_z = 0$ формула (I.3.95) совпадает с точной формулой для квазиэнергии электронно-дырочных возбуждений, получаемой с помощью выражений (I.3.83), (I.3.84), только для состояний с $\sigma = +1$. Значение величины $E_{-1}^{(+)}(\mathbf{P})$ в этом случае отличается от точного результата на малые члены порядка $\rho^2 \varepsilon_g$.

Квазиэнергетический спектр полупроводника в сильном поле резонансной электромагнитной волны, описываемом векторным потенциалом (1.18), (1.19), изображен на рисунках I.3.1–I.3.3 для случая, когда $0 \leq G \leq +1$. При $-1 \leq G \leq 0$ структура квазиэнергетического спектра сохраняется, такой же, как и при $0 \leq G \leq +1$, однако на рисунках I.3.1–I.3.3 кривые $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$ следует поменять местами.

Пользуясь дисперсионным уравнением (I.3.88), справедливым и при $\mathbf{k} \neq 0$, можно показать, что учет импульса электромагнитной волны приводит к искажениям приведенной картины квазиэнергетического спектра, которые, однако, при $sk_z/k_0 \ll \rho$ являются несущественными.

Сравнивая (1.7), (1.8) с подкоренным выражением в (I.3.95), находим, что $\lambda \sim \rho \omega_0$ и, следовательно, условия (1.9), (1.13), (1.14), при которых в полупроводнике устанавливается состояние насыщения, в принятых здесь обозначениях приобретают вид

$$\tau_{eL}^{-1} \ll \rho \omega_0 < \omega_{2 \max}, \quad \frac{\tau_{eL}}{\tau_R} \left(\frac{\Delta}{\rho \omega_0} \right)^2 \ll 1. \quad (\text{I.3.101})$$

В заключение отметим, что для значений параметров полупроводника $\varepsilon_g = 1$ эВ, $m = 0.1m_e$, $\epsilon = 16$ (ϵ — диэлектрическая проницаемость среды) и при амплитуде электрической компоненты электромагнитной волны $E_0 = a\omega_0/c \sim 10^5$ В/см величина ρ достигает значений $\sim 10^{-2}$.

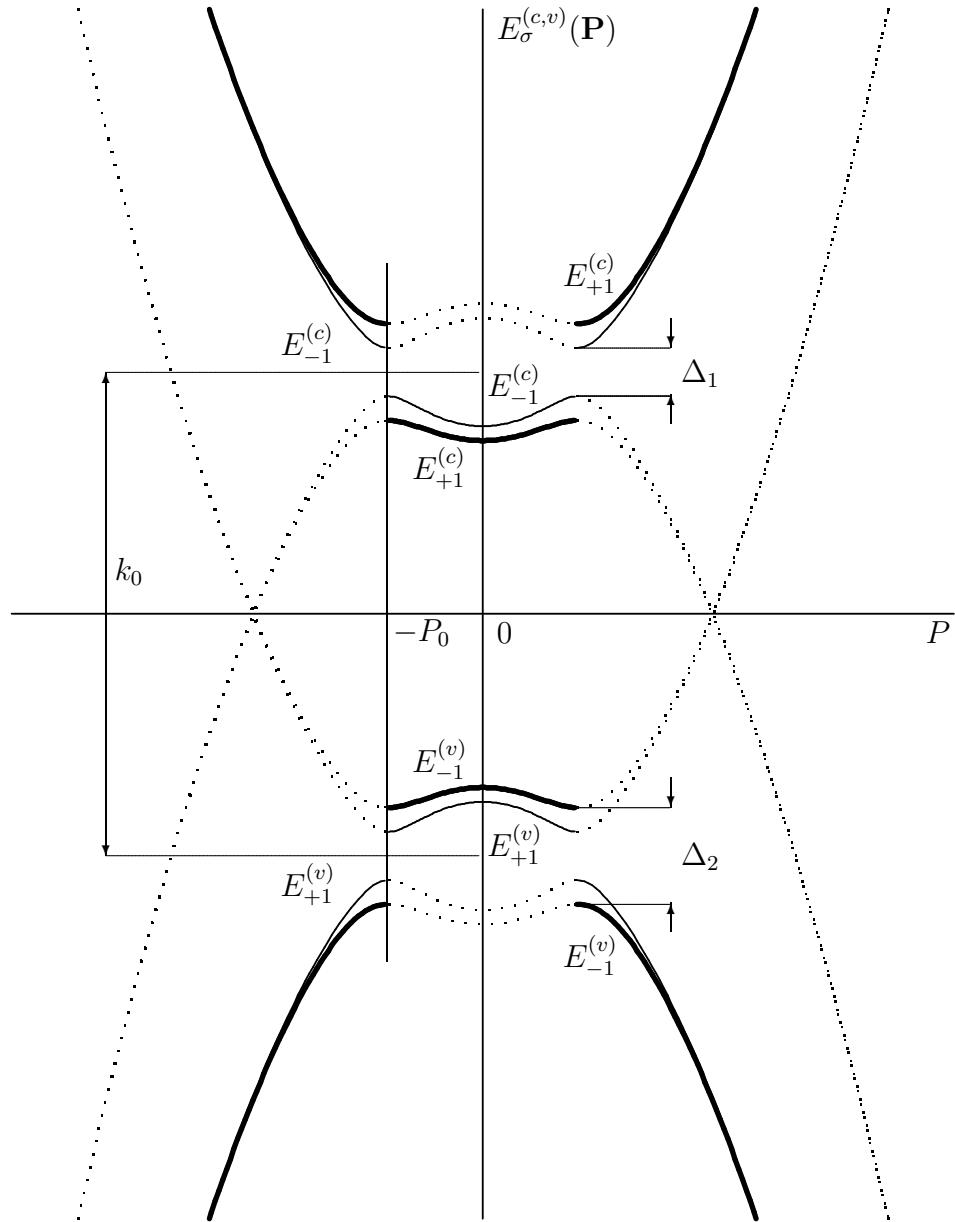


Рис. I.3.1. Квазиэнергетический спектр электрона в поле эллиптически правополяризованной электромагнитной волны ($0 < G < 1$). Сплошные линии изображают валентную зону $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) = -E_{\sigma}^{(-)}(\mathbf{P})$ и зону проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) = E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P})$. Пунктиром изображены однофотонные повторения $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + k_0$ и $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - k_0$ этих зон. При $P = \pm P_0$ квазиэнергетические кривые претерпевают разрывы. В точках разрыва $(dE_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})/dP) = 0$

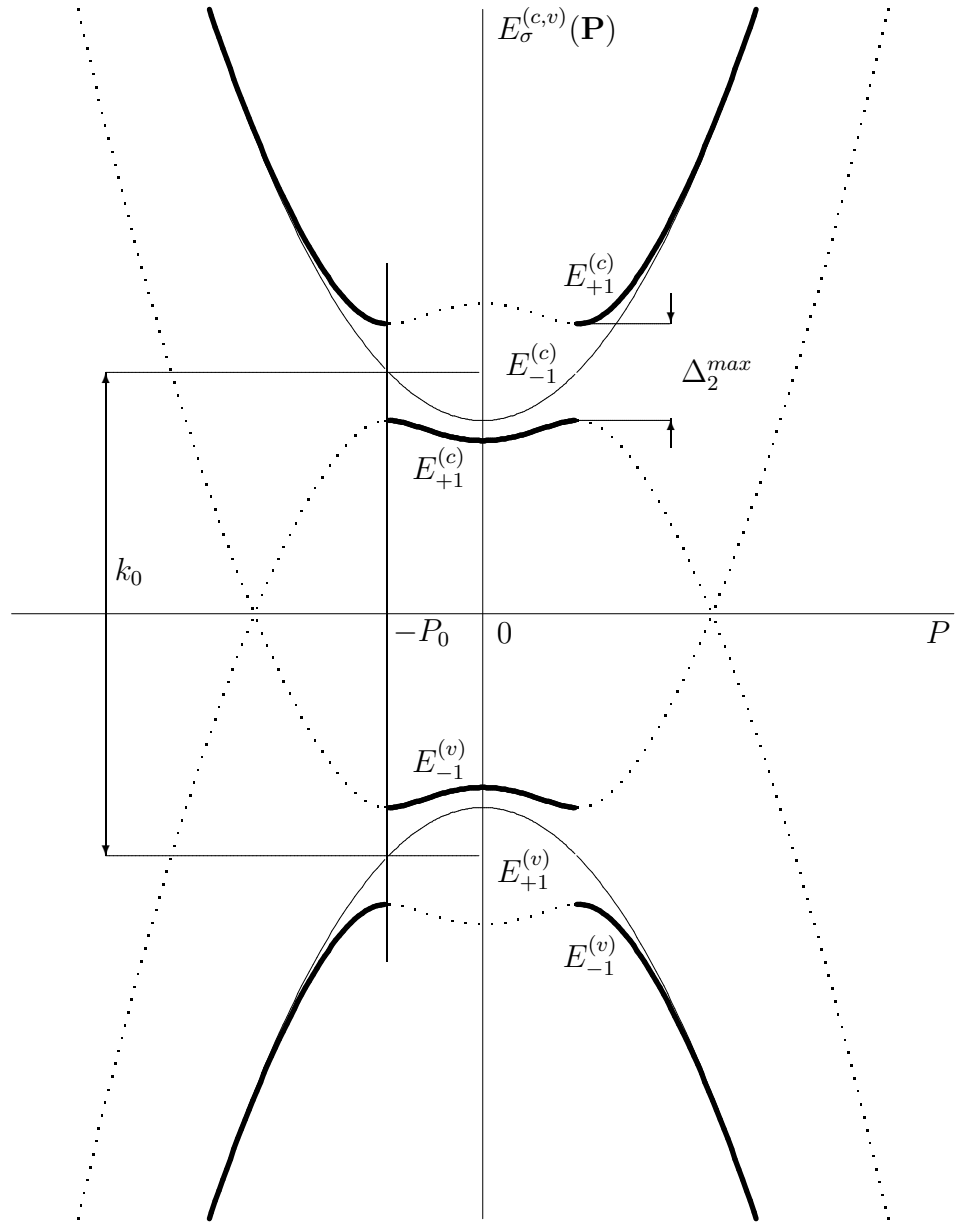


Рис. I.3.2. Квазиэнергетический спектр электрона в поле циркулярно право-поляризованной электромагнитной волны ($G = +1$). Сплошные линии изображают валентную зону $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) = -E_{\sigma}^{(-)}(\mathbf{P})$ и зону проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) = E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P})$. Пунктиром изображены однофотонные повторения $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + k_0$ и $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - k_0$ этих зон. Видно, что величина разрыва зон Δ_2 и расщепление кривых с различным значением спинового индекса $\sigma = \pm 1$ в случае циркулярной поляризации достигают своих максимальных значений.

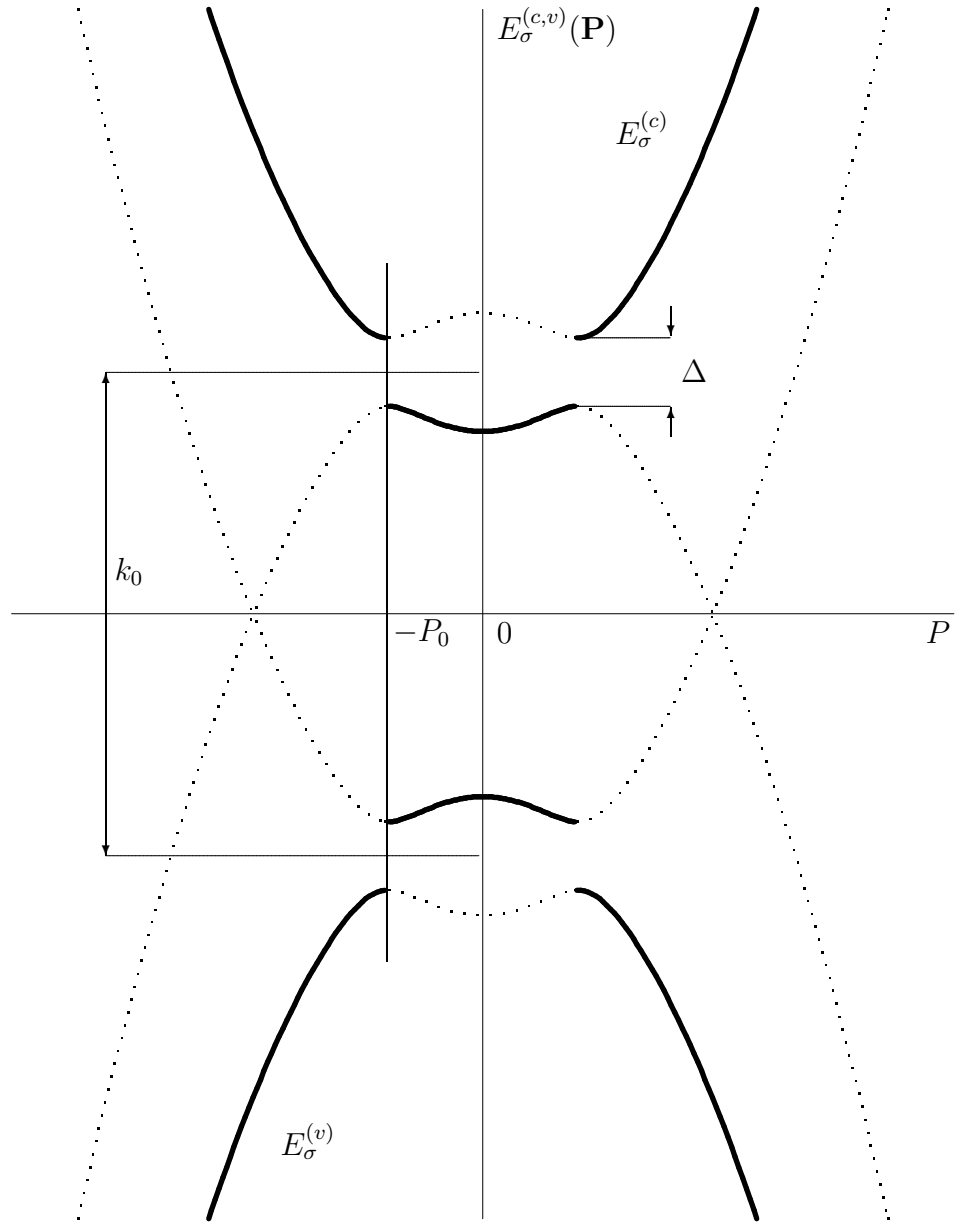


Рис. 1.3.3. Квазиэнергетический спектр электрона в поле линейно поляризованной электромагнитной волны ($G = 0$). Сплошные линии изображают двукратно вырожденные по спиновому индексу $\sigma = \pm 1$ валентную зону $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) = -E_{\sigma}^{(-)}(\mathbf{P})$ и зону проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) = E_{\sigma}^{(+)}(\mathbf{P})$. Пунктиром изображены однофотонные повторения $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + k_0$ и $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - k_0$ этих зон.

Глава 4

Рекомбинационное излучение прямозонного полупроводника в сильном поле резонансного лазерного излучения

Люминесцентное излучение, возникающее при собственной излучательной рекомбинации полупроводника, является одним из основных источников информации о зонном энергетическом спектре электронов и дырок [206]. Поле сильной внешней волны, влияя на энергетический спектр носителей заряда, способно изменить и спектр люминесценции. В данной главе теоретически исследован спектр рекомбинационного излучения прямозонного полупроводника, электронно-дырочная подсистема которого описывается двухзонной моделью (1.17) и возбуждается сильным полем резонансной лазерной волны произвольной поляризации (1.18), (1.19) [207, 208, 209]. Предполагается выполнение условий (I.3.101).

Рекомбинационное излучение, если оно беспрепятственно покидает полупроводник и отсутствуют процессы переизлучения, количественно характеризуется скоростью генерации фотонов данной частоты в единицу времени в единице объема [206]. Для расчета скорости генерации фотонов оказывается удобным метод исключения бозонных амплитуд Боголюбова–Боголюбова (мл.) [210, 211]. Взаимодействие электронов и дырок полупроводника с полем лазерной волны при этом можно учесть уже на начальном этапе вычислений, если перейти к представлению Фарри и воспользоваться полученными в Главе 3 решениями двухзонного уравнения.

§ 4.1 Метод исключения фотонных амплитуд

Рассмотрим электронно-дырочную подсистему полупроводника S , взаимодействующую с квантованными фотонным Σ_1 и фононным Σ_2 полями, а также с зависящим от времени классическим внешним полем (1.18), (1.19). Гамильтонианы свободных электронно-дырочного, фотонного и фононного полей имеют вид ($\alpha = 1, 2$; $\omega_{\mathbf{k}\lambda_2}$ — собственные частоты фононного поля)

$$H(S) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon(\mathbf{p}) (a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma} + b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}) , \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\varepsilon_{\mathbf{g}}}{2} \left(1 + \frac{2\mathbf{p}^2}{m\varepsilon_{\mathbf{g}}} \right)^{1/2} ,$$

$$H(\Sigma_\alpha) = \sum_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \omega_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} , \quad \omega_{\mathbf{k}\lambda_1} = c |\mathbf{k}| \epsilon^{-1/2} . \quad (\text{I.4.1})$$

Здесь $a_{\mathbf{p}\sigma}$ ($a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$) и $b_{\mathbf{p}\sigma}$ ($b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$) — операторы уничтожения (рождения) электрона и дырки в состоянии с квантовыми числами (\mathbf{p}, σ) , удовлетворяющие соотношениям антикоммутации типа

$$\left[a_{\mathbf{p}\sigma}, a_{\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger \right]_+ = \left[b_{\mathbf{p}\sigma}, b_{\mathbf{p}'\sigma'}^\dagger \right]_+ = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta_{\sigma,\sigma'} ,$$

$c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}$ ($c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger$) — оператор уничтожения (рождения) фотона (при $\alpha = 1$) или фонона (при $\alpha = 2$), подчиняющийся коммутационным соотношениям

$$\left[c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}, c_{\mathbf{k}'\lambda'_\alpha}^\dagger \right]_- = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\lambda_\alpha,\lambda'_\alpha} , \quad \left[c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}, c_{\mathbf{k}'\lambda'_\alpha} \right]_- = \left[c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger, c_{\mathbf{k}'\lambda'_\alpha}^\dagger \right]_- = 0 .$$

Суммирование по \mathbf{p} и \mathbf{k} проводится по обычному квазидискретному спектру. Параметр $\lambda_1 = 1, 2$ определяет поляризацию фотонов поля Σ_1 , а параметр λ_2 указывает номер фононной ветви; $\sigma = \pm 1$ — спиновый индекс. Символами S , Σ_1 и Σ_2 здесь и далее отмечены операторы, действующие на волновые функции системы как функции совокупности чисел заполнения соответствующих полей.

Обозначая посредством $H_{ext}(t, S)$ оператор взаимодействия электронов и дырок с внешним полем (1.18), (1.19), запишем гамильтониан системы (S, Σ_1, Σ_2) в шредингеровском представлении динамических величин в форме

$$H = H(t, S, \Sigma_1, \Sigma_2) = H(S) + H_{ext}(t, S) + \sum_{\alpha=1,2} \left\{ H(\Sigma_\alpha) + \sum_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left[J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}(S) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} + J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger(S) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger \right] \right\} , \quad (\text{I.4.2})$$

где $J_{\mathbf{k}\lambda\alpha}$ — некоторые операторные выражения, билинейные по операторам рождения и уничтожения электронов и дырок. В дальнейшем мы будем предполагать, что в бесконечно удаленном прошлом внешнее поле отсутствовало ($H_{ext}(t, S) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$) и вся система в целом находилась в состоянии термодинамического равновесия с термостатом.

Введем в рассмотрение статистический оператор D_t системы (S, Σ_1, Σ_2) , подчиняющийся уравнению Лиувилля–фон-Неймана

$$i \frac{\partial D_t}{\partial t} = [H, D_t]_- \quad (\text{I.4.3})$$

при начальном условии ($t_0 \rightarrow -\infty$; $\beta = 1/k_B T$, k_B — постоянная Больцмана, T — температура термостата)

$$D_{t_0} = \rho(S) \prod_{\alpha=1,2} D(\Sigma_\alpha) ,$$

$$D(\Sigma_\alpha) = e^{-\beta H(\Sigma_\alpha)} / \text{tr}_{(\Sigma_\alpha)} e^{-\beta H(\Sigma_\alpha)} , \quad \text{tr}_{(S)} \rho(S) = 1 . \quad (\text{I.4.4})$$

Представление статистического оператора D_t в мультипликативной форме (I.4.4) означает, что

1. мы не учитываем эффекты переизлучения фотонов в полупроводнике,
2. фононная подсистема рассматривается как термостат.

Формальное решение уравнения (I.4.3) представим в виде

$$D_t = U(t, t_0) D_{t_0} U^{-1}(t, t_0) , \quad (\text{I.4.5})$$

где $U(t, t_0) = U(t, t_0, S, \Sigma_1, \Sigma_2)$ — унитарный оператор, определяемый уравнением

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H U(t, t_0) , \quad U(t_0, t_0) = 1 .$$

Среднее значение произвольной динамической величины, изображаемой в шредингеровском представлении оператором $u(t, S, \Sigma_1, \Sigma_2)$, дается формулой

$$\langle u \rangle_t = \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} u(t, S, \Sigma_1, \Sigma_2) D_t . \quad (\text{I.4.6})$$

Подставляя сюда (I.4.5), получим:

$$\langle u \rangle_t = \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} u(t, S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t}) D_{t_0}, \quad (\text{I.4.7})$$

$$u(t, S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t}) = U^{-1}(t, t_0) u(t, S, \Sigma_1, \Sigma_2) U(t, t_0). \quad (\text{I.4.8})$$

Формулы (I.4.5)–(I.4.8) осуществляют переход к представлению Гайзенберга, которое при $t = t_0$ совпадает со шредингеровским представлением.

Если динамическая величина в представлении Шредингера изображается оператором $u(S, \Sigma_1, \Sigma_2)$, не зависящем явно от времени, то оператор этой величины в представлении Гайзенберга подчиняется уравнению движения

$$i \frac{d}{dt} u(S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t}) = [u(S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t}), H(t, S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t})]_-.$$

Выбирая в качестве оператора динамической величины $u(S, \Sigma_1, \Sigma_2)$ оператор числа фотонов $N_{\mathbf{k}\lambda_1} = c_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger c_{\mathbf{k}\lambda_1}$ квантованного электромагнитного поля в состоянии с квантовыми числами (\mathbf{k}, λ_1) , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} N_{\mathbf{k}\lambda_1}(t) D_{t_0} \\ &= i \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t) c_{\mathbf{k}\lambda_1}(t) D_{t_0} + c.c. \end{aligned} \quad (\text{I.4.9})$$

Воспользовавшись методом Боголюбова–Боголюбова (мл.) [210, 211], исключим из правой части (I.4.9) фотонные амплитуды. Для этого представим гайзенберговские уравнения движения для операторов уничтожения и рождения фотона в интегральной форме:

$$c_{\mathbf{k}\lambda_1}(t) = c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t) - i B_{\mathbf{k}\lambda_1}(t), \quad c_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(t) = c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)\dagger}(t) - i B_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(t). \quad (\text{I.4.10})$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t) &= U_0^{-1}(t, t_0) c_{\mathbf{k}\lambda_1} U_0(t, t_0) = c_{\mathbf{k}\lambda_1} \exp[-i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t - t_0)], \\ c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)\dagger}(t) &= U_0^{-1}(t, t_0) c_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger U_0(t, t_0) = c_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger \exp[i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t - t_0)] \end{aligned} \quad (\text{I.4.11})$$

— операторы уничтожения и рождения фотона в представлении взаимодействия, переход к которому выполняется с помощью унитарного оператора преобразования

$$U_0(t, t_0) = \exp \left\{ -i \left[H(S) + \sum_{\alpha=1,2} H(\Sigma_\alpha) \right] (t - t_0) \right\}; \quad (\text{I.4.12})$$

$$\begin{aligned}
B_{\mathbf{k}\lambda_1}(t) &= \int_{t_0}^t d\tau \exp[-i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t-\tau)] J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(S_\tau) , \\
B_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(t) &= \int_{t_0}^t d\tau \exp[i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t-\tau)] J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_\tau) .
\end{aligned} \tag{I.4.13}$$

Обозначим посредством $N_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(eq)}$ планковские функции распределения равновесных фотонов и фононов ($\alpha = 1, 2$):

$$N_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(eq)} = [\exp(\beta\omega_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}) - 1]^{-1} . \tag{I.4.14}$$

Подставив (I.4.10) в (I.4.9), воспользуемся соотношениями типа

$$\text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t) c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t) D_{t_0} = N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} \left[c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t) \right]_- D_{t_0} \tag{I.4.15}$$

и равенствами

$$\begin{aligned}
\left[c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t) \right]_- &= i [B_{\mathbf{k}\lambda_1}(t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t)]_- , \\
\left[c_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(I)}(t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(S_t) \right]_- &= -i [B_{\mathbf{k}\lambda_1}(t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(S_t)]_- .
\end{aligned} \tag{I.4.16}$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t} &= \int_{t_0}^t d\tau \exp[-i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t-\tau)] \\
&\times \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} \left\{ J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t) J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(S_\tau) + N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} \left[J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t), J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger(S_\tau) \right]_- \right\} D_{t_0} + c.c. .
\end{aligned} \tag{I.4.17}$$

Тождества типа (I.4.15) следуют из спектральных представлений временных корреляционных функций [210, 211]. Равенства (I.4.16) являются следствием коммутации операторов $c_{\mathbf{k}\lambda_1}(t)$ и $J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t)$, взятых в один и тот же момент времени.

§ 4.2 Представление Фарри

Вычисление правой части кинетического уравнения (I.4.17) выполним в представлении Фарри [189, 205]. Для этого запишем оператор $U(t, t_0)$ в мультипликативном виде

$$U(t, t_0) = U_0(t, t_0) U_1(t, t_0) U_2(t, t_0) , \quad U_1(t_0, t_0) = U_2(t_0, t_0) = 1 . \tag{I.4.18}$$

Унитарные операторы $U_1(t, t_0)$ и $U_2(t, t_0)$ определяются уравнениями

$$i \frac{dU_1(t, t_0)}{dt} = H_{ext} \left(t, S_t^{(I)} \right) U_1(t, t_0) ,$$

$$i \frac{dU_2(t, t_0)}{dt} = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left[J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left(S_t^{(F)} \right) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(I)}(t) + J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger \left(S_t^{(F)} \right) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(I)\dagger}(t) \right] U_2(t, t_0) , \quad (\text{I.4.19})$$

в которых

$$H_{ext} \left(t, S_t^{(I)} \right) = U_0^{-1}(t, t_0) H_{ext}(t, S) U_0(t, t_0) \quad (\text{I.4.20})$$

— гамильтониан взаимодействия электронов и дырок полупроводника с классическим внешним полем (1.18), (1.19) в представлении взаимодействия,

$$J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left(S_t^{(F)} \right) = U_1^{-1}(t, t_0) J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left(S_t^{(I)} \right) U_1(t, t_0)$$

$$= U_1^{-1}(t, t_0) U_0^{-1}(t, t_0) J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}(S) U_0(t, t_0) U_1(t, t_0) \quad (\text{I.4.21})$$

— оператор в представлении Фарри. Связь между операторами произвольной динамической величины u в различных представлениях дается формулами

$$u(t, S_t, \Sigma_{1t}, \Sigma_{2t}) = U_2^{-1}(t, t_0) u \left(t, S_t^{(F)}, \Sigma_{1t}^{(F)}, \Sigma_{2t}^{(F)} \right) U_2(t, t_0)$$

$$= U_2^{-1}(t, t_0) U_1^{-1}(t, t_0) u \left(t, S_t^{(I)}, \Sigma_{1t}^{(I)}, \Sigma_{2t}^{(I)} \right) U_1(t, t_0) U_2(t, t_0) \quad (\text{I.4.22})$$

$$= U_2^{-1}(t, t_0) U_1^{-1}(t, t_0) U_0^{-1}(t, t_0) u(t, S, \Sigma_1, \Sigma_2) U_0(t, t_0) U_1(t, t_0) U_2(t, t_0) .$$

Для операторов, действующих на переменные только Σ -полей, представление Фарри совпадает с представлением взаимодействия: $u \left(t, \Sigma_{1t}^{(F)}, \Sigma_{2t}^{(F)} \right) = u \left(t, \Sigma_{1t}^{(I)}, \Sigma_{2t}^{(I)} \right)$. Если оператор динамической величины u в шредингеровском представлении не зависит явно от времени, то в представлении Фарри он подчиняется уравнению движения

$$i \frac{du \left(S_t^{(F)}, \Sigma_{1t}^{(F)}, \Sigma_{2t}^{(F)} \right)}{dt} = \left[u \left(S_t^{(F)}, \Sigma_{1t}^{(F)}, \Sigma_{2t}^{(F)} \right), H \left(S_t^{(F)} \right) + H_{ext} \left(t, S_t^{(I)} \right) + \sum_{\alpha=1,2} H(\Sigma_\alpha) \right]_- . \quad (\text{I.4.23})$$

Статистический оператор системы в представлении Фарри $D_t^{(F)}$ определяется равенствами

$$D_t = U_0(t, t_0) U_1(t, t_0) D_t^{(F)} U_1^{-1}(t, t_0) U_0^{-1}(t, t_0) = U_0(t, t_0) D_t^{(I)} U_1^{-1}(t, t_0) ,$$

$$D_t^{(F)} = U_1(t, t_0) U_2(t, t_0) D_{t_0} U_2^{-1}(t, t_0) U_1^{-1}(t, t_0) \quad (\text{I.4.24})$$

и удовлетворяет уравнению Лиувилля–фон-Неймана

$$i \frac{dD_t^{(F)}}{dt} = \left[\sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left\{ J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha} \left(S_t^{(F)} \right) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(I)}(t) + J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^\dagger \left(S_t^{(F)} \right) c_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}^{(I)\dagger}(t) \right\}, D_t^{(F)} \right]_- . \quad (\text{I.4.25})$$

Явный вид операторов $H_{ext}(t, S)$ и $J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}(S)$ зависит от выбора конкретной модели полупроводника. Дальнейшее рассмотрение будет основываться на использовании простейшей модели, определяемой уравнением

$$\left\{ i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + s\boldsymbol{\gamma} \left[i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e_0}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{e_0}{c} \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}, t) \right] + R\Phi(\mathbf{r}, t) - ms^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (\text{I.4.26})$$

Здесь Ψ , \mathbf{A} и Φ — соответственно операторы электронно-дырочного, фотонного и фононного полей в представлении Гайзенберга, $\boldsymbol{\gamma}_\mu$ — матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$, см. Приложение i); R — некоторая матрица, зависящая от констант взаимодействия электронов и дырок с фононами.

Приведем операторы $H_{ext}(t, S)$ и $J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}(S)$ сразу в представлении взаимодействия. В рамках выбранной модели полупроводника

$$H_{ext}(t, S_t^{(I)}) = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \mathbf{j}^{(I)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}, t) , \quad (\text{I.4.27})$$

$$J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t^{(I)}) = -\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}\epsilon}} \int d\mathbf{r} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1} \mathbf{j}^{(I)}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} , \quad (\text{I.4.28})$$

где $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1}$ — вектор поляризации фотонов поля Σ_1 ,

$$\mathbf{j}^{(I)}(\mathbf{r}, t) = -e_0 s : \Psi^{(I)\dagger}(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma} \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) : \quad (\text{I.4.29})$$

— оператор плотности электрического тока, построенный с помощью оператора электронно-дырочного поля $\Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t)$. Последний подчиняется уравнению двухзонной модели (I.4.26) для свободных электронов и дырок и может быть представлен в виде разложения

$$\Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\frac{ms^2}{V\epsilon(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{p}\sigma} \varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + b_{\mathbf{p}-\sigma}^\dagger \varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right] . \quad (\text{I.4.30})$$

Биспинорные функции $\varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющие уравнению (I.4.26) при $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, $\mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ и $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, имеют вид (I.3.57).

В представлении Фарри оператор $J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S)$ приобретает вид

$$J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t^{(F)}) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}\epsilon}} \int d\mathbf{r} \left[e_0 s : \Psi^{(F)\dagger}(\mathbf{r}, t) \gamma_0 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1} \gamma \Psi^{(F)}(\mathbf{r}, t) : - \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1} \mathbf{j}_{vac}(\mathbf{r}, t) \right] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{I.4.31})$$

причем оператор электронно-дырочного поля в представлении Фарри $\Psi^{(F)\dagger}(\mathbf{r}, t)$ подчиняется уравнению (I.4.26) с $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ и может быть получен из (I.4.30) формальной заменой волновых функций свободных носителей заряда $\varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ на волновые функции $\psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$, описывающие поведение электронов и дырок в классическом внешнем поле (1.18), (1.19) и удовлетворяющие асимптотическому условию

$$\psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty.$$

Таким образом,

$$\Psi^{(F)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \left(\frac{ms^2}{V\epsilon(\mathbf{p})} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{p}\sigma} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + b_{\mathbf{p}-\sigma}^\dagger \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (\text{I.4.32})$$

Наличие в (I.4.31) слагаемого, содержащего классическую плотность тока

$$\mathbf{j}_{vac}(\mathbf{r}, t) = -e_0 s \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{ms^2}{V\epsilon(\mathbf{p})} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)\dagger}(\mathbf{r}, t) \gamma_0 \gamma \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.4.33})$$

обусловлено перераспределением зарядов в “вакуумном море” Дирака под действием внешнего поля [212, 205].

Подставляя (I.4.32) в (I.4.31) и вводя обозначение $(j, j_1 = \pm)$

$$M_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1\sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{k}\lambda_1 | t) = \frac{e_0 s}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}\epsilon}} \frac{ms^2}{V\sqrt{\epsilon(\mathbf{p})\epsilon(\mathbf{p}_1)}} \int d\mathbf{r} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(j)\dagger}(\mathbf{r}, t) \gamma_0 \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1} \gamma \psi_{\mathbf{p}_1\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.4.34})$$

удобно переписать оператор $J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t^{(F)})$ в форме

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}\lambda_1}(S_t^{(F)}) = & \sum_{\mathbf{p}\sigma} \sum_{\mathbf{p}_1\sigma_1} \left[a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}_1\sigma_1} M_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1\sigma_1}^{(+, +)}(\mathbf{k}\lambda_1 | t) \right. \\ & + b_{\mathbf{p}-\sigma} b_{\mathbf{p}_1-\sigma_1}^\dagger M_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1\sigma_1}^{(-, -)}(\mathbf{k}\lambda_1 | t) + a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}_1-\sigma_1}^\dagger M_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1\sigma_1}^{(+, -)}(\mathbf{k}\lambda_1 | t) \\ & \left. + b_{\mathbf{p}-\sigma} a_{\mathbf{p}_1\sigma_1} M_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1\sigma_1}^{(-, +)}(\mathbf{k}\lambda_1 | t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.4.35})$$

В дальнейшем в качестве волновых функций $\psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(\pm)}(\mathbf{r}, t)$ мы будем использовать приближенные волновые функции (ii.41), (ii.42), (I.3.87), (I.3.89) при $k_{1z} = 0$. Простоты ради, при вычислении матричных элементов (I.4.34) будем пренебрегать волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 .

Вернемся к уравнению (I.4.17). В представлении Фарри оно приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t} &= \int_{t_0}^t d\tau \exp[-i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t - \tau)] \\ &\times \text{tr}_{(S, \Sigma_1, \Sigma_2)} \left\{ J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_t^{(F)} \right) J_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(F)\dagger}(t, \tau) + N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} \left[J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_t^{(F)} \right), J_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(F)\dagger}(t, \tau) \right]_- \right\} D_t^{(F)} + c.c., \end{aligned} \quad (\text{I.4.36})$$

где

$$J_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(F)}(t, \tau) = U_2(t, \tau) J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_\tau^{(F)} \right) U_2^{-1}(t, \tau).$$

Разложим правую часть (I.4.36) в ряд по степеням взаимодействий подсистемы S с бозонными полями Σ_1 и Σ_2 . Предполагая эти взаимодействия слабыми, сохраним в указанном разложении лишь члены низжайшего порядка малости. Поскольку сам оператор $J_{\mathbf{k}\lambda_\alpha}(S)$ первого порядка по взаимодействию, при разложении оператора $U_2(t, \tau)$ достаточно ограничиться членами нулевого порядка, для того чтобы получить разложение правой части (I.4.36) с точностью до членов второго порядка малости включительно: $U_2(t, \tau) \approx 1$. Полагая в (I.4.36) $J_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(F)}(t, \tau) \approx J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_\tau^{(F)} \right)$ и вводя в рассмотрение приведенный статистический оператор

$$\rho_t^{(F)}(S) = \text{tr}_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} D_t^{(F)},$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t} &= \int_{t_0}^t d\tau \exp[-i\omega_{\mathbf{k}\lambda_1}(t - \tau)] \\ &\times \text{tr}_{(S)} \left\{ J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_t^{(F)} \right) J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger \left(S_\tau^{(F)} \right) + N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} \left[J_{\mathbf{k}\lambda_1} \left(S_t^{(F)} \right), J_{\mathbf{k}\lambda_1}^\dagger \left(S_\tau^{(F)} \right) \right]_- \right\} \rho_t^{(F)}(S) + c.c.. \end{aligned} \quad (\text{I.4.37})$$

После подстановки (I.4.35) в уравнение (I.4.37), правая часть последнего выражается через средние от произведений четырех ферми-операторов. Вычислим эти

средние, спаривая операторы по теореме Блоха–де Доминисиса [213]. В результате получим кинетическое уравнение, содержащее только одночастичные функции распределения электронно-дырочных возбуждений

$$f_{\mathbf{p}\sigma}^{(a)} = \text{tr}_{(S)} \{a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}\sigma}\} \rho_t^{(F)}(S), \quad f_{\mathbf{p}\sigma}^{(b)} = \text{tr}_{(S)} \{b_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}\sigma}\} \rho_t^{(F)}(S). \quad (\text{I.4.38})$$

Для них, в свою очередь, можно вывести кинетические уравнения типа (I.4.37), используя развитый в [210, 211] метод. Взаимодействия электронно-дырочной подсистемы с полями Σ_1 и Σ_2 в нижайшем порядке вносят аддитивный вклад в интегралы столкновений этих уравнений, а сами интегралы столкновений зависят от планковских функций распределения равновесных фононов и фотонов (I.4.14).

Другое приближение заключается в том, что мы, в соответствии с методом усреднения [181], опустим в правой части кинетических уравнений для функций $f_{\mathbf{p}\sigma}^{(a,b)}$ и $\langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t$ быстро осциллирующие слагаемые, сохранив, таким образом, лишь секулярные члены. Интересуясь установившимся в результате релаксации состоянием электронно-дырочной подсистемы, взаимодействующей с внешним полем (1.18), (1.19), будем искать стационарные решения кинетических уравнений для функций (I.4.38). При выполнении условий

$$\rho\omega_0 < \omega_{\mathbf{k}\lambda_2}, \quad (\Delta/\rho\omega_0)^2 \ll \tau_R\omega_S \quad (\text{I.4.39})$$

в правой части этих уравнений можно пренебречь взаимодействием электронов и дырок с квантованным электромагнитным полем Σ_1 [17, 27]. Тогда искомыми решениями будут фермиевские функции распределения, определяемые выражением

$$f_{\mathbf{p}\sigma}^{(a)} = f_{-\mathbf{p}\sigma}^{(b)} = \left\{ \exp \left[\beta \left(E_\sigma(\mathbf{p}) - \frac{\omega_0}{2} \right) \right] + 1 \right\}^{-1}, \quad (\text{I.4.40})$$

в котором

$$E_\sigma(\mathbf{p}) = \frac{\omega_0}{2} (1 + \lambda_\sigma(\mathbf{p}) \text{sign} \delta(\mathbf{p})), \quad \lambda_\sigma(\mathbf{p}) = \sqrt{\delta^2(\mathbf{p}) + \rho_\sigma^2},$$

$$\delta(\mathbf{p}) = \frac{2\varepsilon(\mathbf{p})}{\omega_0} - 1, \quad \rho_\sigma = \rho \left(\frac{1 + \sigma G}{2} \right). \quad (\text{I.4.41})$$

Используя (I.4.40), находим окончательно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t} = & \frac{e_0^2 s^2}{2\omega_{\mathbf{k}} \epsilon} \sum_{\sigma, \sigma_1 = \pm 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} \left(|(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_z|^2 \delta_{\sigma, -\sigma_1} + |e_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(-\sigma)}|^2 \delta_{\sigma, \sigma_1} \right) \\
& \times \left\{ 2U_{\sigma_1}^2(\mathbf{p}) V_{\sigma}^2(\mathbf{p}) \left[\left(N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} + 1 \right) (1 - f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p})) f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p}) \right. \right. \\
& - N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p}) (1 - f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p})) \left. \right] \delta(E_{\sigma}(\mathbf{p}) - E_{\sigma_1}(\mathbf{p}) + \omega_{\mathbf{k}\lambda_1} - \omega_0) \\
& + U_{\sigma_1}^2(\mathbf{p}) U_{\sigma}^2(\mathbf{p}) \left[\left(N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} + 1 \right) f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p}) f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p}) \right. \\
& - N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} (1 - f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p})) (1 - f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p})) \left. \right] \delta(E_{\sigma}(\mathbf{p}) + E_{\sigma_1}(\mathbf{p}) - \omega_{\mathbf{k}\lambda_1}) \\
& + V_{\sigma_1}^2(\mathbf{p}) V_{\sigma}^2(\mathbf{p}) \left[\left(N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} + 1 \right) (1 - f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p})) (1 - f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p})) \right. \\
& - N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)} f_{\sigma}^{(a)}(\mathbf{p}) f_{\sigma_1}^{(a)}(\mathbf{p}) \left. \right] \delta(E_{\sigma}(\mathbf{p}) + E_{\sigma_1}(\mathbf{p}) + \omega_{\mathbf{k}\lambda_1} - 2\omega_0) \left. \right\}. \tag{I.4.42}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
U_{\sigma}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}(\mathbf{p})} \right)}, \quad V_{\sigma}(\mathbf{p}) = \text{sign} \delta(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}(\mathbf{p})} \right)}, \tag{I.4.43} \\
\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(\sigma)} = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_x + i\sigma (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_y.
\end{aligned}$$

§ 4.3 Спектр рекомбинационного излучения

Формула (I.4.42) позволяет исследовать спектр рекомбинационного излучения полупроводника, возбуждаемого внешним полем (1.18), (1.19). Правая часть (I.4.42) отлична от нуля при $\omega_1 \equiv \omega_{\mathbf{k}\lambda_1} \approx \omega_0$. Поэтому при не очень высоких температурах, когда $k_B T \ll \omega_0$, в ней можно опустить слагаемые, пропорциональные функциям распределения равновесных фотонов $N_{\mathbf{k}\lambda_1}^{(eq)}$, ограничиваясь, таким образом, рассмотрением только спонтанного излучения.

Энергия, излучаемая в интервале частот $(\omega_1, \omega_1 + d\omega_1)$ единицей объема полупроводника за единицу времени, равна $W(\omega_1) d\omega_1$, где

$$W(\omega_1) = \frac{\omega_1^3 \epsilon^{3/2}}{2\pi^2 c^3} \sum_{\lambda_1=1,2} \frac{\partial \langle N_{\mathbf{k}\lambda_1} \rangle_t}{\partial t}. \tag{I.4.44}$$

Согласно (I.4.42), функция $W(\omega_1)$ может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$W(\omega_1) = W_{x,y}(\omega_1) + W_z(\omega_1).$$

Ниже мы изучим их поведение при температурах, определяемых неравенством $k_B T \ll \omega_1$.

Зависимость $W_{x,y}(\omega_1)$ представлена на рисунках I.4.1–I.4.3.

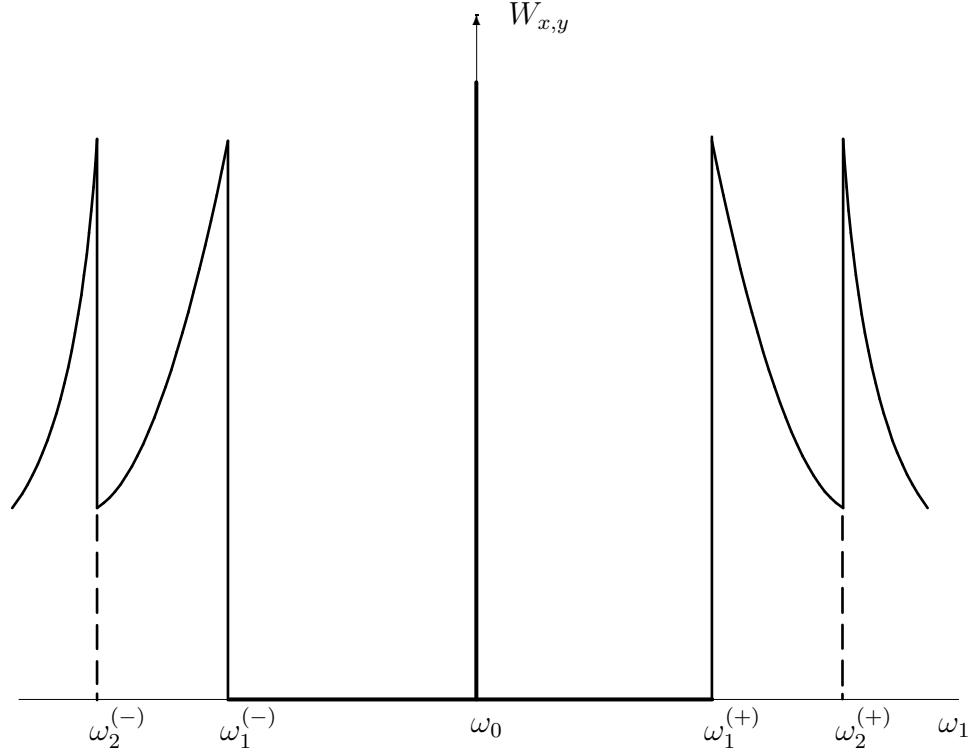


Рис. I.4.1. Зависимость $W_{x,y}$ от ω_1 при $0 < G < 1$; $\omega_1^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0(1 - G)/2$, $\omega_2^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0(1 + G)/2$.

В случае эллиптической поляризации электромагнитной волны (1.18) функция $W_{x,y}(\omega_1) = 0$ в областях $\omega_0 - \rho\omega_0(1 - |G|)/2 < \omega_1 < \omega_0$ и $\omega_0 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0(1 - |G|)/2$. На частотах ω_0 , $\omega_0 \pm \rho\omega_0(1 - |G|)/2$ и $\omega_0 \pm \rho\omega_0(1 + |G|)/2$ она обладает резонансными особенностями (см. рисунок I.3.1). При выполнении неравенства $\Delta < \rho\omega_0$ резонансные частоты $\omega_0 - \rho\omega_0(1 \pm |G|)/2$ располагаются в запрещенной зоне полупроводника. Резонансные особенности функции $W_{x,y}(\omega_1)$, имеющиеся на частотах $\omega_0 \pm \rho\omega_0(1 - |G|)/2$ и $\omega_0 \pm \rho\omega_0(1 + |G|)/2$, в случае линейной поляризации сливаются (см. рисунок I.4.2). При циркулярной поляризации внешнего поля резонансные пики имеются лишь на частотах ω_0 , $\omega_0 \pm \rho\omega_0$, причем в области $\omega_0 - \rho\omega_0 < \omega_1 \leq \varepsilon_g$

излучение полностью отсутствует (см. рисунок I.4.3).

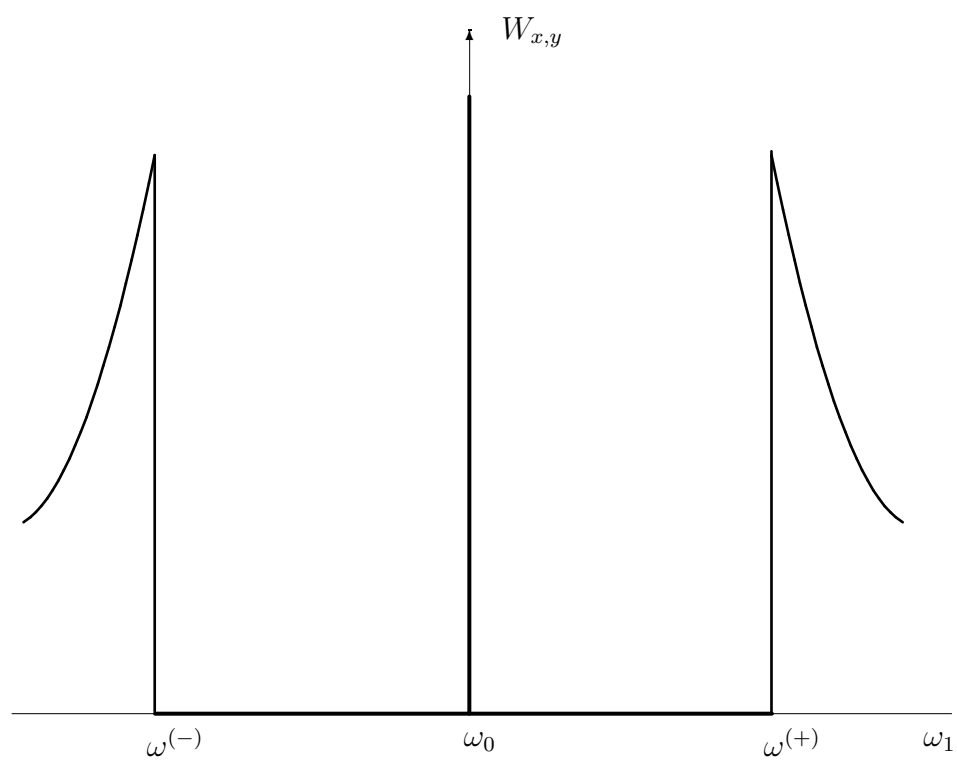


Рис. I.4.2. Зависимость $W_{x,y}$ от ω_1 при $G = 0$; $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$.

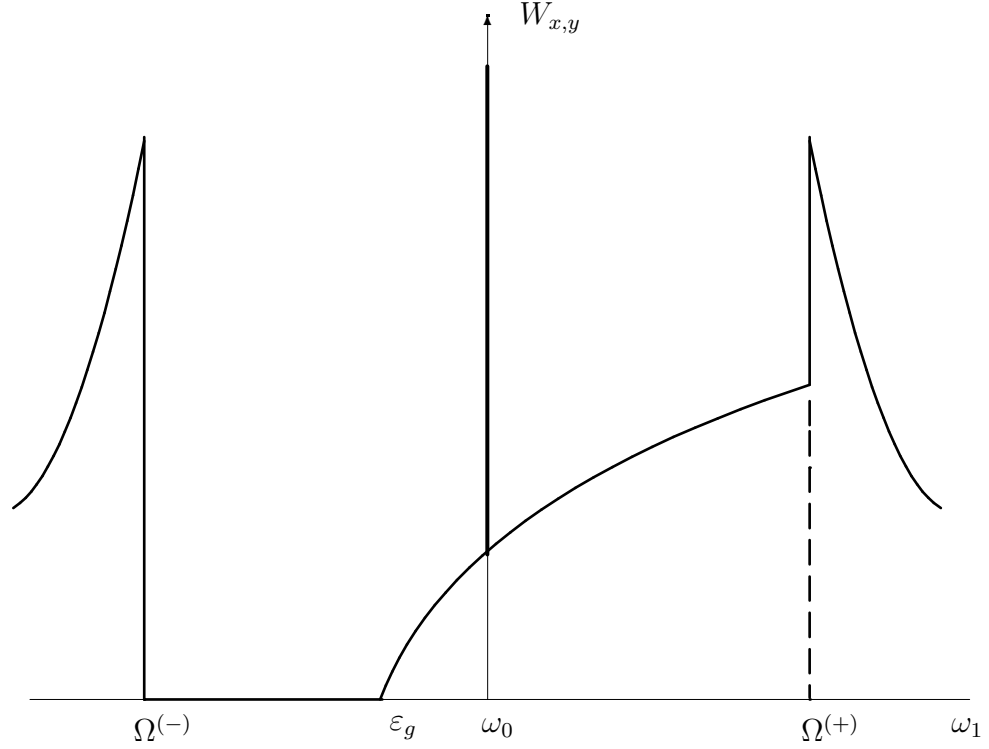


Рис. I.4.3. Зависимость $W_{x,y}$ от ω_1 при $G = 1$; $\Omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0$.

Величина $W_{x,y}(\omega_1)$ ответственна за излучение фотонов, вектор поляризации которых $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1}$ располагается в плоскости XOY , перпендикулярной направлению распространения электромагнитной волны (1.18). Если вектор $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1}$ перпендикулярен плоскости XOY , то спектр излучения в окрестности частоты внешнего поля описывается функцией $W_z(\omega_1)$. В случае эллиптической поляризации она равна нулю при $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_0 - \rho\omega_0/2 < \omega_1 < \omega_0 - \rho\omega_0|G|/2$, $\omega_0 + \rho\omega_0|G|/2 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0/2$, а при $\omega_1 = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$, $\omega_0 \pm \rho\omega_0|G|/2$ имеет резонансные особенности (см. рисунок I.4.4). В случае линейной поляризации функция $W_z(\omega_1)$ имеет только три резонансных пика на частотах ω_0 , $\omega_0 \pm \rho\omega_0/2$, разделенных областями, в которых излучение полностью отсутствует (см. рисунок I.4.5). Для циркулярной поляризации спектр излучения с $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_x = (\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_y = 0$ описывается плавной кривой, не имеющей каких-либо резонансных особенностей, причем $W_z(\omega_1) = 0$ при $\omega_1 \leq \omega_0 - \Delta/2 - \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2}$ и $\omega_0 < \omega_1 \leq \omega_0 - \Delta/2 + \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2}$ (см. рисунок I.4.6).

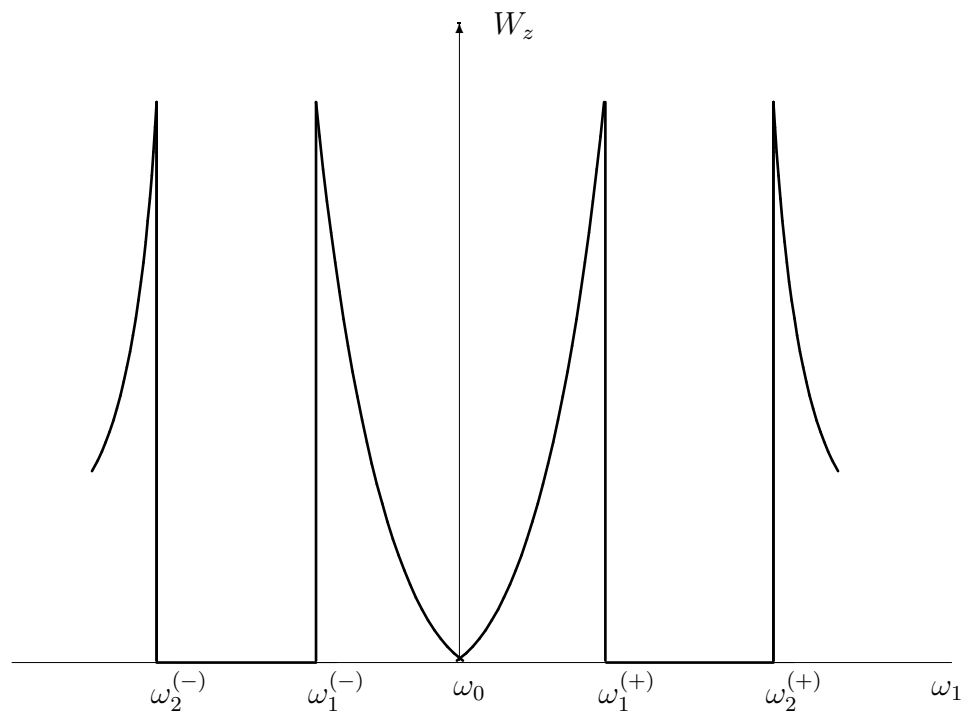


Рис. 1.4.4. Зависимость W_z от ω_1 при $0 < G < 1$; $\omega_1^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0 G/2$, $\omega_2^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$.

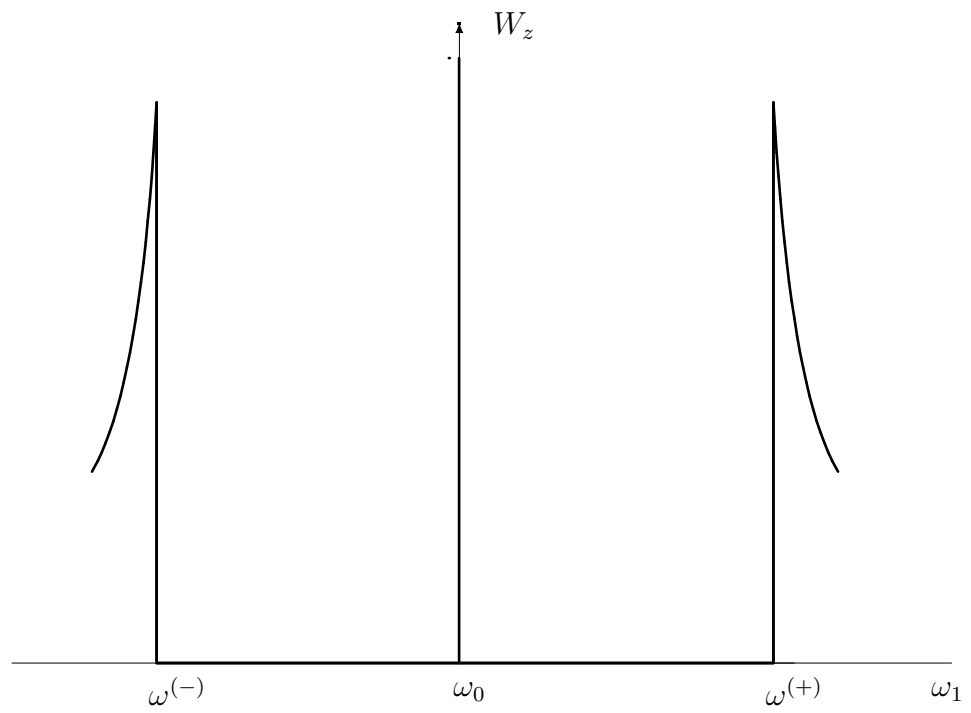


Рис. I.4.5. Зависимость W_z от ω_1 при $G = 0$; $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$.

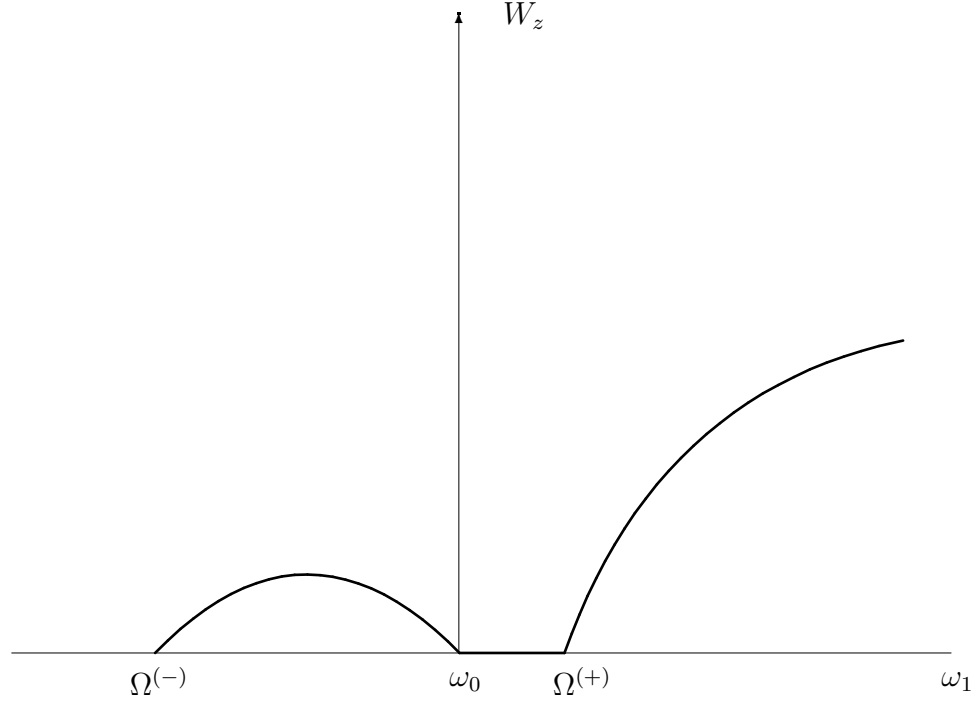


Рис. I.4.6. Зависимость W_z от ω_1 при $G = 1$, $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda_1})_{x,y} = 0$; $\Omega^{(\pm)} = \omega_0 - \Delta/2 \pm \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2}$.

Таким образом, в спектре спонтанного рекомбинационного излучения полупроводника в окрестности частоты внешнего поля могут присутствовать, вообще говоря, девять резонансных пиков, положение и высота которых определяются типом поляризации электромагнитной волны. Интенсивность излучения на частотах $\omega_1 < \omega_0 - \rho\omega_0 |G|/2$ с понижением абсолютной температуры T возрастает, а на частотах $\omega_1 \geq \omega_0 - \rho\omega_0 |G|/2$ — уменьшается и при $T \rightarrow 0$ обращается в нуль. В случае линейной поляризации электромагнитной волны перечисленные результаты переходят в результаты работы [32], подтвержденные экспериментально в [35].

Рассмотрим квантовые процессы, ответственные за наличие указанных особенностей в спектре излучения полупроводника. Для этого обратимся к изображенной на рисунке I.3.1 картине квазиэнергетического спектра электрона во внешнем поле (1.18), (1.19). Излучение фотонов частоты $\omega_1 = \omega_0 + j\rho\omega_0 (1 + \sigma G)/2$ ($j = \pm$, $\sigma = \pm 1$) связано с двумя типами квантовых переходов электрона:

1. при $j(|\mathbf{P}| - P_0) > 0$ электрон из зоны проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$ переходит в валентную зону $E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$;
2. при $j(|\mathbf{P}| - P_0) < 0$ электрон с однофотонного повторения $E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + \omega_0$ валентной зоны $E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$ переходит на однофотонное повторение $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - \omega_0$ зоны проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$.

Излучение в направлении распространения лазерной волны на частотах $\omega_1 = \omega_0 + j\rho\omega_0(1 - G)/2$ поляризовано по левому кругу, а на частотах $\omega_1 = \omega_0 + j\rho\omega_0(1 + G)/2$ — по правому. Этот результат обусловлен сохранением спиральности в данной системе. Излучение фотонов частоты $\omega_1 = \omega_0 + j\rho\omega_0/2$ также связано с двумя типами квантовых переходов:

1. при $j(|\mathbf{P}| - P_0) > 0$ электрон из зоны проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$ переходит в валентную зону $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$;
2. при $j(|\mathbf{P}| - P_0) < 0$ электрон с однофотонного повторения $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + \omega_0$ валентной зоны $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$ переходит на однофотонное повторение $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - \omega_0$ зоны проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$.

Два типа квантовых переходов ответственны за излучение на частотах $\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2}j\rho\omega_0 G \text{sign}(|\mathbf{P}| - P_0)$ ($\sigma = \pm 1$):

1. электрон из зоны проводимости $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$ переходит на однофотонное повторение $E_{-\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - \omega_0$ зоны проводимости $E_{-\sigma}^{(c)}(\mathbf{P})$;
2. электрон с однофотонного повторения $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + \omega_0$ валентной зоны $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$ переходит в валентную зону $E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$.

И, наконец, излучение на частоте $\omega_1 = \omega_0$ обусловлено переходами $E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) \rightarrow E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{P}) - \omega_0$ и $E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P}) + \omega_0 \rightarrow E_{\sigma}^{(v)}(\mathbf{P})$. Эти процессы представляют собой комптоновское рассеяние электронов на сильной электромагнитной волне (см., например, [214, 215]).

Присутствие резонансных пиков в спектре излучения связано с появлением в квазиэнергетическом спектре электрона дополнительных особенностей Ван-Хова при

$|\mathbf{P}| = P_0$ (см. рис. I.3.1–I.3.3) [216]. Расходимость интенсивности излучения на резонансных частотах может быть устранена, если учесть диссипативные процессы, например, передачу энергии фотовозбужденных электронов фононной подсистеме полупроводника¹. Учет электрон-фононного взаимодействия приводит к тому, что электронные квазиэнергетические состояния приобретают конечную полуширину Γ , а содержащиеся в (I.4.42) сингулярные функции $\delta(x)$ заменяются на $\Gamma/\pi (\Gamma^2 + x^2)$. В результате высота пиков резонансного излучения оказывается конечной [32]. Для значений параметров полупроводника $\varepsilon_g = 1\text{эВ}$, $m = 0.1m_e$, $\epsilon = 16$, $\Gamma = 10^{11}\text{сек}^{-1}$ и при $|\mathbf{E}_0| \sim 10^5\text{В/см}$, $k_B T \sim \rho\omega_0$ величина W в резонансных точках ($\omega_1 \neq \omega_0$) достигает значений порядка 10^2эрг/см^3 .

Приведенная оценка справедлива при выполнении неравенств [27]

$$\frac{\epsilon\omega_0}{2mc^2} \frac{\Delta}{\rho\omega_0} \frac{\omega_0}{\Gamma}, \quad \left(\frac{\epsilon\Delta}{mc^2} \right)^{1/2} \ll 1.$$

В противном случае, при расчетах необходимо учитывать конечность длины волны падающего на полупроводник и выходящего излучения [34]. Такой учет приводит к дополнительной анизотропии излучения. Наиболее оптимальным для экспериментального наблюдения является изучение излучения, распространяющегося в направлении, близком к направлению распространения возбуждающего сильного лазерного поля.

Проведенное здесь исследование спектра рекомбинационного излучения справедливо для случая сильного возбуждающего поля. Если же лазерное поле является слабым, то его влияние может быть учтено с помощью методов теории возмущений. В этом случае мощность рекомбинационного излучения будет определяться выражением, которое можно получить из формул (I.4.44), (I.4.42), если в них выполнить формальную замену $E_\sigma(\mathbf{p}) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{p})$ и в полученном таким образом выражении сохранить лишь нижайший не исчезающий вклад по ρ . После несложных вычислений мы приходим к результату, полученному ранее в [16]. Согласно [16], в случае, когда

¹Мы предполагаем, что время релаксации электронов на фононах значительно меньше по величине времени излучательной рекомбинации и значительно больше периода переходов электрона между валентной зоной и зоной проводимости под действием внешнего лазерного поля.

возбуждающее поле слабое, рекомбинационное излучение изотропно и не зависит от типа поляризации возбуждающего поля.

Глава 5

Поглощение слабого электромагнитного излучения прямозонным полупроводником в сильном поле резонансного лазерного излучения

Рассмотрим теперь другую, по сравнению с изученной в главе 4, возможность экспериментальной проверки динамических и кинетических изменений, вызываемых внешним полем в электронно-дырочной подсистеме полупроводника [185, 217, 218]. Она заключается в исследовании оптических характеристик находящегося во внешнем поле полупроводника с помощью дополнительного слабого электромагнитного сигнала. Помимо самостоятельного интереса, информация о характере взаимодействия фотонов слабого сигнала с носителями тока в присутствии сильного возбуждающего поля необходима и для интерпретации экспериментов по наблюдению спонтанного рекомбинационного излучения полупроводника. Действительно, важным фактором, способным изменить вид спектра рекомбинационного излучения, является его перепоглощение. Учет перепоглощения особенно важен при исследовании достаточно толстых полупроводниковых образцов [206].

Слабый электромагнитный сигнал будем описывать потенциалом

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_1 e^{-i\omega_1 t + i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} + \mathbf{a}_1^* e^{i\omega_1 t - i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}}. \quad (\text{I.5.1})$$

Определим коэффициент поглощения слабой волны \mathcal{K} как отношение средней мощ-

ности, диссипируемой в единице объема полупроводника, к произведению средней плотности энергии слабого поля на скорость ее переноса [219]. Сильное внешнее излучение будем описывать классически с помощью потенциала (1.18), (1.19). Предполагается выполнение условий (I.3.101).

§ 5.1 Вычисление коэффициента поглощения

Рассмотрим квантовую систему, характеризующуюся в шредингеровском представлении динамических величин гамильтонианом

$$H(t) = H(S) + H_T + \sum_{f=0,1} V^{(f)}(t) + V. \quad (\text{I.5.2})$$

Здесь $H(S)$ — гамильтониан свободных электронов и дырок, определенный согласно первой из формул (I.4.1), H_T — гамильтониан термостата; операторы $V^{(f)}(t)$ и V описывают взаимодействие носителей тока с классическими внешними полями $\mathbf{A}_f(\mathbf{r}, t)$ ($f = 0, 1$, $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_{ext}(\mathbf{r}, t)$) и термостатом, соответственно. Операторы $V^{(f)}(t)$ даются выражением

$$V^{(f)}(t) = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \, \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}_f(\mathbf{r}, t), \quad (\text{I.5.3})$$

в котором $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ — оператор плотности электрического тока. В качестве термостата примем фононную подсистему полупроводника и квантованное электромагнитное поле, возбуждаемое в результате излучательной рекомбинации электронов и дырок.

Согласно данному выше определению коэффициента поглощения слабого сигнала,

$$\mathcal{K} = \frac{\overline{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \rangle_t}}{W_1(\mathbf{r}, t) (c/\sqrt{\epsilon})}, \quad W_1(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon \mathbf{E}_1^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_1^2(\mathbf{r}, t)}{2}, \quad (\text{I.5.4})$$

где $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)$ — напряженности электрической и магнитной компонент слабого сигнала; черта над выражением означает его усреднение во времени, а угловые скобки — усреднение по ансамблю.

Будем предполагать, что в бесконечно удаленном прошлом (при $t = t_0$, $t_0 \rightarrow -\infty$) внешние поля отсутствовали ($a, a_1 \sim \exp(\delta t)$, $\delta \rightarrow +0$) и вся система в целом находилась в состоянии термодинамического равновесия, описываемом статистическим

оператором Гиббса

$$D_{t_0} = D(S) D_T, \quad (I.5.5)$$

$$D(S) = e^{-\beta H(S)} / \text{tr } e^{-\beta H(S)}, \quad D_T = e^{-\beta H_T} / \text{tr } e^{-\beta H_T}.$$

Тогда

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle_t = \text{tr } U^{-1}(t, t_0) \mathbf{j}(\mathbf{r}) U(t, t_0) D_{t_0}, \quad (I.5.6)$$

где $U(t, t_0)$ — унитарный оператор эволюции системы, определяемый уравнением

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = 1. \quad (I.5.7)$$

Для вычисления (I.5.6) представим оператор эволюции в мультипликативной форме

$$U(t, t_0) = \prod_{r=0}^2 U_r(t, t_0), \quad U_r(t_0, t_0) = 1. \quad (I.5.8)$$

Оператор

$$U_0(t, t_0) = \exp[-i(H(S) + H_T)(t - t_0)] \quad (I.5.9)$$

осуществляет переход к представлению взаимодействия, а операторы $U_1(t_0, t_0)$ и $U_2(t_0, t_0)$ подчиняются уравнениям

$$i \frac{\partial}{\partial t} U_{f+1}(t, t_0) = [V_f^{(f)}(t) + f V_f(t)] U_{f+1}(t, t_0). \quad (I.5.10)$$

Здесь введено обозначение ($f = 0, 1, 2$)

$$u_f(t) = \left(\prod_{r=0}^2 U_r(t, t_0) \right)^\dagger u \prod_{r=0}^2 U_r(t, t_0), \quad (I.5.11)$$

где u — оператор произвольной динамической величины в шредингеровском представлении. В представлении взаимодействия оператор плотности электрического тока дается формулами (I.4.29), (I.4.30). Оператор электронно-дырочной подсистемы в представлении Фарри определяется разложением (I.4.32).

Подставляя (I.5.8) в (I.5.6), имеем:

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle_t = \text{tr } U_2^{-1}(t, t_0) \mathbf{j}^{(F)}(\mathbf{r}, t) U_2(t, t_0) D_{t_0}, \quad (I.5.12)$$

где, согласно (I.4.29) и (I.4.30),

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(F)}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{e_0 s}{V} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} \sum_{\mathbf{p}_1, \sigma_1} \left[a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{p}_1 \sigma_1} \mathbf{N}_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1 \sigma_1}^{(++)}(\mathbf{r}, t) + b_{\mathbf{p}-\sigma} b_{\mathbf{p}_1 - \sigma_1}^\dagger \mathbf{N}_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1 \sigma_1}^{(--)}(\mathbf{r}, t) \right. \\ & \left. + a_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger b_{\mathbf{p}_1 - \sigma_1}^\dagger \mathbf{N}_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1 \sigma_1}^{(+-)}(\mathbf{r}, t) + b_{\mathbf{p}-\sigma} a_{\mathbf{p}_1 \sigma_1} \mathbf{N}_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1 \sigma_1}^{(-+)}(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{I.5.13})$$

При получении (I.5.13) мы учли, что

$$\sum_{\mathbf{p}, \sigma} \frac{m s^2}{V \varepsilon(\mathbf{p})} \varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)\dagger}(\mathbf{r}, t) \gamma_0 \gamma \varphi_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$$

и ввели обозначение ($j, j_1 = \pm$)

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p}\sigma; \mathbf{p}_1 \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{m s^2}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p}) \varepsilon(\mathbf{p}_1)}} \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(j)\dagger}(\mathbf{r}, t) \gamma_0 \gamma \psi_{\mathbf{p}\sigma}^{(j_1)}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{I.5.14})$$

В дальнейшем при вычислении величин (I.5.14) мы, так же, как и в Главе 4, будем полагать $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 = 0$.

Переписав уравнение для оператора $U_2(t, t_0)$ в интегральной форме, разложим (I.5.12) в ряд по степеням взаимодействий $V^{(1)}$ и V . Сохраняя в этом разложении лишь члены низжайшего порядка малости, найдем:

$$\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle_t = \text{tr} \mathbf{j}^{(F)}(\mathbf{r}, t) D_{t_0} - i \int_{t_0}^t dt_1 \text{tr} \left[\mathbf{j}^{(F)}(\mathbf{r}, t), V_1^{(1)}(t_1) + V_1(t_1) \right] D_{t_0}. \quad (\text{I.5.15})$$

Подставим (I.5.15) в (I.5.4), учтем (I.5.3), (I.5.11) и опустим слагаемые, заведомо выпадающие из (I.5.4) при временном и статистическом усреднениях. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \overline{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \rangle_t} = \\ & = -\frac{i}{c^2} \int d\mathbf{r}_1 \int_{t_0}^t dt_1 \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} \text{tr} \left[\mathbf{j}_\alpha^{(F)}(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}_\beta^{(F)}(\mathbf{r}_1, t_1) \right] D_{t_0} \frac{\partial}{\partial t} A_{1\alpha}(\mathbf{r}, t) A_{1\beta}(\mathbf{r}_1, t_1). \end{aligned} \quad (\text{I.5.16})$$

Формулы (I.5.4), (I.5.16), (I.5.13), (I.5.14) и (I.5.1) позволяют найти выражение для коэффициента поглощения \mathcal{K} слабого электромагнитного сигнала:

$$\mathcal{K} = \sum_{l=1}^4 \mathcal{K}^{(l)}(\omega_1), \quad (\text{I.5.17})$$

$$\mathcal{K}^{(l)}(\omega_1) = \frac{e_0^2 s^2}{4\pi c \omega_1 \sqrt{\epsilon}} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty dp p^2 (1 - 2f_{\mathbf{p}\sigma}^{(a)}) \Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(l)}, \quad (\text{I.5.18})$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(1)} &= \frac{16}{3} \left(\frac{sp}{\omega_0} \right)^2 U_\sigma^2(\mathbf{p}) V_\sigma^2(\mathbf{p}) [\delta(2E_\sigma(\mathbf{p}) - \omega_0 - \omega_1) - \delta(2E_\sigma(\mathbf{p}) - \omega_0 + \omega_1)] , \\
\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(2)} &= |e_{1x} - i\sigma e_{1y}|^2 [U_\sigma^4(\mathbf{p}) \delta(2E_\sigma(\mathbf{p}) - \omega_1) - V_\sigma^4(\mathbf{p}) \delta(2E_\sigma(\mathbf{p}) - 2\omega_0 + \omega_1)] , \\
\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(3)} &= e_{1z}^2 [U_\sigma^2(\mathbf{p}) U_{-\sigma}^2(\mathbf{p}) \delta(E_\sigma(\mathbf{p}) + E_{-\sigma}(\mathbf{p}) - \omega_1) \\
&\quad - V_\sigma^2(\mathbf{p}) V_{-\sigma}^2(\mathbf{p}) \delta(E_\sigma(\mathbf{p}) + E_{-\sigma}(\mathbf{p}) - 2\omega_0 + \omega_1)] , \\
\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(4)} &= e_{1z}^2 [U_\sigma^2(\mathbf{p}) V_{-\sigma}^2(\mathbf{p}) \delta(E_\sigma(\mathbf{p}) - E_{-\sigma}(\mathbf{p}) + \omega_0 - \omega_1) \\
&\quad - V_\sigma^2(\mathbf{p}) U_{-\sigma}^2(\mathbf{p}) \delta(E_\sigma(\mathbf{p}) - E_{-\sigma}(\mathbf{p}) - \omega_0 + \omega_1)] ,
\end{aligned} \tag{I.5.19}$$

Здесь $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 / |\mathbf{a}_1|$ — единичный вектор поляризации поля (I.5.1).

§ 5.2 Спектр поглощения слабого сигнала

Рассмотрим зависимость каждого из слагаемых в (I.5.17) от частоты слабого поля ω_1 . Подставляя $\Lambda_\sigma^{(1)}(\mathbf{p})$ из (I.5.19) в (I.5.18), найдем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1) &= \frac{\tilde{\alpha} \mathbf{e}_1^2 \sqrt{m\varepsilon_g}}{6\mathfrak{a}_1^2 \sqrt{\epsilon}} \tanh\left(\frac{\omega_1}{4k_B T}\right) \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\rho_\sigma^{(+2)} \Theta\left(\mathfrak{a}_1^2 - \rho_\sigma^{(+2)}\right)}{\sqrt{\mathfrak{a}_1^2 - \rho_\sigma^{(+2)}}} \\
&\quad \times \sum_{\nu=\pm 1} \Theta\left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \sqrt{\mathfrak{a}_1^2 - \rho_\sigma^{(+2)}}\right) \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \sqrt{\mathfrak{a}_1^2 - \rho_\sigma^{(+2)}}\right)^{3/2} ,
\end{aligned} \tag{I.5.20}$$

где

$$\tilde{\alpha} = e_0^2 / 4\pi , \quad \mathfrak{a}_1 = \omega_1 / \omega_0 , \quad \rho_\sigma^{(+)} = \rho \left(\frac{1 + \sigma G}{2} \right) .$$

Функция (I.5.20) описывает поглощение в низкочастотной области, определяемой неравенством $\omega_1 \ll \omega_0$. Она не зависит от взаимной ориентации сильного и слабого электромагнитных полей, а также от типа поляризации последнего. В случае эллиптической поляризации сильного поля (см. рисунок I.5.1) $\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1) = 0$, когда $\omega_1 < \rho\omega_0(1 - |G|)/2$. На частотах $\Omega_1 = \rho\omega_0(1 - |G|)/2$ и $\Omega_2 = \rho\omega_0(1 + |G|)/2$ величина $\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1)$ имеет особенности корневого типа — пики резонансного поглощения. В случае линейной поляризации сильного поля ($G = 0$, см. рисунок I.5.2) имеется только один пик поглощения на частоте $\Omega_{1,2} = \rho\omega_0/2$. При $|G| \rightarrow 1$ (циркулярная поляризация, см. рисунок I.5.3) один из пиков резонансного поглощения гаснет, смещаясь в красную сторону, а второй занимает положение $\Omega_2 = \rho\omega_0$. Вдали от области

резонансного поглощения (при $\Delta, \rho\omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega_0$) функция $\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1)$ плавно убывает до нуля по закону $\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1) \sim (\omega_1)^{-3/2}$. В отсутствие сильного поля $\mathcal{K}^{(1)}(\omega_1) \equiv 0$.

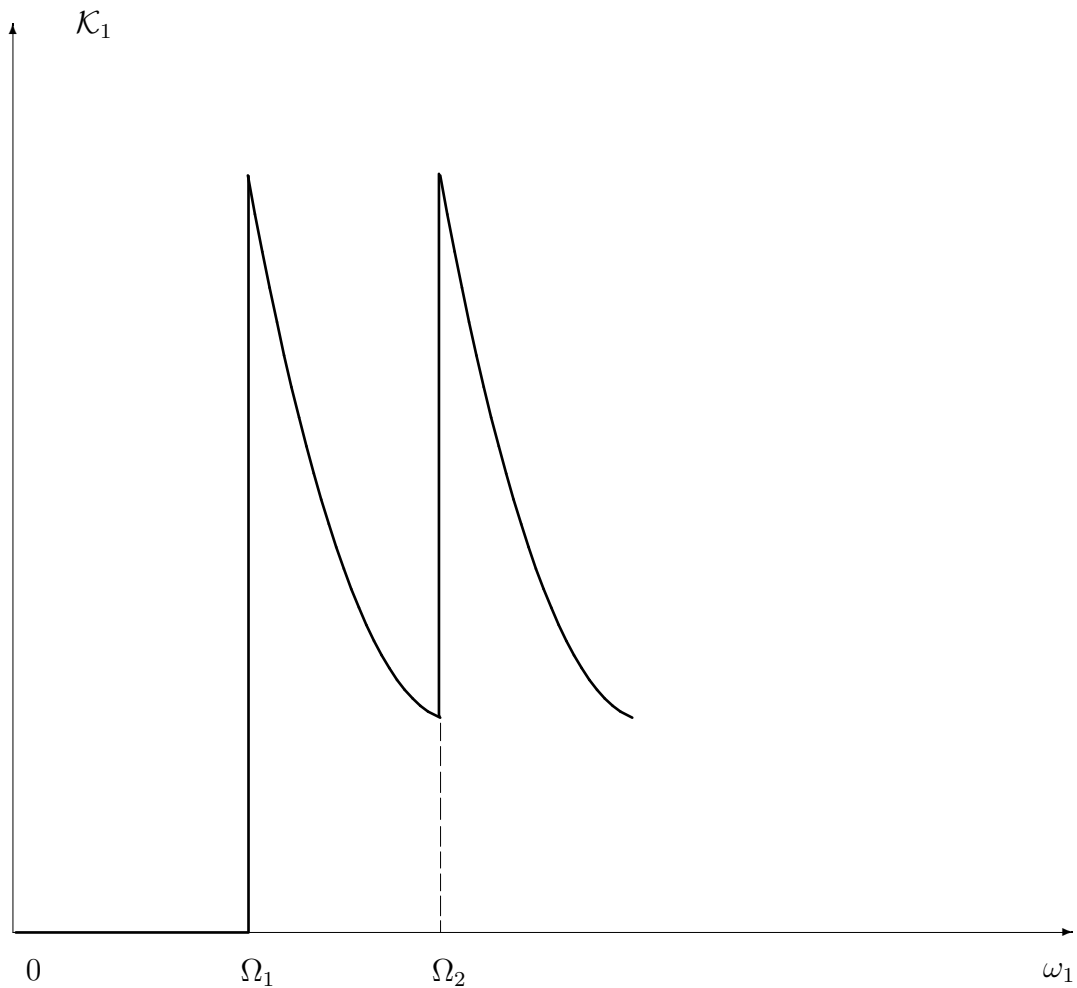


Рис. I.5.1. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(1)}$ от ω_1 при $0 < G < 1$; $\Omega_1 = \rho\omega_0(1 - |G|)/2$, $\Omega_2 = \rho\omega_0(1 + |G|)/2$.

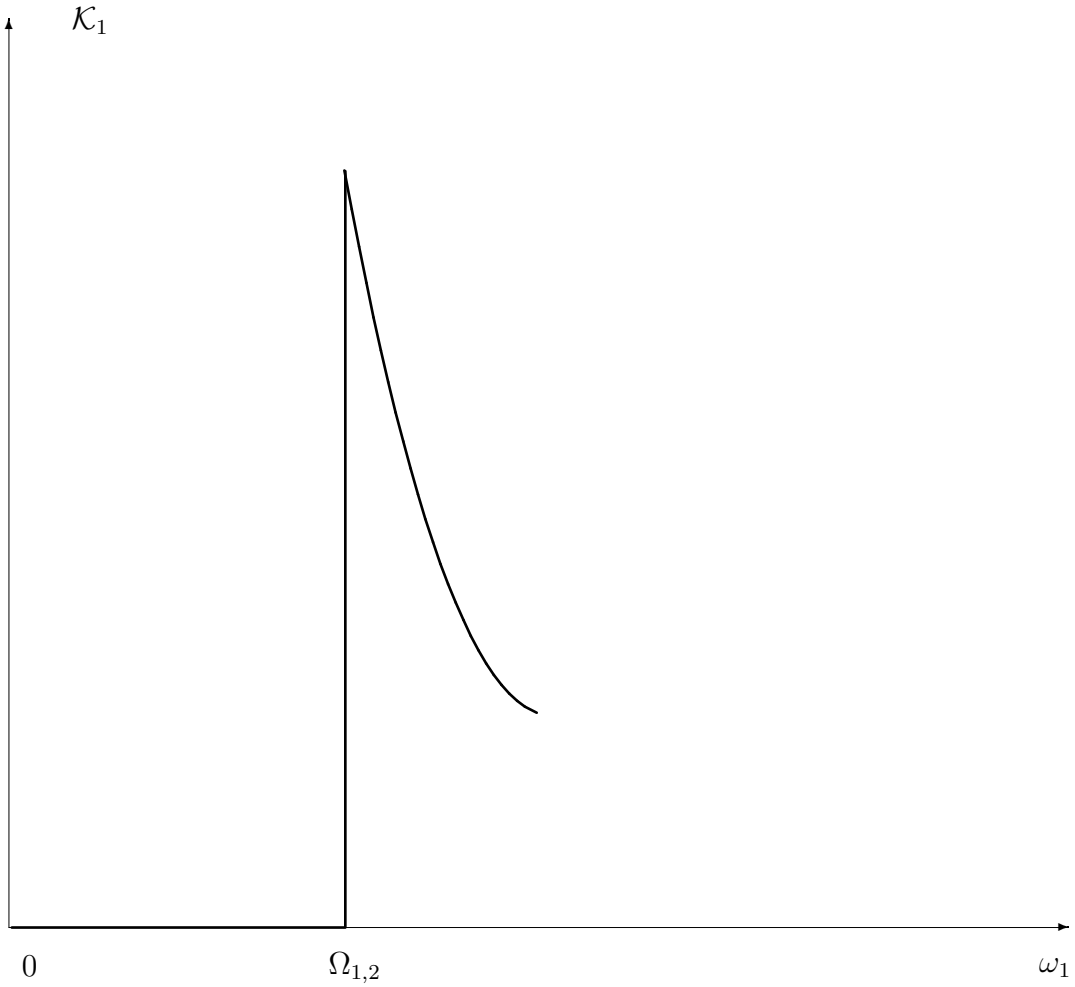


Рис. I.5.2. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(1)}$ от ω_1 при $G = 0$; $\Omega_{1,2} = \rho\omega_0/2$.

Из рисунка I.5.2 видно, что результаты, полученные нами для случая линейной поляризации сильного поля, существенно отличаются от представленных в [17]. Дело в том, что в рассматриваемой нами модели матричный элемент дипольного зона-зонного перехода отличен от нуля в точке $\mathbf{p} = 0$. В кристаллах с центром инверсии это имеет место для зон s и v разной четности. Такие переходы по терминологии Эллиота [220] называются разрешенными. Если матричный элемент дипольного зона-зонного перехода пропорционален волновому вектору \mathbf{p} электрона в зоне, то такой переход называется запрещенным. Этот тип перехода имеет место в кристаллах с центром инверсии для зон одинаковой четности. Полученные в [17] результаты относятся именно к последнему случаю.

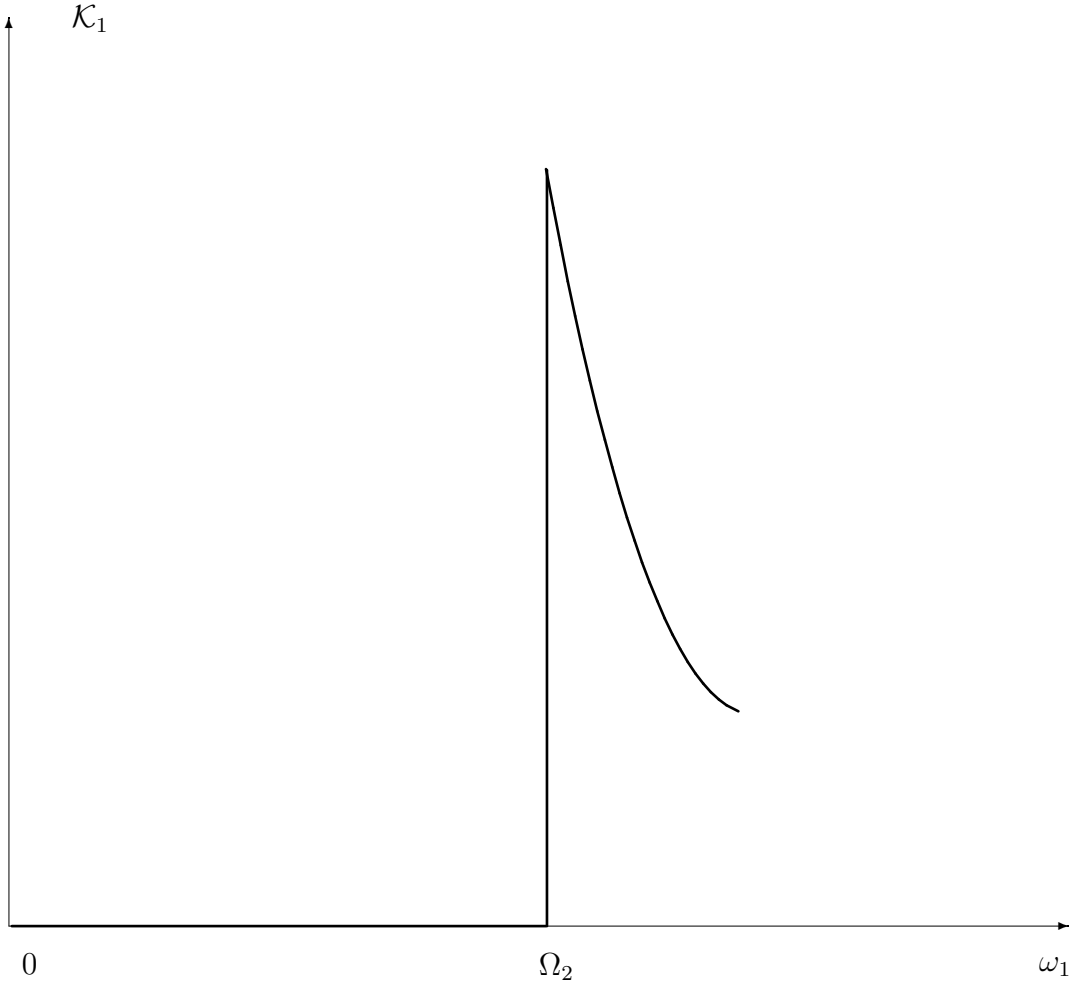


Рис. I.5.3. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(1)}$ от ω_1 при $G = 1$; $\Omega_2 = \rho\omega_0$.

Слагаемые $\mathcal{K}^{(l)}(\omega_1)$ ($l = 2, 3, 4$) в сумме (I.5.17) характеризуют поглощение в области $\omega_1 \approx \omega_0$. Функция

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = & \frac{\tilde{\alpha}\sqrt{m\varepsilon_g}}{16\mathfrak{x}_1\sqrt{\epsilon}} \tanh\left(\frac{\omega_1 - \omega_0}{4k_B T}\right) \sum_{\sigma=\pm 1} |e_{1x} - i\sigma e_{1y}|^2 \frac{\mathfrak{x}_2 \Theta\left(\mathfrak{x}_2^2 - \rho_{\sigma}^{(+)^2}\right)}{\sqrt{\mathfrak{x}_2^2 - \rho_{\sigma}^{(+)^2}}} \\ & \times \sum_{\nu=\pm 1} \Theta\left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu\sqrt{\mathfrak{x}_2^2 - \rho_{\sigma}^{(+)^2}}\right) \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu\sqrt{\mathfrak{x}_2^2 - \rho_{\sigma}^{(+)^2}}\right)^{1/2} \left(1 + \nu\frac{\sqrt{\mathfrak{x}_2^2 - \rho_{\sigma}^{(+)^2}}}{\mathfrak{x}_2}\right)^2, \\ & (\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 - 1) \end{aligned} \quad (\text{I.5.21})$$

описывает поглощение слабого электромагнитного излучения, распространяющегося перпендикулярно плоскости XOY . Она существенно зависит от типа поляризации

сильного и слабого электромагнитных полей. Пусть, например, сильное поле, распространяющееся вдоль оси Z , является эллиптически правополяризованным ($0 < G < 1$), а слабое поле, распространяющееся в том же направлении, поляризовано по кругу. Тогда для правой круговой поляризации слабого поля $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = 0$, когда $\omega_0 - \rho\omega_0(1 - G)/2 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0(1 - G)/2$, причем на частоте $\omega_1^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0(1 - G)/2$ имеется пик резонансного поглощения, а на частоте $\omega_1^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0(1 - G)/2$ — пик резонансного усиления (отрицательного поглощения). При левой круговой поляризации слабого поля $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = 0$ в области $\omega_0 - \rho\omega_0(1 + G)/2 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0(1 + G)/2$, а пики резонансного поглощения и усиления возникают, соответственно, на частотах $\omega_2^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0(1 + G)/2$ и $\omega_2^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0(1 + G)/2$. Если распространяющееся вдоль оси Z слабое электромагнитное излучение не является циркулярно поляризованным, то $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = 0$, когда $\omega_0 - \rho\omega_0(1 - G)/2 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0(1 - G)/2$; на частотах $\omega_1^{(+)}$, $\omega_2^{(+)}$ имеются пики резонансного поглощения, а на частотах $\omega_1^{(-)}$, $\omega_2^{(-)}$ — пики резонансного усиления (см. рисунок I.5.4).

При линейной поляризации сильного электромагнитного поля поведение функции $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1)$ не зависит от типа поляризации слабого излучения. В этом случае на частотах $\omega^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0/2$ и $\omega^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0/2$ имеются пики резонансного поглощения и усиления, соответственно; между ними располагается область, в которой $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = 0$ (см. рисунок I.5.5).

Обратимся теперь к случаю циркулярной поляризации сильного поля. Для определенности предположим, что оба поля (сильное и слабое) распространяются вдоль оси Z , причем сильное поле поляризовано по правому кругу. Тогда в случае правой круговой поляризации слабого поля функция $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1)$ не имеет резонансных особенностей. Область усиления определяется условием $\omega_0 - \Delta < \omega_1 < \omega_0$, а область поглощения — неравенством $\omega_1 > \omega_0$. Поглощение и усиление отсутствуют, когда $\omega_1 < \omega_0 - \Delta$ и при $\omega_1 = 0$. Если слабое поле поляризовано по левому кругу, то область прозрачности ($\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1) = 0$) определяется неравенствами $\omega_0 - \rho\omega_0 < \omega_1 < \omega_0 + \rho\omega_0$; на частотах $\Omega^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0$ и $\Omega^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0$ имеются пики резонансного поглощения

и усиления, соответственно. При линейной или эллиптической поляризациях слабого поля функции $\mathcal{K}^{(2)}(\omega_1)$ отвечает кривая, которая может быть получена простым сложением описанных выше зависимостей.

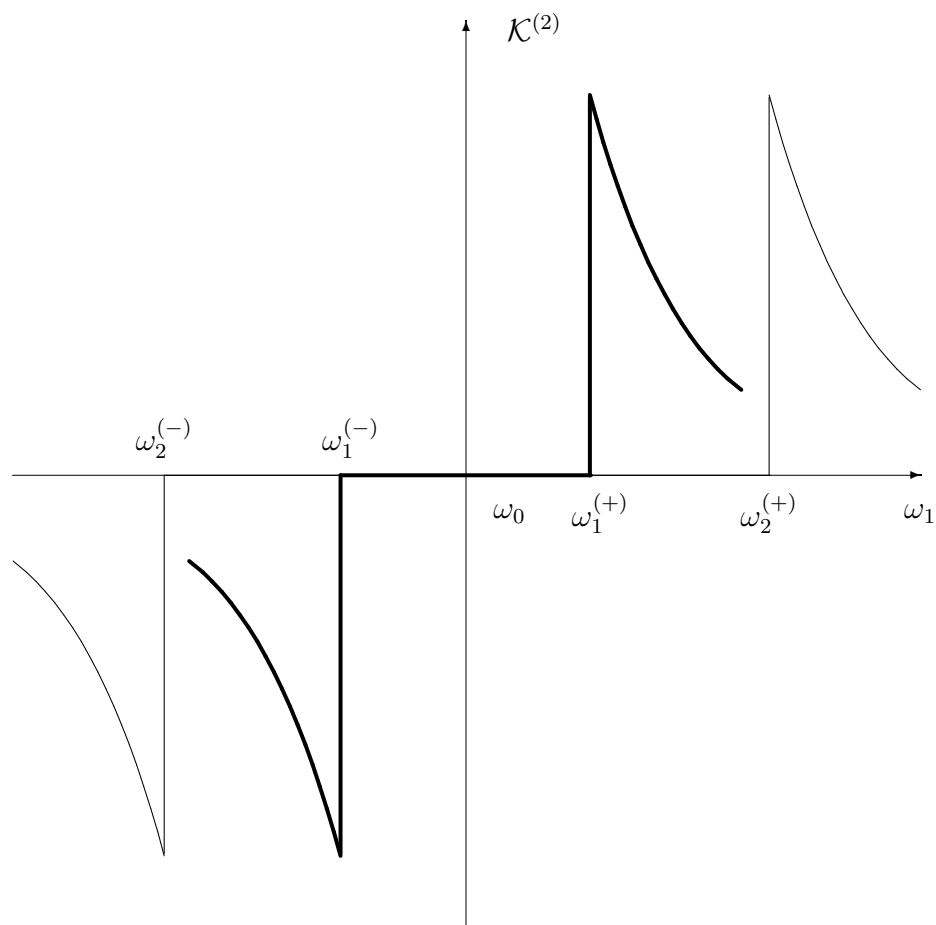


Рис. 1.5.4. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(2)}$ от ω_1 для правополяризованного (сплошная жирная линия) и левополяризованного (сплошная тонкая линия) слабых сигналов при $0 < G < 1$; $\omega_1^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0(1 - G)/2$, $\omega_2^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0(1 + G)/2$.

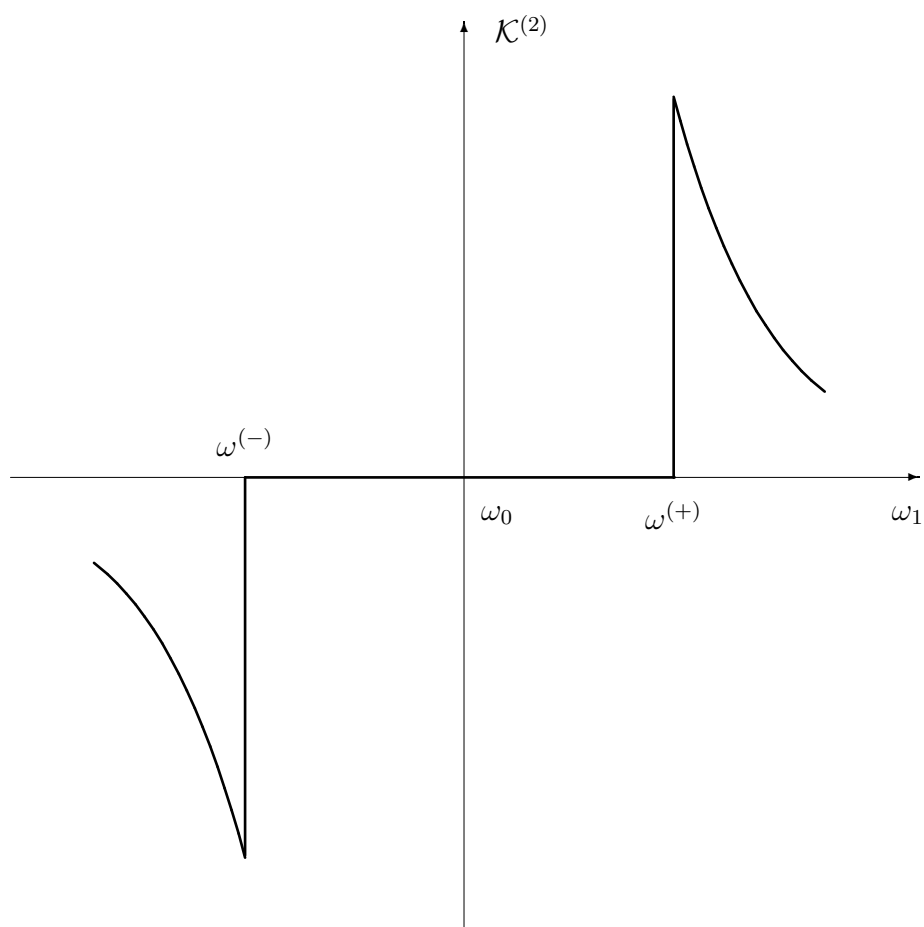


Рис. 1.5.5. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(2)}$ от ω_1 при $G = 0$; $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$.

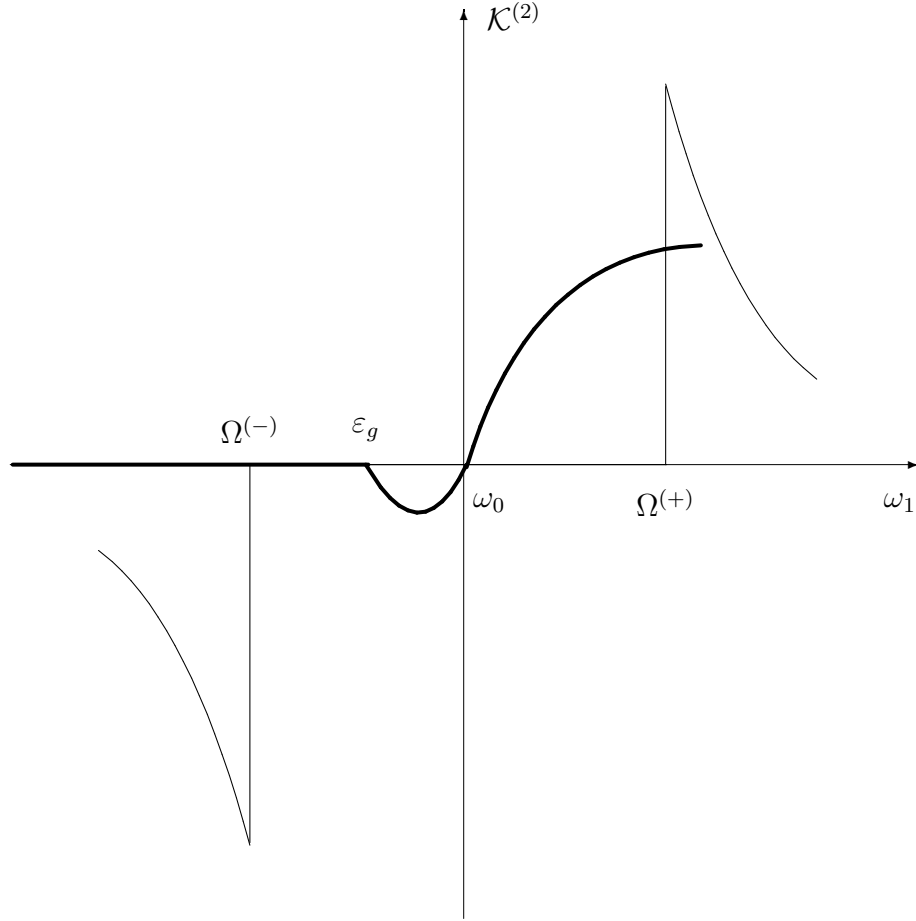


Рис. I.5.6. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(2)}$ от ω_1 при $G = 1$; для правополяризованного (сплошная жирная линия) и левополяризованного (сплошная тонкая линия) слабых сигналов при $G = 1$; $\Omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0$.

Слагаемые

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^{(3)}(\omega_1) &= \frac{\tilde{\alpha} e_{1z}^2 \sqrt{m \varepsilon_g}}{16 \varkappa_1 \sqrt{\epsilon}} \frac{\Theta[\varkappa_2^2 - (\rho/2)^2]}{\sqrt{[\varkappa_2^2 - (\rho/2)^2][\varkappa_2^2 - (\rho G/2)^2]}} \\
 &\times \left[\tanh \left(\frac{\omega_0}{4k_B T} \frac{\varkappa_2^2 + (\rho/2)^2 |G|}{\varkappa_2} \right) + \tanh \left(\frac{\omega_0}{4k_B T} \frac{\varkappa_2^2 - (\rho/2)^2 |G|}{\varkappa_2} \right) \right] \\
 &\times \sum_{\nu=\pm 1} \Theta \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \frac{\sqrt{[\varkappa_2^2 - (\rho/2)^2][\varkappa_2^2 - (\rho G/2)^2]}}{\varkappa_2} \right) \\
 &\times \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \frac{\sqrt{[\varkappa_2^2 - (\rho/2)^2][\varkappa_2^2 - (\rho G/2)^2]}}{\varkappa_2} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{I.5.22}$$

$$\times \left[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2 \frac{1+G^2}{2} + \nu \sqrt{[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2] [\mathfrak{x}_2^2 - (\rho G/2)^2]} \right],$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{(4)}(\omega_1) = & -\frac{\tilde{\alpha} e_{1z}^2 \sqrt{m \varepsilon_g}}{16 \mathfrak{x}_1 \sqrt{\epsilon}} \frac{\Theta[(\rho G/2)^2 - \mathfrak{x}_2^2]}{\sqrt{[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2] [\mathfrak{x}_2^2 - (\rho G/2)^2]}} \\ & \times \left[\tanh \left(\frac{\omega_0}{4k_B T} \frac{\mathfrak{x}_2^2 + (\rho/2)^2 |G|}{\mathfrak{x}_2} \right) + \tanh \left(\frac{\omega_0}{4k_B T} \frac{\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2 |G|}{\mathfrak{x}_2} \right) \right] \\ & \times \sum_{\nu=\pm 1} \Theta \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \frac{\sqrt{[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2] [\mathfrak{x}_2^2 - (\rho G/2)^2]}}{\mathfrak{x}_2} \right) \\ & \times \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_g} + \nu \frac{\sqrt{[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2] [\mathfrak{x}_2^2 - (\rho G/2)^2]}}{\mathfrak{x}_2} \right)^{1/2} \\ & \times \left[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2 \frac{1+G^2}{2} + \nu \sqrt{[\mathfrak{x}_2^2 - (\rho/2)^2] [\mathfrak{x}_2^2 - (\rho G/2)^2]} \right] \end{aligned} \quad (I.5.23)$$

в формуле (I.5.17) описывают поглощение фотонов слабого электромагнитного излучения, вектор поляризации \mathbf{e}_1 которых перпендикулярен плоскости XOY . Согласно выражению (I.5.22), в случае линейной или эллиптической поляризации сильного поля функция $\mathcal{K}^{(3)}(\omega_1)$ имеет пик резонансного поглощения на частоте $\omega^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0/2$ и пик резонансного усиления при $\omega^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0/2$; между ними располагается область, в которой $\mathcal{K}^{(3)}(\omega_1) = 0$. В случае циркулярной поляризации сильного поля резонансные пики отсутствуют, однако, область, в которой $\mathcal{K}^{(3)}(\omega_1) = 0$, по-прежнему определяется неравенствами $\omega^{(-)} < \omega_1 < \omega^{(+)}$. Слева от нее (при $\omega_0 - \Delta/2 - \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2} < \omega_1 < \omega^{(-)}$) находится область усиления, а справа (при $\omega_1 > \omega^{(+)}$) — область поглощения. Соответствующие выражению (I.5.22) зависимости изображены на рисунке I.5.7.

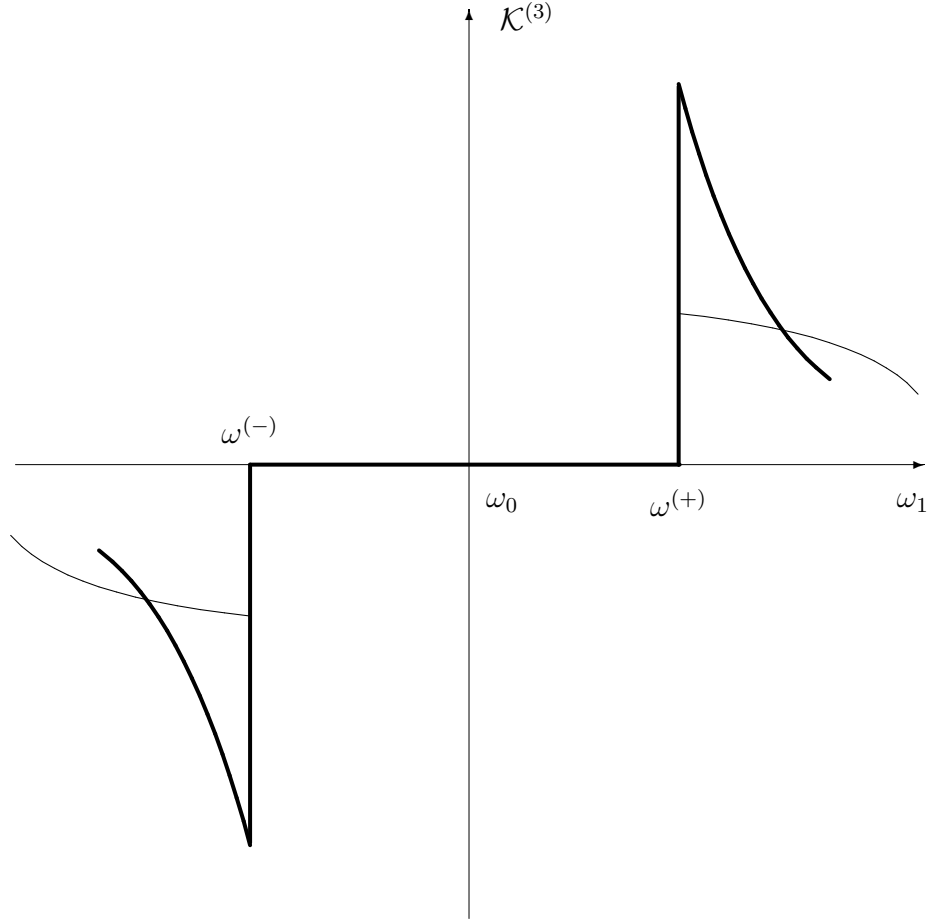


Рис. 1.5.7. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(3)}$ от ω_1 при $0 \leq G < 1$ (сплошная жирная линия) и $G = 1$ (сплошная тонкая линия); $\omega^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0/2$.

Функция $\mathcal{K}^{(4)} \equiv 0$ при линейной поляризации сильного поля. В случае эллиптической поляризации она имеет пики резонансного поглощения и усиления на частотах $\bar{\omega}^{(+)} = \omega_0 + \rho\omega_0 |G|/2$ и $\bar{\omega}^{(-)} = \omega_0 - \rho\omega_0 |G|/2$, соответственно, причем $\mathcal{K}^{(4)} = 0$, когда $\omega_1 < \bar{\omega}^{(-)}$, $\omega_1 > \bar{\omega}^{(+)}$ и в точке $\omega_1 = \omega_0$. При циркулярной поляризации сильного поля функция $\mathcal{K}^{(4)}$ не имеет резонансных особенностей. Она отлична от нуля при $\bar{\omega}^{(-)} < \omega_1 < \omega_0$ (область усиления) и при $\omega_0 - \Delta/2 - \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2} < \omega_1 < \bar{\omega}^{(+)}$ (область поглощения). Отметим, что в случае циркулярной поляризации сильного поля имеет место соотношение

$$\mathcal{K}^{(4)}(\omega^{(\pm)} \mp \eta) = \mathcal{K}^{(3)}(\omega^{(\pm)} \pm \eta) \quad (\eta \rightarrow +0) .$$

Соответствующие выражению (I.5.23) зависимости изображены на рисунках I.5.8 и I.5.9.

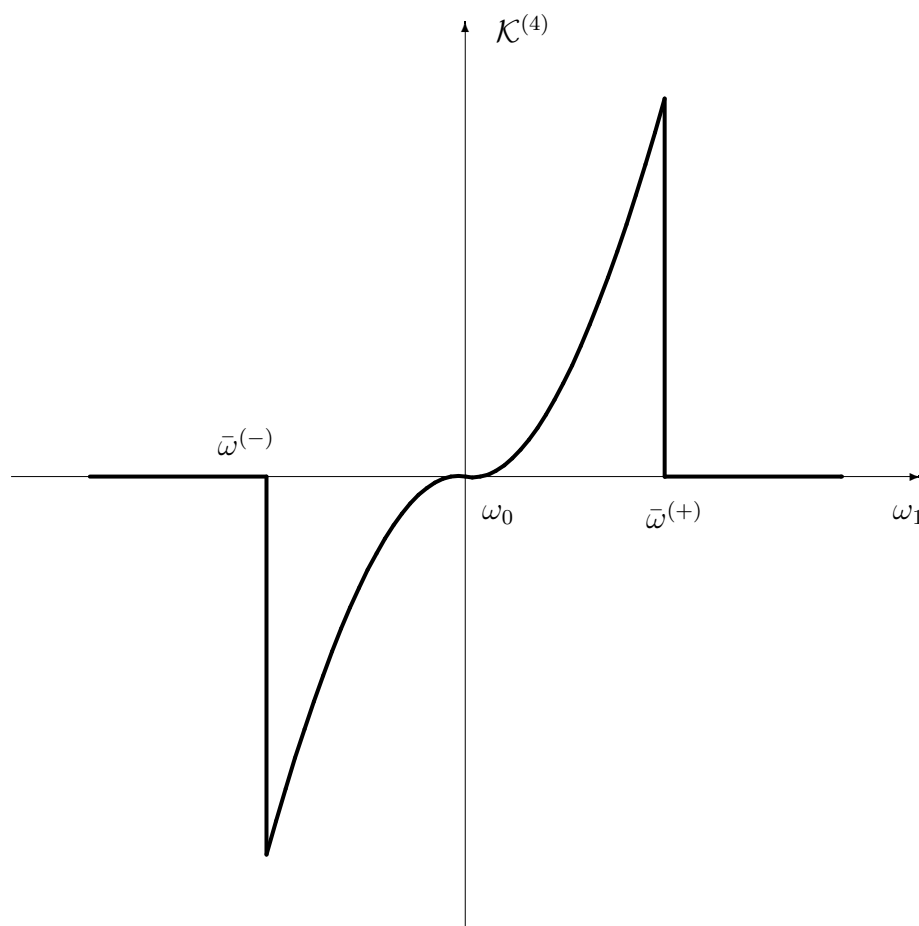


Рис. I.5.8. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(4)}$ от ω_1 при $0 \leq |G| < 1$; $\bar{\omega}^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0 |G|/2$.

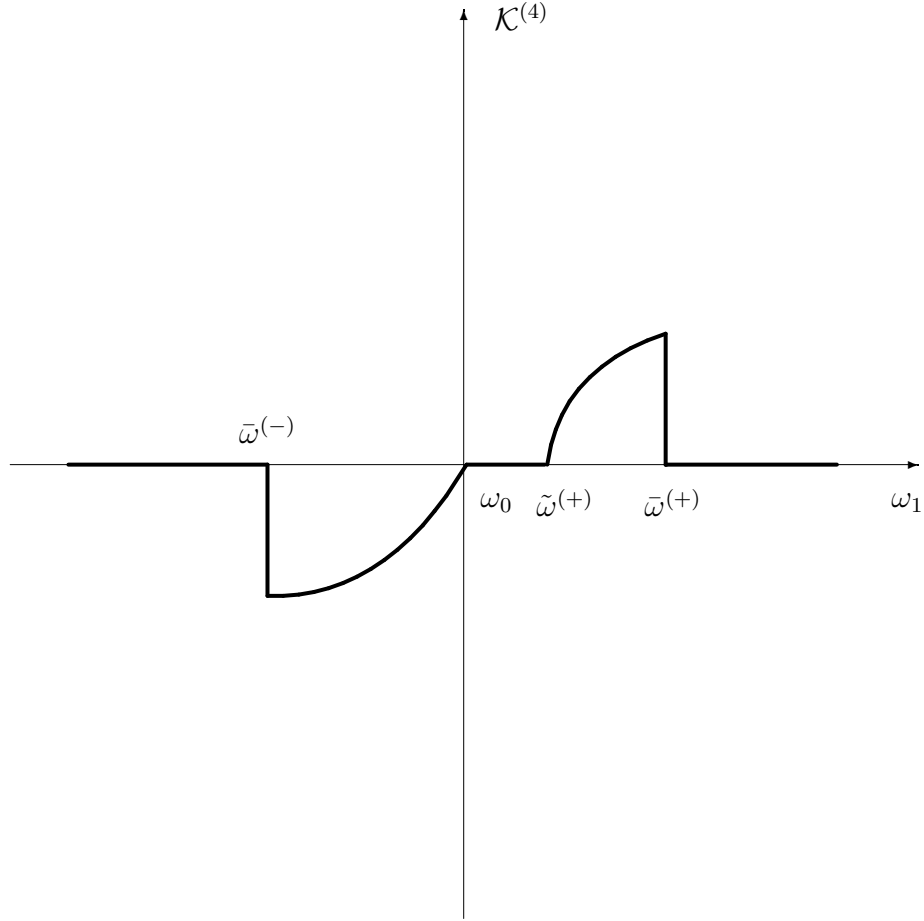


Рис. 1.5.9. Зависимость функции $\mathcal{K}^{(4)}$ от ω_1 при $|G| = 1$; $\bar{\omega}^{(\pm)} = \omega_0 \pm \rho\omega_0|G|/2$, $\tilde{\omega}^{(+)} = \omega_0 - \Delta/2 - \sqrt{(\Delta/2)^2 + (\rho\omega_0/2)^2}$.

Наличие пиков отрицательного поглощения указывает на эффективный механизм перекачки энергии из сильной электромагнитной волны в слабую. Существенная зависимость коэффициента поглощения от “геометрии” эксперимента дает возможность управлять этим процессом. Интересно отметить, что при $\Delta/\varepsilon_g < \rho$ все пики резонансного усиления располагаются на частотах, попадающих в запрещенную зону полупроводника.

При $T \rightarrow 0$ качественное поведение функций $\mathcal{K}^{(l)}$ с $l = 1, 2, 3$ существенно не меняется. В случае эллиптической поляризации сильного поля функция $\mathcal{K}^{(4)}$ при $T \rightarrow 0$ обращается в нуль. При циркулярной поляризации сильного поля $\mathcal{K}^{(4)}|_{T \rightarrow 0} \neq 0$

лишь в точках $\omega_1 = \omega^{(\pm)}$, в которых она переходит в $\mathcal{K}^{(3)}$. При $T \rightarrow \infty$ коэффициент поглощения (I.5.17) стремится к нулю.

В случае линейной поляризации сильного электромагнитного поля перечисленные здесь результаты совпадают с результатами работы [31], подтвержденными экспериментально в [36].

Происхождение указанных особенностей коэффициента поглощения легко понять, если обратиться к дисперсионным кривым, изображенным на рисунках I.3.1–I.3.3. Рассмотрим сначала квантовые переходы, ответственные за поглощение слабого электромагнитного поля с частотой $\omega_1 \ll \omega_0$. Один из механизмов этого поглощения состоит в том, что электрон (точнее, электронное возбуждение, которое мы здесь для краткости будем называть электроном), находящийся в состоянии с квазиимпульсом $|\mathbf{P}| > P_0$ в валентной зоне $E_\sigma^{(v)}(\mathbf{P})$, поглощая “фотон” сильного поля и “фотон” слабого поля, переходит в состояние с тем же значением квазиимпульса в зоне проводимости $E_\sigma^{(c)}(\mathbf{P})$. Данный процесс описывается первым слагаемым в выражении для функции $\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(1)}$, определяемой согласно (I.5.19). Второе слагаемое в этом выражении описывает переход электрона, находящегося в состоянии с $|\mathbf{P}| < P_0$ в зоне проводимости, в состояние с тем же значением $|\mathbf{P}|$ в валентной зоне, сопровождающийся стимулированным излучением “фотона” сильного поля и поглощением “фотона” слабого поля. В каждый из указанных механизмов поглощения зоны $\sigma = \pm 1$ вносят аддитивный вклад. Поэтому при $G \neq 0$, когда сильное электромагнитное поле снимает спиновое вырождение дисперсионных кривых свободных электронов и дырок, появляются, вообще говоря, два пика резонансного поглощения, один из которых исчезает в случае циркулярной поляризации из-за отсутствия переходов между состояниями с $\sigma = -1$ ($\sigma = +1$) валентной зоны и зоны проводимости при $G = 1$ ($G = -1$). В случае линейной поляризации ($G \rightarrow 0$) спиновое вырождение восстанавливается и оба пика резонансного поглощения сливаются в один. Прозрачность полупроводника для волн с частотой $\omega_1 < \rho\omega_0(1 - |G|)/2$ объясняется наличием в квазиэнергетическом спектре электронов и дырок изотропной щели Δ_1 .

Установим теперь причину появления пиков резонансного поглощения и усиления слабого электромагнитного излучения, вектор поляризации которого расположен в плоскости XOY , перпендикулярной направлению распространения сильной волны. Для этого рассмотрим функцию $\Lambda_{\mathbf{r}\sigma}^{(2)}$ из (I.5.19). Каждое из двух слагаемых, содержащихся в этой функции, ответственно за два типа процессов. Первое слагаемое описывает:

1. рождение электронно-дырочной пары в состояниях с квазиимпульсом $|\mathbf{P}| > P_0$ в зонах $E_{\sigma}^{(v,c)}(\mathbf{P})$ в результате поглощения одного только “фотона” слабого поля;
2. аннигиляцию электронно-дырочной пары, находящейся в состояниях с квазиимпульсом $|\mathbf{P}| < P_0$ в зонах $E_{\sigma}^{(v,c)}(\mathbf{P})$, с излучением одного “фотона” слабого поля.

Со вторым слагаемым связаны более сложные процессы:

3. рождение электронно-дырочной пары в состояниях с квазиимпульсом $|\mathbf{P}| > P_0$ в зонах $E_{\sigma}^{(v,c)}(\mathbf{P})$ в результате поглощения двух “фотонов” сильного поля и излучения одного “фотона” слабого;
4. аннигиляция электронно-дырочной пары, находящейся в состояниях с квазиимпульсом $|\mathbf{P}| < P_0$ в зонах $E_{\sigma}^{(v,c)}(\mathbf{P})$, сопровождающаяся излучением двух “фотонов” сильного поля и поглощением одного “фотона” слабого.

Процессы 1 и 4 приводят к резонансному поглощению, а процессы 2 и 3 — к резонансному усилению слабого электромагнитного поля.

В указанных процессах рождающиеся (аннигилирующие) электрон и дырка находятся в состояниях, характеризующихся одним и тем же значением спинового квантового числа $\sigma = \pm 1$. Процессы, в которых рождаются (аннигилируют) электрон в состоянии σ и дырка в состоянии $-\sigma$ возможны лишь при отличной от нуля проекции вектора поляризации \mathbf{e}_1 слабого сигнала на направление распространения сильного поля ($e_{1z} \neq 0$). Функция $\Lambda_{\mathbf{r}\sigma}^{(3)}$ из (I.5.19) описывает процессы того же типа, что и функция $\Lambda_{\mathbf{r}\sigma}^{(2)}$, однако рождающиеся либо аннигилирующие в этих процессах

электрон и дырка находятся в состояниях с разными значениями σ . Наиболее интересные процессы, связанные с z -компонентой слабого электромагнитного сигнала описываются функцией $\Lambda_{\mathbf{p}\sigma}^{(4)}$. Они связаны с различной заселенностью квазиэнергетических зон с $\sigma = \pm 1$ при конечной температуре в случае, когда сильное поле не является поляризованным линейно и, следовательно, снимает спиновое вырождение дисперсионных кривых свободных электронов и дырок. Для определенности предположим, что $0 < G \leq 1$. Тогда, согласно (I.4.40), при $T \neq 0$ среднее число электронов в состоянии с $|\mathbf{P}| < P_0$ в зоне $E_{+1}^{(c)}(\mathbf{P})$ больше среднего числа электронов с тем же значением квазиимпульса в зоне $E_{-1}^{(c)}(\mathbf{P})$. Резонансные пики на частотах $\omega_1 = \omega_0 + \sigma (\rho\omega_0 G/2) \text{sign} (|\mathbf{P}| - P_0)$ возникают вследствие квантовых переходов электрона, характеризующихся законами сохранения

$$\omega_1 + \left(E_{-\sigma}^{(c)}(\mathbf{p}) - \omega_0 \right) = E_{\sigma}^{(c)}(\mathbf{p}) \quad \text{и} \quad \omega_1 + E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{p}) = \left(E_{-\sigma}^{(v)}(\mathbf{p}) - \omega_0 \right).$$

Если возбуждающее поле является слабым, его воздействие на электронно-дырочную подсистему может быть учтено методами теории возмущений. После вычислений получим результат, впервые приведенный в [16]. В случае слабого возбуждающего поля коэффициент поглощения зондирующего сигнала не зависит от типа поляризации лазерной накачки и сигнала, а также от направления их распространения.

В заключение отметим, что для значений параметров полупроводника $\varepsilon_g = 1 \text{ эВ}$, $m = 0.1m_e$, $\epsilon = 16$, $\Gamma = 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ и при $|\mathbf{E}_0| \sim 10^5 \text{ В/см}$, $k_B T \sim \rho\omega_0$ величина коэффициента поглощения в резонансных точках достигает значений порядка $\pm 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Глава 6

Магнитопоглощение акустической волны прямозонным полупроводником в сильном поле резонансного лазерного излучения

В отличие от физики изолированных молекул и атомов, в физике конденсированных сред имеется эффективный метод исследования особенностей энергетического спектра, заключающийся в их зондировании акустическими волнами различных частот [221, 222].

При рассмотрении вопроса о поглощении звука следует различать два предельных случая. Первый из них соответствует звуковым частотам ω_2 , удовлетворяющим условию $\omega_2\tau \ll 1$, а второй — предполагает выполнение обратного неравенства: $\omega_2\tau \gg 1$ (здесь τ — время релаксации носителей заряда). В первом случае процессы релаксации играют решающую роль, а звуковая волна может быть описана как внешнее поле, воздействующее на носители заряда. Диссипация энергии звуковой волны определяется посредством исследования соответствующего кинетического уравнения. Иногда даже допустимо использование обобщенных характеристик типа вязкости, теплопроводности, проводимости и т.д. электронного газа [223, 224]. Во втором случае можно говорить о взаимодействии индивидуальных электронов и дырок с фононами и вообще не принимать во внимание процессы релаксации. Поглощение звука при этом рассматривается просто как процесс поглощения звуковых квантов свободными электронными возбуждениями [225].

В случае, когда электронам (дыркам) можно приписать определенную длину свободного пробега l , основным параметром, определяющим характер поглощения, становится величина $|\mathbf{k}|l$ (\mathbf{k} — волновой вектор акустической волны) [226]. При $|\mathbf{k}|l \ll 1$ электроны между столкновениями движутся в почти однородном поле звуковой волны. Причиной поглощения звука является вязкость электронной жидкости. При $|\mathbf{k}|l \gg 1$ поглощение ультразвука аналогично известному затуханию плазменных волн Ландау [227] и фактически представляет собой поглощение волны электронами, которые в системе отсчета, связанной с акустической волной, имеют импульс $\mathbf{p} = \pm 2\mathbf{k}$ и между двумя столкновениями успевают продифрагировать на акустической волне.

Следует отметить, что чаще всего скорость электронов $v = p/m \gg c_s$ (c_s — скорость звука) и поэтому из условия $|\mathbf{k}|l \gg 1$ автоматически следует неравенство $\omega_2\tau \gg 1$. В дальнейшем нас будет интересовать именно этот случай, как позволяющий наиболее эффективно исследовать характер перестройки энергетического спектра носителей заряда полупроводника под действием внешнего лазерного поля. В работе [228] для данного случая было изучено поглощение акустической волны полупроводником, находящимся в поле сильной световой волны, рождающей электронно-дырочные пары и перенормирующей энергетический спектр электронов и дырок. Внутризонное движение носителей заряда под действием электромагнитной волны в [228] не учитывалось. Для коэффициента поглощения звука было получено выражение, формально имеющее тот же вид, что и коэффициент поглощения звука сверхпроводником [225, 229]. Если считать, что квазиэнергетическая щель, возникающая в спектре электронно-дырочных возбуждений полупроводника под действием внешней электромагнитной волны, зависит от угла между напряженностью электромагнитной волны и квазиимпульсом носителя заряда \mathbf{p} (дипольно-запрещенный межзонный переход), то рассматриваемая в [228] система по отношению к поглощению звука ведет себя подобно сильно анизотропному сверхпроводнику. Тем не менее, для окончательного вычисления коэффициента поглощения не удастся воспользоваться уже

известной методикой [225]. Действительно, в анизотропных сверхпроводниках минимальная величина энергетической щели $|\lambda|_{min}$ отличается от максимального значения $|\lambda|_{max}$ не более чем в 1.5 раза. Это позволило авторам [230] предположить, что $kp_F \ll |\lambda|_{min}$. При исследовании распада фонона на пару квазичастиц в сверхпроводниках [231] также была учтена лишь слабая анизотропия щели $\nabla_{\mathbf{p}} |\lambda(\mathbf{p})| k \ll |\lambda|_{min}$.

В работе [228] разработан эффективный способ вычисления коэффициента поглощения ультразвука для случая сильно анизотропной щели. С его помощью показано, что при линейной поляризации сильного поля имеется порог поглощения по углу между направлением распространения звуковой волны и осью наведенной светом анизотропии. При круговой поляризации возникает порог как по углу, так и по частоте звука.

Для дипольно-разрешенного межзонного перехода квазиэнергетическая щель будет изотропной (см. § 3.5). Соответственно, должен измениться характер поглощения ультразвука. Очевидно, что коэффициент поглощения в этом случае изотропен¹. Для некоторых значений параметров можно воспользоваться известными результатами [225, 229]. В общем же случае соотношения параметров оказываются совершенно иными, чем в [225, 229], и окончательный результат для спектра поглощения может быть получен только численными методами. Анализ возникающих в теории интегралов показывает, что коэффициент поглощения ультразвука не содержит каких-либо ярких (например, резонансных) особенностей, связанных с перестройкой энергетического спектра носителей заряда полупроводника под действием поля сильной внешней волны. С другой стороны, может быть найден в аналитической форме коэффициент поглощения ультразвука в сильном магнитном поле в присутствии сильного лазерного излучения, вызывающего перестройку энергетического спектра электронов и дырок.

Сильное магнитное поле (такое, что $\omega_H \tau \gg 1$, ω_H — циклотронная частота) оказывает существенное влияние на электронный спектр твердых тел. Движение носителей

¹Так же, как и в предыдущих главах, мы здесь не учитываем анизотропию, связанную с волновым вектором сильной лазерной волны.

заряда в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , становится квантованным. Их энергетические зоны расщепляются на подзоны Ландау. В то же время, движение электронов (дырок) вдоль \mathbf{H} остается свободным [150, 232].

Плотность состояний носителей заряда вблизи краев подзон Ландау из-за одномерного характера движения вдоль \mathbf{H} обладает особенностями типа обратного корня. Благодаря этому возникают особенности в магнитной восприимчивости, в магнитопоглощении света, в кинетических свойствах электронной подсистемы [232, 233]. Появляются особенности и в магнитопоглощении акустических волн. При $\omega_2 \ll \omega_H$ для металлов и вырожденных полупроводников при определенных углах Ξ между \mathbf{k} и \mathbf{H} наблюдаются очень сильные (гигантские) осцилляции в поглощении ультразвука [234]. Это связано с тем, что в поглощении могут участвовать только электроны в узком интервале энергий $(\varepsilon_F - k_B T, \varepsilon_F + k_B T)$ (ε_F — энергия Ферми). При поглощении фонона должны выполняться одновременно законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{p_z^2}{2m} + n\omega_H = \frac{p_z'^2}{2m} + n'\omega_H + \omega_2(k),$$

где

$$n = n', \quad p_z' = p_z - k_z, \quad k_z = k \cos \Xi.$$

Это возможно для электронов с энергией в указанном интервале только при определенных углах Ξ . В случае $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$ гигантские осцилляции не проявляются, однако, появляются осцилляции в поглощении с максимумами в точках $\omega_2(k) = n\omega_H$ (акустический циклотронный резонанс [235]). Эти осцилляции обусловлены резонансными переходами между разными подзонами Ландау под действием внешнего поля.

В данной главе мы покажем, что если на полупроводник, находящийся в сильном магнитном поле \mathbf{H} , воздействует сильная электромагнитная волна, вектор поляризации которой $\mathbf{E}(t)$ параллелен \mathbf{H} , то в квазиэнергетическом спектре электронов и дырок может возникнуть щель. Появление квазиэнергетической щели может привести к дополнительным особенностям в спектре поглощения акустической волны. Мы изучим спектр поглощения ультразвука полупроводниковым кристаллом с центром

инверсии, помещенным в постоянное магнитное поле

$$\mathbf{H} = (0, 0, H) \quad (\text{I.6.1})$$

и подвергаемого воздействию внешнего поля интенсивной лазерной волны. Будем предполагать, что циклотронная частота ω_H настолько велика, что фононы не могут возбудить собственные колебания плазменной подсистемы, что обычно имеет место при $\omega_2 \sim \omega_H$. Мы ограничимся изучением конфигурации, когда $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$. При такой конфигурации и не слишком малом значении параметра ω_H/ω_2 процессы, связанные с поглощением и излучением фонона носителями заряда, невозможны. Зато происходят пороговые процессы распада фонона на две квазичастицы. Предполагается, что магнитное поле (I.6.1) достаточно сильное — такое, что

$$\omega_H \tau \gg 1.$$

Поле лазерной волны (1.18), (1.19) предполагается сильным в смысле выполнения условий (I.3.101). Электронно-дырочную подсистему будем рассматривать в рамках модели, описываемой двухзонным уравнением (1.17).

§ 6.1 Волновые функции и квазиэнергетический спектр

Решение уравнения (1.17), описывающего состояния носителей заряда двухзонного полупроводника во внешнем поле

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_H + \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_H = (-Hy, 0, 0), \quad \mathbf{A}_0 = (0, 0, a \cos \omega_0 t), \quad (\text{I.6.2})$$

представим в виде

$$\psi = \exp(iq_x x + iq_z z) \Phi(\eta, \xi), \quad \eta = \left(\frac{e_0 H}{c}\right)^{1/2} \left(y - \frac{cq_x}{e_0 H}\right), \quad \xi = \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (\text{I.6.3})$$

Функция $\Phi(\eta, \xi)$ должна подчиняться уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\eta, \xi) = \mathcal{H} \left(\eta, i \frac{\partial}{\partial \eta}, \xi \right) \Phi(\eta, \xi), \quad (\text{I.6.4})$$

$$\mathcal{H} \left(\eta, i \frac{\partial}{\partial \eta}, \xi \right) = \gamma_0 \frac{2ms^2}{\omega_0} + \alpha_x \frac{2sQ_z(\xi)}{\omega_0} - \frac{2s(e_0H/c)^{1/2}}{\omega_0} \left(\alpha_x \eta + \alpha_y i \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (\text{I.6.5})$$

$$Q_z(\xi) = q_z + (e_0a/c) \cos 2\xi, \quad \alpha_i = \gamma_0 \gamma_i \quad (i = x, y, z). \quad (\text{I.6.6})$$

Введем в рассмотрение биспиноры $R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi)$ ($j = \pm$; $\sigma = \pm 1$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$), являющиеся собственными по отношению к оператору (I.6.5):

$$\mathcal{H} \left(\eta, i \frac{\partial}{\partial \eta}, \xi \right) R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi) = j(2\varepsilon_{n,\sigma}/\omega_0) R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi); \quad (\text{I.6.7})$$

$$\begin{aligned} R_{n,+1}^{(j)}(\eta, \xi) &= c_{n,+1}^{(j)}(\xi) e^{-\eta^2/2} \begin{pmatrix} H_n(\eta) \\ 0 \\ \frac{sQ_z(\xi)}{ms^2+j\varepsilon_{n,+1}(\xi)} H_n(\eta) \\ -\frac{s(e_0H/c)^{1/2}}{ms^2+j\varepsilon_{n,+1}(\xi)} H_{n+1}(\eta) \end{pmatrix}, \\ R_{n,-1}^{(j)}(\eta, \xi) &= c_{n,-1}^{(j)}(\xi) e^{-\eta^2/2} \begin{pmatrix} 0 \\ H_n(\eta) \\ -\frac{s(e_0H/c)^{1/2}}{ms^2+j\varepsilon_{n,-1}(\xi)} 2nH_{n-1}(\eta) \\ -\frac{sQ_z(\xi)}{ms^2+j\varepsilon_{n,-1}(\xi)} H_n(\eta) \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (\text{I.6.8})$$

$$c_{n,\sigma}^{(j)}(\xi) = \frac{(e_0H/c)^{1/4}}{\pi^{1/4} 2^{n/2} (n!)^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon_{n,\sigma}(\xi) + jms^2}{2\varepsilon_{n,\sigma}(\xi)} \right)^{1/2}; \quad (\text{I.6.9})$$

$$\varepsilon_{n,\sigma}(\xi) = s[(ms)^2 + q_{n,\sigma}^2 + Q_z^2(\xi)]^{1/2}, \quad q_{n,\sigma}^2 = (e_0H/c)(2n+1+\sigma), \quad (\text{I.6.10})$$

H_n — полиномы Эрмита. Биспиноры (I.6.8)–(I.6.10) удовлетворяют следующему условию ортонормировки ($j, j' = \pm$; $\sigma, \sigma' = \pm 1$; $n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$):

$$\int dy [R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi)]^\dagger R_{m,\sigma'}^{(j')}(\eta, \xi) = \delta_{j,j'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,m}. \quad (\text{I.6.11})$$

Разложим $\Phi(\eta, \xi)$ по полной системе биспинорных функций $R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi)$:

$$\Phi(\eta, \xi) = \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta, \xi) g_{n,\sigma}^{(j)}(\xi) \exp \left[-ij \int_0^\xi d\xi' (2\varepsilon_{n,\sigma}(\xi')/\omega_0) \right]. \quad (\text{I.6.12})$$

Подставляя разложение (I.6.12) в уравнение (I.6.4), (I.6.5) и учитывая (I.6.7) и (I.6.11), получим систему уравнений для коэффициентных функций $g_{n,\sigma}^{(j)}(\xi)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} g_{n,\sigma}^{(j)}(\xi) &= \sum_{j'=\pm} \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{m=0}^{\infty} G_{\sigma,\sigma'}^{(j,j')}(n, m|\xi) g_{m,\sigma'}^{(j')}(\xi) \\ &\times \exp \left\{ \frac{2i}{\omega_0} \int_0^\xi d\xi' [j\varepsilon_{n,\sigma}^{(j)}(\xi) - \varepsilon_{m,\sigma'}^{(j')}(\xi)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{I.6.13})$$

$$G_{\sigma,\sigma'}^{(j,j')} (n, m | \xi) = - \int dy [R_{n,\sigma}^{(j)} (\eta, \xi)]^\dagger \frac{\partial}{\partial \xi} R_{m,\sigma'}^{(j')} (\eta, \xi) . \quad (\text{I.6.14})$$

Вычисление функций (I.6.14) и последующая подстановка их в (I.6.13) приводит к замкнутой системе четырех дифференциальных уравнений для четырех функций $g_{n,\sigma}^{(j)} (\xi)$, $g_{n+\sigma,-\sigma}^{(j)} (\xi)$, $g_{n,\sigma}^{(-j)} (\xi)$, $g_{n+\sigma,\sigma}^{(-j)} (\xi)$ вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} g_{n,\sigma}^{(j)} (\xi) = & \frac{\rho \Lambda_{n,\sigma} (\xi) \sin 2\xi}{\sqrt{q_{n,\sigma}^2 + Q_z^2 (\xi)}} \left\{ \sigma q_{n,\sigma} \frac{\varepsilon_{n,\sigma} (\xi) - j m s^2}{\sqrt{\varepsilon_{n,\sigma}^2 (\xi) - (m s^2)^2}} g_{n+\sigma,-\sigma}^{(j)} (\xi) \right. \\ & \left. + \left[Q_z (\xi) \frac{j m s^2}{\varepsilon_{n,\sigma} (\xi)} g_{n,\sigma}^{(-j)} (\xi) - \sigma q_{n,\sigma} g_{n+\sigma,\sigma}^{(-j)} (\xi) \right] \exp \left[2ij \int_0^\xi d\xi' (2\varepsilon_{n,\sigma} (\xi') / \omega_0) \right] \right\} . \quad (\text{I.6.15}) \end{aligned}$$

Здесь

$$\Lambda_{n,\sigma} (\xi) = \frac{\omega_0}{2\varepsilon_{n,\sigma} (\xi)} . \quad (\text{I.6.16})$$

Остальные три уравнения получаются из (I.6.15) соответствующими заменами индексов j, σ, n . Вычисление интеграла в показателях экспонент в формулах (I.6.12), (I.6.15) приводит с точностью до членов $\sim \rho$ (при $\rho \ll 1$) к следующему результату:

$$\int_0^\xi d\xi' (2\varepsilon_{n,\sigma} (\xi') / \omega_0) = \Lambda_{n,\sigma}^{-1} \xi + (\rho/2) f_z \sin 2\xi , \quad (\text{I.6.17})$$

где

$$\Lambda_{n,\sigma} = \frac{\omega_0}{2\varepsilon_{n,\sigma}} , \quad \varepsilon_{n,\sigma} = \varepsilon_{n,\sigma} (\xi)|_{a=0} , \quad f_z = \frac{s q_z}{\varepsilon_{n,\sigma}} . \quad (\text{I.6.18})$$

Рассмотрим область главного резонанса, для которой имеет место представление

$$\Lambda_{n,\sigma}^{-1} = 1 + \Delta_{n,\sigma} , \quad |\Delta_{n,\sigma}| \ll 1 . \quad (\text{I.6.19})$$

Полагая в (I.6.15) и в трех оставшихся уравнениях для функций $g_{n,\sigma}^{(j)} (\xi)$, $g_{n+\sigma,-\sigma}^{(j)} (\xi)$, $g_{n,\sigma}^{(-j)} (\xi)$, $g_{n+\sigma,\sigma}^{(-j)} (\xi)$

$$g_{n,\sigma}^{(j)} (\xi) = r_{n,\sigma}^{(j)} (\xi) \exp (ij \Delta_{n,\sigma} \xi) , \quad (\text{I.6.20})$$

получим систему четырех уравнений с периодическими коэффициентами для четырех неизвестных функций $r_{n,\sigma}^{(j)} (\xi)$, $r_{n+\sigma,-\sigma}^{(j)} (\xi)$, $r_{n,\sigma}^{(-j)} (\xi)$, $r_{n+\sigma,\sigma}^{(-j)} (\xi)$. Если считать безразмерную величину ρ малым параметром, то данная система уравнений имеет стандартный вид для приближенного ее решения с помощью асимптотического метода

усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [181]. Метод усреднения для решения систем уравнений подобного типа уже был нами использован в § 3.2 и в § ii.1 Приложения ii. Поэтому, не останавливаясь на технических подробностях, мы сразу приведем полученные в первом приближении метода выражения для волновых функций $\psi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющих предельному условию

$$\psi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \varphi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \quad \text{при} \quad a \rightarrow 0, \quad (\text{I.6.21})$$

в котором $\varphi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t)$ — решения уравнения (1.17) при $\mathbf{A}_0 \equiv 0$ (индекс $j = \pm$ определяет соответствие решений электронным (+) или дырочным (−) состояниям; $\sigma = \pm 1$ — спиновый индекс; n — квантовое число Ландау):

$$\varphi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) = R_{n,\sigma}^{(j)}(\eta) \exp(iq_x x + iq_y y - ij\varepsilon_{n,\sigma} t), \quad (\text{I.6.22})$$

$$\varepsilon_{n\sigma}(q_z) = s\sqrt{(ms)^2 + q_{n\sigma}^2 + q_z^2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \psi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) = \exp[-ij(\zeta_{n,\sigma}\lambda_{n,\sigma} - \Delta_{n,\sigma})\xi] \left\{ U_{n,\sigma}\varphi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \right. \\ \left. - je^{-2ij\Delta_{n,\sigma}\xi} V_{n,\sigma} \left[\frac{q_z}{\sqrt{q_z^2 + q_{n,\sigma}^2}} \varphi_{n,\sigma}^{(-j)}(\mathbf{r}, t) - j\sigma \frac{q_{n,\sigma}}{\sqrt{q_z^2 + q_{n,\sigma}^2}} \varphi_{n+\sigma, -\sigma}^{(-j)}(\mathbf{r}, t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.6.23})$$

Здесь

$$U_{n,\sigma}(q_z) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta_{n,\sigma}(q_z)}{\lambda_{n,\sigma}(q_z)} \right)}, \quad V_{n,\sigma}(q_z) = \zeta_{n,\sigma}(q_z) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta_{n,\sigma}(q_z)}{\lambda_{n,\sigma}(q_z)} \right)}, \quad (\text{I.6.24})$$

$$\lambda_{n,\sigma}(q_z) = \sqrt{\Delta_{n,\sigma}^2(q_z) + (\rho/2)^2}, \quad \Delta_{n,\sigma}(q_z) = \frac{2\varepsilon_{n,\sigma}}{\omega_0} - 1, \quad (\text{I.6.25})$$

$$\zeta_{n,\sigma}(q_z) = \text{sign } \Delta_{n,\sigma}(q_z).$$

Приведенные решения ортонормированы условием

$$\int d\mathbf{r} \left[\psi_{q_x, q_y, n, \sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t) \right]^\dagger \psi_{q'_x, q'_y, m, \sigma'}^{(j')}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^2 \delta_{j,j'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{n,m} \delta(q_x - q'_x) \delta(q_y - q'_y) \quad (\text{I.6.26})$$

и соответствуют физической ситуации, когда взаимодействие электромагнитной волны с носителями заряда полупроводника включается адиабатически медленно во

времени. Соответствующие этим решениям элементарные возбуждения характеризуются Z -компонентой квазиимпульса $P_z = q_z$ и квазиэнергией

$$E_{n,\sigma}(q_z) = \frac{\omega_0}{2} [1 + \zeta_{n,\sigma}(q_z) \lambda_{n,\sigma}(q_z)] . \quad (\text{I.6.27})$$

Зависимость квазиэнергии возбуждений от Z -компоненты квазиимпульса изображена на рисунке I.6.1.

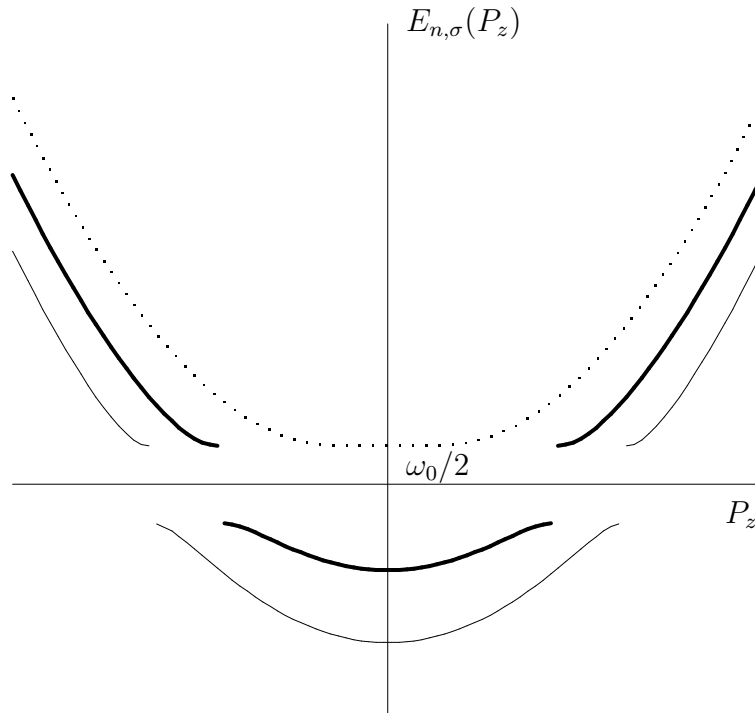


Рис. I.6.1. Первые три квазиэнергетические подзоны Ландау зоны проводимости полупроводника в постоянном магнитном поле и поле резонансного лазерного излучения. Тонкая сплошная линия отвечает состоянию с квазиэнергией $E_{0,-1}(P_z)$. Жирная сплошная линия соответствует двукратно вырожденным состояниям с квазиэнергией $E_{1,-1}(P_z) = E_{0,1}(P_z)$. Пунктиром изображены дисперсионные кривые двукратно вырожденных состояний с квазиэнергией $E_{2,-1}(P_z) = E_{1,1}(P_z)$. Квазиэнергетические подзоны валентной зоны получаются отображением изображенных кривых относительно оси P_z . Однофотонные повторения указанных подзон на рисунке не изображены. Они получаются переносом подзон валентной зоны параллельно оси ординат вверх и подзон зоны проводимости вниз на ω_0 (см. рисунки I.3.1–3). Величина разрыва дисперсионных кривых (по квазиэнергии) составляет $\rho\omega_0/2$. В точках разрыва $dE_{n\sigma}(P_z)/dP_z = 0$. При $0 < \Delta < \omega_H$ существенные изменения испытывает только дисперсионная кривая $E_{0,-1}(P_z)$.

Решения (I.6.23)–(I.6.25), впервые полученные в [236], были в дальнейшем использованы в работах [237, 238, 239, 240] для исследования оптических свойств полупроводника, помещенного в постоянное магнитное поле и подвергаемого воздействию внешнего поля сильного лазерного излучения.

§ 6.2 Вычисление коэффициента поглощения ультразвука

Рассмотрим систему, характеризующуюся в шредингеровском представлении динамических величин гамильтонианом

$$H(t) = H(S) + H_T + \sum_{f=0,1} V^{(f)}(t) + V, \quad (\text{I.6.28})$$

где, в отличие от (I.5.2),

$$H(S) = \sum_{\mathbf{q}, n, \sigma} \varepsilon_{n\sigma}(q_z) (a_{\mathbf{q}n\sigma}^\dagger a_{\mathbf{q}n\sigma} + b_{\mathbf{q}n\sigma}^\dagger b_{\mathbf{q}n\sigma}) \quad (\text{I.6.29})$$

— гамильтониан электронно-дырочной подсистемы, находящейся в сильном магнитном поле (I.6.1); H_T — гамильтониан термостата, включающего в себя тепловые фононы и фотоны, возникающие в системе в результате излучательной рекомбинации электронно-дырочных возбуждений; слагаемые V и $V^{(f)}(t)$ учитывают взаимодействие электронов и дырок с термостатом и с полями $\mathbf{A}_0(t) = \mathbf{A}_{ext}(t)$ ($f = 0$) и $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ($f = 1$), соответственно. Оператор $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ описывает поле смещений среды, в которой распространяется ультразвуковая волна, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — оператор потенциала продольного электрического поля, возникающего в полупроводнике при распространении акустической волны из-за перераспределения носителей заряда в электронно-дырочной подсистеме [228, 241].

Содержащиеся в (I.6.29) операторы уничтожения (рождения) $a_{\mathbf{q}n\sigma}$ ($a_{\mathbf{q}n\sigma}^\dagger$) и $b_{\mathbf{q}n\sigma}$ ($b_{\mathbf{q}n\sigma}^\dagger$) соответственно электрона и дырки подчиняются фермиевским перестановочным соотношениям типа

$$\left[a_{\mathbf{q}n\sigma}, a_{\mathbf{q}'n'\sigma'}^\dagger \right]_+ = \left[b_{\mathbf{q}n\sigma}, b_{\mathbf{q}'n'\sigma'}^\dagger \right]_+ = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \delta_{n, n'} \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (\text{I.6.30})$$

Суммирование по импульсу $\mathbf{q} = (q_x, q_z)$ в (I.6.29) проводится по обычному квазидискретному спектру

$$\mathbf{q} = \left(\frac{2\pi}{L_x} n_x, \frac{2\pi}{L_x} n_x \right), \quad L_x L_y L_z = V, \quad n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Гамильтониан $V^{(0)}$ в представлении взаимодействия определяется формулой (I.5.3), а оператор взаимодействия электронно-дырочной подсистемы с полями $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ в этом представлении имеет вид:

$$V_1^{(1)}(t) = \Theta(t) \int d\mathbf{r} [\rho^{(I)}(\mathbf{r}, t) \varphi^{(I)}(\mathbf{r}, t) + n^{(I)}(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}^{(I)}(\mathbf{r}, t)] . \quad (\text{I.6.31})$$

В это выражение введена тэта-функция, “включающая” взаимодействие носителей заряда с акустической волной в момент времени $t = 0^2$. Мы предполагаем, что в бесконечно отдаленном прошлом ($t \rightarrow -\infty$) внешнее лазерное поле $\mathbf{A}_0(t)$ отсутствовало и вся система в целом находилась в состоянии термодинамического равновесия, описываемом статистическим оператором Гиббса (I.5.5). Затем происходит адиабатически медленное включение лазерного поля. В результате многократных релаксационных процессов к моменту $t = 0$ включения ультразвукового генератора система успевает перейти в стационарное состояние, описываемое статистическим оператором D_0 . Тогда при $t > 0$ среднее значение произвольной физической величины, изображаемой в шредингеровском представлении оператором u , будет определяться выражением

$$\langle u \rangle_t = \text{tr } U^{-1}(t, 0) u U(t, 0) D_0, \quad (\text{I.6.32})$$

в котором $U(t, 0)$ — унитарный оператор эволюции, определяемый уравнением (I.5.7). Для вычисления средних значений динамических величин в рамках теории возмущений удобно перейти к представлению взаимодействия, а при наличии внешних полей — к представлению Фарри. Переход к этим представлениям осуществляется с помощью формул (I.6.32)–(I.5.11) Главы 5.

²Поскольку в результате взаимодействия $V^{(1)}$ состояния продольных акустических фононов приобретают конечное время жизни, связанное с их поглощением электронно-дырочной подсистемой полупроводника, момент “включения” не может быть отнесен к бесконечно отдаленному прошлому ($t \rightarrow -\infty$), так как в этом случае трудно ожидать полезной информации при $t = 0$ [243, 244].

Средние значения полей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ подчиняются уравнениям [228]

$$\begin{aligned} \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha_m \Delta \right) \langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t &= \nabla \langle n(\mathbf{r}) \rangle_t, \\ \Delta \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_t &= - \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_t, \end{aligned} \quad (\text{I.6.33})$$

в которых ρ_m — плотность среды, α_m — ее модуль упругости. Содержащийся в этих уравнениях оператор плотности электрического заряда $\rho(\mathbf{r}, t)$ в представлении взаимодействия имеет вид

$$\rho^{(I)}(\mathbf{r}, t) = e_0 : \Psi^{(I)\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) :, \quad (\text{I.6.34})$$

где

$$\Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \sum_{\mathbf{q}, n, \sigma} \left[a_{\mathbf{q}n\sigma} \varphi_{\mathbf{q}n\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + b_{-\mathbf{q}n\sigma}^{\dagger} \varphi_{\mathbf{q}n\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (\text{I.6.35})$$

Оператор $n^{(I)}(\mathbf{r}, t)$ дается формулой (см. Приложение iii)

$$n^{(I)}(\mathbf{r}, t) = \Lambda^{(+)} : \Psi^{(I)\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) : + \Lambda^{(-)} : \bar{\Psi}^{(I)}(\mathbf{r}, t) \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) :. \quad (\text{I.6.36})$$

В представлении Фарри полевой оператор (I.6.35) приобретает вид

$$\Psi^{(F)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \sum_{\mathbf{q}, n, \sigma} \left[a_{\mathbf{q}n\sigma} \psi_{\mathbf{q}n\sigma}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + b_{-\mathbf{q}n\sigma}^{\dagger} \psi_{\mathbf{q}n\sigma}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right]. \quad (\text{I.6.37})$$

Если удастся найти зависимость правых частей (I.6.33) от функций $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t$ и $\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_t$, то (I.6.33) превратится в замкнутую систему уравнений для этих функций. Для установления этой зависимости воспользуемся теорией линейной реакции системы на внешнее возмущение [172]. Разложим $\langle n(\mathbf{r}) \rangle_t$ и $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_t$ в ряд по степеням взаимодействия $V^{(1)}$ и сохраним в этом разложении лишь не исчезающие члены низжайшего порядка малости. После вычисления полученных таким образом выражений для правых частей (I.6.33) мы придем к системе линейных дифференциальных уравнений. Требование, чтобы полученная система обладала нетривиальным решением, приведет нас к некоторому дисперсионному уравнению. Зная его решение, нетрудно найти коэффициент поглощения ультразвука.

Прежде чем приступить к выполнению намеченной программы, удобно перейти от уравнений (I.6.33) к уравнениям для фурье-образов функций $\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t$ и $\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_t$.

Выполняя в (I.6.33) преобразование Фурье

$$\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}) \rangle_t = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}) \rangle_t e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_t = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle_t e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{I.6.38})$$

найдем:

$$\begin{aligned} \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_m \mathbf{k}^2 \right) \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}) \rangle_t &= i\mathbf{k} \langle n(\mathbf{k}) \rangle_t, \\ \mathbf{k}^2 \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle_t &= \langle \rho(\mathbf{k}) \rangle_t. \end{aligned} \quad (\text{I.6.39})$$

Средние $\langle n(\mathbf{k}) \rangle_t$ и $\langle \rho(\mathbf{k}) \rangle_t$ выразим через операторы в представлении Фарри:

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{k}) \rangle_t &= \text{tr } U_2^{-1}(t, 0) n^{(F)}(\mathbf{k}, t) U_2(t, 0) D_0, \\ \langle \rho(\mathbf{k}) \rangle_t &= \text{tr } U_2^{-1}(t, 0) \rho^{(F)}(\mathbf{k}, t) U_2(t, 0) D_0. \end{aligned} \quad (\text{I.6.40})$$

Разложим $U_2(t, 0)$ в ряд по $V_1^{(1)}$ с точностью до членов первого порядка малости включительно и воспользуемся формулами (I.5.8), (I.5.10) и (I.6.40). В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle n(\mathbf{k}) \rangle_t &\approx \text{tr } n_1(\mathbf{k}, t) D_0 + i \int_0^t dt_1 \text{tr} \left[V_1^{(1)}(t_1), n_1(\mathbf{k}, t) \right] D_0, \\ \langle \rho(\mathbf{k}) \rangle_t &\approx \text{tr } \rho_1(\mathbf{k}, t) D_0 + i \int_0^t dt_1 \text{tr} \left[V_1^{(1)}(t_1), \rho_1(\mathbf{k}, t) \right] D_0. \end{aligned} \quad (\text{I.6.41})$$

Приведем явный вид операторов $n(\mathbf{k})$, $\rho(\mathbf{k})$ и $V^{(1)}$ в представлении Фарри:

$$\begin{aligned} n_1(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \sum_{n_1, n_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \left[\mathcal{M}_1^{(++)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \right] \\ &+ \mathcal{M}_1^{(+-)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger \\ &+ \mathcal{M}_1^{(-+)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \\ &+ \mathcal{M}_1^{(--)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{I.6.42})$$

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \sum_{n_1, n_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \left[\mathcal{M}_2^{(++)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \right] \\ &+ \mathcal{M}_2^{(+-)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger \\ &+ \mathcal{M}_2^{(-+)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \\ &+ \mathcal{M}_2^{(--)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | -\mathbf{k}, t) b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{I.6.43})$$

$$\begin{aligned}
V_1^{(1)}(t) = & \frac{\Theta(t-t_0)}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \sum_{n_1, n_2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \left\{ \left[i\mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_1^{(++)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \right. \right. \\
& + \varphi(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_2^{(++)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \left. \right] a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \\
& + \left[i\mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_1^{(+-)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \right. \\
& + \varphi(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_2^{(+-)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \left. \right] a_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger \\
& + \left[i\mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_1^{(-+)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \right. \\
& + \varphi(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_2^{(-+)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \left. \right] b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} a_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2} \\
& + \left[i\mathbf{k}\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_1^{(--)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \right. \\
& + \varphi(\mathbf{k}, t) \mathcal{M}_2^{(--)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) \left. \right] b_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1} b_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^\dagger \left. \right\} .
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^{(j_1, j_2)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{L_x L_z} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^{(j_1)\dagger} (\Lambda^{(+)} + \gamma_0 \Lambda^{(-)}) \psi_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^{(j_2)} , \\
\mathcal{M}_2^{(j_1, j_2)}(\mathbf{q}_1, n_1, \sigma_1 | \mathbf{q}_2, n_2, \sigma_2 | \mathbf{k}, t) &= \frac{1}{L_x L_z} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e_0 \psi_{\mathbf{q}_1 n_1 \sigma_1}^{(j_1)\dagger} \psi_{\mathbf{q}_2 n_2 \sigma_2}^{(j_2)} . \quad (\text{I.6.44})
\end{aligned}$$

Формулы (I.6.41) и выражения (I.6.42)–(I.6.44) позволяют представить уравнения (I.6.39) в форме:

$$\begin{aligned}
& \left(\rho_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_m \mathbf{k}^2 \right) \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}) \rangle_t \\
&= i\mathbf{k} \sum_{\mathbf{k}_1} \int_{t_0}^t dt_1 \left[i\mathcal{L}_{11}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}_1) \rangle_{t_1}) + \mathcal{L}_{12}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \langle \varphi(\mathbf{k}_1) \rangle_{t_1} \right] , \\
& \mathbf{k}^2 \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle_t = \sum_{\mathbf{k}_1} \int_{t_0}^t dt_1 \left[i\mathcal{L}_{21}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 \cdot \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}_1) \rangle_{t_1}) + \mathcal{L}_{22}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) \langle \varphi(\mathbf{k}_1) \rangle_{t_1} \right] . \quad (\text{I.6.45})
\end{aligned}$$

В функциях отклика $\mathcal{L}_{ij}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$, явный вид которых мы здесь не приводим из-за их громоздкости, сохраним лишь секулярные члены, зависящие от моментов времени t и t_1 как от разности $(t - t_1)$. Именно с этими членами связана перенормировка частоты акустической волны $\omega_2(\mathbf{k})$ [245]. Кроме того, члены с $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}$ в правой части (I.6.45) для наших целей несущественны, так как в низа́йшем порядке теории возмущений они не приводят к каким-либо поправкам к частоте $\omega_2(\mathbf{k})$.

Функции $\mathcal{L}_{ij}(t, t_1 | \mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$ зависят от функций распределения электронов и дырок, взятых в момент времени t . В предложенной нами постановке задачи, начиная с момента включения внешнего лазерного поля и до момента включения ультразвукового генератора, в системе успевают произойти многократные акты рассеяния носителей заряда на тепловых фононах, рассматриваемых как термостат. В результате, к моменту времени $t = 0$ в электронно-дырочной подсистеме устанавливается квазиравновесное распределение, описываемое функциями (см. § 4.2)

$$f_{\mathbf{q}n\sigma}^{(b)} = f_{\mathbf{q}n\sigma}^{(a)}, \quad f_{\mathbf{q}n\sigma}^{(a)} = \text{tr } a_{\mathbf{q}n\sigma}^\dagger a_{\mathbf{q}n\sigma} D_0 = \left\{ \exp \left[\beta \left(E_{n,\sigma}(q_z) - \frac{\omega_0}{2} \right) + 1 \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{I.6.46})$$

Для того, чтобы исключить из рассмотрения очень чувствительные к выбору начального условия ($D(t)|_{t=0} = D(0)$) переходные процессы, вызванные мгновенным включением взаимодействия электронов и дырок с продольной акустической волной в момент времени $t = 0$, решение полученного уравнения следует рассматривать при $t \rightarrow +\infty$. Полагая в уравнениях (I.6.45)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}(\mathbf{k}) \rangle_t &= \mathbf{u}(\mathbf{k}) \exp[-i\omega_2(\mathbf{k})t], \\ \langle \varphi(\mathbf{k}) \rangle_t &= \varphi(\mathbf{k}) \exp[-i\omega_2(\mathbf{k})t] \end{aligned}$$

и совершая предельный переход $t \rightarrow +\infty$, получим следующую систему уравнений

$$(-\rho_m \omega_2^2(\mathbf{k}) + \alpha_m \mathbf{k}^2) \mathbf{u}(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} [i\mathcal{L}_{11}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})) + \mathcal{L}_{12}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) \varphi(\mathbf{k})], \quad (\text{I.6.47})$$

$$\mathbf{k}^2 \varphi(\mathbf{k}) = [\mathcal{L}_{21}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) (i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k})) + \mathcal{L}_{22}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) \varphi(\mathbf{k})],$$

где $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k}))$ — некоторые коэффициенты ($i, j = 1, 2$).

Подставим в выражения для $\mathcal{L}_{ij}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k}))$ функции $\psi_{n,\sigma}^{(j)}(\mathbf{r}, t)$ из (I.6.23). Тогда, в случае распространения ультразвуковой волны перпендикулярно направлению магнитного поля ($\mathbf{k} = (k, 0, 0)$), имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11} &= \Lambda^{(-)2} \Upsilon^{(-)} + \Lambda^{(+)2} \Upsilon^{(+)}, \\ \mathcal{L}_{12} &= \mathcal{L}_{21} = e_0 \Lambda^{(+)} \Upsilon^{(+)}, \\ \mathcal{L}_{22} &= e_0^2 \Upsilon^{(+)}. \end{aligned} \quad (\text{I.6.48})$$

При выполнении условий ω_H/ε_g , $q_z^2/2m\varepsilon_g \ll 1$ выражения для функций $\Upsilon^{(\pm)}$ даются формулой

$$\begin{aligned} \Upsilon^{(\pm)}(\omega_2, \beta) = \frac{1}{V} \sum_{j, \mathbf{q}, n_1, \sigma_1, n_2, \sigma_2} & \left[\frac{(U_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2} \pm V_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2})^2}{E_{n_1, \sigma_1}(q_z) - E_{n_2, \sigma_2}(q_z) - j(\omega_2 - i0)} (f_{\mathbf{q}n_1\sigma_1}^{(a)} - f_{\mathbf{q}n_2\sigma_2}^{(a)}) \right. \\ & \left. + \frac{(U_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2} \mp V_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2})^2}{E_{n_1, \sigma_1}(q_z) + E_{n_2, \sigma_2}(q_z) - \omega_0 - j(\omega_2 - i0)} (f_{\mathbf{q}n_1\sigma_1}^{(a)} + f_{\mathbf{q}n_2\sigma_2}^{(a)} - 1) \right] |\mathcal{I}(n_1, n_2)|^2 \delta_{\sigma_1, \sigma_2}. \end{aligned} \quad (\text{I.6.49})$$

Здесь

$$\mathcal{I}(n_1, n_2) = \left(\frac{e_0 \mathcal{H}}{c\pi n_1! n_2! 2^{n_1+n_2}} \right)^{1/2} \int dy H_{n_1}(\eta) H_{n_2}(\eta) \exp(-\eta^2 - iq_y y). \quad (\text{I.6.50})$$

Из системы алгебраических уравнений (I.6.47) находим дисперсионное уравнение

$$[\rho_m(\omega_2^2(\mathbf{k}) - c_s^2 k^2) - k^2(\Lambda^{(-)2}\Upsilon^{(-)} + \Lambda^{(+2)}\Upsilon^{(+)})][k^2 - e_0^2\Upsilon^{(+)}] = e_0^2 k^2 \Lambda^{(+2)}\Upsilon^{(+2)}, \quad (\text{I.6.51})$$

в котором $c_s = (\alpha_m/\rho_m)^{1/2}$ — неперенормированная скорость звука в кристалле. Будем искать его решение методом итераций. Сохраняя члены низайшего порядка по взаимодействию, найдем, что частота ω_2 имеет отличную от нуля мнимую часть, связанную с коэффициентом поглощения ультразвука \mathcal{K} соотношением

$$\mathcal{K} = -2 \frac{\text{Im } \omega_2(\mathbf{k})}{c_s}. \quad (\text{I.6.52})$$

Окончательное выражение для коэффициента поглощения имеет вид:

$$\mathcal{K} = \frac{k}{\rho_m c_s^2} \text{Im} [\Lambda^{(-)2}\Upsilon^{(-)} + \Lambda^{(+2)}\Upsilon^{(+)} \epsilon^{-1}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k}))]. \quad (\text{I.6.53})$$

Функция

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) = [1 - e_0^2 \Upsilon^{(+)}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k})) / k^2]^{-1} \quad (\text{I.6.54})$$

описывает экранирование части электрон-фононного взаимодействия за счет электростатического взаимодействия между носителями заряда. Учет последнего выполнен нами в рамках приближения хаотических фаз, эквивалентного суммированию некоторой бесконечной последовательности диаграмм [246].

Для выяснения характера зависимости \mathcal{K} от частоты $\omega_2(\mathbf{k})$ изучим сначала зависимости функций $\text{Im } \Upsilon^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega_2(\mathbf{k}))$ от $\omega_2(\mathbf{k})$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \text{Im } \Upsilon^{(+)}(\omega_2, \beta) &= \frac{1}{V} \sum_{j, \mathbf{q}, n_1, \sigma_1, n_2, \sigma_2} [(U_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2} + V_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2})^2 |f_{\mathbf{q}n_1\sigma_1}^{(a)} - f_{\mathbf{q}n_2\sigma_2}^{(a)}| \\ &\times \delta(|E_{n_1\sigma_1}(q_z) - E_{n_2\sigma_2}(q_z)| - \omega_2) \\ &+ (U_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2} - V_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2})^2 |1 - f_{\mathbf{q}n_1\sigma_1}^{(a)} - f_{\mathbf{q}n_2\sigma_2}^{(a)}| \\ &\times \delta(|E_{n_1\sigma_1}(q_z) + E_{n_2\sigma_2}(q_z) - \omega_0| - \omega_2)] |\mathcal{I}(n_1, n_2)|^2 \delta_{\sigma_1, \sigma_2}. \end{aligned} \quad (\text{I.6.55})$$

Функцию (I.6.55) можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых состоит из суммы членов вида ($l_1 \neq l_2$)

$$\frac{f_{l_1 l_2}^{(1)}(\omega_2, \beta) \Theta(\omega_2 - \Omega_{l_1 l_2}^{(1)})}{\sqrt{\omega_2 - \Omega_{l_1 l_2}^{(1)}}} \quad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{l_1 l_2}^{(1)} &= \Theta[(l_1 + l_2)\omega_H - \Delta] \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} - l_1\omega_H\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} - l_2\omega_H\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} \right) \\ &+ \Theta[\Delta - (l_1 + l_2)\omega_H] \sqrt{(l_1 - l_2)^2 \omega_H^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

$f_{l_1 l_2}^{(1)}(\omega_2, \beta)$ — некоторая непрерывная и конечная функция ω_2 и T , явный вид которой можно найти из (I.6.55), выполняя интегрирование с помощью дельта-функций. При $T \rightarrow 0$ величина $f_{l_1 l_2}^{(1)}(\omega_2, \beta)$ возрастает.

Другое слагаемое состоит из суммы членов вида

$$\frac{f_{l_1 l_2}^{(2)}(\omega_2, \beta) \Theta(\omega_2 - \Omega_{l_1 l_2}^{(2)})}{\sqrt{\omega_2 - \Omega_{l_1 l_2}^{(2)}}},$$

где

$$\Omega_{l_1 l_2}^{(2)} = \Theta[(l_1 + l_2)\omega_H - \Delta] \left(\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} - l_1\omega_H\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} - l_2\omega_H\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} \right),$$

$f_{l_1 l_2}^{(2)}(\omega_2, \beta)$ — некоторая непрерывная и конечная функция ω_2 и T , отличная от нуля на интервале $\Omega_{l_1 l_2}^{(2)} < \omega_2 < |l_1 - l_2|\omega_H$. Если $k_B T / \rho\omega_0 \rightarrow 0$, то функция $f_{l_1 l_2}^{(2)}(\omega_2, \beta)$ стремится к нулю, как $\exp(-\rho\omega_0/4k_B T)$.

Функция $\text{Re } \Upsilon^{(+)}(\omega_2, \beta)$ также обладает особенностями в точках $\omega_2 = \Omega_{l_1 l_2}^{(1,2)}$, однако интегрирование по q_z и двойное суммирование по n_1 и n_2 в выражении для $\text{Re } \Upsilon^{(+)}(\omega_2, \beta)$ удается выполнить только численно.

Функция

$$\begin{aligned} \text{Im } \Upsilon^{(-)}(\omega_2, \beta) = & \frac{1}{V} \sum_{j, \mathbf{q}, n_1, \sigma_1, n_2, \sigma_2} [(U_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2} + V_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2})^2 |1 - f_{\mathbf{q} n_1 \sigma_1}^{(a)} - f_{\mathbf{q} n_2 \sigma_2}^{(a)}| \\ & \times \delta(|E_{n_1 \sigma_1}(q_z) + E_{n_2 \sigma_2}(q_z) - \omega_0| - \omega_2) \\ & + (U_{n_1, \sigma_1} U_{n_2, \sigma_2} - V_{n_1, \sigma_1} V_{n_2, \sigma_2})^2 |f_{\mathbf{q} n_1 \sigma_1}^{(a)} - f_{\mathbf{q} n_2 \sigma_2}^{(a)}| \\ & \times \delta(|E_{n_1 \sigma_1}(q_z) - E_{n_2 \sigma_2}(q_z)| - \omega_2)] |\mathcal{I}(n_1, n_2)|^2 \delta_{\sigma_1, \sigma_2} \end{aligned} \quad (\text{I.6.56})$$

отличается от (I.6.55) только тем, что обладает дополнительными особенностями в точках

$$\Omega_l = 2\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} - l\omega_H\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} \quad \text{и} \quad \Omega_{00} = \frac{\rho\omega_0}{2},$$

связанными с первым членом.

Таким образом, для достаточно больших ω_H , таких, что выполняется неравенство $\omega_H > \Delta$, $\text{Im } \Upsilon^{(+)}(\omega_2, \beta)$ обращается в нуль в частотном интервале

$$0 < \omega_2 < \sqrt{\left(\omega_H - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho\omega_0}{4}\right)^2}, \quad (\text{I.6.57})$$

а от всего выражения для $\text{Im } \Upsilon^{(-)}(\omega_2, \beta)$ сохраняется только слагаемое с $n_1 = n_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = -1$.

§ 6.3 Спектр поглощения ультразвука

Приведем выражение для коэффициента поглощения ультразвука \mathcal{K} , справедливое в области значений ω_2 , определяемой неравенствами (I.6.57). В обычных единицах оно имеет вид [247, 248]:

$$\mathcal{K} = \frac{m^{3/2} \omega_H \Lambda^{(-)2}}{4\pi \rho_m c_s^3 \hbar^{5/2}} \sqrt{\frac{\rho\omega_0}{2}} \tanh\left(\frac{\hbar\omega_2}{4k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\hbar\omega_2}{2mc_s^2} \frac{\omega_2}{\omega_H}\right) \tilde{\mathcal{K}}. \quad (\text{I.6.58})$$

Здесь

$$\tilde{\mathcal{K}} = \left(\frac{\rho\omega_0}{2}\right)^{3/2} \frac{\Theta\left(\omega_2 - \frac{\rho\omega_0}{2}\right)}{\sqrt{\omega_2 - \frac{\rho\omega_0}{2}}} \sum_{j=\pm} \frac{\Theta\left(\Delta + j\sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{\rho\omega_0}{2}\right)^2}\right)}{\sqrt{\Delta + j\sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{\rho\omega_0}{2}\right)^2}}} \quad (\text{I.6.59})$$

— безразмерная величина, существенно зависящая от особенностей квазиэнергетического спектра носителей заряда полупроводника.

Согласно (I.6.59) при $\Delta > 0$ $\tilde{\mathcal{K}}$ имеет два пика поглощения на частотах $\Omega_1 = \rho\omega_0/2$ и $\Omega_2 = \sqrt{\Delta^2 + (\rho\omega_0/2)^2}$ (см. рисунок I.6.2). Для акустических волн частоты $\omega_2 < \Omega_1$ полупроводник прозрачен. Если учесть уширение электронных состояний за счет взаимодействия носителей заряда с фононами термостата, то высота пиков на частотах Ω_1 и Ω_2 будет, соответственно,

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 = \rho\omega_0/4\sqrt{\Gamma\Delta}, \quad \tilde{\mathcal{K}}_2 = \rho\omega_0/2\sqrt{2\Gamma\Delta}(1 + (2\Delta/\rho\omega_0)^2)^{1/4},$$

а в области прозрачности $\tilde{\mathcal{K}}$ будет в $(\rho\omega_0/4\Gamma)^{3/2}/2$ раз меньше, чем при $\omega_2 = \rho\omega_0/2$. В точке $\omega_2 = \Omega_2$ $\tilde{\mathcal{K}}$ скачком изменяется в $\sqrt{\Delta/\Gamma}(1 + \rho\omega_0/2\Delta)^{-1/4}$ раз.

При $\Delta = 0$ оба пика сливаются на частоте $\omega_2 = \rho\omega_0/2$ (см. рисунок I.6.3), на которой величина $\tilde{\mathcal{K}}$ достигает значения $(2\Gamma/\rho\omega_0)^{-3/4}$, в $\sqrt{2}(\rho\omega_0/2\Gamma)^{7/4}$ раз большего, чем в области прозрачности.

При $\Delta < 0$ имеется лишь один пик на частоте $\omega_2 = \Omega_2$, причем $\tilde{\mathcal{K}} = 0$ в области $\omega_2 < \Omega_2$ (см. рисунок I.6.4). Высота пика при $\omega_2 = \Omega_2$ такая же, как и в случае $\Delta > 0$. При увеличении напряженности магнитного поля или уменьшении абсолютной температуры T коэффициент поглощения $\tilde{\mathcal{K}}$ возрастает. При $\varepsilon_g = 1\text{эВ}$, $m = 0.1m_e$, $C_s = 5 \cdot 10^5 \text{см/сек}$, $\rho_m = 5\text{Г/см}^3$, $\Lambda^{(-)} = 10\text{эВ}$, $\omega_2 = \rho\omega_0/2$, $\omega_H = 3.4 \cdot 10^{12} \text{сек}^{-1}$, $\Gamma = 10^{11} \text{сек}^{-1}$ коэффициент поглощения достигает значения $\sim 10^2 \text{см}^{-1}$.

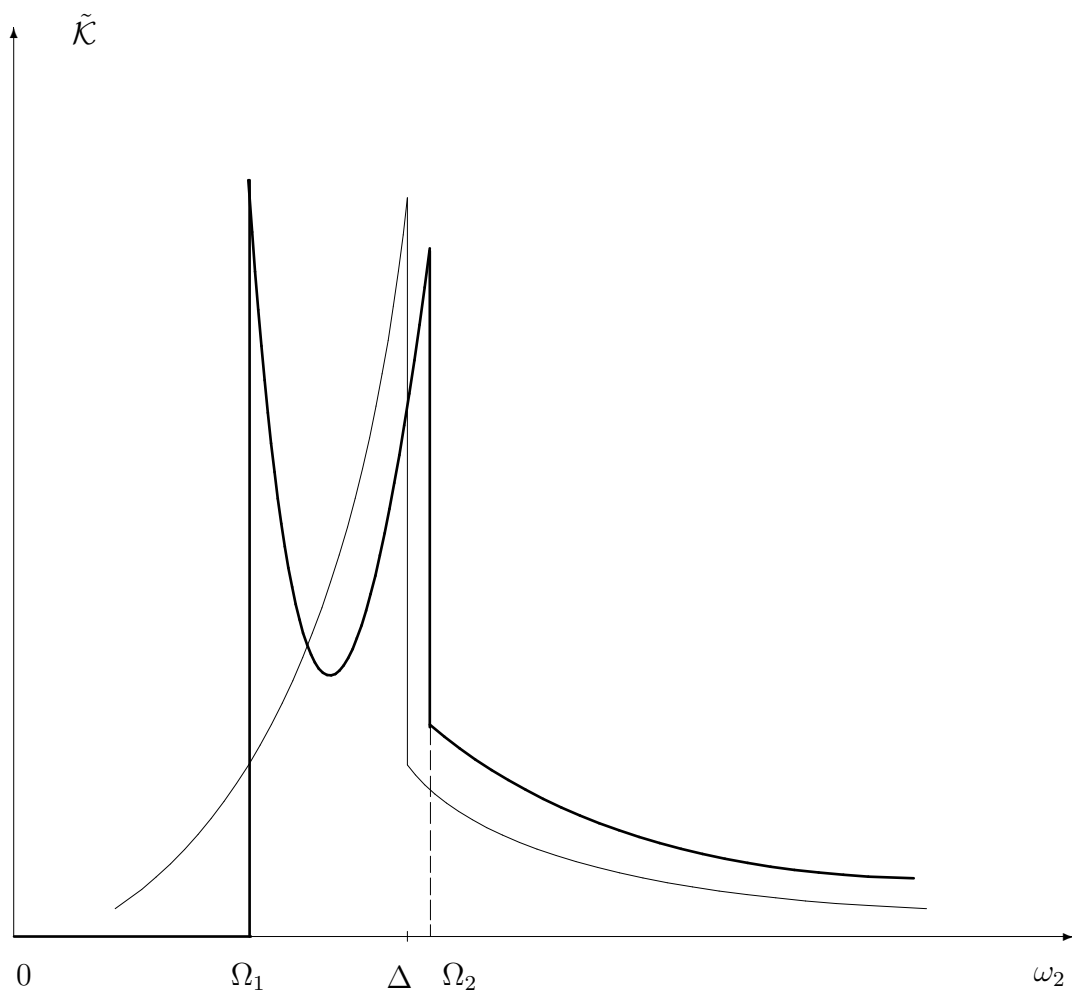


Рис. I.6.2. Зависимость величины $\tilde{\kappa}$ от ω_2 при $\Delta > 0$ в случаях сильного (сплошная жирная линия) и слабого (сплошная тонкая линия) внешнего лазерного поля.

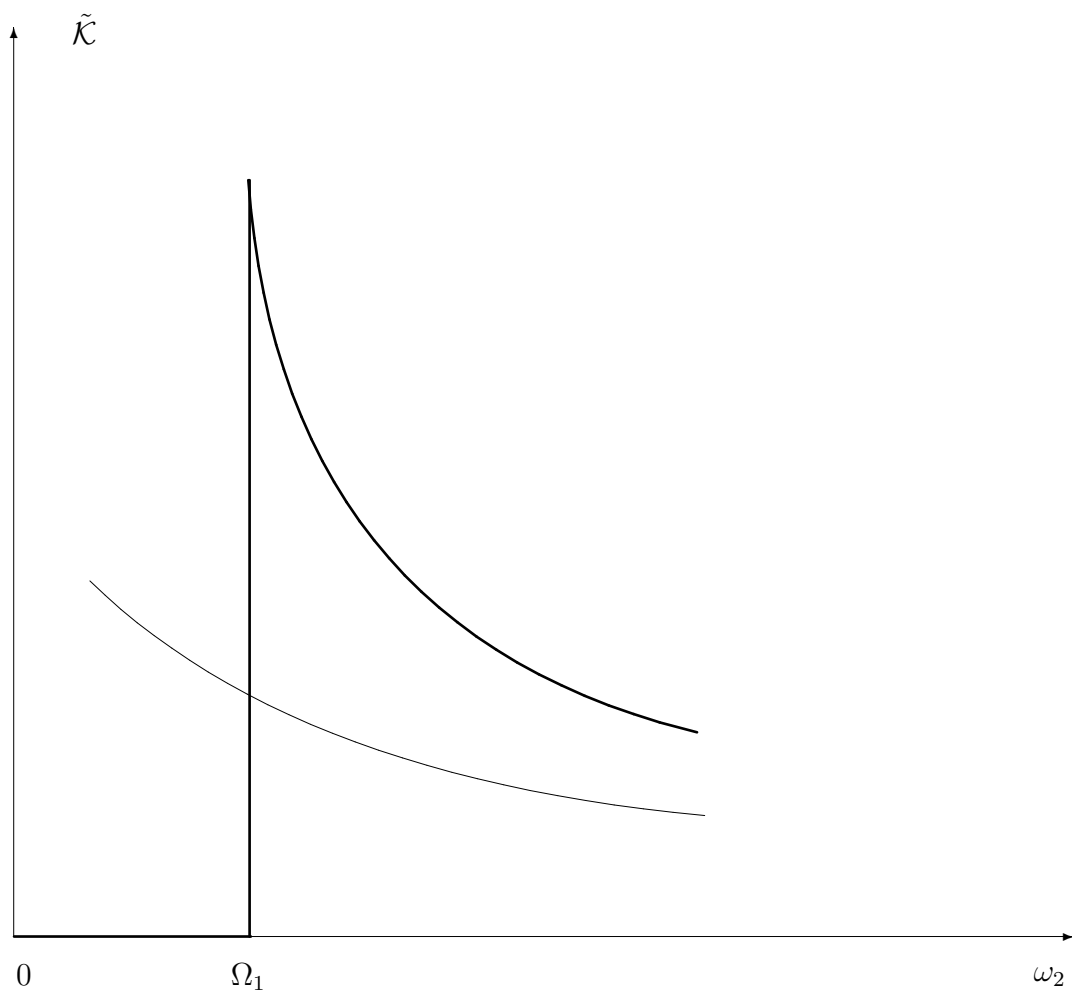


Рис. I.6.3. Зависимость величины $\tilde{\kappa}$ от ω_2 при $\Delta = 0$ в случаях сильного (сплошная жирная линия) и слабого (сплошная тонкая линия) внешнего лазерного поля.

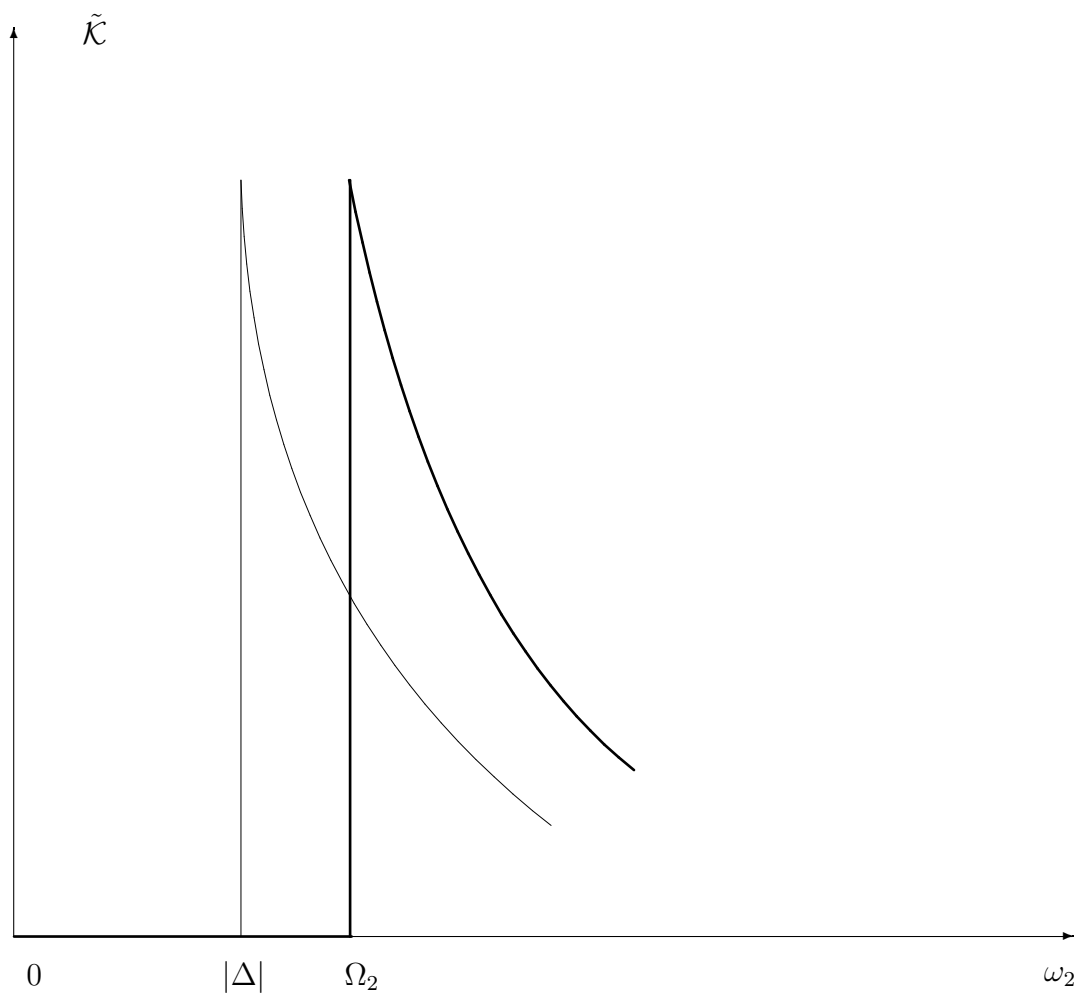


Рис. I.6.4. Зависимость величины $\tilde{\mathcal{K}}$ от ω_2 при $\Delta < 0$ в случаях сильного (сплошная жирная линия) и слабого (сплошная тонкая линия) внешнего лазерного поля.

Перечисленные результаты реализуются в случае сильного лазерного поля. Если возбуждающее лазерное поле является слабым, то его влияние на электронно-дырочную подсистему может быть учтено в рамках метода временной теории возмущений. Величина \mathcal{K} в этом случае по-прежнему определяется выражением (I.6.58), в котором, однако,

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{(\rho\omega_0/2)^{3/2}}{\omega_2} \sum_{j=\pm} \frac{\Theta(\Delta + j\omega_2)}{\sqrt{\Delta + j\omega_2}}. \quad (\text{I.6.60})$$

Зависимость $\tilde{\mathcal{K}}$ от частоты ω_2 при $\Delta \geq 0$ существенно отличается от предсказываемой формулой (I.6.59) (см. рисунки I.6.2–I.6.4). При $\Delta > 0$ имеется лишь один пик поглощения вместо двух, как в случае сильного поля. При $\Delta = 0$ отличие от случая сильного поля наиболее значительно.

Существенное различие результатов, полученных для случаев сильного и слабого возбуждающего лазерного поля, связано с тем, что в случае сильного поля энергетический спектр электронно-дырочной подсистемы претерпевает радикальные изменения (см. рисунок I.6.1), в то время как слабое электромагнитное поле способно вызывать лишь квантовые переходы между стационарными состояниями невозмущенной системы.

Аналогично, можно рассмотреть магнитопоглощение ультразвука кристаллами с центром инверсии, для которых оптические переходы между валентной зоной и зоной проводимости являются дипольно-запрещенными. Можно показать, что количество резонансных особенностей коэффициента поглощения по сравнению с рассмотренным здесь случаем дипольно-разрешенного межзонного перехода уменьшается. Данное обстоятельство связано с тем, что особенность на частоте Ω_1 связана с переходами носителей заряда вблизи щели в их квазиэнергетическом спектре (см. рисунок I.6.1). Особенность на частоте Ω_2 связана с переходами на дно первой подзоны Ландау. Однако, переходы на дно зоны для данных полупроводников запрещены и, следовательно, соответствующий резонансный пик отсутствует.

В данной главе принято приближение однородного в пространстве лазерного поля $\mathbf{A}_0 = (0, 0, a \cos \omega_0 t)$. Учет пространственной неоднородности последнего требует,

строго говоря, дополнительных исследований. Однако, можно ожидать, что при выполнении неравенства $\lambda \gg R$, в котором $\lambda = 2\pi c/\omega_0\epsilon^{1/2}$ — длина волны лазерного излучения, $R = (m\omega_H)^{-1/2}$ — характерный размер локализации в плоскости XOY электронной волновой функции, эффекты, связанные с конечностью λ , окажутся пренебрежимо малыми.

Часть II

Кинетика частично когерентных поляритонов в прямозонных полупроводниках

В большом количестве работ, посвященных пространственно-временной эволюции интенсивного лазерного излучения в резонансных средах, используется классическое описание, при котором фотонное и материальные поля рассматриваются как взаимодействующие между собой макрозаконные когерентные моды — конденсаты. Уход квазичастиц из конденсатных мод если и учитывается, то, как правило, путем введения феноменологических констант затухания. При этом предполагается, что:

1. распад конденсатов осуществляется экспоненциальным образом;
2. время жизни конденсата значительно превосходит по величине время изучаемого когерентного нелинейного процесса.

Классический подход использовался, в частности, в [145, 146] при изучении явлений самоиндуцированной прозрачности и нутации в экситонной области спектра.

Более последовательным, на наш взгляд, является микроскопический подход, при котором динамика взаимодействующих конденсатных мод и квантовых флуктуаций, возникающих в системе в результате реальных процессов рассеяния квазичастиц, описывается единым образом. Иными словами, следует учесть:

1. взаимодействие конденсатов между собой;
2. возбуждение внеконденсатных квазичастиц;
3. обратное влияние внеконденсатных квазичастиц на конденсаты.

В данном разделе диссертации микроскопический подход используется для описания временной эволюции системы первоначально когерентных поляритонов большой плотности.

Глава 7

Уравнения Швингера–Дайсона для неравновесной системы частично когерентных поляритонов

§ 7.1 Введение

Для системы невзаимодействующих поляритонов аномальные средние равны нулю. Поэтому ясно, что вывод уравнений для описания кинетических процессов в системах с вырождением не может быть основан на традиционных разложениях теории возмущений, разработанных для невырожденных случаев.

Регулярный метод получения аномальных решений в теории поля и статистической физике состоит в построении функционала, точки стационарности которого суть аномальные решения. Для нахождения искомого функционала используют следующий прием [249, 250]. В гамильтониан системы включают дополнительные слагаемые, содержащие классические источники. Последние могут и не иметь непосредственного физического смысла и играют вспомогательную роль независимых функциональных аргументов. Структура дополнительных членов выбирается таким образом, чтобы нарушалась та симметрия гамильтониана системы, с которой связано отсутствие тех или иных аномальных средних. Для системы, описываемой модифицированным гамильтонианом, аномальные средние отличны от нуля и являются функционалами классических источников. Посредством преобразования Лежандра эту функциональную зависимость можно обратить. В результате аномальные сред-

ние становятся независимыми функциональными аргументами, а преобразование Лежандра производящего функционала связных функций Грина или статистической суммы системы порождает функционал, который в отсутствие реальных классических источников обладает требуемым свойством стационарности.

Заметим, что введение в гамильтониан (II.7.1)–(II.7.3) калибровочно неинвариантных добавок (II.7.8) для снятия вырождения, связанного с наличием в рассматриваемой системе конденсата, в результате имеющегося между квазичастицами взаимодействия приводит к снятию упомянутого ранее вырождения двухчастичных состояний [213].

Кинетические уравнения, описывающие пространственно-временную эволюцию системы частично когерентных поляритонов, могут быть найдены с помощью метода, разработанного Л. В. Келдышем [20]. Для того, чтобы учесть имеющееся в системе вырождение, удобно сформулировать метод Келдыша на языке функционалов, а затем с помощью преобразования Лежандра сконструировать такой функционал, для которого искомые уравнения играют роль уравнений Эйлера, определяющих точку стационарности. Цель данной главы состоит в реализации этой программы. В результате будут получены уравнения Дайсона для когерентной части поляритонного поля, а также для нормальной и аномальной связных функций Грина–Келдыша. В методе Келдыша уравнения Дайсона имеют тот же смысл, что и обычные кинетические уравнения. Последние могут быть получены из уравнений Дайсона при некоторых дополнительных предположениях [20, 251].

Приведенная здесь функциональная формулировка метода Келдыша представляет самостоятельный интерес. Однако, в данной главе рассмотрение ограничено исследованием системы взаимодействующих бозонных полей. Представляет интерес обобщение функционального формализма на случай, когда в системе имеются элементарные возбуждения, подчиняющиеся статистике Ферми–Дирака. Такое исследование выходит за рамки задач, поставленных в данной диссертации, и потому вынесено в Приложение iv.

§ 7.2 Гамильтониан системы

Мы исходим из простейшего гамильтониана [146, 252]

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (\text{II.7.1})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1,2} (h_{\mathbf{k}})_{\alpha_1 \alpha_2} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}\alpha_1}^\dagger \hat{\varphi}_{\mathbf{k}\alpha_2}, \\ h_{\mathbf{k}} &= \hbar \omega_{\mathbf{k}}^\perp \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) + \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\frac{1 - \tau_3}{2} \right) + \eta_{\mathbf{k}} \tau_2, \end{aligned} \quad (\text{II.7.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_4=1,2} \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \\ &\times \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right)_{\alpha_1, \alpha_3} \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right)_{\alpha_2, \alpha_4} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1 \alpha_1}^\dagger \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_2 \alpha_2}^\dagger \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_3 \alpha_3} \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_4 \alpha_4}. \end{aligned} \quad (\text{II.7.3})$$

Операторы $\hat{\varphi}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger$ ($\hat{\varphi}_{\mathbf{k}\alpha}$) рождения (уничтожения) экситона (при $\alpha = 1$) или фотона (при $\alpha = 2$) в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} подчиняются бозевским перестановочным соотношениям:

$$\left[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1 \alpha_1}, \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_2 \alpha_2}^\dagger \right]_- = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2}, \quad \left[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1 \alpha_1}, \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_2 \alpha_2} \right]_- = \left[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}_1 \alpha_1}^\dagger, \hat{\varphi}_{\mathbf{k}_2 \alpha_2}^\dagger \right]_- = 0.$$

Для матриц Паули τ_1 , τ_2 и τ_3 используется стандартное представление (см. Приложение i). Частоты $\omega_{\mathbf{k}}$ и $\omega_{\mathbf{k}}^\perp$ определяются выражениями $\omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}| \epsilon_B^{-1/2}$, $\omega_{\mathbf{k}}^\perp = \omega^\perp + \hbar \mathbf{k}^2 / 2m$, в которых c – скорость света в вакууме, $\hbar \omega^\perp$ – энергия образования экситона в зоне $\hbar \omega_{\mathbf{k}}^\perp$, m – его эффективная масса. Фоновая диэлектрическая проницаемость ϵ_B учитывает вклад в полную диэлектрическую проницаемость кристалла всех возбуждений за исключением экситонов изолированной зоны $\hbar \omega_{\mathbf{k}}^\perp$.

Гамильтониан (II.7.1) описывает систему взаимодействующих дипольно-активных экситонов и поперечных фотонов в неограниченном кристалле ($V \rightarrow \infty$, V – объем квантования) в окрестности изолированного экситонного резонанса [252] $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{\mathbf{k}}^\perp$. Иными словами, мы предполагаем выполнение соотношений $\hbar |\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}^\perp| \ll \hbar \omega_{\mathbf{k}}^\perp, \Delta \mathcal{E}$

между частотой фотонов $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$, энергией экситонов $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\perp}$ и минимальным энергетическим зазором $\Delta\mathcal{E}$, отделяющим экситонную зону $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ от любых других. Кроме того, мы предполагаем, что константы экситон-фотонной ($\eta_{\mathbf{k}} = \eta_{-\mathbf{k}}$) и экситон-экситонной ($\nu_{\mathbf{k}} = \nu_{-\mathbf{k}}$) связи достаточно малы: $0 < \eta_{\mathbf{k}} \ll \omega_{\mathbf{k}}^{\perp}$, $0 < (\nu_{\mathbf{k}}/\hbar)\bar{n} \ll \omega_{\mathbf{k}}^{\perp}$, (\bar{n} – средняя плотность экситонов в системе). Первое из этих неравенств позволяет ограничиться в гамильтониане (II.7.2) учетом лишь резонансных слагаемых, а второе – рассматривать экситон-экситонное взаимодействие как малое возмущение. При выполнении резонансного условия $\omega_{\mathbf{k}} \approx \omega_{\mathbf{k}}^{\perp}$ слабой частотной зависимостью ϵ_B можно пренебречь.

Квадратичная часть (II.7.2) гамильтониана (II.7.1) может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar\Omega_{\mathbf{k}\alpha} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha} \quad (\text{II.7.4})$$

с помощью перехода к поляритонным бозевским операторам $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}$ посредством преобразования

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{k}\alpha_1} = \sum_{\alpha_2=1,2} (U_{\mathbf{k}})_{\alpha_1\alpha_2} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha_2}, \quad U_{\mathbf{k}} = \frac{1 - i\tau_1\Lambda_{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 + \Lambda_{\mathbf{k}}^2}}.$$

Функция $\Lambda_{\mathbf{k}}$ при этом определяется уравнением $\eta_{\mathbf{k}}\Lambda_{\mathbf{k}}^2 + \hbar(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}}^{\perp})\Lambda_{\mathbf{k}} - \eta_{\mathbf{k}} = 0$.

В поляритонном представлении

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_4=1,2} \nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \\ &\times (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3})_{\alpha_1\alpha_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4})_{\alpha_2\alpha_4} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^{\dagger} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^{\dagger} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}, \end{aligned} \quad (\text{II.7.5})$$

где

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1}^{\dagger} = U_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \right) U_{\mathbf{k}_2}.$$

Гамильтониан (II.7.1) инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\hat{R} = \exp(i\gamma\hat{N}), \quad (\text{II.7.6})$$

в котором γ – произвольный действительный параметр,

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} \hat{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}$$

— оператор полного числа поляритонов в системе. Действительно, воспользовавшись равенствами

$$\hat{R}^\dagger \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \hat{R} = \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} e^{i\gamma}, \quad \hat{R}^\dagger \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{R} = \hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\gamma}, \quad (\text{II.7.7})$$

легко получаем: $\hat{R}^\dagger \hat{H} \hat{R} = \hat{H}$.

Если рассматриваемая система подвергается воздействию каких-либо внешних классических источников $j_{\mathbf{k}}(t)$, гамильтониан (II.7.1) следует дополнить слагаемым

$$\hat{H}_{ext}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{\varphi}_{\mathbf{k}}^\dagger j_{\mathbf{k}}^*(t) + j_{\mathbf{k}}(t) \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (\text{II.7.8})$$

или, в поляритонном представлении,

$$\hat{H}_{ext}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{\Phi}_{\mathbf{k}}^\dagger J_{\mathbf{k}}^*(t) + J_{\mathbf{k}}(t) \hat{\Phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (\text{II.7.9})$$

где

$$J_{\mathbf{k}}^*(t) = U_{\mathbf{k}}^\dagger j_{\mathbf{k}}^*(t). \quad (\text{II.7.10})$$

Введение такого слагаемого нарушает симметрию гамильтониана системы относительно калибровочного преобразования (II.7.6).

В дальнейшем мы будем пользоваться поляритонным представлением, в котором оператор \hat{H}_0 диагональный. При необходимости все полученные ниже уравнения могут быть представлены и в терминах исходных величин, относящихся непосредственно к экситонам и фотонам.

§ 7.3 Метод Келдыша

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом $\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) + \hat{H}_{ext}(t)$ и сделаем формальное предположение о том, что взаимодействие экситонов друг с другом, а также взаимодействие экситонов и фотонов с внешними классическими источниками в бесконечно отдаленном прошлом отсутствовали: $\hat{H}_{int}(t), \hat{H}_{ext}(t) \rightarrow 0$ при $H_{int}(t) \propto \exp(\delta t)$, $\delta \rightarrow +0$). Тогда матрица плотности системы $\hat{\rho}(t)$ определяется уравнением Лиувилля–фон-Неймана

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = \left[\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) + \hat{H}_{ext}(t), \hat{\rho}(t) \right]_-, \quad (\text{II.7.11})$$

дополненным начальным условием

$$\hat{\rho}(-\infty) \equiv \hat{\rho}_0 = \exp \left(-\frac{\hat{H}_0}{k_B T} \right) / \text{tr} \exp \left(-\frac{\hat{H}_0}{k_B T} \right), \quad (\text{II.7.12})$$

в котором k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура системы при $t \rightarrow -\infty$.

Переход к представлению взаимодействия осуществляется посредством преобразования [172]

$$\hat{\rho}_i(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{\rho}(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad \hat{A}_i(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}, \quad (\text{II.7.13})$$

где \hat{A} — оператор произвольной динамической величины A в шредингеровском представлении. Очевидно, что при $t = 0$ представления взаимодействия и шредингеровское совпадают. Матрица плотности $\hat{\rho}_i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_i(t) = \left[\hat{H}_{int,i}(t) + \hat{H}_{ext,i}(t), \hat{\rho}_i(t) \right]_- \quad (\text{II.7.14})$$

и начальному условию $\hat{\rho}_i(-\infty) = \hat{\rho}_0$, а оператор $\hat{A}_i(t)$ подчиняется гайзенберговскому уравнению движения, отвечающему системе невзаимодействующих поляритонов

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_i(t) = \left[\hat{A}_i(t), \hat{H}_0 \right]_- . \quad (\text{II.7.15})$$

Введем в рассмотрение оператор эволюции $S(t, t_0)$, определяемый при $t \geq t_0$ уравнением

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} S(t, t_0) = \left[\hat{H}_{int,i}(t) + \hat{H}_{ext,i}(t) \right] S(t, t_0) \quad (\text{II.7.16})$$

и начальным условием $S(t_0, t_0) = 1$. При $t < t_0$ оператор $S(t, t_0)$ определяется соотношением $S(t, t_0) = S^\dagger(t_0, t)$. Основные свойства S -оператора:

$$S(t_1, t_2) S(t_2, t_3) = S(t_1, t_3), \quad S^\dagger(t, t_0) S(t, t_0) = S(t, t_0) S^\dagger(t, t_0) = 1.$$

С помощью оператора эволюции формальное решение уравнения (II.7.14), удовлетворяющее налагаемому начальному условию, может быть представлено в виде

$$\hat{\rho}_i(t) = S(t, -\infty) \hat{\rho}_0 S(-\infty, t). \quad (\text{II.7.17})$$

Среднее значение произвольной динамической величины A не зависит от выбора представления и дается формулой

$$\langle A \rangle_t = \text{tr } \hat{\rho}(t) \hat{A} = \text{tr } \hat{\rho}_i(t) \hat{A}_i(t). \quad (\text{II.7.18})$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с корреляционными функциями нескольких операторов, взятых в различные моменты времени. При этом удобно перенести всю временную зависимость на эти операторы, т.е. перейти к представлению Гайзенберга [172]. Следуя [20], в качестве не зависящей от времени матрицы плотности в гайзенберговском представлении $\check{\rho}$ выберем значение $\hat{\rho}_i(0)$ матрицы (II.7.17), включив в нее, таким образом, все изменения, которые произошли с распределением (II.7.12) в результате воздействия внешних классических источников и экситон-экситонных столкновений

$$\check{\rho} \equiv \hat{\rho}_i(0) = S(0, -\infty) \hat{\rho}_0 S(-\infty, 0). \quad (\text{II.7.19})$$

Из формул (II.7.17) и (II.7.19) находим:

$$\hat{\rho}_i(t) = S(t, 0) \check{\rho} S(0, t). \quad (\text{II.7.20})$$

Подставляя это выражение в (II.7.18), получаем $\langle A \rangle_t = \text{tr } \check{\rho} \check{A}(t)$, где

$$\check{A}(t) = S(0, t) \hat{A}_i(t) S(t, 0) \quad (\text{II.7.21})$$

— оператор в представлении Гайзенберга, подчиняющийся уравнению движения с полным гамильтонианом

$$i\hbar \frac{d}{dt} \check{A}(t) = [\check{A}(t), \check{H}_0(t) + \check{H}_{int}(t) + \check{H}_{ext}(t)]_- . \quad (\text{II.7.22})$$

Вся информация о динамических и кинетических изменениях в рассматриваемой системе, вызванных ее взаимодействием с внешними классическими источниками и процессами экситон-экситонного рассеяния, содержится в гриновских функциях [20]

$$\begin{aligned} & G^{(r_1, \dots, r_N | r'_1, \dots, r'_M)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N | p'_1, t'_1; \dots; p'_M, t'_M) \\ &= \frac{1}{(i\hbar)^{N+M-1}} \text{tr } \check{\rho} T_C \left[\check{\Phi}^{(r_1)}(p_1, t_1) \dots \check{\Phi}^{(r_N)}(p_N, t_N) \check{\Phi}^{(r'_1)\dagger}(p'_1, t'_1) \dots \check{\Phi}^{(r'_M)\dagger}(p'_M, t'_M) \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.7.23})$$

Здесь $p_i = (\mathbf{k}_i, \alpha_i)$; $\alpha_i = 1, 2$; $N, M = 1, 2, \dots$. Символ T_C означает хронологическое упорядочение операторов в произведении вдоль изображенного на рисунке II.7.1 замкнутого контура C , проходящего всю временную ось из $-\infty$ в $+\infty$ (участок контура $C^{(+)}$) и затем обратно из $+\infty$ в $-\infty$ (участок $C^{(-)}$). Индекс $r_i = \pm$ у оператора указывает на принадлежность временного аргумента оператора тому или иному участку $C^{(\pm)}$ контура C .

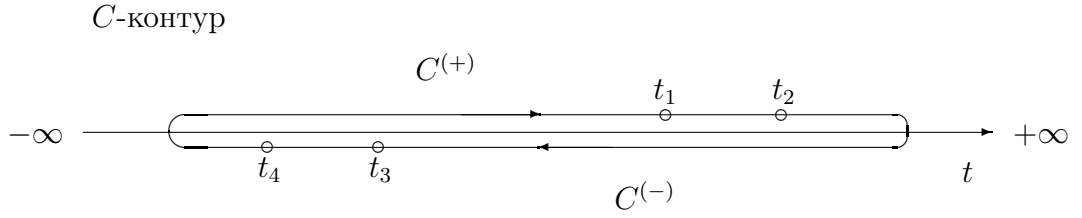


Рис. II.7.1. Моменты времени t_3 и t_4 , расположенные на обратном участке $C^{(-)}$ контура C , являются более поздними по отношению к моментам t_1 и t_2 , расположенным на прямом участке $C^{(+)}$, причем $t_4 > t_3 > t_2 > t_1$.

Функции (II.7.23) могут быть представлены в виде средних по гиббсовскому распределению (II.7.12). Для этого введем в рассмотрение оператор

$$S_C = S^{(-)\dagger} S^{(+)} , \quad (\text{II.7.24})$$

в котором

$$S^{(\pm)} = T \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\hat{H}_{int,i}^{(\pm)}(t) + \hat{H}_{ext,i}^{(\pm)}(t) \right] \right\} , \quad (\text{II.7.25})$$

T — символ хронологического упорядочения операторов [176]. Подставляя (II.7.25) в (II.7.24), находим:

$$S_C = T_C \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\hat{H}_{int,i}^{(r)}(t) + \hat{H}_{ext,i}^{(r)}(t) \right] \right\} , \quad (\text{II.7.26})$$

или

$$S_C = T_C \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_C dt \left[\hat{H}_{int,i}(t) + \hat{H}_{ext,i}(t) \right] \right\} . \quad (\text{II.7.27})$$

Интегрирование по t в выражении (II.7.27) производится вдоль всего контура C .

С помощью формул (II.7.19), (II.7.21) и (II.7.24) получаем:

$$G^{(r_1, \dots, r_N | r'_1, \dots, r'_M)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N | p'_1, t'_1; \dots; p'_M, t'_M) \quad (\text{II.7.28})$$

$$= \frac{1}{(i\hbar)^{N+M-1}} \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{\Phi}_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r_N)}(p_N, t_N) \hat{\Phi}_i^{(r'_1)\dagger}(p'_1, t'_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r'_M)\dagger}(p'_M, t'_M) S_C \right].$$

В качестве $H_{ext,i}^{(r)}(t)$ в (II.7.25), (II.7.26) примем оператор ($r = \pm$)

$$\hat{H}_{ext,i}^{(r)}(t) = \sum_p \left[\hat{\Phi}_i^{(r)}(p, t) J^{(r)}(p, t) + h.c. \right], \quad (\text{II.7.29})$$

включающий два независимых классических источника $J^{(+)}(p, t)$ и $J^{(-)}(p, t)$. Введение двух источников вместо одного $J(p, t)$ позволит воспользоваться при расчетах всем имеющимся арсеналом функциональных методов квантовой теории поля и статистической физики [249, 176]. Переход к физическому пределу $J^{(+)}(p, t) \equiv J^{(-)}(p, t) \equiv J(p, t)$ выполним на заключительном этапе вычислений.

§ 7.4 Производящий функционал

Используя классические источники $J^{(\pm)}(p, t)$ как функциональные аргументы, представим (II.7.28) в форме

$$G^{(r_1, \dots, r_N | r'_1, \dots, r'_M)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N | p'_1, t'_1; \dots; p'_M, t'_M) \quad (\text{II.7.30})$$

$$= \frac{i\hbar \delta^{N+M} G(J^*, J)}{\prod_{i=1}^N r_i \delta J^{(r_i)}(p_i, t_i) \prod_{j=1}^M r_j \delta J^{(r'_j)*}(p'_j, t'_j)},$$

где

$$G(J^*, J) = \text{tr } \hat{\rho}_0 S_C = \text{tr } S^{(+)} \hat{\rho}_0 S^{(-)\dagger} \quad (\text{II.7.31})$$

— производящий функционал гриновских функций (II.7.23). Вследствие унитарности S -оператора функционал (II.7.31) в физическом пределе обращается в единицу:

$$G(J^*, J) = 1 \quad \text{при} \quad J^{(+)}(p, t) \equiv J^{(-)}(p, t) \equiv J(p, t). \quad (\text{II.7.32})$$

Вычисление производящего функционала проще всего выполнить, если поставить в соответствие операторам их виковские нормальные символы [178]: $S^{(+)} \longleftrightarrow$

$S^{(+)}(\Phi^*, \Phi)$, $S^{(-)\dagger} \longleftrightarrow S^{(-)\dagger}(\Phi^*, \Phi)$, $\hat{\rho}_0 \longleftrightarrow \rho_0(\Phi^*, \Phi)$. С помощью теоремы Вика для хронологически упорядоченного произведения операторов находим [178]:

$$S^{(+)}(\Phi^*, \Phi) = \exp \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \frac{\delta}{\delta \Phi(p_1, t_1)} \Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \Phi^*(p_2, t_2)} \right] \quad (\text{II.7.33})$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \left\{ H_{int}(t_3 | \Phi^*, \Phi) + \sum_{p_3} [\Phi(p_3, t_3) J^{(+)}(p_3, t_3) + \Phi^*(p_3, t_3) J^{(+)*}(p_3, t_3)] \right\} \right).$$

Здесь

$$\Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) = T \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] - : \hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) : \quad (\text{II.7.34})$$

— хронологическое спаривание [176] операторов

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i(p_1, t_1) &= e^{i\hat{H}_0 t_1 / \hbar} \hat{\Phi}(p_1) e^{-i\hat{H}_0 t_1 / \hbar} = \hat{\Phi}(p_1) e^{-i\Omega(p_1) t_1} \\ &\longleftrightarrow \Phi(p_1, t_1) = \Phi(p_1) e^{-i\Omega(p_1) t_1}, \end{aligned} \quad (\text{II.7.35})$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) &= e^{i\hat{H}_0 t_2 / \hbar} \hat{\Phi}^\dagger(p_2) e^{-i\hat{H}_0 t_2 / \hbar} = \hat{\Phi}^\dagger(p_2) e^{i\Omega(p_2) t_2} \\ &\longleftrightarrow \Phi^*(p_2, t_2) = \Phi^*(p_2) e^{i\Omega(p_2) t_2}; \end{aligned} \quad (\text{II.7.36})$$

$$H_{int}(t | \Phi^*, \Phi) = \hat{H}_{int}(t_3) |_{\hat{\Phi}_i(p, t) \rightarrow \Phi(p, t), \quad \hat{\Phi}_i^\dagger(p, t) \rightarrow \Phi^*(p, t)}. \quad (\text{II.7.37})$$

С помощью равенства

$$\begin{aligned} &\exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \left\{ H_{int}(t_3 | \Phi^*, \Phi) + \sum_{p_3} [\Phi(p_3, t_3) J^{(+)}(p_3, t_3) + \Phi^*(p_3, t_3) J^{(+)*}(p_3, t_3)] \right\} \right) \\ &= \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_4 H_{int} \left(t_4 | i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(+)*}}, i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(+)}} \right) \right] \quad (\text{II.7.38}) \\ &\times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3} [\Phi(p_3, t_3) J^{(+)}(p_3, t_3) + \Phi^*(p_3, t_3) J^{(+)*}(p_3, t_3)] \right) \end{aligned}$$

преобразуем (II.7.33) к виду

$$\begin{aligned}
S^{(+)}(\Phi^*, \Phi) = & \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_4 H_{int} \left(t_4 \mid i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(+)*}}, i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(+)}} \right) \right] \\
& \times \exp \left[\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} J^{(+)}(p_1, t_1) \Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) J^{(+)*}(p_2, t_2) \right] \\
& \times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3} [\Phi(p_3, t_3) J^{(+)}(p_3, t_3) + \Phi^*(p_3, t_3) J^{(+)*}(p_3, t_3)] \right).
\end{aligned} \tag{II.7.39}$$

Соотношение (II.7.38) и формулы типа (II.7.39) следует понимать в смысле разложения в ряд теории возмущений по степеням H_{int} [253].

Виковский символ оператора $S^{(-)\dagger}$ легко найти, используя утверждение [178]: если $\hat{A} \longleftrightarrow A(\Phi^*, \Phi)$, $\hat{B} \longleftrightarrow B(\Phi^*, \Phi)$ и $\hat{A} = \hat{B}^\dagger$, то $A(\Phi^*, \Phi) = B^*(\Phi^*, \Phi)$. В частности, для самосопряженного оператора $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ имеем: $A(\Phi^*, \Phi) = A^*(\Phi^*, \Phi)$. Учитывая указанное свойство символов самосопряженных операторов и выполняя в (II.7.39) замену $J^{(+)}(p, t)$ и $J^{(+)*}(p, t)$ соответственно на $J^{(-)}(p, t)$ и $J^{(-)*}(p, t)$, получим

$$\begin{aligned}
S^{(-)\dagger}(\Phi^*, \Phi) = & \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_4 H_{int} \left(t_4 \mid -i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(-)*}}, -i\hbar \frac{\delta}{\delta J^{(-)}} \right) \right] \\
& \times \exp \left[\frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} J^{(-)}(p_1, t_1) \bar{\Delta}(p_1, t_1 | p_2, t_2) J^{(-)*}(p_2, t_2) \right] \\
& \times \exp \left(-\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3} [\Phi(p_3, t_3) J^{(-)}(p_3, t_3) + \Phi^*(p_3, t_3) J^{(-)*}(p_3, t_3)] \right),
\end{aligned} \tag{II.7.40}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \Delta^*(p_2, t_2 | p_1, t_1) \\
&= \bar{T} \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] - : \hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) :
\end{aligned} \tag{II.7.41}$$

— антихронологическое спаривание операторов (II.7.35) и (II.7.36) (\bar{T} — символ антихронологического упорядочения операторов [20]).

Наконец, приведем виковский символ оператора $\hat{\rho}_0$ [178, 254]:

$$\rho_0(\Phi^*, \Phi) = \exp \left\{ \sum_p \ln [1 + N(p)] - \sum_p \frac{\Phi^*(p) \Phi(p)}{1 + N(p)} \right\}. \tag{II.7.42}$$

Здесь

$$N(p) = \{\exp [\hbar\Omega(p)/k_B T] - 1\}^{-1} \quad (\text{II.7.43})$$

— функция равновесного распределения свободных поляритонов (распределения при $t \rightarrow -\infty$).

Прежде чем приступить к вычислению функционала (II.7.31) на основе выражений (II.7.39), (II.7.40) и (II.7.42), сделаем замечание, касающееся функций (II.7.34) и (II.7.41).

Замечание 1 Поскольку определение функций (II.7.34), (II.7.41) существенно опирается на понятия хронологического и антихронологического упорядочений операторов в произведении, они нуждаются в доопределении, когда значения временных аргументов операторов совпадают. Один из возможных способов доопределения заключается в договоренности располагать в хронологическом произведении операторы с совпадающими значениями временных аргументов в нормальном порядке [178]. Тогда, согласно (II.7.41), и антихронологическое произведение операторов будет доопределено тем же условием. Функции (II.7.34) и (II.7.41) при этом даются формулами

$$\Delta(p_1, t_1 | p_2, t_2) = \begin{cases} D(p_1, t_1 | p_2, t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 \leq t_2; \end{cases} \quad (\text{II.7.44})$$

$$\bar{\Delta}(p_1, t_1 | p_2, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_1 \geq t_2, \\ D(p_1, t_1 | p_2, t_2) & \text{при } t_1 < t_2; \end{cases} \quad (\text{II.7.45})$$

$$D(p_1, t_1 | p_2, t_2) \equiv \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1), \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) \right]_- = \delta_{p_1, p_2} e^{-i\Omega(p_1)(t_1 - t_2)}. \quad (\text{II.7.46})$$

В некоторых случаях более удобным может оказаться доопределение T - и \bar{T} -произведений посредством симметризации операторов с совпадающими значениями временных аргументов [249, 178]:

$$\begin{aligned} T \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_1) \right] &= \bar{T} \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_1) \right] \\ &= \text{Sym} \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_1) \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_1) + \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_1) \hat{\Phi}_i(p_1, t_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.7.47})$$

Из (II.7.34), (II.7.41) и (II.7.47) следует представление

$$\begin{aligned}\Delta(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \Theta(t_1 - t_2)D(p_1, t_1|p_2, t_2), \\ \bar{\Delta}(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \Theta(t_2 - t_1)D(p_1, t_1|p_2, t_2),\end{aligned}\quad (\text{II.7.48})$$

где

$$\Theta(t_1 - t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } t_1 > t_2, \\ 1/2 & \text{при } t_1 = t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 < t_2, \end{cases} \quad (\text{II.7.49})$$

причем $\Theta(t_1 - t_2) + \Theta(t_2 - t_1) = 1$ при всех t_1 и t_2 .

Для вычисления производящего функционала воспользуемся формулой

$$\text{tr } \hat{A} = \int d\Phi^* d\Phi A(\Phi^*, \Phi), \quad d\Phi^* d\Phi = \prod_p \frac{d\Phi^*(p) d\Phi(p)}{2\pi i}, \quad (\text{II.7.50})$$

правилом композиции символов

$$\hat{A}\hat{B} \longleftrightarrow \int d\Phi^* d\Phi A(\Phi^*, \tilde{\Phi}) B(\tilde{\Phi}^*, \Phi) \exp \left\{ - \sum_p [\tilde{\Phi}^*(p) - \Phi^*(p)] [\tilde{\Phi}(p) - \Phi(p)] \right\} \quad (\text{II.7.51})$$

и выражениями (II.7.39), (II.7.40) и (II.7.43). Выполнив континуальное интегрирование по виковским символам, найдем

$$G(J^*, J) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(t | i\hbar r \frac{\delta}{\delta J^{(r)*}}, i\hbar r \frac{\delta}{\delta J^{(r)}} \right) \right] G_0(J^*, J), \quad (\text{II.7.52})$$

$$G_0(J^*, J) = \quad (\text{II.7.53})$$

$$= \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r_1, r_2=\pm} r_1 r_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} J^{(r_1)}(p_1, t_1) G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) J^{(r_2)*}(p_2, t_2) \right].$$

Здесь $G_0(J^*, J)$ — производящий функционал свободной теории ($H_{int} \equiv 0$);

$$\begin{aligned}G_0^{(++)}(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\Delta(p_1, t_1|p_2, t_2) + N(p_1)D(p_1, t_1|p_2, t_2)], \\ G_0^{(--)}(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\bar{\Delta}(p_1, t_1|p_2, t_2) + N(p_1)D(p_1, t_1|p_2, t_2)],\end{aligned} \quad (\text{II.7.54})$$

$$\begin{aligned}G_0^{(+-)}(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} N(p_1)D(p_1, t_1|p_2, t_2), \\ G_0^{(-+)}(p_1, t_1|p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [1 + N(p_1)] D(p_1, t_1|p_2, t_2).\end{aligned} \quad (\text{II.7.55})$$

При симметричном доопределении (II.7.47) T - и \bar{T} -произведений операторов выражения (II.7.54) принимают вид

$$\begin{aligned} G_0^{(+|+)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} \{ \Theta(t_1 - t_2) [1 + N(p_1)] + \Theta(t_2 - t_1) N(p_1) \} D(p_1, t_1 | p_2, t_2), \\ G_0^{(-|-)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} \{ \Theta(t_1 - t_2) N(p_1) + \Theta(t_2 - t_1) [1 + N(p_1)] \} D(p_1, t_1 | p_2, t_2). \end{aligned} \quad (\text{II.7.56})$$

Используя интегральное представление сингулярных дельта- и тэта-функций [176] и учитывая (II.7.46), представим функции (II.7.55), (II.7.56) в форме

$$\begin{aligned} G_0^{(r|r')}(p, t | p', t') &= \\ &= \left[\left(i\hbar \frac{\vec{d}}{dt} - \hbar\Omega(p) \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1} \left[r\delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\vec{d}}{dt} - \hbar\Omega(p) \right) - i\varepsilon r r' g^{(r|r')}(p) \right] \delta_{p,p'} \delta(t - t') \\ &= -\delta_{p,p'} \delta(t - t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt} + \hbar\Omega(p') \right) + i\varepsilon r r' g^{(r|r')}(p') \right] \left[\left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt'} + \hbar\Omega(p') \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{II.7.57})$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$,

$$\begin{aligned} g^{(+|+)}(p) &= g^{(-|-)}(p) = 1 + 2N(p), \\ g^{(+|-)}(p) &= -2N(p), \quad g^{(-|+)}(p) = -2[1 + N(p)]. \end{aligned} \quad (\text{II.7.58})$$

Отметим соотношения

$$\sum_{r_3=\pm\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3} G_0^{-1(r_1|r_3)}(p_1, t_1 | p_3, t_3) G_0^{(r_3|r_2)}(p_3, t_3 | p_2, t_2) = \delta_{r_1, r_2} \delta_{p_1, p_2} \delta(t_1 - t_2), \quad (\text{II.7.59})$$

$$\sum_{r_3=\pm\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3} G_0^{(r_1|r_3)}(p_1, t_1 | p_3, t_3) G_0^{-1(r_3|r_2)}(p_3, t_3 | p_2, t_2) = \delta_{r_1, r_2} \delta_{p_1, p_2} \delta(t_1 - t_2), \quad (\text{II.7.60})$$

определяющие матрицу, обратную по отношению к матрице (II.7.57):

$$\begin{aligned} G_0^{-1(r|r')}(p, t | p', t') &= \left[r\delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\vec{d}}{dt} - \hbar\Omega(p) \right) + i\varepsilon g^{(r|r')}(p) \right] \delta_{p,p'} \delta(t - t') \\ &= -\delta_{p,p'} \delta(t - t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt} + \hbar\Omega(p') \right) - i\varepsilon g^{(r|r')}(p') \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.7.61})$$

Функции (II.7.54), (II.7.55) (или (II.7.57)) не являются независимыми. Они связаны соотношением

$$\sum_{r,r'=\pm} rr' G_0^{(r|r')}(p, t|p', t') \equiv 0, \quad (\text{II.7.62})$$

обеспечивающим выполнение предельного условия (II.7.32), которому должны подчиняться функционалы (II.7.52) и (II.7.53).

Придадим функционалам (II.7.52), (II.7.53) иную форму, более удобную для вычисления функциональных производных (II.7.30) по классическим источникам $J^{(\pm)}(p, t)$ и $J^{(\pm)*}(p, t)$. Для этого перепишем производящий функционал гриновских функций свободной теории (II.7.53) в виде

$$G_0(J^*, J) = \exp \left[i\hbar \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1)} G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_2)*}(p_2, t_2)} \right] \quad (\text{II.7.63})$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p [\Phi^{(r)}(p, t) J^{(r)}(p, t) + \Phi^{(r)*}(p, t) J^{(r)*}(p, t)] \right) \Big|_{\Phi^{(\pm)}=\Phi^{(\pm)*}=0},$$

где $\Phi^{(\pm)}(p, t)$ — комплекснозначные функции. Подставляя это выражение в (II.7.52), получим формулу для производящего функционала (II.7.31):

$$G(J^*, J) = \exp \left[i\hbar \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1)} G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_2)*}(p_2, t_2)} \right] \quad (\text{II.7.64})$$

$$\times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p [H_{int}(t|\Phi^{(r)*}, \Phi^{(r)}) + H_{ext}(t|\Phi^{(r)*}, \Phi^{(r)})] \right) \Big|_{\Phi^{(\pm)}=\Phi^{(\pm)*}=0}.$$

Подобное представление производящего функционала гриновских функций хорошо известно в квантовой теории поля [249, 255]. Разложение (II.7.64) в ряд теории возмущений порождает диаграммы Келдыша для неравновесных процессов [20]. Роль пропагатора играет матрица $G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2)$, а вершины задаются гамильтонианом H_{int} и

$$H_{ext}(t|\Phi^{(r)*}, \Phi^{(r)}) = \sum_p [\Phi^{(r)}(p, t) J^{(r)}(p, t) + \Phi^{(r)*}(p, t) J^{(r)*}(p, t)] . \quad (\text{II.7.65})$$

Формула (II.7.63) приводит к теореме Вика, позволяющей вычислять средние по гиббсовскому распределению (II.7.43) T_C -произведений операторов в представлении взаимодействия.

Теорема 1 (Теорема Вика) Для произвольного оператора $\hat{A}_i(t)$, разложимого в ряд по степеням $\hat{\Phi}_i^{(r)}(p, t)$ и $\hat{\Phi}_i^{(r)\dagger}(p, t)$, имеем

$$\begin{aligned} & \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{A}_i(t) = \\ & = \exp \left[i\hbar \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1)} G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_2)*}(p_2, t_2)} \right] \\ & \quad \times A(t) \Big|_{\Phi(\pm) = \Phi(\pm)* = 0} , \end{aligned} \quad (\text{II.7.66})$$

где

$$\hat{A}_i(t) \Big|_{\hat{\Phi}_i^{(r)}(p, t) \rightarrow \Phi^{(r)}(p, t), \hat{\Phi}_i^{(r)\dagger}(p, t) \rightarrow \Phi^{(r)*}(p, t)} \rightarrow A(t) .$$

Действительно, из (II.7.28) и (II.7.30) следует, что для свободной теории

$$\begin{aligned} & \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{\Phi}_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r_N)}(p_N, t_N) \hat{\Phi}_i^{(r'_1)\dagger}(p'_1, t'_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r'_M)\dagger}(p'_M, t'_M) S_C \right] = \\ & = \frac{(i\hbar)^{N+M} \delta^{N+M} G_0(J^*, J)}{\prod_{i=1}^N r_i \delta J^{(r_i)}(p_i, t_i) \prod_{j=1}^M r'_j \delta J^{(r'_j)}(p'_j, t'_j)} . \end{aligned} \quad (\text{II.7.67})$$

Подставив сюда (II.7.63) и положив классические источники равными нулю, найдем

$$\begin{aligned} & \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{\Phi}_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r_N)}(p_N, t_N) \hat{\Phi}_i^{(r'_1)\dagger}(p'_1, t'_1) \dots \hat{\Phi}_i^{(r'_M)\dagger}(p'_M, t'_M) S_C \right] \\ & = \exp \left[i\hbar \sum_{r, r' = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \sum_{p, p'} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r)}(p, t)} G_0^{(r|r')}(p, t | p', t') \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r')*}(p', t')} \right] \\ & \quad \left[\Phi_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \dots \Phi_i^{(r_N)}(p_N, t_N) \Phi_i^{(r'_1)*}(p'_1, t'_1) \dots \Phi_i^{(r'_M)*}(p'_M, t'_M) \right] \Big|_{\Phi(\pm) = \Phi(\pm)* = 0} . \end{aligned} \quad (\text{II.7.68})$$

В частности,

$$G_0^{(r|)}(p, t) - \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{\Phi}_i^{(r)}(p, t) = 0 , \quad (\text{II.7.69})$$

$$G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) = \frac{1}{i\hbar} \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{\Phi}_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \hat{\Phi}_i^{(r_2)\dagger}(p_2, t_2) \right] . \quad (\text{II.7.70})$$

Разложим оператор $\hat{A}_i(t)$ в ряд по степеням $\hat{\Phi}_i^{(r)}(p, t)$ и $\hat{\Phi}_i^{(r)\dagger}(p, t)$ и воспользуемся формулой (II.7.68). В результате получим (II.7.66).

§ 7.5 Уравнение Швингера

В дальнейшем для сокращения записи будем пользоваться *универсальными* обозначениями [249], в которых, в частности, операторы $\check{\Phi}(p, t)$ и $\check{\Phi}^\dagger(p, t)$ считаются разными компонентами единого оператора

$$\check{\Phi}(p, t) = \begin{pmatrix} \check{\Phi}(p, t) \\ \check{\Phi}^\dagger(p, t) \end{pmatrix}.$$

Различающий эти компоненты индекс включим в аргумент p . Символ \sum_p означает суммирование по всем компонентам p , в том числе и по указанному индексу; символом $\delta_{p,p'}$ обозначим произведение символов Кронекера для всех компонентов p .

Перепишем некоторые из ранее приведенных формул в универсальных обозначениях. Гриновские функции (II.7.23) могут быть представлены выражениями ($N = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(r_1, \dots, r_N)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N) &= \frac{1}{(i\hbar)^{N-1}} \text{tr} \check{\rho} T_C \prod_{j=1}^N \otimes \check{\Phi}^{(r_j)}(p_j, t_j) \\ &= \frac{1}{(i\hbar)^{N-1}} \text{tr} \hat{\rho}_0 T_C \left[S_C \prod_{j=1}^N \otimes \hat{\Phi}_i^{(r_j)}(p_j, t_j) \right] = \frac{1}{(i\hbar)^{N-1}} \frac{\delta^N G(\mathbf{J})}{\prod_{j=1}^N \otimes \delta \tilde{\mathbf{J}}^{(r_j)}(p_j, t_j)}. \end{aligned} \quad (\text{II.7.71})$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) = \frac{1}{i\hbar} \mathbf{J}^{(r)}(p, t), \quad (\text{II.7.72})$$

$$G(\mathbf{J}) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{J}}} \right) \right] G_0(\mathbf{J}), \quad \mathcal{K}_{int}(\Phi) = - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}(t|\Phi), \quad (\text{II.7.73})$$

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{J}) &= \\ &= \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \tilde{\mathbf{J}}^{(r_1)}(p_1, t_1) \mathbf{G}_0^{(r_1, r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \tilde{\mathbf{J}}^{(r_2)}(p_2, t_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.7.74})$$

$$\mathbf{G}_0^{(r_1, r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = \frac{1}{i\hbar} \text{tr} \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{\Phi}_i^{(r_1)}(p_1, t_1) \otimes \hat{\Phi}_i^{(r_2)}(p_2, t_2) \right] \quad (\text{II.7.75})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) \\ G_0^{(r_2|r_1)}(p_2, t_2|p_1, t_1) & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_0^{(r_2;r_1)}(p_2, t_2; p_1, t_1).$$

Формула (II.7.64) в новых обозначениях принимает вид

$$G(\mathbf{J}) = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2 = \pm \infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1)} \mathbf{G}_0^{(r_1;r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r_2)}(p_2, t_2)} \right] \\ \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_{int}(\Phi) + \sum_{r=\pm \infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \Phi^{(r)}(p, t) \tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) \right] \Big|_{\Phi^{(\pm)}=0}. \quad (\text{II.7.76})$$

Из формул (II.7.37) и (II.7.5) нетрудно определить явный вид функционала $\mathcal{K}_{int}(\Phi)$:

$$\mathcal{K}_{int}(\Phi) = \\ = -\frac{1}{4!} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4 = \pm \infty}^{+\infty} \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} \Gamma_0^{(r_1, r_2, r_3, r_4)}(p_1, t_1; p_2, t_2; p_3, t_3; p_4, t_4) \quad (\text{II.7.77}) \\ \times \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1) \Phi^{(r_2)}(p_2, t_2) \Phi^{(r_3)}(p_3, t_3) \Phi^{(r_4)}(p_4, t_4).$$

Выполняя симметризацию, найдем

$$\Gamma_0^{(r_1, r_2, r_3, r_4)}(p_1, t_1; p_2, t_2; p_3, t_3; p_4, t_4) = \frac{1}{V} r_1 \delta_{r_1, r_2} \delta_{r_2, r_3} \delta_{r_3, r_4} \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \delta(t_3 - t_4) \\ \times \{ \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} [\nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3} (\mathbf{P}_{p_1 p_4} \mathbf{P}_{p_2 p_3} + \mathbf{P}_{p_4 p_1} \mathbf{P}_{p_3 p_2}) + \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} (\mathbf{P}_{p_1 p_3} \mathbf{P}_{p_2 p_4} + \mathbf{P}_{p_3 p_1} \mathbf{P}_{p_4 p_2})] \\ + \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4} [\nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} (\mathbf{P}_{p_1 p_4} \mathbf{P}_{p_3 p_2} + \mathbf{P}_{p_4 p_1} \mathbf{P}_{p_2 p_3}) + \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} (\mathbf{P}_{p_1 p_2} \mathbf{P}_{p_3 p_4} + \mathbf{P}_{p_2 p_1} \mathbf{P}_{p_4 p_3})] \\ + \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} [\nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} (\mathbf{P}_{p_1 p_3} \mathbf{P}_{p_4 p_2} + \mathbf{P}_{p_3 p_1} \mathbf{P}_{p_2 p_4}) + \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3} (\mathbf{P}_{p_1 p_2} \mathbf{P}_{p_4 p_3} + \mathbf{P}_{p_2 p_1} \mathbf{P}_{p_3 p_4})] \} \quad (\text{II.7.78})$$

$$\mathbf{P}_{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{P}_{p_1 p_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{p_1 p_2} \equiv (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2})_{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (\text{II.7.79})$$

Функция (II.7.78) симметрична относительно произвольной перестановки групп аргументов (r, p, t) .

Теорема Вика:

$$\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[S_C \prod_{j=1}^N \otimes \hat{\Phi}_i^{(r_j)}(p_j, t_j) \right]$$

$$= \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r,r'} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \sum_{p,p'} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r)}(p,t)} \mathbf{G}_0^{(r;r')} (p,t;p',t') \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r')}(p',t')} \right] \quad (\text{II.7.80})$$

$$\times \prod_{j=1}^N \otimes \Phi^{(r_j)}(p_j, t_j) \Big|_{\Phi^{(\pm)}=0},$$

или

$$\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{A}_i(t)$$

$$= \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r,r'} \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' \sum_{p,p'} \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r)}(p,t)} \mathbf{G}_0^{(r;r')} (p,t;p',t') \frac{\delta}{\delta \Phi^{(r')}(p',t')} \right] \quad (\text{II.7.81})$$

$$\times A(t) \Big|_{\Phi^{(\pm)}=0},$$

где

$$\hat{A}_i(t) \Big|_{\hat{\Phi}_i^{(\pm)}(p,t) \rightarrow \Phi^{(\pm)}(p,t)} \longrightarrow A(t).$$

Функция (II.7.75) подчиняется соотношению

$$\sum_{r,r'=\pm} r r' \mathbf{G}_0^{(r;r')} (p,t;p',t') \equiv 0, \quad (\text{II.7.82})$$

из которого следует (см.(II.7.74)), что

$$G(\mathbf{J}) = G_0(\mathbf{J}) = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{J}^{(\pm)} \equiv \mathbf{J}. \quad (\text{II.7.83})$$

Универсальные обозначения оказываются чрезвычайно удобными для представления производящего функционала гриновских функций в виде континуального интеграла. Игнорируя вопросы существования континуального интеграла общего вида как предела соответствующих интегральных сумм, заметим, что для нужд теории возмущений достаточно уметь работать лишь с интегралами от ограниченного класса функционалов, которые мы, следуя [256], будем называть квазигауссовыми. Можно показать, что такие объекты обладают свойствами обычного интеграла, а именно, позволяют выполнять интегрирование по частям, производить замену переменных интегрирования. Можно даже доказать существование кратных интегралов и возможность перемены порядка интегрирования, существование преобразования Фурье

и других свойств, во всяком случае достаточных для обоснования тех манипуляций, которые приходится проводить с континуальными интегралами в теории возмущений.

Используя данное в [256] определение квазигауссова интеграла, представим (II.7.75) в форме

$$G_0(\mathbf{J}) = \int D\Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_0(\Phi) + \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p \Phi^{(r)}(p, t) \tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) \right], \quad (\text{II.7.84})$$

где

$$\mathcal{K}_0(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1) \mathbf{G}_0^{-1(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \Phi^{(r_2)}(p_2, t_2), \quad (\text{II.7.85})$$

$$D\Phi = \prod_{r=\pm} \prod_{p, t} d\Phi^{(r)}(p, t) / \int \prod_{r=\pm} \prod_{p, t} d\Phi^{(r)}(p, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_0(\Phi) \right]. \quad (\text{II.7.86})$$

Матрица $\mathbf{G}_0^{-1(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2)$ определяется соотношениями типа (II.7.59) и имеет вид:

$$\mathbf{G}_0^{-1(r_1, r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = \begin{pmatrix} 0 & G_0^{-1(r_2|r_1)}(p_2, t_2|p_1, t_1) \\ G_0^{-1(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.7.87})$$

Подставляя (II.7.84) в (II.7.73), находим:

$$G(\mathbf{J}) = \int D\Phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}(\Phi) + \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p \Phi^{(r)}(p, t) \tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) \right], \quad (\text{II.7.88})$$

$$\mathcal{K}(\Phi) = \mathcal{K}_0(\Phi) + \mathcal{K}_{int}(\Phi). \quad (\text{II.7.89})$$

Формулу (II.7.88) следует понимать в смысле разложения в формальный ряд по константе экситон-экситонного взаимодействия.

Примечательно, что подынтегральный функционал в (II.7.84), (II.7.88), так же, как и в континуальных интегралах обычной теории поля [176, 253], содержит обрезающий фактор. Действительно, подставим (II.7.61) в (II.7.85) и выполним линейное преобразование переменных интегрирования $\Phi^{(r)}(p, t), \Phi^{(r)*}(p, t) \longrightarrow \tilde{\Phi}^{(r)}(p, t), \tilde{\Phi}^{(r)*}(p, t)$, приводящее матрицу $g^{(r_1|r_2)}(p)$ к диагональному виду. Получим:

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_0(\Phi) \right] \propto \exp \left[-\frac{\varepsilon}{\hbar} \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p \tilde{\lambda}^{(r)}(p) \left| \tilde{\Phi}^{(r)}(p, t) \right|^2 \right],$$

где $\tilde{\lambda}^{(r)}(p) = \left(\sqrt{1 + N(p)} + r\sqrt{N(p)} \right)^2 > 0$ — собственные значения матрицы $g^{(r_1|r_2)}(p)$. Отметим, что предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ следует выполнять лишь после вычисления континуального интеграла.

Из представления (II.7.88) непосредственно следует уравнение Швингера для производящего функционала функций Грина [249, 257]. Вследствие инвариантности меры $D\Phi$ относительно группы движений функционального пространства [249], имеем:

$$\int D\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi^{(r)}(p, t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}(\Phi) + \sum_{r_1=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \sum_{p_1} \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1) \tilde{\mathbf{J}}^{(r_1)}(p_1, t_1) \right] = 0.$$

Дифференцируя экспоненту, получаем:

$$\begin{aligned} & \int D\Phi \left[-\frac{1}{i\hbar} \frac{\delta \mathcal{K}(\Phi)}{\delta\Phi^{(r)}(p, t)} + \tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) \right] \\ & \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}(\Phi) + \sum_{r_1=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \sum_{p_1} \Phi^{(r_1)}(p_1, t_1) \tilde{\mathbf{J}}^{(r_1)}(p_1, t_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.7.90})$$

Умножение подынтегрального выражения на $\Phi^{(r)}(p, t)$ равносильно дифференцированию интеграла по $\tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t)$. Это позволяет вынести функционал $\delta \mathcal{K}(\Phi)/\delta\Phi^{(r)}(p, t)$ за знак интеграла в виде дифференциальной операции. В результате приходим к уравнению Швингера:

$$\left[\tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t) - \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta \mathcal{K}(\Phi)}{\delta\Phi^{(r)}(p, t)} \Big|_{\Phi^{(\pm)}(p, t) = \delta/\delta\tilde{\mathbf{J}}^{(\pm)}(p, t)} \right] G(\mathbf{J}) = 0. \quad (\text{II.7.91})$$

Подставляя сюда (II.7.89), (II.7.77) и (II.7.85), найдем:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\delta}{\delta\tilde{\mathbf{J}}^{(r)}(p, t)} - \psi^{(r)}(p, t) - \frac{1}{3!} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} \mathbf{G}_0^{(r, r_1)}(p, t; p_1, t_1) \right. \\ & \left. \Gamma^{(r_1, r_2, r_3, r_4)}(p_1, t_1; p_2, t_2; p_3, t_3; p_4, t_4) \frac{\delta^3}{\delta\tilde{\mathbf{J}}^{(r_2)}(p_2, t_2) \delta\tilde{\mathbf{J}}^{(r_3)}(p_3, t_3) \delta\tilde{\mathbf{J}}^{(r_4)}(p_4, t_4)} \right] G(\mathbf{J}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.7.92})$$

где

$$\psi^{(r)}(p, t) = i\hbar \sum_{r_1=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \sum_{p_1} \mathbf{G}_0^{(r, r_1)}(p, t; p_1, t_1) \tilde{\mathbf{J}}^{(r_1)}(p_1, t_1). \quad (\text{II.7.93})$$

Уравнение (II.7.92) порождает цепочку уравнений для гриновских функций (II.7.71). Каждое из них может быть получено и непосредственно с помощью теоремы Вика [176]. С другой стороны, эти уравнения являются прямым следствием гайзенберговских уравнений движения (II.7.22) для операторов поляритонного поля $\check{\Phi}(p, t)$ $\check{\Phi}^\dagger(p, t)$.

§ 7.6 Преобразование Лежандра

В разложении гриновских функций (II.7.71) в ряд теории возмущений присутствуют несвязные вклады [176], которые можно разделить на два класса. Первый класс объединяет диаграммы Келдыша, несвязность которых обусловлена наличием внешних классических источников $\mathbf{J}^{(r)}(p, t)$. Второй класс связан с присутствием в разложении диаграмм, содержащих вакуумные поддиаграммы [176]. Вследствие условия (II.7.83), вклад всех вакуумных диаграмм, равный $G(\mathbf{J})$, в физическом пределе обращается в единицу. Удобно с самого начала отделить все несвязные вклады, перейдя от функций Грина (II.7.71) к связным гриновским функциям [249, 176]

$$\mathbf{Z}(x_1, \dots, x_2) = \frac{1}{(i\hbar)^N} \frac{\delta^N Z(\mathbf{J})}{\prod_{j=1}^N \otimes \delta \tilde{\mathbf{J}}(x_j)}, \quad (\text{II.7.94})$$

определенным с помощью производящего функционала

$$Z(\mathbf{J}) = i\hbar \ln G(\mathbf{J}). \quad (\text{II.7.95})$$

Здесь и далее используется аргумент x , включающий в себя аргументы p, t и индекс Келдыша $r = \pm$: $x = (\mathbf{k}, \alpha, \sigma, r, t)$,

$$\int dx \dots = \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\sigma=1,2} \dots, \quad \delta(x - x') = \delta_{r,r'} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(t - t').$$

Индекс $\sigma = 1, 2$ связан с использованием универсальных обозначений: $\check{\Phi}_1(p, t) = \check{\Phi}(p, t)$, $\check{\Phi}_2(p, t) = \check{\Phi}^\dagger(p, t)$.

Связь между функциями (II.7.71) и (II.7.94) легко установить с помощью соотно-

шения

$$\frac{\delta^N G(\mathbf{J})}{\prod_{j=1}^N \otimes \delta \tilde{\mathbf{J}}(x_j)} = G(\mathbf{J}) \prod_{j=1}^N \otimes \left[\frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_j)} + \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta Z(\mathbf{J})}{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_j)} \right] \cdot 1. \quad (\text{II.7.96})$$

В частности, имеем (символ \otimes в дальнейшем опускаем):

$$\mathbf{G}(x) = G(\mathbf{J}) \mathbf{Z}(x), \quad (\text{II.7.97})$$

$$\mathbf{G}(x_1, x_2) = G(\mathbf{J}) \left[\mathbf{Z}(x_1, x_2) - \frac{1}{i\hbar} \mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2) \right], \quad (\text{II.7.98})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = G(\mathbf{J}) \left\{ \mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2, x_3) + \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_1, x_3) \right. \\ \left. + \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_2)] + \mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_3) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.7.99})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(\mathbf{J}) \left\{ \mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_3) \right. \\ \left. + \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_4) + \mathbf{Z}(x_1, x_2) \mathbf{Z}(x_3, x_4)] \right. \\ \left. + \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2, x_3, x_4) + \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_1, x_3, x_4) + \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_2, x_4) + \mathbf{Z}(x_4) \mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3)] \right. \\ \left. + \frac{1}{(i\hbar)^2} [\mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_3, x_4) + \mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_4) + \mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_3) \right. \\ \left. + \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_4) \mathbf{Z}(x_1, x_2) + \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_4) \mathbf{Z}(x_1, x_3) + \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4)] \right. \\ \left. + \frac{1}{(i\hbar)^3} \mathbf{Z}(x_1) \mathbf{Z}(x_2) \mathbf{Z}(x_3) \mathbf{Z}(x_4) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.7.100})$$

Физический смысл подобного представления частичных функций распределения подробно комментируется в [258]. Из (II.7.97)–(II.7.100) легко найти:

$$\mathbf{Z}(x) \equiv \Psi(x) = \frac{\mathbf{G}(x)}{G(\mathbf{J})}, \quad (\text{II.7.101})$$

$$\mathbf{Z}(x_1, x_2) = \frac{\mathbf{G}(x_1, x_2)}{G(\mathbf{J})} - \frac{1}{i\hbar} \frac{\mathbf{G}(x_1)}{G(\mathbf{J})} \frac{\mathbf{G}(x_2)}{G(\mathbf{J})} \quad \text{и т.д.} \quad (\text{II.7.102})$$

Заметим, что для чисто когерентного состояния [259] поляритонного поля все связанные функции Грина $\mathbf{Z}(x_1, \dots, x_N)$, за исключением $\Psi(x)$, тождественно равны

нулю. Поэтому в дальнейшем функцию $\Psi(x)$ мы будем называть когерентной частью поляритонного поля.

Полезно ввести также понятие ампутированных функций Грина [249], определенных при $N = 3, 4, \dots$ равенством:

$$\mathbf{Z}_{am}(x_1, \dots, x_N) = \int \left[\prod_{j=1}^N dx'_j \mathbf{Z}^{-1}(x_j, x'_j) \right] \mathbf{Z}(x'_1, \dots, x'_N). \quad (\text{II.7.103})$$

Обратное соотношение имеет вид:

$$\mathbf{Z}(x_1, \dots, x_N) = \int \left[\prod_{j=1}^N dx'_j \mathbf{Z}(x_j, x'_j) \right] \mathbf{Z}_{am}(x'_1, \dots, x'_N). \quad (\text{II.7.104})$$

Согласно (II.7.71), (II.7.92), функции (II.7.101) и (II.7.102) подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & \psi(x) + \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x, x_1) \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ & \times \left[\frac{1}{3!} \Psi(x_2) \Psi(x_3) \Psi(x_4) + \frac{i\hbar}{2} \mathbf{Z}(x_2, x_3) \Psi(x_4) + \frac{(i\hbar)^2}{3!} \mathbf{Z}(x_2, x_3, x_4) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.7.105})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(x, x') = & \mathbf{G}_0(x, x') + \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x, x_1) \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ & \times \left[\frac{1}{2} \Psi(x_2) \Psi(x_3) \mathbf{Z}(x_4, x') + \frac{i\hbar}{2} \mathbf{Z}(x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_4, x') \right. \\ & \left. + \frac{i\hbar}{2} \Psi(x_2) \mathbf{Z}(x_3, x_4, x') + \frac{(i\hbar)^2}{3!} \mathbf{Z}(x_2, x_3, x_4, x') \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.7.106})$$

Содержащиеся в этих уравнениях высшие функции Грина ($N = 3, 4$) включают в себя все слабосвязные (т.е. одночастично-приводимые) вклады [249, 176]. Для того, чтобы выделить величины, отвечающие сильносвязным диаграммам, выполним функциональное преобразование Лежандра

$$Z(\mathbf{J}) \longrightarrow \Gamma(\Psi) = Z(\mathbf{J}) - i\hbar \int dx \Psi(x) \tilde{\mathbf{J}}(x), \quad (\text{II.7.107})$$

в котором, согласно определениям (II.7.94) и (II.7.101),

$$\Psi(x) = \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta Z(\mathbf{J})}{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x)}. \quad (\text{II.7.108})$$

Преобразование (II.7.107),(II.7.108) осуществляет переход от функционального аргумента $\tilde{\mathbf{J}}(x)$ к новому независимому функциональному аргументу $\Psi(x)$, т.е. обращает функциональную связь $\Psi = \Psi(\mathbf{J})$. Функционал Γ является производящим для связных (одночастично-неприводимых) функций Грина, называемых вершинными функциями.

Дифференцируя (II.7.108) по $\Psi(x_1)$, получаем:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_1) &= \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta^2 Z(\mathbf{J})}{\delta \Psi(x_1) \delta \tilde{\mathbf{J}}(x)} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int dx_2 \frac{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_2)}{\delta \Psi(x_1)} \frac{\delta^2 Z(\mathbf{J})}{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_2) \delta \tilde{\mathbf{J}}(x)} = \int dx_2 \left[i\hbar \frac{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_2)}{\delta \Psi(x_1)} \right] \mathbf{Z}(x_2, x). \end{aligned} \quad (\text{II.7.109})$$

Отсюда следует полезное соотношение:

$$\mathbf{Z}^{-1}(x_1, x_2) = i\hbar \frac{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_2)}{\delta \Psi(x_1)}. \quad (\text{II.7.110})$$

Вычислим теперь вариационные производные функционала Γ по $\Psi(x)$. Учитывая (II.7.108), находим:

$$\frac{\delta \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi(x)} = \frac{\delta Z(\mathbf{J})}{\delta \Psi(x)} - i\hbar \tilde{\mathbf{J}}(x) - i\hbar \int dx_1 \Psi(x_1) \frac{\delta \tilde{\mathbf{J}}(x_1)}{\delta \Psi(x)} = -i\hbar \tilde{\mathbf{J}}(x). \quad (\text{II.7.111})$$

Дифференцируя повторно по $\Psi(x_1)$ и пользуясь (II.7.108), имеем:

$$\frac{\delta^2 \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi(x) \delta \Psi(x_1)} = -\mathbf{Z}^{-1}(x, x_1). \quad (\text{II.7.112})$$

Последующие дифференцирования после несложных преобразований приводят к следующим выражениям для трех- и четырехконцевой вершинных функций:

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta^3 \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi(x_1) \delta \Psi(x_2) \delta \Psi(x_3)} = \mathbf{Z}_{am}(x_1, x_2, x_3), \quad (\text{II.7.113})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{\delta^4 \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi(x_1) \delta \Psi(x_2) \delta \Psi(x_3) \delta \Psi(x_4)} \\ &= \mathbf{Z}_{am}(x_1, x_2, x_3, x_4) - \int dx_5 dx_6 [\mathbf{Z}_{am}(x_1, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \mathbf{Z}_{am}(x_6, x_2, x_3) \\ &\quad + \mathbf{Z}_{am}(x_2, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \mathbf{Z}_{am}(x_6, x_1, x_3) + \mathbf{Z}_{am}(x_3, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \mathbf{Z}_{am}(x_6, x_1, x_2)] . \end{aligned} \quad (\text{II.7.114})$$

Имеют место, также, очевидные соотношения:

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\delta \mathbf{Z}(x_1, x_2)}{\delta \Psi(x_3)}, \quad \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta \Gamma(x_1, x_2, x_3)}{\delta \Psi(x_4)}. \quad (\text{II.7.115})$$

Из (II.7.113) и (II.7.114) находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{am}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &+ \int dx_5 dx_6 [\Gamma(x_1, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \Gamma(x_6, x_2, x_3) + \Gamma(x_2, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \Gamma(x_6, x_1, x_3) \\ &+ \Gamma(x_3, x_4, x_5) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \Gamma(x_6, x_1, x_2)] . \end{aligned} \quad (\text{II.7.116})$$

Формулы (II.7.104), (II.7.113) и (II.7.116) позволяют выделить из функций $\mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ сильносвязные вклады. В результате точные уравнения (II.7.105) и (II.7.106) приводятся к форме:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \psi(x) \quad (\text{II.7.117}) \\ &+ \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x, x_1) \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \left[\frac{1}{3!} \Psi(x_2) \Psi(x_3) + \frac{i\hbar}{2} \mathbf{Z}(x_2, x_3) \right] \Psi(x_4) \\ &+ \frac{(i\hbar)^2}{3!} \int dx_1 \dots dx_7 \mathbf{G}_0(x, x_1) \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \Gamma(x_5, x_6, x_7) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \\ \\ \mathbf{Z}(x, y) &= \mathbf{G}_0(x, y) + \frac{1}{2} \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x, x_1) \\ &\times \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) [\Psi(x_2) \Psi(x_3) + i\hbar \mathbf{Z}(x_2, x_3)] \mathbf{Z}(x_4, y) \\ &+ \frac{i\hbar}{2} \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x, x_1) \\ &\times \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \Psi(x_2) \mathbf{Z}(x_3, x_5) \mathbf{Z}(x_4, x_6) \Gamma(x_5, x_6, x_7) \mathbf{Z}(x_7, y) \\ &+ \frac{(i\hbar)^2}{3!} \int dx_1 \dots dx_{10} \mathbf{G}_0(x, x_1) \quad (\text{II.7.118}) \\ &\times \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \Gamma(x_5, x_6, x_7, x_8) \mathbf{Z}(x_8, y) \\ &+ \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_{10} \mathbf{G}_0(x, x_1) \\ &\times \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \Gamma(x_5, x_6, x_8) \mathbf{Z}(x_8, x_9) \\ &\times \Gamma(x_5, x_6, x_8) \mathbf{Z}(x_8, x_9) \Gamma(x_9, x_7, x_{10}) \mathbf{Z}(x_{10}, y) . \end{aligned}$$

Все содержащиеся в этих уравнениях функции симметричны относительно произвольной перестановки своих аргументов.

С помощью (II.7.104), (II.7.113) и (II.7.116) нетрудно получить выражения для высших функций Грина (II.7.99), (II.7.100).

Приведем явный вид функций $\Psi(x)$ и $\mathbf{Z}(x)$ в обычных обозначениях:

$$\Psi^{(r)}(p, t) = \frac{1}{G(J^*, J)} \text{tr} \check{\rho} \check{\Phi}^{(r)}(p, t), \quad \Psi^{(r)*}(p, t) = \frac{1}{G(J^*, J)} \text{tr} \check{\rho} \check{\Phi}^{(r)\dagger}(p, t); \quad (\text{II.7.119})$$

$$\mathbf{Z}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} Z^{(r_1, r_2|)}(p_1, t_1; p_2, t_2|) & Z^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) \\ Z^{(r_2|r_1)}(p_2, t_2|p_1, t_1) & Z^{(|r_1, r_2)}(|p_1, t_1; p_2, t_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.7.120})$$

Здесь

$$\begin{aligned} & Z^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2) \\ &= \frac{1}{i\hbar G(J^*, J)} \text{tr} \check{\rho} T_C [\check{\Phi}^{(r_1)}(p_1, t_1) \check{\Phi}^{(r_2)\dagger}(p_2, t_2)] - \frac{1}{i\hbar} \Psi^{(r_1)}(p_1, t_1) \Psi^{(r_2)*}(p_2, t_2), \end{aligned} \quad (\text{II.7.121})$$

$$\begin{aligned} & Z^{(r_1, r_2|)}(p_1, t_1; p_2, t_2|) = -Z^{(|r_1, r_2)*}(|p_1, t_1; p_2, t_2) \\ &= \frac{1}{i\hbar G(J^*, J)} \text{tr} \check{\rho} T_C [\check{\Phi}^{(r_1)}(p_1, t_1) \check{\Phi}^{(r_2)}(p_2, t_2)] - \frac{1}{i\hbar} \Psi^{(r_1)}(p_1, t_1) \Psi^{(r_2)}(p_2, t_2) \end{aligned} \quad (\text{II.7.122})$$

— соответственно нормальная и аномальная связанные функции Грина.

Из выражений (II.7.119) и (II.7.120) видно, что (II.7.117), (II.7.118) представляют собой систему точных интегральных уравнений для когерентной части поляритонного поля, а также нормальной и аномальной связанных гриновских функций.

В физическом пределе

$$\Psi^{(+)}(p, t) = \Psi^{(-)}(p, t) = \text{tr} \check{\rho} \check{\Phi}(p, t) \equiv \Psi(p, t),$$

а функции (II.7.121) и (II.7.122) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{r_1, r_2 = \pm} r_1 r_2 Z^{(r_1, r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = 0.$$

Можно показать, что в физическом пределе решение уравнений (II.7.117), (II.7.118) определяется однозначно и не зависит от начального распределения (II.7.12). В частности, используя линейное соотношение (II.7.82) и формулу (II.7.78), легко убедиться,

что в уравнении (II.7.117) для когерентной части поляритонного поля $\Psi(p, t)$ компоненты гриновской функции свободной теории $G_0^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1|p_2, t_2)$ содержатся в виде комбинации

$$G_0^{(++)}(p_1, t_1|p_2, t_2) - G_0^{(+-)}(p_1, t_1|p_2, t_2).$$

Последняя представляет собой запаздывающую функцию Грина [20]

$$G_0^{ret}(p_1, t_1|p_2, t_2) = \frac{1}{i\hbar} \Theta(t_1 - t_2) \text{tr } \hat{\rho}_0 \left[\hat{\Phi}_i(p_1, t_1), \hat{\Phi}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] = \frac{1}{i\hbar} \Delta(p_1, t_1|p_2, t_2),$$

не зависящую от распределения $N(p)$ (см. (II.7.43)).

§ 7.7 Вершинные функции

Система уравнений Дайсона (II.7.117), (II.7.118) становится замкнутой, если известны вершинные функции (II.7.113), (II.7.114). Их вычисление можно, в частности, произвести по теории возмущений.

Умножим обе части уравнения (II.7.118) слева на $\mathbf{G}_0^{-1}(x', x)$ и справа на $\mathbf{Z}^{-1}(y, y')$.

Интегрируя по переменным x и y , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{-1}(x_1, y_1) &= \mathbf{G}_0^{-1}(x_1, y_1) - \frac{1}{2} \int dx_2 dx_3 \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, y_1) \\ &\times [\Psi(x_2) \Psi(x_3) + i\hbar \mathbf{Z}(x_2, x_3)] - \frac{i\hbar}{2} \int dx_2 \dots dx_6 \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\times \Psi(x_2) \mathbf{Z}(x_3, x_5) \mathbf{Z}(x_4, x_6) \Gamma(x_5, x_6, y_1) - \frac{(i\hbar)^2}{3!} \int dx_2 \dots dx_7 \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\times \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \Gamma(x_5, x_6, x_7, y_1) - \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_2 \dots dx_9 \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\times \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \Gamma(x_5, x_6, x_8) \mathbf{Z}(x_8, x_9) \Gamma(x_9, x_7, y_1). \end{aligned} \quad (\text{II.7.123})$$

Используя (II.7.123), формулы (II.7.115) и очевидное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{Z}(x, y)}{\delta \Psi(z)} &= - \int dx_1 dy_1 \mathbf{Z}(x, x_1) \frac{\delta \mathbf{Z}^{-1}(x_1, y_1)}{\delta \Psi(z)} \mathbf{Z}(y_1, y) \\ &= \int dx_1 dy_1 \mathbf{Z}(x, x_1) \Gamma(x_1, y_1, z) \mathbf{Z}(y_1, y), \end{aligned} \quad (\text{II.7.124})$$

найдем:

$$\Gamma(x, y, z) = \int dx_1 \Gamma_0(x, y, z, x_1) \Psi(x_1) + \frac{i\hbar}{2} \int dx_2 \dots dx_4 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_4)$$

$$\begin{aligned}
& \times [\Gamma_0(x, y, x_1, x_2)\Gamma(x_3, x_4, z) + \Gamma_0(x, z, x_1, x_2)\Gamma(x_3, x_4, y)] \\
& + i\hbar \int dx_1 \dots dx_7 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Psi(x_1) \mathbf{Z}(x_2, x_4) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \Gamma(x_4, y, x_5) \\
& \times \mathbf{Z}(x_5, x_7) \Gamma(x_7, z, x_6) + \frac{i\hbar}{2} \int dx_1 \dots dx_5 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Psi(x_1) \\
& \times \mathbf{Z}(x_2, x_4) \mathbf{Z}(x_3, x_5) \Gamma(x_4, x_5, y, z) + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_8 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \\
& \times \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_7) \Gamma(x_7, z, x_8) \mathbf{Z}(x_8, x_6) \Gamma(x_4, x_5, x_6, y) \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{3!} \int dx_1 \dots dx_6 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \frac{\delta \Gamma(x_4, x_5, x_6, y)}{\delta \Psi(z)} \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_8 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_7) \Gamma(x_7, y, x_8) \quad (\text{II.7.125}) \\
& \times \mathbf{Z}(x_8, x_6) \Gamma(x_4, x_5, x_6, z) + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_8 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \\
& \times \Gamma(x_4, x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_3, x_8) \mathbf{Z}(x_6, x_7) \Gamma(x_7, x_8, y, z) \\
& + (i\hbar)^2 \int dx_1 \dots dx_{10} \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \Gamma(x_4, x_5, z) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_2, x_8) \\
& \times \Gamma(x_6, x_7, x_8) \mathbf{Z}(x_7, x_9) \mathbf{Z}(x_3, x_{10}) \Gamma(x_9, x_{10}, y) \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_{10} \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_6) \Gamma(x_4, x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_5, x_9) \\
& \times \mathbf{Z}(x_3, x_7) \Gamma(x_7, x_8, z) \mathbf{Z}(x_8, x_{10}) \Gamma(x_9, x_{10}, y) \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_{10} \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_6) \Gamma(x_4, x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_5, x_7) \\
& \times \Gamma(x_7, x_8, z) \mathbf{Z}(x_8, x_9) \mathbf{Z}(x_3, x_{10}) \Gamma(x_9, x_{10}, y).
\end{aligned}$$

Итерируя это уравнение с учетом (II.7.124) и второй формулы из (II.7.115), можно вычислить вершинные функции (II.7.113), (II.7.114) в любом порядке по степеням константы экситон-экситонной связи ν ($\Gamma_0 \sim \nu$). С точностью до членов третьего порядка по ν включительно, имеем:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x, y, z) &= \int dx_1 \Gamma_0(x, y, z, x_1) \Psi(x_1) \\
&+ \frac{i\hbar}{2} \int dx_2 \dots dx_5 \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \Psi(x_3) \\
&\times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, y, z, x_5) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, z, x, x_5)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \Gamma_0(z, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, x, y, x_5)] \\
& + i\hbar \int dx_1 \dots dx_9 \Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Psi(x_3) \mathbf{Z}(x_1, x_4) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, y) \Psi(x_6) \\
& \quad \times \mathbf{Z}(x_5, x_7) \Gamma_0(x_7, z, x_8, x_9) \Psi(x_8) \mathbf{Z}(x_2, x_9) \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{4} \int dx_1 \dots dx_9 \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \mathbf{Z}(x_6, x_9) \Psi(x_3) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, x_7) \\
& \quad \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, y, z, x_9) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, z, x, x_9) \\
& \quad + \Gamma_0(z, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, x, y, x_9)] \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_9 \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_5, x_7) \mathbf{Z}(x_2, x_8) \mathbf{Z}(x_6, x_9) \Psi(x_3) \quad (\text{II.7.126}) \\
& \quad \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, y) \Gamma_0(x_7, z, x_8, x_9) \\
& \quad + \Gamma_0(y, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, z) \Gamma_0(x_7, x, x_8, x_9) \\
& \quad + \Gamma_0(z, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, x) \Gamma_0(x_7, y, x_8, x_9)] \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_9 \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \mathbf{Z}(x_3, x_9) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, x_7) \Psi(x_6) \\
& \quad \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, y, z, x_9) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, z, x, x_9) \\
& \quad + \Gamma_0(z, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_8, x_2, y, x_9)] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma(x, y, z, \xi) = \Gamma_0(x, y, z, \xi) \\
& + \frac{i\hbar}{2} \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_4) \\
& \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, y, z, x_4) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, z, x, x_4) \\
& \quad + \Gamma_0(z, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, x, y, x_4)] \\
& + i\hbar \int dx_1 \dots dx_8 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_8) \mathbf{Z}(x_5, x_6) \Psi(x_4) \Psi(x_7) \\
& \quad \times [\Gamma_0(x, y, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, z, x_5) \Gamma_0(x_6, \xi, x_7, x_8) \\
& \quad + \Gamma_0(x, z, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, \xi, x_5) \Gamma_0(x_6, y, x_7, x_8) \\
& \quad + \Gamma_0(x, \xi, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, y, x_5) \Gamma_0(x_6, z, x_7, x_8) \\
& \quad + \Gamma_0(y, z, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, x, x_5) \Gamma_0(x_6, \xi, x_7, x_8)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_0(y, \xi, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, x, x_5) \Gamma_0(x_6, z, x_7, x_8) \\
& + \Gamma_0(z, \xi, x_1, x_2) \Gamma_0(x_3, x_4, x, x_5) \Gamma_0(x_6, y, x_7, x_8)] \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{4} \int dx_1 \dots dx_8 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_2, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \Gamma_0(x_3, x_4, x_5, x_6) \quad (\text{II.7.127}) \\
& \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_7, y, z, x_8) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_7, z, x, x_8) \\
& + \Gamma_0(z, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_7, x, y, x_8)] \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_8 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \mathbf{Z}(x_4, x_6) \mathbf{Z}(x_2, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \\
& \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, x_4, x_5, y) \Gamma_0(x_6, z, x_7, x_8) \\
& + \Gamma_0(y, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, x_4, x_5, z) \Gamma_0(x_6, x, x_7, x_8) \\
& + \Gamma_0(z, x_1, x_2, \xi) \Gamma_0(x_3, x_4, x_5, x) \Gamma_0(x_6, y, x_7, x_8)] \\
& + \frac{(i\hbar)^2}{2} \int dx_1 \dots dx_8 \mathbf{Z}(x_1, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_6) \mathbf{Z}(x_5, x_7) \mathbf{Z}(x_3, x_8) \Gamma_0(x_4, x_5, x_6, \xi) \\
& \times [\Gamma_0(x, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_7, y, z, x_8) + \Gamma_0(y, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_7, z, x, x_8) \\
& + \Gamma_0(z, x_1, x_2, x_3) \Gamma_0(x_7, x, y, x_8)] .
\end{aligned}$$

§ 7.8 Скелетные диаграммы

Уравнения Дайсона (II.7.117), (II.7.118) могут быть представлены в графической форме с помощью скелетных диаграмм Келдыша, изображенных на рисунке II.7.2. Для расшифровки той или иной диаграммы следует воспользоваться правилами соответствия, приведенными в таблице II.7.1, выполнить интегрирование по всем внутренним аргументам и умножить полученный результат на $(i\hbar)^l$, где l — число независимых замкнутых контуров в диаграмме, а также на симметричный коэффициент C . Универсальная формула для определения симметричных коэффициентов, а также некоторые понятия теории графов приведены в [249]. Симметричный коэффициент произвольной диаграммы D дается выражением

$$C(D) = \left(s \cdot 2^r \prod_i \pi_{ii}! \prod_{i < k} \pi_{ik}! \right)^{-1}, \quad (\text{II.7.128})$$

в котором π_{ik} — матрица смежности нумерованной диаграммы, отвечающей данной свободной, s — симметричное число диаграммы, равное порядку ее группы симметрии, $r = \sum_i \pi_{ii}$ — полное число закороченных линий в диаграмме.

На рисунках II.7.3 и II.7.4 приведены диаграммы, отвечающие разложениям (II.7.126) и (II.7.127) вершинных функций (II.7.113), (II.7.114).

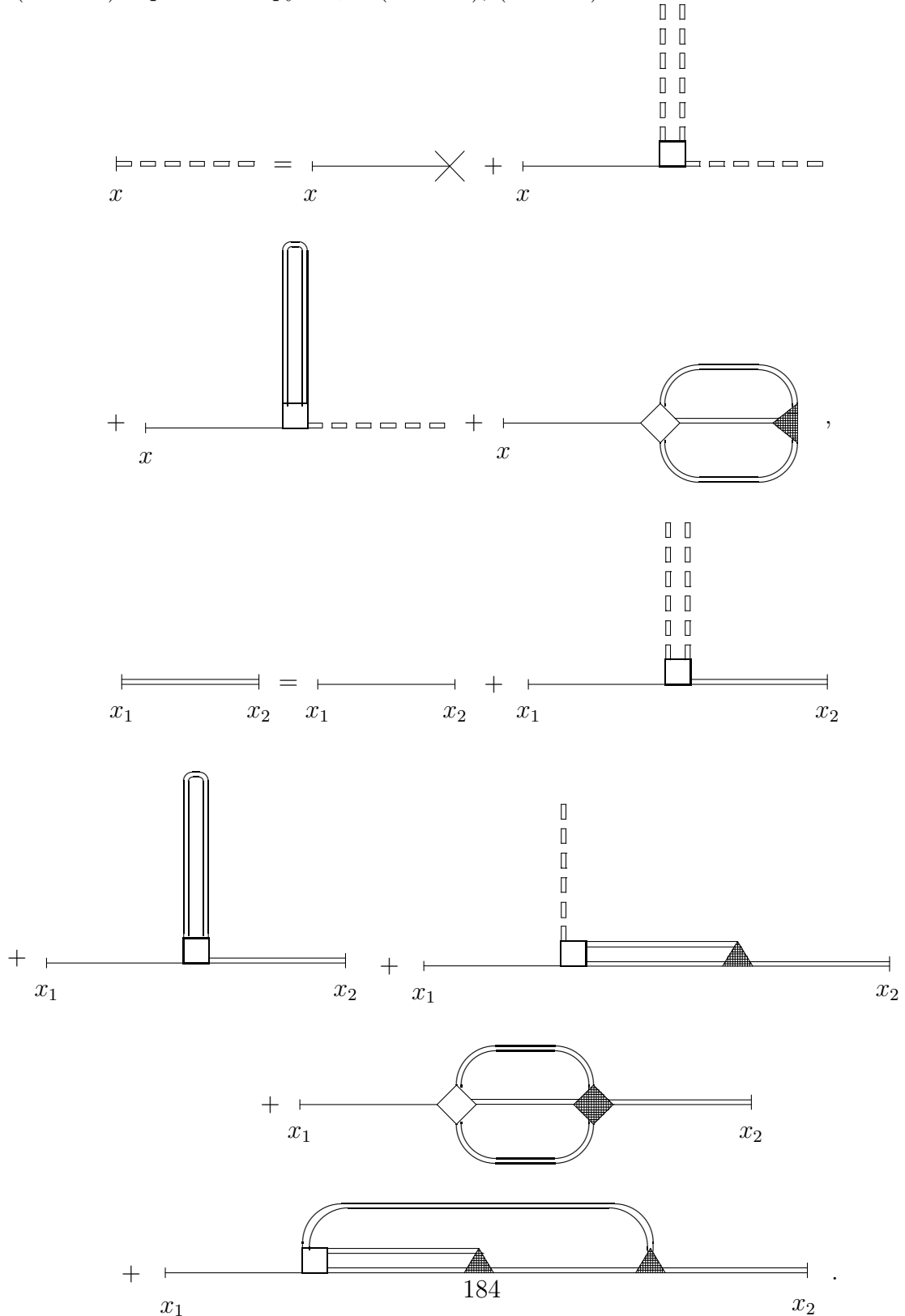


Рис. II.7.2. Диаграммы Келдыша, изображающие систему уравнений Дайсона (II.7.117), (II.7.118).

ТАБЛИЦА I.7.1





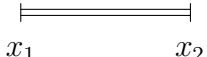


№	Изображаемая функция	Элемент диаграммы
1	$i\hbar\tilde{\mathbf{J}}(x)$	 x
2	$\mathbf{G}_0(x_1, x_2)$	
3	$\mathbf{\Gamma}_0(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
4	$\mathbf{\Psi}(x)$	
5	$\mathbf{Z}(x_1, x_2)$	
6	$\mathbf{\Gamma}(x_1, x_2, x_3)$	
7	$\mathbf{\Gamma}(x_1, x_2, x_3, x_4)$	

Рис. П.7.3. Разложение трехконцевой вершинной функции $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ в ряд по степеням константы экситон-экситонной связи ν с точностью до членов третьего порядка включительно.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} x_4 x_3 \\ \blacksquare \\ x_1 x_2 \end{array} = \begin{array}{c} x_4 x_3 \\ \square \\ x_1 x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_3 x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_2 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_3 \quad x_3 \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \\ \square \text{---} \square \\ x_1 \end{array} \\
& + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} \\
& + \begin{array}{c} x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} \\
& + \begin{array}{c} x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_1 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_1 x_4 \\ \square \text{---} \square \\ x_3 \quad x_3 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} \\
& + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ \square \text{---} \square \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_4 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} \\
& + \begin{array}{c} x_1 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_2 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_3 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} x_3 \\ \square \text{---} \square \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_2 \\ \square \end{array} \begin{array}{c} \square \\ x_1 \\ \square \end{array} .
\end{aligned}$$

Рис. II.7.4. Разложение четырехконцевой вершинной функции $\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ в ряд по степеням константы экситон-экситонной связи ν с точностью до членов третьего порядка включительно.

§ 7.9 Использование вариационного метода для описания квантовых систем с нарушенной калибровочной симметрией

Как известно [20, 251], в отсутствие реальных внешних источников метод Келдыша порождает теорию поля при конечной температуре, удобную для исследования статистически равновесных систем. Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом $\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t)$. Его калибровочная инвариантность приводит к определенным правилам отбора для гриновских функций (II.7.23) [154, 155, 156]. В самом деле, используя определение матрицы плотности $\check{\rho}$, формулы преобразования (II.7.13), (II.7.20), (II.7.21) и уравнение Лиувилля–фон-Неймана (II.7.11) с начальным условием (II.7.12), убеждаемся, что

$$\check{R}^\dagger(t) \check{\rho} \check{R}(t) = \check{\rho}, \quad (\text{II.7.129})$$

где

$$\check{R}(t) = \exp[i\alpha \check{N}(t)], \quad \check{N}(t) = \sum_p \check{\Phi}^\dagger(p, t) \check{\Phi}(p, t). \quad (\text{II.7.130})$$

С помощью (II.7.129) и равенств

$$\check{R}^\dagger(t) \check{\Phi}(p, t) \check{R}(t) = e^{i\alpha} \check{\Phi}(p, t), \quad \check{R}^\dagger(t) \check{\Phi}^\dagger(p, t) \check{R}(t) = e^{-i\alpha} \check{\Phi}^\dagger(p, t), \quad (\text{II.7.131})$$

вытекающих из (II.7.7), (II.7.13) и (II.7.21), получаем

$$[1 - e^{i\alpha(N-M)}] G^{(r_1, \dots, r_N | r'_1, \dots, r'_M)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N | p'_1, t'_1; \dots; p'_M, t'_M) = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности α , находим:

$$G^{(r_1, \dots, r_N | r'_1, \dots, r'_M)}(p_1, t_1; \dots; p_N, t_N | p'_1, t'_1; \dots; p'_M, t'_M) = 0 \quad \text{при} \quad N \neq M. \quad (\text{II.7.132})$$

В частности, $G^{(r_1 |)}(p_1, t_1 |) = G^{(|r'_1)}(|p'_1, t'_1) = 0$, т.е. $\Psi(x) = 0$.

Гриновские функции (II.7.23) с $N \neq M$ ($N=M$) принято называть аномальными (нормальными). Введение в гамильтониан взаимодействия калибровочно неинвариантного слагаемого (II.7.9) автоматически приводит к появлению аномальных функций. Если в результате последовательного предельного перехода $V \rightarrow \infty$, $J_k(t) \rightarrow 0$

аномальные функции остаются отличными от нуля, то это означает, что состояние статистического равновесия системы вырождено [154, 155, 156]. В случае, когда при инвариантном относительно некоторого преобразования симметрии гамильтониане система описывается неинвариантными (аномальными) гриновскими функциями, принято говорить о спонтанном нарушении симметрии [249]. Таким образом, нарушение симметрии, приводящее к появлению аномальных средних, может возникнуть в результате воздействия внешнего классического источника, спонтанно или вследствие неинвариантных начальных условий, налагаемых на решения уравнений Швингера–Дайсона в какой-либо момент времени.

Существенно, что аномальные решения уравнений движения для гриновских функций (II.7.23) не могут быть представлены в виде разложения по степеням Γ_0 . Действительно, разложим (II.7.28) в ряд теории возмущений и вычислим каждый член этого ряда с помощью теоремы Вика (II.7.68). Ввиду того, что для свободной теории аномальные функции равны нулю, мы придем к результату, удовлетворяющему правилам отбора (II.7.132). Поэтому всякое аномальное решение должно содержать “неаналитичность” по вершине Γ_0 [249].

Наиболее эффективный метод нахождения аномальных решений — вариационный [250]. Его суть заключается в построении такого функционала, для которого уравнения движения играют роль уравнений Эйлера, определяющих точку стационарности. Конструирование искомого функционала осуществляется с помощью преобразования Лежандра (II.7.107), (II.7.108). Действительно, согласно (II.7.111), производящий функционал неприводимых вершин $\Gamma(\Psi)$ обладает необходимым свойством: в пределе выключенных внешних источников ($\mathbf{J} \rightarrow 0$) его первая производная обращается в нуль. Задача определения аномальных решений сводится к нахождению точек стационарности $\Gamma(\Psi)$.

Докажем калибровочную инвариантность $\Gamma(\Psi)$. Используя определение (II.7.95) и представление (II.7.26), нетрудно убедиться в инвариантности функционала $Z(\Psi)$

относительно преобразования подобия внешних источников

$$J_{\mathbf{k}}(t) \longrightarrow e^{-i\alpha} J_{\mathbf{k}}(t), \quad J_{\mathbf{k}}^*(t) \longrightarrow e^{i\alpha} J_{\mathbf{k}}^*(t). \quad (\text{II.7.133})$$

С другой стороны, уравнение (II.7.108), определяющее неявную зависимость \mathbf{J} от Ψ , показывает, что при инвариантном $Z(\mathbf{J})$ преобразование (II.7.133) отвечает преобразованию подобия

$$G^{(r_1|)}(p_1, t_1|) \longrightarrow e^{i\alpha} G^{(r_1|)}(p_1, t_1|), \quad G^{(|r_1')}\left(|p_1', t_1'\right) \longrightarrow e^{-i\alpha} G^{(|r_1')}\left(|p_1', t_1'\right), \quad (\text{II.7.134})$$

т.е. калибровочному преобразованию (II.7.131) операторов поляритонного поля. Поскольку каждое из двух слагаемых в (II.7.107) является инвариантом относительно преобразований (II.7.133), (II.7.134), таковым является и сам функционал $\Gamma(\Psi)$.

На языке сформулированной вариационной задачи наличие в системе статистического вырождения означает неединственность точки стационарности, а спонтанному нарушению симметрии отвечает такая ситуация, когда варьируемый функционал $\Gamma(\Psi)$ инвариантен по отношению к преобразованию симметрии (II.7.134), но имеет неинвариантную точку стационарности. Спонтанное нарушение симметрии автоматически влечет за собой вырождение, т.к. “преобразованная” точка стационарности сама является точкой стационарности. Необходимо отметить, что вырождение и спонтанное нарушение симметрии могут возникнуть лишь после предельного перехода $V \rightarrow \infty$.

Покажем, что знание функционала $\Gamma(\Psi)$ позволяет определить все связные функции Грина $\mathbf{Z}(x_1, \dots, x_N) \equiv \mathbf{Z}_N$ [249]. Предварительно перепишем формулы (II.7.94), (II.7.108), (II.7.110) и (II.7.112) в символической форме:

$$\mathbf{Z}_N = \frac{1}{(i\hbar)^N} \frac{\delta^N Z(\mathbf{J})}{\delta \tilde{\mathbf{J}}^N}, \quad \Psi = \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta Z(\mathbf{J})}{\delta \tilde{\mathbf{J}}}, \quad \mathbf{Z}_2^{-1} = i\hbar \frac{\delta \tilde{\mathbf{J}}}{\delta \Psi} = -\frac{\delta^2 \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi^2}. \quad (\text{II.7.135})$$

С помощью (II.7.135) находим:

$$\mathbf{Z}_N = \left[-\left(\frac{\delta^2 \Gamma(\Psi)}{\delta \Psi^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta \Psi} \right]^{N-1} \Psi, \quad (\text{II.7.136})$$

где функция Ψ определяется как точка стационарности функционала $\Gamma(\Psi)$. При вычислении высших функций Z_N ($N > 2$) следует воспользоваться правилом дифференцирования обратного оператора $(L^{-1})' = -L^{-1}L'L^{-1}$, которое легко получить, дифференцируя тождество $L^{-1}L = 1$.

Из (II.7.136) сразу следуют формулы (II.7.113) и (II.7.116), причем содержащиеся в них вершинные функции Γ_3 и Γ_4 определяются как значения производных функционала $\Gamma(\Psi)$ в точке стационарности.

Преимущество вариационного метода заключается в возможности производить вычисление функционала $\Gamma(\Psi)$ по теории возмущений, не теряя при этом аномальных решений. Аналитический по некоторым параметрам функционал может обладать точкой стационарности, зависящей от этих параметров неаналитически.

Приведенные рассуждения показывают, что полученные с помощью преобразования Лежандра (II.7.107), (II.7.108) результаты (II.7.117), (II.7.118), (II.7.126) и (II.7.127) могут быть использованы для исследования явления спонтанной бозе-эйнштейновской конденсации поляритонов при конечной температуре.

Глава 8

Квантовые кинетические уравнения для неравновесной системы частично когерентных поляритонов

Настоящая глава является непосредственным продолжением Главы 7, в которой были получены уравнения Швингера–Дайсона для когерентной части поляритонного поля и связанных функций Грина–Келдыша, описывающих квантовые флуктуации в системе. В методе Келдыша [20] уравнения Швингера–Дайсона играют роль обобщенных кинетических уравнений. Переход к обычным квантовым кинетическим уравнениям связан с предположением о слабой временной неоднородности системы. Ниже приведен вывод этих уравнений в борновском приближении.

§ 8.1 Уравнение для когерентной части поляритонного поля

Подставим разложение (II.7.126) в уравнение (II.7.117) и сохраним в правой части последнего лишь члены $\sim \nu^2$:

$$\begin{aligned} \Psi(x') &= i\hbar \int dx_1 \mathbf{G}_0(x', x_1) \tilde{\mathbf{J}}(x_1) \\ &+ \frac{1}{3!} \int dx_1 \dots dx_4 \mathbf{G}_0(x', x_1) \mathbf{\Gamma}_0(x_1, x_2, x_3, x_4) [3i\hbar \mathbf{Z}(x_2, x_3) + \Psi(x_2) \Psi(x_3)] \Psi(x_4) \\ &+ \frac{(i\hbar)^2}{3!} \int dx_1 \dots dx_8 \mathbf{G}_0(x', x_1) \mathbf{\Gamma}_0(x_1, x_2, x_3, x_4) \mathbf{Z}(x_2, x_5) \mathbf{Z}(x_3, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \\ &\quad \times \mathbf{\Gamma}_0(x_5, x_6, x_7, x_8) \Psi(x_8). \end{aligned} \quad (\text{II.8.1})$$

Умножим (II.8.1) на $i\tau_2 \mathbf{G}_0^{-1}(x, x')$ и проинтегрируем по x' . Полагая затем индекс Келдыша $r = +$ и переходя к физическому пределу (см. конец § 7.3), найдем:

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p) \right] \Psi(p, t) = i\tau_2 \mathbf{J}(p, t) + \\ & + \sum_{p_2, \dots, p_4} \mathbf{q}_s(p, p_2, p_3, p_4) \left[3i\hbar \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_2, t; p_3, t) + \Psi(p_2, t) \Psi(p_3, t) \right] \Psi(p_4, t) + \mathbf{S}(p, t), \end{aligned} \quad (\text{II.8.2})$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p, t) &= (i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_{p_2, \dots, p_8} \mathbf{q}_s(p, p_2, p_3, p_4) \\ &\times \left[\mathbf{Z}^{(+,+)}(p_2, t; p_5, t') \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_3, t; p_6, t') \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_4, t; p_7, t') \right. \\ &\left. - \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_2, t; p_5, t') \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_3, t; p_6, t') \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_4, t; p_7, t') \right] \gamma(p_5, p_6, p_7, p_8) \Psi(p_8, t'). \end{aligned} \quad (\text{II.8.3})$$

В левой части (II.8.2) выполнен предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$. Введены обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(p) &= \hbar \Omega_{\mathbf{k}\alpha} (\delta_{\sigma,1} - \delta_{\sigma,2}), \\ \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{i}{3!} \sum_{\sigma=1,2} (\tau_2)_{\sigma 1 \sigma} \gamma_{\mathbf{k}_1 \alpha_1; \mathbf{k}_2 \alpha_2; \mathbf{k}_3 \alpha_3; \mathbf{k}_4 \alpha_4}^{\sigma, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4}. \end{aligned} \quad (\text{II.8.4})$$

Функция γ выделена из вершинной функции Γ_0 следующим образом (см. (II.7.78)):

$$\Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = r_1 \delta_{r_1, r_2} \delta_{r_2, r_3} \delta_{r_3, r_4} \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3) \delta(t_3 - t_4) \gamma(p_1, p_2, p_3, p_4).$$

Она симметрична относительно произвольной перестановки всех своих аргументов, в то время как функция \mathbf{q}_s — лишь относительно перестановки трех последних аргументов.

Вычислим интеграл столкновений $\mathbf{S}(p, t)$ с точностью до членов второго порядка малости по константе поляритон–поляритонной связи $\sim \nu$. Предварительно перейдем в (II.8.3) от интегрирования по t' к интегрированию по переменной $\tau = t' - t$. Поскольку гамильтониан поляритон–поляритонного взаимодействия (II.7.5) имеет нормальную форму, целесообразно определить T - и \bar{T} -произведения операторов с совпадающими значениями временных аргументов таким образом, чтобы операторы в произведении располагались в нормальном порядке (см. Замечание 1 в § 7.4).

Тогда, согласно (II.7.120)–(II.7.122),

$$i\hbar \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_1, t; p_2, t + \tau) = \begin{cases} i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t + \tau) & \text{при } \tau > 0, \\ i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t) - (\tau_-)_{\sigma_1, \sigma_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} & \text{при } \tau = 0, \\ i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_2, t + \tau; p_1, t) & \text{при } \tau < 0, \end{cases} \quad (\text{II.8.5})$$

где $\tau_{\pm} = (\tau_1 \pm i\tau_2)/2$. Из (II.8.5) видно, что в (II.8.3) интегрирование по τ фактически производится от $-\infty$ до нуля, причем сама точка $\tau = 0$, в которой подынтегральная функция испытывает скачок, не вносит вклада в интеграл (меры нуль!). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p, t) &= (i\hbar)^2 \int_{-\infty}^{-0} d\tau \sum_{p_2, \dots, p_8} \mathbf{q}_s(p, p_2, p_3, p_4) \\ &\times [\mathbf{Z}^{(+,-)}(p_5, t + \tau; p_2, t) \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_6, t + \tau; p_3, t) \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_7, t + \tau; p_4, t) \\ &- \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_2, t; p_5, t + \tau) \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_3, t; p_6, t + \tau) \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_4, t; p_7, t + \tau)] \gamma(p_5, p_6, p_7, p_8) \Psi(p_8, t + \tau). \end{aligned} \quad (\text{II.8.6})$$

Так как (II.8.6) уже содержит константу связи во второй степени, в подынтегральном выражении можно пренебречь запаздыванием. В соответствии с (II.7.57)–(II.7.61) имеем при $\tau < 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t + \tau) &= \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t) \exp \{-i [\mathbf{E}(p_2) + i\varepsilon] \tau / \hbar\}, \\ \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_2, t + \tau; p_1, t) &= \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_2, t; p_1, t) \exp \{-i [\mathbf{E}(p_2) + i\varepsilon] \tau / \hbar\}, \\ \Psi(p, t + \tau) &= \Psi(p, t) \exp \{-i [\mathbf{E}(p) + i\varepsilon] \tau / \hbar\}. \end{aligned} \quad (\text{II.8.7})$$

Подставим (II.8.7) в (II.8.6) и выполним интегрирование по τ . В результате получим выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(p, t) &= \sum_{p_2, \dots, p_8} \mathbf{q}_s(p, p_2, p_3, p_4) \\ &\times \frac{\mathbf{N}(p_5, p_2 | t) \mathbf{N}(p_6, p_3 | t) \mathbf{N}(p_7, p_4 | t) - \mathbf{N}(p_2, p_5 | t) \mathbf{N}(p_3, p_6 | t) \mathbf{N}(p_4, p_7 | t)}{\mathbf{E}(p_5) + \mathbf{E}(p_6) + \mathbf{E}(p_7) + \mathbf{E}(p_8) + i\varepsilon} \\ &\times \gamma(p_5, p_6, p_7, p_8) \Psi(p_8, t), \end{aligned} \quad (\text{II.8.8})$$

в котором

$$\mathbf{N}(p_1, p_2 | t) \equiv i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t) = \mathbf{N}(p_2, p_1 | t) - (i\tau_2)_{\sigma_1, \sigma_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2}. \quad (\text{II.8.9})$$

Используя (II.8.2), (II.8.5), (II.8.8) и (II.8.9), найдем кинетическое уравнение для когерентной части поляритонного поля в борновском приближении:

$$\begin{aligned}
& \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p) \right] \Psi(p, t) = i\tau_2 \mathbf{J}(p, t) + \sum_{p_2, \dots, p_4} \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
& \times \left[3\mathbf{N}(p_2, p_3|t) - 3(\tau_-)_{\sigma_2, \sigma_3} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \delta_{\alpha_2, \alpha_3} + \Psi(p_2, t) \Psi(p_3, t) \right] \Psi(p_4, t) \\
& + \sum_{p_2, \dots, p_8} \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \\
& \times \frac{\mathbf{N}(p_5, p_2|t) \mathbf{N}(p_6, p_3|t) \mathbf{N}(p_7, p_4|t) - \mathbf{N}(p_2, p_5|t) \mathbf{N}(p_3, p_6|t) \mathbf{N}(p_4, p_7|t)}{\mathbf{E}(p_5) + \mathbf{E}(p_6) + \mathbf{E}(p_7) + \mathbf{E}(p_8) + i\varepsilon} \\
& \times \gamma(p_5, p_6, p_7, p_8) \Psi(p_8, t).
\end{aligned} \tag{II.8.10}$$

§ 8.2 Уравнение для корреляционной функции

Используя разложения (II.7.126) и (II.7.127), запишем уравнение (II.7.118) с точностью до членов $\sim \nu^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}(x, x_2) &= \mathbf{G}_0(x, x_2) + \frac{1}{2} \int dx' dx_3 dx_4 dx_5 \mathbf{G}_0(x, x') \Gamma_0(x', x_3, x_4, x_5) \\
& \times [i\hbar \mathbf{Z}(x_4, x_5) + \Psi(x_4) \Psi(x_5)] \mathbf{Z}(x_3, x_2) \\
& + \frac{i\hbar}{3!} \int dx' dx_3 \dots dx_9 \mathbf{G}_0(x, x') \Gamma_0(x', x_4, x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \\
& \times [i\hbar \mathbf{Z}(x_6, x_9) + 3\Psi(x_6) \Psi(x_9)] \Gamma_0(x_7, x_8, x_9, x_3) \mathbf{Z}(x_3, x_2).
\end{aligned} \tag{II.8.11}$$

Уравнение (II.8.11) можно представить также в форме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}(x, x_2) &= \mathbf{G}_0(x, x_2) + \frac{1}{2} \int dx' dx_3 dx_4 dx_5 \mathbf{Z}(x_1, x_3) [i\hbar \mathbf{Z}(x_4, x_5) + \Psi(x_4) \Psi(x_5)] \\
& \times \Gamma_0(x', x_3, x_4, x_5) \mathbf{G}_0(x', x) \\
& + \frac{i\hbar}{3!} \int dx' dx_3 \dots dx_9 \mathbf{Z}(x_1, x_3) \Gamma_0(x_3, x_4, x_5, x_6) \mathbf{Z}(x_4, x_7) \mathbf{Z}(x_5, x_8) \\
& \times [i\hbar \mathbf{Z}(x_6, x_9) + 3\Psi(x_6) \Psi(x_9)] \Gamma_0(x', x_7, x_8, x_9) \mathbf{G}_0(x', x).
\end{aligned} \tag{II.8.12}$$

Умножим уравнение (II.8.11) слева на $i\tau_2 \mathbf{G}_0^{-1}(x_1, x)$, а уравнение (II.8.11) — справа на $\mathbf{G}_0^{-1}(x, x_2) i\tau_2$ и затем проинтегрируем оба результата по x . Выбирая $r_1 = +$, $r_2 = -$, получим в физическом пределе:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \mathbf{E}(p_1) \right] \mathbf{Z}^{(+, -)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = 3 \sum_{p_3, \dots, p_5} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_4, t_1; p_5, t_1) + \Psi(p_4, t_1) \Psi(p_5, t_1) \right] \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_3, t_1; p_2, t_2) \\ & + i\hbar \sum_{r_3=\pm} r_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3, \dots, p_9} \mathbf{q}_s(p_1, p_4, p_5, p_6) \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_4, t_1; p_7, t_3) \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_5, t_1; p_8, t_3) \quad (\text{II.8.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_6, t_1; p_9, t_3) + 3\Psi(p_6, t_1) \Psi(p_9, t_1) \right] \gamma(p_7, p_8, p_9, p_3) \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_3, t_3; p_2, t_2), \\ & \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \mathbf{E}(p_2) \right] \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = 3 \sum_{p_3, \dots, p_5} \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t_1; p_3, t_2) \\ & \times \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(-,-)}(p_4, t_2; p_5, t_2) + \Psi(p_4, t_2) \Psi(p_5, t_2) \right] \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \quad (\text{II.8.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + i\hbar \sum_{r_3=\pm} r_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 \sum_{p_3, \dots, p_9} \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_1, t_1; p_3, t_3) \gamma(p_3, p_4, p_5, p_6) \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_4, t_3; p_7, t_2) \\ & \times \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_5, t_3; p_8, t_2) \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_6, t_3; p_9, t_2) + 3\Psi(p_6, t_3) \Psi(p_9, t_2) \right] \mathbf{q}_s(p_2, p_7, p_8, p_9). \end{aligned}$$

Складывая (II.8.13) и (II.8.14) и полагая затем $t_1 = t_2 = t$, $t_3 = t + \tau$, найдем:

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t_1} - \mathbf{E}(p_1) - \mathbf{E}(p_2) \right] \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t_1; p_2, t_2) = \\ & = 3 \sum_{p_3, \dots, p_5} \left\{ \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_3, t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(-,-)}(p_4, t; p_5, t) + \Psi(p_4, t) \Psi(p_5, t) \right] \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_3, t; p_2, t) \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(+,+)}(p_4, t; p_5, t) + \Psi(p_4, t) \Psi(p_5, t) \right] \right\} \quad (\text{II.8.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + i\hbar \sum_{r_3=\pm} r_3 \int_{-\infty}^{-0} d\tau \sum_{p_3, \dots, p_9} \left\{ \mathbf{q}_s(p_1, p_4, p_5, p_6) \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_4, t; p_7, t + \tau) \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_5, t; p_8, t + \tau) \right. \\ & \times \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_6, t; p_9, t + \tau) + 3\Psi(p_6, t) \Psi(p_9, t + \tau) \right] \gamma(p_7, p_8, p_9, p_3) \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_3, t + \tau; p_2, t) \\ & \quad \left. + \mathbf{Z}^{(+,r_3)}(p_1, t; p_3, t + \tau) \gamma(p_3, p_4, p_5, p_6) \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_4, t + \tau; p_7, t) \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_5, t + \tau; p_8, t) \right. \\ & \quad \left. \times \left[i\hbar \mathbf{Z}^{(r_3,-)}(p_6, t + \tau; p_9, t) + 3\Psi(p_6, t + \tau) \Psi(p_9, t) \right] \mathbf{q}_s(p_2, p_7, p_8, p_9) \right\}. \end{aligned}$$

При выводе (II.8.15) мы использовали представление (II.8.5) и аналогичное представление для функции $\mathbf{Z}^{(-,-)}$:

$$i\hbar \mathbf{Z}^{(-,-)}(p_1, t + \tau; p_2, t) = \begin{cases} i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t + \tau; p_2, t) & \text{при } \tau > 0, \\ i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_1, t; p_2, t) - (\tau_-)_{\sigma_1, \sigma_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} & \text{при } \tau = 0, \\ i\hbar \mathbf{Z}^{(+,-)}(p_2, t; p_1, t + \tau) & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (\text{II.8.16})$$

Так как интеграл в правой части (II.8.15) $\sim \nu^2$, в подынтегральное выражение достаточно подставить (II.8.5), (II.8.16), (II.8.9) и приближенные выражения (II.8.7). После интегрирования по τ получим окончательно:

$$\begin{aligned}
& \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p_1) - \mathbf{E}(p_2) \right] \mathbf{N}(p_1, p_2 | t) = \\
& = 3 \sum_{p_3, p_4, p_5} [\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \mathbf{N}(p_3, p_2 | t) + \mathbf{N}(p_1, p_3 | t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5)] \\
& \quad \times \left[\mathbf{N}(p_4, p_5 | t) - (\tau_-)_{\sigma_4, \sigma_5} \delta_{\mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5} \delta_{\alpha_4, \alpha_5} \Psi(p_4, t) \Psi(p_5, t) \right] \\
& \quad + \sum_{p_3, \dots, p_9} \frac{\mathbf{q}_s(p_1, p_4, p_5, p_6) \gamma(p_3, p_7, p_8, p_9)}{\mathbf{E}(p_3) + \mathbf{E}(p_7) + \mathbf{E}(p_8) + \mathbf{E}(p_9) + 4i\varepsilon} \\
& \times \{ \mathbf{N}(p_3, p_2 | t) \mathbf{N}(p_7, p_4 | t) \mathbf{N}(p_8, p_5 | t) [\mathbf{N}(p_9, p_6 | t) + 3\Psi(p_9, t) \Psi(p_6, t)] \\
& \quad - \mathbf{N}(p_2, p_3 | t) \mathbf{N}(p_4, p_7 | t) \mathbf{N}(p_5, p_8 | t) [\mathbf{N}(p_6, p_9 | t) + 3\Psi(p_6, t) \Psi(p_9, t)] \} \\
& \quad + \sum_{p_3, \dots, p_9} \frac{\mathbf{q}_s(p_2, p_7, p_8, p_9) \gamma(p_3, p_4, p_5, p_6)}{\mathbf{E}(p_3) + \mathbf{E}(p_7) + \mathbf{E}(p_8) + \mathbf{E}(p_9) + 4i\varepsilon} \\
& \times \{ \mathbf{N}(p_3, p_1 | t) \mathbf{N}(p_4, p_7 | t) \mathbf{N}(p_5, p_8 | t) [\mathbf{N}(p_6, p_9 | t) + 3\Psi(p_6, t) \Psi(p_9, t)] \\
& \quad - \mathbf{N}(p_1, p_3 | t) \mathbf{N}(p_7, p_4 | t) \mathbf{N}(p_8, p_5 | t) [\mathbf{N}(p_9, p_6 | t) + 3\Psi(p_9, t) \Psi(p_6, t)] \} .
\end{aligned} \tag{II.8.17}$$

§ 8.3 Метод неравновесного статистического оператора

Кинетические уравнения, описывающие систему частично когерентных поляритонов большой плотности, можно вывести также с помощью метода неравновесного статистического оператора Д. Н. Зубарева [172]. При этом удобно воспользоваться формулировкой данного метода в терминах производящих функционалов [260, 261].

Рассмотрим систему неравновесных поляритонов, описываемую гамильтонианом $\hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_{ext}(t)$ и определим для нее производящий функционал

$$\mathcal{F}(t | u^*, u) = \text{tr}(t) e^{\sum_p u^*(p) \hat{\Phi}^\dagger(p) \sum_e u(p) \hat{\Phi}(p)} . \tag{II.8.18}$$

Здесь $u(p)$ и $u^*(p)$ — комплекснозначные функции, $\hat{\rho}(t)$ — неравновесный статистический оператор системы, удовлетворяющий уравнению Лиувилля–фон-Неймана с

бесконечно малым источником в правой части [172]:

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} [\hat{H} + \hat{H}_{ext}(t), \hat{\rho}(t)] = -\varepsilon' [\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_q(t)] , \quad (\text{II.8.19})$$

где $\hat{\rho}_q(t)$ — квазиравновесный статистический оператор, $\varepsilon' \rightarrow 0$.

С помощью производящего функционала (II.8.18) многочастичные функции распределения

$$\left\langle \prod_{i=1}^M \hat{\Phi}^\dagger(p'_i) \prod_{j=1}^N \hat{\Phi}(p_j) \right\rangle^t = \text{tr} \hat{\rho}(t) \prod_{i=1}^M \hat{\Phi}^\dagger(p'_i) \prod_{j=1}^N \hat{\Phi}(p_j) \quad (\text{II.8.20})$$

можно представить в форме

$$\left\langle \prod_{i=1}^M \hat{\Phi}^\dagger(p'_i) \prod_{j=1}^N \hat{\Phi}(p_j) \right\rangle^t = \left(\frac{\delta^{M+N} \mathcal{F}(t|u^*, u)}{\prod_{i=1}^M \delta u^*(p'_i) \prod_{j=1}^N u(p_j)} \right)_0 , \quad (\text{II.8.21})$$

где $M, N = 1, 2, \dots$, а индекс “0” означает, что после дифференцирования все функциональные аргументы $u(p)$ и $u^*(p)$ полагаются равными нулю. Таким образом, функционал (II.8.18), так же, как и многочастичные функции распределения (или статистический оператор), может служить для описания состояния системы.

Используя определение (II.8.18), уравнение (II.8.19) и вычисляя

$$\text{tr} [\hat{H} + \hat{H}_{ext}(t), \hat{\rho}(t)] e^{\sum_p u^*(p) \hat{\Phi}^\dagger(p) \sum_p u(p) \hat{\Phi}(p)} ,$$

найдем уравнение для производящего функционала $\mathcal{F}(t|u^*, u)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{L}(t) \right] \mathcal{F}(t|u^*, u) = -\varepsilon' [\mathcal{F}(t|u^*, u) - \mathcal{F}_q(t|u^*, u)] . \quad (\text{II.8.22})$$

Здесь

$$\mathcal{F}_q(t|u^*, u) = \text{tr} \hat{\rho}_q(t) e^{\sum_p u^*(p) \hat{\Phi}^\dagger(p) \sum_p u(p) \hat{\Phi}(p)} \quad (\text{II.8.23})$$

— огрубленный производящий функционал,

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{ext}(t) , \quad (\text{II.8.24})$$

$$\mathcal{L}_0 = \sum_p \mathbf{E}(p) \mathbf{u}(p) \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(p)}, \quad (\text{II.8.25})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = \sum_{p_1, \dots, p_4} & \left[\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{u}(p_1) \mathbf{u}(p_2) \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{u}(p_3) \delta \mathbf{u}(p_4)} \right. \\ & \left. + \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{u}(p_1) \frac{\delta^3}{\delta \mathbf{u}(p_2) \delta \mathbf{u}(p_3) \delta \mathbf{u}(p_4)} \right], \end{aligned} \quad (\text{II.8.26})$$

$$\mathcal{L}_{ext}(t) = i \sum_p \mathbf{u}(p) \tau_2 \mathbf{J}(p, t). \quad (\text{II.8.27})$$

$$\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = \text{Sym}_{(p_3, p_4)} \mathbf{p}(p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (\text{II.8.28})$$

$$\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = \text{Sym}_{(p_2, p_3, p_4)} \mathbf{q}(p_1, p_2, p_3, p_4),$$

$$\mathbf{p}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{2V} \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} [\mathbf{A}_{p_1 p_3} \mathbf{A}_{p_2 p_4} - \mathbf{B}_{p_1 p_3} \mathbf{B}_{p_2 p_4}], \quad (\text{II.8.29})$$

$$\mathbf{q}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{2V} \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} [\mathbf{A}_{p_1 p_3} \mathbf{C}_{p_2 p_4} - \mathbf{B}_{p_1 p_3} \mathbf{D}_{p_2 p_4}],$$

$$\mathbf{A}_{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{p_1 p_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{p_2 p_1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{P}_{p_1 p_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{p_1 p_2} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{P}_{p_2 p_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.8.30})$$

Формальное решение уравнения (II.8.22) дается формулой

$$\mathcal{F}(t | u^*, u) = \varepsilon' \int_{-\infty}^0 d\tau \, e^{\varepsilon' \tau} T \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\tau} dt' \mathcal{L}(t') \right] \mathcal{F}_q(t + \tau | u^*, u), \quad (\text{II.8.31})$$

в которую следует подставить функционал (II.8.23), зависящий от времени только через посредство частичных функций распределения (II.8.20) низшего порядка. Интересуясь поведением системы на кинетическом этапе эволюции [172], выберем в качестве квазиравновесного статистического оператора

$$\hat{\rho}_q(t) = \exp \left[-\hat{S}(t, 0) \right], \quad (\text{II.8.32})$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}(t, 0) = & F(t) + \sum_p \left[c_p^*(t) \hat{\Phi}(p) + c_p(t) \hat{\Phi}(p) \right] \\ & + \sum_{p_1, p_2} \left[a_{p_1 p_2}(t) \hat{\Phi}^\dagger(p_1) \hat{\Phi}(p_2) + \frac{1}{2} b_{p_1 p_2}(t) \hat{\Phi}(p_1) \hat{\Phi}(p_2) + \frac{1}{2} b_{p_1 p_2}^*(t) \hat{\Phi}^\dagger(p_1) \hat{\Phi}^\dagger(p_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.8.33})$$

Указанный выбор квазиравновесного распределения позволяет учесть имеющееся в системе вырождение (см. Главу 7) и дает возможность получить связанную систему уравнений для когерентной части поляритонного поля

$$\Psi(p, t) \equiv \left\langle \hat{\Phi}(p) \right\rangle^t = \left\langle \hat{\Phi}(p) \right\rangle_q^t = \text{tr } \hat{\rho}_q(t) \hat{\Phi}(p), \quad (\text{II.8.34})$$

а также для нормальной и аномальной одночастичных функций распределения

$$\begin{aligned} n(p_1, p_2 | t) & \equiv \left\langle \hat{\Phi}^\dagger(p_1) \hat{\Phi}(p_2) \right\rangle^t - \Psi^*(p_1, t) \Psi(p_2, t) \\ & = \left\langle \hat{\Phi}^\dagger(p_1) \hat{\Phi}(p_2) \right\rangle_q^t - \Psi^*(p_1, t) \Psi(p_2, t) = n^*(p_2, p_1 | t) \end{aligned} \quad (\text{II.8.35})$$

и

$$\begin{aligned} f(p_1, p_2 | t) & \equiv \left\langle \hat{\Phi}(p_1) \hat{\Phi}(p_2) \right\rangle^t - \Psi(p_1, t) \Psi(p_2, t) \\ & = \left\langle \hat{\Phi}(p_1) \hat{\Phi}(p_2) \right\rangle_q^t - \Psi(p_1, t) \Psi(p_2, t) = f^*(p_2, p_1 | t), \end{aligned} \quad (\text{II.8.36})$$

соответственно. Функция F определяется из условия нормировки $\mathcal{F}_q(t | 0, 0)$, а коэффициентные функции a , b , и c — из соотношений:

$$\Psi(p, t) = \left(\frac{\delta \mathcal{F}_q(t | u^*, u)}{\delta u(p)} \right)_0, \quad (\text{II.8.37})$$

$$n(p_1, p_2 | t) = \left(\frac{\delta^2 \mathcal{F}_q(t | u^*, u)}{\delta u^*(p_1) \delta u(p_2)} \right)_0 - \Psi^*(p_1, t) \Psi(p_2, t), \quad (\text{II.8.38})$$

$$f(p_1, p_2 | t) = \left(\frac{\delta^2 \mathcal{F}_q(t | u^*, u)}{\delta u(p_1) \delta u(p_2)} \right)_0 - \Psi(p_1, t) \Psi(p_2, t). \quad (\text{II.8.39})$$

Используя формулы (II.8.23), (II.8.32), (II.8.33), (II.8.37)–(II.8.39), после несложных вычислений найдем:

$$\mathcal{F}_q(t | \mathbf{u}) = \exp \left[\sum_p \mathbf{u}(p) \Psi(p, t) + \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2} \mathbf{u}(p_1) \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) \mathbf{u}(p_2) \right], \quad (\text{II.8.40})$$

где

$$\tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) = \begin{pmatrix} f(p_1, p_2 | t) & n^*(p_1, p_2 | t) \\ n(p_1, p_2 | t) & f^*(p_1, p_2 | t) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_1 | t). \quad (\text{II.8.41})$$

Формула (II.8.32) вместе с (II.8.24)–(II.8.27) и (II.8.40) определяет производящий функционал на кинетическом этапе неравновесного процесса, однако наличие взаимодействия между поляритонами (см. (II.8.26)) существенно затрудняет ее практическое применение.

Наиболее простой и изящный способ получения кинетических уравнений в различных приближениях по константе поляритон–поляритонной связи основан на использовании замкнутого уравнения для квазиравновесного производящего функционала [262]

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ext}(t) + \mathcal{P}(t) \mathcal{L}_{int}] \right\} \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u}) = \\ & = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\varepsilon' \tau} \mathcal{P}(t) \mathcal{L}_{int} V(t + \tau, t) [1 - \mathcal{P}(t + \tau)] \mathcal{L}_{int} \mathcal{F}_q(t + \tau | \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (\text{II.8.42})$$

Пропагатор $V(t', t)$ подчиняется интегральному уравнению

$$V(t', t) = \exp \left[i(t' - t) \mathcal{L}_0 / \hbar \right] + \frac{i}{\hbar^2} \int_t^{t'} dt_1 V(t_1, t) [1 - \mathcal{P}(t_1)] \mathcal{L}_{int} \exp \left[i(t' - t) \mathcal{L}_0 / \hbar \right], \quad (\text{II.8.43})$$

а оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) \dots = \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u}) & \left\{ \sum_p \mathbf{u}(p) \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(p)} \dots \right)_0 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2} \mathbf{u}(p_1) \left[\left(\frac{\delta^2}{\delta \mathbf{u}(p_1) \delta \mathbf{u}(p_2)} \dots \right)_0 - 2\Psi(p_1, t) \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(p_2)} \dots \right)_0 \right] \mathbf{u}(p_2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.8.44})$$

является проекционным: $\mathcal{P}(t_1) \mathcal{P}(t_2) = \mathcal{P}(t_1)$. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u}) = \mathcal{P}(t) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(t | \mathbf{u}), \quad \mathcal{P}(t) \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u}) = \mathcal{P}(t) \mathcal{F}(t | \mathbf{u}),$$

$$\mathcal{P}(t)\mathcal{L}_0[\mathcal{F}(t|\mathbf{u}) - \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u})] = \mathcal{P}(t)\mathcal{L}_{ext}(t)[\mathcal{F}(t|\mathbf{u}) - \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u})] = 0,$$

$$[1 - \mathcal{P}(t)]\mathcal{L}_0\mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) = [1 - \mathcal{P}(t)]\mathcal{L}_{ext}(t)\mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) = 0.$$

Из формул (II.8.26) и (II.8.44) следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)\mathcal{L}_{int} = \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \sum_{p_1, \dots, p_4} & \left(\mathbf{u}(p_1)\mathbf{u}(p_2) \left\{ \mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left(\frac{\delta^2}{\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \dots \right)_0 \right. \right. \\ & + \sum_{p_5} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \left[\left(\frac{\delta}{\delta\mathbf{u}(p_2)} - \Psi(p_2, t) \right) \frac{\delta^3}{\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)\delta\mathbf{u}(p_5)} \dots \right]_0 \left. \right\} \\ & + \mathbf{u}(p_1)\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[\frac{\delta^3}{\delta\mathbf{u}(p_2)\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \dots \right]_0 \left. \right), \end{aligned} \quad (\text{II.8.45})$$

$$\begin{aligned} [1 - \mathcal{P}(t)]\mathcal{L}_{int} = \sum_{p_1, \dots, p_4} & \left\{ \mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4)\mathbf{u}(p_1)\mathbf{u}(p_2) \left[\frac{\delta^2}{\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \right. \right. \\ & - \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \left(\frac{\delta^2}{\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \dots \right)_0 \left. \right] \\ & + \mathbf{u}(p_1)\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[\frac{\delta^3}{\delta\mathbf{u}(p_2)\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \right. \\ & - \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \left(\frac{\delta^3}{\delta\mathbf{u}(p_2)\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)} \dots \right)_0 \left. \right] - \mathbf{u}(p_1)\mathbf{u}(p_2)\mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \sum_{p_5} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \\ & \times \left[\left(\frac{\delta}{\delta\mathbf{u}(p_2)} - \Psi(p_2, t) \right) \frac{\delta^3}{\delta\mathbf{u}(p_3)\delta\mathbf{u}(p_4)\delta\mathbf{u}(p_5)} \dots \right]_0 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.8.46})$$

В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t)\mathcal{L}_{int}\mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) = \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \sum_{p_1, \dots, p_4} & \{ \mathbf{u}(p_1)\mathbf{u}(p_2) \\ & \times \left[\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) + 3 \sum_{p_5} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \tilde{\mathbf{N}}(p_5, p_2|t) \right] \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_4|t) + \Psi(p_3, t)\Psi(p_4, t) \right] \\ & + \mathbf{u}(p_1)\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[3\tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_3|t)\Psi(p_4, t) + \Psi(p_2, t)\Psi(p_3, t)\Psi(p_4, t) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.8.47})$$

$$\begin{aligned} [1 - \mathcal{P}(t)]\mathcal{L}_{int}\mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) = \\ = \mathcal{F}_q(t|\mathbf{u}) \left(\sum_{p_1, \dots, p_6} \mathbf{u}(p_1)\mathbf{u}(p_2)\mathbf{u}(p_5)\mathbf{u}(p_6) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{p_7} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_7) \tilde{\mathbf{N}}(p_7, p_2 | t) \right] \tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_5 | t) \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_6 | t) \\
& + \sum_{p_1, \dots, p_5} \mathbf{u}(p_1) \mathbf{u}(p_2) \mathbf{u}(p_5) \\
& \times \left\{ 2 \left[\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) + \sum_{p_6} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_6) \tilde{\mathbf{N}}(p_6, p_2 | t) \right] \Psi(p_3, t) \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_5 | t) \right. \\
& \left. + \sum_{p_6} \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_6) \tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_5 | t) \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_2 | t) \Psi(p_6, t) \right\}.
\end{aligned} \tag{II.8.48}$$

Учитывая приведенные формулы, соотношения

$$\Psi(p, t) = \left(\frac{\delta \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u})}{\delta \mathbf{u}(p)} \right)_0, \quad \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) = \left(\frac{\delta^2 \mathcal{F}_q(t | \mathbf{u})}{\delta \mathbf{u}(p_1) \delta \mathbf{u}(p_2)} \right) - \Psi(p_1, t) \Psi(p_2, t) \tag{II.8.49}$$

и то обстоятельство, что функционал (II.8.40) является собственным для операторов (II.8.25) и (II.8.27), найдем систему точных связанных уравнений, описывающих кинетическую стадию неравновесного процесса:

$$\begin{aligned}
& \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p_1) \right] \Psi(p_1, t) = i\tau_2 \mathbf{J}(p_1, t) \\
& + \sum_{p_2, p_3, p_4} \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[\Psi(p_2, t) \Psi(p_3, t) \Psi(p_4, t) + 3 \tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_3 | t) \Psi(p_4, t) \right] \\
& + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\varepsilon' \tau} \sum_{p_2, p_3, p_4} \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \frac{\delta^3}{\delta \mathbf{u}(p_2) \delta \mathbf{u}(p_3) \delta \mathbf{u}(p_4)} \\
& \times V(t + \tau, t) [1 - \mathcal{P}(t + \tau)] \mathcal{L}_{int} \mathcal{F}_q(t + \tau | \mathbf{u}) \}_0,
\end{aligned} \tag{II.8.50}$$

$$\begin{aligned}
& \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p_1) - \mathbf{E}(p_2) \right] \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) = \\
& = \sum_{p_3, p_4} \left\{ 2 \mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) + 3 \sum_{p_5} \left[\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_5 | t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_5 | t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \right] \right\} \\
& \times \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_4 | t) + \Psi(p_3, t) \Psi(p_4, t) \right] \\
& + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\varepsilon' \tau} \sum_{p_3, p_4} \left(\left\{ 2 \mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \frac{\delta^2}{\delta \mathbf{u}(p_3) \delta \mathbf{u}(p_4)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) \mathbf{q}_s(p_3, p_4, p_3, p_4) \right\} \right)
\end{aligned} \tag{II.8.51}$$

$$+ \sum_{p_5} \left[\left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(p_1)} - \Psi(p_1, t) \right) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) + \mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \left(\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(p_2)} - \Psi(p_2, t) \right) \right] \\ \times \frac{\delta^3}{\delta \mathbf{u}(p_3) \delta \mathbf{u}(p_4) \delta \mathbf{u}(p_5)} \left\} V(t + \tau, t) [1 - \mathcal{P}(t + \tau)] \mathcal{L}_{int} \mathcal{F}_q(t + \tau | \mathbf{u}) \right\}_0 .$$

Вычислим содержащиеся в этих уравнениях интегралы столкновений с точностью до членов второго порядка малости по константе поляритон–поляритонной связи (борновское приближение). При этом для пропагатора $V(t', t)$ достаточно ограничиться наинизшим приближением теории возмущений:

$$V(t + \tau, t) \approx \exp(i\tau \mathcal{L}_0 / \hbar) .$$

Принимая во внимание равенство

$$\exp(i\tau \mathcal{L}_0 / \hbar) \mathbf{u}(p) = \exp(i\tau \mathbf{E}(p) / \hbar) \mathbf{u}(p) \exp(i\tau \mathcal{L}_0 / \hbar)$$

и учитывая, что в нулевом порядке по константе связи запаздыванием можно пренебречь

$$\Psi(p, t + \tau) \approx \Psi(p, t) \exp(-i\tau \mathbf{E}(p) / \hbar) ,$$

$$\tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t + \tau) \approx \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) \exp\{-i[\mathbf{E}(p_1) + \mathbf{E}(p_2)]\tau / \hbar\} ,$$

получим:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p_1) \right] \Psi(p_1, t) = i\tau_2 \mathbf{J}(p_1, t) \\ + \sum_{p_2, p_5, p_4} \mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \left[\Psi(p_2, t) \Psi(p_3, t) \Psi(p_4, t) + 3\tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_3 | t) \Psi(p_4, t) \right] \\ - 2 \cdot 3! \sum_{p_2, \dots, p_6} \frac{\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{p}_s(p_2, p_3, p_5, p_6)}{\mathbf{E}(p_2) + \mathbf{E}(p_3) - \mathbf{E}(p_5) - \mathbf{E}(p_6) - i\hbar \varepsilon'} \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_6 | t) \Psi(p_5, t) \quad (\text{II.8.52}) \\ - 3 \cdot 3! \sum_{p_2, \dots, p_7} \frac{\mathbf{q}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) \mathbf{q}_s(p_2, p_5, p_6, p_7)}{\mathbf{E}(p_2) - \mathbf{E}(p_5) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - i\hbar \varepsilon'} \tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_5 | t) \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_6 | t) \Psi(p_7, t) ,$$

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{E}(p_1) - \mathbf{E}(p_2) \right] \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2 | t) = \\ = \sum_{p_5, p_4} \left\{ 2\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) + 3 \sum_{p_5} \left[\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \tilde{\mathbf{N}}(p_2, p_5 | t) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_5|t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \Big] \Big\} \\
& \times \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_4|t) + \Psi(p_3, t) \Psi(p_4, t) \right] \\
& - 2 \cdot 3! \sum_{p_2, \dots, p_7} \left\{ \left[\frac{\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \mathbf{p}_s(p_2, p_3, p_6, p_7)}{\mathbf{E}(p_2) + \mathbf{E}(p_3) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - i\hbar\varepsilon'} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \mathbf{p}_s(p_1, p_3, p_6, p_7)}{\mathbf{E}(p_1) + \mathbf{E}(p_3) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - i\hbar\varepsilon'} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_6|t) \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_5, p_7|t) + 2\Psi(p_5, t) \Psi(p_7, t) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \tilde{\mathbf{N}}(p_7, p_2|t) + \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_7|t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{p}_s(p_3, p_4, p_6, p_7) \frac{\tilde{\mathbf{N}}(p_5, p_7|t) + \Psi(p_5, t) \Psi(p_6, t)}{\mathbf{E}(p_3) + \mathbf{E}(p_4) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - i\hbar\varepsilon'} \right\} \\
& - 3! \sum_{p_2, \dots, p_8} \left\{ \left[\frac{\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \mathbf{q}_s(p_2, p_6, p_7, p_8)}{\mathbf{E}(p_2) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - \mathbf{E}(p_8) - i\hbar\varepsilon'} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \mathbf{q}_s(p_1, p_6, p_7, p_8)}{\mathbf{E}(p_1) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - \mathbf{E}(p_8) - i\hbar\varepsilon'} \right] \right. \\
& \quad \left. \times \tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_7|t) \tilde{\mathbf{N}}(p_3, p_6|t) \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_5, p_8|t) + 3\Psi(p_5, t) \Psi(p_8, t) \right] \right. \\
& \quad \left. + 3 \left[\mathbf{q}_s(p_1, p_3, p_4, p_5) \tilde{\mathbf{N}}(p_8, p_2|t) + \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_8|t) \mathbf{q}_s(p_2, p_3, p_4, p_5) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{q}_s(p_2, p_6, p_7, p_8) \frac{\tilde{\mathbf{N}}(p_4, p_7|t) \left[\tilde{\mathbf{N}}(p_5, p_6|t) + 2\Psi(p_5, t) \Psi(p_6, t) \right]}{\mathbf{E}(p_3) - \mathbf{E}(p_6) - \mathbf{E}(p_7) - \mathbf{E}(p_8) - i\hbar\varepsilon'} \right\} .
\end{aligned} \tag{II.8.53}$$

Функции (II.8.9) и (II.8.41) связаны между собой равенством

$$\mathbf{N}(p_1, p_2|t) = \tilde{\mathbf{N}}(p_1, p_2|t) + (\tau_-)_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_2} . \tag{II.8.54}$$

При подстановке (II.8.54) в уравнения (II.8.10), (II.8.17) возникают коэффициенты

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_s(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{i}{4} \sum_{\sigma, \sigma'=1,2} \left[(\tau_2)_{\sigma_1 \sigma} \gamma_{\mathbf{k}_1 \alpha_1; \mathbf{k}_2 \alpha_2; \mathbf{k}_3 \alpha_3; \mathbf{k}_4 \alpha_4}^{\sigma, \sigma', \sigma_3, \sigma_4} (\tau_-)_{\sigma' \sigma_2} \right. \\
\left. - (\tau_-)_{\sigma_1 \sigma} \gamma_{\mathbf{k}_1 \alpha_1; \mathbf{k}_2 \alpha_2; \mathbf{k}_3 \alpha_3; \mathbf{k}_4 \alpha_4}^{\sigma, \sigma', \sigma_3, \sigma_4} (\tau_2)_{\sigma' \sigma_2} \right] .
\end{aligned} \tag{II.8.55}$$

Легко проверить, что функции \mathbf{q}_s и \mathbf{p}_s из (II.8.28)–(II.8.30) совпадают с функциями, определенными формулами (II.8.4), (II.8.55). Используя (II.8.54), (II.8.4) и (II.8.55), нетрудно убедиться, что уравнения (II.8.10), (II.8.17), полученные с помощью метода Келдыша, совпадают с уравнениями (II.8.52), (II.8.53), полученными методом неравновесного статистического оператора.

§ 8.4 Кинетические уравнения в исходных обозначениях

Использование универсальных обозначений позволяет выполнить в компактной форме все промежуточные вычисления, однако кинетические уравнения (II.8.10), (II.8.17), выписанные в этих обозначениях, не обладают в достаточной степени наглядностью. Поэтому здесь мы приведем явный вид уравнений (II.8.10), (II.8.17) в принятых нами исходных обозначениях. Для простоты будем предполагать, что первоначально в системе возбуждена лишь одна макрозаполненная когерентная мода \mathbf{k}_0 на нижней поляритонной ветви. Сохраняя в полученных уравнениях только резонансные члены, относящиеся к состояниям нижней ветви, найдем:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_{\mathbf{k}_0} = & \left\{ \hbar \Omega_{\mathbf{k}_0} + \frac{1}{2} T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}^{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0} \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2}{V} + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} n_{\mathbf{k}_1} \right. \\
 & + \frac{1}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \left(T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0}^{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}_0} + \Omega_{\mathbf{k}_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}) + i\varepsilon'} \\
 & \times [n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (1 + n_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}) - (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}] \\
 & + \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1} \left(T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0}^{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}_0} + \Omega_{\mathbf{k}_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}) + i\varepsilon'} f_{\mathbf{k}_1} [(1 + n_{\mathbf{k}_2}) - n_{\mathbf{k}_2}] f_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* \left. \right\} \Psi_{\mathbf{k}_0} \\
 & + \left\{ \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1} T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}^{\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_1} + \frac{1}{2V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{T_{\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \left(T_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}_0} + \Omega_{\mathbf{k}_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}) - i\varepsilon} \right. \\
 & \times [n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) - (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2}] f_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \left. \right\} \Psi_{\mathbf{k}_0}^*, \quad (\text{II.8.56})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d}{dt} n_{\mathbf{k}} = & -f_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1} \left(T_{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}^{\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1} \right)^* (f_{\mathbf{k}_1}^* + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0}) \Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2} \\
 & + \frac{1}{3!V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left[\frac{T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{k}_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}) - i\varepsilon} \right. \\
 & \times \left(\left(T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} \right)^* \{ 2 [(1 + n_{\mathbf{k}}) (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} (n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (1 + n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right] \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(1 + n_{\mathbf{k}}) (1 + n_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \right. \\
& - n_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}) \left. \right] \} \\
& + 2 \left(T_{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2} \right)^* \left\{ [(1 + n_{\mathbf{k}}) (n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right. \\
& - n_{\mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2)] f_{\mathbf{k}_1}^* f_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \\
& + [(1 + n_{\mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2})] f_{\mathbf{k}_1}^* (f_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \\
& + [(1 + n_{\mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}_2} - n_{\mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2})] (f_{\mathbf{k}_1}^* + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2}) f_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \left. \right\} \\
& + \frac{2T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} \left(T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}_1} + \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0}) - i\varepsilon} \\
& + \left\{ f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}_1}^* [(1 + n_{\mathbf{k}_2}) (n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} + 3\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, 3\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right. \\
& - n_{\mathbf{k}_2} (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} + 3\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, 3\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2)] \\
& + f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}_1}^* [(1 + n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} \\
& - (n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0}) \left. \right] \\
& + f_{\mathbf{k}} (f_{\mathbf{k}_1}^* + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2}) [(1 + n_{\mathbf{k}_2}) n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0} - n_{\mathbf{k}_2} (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2-2\mathbf{k}_0})] \left. \right\} \\
& - [\text{Idem}(\dots)]^* , \tag{II.8.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[i\hbar \frac{d}{dt} - \hbar (\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}) \right] f_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} (n_{\mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \\
& + \left(\frac{1}{2} + n_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1} T_{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1} (f_{\mathbf{k}_1} + \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2) \\
& = \frac{1}{3!V^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left[\frac{\left(T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{k}_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}) + i\varepsilon} \right. \\
& \times \left(T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} \left\{ 2f_{\mathbf{k}} [n_{\mathbf{k}_1} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right. \right. \\
& - (1 + n_{\mathbf{k}_1}) n_{\mathbf{k}_2} (n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2)] \\
& + f_{\mathbf{k}} [(n_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (1 + n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}) \\
& - (1 + n_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}] \left. \right\} \\
& \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2T_{\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \left\{ f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* \left[(1 + n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) - (n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right] \right. \\
& \quad + f_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}_1} \left(f_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2} \right) [(1 + n_{\mathbf{k}_2}) - n_{\mathbf{k}_2}] \\
& \quad + f_{\mathbf{k}} \left(f_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2 \right) f_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* [(1 + n_{\mathbf{k}_2}) - n_{\mathbf{k}_2}] \left. \right\} \\
& \quad + \frac{\left(T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0} \right)^*}{\hbar (\Omega_{\mathbf{k}_1} + \Omega_{\mathbf{k}_2} - \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}) + i\varepsilon} \\
& \times \left(T_{\mathbf{k}, 4\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2} \left\{ 2 [(1 + n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}) - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}] f_{\mathbf{k}_1} \left(f_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2 \right) f_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}^* \right. \right. \\
& \quad + [(1 + n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}) - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}] f_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_2} \left(f_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}^* + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 3\mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2} \right) \left. \right\} \\
& \quad + 2T_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_2}^{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0} \left\{ [(1 + n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}_2} (1 + n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}) \right. \\
& \quad \left. - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}] \left(f_{\mathbf{k}_1} + 3\delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2 \right) \right. \\
& \quad + [(1 + n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}_2} (1 + n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0} + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 3\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \\
& \quad \left. - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2}) (n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0} + 3\delta_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 3\mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) \right] f_{\mathbf{k}_1} \\
& \quad + [(1 + n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}) (n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) (1 + n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0}) \\
& \quad \left. - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} (1 + n_{\mathbf{k}_2} + 3\delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}|^2) n_{\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_0} \right] f_{\mathbf{k}_1} \left. \right\} \\
& \quad + \text{Idem} (\mathbf{k} \longrightarrow 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) .
\end{aligned} \tag{II.8.58}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{k}_0} & \equiv \Psi_{\mathbf{k}_0}(t) = \langle \Phi_{\mathbf{k}_0 1} \rangle_t , \\
n_{\mathbf{k}} & \equiv n_{\mathbf{k}}(t) = \left\langle \Phi_{\mathbf{k} 1}^\dagger \Phi_{\mathbf{k} 1} \right\rangle_t - \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0} |\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2 , \\
f_{\mathbf{k}} & \equiv f_{\mathbf{k}}(t) = \langle \Phi_{\mathbf{k} 1} \Phi_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} 1} \rangle_t - \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0}^2(t) ,
\end{aligned} \tag{II.8.59}$$

$$T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \equiv \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3})_{11} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4})_{11} + \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4})_{11} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3})_{11} . \tag{II.8.60}$$

Глава 9

Немонотонный распад неравновесного поляритонного конденсата и временная динамика распределения внеконденсатных поляритонов в прямозонных полупроводниках

§ 9.1 Приближение самосогласованного поля

В гайзенберговском представлении операторы $\check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$ подчиняются уравнениям движения

$$i\hbar \frac{d}{dt} \check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t) = [\check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t), \check{H}]_- , \quad (\text{II.9.1})$$

а среднее значение произвольной динамической величины A определяется формулой $\langle A \rangle_t = \text{tr } \check{\rho} \check{A}(t)$. Здесь $\check{\rho}$ – матрица плотности, определяющая распределение поляритонов в начальный момент времени $t = t_0$; символ “ \sim ” над оператором означает представление Гайзенберга.

При наличии в системе конденсата среднее значение оператора уничтожения поляритона

$$\Psi_{\mathbf{k}\alpha}(t) = \langle \Phi_{\mathbf{k}\alpha}(t) \rangle_t \quad (\text{II.9.2})$$

отлично от нуля. Благодаря взаимодействию между поляритонами оно претерпевает

изменения во времени. Выделим из оператора $\check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$ когерентную часть:

$$\check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t) = \Psi_{\mathbf{k}\alpha}(t) + \check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}(t) . \quad (\text{II.9.3})$$

В соответствии с определением (II.9.2), $\langle \chi_{\mathbf{k}\alpha} \rangle_t = 0$.

Подставив (II.9.3) в гамильтониан системы $\check{H} = \check{H}_0 + \check{H}_{int}$, представим его в форме $\check{H} = \check{H}_1(t) + \check{H}_2(t)$, где оператор $\check{H}_1(t)$ включает в себя только линейные и билинейные по $\check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$ и $\check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger(t)$ слагаемые. Оператор $\check{H}_2(t)$ содержит произведения трех и четырех операторов $\check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$ и $\check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger(t)$.

Учтем $\check{H}_2(t)$ в приближении самосогласованного поля. С этой целью выполним формальную замену:

$$\begin{aligned} & \check{\chi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \longrightarrow \\ & \check{\chi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \chi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \rangle_t \\ & + \check{\chi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \check{\chi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \rangle_t \\ & + \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \rangle_t , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \longrightarrow \\ & \check{\chi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \chi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \check{\chi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \check{\chi}_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \langle \chi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \chi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \rangle_t . \end{aligned}$$

В результате $\check{H}_2(t)$, а следовательно, и \check{H} приобретет такую же операторную структуру, как и $\check{H}_1(t)$. Возвращаясь в \check{H} от операторов $\check{\chi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$ к исходным операторам $\check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t)$, получим

$$\begin{aligned} \check{H} = & E_0(t) + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=1,2} \hbar \Omega_{\mathbf{k}\alpha} \check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}^\dagger(t) \check{\Phi}_{\mathbf{k}\alpha}(t) + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_4=1,2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \\ & \times \left\{ \left[\nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3})_{\alpha_1\alpha_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4})_{\alpha_2\alpha_4} + \nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4})_{\alpha_1\alpha_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3})_{\alpha_2\alpha_3} \right] \right. \\ & \times \left[\check{\Phi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\Phi}_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \langle \Phi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger \Phi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t + \frac{1}{2} \check{\Phi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \check{\Phi}_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^\dagger(t) \langle \Phi_{\mathbf{k}_3\alpha_3} \Phi_{\mathbf{k}_4\alpha_4} \rangle_t \right. \\ & \left. \left. - 2 \check{\Phi}_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^\dagger(t) \Psi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^*(t) \Psi_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \right] + \text{h.c.} \right\} , \quad (\text{II.9.4}) \end{aligned}$$

где $E_0(t)$ – c -числовая функция.

С помощью гамильтониана (II.9.4) и уравнений движения (II.9.1) найдем систему уравнений, описывающих временную эволюцию системы частично когерентных поляритонов в приближении самосогласованного поля. Вводя в рассмотрение функции распределения

$$\begin{aligned} n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) &= \langle \Phi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^+ \Phi_{\mathbf{k}_2\alpha_2} \rangle_t - \Psi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}^*(t) \Psi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}(t), \\ f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) &= \langle \Phi_{\mathbf{k}_1\alpha_1} \Phi_{\mathbf{k}_2\alpha_2} \rangle_t - \Psi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}(t) \Psi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}(t), \end{aligned} \quad (\text{II.9.5})$$

получим:

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{d}{dt} - \hbar \Omega_{\mathbf{k}_1\alpha_1} \right] \Psi_{\mathbf{k}_1\alpha_1}(t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \sum_{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4=1,2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \\ &\times \left[\nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3})_{\alpha_1\alpha_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4})_{\alpha_2\alpha_4} + \nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4})_{\alpha_1\alpha_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3})_{\alpha_2\alpha_3} \right] \\ &\times \left[\frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^*(t) \Psi_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) \right. \\ &\left. + n(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_3, \alpha_3|t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t) + \frac{1}{2} \Psi_{\mathbf{k}_2\alpha_2}^*(t) f(\mathbf{k}_3, \alpha_3; \mathbf{k}_4, \alpha_4|t) \right]; \end{aligned} \quad (\text{II.9.6})$$

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{d}{dt} + \hbar (\Omega_{\mathbf{k}_1\alpha_1} - \Omega_{\mathbf{k}_2\alpha_2}) \right] n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) &= -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5} \sum_{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5=1,2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4+\mathbf{k}_5} \\ &\times \left[\nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_5} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}_1})_{\alpha_4\alpha_1} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_5\mathbf{k}_3})_{\alpha_5\alpha_3} + \nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_5\mathbf{k}_1})_{\alpha_5\alpha_1} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}_3})_{\alpha_4\alpha_3} \right] \\ &\times \left\{ n^*(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_5, \alpha_5|t) [n^*(\mathbf{k}_3, \alpha_3; \mathbf{k}_4, \alpha_4|t) + \Psi_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}^*(t)] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} f(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_3, \alpha_3|t) [f^*(\mathbf{k}_5, \alpha_5; \mathbf{k}_4, \alpha_4|t) + \Psi_{\mathbf{k}_5\alpha_5}^*(t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}^*(t)] \right\} \\ &- \{ \text{Idem} [(\mathbf{k}_1\alpha_1) \leftrightarrow (\mathbf{k}_2\alpha_2)] \}^*; \end{aligned} \quad (\text{II.9.7})$$

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{d}{dt} - \hbar (\Omega_{\mathbf{k}_1\alpha_1} + \Omega_{\mathbf{k}_2\alpha_2}) \right] f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \sum_{\alpha_3, \alpha_4=1,2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \\ &\times \left[\nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3})_{\alpha_1\alpha_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4})_{\alpha_2\alpha_4} + \nu_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4})_{\alpha_1\alpha_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3})_{\alpha_2\alpha_3} \right] \\ &\times [f(\mathbf{k}_3, \alpha_3; \mathbf{k}_4, \alpha_4|t) + \Psi_{\mathbf{k}_3\alpha_3}(t) \Psi_{\mathbf{k}_4\alpha_4}(t)] + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_5} \sum_{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5=1,2} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4+\mathbf{k}_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_5} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4})_{\alpha_1 \alpha_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_5})_{\alpha_3 \alpha_5} + \nu_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_5})_{\alpha_1 \alpha_5} (\mathcal{P}_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4})_{\alpha_3, \alpha_4} \right] \\
& \times \left\{ f(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_5, \alpha_5 | t) [n(\mathbf{k}_3, \alpha_3; \mathbf{k}_4, \alpha_4 | t) + \Psi_{\mathbf{k}_3 \alpha_3}^*(t) \Psi_{\mathbf{k}_4 \alpha_4}(t)] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} n^*(\mathbf{k}_2, \alpha_2; \mathbf{k}_3, \alpha_3 | t) [f(\mathbf{k}_5, \alpha_5; \mathbf{k}_4, \alpha_4 | t) + \Psi_{\mathbf{k}_5 \alpha_5}(t) \Psi_{\mathbf{k}_4 \alpha_4}(t)] \right\} \\
& + \text{Idem} [(\mathbf{k}_1 \alpha_1) \leftrightarrow (\mathbf{k}_2 \alpha_2)] .
\end{aligned} \tag{II.9.8}$$

§ 9.2 Основные эволюционные уравнения

Уравнения (II.9.6)-(II.9.8) приобретают более простой вид в случае, когда состояние системы в начальный момент времени приготовлено таким образом, что при $t = t_0$ возбуждена только одна макрозаполненная когерентная мода $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ на нижней поляритонной ветви:

$$\Psi_{\mathbf{k}\alpha}(t_0) \propto \sqrt{V} \delta_{\alpha,1} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}, \quad n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t_0) = f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t_0) = 0. \tag{II.9.9}$$

Из (II.9.6)-(II.9.8) найдем приращение функций (II.9.2), (II.9.5) к моменту времени $t = t_0 + dt$:

$$d\Psi_{\mathbf{k}\alpha} \propto \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}, \quad dn(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2) = 0, \quad df(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2) \propto \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 2\mathbf{k}_0}.$$

Таким образом, когерентная поляритонная волна макроскопической амплитуды служит источником квантовых флуктуаций, описываемых функцией $f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \alpha_2 | t)$.

Подставим теперь в правые части (II.9.6)-(II.9.8)

$$\Psi_{\mathbf{k}\alpha}(t) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0\alpha}(t), \quad n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t) = 0,$$

$$f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t) = \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 2\mathbf{k}_0} f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \alpha_2 | t)$$

и вновь проследим за приращением функций (II.9.2), (II.9.5) за бесконечно малый промежуток времени dt . Найдем:

$$d\Psi_{\mathbf{k}\alpha} \propto \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0}, \quad dn(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t) \propto \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}, \quad df(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2 | t) \propto \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, 2\mathbf{k}_0},$$

т.е. вслед за квантовыми флуктуациями, описываемыми аномальной функцией распределения $f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \alpha_2 | t)$, в системе возбуждаются флуктуации, характеризующиеся нормальной функцией распределения $n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_1, \alpha_2 | t)$.

Подставляя в правые части (II.9.6)-(II.9.8)

$$\Psi_{\mathbf{k}\alpha}(t) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_0} \Psi_{\mathbf{k}_0\alpha}(t), \quad n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) = \delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} n(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_1, \alpha_2|t),$$

$$f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; \mathbf{k}_2, \alpha_2|t) = \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,2\mathbf{k}_0} f(\mathbf{k}_1, \alpha_1; 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \alpha_2|t), \quad (\text{II.9.10})$$

убеждаемся, что и левые части этих уравнений имеют такую же структуру. Таким образом, при начальных условиях (II.9.9) решение системы уравнений (II.9.6)-(II.9.8) имеет вид (II.9.10). Этот результат является всего лишь следствием закона сохранения импульса в элементарных актах рассеяния взаимодействующих поляритонов.

Дальнейшее упрощение уравнений (II.9.6)-(II.9.8) может быть достигнуто, если в их правых частях сохранить только резонансные слагаемые, связанные исключительно с состояниями, относящимися к нижней поляритонной ветви. Учитывая (II.9.10) и опуская в правых частях (II.9.6)-(II.9.8) быстроосциллирующие члены, получаем:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \Psi_{\mathbf{k}_0}(t) &= [\hbar\Omega_{\mathbf{k}_0} + \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}_0}(t)] \Psi_{\mathbf{k}_0}(t) \\ &+ \left[\nu_{pol}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \frac{\Psi_{\mathbf{k}_0}^2(t)}{V} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}_0}(t) \right] \Psi_{\mathbf{k}_0}^*(t); \end{aligned} \quad (\text{II.9.11})$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} n_{\mathbf{k}}(t) &= f_{\mathbf{k}}^*(t) \left[\nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{\Psi_{\mathbf{k}_0}^2(t)}{V} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t) \right] \\ &- f_{\mathbf{k}}(t) \left[\nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{\Psi_{\mathbf{k}_0}^{*2}(t)}{V} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}}^*(t) \right]; \end{aligned} \quad (\text{II.9.12})$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} f_{\mathbf{k}}(t) &= \left\{ \left[\hbar\Omega_{\mathbf{k}} + \tilde{\nu}_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2}{V} + \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}}(t) \right] \right. \\ &+ \left. \left[\hbar\Omega_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}} + \tilde{\nu}_{pol}(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2}{V} + \tilde{\mathcal{F}}_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}(t) \right] \right\} f_{\mathbf{k}}(t) \\ &+ [1 + n_{\mathbf{k}}(t) + n_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}(t)] \cdot \left[\nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{\Psi_{\mathbf{k}_0}^2(t)}{V} + \mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.9.13})$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) f_{\mathbf{k}_1}(t) = \mathcal{F}_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}(t), \\ \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \tilde{\nu}_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) n_{\mathbf{k}_1}(t) = \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}}^*(t); \end{aligned}$$

$$\nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}}{\sqrt{(1+\Lambda_{\mathbf{k}}^2)(1+\Lambda_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}}^2)(1+\Lambda_{\mathbf{k}_1}^2)(1+\Lambda_{2\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1}^2)}}, \quad (\text{II.9.14})$$

$$\tilde{\nu}_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = \frac{\nu_0 + \nu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}}{(1+\Lambda_{\mathbf{k}}^2)(1+\Lambda_{\mathbf{k}_1}^2)}$$

— константы поляритон-поляритонного взаимодействия. В соответствии с (II.9.9), решение уравнений (II.9.11)–(II.9.13) следует подчинить начальному условию

$$n_{\mathbf{k}}(t_0) = f_{\mathbf{k}}(t_0) = 0, \quad \Psi_{\mathbf{k}_0}(t_0) \neq 0. \quad (\text{II.9.15})$$

В дальнейшем будем полагать $t_0 = 0$.

В равновесных задачах величины типа $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ и $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}}$ имеют смысл параметров порядка и определяются из интегральных уравнений [153]. В рассматриваемой здесь неравновесной ситуации параметры порядка зависят от времени, поэтому их нахождение связано с решением системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (II.9.11) – (II.9.13).

Уравнения (II.9.11)–(II.9.13) инвариантны относительно обращения времени — они сохраняют свой вид при замене $t \rightarrow -t$, $\Psi_{\mathbf{k}_0} \rightarrow \Psi_{\mathbf{k}_0}^*$, $f_{\mathbf{k}} \rightarrow f_{\mathbf{k}}^*$.

Сравним систему (II.9.11)–(II.9.13) с системой уравнений (II.8.56)–(II.8.58), полученной в предыдущей главе. Правые части уравнений (II.8.56)–(II.8.58) содержат члены, линейные по константе экситон-экситонного взаимодействия $\nu > 0$ и члены $\sim \nu^2$. Используя определения (II.8.60), (II.9.14), нетрудно убедиться, что первые из них соответствуют приближению самосогласованного поля, которое, таким образом, означает пренебрежение корреляционными функциями высшего порядка. Действительно, для того, чтобы получить приближение самосогласованного поля, достаточно в уравнениях (II.7.105) и (II.7.106) опустить функции $\mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{Z}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Метод неравновесного статистического оператора приводит к приближению самосогласованного поля, если в уравнении (II.8.42) отбросить правую часть. В этом приближении учитываются процессы двухквантового выхода поляритонов из конденсата, обратные процессы, а также превращение рожденной пары внеконденсатных поляритонов в другую пару с тем же значением суммарного импульса. Оно описыва-

ет наиболее быстрые из протекающих в системе процессов и является достаточным для изучения ранней (докинетической) стадии эволюции системы.

Члены $\sim \nu^2$ учитывают процессы рассеяния, в которых лишь один из поляритонов может принадлежать конденсату. Поэтому они отличны от нуля только когда в системе уже возбуждены внеконденсатные поляритоны. Члены $\sim \nu^2$ описывают более медленные, по сравнению с членами $\sim \nu$, изменения характеристик системы и становятся существенными лишь на кинетической стадии эволюции. Наше дальнейшее исследование временной эволюции системы неравновесных поляритонов будет основываться на приближении самосогласованного поля.

Кроме аддитивных интегралов движения, выражающих законы сохранения средних значений числа частиц, энергии и импульса замкнутой системы, уравнения (II.9.11)–(II.9.13) обладают дополнительными интегралами движения $n_{\mathbf{k}}(t) - n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}(t) = \text{const}$ и $|f_{\mathbf{k}}(t)|^2 - n_{\mathbf{k}}(t)[1 + n_{\mathbf{k}}(t)] = \text{const}$. Используя начальные условия (II.9.15), найдем:

$$n_{\mathbf{k}}(t) = n_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 4|f_{\mathbf{k}}(t)|^2} - 1 \right]. \quad (\text{II.9.16})$$

Соотношения (II.9.16) позволяют исключить уравнение (II.9.12) из системы уравнений (II.9.11) – (II.9.13).

Нетрудно убедиться, что преобразование

$$f_{\mathbf{k}}(t) = \frac{\Psi_{\mathbf{k}_0}^2(t)}{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2} g_{\mathbf{k}}(t)$$

отщепляет от системы (II.9.11) – (II.9.13) уравнение для фазы волновой функции конденсата $\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)$. В результате, система эволюционных уравнений приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}_0(t) = \frac{2}{\hbar} \text{Im } \mathcal{G}_{\mathbf{k}_0}(t) \cdot \mathcal{N}_0(t); \quad (\text{II.9.17})$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} g_{\mathbf{k}}(t) = & \left\{ \hbar(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}) + \left[\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}}(t) + \tilde{\mathcal{F}}_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}(t) - 2\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{k}_0}(t) \right] \right. \\ & + \left[\tilde{\nu}_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) + \tilde{\nu}_{pol}(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) - 2\nu_{pol}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \right] \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2}{V} \mathcal{N}_0(t) \\ & - 2\text{Re } \mathcal{G}_{\mathbf{k}_0}(t) \left. \right\} g_{\mathbf{k}}(t) \\ & + \sqrt{1 + 4|g_{\mathbf{k}}(t)|^2} \cdot \left[\nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2}{V} \mathcal{N}_0(t) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}(t) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.9.18})$$

где

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1} \nu_{pol}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) g_{\mathbf{k}_1}(t) = \mathcal{G}_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}}(t) ;$$

$$\mathcal{N}_0(t) = |\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2 / |\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2$$

— относительная плотность поляритонов в конденсате.

Стационарное решение уравнений (16)-(18), имеющее вид $|\Psi_{\mathbf{k}_0}(t)|^2 = \text{const}$, $n_{\mathbf{k}}(t) \propto \delta(E_{\mathbf{k}} + E_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2E_{\mathbf{k}_0})$, $f_{\mathbf{k}}(t) \propto \delta(E_{\mathbf{k}} + E_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2E_{\mathbf{k}_0})$, где $E_{\mathbf{k}}$ — перенормированная энергия поляритона, было найдено в работах [263, 264, 265, 266, 267]. Подстановка этого решения в выражения для полной средней энергии и полного среднего числа частиц убеждает нас, что данное решение не может быть реализовано при начальном условии (II.9.15). Однако, указанное состояние поляритонной системы может быть организовано с помощью стационарного лазерного воздействия на полупроводниковый кристалл [268].

§ 9.3 Начальная стадия эволюции системы

Система уравнений (II.9.17), (II.9.18) остается все еще достаточно сложной даже для ее численного решения. Поэтому в дальнейшем, простоты ради, мы будем пренебрегать дисперсией константы экситон-экситонной связи ν . В окрестности экситон-фотонного резонанса функция $\Lambda_{\mathbf{k}} \approx 1$ и, следовательно, $\tilde{\nu}_{pol} \approx 2\nu_{pol} \approx \nu/2$.

Начальное условие (II.9.15) имеет один и тот же вид для всех значений волнового вектора \mathbf{k} . Поэтому из уравнений (II.9.17), (II.9.18) следует, что в отсутствие дисперсии констант поляритон-поляритонного взаимодействия зависимость g от \mathbf{k} осуществляется через посредство функции $\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}$:

$$g_{\mathbf{k}} \equiv g(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}, t) .$$

Используя тождественное преобразование

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} g(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}, t)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int dx g(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}, t) \delta(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0} - x)$$

$$= \int dx g(x, t) \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0} - x),$$

и переходя к безразмерным переменным

$$T = \lambda t, \quad w_{\mathbf{k}} = \lambda^{-1}(\Omega_{\mathbf{k}} + \Omega_{2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}} - 2\Omega_{\mathbf{k}_0}), \quad \lambda = \frac{\nu}{2\hbar} \frac{|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2}{V}, \quad (\text{II.9.19})$$

представим систему уравнений (II.9.17), (II.9.18) в форме:

$$\frac{d}{dT} \mathcal{N}_0(T) = 2 \operatorname{Im} G(T) \cdot \mathcal{N}_0(T), \quad (\text{II.9.20})$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial T} g(w, T) &= [w + \mathcal{N}_0(T) - 2 \operatorname{Re} G(T)] g(w, T) \\ &+ \sqrt{1 + 4|g(w, T)|^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \mathcal{N}_0(T) + G(T) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.9.21})$$

где

$$G(T) = \int dw \varrho(w) g(w, T), \quad \varrho(w) = \frac{1}{2|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2} \sum_{\mathbf{k}} \delta(w_{\mathbf{k}} - w). \quad (\text{II.9.22})$$

В дальнейшем для численных оценок используются параметры поляритонов, образованных смешиванием фотонов и 1А-экситонов в ионном кристалле сернистого кадмия (CdS): $\epsilon_B = 9.3$, $\hbar\omega^\perp = 2.55$ эВ, $\eta/\hbar = 1.1 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $m_\perp = 0.89m_0$ (m_0 — масса свободного электрона), $m_\parallel = 2.85m_0$ [100]. Используется модель изотропной параболической экситонной зоны с эффективной массой $m = (m_\perp^2 m_\parallel)^{1/3}$. Эффективный борровский радиус 1А-экситона в CdS — $a_{ex} = 28 \text{ \AA}$ [136]. Энергия ионизации экситона — $I_{ex} = 27$ мэВ [269]. Величина константы экситон-экситонного взаимодействия оценивается по формуле $\nu \equiv \nu_0 = (26\pi/3) I_{ex} a_{ex}^3$ [146, 270] и составляет $4.3 \cdot 10^{-33} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$. Взаимодействие экситонов с акустическими фононами в CdS очень мало. Значительную роль может играть только взаимодействие с одной ветвью оптических фононов с энергией $\hbar\omega_{ph} \sim 38$ мэВ, обладающих слабой дисперсией [216].

На начальной стадии эволюции системы, когда значительная доля поляритонов все еще находится в конденсате, а число внеконденсатных поляритонов сравнительно невелико, в уравнениях (II.9.20), (II.9.21) можно опустить члены, содержащие функцию $G(T)$. Решение полученной таким образом системы уравнений имеет

вид [271, 169]:

$$\mathcal{N}_0(T) = \text{const} = 1$$

(не учитывается влияние малой доли внеконденсатных поляритонов на конденсат!),

$$n(w, T) = \begin{cases} -\frac{1}{w(w+2)} \sinh^2 \left[\frac{T}{2} \sqrt{-w(w+2)} \right] & \text{при } -2 \leq w \leq 0, \\ \frac{1}{w(w+2)} \sin^2 \left[\frac{T}{2} \sqrt{w(w+2)} \right] & \text{при } w < -2, w > 0. \end{cases} \quad (\text{II.9.23})$$

Согласно (II.9.23), на начальном этапе эволюции происходит интенсивное возбуждение внеконденсатных поляритонов в узкой области, в которой функция распределения $n(w)$ имеет вид симметричного колокола с максимумом при $w = -1$. По мере удаления от указанной области функция распределения, осциллируя, убывает. Функциональная зависимость (II.9.23) изображена на рисунке II.9.1 для случаев, когда $T = 1.0$ и $T = 1.6$.

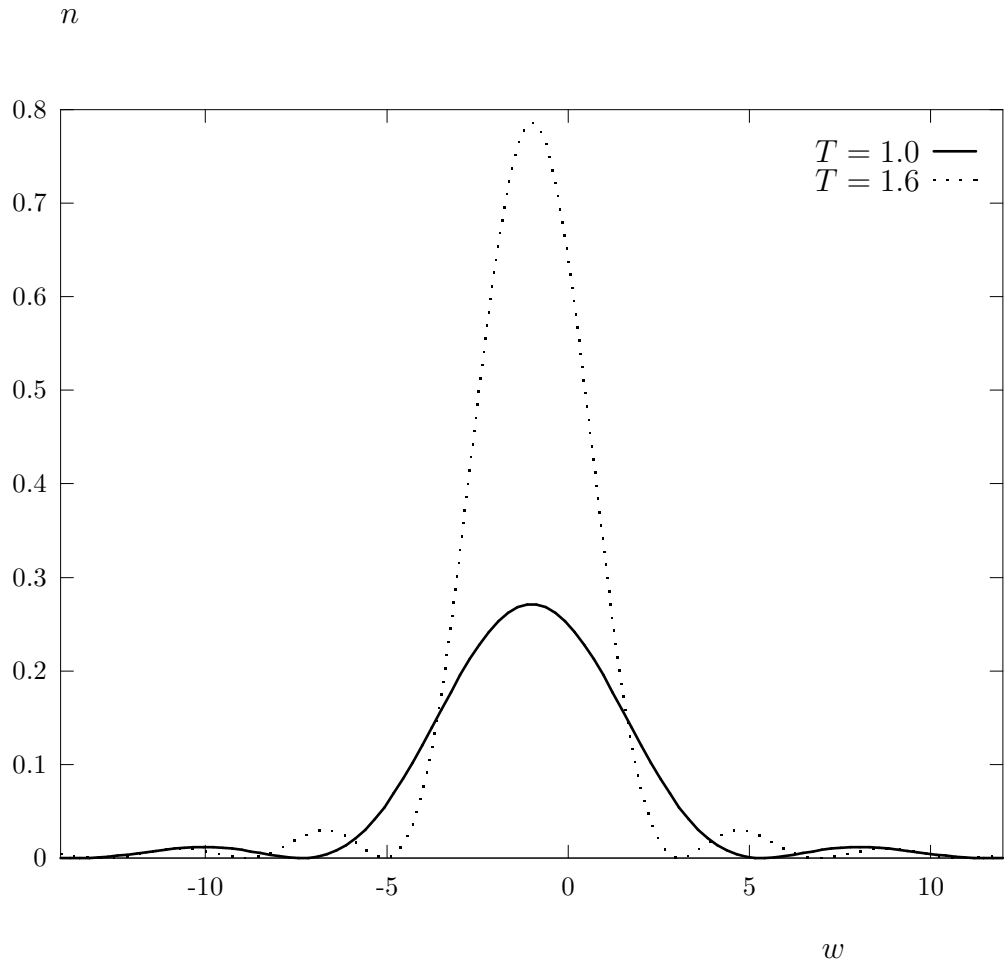


Рис. II.9.1. Распределение внеконденсатных поляритонов на начальном этапе эволюции.

Нестационарное поведение системы, описываемое на начальной стадии эволюции формулой (II.9.23), означает, что энергия внеконденсатных поляритонов обладает неопределенностью $\sim \lambda$. Поэтому их генерация происходит не только на частотах $\Omega_{\mathbf{k}}$, определяемых их условия волнового синхронизма $w = -1$ (с учетом концентрационного смещения поляритонных дисперсионных кривых), но и в окрестности $\Delta\Omega \sim \lambda$ этих частот. Таким образом, колоколообразный вид распределения, изображенного на рисунке II.9.1, имеет чисто квантовое происхождение.

§ 9.4 Численные результаты

Численное решение системы уравнений (II.9.20), (II.9.21) выполнялось в два этапа. Сначала был найден явный вид зависимости $\varrho(w)$ для различных значений плотности конденсата $|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2/V$ и величины его волнового вектора \mathbf{k}_0 . Затем полученная функциональная зависимость использовалась при интегрировании эволюционных уравнений (II.9.20), (II.9.21). Результаты интегрирования, выполненного для $|\mathbf{k}_0| = 3.6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, представлены на рисунках II.9.2–II.9.12 [272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282]. Указанный выбор значения $|\mathbf{k}_0|$ соответствует области экситон-фотонного резонанса, расположенной несколько ниже дна экситонной зоны.

Распад неравновесного поляритонного конденсата описывается кривой, изображенной на рисунке II.9.2. До момента безразмерного времени $T \approx 7$ истощение конденсата происходит сравнительно медленно. Затем следует резкий спад, в результате которого к моменту $T \approx 15$ в конденсате сохраняется лишь 10% от первоначального числа поляритонов. Дальнейший распад конденсата сопровождается нутационными колебаниями, при которых имеет место частичное восстановление его плотности (до 30% при $T \approx 20$). Нутационные колебания отсутствуют, если в уравнении (II.9.21) пренебречь функцией $G(T)$, описывающей интегральное влияние всех пар внеконденсатных поляритонов с одним и тем же значением полного импульса $2\hbar\mathbf{k}_0$ на каждую отдельную пару. Зависимости вещественной и мнимой частей функции $G(T)$ от безразмерного времени изображены на рисунках II.9.3–II.9.4. Сопоставляя эти ри-

сунки с зависимостью, приведенной на рисунке II.9.2, видим, что функция $G(T)$ сравнима с величиной относительной плотности конденсата \mathcal{N}_0 и может быть опущена в уравнениях (II.9.20), (II.9.21) лишь на начальной стадии эволюции системы (при $T < 10$). Таким образом, осцилляции конденсата в процессе распада связаны с корреляцией состояний отдельных пар внеконденсатных поляритонов. К моменту $T \approx 50$ амплитуда осцилляций и скорость распада конденсата заметно уменьшаются. Эти результаты не могут быть получены введением каких-либо феноменологических констант в динамическое уравнение для волновой функции конденсата.

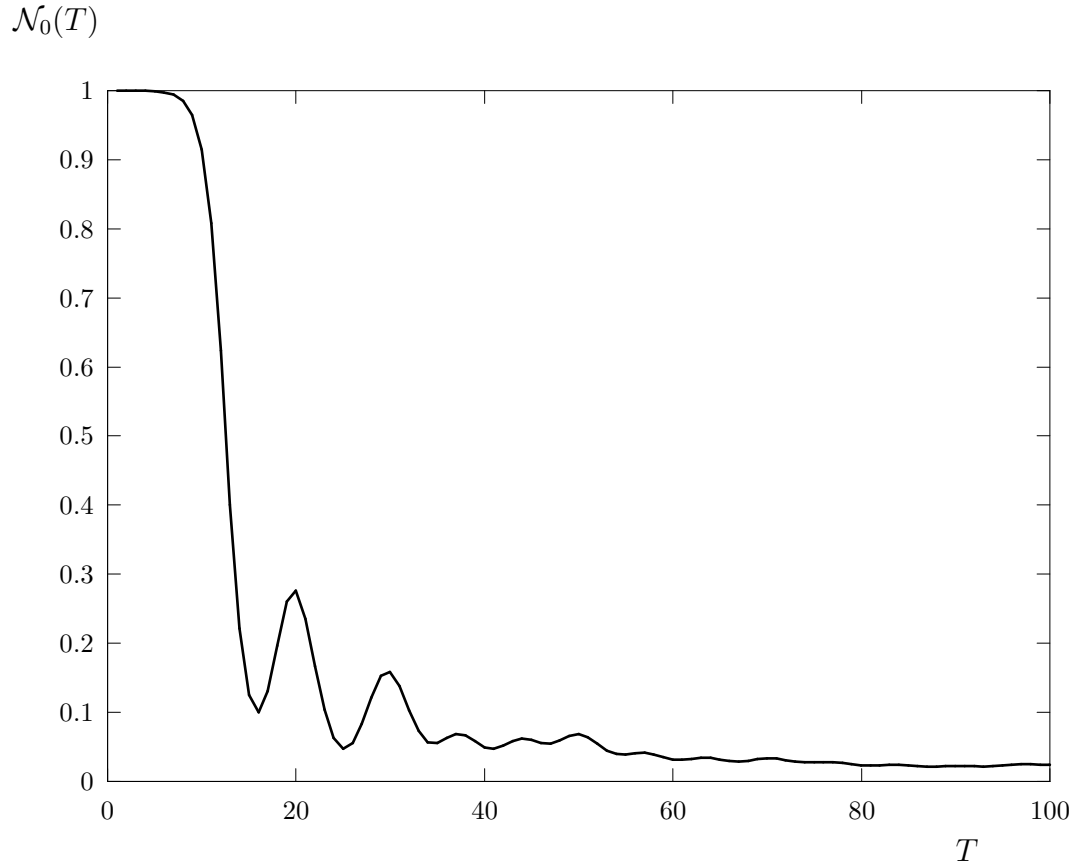


Рис. II.9.2. Зависимость относительной плотности поляритонов в конденсате от безразмерного времени T .

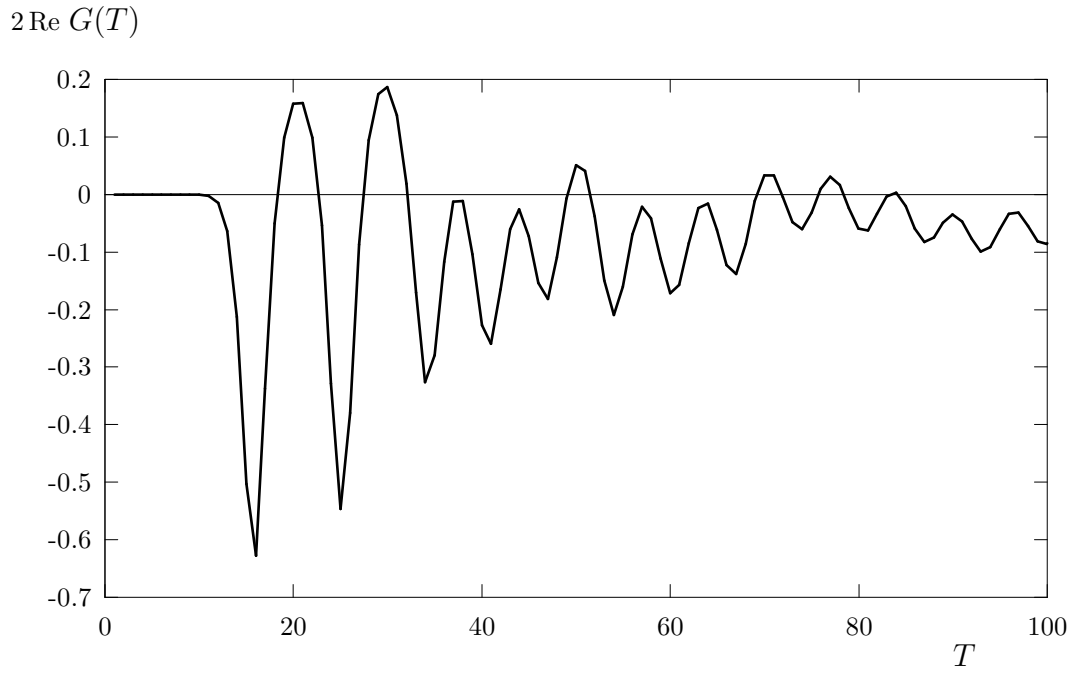


Рис. II.9.3. Зависимость вещественной части функции $G(T)$ от безразмерного времени T .

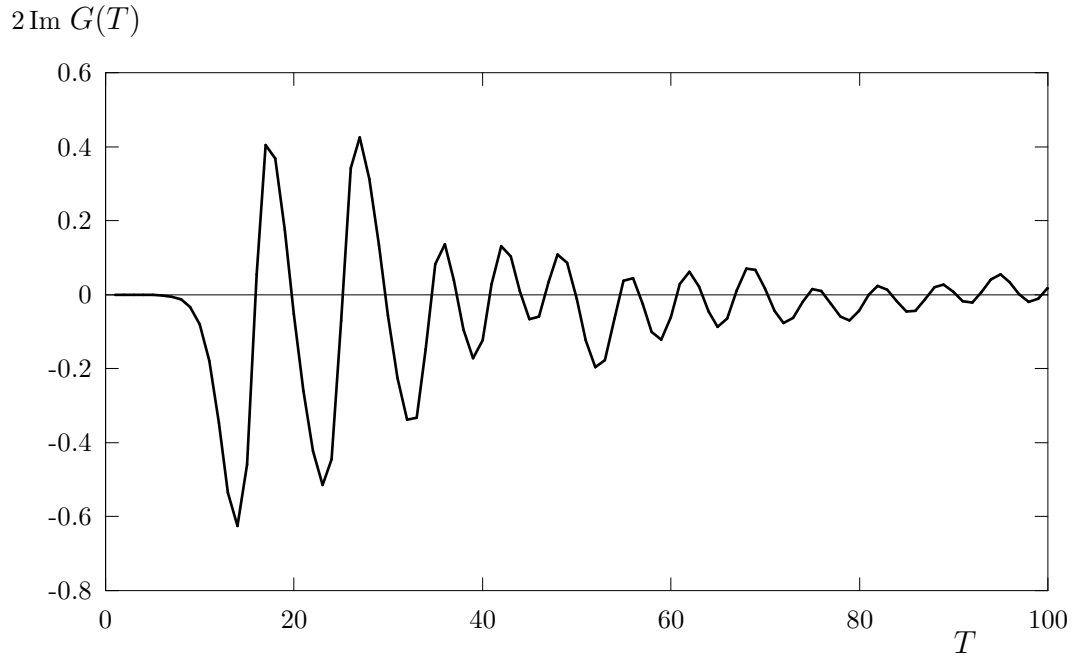


Рис. II.9.4. Зависимость мнимой части функции $G(T)$ от безразмерного времени T .

На рисунке II.9.5 изображена функция распределения внеконденсатных поляритонов в моменты времени, выбранные на интервале, на котором поляритонный конденсат претерпевает наиболее быстрые и значительные изменения. Кривая, соответствующая моменту $T = 10$, так же, как и кривая, описывающая функцию (II.9.23),

имеет вид симметричного колокола с максимумом при $w = -1$. К моменту $T = 15$ функция распределения, сохраняя симметричную форму, значительно возрастает по величине, а ее максимум смещается в сторону больших энергий внеконденсатных поляритонов. Возрастание числа внеконденсатных поляритонов более, чем на порядок находится в согласии с наличием у функции $\mathcal{N}_0(T)$ локального минимума при $T \approx 15$. При $T = 20$ происходит деформация контура функции распределения и уменьшение ограниченной им площади. Последнее согласуется с наличием в зависимости $\mathcal{N}_0(T)$ локального максимума при $T \approx 20$. Таким образом, функция распределения как бы “дышит” в соответствии с колебаниями плотности конденсата.

Дальнейшая эволюция функции распределения отражена на рисунках II.9.6–II.9.11. К моменту $T = 30$ ее контур приобретает осциллирующий характер. Осцилляции возникают не только в зависимости функции распределения от параметра w , но и в ее зависимости от безразмерного времени T (к сожалению, мы не сумели отобразить этот факт на рисунке). Это означает, что если, например, функция распределения в момент $T \approx 40$ имеет локальный максимум при $w = -1$, то в какой-либо другой момент времени она может иметь в этой точке локальный минимум. С течением времени частотные осцилляции сгущаются и становятся все более мелкими. В результате, на плавном контуре функции распределения возникает хаотическая рябь.

Начиная с момента $T \approx 30$, у функции распределения появляется коротковолновое крыло. К моменту $T = 100$ она локализована в области, определяемой неравенствами $-2 < w < 1$. Особый интерес вызывает возгорание, а затем частичное угасание дополнительного острого пика, локализованного в области $-0.22 < w < -0.08$ и имеющего максимум при $w \approx -0.15$ (см. рисунок II.9.12). Временной интервал, на котором зарождается и существует дополнительный пик, характеризуется малыми значениями и относительно медленным изменением плотности конденсата и функции $G(T)$ (см. рисунки II.9.2–II.9.4). Положение дополнительного пика не меняется с течением времени, а его величина достигает наибольшего значения при $T \approx 80$.

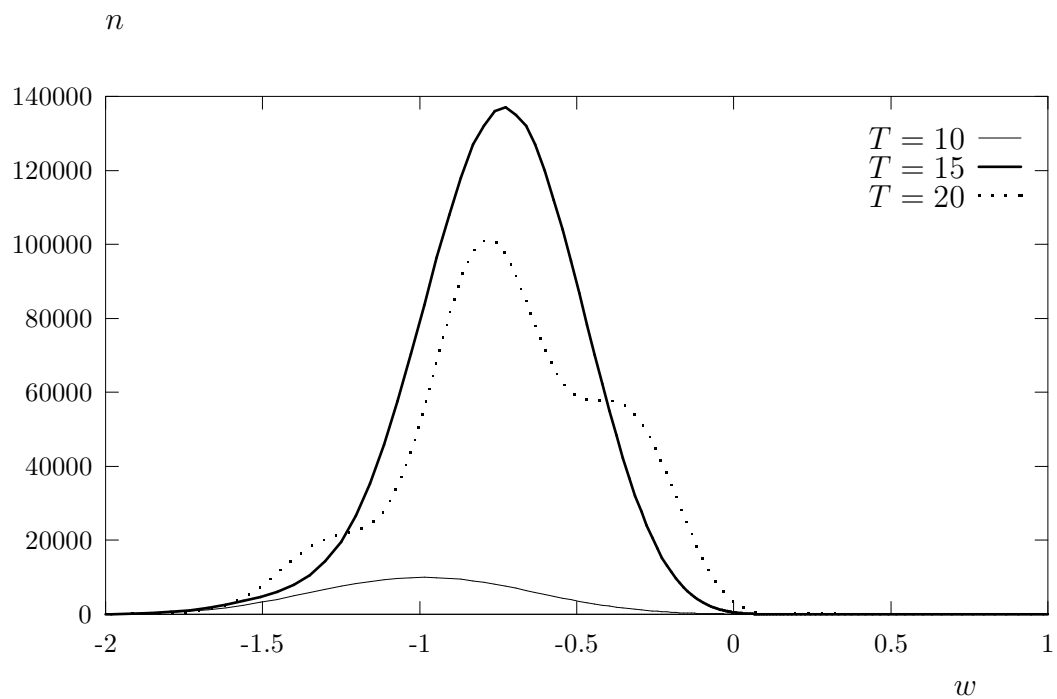


Рис. II.9.5. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 10, 15, 20$.

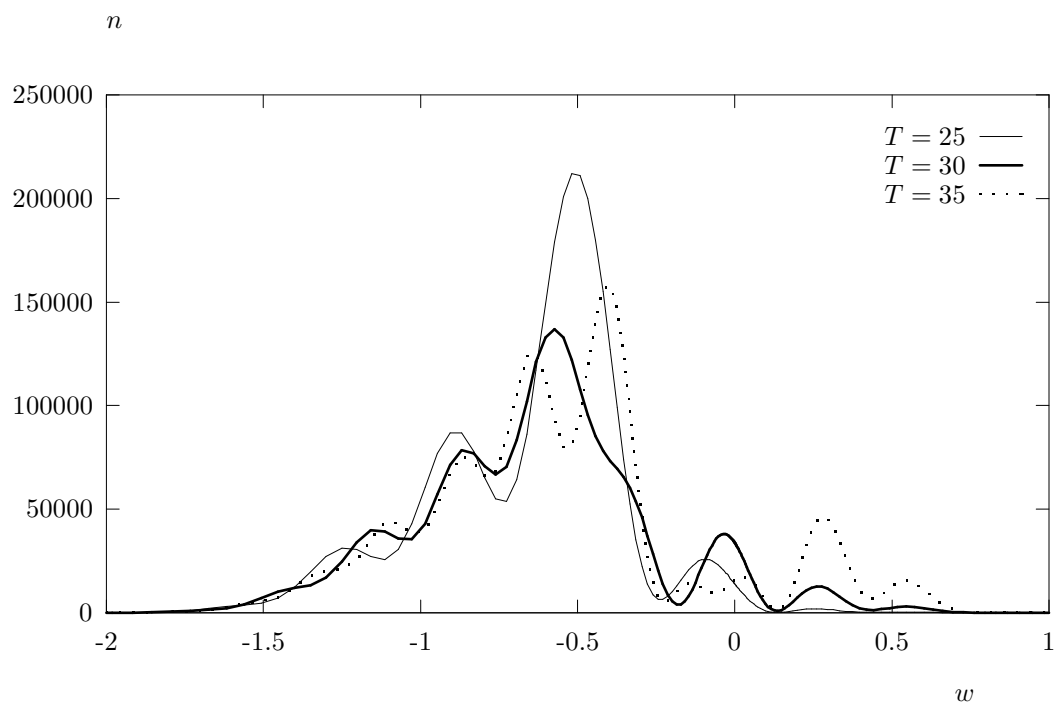


Рис. II.9.6. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 25, 30, 35$.

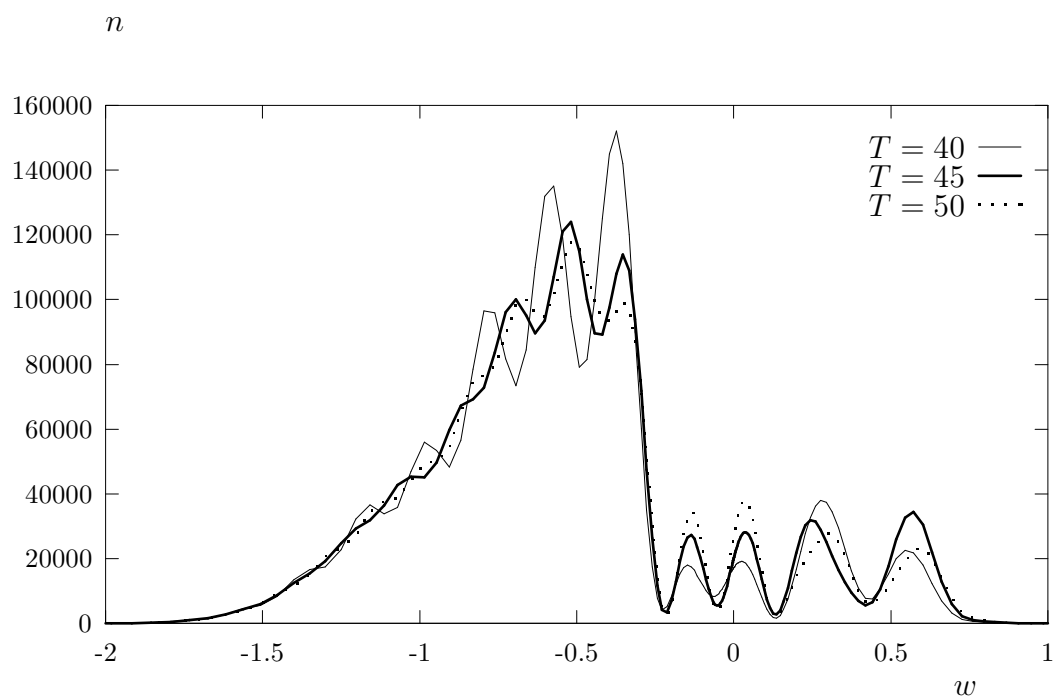


Рис. II.9.7. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 40, 45, 50$.

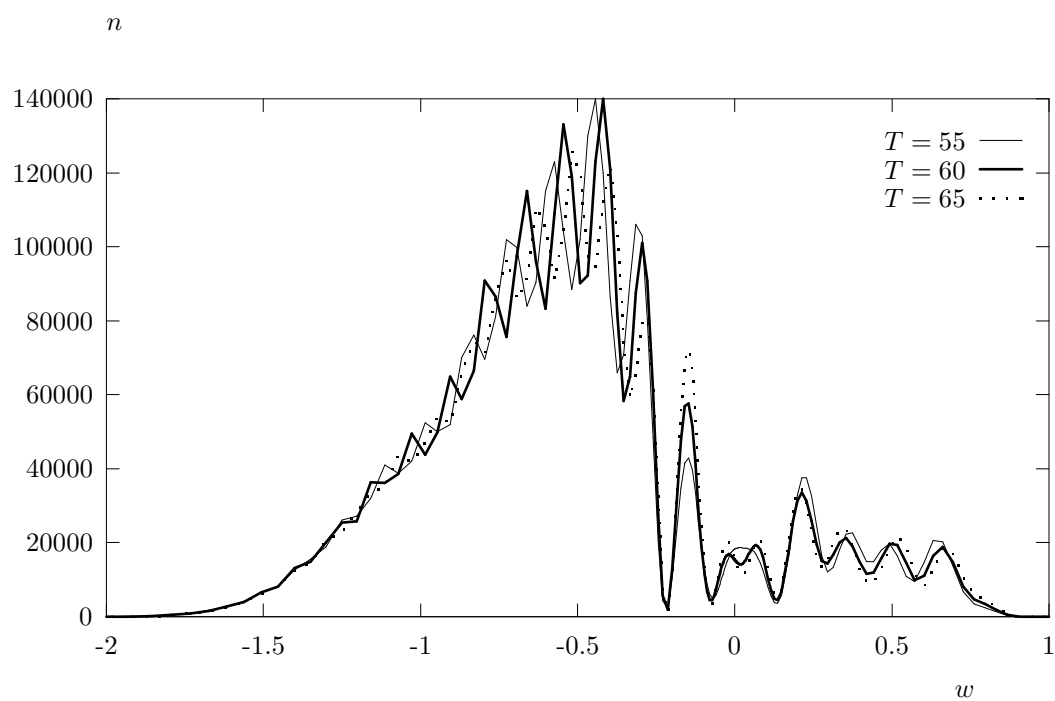


Рис. II.9.8. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 55, 60, 65$.

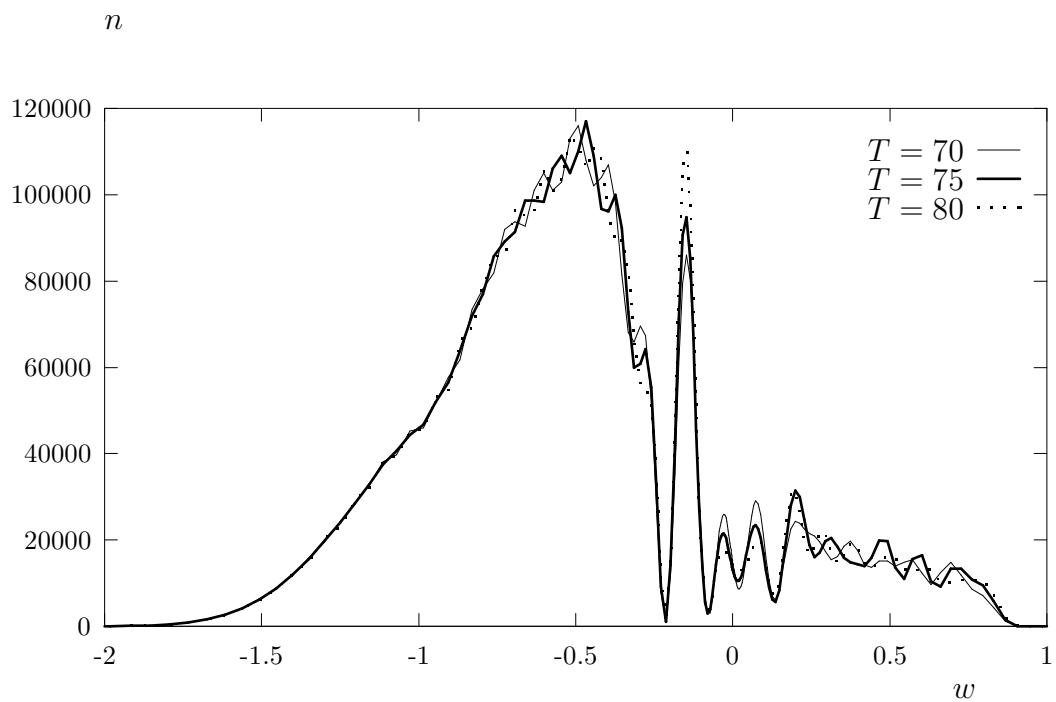


Рис. II.9.9. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 70, 75, 80$.

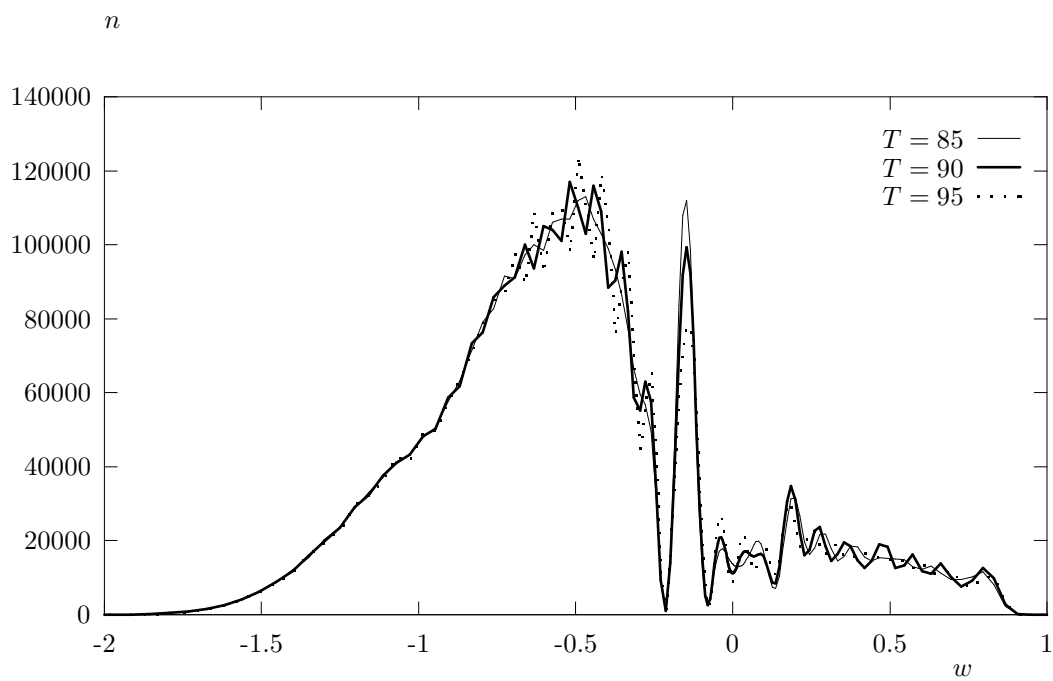


Рис. II.9.10. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 85, 90, 95$.

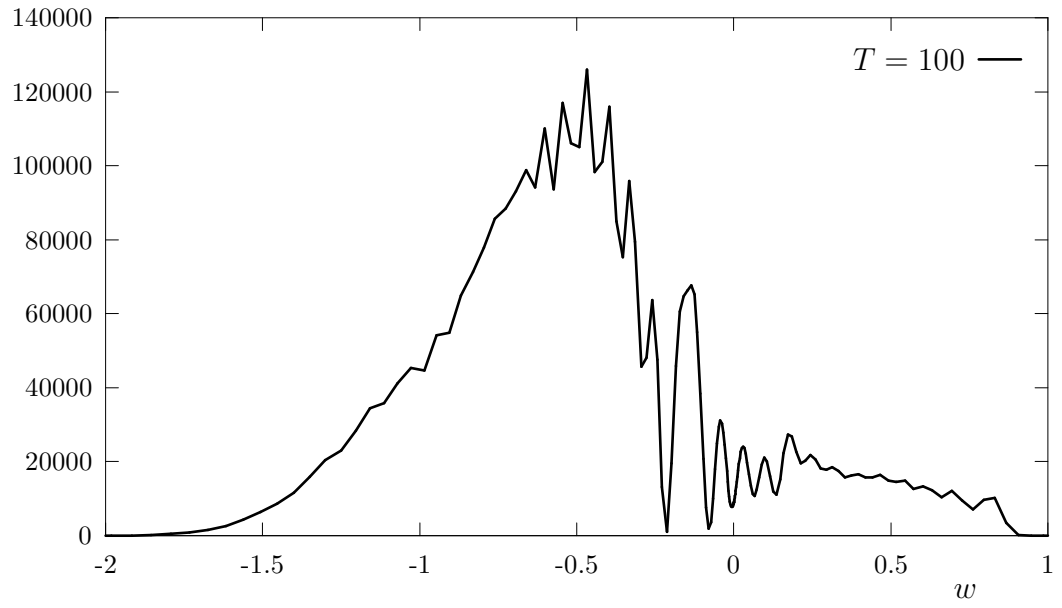
n 

Рис. II.9.11. Распределение внеконденсатных поляритонов при $T = 100$.

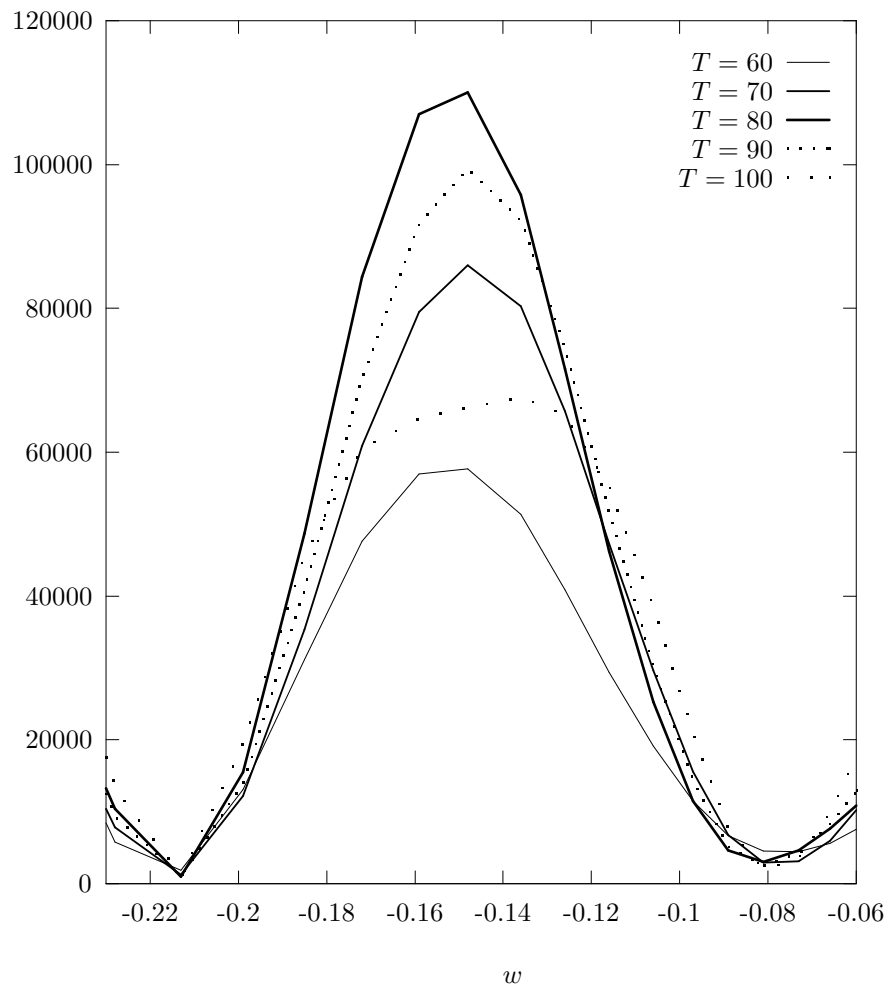
 n 

Рис. II.9.12. Возгорание и частичное угасание дополнительного острого пика при $w \approx -0.15$.

При изменении начальной плотности конденсата $|\Psi_{\mathbf{k}_0}(0)|^2/V$ меняется только масштаб представленных зависимостей в результате соответствующего преобразования безразмерных аргументов (II.9.19). Этот результат является следствием очень слабой зависимости решения уравнений (II.9.20), (II.9.21) от начальной плотности конденсата через посредство содержащейся в определении $G(T)$ функции $\varrho(w)$. Согласно рисункам II.9.5–II.9.11 $g(w, T)$ может быть отлична от нуля лишь при $-2 < w < 1$. Численные расчеты показывают, что в этой области $\varrho(w)$ практически не зависит от своего аргумента, что связано с особенностями дисперсии нижней поляритонной ветви в окрестности экситон-фотонного резонанса. Это обстоятельство позволяет заменить в определении (II.9.22) функции $G(T) = \varrho(w)$ на $\varrho(0)$. В результате получим: $G(T) \approx \varrho(0) \int dw g(w, T)$. Но, согласно (II.9.22) и (II.9.19), $\varrho(0)$ не зависит от начальной плотности конденсата и при заданных характеристиках кристалла определяется исключительно величиной волнового вектора \mathbf{k}_0 . Значению $|\mathbf{k}_0| = 3.6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ соответствует $\varrho(0) \sim 6.8 \cdot 10^{-6}$.

Отметим необратимый характер решения обратимых во времени уравнений (II.9.11)–(II.9.13) [283].

В связи с полученными результатами полезно упомянуть работу В. М. Галицкого и В. В. Якимца [284], рассмотревших релаксацию частицы, имевшей в начальный момент времени заданный импульс, в максвелловском газе. Согласно [284], квантовая неопределенность энергетических уровней, возникающая в результате взаимодействия, приводит к появлению степенных хвостов в импульсном распределении частиц. Частицы, описываемые такими хвостами, являются виртуальными. Показано, что процесс релаксации происходит немонотонно и функция распределения содержит осциллирующие члены.

§ 9.5 Заключительные замечания

Рассмотрим конкретную физическую ситуацию, в которой могли бы иметь место описанные выше физические явления. Пусть на полупроводниковый кристалл толщиной

L , помещенный в кольцевой резонатор, падает импульс резонансного лазерного излучения длительностью τ . Кольцевой резонатор необходим для удержания в системе как самого конденсата, так и внеконденсатных возбуждений. Если волновые векторы конденсатных и рассеянных мод удовлетворяют условию $kL \gg 1$, то распространение излучения через резонансную среду следует рассматривать как распространение взаимодействующих между собой смешанных экситон-фотонных мод – поляритонов. Поляритоны образуются за время $\tau_{pol} \sim \hbar/2\eta \ll \tau$ в результате взаимного превращения фотонов внутреннего электромагнитного поля (поля внутри полупроводникового образца) и экситонов с одним и тем же значением волнового вектора. Для 1А-экситона в кристалле CdS $\tau_{pol} \approx 7$ фс.

Будем предполагать, что длительность возбуждающего импульса ограничена неравенством $\tau \ll \tau_* = 10\lambda^{-1}$, означающим, что за промежуток времени τ поляритонный конденсат не успевает почувствовать обратное влияние рассеянных мод и сколько-нибудь заметно истощиться (см. рисунок II.9.2). Тогда на указанном временном интервале распространение конденсата может быть описано с помощью классических уравнений — линейного неоднородного уравнения Максвелла для потенциала электромагнитного поля и нелинейного неоднородного уравнения Шредингера для экситонной амплитуды [145, 146]. Неоднородные члены в уравнениях связаны с экситон-фотонным взаимодействием. Интегрируя уравнение Максвелла с учетом условий на границе кристалл-вакуум, найдем, что внутреннее электромагнитное поле представляет собой линейную суперпозицию

1. вторичного поля, создаваемого экситонной поляризацией;
2. поля, источником которого служит граница кристалла (оно возникает в результате воздействия на границу внешнего излучения [216]);
3. поля, существовавшего в кристалле в бесконечно отдаленном прошлом (при $t \rightarrow -\infty$). Это поле в рассматриваемом нами случае короткого возбуждающего импульса тождественно равно нулю.

Таким образом, можно говорить, что по прошествии времени τ в кристалле существует конденсатная поляритонная волна, созданная источником, локализованным на его границе. Роль возбуждающего импульса заключается в “создании” начального условия, которому следует подчинить волновую функцию конденсата в момент окончания действия импульса.

Приведенные здесь рассуждения имеют следующий недостаток. Использование лазерного излучения конечной длительности приводит к возбуждению поляритонного конденсата в конечной спектральной области шириной $\Delta\Omega \sim \tau^{-1}$, что противоречит начальному условию (II.9.15). Однако, это противоречие является несущественным, если $\Delta\Omega \ll \lambda$, т.е. когда $\tau \gg 0.1\tau_*$. При начальной плотности поляритонов в кристалле CdS ($10^{16} \div 10^{18}$) см $^{-3}$ имеем $\tau_* = (80 \div 0.8)$ пс, соответственно.

Таким образом, длительность возбуждающего импульса должна подчиняться довольно жестким требованиям, в некоторой степени противоречащим друг другу: $0.1\tau_* \ll \tau < \tau_*$. Тем не менее, можно ожидать, что хотя бы некоторые из особенностей временной эволюции системы первоначально когерентных поляритонов, обнаруженные нами в рамках рассматриваемой здесь модельной задачи, проявят себя и в случае несоблюдения первого из этих требований или незначительного нарушения второго.

Мощность источника лазерного излучения, возбуждающего в кристалле когерентную поляритонную волну, должна быть достаточно высокой, чтобы нутационные колебания плотности конденсата и особенности эволюции функции распределения рассеянных мод проявились раньше, чем успеют заметно сказаться релаксационные процессы с участием оптических фононов или утечка фотонов из резонатора. Указанные в предыдущем разделе физические явления имеют место на временном интервале, определяемом неравенствами $1.5\tau_* < t < 10\tau_*$ (см. рисунки II.9.2–II.9.11). Для определенности, будем полагать, что минимальное время релаксации τ_r конденсатных или рассеянных поляритонов на фононах не превосходит по величине время жизни фотона в резонаторе, связанное с коэффициентом пропускания его зеркал. Варьируя

частоту падающего на кристалл резонансного излучения ω в некоторой спектральной области, расположенной ниже частоты экситонного перехода ω^\perp , можно добиться, чтобы, с одной стороны, кинематические соотношения допускали возможность реального двухквантового выхода поляритонов из конденсата, а с другой — было обеспечено выполнение неравенства $\mathcal{T} < \tau_r$, где $\mathcal{T} = (1.5 \div 10)\tau_*$ — время задержки, определяемое моментом наблюдения. Время τ_r существенно зависит от состояния поляритона в зоне [252, 216]. При не очень высоких температурах ($k_B T \ll \hbar\omega_{ph}$, k_B — постоянная Больцмана), когда несущественны процессы антистоксового рассеяния поляритонов на оптических фононах, поляритонные состояния с энергией вблизи дна экситонной зоны характеризуются очень большими значениями времени релаксации ($\tau_r \sim 0.1 \text{ мкс} - 1 \text{ нс}$ [252]). Это соответствует резкому уменьшению плотности возможных конечных состояний при рассеянии поляритонов на фононах, когда эти состояния превращаются из экситоноподобных в фотоноподобные.

Для наблюдения процесса распада необходимо, чтобы толщина полупроводникового образца была ограничена неравенством $L < v_g \mathcal{T}$, в котором v_g — величина групповой скорости поляритона, зависящая от выбора значения волнового вектора \mathbf{k}_0 . Значению $|\mathbf{k}_0| = 3.6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ соответствует $v_g = 9.4 \cdot 10^9 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$. Обратим внимание также на то, что одна из мод, возникающих в элементарном акте рассеяния, располагается на фотоноподобном участке поляритонной ветви и обладает составляющей волнового вектора, направленной противоположно направлению распространения возбуждающего импульса [147]. Эта мода быстро покидает кристалл. Для ее возвращения в область рассеяния за время, значительно меньшее τ_* , необходимо выполнение неравенства $L \ll \frac{c}{\sqrt{\epsilon_B}} \tau_*$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты и выводы диссертационной работы:

1. Найдены волновые функции и исследован квазиэнергетический спектр электронно-дырочных возбуждений полупроводника в сильном поле внешней электромагнитной волны, вызывающей резонансные переходы электрона между краем валентной зоны и краем зоны проводимости. Показано, что квазиэнергетический спектр существенно зависит от типа поляризации внешней волны. В случае эллиптической поляризации квазиэнергетические дисперсионные кривые, соответствующие разным спиновым состояниям электрона в зоне, расщепляются. Однако, величина расщепления для каждой из этих кривых различна. В случае циркулярной поляризации волны расщепляется только одна из дисперсионных кривых. При линейной поляризации спиновое вырождение состояний электрона в зоне сохраняется.

2. Изучен спектр рекомбинационного излучения полупроводника в сильном поле произвольно поляризованной электромагнитной волны, возбуждающей резонансные межзонные переходы электрона. Показано, что зависимость плотности мощности излучения от его частоты имеет резонансный характер, причем количество и положение резонансных особенностей зависит от типа поляризации электромагнитной волны, температуры образца и направления, в котором наблюдается излучение.

3. Исследован спектр поглощения слабого электромагнитного сигнала электронно-дырочной подсистемой полупроводника в сильном поле резонансной электромагнитной волны произвольной поляризации. Показано, что зависимость коэффициента поглощения слабого сигнала от его частоты имеет резонансное поведение. Количество и положение пиков резонансного поглощения и усиления, а также количество и размеры областей прозрачности, зависят от температуры образца, типа поляризации как сильного, так и слабого электромагнитных полей, взаимной ориентации направлений их распространения.

4. Изучено магнитопоглощение слабой продольной акустической волны полупроводником в переменном электрическом поле, параллельном магнитному. Показано, что в случае, когда направление распространения акустической волны перпендикулярно сильному магнитному полю, в спектре поглощения возникают резонансные особенности, связанные с генерацией пары электронно-дырочных возбуждений.

5. Разработан метод нахождения кинетических уравнений, описывающих поведение неравновесных систем с нарушенной калибровочной симметрией. В борновском приближении получены квантовые кинетические уравнения для системы поляритонов большой плотности, возбуждаемой в прямозонном полупроводнике неравновесным поляритонным конденсатом с учетом обратного влияния рожденных пар поляритонов на состояние конденсатной моды.

6. В рамках приближения самосогласованного поля изучена временная эволюция неравновесного поляритонного конденсата. Показано, что в результате поляритон-поляритонного рассеяния значительное истощение конденсата происходит за очень короткий промежуток времени, определяемый его начальной плотностью. Распад конденсата имеет вид нелинейных затухающих осцилляций. Обращается внимание на необратимый характер решения обратимых во времени эволюционных уравнений.

7. Исследована динамика функции распределения внеконденсатных поляритонов, возбуждаемых в прямозонном полупроводнике неравновесным поляритонным конденсатом. Показано, что на начальной стадии эволюции системы она имеет вид симметричного колокола. Затем на контуре функции распределения появляются осцилляции, которые с течением времени переходят в мелкую хаотическую рябь. Площадь под контуром функции распределения испытывает осцилляции, синфазные осцилляциям плотности поляритонного конденсата. Отмечается зарождение коротковолнового крыла функции распределения, а также возгорание, а затем частичное угасание дополнительного острого пика, возникающего на временном интервале, характеризующемся малыми значениями плотности поляритонного конденсата и относительно медленным ее изменением.

Основные результаты диссертации докладывались на IX и XV Всесоюзных конференциях по когерентной и нелинейной оптике (Ленинград – 1978, Санкт-Петербург – 1995), IX, X, XII и XIV Всесоюзных совещаниях по теории полупроводников (Тбилиси – 1978, Новосибирск – 1980, Ташкент – 1985, Донецк – 1989), VIII Международной конференции по квантовой электронике и нелинейной оптике (Польша, Познань – 1978), Всесоюзной конференции “Использование современных физических методов в неразрушающих исследованиях и контроле” (Хабаровск – 1984), XIV Всесоюзной конференции по акустоэлектронике и физической акустике (Кишинев – 1989), IV Всесоюзном симпозиуме “Световое эхо и пути его практических применений” (Куйбышев – 1989), II и V Международных семинарах по нелинейной оптике и кинетике возбуждений в полупроводниках (ГДР, Бад Штуер – 1989; Германия, Грааль Мюриц – 1997), Международном семинаре по бозе-эйнштейновской конденсации (Италия, Левико Терме – 1993), Международной конференции по люминесценции и оптической спектроскопии в конденсированных средах (США, Коннектикут – 1993), Международной конференции по экситонным процессам в конденсированных средах (Австралия, Дарвин – 1994), Европейской научной конференции “Bose–Einstein

Condensation” (Франция, Страсбург – 1995), XIII Международной конференции по физике полупроводников (Германия, Берлин – 1996), Международной полупроводниковой конференции (Румыния, Синая – 1996), Международной конференции по оптике экситонов в конденсированных средах, посвященной памяти Е. Ф. Гросса (Россия, Санкт-Петербург – 1997), на научных семинарах Теоретического сектора Института физики полупроводников АН Украины и Отдела теории полупроводников и квантовой электроники Института прикладной физики АН РМ, Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна) и опубликованы в работах:

1. I. V. Belousov, On Resonance Compton Scattering in the Field of an Intense Electromagnetic Wave. *Optics Communications*, **20**, 205 (1977).

2. И. В. Белоусов, О резонансном комптоновском рассеянии в поле интенсивной электромагнитной волны. В кн. *Собственные полупроводники при больших уровнях возбуждения* (Штиинца, Кишинев, 1978), с. 173–179.

3. В. П. Олейник, Д. И. Абакаров, И. В. Белоусов, Коллективные возбуждения электронов и дырок в сильном электромагнитном поле и поглощение света в полупроводнике в условиях параметрического резонанса. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **75**, 312 (1978).

4. И. В. Белоусов, Решения двухзонного уравнения кейновской модели полупроводника в однородных постоянном магнитном и переменном электрическом полях. В кн. *Экситоны и биэкситоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 154–160.

5. И. В. Белоусов, Комптоновское рассеяние в сильном электромагнитном поле с

точки зрения двух наблюдателей. В кн. *Молодежь и научно-технический прогресс* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 224–225.

6. I. V. Belousov, Compton Scattering in a Strong Laser Field from two Observers' point of view. *Physics Letters A*, **106**, 7 (1984).

7. I. V. Belousov, V. P. Oleinik, Restructuring of the Energy Spectrum and Light Absorption in a Semiconductor in an Intense Electromagnetic Field. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **12**, 655 (1979).

8. И. В. Белоусов, В. А. Синяк, Решения двухзонного уравнения кейновской модели полупроводника в поле интенсивной электромагнитной волны с переменной амплитудой и фазой. *Теоретическая и математическая физика*, **5**, 190 (1980).

9. И. В. Белоусов, В. В. Сергенту, Решения двухзонного уравнения кейновской модели полупроводника в однородных постоянном магнитном и переменном электрическом полях. В кн. *Экситоны и биэкситоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 154–160.

10. И. В. Белоусов, О роли асимптотических условий, налагаемых на волновые функции электронно-дырочных возбуждений узкозонного полупроводника во внешнем поле интенсивной электромагнитной волны. В кн. *Экситоны и биэкситоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 160–181.

11. В. П. Олейник, И. В. Белоусов, *Проблемы квантовой электродинамики вакуума, диспергирующих сред и сильных полей* (Штиинца, Кишинев, 1983).

12. И. В. Белоусов, В. В. Сергенту, В. В. Фролов, Излучательная рекомбинация электронов и дырок полупроводника в поле сильной электромагнитной волны. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **91**, 626 (1986).

13. I. V. Belousov, V. V. Serzhentu, V. V. Frolov, Recombination Radiation of a Semiconductor

in the Field of a Strong Electromagnetic Wave. *Optics Communications*, **57**, 102 (1986).

14. И. В. Белоусов, В. В. Серженту, Поглощение ультразвука электронами и дырками полупроводника в постоянном магнитном поле при резонансном лазерном возбуждении. В кн. *Когерентные состояния и фазовые переходы в системе экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1985), с. 143–163.

15. I. V. Beloussov, V. V. Serzhentu, On the Light Absorption in a Semiconductor in the Field of a Strong Electromagnetic Wave. *Optics Communications*, **66**, 115 (1988).

16. И. В. Белоусов, В. В. Серженту, Двойной оптический резонанс в двухзонном полупроводнике. В кн. *Квантово-статистические свойства экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1988), с. 119–129.

17. И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, Кинетика поляритонов большой плотности. I. Уравнение Дайсона. *Препринт ИПФ АН МССР № 13* (Штиинца, Кишинев, 1989).

18. И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, Кинетика поляритонов большой плотности. II. Кинетические уравнения. *Препринт ИПФ АН МССР № 14* (Штиинца, Кишинев, 1989).

19. И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, Кинетика поляритонов большой плотности. I. Уравнение Дайсона. В кн. *Экситоны и биэкситоны в размерно-ограниченных системах* (Штиинца, Кишинев, 1990), с. 133–176.

20. I. V. Beloussov, Yu. M. Shvera, Kinetics of Partially Coherent Polaritons in Semiconductors. Schwinger-Dyson Equations. *Physica Status Solidi* (b), **139**, 91 (1990).

21. I. V. Beloussov, Yu. M. Shvera, Kinetics of Partially Coherent Polaritons in Semiconductors. *Zeitschrift für Physik B*, **90**, 51 (1993).

22. И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, Кинетика поляритонов большой плотности. II. Кинетические уравнения. В кн. *Взаимодействие экситонов с лазерным излучением* (Шти-

инца, Кишинев, 1991), с. 57–74.

23. И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, Кинетические уравнения для системы частично когерентных поляритонов большой плотности в полупроводниках. *Теоретическая и математическая физика*, **85**, 237 (1990).

24. I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, Decay of Non-Equilibrium Polariton Condensate in Semiconductors. *Preprint of Int. Centre of Theoretical Physics No. IC/93/235* (Miramare–Trieste, 1993).

25. I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, Decay of Non-Equilibrium Polariton Condensate. In *Bose–Einstein Condensation* ed by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, New York, 1995), pp. 513–518.

26. I. V. Belousov, V. V. Frolov, Multiple Polariton Echo in Direct-Gap Semiconductors. In *Coherent Phenomena and Amplification without Inversion* ed. by Anatoli V. Andreev, Olga Kocharovskaya and Paul Mandel (SPIE (– The International Society for Optical Engineering) Proceedings Series, v. **2798**, Washington, 1996), pp. 163–174.

27. И. В. Белоусов, В. В. Фролов, Нелинейная собственная нутация поляритонов большой плотности в прямозонных полупроводниках. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **109**, 1806 (1996).

28. I. V. Belousov, V. V. Frolov, Nonmonotonic Decay of Nonequilibrium Polariton Condensate in Direct-Gap Semiconductors. *Physical Review B*, **54**, 2523 (1996).

29. I. V. Belousov, V. V. Frolov, Time Dynamics of Partially Coherent Polaritons in Direct-Gap Semiconductors. In the Proceedings of the 23th *Int. Conf. on the Physics of Semiconductors* (Berlin, Germany, Technische Universität, July 21–26, 1996) ed. by Matthias Scheffler and Roland Zimmermann (World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Singapore, 1996), v. **1**, pp. 361–364.

30. I. V. Belousov, V. V. Frolov, Decay of an Intense Polariton Wave in Direct-Gap Semiconductors and Time Dynamics of the Distribution of Scattered Polaritons. *Physica Status Solidi* (b), **206**, 249 (1998).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение i

Обозначения и система единиц, используемые в Части I

Обозначения, используемые в Части I, в основном, заимствованы из известного учебника [179]. Используется система единиц, в которой $\hbar = 1$. Совокупность пространственно-временных координат образует 4-вектор со следующими контравариантными компонентами ($\mu, \nu = 0, x, y, z$; параметр s определен в § 1.6):

$$x^\mu = (st, \mathbf{r}) \equiv x.$$

Ковариантные компоненты получаются изменением знака пространственных координат:

$$x_\mu = (st, -\mathbf{r}) = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

где метрический тензор $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ определен согласно

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По дважды повторяющемуся индексу, который один раз встречается вверху, а второй раз — внизу, подразумевается суммирование.

Инвариантное относительно “преобразования Лоренца” скалярное произведение 4-векторов x^μ и $q^\nu = (q_0/s, \mathbf{q}) \equiv q$ определяется формулой $qx = q_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} q_\nu x^\mu = q_0 t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$.

Приняты обозначения:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) = g^{\mu\nu} \partial_\nu = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \equiv \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Для матриц Дирака, удовлетворяющих условию антикоммутации

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},$$

выбрано представление

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ -\sigma_n & 0 \end{pmatrix} \quad (n = x, y, z),$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули размерности 2×2 , I — единичная матрица той же размерности.

Для “скалярного произведения” матрицы γ с обычным 4-вектором принято обозначение:

$$\gamma_\mu q^\mu \equiv \hat{q} = \gamma_0 (q_0/s) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q},$$

$$\gamma_\mu \partial^\mu \equiv \hat{\partial} = \frac{1}{s} \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.$$

Для дираковски сопряженного биспинора используется обозначение

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0.$$

Используются функции

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Символ $::$ означает нормальное упорядочение операторов в произведении.

Приложение ii

Волновые функции носителей заряда двухзонного полупроводника в поле интенсивной электромагнитной волны с переменной амплитудой и фазой

Получим приближенные решения двухзонного уравнения (1.17) в случае, когда внешнее поле $A_{ext}(x)$ представляет собой амплитудно- и фазово-модулированную электромагнитную волну [202, 203, 204]:

$$A_{ext}^\mu(x) = (0, A_x(\eta, \xi), A_y(\eta, \xi), 0) ,$$

$$A_x(\eta, \xi) = a\mathcal{A}_x(\eta) \cos 2(\xi - \vartheta(\eta)) , \quad A_y(\eta, \xi) = a\mathcal{A}_y(\eta) \sin 2(\xi - \vartheta(\eta)) , \quad (\text{ii.1})$$

$$\eta = k_1 x, \quad k_1 = (k_{10}/s, 0, 0, k_{1z}) .$$

Здесь $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \vartheta$ — вещественные гладкие функции переменной η . Финитные функции \mathcal{A}_x и \mathcal{A}_y , принимающие значения в интервале $(-1, +1)$ и равные, соответственно, 1 и $G = \text{const}$ ($|G| \leq 1$) при $\eta = 0$, определяют амплитудную модуляцию электромагнитной волны, а функция ϑ — ее фазовую модуляцию. Ниже мы будем предполагать выполнение неравенств

$$\frac{sk_{1z}}{k_{10}} < 1, \quad \frac{k_{10}}{k_0} \ll 1 \quad (\text{ii.2})$$

и резонансного условия (1.19).

§ ii.1 Решение двухзонного уравнения во вспомогательной “системе отсчета”

Представим решение уравнения (1.17) с 4–потенциалом внешнего поля (I.3.7), (ii.1) во вспомогательной “системе отсчета” (см. § 3.2) в виде разложения

$$\psi'_{\mathbf{p}'}(x') = \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} R_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \varphi_{j\mathbf{p}', \sigma}^{(j)'}(x'), \quad (\text{ii.3})$$

в котором

$$\begin{aligned} \eta' &= k'_1 x' = \eta, \\ k_1'^{\mu}(k) &= L_{\nu}^{\mu} k^{\nu} = \left(\frac{k k_1}{(k^2)^{1/2}}, 0, 0, \frac{\hbar k_1}{(k^2)^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{ii.4})$$

$\varphi_{\mathbf{p}', \sigma}^{(j)'}(x')$ — решения двухзонного уравнения для свободных носителей заряда во вспомогательной “системе отсчета”, определенные формулами (I.3.19)–(I.3.21), а коэффициентные функции $R_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi')$ удовлетворяют системе уравнений ($j = \pm, \sigma = \pm 1$)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial \xi'} R_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') &= \sum_{j_1=\pm j} \sum_{\sigma_1=\pm \sigma} \left[V_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \right. \\ &\quad \left. + i W_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial \eta'} \right] R_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \exp [i \xi' (j - j_1) (2\varepsilon(\mathbf{p}')/k'_0)]. \end{aligned} \quad (\text{ii.5})$$

Матричные элементы $V_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') = \left[V_{\sigma_1, \sigma}^{(j_1, j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \right]^*$ определяются формулами (I.3.25), а матричные элементы $W_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j_1)}(\mathbf{p}') = \left[W_{\sigma_1, \sigma}^{(j_1, j)}(\mathbf{p}') \right]^*$ — выражениями

$$\begin{aligned} W_{\sigma, \sigma_1}^{(j, j)}(\mathbf{p}') &= -2\delta_{\sigma, \sigma_1} \left[\frac{k'_{10}}{k'_0} - j \frac{s k'_{1z}}{k'_0} \frac{s p'_z}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \right], \\ W_{\sigma, \sigma}^{(j, -j)}(\mathbf{p}') &= -2\sigma \frac{s k'_{1z}}{k'_0} \left[1 - \frac{s p'_z}{\varepsilon_{\mathbf{p}'}} \frac{s p'_z}{m s^2 + \varepsilon(\mathbf{p}')} \right], \\ W_{\sigma, -\sigma}^{(j, -j)}(\mathbf{p}') &= 2 \frac{s k'_{1z}}{k'_0} \frac{s p'_z}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{s (p'_x - i \sigma p'_y)}{m s^2 + \varepsilon(\mathbf{p}')} . \end{aligned} \quad (\text{ii.6})$$

Ограничиваясь, как и в § 3.2, областью изменения параметров задачи, определяемой условиями (I.3.26), совершим в (ii.5) подстановку

$$R_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') = r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \exp \left\{ i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 [j \delta'(\mathbf{p}') - V_{\sigma, \sigma}^{(j, j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1)] \right\}, \quad (\text{ii.7})$$

где величина $\delta'(\mathbf{p}')$ определяется равенством (I.3.27). В результате для функций $r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi')$ получим систему уравнений ($j = \pm, \sigma = \pm 1$)

$$\begin{aligned} i \frac{d}{d\xi'} r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') &= \sum_{j_1=\pm j} \sum_{\sigma_1=\pm\sigma} \left[j \delta'(\mathbf{p}') \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} + (1 - \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1}) \tilde{V}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \right. \\ &\quad + \tilde{W}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \int_0^{\xi'} d\xi'_1 \frac{\partial}{\partial \eta'} V_{\sigma_1,\sigma_1}^{(j_1,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1) \\ &\quad \left. + i \tilde{W}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \frac{\partial}{\partial \eta'} \right] e^{i(j-j_1)\xi'} r_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') , \end{aligned} \quad (\text{ii.8})$$

в которой

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \\ \tilde{W}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \\ W_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}') \end{bmatrix} \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 [V_{\sigma,\sigma}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1) - V_{\sigma_1,\sigma_1}^{(j_1,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1)] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{ii.9})$$

Для приближенного решения полученной системы точных уравнений (ii.8) воспользуемся методом усреднения (см. § 3.2). В первом приближении метода

$$r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') = r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \exp[-i\lambda(\mathbf{p}')\xi'] , \quad (\text{ii.10})$$

где величина $\lambda(\mathbf{p}')$ определяется с помощью асимптотических условий, налагаемых на решения уравнения (I.3.6), а функции $r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta')$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &[\lambda(\mathbf{p}') - j\delta'(\mathbf{p}')] r_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \\ &= \sum_{j_1=\pm j} \sum_{\sigma_1=\pm\sigma} \left[(1 - \delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1}) f_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') + \tilde{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') + i \bar{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') \frac{d}{d\eta} \right] r_{\sigma_1}^{(j_1)}(\mathbf{p}', \eta') . \end{aligned} \quad (\text{ii.11})$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') &= \pi^{-1} \int_0^{\pi} d\xi' \tilde{V}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') e^{i(j-j_1)\xi'} , \\ \tilde{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') &= \pi^{-1} \int_0^{\pi} d\xi' \tilde{W}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') \int_0^{\xi'} d\xi'_1 \frac{\partial}{\partial \eta'} V_{\sigma_1,\sigma_1}^{(j_1,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1) e^{i(j-j_1)\xi'} , \end{aligned} \quad (\text{ii.12})$$

$$\bar{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta') = \pi^{-1} \int_0^\pi d\xi' \tilde{W}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta', \xi') e^{i(j-j_1)\xi'}.$$

Оценка этих величин приводит к следующему результату

$$\begin{aligned} f_{\sigma,-\sigma}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \eta') &= 0, \quad f_{\sigma,-\sigma}^{(j,-j)}(\mathbf{p}', \eta') \sim \frac{2e_0 a s}{ck'_0}, \quad f_{\sigma,\sigma}^{(j,-j)}(\mathbf{p}', \eta') \sim \frac{2e_0 a s}{ck'_0} \frac{2sp'_z}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{s\sqrt{p_x'^2 + p_y'^2}}{\varepsilon(\mathbf{p}')}, \\ \tilde{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j_1)}(\mathbf{p}', \eta'), \bar{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,-j)}(\mathbf{p}', \eta') &\sim \frac{2e_0 a s}{ck'_0} \frac{sp'_n}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{k'_{10}}{k'_0} \quad (n = x, y), \quad (\text{ii.13}) \\ \bar{f}_{\sigma,\sigma_1}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \eta') &\sim \delta_{\sigma,\sigma_1} \frac{k'_{10}}{k'_0}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (ii.13), а также (I.3.26) и (ii.2), пренебрежем в правой части (ii.11) членами высшего порядка малости. В результате получим для функций $r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta')$ более простую систему уравнений, которую удобно представить в форме

$$iv' \frac{d}{d\eta'} \hat{r}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \hat{\mathcal{H}}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \hat{r}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta'), \quad (\text{ii.14})$$

$$\hat{r}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \begin{bmatrix} r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \\ r_{-\sigma}^{(-j)}(\mathbf{p}', \eta') \end{bmatrix} \exp[i\lambda(\mathbf{p}')(\eta'/v')], \quad (\text{ii.15})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \rho' \mathcal{A}_\sigma^{(j)}(\eta') [\sigma_x \cos 2\vartheta(\eta') - j\sigma_y \sin 2\vartheta(\eta')] - j\delta'(\mathbf{p}') \sigma_z, \quad (\text{ii.16})$$

$$v' = -2 \frac{k'_{10}}{k'_0} \ll 1, \quad \mathcal{A}_\sigma^{(j)}(\eta') = \frac{1}{2} [\mathcal{A}_x^{(j)}(\eta') + j\sigma \mathcal{A}_y^{(j)}(\eta')]. \quad (\text{ii.17})$$

Заметим, что в случае, когда модулирующие функции $\mathcal{A}_x, \mathcal{A}_y, \vartheta = \text{const}$, точное решение матричного уравнения (ii.14)–(ii.17) не составляет труда и сводится к диагонализации матрицы $\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{(j)}$. Учитывая это обстоятельство, попытаемся получить приближенное решение данного уравнения для случая, когда зависимость модулирующих функций от переменной η' является слабой (см. (ii.26)), в виде разложения по полному набору ортонормированных спинорных функций $\hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta')$, в базисе которых матрица $\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{(j)}$ является диагональной:

$$\hat{r}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \sum_{\nu=\pm 1} l_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta'), \quad (\text{ii.18})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \nu \lambda_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta') \hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta'), \quad (\text{ii.19})$$

$$\lambda_\sigma^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta') = \sqrt{\delta'^2(\mathbf{p}') + \rho'^2 \mathcal{A}_\sigma^{(j)2}(\eta')},$$

$$\left[\hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \right]^\dagger \hat{U}_{\sigma,\nu_1}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \delta_{\nu,\nu_1} \quad (\nu, \nu_1 = \pm 1) . \quad (\text{ii.20})$$

Приведем явный вид функций $\hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta')$:

$$\hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - j\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right)} e^{ij\vartheta(\eta')} \\ \nu \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + j\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right)} e^{-ij\vartheta(\eta')} \end{bmatrix} . \quad (\text{ii.21})$$

Подставляя разложение (ii.18) в (ii.14) и учитывая (ii.19), (ii.20), получаем уравнение

$$iv' \frac{d}{d\eta'} \hat{\mathcal{L}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \hat{\mathcal{H}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \hat{\mathcal{L}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') , \quad (\text{ii.22})$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \begin{pmatrix} l_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \\ l_{\sigma,-\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') \end{pmatrix} , \quad l_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \nu l_{-\sigma,\nu}^{(-j)}(\mathbf{p}', \eta') , \quad (\text{ii.23})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') &= j \frac{\rho' \mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \left[\sigma_x \left(v' \frac{d\vartheta(\eta')}{d\eta'} \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu \sigma_y \left(\frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right) \left(\frac{v' 1}{2} \frac{1}{\mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')} \frac{d\mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')}{d\eta'} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{ii.24})$$

$$+ \left[\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta') - \left(\frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right) \left(v' \frac{d\vartheta(\eta')}{d\eta'} \right) \right] . \quad (\text{ii.25})$$

При выполнении неравенств

$$\begin{aligned} \left| \frac{\rho' \mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \frac{v' d\mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')}{2 d\eta'} \right| &\ll \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta') |\mathcal{A}_{\sigma}^{(j)}(\eta')| , \\ \left| v' \frac{d\vartheta(\eta')}{d\eta'} \right| &\ll \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta') \end{aligned} \quad (\text{ii.26})$$

приближенное решение уравнения (ii.22)–(ii.24) имеет вид:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \exp \left[-\frac{i\nu}{v'} \int_{\eta'_0}^{\eta'} d\eta'_1 \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta'_1) \right] \\ \mathcal{C}_{\sigma,-\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \exp \left[\frac{i\nu}{v'} \int_{\eta'_0}^{\eta'} d\eta'_1 \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta'_1) \right] \end{bmatrix} , \quad (\text{ii.27})$$

$$\mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = \nu \mathcal{C}_{-\sigma,\nu}^{(-j)}(\mathbf{p}') , \quad (\text{ii.28})$$

где константы $\mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}')$ и η'_0 определяются с помощью асимптотических условий, налагаемых на волновые функции носителей заряда полупроводника.

Объединяя формулы (ii.3), (ii.7), (ii.10), (ii.15), (ii.18), (ii.21), (ii.27), получаем приближенное решение уравнения (1.17), (ii.1) в форме

$$\begin{aligned} \psi'_{\mathbf{p}'}(x') &= e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}'} \sum_{j=\pm} \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \nu j \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right)} e^{-ij(\xi' - \vartheta(\eta')) u_{\sigma}^{(j)'}(j\mathbf{p}')} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{v'} \int_{\eta'_0}^{\eta'} d\eta'_1 [\nu \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta'_1) + \lambda(\mathbf{p}')] \right. \\ &\left. - i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 [\lambda(\mathbf{p}') + V_{\sigma,\sigma}^{(j,j)}(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{ii.29})$$

Предположим теперь, что $\mathcal{A}_x(\eta'), \mathcal{A}_y(\eta'), \vartheta(\eta') \rightarrow 0$ при $\eta' \rightarrow -\infty$. Полагая $\eta'_0 \rightarrow -\infty$, выберем константы $\lambda(\mathbf{p}')$ и $\mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}$ таким образом, чтобы решение (ii.29) удовлетворяло асимптотическому условию

$$\psi'_{j_1\mathbf{p}'}(x') \equiv \psi_{\mathbf{p}',\sigma_1}^{(j_1)'}(x') \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p}',\sigma_1}^{(j_1)'}(x') \quad \text{при } \eta' \rightarrow -\infty. \quad (\text{ii.30})$$

Имеем:

$$\lambda(\mathbf{p}') = j_1 \delta'(\mathbf{p}') , \quad \mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = \Theta[-j_1 \nu \delta'(\mathbf{p}')] (\delta_{j,j_1} \delta_{\sigma,\sigma_1} + \nu \delta_{j,-j_1} \delta_{\sigma,-\sigma_1}) . \quad (\text{ii.31})$$

Подставляя (ii.31) в (ii.29) и используя равенство (I.3.45), получаем для функции $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ выражение

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') &= \exp \left\{ \frac{ij}{v'} \int_{-\infty}^{\eta'} d\eta'_1 [\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta'_1) \text{sign } \delta'(\mathbf{p}') - \delta'(\mathbf{p}')] \right\} \\ &\times \left[\varphi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right)} \exp \left(ij\vartheta(\eta') - i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1) \right) \right. \\ &\left. + \gamma_0 \varphi_{\mathbf{p}',-\sigma}^{(-j)'}(x') e^{-2ij(p' - \frac{k'}{2})x'} \text{sign } \delta'(\mathbf{p}') \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta'(\mathbf{p}')|}{\lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}', \eta')} \right)} \right. \\ &\left. \times \exp \left(-ij\vartheta(\eta') + i \int_0^{\xi'} d\xi'_1 V'(\mathbf{p}', \eta', \xi'_1) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{ii.32})$$

в котором

$$V'(\mathbf{p}', \eta', \xi') = 2 \frac{s\mathbf{p}'}{\varepsilon(\mathbf{p}')} \frac{e_0 \mathbf{A}'_{ext}(\eta', \xi')}{ck'_0}. \quad (\text{ii.33})$$

Наоборот, если $\mathcal{A}_x(\eta'), \mathcal{A}_y(\eta'), \vartheta(\eta') \rightarrow 0$ при $\eta' \rightarrow +\infty$, то выполнив в интеграле по η'_1 в (ii.32) замену нижнего предела интегрирования $-\infty$ на $+\infty$, получим решение $\chi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ уравнения (1.17), (ii.1), удовлетворяющее асимптотическому условию

$$\chi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') \rightarrow \varphi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x') \quad \text{при } \eta' \rightarrow +\infty. \quad (\text{ii.34})$$

Отметим, что если $\mathcal{A}_x(\eta'), \mathcal{A}_y(\eta'), \vartheta(\eta') \rightarrow 0$ при $|\eta'| \rightarrow +\infty$, то функции $\psi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ и $\chi_{\mathbf{p}',\sigma}^{(j)'}(x')$ совпадают (с точностью до несущественных для наших целей фазовых множителей, которые мы всюду опускаем).

§ ii.2 Решения двухзонного уравнения в исходной “системе отсчета”

Используя полученные выше результаты, найдем приближенные решения двухзонного уравнения (1.17) с 4-потенциалом внешнего поля (ii.1) в исходной “системе отсчета”. Аналогично тому, как это было сделано в § 3.3, легко показать, что функции

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) = \Lambda \psi_{\mathbf{p}'(p),\sigma}^{(j)}[x'(p)] \quad (\text{ii.35})$$

представляют собой искомые приближенные решения двухзонного уравнения, удовлетворяющие асимптотическому условию

$$\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \rightarrow \varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty, \quad (\text{ii.36})$$

если $\mathcal{A}_x(\eta), \mathcal{A}_y(\eta), \vartheta(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow -\infty$. Здесь $\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$ — решения двухзонного уравнения для свободных носителей заряда полупроводника ($A_{ext}(x) \equiv 0$), определенные формулами (I.3.59)–(I.3.61). Приведем явный вид функций $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x') = & \exp \left\{ \frac{ij}{v} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta_1 [\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}, \eta_1) \text{sign } \delta(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p})] \right\} \\ & \times \left[\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}, \eta)} \right)} \exp \left(ij\vartheta(\eta) - i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \hat{k} (k^2)^{-1/2} \varphi_{\mathbf{p}, -\sigma}^{(-j)}(x) e^{-2ij(p-\frac{k}{2})x} \text{sign } \delta(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|\delta(\mathbf{p})|}{\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}, \eta)} \right)} \\
& \times \exp \left(-ij\vartheta(\eta) + i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \Bigg] ,
\end{aligned} \tag{ii.37}$$

где

$$\begin{aligned}
v &= -2 \frac{kk_1}{k^2}, \quad \lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}, \eta) = \sqrt{\delta^2(\mathbf{p}) + \rho^2 \mathcal{A}_{\sigma}^{(j)2}(\eta)}, \\
V(\mathbf{p}, \eta, \xi) &= 2e_0 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}_{ext}(\eta, \xi)}{ckp}.
\end{aligned} \tag{ii.38}$$

Остальные обозначения содержатся в формулах (I.3.51) и (I.3.58).

Если $\mathcal{A}_x(\eta), \mathcal{A}_y(\eta), \vartheta(\eta) \longrightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$, то решения $\chi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x)$ уравнения (1.17), (ii.1), удовлетворяющие условию

$$\chi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x) \longrightarrow \varphi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x) \quad \text{при } \eta \rightarrow +\infty, \tag{ii.39}$$

могут быть получены из (ii.37) формальной заменой в интеграле по η_1 нижнего предела интегрирования $-\infty$ на $+\infty$. В случае же, когда $\mathcal{A}_x(\eta), \mathcal{A}_y(\eta), \vartheta(\eta) \longrightarrow 0$ при $|\eta| \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\psi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x) \equiv \chi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x). \tag{ii.40}$$

Рассмотрим ситуацию, в которой нарастание (убывание) амплитуды и фазы электромагнитной волны с изменением переменной $t - (k_{1z}/k_{10})z$ осуществляется бесконечно медленно. Переходя в (ii.37) к пределу $k_{10} \rightarrow +0$ (при $\eta \rightarrow 0, k_{1z}/k_{10} = \text{const}$), приходим к следующему результату (полагаем $\vartheta(0) = 0$):

$$\psi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x) = \chi_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(x) = f_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(\xi) \exp \left(-ij\tilde{P}_{\sigma}^{(j)}x \right), \tag{ii.41}$$

где

$$\tilde{P}_{\sigma}^{(j)} = p + \frac{1}{2} \left[\lambda_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}, \eta) \varsigma(\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{p}) \right] \frac{k^2}{kk_1} k_1 \quad (\varsigma(\mathbf{p}) = \text{sign } \delta(\mathbf{p})) \tag{ii.42}$$

— 4-вектор квазиэнергии-квазиимпульса частицы во внешнем поле (ii.1), включающемся (выключающемся) бесконечно медленно по переменной $t - (k_{1z}/k_{10})z$, $f_{\mathbf{p}, \sigma}^{(j)}(\xi)$ — периодическая (с периодом внешнего поля) функция переменной 2ξ , определяемая формулами (I.3.87), (I.3.89).

Из (ii.37) видно, что в случае, когда при изменении переменной η в некотором отрезке $[\eta_1, \eta_2]$ ($0 \in [\eta_1, \eta_2]$) функции $\mathcal{A}_x(\eta)$, $\mathcal{A}_y(\eta)$, $\vartheta(\eta) = \text{const}$, решения уравнения (1.17), (ii.1) на этом отрезке определяются выражением (ii.41), полученным нами для предельной ситуации $k_{10} \rightarrow +0$ (при $\eta \rightarrow 0$, $k_{1z}/k_{10} = \text{const}$).

Полученные здесь результаты справедливы при выполнении условий (I.3.75), (ii.2) и неравенств

$$\left| \frac{\rho \mathcal{A}_\sigma^{(j)}(\eta)}{\lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}, \eta)} \frac{\delta(\mathbf{p})}{\lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}, \eta)} \frac{v}{2} \frac{d\mathcal{A}_\sigma^{(j)}(\eta)}{d\eta} \right| \ll \lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}, \eta) |\mathcal{A}_\sigma^{(j)}(\eta)|, \quad \left| v \frac{d\vartheta(\eta)}{d\eta} \right| \ll \lambda_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}, \eta). \quad (\text{ii.43})$$

§ ii.3 Точно решаемая модель

Приведем частный пример, когда уравнение (ii.14)–(ii.17) допускает точное решение. Пусть¹

$$(\mathcal{A}_x(\eta), \mathcal{A}_y(\eta)) = (1, G) e^{-|\eta|}, \quad \vartheta(\eta) \equiv 0. \quad (\text{ii.44})$$

Тогда при $\eta' < 0$ точное решение уравнения (ii.14)–(ii.17) выражается через функции Бесселя:

$$r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \exp \left[\left(\frac{1}{2} - i \frac{\lambda(\mathbf{p}')}{v'} \right) \eta' \right] \sum_{\nu=\pm} \mathcal{D}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') J_{\frac{1}{2}j\nu - i\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{v'}} \left(\frac{\rho_\sigma^{(j)'}}{v'} e^{\eta'} \right), \quad (\text{ii.45})$$

$$\mathcal{D}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = -ij\nu \mathcal{D}_{-\sigma,\nu}^{(-j)}(\mathbf{p}').$$

Соответственно, при $\eta' > 0$:

$$r_\sigma^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \exp \left[- \left(\frac{1}{2} + i \frac{\lambda(\mathbf{p}')}{v'} \right) \eta' \right] \sum_{\nu=\pm} \tilde{\mathcal{D}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') J_{-\frac{1}{2}j\nu - i\nu \frac{\delta'(\mathbf{p}')}{v'}} \left(\frac{\rho_\sigma^{(j)'}}{v'} e^{\eta'} \right), \quad (\text{ii.46})$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') = -ij\nu \tilde{\mathcal{D}}_{-\sigma,\nu}^{(-j)}(\mathbf{p}').$$

Приведем приближенные решения уравнения (1.17) с 4–потенциалом внешнего поля (ii.1), (ii.44) сразу в исходной “системе отсчета”. Используя (ii.45), получаем для

¹Отметим, что первые производные функций (ii.44) претерпевают разрыв при $t - (k_{1z}/k_{10})z = 0$, исчезающий в пределе $k_{10} \rightarrow +0$ ($k_{1z}/k_{10} = \text{const}$).

функций $\psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$, удовлетворяющих (ii.36), следующее выражение, справедливое при $\eta' < 0$:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) &= \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{2v} e^{\eta} \right)^{\frac{1}{2} - ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \Gamma \left(\frac{1}{2} + ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v} \right) \\ &\times \left[\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) J_{-\frac{1}{2} + ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{v} e^{\eta} \right) \exp \left(-i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \right. \\ &\left. + ij \hat{k}(k)^{-1/2} \varphi_{\mathbf{p},-\sigma}^{(-j)}(x) e^{-2ij(p-\frac{k}{2})x} J_{\frac{1}{2} + ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{v} e^{\eta} \right) \exp \left(i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{ii.47})$$

При $\eta' > 0$ решения $\chi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x)$, удовлетворяющие (ii.39), имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) &= \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{2v} e^{-\eta} \right)^{\frac{1}{2} + ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \Gamma \left(\frac{1}{2} - ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v} \right) \\ &\times \left[\varphi_{\mathbf{p},\sigma}^{(j)}(x) J_{-\frac{1}{2} - ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{v} e^{-\eta} \right) \exp \left(-i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \right. \\ &\left. + ij \hat{k}(k)^{-1/2} \varphi_{\mathbf{p},-\sigma}^{(-j)}(x) e^{-2ij(p-\frac{k}{2})x} J_{\frac{1}{2} - ij \frac{\delta(\mathbf{p})}{v}} \left(\frac{\rho_{\sigma}^{(j)}}{v} e^{-\eta} \right) \exp \left(i \int_0^{\xi} d\xi_1 V(\mathbf{p}, \eta, \xi_1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{ii.48})$$

Переходя в формулах (ii.47), (ii.48) к пределу $k_{10} \rightarrow +0$ ($\eta \rightarrow 0$, $k_{1z}/k_{10} = \text{const}$), приходим к результату (ii.41) (справедливому уже как при $\eta' < 0$, так и при $\eta' > 0$), полученному нами ранее с помощью приближенного решения уравнения (ii.14)–(ii.17).

Отметим, что если $\mathcal{A}_x(\eta)$, $\mathcal{A}_y(\eta)$, $\vartheta(\eta) \equiv \text{const}$, точное решение уравнения (ii.14)–(ii.17) имеет вид

$$\hat{r}_{\sigma}^{(j)}(\mathbf{p}', \eta') = \sum_{\nu=\pm} \mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}') \hat{U}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}', 0) \exp \left[-i \frac{\nu}{v'} \lambda_{\sigma}^{(j)'}(\mathbf{p}, 0) \eta' \right], \quad (\text{ii.49})$$

где постоянные коэффициенты $\mathcal{C}_{\sigma,\nu}^{(j)}(\mathbf{p}')$ удовлетворяют соотношению симметрии (ii.28).

Выбирая эти коэффициенты в виде (ii.31), получим в качестве приближенных решений уравнения (1.17) с 4–потенциалом внешнего поля (1.18), (1.19) функции (ii.41), (ii.42), удовлетворяющие предельному условию (I.3.56). Однако, содержащийся в этих функциях 4–вектор k_1 , в данном случае действующего постоянно внешнего поля (1.18), (1.19), является произвольным. Таким образом, связь между 4–вектором

энергии–импульса свободной частицы и 4–вектором квазиэнергии–квазиимпульса частицы во внешнем поле (1.18), (1.19) не может быть однозначной до тех пор, пока не указан соответствующий тем или иным условиям эксперимента тип асимптотических условий, налагаемых на волновые функции системы².

²Существенно, что указанная связь является произвольной и в точно решаемой задаче о релятивистском электроде, взаимодействующим с внешним полем плоской электромагнитной волны в вакууме [205]. Так, известные волковские решения уравнения Дирака соответствуют постановке задачи, в которой включение и выключение внешнего поля осуществляется по фазе волны. Нетрудно понять, что такая постановка задачи находится в противоречии с принципом причинности. Действительно, в реальной экспериментальной ситуации источник, генерирующий внешнее поле, например лазер, действует в течение некоторого конечного промежутка времени $T_2 - T_1$, ограниченного моментами T_1 и T_2 его включения и выключения, соответственно. Если предположить, что включение и выключение поля происходит по фазе волны, то при временах $t < T_1$ последнее окажется отличным от нуля в некоторой пространственной области, хотя генерирующий его источник еще не включен!

Подход, основанный на представлении о включении и выключении внешнего поля во времени и, следовательно, находящийся в согласии с принципом причинности, по-видимому, является более адекватным реальности. Поскольку, однако, в литературе [197] имеются различные точки зрения, полезно установить различия в физических следствиях двух указанных подходов.

Обратимся, в частности, к исследованию процесса комптоновского рассеяния фотона на электроде в присутствии внешнего поля плоской электромагнитной волны в вакууме. Используя один лишь закон сохранения 4–квазиимпульса участвующих в процессе частиц легко убедиться [198, 199], что в лабораторной системе отсчета каждый из подходов приводит к существенно различным результатам.

Другое интересное следствие возникает при рассмотрении процесса комптоновского рассеяния с точки зрения двух наблюдателей, находящихся в двух различных инерциальных системах отсчета K и K_1 и изучающих этот процесс независимо друг от друга (здесь речь идет о двух экспериментах!). Нетрудно показать [200, 201], что при включении и выключении внешнего поля во времени, вследствие относительности последнего, получаемая наблюдателем в K частота рассеянного фотона отличается от аналогичной частоты, который получает наблюдатель в K_1 , изучая процесс рассеяния независимо и выполняя затем преобразование своих результатов из K_1 в K .

Приложение iii

Деформационное взаимодействие электронов и дырок двухзонного полупроводника с акустическими фононами

Найдем гамильтониан взаимодействия носителей заряда с фононами в модели, описываемой уравнением (1.17), в рамках теории деформационного потенциала.

Гамильтониан свободных электронов и дырок в представлении Шредингера определяется выражением

$$H(S) = \int d\mathbf{r} : \Psi^\dagger(\mathbf{r}) (-is\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + ms^2) \Psi(\mathbf{r}) :, \quad (\text{iii.1})$$

в котором $\Psi(\mathbf{r})$ — оператор электронно-дырочного поля, m — эффективная масса электрона (дырки), а параметр s определяется равенством

$$s = \left(\frac{\varepsilon_g}{2m} \right)^{1/2}. \quad (\text{iii.2})$$

Известно [242], что при равномерном всестороннем сжатии происходит как смещение запрещенной зоны, так и изменение ее ширины. Для достаточно малых деформаций, в случае кристаллов кубической симметрии смещения краев валентной зоны и зоны проводимости можно считать зависящими линейно от величины относительного изменения объема $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ — поле смещений среды. Чтобы учесть изменение запрещенной зоны полупроводника, произведем в выражении в круглых скобках в (iii.1) замену $\varepsilon_g \longrightarrow \varepsilon_g + c_1 \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$, где c_1 — некоторый параметр с размерностью энергии. Чтобы учесть смещение запрещенной зоны как целого, введем там же

дополнительное слагаемое $c_2\gamma_0 \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$, в котором c_2 — также некоторый параметр. Пренебрегая членами порядка p/ms (p — характерный импульс электрона (дырки)) получим искомый оператор взаимодействия в представлении Шредингера:

$$V_{def}(S) = \int d\mathbf{r} : \Psi^\dagger(\mathbf{r}) (c_1 I + c_2 \gamma_0) \Psi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) : . \quad (\text{iii.3})$$

В представлении взаимодействия он приобретает вид:

$$V_{def}(S_t^{(I)}) = \int d\mathbf{r} : \Psi^{(I)\dagger}(\mathbf{r}, t) (c_1 I + c_2 \gamma_0) \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}^{(I)}(\mathbf{r}, t) : . \quad (\text{iii.4})$$

Полагая

$$c_1 + c_2 = \Lambda^{(e)}, \quad c_1 - c_2 = \Lambda^{(h)},$$

где $\Lambda^{(e)}$ и $\Lambda^{(h)}$ — соответственно константы взаимодействия фононов с электронами и дырками, удобно переписать (iii.4) в виде [228]:

$$V_{def}(S_t^{(I)}) = \int d\mathbf{r} : \Psi^{(I)\dagger}(\mathbf{r}, t) (\Lambda^{(+)} + \Lambda^{(-)}\gamma_0) \Psi^{(I)}(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}^{(I)}(\mathbf{r}, t) : . \quad (\text{iii.5})$$

Здесь

$$\Lambda^{(\pm)} = \frac{\Lambda^{(e)} \pm \Lambda^{(h)}}{2}.$$

Гамильтониан свободного поля деформаций в представлении взаимодействия имеет вид:

$$H_{ac}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=x,y,z} \int d\mathbf{r} : \left\{ \rho_m [\dot{u}_\alpha^{(I)}(\mathbf{r}, t)]^2 + \alpha_m \sum_{\beta=x,y,z} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} u_\alpha^{(I)}(\mathbf{r}, t) \right]^2 \right\} : , \quad (\text{iii.6})$$

где ρ_m — плотность среды, α_m — ее модуль упругости ($c_s = (\alpha_m/\rho_m)^{1/2}$ — скорость звука в данной среде).

Приложение iv

Функциональная формулировка метода Келдыша для неравновесной системы, содержащей ферми-поля

В качестве конкретной физической ферми-системы, на примере которой будет проиллюстрировано использование развитой ниже функциональной формулировки метода Келдыша, рассмотрим неравновесную систему электронов и дырок полупроводника, взаимодействующих с квантованным электромагнитным полем.

§ iv.1 Гамильтониан системы

Будем исходить из гамильтониана

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}, \quad (\text{iv.1})$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}} \left(\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(c)} \hat{c}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(v)} \hat{d}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{d}_{\mathbf{p}} \right), \quad (\text{iv.2})$$

$$\hat{H}_{int} = - \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \left(\lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{d}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{k}}^* \hat{d}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{c}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right), \quad (\text{iv.3})$$

в котором $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения фотона в состоянии с волновым вектором \mathbf{k} , подчиняющиеся бозевским перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \right]_{-} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'} \right]_{-} = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \right]_{-} = 0. \quad (\text{iv.4})$$

Ферми-операторы $\hat{c}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ и $\hat{c}_{\mathbf{p}}$ ($\hat{d}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ и $\hat{d}_{\mathbf{p}}$) соответственно рождения и уничтожения электрона в состоянии с волновым вектором \mathbf{p} в зоне проводимости (в валентной зоне)

удовлетворяют соотношениям

$$\left[\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right]_+ = \left[\hat{d}_{\mathbf{p}}, \hat{d}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right]_+ = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}, \quad \left[\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{c}_{\mathbf{p}'} \right]_+ = \left[\hat{d}_{\mathbf{p}}, \hat{d}_{\mathbf{p}'} \right]_+ = \left[\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{d}_{\mathbf{p}'} \right]_+ = \left[\hat{c}_{\mathbf{p}}, \hat{d}_{\mathbf{p}'}^\dagger \right]_+ = 0. \quad (\text{iv.5})$$

Параметры $\omega_{\mathbf{k}}$, $\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(c,v)}$ и $\lambda_{\mathbf{p},\mathbf{k}}$ определяются формулами

$$\omega_{\mathbf{k}} = \frac{c|\mathbf{k}|}{\sqrt{\varepsilon_B}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(c)} = \varepsilon_g + \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m_c}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(v)} = -\frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{2m_v}, \quad (\text{iv.6})$$

$$\lambda_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \frac{e}{m_0 c V_0} \left(\frac{2\pi c \hbar \sqrt{\varepsilon_B}}{V |\mathbf{k}|} \right)^{1/2} \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}_{cv}(\mathbf{p}),$$

в которых ε_B — фоновая диэлектрическая проницаемость среды, ε_g — ширина запрещенной зоны полупроводника, m_c (m_v) — эффективная масса электрона в зоне проводимости (в валентной зоне), e и m_0 — соответственно заряд и эффективная масса свободного электрона, V_0 — объем элементарной ячейки кристалла, \mathbf{e} — вектор поляризации фотонов, \mathbf{p}_{cv} — межзонный матричный элемент оператора импульса на блоховских функциях, V — объем квантования ($V \rightarrow \infty$).

Введем в рассмотрение дублет

$$\hat{b}_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{p}} \\ \hat{d}_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{c}_{\mathbf{p}}^\dagger & \hat{d}_{\mathbf{p}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{iv.7})$$

Согласно (iv.5),

$$\left[\hat{b}_{n\mathbf{p}}, \hat{b}_{n'\mathbf{p}'}^\dagger \right]_+ = \delta_{n,n'} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, \quad \left[\hat{b}_{n\mathbf{p}}, \hat{b}_{n'\mathbf{p}'} \right]_+ = \left[\hat{b}_{n\mathbf{p}}^\dagger, \hat{b}_{n'\mathbf{p}'}^\dagger \right]_+ = 0, \quad (n, n' = 1, 2). \quad (\text{iv.8})$$

В терминах операторов (iv.7) выражения (iv.2) и (iv.3) принимают вид

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_{n,\mathbf{p}} \varepsilon_{n\mathbf{p}} \hat{b}_{n\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{n\mathbf{p}}, \quad (\text{iv.9})$$

$$\hat{H}_{int} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1} \sum_{n, n_1} \left[\Lambda_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}}^{\mathbf{k}(n_1, n)} \hat{b}_{n_1 \mathbf{p}_1}^\dagger \hat{b}_{n\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \Lambda_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}}^{\mathbf{k}(n_1, n)*} \hat{b}_{n\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{n_1 \mathbf{p}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \quad (\text{iv.10})$$

где

$$\varepsilon_{1\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(c)}, \quad \varepsilon_{2\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^{(v)}, \quad \Lambda_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}}^{\mathbf{k}(n_1, n)} = \lambda_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \delta_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}+\mathbf{k}} \delta_{n_1, 1} \delta_{n, 2}. \quad (\text{iv.11})$$

Удобно объединить индексы \mathbf{p} и n в один: $p = (\mathbf{p}, n)$. Тогда

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_p \varepsilon_p \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p, \quad \hat{H}_{int} = - \sum_{\mathbf{k}, p, p_1} \left[\Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}} \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_{p_1} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}*} \hat{b}_{p_1}^\dagger \hat{b}_p \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right], \quad (\text{iv.12})$$

$$\left[\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^\dagger \right]_+ = \delta_{p, p'}, \quad \left[\hat{b}_p, \hat{b}_{p'} \right]_+ = \left[\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_{p'}^\dagger \right]_+ = 0.$$

§ iv.2 Производящий функционал

Производящий функционал для функций Грина–Келдыша фотонного и электронного полей дается формулой (см. § 7.4)

$$G(j^*, j | \eta^*, \eta) = \text{tr } \hat{\rho}_0 S^{(-)\dagger} S^{(+)} , \quad (\text{iv.13})$$

в которой

$$\hat{\rho}_0 = \exp \left(-\frac{\hat{H}_0}{k_B T} \right) / \text{tr } \exp \left(-\frac{\hat{H}_0}{k_B T} \right) , \quad (\text{iv.14})$$

$$S^{(\pm)} = T \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\hat{H}_{int,i}^{(\pm)}(t) + \hat{H}_{ext,i}^{(\pm)}(t) \right] \right\} , \quad (\text{iv.15})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int,i}(t) &= H_{int} \left(t | \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i | \hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i \right) \\ &= - \sum_{\mathbf{k}, p, p_1} \left[\Lambda_{p,p_1}^{\mathbf{k}} \hat{b}_i^\dagger(p, t) \hat{b}_i(p_1, t) \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) + \Lambda_{p,p_1}^{\mathbf{k}*} \hat{b}_i^\dagger(p_1, t) \hat{b}_i(p, t) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) \right] , \end{aligned} \quad (\text{iv.16})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ext,i}^{(\pm)}(t) &= H_{ext} \left(t | \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i | \hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) j^{(\pm)}(\mathbf{k}, t) + j^{(\pm)*}(\mathbf{k}, t) \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) \right] \\ &\quad + \sum_p \left[\hat{b}_i^\dagger(p, t) \eta^{(\pm)}(p, t) + \eta^{(\pm)*}(p, t) \hat{b}_i(p, t) \right] \end{aligned} \quad (\text{iv.17})$$

— операторы в представлении взаимодействия, причем

$$\hat{a}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t) , \quad \hat{b}_i(p, t) = \hat{b}_p \exp(-i\varepsilon_p t / \hbar) , \quad (\text{iv.18})$$

$$\left[\hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1), \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) \right]_- = \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \exp[-i\omega_{\mathbf{k}_1}(t_1 - t_2)] \equiv D_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) , \quad (\text{iv.19})$$

$$\left[\hat{b}_i(p_1, t_1), \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) \right]_+ = \delta_{p_1, p_2} \exp[-i\varepsilon_{p_1}(t_1 - t_2) / \hbar] \equiv D_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) , \quad (\text{iv.20})$$

$$D_{a,b}^*(1 | 2) = D_{a,b}(2 | 1) .$$

Внешние источники $j^{(\pm)*}$ и $j^{(\pm)}$ представляют собой c -числовые комплекснозначные функции, а $\eta^{(\pm)*}$ и $\eta^{(\pm)}$ — образующие бесконечномерной грассмановой алгебры с инволюцией [249, 178, 253]:

$$\left[\eta^{(r)}(p, t), \eta^{(r')}(p', t') \right]_+ = \left[\eta^{(r)*}(p, t), \eta^{(r')*}(p', t') \right]_+ = \left[\eta^{(r)}(p, t), \eta^{(r')*}(p', t') \right]_+ = 0, \quad (iv.21)$$

$$(r, r' = \pm)$$

Определим хронологическое и антихронологическое спаривания операторов в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \Delta_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= T \left[\hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) \right] - : \hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) : , \\ \bar{\Delta}_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= \bar{T} \left[\hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) \right] - : \hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) : , \\ \Delta_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= T \left[\hat{b}_i(p_1, t_1) \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] - : \hat{b}_i(p_1, t_1) \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) : , \\ \bar{\Delta}_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \bar{T} \left[\hat{b}_i(p_1, t_1) \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] - : \hat{b}_i(p_1, t_1) \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) : . \end{aligned} \quad (iv.22)$$

Имеют место соотношения

$$\bar{\Delta}_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) = \Delta_a^*(\mathbf{k}_2, t_2 | \mathbf{k}_1, t_1) , \quad \bar{\Delta}_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) = \Delta_b^*(p_2, t_2 | p_1, t_1) . \quad (iv.23)$$

Вопрос о доопределении функций (iv.22) при совпадающих значениях их временных аргументов подробно обсуждался в Замечании 1 из § 7.4. В частности, T -произведение (\bar{T} -произведение) операторов с совпадающими значениями временных аргументов могут быть определены как нормальное [178] или как симметричное для операторов бозонного поля и антисимметричное — для ферми-операторов [249].

Прежде чем приступить к вычислению функционала (iv.13) приведем некоторые полезные соотношения. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \eta}} f(\eta^*, \eta) &= \frac{\delta}{\delta \eta} f(\eta^*, \eta) , & \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \eta^*}} f(\eta^*, \eta) &= \frac{\delta}{\delta \eta^*} f(\eta^*, \eta) , \\ \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \eta}} f(\eta^*, \eta) &= f(\eta^*, \eta) \frac{\delta}{\delta \eta} , & \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \eta^*}} f(\eta^*, \eta) &= f(\eta^*, \eta) \frac{\delta}{\delta \eta^*} . \end{aligned} \quad (iv.24)$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_2} \right]_+ &= \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_2^*} \right]_+ = \left[\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2} \right]_+ = \left[\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2^*} \right]_+ = 0, \\ \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2} \right]_- &= \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2^*} \right]_- = \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1^*}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2} \right]_- = \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta_1^*}, \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\eta_2^*} \right]_- = 0. \end{aligned} \quad (\text{iv.25})$$

Далее, имеет место тождество

$$\begin{aligned} &F \left(-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta^*} \right) \exp \left\{ \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\eta^*(p, t)\beta(p, t) + \beta^*(p, t)\eta(p, t)] \right\} f(\eta^*, \eta) \\ &= \exp \left\{ \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\eta^*(p, t)\beta(p, t) + \beta^*(p, t)\eta(p, t)] \right\} F \left(\beta^* - \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta}, \beta + \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta^*} \right) f(\eta^*, \eta), \end{aligned} \quad (\text{iv.26})$$

которое при $f(\eta^*, \eta) = 1$ дает:

$$\begin{aligned} &F \left(-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta}, \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\eta^*} \right) \exp \left\{ \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\eta^*(p, t)\beta(p, t) + \beta^*(p, t)\eta(p, t)] \right\} f(\eta^*, \eta) \\ &= \exp \left\{ \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\eta^*(p, t)\beta(p, t) + \beta^*(p, t)\eta(p, t)] \right\} F(\beta^*, \beta) \\ &= F(\beta^*, \beta) \exp \left\{ \sum_p \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\eta^*(p, t)\beta(p, t) + \beta^*(p, t)\eta(p, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{iv.27})$$

Функциональная формулировка теоремы Вика имеет вид:

$$\begin{aligned} TF \left[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i \right] &= \exp \left\{ \sum_{p_1, p_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta(p_1, t_1)} \Delta_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta^*(p_2, t_2)} \right\} \\ &\times F[\beta^*, \beta]_{|\beta(p, t) \rightarrow \hat{b}_i(p, t), \beta^*(p, t) \rightarrow \hat{b}_i^\dagger(p, t)}, \end{aligned} \quad (\text{iv.28})$$

$$\begin{aligned} \bar{T}F \left[\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i \right] &= \exp \left\{ \sum_{p_1, p_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta(p_1, t_1)} \bar{\Delta}_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\beta^*(p_2, t_2)} \right\} \\ &\times F[\beta^*, \beta]_{|\beta(p, t) \rightarrow \hat{b}_i(p, t), \beta^*(p, t) \rightarrow \hat{b}_i^\dagger(p, t)}. \end{aligned} \quad (\text{iv.29})$$

Вычисление производящего функционала (iv.13) выполним, поставив в соответствие операторам их виковские нормальные символы [178]: $S^{(+)} \leftrightarrow S^{(+)}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta)$, $S^{(-)\dagger} \leftrightarrow S^{(-)\dagger}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta)$, $\hat{\rho}_0 \leftrightarrow \rho_0(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta)$. С помощью теоремы Вика (iv.28) находим [178]:

$$\begin{aligned}
S^{(+)}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) = & \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \left[\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \alpha(\mathbf{k}_1, t_1)} \Delta_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \alpha^*(\mathbf{k}_2, t_2)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{p_1, p_2} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta(p_1, t_1)} \Delta_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta^*(p_2, t_2)} \right] \right\} \\
& \times \exp \left(\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ H_{int}(t | \alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) + \sum_{\mathbf{k}} [\alpha^*(\mathbf{k}, t) j^{(+)}(\mathbf{k}, t) + j^{(+)*}(\mathbf{k}, t) \alpha^*(\mathbf{k}, t)] \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_p [\beta^*(p, t) \eta^{(+)}(p, t) + \eta^{(+)*}(p, t) \beta^*(p, t)] \right\} \right).
\end{aligned} \tag{iv.30}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\hat{a}_i(\mathbf{k}, t) \leftrightarrow \alpha(\mathbf{k}, t) &= \alpha(\mathbf{k}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t), & \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}, t) \leftrightarrow \alpha^*(\mathbf{k}, t) &= \alpha^*(\mathbf{k}) \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t), \\
\hat{b}_i(p, t) \leftrightarrow \beta(p, t) &= \beta(p) \exp(-i\varepsilon_p t/\hbar), & \hat{b}_i^\dagger(p, t) \leftrightarrow \beta^*(p, t) &= \beta^*(p) \exp(i\varepsilon_p t/\hbar).
\end{aligned} \tag{iv.31}$$

Используя (iv.27), представим (iv.27) в форме (см. § 7.4):

$$\begin{aligned}
S^{(+)}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) = & \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(t \left| i\hbar \frac{\delta}{\delta j^{(+)}}, i\hbar \frac{\delta}{\delta j^{(+)*}} \right| -i\hbar \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(+)}}, i\hbar \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(+)*}} \right) \right] \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} j^{(+)*}(\mathbf{k}_1, t_1) \Delta_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) j^{(+)}(\mathbf{k}_2, t_2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 [\alpha^*(\mathbf{k}_3, t_3) j^{(+)}(\mathbf{k}_3, t_3) + j^{(+)*}(\mathbf{k}_3, t_3) \alpha^*(\mathbf{k}_3, t_3)] \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \eta^{(+)*}(p_1, t_1) \Delta_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) \eta^{(+)}(p_2, t_2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 [\beta^*(p_3, t_3) \eta^{(+)}(p_3, t_3) + \eta^{(+)*}(p_3, t_3) \beta^*(p_3, t_3)] \right\}.
\end{aligned} \tag{iv.32}$$

Аналогично, для $S^{(-)\dagger}$ получим:

$$\begin{aligned}
S^{(-)\dagger}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) &= \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(t \left| -i\hbar \frac{\delta}{\delta j^{(-)}}, -i\hbar \frac{\delta}{\delta j^{(-)*}} \right| i\hbar \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(-)}}, -i\hbar \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(-)*}} \right) \right] \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} j^{(-)*}(\mathbf{k}_1, t_1) \bar{\Delta}_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) j^{(-)}(\mathbf{k}_2, t_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 [\alpha^*(\mathbf{k}_3, t_3) j^{(-)}(\mathbf{k}_3, t_3) + j^{(-)*}(\mathbf{k}_3, t_3) \alpha^*(\mathbf{k}_3, t_3)] \right\} \quad (\text{iv.33}) \\
&\times \exp \left\{ \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \eta^{(-)*}(p_1, t_1) \bar{\Delta}_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) \eta^{(-)}(p_2, t_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_3 [\beta^*(p_3, t_3) \eta^{(-)}(p_3, t_3) + \eta^{(-)*}(p_3, t_3) \beta^*(p_3, t_3)] \right\}.
\end{aligned}$$

Виковский символ оператора $\hat{\rho}_0$ [259]:

$$\begin{aligned}
\rho_0(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) &= c^{-1} \exp \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \left[\exp \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{k_B T} \right) - 1 \right] \alpha_{\mathbf{k}}^* \alpha_{\mathbf{k}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_p \left[\exp \left(\frac{\hbar \varepsilon_p}{k_B T} \right) + 1 \right] \beta_p^* \beta_p \right\}, \quad (\text{iv.34})
\end{aligned}$$

где

$$c = \text{tr } \hat{\rho}_0.$$

Используя (iv.32)–(iv.34), правило вычисления следа операторов по их виковским символам и правило композиции символов [178, 253], найдем:

$$\begin{aligned}
G(j^*, j | \eta^*, \eta) &= \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(t \left| i\hbar r \frac{\delta}{\delta j^{(r)}}, i\hbar r \frac{\delta}{\delta j^{(r)*}} \right| -i\hbar \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(r)}}, i\hbar r \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta^{(r)*}} \right) \right] \\
&\times G_0^{(a)}(j^*, j) G_0^{(b)}(\eta^*, \eta), \quad (\text{iv.35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G_0^{(a)}(j^*, j) = \\
&= \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r_1, r_2=\pm} r_1 r_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} j^{(r_1)*}(\mathbf{k}_1, t_1) G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) j^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2) \right],
\end{aligned}$$

(iv.36)

$$G_0^{(b)}(\eta^*, \eta) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r_1, r_2 = \pm} r_1 r_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \eta^{(r_1)*}(p_1, t_1) G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \eta^{(r_2)}(p_2, t_2) \right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{0a}^{(+|+)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\Delta_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) + N_a(\mathbf{k}_1) D_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2)] , \\ G_{0a}^{(-|-)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\bar{\Delta}_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) + N_a(\mathbf{k}_1) D_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2)] , \\ G_{0a}^{(+|-)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} N_a(\mathbf{k}_1) D_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) , \\ G_{0a}^{(-|+)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [1 + N_a(\mathbf{k}_1)] D_a(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) , \end{aligned} \quad (\text{iv.37})$$

$$N_a(\mathbf{k}) = \left[\exp \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{k_B T} \right) - 1 \right]^{-1} ; \quad (\text{iv.38})$$

$$\begin{aligned} G_{0b}^{(+|+)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\Delta_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) - N_b(p_1) D_b(p_1, t_1 | p_2, t_2)] , \\ G_{0b}^{(-|-)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [\bar{\Delta}_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) + N_b(p_1) D_b(p_1, t_1 | p_2, t_2)] , \\ G_{0b}^{(+|-)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= -\frac{1}{i\hbar} N_b(p_1) D_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) , \\ G_{0b}^{(-|+)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} [1 - N_b(p_1)] D_b(p_1, t_1 | p_2, t_2) , \end{aligned} \quad (\text{iv.39})$$

$$N_b(p) = \left[\exp \left(\frac{\hbar \varepsilon_p}{k_B T} \right) + 1 \right]^{-1} . \quad (\text{iv.40})$$

Имеют место соотношения:

$$\sum_{r_1, r_2 = \pm} r_1 r_2 G_{0a,b}^{(r_1|r_2)}(1|2) \equiv 0 . \quad (\text{iv.41})$$

Функции (iv.37) и (iv.39) могут быть представлены в форме:

$$\begin{aligned} G_{0a}^{(r|r')}(\mathbf{k}, t | \mathbf{k}', t') &= \left[\left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \hbar \omega_{\mathbf{k}} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1} \\ &\times \left[r \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \hbar \omega_{\mathbf{k}} \right) - i \varepsilon r r' g_a^{(r|r')}(\mathbf{k}) \right] \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(t - t') \\ &= -\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(t - t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt'} + \hbar \omega_{\mathbf{k}'} \right) + i \varepsilon r r' g_a^{(r|r')}(\mathbf{k}') \right] \end{aligned} \quad (\text{iv.42})$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt} + \hbar\omega_{\mathbf{k}'} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1}, \\
& G_{0b}^{(r|r')} (p, t | p', t') = \left[\left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \varepsilon_p \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1} \\
& \times \left[r\delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \varepsilon_p \right) - i\varepsilon r r' g_b^{(r|r')}(p) \right] \delta_{p,p'} \delta(t-t') \\
& = -\delta_{p,p'} \delta(t-t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt'} + \varepsilon_{p'} \right) + i\varepsilon r r' g_b^{(r|r')}(p') \right] \\
& \times \left[\left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt} + \varepsilon_{p'} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{iv.43}$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$,

$$g_a^{(++)}(\mathbf{k}) = g_a^{(--)}(\mathbf{k}) = 1 + 2N_a(\mathbf{k}), \quad g_a^{(+-)}(\mathbf{k}) = -2N_a(\mathbf{k}), \quad g_a^{(++)}(\mathbf{k}) = -2[1 + N_a(\mathbf{k})], \tag{iv.44}$$

$$g_b^{(++)}(p) = g_b^{(--)}(p) = 1 - 2N_b(p), \quad g_b^{(+-)}(p) = 2N_b(p), \quad g_b^{(++)}(p) = -2[1 - N_b(\mathbf{k})].$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
G_{0a}^{-1(r|r')}(\mathbf{k}, t | \mathbf{k}', t') &= \left[r\delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \hbar\omega_{\mathbf{k}} \right) + i\varepsilon g_a^{(r|r')}(\mathbf{k}) \right] \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta(t-t') \\
&= -\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta(t-t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt'} + \hbar\omega_{\mathbf{k}'} \right) - i\varepsilon g_a^{(r|r')}(\mathbf{k}') \right],
\end{aligned} \tag{iv.45}$$

$$\begin{aligned}
G_{0b}^{-1(r|r')}(p, t | p', t') &= \left[r\delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overrightarrow{d}}{dt} - \varepsilon_p \right) + i\varepsilon g_b^{(r|r')}(p) \right] \delta_{p,p'} \delta(t-t') \\
&= -\delta_{p,p'} \delta(t-t') \left[r' \delta_{r,r'} \left(i\hbar \frac{\overleftarrow{d}}{dt'} + \varepsilon_{p'} \right) - i\varepsilon g_b^{(r|r')}(p') \right].
\end{aligned} \tag{iv.46}$$

Представим функционалы (iv.36) в виде

$$G_0^{(a)}(j^*, j) = \exp \left[i\hbar \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_2)*}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right]$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_{\mathbf{k}} [\alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t) j^{(r)}(\mathbf{k}, t) + j^{(r)*}(\mathbf{k}, t) \alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t)] \right\} \Big|_{\alpha^{(\pm)} = \alpha^{(\pm)*} = 0} , \quad (\text{iv.47})$$

$$G_0^{(b)}(\eta^*, \eta) = \exp \left[i\hbar \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \beta^{(r_1)}(p_1, t_1)}} G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \beta^{(r_2)*}(p_2, t_2)}} \right] \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p [\beta^{(r)*}(p, t) \eta^{(r)}(p, t) + \eta^{(r)*}(p, t) \beta^{(r)}(p, t)] \right\} \Big|_{\beta^{(\pm)} = \beta^{(\pm)*} = 0} . \quad (\text{iv.48})$$

Подставив (iv.47), (iv.48) в (iv.35), получим:

$$G(j^*, j | \eta^*, \eta) = \\ = \exp \left\{ i\hbar \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \left[\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_2)*}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{p_1, p_2} \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \beta^{(r_1)}(p_1, t_1)}} G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \beta^{(r_2)*}(p_2, t_2)}} \right] \right\} \quad (\text{iv.49}) \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt [H_{int}(t | \alpha^{(r)*}, \alpha^{(r)} | \beta^{(r)*}, \beta^{(r)}) \right. \\ \left. + H_{ext}(t | \alpha^{(r)*}, \alpha^{(r)} | \beta^{(r)*}, \beta^{(r)})] \right\} \Big|_{\alpha^{(\pm)} = \alpha^{(\pm)*} = 0, \beta^{(\pm)} = \beta^{(\pm)*} = 0} .$$

Разложение (iv.49) в ряд теории возмущений порождает диаграммы Келдыша для неравновесных процессов [249, 255].

Полагая в (iv.49) $H_{int} \equiv 0$ нетрудно получить правило вычисления средних по гиббсовскому распределению (iv.14) T_C -произведений операторов в представлении взаимодействия:

Теорема 2 (Теорема Вика) Для произвольного оператора $\hat{A}_i(t)$, разложимого в ряд по степеням $\hat{\alpha}_i^\dagger(\mathbf{k}, t)$, $\hat{\alpha}_i(\mathbf{k}, t)$ и $\hat{\beta}_i^\dagger(p, t)$, $\hat{\beta}_i(p, t)$, имеем:

$$\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{A}_i(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ i\hbar \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \left[\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_2)*}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{p_1, p_2} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta^{(r_1)}(p_1, t_1)} G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta^{(r_2)*}(p_2, t_2)} \right] \right\} \\
&\quad \times A(t) |_{\alpha^{(\pm)} = \alpha^{(\pm)*} = 0, \beta^{(\pm)} = \beta^{(\pm)*} = 0} ,
\end{aligned} \tag{iv.50}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_i(t) \Big| \begin{aligned} &\hat{a}_i^{(r)}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \alpha_i^{(r)}(\mathbf{k}, t), \quad \hat{a}_i^{(r)\dagger}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \alpha_i^{(r)*}(\mathbf{k}, t), \\ &\hat{b}_i^{(r)}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \beta_i^{(r)}(\mathbf{k}, t), \quad \hat{b}_i^{(r)\dagger}(\mathbf{k}, t) \rightarrow \beta_i^{(r)*}(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \longrightarrow A(t) .
\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
&\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{a}_i(\mathbf{k}, t) = \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{b}_i(p, t) = 0 , \\
&\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{a}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_2, t_2) \right] = G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) , \\
&\text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \left[\hat{b}_i(p_1, t_1) \hat{b}_i^\dagger(p_2, t_2) \right] = G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) .
\end{aligned} \tag{iv.51}$$

Функционалы (iv.47), (iv.48) могут быть представлены в виде континуальных интегралов [256, 249, 176, 253, 178]:

$$\begin{aligned}
&G_0^{(a)}(j^*, j) = \int D\alpha^* D\alpha \exp \left(\frac{i}{\hbar} \{ \mathcal{K}_{0a}(\alpha^*, \alpha) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_{\mathbf{k}} [\alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t) j^{(r)}(\mathbf{k}, t) + j^{(r)*}(\mathbf{k}, t) \alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t)] \right) ,
\end{aligned} \tag{iv.52}$$

$$\begin{aligned}
&G_0^{(b)}(\eta^*, \eta) = \int D\beta^* D\beta \exp \left(\frac{i}{\hbar} \{ \mathcal{K}_{0b}(\beta^*, \beta) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_p [\beta^{(r)*}(p, t) \eta^{(r)}(p, t) + \eta^{(r)*}(p, t) \beta^{(r)}(p, t)] \right) ,
\end{aligned}$$

где

$$D\alpha^* D\alpha = \frac{\prod_{r, \mathbf{k}, t} d\alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t) d\alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t)}{\prod_{r, \mathbf{k}, t} d\alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t) d\alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_{0a}(\alpha^*, \alpha) \right]} , \tag{iv.53}$$

$$D\beta^* D\beta = \frac{\prod_{r, p, t} d\beta^{(r)*}(p, t) d\beta^{(r)}(p, t)}{\prod_{r, p, t} d\beta^{(r)*}(p, t) d\beta^{(r)}(p, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_{0b}(\beta^*, \beta) \right]} ,$$

$$\mathcal{K}_{0a}(\alpha^*, \alpha) = \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \alpha^{(r_1)*}(\mathbf{k}_1, t_1) G_{0a}^{-1(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \alpha^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2), \quad (\text{iv.54})$$

$$\mathcal{K}_{0b}(\beta^*, \beta) = \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \beta^{(r_1)*}(p_1, t_1) G_{0b}^{-1(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \beta^{(r_2)}(p_2, t_2).$$

Подставляя (iv.52) в (iv.35), найдем:

$$G(j^*, j | \eta^*, \eta) = \int D\alpha^* D\alpha D\beta^* D\beta \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) \right], \quad (\text{iv.55})$$

$$\mathcal{K}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) = \mathcal{K}_{0a}(\alpha^*, \alpha) + \mathcal{K}_{0b}(\beta^*, \beta) + \mathcal{K}_{int}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) + \mathcal{K}_{ext}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta), \quad (\text{iv.56})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{int}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) &= - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int}(t | \alpha^{(r)*}, \alpha^{(r)} | \beta^{(r)*}, \beta^{(r)}) \\ &= \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \sum_{p, p_1, \mathbf{k}} [\Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}} \beta^{(r)*}(p, t) \beta^{(r)}(p_1, t) \alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t) \\ &\quad + \Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}*} \beta^{(r)*}(p_1, t) \beta^{(r)}(p, t) \alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t)] , \end{aligned} \quad (\text{iv.57})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ext}(\alpha^*, \alpha | \beta^*, \beta) &= - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{ext}(t | \alpha^{(r)*}, \alpha^{(r)} | \beta^{(r)*}, \beta^{(r)}) \\ &= - \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left\{ \sum_{\mathbf{k}} [\alpha^{(r)*}(\mathbf{k}, t) j^{(r)}(\mathbf{k}, t) + j^{(r)*}(\mathbf{k}, t) \alpha^{(r)}(\mathbf{k}, t)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_p [\beta^{(r)*}(p, t) \eta^{(r)}(p, t) + \eta^{(r)*}(p, t) \beta^{(r)}(p, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{iv.58})$$

§ iv.3 Использование универсальных обозначений

Перепишем некоторые из ранее приведенных формул в универсальных обозначениях [249]. Обозначим

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(r)}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{i\hbar r} \mathfrak{a}_a \mathbf{j}^{(r)}(\mathbf{k}, t), \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) = \frac{1}{i\hbar r} \mathfrak{a}_b \boldsymbol{\eta}^{(r)}(p, t), \quad (\text{iv.59})$$

где

$$\mathfrak{a}_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{a}_b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{iv.60})$$

Тогда

$$G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) = \exp \left[\frac{1}{i\hbar} \sum_{r=\pm} r \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{int} \left(t \left| \frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{j}}^{(r)}} \right| - \frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}} \right) \right] G_0^{(a)}(\mathbf{j}) G_0^{(b)}(\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{iv.61})$$

$$G_0^{(a)}(\mathbf{j}) = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \tilde{\mathbf{j}}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1) \mathbf{G}_{0a}^{(r_1; r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) \tilde{\mathbf{j}}^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2) \right], \quad (\text{iv.62})$$

$$G_0^{(b)}(\boldsymbol{\eta}) = \exp \left[-\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_1)}(p_1, t_1) \mathbf{G}_{0b}^{(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_2)}(p_2, t_2) \right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0a}^{(r_1; r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C [\hat{\mathbf{a}}_i(\mathbf{k}_1, t_1) \otimes \hat{\mathbf{a}}_i(\mathbf{k}_2, t_2)] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & G_{0a}^{(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) \\ G_{0a}^{(r_2|r_1)}(\mathbf{k}_2, t_2 | \mathbf{k}_1, t_1) & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{0a}^{(r_2; r_1)}(\mathbf{k}_2, t_2; \mathbf{k}_1, t_1), \end{aligned} \quad (\text{iv.63})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0b}^{(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) &= \frac{1}{i\hbar} \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C [\hat{\mathbf{b}}_i(p_1, t_1) \otimes \hat{\mathbf{b}}_i(p_2, t_2)] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & G_{0b}^{(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) \\ -G_{0b}^{(r_2|r_1)}(p_2, t_2 | p_1, t_1) & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{G}_{0b}^{(r_2; r_1)}(p_2, t_2; p_1, t_1). \end{aligned} \quad (\text{iv.64})$$

Представив (iv.62) в форме

$$G_0^{(a)}(\mathbf{j}) = \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\alpha}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} \mathbf{G}_{0a}^{(r_1; r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\alpha}^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left(\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\alpha}^{(r)}(p, t) \tilde{\mathbf{j}}^{(r)}(p, t) \right) \Big|_{\boldsymbol{\alpha}^{(\pm)} = 0}, \\
G_0^{(b)}(\mathbf{j}) = & \exp \left[\frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\beta}^{(r_1)}(p_1, t_1)}} \mathbf{G}_{0b}^{(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\beta}^{(r_2)}(p_2, t_2)}} \right] \\
& \times \exp \left(\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right) \Big|_{\boldsymbol{\beta}^{(\pm)} = 0},
\end{aligned}$$

получим из (iv.61):

$$\begin{aligned}
& G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta}) = \\
& = \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \left[\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\alpha}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} \mathbf{G}_{0a}^{(r_1; r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\alpha}^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{p_1, p_2} \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\beta}^{(r_1)}(p_1, t_1)}} \mathbf{G}_{0b}^{(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\beta}^{(r_2)}(p_2, t_2)}} \right] \right\} \quad (\text{iv.65}) \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{K}_{int}(\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta}) + \sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \left[\sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\alpha}^{(r)}(p, t) \tilde{\mathbf{j}}^{(r)}(p, t) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] \right\} \Big|_{\boldsymbol{\alpha}^{(\pm)} = 0, \boldsymbol{\beta}^{(\pm)} = 0}.
\end{aligned}$$

При выводе (iv.65) мы воспользовались тождеством

$$\begin{aligned}
& F \left(-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}} \right) \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \\
& = \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] F \left(\boldsymbol{\beta} - \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}} \right) f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad (\text{iv.66})
\end{aligned}$$

которое при $f(\tilde{\boldsymbol{\eta}}) \equiv 1$ дает:

$$\begin{aligned}
& F \left(-\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}} \right) \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] \\
& = \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] F(\boldsymbol{\beta}) \quad (\text{iv.67})
\end{aligned}$$

$$= F(\boldsymbol{\beta}) \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right].$$

Функционал $\mathcal{K}_{int}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta})$ в универсальных обозначениях имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{int}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2!} \sum_{r_1, r_2, r_3=\pm\infty}^{+\infty} \int dt_1 dt_2 dt_3 \sum_{p_1, p_2, \mathbf{k}} \Gamma_0(p_1, t_1; p_2, t_2 | \mathbf{k}, t_3) \\ \times \boldsymbol{\beta}^{(r_1)}(p_1, t_1) \boldsymbol{\beta}^{(r_2)}(p_2, t_2) \boldsymbol{\alpha}^{(r_3)}(\mathbf{k}, t_3), \end{aligned} \quad (\text{iv.68})$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_0(p_1, t_1; p_2, t_2 | \mathbf{k}, t_3) = r_1 \Lambda_{p_1, p_2}^{\mathbf{k}} \delta_{r_1, r_2} \delta_{r_2, r_3} \delta(t_1 - t_2) \delta(t_2 - t_3), \\ \Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}1} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{p_1, p}^{\mathbf{k}} \\ \Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}2} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_{p, p_1}^{\mathbf{k}*} \\ \Lambda_{p_1, p}^{\mathbf{k}*} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{iv.69})$$

причем

$$\Gamma_0(p_2, t_2; p_1, t_1 | \mathbf{k}, t_3) = -\Gamma_0(p_1, t_1; p_2, t_2 | \mathbf{k}, t_3). \quad (\text{iv.70})$$

Представление производящего функционала (iv.13) в виде континуального интеграла в универсальных обозначениях дается формулой

$$G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) = \int D\boldsymbol{\alpha} D\boldsymbol{\beta} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}) \right], \quad (\text{iv.71})$$

в которой

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{K}_{0a}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathcal{K}_{0b}(\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{K}_{int}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}) + \mathcal{K}_{ext}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}), \quad (\text{iv.72})$$

$$\mathcal{K}_{0a}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm\infty}^{+\infty} \int dt_1 dt_2 \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \boldsymbol{\alpha}^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1) \mathbf{G}_{0a}^{-1(r_1; r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) \boldsymbol{\alpha}^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2), \quad (\text{iv.73})$$

$$\mathcal{K}_{0b}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2=\pm\infty}^{+\infty} \int dt_1 dt_2 \sum_{p_1, p_2} \boldsymbol{\beta}^{(r_1)}(p_1, t_1) \mathbf{G}_{0b}^{-1(r_1; r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \boldsymbol{\beta}^{(r_2)}(p_2, t_2),$$

$$\mathcal{K}_{ext}(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}) = -i\hbar \sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \left[\sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\alpha}^{(r)}(\mathbf{k}, t) \tilde{\mathbf{j}}^{(r)}(\mathbf{k}, t) + \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right], \quad (\text{iv.74})$$

$$D\alpha = D\alpha^* D\alpha, \quad D\beta = D\beta^* D\beta;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0a}^{-1(r_1;r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) &= \mathbf{G}_{0a}^{-1(r_2;r_1)}(\mathbf{k}_2, t_2; \mathbf{k}_1, t_1) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & G_{0a}^{-1(r_2|r_1)}(\mathbf{k}_2, t_2 | \mathbf{k}_1, t_1) \\ G_{0a}^{-1(r_1|r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1 | \mathbf{k}_2, t_2) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{iv.75})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{0b}^{-1(r_1;r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) &= -\mathbf{G}_{0b}^{-1(r_2;r_1)}(p_2, t_2; p_1, t_1) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -G_{0b}^{-1(r_2|r_1)}(p_2, t_2 | p_1, t_1) \\ G_{0b}^{-1(r_1|r_2)}(p_1, t_1 | p_2, t_2) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{iv.76})$$

Теорема Вика:

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{\rho}_0 T_C \hat{A}_i(t) &= \\ &= \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2} \sum_{r_1, r_2 = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \left[\sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_1)}(\mathbf{k}_1, t_1)} \mathbf{G}_{0a}^{(r_1;r_2)}(\mathbf{k}_1, t_1; \mathbf{k}_2, t_2) \frac{\delta}{\delta \alpha^{(r_2)}(\mathbf{k}_2, t_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{p_1, p_2} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta^{(r_1)}(p_1, t_1)} \mathbf{G}_{0b}^{(r_1;r_2)}(p_1, t_1; p_2, t_2) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \beta^{(r_2)}(p_2, t_2)} \right] \right\} A(t) \Big|_{\alpha^{(\pm)=0}, \beta^{(\pm)=0}}. \end{aligned} \quad (\text{iv.77})$$

§ iv.4 Уравнения Швингера–Дайсона

С помощью производящего функционала (iv.13) функции Грина–Келдыша, описывающие рассматриваемую систему, могут быть представлены в форме ($N, M = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(y_1, \dots, y_{2N} | x_1, \dots, x_M) &\equiv \frac{1}{(i\hbar)^{2N+M-1}} \text{tr } \check{\rho} T_C \left[\prod_{j=1}^{2N} \otimes \check{\mathbf{b}}(y_j) \prod_{k=1}^M \otimes \check{\mathbf{a}}(x_k) \right] \\ &= \frac{1}{(i\hbar)^{2N+M-1}} \frac{\overrightarrow{\delta^{2N}}}{\prod_{j=1}^{2N} \otimes \delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_j)} \frac{\delta^M}{\prod_{k=1}^M \otimes \delta \tilde{\mathbf{j}}(x_k)} G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta}). \end{aligned} \quad (\text{iv.78})$$

Здесь $x = (\mathbf{k}, r, t)$, $y = (p, r, t)$; индекс, связанный с использованием универсальных обозначений, включен, соответственно, в \mathbf{k} и p .

Отметим полезное соотношение:

$$\begin{aligned}
& \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_{2N})}(p_{2N}, t_{2N})}} \cdots \overleftarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_1)}(p_1, t_1)}} \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] \\
&= \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_1)}(p_1, t_1)}} \cdots \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r_{2N})}(p_{2N}, t_{2N})}} \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right] \quad (\text{iv.79}) \\
&= \boldsymbol{\beta}^{(r_1)}(p_1, t_1) \cdots \boldsymbol{\beta}^{(r_{2N})}(p_{2N}, t_{2N}) \exp \left[\sum_{r=\pm\infty}^{+\infty} \int dt \sum_p \boldsymbol{\beta}^{(r)}(p, t) \tilde{\boldsymbol{\eta}}^{(r)}(p, t) \right].
\end{aligned}$$

Из представления (iv.71) непосредственно следуют уравнения Швингера для производящего функционала (iv.13). Вследствие инвариантности меры $D\boldsymbol{\alpha}D\boldsymbol{\beta}$ относительно группы движений функционального пространства [249], имеем:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta})}{\delta \boldsymbol{\alpha}(x)} \right|_{\boldsymbol{\alpha}(x)=\frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x)}, \boldsymbol{\beta}(y)=\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}}} = 0, \quad (\text{iv.80})$$

$$\left. \frac{\overrightarrow{\delta \mathcal{K}(\boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta})}}{\delta \boldsymbol{\beta}(y)} \right|_{\boldsymbol{\alpha}(x)=\frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x)}, \boldsymbol{\beta}(y)=\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}}} = 0.$$

Подставляя сюда (iv.72), (iv.73), (iv.74) и (iv.68), получим:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x_1)} - i\hbar \int dx_2 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_2) \tilde{\mathbf{j}}(x_2) + \frac{1}{2!} \int dy_2 dy_3 \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2) \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{\Gamma}_0(y_2, y_3 | x_2) \overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1) \delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2)}} \right] G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (\text{iv.81})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1)}} - i\hbar \int dy_2 \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2) \mathbf{G}_{0b}(y_2, y_1) + \int dy_2 dy_3 dx \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2) \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{\Gamma}_0(y_2, y_3 | x_2) \frac{\delta}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x)} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_3)}} \right] G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta}) = 0. \quad (\text{iv.82})
\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbf{G}(|x_1)}{G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta})} = i\hbar \int dx_3 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \tilde{\mathbf{j}}(x_3) \\
& - \frac{i\hbar}{2!} \int dy_1 dy_2 dx_3 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \mathbf{\Gamma}_0(y_1, y_2 | x_3) \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 |)}{G(\mathbf{j} | \boldsymbol{\eta})}, \quad (\text{iv.83})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{G}(|x_1, x_2\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} &= \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_2) + \int dx_3 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \tilde{\mathbf{j}}(x_3) \frac{\mathbf{G}(|x_2\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} \\ &- \frac{i\hbar}{2!} \int dy_1 dy_2 dx_3 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \Gamma_0(y_1, y_2 | x_3) \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 | x_2)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}, \end{aligned} \quad (\text{iv.84})$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 |)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} &= \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2) \\ &- i\hbar \int dy_3 dy_4 dx_3 \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_3) \Gamma_0(y_3, y_4 | x_3) \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 | x_3)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}. \end{aligned} \quad (\text{iv.85})$$

Перейдем к связным функциям Грина–Келдыша:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(|x\rangle) &= \frac{\mathbf{G}(|x\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}, \\ \mathbf{Z}(|x_1, x_2\rangle) &= \frac{\mathbf{G}(|x_1, x_2\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} - \frac{1}{i\hbar} \frac{\mathbf{G}(|x_1\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} \frac{\mathbf{G}(|x_2\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}, \\ \mathbf{Z}(y_1, y_2 |) &= \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 |)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}, \\ \mathbf{Z}(y_1, y_2 | x) &= \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 | x)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} - \frac{1}{i\hbar} \frac{\mathbf{G}(y_1, y_2 |)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})} \frac{\mathbf{G}(|x\rangle)}{G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta})}, \end{aligned} \quad (\text{iv.86})$$

производящий функционал которых определяется выражением

$$Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) = i\hbar \ln G(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{iv.87})$$

причем

$$\mathbf{Z}(y_1, \dots, y_{2N} | x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{(i\hbar)^{2N+M}} \frac{\overrightarrow{\delta^{2N}}}{\prod_{j=1}^{2N} \otimes \delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_j)} \frac{\delta^M}{\prod_{k=1}^M \otimes \delta \tilde{\mathbf{j}}(x_k)} Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}). \quad (\text{iv.88})$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{A}(x) \equiv \mathbf{Z}(|x\rangle), \quad \mathbf{a}(x) \equiv i\hbar \int dx_1 \mathbf{G}_{0a}(x, x_1) \tilde{\mathbf{j}}(x_1), \quad (\text{iv.89})$$

$$\mathbf{G}_a(x_1, x_2) \equiv \mathbf{Z}(|x_1, x_2\rangle) = \mathbf{G}_a(x_2, x_1), \quad \mathbf{G}_b(y_1, y_2) \equiv \mathbf{Z}(y_1, y_2 |) = -\mathbf{G}_b(y_2, y_1), \quad (\text{iv.90})$$

из уравнений (iv.83)–(iv.85) найдем

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{a}(x) - \frac{i\hbar}{2!} \int dy_1 dy_2 dx_1 \mathbf{G}_{0a}(x, x_1) \Gamma_0(y_1, y_2 | x_1) \mathbf{G}_b(y_1, y_2), \quad (\text{iv.91})$$

$$\mathbf{G}_a(x_1, x_2) = \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_2) - \frac{i\hbar}{2!} \int dy_1 dy_2 dx_3 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \Gamma_0(y_1, y_2 | x_3) \mathbf{Z}(y_1, y_2 | x_2), \quad (\text{iv.92})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_b(y_1, y_2) &= \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2) - \int dy_3 dy_4 dx \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_3) \mathbf{\Gamma}_0(y_3, y_4 | x) \mathbf{A}(x) \mathbf{G}_b(y_4, y_2) \\ &- i\hbar \int dy_3 dy_4 dx \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_3) \mathbf{\Gamma}_0(y_3, y_4 | x) \mathbf{Z}(y_4, y_2 | x).\end{aligned}\quad (\text{iv.93})$$

Представим функцию $\mathbf{Z}(y_1, y_2 | x)$ в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(y_1, y_2 | x) &= \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta \mathbf{G}_b(y_1, y_2)}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x)} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int dx_1 \frac{\delta \mathbf{A}(x_1)}{\delta \tilde{\mathbf{j}}(x)} \frac{\delta \mathbf{G}_b(y_1, y_2)}{\delta \mathbf{A}(x_1)} = \int dx_1 \mathbf{G}_a(x, x_1) \frac{\delta \mathbf{G}_b(y_1, y_2)}{\delta \mathbf{A}(x_1)}.\end{aligned}\quad (\text{iv.94})$$

Дифференцируя тождество

$$\int dy_3 \mathbf{G}_b(y_1, y_3) \mathbf{G}_b^{-1}(y_3, y_2) = \delta(y_1 - y_2) \quad (\text{iv.95})$$

по $\mathbf{A}(x)$, найдем, что

$$\frac{\delta \mathbf{G}_b(y_1, y_2)}{\delta \mathbf{A}(x)} = - \int dy_3 dy_4 \mathbf{G}_b(y_1, y_3) \mathbf{\Gamma}(y_3, y_4 | x) \mathbf{G}_b(y_4, y_2), \quad (\text{iv.96})$$

где

$$\mathbf{\Gamma}(y_1, y_2 | x) = \frac{\delta \mathbf{G}_b^{-1}(y_1, y_2)}{\delta \mathbf{A}(x)} \quad (\text{iv.97})$$

— вершинная функция. Подставляя (iv.97) в (iv.94), получим:

$$\mathbf{Z}(y_1, y_2 | x_2) = - \int dy_3 dy_4 dx_1 \mathbf{G}_a(x, x_1) \mathbf{G}_b(y_1, y_3) \mathbf{\Gamma}(y_3, y_4 | x_1) \mathbf{G}_b(y_4, y_2). \quad (\text{iv.98})$$

В результате уравнения (iv.92) и (iv.93) приобретают вид:

$$\mathbf{G}_a(x_1, x_2) = \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_2) + \int dx_3 dx_4 \mathbf{G}_{0a}(x_1, x_3) \mathbf{\Pi}(x_3, x_4) \mathbf{G}_a(x_4, x_2), \quad (\text{iv.99})$$

$$\mathbf{G}_b(y_1, y_2) = \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2) + \int dy_3 dy_4 \mathbf{G}_{0b}(y_1, y_3) \mathbf{M}(y_3, y_4) \mathbf{G}_b(y_4, y_2), \quad (\text{iv.100})$$

где

$$\mathbf{\Pi}(x_3, x_4) = - \frac{i\hbar}{2!} \int dy_1 \dots dy_4 \mathbf{\Gamma}_0(y_1, y_2 | x_3) \mathbf{G}_b(y_1, y_3) \mathbf{G}_b(y_2, y_4) \mathbf{\Gamma}(y_3, y_4 | x_4), \quad (\text{iv.101})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(y_3, y_4) &= - \int dx_1 \mathbf{\Gamma}_0(y_3, y_4 | x_1) \mathbf{A}(x_1) \\ &+ i\hbar \int dx_1 dx_2 dy_5 dy_6 \mathbf{\Gamma}_0(y_3, y_5 | x_1) \mathbf{G}_a(x_1, x_2) \mathbf{G}_b(y_5, y_6) \mathbf{\Gamma}(y_6, y_4 | x_2).\end{aligned}\quad (\text{iv.102})$$

Уравнения Швингера–Дайсона (iv.91), (iv.99)–(iv.102) могут быть представлены с помощью скелетных диаграмм Келдыша, изображенных на рисунке iv.1.

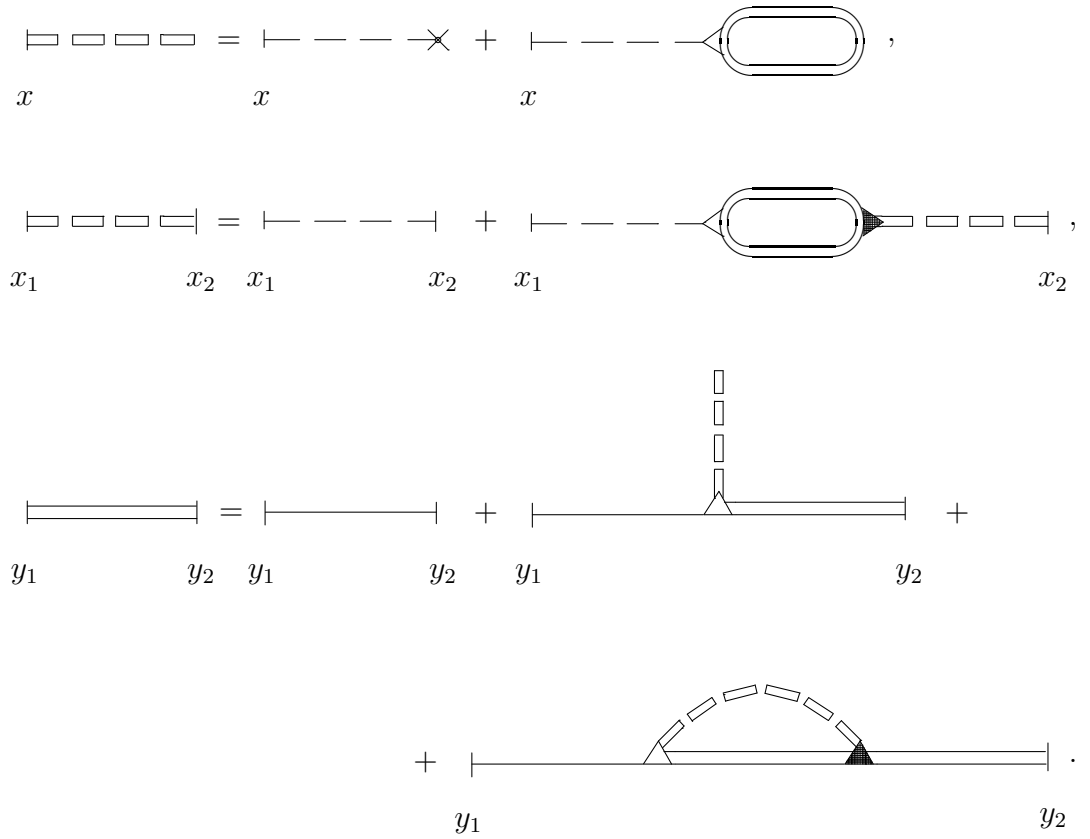

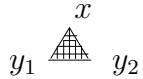


Рис. iv.1. Уравнения Швингера–Дайсона для неравновесной системы электронов и дырок полупроводника, взаимодействующих с фотонным полем.

Для расшифровки диаграмм следует воспользоваться правилами соответствия, приведенными в таблице iv.1, выполнить интегрирование по всем внутренним аргументам и умножить полученный результат на $(i\hbar)^l$, где l — число независимых замкнутых контуров в диаграмме, а также на симметричный коэффициент C (см. формулу (II.7.128)).

ТАБЛИЦА iv.1

N ^o	Изображаемая функция	Элемент диаграммы
1	$i\hbar\tilde{\mathbf{j}}(x)$	
2	$\mathbf{G}_{0a}(x_1, x_2)$	
3	$\mathbf{G}_a(x_1, x_2)$	
4	$\mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2)$	
5	$\mathbf{G}_b(y_1, y_2)$	
6	$\Gamma_0(y_1, y_2 x)$	
7	$\Gamma(y_1, y_2 x)$	

Вычислим вершинную функцию $\Gamma(y_1, y_2|x)$ с точностью до третьего порядка по константе электрон–фотонной связи. Из (iv.100) с помощью (iv.95) и аналогичного равенства для функции $\mathbf{G}_{0b}(y_1, y_2)$ получим:

$$\mathbf{G}_b^{-1}(y, y') = \mathbf{G}_{0b}^{-1}(y, y') - \mathbf{M}(y, y'). \quad (\text{iv.103})$$

Подставляя (iv.103) в определение (iv.97), имеем:

$$\Gamma(y, y'|x) = -\frac{\delta \mathbf{M}(y, y')}{\delta \mathbf{A}(x)}. \quad (\text{iv.104})$$

Используя (iv.102) и (iv.96), с помощью итераций найдем:

$$\begin{aligned} \Gamma(y, y'|x) &\approx \Gamma_0(y, y'|x) \\ &+ i\hbar \int dx_1 dx_2 dy_1 \dots dy_4 \Gamma_0(y, y_1|x_1) \mathbf{G}_a(x_1, x_2) \mathbf{G}_b(y_1, y_2) \Gamma_0(y_2, y_3|x) \\ &\times \mathbf{G}_b(y_3, y_4) \Gamma_0(y_4, y'|x_2). \end{aligned} \quad (\text{iv.105})$$

Диаграммное представление этого разложения приведено на рисунке iv.2.

Рис. iv.2. Разложение вершинной функции $\Gamma(y, y'|x)$ в ряд по степеням константы электрон-фотонного взаимодействия с точностью до членов третьего порядка включительно.

§ iv.5 Преобразование Лежандра

Обсудим связь преобразования (iv.94) и представления (iv.98), (iv.97) с преобразованием Лежандра производящего функционала (iv.87) связанных функций Грина–Келдыша (iv.88). Преобразование Лежандра $Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{A}|\Psi)$ осуществим в два этапа. Сначала перейдем от внешнего источника $\boldsymbol{\eta}$ к новому функциональному аргументу Ψ :

$$Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) \longrightarrow \Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi) = Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) - i\hbar \int dy \Psi(y) \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y). \quad (\text{iv.106})$$

Здесь

$$\Psi(y) = -\frac{1}{i\hbar} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}} Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}), \quad (\text{iv.107})$$

причем

$$\mathbf{G}_b(y_1, y_2) = -\frac{1}{i\hbar} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1)}} \Psi(y_2) = \frac{1}{i\hbar} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2)}} \Psi(y_1). \quad (\text{iv.108})$$

Дифференцируя (iv.107) по $\Psi(y_1)$, получим:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \Psi(y_1)}} \Psi(y) &= \delta(y - y_1) = -\frac{1}{i\hbar} \overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta \Psi(y_1) \delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}} Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \int dy_2 \left[\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \Psi(y_1)}} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2) \right] \overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta \boldsymbol{\eta}(y_2) \delta \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}} Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) \\ &= -i\hbar \int dy_2 \left[\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \Psi(y_1)}} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(2) \right] \mathbf{G}_b(y_2, y). \end{aligned} \quad (\text{iv.109})$$

Сравнивая (iv.109) и (iv.95), найдем:

$$-i\hbar \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \Psi(y_1)}} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_2) = i\hbar \overrightarrow{\frac{\delta}{\delta \Psi(y_2)}} \tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1) = \mathbf{G}_b^{-1}(y_1, y_2). \quad (\text{iv.110})$$

Вычислим производные функционала $\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi)$ по Ψ и по \mathbf{j}

$$\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta\Psi(y)}}\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi) = -i\hbar\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y), \quad (\text{iv.111})$$

$$\overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta\Psi(y_1)\delta\Psi(y)}}\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi) = -i\hbar\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta\Psi(y_1)}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y) = \mathbf{G}_b^{-1}(y_1, y). \quad (\text{iv.112})$$

Из (iv.88)–(iv.90) и (iv.112) получим тождества:

$$\frac{1}{(i\hbar)^2} \int dy_2 \left[\overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta\Psi(y_1)\delta\Psi(y)}}\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi) \right] \left[\overrightarrow{\frac{\delta^2}{\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1)\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y)}}Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) \right] = \delta(y - y_1), \quad (\text{iv.113})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)} &= i\hbar\mathbf{A}(x) - i\hbar \int dy \frac{\delta\Psi(y)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y) = \\ &= i\hbar\mathbf{A}(x) - i\hbar \int dy dy_1 \frac{\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)} \left[\overrightarrow{\frac{\delta}{\delta\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y_1)}}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y) \right] = i\hbar\mathbf{A}(x), \end{aligned} \quad (\text{iv.114})$$

$$\frac{\delta^2\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_1)\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_2)} = i\hbar \frac{\delta\mathbf{A}(x)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_1)} = (i\hbar)^2 \mathbf{G}_a(x_1, x). \quad (\text{iv.115})$$

Перейдем теперь от внешнего источника $\mathbf{j}(x)$ к новому функциональному аргументу $\mathbf{A}(x)$ посредством преобразования

$$\Gamma(\mathbf{A}|\Psi) = \Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi) = Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) - i\hbar \int dx \mathbf{A}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x). \quad (\text{iv.116})$$

Дифференцируя (iv.114) по $\mathbf{A}(x_1)$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathbf{A}(x)}{\delta\mathbf{A}(x_1)} &= \delta(x - x_1) = \frac{1}{i\hbar} \frac{\delta\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi)}{\delta\mathbf{A}(x_1)\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int dx_2 \frac{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_2)}{\delta\mathbf{A}(x_1)} \frac{\delta^2\Gamma_1(\mathbf{j}|\Psi)}{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_2)\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)} = i\hbar \int dx_2 \frac{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_2)}{\delta\mathbf{A}(x_1)} \mathbf{G}_a(x_2, x), \end{aligned} \quad (\text{iv.117})$$

откуда

$$i\hbar \frac{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_2)}{\delta\mathbf{A}(x_1)} = i\hbar \frac{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x_1)}{\delta\mathbf{A}(x_2)} = \mathbf{G}_a^{-1}(x_1, x_2). \quad (\text{iv.118})$$

Вычислим производные функционала (iv.116):

$$\frac{\delta\Gamma(\mathbf{A}|\Psi)}{\delta\mathbf{A}(x)} = -i\hbar\tilde{\mathbf{j}}(x), \quad (\text{iv.119})$$

$$\frac{\delta^2\Gamma(\mathbf{A}|\Psi)}{\delta\mathbf{A}(x_1)\delta\mathbf{A}(x)} = -i\hbar\frac{\delta\tilde{\mathbf{j}}(x)}{\delta\mathbf{A}(x_1)} = -\mathbf{G}_a^{-1}(x_1, x), \quad (\text{iv.120})$$

$$\xrightarrow{\delta} \frac{\delta}{\delta\Psi(y)}\Gamma(\mathbf{A}|\Psi) = -i\hbar\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y), \quad (\text{iv.121})$$

$$\xrightarrow{\delta^2} \frac{\delta^2}{\delta\Psi(y_1)\delta\Psi(y_2)}\Gamma(\mathbf{A}|\Psi) = \mathbf{G}_b^{-1}(y_1, y), \quad (\text{iv.122})$$

$$\xrightarrow{\delta^3} \frac{\delta^3}{\delta\mathbf{A}(x)\delta\Psi(y_1)\delta\Psi(y_2)}\Gamma(\mathbf{A}|\Psi) = \frac{\delta\mathbf{G}_b^{-1}(y_1, y)}{\delta\mathbf{A}(x)} = \boldsymbol{\Gamma}(y_{1,y} \ x). \quad (\text{iv.123})$$

Из (iv.119) и (iv.121) видно, что в отсутствие внешних источников \mathbf{j} и $\boldsymbol{\eta}$ функционал $\Gamma(\mathbf{A}|\Psi)$ удовлетворяет требованию стационарности. Из (iv.106) и (iv.116) следует:

$$\Gamma(\mathbf{A}|\Psi) = Z(\mathbf{j}|\boldsymbol{\eta}) - i\hbar \int dx \mathbf{A}(x)\tilde{\mathbf{j}}(x) - i\hbar \int dy \Psi(y)\tilde{\boldsymbol{\eta}}(y). \quad (\text{iv.124})$$

Литература

- [1] А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов в 4-х томах* (Советская энциклопедия, Москва, 1966), т. 3.
- [2] Р. Лоудон, *Квантовая теория света* (Мир, Москва, 1976).
- [3] М. Данн, А. Мэйтленд, *Введение в физику лазеров* (Наука, Москва, 1967).
- [4] Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, *Успехи физических наук*, **57**, 485 (1955).
- [5] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Атом в сильном световом поле* (Атомиздат, Москва, 1978).
- [6] С. Г. Раутиан, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул* (Наука, Новосибирск, 1979).
- [7] В. И. Ритус, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 1544 (1966).
- [8] Я. Б. Зельдович, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 1492 (1966).
- [9] С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **41**, 456 (1961).
- [10] B. R. Mollow, *Physical Review*, **188**, 1969 (1969).
- [11] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, В. А. Ходовой, *Успехи физических наук*, **117**, 189 (1975).

- [12] B. R. Mollow, *Physical Review*, **13**, 758 (1976).
- [13] Б. А. Зон, Б. Г. Кацнельсон, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **65**, 947 (1973).
- [14] М. И. Шмиглюк, П. И. Бардецкий, *Лазерная спектроскопия экситонов в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1980).
- [15] О. Н. Крохин, *Физика твердого тела*, **7**, 2612 (1965).
- [16] Ю. Л. Климонтович, Э. В. Погорелова, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 1722 (1966).
- [17] В. М. Галицкий, С. П. Гореславский, В. Ф. Елесин, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **57**, 207 (1969).
- [18] В. Ф. Елесин, *Физика твердого тела*, **11**, 1820 (1969).
- [19] В. Ф. Елесин, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **59**, 602 (1970).
- [20] Л. В. Келдыш, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **47**, 1515 (1964).
- [21] В. Ф. Елесин, *Физика твердого тела*, **14**, 669 (1972).
- [22] В. Ф. Елесин, *Физика и техника полупроводников*, **4**, 1524 (1970).
- [23] Ю. И. Балкарей, Э. М. Эпштейн, *Физика твердого тела*, **17**, 2312 (1975).
- [24] В. Д. Блажин, *Физика твердого тела*, **17**, 2325 (1975).
- [25] С. К. Аветисян, Э. М. Казарян, А. О. Меликян, Г. Р. Минасян, *Физика и техника полупроводников*, **15**, 1493 (1981).
- [26] С. П. Гореславский, В. Ф. Елесин, в кн. *Вопросы теории атомных столкновений* (Атомиздат, Москва, 1970).

- [27] В. Ф. Елесин, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **69**, 572 (1975).
- [28] Л. И. Глазман, В. М. Цукерник, *Физика низких температур*, **5**, 1304 (1979).
- [29] С. Е. Кумеков, В. И. Перель, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **37**, 302 (1983).
- [30] G. Lasher, F. Shtern, *Physical Review*, **133**, 553 (1964).
- [31] С. П. Гореславский, В. Ф. Елесин, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **10**, 491 (1969).
- [32] А. С. Александров, В. Ф. Елесин, *Физика и техника полупроводников*, **5**, 615 (1971).
- [33] С. Л. Аратюнян, Э. М. Казарян, Г. Р. Минасян, *Физика твердого тела*, **18**, 2568 (1976).
- [34] А. С. Александров, В. Ф. Елесин, В. Ф. Кремлев, И. А. Полуэктов, *Краткие сообщения по физике*, **11**, 18, (1975).
- [35] В. Ф. Елесин, А. И. Ерко, А. И. Ларкин, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **29**, 709 (1979).
- [36] И. Л. Броневой, Г. А. Гадонас, В. В. Красаускас, Т. М. Лифшиц, А. С. Пирскаскас, М. А. Синицин, Б. С. Явич, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **42**, 322 (1985).
- [37] М. Д. Блох, Л. И. Магарилл, *Физика твердого тела*, **18**, 1487 (1976).
- [38] Г. М. Аратюнян, *Физика и техника полупроводников*, **7**, 600 (1973).
- [39] Г. М. Аратюнян, Э. М. Казарян, *Известия АН Армянской ССР, Физика*, **8**, 339 (1974).

- [40] В. Ф. Елесин, *Физика твердого тела*, **12**, 1133 (1970).
- [41] С. Л. Аратюнян, Э. М. Казарян, Г. Р. Минасян, *Физика твердого тела*, **12**, 2392 (1978).
- [42] С. Л. Аратюнян, Э. М. Казарян, Г. Р. Минасян, *Физика и техника полупроводников*, **13**, 2034 (1979).
- [43] А. А. Кокин, И. В. Поповкин, *Физика твердого тела*, **15**, 1969 (1973).
- [44] Л. В. Келдыш, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **45**, 364 (1963).
- [45] А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 281 (1966).
- [46] А. Г. Аронов, Г. Е. Пикус, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 505 (1966).
- [47] А. Г. Жилич, Б. С. Монозон, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **75**, 1721 (1978).
- [48] А. Г. Жилич, Б. С. Монозон, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **78**, 1087 (1980).
- [49] И. А. Чайковский, В. А. Коварский, Е. Ю. Перлин, *Физика твердого тела*, **14**, 728 (1972).
- [50] А. Г. Жилич, Б. С. Монозон, *Физика и техника полупроводников*, **17**, 2163 (1983).
- [51] В. М. Галицкий, В. Ф. Елесин, *Резонансное взаимодействие электромагнитных полей с полупроводниками* (Энергоатомиздат, Москва, 1986).
- [52] L. V. Keldysh, In *Bose–Einstein Condensation* ed by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, New York, 1995), p. 246.

- [53] J. I. Frenkel, *Physical Review*, **37**, 17 (1931).
- [54] G. H. Wannier, *Physical Review*, **52**, 191 (1937).
- [55] W. Kohn, In *Solid State Physics*, ed. by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press, Inc. New York, 1957), vol. **5**, p. 257–295.
- [56] L. G. Sham, T. M. Rice, *Physical Review*, **144**, 708 (1966).
- [57] J. J. Hopfield, D. G. Thomas, *Physical Review*, **122**, 35 (1961).
- [58] R. G. Wheeler, J. O. Dimmock, *Physical Review*, **125**, 1805 (1962).
- [59] J. J. Hopfield, *Physical Review*, **112**, 1555 (1958).
- [60] С. И. Пекар, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **33**, 1022 (1957).
- [61] A. S. Davydov, A. A. Serikov, *Physica Status Solidi* (b), **56**, 351 (1973).
- [62] Ф. И. Крейнгольд, В. Л. Макаров, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **20**, 441 (1974).
- [63] W. C. Tait, *Physical Review B*, **5**, 648 (1972).
- [64] М. И. Страшникова, Е. В. Бессонов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **74**, 2206 (1978).
- [65] Nguen van Hieu, *Annals of Physics*, **127**, 179 (1980).
- [66] J. Wicksted, M. Matsushita, H. Z. Cummins, T. Shigenari, X. Z. Li, *Physical Review B*, **29**, 3350 (1984).
- [67] I. Broser, K. N. Pantke, M. Rosenzweig, *Physica Status Solidi* (b), **132**, K117 (1985).
- [68] X. Z. Li, M. Dutta, H. Z. Commins, *Physical Review B*, **33**, 2945 (1986).
- [69] P. Weishner, U. Heim, *Physical Review B*, **11**, 3071 (1975).

- [70] Y. Sumi, *Solid State Communications*, **17**, 701 (1975).
- [71] R. M. Martin, T. S. Damen, *Physical Review Letters*, **26**, 86 (1971).
- [72] S. Permogorov, A. Reznitsky, *Solid State Communications*, **18**, 781 (1976).
- [73] A. A. Клочихин, С. А. Пермогоров, А. Н. Резницкий, *Физика твердого тела*, **18**, 2239 (1976).
- [74] P. Y. Yu, In *Excitons*, ed. K. Cho, Topics in Current Physics (Springer, Berlin, 1979), vol. **14**, p. 211–253.
- [75] С. Ю. Вербин, А. А. Клочихин, С. А. Пермогоров, А. Н. Резницкий, *Физика твердого тела*, **22**, 2095 (1980).
- [76] А. А. Клочихин, *Физика твердого тела*, **22**, 1690 (1980).
- [77] A. Cingolani, M. Ferrara, M. Lugara, G. Scamarcio, *Solid State Communications*, **58**, 823 (1986).
- [78] S. Nakashima, M. Balkansky, *Physical Review B*, **34**, 5801 (1986).
- [79] C. Trallero-Giner, A. Cantarero, M. Cardona, *Physical Review B*, **40**, 4030 (1989).
- [80] J. Voight, *Physical Review Letters*, **64**, 549 (1974).
- [81] A. Bossacchi, B. Bossacchi, S. Franchi, *Physical Review Letters*, **36**, 1086 (1976).
- [82] Y. Sumi, *Journal of Physics Society Japan* **41**, 526 (1976).
- [83] R. G. Ulbrich, C. Weisbuch, *Physical Review Letters*, **38**, 865 (1977).
- [84] D. L. Johnson, *Physical Review Letters*, **41**, 417 (1978).
- [85] Y. Segawa, Y. Aoyagi, K. Azuma, S. Namba, *Solid State Communications*, **28**, 853 (1978).
- [86] R. G. Ulbrich, G. W. Fehrenbach, *Physical Review Letters*, **43**, 963 (1979).

- [87] Y. Segawa, Y. Aoyagi, S. Namba, *Solid State Communications*, **32**, 229 (1979).
- [88] Y. Masumoto, Y. Unuma, Y. Tanaka, S. Shionoya, *Journal of Physics Society Japan* **47**, 1844 (1979).
- [89] P. Y. Yu, *Solid State Communications*, **32**, 29 (1979).
- [90] P. Y. Yu, *Physical Review Letters*, **42**, 1642 (1979).
- [91] P. Y. Yu, *Communications Solid State Physics*, **9**, 37 (1979).
- [92] E. S. Koteles, G. Winterling, *Physical Review Letters*, **44**, 948 (1980).
- [93] D. P. Vu, Y. Oka, M. Cardona, *Physical Review B*, **24**, 765 (1981).
- [94] T. Itoh, P. Lavallard, J. Reydellet, Benoit a la Guillaume, *Solid State Communications*, **37**, 925 (1981).
- [95] Y. Masumoto, S. Shionoya, *Journal of Physics Society Japan* **51**, 181 (1982).
- [96] D. Frölich, E. Möhler, P. Wiesner, *Physical Review Letters*, **26**, 554 (1971).
- [97] D. C. Haueisen, H. Mahr, *Physical Review A*, **36**, 433 (1971).
- [98] B. Honerlage, A. Bivas, Vu Duy Phach, *Physical Review Letters*, **41**, 49 (1978).
- [99] G. Winterling, E. S. Koteles, *Solid State Communications*, **23**, 95 (1977).
- [100] Э. С. Котелес, в кн. *Экситоны* под ред. Э. И. Рашбы и М. Д. Стержа (Наука, Москва, 1985), с. 68-106. [Перевод с: *Excitons*, eds. M. Sturge, E. Rashba (North-Holland, Amsterdam, 1982)]
- [101] W. C. Tait, R. L. Weiher, *Physical Review*, **178**, 1404 (1969).
- [102] А. И. Ансельм, Ю. А. Фирсов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **28**, 151 (1955).
- [103] R. M. Martin, *Physical Review B*, **4**, 3676 (1971).

- [104] R. M. Martin, *Physical Review B*, **10**, 2620 (1974).
- [105] P. P. Lottici, C. Razzetti, *Solid State Communications*, **25**, 427 (1978).
- [106] А. И. Ансельм, Ю. А. Фирсов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **30**, 719 (1956).
- [107] J. G. Gay, J. D. Dow, E. Burstein, A. Pinzuc, In *Light Scattering in Solids* ed. by M. Balkanski (1971), pp. 53–62.
- [108] M. L. Shand, W. Richter, E. Burstein, and J. G. Gay, *Journal of Non-Metals* **1**, 53 (1972).
- [109] M. L. Shand, E. Burstein, *Surface Sciences* **37**, 145 (1973).
- [110] A. Pinzuc, E. Burstein, *Surface Sciences* **37**, 153 (1973).
- [111] D. F. Blossey, *Physical Review B*, **2**, 3976 (1970).
- [112] D. F. Blossey, *Physical Review B*, **3**, 1382 (1971).
- [113] S. Wang, M. Matsuura, *Physical Review B*, **10**, 3330 (1974).
- [114] С. А. Москаленко, *Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов и биэкситонов* (Штиинца, Кишинев, 1970).
- [115] D. Hulin, A. Mysyrowisz, Benoit a la Guillaume, *Physical Review Letters*, **45**, 1980 (1970).
- [116] P. Wiesner, U. Heim, *Physical Review B*, **11**, 3071 (1975).
- [117] В. Бисти, *Физика твердого тела*, **18**, 1057 (1976).
- [118] J. J. Hopfield, *Physical Review*, **182**, 945 (1969).
- [119] А. Л. Иванов, Л. В. Келдыш, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **84**, 404 (1983).

- [120] W. C. Tait, R. L. Weiher, *Physical Review*, **166**, 769 (1968).
- [121] А. Л. Иванов, *Доклады АН СССР*, **283**, 99 (1985).
- [122] А. Л. Иванов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **90**, 158 (1986).
- [123] D. J. Kaup, A. Reiman, A. Bers, *Review of Modern Physics*, **51**, 275 (1979).
- [124] Л. К. Водопьянов, Е. А. Виноградов, В. В. Колотков, Ю. А. Митягин, *Физика твердого тела*, **16**, 1419 (1974).
- [125] Л. К. Водопьянов, Е. А. Виноградов, *Физика твердого тела*, **16**, 1432 (1974).
- [126] D. von der Linde, J. Kuhl, H. Klingenberg, *Physical Review Letters*, **44**, 1505 (1980).
- [127] A. L. Ivanov, G. S. Vygovskii, *Physica Status Solidi* (b), **150**, 443 (1988).
- [128] Л. В. Келдыш, С. Г. Тиходеев, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **90**, 1852 (1986).
- [129] Л. В. Келдыш, С. Г. Тиходеев, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **91**, 78 (1986).
- [130] Г. С. Выговский, Г. П. Голубев, Е. А. Жуков, А. А. Фомичев, М. А. Якшин, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **42**, 134 (1985).
- [131] М. С. Бродин, В. Н. Кадан, М. Г. Мацко, *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **45**, 242 (1987).
- [132] М. С. Бродин, В. Н. Кадан, М. Г. Мацко, *Физика твердого тела*, **30**, 1265 (1988).
- [133] B. M. Nitsovich, O. V. Krechivskii, G. M. Pestryakov, *Physica Status Solidi* (b), **148**, K165 (1988).

- [134] T. Ishihara, *Journal of Physics Society Japan* **57**, 2573 (1988).
- [135] B. S. Wang, J. L. Birman, *Solid State Communications*, **75**, 867 (1990).
- [136] B. S. Wang, J. L. Birman, *Physical Review B*, **42**, 9609 (1990).
- [137] N. A. Gippius, A. L. Ivanov, S. G. Tikhodeev, G. S. Vygovskii, *Physica Status Solidi* (b), **159**, 71 (1990).
- [138] B. I. Greene, J. Orenstein, R. P. Millard, L. R. Williams, *Physical Review Letters*, **58**, 2750 (1987).
- [139] B. I. Greene, J. F. Mueller, J. F. Orenstein, D. N. Rapkine, S. Schmitt-Rink, M. Thakur, *Physical Review Letters*, **61**, 325 (1988).
- [140] X. S. Li, D. L. Lin, T. F. George, *Physical Review B*, **42**, 2977 (1990).
- [141] X. Xia, X. S. Li, D. L. Lin, T. F. George, *Physical Review B*, **42**, 4790 (1990).
- [142] D. L. Lin, X. Li, T. F. George, *Physics Letters A*, **152**, 229 (1991).
- [143] G. X. Xie, L. B. Xu, Q. J. Yang, S. F. Cai, *Physics Letters A*, **145**, 166 (1990).
- [144] М. В. Лебедев, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **101**, 957 (1992).
- [145] С. А. Москаленко, П. И. Хаджи, А. Х. Ротару, *Солитоны и нутация в экситонной области спектра* (Штиинца, Кишинев, 1980).
- [146] С. А. Москаленко, *Введение в теорию экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1983).
- [147] М. И. Шмиглюк, В. Н. Питей, *Когерентные поляритоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1989).
- [148] В. Н. Питей, М. И. Шмиглюк, В. Т. Зюков и др., в кн. *Когерентные состояния и фазовые переходы в системе экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1985), с. 58-79.

- [149] Н. Н. Боголюбов, *Вестник МГУ*, **7**, 43 (1947); см. также Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах* (Наукова думка, Киев, 1970), т. 2, с. 242–257.
- [150] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика* (Физматгиз, Москва, 1963).
- [151] В. Р. Мисько, С. А. Москаленко, М. И. Шмиглюк, *Физика твердого тела*, **35**, 3213 (1993).
- [152] A. I. Bobrysheva, S. A. Moskalenko, M. I. Shmigliuk and S. S. Russu, *Physica Status Solidi (b)*, **190**, 481 (1995).
- [153] Дж. Шрифер, *Теория сверхпроводимости* (Наука, Москва, 1970).
- [154] Н. Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики* (Ротапринт ОИЯИ, Д-788, Дубна, 1961).
- [155] Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды в трех томах* (Наукова думка, Киев, 1971), т. 3, с. 174–243.
- [156] Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, *Некоторые вопросы статистической механики* (Высшая школа, Москва, 1975).
- [157] В. Н. Попов, В. С. Ярунин, *Коллективные эффекты в квантовой статистике излучения и вещества* (ЛГУ, Ленинград, 1985).
- [158] С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, Ю. М. Швера, *Препринт ИПФ АН МССР* (Штиинца, Кишинев, 1987).
- [159] С. А. Москаленко, А. Х. Ротару, Ю. М. Швера, в кн. *Квантово-статистические свойства экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1988).
- [160] S. A. Moskalenko, A. H. Rotaru, Yu. M. Shvera, In: *Laser Optics of Condensed Matter*, ed. by J. L. Birman, H. Z. Cummins, A. A. Kaplyanskii (Plenum Press, New York, 1988), pp. 331–336.

- [161] V. R. Misko, S. A. Moskalenko, A. H. Rotaru, et al., *Physica Status Solidi* (b), **159**, 477 (1990).
- [162] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, в тез. докладов *IV Всесоюзн. симп. “Световое эхо и пути его практических применений”* (Куйбышев, 1989 г.), с. 32.
- [163] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, в тез. докладов *XIV Всесоюзн. (пекаровского) совещ. по теории полупроводников* (Донецк, 1989 г.), с. 163.
- [164] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, In Abstracts of *Int. Workshop on Nonlinear Optics and Excitation Kinetics in Semiconductors (NOEKS-2)* (Bad Stuer (GDR), 1989), p. 8.
- [165] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, *Препринт ИПФ АН МССР № 13* (Штиинца, Кишинев, 1989).
- [166] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, *Препринт ИПФ АН МССР № 14* (Штиинца, Кишинев, 1989).
- [167] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, в кн. *Экситоны и биэкситоны в размерно-ограниченных системах* (Штиинца, Кишинев, 1990), с. 133–176.
- [168] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, *Physica Status Solidi* (b), **139**, 91 (1990).
- [169] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, *Zeitschrift für Physik B*, **90**, 51 (1993).
- [170] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, в кн. *Взаимодействие экситонов с лазерным излучением* (Штиинца, Кишинев, 1991), с. 57–74.
- [171] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, *Теоретическая и математическая физика*, **85**, 237 (1990).
- [172] Д. Н. Зубарев, *Неравновесная статистическая термодинамика* (Наука, Москва, 1971).

- [173] Л. В. Келдыш, в кн. *Проблемы теоретической физики* (Наука, Москва, 1972), с. 433-444.
- [174] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики* (Наука, Москва, 1977).
- [175] С. С. Фанченко, *Теоретическая и математическая физика*, **55**, 137 (1983).
- [176] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* (Наука, Москва, 1976).
- [177] J. Schwinger, *Journal of Mathematical Physics*, **2**, 407 (1961).
- [178] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования* (Наука, Москва, 1986).
- [179] Дж. Д. Бьёркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория* (Наука, Москва, 1978), т. I.
- [180] С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля* (Иностранная литература, Москва, 1963).
- [181] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Наука, Москва, 1974).
- [182] В. П. Олейник, Д. И. Абакаров, И. В. Белоусов, в тез. докладов *IX Всесоюзн. конф. по когерентной и нелинейной оптике, посвященной памяти акад. Р. В. Хохлова* (Ленинград, 13–16 июня 1978 г.), — М., 1978, ч. II, с. 83.
- [183] V. P. Oleinik, D. I. Abakarov, I. V. Belousov, In Abstracts of *VIII Int. Conf. on Quantum Electronics and Nonlinear Optics EKON-78* (Poznan', April 24 to 27, 1978), Sec. B, pp. 59–61.
- [184] Д. И. Абакаров, В. П. Олейник, И. В. Белоусов, в тез. докладов *IX Совещ. по теории полупроводников* (Тбилиси, 24–26 октября 1978 г.), с. 3–4.

- [185] I. V. Belousov, V. P. Oleinik, *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **12**, 655 (1979).
- [186] F. S. Felber, J. H. Marburger, *Journal of Mathematical Physics*, **16**, 2089 (1975).
- [187] В. П. Олейник, Д. И. Абакаров, И. В. Белоусов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **75**, 312 (1978).
- [188] Д. М. Волков, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **7**, 1286 (1937).
- [189] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).
- [190] В. И. Ритус, в кн. *Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. Труды ФИАН СССР, т. III* (Наука, Москва, 1979), с. 5–151.
- [191] В. П. Олейник, *Украинский физический журнал*, **13**, 1205 (1968).
- [192] В. П. Олейник, *Украинский физический журнал*, **14**, 2076 (1969).
- [193] И. Ф. Баталин, Е. С. Фрадкин, *Теоретическая и математическая физика*, **5**, 190 (1970).
- [194] В. П. Олейник, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **61**, 27 (1971).
- [195] В. П. Олейник, В. А. Синяк, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **69**, 94 (1975).
- [196] Е. Ю. Перлин, В. А. Коварский, *Физика твердого тела*, **12**, 3105 (1970).
- [197] V. P. Oleinik, V. A. Sinyak, *Optics Communications*, **14**, 179 (1975).
- [198] I. V. Belousov, *Optics Communications*, **20**, 205 (1977).

- [199] И. В. Белоусов, в кн. *Собственные полупроводники при больших уровнях возбуждения* (Штиинца, Кишинев, 1978).
- [200] И. В. Белоусов, в кн. *Молодежь и научно-технический прогресс* (Штиинца, Кишинев, 1982).
- [201] I. V. Belousov, *Physics Letters A*, **106**, 7 (1984).
- [202] И. В. Белоусов, В. А. Синяк, в тез. докладов *X Совещ. по теории полупроводников* (Новосибирск, 30 сентября–2 октября 1980 г.), — Новосибирск, 1980, ч. I, с. 63.
- [203] И. В. Белоусов, В. А. Синяк, *Теоретическая и математическая физика*, **5**, 190 (1980).
- [204] И. В. Белоусов, в кн. *Экситоны и биэкситоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 160–181.
- [205] В. П. Олейник, И. В. Белоусов, *Проблемы квантовой электродинамики вакуума, диспергирующих сред и сильных полей* (Штиинца, Кишинев, 1983).
- [206] *Излучательная рекомбинация в полупроводниках. Под ред. Я. Е. Покровского* (Физматгиз, Москва, 1972).
- [207] И. В. Белоусов, В. В. Серженчу, в тез. докладов *XII Совещ. по теории полупроводников* (Ташкент, 30 октября – 3 ноября 1984 г.), с. 189.
- [208] I. V. Belousov, V. V. Serzhentu, V. V. Frolov, *Optics Communications*, **57**, 102 (1986).
- [209] И. В. Белоусов, В. В. Серженчу, В. В. Фролов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **91**, 626 (1986).
- [210] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Теоретическая и математическая физика*, **43**, 3 (1980).

- [211] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, **11**, 295 (1980).
- [212] В. П. Олейник, *Препринт ИФ АН УССР*, 71–4 (Киев, 1974).
- [213] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику* (Наука, Москва, 1984).
- [214] L. S. Brown, T. W. B. Kibble, *Physical Review A*, **133**, 705 (1964).
- [215] А. И. Никишов, В. И. Ритус, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **46**, 776 (1964).
- [216] А. С. Давыдов, *Теория твердого тела* (Наука, Москва, 1976).
- [217] I. V. Belousov, V. V. Serzhentu, *Optics Communications*, **66**, 115 (1988).
- [218] И. В. Белоусов, В. В. Серженту, в кн. *Квантово-статистические свойства экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1988).
- [219] Р. Нокс, *Теория экситонов* (Мир, Москва, 1966).
- [220] R. J. Elliot, *Physical Review*, **108**, 1384 (1957).
- [221] Д. Тэкер, В. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела* (Мир, Москва, 1975).
- [222] *Ультразвук: маленькая энциклопедия* (Советская энциклопедия, Москва, 1979).
- [223] В. Л. Гуревич, *Физика и техника полупроводников*, **2**, 1557 (1968).
- [224] Ю. В. Гуляев, *Физика твердого тела*, **12**, 415 (1970).
- [225] В. З. Кресин, Б. Т. Гейликман, *Кинетические и нестационарные явления в сверхпроводниках* (Наука, Москва, 1972).
- [226] А. А. Абрикосов, *Введение в теорию нормальных металлов* (Наука, Москва, 1972).

- [227] В. Л. Гуревич, Ю. М. Гальперин, В. И. Козуб, *Успехи физических наук*, **128**, 107 (1979).
- [228] А. И. Глазман, *Физика низких температур*, **7**, 595 (1981).
- [229] Дж. Бардин, Дж. Шрифер, *Новое в изучении сверхпроводимости* (Физматгиз, Москва, 1962).
- [230] В. Л. Покровский, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **40**, 898 (1961).
- [231] В. Л. Покровский, М. С. Рывкин, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **40**, 1859 (1961).
- [232] Д. Каллуэй, *Теория энергетической зонной структуры* (Мир, Москва, 1969).
- [233] И. М. Цидильковский, *Электроны и дырки в полупроводниках* (Наука, Москва, 1972).
- [234] В. Л. Гуревич, В. Г. Скобов, Ю. А. Фирсов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **40**, 786 (1961).
- [235] Э. А. Канер, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **42**, 216 (1962).
- [236] И. В. Белоусов, в кн. *Экситоны и биэкситоны в полупроводниках* (Штиинца, Кишинев, 1982), с. 154–160.
- [237] В. В. Фролов, *Украинский физический журнал*, **35**, 1399 (1990).
- [238] V. V. Frolov, *Physica Status Solidi* (b), **165**, 269 (1991).
- [239] В. В. Фролов, в кн. *Взаимодействие экситонов с лазерным излучением* (Штиинца, Кишинев, 1991).
- [240] В. В. Фролов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **101**, 1572 (1992).

- [241] В. Л. Гуревич, В. Д. Каган, *Физика твердого тела*, **4**, 2441 (1962).
- [242] А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников* (Наука, Москва, 1978).
- [243] В. Гайтлер, *Квантовая теория излучения* (ИЛ, Москва, 1956).
- [244] У. Люисселл, *Излучение и шумы в квантовой электронике* (Наука, Москва, 1972).
- [245] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (Мир, Москва, 1968).
- [246] Ф. Плацман, П. Вольф, *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела* (Мир, Москва, 1975).
- [247] И. В. Белоусов, В. В. Серженчу, в тез. докладов *Всесоюзн. конф. "Использование современных физических методов в неразрушающих исследованиях и контроле"* (Хабаровск, 5, 6 ноября 1984 г.), — Хабаровск, 1984, сек. I, с. 33–34.
- [248] И. В. Белоусов, В. В. Серженчу, В кн. *Когерентные состояния и фазовые переходы в системе экситонов большой плотности* (Штиинца, Кишинев, 1985).
- [249] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (ЛГУ, Ленинград, 1976).
- [250] G. Jona-Lasinio, *Nuovo Cimento*, **34**, 1790 (1964).
- [251] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, Москва, 1979).
- [252] М. С. Бродин, Э. Н. Мясников, С. В. Марисова, *Поляритоны в кристаллооптике* (Наукова думка, Киев, 1984).
- [253] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (Наука, Москва, 1978).
- [254] У. Люисселл, *Излучение и шумы в квантовой электронике* (Наука, Москва, 1972).

- [255] А. С. Шварц, *Элементы квантовой теории поля. Бозонные взаимодействия* (Атомиздат, Москва, 1975).
- [256] А. А. Славнов, *Теоретическая и математическая физика*, **22**, 177 (1975).
- [257] Л. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля* (Мир, Москва, 1984), т. 2.
- [258] Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика* (Мир, Москва, 1978).
- [259] Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики* (Мир, Москва, 1970).
- [260] С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, *Теоретическая и математическая физика*, **3**, 287 (1970).
- [261] В. П. Калашников, М. И. Ауслендер, *Доклады АН СССР*, **215**, 810 (1974).
- [262] М. И. Ауслендер, В. П. Калашников, *Теоретическая и математическая физика*, **25**, 370 (1975).
- [263] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, In Abstracts of *Int. Workshop on Bose-Einstein Condensation* (Levio Terme (Trento), Italy, 1993), p. 23.
- [264] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, In Abstracts of *Int. Conf. of Luminescence and Optical Spectroscopy of Condensed Matter* (Connecticut, USA, 1993).
- [265] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, *Preprint of Int. Centre of Theoretical Physics No. IC/93/235* (Miramare-Trieste, 1993).
- [266] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, In Abstracts of *Int. Conf. on Excitonic Processes in Condensed Matter* (Darwin, Australia, 1994).
- [267] I. V. Belousov, Yu. M. Shvera, In *Bose-Einstein Condensation* ed by A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari (Cambridge University Press, New York, 1995), pp. 513-518.

- [268] V. L. Safonov, *Physica A*, **188**, 675 (1992).
- [269] W. F Brinkman, T. M. Rice, B. Bell, *Physical Review B*, **8**, 1570 (1966).
- [270] A. I Bobrysheva, M. F. Miglei, M. I. Shmiglyuk, *Physica Status Solidi (b)*, **53**, 71 (1972).
- [271] И. В. Белоусов, Ю. М. Швера, в кн. *Нелинейные оптические свойства экситонов в полупроводниках различной размерности* (Штиинца, Кишинев, 1992), с. 53–64.
- [272] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *European Sci. Conf. “Bose–Einstein Condensation”* (Strasbourg, France, 1995), pp. 39–40.
- [273] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *15th Int. Conf. on Coherent and Nonlinear Optics* (St. Petersburg, Russian Federation, 1995).
- [274] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In *Coherent Phenomena and Amplification without Inversion* ed. by Anatoli V. Andreev, Olga Kocharovskaya and Paul Mandel (SPIE (– The International Society for Optical Engineering) Proceedings Series, v. **2798**, Washington, 1996), pp. 163–174.
- [275] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *23th Int. Conf. on the Physics of Semiconductors* (Berlin, Germany, Technische Universität, July 21–26, 1996), MoP–30.
- [276] И. В. Белоусов, В. В. Фролов, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **109**, 1806 (1996).
- [277] I. V. Belousov, V. V. Frolov, *Physical Review B*, **54**, 2523 (1996).
- [278] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *Int. Semiconductor Conf.* (Sinaia, Romania, October 9–12, 1996), pp. 361–364.

- [279] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In the Proceedings of the *23th Int. Conf. on the Physics of Semiconductors* (Berlin, Germany, Technische Universität, July 21–26, 1996) ed. by Matthias Scheffler and Roland Zimmermann (World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., Singapore,1996), v. **1**, pp. 361–364.
- [280] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *Int. Workshop on Nonlinear Optics and Excitation Kinetics in Semiconductors (NOEKS-5)* (Gaal Müritz (Rostock), Germany, 1997).
- [281] I. V. Belousov, V. V. Frolov, In Abstracts of *Int. Conf. Optics of Excitons in Condensed Matter dedicated to the 100th anniversary of Professor E.F.Gross* (St. Petersburg, Russia, September 14–18, 1997).
- [282] I. V. Belousov, V. V. Frolov, *Physica Status Solidi* (b), **206**, 249 (1998).
- [283] Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем* (Наука, Москва, 1984).
- [284] В. М. Галицкий, В. В. Якимец, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **51**, 957 (1966); см. также В. М. Галицкий, *Избранные труды. Исследования по теоретической физике* (Наука, Москва, 1983), с. 247–256.