

Российская Академия Наук  
Институт Математических Проблем Биологии

На правах рукописи

Елькин Юрий Евгеньевич

# **Кинематика стационарных и медленно эволюционирующих автоволновых фронтов.**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Специальность 03.00.02 (Биофизика)

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Бикташев Вадим Надырович

Пущино 2000

# Оглавление

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Введение</b>                                               | <b>6</b>  |
| <b>1 Обзор литературы.</b>                                    | <b>10</b> |
| 1.1 Активные среды и их математическое описание. . . . .      | 10        |
| 1.2 Свойства автоволн. . . . .                                | 17        |
| 1.3 Приближенные методы исследования автоволн. . . . .        | 21        |
| 1.4 Кинематический подход. . . . .                            | 24        |
| <b>2 Вывод основных уравнений</b>                             | <b>28</b> |
| 2.1 Основные уравнения двумерной кинематики. . . . .          | 28        |
| 2.1.1 Обозначения и постановка задачи. . . . .                | 28        |
| 2.1.2 Вывод законов движения фронта и его обрыва. . . . .     | 31        |
| 2.2 Безразмерная форма задач в двумерной кинематике . . . . . | 36        |
| 2.3 Основные уравнения трехмерной кинематики . . . . .        | 38        |
| <b>3 Стационарные спиральные автоволны</b>                    | <b>45</b> |
| 3.1 Предварительные замечания. . . . .                        | 45        |
| 3.2 Решение ОДУ. . . . .                                      | 46        |
| 3.3 Решение граничной задачи при $\gamma = 0$ . . . . .       | 52        |
| 3.3.1 Круглая среда произвольного радиуса. . . . .            | 52        |
| 3.3.2 Неограниченная среда. . . . .                           | 57        |
| 3.3.3 Среда большого радиуса. . . . .                         | 58        |

|          |                                                                                   |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.4    | Среда малого радиуса. . . . .                                                     | 62        |
| 3.3.5    | Применимость решений. . . . .                                                     | 64        |
| 3.3.6    | Обсуждение. . . . .                                                               | 67        |
| 3.4      | Стационарная спираль в неограниченной среде при произвольном $\gamma$ . . .       | 69        |
| 3.4.1    | Постановка задачи и общее решение. . . . .                                        | 69        |
| 3.4.2    | Наиболее общий случай. . . . .                                                    | 72        |
| 3.4.3    | Случай непрорастающего кончика. . . . .                                           | 74        |
| <b>4</b> | <b>Дрейф спиральных волн в слабо неоднородной среде</b>                           | <b>76</b> |
| 4.1      | Предварительные замечания. . . . .                                                | 76        |
| 4.2      | Математическая постановка задачи . . . . .                                        | 77        |
| 4.3      | Метод решения . . . . .                                                           | 81        |
| 4.3.1    | Свободная спираль . . . . .                                                       | 81        |
| 4.3.2    | Теория возмущений . . . . .                                                       | 82        |
| 4.4      | Результаты . . . . .                                                              | 83        |
| 4.4.1    | Общая формулировка . . . . .                                                      | 83        |
| 4.4.2    | Приближенное решение для типичного случая . . . . .                               | 86        |
| 4.4.3    | Неоднородность в виде линейного градиента . . . . .                               | 89        |
| 4.4.4    | Неоднородность в форме ступеньки . . . . .                                        | 90        |
| 4.5      | Обсуждение . . . . .                                                              | 91        |
| <b>5</b> | <b>Сопоставление с результатами других теорий и численного экспери-<br/>мента</b> | <b>95</b> |
| 5.1      | Сравнение с методом свободной границы. . . . .                                    | 95        |
| 5.1.1    | Введение. . . . .                                                                 | 95        |
| 5.1.2    | Постановка задачи. . . . .                                                        | 97        |
| 5.1.3    | Трансляционные волны. . . . .                                                     | 97        |
| 5.1.4    | Спиральные волны. . . . .                                                         | 102       |
| 5.1.5    | Обсуждение. . . . .                                                               | 108       |

|          |                                                                   |            |
|----------|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2      | Сравнение традиционной и новой кинематики. . . . .                | 112        |
| 5.3      | Численное моделирование свободных спиралей. . . . .               | 114        |
| 5.3.1    | Введение: постановка задачи и выбор объекта исследования. . .     | 114        |
| 5.3.2    | Методика, параметры и результаты экспериментов. . . . .           | 115        |
| 5.3.3    | Эксперименты с моделью ФитцХью-Нагумо. . . . .                    | 121        |
| 5.3.4    | Обсуждение. . . . .                                               | 124        |
| 5.4      | Численное моделирование дрейфа на ступенчатой неоднородности. . . | 124        |
| <b>6</b> | <b>Прямой скрученный свиток.</b>                                  | <b>127</b> |
| 6.1      | Предварительные замечания. . . . .                                | 127        |
| 6.2      | Геометрия фронта. . . . .                                         | 128        |
| 6.3      | Постановка плоской задачи . . . . .                               | 131        |
| 6.4      | Приближенное аналитическое решение для случая общего положения. . | 135        |
| 6.5      | Обсуждение. . . . .                                               | 138        |
|          | <b>Заключение</b>                                                 | <b>140</b> |
|          | <b>Список литературы</b>                                          | <b>142</b> |

# Список иллюстраций

|     |                                                                                                  |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.1 | Фазовые портреты точечной системы для РД-системы . . . . .                                       | 16  |
| 2.1 | Кинематическое описание движения линии гребня. Координаты и скорости. . . . .                    | 30  |
| 3.1 | Фазовый портрет основного дифференциального уравнения при $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ . . . . . | 47  |
| 3.2 | Спиральная волна в неограниченной среде. . . . .                                                 | 59  |
| 3.3 | Спиральная волна в круглой среде большого радиуса. . . . .                                       | 62  |
| 3.4 | Спиральная волна в круглой среде малого радиуса. . . . .                                         | 64  |
| 3.5 | Три решения для краевой задачи с новыми граничными условиями . .                                 | 70  |
| 4.1 | Функции отклика. . . . .                                                                         | 88  |
| 4.2 | Скорости дрейфа спиральной волны. . . . .                                                        | 91  |
| 5.1 | Фазовый портрет дифференциального уравнения для спиральных и трансляционных волн. . . . .        | 98  |
| 5.2 | Кривизна как функция длины вдоль фронта для трансляционных волн.                                 | 100 |
| 5.3 | Трансляционная волна, отвечающая замкнутой фазовой траектории. . .                               | 101 |
| 5.4 | Фазовые портреты уравнения для спиральных волн. . . . .                                          | 102 |
| 5.5 | “Изогнутая спираль” . . . . .                                                                    | 103 |
| 5.6 | Спиральные волны в окрестности $\gamma = 0$ . . . . .                                            | 105 |
| 5.7 | Области существования спиральных и трансляционных волн. . . . .                                  | 108 |

|      |                                                                                                       |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.8  | Профиль импульса и спиральная волна в модели Алиева-Панфилова. .                                      | 116 |
| 5.9  | Зависимость параметра $R/(TV_*)$ от расстояния до границы роторов. . .                                | 118 |
| 5.10 | Сопоставление кинематической теории с численным экспериментом для<br>модели Алиева-Панфилова. . . . . | 120 |
| 5.11 | Профиль импульса и спиральная волна в модели ФитцХью-Нагумо. . .                                      | 121 |
| 5.12 | Сопоставление кинематической теории с численным экспериментом для<br>модели ФитцХью-Нагумо. . . . .   | 123 |
| 5.13 | Дрейф спиральной волны на неоднородности в виде ступеньки. . . . .                                    | 125 |
| 6.1  | Решения уравнения для твистованного свитка. . . . .                                                   | 135 |
| 6.2  | Решения для случая большого твиста. . . . .                                                           | 137 |
| 6.3  | Безразмерные угловая скорость и радиус ядра в зависимости от твиста.                                  | 138 |

# Введение

В работе предложено развитие кинематического метода описания автоволн в возбудимых активных средах, ранее предложенного другими авторами [1, 2, 3].

*Автоволнами* обычно называют волновые процессы, имеющие устойчивые (“самоподдерживающиеся”) параметры — скорость, амплитуду, форму импульса. Способностью к многократному проведению автоволн обладают так называемые *активные среды*, для которых характерно наличие распределенных внешних источников энергии, то есть с термодинамической точки зрения это открытые системы далекие от равновесия. После прохождения автоволнового импульса такая среда должна восстановить свои свойства за счет поступающей извне энергии и подготовиться к проведению следующего импульса. Необходимое для этого восстановления время называется *рефрактерным периодом*. В течении рефрактерного периода среда не способна к проведению следующего импульса.

Активные среды могут иметь любую размерность. В одномерном случае автоволна представляет собой распространяющийся с некоторой скоростью импульс определенной формы и амплитуды, тогда как в двумерном или трехмерном она характеризуется еще и формой своего фронта. Было обнаружено, что наличие рефрактерности делает возможным существование уже в двумерном случае особых режимов, вращающихся автоволн, развивающихся из волновых фронтов со свободным концом. В достаточно больших средах, эти режимы имеют вид вращающихся спиралей, в которых кончик спирали — обрыв волны возбуждения — вращается “вокруг самого себя”. Различные авторы называют это явление спиральными волнами, ревербераторами, роторами или

автоволновыми вихрями. Это явление — пример самоорганизации, поскольку существование и местоположение такого вихря в среде не связаны с какой-либо неоднородностью, а определяются только эволюцией системы. Автоволновые вихри демонстрируют удивительную стабильность своих свойств, они ведут себя “по их собственному усмотрению”, и на их поведение могут существенно влиять только те события, которые происходят вблизи ядра.

Автоволны возникают в самых различных средах физического, химического и биологического происхождения. Их примерами могут служить концентрационные волны в реакции Белоусова-Жаботинского [4], волны химической сигнализации в колониях некоторых микроорганизмов [5], волны в межзвездном газе, приводящие к образованию спиральных галактик [6]. Важный пример активных сред представляют многие биологические ткани. Так, автоволновую природу имеют распространение нервного импульса [7] и возбуждения в сердечной мышце [8]. Автоволны, таким образом, играют важную роль в функционировании живых систем. Изучение их свойств является ключом к пониманию многих явлений в нервной системе, работе мышц, морфогенезе, динамике экосистем и других вопросов биофизики. Нарушение режимов распространения автоволн ведет к серьезным нарушениям жизнедеятельности. Так в сердечной мышце возникновение спиральных волн приводит к некоторым опасным для жизни аритмиям. Управляя возникшей волной при помощи внешних воздействий, можно ликвидировать такую аритмию. Этими соображениями определяется важность исследования автоволновых процессов.

Математически активные среды чаще всего описываются уравнениями типа реакция-диффузия с нелинейным реакционным членом. Непосредственное решение таких уравнений — сложная математическая задача. Например, до сих пор неизвестно их точных решений в виде спиральных волн. Все результаты получены только приближенно, главным образом численно. Случаи, когда аналитические решения могут быть найдены асимптотическими методами, представляют особую ценность, отвечая на вопросы, которые трудно выяснить при помощи только численного моделирования.

Одним из таких асимптотических методов является *кинематический подход*, ра-



заработанный специально для *возбудимых сред*, то есть разновидности активных сред наиболее часто встречающихся в живых системах. Он применим для сред с малой рефрактерностью, т.е. когда время релаксации среды к стационарному состоянию после прохождения волны возбуждения много меньше промежутка времени между прохождением последующих волн. В этом случае можно ограничиться рассмотрением движения только волнового фронта, т.е. линии на плоскости или поверхности в трехмерном пространстве, нормальная скорость которого оказывается зависящей только от локальной кривизны фронта. В результате размерность соответствующей математической задачи снижается на единицу. При исследовании движения волнового фронта с обрывом, необходимо описать движение этого обрыва и поставить граничные условия на нем. В ранее опубликованных работах, для этого использовались уравнения, при выводе которых использовались некоторые феноменологические предположения.

**В данной работе необходимые уравнения получены методами теории возмущений непосредственно из уравнения реакция-диффузия, описывающего данную возбудимую среду. Так полученные уравнения оказались обобщением ранее использовавшихся полуфеноменологических уравнений. Кроме того, в работе исследуются решения некоторых стационарных и нестационарных задач в рамках новой кинематической модели.**

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы.

Первая глава является вводной и содержит обзор литературы, посвященной некоторым математическим методам исследования автоволн. Особое внимание уделяется методам, основанным на изучении движения автоволновых фронтов. Проводится сравнение таких методов, предложенных различными авторами.

Вторая глава “Вывод основных уравнений” занимает центральное место в диссертации. В ней дан вывод уравнений движения обрыва волнового фронта из уравнений “реакция-диффузия”. Уравнения получены для автоволн как в плоской, так и в трехмерной возбудимой среде.

В третьей главе “Стационарные спиральные автоволны” получены решения задач кинематики в виде волновых фронтов, сохраняющих свою форму и вращающихся

вокруг неподвижного центра. Рассматриваются случаи неограниченной однородной среды и круглой однородной среды конечного радиуса.

В четвертой главе “Дрейф спиральных волн в слабо неоднородной среде” рассматривается пример нестационарной задачи. В третьей главе были получены решения в виде спиральной волны, вращающейся вокруг фиксированного центра в неограниченной однородной среде. Если среда пространственно неоднородна, причем эта неоднородность слабая, то существуют решения в каждый момент времени близкие к такой спиральной волне, центр вращения которой перемещается со временем. Это перемещение называется *дрейфом*. Применяя технику теории возмущений, удастся вычислить вектор скорости дрейфа и изменение частоты вращения спирали.

В пятой главе “Сопоставление с результатами других теорий и численного эксперимента” проводится сравнение результатов полученных при помощи кинематического метода для стационарных и дрейфующих спиральных волн с результатами “классического” кинематического подхода, основанного на полуфеноменологических уравнениях движения кончика и с результатами идейно близкого метода свободной границы [3]. Кроме того, здесь же проводится сравнение с результатами численного моделирования возбудимой среды, описываемой уравнениями “реакция-диффузия”

Наконец, в шестой главе приводятся результаты, достигнутые при рассмотрении кинематическим методом простейшей задачи в трехмерном пространстве. Рассматривается прямой свиток с постоянным градиентом фазы вращения вдоль его оси.

В “Заключении” формулируются некоторые выводы.

# Глава 1

## Обзор литературы.

### 1.1 Активные среды и их математическое описание.

Во введении уже отмечалось, что автоволны возникают в активных средах, которые характеризуются не только наличием связи (потоков вещества и/или энергии, например, диффузии или теплопроводности) между отдельными точками среды, ее *элементами*, но и достаточно сложным поведением отдельного элемента. Можно выделить три простейших типа таких элементов [9]: *бистабильный*, *возбудимый* и *автоколебательный*, которым отвечают соответствующие типы составленных из них активных сред.

Бистабильный элемент обладает двумя устойчивыми стационарными состояниями, переходы между которыми происходят при внешнем воздействии, превышающем некоторый порог. В средах из таких элементов возникают *волны переключения* из одного состояния в другое. К ним относятся, например, волны горения [10, 11].

Возбудимый элемент имеет только одно устойчивое стационарное состояние. Внешнее воздействие, превышающее пороговый уровень, способно вывести элемент из устойчивого состояния и заставить его совершить некоторую эволюцию, прежде чем он вновь вернется в это состояние. Во время переходов, активный элемент способен повлиять на связанные с ним элементы и в свою очередь вывести их из стационарно-

го состояния. В результате, в такой среде распространяется *волна возбуждения*. Это наиболее распространенный вид автоволн в биологических средах, таких как нервная ткань [7], или сердечная мышца [8].

Автоколебательный элемент не имеет стационарных состояний и постоянно совершает устойчивые автоколебания определенной формы, амплитуды и частоты. Внешнее воздействие способно возмутить эти колебания. По прошествии некоторого времени релаксации, все их характеристики кроме фазы вернутся к своему устойчивому значению, но фаза может измениться. В итоге, в среде из таких элементов распространяются *фазовые волны*. Это, например, волны в электрогирлянде и некоторых химических средах.

Математическую модель активной среды можно строить на основе свойств отдельных элементов среды, составляя ее из определенным образом связанных *клеточных автоматов*. Каждый из них имеет конечное множество состояний и совершает переходы между ними по определенным правилам, характерным для элемента среды данного типа. Такие модели называются *аксиоматическими* [12, 9, 13]. С их помощью был получен ряд качественных результатов, особенно касающихся возбудимых сред, например, наблюдалось образование спиральной волны из плоского фронта со свободным концом. Однако, наблюдать более тонкие эффекты, а тем более добиться количественного соответствия с экспериментальными данными, на таких моделях не удается.

Более детальное описание активной среды можно получить, основываясь на дифференциальных уравнениях с частными производными типа реакция-диффузия (далее *РД-системы*). При этом связи между элементами — точками среды — описываются диффузионными членами уравнений, а динамика отдельного элемента — реакционными. Количество независимых пространственных переменных в РД-системе определяет размерность среды и может меняться от одной до трех. Незвестные функции описывают динамику величин (*компонент*), характеризующих среду. Это концентрации веществ в химической системе; концентрации ионов, трансмембранные токи и напряжения при описании нервной или мышечной ткани. В реальной системе таких

переменных может быть сколь угодно много, но основные закономерности поведения активных сред наблюдаются уже в моделях с двумя компонентами. Для того чтобы реакционный член адекватно описывал достаточно сложное локальное поведение активного элемента, он должен быть нелинейным.

Общая двухкомпонентная РД-система имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_t u &= D_{11}\Delta u + D_{12}\Delta v + F(u, v) \\ \partial_t v &= D_{21}\Delta u + D_{22}\Delta v + G(u, v)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $t$  — время,  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $v(\mathbf{r}, t)$  — неизвестные функции,  $\Delta$  — оператор Лапласа по пространственным переменным (радиус вектору  $\mathbf{r}$ ),  $\hat{\mathbf{D}} = \{D_{ij}\}$  — тензор диффузии,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  — реакционные члены. Система ОДУ (1.1) с нулевым тензором диффузии называется *точечной системой* и описывает динамику отдельного элемента среды.

В зависимости от вида реакционных членов, активная среда может оказаться бистабильной, автоколебательной или возбудимой. Вид фазовых портретов точечной системы для сред различных типов показан на рис. 1.1. Приведем некоторые наиболее популярные модели конкретных сред и укажем некоторые их свойства, важные для данной работы.

## Бистабильные среды.

Для реализации модели бистабильной среды достаточно даже однокомпонентной системы:

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u)\tag{1.2}$$

Такова, например, модель распространения пламени [9], в которой  $u = u(\mathbf{r}, t)$  — температура,  $f(u) = C^{-1}q(u)$ ,  $C$  — удельная теплоемкость,  $q(u)$  — теплота сгорания,  $D$  — коэффициент температуропроводности среды. Если уравнение  $q(u) = 0$  имеет три корня  $u_1 < u_2 < u_3$ , причем температура воспламенения  $u_0$  такова что  $u_1 < u_0 < u_3$ , то в такой среде возможно распространения волн возгорания или тушения.

Среди биологических задач, бистабильные среды появляются, например, в некоторых задачах популяционной генетики. Так, в [14] была предложена простейшая модель видообразования

$$\partial_t p = \psi(p) + D\Delta p \quad (1.3)$$

$$\psi(p) = p(1-p) \frac{(w_{AA} - w_{AB})p + (w_{AB} - w_{BB})(1-p)}{w_{AA}p^2 + 2w_{AB}p(1-p) + w_{BB}(1-p)^2} - \mu p + \nu(1-p) \quad (1.4)$$

где  $p$  — частота гена  $A$ , а  $(1-p)$  — гена  $B$ , генотипам  $AA$ ,  $AB$ ,  $BB$  соответствуют коэффициенты приспособляемости  $w$  с соответствующими индексами,  $\mu$  и  $\nu$  — частоты мутаций,  $D$  — коэффициент “диффузии”, обусловленной миграцией особей. При некоторых параметрах, уравнение  $\psi(p) = 0$  имеет три корня, тогда уравнение (1.3) имеет два устойчивых состояния равновесия, а переход между ними носит характер фазового перехода. В такой среде возможно распространение волн переключения, отвечающих вытеснению одного вида другим.

Скорость волны переключения в одномерном случае определяется только функцией  $f(u)$ . К сожалению, получить эту скорость аналитически удастся только для некоторых видов функции  $f(u)$  [9, 15], в том числе, для важного частного случая, когда  $f(u)$  — кубичный полином. В двумерной среде скорость волны зависит также и от кривизны  $K$  ее фронта. Эта зависимость, для случая диагонального диффузионного тензора с равными коэффициентами  $D$ , имеет вид

$$c = c_0 - DK, \quad (1.5)$$

где  $c_0$  — скорость в одномерной среде. Отметим, что, благодаря положительности  $D$ , такая зависимость гарантирует устойчивость плоского фронта: при появлении на нем выпуклого (вогнутого) участка, он будет двигаться медленнее (быстрее) и фронт выровняется.

## Автоколебательные среды.

Копелль и Ховардом [16] был предложен простой класс моделей автоколебательных сред, так называемые  $\lambda - \omega$  системы:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta u + \lambda(\rho)u - \omega(\rho)v \\ \partial_t v &= \Delta v + \omega(\rho)u + \lambda(\rho)v\end{aligned}\tag{1.6}$$

где  $\rho^2 = u^2 + v^2$ ,  $\lambda(0) > 0$ ,  $\omega(0) \neq 0$ ,  $\lambda(\rho)$  имеет изолированный ноль при некотором  $\rho = \rho_0 > 0$ . В частности к этому классу принадлежит обобщенное уравнение Гинзбурга-Ландау (УГЛ), которое, как было показано в [17] описывает автоколебательную среду с точечной системой вблизи бифуркации Хопфа. В УГЛ

$$\begin{aligned}\lambda(\rho) &= \alpha_1 + \beta_1 \rho^2 \\ \omega(\rho) &= \alpha_2 + \beta_2 \rho^2\end{aligned}\tag{1.7}$$

## Возбудимые среды.

Поскольку данная работа посвящена именно возбудимым средам, то остановимся на них подробнее. Конкретный вид уравнений для нервной ткани был предложен Ходжкиным и Хаксли в 1952 году [18], а для сердечной ткани через 10 лет Ноблом [19]. Обе они содержат по четыре уравнения. Для клеток сердечной ткани характерна сильная релаксационность [20], т.е. значительное превышение (примерно в 300 раз) времени рефрактерности над временем возбуждения. Это приводит к тому, что волна возбуждения в сердечной ткани имеет резкий передний, но не имеет выраженного заднего фронта. Эта особенность уравнений существенно затрудняет непосредственное решение их на ЭВМ, но позволяет произвести аналитическую редукцию с учетом малости параметров. В результате количество уравнений удастся сократить до двух [21].

Широкий класс возбудимых сред (в том числе сердечная ткань) может быть описан двухкомпонентными РД-системами (1.1) со специальным видом реакционных членов и различной скоростью изменения переменных. Пусть, например  $u$  — *быстрая переменная*, а  $v$  — *медленная*. Для того чтобы система была возбудимой, достаточно

предположить, что  $\theta$ -изоклина уравнения для  $u$ , то есть кривая  $F(u, v) = 0$  на плоскости  $(u, v)$  имеет N-образный вид, а реакционный член  $G(u, v) \equiv \bar{v}(u) - v$ , где  $\bar{v}(u)$  монотонно возрастает, причем реакционный член  $F(u, v) > 0$  ниже кривой  $F(u, v) = 0$  и отрицателен выше нее, а единственная точка пересечения 0-изоклин  $F(u, v) = 0$  и  $F(u, v) = 0$  лежит левее минимума  $F(u, v) = 0$ , как это показано на рисунке 1.1(a). Отметим, что при другом расположении корней, среда окажется автоколебательной (рис. 1.1(b)) или бистабильной (рис. 1.1(c)).

Из модельных систем возбудимых сред наибольшее распространение получили

- Кубичная модель ФитцХью-Нагумо, [22]

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \varepsilon^{-1}(u - u^3/3 - v) + \Delta u \\ \partial_t v &= \varepsilon(u + \beta - \gamma v) + \delta \Delta v\end{aligned}\tag{1.8}$$

где  $\delta$  выбирается равным 0 или 1.

- Ее модификация — кусочно-линейная модель ФитцХью-Нагумо [23]:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= a_i u - g_1 v + b_i + \Delta u, \\ \partial_t v &= \varepsilon_i(g_2 u - v), \\ i &= \begin{cases} 0, & u < u_1, \\ 1, & u_1 < u < u_2, \\ 2, & u_2 < u, \end{cases} \\ b_0 &= 0, \quad b_1 = (a_0 - a_1)u_1, \quad b_2 = -a_2, \\ u_2 &= \frac{a_2 + (a_0 - a_1)u_1}{a_2 - a_1} \\ a_{0,2} &< 0, \quad a_1 > 0, \quad 0 < u_1 < \frac{a_1}{a_1 - a_0}, \\ g_1 &> 0, \quad g_2 > \frac{(a_0 - a_1)u_1 + a_1}{(a_0 - a_1)u_1 + a_2} a_2\end{aligned}\tag{1.9}$$

- Модель Баркли, [24]

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \varepsilon^{-1}u(1 - u) \left( u - \frac{v + b}{a} \right) + \Delta u \\ \partial_t v &= u - v\end{aligned}\tag{1.10}$$



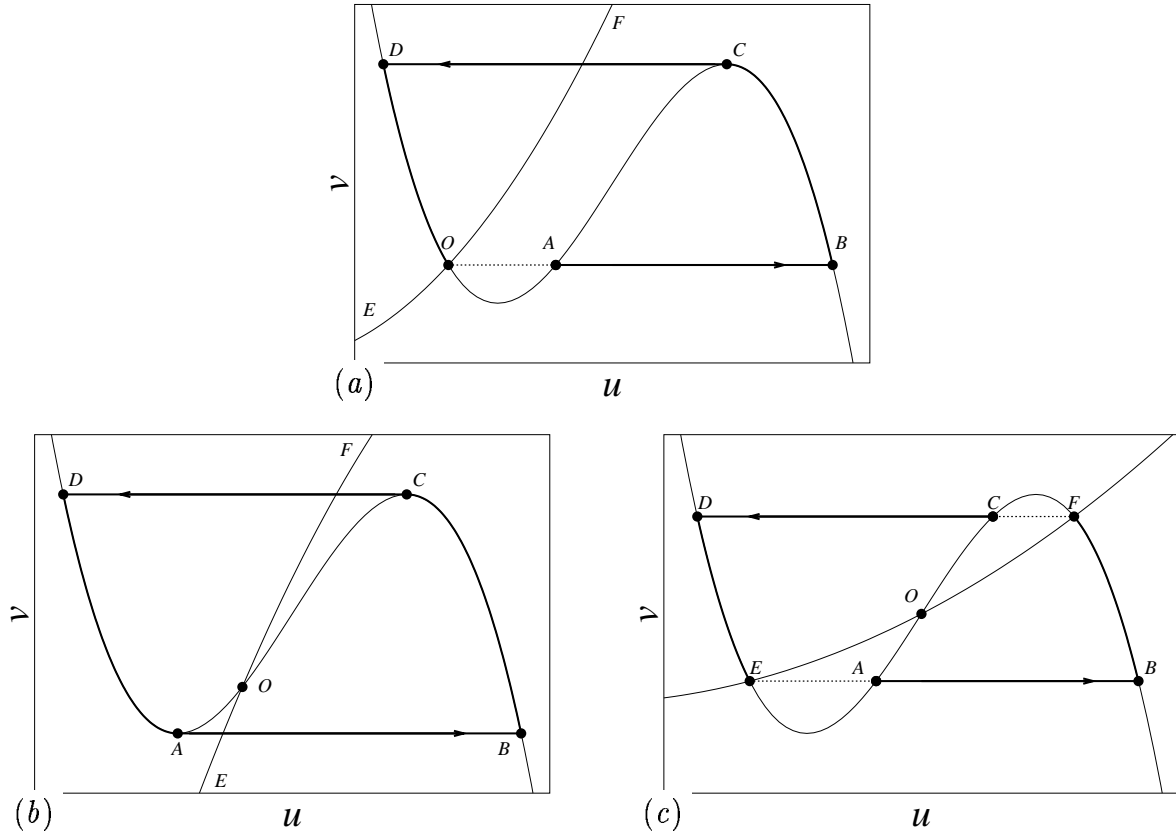


Рис. 1.1: Фазовые портреты точечной системы  $\dot{u} = F(u, v)$ ,  $\dot{v} = \varepsilon G(u, v)$ , где  $\varepsilon \ll 1$  — малый параметр. Сплошные линии — 0-изоклины:  $EOB$  — медленного уравнения  $G(u, v) = 0$ ,  $BCAD$  — быстрого уравнения  $F(u, v) = 0$ . В зависимости от расположения точек пересечения 0-изоклин, соответствующая среда обладает различными свойствами: (a) Возбудимая среда.  $O$  — устойчивое состояние равновесия системы; пунктирная линия  $OA$  — выведение из равновесия при внешнем воздействии; жирная сплошная линия  $ABCDO$  — траектория дальнейшей эволюции системы. При этом отрезок  $AB$  соответствует переднему, а  $CD$  — заднему фронтам волны возбуждения. (b) Автоколебательная среда.  $O$  — неустойчивое состояние равновесия системы; жирная сплошная линия  $ABCD$  — предельный цикл, описываемый системой при автоколебании. (c) Бистабильная среда.  $F$  и  $E$  — точки устойчивых равновесий; пунктирные линии  $EA$  и  $FC$  — внешние воздействия;  $ABF$  и  $CDE$  — траектории последующего переключения в другое равновесие.

- *Модель Алиева-Панфилова* [25], хорошо воспроизводящая основные особенности импульса возбуждения в сердечной ткани:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta u - ku(u-a)(u-1) - uv; \\ \partial_t v &= -\left(\epsilon_0 + \frac{\mu_1 v}{u + \mu_2}\right)(v + ku(u-a-1))\end{aligned}\tag{1.11}$$

## 1.2 Свойства автоволн.

Автоволны обладают многими особенностями, делающими их резко отличными от волн в консервативных системах: они не сохраняют энергию, не удовлетворяют принципу суперпозиции, зато сохраняют форму и амплитуду [26]. Для них нет эффектов интерференции и отражения в обычном виде, связанных с принципом суперпозиции. Хотя в некоторых случаях возможны эффекты похожие на отражение и аннигиляцию солитонов [27]. Пожалуй, единственное свойство, объединяющее автоволны с линейными волнами — это принцип Гюйгенса, позволяющий говорить также о дифракции автоволн.

Одним из важнейших отличительных свойств активной среды является ее рефрактерность — необходимость некоторого времени на восстановление свойств после прохождения импульса. На портрете 1.1(*a*) точечной системы возбудимой среды рефрактерный участок описывается отрезком  $DO$ . Сразу после прохождения автоволны, активная среда находится в рефрактерном состоянии и неспособна к повторному проведению волны, но со временем среда возвращается в исходное состояние и способность проводить автоволны восстанавливается. В некоторых случаях возможно и проведение волны до полного восстановления среды — *состояние относительной рефрактерности*, но скорость ее при этом будет несколько меньше в зависимости от прошедшего с момента прохождения предыдущей волны времени. Так в РД-моделях возбудимых сред, описанных в разделе 1.1, скорость распространения очередной волны определяется значением медленной переменной  $v$  установившимся после прохождения предыдущей [28]. Для периодической последовательности импульсов это при-

водит к *дисперсии* — зависимости скорости волн от их частоты. В [29] закон дисперсии для модельной среды Ринцеля-Келлера был получен аналитически. Если время после прохождения предыдущей волны слишком мало, то проведение последующей вообще невозможно, так что **существует минимальный временной интервал между соседними волнами** — *время абсолютной рефрактерности*. Однако даже после полного восстановления среды, **скорость волны в ней не может превысить некоторой максимальной для данной среды величины**.

В одномерной среде автоволны могут представлять собой либо одиночный импульс определенной формы, либо последовательность таких импульсов, движущихся с некоторой скоростью, зависящей от интервалов между импульсами. Перейдем к описанию автоволн в двумерных средах.

Источником автоволн в активной среде может служить некоторая ее область, называемая *пейсмейкером*, испускающая автоволны с некоторым периодом. Пейсмейкер создает в среде картину в виде кольцевых волн расходящихся из некоторого центра. Период пейсмейкера определяется его собственными свойствами и может быть произвольным, но не меньше времени абсолютной рефрактерности. При наличии в среде нескольких пейсмейкеров с разными периодами, низкочастотные подавляются наиболее высокочастотными [9].

Уже в аксиоматических моделях типа Винера-Розенблюта [12] было показано, что разрыв плоской волны возбуждения при ее встрече с невозбудимым препятствием в среде приводит к образованию *спиральной автоволны* (другие названия: *ревербератор*, *автоволновой вихрь*), вращающейся вокруг этого препятствия. Позже было выяснено, что спиральные волны возникают в сходных условиях не только в возбудимых, но и в автоколебательных средах [30]. Кроме того, оказалось, что наличие препятствия не является обязательным и спиральная волна возникает также и при создании подходящих начальных условий [31].

В спиральной волне обрыв ее фронта — *кончик* — вращается вокруг фиксированной точки — *центра спирали* по окружности определенного радиуса. Внутри круга, ограниченного этой окружностью, и называемого *ядром*, автоволна не проникает. В

возбуждаемой среде ядро остается невозбужденным. В случае неограниченной однородной среды, радиус ядра, как и скорость вращения спирали, определяются только свойствами самой среды, а не начальными условиями. Форма спиральной волны вдали от центра вращения близка к эвольвенте окружности — границы ее ядра [12].

Спиральная волна, возникшая в среде, приводит к возникновению в ней периодической последовательности волн, похожей на испускаемую пейсмейкером. В такой последовательности каждая последующая волна, вообще говоря, движется в среде, находящейся в частично рефрактерном состоянии после прохождения предшествующей. Поэтому скорость ее распространения зависит и от периода спиральной волны. Пренебrecь этой зависимостью при приближенном изучении спиральных волн можно только в том случае, если период значительно больше времени рефрактерности, и вся автоволна, вплоть до самого кончика, движется в среде, находящейся в состоянии покоя, а не рефрактерности. Такая ситуация имеет место для спиральных волн с большим ядром, описанных в [32].

В отличие от волн, генерируемой пейсмейкером, последовательность импульсов в спиральной волне имеет фиксированный период, определенный свойствами самой среды. В силу этого спиральные волны не подавляют друг друга, но могут взаимодействовать иным способом, например, вызывая взаимное движение центров друг друга — дрейф и изменение скоростей вращения [33]. К тому же результату приводит и взаимодействие спиральной волны с границей или неоднородностью среды [34, 35, 36, 37], а также периодическое изменение свойств среды [38, 36].

Как уже отмечалось во введении, на поведение спиральных волн могут существенно влиять только те события, которые происходят вблизи ядра. Это свойство устойчивости типично для автоволновых вихрей в различных моделях, включая как возбудимые, так и автоколебательные среды. Хотя оно никогда не было доказано строго математически а только постулировано, это свойство позволяет создать асимптотические теории автоволновой динамики, обращаясь с ними как с квазичастицами в двух измерениях [39], или нитями вихря в трех измерениях [40, 41]. Однако, эти теории оперируют сингулярными интегралами, сходимость которых в практически важных

случаях остается открытым вопросом и зависит от асимптотического поведения чувствительности спиральной волны к удаленным событиям. Аналитические результаты относительно этой чувствительности ограничены случаем автоколебательной модели, описываемой уравнением Гинзбурга-Ландау. Взаимодействие вихрей в этой модели с границами и неоднородностями среды и друг с другом рассматривалось в [42, 43, 44], и было показано, что чувствительность убывает с расстоянием по экспоненте.

Различные автоволновые режимы, такие как распространяющиеся плоские или спиральные волны, могут существовать в активной среде не всегда, а лишь при определенных условиях на параметры этой среды. Винфри [45] построил (путем численного эксперимента) диаграмму в пространстве параметров  $(\varepsilon, \beta)$  кубичной модели ФитцХью-Нагумо (1.8) при  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 1/2$ . На диаграмме представлены линия  $\partial R$ , ограничивающая область параметров, при которых в одномерной среде могут распространяться импульсы, а в двумерной — плоские автоволны; *граница роторов*  $\partial R$ , ограничивающая область параметров, при которых в среде существуют спиральные волны; границы *меандра*  $\partial M$  и *гипермеандра*  $\partial C$ , ограничивающие области параметров, при которых могут существовать двупериодические и более сложные режимы. Спиральные волны с большим ядром существуют в средах с параметрами близкими к границе  $\partial R$ . Аналогичная диаграмма для модели Баркли (1.10) была построена в [46].

Еще большее разнообразие картин может возникать в трехмерных активных средах. Прямым обобщением спиральной волны на трехмерное пространство является *свиток*, у которого вращение происходит вокруг некоторой прямой — *нити*. Однако нить свитка может быть и произвольным образом искривлена и, возможно, замкнута, а фаза вращения свитка может меняться вдоль нити (в этом случае свиток называется *скрученным*) [40, 41]. Существуют определенные топологические ограничения [47, 48, 49, 50], существенно сокращающие разнообразие трехмерных структур, например не может существовать одиночный скрученный кольцевой свиток.

Спиральные и свитковые волны наблюдались в многочисленных экспериментах с активными средами различной природы. Важным примером является сердечная

ткань [26, 51]. Именно волны возбуждения заставляют сердечную мышцу сокращаться и выполнять свою функцию. Возникают они в специальном пейсмейкере — так называемом *синусовом узле*. При некоторых патологиях возможно возникновение в сердце автоволновых вихрей *риентри*, которые испускают волны значительно более высокой частоты и подавляют синусовый узел. Это приводит к опасным для жизни *тахикардиям* и *фибрилляциям* (беспорядочным сокращения сердца). Методы борьбы с ними — высоковольтная и низковольтная дефибрилляции [52] — основаны на закономерностях движения автоволн и стимулируют их изучение.

### 1.3 Приближенные методы исследования автоволн.

Как уже говорилось, наиболее адекватным математическим описанием активных сред являются РД-системы. Однако это довольно сложная математическая модель и полное ее исследование весьма затруднительно. Например, до сих пор не получено точных решений какой-либо РД-системы в виде спиральной волны. Поэтому актуально построение приближенных методов исследования. Укажем некоторые такие методы, которые близки к теме данной работы методически или дают результаты в сравнимых терминах.

Обобщением приближения геометрической оптики для линейных волн является *метод диффузии автоволн* [53, 54]. Основное уравнение этого метода может быть записано в терминах волнового вектора  $\mathbf{k} = \nabla\phi$ , где  $\phi$  — фаза, и имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{k} = \text{grad} \left( -\omega(\mathbf{k}^2) + P(\mathbf{k}^2) \text{div} \mathbf{k} + Q(\mathbf{k}^2) (\mathbf{k}, \text{grad}(\mathbf{k}^2)) \right) \quad (1.12)$$

Здесь  $\omega$  — частота автоволны,  $P(\mathbf{k}^2)$  называется коэффициентом *поперечной* диффузии, а  $R(\mathbf{k}^2) = P(\mathbf{k}^2) + 2\mathbf{k}^2 Q(\mathbf{k}^2)$  — коэффициентом *продольной* диффузии. Эти коэффициенты описывают диффузию фазы автоволны обусловленную изменением направления волнового вектора  $\mathbf{k}$  (поперечная диффузия) и его величины (продольная диффузия). Поперечная диффузия происходит вдоль волнового фронта и определяет зависимость скорости автоволн от кривизны фронта. Продольная диффузия, напро-

тив, происходит вдоль направления волнового вектора в направлении ортогональном к фронту и вместе с *дисперсионным* членом  $\omega$  отвечает в частности за зависимость скорости от частоты следования волн.

К волнам возбуждения применимы методы, основанные на изучении движения фронта волны, что позволяет понизить размерность задачи на единицу. Отметим среди них *метод свободной границы* [3, 55, 56, 57, 58] и *кинематический подход* [1, 2, 59, 60]. В основе обоих указанных методов лежит зависимость скорости распространения автоволнового фронта от его кривизны, аналогичная соотношению (1.5) для волны переключения, в котором, однако,  $D$  является теперь некоторой феноменологической константой среды.

Основное различие между этими методами состоит в том, что понимается под фронтом. В методе свободной границы различают *передний* и *задний* фронты, соответствующие процессам нарастания возбуждения (участок  $OB$  диаграммы 1.1( $a$ )) — передний фронт и его спада (участок  $CD$ ) — задний фронт. Эти две кривые делят среду на *возбужденная область* (участок  $BC$ ) и *область покоя* (участок  $DO$ ). Передний и задний фронты пересекаются в точке обрыва волны. Понятно, что передний и задний фронты распространяются в областях с различным значением  $v$ , а значит, как уже отмечалось выше, соответствующие скорости распространения плоского фронта также различны. В итоге удастся получить уравнения движения для фронтов в полярных координатах и решать их численно. Результаты, полученные в методе свободной границы, будут обсуждаться в разделе 5.1.5, посвященном их сравнению с результатами настоящей работы.

В кинематическом подходе, который будет более подробно обсуждаться в разделе 1.4, в качестве фронта выбирается некая условная линия, заменяющая собой как передний, так и задний фронты, которые предполагаются близко лежащими. Обрыв фронта — *кончик* — представляет собой в этом случае особую точку, для которой необходимо выписывать дополнительные уравнения движения и граничные условия.

Подчеркнем, что несмотря на идеологическую близость кинематического подхода и метода свободной границы, которые даже используют общее уравнение (1.14), ме-

тод свободной границы основан на рассмотрении волны возбуждения имеющей резкие передний и задний фронты, и описание проводится в терминах движения этих двух фронтов. Хотя понятие крутого переднего фронта вполне уместно при описании сердечной волны возбуждения, понятие заднего фронта довольно сомнительно, кончик здесь не является точкой соединения переднего и заднего фронтов и метод свободной границы вообще едва ли применим к сердечной ткани. Напротив, кинематический подход не нуждается ни в четком заднем, ни даже в переднем фронте, а только предполагает, что *гребень волны* остается гладким и профиль импульса поперек этой линии возмущается слабо, а эти условия соответствуют некоторым состояниям в сердечной ткани.

С технической точки зрения для кинематического подхода характерно использование натуральных уравнений для представления линии фронта вместо принятых в методе свободной границы уравнений в полярных координатах.

В классической формулировке [61, 62], кинематический подход применяется к РД-системе с диффузией только одной компоненты и сильно различающимися характерными временами для быстрой и медленной переменных (система типа (1.8) с  $\delta = 0$  и  $\varepsilon \ll 1$ ). В этом случае коэффициент  $D$  в уравнении эйконала (1.5) снова приобретает смысл единственного коэффициента диффузии. В [63, 64] предложено обобщение кинематического подхода на случай сред с дисперсией. Оказалось, что и в этом случае зависимость скорости распространения от кривизны описывается уравнением (1.5), только теперь  $D$  является функцией временного интервала между последовательными прохождениями волнового фронта через точку (для спиральной волны — ее частоты). В [64] получен вид этой функции отдельно для случаев  $\delta = 0$  и  $\delta = 1$ .

При некоторых предположениях удается исключить из уравнений не только профили переменных среды поперек волнового фронта, но и саму форму фронта и свести задачу о спиральных волнах к движению квазичастиц на плоскости [39], а задачу о поведении трехмерного автоволнового вихря к движению его нитями в пространстве [40, 41], как уже упоминалось в разделе 1.2.



## 1.4 Кинематический подход.

Кинематический подход для возбудимых сред разрабатывался Михайловым, Давыдовым, Зыковым и другими, начиная с 1980 года [61, 62]. Термин “кинематическое описание” подчеркивает, что вся лежащая в его основе физика сконцентрирована в нескольких феноменологических константах, определяющих зависимость скорости от кривизны, после чего предсказание движения волны становится чисто геометрической задачей в пространстве-времени. Поскольку развитие именно этого подхода составляет содержание данной работы, остановимся подробнее на его классической формулировке.

Подход основан на двух главных предположениях:

- (А) волны возбуждения проходят редко, так, что распространение следующей волны независимо от предыдущей;
- (В) волны почти плоские, то есть кривизны их фронтов малы.

Фактически, это означает близость системы в параметрическом пространстве к границе роторов  $\partial R$  на диаграмме Винфри [45]. С точки зрения практической важности кинематической теории, такие предположение могут показаться довольно экзотическим. Однако, при изучении свойств сердечной ткани, это соответствует пониженной возбудимости и/или укороченному потенциалу действия и рефрактерности, которые являются особенностями некоторых патологических состояний, а это делает этот предел интересным и с практической точки зрения. Например, численные эксперименты Ефимова и др. [65] с моделью желудочной ткани показывают, что переход через границу меандра  $\partial M$  (который является путем ведущим к границе  $\partial R$ ) может произойти при сокращении числа работающих Na-каналов, а такое сокращение, как известно, коррелирует с некоторыми сердечными патологиями, такими как ишемия и влиянием некоторых лекарственных препаратов.

При указанных предположениях кинематический подход сводит описание распространения волн к описанию движения их фронтов. Вообще говоря, фронт имеет сво-

бодный конец, называемый обрывом волны или кончиком. Форма кривой, с точностью до ее местоположения на плоскости, может быть описана в терминах ее “натурального уравнения”,  $K(s, t)$ , где  $s$  — длина, измеренная вдоль кривой от ее свободного конца,  $K$  — ее кривизна, и  $t$  — время. Если известны также нормальная скорость волнового фронта в каждой его точке  $V(s, t)$  и касательная компонента скорости кончика  $G(t)$ , то уравнение, определяющее эволюцию кривизны можно получить чисто геометрически [1, 2]. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial K}{\partial s} \left[ \int_0^s K(s, t) V(s, t) ds - G \right] + K^2 V + \frac{\partial K}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

Предположения (А) и (В) позволяют считать, что скорость фронта в каждой точке полностью определяется его кривизной в этой точке, а скорость кончика — предельным значением кривизны на кончике  $K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} K(s)$

“Классический” кинематический подход [1, 2] основан на феноменологическом предположении, что эти зависимости имеют вид

$$V(s, t) = V_* - DK(s, t) \quad (1.14)$$

$$G(t) = \gamma(K_c - K(0, t)) \quad (1.15)$$

Здесь  $V_*$ ,  $K_c$ ,  $\gamma$  и  $D$  — константы, характеризующие свойства среды. В частности  $V_*$  — скорость плоской волны.

В случае стационарной спиральной волны, ее натуральное уравнение  $K(s)$  не изменяется во времени, так что  $dK/dt = 0$ . Если положить также  $G = 0$ , как в [1, 2], и проинтегрировать (1.13) по  $s$ , то получим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$K(s) \left[ \int_0^s K(s) (V_* - DK(s)) ds - G \right] - D \frac{dK}{ds} = \omega \quad (1.16)$$

Можно показать [1], что постоянная интегрирования  $\omega$  — угловая частота вращения волны.

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями на свободном конце. В нестационарном случае, дополнительное уравнение для эволюции кривизны кончика имеет вид

$$\partial_t K_0 = G \partial_s K_0, \quad (1.17)$$

Уравнение (1.14) известно во многих областях физики, например, в теории распространения пламени и роста кристаллов (см. ссылки в [3]), а для импульсов возбуждения в системах реакция-диффузия оно было получено, например Курамото [66]. Уравнение (1.15) было сначала предложено из феноменологических соображений; в [1, 2] оно было обосновано методом возмущений, подобным используемому Курамото [66], стартуя с решения в виде оборванной плоской волны, распространяющейся в направлении, ортогональном к ней самой, и пренебрегая, на некотором этапе, изменением кривизны вдоль волны. Последнее уравнение в этой системе (1.17) является наиболее сомнительным местом в существующей теории; как представлено в [2], оно является фактически произвольным предложением, необходимым чтобы замкнуть систему уравнений. В стационарном случае, уравнение (1.17) можно удовлетворить двумя различными способами; обычно предполагается, что

$$G = 0 \Rightarrow K(0) = K_c, \quad (1.18)$$

Уравнения (1.13), (1.16) с различными граничными условиями использовались для изучения стационарных и нестационарных режимов распространения волн в возбудимых средах, обзор результатов можно найти в [1, 2]. В частности в [67] рассмотрены стационарно вращающиеся волны в круглой среде малого радиуса, а в [36] — дрейф спиральной волны при внешнем воздействии, которое, правда, ограничивается случаями однородного периодического изменения критической кривизны  $K_c$  или ее постоянного градиента. Подтверждение некоторых выводов, полученных при помощи кинематического подхода, было получено в численном эксперименте [60]. В последнее время кинематический подход применяется и для изучения другие автоволновых образов в возбудимых средах, отличных от спиральных волн [59].

Можно заметить, что оба предположения (А) и (В) требуют, чтобы критическая кривизна  $K_c$  была мала. Так, это - прямое следствие (В), поскольку критическая кривизна — кривизна фронта импульса в его кончике по уравнению (1.18). С другой стороны, согласно результатам [1, 2, 67] и как мы увидим в разделе 3.3.1, большой радиус ядра, требуемый (А), может также быть реализован, только при достаточно малом  $K_c$ .

В [68] было предложено обобщение кинематического подхода для волн возбуждения на искривленной поверхности, в [69] для анизотропной среды, а в [70, 71] для трехмерных автоволновых структур. В трехмерном случае уравнения для скорости распространения фронта (1.14) и для скорости прорастания (1.15) заменяются на

$$V = V_* - 2DH \quad (1.19)$$

$$G = \gamma_1(2H - K_c) - \gamma_2\kappa \quad (1.20)$$

где  $H$  — средняя кривизна поверхности фронта,  $\kappa$  — геодезическая кривизна линии обрыва, а  $\gamma_{1,2}$  — две новых константы среды.

## Глава 2

# Вывод основных уравнений

### 2.1 Основные уравнения двумерной кинематики.

#### 2.1.1 Обозначения и постановка задачи.

Рассматривается система “реакция-диффузия” на плоскости,

$$\partial_t u = \hat{\mathbf{D}} \Delta u + f(u) + \delta f(u), \quad (2.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^l$ ,  $l \geq 2$  — вектор-столбец переменных состояния  $f + \delta f \in \mathbb{R}^l$  описывает локальную кинетику,  $\hat{\mathbf{D}}$  — матрица  $l \times l$  коэффициентов диффузии, и  $\Delta$  — двумерный оператор Лапласа.

Предполагается, что система (2.1) является возмущением системы специального вида

$$\partial_t u = \hat{\mathbf{D}} \Delta u + f(u), \quad \delta f = \epsilon f_1, \quad \epsilon \ll 1, \quad (2.2)$$

имеющей автомодельное решение  $u_*$  в виде волны с обрывом, с нормальной скоростью (скоростью распространения)  $v_*$  и боковой скоростью (скоростью “прорастания”)  $g_*$ ,

$$u(x, y, t) = u_*(x - v_* t, y - g_* t) \quad (2.3)$$

Координата  $\eta = y - g_* t$  выбрана так, чтобы волна лежала при  $\eta > 0$ . (2.3) — наиболее общая форма стационарного решения в виде полуволны с учетом симметрии

уравнения реакция-диффузия (2.2). То что это не произвольное двумерное решение, а именно плоская полуволна определяется условиями:

$$\begin{aligned} u_*(\xi, \eta) &\rightarrow \bar{u}_*(\xi), \eta \rightarrow +\infty \\ \bar{u}_*(\xi) &\rightarrow u_0, \xi \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

т.е. вдали от обрыва полуволна переходит в плоскую волну с профилем уединенного импульса  $\bar{u}_*(\xi)$  распространяющегося в среде с состоянием покоя  $u_0$ .

Будем искать решение системы (2.1) в виде слабо возмущенной и плавно изогнутой полуволны. Введем систему координат  $(s, q)$ , связанную с фронтом (см. рис. 2.1(a)),

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(s, t) + q\mathbf{N}(s, t), \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{R}(s, t)$  — уравнение фронта,  $\mathbf{N}(s, t)$  — единичная нормаль к фронту в сторону распространения, а  $s$  — длина вдоль фронта от точки обрыва. Введем также следующие обозначения для величин, связанных с фиксированной точкой в координатах (2.5) (см. рис. 2.1(b)):  $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{R}$  — единичная касательная к фронту,  $K = -\partial_s \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}$  — его кривизна,  $V = \partial_t \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}$  — нормальная,  $G = \partial_t \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$  — касательная и  $\omega = -\partial_t \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}$  — угловая локальные скорости его движения. Отметим, что

$$\omega = -(\partial_t \mathbf{N}) \cdot \mathbf{T} = -\partial_t (\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) + \mathbf{N} \cdot (\partial_t \mathbf{T}) = \mathbf{N} \cdot (\partial_t \mathbf{R}_s) = (\mathbf{N} \cdot (\partial_t \mathbf{R}))_s - \mathbf{N}_s \cdot (\partial_t \mathbf{R}) = V_s - KG \quad (2.6)$$

Искомое решение

$$u(s, q, t) = u_*(s, q) + \delta u(s, q, t), \quad \delta u = \epsilon u_1. \quad (2.7)$$

Для ряда задач о движении волны возбуждения несущественно знание функции  $u$ , так как функция  $\mathbf{R}(s, t)$  полностью определяет и форму фронта и характеристики движения (скорость фронта; частоту и центр вращения спиральной волны и т.п.). Как уже указывалось в главе 1, именно определение функции  $\mathbf{R}(s, t)$  составляет сущность кинематического подхода. В этой главе мы сформулируем математическую задачу для нахождения функции  $\mathbf{R}(s, t)$ .

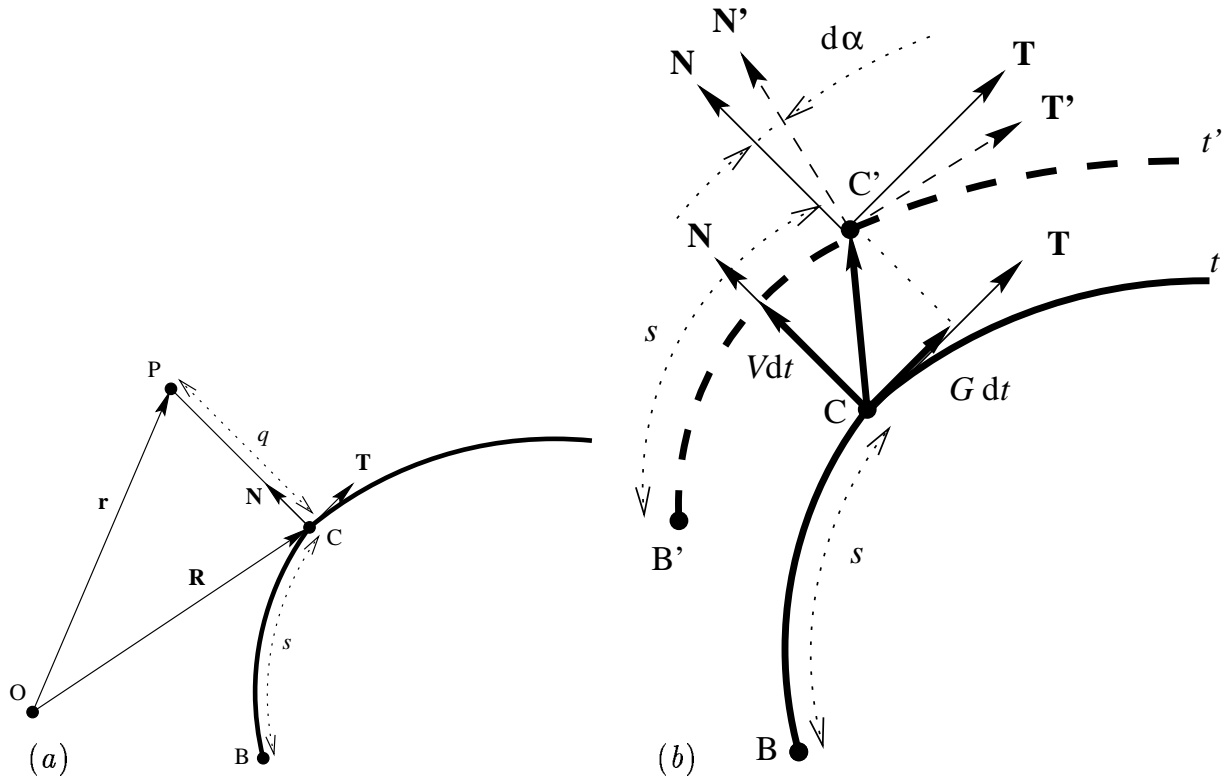


Рис. 2.1: Кинематическое описание движения линии гребня. (a) Криволинейные координаты, связанные с линией гребня, показанной жирной линией.  $O$  – начало координат;  $B$  – точка обрыва волны (кончик);  $C$  – точка линии гребня на расстоянии  $s$  от кончика;  $\mathbf{R}$  – ее радиус-вектор;  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{N}$  – касательный и нормальный единичные векторы;  $P$  – точка плоскости на расстоянии  $q$  от  $C$  в направлении вектора  $\mathbf{N}$ ;  $\mathbf{r}$  – ее радиус-вектор. Таким образом, пара  $(s, q)$  – криволинейные координаты точки  $P$ . (b) Скорости, связанные с движущейся линией гребня. Сплошная жирная линия – положение гребня в предшествующий момент времени  $t$ , а штриховая жирная линия – в последующий момент  $t' = t + dt$ . Точка  $C$  с некоторой координатой  $s$  перемещается в точку  $C'$  со скоростью  $V$  нормально к линии гребня и  $G$  вдоль этой линии, а направление линии гребня в этой точке повернулось на угол  $d\alpha = (\omega + GK)dt$

### 2.1.2 Вывод законов движения фронта и его обрыва.

Выразим основные дифференциальные операторы в системе координат (2.5), действуя аналогично [40]. Для этого, прежде всего, будем искать оператор градиента, примененный к произвольной скалярной функции векторного аргумента  $v(\mathbf{r})$  в виде линейной комбинации

$$\nabla v = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N} \quad (2.8)$$

с неизвестными пока коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ . Дифференцируя (2.8) с учетом (2.5) и уравнений Френе

$$\partial_s \mathbf{R} = \mathbf{T}, \quad \partial_s \mathbf{T} = K \mathbf{N}, \quad \partial_s \mathbf{N} = -K \mathbf{T} \quad (2.9)$$

получим

$$\begin{aligned} v_s &= \nabla v \cdot \mathbf{r}_s = \nabla v \cdot (\mathbf{T} + qK\mathbf{T}) = \alpha(1 + qK) \\ v_q &= \nabla v \cdot \mathbf{r}_q = \nabla v \cdot \mathbf{N} = \beta \end{aligned} \quad (2.10)$$

что позволяет найти  $\alpha$  и  $\beta$ . Подставляя найденные значения в (2.8), получаем окончательное выражение для градиента:

$$\nabla v = \frac{1}{1 + qK} v_s \mathbf{T} + v_q \mathbf{N} \quad (2.11)$$

Прежде чем найти лапласиан, найдем дивергенции векторов  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{N}$ , которые зависят только от координаты вдоль фронта  $s$ . Вообще говоря,

$$\nabla \vec{a}(s) = \vec{a}_s \nabla s = \frac{1}{1 + qK} \mathbf{T} \vec{a}_s \quad (2.12)$$

и в частности

$$\nabla \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \mathbf{N} = \frac{K}{1 + qK} \quad (2.13)$$

Так что лапласиан можно записать в виде:

$$\Delta v = \nabla \left[ \frac{1}{1 + qK} v_s \mathbf{T} + v_q \mathbf{N} \right] = v_{qq} + \frac{1}{(1 + qK)^2} v_{ss} + \frac{K}{1 + qK} v_q - \frac{qK_s}{(1 + qK)^3} v_s \quad (2.14)$$



Наконец, производная по времени

$$\partial_t \rightarrow \partial_t - (\partial_t \mathbf{r}) \cdot \nabla = \partial_t - \frac{1}{1+qK} [(\partial_t \mathbf{R}) \mathbf{T} + q (\partial_t \mathbf{N}) \mathbf{T}] \partial_s - (\partial_t \mathbf{R}) \mathbf{N} \partial_q \quad (2.15)$$

Использував полученные дифференциальные операторы (2.14), (2.15) в уравнении (2.1) и подставив (2.7), получим в линейном приближении по  $\delta u$

$$\partial_t u_1 = \hat{\mathbf{L}} u_1 + h(s, q, t), \quad (2.16)$$

где свободный член  $h$  будет выписан несколько позже, а линейный оператор  $\hat{\mathbf{L}}$  не зависит от времени и имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} &= \hat{\mathbf{B}}(s, q) + \hat{\mathbf{D}}(\partial_s^2 + \partial_q^2) + v_* \partial_q + g_* \partial_s, \\ (\hat{\mathbf{B}})_{ij} &= (\partial f_i / \partial u_j)_{u=u_*(s, q)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

В силу трансляционной симметрии (2.1), у  $\hat{\mathbf{L}}$  есть двухкратное нулевое собственное значение, с собственными функциями

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \partial_q u_*(q, s), \quad \Psi_2 = \partial_s u_*(q, s), \\ \hat{\mathbf{L}} \Psi_1 &= \hat{\mathbf{L}} \Psi_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

причем вдали от кончика, возмущенное решение принимает форму плоской волны:

$$\begin{aligned} \Psi_1(s, q) &\rightarrow \Phi_1(q) \equiv \partial_q \bar{u}_*(q), \quad s \rightarrow +\infty, \\ \Psi_1(s, q) &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow -\infty, \quad \Phi_1(q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \pm\infty, \\ \Psi_2(s, q) &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow \pm\infty, \quad \Psi_2(s, q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Далее предполагается, что эти пределы достигаются достаточно быстро.

Мы ищем решение, у которого от малого параметра  $\epsilon$  зависит не только профиль в силу (2.7), но и форма фронта. Такая зависимость может оказаться различной в разных ситуациях. Однако для простоты мы зафиксируем некоторый вид зависимости, который, как выяснется далее окажется самосогласованным предположением в одних

случаях и будет приводить к правильным результатам после возврата к исходным переменным в других (в частности, в специальном случае “традиционных” уравнений).

А именно мы предположим:

$$K = \epsilon K_1, \quad \omega = \epsilon \omega_1, \quad V - v_* = \epsilon V_1, \quad G - g_* = \epsilon G_1, \quad (2.20)$$

где величины с индексом 1 предполагаются конечными в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Более аккуратно следовало бы рассмотреть каждую из этих величин как независимый малый параметр, однако это только существенно увеличило бы объем выкладок, не приведя к новым результатам.

В линейном приближении по  $\epsilon$  свободный член  $h$  в (2.16) имеет вид

$$\begin{aligned} h(s, q, t) = & \left[ G_1 - q(g_* K_1 + \partial_s K_1 \hat{\mathbf{D}} + \omega_1) \right] \Psi_2 \\ & + \left( V_1 + K_1 \hat{\mathbf{D}} \right) \Psi_1 - 2q K_1 \hat{\mathbf{D}} \partial_s \Psi_2 + f_1(u_*) + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Введем скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = \int \int u(s, q) v(s, q) dq ds. \quad (2.22)$$

Тогда условия разрешимости (2.16) по отношению к  $u_1$  можно записать как

$$\langle h, \Psi^j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.23)$$

где  $\Psi^1, \Psi^2$  — собственные функции сопряженного оператора  $\hat{\mathbf{L}}^+$ ,

$$\hat{\mathbf{L}}^+ \Psi^{1,2} = 0, \quad \langle \Psi_i, \Psi^j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \langle \Psi_2, \Psi^2 \rangle = 1. \quad (2.24)$$

Мы предполагаем без доказательства, что асимптотическое поведение  $\Psi^{1,2}(s, q)$  при больших  $s$  аналогично (2.19), т.е.

$$\begin{aligned} \Psi^1(s, q) &\rightarrow \Phi^1(q), \quad s \rightarrow +\infty, \quad \Phi^1(q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \pm\infty, \\ \Psi^1(s, q) &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow -\infty, \\ \Psi^2(s, q) &\rightarrow 0, \quad s \rightarrow \pm\infty, \quad \Psi^2(s, q) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Мы подошли к ключевому месту в нашем выводе. Рассмотрим уравнение (2.23) для  $j = 1$ :

$$\begin{aligned} & \left\langle K_1 g_* q \Psi_2 + 2q K_1 \hat{\mathbf{D}} \partial_s \Psi_2 + \omega_1 q \Psi_2 + q \partial_s K_1 \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \right\rangle \\ & - \left\langle \left( V_1 + K_1 \hat{\mathbf{D}} \right) \Psi_1 + f_1(u_*), \Psi^1 \right\rangle = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Оно содержит два несобственных интеграла. Сходимость первого из них обеспечивается убыванием  $\Psi_2$  (2.19) и ограниченностью остальных множителей. Напротив, сходимость второго интеграла не гарантируется какими-либо из сделанных до сих пор предположений. Поэтому, чтобы удовлетворить уравнение (2.26), мы прежде всего должны обеспечить сходимость этого интеграла, для чего придется потребовать, чтобы подинтегральное выражение стремилось к нулю при больших  $s$ . Это дает хорошо известное [71] уравнение движения фронта (1.14) в котором положено

$$\begin{aligned} V_* &= v_* - \epsilon (F_1, \Phi^1) (\Phi_1, \Phi^1)^{-1}, F_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} f_1(u_*) \\ D &= \left( \hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \Phi^1 \right) (\Phi_1, \Phi^1)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

а круглые скобки  $(\cdot, \cdot)$  обозначают “одномерное” скалярное произведение,

$$(u, v)(s) = \int u(s, q) v(s, q) dq. \quad (2.28)$$

Если (1.14) выполнено, то оба интеграла в (2.26) сходятся и оно дает другое уравнение, теперь уже для кончика:

$$\omega_1(0, t) = \lambda_0 - \lambda_1 K_1(0, t) - \lambda_2 \partial_s K_1(0, t) + O(\epsilon) \quad (2.29)$$

в котором

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \left[ \left\langle F_1, \Psi^1 - \Phi^1 \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \right\rangle + \langle f_1(u_*) - F_1, \Psi^1 \rangle \right] \langle q \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1} \\ \lambda_1 &= g_* + 2 \left\langle q \hat{\mathbf{D}} \partial_s \Psi_2, \Psi^1 \right\rangle \langle q \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1} \\ &\quad - \left[ \left\langle \hat{\mathbf{D}} (\Psi_1 - \Phi_1), \Psi^1 \right\rangle + \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \Psi^1 - \Phi^1 \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \right\rangle \right] \langle q \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1} \\ \lambda_2 &= \left\langle q \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \right\rangle \langle q \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Заметим, что мы получили два уравнения движения, для фронта (1.14) и для кончика (2.29) из одного уравнения (2.26).

Уравнение (2.23) при  $j = 2$  также содержит несобственные интегралы, но их сходимость уже обеспечивается (2.19) и (2.25). Так что это уравнение дает только одно условие:

$$G_1(0, t) = \mu_0 + \mu_1 K_1(0, t) + \mu_2 \partial_s K_1(0, t) + O(\epsilon), \quad (2.31)$$

в котором

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\langle q\Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle q\Psi_2, \Psi^1 \rangle} \left[ \left\langle F_1, \Psi^1 - \Phi^1 \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Psi_1, \Phi^1)} \right\rangle + \langle f_1(u_*) - F_1, \Psi^1 \rangle \right] \\ &\quad - \langle f_1(u_*), \Psi^2 \rangle \\ \mu_1 &= - \langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_1, \Psi^2 \rangle + 2 \left\langle q \hat{\mathbf{D}} \partial_s \Psi_2, \Psi^2 - \Psi^1 \frac{\langle q\Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle q\Psi_2, \Psi^1 \rangle} \right\rangle \\ &\quad + \frac{\langle q\Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle q\Psi_2, \Psi^1 \rangle} \left[ \left\langle \hat{\mathbf{D}} (\Psi_1 - \Phi_1), \Psi^1 \right\rangle + \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \Psi^1 - \Phi^1 \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \right\rangle \right] \\ \mu_2 &= \left\langle q \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^2 - \Psi^1 \frac{\langle q\Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle q\Psi_2, \Psi^1 \rangle} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

Уравнения (2.29) и (2.31) дают необходимую систему уравнений на кончике волнового фронта, дополняя уравнение движения фронта (1.14). В этой системе объединены граничные условия для  $K(s, t)$  и уравнения движения кончика. Используя уравнение (2.6), можно переписать эту систему в эквивалентном виде<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 + (D - \lambda_2)K_1' + (g_* + \epsilon\mu_0 - \lambda_1)K_1 + \epsilon(\mu_1 - \lambda_3)K_1^2 + \epsilon(\mu_2 - \lambda_4)K_1K_1' \\ &\quad - \epsilon\lambda_5K_1'^2 + O(\epsilon^2), \\ \omega_1 &= \lambda_0 - \lambda_1K_1 - \lambda_2K_1' - \epsilon\lambda_3K_1^2 - \epsilon\lambda_4K_1K_1' - \epsilon\lambda_5K_1'^2 + O(\epsilon^2), \\ G_1 &= \mu_0 + \mu_1K_1 + \mu_2\partial_s K_1 + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.33)$$

---

<sup>1</sup>Здесь мы дополнительно включаем члены более высокого порядка с коэффициентами  $\lambda_{3,4,5}$  которые можно получить в следующем порядке того же метода возмущений.

или в исходных переменных:

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon \lambda_0 + (D - \lambda_2)K' + (g_* + \epsilon \mu_0 - \lambda_1)K + (\mu_1 - \lambda_3)K^2 + (\mu_2 - \lambda_4)KK' \\
&\quad - \lambda_5 K'^2 + O(\epsilon^3) \\
\omega &= \epsilon \lambda_0 - \lambda_1 K - \lambda_2 K' - \lambda_3 K^2 - \lambda_4 KK' - \lambda_5 K'^2 + O(\epsilon^3) \\
G &= g_* + \epsilon \mu_0 + \mu_1 K + \mu_2 K' + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

где все функции взяты при  $s = 0$ . Здесь первое уравнение представляет собой граничное условие для уравнения эволюции  $K(s, t)$ , а остальные два определяют движение кончика.

В этих уравнениях мы сохранили члены различного асимптотического порядка по  $\epsilon$ , имея в виду традиционные уравнения (1.15), (1.17). Уравнение (1.15) можно рассматривать как частный случай уравнения (2.31) при  $\mu_2 = 0$ . Уравнение (2.29) — новое, оно заменяет традиционное уравнение (1.17), не вошедшее в новую систему. Однако стационарные задачи для новых и “традиционных” граничных условий сравнимы. Их сравнение будет проделано в разделе 5.2.

## 2.2 Безразмерная форма задач в двумерной кинематике

Как уже отмечалось в главе 1, эволюция локальной кривизны фронта описывается интегро-дифференциальным уравнением (1.13). Используя закон движения (1.14) и вводя безразмерные переменные согласно

$$s = DV_*^{-1}\sigma, \quad K(s) = V_* D^{-1}\kappa(\sigma), \quad G = V_* g, \quad \omega = V_*^2 D^{-1}\Omega, \tag{2.35}$$

получим безразмерную форму уравнения (1.13):

$$\dot{\kappa} = \kappa'' - \kappa' \left[ \int \kappa(1 - \kappa) d\sigma - g \right] - \kappa^2(1 - \kappa) \tag{2.36}$$

Для обезразмеривания граничных условий введем дополнительно к (2.35) следующие безразмерные параметры среды:

$$\begin{aligned}\gamma &= g_* V_*^{-1}, \\ \nu_0 &= \lambda_0 D V_*^{-2}, \nu_1 = \lambda_1 V_*^{-1}, \nu_2 = \lambda_2 D^{-1}, \nu_3 = \mu_0 V_*^{-1}, \nu_4 = \mu_1 D^{-1}, \\ \nu_5 &= \mu_2 V_* D^{-2}, \nu_6 = \lambda_3 D^{-1}, \nu_7 = \lambda_4 V_* D^{-2}, \nu_8 = \lambda_5 V_*^2 D^{-3}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

В итоге получим из (2.34) безразмерные граничные условия на кончике (здесь  $\kappa$  и  $\kappa'$  берутся при  $\sigma = 0$ ):

$$\Omega = \epsilon \nu_0 - \nu_1 \kappa - \nu_2 \kappa' - \nu_6 \kappa^2 - \nu_7 \kappa \kappa' - \nu_8 \kappa'^2 + O(\epsilon^3), \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}0 &= \epsilon \nu_0 + (1 - \nu_2) \kappa' + (\gamma + \epsilon \nu_3 - \nu_1) \kappa + (\nu_4 - \nu_6) \kappa^2 \\ &\quad + (\nu_5 - \nu_7) \kappa \kappa' - \nu_8 \kappa'^2 + O(\epsilon^3),\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$g = \gamma + \epsilon \nu_3 + \nu_4 \kappa + \nu_5 \kappa' \quad (2.40)$$

Кроме того, естественным граничным условием на бесконечности является приближение формы волны к плоской, то есть

$$\kappa(\infty) = 0 \quad (2.41)$$

Таким образом, уравнения (2.36), (2.39)–(2.41) содержат полную постановку нестационарной задачи о движении фронта волны возбуждения. Неизвестными в ней являются форма фронта  $\kappa(\sigma)$  и скорость его прорастания  $g$ . Кроме того, дополнительное уравнение (2.38) позволяет определить мгновенную угловую скорость вращения фронта  $\Omega$ . Параметрами задачи являются величины  $\epsilon, \gamma, \nu_{0-8}$ .

Для стационарного случая, когда форма фронта не меняется с течением времени, а меняется лишь его положение на плоскости, уравнение движения (2.36) после интегрирования по  $\sigma$ , с учетом (2.6) для определения постоянной интегрирования, приобретает вид:

$$\kappa' + \kappa \left[ g - \int \kappa(1 - \kappa) d\sigma \right] + \Omega = 0 \quad (2.42)$$

Оно может быть записано в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\kappa\kappa'' - \kappa'^2 - \Omega\kappa' - \kappa^3(1 - \kappa) = 0 \quad (2.43)$$

А с учетом малости кривизны  $\kappa \ll 1$  оно примет вид

$$\kappa\kappa'' - \kappa'^2 - \Omega\kappa' - \kappa^3 = 0 \quad (2.44)$$

Таким образом, стационарная задача представляет собой уравнение (2.43) с граничными условиями (сохранены только старшие члены)

$$\Omega = \epsilon\nu_0 - \nu_1\kappa - \nu_2\kappa' \quad (2.45)$$

$$-\Omega = (\gamma + \epsilon\nu_3)\kappa + \kappa' + \nu_4\kappa^2 \quad (2.46)$$

$$\kappa(\infty) = 0 \quad (2.47)$$

относительно  $\kappa(\sigma)$ ,  $\Omega$  и дополнительное уравнение (2.40), позволяющее найти скорость проростания  $g$ .

## 2.3 Основные уравнения трехмерной кинематики

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.1 для плоского случая, можно построить кинематическую теорию для свитковых волн в трехмерном пространстве. В этом разделе приводится вывод уравнений движения поверхности фронта (аналог двумерной линии фронта) и граничных условий/уравнений движения для линии ее обрыва (аналог двумерного кончика).

Рассматривается система “реакция-диффузия” в пространстве,

$$\partial_t u = \hat{\mathbf{D}}\Delta u + f(u) + \delta f(u), \quad (2.48)$$

где по прежнему  $u \in \mathbb{R}^l$ ,  $l \geq 2$  — вектор-столбец переменных состояния  $f + \delta f \in \mathbb{R}^l$  описывает локальную кинетику,  $\hat{\mathbf{D}}$  — матрица  $l \times l$  коэффициентов диффузии, и  $\Delta$  — трехмерный оператор Лапласа.

При этом, как и в двумерном случае, предполагается, что система (2.48) является возмущением системы специального вида

$$\partial_t u = \hat{\mathbf{D}} \Delta u + f(u), \quad \delta f = \epsilon f_1, \quad \epsilon \ll 1, \quad (2.49)$$

имеющей решение в виде плоской полуволны:

$$u(x, y, z, t) = u_*(y - g_* t, z - v_* t), \quad (2.50)$$

которое вдали от обрыва переходит в плоскую волну с профилем уединенного импульса  $\bar{u}_*(\xi)$ , распространяющегося в среде с состоянием покоя  $u_0$ .

$$\begin{aligned} u_*(\xi, \eta) &\rightarrow \bar{u}_*(\xi), \quad \eta \rightarrow +\infty \\ \bar{u}_*(\xi) &\rightarrow u_0, \quad \xi \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad (2.51)$$

(Здесь снова предполагается что волна расположена при  $\eta > 0$ ).

Будем искать решение в виде слабо искривленной полуволны. Введем на фронтальной поверхности этой полуволны полугеодезическую систему координат, в которой обрыв фронта является координатной линией одного из семейств (ортогонального геодезическим). Обозначим натуральный параметр (длину, отсчитываемую от линии обрыва фронта) вдоль геодезической  $q$  а координату вдоль другого семейства  $s$ . Поверхность фронта будет тогда задаваться векторным уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(s, q, t)$ , где  $t$  — время. Определим координаты в окрестности фронтальной поверхности соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(s, q, t) + p\mathbf{N}(s, q, t), \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{N}(s, q, t)$  — единичная нормаль к фронту в сторону распространения. Направление  $\mathbf{R}_s$  выбрано так, чтобы вектора  $\mathbf{R}_s$ ,  $\mathbf{R}_q$  и  $\mathbf{N}$  образовали правую тройку. Обозначим коэффициенты первой и второй квадратичных форм фронтальной поверхности в выбранных координатах:

$$E = \mathbf{R}_s \mathbf{R}_s, \quad G = \mathbf{R}_q \mathbf{R}_q = 1, \quad F = \mathbf{R}_s \mathbf{R}_q = 0, \quad (2.53)$$

$$L = -\mathbf{R}_s \mathbf{N}_s, \quad M = -\mathbf{R}_s \mathbf{N}_q = -\mathbf{R}_q \mathbf{N}_s, \quad N = \mathbf{R}_q \mathbf{N}_q = 0 \quad (2.54)$$



Действуя аналогично двумерному случаю, получим во введенной системе координат:

$$\begin{aligned}\nabla &= \frac{1}{d} [((1 - pN)\mathbf{R}_s + pM\mathbf{R}_q) \partial_s + (pM\mathbf{R}_s + (E - pL)\mathbf{R}_q) \partial_q] + \mathbf{N} \partial_p \\ \Delta &= \partial_p^2 + Q_{11} \partial_s^2 + 2Q_{12} \partial_s \partial_q + Q_{22} \partial_q^2 + B_1 \partial_s + B_2 \partial_q + B_3 \partial_p\end{aligned}\quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned}Q_{11} &= Ea^2 + b^2, \quad Q_{12} = b \left( a + c + \frac{E - 1}{d} \right), \quad Q_{22} = b^2 + c^2 \\ B_1 &= Eaa_s + Eba_q + cb_q + bb_s + \frac{a^2}{2} E_s + \frac{ab}{2} E_q \\ B_2 &= Eab_s + Ebb_q + cc_q + bc_s + \frac{ab}{2} E_s + \frac{bc}{2} E_q \\ B_3 &= \frac{2p(LN - M^2) - (EN + L)}{d} \\ a &= (1 - pN)/d, \quad b = pM/D, \quad c = (E - pL)/d \\ d &= p^2(LN - M^2) - p(EN + L) + E,\end{aligned}\quad (2.56)$$

Таким образом, уравнение (2.48) в координатах (2.52) приобретает вид:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \hat{\mathbf{D}} (u_{pp} + Q_{11} u_{ss} + 2Q_{12} u_{sq} + Q_{22} u_{qq}) \\ &+ (P_1 + B_1 \hat{\mathbf{D}}) u_s + (P_2 + B_2 \hat{\mathbf{D}}) u_q + (V + B_3 \hat{\mathbf{D}}) u_p + f(u) + \delta f(u)\end{aligned}\quad (2.57)$$

где

$$\begin{aligned}P_1 &= aG_1 + bG_2 - paJ_1 - pbJ_2, \quad P_2 = bG_1 + cG_2 - pbJ_1 - pcJ_2, \\ G_1 &= \mathbf{R}_t \mathbf{R}_s, \quad G_2 = \mathbf{R}_t \mathbf{R}_q, \quad V = \mathbf{R}_t \mathbf{N}, \quad J_1 = -\mathbf{N}_t \mathbf{R}_s, \quad J_2 = -\mathbf{N}_t \mathbf{R}_q\end{aligned}\quad (2.58)$$

Для полуплоской волны (2.50) уравнение (2.57) дает

$$\hat{\mathbf{D}} (u_{*pp} + u_{*qq}) + g_* u_{*q} + v_* u_{*p} + f(u_*) = 0 \quad (2.59)$$

Обозначим линеаризованный оператор:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{D}} (\partial_p^2 + \partial_s^2 + \partial_q^2) + v_* \partial_p + g_* \partial_q + \hat{A}, \quad \hat{A} = \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{u=u_*} \right] \quad (2.60)$$

Из инвариантности автомодельного решения относительно сдвигов заключаем что всегда имеются две собственных функции оператора  $\hat{\mathbf{L}}$ , отвечающие собственному числу 0:

$$\Psi_1 = u_{*p}, \quad \Psi_2 = u_{*q}, \quad \hat{\mathbf{L}}\Psi_1 = \hat{\mathbf{L}}\Psi_2 = 0 \quad (2.61)$$

которые мы будем называть сдвиговыми модами.

Поскольку полуволна  $u_*$  вдали от точки обрыва имеет вид плоской волны, то при больших  $q$  имеем:

$$u_*(q, p) \rightarrow \bar{u}_*(p), \quad \Psi_2(q, p) \rightarrow 0, \quad \Psi_1(q, p) \rightarrow \Phi_1(p), \quad q \rightarrow \infty \quad (2.62)$$

где  $\Phi_1(p)$  – собственная функция оператора  $\hat{\mathbf{L}}_0$  полученного линеаризацией уравнения (2.57) на одномерном импульсе  $\bar{u}_*$ :

$$\hat{\mathbf{L}}_0 = \hat{\mathbf{D}}(\partial_p^2 + \partial_s^2) + v_*\partial_p + \hat{A} \quad (2.63)$$

Линеаризовав (2.57) на  $u_*(q, p)$  и считая  $L, M, N, G_1, J_1, J_2, \delta E = E - 1, \delta V = V - v_*, \delta G_2 = G_2 - g_*$  малыми порядка  $\epsilon$ , получим уравнение:

$$\partial_t \delta u = \hat{\mathbf{L}}\delta u + h(s, q, p) \quad (2.64)$$

в котором

$$\begin{aligned} h = & \left[ \delta G_2 + pNg_* - pJ_2 + (E_q/2 + pM_s + pN_q) \hat{\mathbf{D}} \right] \Psi_2 \\ & + \left[ \delta V - (L + N) \hat{\mathbf{D}} \right] \Psi_1 + 2pN\hat{\mathbf{D}}\Psi_{2q} + \delta f \end{aligned} \quad (2.65)$$

Пусть теперь  $\hat{\mathbf{L}}^+$  – оператор сопряженный к оператору  $\hat{\mathbf{L}}$  относительно скалярного произведения

$$\langle u, v \rangle = \int u(q, p)v(q, p)dpdq \quad (2.66)$$

Выберем собственные функции оператора  $\hat{\mathbf{L}}^+$ , ортогональными к собственным функциям (2.61) оператора  $\hat{\mathbf{L}}$ , и обозначим их  $\Psi^1$  и  $\Psi^2$ :

$$\hat{\mathbf{L}}^+\Psi^1 = \hat{\mathbf{L}}^+\Psi^2 = 0; \quad \langle \Psi_i, \Psi^j \rangle = 0, \quad i \neq j; \quad \langle \Psi_2, \Psi^2 \rangle = 1 \quad (2.67)$$

Предположим, что для  $\Psi^1, \Psi^2$  при больших  $q$  имеют место асимптотики, аналогичные (2.62):

$$\Psi^1(q, p) \rightarrow \tilde{\Phi}(p), \quad \Psi^2(q, p) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty \quad (2.68)$$

Потребовав, чтобы решение  $\delta u$  линеаризованного уравнения (2.64) не содержало сдвиговых мод (2.61), получим уравнения

$$\langle h, \Psi^1 \rangle = \langle h, \Psi^2 \rangle = 0 \quad (2.69)$$

Подставляя (2.65) в (2.69) и учитывая быстрое убывание  $\Psi_2, \Psi^2$  и соотношения ортогональности (2.67), получим что при  $q = 0$ :

$$\begin{aligned} \delta G_2 + (g_* N - J_2) \langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle + E_q \langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^2 \rangle / 2 + (M_s + N_q) \langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^2 \rangle \\ - (L + N) \langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_1, \Psi^2 \rangle + 2N \langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_{2q}, \Psi^2 \rangle + \langle \delta f(u_*), \Psi^2 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} (g_* N - J_2) \langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle + E_q \langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \rangle / 2 + (M_s + N_q) \langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \rangle \\ + 2N \langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_{2q}, \Psi^1 \rangle + \langle [\delta V - (L + N) \hat{\mathbf{D}}] \Psi_1 + \delta f(u_*), \Psi^1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Последнее слагаемое в левой части (2.71) представляет собой несобственный интеграл по  $q$ . Поэтому для выполнения уравнения (2.71) прежде всего нужно, чтобы этот интеграл сходил, а значит чтобы стремилось к нулю подинтегральное выражение:

$$\delta V(\Psi_1, \Psi^1) - (L + N) \langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_1, \Psi^1 \rangle + \langle \delta f(u_*), \Psi^1 \rangle \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty \quad (2.72)$$

Здесь круглые скобки означают скалярное произведение

$$(u, v) = \int u v d p \quad (2.73)$$

При больших  $q$  уравнение (2.72) дает закон движения:

$$V(q, s) = V_* - D [L(q, s) + N(q, s)] \quad (2.74)$$

в котором  $V_*$  и  $D$  есть константы среды:

$$V_* = v_* - \frac{(\delta F, \Phi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)}, \quad D = \frac{(\hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \Phi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)}, \quad \delta F = \lim_{q \rightarrow \infty} \delta f(u_*) \quad (2.75)$$

Таким образом, при больших  $q$  должен выполняться закон движения (2.74), (2.75). Он мог бы нарушаться только вблизи обрыва фронта, но тогда это нарушало бы его локальный характер (отсутствие явной зависимости от  $q$ ) или непрерывность. Поэтому, естественно считать, что полученный нами закон движения выполняется всюду, вплоть до точки обрыва. Последнее слагаемое в (2.71) с учетом этого обращается в ноль. Так что (2.71) принимает вид:

$$\begin{aligned} J_2(s, 0) = & \epsilon \lambda_0 + \lambda_1 N(s, 0) + \lambda_2 [M_s(s, 0) + N_q(s, 0)] \\ & + \frac{1}{2} \lambda_3 E_q(s, 0) + \lambda_4 [L(s, 0) + N(s, 0)] \end{aligned} \quad (2.76)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \epsilon \lambda_0 &= \left[ \left\langle \delta F, \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \Phi^1 - \Psi^1 \right\rangle + \langle \delta F - \delta f(u_*), \Psi^1 \rangle \right] \langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1} \\ \lambda_1 &= g_* + 2 \frac{\langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_{2q}, \Psi^1 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle}, \quad \lambda_2 = \frac{\langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle}, \quad \lambda_3 = \frac{\langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \\ \lambda_4 &= \left[ \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \Phi^1 - \Psi^1 \right\rangle + \langle \hat{\mathbf{D}}(\Phi_1 - \Psi_1), \Psi^1 \rangle \right] \langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Подставляя (2.76) в (2.70), получим:

$$\begin{aligned} G_2(s, 0) = & \mu_0 - \mu_1 N(s, 0) - \mu_2 [M_s(s, 0) + N_q(s, 0)] \\ & - \mu_3 [L(s, 0) + N(s, 0)] - \frac{1}{2} \mu_4 E_q(s, 0) \end{aligned} \quad (2.78)$$

с обозначениями

$$\begin{aligned} \mu_0 &= g_* - \langle \delta f(u_*), \Psi^2 \rangle - \frac{\langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \left[ \left\langle \delta F, \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \Phi^1 - \Psi^1 \right\rangle + \langle \delta F - \delta f(u_*), \Psi^1 \rangle \right] \\ \mu_1 &= 2 \left\langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_{2q}, \Psi^2 - \frac{\langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \Psi^1 \right\rangle, \\ \mu_2 &= \left\langle p \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^2 - \Psi^1 \frac{\langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \right\rangle, \\ \mu_3 &= - \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_1, \Psi^2 \right\rangle - \frac{\langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \left[ \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Phi_1, \frac{(\Psi_1, \Psi^1)}{(\Phi_1, \Phi^1)} \Phi^1 - \Psi^1 \right\rangle + \langle \hat{\mathbf{D}}(\Phi_1 - \Psi_1), \Psi^1 \rangle \right], \\ \mu_4 &= \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^2 \right\rangle - \frac{\langle p \Psi_2, \Psi^2 \rangle}{\langle p \Psi_2, \Psi^1 \rangle} \left\langle \hat{\mathbf{D}} \Psi_2, \Psi^1 \right\rangle \end{aligned} \quad (2.79)$$

Обозначим теперь  $H(q, s)$  – среднюю кривизну фронтальной поверхности (положительной будем считать кривизну фронта, выпуклого в направлении движения);  $\kappa(s)$  – геодезическую кривизну линии обрыва;  $K(s)$  – кривизну геодезической, ортогональной линии обрыва при  $q = 0$ . Тогда, в интересующем нас порядке малости, с учетом того, что вектор главной нормали к геодезической совпадает с вектором нормали к поверхности, получим:

$$2H = -(L + NE)/E \approx -(L + N), \quad \kappa = -E_q/(2E) \approx -E_q/2, \quad K = -N \quad (2.80)$$

Кроме того, из уравнений Петерсона-Кодацци, в интересующем нас порядке точности, имеем:

$$L_q = M_s, \quad M_q = N_s \quad (2.81)$$

Так что уравнения (2.74), (2.76) и (2.78) преобразуют вид:

$$V = V_0 - 2DH \quad (2.82)$$

$$J_2(s, 0) = -\epsilon\lambda_0 - \lambda_1 K(s) - 2\lambda_2 H_q(s, 0) - \lambda_3 \kappa(s) - 2\lambda_4 H(s, 0) \quad (2.83)$$

$$G_2(s, 0) = \mu_0 + \mu_1 K(s) + 2\mu_2 H_q(s, 0) + 2\mu_3 H(s, 0) + \mu_4 \kappa(s) \quad (2.84)$$

Отметим, что закон движения (2.82) совпадает с полученным в [71], а граничное условие (2.84) совпадает с полученными там же при

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad (2.85)$$

Кроме того, для случая прямого нескрученного свитка уравнения (2.82)–(2.84) и выражения для коэффициентов (2.77), (2.79) сводятся к (1.14), (2.34), (2.30) и (2.32).

## Глава 3

# Стационарные спиральные автоволны

### 3.1 Предварительные замечания.

В этой главе мы представляем **точное аналитическое** решение кинематической задачи для стационарно вращающейся волны. Это решение используется для исследования не только спиральных волн в неограниченной среде, но и волн, в круглой среде, вращающихся так что центр вращения находится в центре среды. Наше рассмотрение подтверждает некоторые результаты, полученные ранее другими авторами с использованием приближенного анализа. Кроме того, оно позволило нам рассмотреть впервые, предельное поведение вращающихся волн, в средах большого размера. Последний результат представляет особый интерес для теории автоволновых вихрей.

Как было сказано в разделе 1.2, автоволновые вихри демонстрируют сильную устойчивость свойств. Так, внешние возмущения, ограниченные по времени и амплитуде могут только заставить вихрь изменить фазу вращения и местоположение. Кроме того, это влияние существенно, только если возмущение применяется вблизи ядра спирали, и быстро убывает для отдаленных возмущений, хотя волны, испускаемые ревербератором распространяются по всей среде. Этот факт отличает их от других объектов, известных в нелинейной науке, типа солитонов, которые также обладают локальной чувствительностью, но и сами по себе являются ограниченными объектами.

Здесь мы впервые представляем результат об экспоненциальном убывании чувствительности спиральной волны к внешним воздействиям для возбудимой среды.

## 3.2 Решение ОДУ.

После замены переменных

$$\sigma \rightarrow \xi = \Omega^{1/3}\sigma, \quad \kappa \rightarrow y = \Omega^{-2/3}\kappa, \quad (3.1)$$

Уравнение (2.43) примет вид

$$yy'' - y'^2 - y' = y^3(1 - \alpha y) \quad (3.2)$$

где

$$\alpha = \Omega^{2/3} \quad (3.3)$$

Пример фазового портрета уравнения (3.2) при  $\alpha \neq 0$  представлен на рисунке 3.1а.

Как мы увидим ниже,  $\Omega$  оказывается малой величиной, так что параметр  $\alpha$  также мал. Поэтому ниже мы найдем решения уравнения (3.2) при  $\alpha = 0$ :

$$yy'' - y'^2 - y' = y^3 \quad (3.4)$$

а затем проверим законность этой аппроксимации, оценив отброшенный нами член для найденных решений.

На рис. 3.1b показан фазовый портрет уравнения (3.4). Случай неограниченной среды соответствует сепаратрисе начала координат, случай сред с конечным радиусом соответствует траекториям проходящим слева от сепаратрисы, а траектории справа от сепаратрисы не отвечают никакому физически интересному решению.

Мы убедимся, что уравнение (3.4) может быть решено аналитически в параметрическом виде, что дает хорошую основу для изучения граничной задачи, хотя замена переменных (3.1) и преобразование к (2.16) не совсем тривиальны и требуют некоторых комментариев:

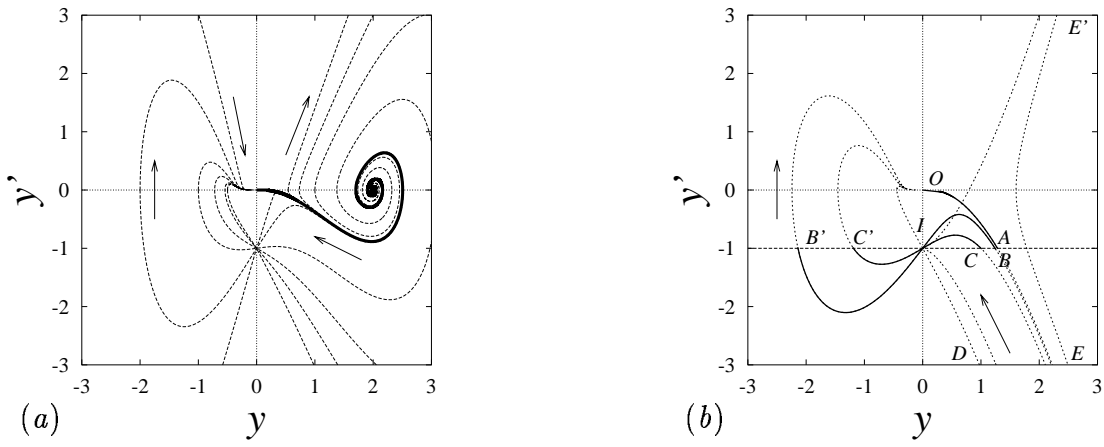


Рис. 3.1: (a) Фазовый портрет уравнения (3.2) при  $\alpha = 0.5$ . Можно видеть Фокус в  $(1/\alpha, 0)$  и сложное равновесие в  $(0, 0)$ . Сингулярная точка (не равновесие!) в  $(0, -1)$  — общая точка для континуума траекторий, проходящих через нее справа налево; вертикальная ось не пересекается траекториями в других точках. (b) Фазовый портрет уравнения (3.4). Теперь, фокус расположен в  $(+\infty, 0)$ . Жирные кривые соответствуют решениям краевой задачи:  $AO$  — сепаратриса начала координат, соответствует неограниченной среде;  $BIB'$  — среде большого радиуса, и  $CIC'$  — среде малого радиуса. Траектории  $DIO$  и  $EE'$  соответствуют решениям с  $C_- = 0$  (см. (3.12)). Пунктирная линия — место расположения точек сшивки (3.18).



**Замечание 1.** Масштабирующие множители в (3.1) зависят от частоты вращения  $\Omega$ , которая сама является неизвестной. Это приводит к формальному противоречию: чтобы перейти от “физической” задачи (1.16) к ее “чисто”-математической безразмерной форме (3.2), мы должны знать решение последнего прежде, чем мы его получим! Однако, это не составляет никакой проблемы при использовании выбранной нами далее параметрической формой решения. Мы просто сначала решаем безразмерную задачу и затем выясняем какой “физической” постановке она соответствовала.

**Замечание 2.** Масштабирующие множители для длины  $s \rightarrow \xi$  и для кривизны  $K \rightarrow y$  в (3.1) не соответствуют друг другу, поскольку они используют различные масштабы длин. В результате, фронты, полученные из одного и того же решения (3.4), но масштабированные к размерному виду с различными значениями  $\beta$  не будут гомотетичны друг другу.

В этом разделе, мы представляем аналитическое решение уравнения (3.4) в параметрической форме. Это решение можно получить после следующей замены переменных:

$$z(\zeta) = -y'/y, \quad \zeta = 1/y \quad (3.5)$$

которая приводит наше уравнение к уравнению Абеля для  $z(\zeta)$ :

$$z' z - z = 1/\zeta^2 \quad (3.6)$$

Для этого уравнения, известны аналитические решения [72] в параметрической форме  $z = f(\tau)$ ,  $\zeta = g(\tau)$ .

В итоге, с учетом замены переменных (3.5), параметрическую форму общего решения уравнения (3.4) можно представить как

$$y_{in,out}(\tau) = a \left( X_{in,out}^2(\tau) \pm \tau^{2/3} \right) \quad (3.7)$$

$$(dy/d\xi)_{in,out}(\tau) = -1 \pm 3X_{in,out}(\tau) \left( X_{in,out}^2(\tau) \pm \tau^{2/3} \right) \quad (3.8)$$

где для краткости обозначено

$$a = (9/2)^{1/3} \quad (3.9)$$

$$X_{in,out}(\tau) = \tau^{1/3} h_{in,out}(\tau) + 1/(3\tau^{2/3}) \quad (3.10)$$

$$h_{in,out}(\tau) = \frac{d}{d\tau} (\ln Z_{in,out}(\tau)) \quad (3.11)$$

$$Z_{in,out}(\tau) = C_{in,out}^{(+)} \mathfrak{B}_{1/3,in,out}(\tau) + C_{in,out}^{(-)} \mathfrak{B}_{-1/3,in,out}(\tau) \quad (3.12)$$

где  $C_{in,out}^{(\pm)}$  — произвольные постоянные интегрирования, а функции  $\mathfrak{B}_{\pm 1/3,in,out}(\tau)$  определяются как

$$\mathfrak{B}_{p,in}(\tau) = J_p(\tau) \quad \text{функция Бесселя} \quad (3.13)$$

$$\mathfrak{B}_{p,out}(\tau) = I_p(\tau) \quad \text{модифицированная функция Бесселя} \quad (3.14)$$

В формулах (3.7) — (3.14) верхние знаки выбираются вместе с индексами *in*, а нижние с *out*. Ниже мы опускаем индексы *in* и *out* в формулах, относящихся к обоим случаям.

Заметим, что решение полностью определяется отношением  $q = C^{(+)} / C^{(-)}$ , поэтому ниже мы используем это отношение вместо  $C^{(+)}$  и  $C^{(-)}$ . Случаи нулевого  $C^{(-)}$  и следовательно бесконечного  $q$  соответствуют траекториям *DIO* и *EE'* на рис. 3.1b для нижних и верхних знаков соответственно, которые не представляют, как это будет ясно из дальнейшего, интереса с точки зрения решений граничной задачи, и мы их не рассматриваем.

Используя рекуррентные соотношения для  $\mathfrak{B}'_p$ ,  $\mathfrak{B}_p$  и  $\mathfrak{B}_{p+1}$ , можно записать выражение (3.10) для  $X(\tau)$  в другом виде:

$$X(\tau) = \tau^{1/3} \frac{q \mathfrak{B}_{-2/3} \mp \mathfrak{B}_{+2/3}}{q \mathfrak{B}_{+1/3} + \mathfrak{B}_{-1/3}} \quad (3.15)$$

На основе уравнений (3.7), (3.8), можно выразить безразмерную длину кривой  $\xi$  через параметр  $\tau$  как

$$\xi = \int \frac{dy(\tau)/d\tau}{(dy/d\xi)(\tau)} d\tau = \xi_0 \mp a\tau^{2/3} \quad (3.16)$$

где  $\xi_0$  — произвольная постоянная, которая должна быть одинакова для обеих частей, чтобы обеспечить непрерывность при переходе через точку сшивки.

Из уравнений (3.7), (3.8) видно, что траектории могут пересекать ось  $y = 0$  только при  $y' = -1$ , в полном соответствии с фазовым портретом на рис. 3.1b.

Теперь продемонстрируем, что верхние и нижние знаки в формулах (3.7)–(3.14) соответствуют внутренним и внешним частям решений, сшивающихся при  $\tau = 0$ , и найдем соответствующие параметры  $q$ , обеспечивающие эту сшивку. Действительно, используя асимптотику для цилиндрических функций при малых аргументах, найдем, что функция  $X(\tau)$  стремится к конечному пределу, как для внутренних так и для внешних решений:

$$X(0) = X_0 = 2^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} q \quad (3.17)$$

Так что, в обоих случаях и  $y$  и  $dy/d\xi$  стремятся к конечным пределам при  $\tau \rightarrow 0$ . Соответствующие предельные точки лежат на кривой

$$(dy/d\xi + 1)^2 = 2y^3 \quad (3.18)$$

Из рис. 3.1b видно, что эта кривая отделяет точки, допустимые для внутренних граничных условий при  $\xi = 0$  ( $dy/d\xi = -1, y > 0$ ) от допустимых для внешних условий при  $\xi = \infty$  ( $dy/d\xi = y = 0$ ) или при  $\xi = \Xi$  ( $dy/d\xi = -1, y < 0$ ). Так что, единственная возможность удовлетворять обоим условиям состоит в том, чтобы траектория состояла из двух частей, принадлежащих к двум различным случаям и сшивающихся на кривой (3.18). Для этого необходимо, чтобы предельные значения  $X(\tau)$  для этих двух частей были равны по величине и противоположны по знаку. Так что, условие сшивки имеет вид

$$q_{out} = -q_{in} \quad (3.19)$$

**Замечание** Необходимость строить **точное** решение сшивкой двух частей, заданных различными аналитическими формулами, кажется противоречащей аналитично-

сти уравнения (3.4) в точке сшивки. Однако здесь нет никакого противоречия, поскольку оба сшиваемых решения можно описать одними и теми же формулами

$$y(s) = as(Y^2(s) + 1), \quad dy/d\xi(s) = -1 + 3s^{3/2}Y(s)(Y^2(s) + 1) \quad (3.20)$$

где

$$Y(s) = \frac{qJ_{-2/3}(s^{3/2}) - J_{2/3}(s^{3/2})}{qJ_{1/3}(s^{3/2}) + J_{-1/3}(s^{3/2})} \quad (3.21)$$

причем параметр  $s$  принимает как положительные так и отрицательные значения. Это решение при  $s = \tau^{2/3}$  соответствует решениям (3.7)–(3.14) с верхними знаками, а при  $s = -\tau^{2/3}$  — с нижними знаками. Аналитичность решения (3.20), (3.21) при  $s = 0$  проверяется непосредственно, с учетом того, что степенной ряд для  $J_p$  содержит члены с показателями одинаковой четности. Но уравнения (3.20), (3.21) определены только в комплексных числах, и кусочное представление (3.7)–(3.14) практически более удобно.

Таким образом, соответствие между траекториями на фазовом портрете системы и решениями, описанными формулами (3.20), (3.21) оказалось не взаимно-однозначным. А именно, если траектория пересекает линию (3.18), то две ее части описываются решениями различного вида, с условием (3.19). С другой стороны, есть неоднозначность и в противоположном направлении: одно решение (3.7)–(3.14) может соответствовать более чем одной траектории. Это связано с тем, что функция  $h(\tau)$  определенная в (3.11) становится бесконечной в корнях  $\mathfrak{B}_{\pm 1/3}$ , так что в окрестности такого корня траектории идут к  $(+\infty, \pm\infty)$ . Так как цилиндрические функции  $qJ_{1/3} + J_{-1/3}$  имеют счетное число корней, то одно решение с верхними знаками соответствует счетному множеству траекторий на фазовом портрете, являющихся различными ветвями одной и той же аналитической кривой. Тем не менее, это не создает никаких проблем при решении граничной задачи, поскольку как было показано выше, нас всегда интересуют только ветви, пересекающие кривую (3.18), а эти пересечения всегда происходят при  $\tau$  в интервале от 0 до первого положительного корня функции  $\mathfrak{B}_{\pm 1/3}$ .

Поведение внешних решений при  $\tau \rightarrow +\infty$  более простое. Используя асимптотику для модифицированных функций Бесселя при больших значениях аргумента, видим,

что возможно только два различных случая:

$$h_{out}(\tau) \approx 1 - 1/(2\tau), \quad q \neq -1 \quad (3.22)$$

и

$$h_{out}(\tau) \approx -1 - 1/(2\tau), \quad q = -1 \quad (3.23)$$

Первый из них соответствует всем траекториям слева от сепаратрисы  $AO$ , которые проходят через точку  $I(0, -1)$  и приходят в начало координат слева, тогда как второй случай описывает саму сепаратрису  $AO$ , которая приближается к началу координат справа (см. рис. 3.1b). Таким образом, сепаратриса определяется условием

$$q_{in} = -q_{out} = +1 \quad (3.24)$$

### 3.3 Решение граничной задачи при $\gamma = 0$ .

#### 3.3.1 Круглая среда произвольного радиуса.

Граничные условия для уравнения (2.43) в классическом варианте были представлены также в [1, 2, 67]. Условие на свободном конце было упомянуто ранее в (1.18) и связано с требованием ортогональности обрыва фронта к ядру. Еще одно граничное условие на свободном конце связано с дополнительным требованием стационарности вращения, и имеет вид

$$K'(0) = -\omega/D \quad (3.25)$$

Для круглой среды с непроницаемой границей, граничное условие на внешнем конце, т.е. границе среды выглядит аналогично:

$$K'(L) = -\omega/D \quad (3.26)$$

где  $L$  — полная длина фронта. В пределе бесконечной среды, последнее условие заменяется на

$$K(\infty) = 0 \quad (3.27)$$

Уравнение (2.43) вместе с граничными условиями (1.18), (3.25), (3.27) или (1.18), (3.25), (3.26) полностью ставят нелинейную краевую задачу для неизвестной функции  $K(s)$  и собственного значения  $\omega$ , как изложено в [1, 2]. После замены переменных (3.1), граничные условия приобретут вид

$$y(0) = \beta\Omega^{-2/3}, \quad y'(0) = -1, \quad y(+\infty) = +0 \quad (3.28)$$

для неограниченной или

$$y(0) = \beta\Omega^{-2/3}, \quad (3.29)$$

$$y'(0) = y'(\Xi) = -1 \quad (3.30)$$

для круглой среды. Здесь дополнительно обозначено

$$\beta = DK_c/V_* \quad (3.31)$$

$$\tilde{\Omega} = \beta^{-3/2}\Omega \quad (3.32)$$

$$\Xi = \Omega^{1/3}V_*D^{-1}L \quad (3.33)$$

Наложим теперь на решения (3.7)–(3.15) граничные условия (3.29), (3.30). Константа  $\xi_0$  в выражении (3.16) для натурального параметра  $\xi$  выбирается так, чтобы на свободном конце оказалось  $\xi = 0$ . Из (3.7)–(3.8) видно, что свободный конец  $\xi = 0$  достигается только решениями с верхним знаком, поскольку  $y(0)$  должен быть положительен при  $y' = -1$ . Обозначим значение параметра  $\tau$ , соответствующее этой точке, через  $\tau_1$ . Согласно (3.8), находим что

$$X_{in}(\tau_1) = 0, \quad h_{in}(\tau_1) = -1/(3\tau_1) \quad (3.34)$$

Эти уравнения можно использовать, чтобы установить соотношения между параметром  $\tau_1$  и константой  $q_{in}$ . Соответственно, константа  $\xi_0$  в уравнении (3.16) для внутренней части равна

$$\xi_0 = a\tau_1^{2/3} \quad (3.35)$$

В то же время, эта величина равна полной безразмерной длине внутренней части волны. Из (3.29), (3.7), (3.34) следует что

$$\tilde{\Omega} = 2^{1/2}/(3\tau_1) \quad (3.36)$$

Внешняя часть определена для  $\tau$  в интервале от  $\tau = 0$  для точки сшивки до некоторого  $\tau = \tau_2$ , соответствующего границе среды  $\xi = \Xi$ . Следовательно,

$$X_{out}(\tau_2) = 0, \quad h_{out}(\tau_2) = -1/(3\tau_2), \quad (3.37)$$

$$\Xi = a(\tau_1^{2/3} + \tau_2^{2/3}), \quad (3.38)$$

$$y(\Xi) = -a\tau_2^{2/3}, \quad (3.39)$$

Последнее условие, необходимое для определения решения — это условие (3.19), которое устанавливает соотношение между значениями функций  $h_{in}$  и  $h_{out}$  в точке сшивки.

Найдя натуральное уравнение волнового фронта для значения параметра  $q_{in}$ , можно найти радиус его ядра  $r$  и радиуса среды  $R$ . Прямой путь состоял бы в том, чтобы восстановить форму кривой, затем найти касательные к ней на внутреннем и внешнем концах, и найти центр вращения как пересечение этих касательных. В принципе, это могло быть сделано следующим образом. Выберем прямоугольные декартовы координаты, связанные с фронтом. А именно, поместим начало координат во внутренний конец фронта, а ось  $x$  направим по касательной к фронту в этой точке. Угол фронта в произвольной его точке с осью  $x$  может быть найден как

$$\phi(s) = \int_0^s K(s_1)ds_1 \quad (3.40)$$

а затем координаты точек фронта определены соотношениями

$$X(s) = \int_0^s \cos(\phi(s_1))ds_1, \quad Y(s) = \int_0^s \sin(\phi(s_1))ds_1 \quad (3.41)$$

Обе касательные к фронту в его концах проходят через центр вращения, так что зная  $X(L)$ ,  $Y(L)$  и  $\phi(L)$ , можно найти радиус среды:

$$R = Y(L)/\sin(\phi(L)), \quad (3.42)$$

и радиус ядра

$$r = Y(L)/\tan(\phi(L)) - X(L), \quad (3.43)$$

Однако, этот путь не прост. Радиус ядра можно найти более простым способом [16]. Воспользуемся тем, что фронт в кончике ортогонален к ядру, так что скорость фронта в кончике — произведение угловой скорости и радиуса ядра,

$$\omega = V(0)/r = (V_0 - DK_c)/r, \quad (3.44)$$

поскольку кривизна в кончике равна  $K_c$ , и следовательно

$$r = V_0\omega^{-1}(1 - \beta) \quad (3.45)$$

Здесь и далее, мы сохраняем члены  $O(\beta)$  наряду с  $O(1)$ , несмотря на то, что член  $O(\beta)$  был опущен в исходном уравнении (3.4) и потому все результаты получены с точностью до этой величины. Это сделано, чтобы подчеркнуть, что результаты соответствуют точным решениям граничной задачи (3.4), (3.28)–(3.30). Необычно выглядящее появление членов различного порядка по  $\beta$  в “точных решениях” уравнения с  $\beta = 0$  — естественное следствие негомотетичного преобразования переменных, зависящего от  $\beta$ , см. Замечание 2 в разделе 3.2. Технически, это проявляется в неинвариантности уравнений (3.40)–(3.43) при изменении  $\beta$ . Соответственно, члены различного порядка по  $\beta$  появляются только в формулах расстояний в “физических” единицах, то есть в формулах для радиусов среды и ядра. Естественно, в большинстве случаев меньшие члены могут быть опущены для практических целей, хотя имеются и некоторые исключения (см. Раздел 3.3.4).

К сожалению, радиус среды, вообще говоря, нельзя найти тем же способом, несмотря на то, что внешний конец фронта также ортогонален к границе. Причина в том, что в достаточно большой среде, кривизна на внешнем конце далека от решения граничной задачи при  $\alpha = 0$  (см. Разделы 3.3.3 и 3.3.5 ниже). Чтобы найти эту величину, кажется правильным использовать уравнения (3.40)–(3.42), как мы показываем на примере больших сред ниже.



Теперь из уравнений (3.34), (3.37) и рекурсивных соотношений для производных функций Бесселя, найдем, что

$$q_{in} = J_{2/3}(\tau_1)/J_{-2/3}(\tau_1), \quad (3.46)$$

$$q_{out} = -I_{2/3}(\tau_2)/I_{-2/3}(\tau_2), \quad (3.47)$$

так что условие сшивки (3.19) приводится к

$$J_{2/3}(\tau_1)/J_{-2/3}(\tau_1) = I_{2/3}(\tau_2)/I_{-2/3}(\tau_2) \quad (3.48)$$

**Резюме.** Вышеприведенные уравнения определяют решение рассматриваемой граничной задачи, в параметрической форме. В качестве параметра можно использовать константу

$$q = q_{in} = (C_+/C_-)_{in} = -q_{out} = -(C_+/C_-)_{out}, \quad 0 < q \leq 1 \quad (3.49)$$

Задавая эту константу, мы немедленно определяем  $K(s)$  уравнениями (3.7)–(3.14). Чтобы находить другие величины, представляющие интерес, нужно найти значения  $\tau_{1,2}$ , решив два нелинейных трансцендентных уравнения

$$q = J_{2/3}(\tau_1)/J_{-2/3}(\tau_1), \quad (3.50)$$

$$q = I_{2/3}(\tau_2)/I_{-2/3}(\tau_2), \quad (3.51)$$

Практически достаточно один раз затабулировать функции  $\tau_1(q)$  и  $\tau_2(q)$ . После этого, интересные физические параметры могут быть рассчитаны по формулам, которые мы приводим ниже еще раз для удобства читателя, и в безразмерной и размерной формах:

Частота вращения:

$$\tilde{\Omega} = 2^{1/2}/(3\tau_1), \quad (3.52)$$

$$\omega = (2DV_0K_c^3)^{1/2}/(3\tau_1). \quad (3.53)$$

Полная длина фронта:

$$K_c L = 3(\beta/2)^{1/2} \left( \tau_1 + \tau_1^{1/3} \tau_2^{2/3} \right), \quad (3.54)$$

$$L = 3 \left( \frac{D}{2V_0 K_c} \right)^{1/2} \left( \tau_1 + \tau_1^{1/3} \tau_2^{2/3} \right), \quad (3.55)$$

Радиус ядра:

$$K_c r = 3(2\beta)^{-1/2}(1 - \beta)\tau_1, \quad (3.56)$$

$$r = 3 \left( \frac{V_0}{2DK_c^3} \right)^{1/2} (1 - DK_c/V_0) \tau_1, \quad (3.57)$$

Радиус среды:

$$R = \int_0^L \sin \left( \int_0^s K(s_1) ds_1 \right) ds / \sin \int_0^L K(s) ds \quad (3.58)$$

Ниже мы рассматриваем специальные и предельные случаи, когда решения граничной задачи могут быть представлены явно.

### 3.3.2 Неограниченная среда.

В этом случае, внешняя часть бесконечна,  $\tau_2 = \infty$ , так, что параметр  $q = 1$ , и уравнение (3.50) сводится к

$$J_{2/3}(\tau_1) = J_{-2/3}(\tau_1), \quad (3.59)$$

в котором нас интересует наименьший положительный корень, в соответствии с замечанием в конце раздела 3. Этот корень равен

$$\tau_1^* = \sigma = 0.68555 \dots \quad (3.60)$$

Это значение будет часто использоваться в дальнейшем, поэтому мы обозначили его отдельным символом  $\sigma$  для краткости. Тогда из (3.52) находим

$$\tilde{\Omega}^* = 0.68763 \dots \quad (3.61)$$

Так что размерные параметры спиральной волны:

$$\omega^* = \tilde{\Omega}^* K_c V_0 \beta^{1/2} = 0.68763 \dots (DK_c^3 V_0)^{1/2}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{r}^* = \frac{1 - \beta}{K_c \tilde{\Omega}^* \beta^{1/2}} = 1.4542 \dots \left( \frac{V_0}{DK_c^3} \right)^{1/2} (1 - DK_c/V_0) \quad (3.63)$$

Длина внутренней части решения согласно (3.35)

$$s_0 = \beta^{1/2}/(\tilde{\Omega}^* K_c) \quad (3.64)$$

Эти результаты можно сравнить с результатами других авторов. Безразмерная частота почти совпадает с результатами [1, 2, 67], где значение  $\tilde{\Omega}^*$  было найдено численным интегрированием некоего ОДУ и оказалось равным 0.685. Длина внутренней части решения (3.64) совпадает по порядку величины с шириной погранслоя оцененной в [1, 2].

Легко найти также  $K(s)$  вдали от ядра. Неограниченная среда соответствует  $q = -1$ . подставляя это в (3.7) и используя асимптотики для функций Бесселя при больших значениях аргумента, получим асимптотику

$$y \approx a/(3\tau^{1/3}), \tau \rightarrow \infty \quad (3.65)$$

которая после учета (3.1) и (3.16) приводится к хорошо известному уравнению эволюции окружности радиуса  $r^*$ , то есть ядра:

$$K^*(s) \approx (2r^*s)^{-1/2}, s \rightarrow \infty \quad (3.66)$$

Рисунок 3.2 иллюстрирует решение для неограниченной среды.

### 3.3.3 Среда большого радиуса.

Этот случай соответствует кривой  $BIB'$  на фазовом портрете рис. 3.1(b); чем больше радиус среды, тем ближе к началу координат проходит внешняя часть дуги  $BI$ . В этом случае, параметр  $q$  близок к единице, так что мы ищем решения уравнений (3.50), (3.51) когда

$$q = 1 - \delta, 0 < \delta \ll 1 \quad (3.67)$$

Уравнение (3.50) при  $q = 1$  имеет простой корень  $\sigma$ , так что

$$\tau_1 = \sigma - \frac{J_{2/3}(\sigma)}{J_{-1/3}(\sigma) + J_{1/3}(\sigma)}\delta. \quad (3.68)$$

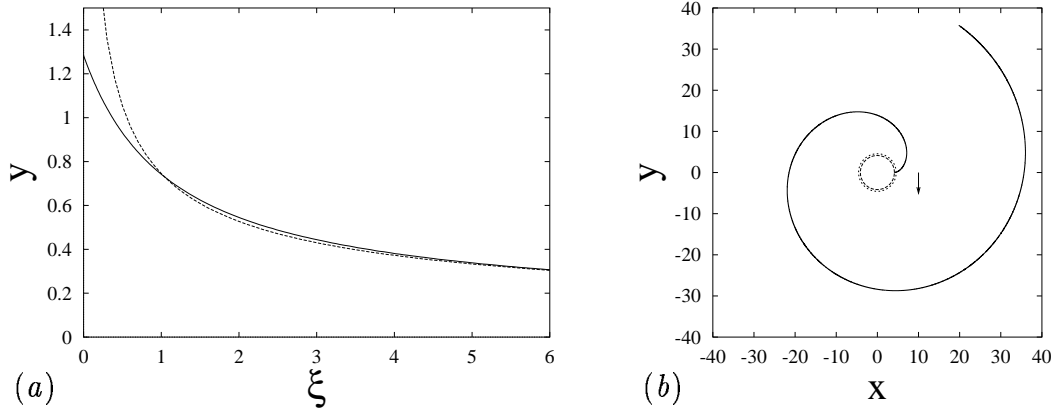


Рис. 3.2: Спиральная волна в неограниченной среде. (a) Кривизна как функция длины вдоль фронта  $y(\xi)$ . Сплошная линия — точное решение (3.7)–(3.14). Пунктирная линия — асимптотика (3.66) — эвольвента окружности. (b) Форма волнового фронта при  $\beta = 0.1$ ,  $K_c = 1$ . Стрелка показывает направление вращения, маленький пунктирный круг — ядро, больший пунктирный круг — место расположения точек сшивки.

Для уравнения (3.51), надо найти корень, бесконечно возрастающий при  $q \rightarrow 1$ , так что мы можем использовать асимптотику  $I(\tau)$  при больших  $\tau$ , которая дает

$$\delta \approx \frac{3^{1/2} K_{2/3}(\tau_2)}{\pi I_{2/3}(\tau_2)} \quad (3.69)$$

откуда

$$\tau_2 \approx \log(3^{1/2}/\delta)/2 \quad (3.70)$$

После этого, формулы (3.52)–(3.58) позволяют получить все интересующие нас физические параметры системы.

Особая аккуратность требуется при определении радуса среды. Прежде всего вычислим угол ориентации фронта  $\phi(s)$ . Воспользовавшись асимптотиками функций Бесселя, видим, что на большей части кривой он почти такой же как и для свободной спирали:

$$\phi(s) = (2s/r)^{1/2}, \quad (3.71)$$

так что интегральный изгиб фронта

$$\tilde{\Phi} = \phi(L) = (2L/r)^{1/2}, \quad (3.72)$$

Это значение помечено тильдой, чтобы показать, что оно отличается от истинного на конечную поправку, связанную с тем, что для внутреннего и внешнего пограничных слоев аппроксимация (3.71) не выполняется. Можно заметить, что вклад внутреннего слоя асимптотически мал при больших  $L$ , тогда как вклад внешнего близок к  $\pi/2$ , так как фронт свободной спирали при большом радиусе почти параллелен границе и должен повернуться почти на  $\pi/2$ , чтобы стать ортогональным к ней. Обозначая полную поправку  $\pi/2 + \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ , перепишем уравнение (3.58) как

$$R \cos(\tilde{\Phi} + \epsilon) = \int_0^L \sin(\phi(s)) ds \approx r \sin(\tilde{\Phi}) - (2rL)^{1/2} \cos(\tilde{\Phi}), \quad (3.73)$$

где приближенное равенство получено вычислением интеграла с подстановкой  $\phi(s)$  из уравнения (3.71). Раскрывая косинус суммы и приравнявая коэффициенты при  $\sin(\tilde{\Phi})$  и  $\cos(\tilde{\Phi})$ , получим два уравнения:

$$R \cos \epsilon \approx -(2rL)^{1/2}, \quad R \sin \epsilon \approx -r \quad (3.74)$$

из которых находим радиус среды и малую поправку  $\epsilon$ :

$$R^2 \approx r^2 + 2rL, \quad (3.75)$$

$$\tan(\epsilon) \approx (r/(2L))^{1/2} \rightarrow 0, L \rightarrow \infty \quad (3.76)$$

Отсюда видно, что  $\epsilon$  действительно асимптотически малая поправка в пределе  $L \rightarrow \infty$ .  
Полная длина фронта

$$L \approx (R^2 - r^2)/(2r) \quad (3.77)$$

Отметим, что это выражение можно получить из элементарных соображений, заметив что волны почти эквидистантны на расстоянии  $2\pi r$  друг от друга, почти плоские и заполняют площадь  $\pi(R^2 - r^2)$ .

Уравнение (3.75) с учетом (3.54), (3.56) можно переписать в терминах  $\tau_{1,2}$ :

$$R \approx r \left[ 1 + 2\beta \left( 1 + (\tau_2/\tau_1)^{2/3} \right) \right]^{1/2} \quad (3.78)$$

Рассматривая  $R$  как данное, можно найти из этого уравнения  $\tau_2$ :

$$\begin{aligned}\tau_2 &= \tau_1 \left[ \frac{(R/r)^2 - 1}{2\beta} - 1 \right]^{3/2} \\ &\approx \tau_1 \left[ \frac{(R/r)^2 - 1}{2\beta} \right]^{3/2} \left[ 1 - \frac{3\beta r^2}{R^2 - r^2} \right]\end{aligned}\quad (3.79)$$

Полагая в (3.79)  $\tau_1 \approx \sigma$  и  $r \approx r^*$ , получим в главном порядке по  $\beta$

$$\tau_2 \approx \frac{K_c^3}{27\sigma^2} (R^2 - r^{*2})^{3/2}, \quad (3.80)$$

так что частота вращения спиральной волны, как функция  $R$ , согласно (3.68), (3.70) дается выражением

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}^* [1 + Q \exp(-(R^2 - r^{*2})^{3/2} \lambda^{-3})], \quad (3.81)$$

где

$$Q = 3^{1/2} \sigma^{-1} \frac{J_{2/3}(\sigma)}{J_{-1/3}(\sigma) + J_{1/3}(\sigma)} \approx 0.80161, \quad (3.82)$$

и

$$\lambda = \frac{3\sigma^{2/3}}{2^{1/3} K_c} \approx 1.8513 K_c^{-1}, \quad (3.83)$$

Величину  $\lambda$ , согласно ее роли в (3.81) можно назвать расстоянием чувствительности спиральной волны, поскольку она определяет характерное расстояние экспоненциального убывания влияния границы на вращение спиральной волны.

Условие применимости этой аппроксимации можно получить из требования, чтобы  $\tau_2$ , полученное из (3.80) оказалось большим, или заметить непосредственно из (3.81). Это условие сводится к

$$R - r^* \gg \beta^{1/2} K_c^{-1} \sim \beta^{1/2} \lambda \quad (3.84)$$

Отметим, что это не требует  $R \gg r$ , так как расстояние чувствительности много меньше чем радиус ядра. Кроме того, это не требует чтобы  $R - r^* \gg \lambda$ , за счет большой величины  $(R + r^*) \sim \beta^{-1/2}$ . Обратим внимание, что оценка (3.84) согласуется

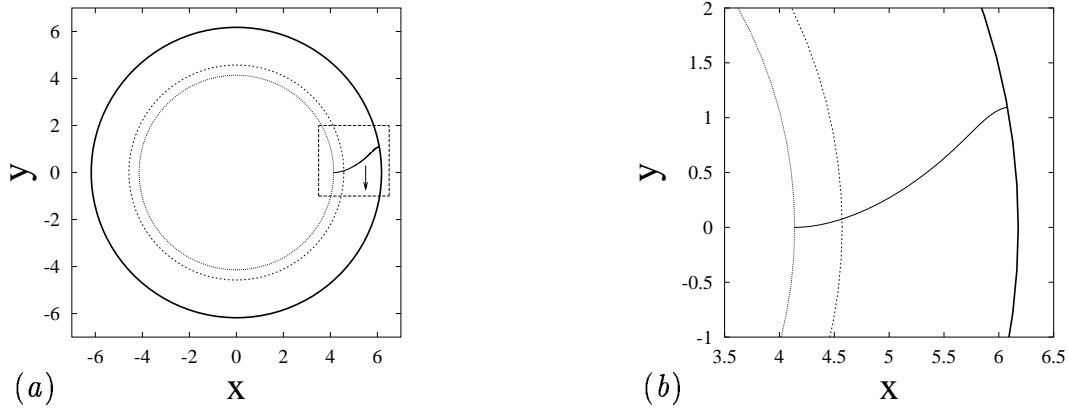


Рис. 3.3: Форма фронта в среде большого радиуса. (a): общий вид. (b): увеличенный штриховой прямоугольник на левом рисунке. Пунктирные круги — ядро, граница среды, и место расположения точек сшивки. Хотя радиусы ядра и среды имеют сравнимые размеры, этот случай удовлетворяет условию предела большого радиуса среды; дальнейшее его увеличение не влияет существенно на радиус ядра.

с оценкой, сделанной в [9], [10] относительно длины фронта, который заметно влияет на движение кончика.

Типичная форма волны согласно формулам (3.7)–(3.14) показана на рис. 3.3.

Легко видеть, что радиус среды имеет тот же порядок что и радиус ядра. Все же он оказывается достаточен чтобы работала данная аппроксимация, в которой среда принимается большой.

### 3.3.4 Среда малого радиуса.

Этот случай соответствует кривой  $CIC'$  на фазовом портрете рис. 3.1(b). Поскольку мы ожидаем, что в этом случае полная длина кривой  $\Xi$  будет мала, то, согласно (3.38),  $\tau_{1,2}$  также малы. Используя асимптотику для  $B_p(\tau)$  при малом аргументе, получим решения трансцендентных уравнений (3.50) и (3.51):

$$\tau_1 \approx \tau_2 \approx 2 \left( \frac{2\Gamma(2/3)}{3\Gamma(1/3)} q \right)^{3/4}, \quad q \ll 1 \quad (3.85)$$

так что значения  $\tau_{1,2}$  действительно оказались малыми. Кривизна фронта в этом пределе равна

$$K(\tau) \approx aK_c\tilde{\Omega}^{2/3} \left[ 9\tau_1^{8/3}/16 \pm \tau^{2/3} \right] \approx \pm aK_c(\tilde{\Omega}\tau)^{2/3} \quad (3.86)$$

или терминах длины фронта

$$K(s) \approx K_c - \omega s/D \quad (3.87)$$

Заметим, что это выражение совпадает с представленным в [67], где оно было постулировано.

В рассматриваемом случае для нахождения радиуса среды можно использовать упрощенный способ, похожий на способ нахождения радиуса ядра:

$$R = [V_0 - DK(\Xi)]/\omega \quad (3.88)$$

откуда радиус ядра

$$r \approx R(1 - \beta)/(1 + \beta) \approx R(1 - 2\beta) \quad (3.89)$$

и полная длина фронта

$$L \approx 2\beta r/(1 - \beta) \approx 2\beta R(1 + \beta) \quad (3.90)$$

Частоту вращения, как функцию  $R$  можно найти обычным способом. Из (3.56), (3.89) получаем решения для (3.50), (3.51), как функции  $R$  в виде

$$\tau_2 \approx \tau_1 \approx K_c R \frac{(2\beta)^{1/2}}{3(1 + \beta)} \quad (3.91)$$

так что (3.52), (3.53) дают

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{1 + \beta}{K_c R \beta^{1/2}} \quad (3.92)$$

$$\omega \approx (1 + \beta)V_0/R \quad (3.93)$$

Условие применимости данного приближения можно получить из требования  $\tau_1 \ll 1$ , которое дает

$$K_c R \ll \beta^{-1/2} \quad (3.94)$$



что эквивалентно

$$R \ll r^* \quad (3.95)$$

Все эти результаты полностью согласуются с результатами [67] в пределе  $\beta \rightarrow 0$ . Отметим, что в уравнении для  $r$  нельзя отбросить малые по  $\beta$  члены без потери смысла.

Типичная форма фронта для этого предельного случая показана на рис. 3.4. Видно, что волна возбуждения в этом случае далека от того чтобы быть спиралью.

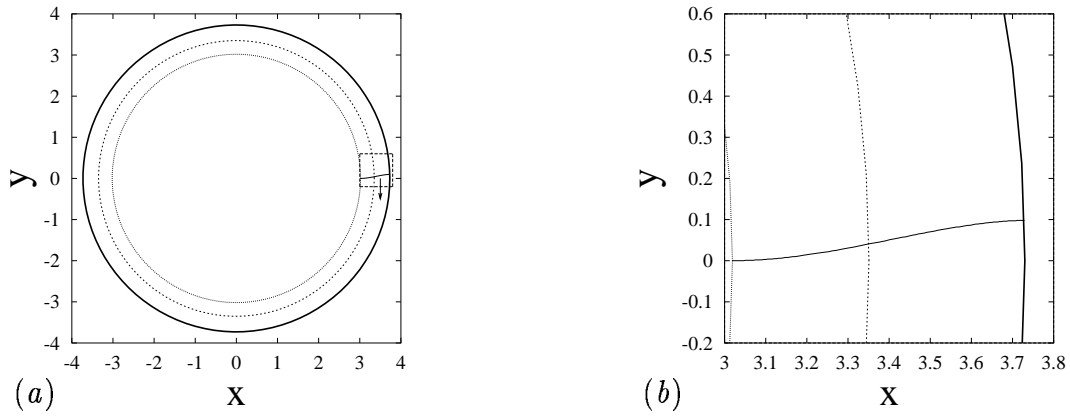


Рис. 3.4: Форма фронта в среде малого радиуса. Обозначения те же что и на рис.6. Показана почти максимальная среда, которая может быть признана “малой” в смысле условия (3.94). Радиусы ядра и среды связаны прямой пропорциональностью. Дальнейшее уменьшение радиуса среды делает фронт волны все более коротким и плоским.

### 3.3.5 Применимость решений.

При переходе от (3.2) к (3.4) мы пренебрегли членом

$$\alpha y = \beta \tilde{\Omega}^{2/3} y \quad (3.96)$$

по сравнению с единицей. Хотя  $\beta$  — малый параметр, но  $\tilde{\Omega}$  и  $y$  — неизвестные величины, и комбинация (3.96) может в некоторых случаях оказаться большой, так что надо проверить условие

$$|\alpha y| \ll 1 \quad (3.97)$$

*a posteriori*, найдя решения граничной задачи. Поскольку  $y(\xi)$  — монотонно убывающая функция, она принимает свои экстремальные значения в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = \Xi$ . Значение  $y$  на внутреннем конце всегда  $\tilde{\Omega}^{-2/3}$ , так что условие (3.97) там всегда выполняется. На внешнем конце, получим из (3.52) и (3.7) требование

$$|\beta \tilde{\Omega}^{2/3} y(\Xi)| \sim \beta (\tau_2/\tau_1)^{2/3} \ll 1 \quad (3.98)$$

Проверим выполнение этого неравенства для случаев, в которых явная форма решения была получена в разделах 3.3.2–3.3.4. Легко видеть, что оно всегда выполняется в случае “малой среды” раздела 3.3.4. В случае “большой среды” раздела 3.3.3, оно, согласно (3.79), приводится к виду

$$R - r^* \ll r^* \sim K_c^{-1} \beta^{-1/2} \quad (3.99)$$

Так что с учетом (3.84), результаты раздела 3.3.3 формально применимы лишь в относительно узкой области

$$K_c^{-1} \beta^{1/2} \ll R - r^* \ll K_c^{-1} \beta^{-1/2} \quad (3.100)$$

Это пессимистическое заключение справедливо, однако, только частично. Дело в том, что (3.97) нарушается только при отрицательных кривизнах  $y$ , то есть в пограничном слое между точкой перегиба фронта и его внешним концом. Точка перегиба  $\tau_{ip}$ , для которой  $y = 0$ ,  $dy/d\xi = -1$ , определяется, согласно (3.7), (3.8), (3.49) уравнением

$$[q I_{-2/3}(\tau_{ip}) - I_{2/3}(\tau_{ip})]^2 = [q I_{1/3}(\tau_{ip}) - I_{-1/3}(\tau_{ip})]^2 \quad (3.101)$$

Используя асимптотику для  $I_p(\tau)$  при больших  $\tau$  и условие  $q = 1 - \delta$ ,  $\delta \ll 1$ , получим из него уравнение для точки перегиба в больших средах:

$$\delta \approx \frac{\sqrt{3}}{12\tau_{ip}} \exp(-2\tau_{ip}), \quad (3.102)$$

которое имеет корень  $\tau_{ip} \gg 1$ , примерно равный

$$\tau_{ip} \approx \tau_2 - \log(12)/2 - \frac{1}{2} \log(\tau_2 - \log(12)/2), \quad (3.103)$$

Тогда безразмерную длину погранслоя можно оценить с учетом (3.59), (3.9) как

$$\xi_{bl} \approx a(\tau_2^{2/3} - \tau_{ip}^{2/3}) \approx (6\tau_2)^{-1/3} \log [12\tau_2 - 6\log(12)], \quad (3.104)$$

что с учетом (3.83), (3.1), (3.80), (3.52), (3.64) приводит к оценке

$$\begin{aligned} l_{bl}/\lambda &\approx K_c l_{bl} \approx \beta r^* (R^2 - r^{*2})^{-1/2} \log \left[ K_c \frac{(R^2 - r^{*2})^{3/2}}{\beta^{1/2}} \right] \\ &\approx \beta^{1/2} \left( \frac{\beta}{(R/r^*)^2 - 1} \right)^{1/2} \log \left[ \frac{(R/r^*)^2 - 1}{\beta} \right] \ll \beta^{1/2} \ll 1, \end{aligned} \quad (3.105)$$

то есть длина погранслоя всегда много меньше расстояния чувствительности, и пренебрежение им не влияет существенно на оценку частоты вращения и радиуса ядра. Другое неравенство можно получить с учетом (3.1), (3.104), (3.63):

$$l_{bl}/(R - r^*) \approx (3\tau_2)^{-1} \log [12\tau_2 - 6\log(12)] \ll 1, \quad (3.106)$$

Оно показывает, что пограничный слой всегда мал по сравнению с расстоянием между границами ядра и среды, то есть формула для кривизны справедлива на большей части волнового фронта.

В заключении, приведем здесь области, в которых полученные решения имеют различные свойства:

- (а) “Малые среды”

$$R \ll r^*, \quad (3.107)$$

Здесь применимы результаты раздела 3.3.4.

- (b) “Промежуточные среды”

$$R \sim r^*, \quad R - r^* \ll K_c^{-1} \beta^{1/2} \quad (3.108)$$

Здесь нет никаких явных формул, поскольку радиус среды при данном параметре  $q$ , можно найти только по формуле (3.58) через определенные интегралы.

- (с) “Большие среды”

$$K_c^{-1}\beta^{1/2} \ll R - r^* \ll K_c^{-1}\beta^{-1/2} \quad (3.109)$$

Здесь применимы результаты раздела 3.3.3, включая выражение для кривизны в узком слое вблизи внешней границы.

- (d) “Очень большие среды”

$$R - r^* \sim K_c^{-1}\beta^{-1/2} \text{ или } R - r^* \gg K_c^{-1}\beta^{-1/2} \quad (3.110)$$

Здесь применимы результаты раздела 3.3.3, кроме выражения для кривизны в узком слое вблизи внешней границы.

### 3.3.6 Обсуждение.

Полученное аналитическое решение приводит краевую задачу для волны, вращающейся в круглой среде, (1.16), (1.18)–(2.41), к решению конечных трансцендентных уравнений (3.50), (3.51), после чего все интересные физические характеристики получаются в параметрической форме, возможно с использованием определенных интегралов.

Это аналитическое решение имеет некоторые специфические свойства. Мы упомянем здесь особо два из них:

- негомотетичное преобразование, приводящее к различным формам фронтов, соответствующих одному и тому же решению;
- необходимость сшивки ветвей, описываемых различными аналитическими формулами, для описания единого решения аналитического ОДУ.

Последнее обстоятельство тем более удивительно, поскольку, как мы могли видеть, нет никаких “физических” особенностей, соответствующих точке сшивки.

Два предельных случая полученного решения представляют особый интерес.

Случай сред малого радиуса имеет место в диапазоне  $R \ll \beta^{-1/2} K_e^{-1}$ . Частота вращения в этом пределе обратно пропорциональна радиусу среды,  $\omega \approx V_0/R$ , а радиус ядра прямо пропорционален ему,  $r \approx R(1 - 2\beta)$ . Этот случай изучался ранее в [16] на основе феноменологических постулатов, выведенных из численного анализа граничной задачи. Как можно видеть, в этом случае на поведение спиральной волны очень сильно влияет граница среды, и форма фронта резко отличается от свободной спирали вплоть до ядра.

Другой предельный случай — случай малого влияния границы на вращение волны. Как обсуждалось во введении, он представляет особый интерес для теории автоволновых свитков. Этот случай имеет место, если граница достаточно удаленна от ядра:  $R - r^* \gg \lambda$ .

Отметим, что это не требует  $R \gg r^*$ , поскольку сам радиус ядра  $r^*$  велик по сравнению с расстоянием чувствительности  $\lambda$ . Частота вращения в этом случае отличается от свободной спирали на поправку, экспоненциально убывающую с расстоянием  $R - r^*$  между ядром и границей среды:

$$\omega \approx \omega^* + \text{const} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{R^2 - r^{*2}}{\lambda^2} \right)^{3/2} \right] \quad (3.111)$$

Формальная применимость этого приближения ограничена случаем не очень больших сред (3.109). Однако, мы показали, что при нарушении этого условия, оно остается справедливым, и формулы неприменимы только в пренебрежимо узком слое вблизи границы среды.

Другим примером автоволновой среды, где изучалось влияние границы на частоту вращения автоволнового вихря, является специальный случай комплексного уравнения Гинзбурга-Ландау (КУГЛ) [42]. В этом случае, поправка также была экспоненциально малой, хотя и другого вида:

$$\omega \approx \omega^* + \text{const} \cdot R^{-1/2} \exp(-R/\lambda). \quad (3.112)$$

Различие между этими двумя случаями можно понять интуитивно в терминах диффузии фазы автоволны [19]. Основная идея состоит в том, что граница влияет на

события вокруг ядра через излучаемую из него спиральную волну. Спиральная волна вдали от ядра локально близка к последовательности плоских периодических волн, и может рассматриваться как медленно меняющаяся автоволна (ММВ) в смысле [73] и [54]. Так, передачу влияния границы к ядру можно рассматривать как диффузию фазы ММВ на фоне ее транспорта в противоположном направлении. Модель, рассматриваемая в [14], предполагает скалярную диффузию фазы, то есть случай, когда продольный коэффициент диффузии равен боковому. В модели, рассматриваемой здесь, продольная диффузия отсутствует, поскольку следующая волна возбуждения не получает никакой информации от предыдущей, и возмущение может передаваться только по фронту. Так что, в КУГЛ, возмущение, вызванное присутствием границы может распространяться прямо “против потока” волн, испускаемых из центра вращения и ему надо преодолеть только расстояние  $R$ . Наоборот, в рассматриваемом случае возмущение должно пройти намного более длинный путь по фронту волны  $L \gg R$ , поэтому влияние границы в (3.111) убывает с ростом  $R$  намного быстрее, чем в (3.112).

Эта эвристическая интерпретация подсказывает что асимптотики подобные (3.111) являются менее универсальным и ограничены случаями, когда волны следуют друг за другом независимо, тогда как асимптотики подобные (3.112) более вероятны.

## 3.4 Стационарная спираль в неограниченной среде при произвольном $\gamma$ .

### 3.4.1 Постановка задачи и общее решение.

Напомним, что форма фронта стационарной спирали в бесконечной среде определяется решением нелинейного дифференциального уравнения (2.44) с граничными условиями (2.38), (2.39), (2.41) для неизвестных собственного значения  $\Omega$  и функции  $\kappa(\sigma)$ . В ней штрих (') означает дифференцирование по независимой переменной  $s$ , безразмерные параметры среды определены уравнениями (2.37). Нас интересуют решения с  $\kappa, \Omega$  малыми.

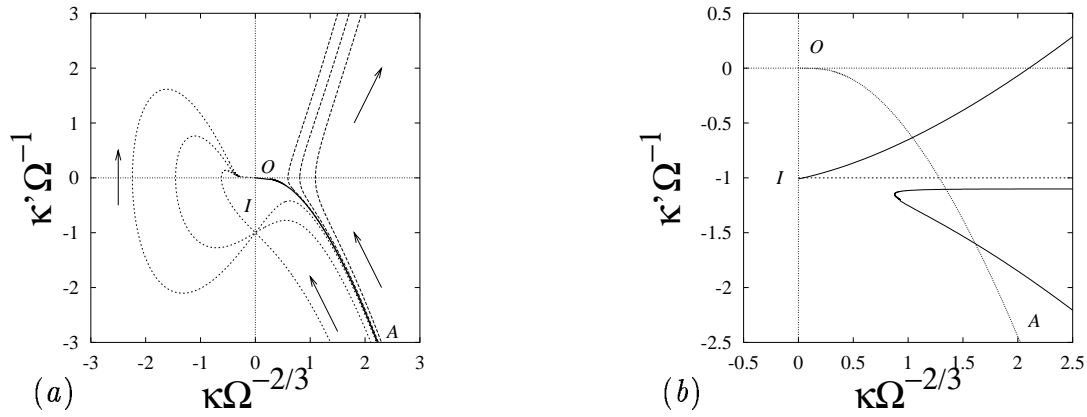


Рис. 3.5: (a) Фазовый портрет уравнения (2.44) в координатах  $(\kappa\Omega^{-2/3}, \kappa'\Omega^{-1})$ .  $O$  — положение равновесия,  $I$  — неравновесная особая точка. Штриховая линия  $OA$  — сепаратриса. (b) Краевая задача в тех же координатах. Сепаратриса  $OA$  (штриховая линия) — единственная интегральная кривая, удовлетворяющая условию (2.41); условия (2.39), (2.38) выделяют на ней точки, соответствующие кончику. Штрих-пунктирная линия  $IA_0$  соответствует классическим граничным условиям (1.15), (1.17) и дает единственную точку пересечения  $A_0$ . Сплошная линия соответствует значениям параметров  $\nu_0 = 0$ ,  $\nu_1 = -0.1$ ,  $\nu_2 = 1$ ,  $\nu_3 = -0.2$ ,  $\nu_4 = 1.1$ ,  $\nu_5 = -1$ ,  $\nu_6 = \nu_7 = \nu_8 = 0$ . В этом случае имеется три точки пересечения,  $A_{1,2,3}$ , и следовательно три решения,  $\Omega_{1,2,3} \approx -0.95094, -0.64050, -0.49185$ , и  $\kappa_{1,2,3}(0) \approx 0.078918, 2.2233, 0.12060$ .

Фазовый портрет дифференциального уравнения (2.44) показан на рис. 3.5(a). Единственная интегральная кривая, удовлетворяющая условию на бесконечности (2.41) — сепаратриса  $OA$ . Как было показано в разделе 3.2, эта кривая может быть описана аналитически в кусочном виде,

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) &= (9/2)^{1/3} \Omega^{2/3} \zeta^{2/3} (1 + Y^2(\zeta)), \quad \kappa'(\sigma) = 3\Omega \zeta Y(\zeta) (1 + Y^2(\zeta)) - \Omega, \\ \zeta &= \frac{\sqrt{2}}{3} \Omega^{1/2} (\sigma_0 - \sigma)^{3/2} \\ Y(\zeta) &= (J_{-2/3}(\zeta) - J_{+2/3}(\zeta)) / (J_{-1/3}(\zeta) + J_{+1/3}(\zeta)),\end{aligned}\tag{3.113}$$

для  $\sigma \leq \sigma_0$ , и

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) &= -(9/2)^{1/3} \Omega^{2/3} \zeta^{2/3} (1 - Y^2(\zeta)), \quad \kappa'(\sigma) = -3\Omega \zeta Y(\zeta) (1 - Y^2(\zeta)) - \Omega, \\ \zeta &= \frac{\sqrt{2}}{3} \Omega^{1/2} (\sigma - \sigma_0)^{3/2} \\ Y(\zeta) &= (I_{-2/3}(\zeta) - I_{+2/3}(\zeta)) / (I_{-1/3}(\zeta) + I_{+1/3}(\zeta)) \equiv K_{2/3}(\zeta) / K_{1/3}(\zeta),\end{aligned}\tag{3.114}$$

для  $\sigma \geq \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  - постоянная интегрирования, связанная с положением точки, отвечающей кончику на сепаратрисе  $OA$ . Будем называть эти части решения соответственно  $J$ -ветвь и  $I$ -ветвь.

Точка, отвечающая кончику ( $\sigma = 0$ ) может оказаться на  $J$ -ветви если  $\sigma_0 > 0$  или на  $I$ -ветви, если  $\sigma_0 < 0$ , в последнем случае все решение состоит только из  $I$ -ветви. Граничные условия в кончике для этих двух случаев согласно (2.39), (2.38) имеют вид

$$\begin{aligned}0 &= \gamma + \epsilon \nu_3 + 6^{1/3} Y_0 \zeta_0^{1/3} \Omega^{1/3} \pm (9/2)^{1/3} \nu_4 (1 \pm Y_0^2) \zeta_0^{2/3} \Omega^{2/3} \pm 3\nu_5 \zeta_0 Y_0 (1 \pm Y_0^2) \Omega - \nu_5 \Omega \\ &\quad + O\left((1 \pm Y_0^2)^{-1} (\zeta_0 \Omega)^{-2/3} \epsilon^3\right) \\ 0 &= \epsilon \nu_0 \mp (9/2)^{1/3} \nu_1 \zeta_0^{2/3} (1 \pm Y_0^2) \Omega^{2/3} \mp 3\nu_2 \zeta_0 Y_0 (1 \pm Y_0^2) \Omega + (\nu_2 - 1) \Omega \\ &\quad - \nu_6 (9/2)^{2/3} \Omega^{4/3} \zeta_0^{4/3} (1 \pm Y_0^2)^2 \\ &\quad \mp \nu_7 (9/2)^{1/3} \Omega^{2/3} \zeta_0^{2/3} (1 \pm Y_0^2) [\pm 3\Omega \zeta_0 Y_0 (1 \pm Y_0^2) - \Omega] \\ &\quad - \nu_8 [\pm 3\Omega \zeta_0 Y_0 (1 \pm Y_0^2) - \Omega]^2 + O(\epsilon^3)\end{aligned}\tag{3.115}$$

где верхний знак отвечает  $J$ -ветви, а нижний —  $I$ -ветви,

$$Y_0 = Y(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \Omega^{1/2} |\sigma_0|^{3/2}\tag{3.116}$$



и  $Y(\zeta)$  — соответствующая функция из (3.113) или из (3.114).

Таким образом система конечных (недифференциальных) уравнений (3.115) для неизвестных  $\zeta_0$  и  $\Omega$ , в принципе, дает решение задачи. Все кинематические параметры спиральной волны можно выразить через  $\zeta_0$  и  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}\omega &= V_*^2 D^{-1} \Omega, \quad \tan \varphi_0 = -(\gamma + \epsilon \nu_3 + \nu_4 \kappa(0) + \nu_5 \kappa'(0)) / (1 - \kappa(0)), \\ r_0 &= D(V_* \Omega)^{-1} \left[ (\gamma + \epsilon \nu_3 + \nu_4 \kappa(0) + \nu_5 \kappa'(0))^2 + (1 - \kappa(0))^2 \right]^{1/2}, \\ K(0) &= V_* D^{-1} \kappa(0)\end{aligned}\tag{3.117}$$

Здесь  $r_0$  — радиус ядра,  $\varphi_0$  — угол между касательной к кончику и его радиус-вектором.

Система (3.115), вообще говоря, довольно сложна:

- первое из уравнений кубично относительно  $\Omega^{1/3}$ , и может иметь до трех различных решений в виде спиральных волн в одной и той же среде.
- Функции  $Y(\zeta)$  — трансцендентные, и в общем случае невозможно выписать явное выражение для  $\zeta_0(\nu_i)$ .
- В систему входит малый параметр  $\epsilon$  и она должна иметь решение с равномерно малым  $\kappa(\sigma)$ ; проблема еще больше усложняется, если имеются маленькие параметры кроме  $\epsilon$ .

Рис. 3.5(b) иллюстрирует эти трудности: на ней показан пример с тремя решениями, причем для двух из них  $\kappa(0)$  мал.

В следующих разделах, мы рассматриваем два наиболее важных частных случая, для которых удалось получить явные результаты.

### 3.4.2 Наиболее общий случай.

Предположим, что все безразмерные параметры среды, определенные в (2.37), порядка единицы, так что  $\epsilon$  — единственный малый параметр задачи. В частности  $\gamma \sim 1$ . В

силу малости  $\epsilon$ , при  $\gamma \neq 0$ , граничные условия (3.115) можно удовлетворить только при малом  $\Omega$ , большом  $\zeta_0$  и кончиком  $s = 0$  расположенным на  $I$ -ветви. Тогда

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) &= (6\zeta)^{-1/3}\Omega^{2/3} + O(\Omega^{2/3}\zeta^{-4/3}), \quad \kappa'(\sigma) = -(6\zeta)^{-1}\Omega + O(\Omega\zeta^{-2}), \\ \zeta &= \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma - \sigma_0)^{3/2}\Omega^{1/2}, \quad Y(\zeta) = 1 + (6\zeta)^{-1} + O(\zeta^{-2})\end{aligned}\quad (3.118)$$

С рассматриваемой точностью, кривизна  $\kappa(\sigma)$  такова же как и для развертки круга. После подстановки в уравнение (2.44) этих асимптотик оказывается, что члены  $\kappa\kappa''$  и  $\kappa'^2$  много меньше других, а сами асимптотики можно получить как решение этого уравнения после отбрасывания этих членов. Отметим, что отбрасывание именно этих членов означает независимость нормальной скорости фронта от его кривизны, что вполне естественной для очень малых кривизн, и согласуется с тем что спираль является разверткой круга.

Если мы будем искать решение в виде

$$\zeta_0 = A\epsilon^{-\alpha} + O(1), \quad \alpha > 0, \quad \Omega = B\epsilon^\beta + O(\epsilon^{2\beta}), \quad \beta > 0 \quad (3.119)$$

то граничные условия примут вид

$$\begin{aligned}0 &= \gamma + \epsilon\nu_3 + (6AB)^{1/3}\epsilon^{(\beta-\alpha)/3} + O(\epsilon^{3-(2\beta+\alpha)/3}, \epsilon^{(2\beta+\alpha)/3}, \epsilon^{(\beta+2\alpha)/3}, \epsilon^{(4\beta-\alpha)/3}) \\ 0 &= \epsilon\nu_0 - \nu_1 B^{2/3} (6A)^{-1/3} \epsilon^{(2\beta+\alpha)/3} - B\epsilon^\beta \\ &\quad + O(\epsilon^3, \epsilon^{\alpha+\beta}, \epsilon^{2(2\alpha+\beta)/3}, \epsilon^{2(\alpha+2\beta)/3}, \epsilon^{2\beta}, \epsilon^{(5\beta+\alpha)/3})\end{aligned}\quad (3.120)$$

откуда

$$\alpha = \beta = 1, \quad A = \gamma^2(6\nu_0)^{-1}(\nu_1 - \gamma), \quad B = -\nu_0\gamma(\nu_1 - \gamma)^{-1} \quad (3.121)$$

Наше решение имеет смысл только при положительном  $\zeta_0$  и  $\omega$ . Следовательно, должны выполняться следующие неравенства:

$$\gamma < 0, \quad (3.122)$$

$$\epsilon\nu_0(\nu_1 - \gamma) > 0. \quad (3.123)$$

Неравенство (3.122) означает

$$g_* < 0, \quad (3.124)$$

то есть решение в виде спиральной волны можно найти таким образом, только если первоначальное решение невозмущенной системы в виде полуволны прорастает, но не сокращается. А (3.123) показывает, что решения в виде спиральных волн находятся только по одну сторону от многообразия  $\epsilon = 0$ .

В заключении, выпишем полученные параметры спиральной волны в размерной форме:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{V_*^2 \nu_0 \gamma}{D(\gamma - \nu_1)} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ \tan \varphi_0 &= -\gamma - \left( \nu_3 - \frac{\nu_0(\gamma - \nu_4)}{(\gamma - \nu_1)} \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \\ r_0 &= \frac{D(1 + \gamma^2)^{1/2}}{V_* \gamma} \left[ \frac{\gamma - \nu_1}{\nu_0 \epsilon} - \frac{1 - \gamma \nu_4}{1 + \gamma} \right] + O(\epsilon) \\ K(0) &= -\frac{V_* \nu_0}{D(\gamma - \nu_1)} \epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.125)$$

### 3.4.3 Случай непрорастающего кончика.

Одно из условий, использованных в предыдущем разделе состоит в том, что параметр  $g_*$  отличен от нуля и, как оказалось, отрицателен. Рассмотрим специальный случай

$$\gamma = 0. \quad (3.126)$$

Будем теперь искать решения задачи (3.115) в виде

$$\zeta_0 = \zeta_* + A\epsilon^\alpha + O(\epsilon^{2\alpha}), \quad \alpha > 0; \quad \Omega = B\epsilon^\beta + O(\epsilon^{2\beta}), \quad \beta > 0 \quad (3.127)$$

на  $J$ -ветви, где  $\zeta_* \approx 0.68555$  — наименьший положительный корень уравнения

$$J_{2/3}(\zeta_*) = J_{-2/3}(\zeta_*). \quad (3.128)$$

Тогда  $Y_0 = -A\epsilon^\alpha + O(\epsilon^{2\alpha})$  и следовательно граничные условия (3.115) примут вид

$$\begin{aligned} \nu_3 \epsilon - A(6B\zeta_*)^{1/3} \epsilon^{\alpha+\beta/3} + 2^{-1/3} \nu_4 (3B\zeta_*)^{2/3} \epsilon^{2\beta/3} + O(\epsilon^{2\alpha+\beta/3}, \epsilon^{\alpha+2\beta/3}, \epsilon^\beta, \epsilon^{3-2\beta/3}) &= 0 \\ \nu_0 \epsilon - 2^{-1/3} \nu_1 (3B\zeta_*)^{2/3} \epsilon^{2\beta/3} + O(\epsilon^3, \epsilon^{\alpha+2\beta/3}, \epsilon^\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Отсюда

$$\alpha = 1/2, \quad \beta = 3/2, \quad A = \frac{\nu_1 \nu_3 + \nu_0 \nu_4}{\sqrt{2\nu_0 \nu_1}}, \quad B = \frac{\sqrt{2}}{3\zeta_*} (\nu_0/\nu_1)^{3/2}, \quad (3.130)$$

а размерные параметры спиральной волны:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sqrt{2}V_*^2}{3\zeta_* D} (\epsilon \nu_0/\nu_1)^{3/2} + O(\epsilon^3) \\ \tan \varphi_0 &= - \left[ \nu_3 + \frac{\nu_4 \nu_0}{\nu_1} \right] \epsilon + O(\epsilon^{3/2}) \\ r_0 &= \frac{3D\zeta_*}{\sqrt{2}V_*} \left[ \left( \frac{\nu_1}{\nu_0 \epsilon} \right)^{3/2} - \left( \frac{\nu_1}{\nu_0 \epsilon} \right)^{1/2} \right] + O(1) \\ K(0) &= \frac{V_* \nu_0}{D \nu_1} \epsilon + O(\epsilon^{3/2}) \end{aligned} \quad (3.131)$$

Это решение формально совпадает, в главном порядке, с полученным в разделе 3.3.2 в рамках классической кинематики. Это совпадение достигается при отождествлении  $\beta = DK(0)/V_*$  с  $\nu_0 \epsilon/\nu_1$ . В этом “слабом” смысле можно сказать, что “традиционный” случай имеет коразмерность 1 относительно общего, поскольку “традиционное” решение в виде спиральной волны можно получить при выполнении одного дополнительного условия (3.126). Обратим внимание, однако, что это лишь формальное соответствие, так как малый параметр  $\beta$  [1, 2] имеет физический смысл отличный от  $\epsilon$ : в то время как  $\epsilon$  показывает мгновенную скорость поворота кончика неизогнутой полуволны, при нулевой скорости ее прорастания,  $\beta$  пропорциональна скорости прорастания при нулевой скорости поворота. Это связано с тем что совпали только *решения*, но не *уравнения*.

## Глава 4

# Дрейф спиральных волн в слабо неоднородной среде

### 4.1 Предварительные замечания.

В разделе 3.4 показано, что в бесконечной однородной возбудимой среде существуют стационарные решения кинематических уравнений в виде спиральных волн. Неоднородность среды ведет к искажению формы фронта и ядра, изменению периода вращения и медленному движению центра вращения. Такое движение мы будем называть *дрейфом*. Понятно, что о дрейфе можно говорить только если вносимые искажения в форму фронта достаточно малы, то есть скорость дрейфа не велика по сравнению со скоростью вращения. Поэтому имеет смысл рассматривать только слабо неоднородную среду. Вообще говоря, уравнения движения волны в неоднородной среде можно вывести аналогично тому, как это было сделано для уравнений в однородной среде в главе 2.1, при этом они будут содержать коэффициенты, зависящие от координат и дополнительные члены, содержащие пространственные производные от этих коэффициентов. Однако, предполагая свойства среды изменяющимися гладко и соответственно их пространственные производные малыми, отбросим эти члены и ограничимся рассмотрением пространственной зависимости коэффициентов. Это позволит, упростив

уравнения, сохранить основные эффекты.

Для описания дрейфа мы используем “адиабатический” метод теории возмущений предложенный в [42]. Для этого рассмотрим спиральную волну в сопутствующей системе отсчета (ССО), начало отсчета которой всегда совпадает с центром вращения спирали. Это приводит к зависимости параметров среды в ССО от времени, даже в стационарной неоднородной среде. Однако благодаря тому что дрейф предполагается медленным, значения этих параметров в первом приближении могут рассматриваться как стационарные. Решение в ССО с замороженными коэффициентами должно быть периодически по времени. Это требование периодичности накладывает дополнительное условие, которое позволяет найти скорость ССО как функцию мгновенного распределения параметров среды в ССО, то есть скорость дрейфа спиральной волны в лабораторной системе отсчета при заданном ее положении в среде. Одновременно удастся получить и девиацию частоты вращения.

Так полученная скорость дрейфа и девиация частоты оказываются, в согласии с общей теорией [39], линейными функционалами типа свертки от возмущений параметров среды. Ядра этих функционалов называются *функциями отклика*. Описанный метод позволяет получить **аналитические выражения** для всех функций отклика, каждая из которых характеризует влияние того или иного параметра среды на одну из компонент скорости дрейфа или девиацию частоты.

## 4.2 Математическая постановка задачи

Запишем систему уравнений для кончика спиральной волны (2.34) в размерном виде, сохранив только старшие члены, с учетом известного из стационарного решения условия  $\kappa \ll \kappa'$ :

$$0 = \epsilon\lambda_0 + (D - \lambda_2)K' + (g_* + \epsilon\mu_0 - \lambda_1)K + (\mu_1 - \lambda_3)K^2 \quad (4.1)$$

$$\partial_t \alpha = \epsilon\lambda_0 - \lambda_1 K - \lambda_2 K' - \lambda_3 K^2 \quad (4.2)$$

$$G = g_* + \epsilon\mu_0 + \mu_1 K \quad (4.3)$$

Пусть все параметры нашей неоднородной среды зависят от координат следующим образом:

$$\begin{aligned} V_* &= \bar{V}(1 + \tilde{V}(\mathbf{r})), \quad D = \bar{D}(1 + \tilde{D}(\mathbf{r})), \\ g_* + \epsilon\mu_0 &= \bar{V}\bar{\nu}_3(1 + \tilde{\nu}_3(\mathbf{r})), \quad \mu_1 = \bar{D}\bar{\nu}_4(1 + \tilde{\nu}_4(\mathbf{r})), \quad \lambda_0 = \bar{V}^2\bar{\nu}_0(1 + \tilde{\nu}_0(\mathbf{r}))/\bar{D}, \\ \lambda_1 &= \bar{V}\bar{\nu}_1(1 + \tilde{\nu}_1(\mathbf{r})), \quad \lambda_2 = \bar{D}\bar{\nu}_2(1 + \tilde{\nu}_2(\mathbf{r})), \quad \lambda_3 = \bar{D}\bar{\nu}_6(1 + \tilde{\nu}_6(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $\tilde{V} \ll 1$ ,  $\tilde{D} \ll 1$  и  $\tilde{\nu}_{1-4,6} \ll 1$  малые и пространственно локализованные функции.

Обозначим  $\mathbf{r}(s, t)$  точку волнового фронта с натуральной координатой  $s$  в момент времени  $t$ , а  $\tau(\mathbf{r})$  — *эйконал*, то есть многозначную функцию значения которой равны моментам прохождения фронта через точку  $\mathbf{r}$ . Так что,  $\forall t, s, \{\tau(\mathbf{r}(s, t))\} \ni t$ . Как уже было сказано во введении, мы предполагаем, что в ССО спираль приблизительно периодична по времени и близка по форме к свободной спирали. В этой системе отсчета возмущения  $\tilde{V}$  и  $\tilde{D}$  зависят от времени. Однако всилу медленности дрейфа, их мгновенные распределения могут рассматриваться как стационарные. Обозначим мгновенную скорость ССО через  $\mathbf{c}$  а период спиральной волны через  $T_0$ .

В ССО получим по определению эйконала

$$\tau(\mathbf{r}(s, t) - \mathbf{c}t) = t \quad (4.5)$$

Дифференцируя по  $s$  и по  $t$ , будем иметь

$$\langle \nabla \tau, \mathbf{T} \rangle = 0, \quad \langle \nabla \tau, \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{c} \rangle = 1 \quad (4.6)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — касательный вектор к фронту, точка означает дифференцирование по времени, а угловые скобки — скалярное произведение. Из (4.6) легко видеть, что

$$v_n = (1 + \langle \mathbf{c}, \nabla \tau \rangle) / |\nabla \tau| \quad (4.7)$$

где  $v_n(s, t) = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{N} \rangle$  — нормальная скорость фронта,  $\mathbf{N}$  — вектор нормали к фронту. Заметим, что при таком определении нормальной скорости, мы выбираем нормаль

сонаправленную скорости распространения фронта, так что кривизна фронта, выпуклого в направлении распространения, оказывается отрицательной, в отличии от наших обычных предположений.

Дифференцируя первое из соотношений (4.6) по  $s$ , используя формулы Френе и вычисляя декартовы компоненты касательного вектора из (4.6) и скорость из (4.7), находим кривизну фронта. Записав ее в ковариантном виде, получим

$$K = \frac{1}{|\nabla\tau|^3} \left[ \frac{1}{2}(\nabla\tau\nabla)(\nabla\tau)^2 - (\nabla\tau)^2\Delta\tau \right] \quad (4.8)$$

Подставляя найденные кривизну и скорость в уравнение (1.14) и учитывая замечание о знаке кривизны, получим уравнение

$$v_0|\nabla\tau|^3 + D \left[ \frac{1}{2}(\nabla\tau\nabla)(\nabla\tau)^2 - (\nabla\tau)^2\Delta\tau \right] = (\nabla\tau)^3(1 + \langle \mathbf{c}, \nabla\tau \rangle) \quad (4.9)$$

Для обезразмеривания, выполним замену переменных

$$\mathbf{R} = (\bar{V}/\bar{D})\mathbf{r}; \quad T(\mathbf{R}) = (\bar{V}^2/\bar{D})\tau(\mathbf{r}); \quad \mathbf{C} = \bar{V}\mathbf{c} \quad (4.10)$$

Она приводит уравнение (4.9) к виду

$$(1 + \tilde{V})|\nabla T|^3 - (1 + \tilde{D}) \left[ (\nabla T)^2 \nabla^2 T - \frac{1}{2}(\nabla T \nabla)(\nabla T)^2 \right] = (\nabla T)^2 [1 + \langle \mathbf{C}, \nabla T \rangle], \quad (4.11)$$

где  $\nabla$  — градиент по  $R$ , а значения безразмерного эйконала  $T$  в одной точке отличаются друг от друга на  $T_0 = \bar{V}^2\mathcal{T}_0/\bar{D}$ .

Масштабирование (4.10) приводит уравнения на кончике (4.1)–(4.3) к виду



$$\begin{aligned}
0 &= [\bar{\nu}_3(1 + \tilde{\nu}_3) - \bar{\nu}_1(1 + \tilde{\nu}_1)]p\kappa + [\bar{\nu}_4(1 + \tilde{\nu}_4) - \bar{\nu}_6(1 + \tilde{\nu}_6)](p\kappa)^2 \\
&\quad + \epsilon\bar{\nu}_0(1 + \tilde{\nu}_0) + [1 + \tilde{D} - \bar{\nu}_2(1 + \tilde{\nu}_2)]\sigma\kappa'; \\
\dot{\alpha} &= -\bar{\nu}_4(1 + \tilde{\nu}_4)(p\kappa)^2 - \bar{\nu}_3(1 + \tilde{\nu}_3)p\kappa - (1 + \tilde{D})\sigma\kappa'; \\
\dot{X}_0 &= -[1 + \tilde{V} - (1 + \tilde{D})p\kappa] \sin \alpha \\
&\quad + [\bar{\nu}_3(1 + \tilde{\nu}_3) + \bar{\nu}_4(1 + \tilde{\nu}_4)p\kappa] \cos \alpha - C_x; \\
\dot{Y}_0 &= [1 + \tilde{V} - (1 + \tilde{D})p\kappa] \cos \alpha \\
&\quad + [\bar{\nu}_3(1 + \tilde{\nu}_3) + \bar{\nu}_4(1 + \tilde{\nu}_4)p\kappa] \sin \alpha - C_y; \\
\langle \nabla T, \mathbf{t} \rangle &= 0; \\
\langle \nabla T, \mathbf{n} \rangle &= \left[ 1 + \tilde{V} - p(1 + \tilde{D})\kappa \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где  $X_0$  и  $Y_0$  — обезразмеренные координаты кончика, точка обозначает производную по безразмерному времени  $\bar{V}^2 t / \bar{D}$ , а  $p$  и  $\sigma$  — безразмерные параметры невозмущенного решения

$$p = \bar{D}\bar{K}_0/\bar{V}, \quad \sigma = p^2\bar{K}'_0/\bar{K}_0^2, \tag{4.13}$$

$$\kappa = K_0/\bar{K}_0, \quad \kappa' = K'_0/\bar{K}'_0, \tag{4.14}$$

$\bar{K}_0$ ,  $\bar{K}'_0$  — кривизна кончика свободной спирали и ее производная по натуральному параметру,  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы касательной и нормали к фронту в его кончике. Мы считаем  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  и форму ядра квазистационарными в ССО по тем же причинам что и  $\tilde{V}$  и  $\tilde{D}$ .

Накладывая требования ограниченности  $|\nabla T|$  при больших  $\rho$  и периодичности  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $\alpha$  на решения уравнений (4.11), (4.12), получаем задачу относительно трех неизвестных: функции  $T(\mathbf{R})$ , описывающей форму спиральной волны, скаляра  $T_0$  — периода ее вращения и вектора  $\mathbf{C}$  — скорости дрейфа. Далее в этой главе приводится решение этой задачи и применение полученного решения к некоторым конкретным случаям.

## 4.3 Метод решения

### 4.3.1 Свободная спираль

Начнем с описания в терминах эйконала свободной спирали, то есть спиральной волны в бесконечной однородной среде. Мы ищем решение уравнения (4.11) при  $\tilde{V} = \tilde{D} = 0$  и  $\mathbf{C} = 0$  в виде спирали стационарно вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_0$ . В полярных координатах  $(\rho, \theta)$  такое решение должно иметь вид

$$T(\rho, \theta) = \bar{T} \equiv \frac{1}{\omega_0}(\theta + \psi_0(\rho)); \quad \psi'_0 \geq 0. \quad (4.15)$$

Подстановка

$$\chi = \rho\psi'_0(\rho) \quad (4.16)$$

вместе с (4.15) приводит уравнение (4.11) к виду

$$\chi' - (\chi^2 + 1)^{3/2} + (\chi/\rho + \omega_0\rho)(\chi^2 + 1) = 0, \quad (4.17)$$

а граничные условия (4.12) при этом принимают вид

$$\begin{aligned} R_0\omega_0 &= [(1-p)^2 + (\bar{\nu}_3 + \bar{\nu}_4p)^2]^{1/2}, \\ \alpha &= \omega_0 t - \beta, \\ \tan \beta &= -(\bar{\nu}_3 + \bar{\nu}_4p)/(1-p), \\ \omega_0 &= \epsilon\bar{\nu}_0 - \bar{\nu}_1p - \bar{\nu}_2\sigma - \bar{\nu}_6p^2, \\ (\bar{\nu}_4 - \bar{\nu}_6)p^2 + (\bar{\nu}_3 - \bar{\nu}_1)p + (1 - \bar{\nu}_2)\sigma + \epsilon\bar{\nu}_0 &= 0, \\ \chi(R_0) &= \tan \beta, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $R_0$  — безразмерный радиус ядра (в размерном виде радиус ядра  $R_0\bar{D}/\bar{V}$ ) а  $\beta$  — угол между касательной к фронту в кончике и радиус-вектором этого кончика, отсчитываемый от касательной.

Уравнение (4.17) совпадает с дальней асимптотикой спиральной волны с малым ядром, рассмотренной в [74, 3, 75, 76], но в данном случае оно пригодно для всех

рассматриваемых радиусов. Как было показано в разделе 3.4, решение в виде стационарной спиральной волны может быть найдено точно, в аналитическом виде. Однако, в данном случае мы не будем использовать это точное решение из-за его сложности. При обсуждении примеров мы вместо точного решения используем его равномерно пригодную асимптотику.

### 4.3.2 Теория возмущений

Как уже было сказано, мы ожидаем, что дрейфующая спираль в ССО окажется близкой к свободной. Поэтому линеаризуем уравнение (4.11) на решении (4.15), приняв во внимание малость скорости дрейфа  $\mathbf{s}$  и возмущений  $\tilde{T}$  и  $\tilde{T}_0$  эйконала  $\bar{T}$  и периода вращения  $\bar{T}_0$ ,

$$T = \bar{T} + \tilde{T}, \quad T_0 = \bar{T}_0 + \tilde{T}_0, \quad (4.19)$$

и будем искать возмущения в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\tilde{T}_0}{2\pi} \theta + \sum T_n(\rho) \exp(in\theta), & \alpha &= \omega t - \beta + \sum \alpha_n \exp(in\omega t), \\ \kappa &= 1 + \sum \kappa_n \exp(in\omega t), & \kappa' &= 1 + \sum \kappa'_n \exp(in\omega t), \\ \rho_0(\omega t) &= R_0 \left( 1 + \sum r_n \exp(in\omega t) \right), & \theta(\omega t) &= \omega t + \sum \theta_n \exp(in\omega t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где  $T_{-n} = T_n^*$ ,  $\alpha_{-n} = \alpha_n^*$  и т.п., и все возмущения (кроме может быть  $T_n$ ) предполагаются много меньше единицы;  $\rho_0(\theta)$  — уравнение траектории кончика в полярных координатах и  $\omega$  — возмущенная частота:

$$\omega = 2\pi/(\bar{T}_0 + \tilde{T}_0) \approx \omega_0 + \delta\omega. \quad (4.21)$$

Это приводит к линейному ОДУ второго порядка для Фурье-мод эйконала  $T_n(\rho)$  вида

$$\begin{aligned} T_n'' + p_n(\rho)T_n' + q_n(\rho)T_n &= \\ &= H_n(\rho) + h_0(\rho)\delta\omega\delta_{n,0} + h_1(\rho)(C_x - iC_y)\delta_{n,1} + h_{-1}(\rho)(C_x + iC_y)\delta_{n,-1}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Уравнения для  $C_x$  и  $C_y$  в (4.12) дают разложения Фурье для комплексной скорости кончика  $\dot{X}_0 + i\dot{Y}_0$ . Его нулевая гармоника должна обратиться в ноль чтобы обеспечить замкнутость траектории кончика в ССО. Это требование приводит к линейному соотношению между  $C_x - iC_y$  и  $\kappa'_1$ . Рассмотрение нулевых и первых гармоник  $\dot{X}_0 + i\dot{Y}_0$  дает выражение для параметров формы ядра  $r_{0,1}, \theta_{0,1}$  через  $\kappa'_{0,1}$ .

Линеаризация уравнений на кончике (4.12) дает граничные условия для  $T_{0,1}(\rho)$  на траектории кончика. Экстраполируя или интерполируя функции  $T_{0,1}$  и учитывая соотношения между формой ядра и  $\kappa'_{0,1}$ , запишем эти граничные условия в виде

$$T'_0(R_0) = g_0\kappa'_0 + G_0, \quad T'_1(R_0) = f_1\kappa'_1 + F_1, \quad T'_1(R_0) = g_1\kappa'_1 + G_1. \quad (4.23)$$

Мы опускаем явные выражения для коэффициентов в (4.22) и (4.23) в силу их громоздкости. Граничные условия на бесконечности получаются из условия ограниченности градиента решения и имеют вид

$$T'_n(\infty) = 0 \quad (4.24)$$

Для  $n = 0, \pm 1$ , решения (4.23) легко найти аналитически, используя то, что  $\partial_\theta \bar{T}$  и  $\partial_x \bar{T}$  удовлетворяют однородному линейному уравнению. Это решение удовлетворяет граничным условиям только при одном выборе  $C_x, C_y$  и  $\delta\omega$ . Этот выбор и дает решение нашей задачи.

## 4.4 Результаты

### 4.4.1 Общая формулировка

Девияция частоты и скорость дрейфа получены как это предсказывается общей теорией [39], в виде линейных функционалов от возмущений параметров. Мы разделяем ядра этих функционалов, *функции отклика* (ФО), на *вращательные* ФО, определяющие сдвиг частоты вращения, и *сдвиговые* ФО, определяющие дрейф центра вращения (в [39, 44], ФО разделялись на *временные* и *пространственные*, так как для стационарно вращающейся спирали вращение в пространстве эквивалентно сдвигу во времени.

Обозначим вращательные ФО нижним индексом 0, а сдвиговые нижним индексом 1. С другой стороны, ФО классифицируются по тому параметру, влияние которого они описывают. Будем обозначать это верхним индексом в скобках.

В этих обозначениях, девиация частоты равна

$$\begin{aligned} \delta\omega = & \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[ \tilde{W}_0^{(V)}(\rho) \tilde{V}(\rho, \theta) + \tilde{W}_0^{(D)}(\rho) \tilde{D}(\rho, \theta) \right] d\theta d\rho \\ & + \int_0^{2\pi} \left[ \hat{W}_0^{(V)} \tilde{V}(R_0, \theta) + \hat{W}_0^{(D)} \tilde{D}(R_0, \theta) + \sum \hat{W}_0^{(j)} \bar{\nu}_j \tilde{\nu}_j(R_0, \theta) \right] d\theta, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где вращательные ФО представляют собой

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0^{(V)}(\rho) &= -\mathcal{W}_0^0 \frac{\omega_0}{1-p} \exp \left( -\omega_0 \int_{R_0}^{\rho} \rho_1 \chi(\rho_1) d\rho_1 \right), \\ \tilde{W}_0^{(D)}(\rho) &= \tilde{W}_0^{(V)}(\rho) [\omega_0 \rho (\chi^2 + 1)^{-1/2} - 1], \\ \hat{W}_0^{(V)} &= \mathcal{W}_0^0 p / \omega_0, \quad \hat{W}_0^{(D)} = -\frac{\sigma \Delta}{2\pi} (2\bar{\nu}_6 p + \bar{\nu}_1) - \mathcal{W}_0^0 \left( \sigma \Delta \mathcal{W}_0^1 - \frac{p^2}{\omega_0} \right), \\ \hat{W}_0^{(0)} &= \frac{p \Delta}{2\pi} (2\bar{\nu}_6 p + \bar{\nu}_1) + \mathcal{W}_0^0 \left( p \Delta \mathcal{W}_0^1 - \frac{1 - p R_0 \sin \beta}{1-p} \right), \quad \hat{W}_0^{(1)} = \hat{W}_0^{(0)} p, \\ \hat{W}_0^{(2)} &= -\frac{\Delta}{2\pi} (2\bar{\nu}_4 p + \bar{\nu}_3) + \mathcal{W}_0^0 \Delta \mathcal{W}_0^2, \\ \hat{W}_0^{(3)} &= -\hat{W}_0^{(2)} p, \quad \hat{W}_0^{(4)} = -\hat{W}_0^{(2)} \sigma, \quad \hat{W}_0^{(6)} = -\hat{W}_0^{(2)} p^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

и для краткости введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0^0 &= -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\mathcal{Z}_0}{1-p} + \frac{p R_0 - \sin \beta (1 + \cos^2 \beta)}{\omega_0 \cos \beta} - \frac{p a}{b} \left( \frac{p}{\omega_0} - \bar{\nu}_4 \frac{1 - p R_0 \sin \beta}{1-p} \right) \right]^{-1}, \\ \mathcal{W}_0^1 &= \left[ \frac{\mathcal{Z}_0}{1-p} - \frac{p R_0 - \sin \beta (1 + \cos^2 \beta)}{\omega_0 \cos \beta} \right] (2\bar{\nu}_6 p + \bar{\nu}_1) + \frac{p}{\omega_0} - \bar{\nu}_4 \frac{1 - p R_0 \sin \beta}{1-p}, \\ \mathcal{W}_0^2 &= \left[ \frac{\mathcal{Z}_0}{1-p} - \frac{p R_0 - \sin \beta (1 + \cos^2 \beta)}{\omega_0 \cos \beta} \right] (-2\bar{\nu}_4 p - \bar{\nu}_3) - \frac{p}{\omega_0} + \bar{\nu}_4 \frac{1 - p R_0 \sin \beta}{1-p}, \\ \mathcal{Z}_0 &= \int_{R_0}^{\infty} \frac{\rho}{(\chi^2 + 1)^{3/2}} \left[ (\chi^2 + 1)^{1/2} (1 - 2\chi^2) + 2\chi^2 (\omega_0 \rho + \frac{\chi}{\rho}) \right] \exp \left( -\omega_0 \int_{R_0}^{\rho} \xi \chi(\xi) d\xi \right) d\rho \\ a &= \frac{\sigma (1 - \bar{\nu}_2)}{p [2(\bar{\nu}_6 - \bar{\nu}_4) p - \bar{\nu}_3 + \bar{\nu}_1]}; \quad b = -\frac{\sigma [2(\bar{\nu}_6 - \bar{\nu}_4) p - \bar{\nu}_3 \bar{\nu}_2 + \bar{\nu}_1]}{2(\bar{\nu}_6 - \bar{\nu}_4) p - \bar{\nu}_3 + \bar{\nu}_1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Скорость дрейфа равна

$$\begin{aligned}
C_x - iC_y &= \int_{R_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[ \tilde{W}_1^{(V)}(\rho, \theta) \tilde{V}(\rho, \theta) + \tilde{W}_1^{(D)}(\rho, \theta) \tilde{D}(\rho, \theta) \right] d\theta \rho d\rho \\
&+ \int_0^{2\pi} \left[ \hat{W}_1^{(V)}(\theta) \tilde{V}(R_0, \theta) + \hat{W}_1^{(D)}(\theta) \tilde{D}(R_0, \theta) + \sum \hat{W}_1^{(j)}(\theta) \bar{\nu}_j \tilde{\nu}_j(R_0, \theta) \right] d\theta
\end{aligned} \tag{4.28}$$

со сдвиговыми ФО

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_1^{(V,D)}(\rho, \theta) &= \tilde{W}_1^{(V,D)}(\rho) \exp(-i\theta), \quad \hat{W}_1^{(j)}(\theta) = \hat{W}_1^{(j)} \exp(-i\theta), \quad j = V, D, 0 \dots 5, \\
\tilde{W}_1^{(V)}(\rho) &= -2i\mathcal{W}_1 [bR_0 + pa(1 - i\bar{\nu}_4) \exp(i\beta)] \frac{\chi + i}{\rho} \exp \left[ - \int_{R_0}^{\rho} \left( \omega_0 \xi + \frac{2i}{\xi} \right) \chi(\xi) d\xi \right] \\
\tilde{W}_1^{(D)}(\rho) &= \tilde{W}_1^{(V)}(\rho) \left[ \frac{\omega_0 \rho}{(\chi^2 + 1)^{1/2}} - 1 \right], \\
\hat{W}_1^{(V)} &= \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_1^1, \quad \hat{W}_1^{(D)} = \mathcal{W}_1 [-(\sigma \Delta + p) \mathcal{W}_1^1 - \bar{\nu}_4 \sigma \Delta \mathcal{W}_1^2 - (2\bar{\nu}_6 p + \bar{\nu}_1) \sigma \Delta \mathcal{W}_1^3], \\
\hat{W}_1^{(0)} &= \mathcal{W}_1 [p \Delta \mathcal{W}_1^1 + (1 + \bar{\nu}_4 p \Delta) \mathcal{W}_1^2 + (2\bar{\nu}_6 p + \bar{\nu}_1) p \Delta \mathcal{W}_1^3], \quad \hat{W}_1^{(1)} = \hat{W}_1^{(0)} p, \\
\hat{W}_1^{(2)} &= \mathcal{W}_1 [-\Delta \mathcal{W}_1^1 - \bar{\nu}_4 \Delta \mathcal{W}_1^2 - (2\bar{\nu}_4 p + \bar{\nu}_3) \Delta \mathcal{W}_1^3], \\
\hat{W}_1^{(3)} &= -\hat{W}_1^{(2)} p, \quad \hat{W}_1^{(4)} = -\hat{W}_1^{(2)} \sigma, \quad \hat{W}_1^{(6)} = -\hat{W}_1^{(2)} p^2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

и обозначениями для краткости

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{pR_0 \sin \beta - 1}{1 - p} (bR_0 - pa \exp(-i\beta)(1 - i\bar{\nu}_4)) - i(bR_0 + pa(1 - i\bar{\nu}_4) \exp(i\beta)) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_{R_0}^{\infty} \frac{(\chi + i)^2}{(\chi^2 + 1)^{1/2}} \exp \left( - \int_{R_0}^{\rho} \left( \omega_0 \rho_1 + \frac{2i}{\rho_1} \right) \chi(\rho_1) d\rho_1 \right) d\rho \right]^{-1}, \\
\mathcal{W}_1^1 &= 2 \frac{b}{\omega_0} (i - pR_0 \cos \beta) - 2 \frac{p^2 a}{\omega_0} (1 - i\bar{\nu}_4), \\
\mathcal{W}_1^2 &= 2 \frac{b}{\omega_0} (1 - pR_0 \sin \beta), \quad \mathcal{W}_1^3 = 2i \frac{pa}{\omega_0} (1 - pR_0 \sin \beta) (1 - i\bar{\nu}_4)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Как видно из (4.25) и (4.28), ФО можно разделить по их пространственному характеру. ФО  $\tilde{W}_{0,1}^{(*)}$  определяют вклад от возмущения параметров во всей среде вне

ядра, тогда как  $\hat{W}_{0,1}^{(*)}$  только от возмущений на границе ядра. Так что будучи представленными как функции координат,  $\hat{W}_{0,1}^{(*)}$  окажутся сингулярными функциями, пропорциональными  $\delta(\rho - R_0)$ . Соответственно, будем называть  $\tilde{W}_{0,1}^{(*)}$  и  $\hat{W}_{0,1}^{(*)}$  *регулярными* и *сингулярными* компонентами ФО. Параметры влияющие только на движение кончика, имеют только сингулярные компоненты ФО. Вращательные ФО  $\tilde{W}_0^{(j)}$ ,  $\hat{W}_0^{(j)}$  — действительные, тогда как сдвиговые ФО  $\tilde{W}_1^{(j)}$ ,  $\hat{W}_1^{(j)}$  комплексны, так как они определяют не только модуль скорости дрейфа, но и ее направление.

Заметим, что все регулярные ФО быстро (гиперэкспоненциально) убывают при больших  $\rho$ .

#### 4.4.2 Приближенное решение для типичного случая

Рассмотрим случай, когда  $\epsilon\bar{\nu}_0 \ll 1$  и  $\bar{\nu}_3$  ненулевой порядка единицы, все остальные  $\bar{\nu}_j$  произвольны и порядка единицы. Это наиболее “типичный случай”, поскольку малость  $\epsilon$  — необходимое условие применимости кинематического приближения. Основные параметры свободной спирали в главном порядке по  $p = \epsilon\bar{\nu}_0 / (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)$ , как было показано в разделе 3.4 равны

$$\sigma = p^2\bar{\nu}_3 \ll 1, \quad \beta = -\arctan \bar{\nu}_3 \propto 1, \quad \omega_0 = -p\bar{\nu}_3 \ll 1, \quad R_0 = \frac{1-p}{p \sin \beta} \gg 1. \quad (4.31)$$

Форма спирали асимптотически описывается уравнением

$$\chi \approx (\omega_0^2 \rho^2 - 1)^{1/2} + \frac{\omega_0^3 \rho^2}{\omega_0^2 \rho^2 - 1} + O(\omega_0^2), \quad (4.32)$$

равномерно по  $\rho \in [R_0, +\infty)$ . Первый член здесь отвечает эвольвенте окружности. В главном порядке по  $p$ , вращательные регулярные ФО упрощаются до

$$\begin{aligned} \tilde{W}_0^{(V)}(\rho) &\approx \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot p\bar{\nu}_3^2 (1 + \bar{\nu}_3^2) \exp \left[ \frac{\bar{\nu}_3^2}{3p} + \frac{(\omega_0^2 \rho^2 - 1)^{3/2}}{3p\bar{\nu}_3} \right], \\ \tilde{W}_0^{(D)}(\rho) &\approx -\frac{\omega_0}{(\omega_0^2 \rho^2 - 1)^{1/2}} \tilde{W}_0^{(V)}(\rho), \end{aligned} \quad (4.33)$$

вращательные сингулярные ФО до

$$\begin{aligned}\hat{W}_0^{(V)} &\approx -\frac{\omega_0}{4\pi} \cdot (1 + \bar{\nu}_3^2), & \hat{W}_0^{(D)} &\approx \frac{\omega_0}{4\pi} \cdot p \frac{-\bar{\nu}_3 (\bar{\nu}_3^2 - 1) + \bar{\nu}_1 (\bar{\nu}_3^2 + 1)}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3}, \\ \hat{W}_0^{(0)} &\approx \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{\bar{\nu}_1}{-\bar{\nu}_3 (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}, & \hat{W}_0^{(1)} &\approx \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{p\bar{\nu}_1}{-\bar{\nu}_3 (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}, & \hat{W}_0^{(2)} &\approx \frac{\omega_0}{2\pi\epsilon\bar{\nu}_0}, \\ \hat{W}_0^{(3)} &\approx -\frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3}, & \hat{W}_0^{(4)} &\approx -\frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{p\bar{\nu}_3}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3}, & \hat{W}_0^{(6)} &\approx -\frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{p}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3},\end{aligned}\quad (4.34)$$

Сдвиговые регулярные ФО до

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1^{(V)}(\rho) &\approx \frac{p\bar{\nu}_3^2}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{\bar{\nu}_3^2}{3p} - 2i\bar{\nu}_3\right) \left[1 + i(\omega_0^2\rho^2 - 1)^{1/2}\right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{(\omega_0^2\rho^2 - 1)^{3/2}}{3\omega_0} - 2i(\omega_0^2\rho^2 - 1)^{1/2}\right], \\ \tilde{W}_1^{(D)}(\rho) &\approx -\frac{\omega_0}{(\omega_0^2\rho^2 - 1)^{1/2}} \tilde{W}_1^{(V)}(\rho),\end{aligned}\quad (4.35)$$

и сдвиговые сингулярные ФО до

$$\begin{aligned}\hat{W}_1^{(V)} &\approx -\frac{1 - i\bar{\nu}_3}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)}, & \hat{W}_1^{(D)} &\approx \frac{p(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)}, \\ \hat{W}_1^{(0)} &\approx \frac{-p\bar{\nu}_3(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)} \left[\frac{1 - i\bar{\nu}_3}{1 + \bar{\nu}_3^2} - \frac{1}{-\bar{\nu}_3(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}\right], \\ \hat{W}_1^{(1)} &\approx \frac{-p^2\bar{\nu}_3(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)} \left[\frac{1 - i\bar{\nu}_3}{1 + \bar{\nu}_3^2} - \frac{1}{-\bar{\nu}_3(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}\right], \\ \hat{W}_1^{(2)} &\approx \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}, & \hat{W}_1^{(3)} &\approx -\frac{p(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}, \\ \hat{W}_1^{(4)} &\approx \frac{-p^2\bar{\nu}_3(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}, & \hat{W}_1^{(6)} &\approx -\frac{p^2(1 - i\bar{\nu}_3)}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)}.\end{aligned}\quad (4.36)$$

Типичные графики наиболее важных регулярных компонент ФО,  $\tilde{W}_{0,1}^{(V)}$ , показаны на рисунке 4.1.

$\tilde{W}_1^{(V)}$  и  $\hat{W}_1^{(V)}$  — наибольшие среди сдвиговых ФО. Так что если имеется возмущение скорости распространения  $\tilde{V}$ , оно является главным фактором, определяющим дрейф. Если отбросить все остальные возмущения, то



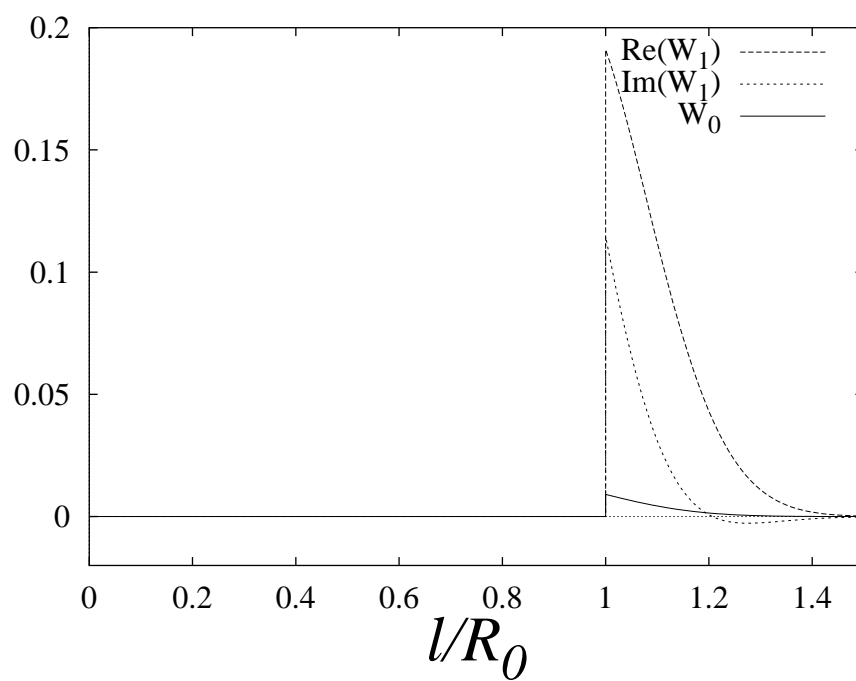


Рис. 4.1: Функции отклика  $\tilde{W}_{0,1}^{(V)}$ , определяющие чувствительность спиральной волны к возмущению скорости распространения плоской волны, как функции расстояния до центра спирали, нормированные на радиус ядра,  $l/R_0$ , при  $\bar{\nu}_0 = 0.6$  и  $p = 0.2$ .

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= \frac{\omega_0}{4\pi \cos^2 \beta} \oint \left\{ -\tilde{V}(R_0, \theta) + \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \zeta\right) \tilde{V}(R_0 + \zeta, \theta) d\zeta \right\} d\theta, \\
C_x - iC_y &= \frac{e^{i\beta}}{\pi} \oint \left\{ -\tilde{V}(R_0, \theta) \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} \zeta\right) \tilde{V}(R_0 + \zeta, \theta) d\zeta \right\} d\theta.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

#### 4.4.3 Неоднородность в виде линейного градиента

Рассмотрим возмущение в виде линейного градиента всех параметров в направлении оси  $x$ :

$$\tilde{D} = k_D \rho \cos \theta, \quad \tilde{V} = k_V \rho \cos \theta, \quad \tilde{\nu}_j = k_j \rho \cos \theta. \tag{4.38}$$

Это возмущение велико при больших  $x$ . Однако, так как ФО быстро убывают с расстоянием, то интерес представляет только возмущение в малой окрестности ядра. Другими словами, если рассматривать возмущение, описываемое (4.38) в окрестности ядра и исчезающее вне этой окрестности, то результат будет почти тем же что и для возмущения (4.38) на всей плоскости.

Подстановка (4.38) в (4.25) и (4.28) дает

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= 0, \\
C_x - iC_y &= \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{(1 + \bar{\nu}_3^2)^{1/2}} \left[ (1 - (1 + \bar{\nu}_3^2)^{-1/2}) R_0 k_V + k_D \right. \\
&\quad \left. + \left( \bar{\nu}_3 \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{1 + \bar{\nu}_3^2} + \frac{1}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3} \right) (\bar{\nu}_3 k_3 + p\bar{\nu}_4 k_4) + \epsilon \bar{\nu}_0 k_0 - \frac{1}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3} (\bar{\nu}_1 k_1 + p\bar{\nu}_3 \bar{\nu}_2 k_2 + p\bar{\nu}_6 k_6) \right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Нулевая девиация частоты просто означает, что влияния ускоряющей и замедляющей окрестностей ядра в первом порядке полностью компенсируют друг друга. Дрейф в основном определяется градиентом возмущения скорости, так как только  $k_V$  умножается на большой коэффициент  $R_0$ . За исключением этого коэффициента, скорость дрейфа в главном порядке является простой функцией единственного параметра  $\bar{\nu}_3$ . В частности, угол между скоростью дрейфа и градиентом скорости всегда примерно равен углу между касательной в кончике и радиус-вектором кончика.

#### 4.4.4 Неоднородность в форме ступеньки

Пусть среда состоит из двух областей с различными свойствами, разделенных прямой  $x = l$  (в ССО), и параметры среды в каждой из областей постоянны. В полярных координатах:

$$\tilde{D} = \delta D \operatorname{sgn}(l - \rho \cos \theta), \quad \tilde{V} = \delta V \operatorname{sgn}(l - \rho \cos \theta), \quad \tilde{\nu}_j = \delta \nu_j \operatorname{sgn}(l - \rho \cos \theta) \quad (4.40)$$

Снова, кажущееся противоречие с предположением о локальности возмущения устраняется тем, что только ближайшая окрестность ядра реально влияет на дрейф.

Тогда уравнения (4.25)–(4.28) дают девиацию частоты

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega}{\omega_0} \approx & \frac{2}{\pi(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3)} \arcsin \frac{l}{l_0} \left[ \frac{p}{2} (-\bar{\nu}_3(\bar{\nu}_3^2 - 1) + \bar{\nu}_1(\bar{\nu}_3^2 + 1)) \delta D \right. \\ & \left. + \bar{\nu}_1 \delta \nu_3 - p \frac{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_4}{\bar{\nu}_3} \delta \nu_4 + (\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3) \delta \nu_0 - \bar{\nu}_1 \delta \nu_1 - p \bar{\nu}_3 \bar{\nu}_2 \delta \nu_2 - p \bar{\nu}_6 \delta \nu_6 \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

и скорость дрейфа

$$\begin{aligned} C_x - iC_y \approx & -4 \frac{2^{1/2} p \bar{\nu}_3^2 [1 + i(\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{1/2}]}{\pi \omega_0^{3/2} l_0 (1 + \bar{\nu}_3^2)^{1/2} (\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{1/2}} \cdot \\ & \cdot \exp \left[ -\frac{\bar{\nu}_3^3 + (\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{3/2}}{3\omega_0} - 2i (\bar{\nu}_3 + (\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{1/2}) \right] \cdot \\ & \cdot \exp \left( \frac{\omega_0(l_0^2 - l^2)(\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \right) \Gamma \left( \frac{3}{2}, \frac{\omega_0(l_0^2 - l^2)(\omega_0^2 l_0^2 - 1)^{1/2}}{2} \right) \delta V \\ & + 4 \left( 1 - \frac{l^2}{l_0^2} \right)^{1/2} \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{\pi(1 + \bar{\nu}_3^2)} \delta V - \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{l^2}{l_0^2} \right)^{1/2} \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{1 + \bar{\nu}_3^2} p \cdot \\ & \left[ p \delta D + \left( \bar{\nu}_3 \frac{1 - i\bar{\nu}_3}{1 + \bar{\nu}_3^2} + \frac{1}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3} \right) (\bar{\nu}_3 \delta \nu_3 + p \bar{\nu}_4 \delta \nu_4) + \epsilon \bar{\nu}_0 \delta \nu_0 \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_3} (\bar{\nu}_1 \delta \nu_1 + p \bar{\nu}_3 \bar{\nu}_2 \delta \nu_2 + p \bar{\nu}_6 \delta \nu_6) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

где для краткости обозначено

$$l_0 = \max(l, R_0). \quad (4.43)$$

Пример зависимости  $C_x$  и  $C_y$  от  $l$  при возмущении  $\delta V$  показан на рисунке 4.2. Как из графика, так и из уравнения (4.42), можно заметить, что на интервале  $l < R_0$ , где обе компоненты скорости значительны, они снова примерно пропорциональны друг другу с коэффициентом  $\bar{\nu}_3$ .

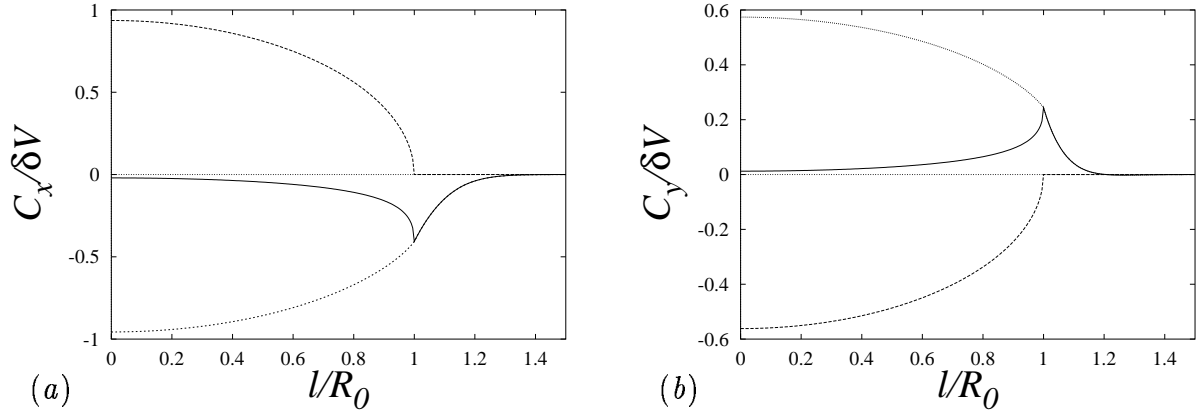


Рис. 4.2: Скорости дрейфа спиральной волны,  $C_x/\delta V$  и  $C_y/\delta V$ , вблизи неоднородности в виде ступеньки для скорости распространения плоской волны  $\delta V$ , нормированная на величину неоднородности, как функция расстояния от центра спирали до границы областей, нормированного на радиус ядра,  $l/R_0$ , при  $\bar{\nu}_0 = 0.6$  и  $p = 0.2$ . (a) Скорость в направлении ортогональном к линии неоднородности,  $C_x/\delta V$ , (b) скорость вдоль неоднородности  $C_y/\delta V$ . Сплошные линии – полная скорость; штриховая линия – вклад “сингулярной” компоненты (из уравнения движения кончика); пунктирная линия – вклад “регулярной” компоненты (из уравнения движения фронта).

## 4.5 Обсуждение

В кинематическом подходе возбудимая среда описывается несколькими параметрами, два из которых,  $V$  и  $D$ , определяют движение волнового фронта (*параметры фронта*), а остальные только движение кончика (*параметры кончика*). Нам удалось получить явные аналитические выражения для сдвига частоты и скорости дрейфа, как функционалов от возмущений параметров среды. Укажем некоторые важные свойства полученных результатов:

1. **Справедлив линейный принцип суперпозиции:** влияние неоднородности среды на частоту вращения спирали и скорость дрейфа представляют собой суммы вкладов от всех бесконечно малых областей с возмущенными параметрами. Вклад каждой области зависит от величины возмущения в этой области и (для параметров фронта) от расстояния от этой области до центра вращения.
2. При больших расстояниях, **влияние на частоту вращения убывает гипер-**

экспоненциально,  $\sim \exp(-(\rho/\Lambda)^3)$ , а на скорость дрейфа — гиперэкспоненциально с осцилляциями,  $\sim \exp(-(\rho/\Lambda)^3 - 2i\rho/\lambda_0)$ . Период этих осцилляций равен  $\lambda_0/2$ , то есть половине асимптотической длины волны свободной спирали.

3. Из всех параметров, спиральная волна наиболее чувствительна к неоднородности  $V$ . Пренебрегая влиянием остальных неоднородностей, влияние возмущения  $V$  можно описать простым уравнением (4.37), которое содержит только параметры, легко определяемые феноменологически. В частности, влияние  $V$  заметно даже на некотором (относительно малом) расстоянии от кончика.
4. Влияние возмущения  $D$  на дрейф спирали и девиацию частоты всегда много меньше влияния возмущения  $V$ , и значительно только если оно имеет место на кончике (регулярная компонента ФО равна нулю в главном порядке по  $p$ ).
5. Только восемь из сингулярных компонент ФО  $\hat{W}_{0,1}^{V,D,0,2}$  действительно различны, тогда как остальные можно выразить через них и параметры  $p$  и  $\sigma$ .

Некоторые из этих свойств можно объяснить эвристически и сравнить с похожими свойствами решений задач о низкоамплитудных возмущениях в КУГЛ [44] и о дрейфе при взаимодействии с границей в КУГЛ [42] и для “безъядерной” спирали в пределе Файфа для возбудимой среды [74]. Естественно, свойства 1–5 не тождественны свойствам дрейфа при взаимодействии с границей и при сравнении мы говорим о похожих а не об идентичных свойствах.

Свойство 1 справедливо для решений [42, 44] и, как мы думаем, для [74] (авторы не представили решения для границы произвольной формы, а ограничились некоторыми частными случаями). Тот факт, что малые возмущения действуют аддитивно не вызывает удивления. Однако, он не очевиден *a priori* для нелинейной задачи: например, в динамике доменных стенок в уравнении Ландау-Лифшица аддитивны *квадраты* возмущений [77].

Свойство 2 справедливо для [74]. Однако, в [42] и [44], как девиация частоты, так и скорость дрейфа имеют экспоненциальную зависимость от расстояния. Это различие можно интуитивно понять в терминах диффузии фазы автоволн [73, 54]. Основная идея состоит в том что возмущения влияют на события около ядра посредством излучаемых спиральных волн. Локально спиральные волны близки к плоским периодическим и могут рассматриваться как медленно меняющиеся автоволны [73]. Так что, распространение влияния возмущения к ядру можно представлять как диффузию фазы волн на фоне ее переноса в обратную сторону, который возможен только благодаря диффузии фазы [54]. Коэффициенты продольной и поперечной диффузии фазы могут значительно отличаться. В модели, рассмотренной в [42] оба коэффициента равны, тогда как в моделях, рассмотренных здесь и в [74], продольная диффузия отсутствует. Легко видеть что уравнение (4.11) соответствует эволюционному уравнению для фазы [54] с нулевой продольной диффузией. Причина этого состоит в том, что в рассматриваемом приближении последующая волна возбуждения не получает никакой информации от предыдущей и возбуждение может распространяться только вдоль волны. Таким образом, в КУГЛ возмущение может распространяться по прямой “против потока” волн излучаемых спиралью, так что ему приходится преодолевать только расстояние  $\rho$ . Напротив, в рассматриваемом случае, возмущения должны распространяться по значительно более длинному пути вдоль фронта волны, что и является причиной более быстрого убывания влияния возмущения с расстоянием.

Осцилляторную зависимость скорости дрейфа от расстояния можно объяснить в терминах так называемого резонансного дрейфа. Заметим, что возмущение значительно влияет на спираль только когда волна проходит через возмущенную область. Таким образом, это периодическое воздействие, синхронизованное с вращением спиральной волны. Теперь можно воспользоваться теми же аргументами, что и в случае резонансного параметрического дрейфа [36, 23, 52]. А именно, малые воздействия возмущения прикладываются на одной и той же фазе вращения спирали и потому складываются. Существенное отличие данного случая состоит в том, что влияние сильно зависит от расстояния до возмущенной области. В частности, направление дрейфа определяется

разностью фаз между вращением спирали и воздействием возмущения. Эта разность определяется расстоянием взятым по модулю  $2\pi$  умноженным на длину волны. Это объясняет периодическую зависимость направления дрейфа от расстояния до неоднородности и зависимость ее периода от длины волны спирали. Множитель  $1/2$  остается необъясненным и может считаться нетривиальным результатом теории. Наоборот, в КУГЛ все фазы колебаний в точности равны и воздействие неоднородности в этом смысле вообще не осциллирует.

Эти эвристические соображения позволяют предположить что (i) Гиперэкспоненциальные асимптотики не являются общими и ограничены только случаями с нулевой продольной диффузией автоволновой фазы, тогда как экспоненциальная асимптотика напротив более вероятна и (ii) осцилляторная зависимость направления дрейфа от расстояния имеет более общий характер и может отсутствовать только в системах с особыми внутренними симметриями.

Свойства 3–5 специфичны для данного приближения. Среди них наиболее интересным представляется свойство 3, так как оно может быть наиболее просто проверено в натурных и численных экспериментах. Некоторые шаги в этом направлении приняты в главе 5.

## Глава 5

# Сопоставление с результатами других теорий и численного эксперимента

### 5.1 Сравнение с методом свободной границы.

#### 5.1.1 Введение.

Кинематический подход идейно близок к методу свободной границы [3] в том, что оба рассматривают движение кривых: кривой волнового фронта (гребня волны) для первого, и переднего/заднего фронтов для последнего. Однако, условия их применимости различны, и рассуждения проводится в различных терминах. Например, кинематический подход может быть применим в случае, когда нет четко выраженного заднего фронта, как в случае с волнами возбуждения в сердечной мышце, или даже четкого переднего фронта. Другое различие этих подходов — отсутствие понятия обрыва волны в методе свободной границы, в то время как в кинематическом подходе оно играет важную роль. Так что перевод с одного языка на другой может быть неочевиден и даже не всегда возможен.

Однако имеются случаи когда оба подхода применимы, а их результаты сопоставимы. Таков к примеру случай “универсального предела” — спиральных волн с большим ядром в методе свободной границы [55, 57, 78]. Свойства решений там соответству-



ют феноменологической границе существования спиральных волн  $\partial R$  Винфри [45]. В кинематическом подходе главы 2 также рассматривается граница существования решений в виде спиральных волн, которая гипотетически отождествляется с  $\partial R$ . Однако, феноменологические свойства решений в этих двух подходах были различны, что создавало кажущееся противоречие между кинематическим подходом с одной стороны, и методом свободной границы, и, до некоторой степени, результатами численного моделирования, с другой стороны.

В этой главе мы изучаем свойства решений в кинематическом подходе более подробно, и устраняем вышеупомянутое противоречие. Коротко говоря, причина состоит в том, что граница существования спиральных волновых решений состоит из двух различных аналитических ветвей, и в [55, 57, 78] обсуждалась одна ветвь, в то время как в разделе 3.4 рассматривалась другая.

Мы описываем различные волны возбуждения неизменной формы около границы существования спиральных волн. Такие волны могут двигаться поступательно (трансляционные волны) или вращаться (спиральные волны). Трансляционные и спиральные волны существуют по разные стороны границы роторов. Мы описываем зависимость форм и кинематических параметров таких волн от параметров среды, и области существования различных типов волн в параметрическом пространстве. Результаты согласуются с полученными методом свободной границы [55, 57, 78]. Представленные результаты — более полные в том смысле, что рассматриваются вариации параметров, которые не выражаются в терминах теории свободной границы. Конечно, вопрос реализуемости таких значений параметров в какой-либо конкретной системе реакция-диффузия остается открытым, так как параметры кинематического описания пока не получены ни аналитически ни численно. Ответ на этот вопрос будет частично дан в разделе 5.3.

Структура этой части главы следующая. В разделе 5.1.2 мы обсуждаем математическую постановку задачи. В разделах 5.1.3 и 5.1.4 мы представляем решения в виде трансляционных и спиральных волн. Наконец, в разделе 5.1.5 мы сравниваем наши результаты с результатами метода свободной границы.

### 5.1.2 Постановка задачи.

Стационарная волна удовлетворяет уравнению (2.42). Для случая малой кривизны  $\kappa \ll 1$  оно может быть приведено к виду (2.44), где  $\omega$  — угловая скорость вращения для спиральных волн и  $\omega = 0$  для трансляционных волн. Граничное условие на бесконечности имеет вид (2.41). Граничные условия на кончике были сформулированы в главе 2. Их безразмерная форма для случая маленьких  $\kappa \ll 1$ ,  $\Omega \ll \epsilon$  и  $\kappa'(0) \ll \kappa(0)$  может быть представлена как

$$\kappa(0) = \alpha; \quad \eta\alpha + \kappa'(0) + \Omega = 0 \quad (5.1)$$

Здесь

$$\alpha = \epsilon \frac{\nu_0}{\nu_1}, \quad \eta = \gamma + \epsilon \frac{\nu_1 \nu_3 + \nu_0 \nu_4}{\nu_1} \quad (5.2)$$

В этом разделе мы будем рассматривать окрестность точки  $\epsilon = 0$ ,  $\gamma = 0$ , так что параметры  $\alpha \ll 1$ ,  $\eta \ll 1$ . Кроме того, полезно заметить, что, как следует из (2.40), скорость сокращения кончика равна

$$G/V_* = \eta \quad (5.3)$$

Таким образом, уравнение (2.44) с граничными условиями (2.41), (5.1) представляет собой задачу для неизвестной функции  $\kappa(\sigma)$  и неизвестного числа  $\Omega$ . Ее решения с  $\Omega \neq 0$  соответствуют вращающимся волнам, а решения с  $\Omega = 0$  — трансляционным волнам.

### 5.1.3 Трансляционные волны.

Рассмотрим случай  $\Omega = 0$ . Фазовые портреты уравнений (2.42) и (2.44) при  $\Omega = 0$  представлены на рисунке 5.1. Отметим, что в этом случае условие на бесконечности (2.41) не выделяет единственной фазовой траектории, так что остается возможность удовлетворить два граничных условия (5.1) на кончике.

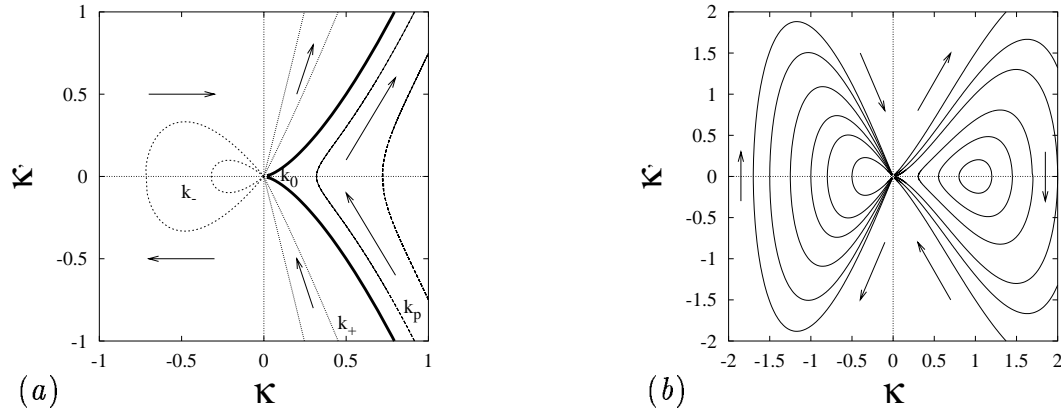


Рис. 5.1: (a) Фазовый портрет уравнения (2.44) при  $\Omega = 0$ . Показаны сепаратрисное решение (5.4) и по две траектории каждого из семейств (5.5)–(5.7). Фазовая плоскость разделена осями  $\kappa'$  и сепаратрисой  $\kappa_0$  на три области с различным поведением решений. Справа от сепаратрисы расположены решения  $\kappa_p$  вида (5.7). Для этих решений кривизна обращается в бесконечность на конечной длине, так что они не могут удовлетворять граничному условию на бесконечности (2.41). Слева от оси  $\kappa'$  расположены решения  $\kappa_-$  типа вогнутых волн (5.5). Они начинаются из точки  $\kappa = 0, \kappa' = 0$  при  $\sigma = -\infty$  и возвращаются эту точку при  $\sigma = +\infty$ . Наконец между осью  $\kappa'$  и сепаратрисой  $\kappa_0$  расположены решения  $\kappa_+$  вида выпуклых волн (5.6). Их поведение подобно поведению сепаратрисного решения, *т.е.* фазовые траектории идут от бесконечности к точке  $\kappa = 0, \kappa' = 0$ , при изменении  $\sigma$  от  $-A_2^+/A_1^+$  (или  $-A$  для  $\kappa_0$ ) до  $+\infty$  (нижняя часть) или от этой точки в бесконечность, при изменении  $\sigma$  от  $-\infty$  до  $-A_2^+/A_1^+$  ( $-A$  для  $\kappa_0$ ) (верхняя часть). (b) Фазовый портрет уравнения (2.42) для сравнения. Можно видеть, что при малых  $\kappa$  и  $\kappa'$  разница незначительна. Для больших  $\kappa > 0$  траектории (2.42) замкнуты, тогда как траектории (2.44) уходят в бесконечность.

Общие решения уравнения (2.44) при  $\Omega = 0$ :

$$\kappa_0(\sigma) = 2/(\sigma + A)^2 \quad (5.4)$$

$$\kappa_-(\sigma) = -2A_1^2/\cosh^2(A_1\sigma + A_2^-) \quad (5.5)$$

$$\kappa_+(\sigma) = 2A_1^2/\sinh^2(A_1\sigma + A_2^+) \quad (5.6)$$

$$\kappa_p(\sigma) = 2A_1^2/\cos^2(A_1\sigma + A_2) \quad (5.7)$$

С произвольными постоянными интегрирования  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2^\pm$ ,  $A_2$ . Так что, при  $\alpha = 0$  задача (2.44), (2.41), (5.1) имеет единственное решение в форме полуплоской волны  $\kappa = 0$ . Ниже мы рассматриваем  $\alpha \neq 0$ .

Все решения  $\kappa_{0\pm}$  удовлетворяют граничным условиям на бесконечности (2.41). Их графики на плоскости  $(\sigma, \kappa)$  и формы соответствующих волновых фронтов представлены на рисунке 5.2.

Решение (5.7) не удовлетворяет граничному условию (2.41). Кроме того, для этого решения  $\kappa_p \gg 1$ , когда  $A_1 l + A_2 \rightarrow \pi/2$ , и следовательно (2.44) — не удовлетворительное приближение для (2.42). Для полноты, мы приводим численное решение уравнения (2.42), соответствующее замкнутой фазовой траектории на рисунке 5.3.

Мы будем называть решение  $\kappa_-$  вогнутой, а решение  $\kappa_+$  выпуклой волной, в соответствии с выпуклостью или вогнутостью волнового фронта в направлении движения. Решению  $\kappa_0$  будет называться логарифмической волной, по причинам, которые будут ясны позже.

Произвольные постоянные в решениях  $\kappa_{0\pm}$  могут быть получены из граничных условий (5.1):

$$A = 2/\eta, \quad A_1 = \frac{1}{2}(\eta^2 - 2\alpha)^{1/2}, \quad \tanh A_2^- = \coth A_2^+ = \frac{\eta}{(\eta^2 - 2\alpha)^{1/2}} \quad (5.8)$$

вместе с

$$\eta^2 \geq 2\alpha \quad (5.9)$$

для существования трансляционных волн.

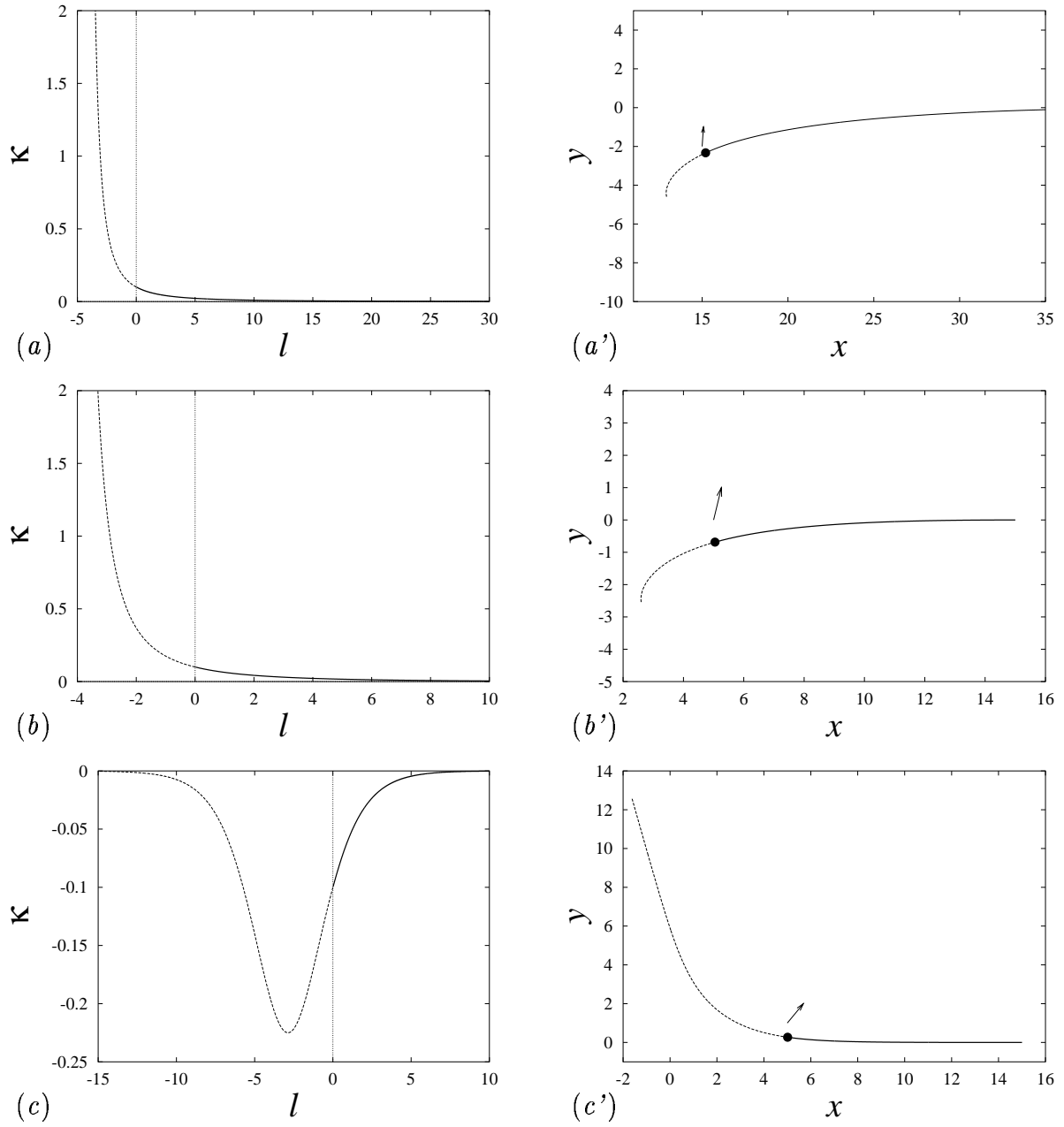


Рис. 5.2: Кривизна как функция длины вдоль фронта для трансляционных волн (5.4)–(5.6): (a)  $\kappa_0(\sigma)$  при  $\alpha = 0.1$ ; (b)  $\kappa_+(\sigma)$  при  $\alpha = 0.1, \eta = 0.5$ ; (c)  $\kappa_-(\sigma)$  при  $\alpha = -0.1, \eta = 0.5$ . Соответствующие формы фронта показаны на рисунках (a')–(c'). Точки на фронтах изображают кончики. Продолжения фронтов за точку обрыва (кончик) показано пунктиром. Стрелки — скорости распространения фронтов.

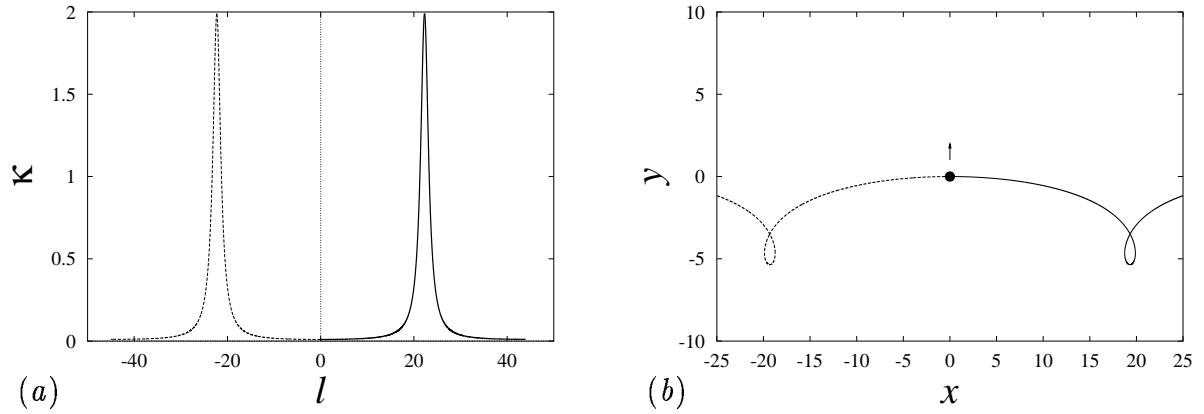


Рис. 5.3: (a) Кривизна как функция длины вдоль фронта полученная при численном решении уравнения (2.42) при  $\Omega = 0$ . В граничных условиях (6) положено  $\alpha = 0.01$  и  $\eta = 0$ . (b) Соответствующая форма фронта. Точка на фронте — кончик. Продолжение фронта за точку обрыва (кончик) показано пунктиром. Стрелка — скорость распространения волны.

Из фазового портрета на рисунке 5.1 видно, что трансляционные волны — это вогнутые волны  $\kappa_-$ , если  $\kappa(0) < 0$  и логарифмические  $\kappa_0$  или выпуклые волны  $\kappa_+$  (если они существуют) при  $\kappa(0) > 0$ . Логарифмическая волна  $\kappa_0$  соответствует равенству в (5.9), а выпуклая волна  $\kappa_+$  — строгому неравенству. Заметим, что решения  $\kappa_0$  и  $\kappa_+$  могут удовлетворять граничным условиям на бесконечности (2.41) только если  $\kappa'(0) < 0$ . Тогда, из (5.3), с учетом  $\Omega = 0$  и  $\kappa(0) > 0$ , можно заключить, что в этом случае  $\eta > 0$ . Принимая во внимание граничные условия (5.1), области существования трансляционных волн различных типов можно в итоге описать как:

$$\kappa = 0 \quad : \quad \alpha = 0 \quad (5.10)$$

$$\kappa_0 \quad : \quad \eta^2 = 2\alpha, \quad \eta > 0 \quad (5.11)$$

$$\kappa_- \quad : \quad \alpha < 0 \quad (5.12)$$

$$\kappa_+ \quad : \quad \eta^2 \geq 2\alpha > 0, \quad \eta > 0 \quad (5.13)$$

Условия (5.11), и (5.13) подразумевают, что логарифмические волны  $\kappa_0$  и выпуклые волны  $\kappa_+$  всегда сокращаются и никогда не прорастают, тогда как вогнутые  $\kappa_-$  и плоские волны  $\kappa = 0$  могут как сокращаться так и прорасти.

Форма фронта в Декартовых координатах может быть получена из уравнений в

натуральных координатах (5.4)–(5.6) при помощи соотношений

$$\phi(\sigma) = \int_0^\sigma \kappa_n(\xi) d\xi, \quad x(\sigma) = \int_0^\sigma \cos(\phi(\xi)) d\xi, \quad y(\sigma) = \int_0^\sigma \sin(\phi(\xi)) d\xi \quad (5.14)$$

Следовательно дальние асимптотики, при  $\sigma \rightarrow \infty$ , наших решений:

$$\begin{aligned} y_0 &\sim \text{const} + 2 \ln x \\ y_\pm &\sim \tan(2A_1)x \end{aligned} \quad (5.15)$$

Именно поэтому мы называли решение  $\kappa_0$  логарифмической волной. Заметим, что асимптотики (5.15) совпадают с дальними асимптотиками для “retracting waves” и “critical finger” [57]. Решение  $\kappa_-$  без обрыва совпадает с V-образными волнами, описанными в [59].

#### 5.1.4 Спиральные волны.

Фазовые портреты для уравнений (2.42) и (2.44) при  $\Omega \neq 0$  показаны на рис. 5.4.

Различия между ними незначительны, если  $\kappa$  и  $\kappa'$  малы.

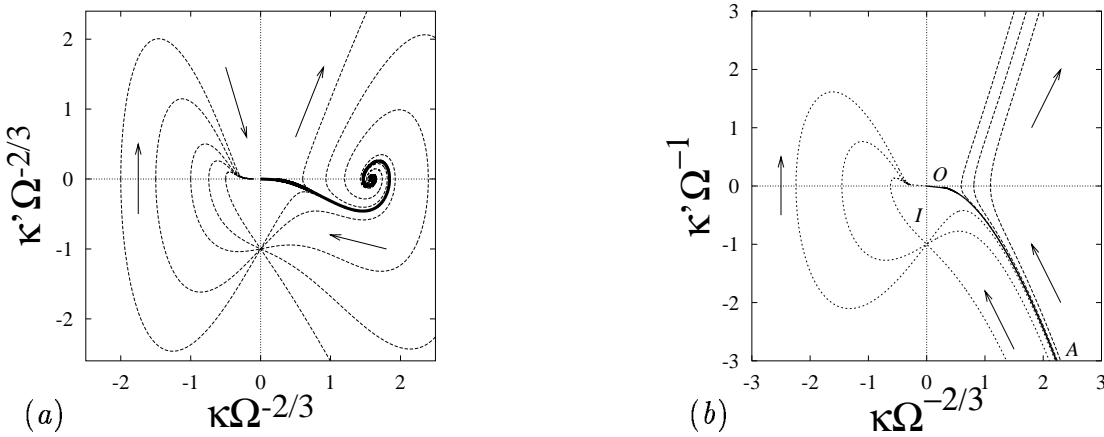


Рис. 5.4: (a) Фазовый портрет уравнения (2.42) при  $\Omega = 0.5$  в координатах  $(\kappa\Omega^{-2/3}, \kappa'\Omega^{-1})$ . (b) Фазовый портрет уравнения (2.44) в координатах  $(\kappa\Omega^{-2/3}, \kappa'\Omega^{-1})$ .  $O$  — неподвижная точка,  $I$  — неравновесная сингулярная точка. Жирная сплошная линия  $AO$  — сепаратриса.

Решения, соответствующие фазовым траекториям справа от сепаратрисы  $AO$  на рис. 5.4b достигают бесконечной кривизны на конечной длине и следовательно не удо-

влетворяют граничному условию на бесконечности (2.41). Соответствующие траектории на рис. 5.4 не стремятся к бесконечности, но кривизна становится очень большой,  $\kappa \gg 1$ , то есть кинематический подход формально неприменим. Для полноты, мы приводим форму этих решений в виде "изогнутой спирали" на рис. 5.5.

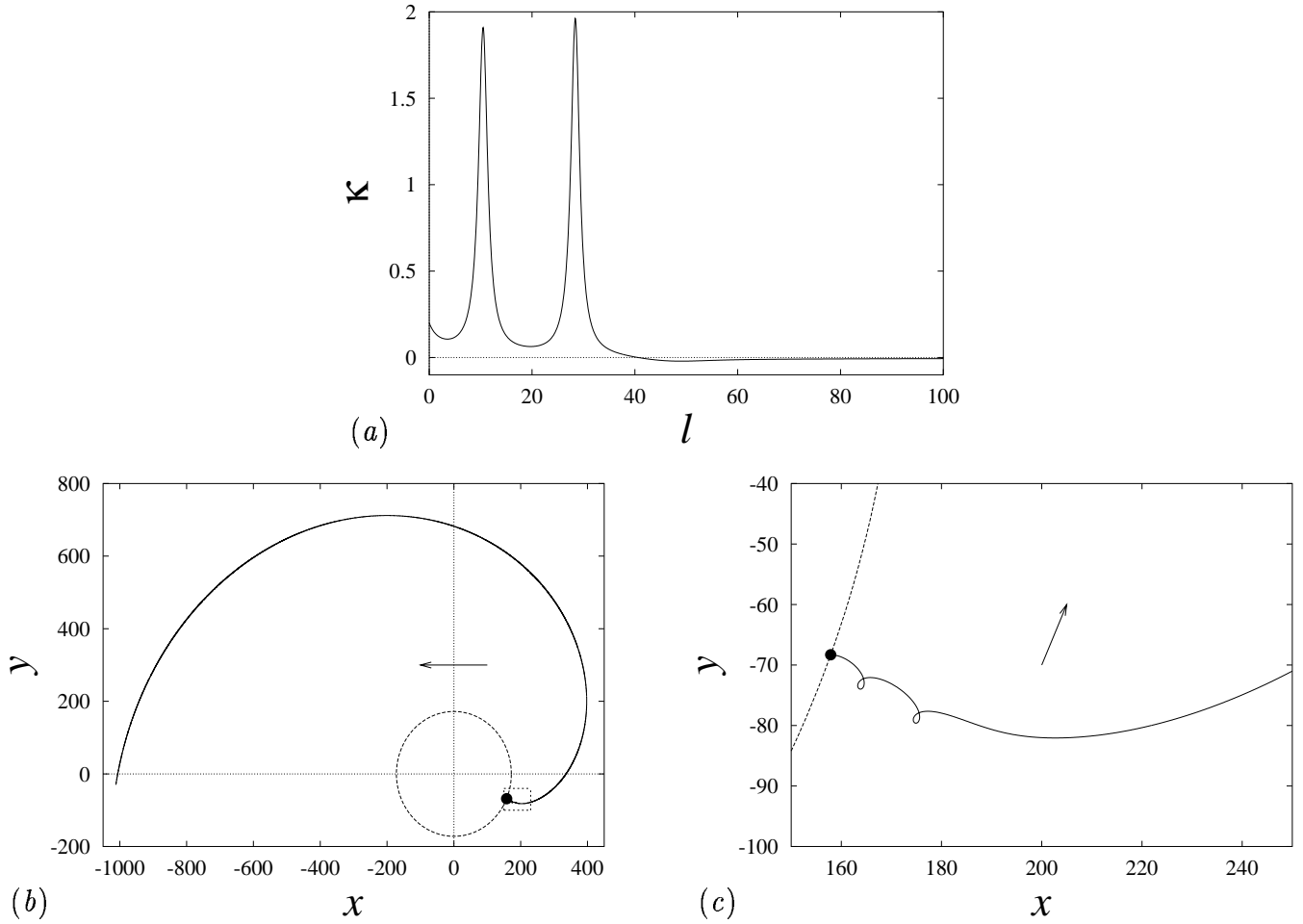


Рис. 5.5: (a) Кривизна как функция длины вдоль фронта для "изогнутой спирали" при  $\Omega = 0.005$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\eta = 0.35$ . (b) Соответствующая форма фронта. Спираль вращается против часовой стрелки, как показано стрелками. Центр вращения в начале координат. Кончик показан точкой. Штриховой круг — траектория кончика. (c) Увеличенное изображение штрихового прямоугольника на рисунке (b).

Имеются два различных типа решений, которые удовлетворяют граничному условию на бесконечности (2.41). Некоторые решения проходят через точку  $I$  на рис. 5.4 в



левую полуплоскость, и кривизна становится отрицательной. Это означает, что вдали от кончика, волны распространяются к центру вращения, а не от него. Мы будем называть эти волны скручивающимися спиралями. Заметим, что подобные образы наблюдались в численных экспериментах [27] **в ограниченной среде**. В неограниченной среде скручивающиеся спирали никогда не наблюдались и, скорее всего, неустойчивы. Для полноты, пример такого решения и соответствующая формы фронта представлены на рис. 5.6(b–b’), однако в дальнейшем такие решения не рассматриваются. . Другой тип решения — сепаратриса  $AO$  на фазовом портрете. В отличие от предыдущего типа, это решение положительно всюду и будет называться, раскручивающейся спиралью. График  $\kappa(\sigma)$  и формы фронта для этого решения показаны на рис. 5.6(a–a’). Далее мы рассматриваем только раскручивающиеся спирали, то есть мы заменяем граничное условие на бесконечности (2.41) более жестким:

$$\kappa(+\infty) = +0 \quad (5.16)$$

Все решения (2.44) могут быть описаны аналитически. Удобно сделать это в кусочном виде:

$$\kappa(\sigma) = \pm(9/2)^{1/3}\Omega^{2/3}\zeta^{2/3}(1 \pm Y^2(\zeta)), \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{3}\Omega^{1/2}|\sigma_0 - \sigma|^{3/2} \quad (5.17)$$

С верхними знаками и

$$Y(\zeta) = (qJ_{-2/3}(\zeta) - J_{+2/3}(\zeta)) / (J_{-1/3}(\zeta) + qJ_{+1/3}(\zeta)), \quad (5.18)$$

для  $\sigma \leq \sigma_0$ , или нижними знаками и

$$Y(\zeta) = (I_{+2/3}(\zeta) - qI_{-2/3}(\zeta)) / (I_{-1/3}(\zeta) - qI_{+1/3}(\zeta)) \quad (5.19)$$

для  $\sigma \geq \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  и  $q$  — постоянные интегрирования;  $J_p(x)$  и  $I_p(x)$  — функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя соответственно. Мы назовем эти части  $J$ -ветвь и  $I$ -ветвь соответственно; заметим, что они являются аналитическим продолжением друг друга. Эти решения удовлетворяют граничным условиям (5.16) только когда  $q =$

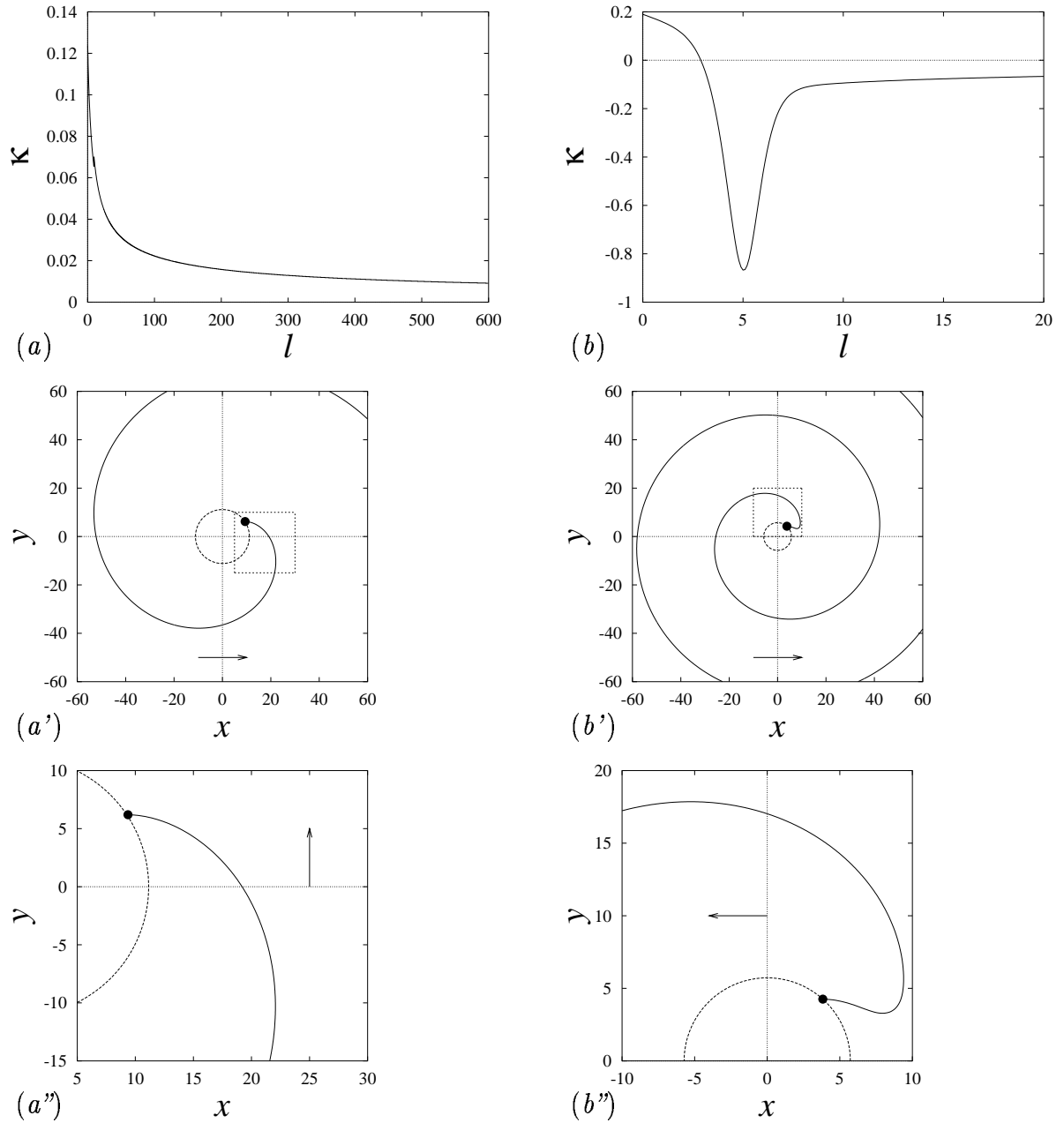


Рис. 5.6: Зависимость кривизны от длины вдоль фронта для (a) раскручивающейся и (b) скручивающейся спиралей и (a', b') формы их фронтов. Обе спирали вращаются против часовой стрелки (показанно стрелками) вокруг начала координат. Кончики показаны точками. Штриховые круги - траектории кончиков. Параметры спиралей: (a)  $\alpha \approx 0.13$ ,  $\eta \approx -0.67$ ,  $\Omega = 0.1$  (b)  $\alpha = 0.19$ ,  $\eta = -0.89$ ,  $\Omega = 0.2$ . (a'', b''): Увеличенные изображения штриховых линий прямоугольников на (a') и (b'). Раскручивающаяся спираль на рисунке (a) получена из аналитического решения (5.17), скручивающаяся (b) — результат численного интегрирования уравнения (2.42)

1. Решения с  $q < 1$  соответствует скручивающимся спиральям, а с  $q > 1$  соответствуют фазовым траекториям справа от сепаратрисы.

Точка отвечающая кончику ( $\sigma = 0$ ) может быть на  $J$ -ветви если  $\sigma_0 > 0$  (спиральная волна  $J$ -типа) или на  $I$ -ветви если  $\sigma_0 < 0$  (спиральная волна  $I$ -типа). Бесконечный хвост спирали в обоих случаях описывается  $I$ -ветвью. Так что спирали  $J$ -типа состоят из двух частей,  $J$ -ветвь вблизи кончика и  $I$ -ветвь в остальной части, тогда как  $I$ -спирали состоят только из  $I$ -ветви.

Дифференцируя (5.18), (5.19) по  $\zeta$  с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя, получим

$$Y'(\zeta) = \mp 1 - Y^2 - Y/(3\zeta) \quad (5.20)$$

Так что из (5.17) имеем

$$\kappa'(\sigma) = \Omega [3\zeta(1 \pm Y^2(\zeta)) - 1] \quad (5.21)$$

Из (5.1), (5.17), (5.21), получаем граничные условия на кончике для спиралей  $J$ -типа и  $I$ -типа:

$$\begin{aligned} \pm \frac{6^{2/3}}{2} (1 \pm Y_0^2) \zeta_0^{2/3} \Omega^{2/3} &= \alpha \\ 3(1 \pm Y_0^2) \zeta_0 \Omega Y_0 &= -\eta \alpha \end{aligned} \quad (5.22)$$

где  $Y_0 = Y(\zeta_0)$ ,  $\zeta_0 = \sqrt{2\Omega}/3 \cdot |\sigma_0|^{3/2}$  и  $Y(\zeta)$  — соответствующая функция из (5.18) или из (5.19).

Таким образом, задача о спиральной волне сведена к трансцендентной алгебраической системе (5.22) относительно  $\zeta_0$  и  $\Omega$ . Прочие кинематические параметры спиральной волны могут быть выражены через эти две величины. В частности, радиус ядра  $r_0$  и угол между касательной к фронту в кончике и направлением от центра вращения к кончику  $\phi$  определяются как

$$r_0 = [(1 - \alpha)^2 + \eta^2]^{1/2} / \Omega, \quad \tan \phi = \eta / (1 - \alpha) \quad (5.23)$$

Решение уравнений (5.22) с учетом положительности  $\Omega$  имеет вид:

$$\Omega = \frac{1}{6\zeta_0} (\pm 2\alpha \mp \eta^2)^{3/2} \quad (5.24)$$

где  $\zeta_0$  — наименьший положительный корень уравнения  $Y(\zeta_0) = Y_0$  в котором  $Y(\zeta)$  взята из (5.18) или (5.19) и

$$Y_0 = \mp \frac{\eta}{(\pm(2\alpha - \eta^2))^{1/2}} \quad (5.25)$$

Верхние или нижние знаки, и следовательно  $J$ - или  $I$ - тип спирали, выбираются так, чтобы выражение в правой части (5.25) было положительно. Так что  $J$ -спирали существуют если

$$\eta^2 - 2\alpha < 0 \quad (5.26)$$

а  $I$ -спирали, если

$$\eta^2 - 2\alpha > 0 \quad (5.27)$$

В последнем случае, имеется дополнительное необходимое условие, следующее из требования  $Y(\zeta) < -1$  вытекающего из (5.19) для  $q = 1^1$ ):

$$\eta < 0, \quad \alpha > 0 \quad (5.28)$$

Сравнивая (5.28) с (5.3), можно видеть, что  $I$ -спирали могут только прорасти, тогда как  $J$ -спирали могут как прорасти так и сокращаться.

Заметим наконец, что области существования скручивающихся спиралей  $I$ - и  $J$ - типа с  $q < 1$  описываются неравенствами (5.26)–(5.28) соответственно, также как и для раскручивающихся спиралей  $I$ - и  $J$ -типов.

---

<sup>1)</sup> Действительно, при  $q = 1$  функцию (5.19) можно переписать в виде  $Y(\zeta) = -K_{2/3}(\zeta)/K_{1/3}(\zeta)$ . Теперь, воспользовавшись интегральным представлением Зоммерфельда для функции Макдональда  $K_\nu(\zeta) = \int_0^\infty \exp(-\zeta \cosh \psi) \cosh(\nu \psi) d\psi$ , легко видеть, что при  $\nu > 0$  выполняются неравенства  $K_\nu(\zeta) > 0$  и  $\partial_\nu K_\nu(\zeta) = \int_0^\infty \psi \exp(-\zeta \cosh \psi) \sinh(\nu \psi) d\psi > 0$ . Так что  $K_\nu(\zeta)$  возрастает по индексу и значит  $K_{2/3}(\zeta) > K_{1/3}(\zeta) > 0$ , откуда  $Y(\zeta) = -K_{2/3}(\zeta)/K_{1/3}(\zeta) < -1$ .

### 5.1.5 Обсуждение.

Хотя решения с большими кривизнами и самопересечениями могли бы быть интересны с точки зрения движения абстрактных кривых, их можно проигнорировать в контексте волн возбуждения, поскольку большие кривизны нарушают применимость кинематической аппроксимации, и волны возбуждения во всех известных возбудимых средах сильно взаимодействуют друг с другом и не могут накладываться. Области существования для других типов решений представлены на рис. 5.7. Можно видеть, что области существования трансляционных и спиральных волн точно дополняют друг друга, то есть между ними нет никаких промежутков или перекрытий.

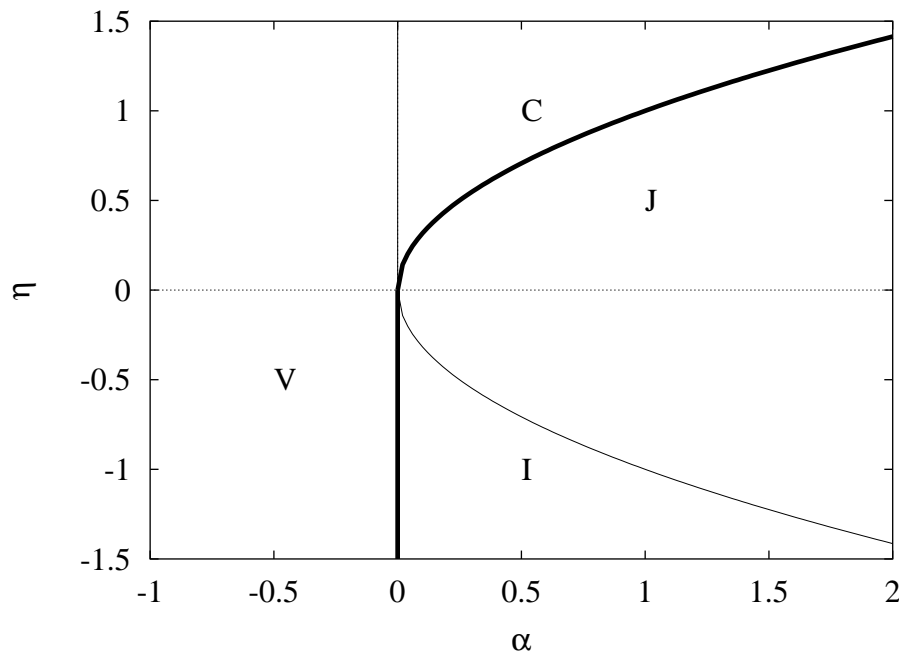


Рис. 5.7: Области существования спиральных и трансляционных волн в координатах  $(\alpha, \eta)$ . Сплошные линии — границы между областями. Жирная линия отделяет области спиральных ( $I$  и  $J$ ) и трансляционных ( $C$  и  $D$ ) волн. В области “ $J$ ”, где выполнено (5.26), существуют спиральные волны  $J$ -типа. Область “ $I$ ” определена условиями (5.27), (5.28). В ней существуют спиральные волны  $I$ -типа. Область “ $C$ ” определена условиями (5.13). В этой области существуют выпуклые трансляционные волны (5.6). В области “ $V$ ”, где  $\alpha < 0$ , существуют вогнутые трансляционные волны (5.5) (“ $V$ -образные волны”). Кроме того, на границе областей “ $J$ ” и “ $C$ ”, существуют логарифмические волны (5.4), а на линии  $\alpha = 0$  — полуплоские волны.

Границы между областями “ $J$ ” и “ $C$ ” ( $J/C$ -граница) и между “ $I$ ” и “ $V$ ” ( $I/V$ -граница) разделяют области трансляционных и спиральных волн. Их объединение может быть идентифицировано с феноменологической границей роторов Winfree  $\partial R$  [45], а одна из ее частей —  $J/C$ -граница — с границей между спиральными волнами и “retracting waves”, описанной в [78]. Подчеркнем, что  $J/C$ -граница описывается формулой (5.11) только в окрестности точки  $\alpha = 0$ ,  $\eta = 0$ . Дальнейшее ее поведение может служить предметом отдельного исследования, которое пока не проводилось. В отличие от нее,  $I/V$ -граница — это просто линия  $\epsilon = 0$ .

Сравним зависимость скорости сокращения трансляционной волны на расстоянии  $\delta$  от  $J/C$ -границы в параметрическом пространстве, когда это расстояние мало, для наших выпуклых волн и “retracting waves” в теории свободной границы. Прежде всего, определения скоростей сокращения в настоящей работе и в [55, 57, 78] несколько различаются. Здесь это проекция скорости кончика на *касательную к фронту в кончике*; далее так определенная скорость сокращения будет называться локальной. А в [55, 57, 78], это проекция скорости кончика на *асимптотическое направление фронта, вдали от кончика*. Ее мы будем называть глобальной скоростью сокращения. Мы сохраним обозначение  $G$  для локальной скорости, и обозначим глобальную как  $G^{glob}$ . Глобальная скорость сокращения может быть выражена через локальную как

$$G^{glob} = G \cos \Phi - V_n \sin \Phi \quad (5.29)$$

где  $V_n = V_*(1 - \kappa(0))$  — нормальная скорость кончика, а  $\Phi = \phi(\infty)$  — интегральный изгиб фронта. Обозначив  $\delta = \alpha - \eta^2/2$ , получим для наших решений:

$$\begin{aligned} G_0^{glob}/V_* &= O(\eta^2) \\ G_{\pm}^{glob}/V_* &= (2\delta)^{1/2} + O(\eta^3, \delta^{3/2}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Эти асимптотики согласуются для малых  $\eta$ , и совпадают для  $\eta = 0$ , с представленными в [55]:  $G = 0$  для “critical finger” и  $G \propto \delta^{1/2}$  для “retracting waves”. Так что наши решения в виде выпуклых волн  $\kappa_+$  можно идентифицировать с “retracting waves” в

теории свободной границы, а логарифмическая волна  $\kappa_0$  идентична “critical finger” в этой теории.

Наконец, из (5.24) можно получить асимптотику частоты вращения  $\Omega$  вблизи  $J/C$ -границы:

$$\Omega \approx \frac{\sqrt{2}}{3\zeta_*} \delta^{3/2} \quad (5.31)$$

где  $\zeta_*$  — наименьший положительный корень уравнения  $J_{-1/3}(\zeta_*) + J_{1/3}(\zeta_*) = 0$ . Аналогичная асимптотика вблизи  $I/V$ -границы, где роль расстояния до границы играет параметр  $\alpha$ , имеет в главном порядке по  $\alpha$  вид

$$\Omega \approx -\eta\alpha/8 \quad (5.32)$$

Асимптотика (5.31) совпадает с полученной в [78]:  $\Omega \propto \delta^{3/2}$ . Отметим, что в отличие от показателя степени, коэффициенты в асимптотиках (5.30), (5.31), (5.31) зависят от способа определения расстояния  $\delta$ . Например, если мы определим расстояние до  $J/C$ -границы как  $\tilde{\delta} = \sqrt{2\alpha} - \eta$  (то есть вдоль линии  $\alpha = \text{const}$ , а не  $\eta = \text{const}$ , как это было сделано выше), то вместо (5.31), получим

$$\Omega \approx \frac{2^{5/4}\alpha^{3/4}}{3\zeta_*} \tilde{\delta}^{3/2} \quad (5.33)$$

Подводя итоги, можно указать особенности трансляционных и вращающихся спиральных волн в возбудимой среде, которые совпадают с характерными чертами полученными в теории свободной границы [55, 57, 78]:

- Существует  $J/C$ -граница, множество коразмерности 1 в пространстве параметров среды, на котором существуют, трансляционные волны “логарифмической формы” (логарифмические волны/critical fingers).
- По одну сторону от  $J/C$ -границы, существуют только спиральные, но не трансляция волны.
- По другую сторону от нее не существует спиральных волн, но существуют трансляционные (выпуклые волны/retracting waves). Асимптотическая форма выпуклых/retracting волн линейная.

- Глобальная скорость роста кончика, то есть проекция скорости кончика на направление фронта вдали от кончика, для логарифмической волны/critical fingers равна нулю.
- Глобальная скорость роста выпуклых/retracting волн уменьшается с расстоянием  $\delta$  до  $J/C$ -границы в параметрическом пространстве как  $\propto \delta^{1/2}$ .
- С другой стороны от  $J/C$ -границы, частота вращения спиральных волн уменьшается с  $\delta$  как  $\propto \delta^{3/2}$ .

В разделе 3.4, окрестность линии  $\epsilon = 0$  рассматривалась, в предположении  $|\gamma| \sim 1$ . Это  $I/V$ -граница на диаграмме рис. 5.7. Свойства спиральных и трансляционных волн около этой границы отличаются от таковых около  $J/C$ -границы (см. раздел 3.4.2 относительно подробностей соответствующих решений), и не имеет аналогов в теории свободной границы. Поэтому они могут рассматриваться как **новые предсказания кинематической теории**.

Поскольку вывод кинематических уравнений в главе 2 был основан на очень общих соображениях симметрии и устойчивости, а также на предположениях о существовании некоторого типа решения, которое непосредственно никогда не проверялось, вопрос наблюдаемости  $I/V$ -границы в реальной системе реакция-диффузии не очевиден. Ясно, однако, что, если такое поведение удастся наблюдать, то не в системе типа ФитцХью-Нагумо с диспропорцией времен возбуждения и рефрактерности, с импульсами, имеющими крутые передние и задние фронты, так как такие системы охватываются теорией свободной границы. И то что большинство хорошо изученных моделей возбудимых систем принадлежат к этому классу объясняет, почему такое поведение пока не наблюдалось. Альтернативные примеры возбудимых систем также известны. Простая трехкомпонентная возбудимая система с крутым передним, но гладким задним фронтом была предложена еще в 1972 [79]. Известно также, что в уравнениях сердечной возбудимости возникают импульсы возбуждения с крутым передним, но не задним фронтом. Такую форму имеют импульсы возбуждения в моде-



ли Алиева-Панфилова, на которой удалось наблюдать характерную для  $I/V$ -границы асимптотику (см. раздел 5.3).

## 5.2 Сравнение традиционной и новой кинематики.

В разделе 2.1 мы получили уравнения движения, как для линии фронта волны возбуждения, так и для ее кончика, при помощи единой процедуры теории возмущений и используя только предположения о малости кривизны фронта и близости к многообразию автомодельных решений в виде полуволн в параметрическом пространстве систем. Эти уравнения движения получены здесь впервые. Уравнения движения зависят от коэффициентов, определяемых свойствами линеаризованного оператора на этих автомодельных решениях.

Интересно сравнить наши результаты с традиционной кинематической теорией [1, 2], построенной частично на основе асимптотического, а частично феноменологического рассмотрения. Традиционные уравнения движения кончика (1.15), (1.17) не совпадают и не являются частным случаем наших новых уравнений (2.33), поскольку (1.17) имеет другую функциональную форму. Однако, если ограничиться стационарными решениями, их можно рассматривать как частный случай. Насколько он специальный? Ответим на этот вопрос в терминах относительной коразмерности, то есть числа дополнительных уравнений для параметров, необходимых, чтобы получить этот случай. Если искать условия, когда решения в виде спиральных волн идентичны, то требуется единственное дополнительное условие (3.126), и в этом смысле, традиционный подход имеет относительную коразмерность один. Однако, как было отмечено в разделе 3.4.3, оно обеспечивает только формальное соответствие решений, и даже малые параметры в этих решениях имеют различный физический смысл.

Возможна и другая интерпретация вопроса о коразмерности, когда нас интересует условие совпадения *уравнений*, а не *решений*. Чтобы увидеть эти условия, мы при выводе (2.33) сохранили больше членов, чем это действительно требовалось; и некоторые члены не играли никакой роли из-за их дополнительной малости, обусловленной

медленностью изменения кривизны вдоль фронта, не учтенной анзацем (2.20). Рассмотрим теперь минимальную “обрезанную” систему, удовлетворяющую следующим требованиям:

- она содержит все члены, необходимые для получения универсального решения раздела 3.4.2;
- она содержит все члены, необходимые для получения “непрорастающего” решения раздела 3.4.3, формально эквивалентного “традиционным” спиральным волнам;
- она содержит все члены, необходимые для того, чтобы “традиционные” уравнения движения кончика (1.15), (1.18) оказались ее частным случаем.

Эта минимальная система имеет вид (мы опускаем символы  $O()$ )

$$\begin{aligned}\omega &= -DK' - GK \\ \omega &= \epsilon\lambda_0 - \lambda_1 K - \lambda_2 K' \\ G &= g_* + \epsilon\mu_0 + \mu_1 K\end{aligned}\tag{5.34}$$

Теперь, рассмотрим частный случай, определенный следующими четырьмя условиями

$$g_* = 0, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = D\tag{5.35}$$

и переобозначим параметры

$$K_c = -\epsilon\mu_0/\mu_1, \quad \gamma = -\mu_1\tag{5.36}$$

Тогда минимальная система примет вид

$$0 = K_c - K(0), \quad \omega = -DK'(0), \quad G = \gamma(K_c - K(0))\tag{5.37}$$

совпадающий с (1.18), (2.6), (1.15).

Таким образом, в терминах уравнений движения, традиционный случай имеет намного более высокую коразмерность четыре. Это означает, что, в то время как имеется

некая вероятность того что в конкретной системе условия (3.126) окажутся выполненными с разумной точностью, и стационарная спиральная волна будет иметь свойства, предсказываемые традиционными уравнениями, имеется намного меньшая надежда, что четыре условия (5.35) будут *skexfqyj* выполнены одновременно, даже приближенно. Так что для применимости традиционных уравнений необходимы специальные условия типа наличия резкого переднего и заднего фронтов. Применимость же этих уравнений для неустановившихся режимов еще более ограничена, так как в этом случае, “традиционные” уравнения не соответствуют новым.

## 5.3 Численное моделирование свободных спиралей.

### 5.3.1 Введение: постановка задачи и выбор объекта исследования.

Вопрос о том, какая из кинематических моделей (классическая [1, 2] или описанная в разделе 2.1), лучше описывает автоволны в исследуемой среде может быть решен при помощи численного эксперимента. Более точно, поскольку построенная нами модель, как было показано в разделе 5.2, является обобщением классической, то вопрос можно поставить так:

*Вблизи какого участка границы области существования спиральных волн (в терминологии раздела 5.1.5)  $J/C$ , близкой по свойствам к классической теории или  $I/V$ , обладающей новыми свойствами в параметрическом пространстве находится точка, представляющая конкретную РД-систему?*

Всю границу в целом для краткости будем называть по аналогии с Винфри границей роторов ( $\partial R$ ).

Для идентификации моделей воспользуемся следующим их свойством, которое было получено в разделе 5.1: асимптотики периода  $T$  и радиуса ядра  $R$  спиральной волны

по параметру  $\delta$ , определяющему уклонение среды в параметрическом пространстве от многообразия  $\partial R$  имеют вид

$$T = T_0 \delta^n; \quad R = R_0 \delta^n \quad (5.38)$$

Здесь  $T_0, R_0$  — константы в главном порядке по  $\delta$ , а  $n = -1.5$  в классике или  $n = -1$  в новой модели.

Если профиль импульса возбуждения имеет резкие передний и задний фронты, то применим метод свободной границы [3], а он, как было указано в разделе 5.1.5, эквивалентен описываемому кинематическому подходу на участке границы  $J/C$  (классическая кинематика). Поэтому, существенно неклассическое поведение может демонстрировать только модель, в которой хотя бы один из фронтов — плавный. Этому условию удовлетворяет, например, модель Алиева-Панфилова (1.11), демонстрирующая качественные характерные особенности возбуждения в сердечной мышце. Именно она была выбрана для численных экспериментов. Примеры профиля импульса возбуждения и формы спиральной волны в этой модели представлены на рисунке 5.8.

### 5.3.2 Методика, параметры и результаты экспериментов.

Была проведена серия экспериментов для сред с различными параметрами, взятыми так, чтобы в параметрическом пространстве они приближались к границе роторов, что определялось по росту периода вращения и радиуса ядра спирали. При этом параметры выбирались так, чтобы выполнялось выше указанное условие плавности фронтов.

Для каждой среды проводились одномерный эксперимент для определения скорости плоской волны и двумерный для определения параметров спиральной волны (периода и радиуса ядра) в этой среде. Для определения скорости в одномерной среде измерялось время прохождения импульса между двумя фиксированными точками среды.

В двумерном эксперименте регистрировались значения переменной  $u$  в точке  $(0,0)$  и координаты точек пересечения изолиний  $u = 0.5, v = 0.2$  на *каждом* шаге по времени. Данные регистрации заносились в файлы и, при последующей обработке, по ним

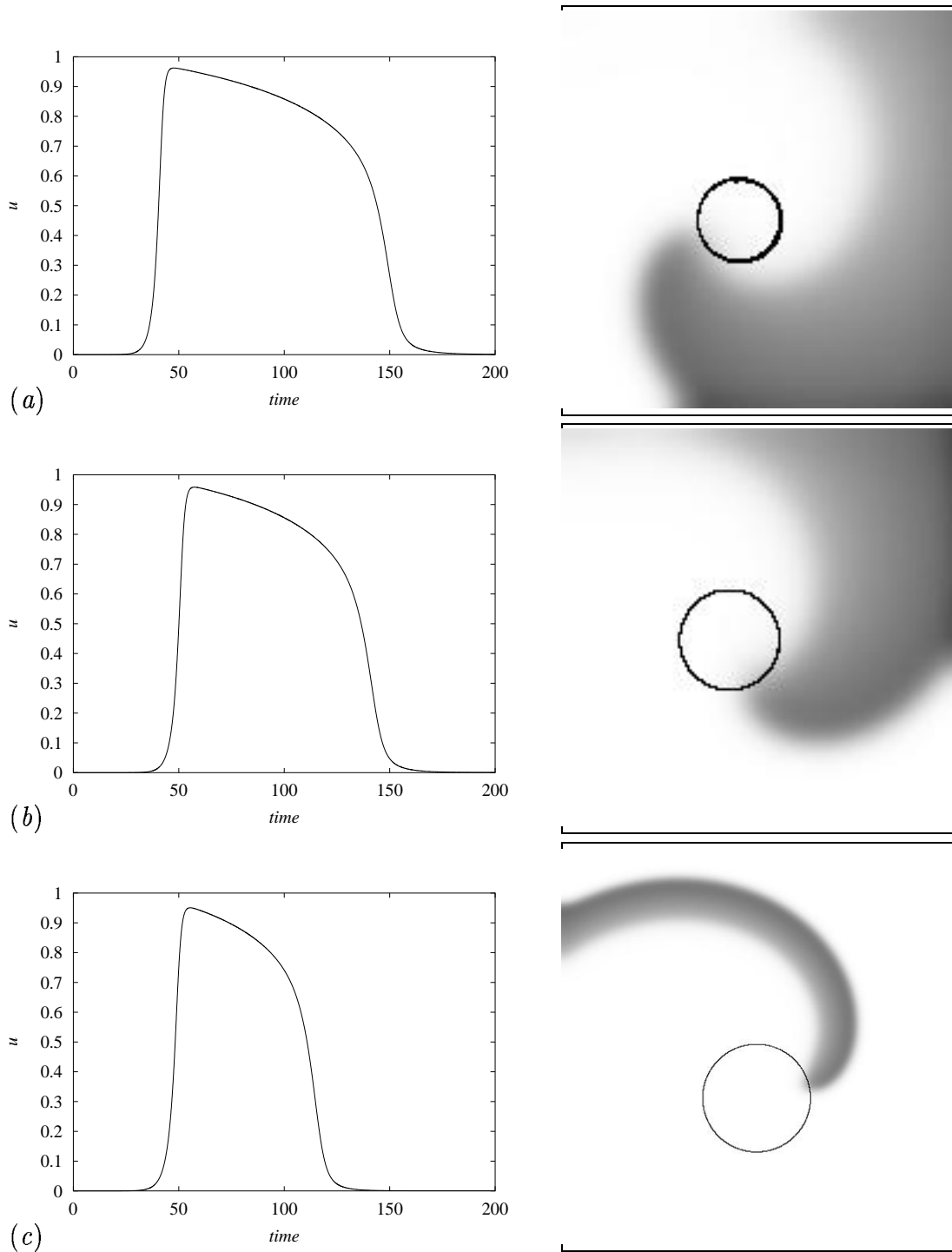


Рис. 5.8: Слева: профиль импульса возбуждения в модели Алиева-Панфилова, т.е. зависимость переменной  $u$  от времени в фиксированной точке  $(0,0)$  при прохождении через нее импульса. Справа: пространственное распределение переменной  $u$  в фиксированный момент времени для спиральной волны в той же модели. Более темные участки отвечают точкам с большим значением  $u$ . Параметры модели:  $k = 1$ ,  $\epsilon_0 = 0.01$ ,  $\mu_1 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 0.01$ ; (a)  $a = 0.085$ ; (b)  $a = 0.100$ ; (c)  $a = 0.130$ .

были вычислены период  $T$  спиральной волны и радиус ядра  $R$ . Радиус вычислялся по следующему алгоритму. Для вычисления центра ядра, было взято среднее значение координат кончика за один оборот, а затем радиус был вычислен, как среднее расстояние от этого центра до кончика за все время эксперимента. Дисперсия этого расстояния была принята за меру точности определения радиуса (точнее в таблицах в графе  $\Delta R$  приводится корень из дисперсии, умноженный на 3). Период определялся как промежуток времени между двумя последовательными моментами, в которые переменная  $u$  в точке  $(0,0)$  принимала одно и то же значение. Причем, поскольку для установления стационарной циркуляции спиральной волны в среде необходимо некоторое время, то при измерении периода надо дожидаться, когда результаты его последовательных измерений слабо отличаются друг от друга. В качестве погрешности измерения периода была принята разность между последовательными его измерениями.

Во всех экспериментах шаг по времени был равен 0.03, а по пространству 0.5. Некоторые параметры модели (1.11) были фиксированы:

$$k = 1, \quad \epsilon_0 = 0.01, \quad \mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.01, \quad (5.39)$$

а параметр  $a$  изменялся. Его значения и количество точек среды в каждом из двух направлений ( $N$ ) приведены в таблице 5.1 вместе с результатами экспериментов. В двух последних строках таблицы приведены результаты с одинаковым значением  $a$  и при разных размерах сетки. Это сделано для демонстрации независимости результатов от размера среды. В дальнейшем анализе использованы результаты полученные на сетке с  $N = 500$ .

В последнем столбце таблицы представлен параметр  $R/(TV_*)$ , который в пределах применимости кинематической теории зависит от расстояния до границы роторов линейно. Его график, полученный в данной серии экспериментов, представлен на рисунке 5.9

Из рисунка видно, что приблизительно линейным рост параметра  $R/(TV_*)$  является при изменении  $a$  в диапазоне от  $a = 0.100$  до  $a = 0.130$ . Поэтому дальнейший

Таблица 5.1: Параметры и результаты экспериментов для модели Алиева-Панфилова.

| $a$    | $N$ | $V_*$  | $T$     | $\delta T$ | $R$     | $\delta R$ | $R/(TV_*)$ |
|--------|-----|--------|---------|------------|---------|------------|------------|
| 0.0850 | 170 | 0.5484 | 153.349 | 3.6200     | 8.8406  | 0.5228     | 0.1051     |
| 0.0900 | 170 | 0.5396 | 167.478 | 2.1440     | 9.2139  | 0.5000     | 0.1020     |
| 0.0950 | 170 | 0.5306 | 182.396 | 1.1453     | 9.8114  | 0.5000     | 0.1014     |
| 0.1000 | 170 | 0.5215 | 201.681 | 0.6328     | 10.6665 | 0.5000     | 0.1014     |
| 0.1050 | 200 | 0.5123 | 226.962 | 0.3833     | 11.8702 | 0.5000     | 0.1021     |
| 0.1100 | 200 | 0.5028 | 260.811 | 0.2652     | 13.5703 | 0.5000     | 0.1035     |
| 0.1150 | 200 | 0.4931 | 307.328 | 0.1906     | 16.0051 | 0.5000     | 0.1056     |
| 0.1200 | 200 | 0.4831 | 368.568 | 0.7880     | 19.3866 | 1.3921     | 0.1089     |
| 0.1250 | 300 | 0.4728 | 472.501 | 0.0660     | 25.1019 | 0.5000     | 0.1124     |
| 0.1300 | 500 | 0.4620 | 631.453 | 0.0300     | 34.0659 | 0.5000     | 0.1168     |
| 0.1300 | 300 | 0.4620 | 628.744 | 0.2164     | 33.9955 | 0.6146     | 0.1170     |

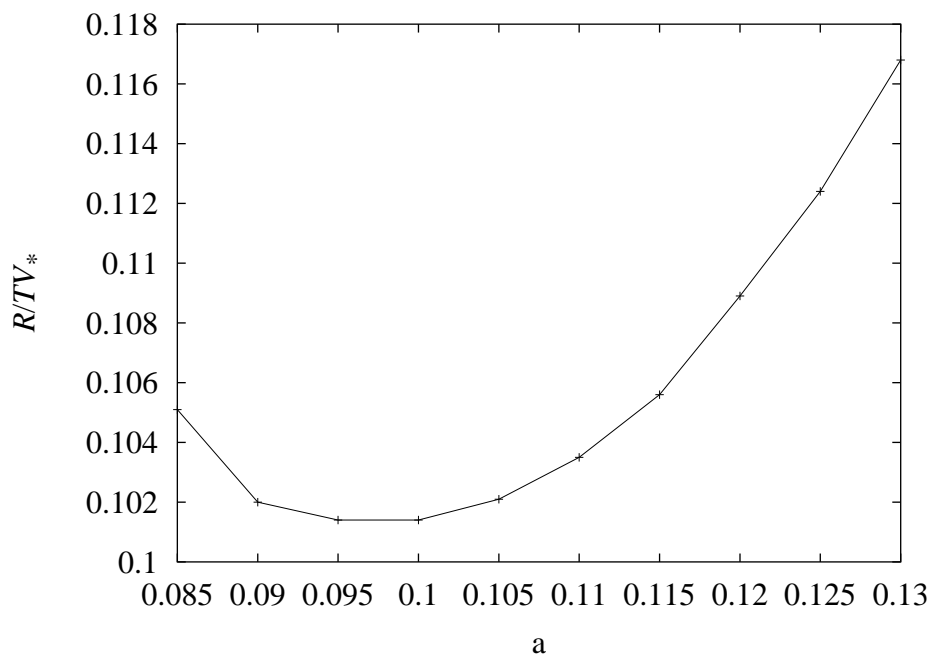


Рис. 5.9: Зависимость параметра  $R/(TV_*)$  от расстояния до границы роторов, полученная в численном эксперименте с моделью Алиева-Панфилова.

анализ экспериментальных данных был проведен именно для этого интервала значений параметра  $a$ .

Полученные результаты измерений периода вращения и радиуса спиральной волны, приведенные в таблице 5.1 фитировались при помощи программы GNUPLOT кривыми

$$y = C(a - a_0)^n \quad (5.40)$$

при  $n = -1$  и при  $n = -1.5$ . Здесь  $y$  – это  $T$  или  $R$ , а параметры  $C$  и  $a_0$  подбирались при фитировании. Кроме того, выполнялось фитирование теми же кривыми без фиксации параметра  $n$  (то есть  $n$  также подбирался при фитировании).

Результаты представлены в таблице 5.2 и на рисунке 5.10.

Таблица 5.2: Результаты фитирования.

| $y$ | $n$              | $C$               | $a_0$               | сумма квадратов |
|-----|------------------|-------------------|---------------------|-----------------|
| $T$ | $-1$             | $8.92 \pm 0.08$   | $0.1441 \pm 0.0002$ | 35.99           |
| $T$ | $-1.5$           | $2.48 \pm 0.08$   | $0.1551 \pm 0.0007$ | 264.323         |
| $T$ | $-1.07 \pm 0.05$ | $7 \pm 1$         | $0.146 \pm 0.001$   | 23.3092         |
| $R$ | $-1$             | $0.457 \pm 0.004$ | $0.1434 \pm 0.0002$ | 0.1305          |
| $R$ | $-1.5$           | $0.125 \pm 0.005$ | $0.1539 \pm 0.0008$ | 1.1963          |
| $R$ | $-1.01 \pm 0.06$ | $0.44 \pm 0.07$   | $0.144 \pm 0.001$   | 0.1286          |

В таблице в первой графе указано, какая величина понимается в данной строке под  $y$  в уравнении (5.40)), в последней графе дана сумма квадратов отклонений, достигнутая в конце работы алгоритма фитирования. Смысл остальных граф ясен из подписей. В третьей и шестой строках помещены результаты фитирования без фиксации параметра  $n$ .

Таким образом, легко видеть, что результаты экспериментов в данном случае лучше описываются асимптотикой, соответствующей обобщенной теории (участку  $I/V$  границы роторов на диаграмме 5.7).



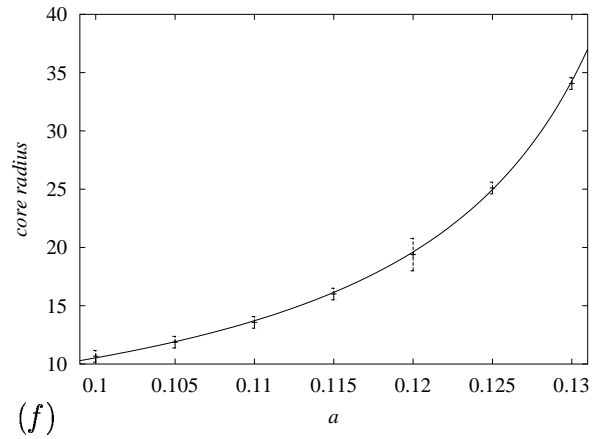
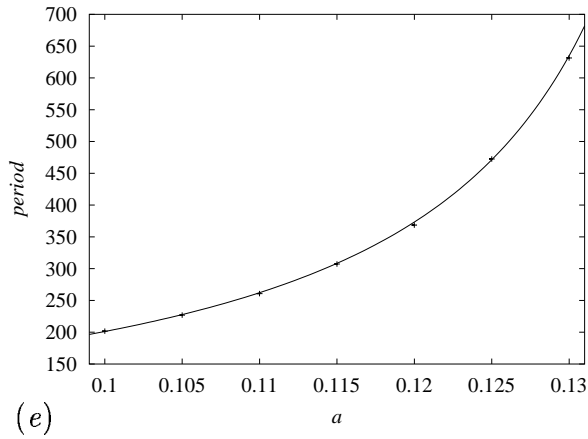
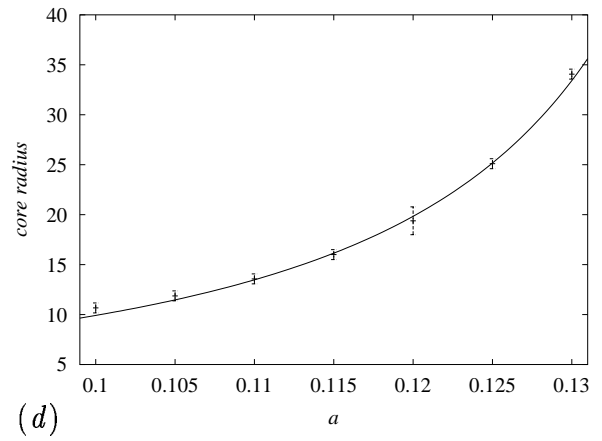
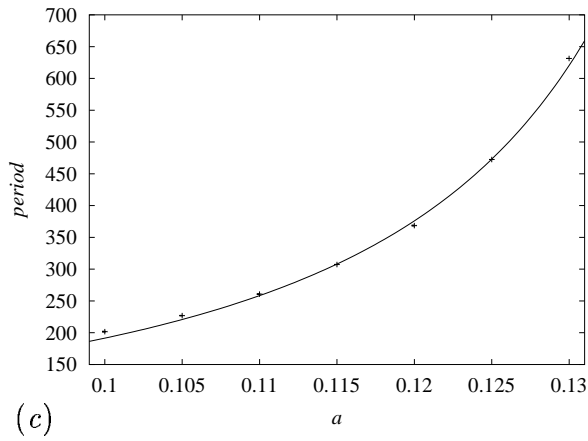
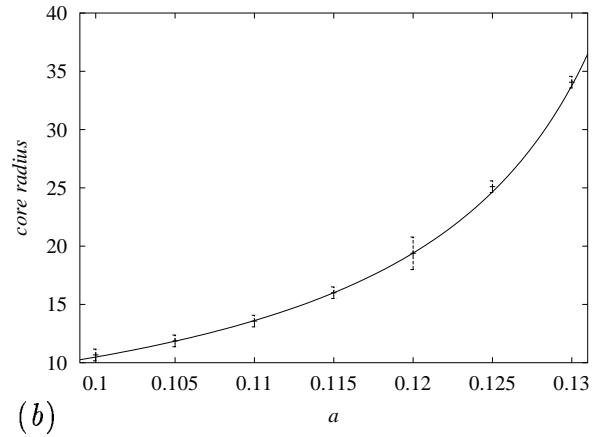
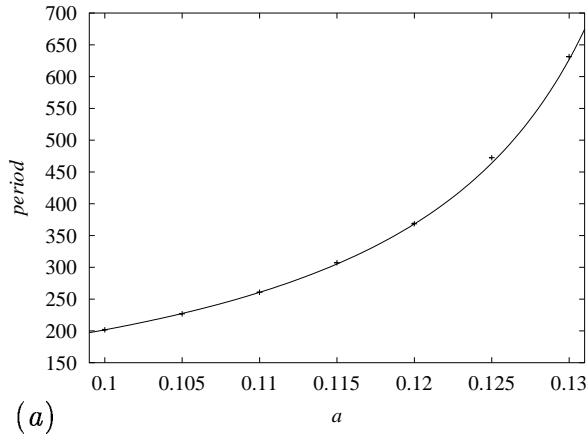


Рис. 5.10: Результаты фитирования кривыми (5.40). (a) Период  $T(a)$  при  $n = -1$ . (b) Радиус ядра  $R(a)$  при  $n = -1$ . (c) Период  $T(a)$  при  $n = -1.5$ . (d) Радиус ядра  $R(a)$  при  $n = -1.5$ . (e) Период  $T(a)$  без фиксации параметра  $n$ . (f) Радиус ядра  $R(a)$  без фиксации параметра  $n$ . На всех рисунках крестики показывают экспериментальные результаты, а сплошные линии — результаты фитирования. Для экспериментальных результатов показаны также их погрешности.

### 5.3.3 Эксперименты с моделью ФитцХью-Нагумо.

Для демонстрации системы с классическим поведением рассмотрим аналогичный эксперимент с кубичной моделью ФитцХью-Нагумо (1.8). Примеры профиля импульса возбуждения и формы спиральной волны в этой модели представлены на рисунке 5.11.

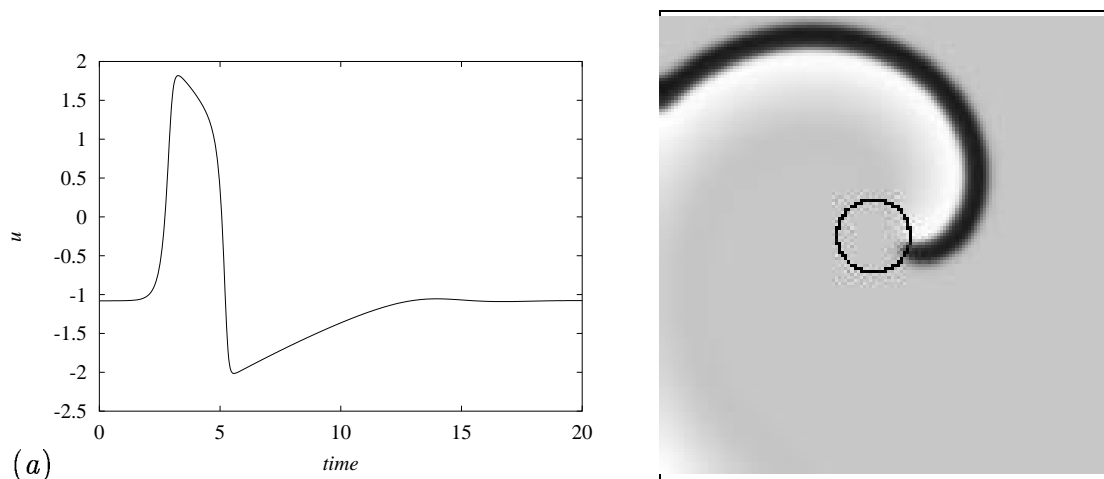


Рис. 5.11: Профиль импульса возбуждения и спиральная волна в модели ФитцХью-Нагумо. Аналогично рисунку 5.8. Параметры модели:  $\beta = 0.75$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.315$ .

Эксперимент проводился при помощи той же программы QUI. Шаги по временной переменной был снова выбран равным 0.03, а по пространственным 0.5. Были фиксированы параметры  $\beta = 0.75$ ,  $\gamma = 0.5$ . Значение параметра  $\epsilon$ , размеры сетки и результаты экспериментов представлены в таблице 5.3, структура которой аналогична таблице 5.1.

Здесь параметр  $R/(TV_*)$  изменяется линейно во всем рассматриваемом диапазоне. Результаты фитирования кривыми (5.40) (в этом уравнении теперь переменную  $a$  следует заменить на  $\epsilon$ ) представлены в таблице 5.4 и на рисунке 5.12.

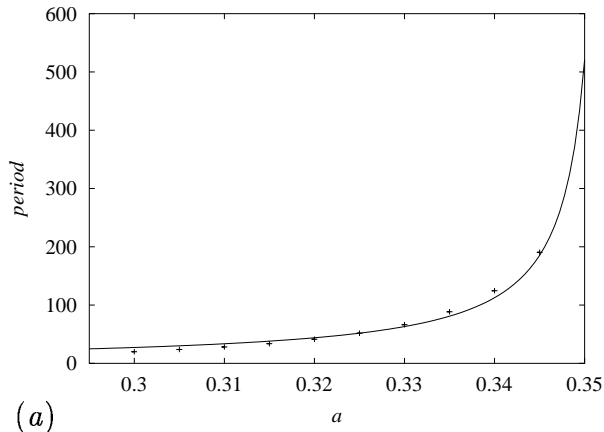
Таким образом, в этом случае результаты экспериментов лучше описываются асимптотикой, соответствующей классической теории (участку  $J/C$  границы роторов на диаграмме 5.7).

Таблица 5.3: Параметры и результаты экспериментов для модели ФитцХью-Нагумо.

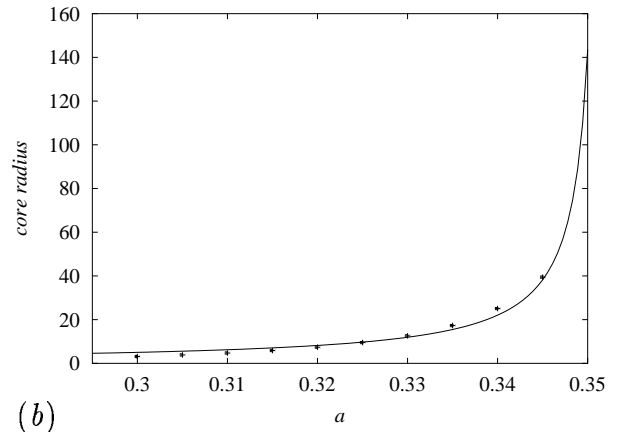
| $\epsilon$ | $N$ | $V_*$  | $T$    | $\delta T$ | $R$  | $\delta R$ | $R/(TV_*)$ |
|------------|-----|--------|--------|------------|------|------------|------------|
| 0.300      | 100 | 1.7385 | 19.92  | 0.03       | 3.1  | 0.5        | 0.0906     |
| 0.305      | 100 | 1.7165 | 23.74  | 0.03       | 3.9  | 0.5        | 0.0949     |
| 0.310      | 150 | 1.6945 | 28.11  | 0.03       | 4.7  | 0.5        | 0.0994     |
| 0.315      | 150 | 1.6707 | 33.82  | 0.03       | 5.9  | 0.5        | 0.1039     |
| 0.320      | 150 | 1.6498 | 41.37  | 0.03       | 7.4  | 0.5        | 0.1084     |
| 0.325      | 200 | 1.6268 | 51.68  | 0.03       | 9.5  | 0.5        | 0.1132     |
| 0.330      | 200 | 1.6030 | 66.38  | 0.03       | 12.6 | 0.5        | 0.1183     |
| 0.335      | 250 | 1.5796 | 88.55  | 0.03       | 17.3 | 0.5        | 0.1236     |
| 0.340      | 300 | 1.5552 | 124.65 | 0.03       | 25.1 | 0.5        | 0.1293     |
| 0.345      | 300 | 1.5334 | 190.44 | 0.03       | 39.5 | 0.5        | 0.1351     |

Таблица 5.4: Результаты фитирования для экспериментов с моделью ФитцХью-Нагумо.

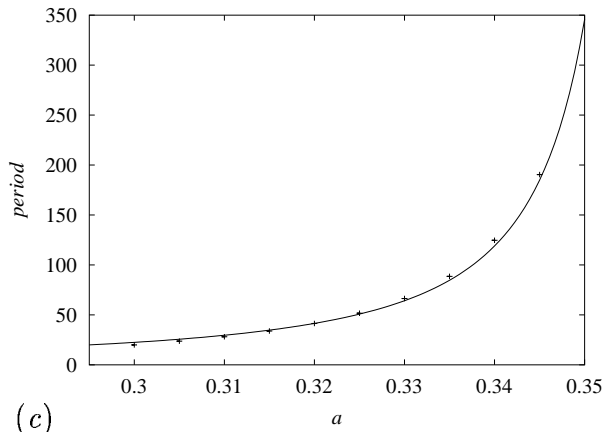
| $y$ | $n$              | $C$                 | $\epsilon_0$        | сумма квадратов |
|-----|------------------|---------------------|---------------------|-----------------|
| $T$ | -1               | $1.44 \pm 0.09$     | $0.3524 \pm 0.0006$ | 294.8510        |
| $T$ | -1.5             | $0.328 \pm 0.009$   | $0.3593 \pm 0.0003$ | 30.3923         |
| $T$ | $-1.90 \pm 0.03$ | $0.113 \pm 0.009$   | $0.146 \pm 0.001$   | 0.6379          |
| $R$ | -1               | $0.26 \pm 0.02$     | $0.3515 \pm 0.0007$ | 20.1507         |
| $R$ | -1.5             | $0.056 \pm 0.003$   | $0.3576 \pm 0.0005$ | 3.9849          |
| $R$ | $-2.31 \pm 0.06$ | $0.0067 \pm 0.0009$ | $0.3683 \pm 0.0008$ | 0.0576          |



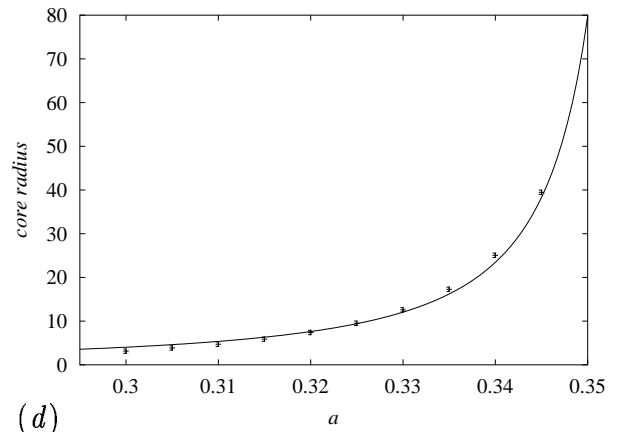
(a)



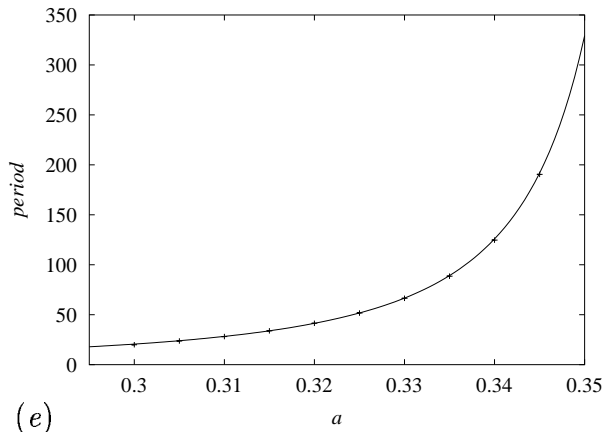
(b)



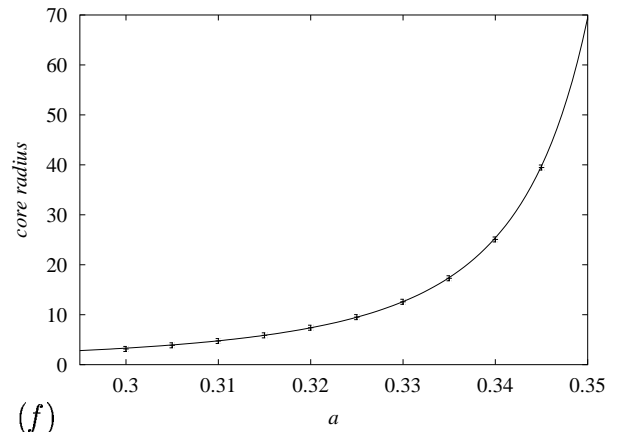
(c)



(d)



(e)



(f)

Рис. 5.12: Результаты фитирования кривыми (5.40) результатов экспериментов с моделью ФитцХью-Нагумо. (a) Период  $T(a)$  при  $n = -1$ . (b) Радиус ядра  $R(a)$  при  $n = -1$ . (c) Период  $T(a)$  при  $n = -1.5$ . (d) Радиус ядра  $R(a)$  при  $n = -1.5$ . (e) Период  $T(a)$  без фиксации параметра  $n$ . (f) Радиус ядра  $R(a)$  без фиксации параметра  $n$ . На всех рисунках крестики показывают экспериментальные результаты, а сплошные линии — результаты фитирования. Для экспериментальных результатов показаны также их погрешности.

### 5.3.4 Обсуждение.

Сформулированная в главе 2 обобщенная кинематическая модель представляла бы чисто теоретический интерес, если бы не удалось указать возбудимых средах, для которых применима эта обобщенная теория, но не применим ее частный случай — классическая кинематика. В этом разделе мы показали, что поведение характеристик модельной среды Алиева-Панфилова хорошо описывается именно обобщенной, а не классической теорией.

Более того, очерчены рамки применимости классической кинематики: они ограничены средами, в которых автоволновой импульс имеет резкий передний и задний фронты. Этот вывод следует из применимости при таких условиях метода свободной границы и эквивалентности этого метода с классической кинематикой.

Надо отметить, что один из важнейших в биофизике примеров возбудимых сред — сердечная мышца — не удовлетворяют указанному условию: автоволна в такой среде имеет плавный задний фронт. Форма импульса в сердечной ткани хорошо описывается моделью Алиева-Панфилова, для которой как раз необходимо использование обобщенной кинематики. Таким образом ранее общепринятое моделирование сердечной ткани при помощи модели ФитцХью-Нагумо оказалось не вполне корректным.

## 5.4 Численное моделирование дрейфа на ступенчатой неоднородности.

Мы сравнили предсказания раздела 4 с результатами численного моделирования для кусочно-линейной системы ФитцХью-Нагумо (1.9) с параметрами  $g_1 = g_2 = 1$ ,  $a_0 = -4.0$ ,  $a_1 = 0.98$ ,  $a_2 = -15$ ,  $u_1 = 0.018$  и ступенькообразной неоднородностью параметров  $\varepsilon_1$  от 3.0 (слева) до 1.68 (справа),  $\varepsilon_2$  от 0.1 до 0.06 и  $\varepsilon_3$  от 3.0 до 1.5. Моделирование выполнено при помощи программы QUI для среды размером  $30 \times 30$  с шагами 0.05 по времени и 0.8 по пространственным переменным. Результаты моделирования представлены на рисунке 5.13.

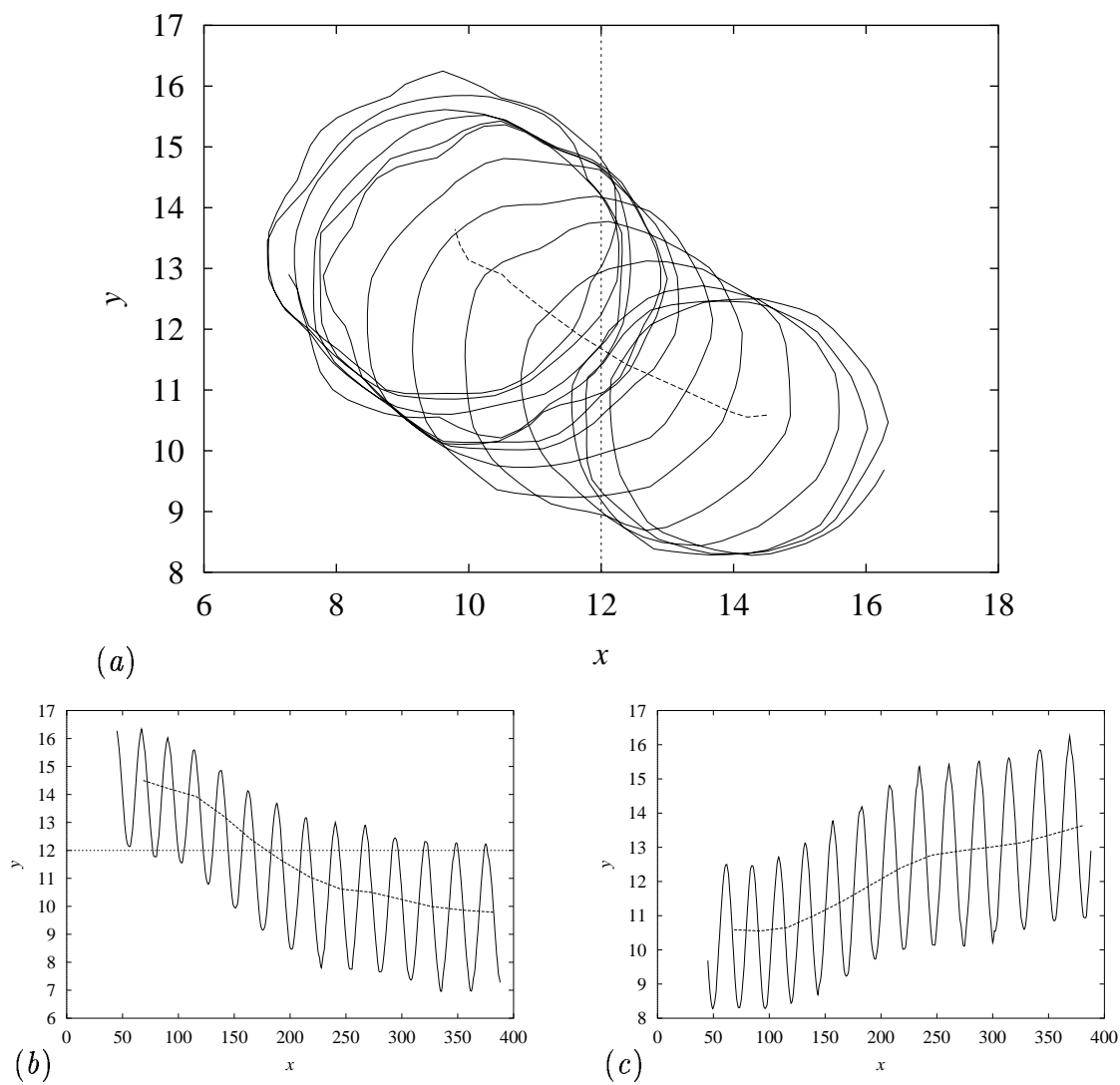


Рис. 5.13: (a) Траектория кончика (сплошная линия) и центра вращения (пунктирная линия) спиральной волны, в численном эксперименте с неоднородностью в виде ступеньки в системе ФитцХью-Нагумо (1.9). Вертикальный пунктир — граница областей. Координаты центра вращения определялись как координаты кончика, усредненные по периоду вращения. (b), (c)  $x$ - и  $y$ -координаты кончика и центра, как функции времени.

В согласии с асимптотической теорией, (i) заметный дрейф происходит только, когда ядро пересекает границу областей неоднородности, и при этом (ii) абсолютное значение скорости изменяется, но (iii) направление дрейфа сохраняется.

## Глава 6

# Прямой скрученный свиток.

### 6.1 Предварительные замечания.

Простейшим трехмерным обобщением плоской спиральной волны является *свиток*, представляющий собой как бы продолжение спиральной волны вдоль прямой ортогональной ее плоскости. Вращение теперь происходит не вокруг точки, а вокруг прямой – *нити свитка*. Изучение таких свитков является тривиальной задачей, так как полностью сводится к изучению спиральной волны на плоскости. Дальнейшими обобщениями являются свитки с искривленной нитью и свитки с изменяющейся вдоль нити фазой вращения – *скрученные свитки*. Производная фазы вращения вдоль нити называется *скрученностью* или *твистом*. В данной главе мы в качестве простейшего примера нетривиальной трехмерной задачи, рассматриваем скрученный свиток с прямой нитью и постоянным твистом. Для него удастся в некоторых достаточно общих предположениях получить формулы, выражающие зависимости скорости вращения и радиуса вращения от твиста. Задача решается в рамках трехмерного обобщения кинематического подхода (раздел 2.3) путем сведения ее к двумерной для сечения свитка плоскостью, ортогональной его нити.



## 6.2 Геометрия фронта.

Будем задавать поверхность фронта прямого скрученного свитка с твистом  $\gamma$  параметрически через параметры  $\phi$  и  $z$  в декартовых координатах:

$$x = \rho(\phi - \omega t - \gamma z) \cos \phi; \quad y = \rho(\phi - \omega t - \gamma z) \sin \phi; \quad z = z \quad (6.1)$$

где  $\rho(\phi)$  — некая плоская линия соответствующая фронту на плоскости. Мы предполагаем, что свиток вращается против часовой стрелки и порождает расходящиеся волны так что при больших  $\rho$ :

$$\rho' < 0 \quad (6.2)$$

Производные радиус-вектора поверхности фронта по параметрам  $\phi$  и  $z$  (касательные векторы) и единичный вектор нормали к этой поверхности в направлении распространения имеют вид:

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \rho' \cos \phi - \rho \sin \phi \\ \rho' \sin \phi + \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} -\gamma \rho' \cos \phi \\ -\gamma \rho' \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (6.3)$$

$$\mathbf{n} = -\operatorname{sgn}(\rho') \left[ \rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2 \right]^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} \rho' \sin \phi + \rho \cos \phi \\ -\rho' \cos \phi + \rho \sin \phi \\ \gamma \rho \rho' \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Кoeffициенты первой и второй квадратичных форм и символы Кристоффеля для поверхности (6.1) в обозначениях [80] имеют вид:

$$E = \rho^2 + \rho'^2; \quad F = -\gamma \rho'^2; \quad G = \gamma^2 \rho'^2 + 1 \quad (6.5)$$

$$L = \frac{\operatorname{sgn}(\rho')}{\Delta^{-1}} \left( \rho^2 - \rho \rho'' + 2\rho'^2 \right); \quad M = \frac{\operatorname{sgn}(\rho')}{\Delta^{-1}} \gamma \left( \rho \rho'' - \rho'^2 \right); \quad N = -\frac{\operatorname{sgn}(\rho')}{\Delta^{-1}} \gamma^2 \rho \rho'' \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \Delta^{-2} \rho' \left( \rho + \rho'' + 2\gamma^2 \rho \rho'^2 \right); & \Gamma_{11}^2 &= \Delta^{-2} \gamma \rho \rho' \left( \rho^2 - \rho \rho'' + 2\rho'^2 \right); \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\Delta^{-2} \gamma \rho' \left( \rho + \rho'' + \gamma^2 \rho \rho'^2 \right); & \Gamma_{22}^1 &= \Delta^{-2} \gamma^2 \rho' \rho'' \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Delta^{-2} \gamma^2 \rho \rho' \left( \rho \rho'' - \rho'^2 \right); & \Gamma_{22}^2 &= -\Delta^{-2} \gamma^3 \rho^2 \rho' \rho''
\end{aligned} \tag{6.7}$$

где

$$\Delta^2 \equiv EG - F^2 = \rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2 \tag{6.8}$$

Отсюда имеем среднюю кривизну поверхности (с учетом того, что она положительна для фронта, выпуклого в направлении движения):

$$H = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\rho') \frac{(\gamma^2 \rho^2 + 1)(\rho'^2 - \rho \rho'') + (\rho^2 + \rho'^2)}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{3/2}} \tag{6.9}$$

Из (6.1) и наличия винтовой симметрии задачи видно, что линия обрыва фронта имеет параметрическое уравнение (параметр  $z$ ):

$$x = \rho_0 \cos(\omega t + \gamma z); \quad y = \rho_0 \sin(\omega t + \gamma z); \quad z = z \tag{6.10}$$

здесь  $\rho_0$  — радиус ядра свитка. Так что геодезическая кривизна линии обрыва фронта

$$\kappa = \frac{\gamma^2 \rho \rho' \operatorname{sgn}(\rho')}{(\gamma^2 \rho^2 + 1)^{1/2} (\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{1/2}} \tag{6.11}$$

Единичный касательный вектор к кривой (6.10) равен

$$\sigma = (\gamma^2 \rho^2 + 1)^{-1/2} \begin{pmatrix} -\gamma \rho_0 \sin(\omega t + \gamma z) \\ \gamma \rho_0 \cos(\omega t + \gamma z) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

а единичный касательный вектор к поверхности фронта, ортогональный линии обрыва и направленный в сторону от оси свитка равен

$$\tau = \operatorname{sgn}(\rho') \left[ (\gamma^2 \rho^2 + 1) (\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2) \right]^{-1/2} \begin{pmatrix} (\gamma^2 \rho^2 + 1) \rho' \cos \phi - \rho \sin \phi \\ (\gamma^2 \rho^2 + 1) \rho' \sin \phi + \rho \cos \phi \\ -\gamma \rho^2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Поэтому вдоль вектора  $\tau$  имеем:

$$dz/d\phi = \rho(\tau \mathbf{e}_z)/(\tau \mathbf{e}_\phi) = -\gamma \rho^2 \quad (6.14)$$

где  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_\phi$  — единичные векторы в направлениях  $\phi$  и  $z$ .

Обозначая, как и в разделе 2.3, натуральный параметр вдоль геодезической ортогональной обрыву фронта через  $q$ , получим оператор производной вдоль этой геодезической, взятый в точке обрыва:

$$\begin{aligned} \partial_q &= \left( \frac{dq}{d\phi} \right)^{-1} \frac{d}{d\phi} = \text{sgn}(\rho') \left[ \rho^2 + (1 - \gamma z_\phi)^2 \rho'^2 + z_\phi^2 \right]^{-1/2} \frac{d}{d\phi} \\ &= \text{sgn}(\rho') \left[ (\gamma^2 \rho^2 + 1) (\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2) \right]^{-1/2} \frac{d}{d\phi} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Зная символы Кристоффеля (6.7), выпишем уравнение для геодезической на поверхности (6.1) в виде  $z = z(\phi)$ :

$$\begin{aligned} & \left( \rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2 \right) \frac{d^2 z}{d\phi^2} = \\ &= \gamma^2 \rho' \rho'' \left( \frac{dz}{d\phi} \right)^3 - \gamma \rho' \left( 2\rho'' + 2\rho + 2\gamma^2 \rho \rho'^2 - \gamma^2 \rho^2 \rho'' \right) \left( \frac{dz}{d\phi} \right)^2 \\ &+ \rho' \left( \rho'' + \rho + 4\gamma^2 \rho \rho'^2 - 2\gamma^2 \rho^2 \rho'' \right) \frac{dz}{d\phi} - \gamma \rho \rho' \left( \rho^2 - \rho \rho'' + 2 \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Отсюда, с учетом (6.14), для геодезической, ортогональной краю в точке обрыва, получим:

$$d^2 z / d\phi^2 = -2\gamma \rho \rho' (\gamma^2 \rho^2 + 1) \quad (6.17)$$

Обозначим радиус-вектор этой геодезической  $\mathbf{r}(\phi) = \mathbf{R}(\phi, z(\phi))$ . Легко убедиться, что для ее кривизны  $K$  имеем

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = -q_\phi^3 K \sigma \quad (6.18)$$

Так что кривизна в точке обрыва фронта, с учетом (6.14) и (6.17), равна:

$$K = -\text{sgn}(\rho') \frac{\rho^2 + 2\rho'^2(\gamma^2 \rho^2 + 1) - \rho \rho''(\gamma^2 \rho^2 + 1)^2}{(\gamma^2 \rho^2 + 1) (\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{3/2}} \quad (6.19)$$

Вычислим теперь производные векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{n}$  по времени в полугеодезической системе координат из раздела 2.3. Прежде всего заметим, что до сих пор параметризация по  $s$  была произвольна. Выберем ее теперь так, чтобы вдоль линии обрыва  $s$  был натуральным параметром, причем в качестве начала отсчета выберем точку  $z = 0$ . Пусть весь свиток вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки (это согласуется с (6.2)). Тогда при такой параметризации имеем:

$$\mathbf{R}_t = \omega \rho \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

$$\mathbf{n}_t = -\omega \operatorname{sgn}(\rho') \left( \rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \rho' \cos \phi - \rho \sin \phi \\ \rho' \sin \phi - \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Так что величины  $V$ ,  $G_2$  и  $J_2$  из (2.58) равны (при этом учтено, что направление  $\sigma$  надо выбирать так, чтобы  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{n}$  образовали правую тройку):

$$V = \mathbf{R}_t \mathbf{n} = \frac{\omega \operatorname{sgn}(\rho') \rho \rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{1/2}} \quad (6.22)$$

$$G_2 = \mathbf{R}_t \tau = \frac{\omega \operatorname{sgn}(\rho') \rho^2}{[(\gamma^2 \rho^2 + 1)(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)]^{1/2}} \quad (6.23)$$

$$J_2 = -\mathbf{n}_t \tau = \frac{\omega}{(\gamma^2 \rho^2 + 1)^{1/2}} \quad (6.24)$$

Причем формула (6.22) справедлива везде, а формулы (6.23), (6.24) только вдоль обрыва.

### 6.3 Постановка плоской задачи

Подставляя (6.9) и (6.22) в (2.82), получим уравнение движения поверхности фронта скрученного свитка:

$$\frac{\omega \operatorname{sgn}(\rho') \rho \rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{1/2}} = V_0 + D \operatorname{sgn}(\rho') \frac{(\rho^2 + \rho'^2) + (\gamma^2 \rho^2 + 1)(\rho'^2 - \rho \rho'')}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{3/2}} \quad (6.25)$$

Так как средняя кривизна  $H$  потребуется нам далее для постановки граничных условий для уравнения (6.25), то запишем ее без использования  $\rho''$ . Для этого просто подставим (6.22) в уравнение (2.82):

$$H = \frac{1}{2D} \left[ V_0 - \frac{\omega \operatorname{sgn}(\rho') \rho \rho'}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^{1/2}} \right] \quad (6.26)$$

Теперь, используя (6.15), вычислим  $H_q$ :

$$H_q|_{q=0} = -\frac{\omega}{2D} \frac{\rho'^4 + \rho^3 \rho''}{(\rho^2 + \rho'^2 + \gamma^2 \rho^2 \rho'^2)^2 (1 + \gamma^2 \rho^2)^{1/2}} \quad (6.27)$$

Рассмотрим сечение поверхности фронта плоскостью  $z = 0$ . В этом сечении он представляет собой кривую, которую будем далее называть *линией фронта*. Полярное уравнение линии фронта имеет вид  $\rho = \rho(\phi)$ , причем функция  $\rho(\phi)$  удовлетворяет уравнению (6.25). Введя безразмерные параметры

$$p = \frac{D}{V_0} \gamma; \quad \Omega = \frac{D}{V_0^2} \omega \quad (6.28)$$

перепишем уравнение (6.25) в переменных

$$r = \frac{V_0}{D} \rho; \quad \psi(r) = \frac{r}{r'} \quad (6.29)$$

получим:

$$\psi'(p^2 r^2 + 1) + (\psi^2 + 1) \psi / r + (p^2 r^2 + \psi^2 + 1)^{3/2} - \Omega r (p^2 r^2 + \psi^2 + 1) = 0 \quad (6.30)$$

Заметим, что при  $p = 0$  уравнение (6.30) совпадает с уравнением для свободного плоского ревербератора [3]. Как известно при  $\rho \rightarrow \infty$  свободный ревербератор имеет вид архимедовой спирали то есть для него должна быть справедлива асимптотика:

$$\psi(r) \approx kr, \quad r \rightarrow \infty \quad (6.31)$$

Подставляя в (6.30), получим, с учетом (6.2), коэффициенты в асимптотическом представлении (6.31):

$$k = -(\Omega^2 - p^2)^{1/2} \quad (6.32)$$

Запишем теперь  $G_2$ ,  $J_2$ ,  $H$ ,  $H_q$ ,  $K$ ,  $\kappa$  в безразмерных переменных (6.28), (6.29), выражая при этом  $\psi'$  и  $\psi''$  через  $\psi$  при помощи уравнения (6.30):

$$G_2 = V_0 \Omega r \psi [(p^2 r^2 + 1)(p^2 r^2 + \psi^2 + 1)]^{-1/2} \quad (6.33)$$

$$J_2 = V_0^2 D^{-1} \Omega (p^2 r^2 + 1)^{-1/2} \quad (6.34)$$

$$H = \frac{V_0}{2D} \left[ 1 - \frac{\Omega r}{(p^2 r^2 + \psi^2 + 1)^{1/2}} \right] \quad (6.35)$$

$$H_q = -\frac{V_0^2 \Omega}{2D^2} \cdot \frac{1 + \psi^2 - \Omega r^2 \psi + r \psi (p^2 r^2 + \psi^2 + 1)^{1/2}}{(p^2 r^2 + \psi^2 + 1)(p^2 r^2 + 1)^{3/2}} \quad (6.36)$$

$$K = \frac{V_0}{D} \cdot \left[ 1 - \frac{\Omega r (1 + p^2 r^2) - p^2 r \psi}{(p^2 r^2 + \psi^2 + 1)^{1/2} (p^2 r^2 + 1)} \right] \quad (6.37)$$

$$\kappa = \frac{V_0}{D} \cdot \frac{p^2 r}{(p^2 r^2 + \psi^2 + 1)^{1/2} (p^2 r^2 + 1)} \quad (6.38)$$

Подставляя (6.33)–(6.38) в уравнения (2.83), (2.84) получим внутренние граничные условия для уравнения (6.30):

$$\Omega(p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} + \epsilon \eta_1 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} (p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} \quad (6.39)$$

$$+ \eta_2 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} \left[ (p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \Omega r_0 + \frac{p^2 r_0 \psi_0}{p^2 r_0^2 + 1} \right] \\ - \eta_3 \Omega (p^2 r_0^2 + 1)^{-1} \left[ \frac{\psi_0^2 + 1 - \Omega r_0^2 \psi_0}{(p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2}} + r_0 \psi_0 \right] \\ + \eta_4 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} [(p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \Omega r_0] + \eta_5 \frac{p^2 r_0}{(p^2 r_0^2 + 1)^{1/2}} = 0 \quad (6.40)$$

$$- \Omega r_0 \psi_0 + \eta_6 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} (p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} \\ + \eta_7 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} \left[ (p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \Omega r_0 + \frac{p^2 r_0 \psi_0}{p^2 r_0^2 + 1} \right] \\ - \eta_8 \Omega (p^2 r_0^2 + 1)^{-1} \left[ \frac{\psi_0^2 + 1 - \Omega r_0^2 \psi_0}{(p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2}} + r_0 \psi_0 \right] \\ + \eta_9 (p^2 r_0^2 + 1)^{1/2} [(p^2 r_0^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \Omega r_0] + \eta_{10} \frac{p^2 r_0}{(p^2 r_0^2 + 1)^{1/2}} = 0$$

где  $r_0 = \rho_0 V_0 / D$  — безразмерный радиус ядра,  $\psi_0 = \psi(r_0)$  и введены безразмерные параметры среды:

$$\eta_1 = \lambda_0 D / V_0^2; \quad \eta_2 = \lambda_1 / V_0; \quad \eta_3 = \lambda_2 / D; \quad \eta_4 = \lambda_4 / V_0; \quad \eta_5 = \lambda_3 / V_0; \quad (6.41)$$

$$\eta_6 = \mu_0 / V_0; \quad \eta_7 = \mu_1 / D; \quad \eta_8 = \mu_2 V_0 / D^2; \quad \eta_9 = \mu_3 / D; \quad \eta_{10} = \mu_4 / D$$

Чтобы поставить задачу на фиксированном интервале, сделаем замену независимой переменной

$$x = r/r_0 \quad (6.42)$$

и введем обозначения

$$\mathcal{R} = \epsilon r_0, \quad \mathcal{W} = \Omega/\epsilon, \quad \mathcal{P} = p/\epsilon \quad (6.43)$$

Тогда уравнение (6.30) примет вид

$$\frac{\epsilon}{\mathcal{R}} \left[ \psi'(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 x^2 + 1) + \frac{\psi}{x}(\psi^2 + 1) \right] + (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 x^2 + \psi^2 + 1)^{3/2} - \mathcal{W} \mathcal{R} x (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 x^2 + \psi^2 + 1) = 0 \quad (6.44)$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной  $x$ , изменяющейся на  $[1, +\infty)$ . Препишем в этих же обозначениях граничные условия (6.39), (6.40) и (6.31):

$$\begin{aligned} & \epsilon \mathcal{W} (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} + \epsilon \eta_1 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} \\ & + \eta_2 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} \left[ (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \mathcal{W} \mathcal{R} + \frac{\epsilon \mathcal{P}^2 \mathcal{R} \psi_0}{\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1} \right] \\ & - \eta_3 \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1} \left[ \frac{\epsilon(\psi_0^2 + 1) - \mathcal{W} \mathcal{R}^2 \psi_0}{(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2}} + \mathcal{R} \psi_0 \right] \\ & + \eta_4 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} [(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \mathcal{W} \mathcal{R}] + \eta_5 \frac{\epsilon \mathcal{P}^2 \mathcal{R}}{(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} & - \mathcal{W} \mathcal{R} \psi_0 + \eta_6 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} \\ & + \eta_7 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} \left[ (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \mathcal{W} \mathcal{R} + \frac{\epsilon \mathcal{P}^2 \mathcal{R} \psi_0}{\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1} \right] \\ & - \eta_8 \frac{\mathcal{W}}{\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1} \left[ \frac{\epsilon(\psi_0^2 + 1) - \mathcal{W} \mathcal{R}^2 \psi_0}{(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2}} + \mathcal{R} \psi_0 \right] \\ & + \eta_9 (\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} [(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + \psi_0^2 + 1)^{1/2} - \mathcal{W} \mathcal{R}] + \eta_{10} \frac{\epsilon \mathcal{P}^2 \mathcal{R}}{(\mathcal{P}^2 \mathcal{R}^2 + 1)^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\psi(x) = -(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)^{1/2} \mathcal{R} x, \quad x \rightarrow \infty \quad (6.47)$$

и  $\psi_0 \equiv \psi(1)$ .

Итак, наша задача состоит из уравнения первого порядка (6.44), внешнего граничного условия (6.47) и внутренних граничных условий (6.45), (6.46). Неизвестными в

ней являются функция  $\psi(x)$  и числовые величины  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{R}$ . Так что число неизвестных совпадает с числом уравнений и значит задача поставлена корректно.

## 6.4 Приближенное аналитическое решение для случая общего положения.

На рисунке 6.1 показаны решения уравнения (6.44) при фиксированных  $\epsilon/\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{W}\mathcal{R}$  и различных  $\psi_0$ .

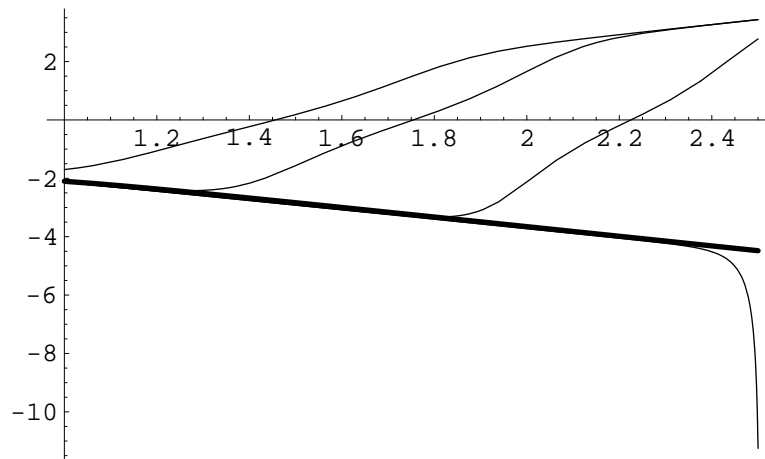


Рис. 6.1: Решения  $\psi(x)$  уравнения (6.44) при фиксированных  $\epsilon/\mathcal{R} = 0.3$ ,  $\mathcal{P}\mathcal{R} = 0.5$ ,  $\mathcal{W}\mathcal{R} = 1.7$  и различных  $\psi_0 = -1.7; -2.13; -2.135861; -2.13586150144$ . Жирная линия – кривая (6.48).

Видно, что решение, удовлетворяющее условию (6.31) является сепаратрисой, разделяющей кривые проходящие ниже нее и отвечающие ограниченной цилиндрической среде от кривых лежащих выше сепаратрисы и отвечающих свиткам с “обратным” вращением.

В соответствии с предположениями, сделанными при выводе трехмерных уравнений в разделе 2.3, заключаем, что  $\mathcal{W} \sim 1$ . А значит и  $\mathcal{R} = \omega \rho_0 / (V_0 \mathcal{W}) \sim 1$ .

Кроме того, из (6.47) ясно, что если решение существует, то для него безразмерная угловая скорость  $\mathcal{W}$  обязана быть больше безразмерного параметра  $\mathcal{P}$ . Будем предполагать, что  $\mathcal{P} \sim 1$ , то есть  $p \sim \epsilon$ .



Для того, чтобы решить уравнение (6.44) при фиксированных  $\mathcal{P} \sim 1$ ,  $\mathcal{R} \sim 1$  и  $\mathcal{W} \sim 1$ , разложим искомое решение по степеням малого параметра  $\epsilon \ll 1$ . В итоге, предполагая, что  $\psi$  отрицательна всюду, а не только при больших  $x$ , получим

$$\psi = - [(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 x^2 - 1]^{1/2} - \epsilon \frac{\mathcal{W}(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 x^2}{(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 x^2 - 1} + O(\epsilon^2) \quad (6.48)$$

На рисунке 6.1 показана также и кривая (6.48). Видно, что она хорошо аппроксимирует сепаратрисное решение вплоть до  $x = 1$ . Отметим, что уравнение (6.44) является сингулярно возмущенным и решение (6.48) применимо вблизи  $x = 1$  только если выполнено специальное условие

$$\mathcal{R}^2(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2) > 1, \quad (6.49)$$

которое, вообще говоря, сильнее, чем следующее непосредственно из (6.47) условие  $\mathcal{W} > \mathcal{P}$ , и при больших твистах решение (6.48) может оказаться применимым только начиная с некоторого  $x > 1$ , как например на рисунке 6.2. Однако, как будет показано далее для решения (6.48) и выполненных граничных условий на кончике (6.45), (6.46), условие (6.49) оказывается самосогласованным предположением.

Легко видеть, что решение (6.48) удовлетворяет условию (6.47). Подставляя его в (6.45), (6.46) при  $x = 1$  и предполагая, что все параметры среды  $\eta_k \sim 1$  (случай общего положения), получим систему уравнений для определения  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{W}$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}^2(\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} + \eta_1 \mathcal{W}(\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2 + 1) + \eta_2 \frac{\mathcal{W}^2}{((\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 - 1)^{1/2}} \\ & + \eta_4 \frac{(\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2 + 1)(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)}{((\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 - 1)^{1/2}} + \eta_5 \mathcal{P}^2 = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$((\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2)\mathcal{R}^2 - 1)^{1/2} + \eta_6(\mathcal{P}^2\mathcal{R}^2 + 1)^{1/2} = O(\epsilon) \quad (6.51)$$

Легко видеть, что при  $\mathcal{P} = 0$  данные уравнения имеют решения, совпадающие с учетом различий в обозначениях с решениями (3.125) для плоского случая. При этом, как видно из (6.51), решение может существовать только при  $\eta_6 \leq 0$ , что, как и в двумерном случае, соответствует прорастающей исходной полуплоской волне.

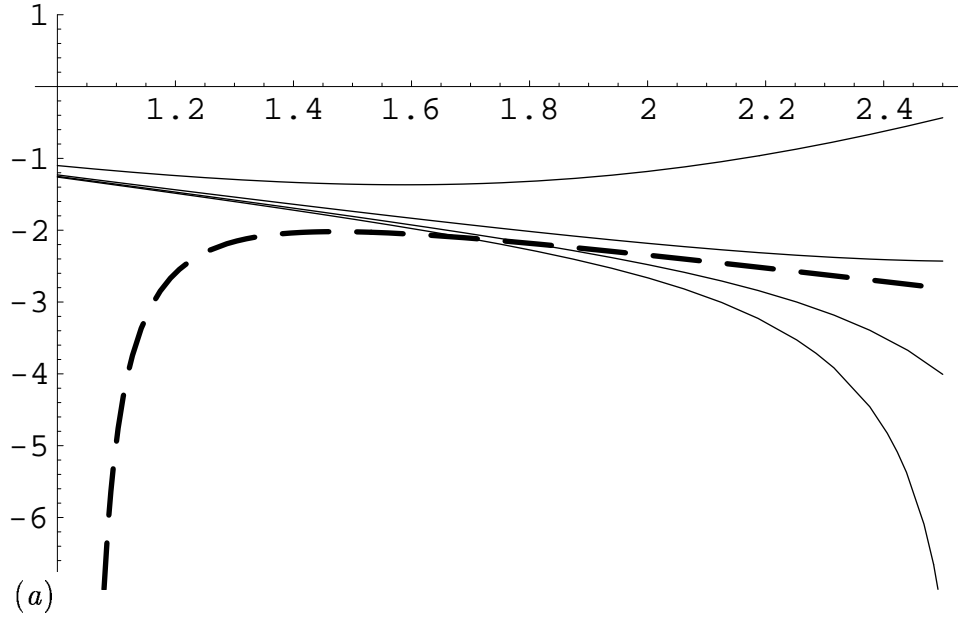


Рис. 6.2: Решения  $\psi(x)$  уравнения (6.44) при фиксированных  $\epsilon/\mathcal{R} = 0.3$ ,  $\mathcal{P}\mathcal{R} = 1.4$ ,  $\mathcal{W}\mathcal{R} = 1.7$  и различных  $\psi_0 = -1.1; -1.23; -1.25; -1.26$ . Жирная пунктирная линия – кривая (6.48).

Для системы (6.50), (6.51) можно указать решение в параметрической форме через параметр  $t \in [1, +\infty)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \mathcal{R}_\infty^{-2} \frac{t^6(t^2 - 1)}{[t^3 - \alpha t + \beta(t^2 - 1)]^2}, \\ \mathcal{W} &= \mathcal{W}_\infty \frac{t^4}{t^3 - \alpha t + \beta(t^2 - 1)}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_\infty \frac{|t^3 - \alpha t + \beta(t^2 - 1)|}{t^3} \end{aligned} \quad (6.52)$$

где для краткости обозначено

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\infty &= \frac{|\eta_6^2 + 1 - \eta_4\eta_6|}{|\eta_1|(\eta_6^2 + 1)^{1/2}}, \quad \mathcal{W}_\infty = \frac{-\eta_1(\eta_6^2 + 1)}{\eta_6^2 + 1 - \eta_4\eta_6}, \\ \alpha &= \frac{\eta_2(\eta_6^2 + 1) + \eta_4}{\eta_6(\eta_6^2 + 1 - \eta_4\eta_6)}, \quad \beta = \frac{\eta_5}{\eta_6^2 + 1 - \eta_4\eta_6} \end{aligned} \quad (6.53)$$

Отметим, что  $\mathcal{W}^2/\mathcal{P}^2 = (\eta_6^2 + 1)t^2/(t^2 - 1) > 1$ ,  $\mathcal{R}^2(\mathcal{W}^2 - \mathcal{P}^2) = \eta_6^2 t^2 + 1 > 1$ , так что условие применимости решения (6.48) вплоть до  $x = 1$  оказывается выполненным и применения сингулярной теории возмущений для решения уравнения (6.44) не требуется.

Понятно что вид зависимостей  $\mathcal{W}(\mathcal{P})$  и  $\mathcal{R}(\mathcal{P})$  полностью определяется параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , тогда как  $\mathcal{R}_\infty$  и  $\mathcal{W}_\infty$  влияют только на масштаб. На рисунке 6.3 приведены

графики этих зависимостей для некоторых значений параметров.

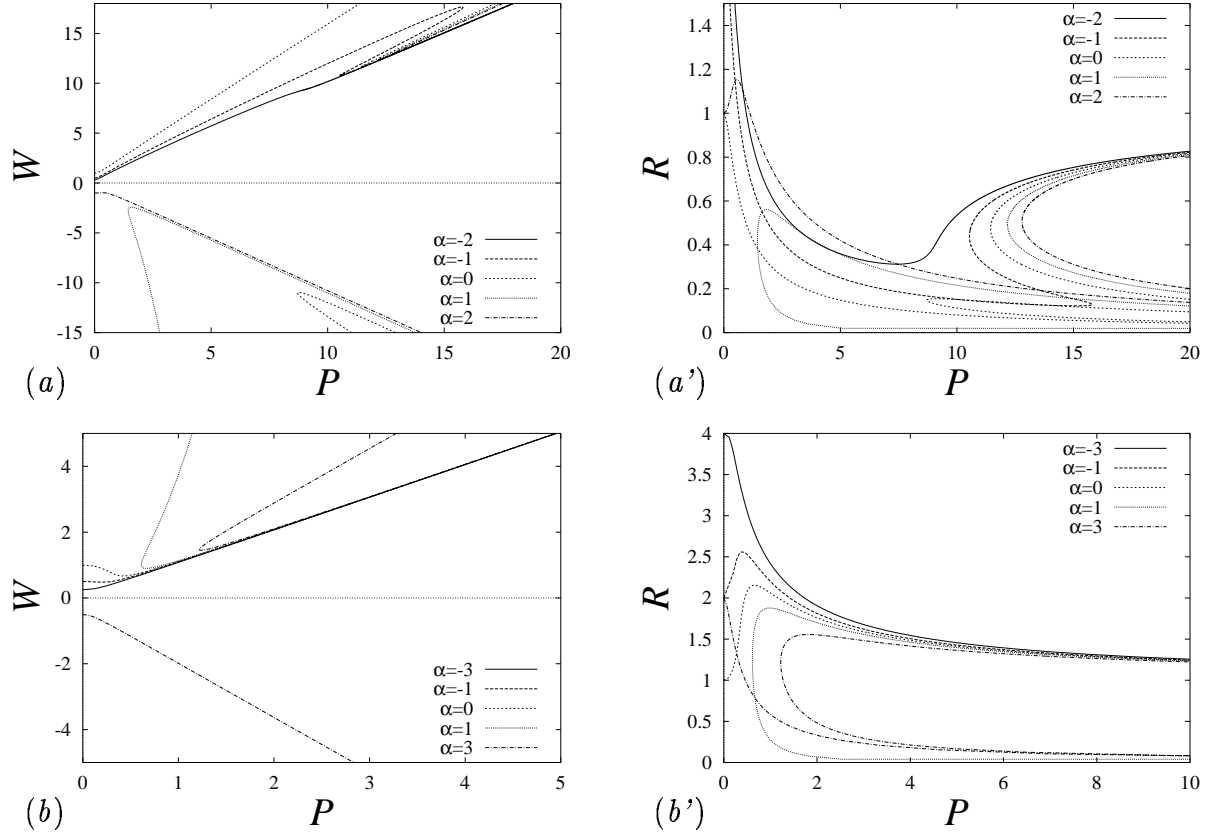


Рис. 6.3: Безразмерные угловая скорость (слева) и радиус ядра (справа) в зависимости от твиста в соответствии с уравнениями (6.52) при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ : (a)  $\beta = -3$ ; (b)  $\beta = 3$ . Значения  $\alpha$  приведены на самих рисунках.

## 6.5 Обсуждение.

Оказалось, что характер зависимости основных параметров скрученного свитка (радиус ядра и угловая скорость) от твиста определяется всего лишь двумя комбинациями кинематических параметров среды  $\alpha$  и  $\beta$  (см. (6.53)), что облегчает экспериментальную проверку полученных здесь результатов. Отметим следующие характерные черты этих зависимостей, которые можно заметить при изучении уравнений (6.52) и рисунка 6.3:

- Угловая скорость и радиус ядра при малых твистах зависят от твиста четным образом (квадратично) при любых параметрах.
- При некоторых значениях параметров возможно существование нескольких свитков с различными параметрами при одинаковом твисте. При этом они могут иметь различное направление вращения (знаки угловой скорости).
- При некоторых значениях параметров возможно существование свитка с “нормальным” направлением вращения (то есть излучающего, а не поглощающего автоволны) только при твистах **больших** некоторого положительного значения.
- При достаточно больших твистах угловая скорость монотонно (почти линейно) возрастает с ростом твиста. Монотонный рост угловой скорости с ростом твиста естественно приведет к тому, что период окажется близким к времени рефрактерности среды при некотором *критическом* значении твиста. Увеличение твиста выше критического значения невозможно. Естественно, что при твистах, близких к критическому данная кинематическая модель, не учитывающая рефрактерность, не применима. Отметим, что линейная зависимость угловой скорости от твиста была получена ранее в некотором аналогичном случае в [70], а наличие максимально возможных твистов, при которых период близок к времени рефрактерности, наблюдалось в численном эксперименте [81].
- При достаточно больших твистах радиус ядра стремится к некоторой константе, определяемой параметрами среды. Это стремление может происходить как сверху, так и снизу в зависимости от значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .
- При некоторых значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , возможно гистерезисное поведение как угловой скорости, так и радиуса ядра. Говоря здесь о гистерезисном поведении, мы имели в виду только его принципиальную возможность. Для того чтобы указать, будет ли оно реализовываться, необходимо исследовать устойчивость отдельных ветвей решений.

## Выводы

В работе изучаются автоволны в возбудимых средах, которые представляют большой интерес для биофизики. Развивается кинематический подход, позволяющий резко упростить описание волн возбуждения и изучение их поведения. Получены следующие основные результаты:

- Кинематические уравнения выведены при помощи асимптотической процедуры из уравнений типа “реакция-диффузия”, описывающих данную возбудимую среду. Эта процедура позволила получить как уравнение движения фронта, так и необходимые краевые условия. Краевые условия оказались более сложными, чем использовавшиеся ранее в классических работах. Разработанный подход применим как к задачам на плоскости, так и в пространстве.
- Теоретически предсказано и подтверждено в численном эксперименте “*неклассическое*” поведение спиральных волн с большим ядром в двумерной возбудимой среде. Это поведение отличается от классического, свойственного системам типа ФитцХью-Нагумо, асимптотическими порядками величин. Такая неклассическая асимптотика продемонстрирована в системе, более реалистично описывающей сердечную ткань, — с резким передним и плавным задним фронтами потенциала действия.
- Получено общее *аналитическое* решение стационарного кинематического уравнения в двумерной однородной среде. Используя это решение, найдены форма стационарной спиральной волны и ее параметры в бесконечной среде, а также в

конечной среде круглой формы.

- Изучен дрейф спиральной волны, вызванный слабой неоднородностью среды. Впервые *теоретически* показано быстрое (экспоненциальное) убывание чувствительности спиральной волны к слабым воздействиям с ростом расстояния от неоднородности до центра этой волны.
- Решена задача о трехмерной волне — прямом свитке с ненулевым постоянным вдоль него градиентом фазы (твистом). При этом показано, что в зависимости от параметров возможно разнообразное поведение таких волн, в том числе возможны свитки с разной угловой скоростью при одном и том же твисте.

# Литература

- [1] В.А. Давыдов, В.С. Зыков, А.С. Михайлов “Кинематика автоволновых структур в возбудимых средах”, *УФН* **161**(1991), с.45–85
- [2] A.S. Mikhailov, V.A. Davydov and V.S. Zykov “Complex dynamics of spiral waves and motion of curves”, *Physica D* **70**(1994), p.1–39.
- [3] J.J. Tyson, J.P. Keener “Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review)”, *Physica D* **32**(1988), p.327–361.
- [4] A.N. Zaikin, A.M. Zhabotinsky “Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillating system”, *Nature* **225**(1970), p.535–537.
- [5] F. Alcantara, M. Monk “Signal propagation during aggregation in the slime mould *Dictyostelium discoideum*”, *J. Gen. Microbiol.* **85**(1974), p.321–334.
- [6] B.F. Madore, W.L. Freedman “Self-organizing structures” *Am. Sci.*, **75**(1987), p.252–259.
- [7] N.A. Gorelova, J. Bures “Spiral waves of spreading depression in the isolated chicken retina”, *J. Neurobiol.* **14**(1983), p.353–363.
- [8] R.A. Gray, J. Jalife “Spiral waves and the heart”, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**(1996), p.415–435.
- [9] А.Ю. Лоскутов, А.С. Михалов *Введение в синергетику*, М.:Наука, 1990

- [10] Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе *Математическая теория горения и взрыва* М. Наука, 1980.
- [11] А.Г. Мержанов, Э.Н. Руманов “Нелинейные эффекты в макроскопической кинетике” *УФН* **151**(1987), с.553–593.
- [12] N. Wiener, A. Rosenblueth “The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle” *Arch. Inst. Cardiolgia de Mexico* **16**(1946) №3–4, p.205. *Русский перевод*: Н. Винер, А. Розенблют “Проведение импульсов в сердечной мышце. Математическая формулировка проблемы проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности, в сердечной мышце” *Кибернетический сборник*, вып.3, М.: ИЛ, 1961, стр.3–56.
- [13] A.T. Winfree, E.M. Winfree, H. Seifert “Organizing center in a cellular excitable medium”, *Physica D* **17**(1985), p.109–115.
- [14] Б.Н. Белинцев, М.В. Волькенштейн “Фазовые переходы в эволюционирующей популяции” *ДАН*, **235**(1977) №1, с.205–207.
- [15] Л.С. Полак, А.С. Михайлов *Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах*. М.: Наука, 1983.
- [16] N. Kopell, L.N. Howard “Plane wave solutions to reaction-diffusion equations”, *Stud. Appl. Math.* **52**(1973), №3, p.291–310.
- [17] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki “On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems”, *Prog. of teor. Phys.* **54**(1975), №3, p.687–699.
- [18] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve”, *J.Physiol.* **117**(1952) p.500–544.
- [19] D. Noble “A modification of the Hodgkin-Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pacemaker potentials”, *J.Physiol* **160**(1962) p.317–352.



- [20] В.И. Кринский, А.Б. Медвинский, А.В. Панфилов *Эволюция автоволновых вихрей*. М.: Знание, 1986.
- [21] В.И. Кринский, Ю.М. Кокоз “Анализ уравнений возбудимых мембран III. Мембрана волокна Пуркинье. Сведение уравнений Нобла к системе второго порядка. Анализ автоматии по графикам нуль-изоклин.”, *Биофизика* **18**(1973), №6, с.1067–1073.
- [22] R.A. FitzHugh “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophys. J.* **1**(1961), p.445–466.
- [23] V.N. Biktashev and A.V. Holden “Resonant drift of an autowave vortex in a bounded medium” *Phys. Lett. A* **181**(1993), p.216–224.
- [24] D. Barkley “A model for fast computer simulation of waves in excitable media” *Physica D* **49**(1991), p.61–70.
- [25] R.R. Aliev, A.V. Panfilov “A simple model of cardiac excitation” *Chaos, Solitons & Fractals* **7**(1996), №3, p.293–301.
- [26] В.И. Кринский, А.С. Михайлов *Автоволны*, М.: Знание, 1984.
- [27] О.А. Морнев, О.В. Асланиди, Л.М. Чайлахян “Солитонный режим в системе уравнений ФитцХью-Нагумо: динамика вращающейся спиральной волны.” *ДАН* **353**(1997), p.682–686.
- [28] P.C. Fife “Singular perturbation and wave front techniques in reaction-diffusion problems” *SIAM-AMS Proceedings* **10**(1976), p.23–50.
- [29] A.S. Mikhailov, V.I. Krinsky “Rotating spiral waves in excitable media: the analitical results” *Physica D* **9** (1983), p.346–371.
- [30] P.S. Hagan “Spiral waves in reaction-diffusion equations” *SIAM J.Appl. Math.* **42**(1982), p.762–781.

- [31] И.С. Балаховский “Некоторые режимы движения возбуждения в идеальной возбудимой ткани” *Биофизика* **10**(1965) №6, с.1063–1067.
- [32] А.М. Перцов, А.В. Панфилов “Спиральные волны в активных средах. Ревербераторы в модели ФитцХью-Нагумо”, в книге “Автоволновые процессы в системах с диффузией”, Горький, ИПФ 1981, с.77–84.
- [33] Е.А. Ермакова, А.М. Перцов, Э.Э. Шноль “Пары взаимодействующих вихрей в двумерных активных средах” *препринт ОНТИ НЦБИ*, Пущино, 1987.
- [34] Е.А. Ермакова, А.М. Перцов “Взаимодействие вращающихся спиральных волн с границей” *Биофизика*, **31** (1986), N5, с.855–861.
- [35] A.M. Pertsov and E.A. Ermakova “Mechanism of the drift of a spiral wave in an inhomogeneous medium” *Biofizika* **33**(1988), p.338–342.
- [36] В.А. Давыдов, В.С. Зыков, А.С. Михайлов, П.К. Бражник “Дрейф и резонанс спиральных волн в активных средах.”, *Изв. ВУЗов, сер. Радиофизика* **31**(1988), с.574–582.
- [37] Yu.E. Elkin, V.N. Biktashev “Drift of large-core spiral waves in inhomogeneous excitable media” *J. Biol. Phys.* **25**(1999), №2, p.129–147.
- [38] К.И. Агладзе, В.А. Давыдов, А.С. Михайлов “Наблюдение резонанса спиральных волн в возбудимой распределенной среде” *Письма в ЖЭТФ* **45**(1987), №12, с.601–603.
- [39] V.N. Biktashev and A.V. Holden “Resonant drift of autowave vortices in two dimensions and the effects of boundaries and inhomogeneities” *Chaos Solitons & Fractals* **5**(1995), p.575–622.
- [40] J.P. Keener “The dynamics of 3-dimensional scroll waves in excitable media” *Physica D* **31**(1988) p.269–276.

- [41] V.N. Biktashev, A.V. Holden, H. Zhang “Tension of organizing filaments of scroll waves” *Phyl. Trans. Roy. Soc. London A* **347**(1994), p.611–630
- [42] В.Н. Бикташев “Дрейф ревербератора в активной среде при взаимодействии с границами”, в сборнике “Нелинейные волны. Динамика и эволюция” под ред. А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1989. с.316–324.
- [43] L.M. Pismen, A.A. Nepomnyashchy “On interaction of spiral waves” *Physica D* **54**, 3 (1992), p.183–193.
- [44] I.V. Biktasheva, Yu.E. Elkin and V.N. Biktashev “Localized sensitivity of spiral waves in the complex Ginzburg-Landau equation”, *Phys. Rev. E* **57**(1998), p.2656–2659.
- [45] A.T. Winfree “Varieties of spiral wave behaviour — an experimentalist’s approach to the theory of excitable media” *Chaos* **1**(1991) p.303–334.
- [46] D. Barkley “Euclidean symmetry and the dynamics of rotating spiral waves” *Phys. Rev. Letters* **72**(1994), №1. p.164–167.
- [47] A.T. Winfree, S.H.Strogatz “Singular filaments organize chemical waves in three dimensions: I. Geometrically simple waves” *Physica D* **8**(1983), p.35–49.
- [48] A.T. Winfree, S.H.Strogatz “Singular filaments organize chemical waves in three dimensions: II. Twisted waves” *Physica D* **9**(1983), p.65–80.
- [49] A.T. Winfree, S.H.Strogatz “Singular filaments organize chemical waves in three dimensions: III. Knotted waves” *Physica D* **9**(1983), p.333–345.
- [50] A.T. Winfree, S.H.Strogatz “Singular filaments organize chemical waves in three dimensions: IV. Wave taxonomy” *Physica D* **13**(1984), p.221–233.
- [51] “Mathematical Approaches to Cardiac Arrhythmias”, a special issue of *Ann. N.Y.Acad.Sci.* **591**(1990), p.1–417.

- [52] V.N. Biktashev and A.V. Holden “Design principles of a low voltage cardiac defibrillator based on the effect of feedback resonant drift”, *J. Theor. Biol.* **169**(1994), p.101–112.
- [53] В.Н. Бикташев “Диффузия автоволн”, *препринт ОНТИ НЦБИ*, Пущино, 1989
- [54] V.N. Biktashev “Diffusion of autowaves. Evolution equation for slowly varying autowaves” *Physica D* **40**(1989), p.83–90.
- [55] A. Karma “Velocity selection in two-dimensional excitable media: from spiral waves to retracting fingers” in *Growth and Form*, edited by Amar M.B. *et al.*, Plenum Press, New York, 1991.
- [56] D.A. Kessler, R.Kupferman “Spirals in excitable media: the free-boundary limit with diffusion”, *Physica D* **97**(1996), p.509–516.
- [57] A. Karma “Universal limit of spiral wave propagation in excitable media”, *Phys. Rev. Lett.* **66**(1991), p.2274–2277.
- [58] V. Hakim, A. Karma “Theory of spiral wave dynamics in weakly excitable media: asymptotic reduction to a kinematic model and applications”, *Phys. Rev. E* **60**(1999), №5, p.5073–5105.
- [59] P.K. Brazhnik, V.A. Davydov “Non-spiral autowave structures in excitable media” *Phys. Lett. A* **199**(1995), p.40–44.
- [60] A.S. Mikhailov and V.S. Zykov “Kinematical theory of spiral waves in excitable media: Comparison with numerical simulations” *Physica D* **52**(1991), p.379–397
- [61] В.С. Зыков “Кинематика стационарной циркуляции в возбудимой среде.” *Биофизика* **25**(1980), вып 2, с.319–322.
- [62] В.С. Зыков “Аналитическая оценка зависимости скорости волны возбуждения в двумерной возбудимой среде от кривизны ее фронта.” *Биофизика*, **25**(1980), вып 2, с.888–892.

- [63] A.M. Pertsov, M. Welner, J. Jalife “Eikonal relation in highly dispersive excitable media” *Phys. Rev. Lett.* **78**(1997), №13, p.2656–2659.
- [64] M. Welner, A.M. Pertsov “Generalized eikonal equation in excitable media” *Phys. Rev. E* **55**(1997), №6, p.7656–7661.
- [65] I.R. Efimov, V.I. Krinsky and J. Jalife “Dynamics of rotating vortices in the Beeler-Reuter model of cardiac tissue”, *Chaos Solitons and Fractals* **5**(1995), p.513–526.
- [66] Y. Kuramoto “Instability and turbulence of wavefronts in reaction-diffusion systems” *Prog. Theor. Phys.* **63**(1980), №6, p.1885–1903.
- [67] В.А. Давыдов, В.С. Зыков “Спиральные автоволны в круглой возбудимой среде” *ЖЭТФ* **103**(1993), №3, с.844–856
- [68] П.К. Бражник, В.А. Давыдов, А.С. Михайлов. “Кинематический подход к описанию автоволновых явлений в активных средах” *ТМФ*, **74**(1988),с.440–445
- [69] В.А. Давыдов, В.С. Зыков “Спиральные волны в анизотропных возбудимых средах” *ЖЭТФ*, **95**(1989),с.139–147
- [70] П.К. Бражник, В.А. Давыдов, А.С. Михайлов “Скрученный вихрь в возбудимой среде.” *Изв. ВУЗов, сер. Радиофизика* **32**(1989), №3, с.289-293.
- [71] П.К. Бражник, В.А. Давыдов, В.С. Зыков, А.С. Михайлов “Вихревые кольца в распределенных возбудимых средах.” *ЖЭТФ* **93**(1987), вып 5(11), с.1725-1736.
- [72] В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям*. М. Физматлит, 1993.
- [73] L.N. Howard and N. Kopell “Slowly varying waves and shock structures in reaction-diffusion equations” *Stud. Appl. Math.* **56**(1977), p.95–146.
- [74] I. Aranson, D. Kessler and I. Mitkov “Drift of spiral waves in excitable media”, *Physica D* **85**(1995), p.142–155.

- [75] P. Pelce and J. Sun “Wave front interaction in steadily rotating spirals” *Physica D* **48**(1991), p.353–366.
- [76] D.A. Kessler, H. Levine and W.N. Reynolds “Theory of the spiral core in excitable media”, *Physica D* **70**(1994), p.115–139.
- [77] А.В. Михайлов, А.И. Яремчук “Вынужденное движение доменной стенки в поле спиновой волны”, *Письма в ЖЭТФ* **39**(1984), с.296–298.
- [78] V. Hakim, A. Karma “Spiral wave meander in excitable media: the large core limit”, *Phys. Rev. Lett.* **79**(1997), p.665–668.
- [79] E.C. Zeeman “Differential equations for the heartbeat and nerve impulse”, *Mathematical Institute, University of Warwick, Coventry*, 1972
- [80] А.В. Погорелов. *Дифференциальная геометрия*. М. Наука, 1974.
- [81] A.S. Mikhailov, A.V. Panfilov, A.N. Rudenko “Twisted scroll waves in active 3-dimensional media” *Phys. Lett.*, **A 109** (1985), №5, p.246–250.

## Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В.Н. Бикташеву за постоянное внимание к работе. Автор весьма признателен Э.Э. Шнолю и И.В. Бикташевой за очень содержательное обсуждение. Автор также благодарен фонду Robert Havemann foundation за финансовую поддержку.